Table des matières

Introduction

Ce mémoire consiste à étudier le comportement asymptotique de la solution de quelques problèmes hyperbolique dans un domaine borné. Plus précisément, on désigne par Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, à frontière assez régulière $\partial\Omega$. Nous étudions la décroissance de l'énergie de la solution de quelques équations d'ondes avec amortissement non linéaires de la forme générale :

$$(P) \quad \begin{cases} |u_t|^{l-2} u_{tt} - \triangle u + g(u_t) = f(u), & x \in \Omega, t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \\ u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

f et g sont des fonctions données, $\triangle = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i^2}$ désigne le laplacien par rapport aux variables d'espace.

Pour $g(v) = \delta |v|^{m-1} v$, $f(u) = \eta |u|^{p-1}$ avec $p > 1, m \geq 1, \delta > 0, \eta > 0, l = 2$, le terme $f(u)$ représente une source non linéaire de type polynomial. Il est connu que cette non linéarité empêche l'existence globale (en temps) de la solution du problème. En faite, elle provoque l'explosion en temps fini (voir Tsutsumi [29]) . C'est-à-dire que la solution (plus généralement l'énergie du problème) tend vers l'infini pour la norme de l'espace considéré quand le temps t s'approche d'une valeur finie T appelée temps d'explosion. Pour cette raison on appelle f terme d'explosion.

La fonction g est par contre un terme qui a tendance à stabiliter de la solution du pro-

blème c'est une dissipation linéaire si $m = 1$ et non linéaire pour $m > 1$. Il est facile de voir que pour dissipation linéaire et en absence de sources il existe une solution locale qu'on peut prolonger en une solution globale.
En présence de la source $f(u)$ (i.e $p > 1$) et toujours dans le cas de dissipation linéaire (i.e $m = 1$) plusieurs auteurs ont étudié ce problème par différentes méthodes, ils ont prouvé qu il y a des valeurs de p et des conditions initiales $u_0(x)$ et $u_1(x)$ pour lesquelles on a existence globale et d'autres valeurs pour lesquelles on a explosion en temps fini.
Des études plus poussées ont déterminé dans le cas d'existence globale des régions de stabilité et des régions d'instabilité.
De plus, en utilisant certaines équations différentielles et intégrales, il a été possible de trouver la vitesse de convergence (polynomiale ou exponentielle) de la solution vers la solution stationnaire(zéro).
Pour le cas général $m > 1, p > 1$ il a fallu attendre l'apparition de l'article de V. Georgiev et Todorova[6] en 1994 pour avoir des réponses convainquantes.
Dans ce travail les auteurs ont confirmé l'intuition selon laquelle on s'attendue le terme qui a le plus grand éxposant l'emporte. En effet, ils ont montré que si $p > m$ on a explosion en temps fini et si $m \geq p$ on a existence globale.
Pour le premier cas (c'est a dire l'explosion en temps fini) une nouvelles méthode a été mise au point pour le traitement de la dissipation non linéaire $g(u_t)$. Cette méthode a été développée par la suite par Levine, Pucci et Serrin[11]. Il s'est avéré aussi que la méthode en question est applicable et reste éfficace pour d'autres types des problèmes et d'autres types de non linéairités (voir [18],[19]).
Pour le deuxieme cas (c'est a dire l'existence globale) les auteurs ont combiné le théorème du point fixe de Banach avec des résultsts dans [13] pour palier a l'insuffisance de régularité des non linéarités dans $f(u)$ et $g(u_t)$. Plus précisement, leur argument est basé sur un choix adequat d'un espace où la solution existe localement. Aujourd'hui ce travail est considéré comme un article de base pour des travaux futurs. En plus des travaux de Ikehata [4],[5], où l'auteur utilise la méthode du puits du potentiel pour démontrer des

résultats d'explosion en temps fini pour des conditions initiales bien choisies telles que l'énergie initiale peut être positive, alors que l'énergie initiale dans le cas de Georgiev et Todorova [6] est négartive.

Pour le problème (P) une énergie (classique) négative signifie que les conditions initiales $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont suffisament grandes.

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, le problème devient plus compliqué, en effet l'inégalité de Poincaré n'est plus valable et donc la méthode du puits potentiel, par exemple ne s'applique pas.

Notre mémoire est organisé comme suit.

Le **premier chapitre** consiste à choisir le cadre fonctionnel . Nous introduisons les espaces fonctionnelles nécessaires à l'étude de notre problème. Nous donnons aussi quelques résultats concernant les injections entre ces espaces et leur propriétes avec les inégalités élémentaires qui seront trés utiles par la suite.

Le **deuxième chapitre** consiste à donner un aperçu sur quelques travaux concernant au sujet de notre problème tels que l'existence locale, globale de la solution, ainsi que la décroissance de l'énergie.

Dans le **troisième chapitre** nous étudions quelques exemples concernant la décroissance uniforme des solutions, pour cela on utilise différentes techniques telles que la perturbation de l'énergie, le puits du potentiel, avec les modifications imposées par la nature du problème.

Finalement dans le **quatrième chapitre** on améliore les résultat de Benaissa et al. [2], on utilise les mêmes techniques que celles du troisième chapitre.

Chapitre 1

RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

1.1 Introduction

L'étude des équations aux dérivées partielles nécessite l'utilisation d'espaces de Lebsgues et de Sobolev. Ce sont donc ces espaces et leurs propriétés que l'on va rappeler, dans ce premier chapitre, ainsi que d'autres résultats d'analyse fonctionnelle qui seront d'une trés grande utilité dans notre travail.

1.2 Espaces de Lebesgue

Espace de Lebesgue $\mathbb{L}^p(\Omega)$

On donne ici quelques définitions et propriétés élémentaires

Définition 1.1

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et Ω un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ au sens de Lebesgue, on definit

$$\mathbb{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \ [0, T[\ \rightarrow \mathbb{X} \, ; \text{ telle que } f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

Muni de la norme suivante :

$$\|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Si $p = \infty$

$$\mathbb{L}^\infty(\Omega) = \{ f : \ \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \ f \text{ mesurable et il existe une constante } C \text{ telleque } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}$$

Muni de cette norme

$$\|f\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |f(x)| \leq C \ p.p \text{ sur } \Omega\}$$

Notation. soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' **l'exposant conjugué** de p *i.e.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Théorème 1.2 Inégalité de Hölder

Soient $f \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ et $g \in \mathbb{L}^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, alors $f.g \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ et

$$\int |f.g| \leq \|f\|_{\mathbb{L}^p} \ \|g\|_{\mathbb{L}^{p'}} .$$

En particulier, si $f \in \mathbb{L}^p(\Omega) \cap \mathbb{L}^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $f \in \mathbb{L}^s\,(\nleq)$ pour tout $p \leq s \leq q$, et l'ona

l'inégalité d'interpolation

$$\|f\|_{\mathbb{L}^s} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^p}^{\alpha} \ \|f\|_{\mathbb{L}^q}^{1-\alpha}, \quad \text{où}: \frac{1}{s} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

On utilise aussi l'ijection : $L^r(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour $q < r$. il résulte

$$\|u\|_q \leq C_* \|u\|_r .$$

1.3 Espaces de Sobolev

Définition

Soit m un entier naturel. On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on note $\mathbb{H}^m(\Omega)$ l'ensemble :

$$\mathbb{H}^m(\Omega) = \left\{u \text{ mesurable, tel que } D^\alpha u \in \mathbb{L}^2(\Omega), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| \leq m\right\}.$$

où

$$D^{\alpha}u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}} \ , \quad \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| = \alpha_1 + ...\alpha_n$$

On munit l'espace $\mathbb{H}^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(u,v)_{\mathbb{H}^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}v)_{\mathbb{L}^2} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha}u(x)D^{\alpha}v(x)dx,$$

La norme associée est donnée par : $\|u\|_{\mathbb{H}^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} |D^{\alpha}u|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}u\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Pour $m = 0$, on a $\mathbb{H}^0(\Omega) = \mathbb{L}^2(\Omega)$, et pour tout $m_1 > m_2$, on a $\mathbb{H}^{m_1}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{m_2}(\Omega)$ avec injection continue.

On introduit ensuite:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_0^1(\Omega) &= \text{ adhérence de } D(\Omega) \text{ dans } \mathbb{H}^1(\Omega) \\ &= \text{ sous-espace de } \mathbb{H}^1(\Omega) \text{ des fonctions ``nulles'' sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où

$D(\Omega)$: l'éspace des fonctions indéfiniment défférentiable à support compact dans Ω.

1.4 Résultats généraux

Théorème 1.3 Inégalité de Sobolev-Poincaré ([5], lemme 2.1)

On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$,de frontière assez régulière

Si

$$\begin{aligned} &2 \leq q \leq \tfrac{2n}{n-2}, \qquad && n \geq 3 \\ &q \geq 2\ , && n = 1, 2 \end{aligned} \tag{1}$$

alors, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ce qui donne

$$\|u\|_{\mathbb{L}^q} \leq C(\Omega, q) \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}\ , \quad \forall u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)\,. \tag{2}$$

Ce résultat se généralise aux espaces de fonctions de $\mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n)$, pour $\left(m < \frac{n}{2}\right)$ on a

$$\mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} \geq \frac{1}{p} \geq \frac{1}{2} - \frac{m}{n},$$

avec injection continue.

1.5 Formule de Green

Rappelons qu'un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ est dit de classe C^k si Γ est une variété de dimension $n-1$ et de classe C^k.

Théorème 1.5

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$ (par exemple Ω de classe $\mathbb{C}^1$avec Γ borné), alors pour tout $u, v \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, on a la formule de Green ;

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma u v n_i d\Gamma$$

où n_i est la $i^{ème}$ cosinus directeur de la normale n sortante.

Preuve.

On poura consulter le livre de Raviart et Thomas, théorème 1.4.2, page 27.

Cette formule est une "Intégration par parties généralisée " dont l'importance est extrême par la suite,

Comme conséquence de ce théorème, on a :

Corollaire.

Si $u \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ et $v \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, alors ;

$$-\int_{\Omega} (\triangle u)\, v dx = \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma \ , \tag{3}$$

où

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial\, x_i^2} = \text{laplacien de } u$$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial xn} \right) = \text{grad } u$$

$\frac{\partial u}{\partial n}$ est la dérivée normale de u a $\Gamma = \partial \Omega$ dirigée vers l'extérieur.

1.6 Inégalité de young

Soit $1 < p < \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugué de p ,

alors

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}, \quad \forall a \geq 0, \forall b \geq 0.$$

Qu'on l'utilise aussi parfois sous la forme

$$ab \leq \delta a^p + c(\delta)\, b^{p'}, \quad \text{avec } c(\delta) = \delta^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{4}$$

Chapitre 2

APERCU DE LITTERATURE

2.1 Introduction

Le sujet de la stabilité aux équations d'ondes a été abordé par de nombreux auteurs du point de vue mathématique. De nombreux travaux sur ce sujet existent dans la littérature et un progrès important a été réalisé dans ce domaine. Dans ce chapitre on va exposer quelques résultats d'auteurs qui ont traité ce sujet aux différentes directions par exemple ; L'existence et l'unicité de la solution, comportement de la solution (décroissance, l'explosion de la solution).

En particulier on s'intéresse aux résultats de la décroissance (exponentielles, polynômiales) de l'énergie de la solution de certains problèmes (voir par exemple ([16],[20])).

Résultats généraux

Messaoudi [16] a étudié le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + g\left(u_t\right) + f\left(u\right) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u\left(x,t\right) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), \quad u_t\left(x,0\right) = u_1\left(x\right), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

où $f\left(u\right) = bu\left|u\right|^{p-2}$, $g\left(u_t\right) = a\left(1 + \left|u_t\right|^{m-2}\right) u_t$, a, $b > 0, m$, $p > 2$, Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, de frontière régulière $\partial\Omega$. Il a montré la stabilité exponentielle de l'énergie, pour n'importe quelles les données initiales.

Le cas où $g\left(u_t\right) = \left|u_t\right|^{m-2} u_t$, Nakao [21] a prouvé que le problème (5) admet une solution faible globale unique si $0 \leq p - 2 \leq 2/\left(n-2\right)$, $n \geq 3$, et forte si $p - 2 > 2/\left(n-2\right)$, $n \geq 3$, (si $n = 1$ ou $n = 2$, alors la seule condition est $p \geq 2$).

Dans les deux cas l'énergie de la solution décroit algébriquement si $m > 2$ et exponentiellement si $m = 2$. Cela améliore un premier résultat obtenu par Nakao[20], où il a étudié le problème (5) dans un cas abstrait

$$u_{tt} - \Delta u + \rho(u_t) + f(u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

où $\rho(v)$ se comporte comme $|v|^{\beta} v$, $\beta > -1$, et $f(u)$ se comporte comme $bu|u|^{\alpha}$, $\alpha, b > 0$. Nakao a établi la décroissance de l'énergie de la solution seulement pour $m - 2 \leq \frac{2}{n-2}$ pour $n \geq 3$.
Dans un travail Nakao et Ono [22],ont prolongé ce résultat au problème de Cauchy

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - \Delta u + \lambda^2(x) u + \rho(u_t) + f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\
&u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

où $\rho(u_t)$ se comporte comme $|u_t|^{\beta} u_t$, et $f(u)$ se comporte comme $-bu|u|^{\alpha}$. Dans ce cas les auteurs ont éxigé que les données initiales soient suffisament petites pour la norme de $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{L}^2$ avec un support compact.

Ono [23] a aussi étudié l'existence globale et les propriétés de la décroissance de la solution du problème de Cauchy relié a (5), pour $f \equiv 0$ et a donné une estimation exacte de la décroissance de la solution sans aucune réstrictions sur la taille des données initiales.

Au sujet de non-existence dans (5), il est bien connu si $a = 0$ alors le terme de source $f(u) = bu|u|^{p-2}$cause l'explosion de la solution dans un temps fini avec énergie initiale négative (voir[7],[8]).

L'interaction entre l'amortissement et le terme de source a été considérée pour la première fois par Levine [9] dans le cas où l'amortissement est linéaire ($m = 2$), Levine a prouvé que la solution à énergie initiale négative, explose dans un temps fini .

Georgiev et Todorova [6] ont prolongé le résultat de Levine au cas où l'amortissement est non linéaire $\left(g(u_t) = |u_t|^{m-2} u_t\right)$. Dans leur travail les auteurs ont présenté une nouvelle méthode en déterminant les relations appropriées entre m et p, pour lesquels il y a une existence globale ou alternativement une explosion en temps fini .

Précisément ils ont montré que la solution continue existe globalement (en temps), si $m \geq p$, et explose en temps fini si $m < p$, et l'énergie initiale suffisament négative, ce résultat est généralisé par la suite au cas abstrait dans un domaine non borné, par Levine et Serrin [10], Levine et Pucci et Serrin [11], Levine et Park [12]. Dans ces papiers, Les auteurs ont prouvé qu'aucune solution à énergie initiale négative peut être prolongé dans$[0, \infty[$, si la non linéarité domine l'amortissement ($p > m$). Cette généralisation a permis aux auteurs de prouver un résultat de non existence aux équations quasilinéaire de la forme

$$|u_t|^{\rho-1} u_{tt} - div\left(|\nabla u|^q \nabla u\right) + au_t |u_t|^{m-2} = bu |u|^{p-2}.$$

En combinants les arguments de [6] et [10], Vitillaro [28] a prolongé ces résultats aux situations où l'amortissement est non linéaire et l'énergie initiale est positive.

Il est intéressant de mentionner le résultat d'explosion de [6] à été amélioré par Messaoudi [17], où la condition suffisamment négative a été remplacée par seulement négative.

Décroissance exponentielle des solutions d'une équation d'ondes a amortissement

nonlinéaire.

Benaïssa et al. [2] ont considéré le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + g(u_t) + f(u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{6}$$

où $f(u) = -bu|u|^{p-2}$, $g(u_t) = a\left(1 + |u_t|^{m-2}\right) u_t$, a, $b > 0$, m, $p > 2$,

Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, de frontière régulière $\partial\Omega$.

Dans cet article, Benaïssa et al ont prouvé que pour des données initiales convenablement choisies le problème (6) admet une solution faible globale, à énergie éxponentiellement décroissante si $m > 2$.

La démonstration de l'éxistence globale était basée sur l'utilisation de la théorie du puits potentiel qui a été présentée par Sattinger [25], Payne et Sattinger [24], voir aussi Todorova [26], [27] pour des travaux plus récents.
On établit un résultat d'éxistence , qui est connu comme un résultat standard (voir[2])
Proposition supposons que $m \geq 2$, $p \geq 2$ tel que

$$p \leq 2\frac{n-1}{n-2}, \qquad n \geq 3$$

et soient $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ des fonctions données. Alors le problème (1) à une solution unique

$$\begin{aligned}
&u \in C([0,T); H_0^1(\Omega)) \\
&u_t \in C([0,T); L^2(\Omega)) \cap L^m(\Omega \times [0,T))
\end{aligned}$$

pour $T < \infty$

Pour la démonstration de ces résultats, Benaïssa et al. ont proccédé comme suit:
Posons

$$\begin{aligned}
I(t) &= I(u(t)) = \|\nabla u(t)\|_2^2 - b\,\|u(t)\|_p^p \\
J(t) &= J(u(t)) = \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{b}{p}\|u(t)\|_p^p \\
E(t) &= E(u(t), u_t(t)) = J(t) + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 \\
H &= \left\{w \in H_0^1(\Omega) \quad / \quad I(w) > 0\right\} \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

Multiplions l'équation dans (1) par u_t,intégrant sur Ω, utilsant l'intégration par partie on trouve

$$E'(t) = -a\left(\|u_t(t)\|_m^m + \|u_t(t)\|_2^2\ \right) \leq 0,$$

pour t dans $[0, T]$.

ce qui montre que l'énergie décroit.

Lemme 1. Supposons que

$$2 < p \leq 2\frac{n-1}{n-2}, \quad n \geq 3, \tag{7}$$

si $u_0 \in H$ et $u_1 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, tels que

$$\beta = bC_*^p\left(\frac{2p}{p-2}E(u_0, u_1)\right)^{(p-2)/2} < 1, \tag{8}$$

alors, $u(t) \in H$ pour chaque t dans $[0, T]$.

Lemme 2. Supposons que

$$2 < m \leq 2\frac{n-1}{n-2}, \quad n \geq 3 \tag{9}$$

alors la solution vérifie

$$\|u(t)\|_m^m \leq CE(t),$$

pour quelques constantes C indépendamment de t.

Pour la démonstration des lemmes 1 et 2 voir [2].

D'après les lemmes (1) et (2) Benaïssa et al. ont établi deux théorèmes essentieles concernant l'existence globale de la solution, et la décroissance de l'énergie

Théorème 1.

Supposons que (7) est satisfaite. Si $u_0 \in H$ et $u_1 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ vérifiant (8)

alors la solution est globale.

Théorème 2.

Supposons (7) , (8) et (9) sont vérifiées, alors il existe deux constantes positives K et k telles que l'énergie de la solution du problème (1) vérifie l'estimation suivante :

$$E(t) \leq Ke^{-\kappa t}, \quad \forall t \geq 0.$$

La démonstration des théorèmes (1) et (2) est détaillée dans [2].

Existence globale et décroissance de la solution d'une équation d'ondes quasilinéaire.

Berrimi et Messaoudi [1] ont considéré le problème suivant :

$$\begin{cases} |u_t|^{\rho-2} u_{tt} - \Delta u + a |u_t|^{m-2} u_t = b |u|^{p-2} u, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{10}$$

où $a, b > 0$, $p > 2$, $m \geq \rho \geq 2$, Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, de frontière régulière $\partial\Omega$. Ils ont prouvé que l'énergie de la solution décroit e xponentiellement si $\rho = m$, et polynomiallement si $\rho < m$. La démonstration est basée essentiellement sur le lemme de Nakao suivant :

Lemme 3. (lemme de Nakao [20]) Soit φ une fonction décroissante et positive définie sur $[0,T]$, $T > 1$, telle que

$$\varphi^{1+r}(t) \leq k_0 (\varphi(t) - \varphi(t+1)), \quad t \in [0,T].$$

pour $k_0 > 1$ et $r \geq 0$. On a pour chaque $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} &\varphi(t) \leq \varphi(0) e^{-k[t-1]^+}, \quad r = 0, \\ &\varphi(t) \leq \left\{\varphi(0)^{-r} + k_0 r [t-1]^+\right\}^{\frac{-1}{r}}, \quad r > 0, \end{aligned}$$

tels que $[t-1]^+ = \max\{t-1, \ 0\}$, $k = \ln\left(\frac{k_0}{k_0-1}\right)$.

Dans cet article, Berrimi et Messaoudi ont montré l'existence globale de la solution, ils ont établi le théorème de la décroissance suivant:

Théorème 3.

Supposons que $2 < p \leq \frac{2(n-1)}{n-2}$, $n \geq 3$, $m \geq \rho$ et

$$bc_*^p \left(\frac{2p}{p-2} E(u_0, u_1)\right)^{(p-2)/2} < 1,$$

tel que

$$2 \leq \rho \leq m \leq \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3,$$

alors, pour $t \geq 0$, E vérifie les estimations suivantes

$$\begin{aligned} &E(t) \leq E(0)\, e^{-k[t-1]^+}, \quad m = \rho \geq 2, \\ &E(t) \leq \left\{ E(0)^{1-\frac{m}{\rho}} + k_0 \left(\tfrac{m}{\rho} - 1 \right) [t-1]^+ \right\}^{\frac{\rho}{\rho - m}}, \quad m > \rho \geq 2, \end{aligned}$$

où

$$k = \ln \left(\tfrac{k_1}{k_1 - 1} \right), \quad k_1 = \tfrac{C_2}{a} \left[1 + \left(\tfrac{E(0)}{a} \right)^{\frac{m-2}{m}} \right],$$

$$[t-1]^+ = \max \{t-1, 0\}, \quad k_0 = \tfrac{C^{\frac{m}{\rho}}}{a},$$

$$C = C_2 \left[1 + \left(\tfrac{E(0)}{a} \right)^{\frac{2m-2-\rho}{m}} + \left(\tfrac{E(0)}{a} \right)^{\frac{\rho-2}{m}} + \left(\tfrac{E(0)}{a} \right)^{\frac{m-\rho}{m}} \right].$$

Pour la démonstration voir [1].

Chapitre 3

DÉCROISSANCE DE LA SOLUTION DE QUELQUES ÉQUATIONS D´ONDES

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de quelques problèmes concernant la décroissance de la solution d'équations d'ondes avec amortissement non linéaire, on utilise diférentes techniques telles que la perturbation de l'énergie, le puits du potentiel, avec des modifications imposés par la nature du problème. l'existence et l'unicité de la solution de ces problèmes a été démontrée dans le cas général voir par exemple ([6], [12] et [21]).

3.2 Position du problème 1

Le premier exemple que nous allons considéré est le suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a\left(1 + |u_t|^{m-2}\right) u_t = bu\,|u|^{p-2} - cu\,|u|^{q-2}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial(\Omega), \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \end{cases} \tag{11}$$

Où $a, b, c > 0$, $m \geq 2$, $\quad p > q \geq 2$

3.3 Résultats principaux

Pour simplifier les calculs posons :

$$\begin{aligned} I(t) &= I(u(t)) = \|\nabla u(t)\|_2^2 - b\,\|u(t)\|_p^p \qquad (12) \\ J(t) &= J(u(t)) = \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{b}{p}\|u(t)\|_p^p \\ E(t) &= E(u(t), u_t(t)) = J(t) + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{c}{q}\|u(t)\|_q^q \end{aligned}$$

$$H(t) \;=\; \left\{ w \in H_0^1(\Omega) \;/\; I(w) > 0 \right\} \cup \{0\}.$$

Lemme 4

L'énergie de la solution du problème (11) vérifie

$$\frac{d}{dt}E(t) = -a\left(\|u_t\|_2^2 + \|u(t)\|_m^m\right) \leq 0, \qquad \forall t \in [0, T). \tag{13}$$

Preuve .

Multiplions l'équation dans (11) par u_t, et intègrons par rapport à x, on trouve

$$\int_\Omega u_t u_{tt} dx - \int_\Omega u_t \Delta u dx + a\int_\Omega \left(1 + |u_t|^{m-2}\right) u_t^2 dx = \int_\Omega b u u_t |u|^{p-2} dx - \int_\Omega c u u_t |u|^{q-2} dx \tag{14}$$

il vient alors

$$\begin{array}{l} \int_\Omega u_t u_{tt} dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}|u_t|^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t|^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|_2^2 \\ \int_\Omega u_t \Delta u dx = -\int_\Omega \nabla u_t \nabla u dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}|\nabla u|^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|_2^2 \\ b\int_\Omega u_t u |u|^{p-2} dx = \frac{b}{p}\int_\Omega \frac{d}{dt}|u|^p dx = \frac{b}{p}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_p^p \\ c\int_\Omega u_t u |u|^{q-2} dx = \frac{c}{q}\int_\Omega \frac{d}{dt}|u|^q dx = \frac{c}{q}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_q^q \end{array} \tag{15}$$

d'après (14) et (15) il résulte

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= \int_\Omega u_t u_{tt} dx + \int_\Omega u_t \Delta u dx - b\int_\Omega u_t u |u|^{p-2} dx + c\int_\Omega u_t u |u|^{q-2} dx \\ &= -a\int_\Omega \left(|u_t|^2 + |u_t|^m\right) dx \end{aligned}$$

$$= \quad -a\left(\|u_t\|_2^2 + \|u_t(t)\|_m^m\right) \leq 0.$$

Alors

$$\frac{d}{dt}E(t) = -a\left(\|u_t\|_2^2 + \|u(t)\|_m^m\right) \leq 0, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Lemme 5.

Supposons que :

$$2 < p,\ q \leq 2\frac{n-1}{n-2}, \qquad n \geq 3, \tag{16}$$

si $u_0 \in H$ et $u_1 \in L^2(\Omega)$ tels que :

$$\beta = bC_*^p\left(\frac{2p}{p-2}E(u_0,u_1)\right)^{(p-2)/2} \leq \frac{1}{2}, \tag{17}$$

alors $u(t) \in H$ pour $t \in [0,T)$.

preuve.

Puisque $I(u_0) > 0$, il existe (par continuité) $T_m \leq T$, telle que $I(u(t)) \geq 0$ pour $t \in [0,T_m)$, $m > 0$,

d'autre part

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{b}{p}\|u(t)\|_p^p \qquad (18) \\ &= \frac{p-2}{2p}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{p}I(t), \end{aligned}$$

alors

$$J(t) \geq \frac{p-2}{2p} \|\nabla u(t)\|_2^2, \quad \forall t \in [0, T_m]$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \|\nabla u(t)\|_2^2 &\leq \frac{2p}{p-2} J(t) \leq \frac{2p}{p-2} E(t) \\ &\leq \frac{2p}{p-2} E(u_0, u_1), \quad \forall t \in [0, T_m]. \end{aligned} \tag{19}$$

d'après la dernière formule, il résulte $E(u_0, u_1) \geq 0$.
En effet de $(2), (18)$ et (19)

$$\begin{aligned} b \|u(t)\|_p^p &\leq bC_*^p \|\nabla u(t)\|_2^p = bC_*^p \|\nabla u(t)\|_2^{p-2} \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\leq bC_*^p \left(\frac{2p}{p-2} E(u_0, u_1) \right)^{(p-2)/2} \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &= \beta \|\nabla u(t)\|_2^2 < \|\nabla u(t)\|_2^2, \quad \forall t \in [0, T_m]. \end{aligned}$$

alors

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 - b \|u(t)\|_p^p > 0, \quad \forall t \in [0, T_m]$$

ca exprime que: $I(u(t)) > 0$, donc $u(t) \in H$, $\forall t \in [0, T_m]$.
En utilisant le fait que

$$\lim_{t\to T_m} bC^p\left(\frac{2p}{p-2}E\left(u\left(t\right),u_t\left(t\right)\right)\right)^{(p-2)/2}\leq\beta<1,$$

on peut tendre t j'usqu a T. On déduit que $u\left(t\right)\in H$, $\forall t\in\left[0,T\right].$

Théorème 4.

Supposons $\left(16\right)$, si $u_0\in H$ et $u_1\in L^2\left(\Omega\right)$ vérifient $\left(17\right)$,
alors la solution du (11) est globale.

preuve.

Il suffit de démontrer que la quantité $\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2+\left\|u_t\left(t\right)\right\|_2^2$ est bornée par une constante indépendante de t, pour cela on utilise (13) et $\left(18\right)$, il résulte :

$$\begin{aligned}E\left(u_0,u_1\right) &\geq E\left(t\right)=\frac{1}{2}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2-\frac{b}{p}\left\|u\left(t\right)\right\|_p^p+\frac{c}{q}\left\|u\left(t\right)\right\|_q^q\\ &= \frac{p-2}{2p}\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2+\frac{1}{p}I\left(u\left(t\right)\right)+\frac{1}{2}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_2^2+\frac{c}{q}\left\|u\left(t\right)\right\|_q^q \qquad (20)\\ &\geq \frac{p-2}{2p}\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_2^2, \qquad \text{(lorsque } I\left(u\left(t\right)\right)>0\text{)}\end{aligned}$$

donc

$$\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2+\left\|u_t\left(t\right)\right\|_2^2\leq CE\left(u_0,u_1\right), \qquad \text{pour } C=\max\left\{2,\frac{2p}{p-2}\right\}. \qquad (21)$$

Lemme 6.

Supposons que

$$2 < m \leq \frac{2n}{n-2}, \qquad n \geq 3, \tag{22}$$

alors la solution vérifie

$$\|u(t)\|_m^m \leq \zeta E(t) \tag{23}$$

ζ constante indépendente de t.

Preuve.

En effet de (2) et (19)

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_m^m &\leq C_*^m \|\nabla u(t)\|_2^m \leq C_*^m \|\nabla u(t)\|_2^{m-2} \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\leq C_*^m \left(\frac{2p}{p-2} E(u_0, u_1)\right)^{(m-2)/2} \frac{2p}{p-2} E(t) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_m^m &\leq \zeta E(t) \\ \text{avec } \zeta &= \frac{2p}{p-2} C_*^m \left(\frac{2p}{p-2} E(u_0, u_1)\right)^{(m-2)/2}. \end{aligned}$$

Théorème 6.

Supposons que (16), (17) et (22) sont vrais. Alors il existe deux constantes positives K et k, telle que la solution globale de (11) vérifie:

$$E(t) \leq Ke^{-kt}, \quad \forall t \geq 0. \tag{24}$$

Preuve.

Pour la démonstration, on construit une fonction F, telle que F équivalent à E, c'est-à-dire

$$\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0 \;;\; \alpha_1 F(t) \leq E(t) \leq \alpha_2 F(t).$$

Puis on montre que F est décroissante exponentiellement, i.e

$$F(t) \leq \lambda_1 e^{-t\lambda_2}; \qquad \text{où } \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ sont des constantes indépendant de } t,$$

et par conséquent de l'étapes président E sera aussi décroissant exponentiellement.

Nous considérons la fonction F définie par:

$$F(t) = E(t) + \varepsilon \int_\Omega \left(u(t) u_t(t) + \frac{a}{2} u(t)^2 \right) dx, \quad \text{pour } \varepsilon > 0 \tag{25}$$

On a

$$\begin{aligned} |F(t) - E(t)| &= \varepsilon \left| \int_\Omega u(t) u_t(t) + \frac{a}{2} u(t)^2 \, dx \right| \\ &\leq \varepsilon \left[\int_\Omega |u(t) u_t(t)| \, dx + \frac{a}{2} \int_\Omega |u(t)|^2 \, dx \right] \end{aligned}$$

En utilisant maintenant la formule de Green on trouve

$$|F(t) - E(t)| \leq \varepsilon \left[\delta \|u(t)\|_2^2 + c(\delta) \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{a}{2} \|u(t)\|_2^2\right]$$

utilisation (2) et (19) on a

$$\begin{aligned} |F(t) - E(t)| &\leq \varepsilon \left[\left(\delta + \frac{a}{2}\right) \|u(t)\|_2^2 + 2c(\delta) E(t)\right] \\ &= \varepsilon \left[\left(\delta + \frac{a}{2}\right) C + 2c(\delta)\right] E(t) \\ &= \varepsilon\theta E(t) \ ; \qquad \theta = \left(\delta + \frac{a}{2}\right) C + 2c(\delta) \geq 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(t) - F(t) &\geq -\varepsilon\theta E(t) \\ &\Rightarrow (1+\varepsilon\theta) E(t) \geq F(t) \\ &\Rightarrow E(t) \geq \frac{1}{(1+\varepsilon\theta)} F(t) \end{aligned} \qquad (*)$$

d'autre part

$$E(t) - F(t) \leq \varepsilon\theta E(t)$$

alors

$$(1-\varepsilon\theta) E(t) \leq F(t),$$

on choisit ε assez petit de façon que $(1-\varepsilon\theta) > 0$, et on aura

$$E(t) \leq \frac{1}{(1-\varepsilon\theta)} F(t). \tag{**}$$

On conséquent de $(*)$, $(**)$ que

$$\exists \alpha_{1,}\ \alpha_2 > 0; \quad \alpha_1 F(t) \leq E(t) \leq \alpha_2 F(t), \tag{26}$$

avec $\alpha_1 = \frac{1}{(1+\varepsilon\theta)}$, $\alpha_2 = \frac{1}{(1-\varepsilon\theta)}$.

La dérivation de F:

On a

$$\frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} E(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} \int_\Omega \left(u(t) u_t(t) + \frac{a}{2} u^2(t) \right) dx.$$

En utilisant la formule (13) il résulte que:

$$\begin{aligned} F'(t) &= -a \int_\Omega |u_t(t)|^2 dx - a \int_\Omega |u_t(t)|^m dx + \int_\Omega \left(|u_t(t)|^2 + u(t) u_{tt}(t) \right) dx \\ &\quad + \varepsilon a \int_\Omega u_t(t) u(t) dx \\ &= -a \int_\Omega |u_t(t)|^2 dx - a \int_\Omega |u_t(t)|^m dx + \varepsilon \int_\Omega |u_t(t)|^2 dx \\ &\quad + \varepsilon \left[\int_\Omega (u(t) u_{tt}(t) + a u_t(t) u(t)) dx \right]. \end{aligned}$$

Pour estimer le dernièr terme $\int_\Omega (u(t) u_{tt}(t) + au(t) u_t(t)) dx$, nous multiplions l'équation dans (11) par $u(t)$, intégrons par rapport à x, il résulte:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left(u\left(t\right)u_{tt}\left(t\right)+au\left(t\right)u_t\left(t\right)\right)dx &= \int_\Omega u\left(t\right)\Delta u\left(t\right)dx - a\int_\Omega u\left(t\right)u_t\left(t\right)\left|u_t\left(t\right)\right|^{m-2}dx \\
&\quad +b\int_\Omega \left|u\left(t\right)\right|^p dx - c\int_\Omega \left|u\left(t\right)\right|^q dx \\
&= -\int_\Omega \left|\nabla u\left(t\right)\right|^2 dx - a\int_\Omega u\left(t\right)u_t\left(t\right)\left|u_t\left(t\right)\right|^{m-2}dx \\
&\quad +b\int_\Omega \left|u\left(t\right)\right|^p dx - c\int_\Omega \left|u\left(t\right)\right|^q dx
\end{aligned}
$$

par suite

$$
\begin{aligned}
F'\left(t\right) &= -a\int_\Omega \left|u_t\left(t\right)\right|^2 dx - a\int_\Omega \left|u_t\left(t\right)\right|^m dx + \varepsilon\int_\Omega \left|u_t\left(t\right)\right|^2 dx \\
&\quad -\varepsilon\int_\Omega \left|\nabla u\left(t\right)\right|^2 dx - \varepsilon a\int_\Omega u\left(t\right)u_t\left(t\right)\left|u_t\left(t\right)\right|^{m-2}dx \qquad (27) \\
&\quad +\varepsilon b\int_\Omega \left|u\left(t\right)\right|^p dx - \varepsilon c\int_\Omega \left|u\left(t\right)\right|^q dx
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
F'\left(t\right) &\leq -a\int_\Omega \left|u_t\left(t\right)\right|^m dx - \left[a-\varepsilon\right]\int_\Omega \left|u_t\left(t\right)\right|^2 dx - \varepsilon\int_\Omega \left|\nabla u\left(t\right)\right|^2 dx \\
&\quad +\varepsilon a\int_\Omega \left|u\left(t\right)\right|\left|u_t\left(t\right)\right|^{m-1}dx + \varepsilon b\int_\Omega \left|u\left(t\right)\right|^p dx - \varepsilon c\int_\Omega \left|u\left(t\right)\right|^q dx
\end{aligned}
$$

et par suite

$$
\begin{aligned}
F'(t) \;&\leq\; -a\int_{\Omega}|u_t(t)|^m\,dx-[a-\varepsilon]\int_{\Omega}|u_t(t)|^2\,dx-\varepsilon\int_{\Omega}|\nabla u(t)|^2\,dx+\varepsilon a\int_{\Omega}u(t)\,|u_t(t)|^{m-1}\,dx \\
&+\varepsilon b\int_{\Omega}|u(t)|^p\,dx-\varepsilon c\int_{\Omega}|u(t)|^q\,dx-\varepsilon E(t) \\
&+\varepsilon\left[\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2-\frac{b}{p}\|u(t)\|_p^p+\frac{c}{q}\|u(t)\|_q^q\right].
\end{aligned}
$$

l'inégalité de Young nous donne

$$
\int_{\Omega}u(t)\,|u_t(t)|^{m-1}\,dx\leq\delta\|u(t)\|_m^m+c(\delta)\|u_t(t)\|_m^m,\qquad\text{pour }\delta>0,
$$

alors

$$
\begin{aligned}
F'(t) \;&\leq\; -a[1-\varepsilon c(\delta)]\|u_t(t)\|_m^m-\left[a-\frac{3}{2}\varepsilon\right]\|u_t(t)\|_2^2-\varepsilon E(t) \\
&-\frac{\varepsilon}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2+\varepsilon a\delta\|u(t)\|_m^m+\varepsilon b\left[1-\frac{1}{p}\right]\|u(t)\|_p^p \\
&-\varepsilon c\left(1-\frac{1}{q}\right)\|u(t)\|_q^q.
\end{aligned}
$$

Du lemme 5 on a $\exists\,\varsigma\geq 0\ ;\ \|u(t)\|_m^m\leq\varsigma E(t)$

on a :

$$
F'(t)\;\leq\;-a[1-\varepsilon c(\delta)]\|u_t(t)\|_m^m-\left[a-\frac{3}{2}\varepsilon\right]\|u_t(t)\|_2^2-\varepsilon[1-a\delta\varsigma]E(t)
$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_{2}^{2}+\varepsilon b\left\|u\left(t\right)\right\|_{p}^{p},$$

et d'après Lemme 6

$$b\left\|u\left(t\right)\right\|_{p}^{p}\leq\beta\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_{2}^{2},$$

alors

$$\begin{aligned}F'\left(t\right) &\leq -a\left[1-\varepsilon c\left(\delta\right)\right]\left\|u_{t}\left(t\right)\right\|_{m}^{m}-\left[a-\frac{3}{2}\varepsilon\right]\left\|u_{t}\left(t\right)\right\|_{2}^{2}-\varepsilon\left[1-a\delta\varsigma\right]E\left(t\right)\\ &\quad -\varepsilon\left[\frac{1}{2}-\beta\right]\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_{2}^{2}.\end{aligned}$$

on choisit δ et ε tels que :

$$1-\varepsilon c\left(\delta\right)\geq 0,\quad a-\frac{3}{2}\varepsilon\geq 0,\quad 1-a\delta\varsigma>0,$$

il vient alors:

$$F'\left(t\right)\leq-\varepsilon\left[1-a\delta\varsigma\right]E\left(t\right)$$

et par conséquent de l'équivalence entre E et F on écrit

$$F'\left(t\right)\leq-\varepsilon\alpha_{1}\left[1-a\delta\varsigma\right]F\left(t\right),$$

l'intégration de cette expression entre 0 et t pour $t\in[0,T]$, nous donne:

$$F(t) \leq F(0)\, e^{-kt}, \quad k = \varepsilon \alpha_1 [1 - a\delta\varsigma]$$

alors

$$E(t) \leq \alpha_2 F(t) \leq F(0)\, e^{-kt}$$

donc

$\exists\ K,\ k \geq 0$ tels que

$$E(t) \leq K e^{-kt}, \quad K = \alpha_2 F(0)\,, \quad k = \varepsilon \alpha_1 [1 - a\delta\varsigma]\,.$$

Ce qui achève la démonstration.

3.4 Problème 2

Soit Ω toujours un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, de frontière régulière $\partial\Omega$., on considère maintenant le problème suivant :

$$\begin{cases} |u_t|^{l-2} u_{tt} - \Delta u + a |u_t|^{m-2} u_t = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, & t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{28}$$

tels que $a > 0$, $m, l \geq 2$, $u = u(x,t) : \Omega \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$, solution du problème (28), u_0, u_1 sont des fonctions données.

3.5 Résultats principaux

Posons

$$I(t) = I(u(t)) = \|\nabla u(t)\|_2^2 - \|u(t)\|_m^m$$

$$E(t) = E(u(t), u_t(t)) = \tfrac{1}{l} \|u_t(t)\|_l^l + \tfrac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 \tag{29}$$

$$H(t) = \{w \in H_0^1(\Omega) \ / \ I(w) > 0\} \cup \{0\}.$$

Lemme 7.

L'énergie de la solution du problème (28) vérifiée

$$\frac{d}{dt} E(t) = -a \|u_t(t)\|_m^m \leq 0, \qquad \forall t \in [0, T] \tag{30}$$

Preuve.

Nous multiplions l'équation (28) par $u_t(t)$, puis on intègre par rapport à x, en utilisant la formule de Green et la condition au bord, on trouve

$$\int_\Omega u_t |u_t|^{l-2} u_{tt} dx - \int_\Omega u_t \triangle u dx + a\int_\Omega u_t^2 |u_t|^{m-2} dx = 0.$$

On a

$$\int_\Omega u_t |u_t|^{l-2} u_{tt} dx = \frac{1}{l}\int_\Omega \frac{d}{dt}\left(|u_t(t)|^l\right) dx = \frac{1}{l}\frac{d}{dt}\|u_t\|_l^l,$$

$$\int_\Omega u_t \triangle u dx = -\int_\Omega \nabla u_t \nabla u dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}|\nabla u|^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2$$

Regroupons ces termes et utilisons (29)on arrive a

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\|u_t(t)\|_m^m \leq 0, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{31}$$

Lemme 8. Supposons que

$$2 < m \leq \frac{2n}{n-2}, \tag{32}$$

$u_0 \in H$, et $u_1 \in L^2(\Omega)$, tels que

$$\beta = C_*^m (2E(u_0,u_1))^{(m-2)/2} < 1, \tag{33}$$

alors $u(t) \in H$ pour $t \in [0,T]$.

preuve.

Puisque $I(u_0) > 0$, il existe (par continuité) $T_h \leq T$ telle que $I(u(t)) \geq 0$ pour $t \in [0,T_h]$,

alors

$$\|u(t)\|_m^m \leq \|\nabla u(t)\|_2^2, \quad \forall t \in [0,T_h],$$

par conséquent de (29)

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq 2E(t) \leq 2E(u_0, u_1), \quad \text{pour } t \in [0, T_h] \tag{34}$$

d'après (2), (33) et (34) on trouve:

$$\|u(t)\|_m^m \leq C_*^m \|\nabla u(t)\|_2^m = C_*^m \|\nabla u(t)\|_2^{m-2} \|\nabla u(t)\|_2^2$$

$$\leq C_*^m (2E(u_0, u_1))^{(m-2)/2} \|\nabla u(t)\|_2^2 = \beta \|\nabla u(t)\|_2^2 \tag{35}$$

$$< \|\nabla u(t)\|_2^2, \quad \forall t \in [0, T_h]$$

alors

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 - \|u(t)\|_m^m > 0 \quad \forall t \in [0, T_h], \tag{36}$$

cela exprime que: $I(u(t)) > 0$; donc $u(t) \in H$, pour $t \in [0, T_h]$.

Utilisons le fait que

$$\lim_{t \to T_h} C_*^m (2E(u(t), u_t(t)))^{(p-2)/2} \leq \beta < 1,$$

on peut tendre t j'usqua à T. On déduit que $u(t) \in H$, $\forall t \in [0, T]$..

Théorème 7. Supposons l vérifie (32), si $u_0 \in H$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ satisfont (33), alors la solution est globale.

Preuve.

Il suffit de démontrer que $\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_l^l$ est borné par une constante indépendante de t.

En effet d'après (30)

$$E(u_0, u_1) \geq E(t) = \frac{1}{l} \|u_t(t)\|_l^l + \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2$$

alors

$$\|u_t(t)\|_l^l + \|\nabla u(t)\|_2^2 \leq CE(u_0, u_1), \ C \text{ est indépendant de } t \tag{37}$$

Lemme 9. Supposons que

$$2 < l, \ m \leq \frac{2n}{n-2}, \tag{38}$$

alors la solution vérifie

$$\|u(t)\|_l^l \leq CE(t), \quad \text{pour } t \in [0, T]. \tag{39}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_l^l &\leq C_*^l \|\nabla u(t)\|_2^l = C_*^l \|\nabla u(t)\|_2^{l-2} \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\leq C_*^l (2E(u_0, u_1))^{(l-2)/2} 2E(t), \end{aligned}$$

donc

$$\|u_t(t)\|_l^l \leq CE(t), \text{ où } C = 2C_*^l (2E(u_0,u_1))^{(l-2)/2}.$$

Théorème 8.

Supposons m, l vérifiant $2 < l$, $m \leq 2\frac{n-1}{n-2}$, alors pour $m = l$

$\exists\ K, k \geq 0$ tels que la solution de (28) vérifie

$$E(t) \leq Ke^{-kt}, \quad \forall t \geq 0 \tag{40}$$

Démonstration .

On va construire une fonction comme dans le premièr problème, mais en prenant quelques précautions dans le choix.

Soit la fonction H, telle que

$$H(t) = E(t) + \frac{\varepsilon}{l-1}\int_\Omega u(t)\,|u_t(t)|^{l-1}\,dx, \tag{41}$$

pour ε assez petit, il existe α_1, $\alpha_2 \geq 0$:

$$\alpha_1 H(t) \leq E(t) \leq \alpha_2 H(t). \tag{42}$$

On fait on a

$$|H(t) - E(t)| = \frac{\varepsilon}{l-1}\left|\int_\Omega u\,|u_t|^{l-1}\,dx\right|,$$

Appliquant l'inégalité de Young, et (39), (29), on a

$$
\begin{aligned}
|H(t) - E(t)| &\leq \frac{\varepsilon}{l-1}\left[\delta \|u(t)\|_l^l + c(\delta)\|u_t(t)\|_l^l\right] \\
&\leq \frac{\varepsilon}{l-1}\left[\delta c E(t) + c(\delta)\, l E(t)\right] \\
&\leq \frac{\varepsilon}{l-1}\left(\delta c + c(\delta)\, l\right) E(t) \\
&\leq \varepsilon\sigma E(t)\ ; \quad \sigma = \frac{1}{l-1}\left(\delta c + c(\delta)\, l\right) \geq 0
\end{aligned}
$$

donc d'une part

$$E(t) - H(t) \leq \varepsilon\sigma E(t)$$

alors

$$E(t) \leq \frac{1}{1-\varepsilon\sigma} H(t),$$

d'autre part

$$E(t) - H(t) \geq -\varepsilon\sigma E(t)$$

alors

$$E(t) \geq \frac{1}{1+\varepsilon\sigma} H(t)$$

on choisit ε assez petit de telle sorte que$1 - \varepsilon\sigma > 0$,

alors (42) est vérifié pour $\alpha_1 = \frac{1}{1-\varepsilon\sigma}$, $\alpha_2 = \frac{1}{1+\varepsilon\sigma}$.

La dérivée de H, nous donne

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H(t) &= \frac{d}{dt}E(t) + \frac{\varepsilon}{l-1}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega u(t)\,|u_t(t)|^{l-1}\,dx\right) \\
&= -a\,\|u_t(t)\|_m^m + \frac{\varepsilon}{l-1}\int_\Omega u_t(t)\,|u_t(t)|^{l-1}\,dx. + \varepsilon\int_\Omega u(t)\,|u_t(t)|^{l-2}\,u_{tt}(t)\,dx \\
&\leq -a\,\|u_t(t)\|_m^m + \frac{\varepsilon}{l-1}\,\|u_t(t)\|_l^l. + \varepsilon\int_\Omega u(t)\,u_{tt}(t)\,|u_t|^{l-2}\,dx.
\end{aligned}
$$

Multiplions l'équation (28) par u_t , et intègrons par rapport à x il vient alors :

$$
\int_\Omega u(t)\,|u_t(t)|^{l-2}\,u_{tt}(t)\,dx = \int_\Omega u(t)\,\triangle u(t)\,dx - \int_\Omega u(t)\,|u_t(t)|^{m-2}\,u_t(t)\,dx
$$

La formule de Green et la condition au bord nous permettront d'écrire

$$
\begin{aligned}
H'(t) &\leq -a\,\|u_t(t)\|_m^m + \frac{\varepsilon}{l-1}\,\|u_t(t)\|_l^l. + \varepsilon\left[\int_\Omega u(t)\,\triangle u(t)\,dx - a\int_\Omega u(t)\,|u_t(t)|^{m-2}\,u_t(t)\,dx\right] \\
&\leq -a\,\|u_t(t)\|_m^m + \frac{\varepsilon}{l-1}\,\|u_t(t)\|_l^l. + \varepsilon\left[\int_\Omega \triangle u(t)\,u(t)\,dx - a\int_\Omega u(t)\,|u_t(t)|^{m-2}\,u_t(t)\,dx\right] \\
&\leq -a\,\|u_t(t)\|_m^m + \frac{\varepsilon}{l-1}\,\|u_t(t)\|_l^l. - \varepsilon\,\|\nabla u(t)\|_2^2 + \varepsilon a\int_\Omega u(t)\,|u_t(t)|^{m-1}\,dx.
\end{aligned}
$$

A l'aide de (29) on a

$$
\|\nabla u(t)\|_2^2 = 2E(t) - \frac{2}{l}\,\|u_t(t)\|_l^l,
$$

d'après l'inégalité de Young

$$
\begin{aligned}
H'(t) &\leq -a\left\|u_t(t)\right\|_m^m+\frac{\varepsilon}{l-1}\left\|u_t(t)\right\|_l^l-2\varepsilon E(t)+\frac{2\varepsilon}{l}\left\|u_t(t)\right\|_l^l \\
&\quad +\varepsilon a\left(\delta\left\|u(t)\right\|_m^m+c(\delta)\left\|u_t(t)\right\|_m^m\right) \\
&\leq -a\left\|u_t(t)\right\|_m^m+\frac{\varepsilon}{l-1}\left\|u_t(t)\right\|_l^l.-2\varepsilon E(t)+\frac{2\varepsilon}{l-1}\left\|u_t(t)\right\|_l^l \\
&\quad +\varepsilon a\left(\delta\left\|u(t)\right\|_m^m+c(\delta)\left\|u_t(t)\right\|_m^m\right)
\end{aligned}
$$

grâce à la condition $m=l$ et (29), il résulte

$$
\begin{aligned}
H'(t) &\leq -\left(a-\varepsilon\left(\frac{3}{l-1}+ac(\delta)\right)\right)\left\|u_t(t)\right\|_m^m-2\varepsilon E(t)+\varepsilon a\delta c E(t) \\
&\leq -\left(a-\varepsilon\left(\frac{3}{l-1}+ac(\delta)\right)\right)\left\|u_t(t)\right\|_m^m-\varepsilon(2-\delta ac)E(t),
\end{aligned}
$$

on choisit δ et ε de telle sorte que :

$$
a-\varepsilon\left(\frac{3}{l-1}+ac(\delta)\right)\geq 0, \quad 2-\delta ac>0,
$$

il vient alors

$$
H'(t)\leq -\varepsilon(2-\delta ac)E(t)
$$

D'après (42)

$$
H'(t)\leq -\varepsilon\alpha_1(2-\delta ac)H(t) \tag{43}
$$

l'intégration de (43) entre 0 et t dans $[0,T]$ nous donne

$$
H(t)\leq H(0)e^{-kt}, \quad k=\varepsilon\alpha_1(2-\delta ac),
$$

et par conséquent

$$E(t) \leq \alpha_2 H(t) \leq \alpha_2 H(0)\, e^{-kt}.$$

alors

$$E(t) \leq Ke^{-kt}, \qquad K = \alpha_2 H(0), \quad k = \varepsilon \alpha_1 (2 - \delta ac).$$

3.6 Problème 3

Ce problème est défini comme suit

$$\begin{cases} |u_t|^{l-2} u_{tt} - \Delta u + a\left(|u_t|^{l-2} + |u_t|^{m-2}\right) u_t = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \; u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{44}$$

tels que :

$u = u(x,t) : \Omega \times [0, \infty[\to \mathbb{R}^n$ solution du problème (44), $a > 0$, m, $l \geq 2$, $u_{0,}$, u_1 sont des fonctions données.

3.7 Résultats principaux

Notons par

$$I(t) = I(u(t)) = +\|\nabla u(t)\|_2^2 - \|u(t)\|_m^m$$

$$E(t) = \tfrac{1}{l}\|u_t(t)\|_l^l + \tfrac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 \tag{45}$$

$$H(t) = \{w \in H_0^1(\Omega) \;\; / \;\; I(w) > 0\} \cup \{0\},$$

telle que $E(t)$ est l'énergie de la solution de ce problème vérifie

$$\frac{d}{dt}E(t) = -a\left(\|u_t\|^{l-2} + \|u_t\|^{m-2}\right) \leq 0.$$

lemme 9. Supposons que

$$2 < l < m \leq \frac{2n}{n-2}, \tag{46}$$

alors la solution de (44) vérifie les lemmes (8), (9) , et.le théorème (7) précédent.

Preuve.

Même démonstration que dans les lemmes (8), (9) et la théorème (7) .

Résultat.

En effet d'après les lemmes (8), (9) , et pour $2 < m \leq \frac{2n}{n-2}$

$$\|u(t)\|_m^m < \|\nabla u(t)\|_2^2 \tag{47}$$

$$\|u(t)\|_m^m \leq CE(t), \qquad (C \text{ constante indépendante de } t) \tag{48}$$

Théorème 9.

Supposons $2 < l < m \leq \frac{2n}{n-2}$, alors il existe deux constantes K, k positive, tels que la solution globale de (44) vérifie:

$$E(t) \leq Ke^{-kt}, \quad \forall t \geq 0 \tag{49}$$

Preuve.

Pour la démonstration prenons la même fonction H définie dans le problème (2) ,i.e

$$H(t) = E(t) + \frac{\varepsilon}{l-1} \int_\Omega u\,|u_t|^{l-1}\,dx,$$

et pour ε assez petite ;

$\exists\ \alpha_1,\ \alpha_2 \geq 0$ tels que

$$\alpha_1 H(t) \leq E(t) \leq \alpha_2 H(t) \tag{50}$$

donc

$$\frac{d}{dt}H(t)=\frac{d}{dt}E(t)+\frac{\varepsilon}{l-1}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}u(t)\left|u_t(t)\right|^{l-1}dx\right)$$

$$=-a\left(\left\|u_t(t)\right\|_m^m+\left\|u_t(t)\right\|_l^l\right)+\frac{\varepsilon}{l-1}\int_{\Omega}u_t(t)\left|u_t(t)\right|^{l-1}dx.+\varepsilon\int_{\Omega}u(t)\,u_{tt}(t)\left|u_t(t)\right|^{l-2}dx.$$

Multiplions l'équation (44) par $u(t)$, et intègrons par rapport à x, appliquons formule de Green

et la condition au bord on a,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}u(t)\,u_{tt}(t)\left|u_t(t)\right|^{l-2}dx &= \int_{\Omega}u(t)\triangle u(t)\,dx-a\int_{\Omega}u(t)\left(\left|u_t(t)\right|^{l-2}+\left|u_t(t)\right|^{m-2}\right)u_t(t)\,dx\\ &\leq -\int_{\Omega}\left|\nabla u(t)\right|^2dx+a\int_{\Omega}u(t)\left(\left|u_t(t)\right|^{l-1}+\left|u_t(t)\right|^{m-1}\right)dx\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}H'(t) &\leq -a\left(\left\|u_t(t)\right\|_m^m+\left\|u_t(t)\right\|_l^l\right)+\frac{\varepsilon}{l-1}\left\|u_t(t)\right\|_l^l-\varepsilon\left\|\nabla u(t)\right\|_2^2\\ &+a\varepsilon\int_{\Omega}u(t)\left(\left|u_t(t)\right|^{l-1}+\left|u_t(t)\right|^{m-1}\right)dx\end{aligned}$$

l'inégalité de Young nous donne

$$\int_{\Omega}u(t)\left(\left|u_t(t)\right|^{l-1}+\left|u_t(t)\right|^{m-1}\right)dx=\int_{\Omega}u(t)\left|u_t(t)\right|^{l-1}dx+\int_{\Omega}u(t)\left|u_t(t)\right|^{m-1}dx$$

$$\leq \left(\delta_l \left\|u\left(t\right)\right\|_l^l + c\left(\delta_l\right) \left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l\right) + \left(\delta_m \left\|u\left(t\right)\right\|_m^m + c\left(\delta_m\right) \left\|u_t\left(t\right)\right\|_m^m\right)$$

$$\leq \delta \left(\left\|u\left(t\right)\right\|_l^l + \left\|u\left(t\right)\right\|_m^m\right) + c\left(\delta\right) \left(\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l + \left\|u_t\left(t\right)\right\|_m^m\right)$$

où

$$\delta = \max\left\{\delta_l, \delta_m\right\}, \qquad c\left(\delta\right) = \max\left\{c\left(\delta_l\right), c\left(\delta_m\right)\right\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
H'\left(t\right) &\leq -a\left(\left\|u_t\left(t\right)\right\|_m^m + \left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l\right) + \frac{\varepsilon}{l-1}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l . - \varepsilon\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2 \\
&\quad + a\varepsilon\delta\left(\left\|u\left(t\right)\right\|_l^l + \left\|u\left(t\right)\right\|_m^m\right) + a\varepsilon c\left(\delta\right)\left(\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l + \left\|u_t\left(t\right)\right\|_m^m\right) \\
&\leq -a\left(\left\|u_t\left(t\right)\right\|_m^m + \left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l\right) + \frac{\varepsilon}{l-1}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l - 2\varepsilon E\left(t\right) + \frac{2\varepsilon}{l-1}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l \\
&\quad + a\varepsilon\delta\left(\left\|u\left(t\right)\right\|_l^l + \left\|u\left(t\right)\right\|_m^m\right) + a\varepsilon c\left(\delta\right)\left(\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l + \left\|u_t\left(t\right)\right\|_m^m\right) \\
&\leq -a\left(1 - \varepsilon c\left(\delta\right)\right)\left\|u_t\left(t\right)\right\|_m^m - \left(a - \varepsilon\left(\frac{3}{l-1} + ac\left(\delta\right)\right)\right)\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l - 2\varepsilon E\left(t\right) \\
&\quad + a\varepsilon\delta\left(\left\|u\left(t\right)\right\|_l^l + \left\|u\left(t\right)\right\|_m^m\right)
\end{aligned}$$

d'après (48)

$$\exists c_1,\ c_2 \geq 0 : \left\|u\left(t\right)\right\|_m^m \leq c_1 E\left(t\right), \quad \left\|u\left(t\right)\right\|_l^l \leq c_2 E\left(t\right),$$

il vient alors

$$\begin{aligned} H'(t) &\leq -a\left(1-\varepsilon c(\delta)\right)\|u_t(t)\|_m^m - \left(a - \varepsilon\left(\frac{3}{l-1} + ac(\delta)\right)\right)\|u_t(t)\|_l^l \\ &\quad -\varepsilon\left(2 - a\delta\left(c_1+c_2\right)\right)E(t) \end{aligned}$$

on choisit ε et δ de telle sorte que

$$1-\varepsilon c(\delta) \geq 0, \quad a - \varepsilon\left(\frac{3}{l-1} + ac(\delta)\right) \geq 0, \quad 2 - \delta a\left(c_1+c_2\right) > 0.$$

Il résulte alors

$$\begin{aligned} H'(t) &\leq -\varepsilon\left(2 - a\delta\left(c_1+c_2\right)\right)E(t) \\ &\leq -\varepsilon\alpha_1\left(2 - a\delta\left(c_1+c_2\right)\right)H(t) \end{aligned} \tag{51}$$

L'intégration de (51) entre 0 et $t \in [0,T]$ nous donne :

$$H(t) \leq H(0)\,e^{-\kappa t}; \quad \kappa = \varepsilon\alpha_1\left(2 - a\delta\left(c_1+c_2\right)\right)$$

et par conséquent de (50)

$$E(t) \leq \alpha_2 H(t) \leq \alpha_2 H(0)\,e^{-\kappa t}.$$

Alors le résultat voulu

$$E(t) \leq Ke^{-\kappa t}\ ; \quad K = \alpha_2 H(0)\,,\ k = \alpha_2 H(0)\,.$$

3.8 Conclusion

Rappelons les problèmes $(P1)$, $(P2)$ et $(P3)$ chapitre 2

$$u_{tt} - \triangle u + a\left(1 + |u_t|^{m-2}\right) u_t = bu\,|u|^{p-2}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \tag{P1}$$

$$|u_t|^{\rho-2} u_{tt} - \Delta u + a\,|u_t|^{m-2} u_t = b\,|u|^{p-2} u, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \tag{P2}$$

$$u_{tt} - \triangle u + a\left(1 + |u_t|^{m-2}\right) u_t + bu\,|u|^{p-2} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{P3}$$

et les problèmes $(P4)$, $(P5)$ et $(P6)$ chapitre 3

$$u_{tt} - \Delta u + a\left(1 + |u_t|^{m-2}\right) u_t = bu\,|u|^{p-2} - cu\,|u|^{q-2}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \tag{P4}$$

$$|u_t|^{l-2} u_{tt} - \Delta u + a\,|u_t|^{m-2} u_t = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \tag{P5}$$

$$|u_t|^{l-2} u_{tt} - \Delta u + a\left(|u_t|^{l-2} + |u_t|^{m-2}\right) u_t = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \tag{P6}$$

Par une simple comparaison on peut dire :

Le problème $(P4)$ est le problème $(P1)$ avec une antisource de la forme $cu\,|u|^{q-2}$ qui est semblable a la source, on a trouvé que le résultat de la décroissance ne change pas, avec la condition $c > 0$ sinon le terme sera consideré comme une source, et dans ce cas on ne peut pas être sur que si on a décroissance ou explosion de la solution.

Le problème $(P5)$, est exactement le problème $(P2)$ sans source, alors étudier le problème $(P5)$ revient juste a refaire les calculs du problème $(P1)$ en posant $b = 0$.

Concernant $(P3)$ c'est le $(P1)$ avec une antisource a la place d'une source de même forme.

Dans problème $(P6)$ on a démontré la décroissance de l'énergie de la solution avec des conditions sur l et m , et pas de source.

.

Chapitre 4

QUELQUES RÉSULTATS

4.1 Introduction

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} |u_t|^{l-2} u_{tt} - \Delta u + a\left(|u_t|^{l-2} + |u_t|^{m-2}\right) u_t = b\,|u|^{p-2} u, \quad x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{52}$$

a, $b > 0$, $m > l \geq 2$, Ω est un domaine borné, à frontière régulière $\partial\Omega$. Ce problème a été discutè par Benaissa et al. [2] pour $l = 2$, $m \geq 2$ (voir chapitre 2), les auteurs ont démontré que pour des données initiales convenablement choisies le problème admet une solution globale à énergie exponentiellement décroissante si $m > 2$.
Dans ce chapitre on prouve que cet résultat reste vrai pour $l > 2$.

Remarque

La démonstration de l'existence globale et la décroissance est basée sur le théorème du puit de potentiel présenté par Sattinger [25], Payne et Sattinger [24], voir aussi Todorova,

4.2 Résultats principaux

Nous présentons tout d'abord le suivant :

$$\begin{aligned} I(t) &= I(u(t)) = \|\nabla u(t)\|_2^2 - b\,\|u(t)\|_p^p \\ J(t) &= J(u(t)) = \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{b}{p}\|u(t)\|_p^p \end{aligned} \tag{53}$$

$$E(t) = E(u(t), u_t(t)) = J(u(t)) + \frac{1}{l}\|u_t(t)\|_l^l$$

$$H = \left\{w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \ / \ I(w) > 0\right\} \cup \{0\}.$$

$E(t)$ est l'énergie de la solution du problème (52).

Rappelons l'inégalité de Poincaré et les injections de Sobolev donnés dans le Chapitre1

$$\|u\|_2 \leq C\|\nabla u\|_2 \ ; \quad \|u\|_m \leq C\|u\|_p \ ; \quad \|u\|_m \leq C\|\nabla u\|_2, \tag{54}$$

pour $p \geq m \geq 2$.

Lemme 10.

L'énergie de la solution du problème (52) vérifie

$$\frac{d}{dt}E(t) = -a\left(\|u_t\|_l^l + \|u_t(t)\|_m^m\right) \leq 0, \qquad \forall t \in [0, T] \tag{55}$$

la démonstration de ce lemme se fait comme suit :

Preuve.

Multiplions l'équation (52) par u_t, et intègrons par rapport à x, on trouve

$$\int_\Omega u_t |u_t|^{l-2} u_{tt} dx - \int_\Omega u_t \Delta u dx + a\int_\Omega u_t^2\left(|u_t|^{l-2} + |u_t|^{m-2}\right)dx = b\int_\Omega u_t |u|^{p-2} u dx$$

De la formule suivante

$$u_t |u_t|^{p-2} u_{tt} = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left(|u_t|^p\right)$$

on a

$$\int_{\Omega} u_t |u_t|^{l-2} u_{tt} dx = \frac{1}{l} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |u_t|^l dx = \frac{1}{l} \frac{d}{dt} \|u_t(t)\|_l^l \tag{56}$$

$$\int_{\Omega} u_t \Delta u dx = -\int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u(t)\|_2^2 \tag{57}$$

$$b \int_{\Omega} u |u|^{p-2} u_t dx = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |u|^p dx = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_p^p \tag{58}$$

par conséquent de $(56) - (58)$ on a (55)

Lemme11. Supposons que

$$2 < p \leq 2\frac{n-1}{n-2}, \quad n \geq 3, \tag{59}$$

si $u_0 \in H$, et $u_1 \in L^2(\Omega)$, tels que

$$\beta = bC^P \left(\frac{2p}{p-2} E(u_0, u_1) \right)^{(p-2)/2} < 1 \tag{60}$$

alors $u(t) \in H$, pour $t \in [0, T]$.

preuve.

Puisque $I(u_0) > 0$, il existe $T_h \leq T$ telle que $I(u(t)) \geq 0$, pour $t \in [0, T_h]$; $h > 0$, alors

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{b}{p} \|u(t)\|_p^p \\ &= \frac{p-2}{2p} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{p} I(u(t)) \qquad (61) \\ &\geq \frac{p-2}{2p} \|\nabla u(t)\|_2^2, \qquad \forall t \in [0, T_h] \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\|\nabla u(t)\|_2^2 &\leq \frac{2p}{p-2} J(t) \leq \frac{2p}{p-2} E(t) \\
&\leq \frac{2p}{p-2} E(u_0, u_1), \quad \forall t \in [0, T_h]. \qquad (62)
\end{aligned}$$

En effet de (54) que:

$$\|u(t)\|_p \leq C \|\nabla u(t)\|_2$$

alors

$$\begin{aligned}
b\|u(t)\|_p^p &\leq bC^p \|\nabla u(t)\|_2^p = bC^p \|\nabla u(t)\|_2^{p-2} \|\nabla u(t)\|_2^2 \\
&\leq bC^p \left(\frac{2p}{p-2} E(u_0, u_1)\right)^{(p-2)/2} \|\nabla u(t)\|_2^2 = \beta \|\nabla u(t)\|_2^2 \qquad (63) \\
&< \|\nabla u(t)\|_2^2, \quad \forall t \in [0, T_h]
\end{aligned}$$

et par suite

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 - b\|u(t)\|_p^p > 0, \quad \forall t \in [0, T_h]$$

$$\text{C'est à dire } I(u(t)) > 0, \quad \forall t \in [0, T_h].$$

En utilisant le fait que

$$\lim_{t\to T_h} bC^p\left(\frac{2p}{p-2}E\left(u\left(t\right),u_t\left(t\right)\right)\right)^{(p-2)/2}\leq\beta<1$$

On peut tendre t j'usqu'à T. On déduire que $u\left(t\right)\in H$, $\forall t\in\left[0,T\right]$.

Théorème 10.

Supposons (59) est satisfaite, si $u_0\in H$ et $u_1\in L^2\left(\Omega\right)$ vérifiant (60), alors la solution est globale.

preuve.

Il suffit de démontrer que $\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2+\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l$ est borné par une constante indépendante de t,nous utilisons (53) et (55), il vient alors

$$\begin{aligned}
E\left(u_0,u_1\right) &\geq E\left(t\right)=\frac{1}{l}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l+\frac{1}{2}\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2-\frac{b}{p}\left\|u\left(t\right)\right\|_p^p \\
&= \frac{p-2}{2p}\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2+\frac{1}{p}I\left(t\right)+\frac{1}{l}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l \qquad (64)\\
&\geq \frac{p-2}{2p}\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2+\frac{1}{l}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l
\end{aligned}$$

alors

$$\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2+\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l\leq\vartheta,\ \vartheta=\sigma E\left(u_0,u_1\right),$$

où $\sigma=\min\left\{\frac{2p}{p-2},\ l\right\}$

Lemme 12. pour m vérifiant

$$2<m\leq\frac{2n}{n-2},\quad n\geq 3 \qquad (65)$$

alors il existe une constante ς indépendante de t telle que la solution de (52) vérifiée

$$\|u(t)\|_m^m \leq \varsigma E(t), \tag{66}$$

Preuve.

En effet de (54) que :

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_m^m &\leq C^m \|\nabla u(t)\|_2^m \leq C^m \|\nabla u(t)\|_2^{m-2} \|\nabla u(t)\|_2^2 \\
&\leq C^m \left(\frac{2p}{p-2} E(u_0, u_1)\right)^{(m-2)/2} \frac{2p}{p-2} E(t),
\end{aligned}$$

alors

$$\|u(t)\|_m^m \leq \varsigma E(t), \text{ pour } \varsigma = \frac{2p}{p-2} C^m \left(\frac{2p}{p-2} E(u_0, u_1)\right)^{(m-2)/2}.$$

4.3 La décroissance exponentielle de l'énergie de la solution

Théorème 11. Supposons que

$$2 < p \leq 2\frac{n-1}{n-2}, \quad 2 < l < m \leq \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3,$$

alors il éxiste deux constantes positives κ, k tels que la solution globale de (52) vérifie :

$$E(t) \leq k e^{-\kappa t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{67}$$

Preuve.

On définit une fondtion H par

$$H(t) = E(t) + \frac{\varepsilon}{l-1} \int_{\Omega} u \left| u_t \right|^{l-1} dx, \quad \varepsilon \geq 0 \tag{68}$$

pour ε assez petit

$$\exists \alpha_1,\ \alpha_2 > 0 : \alpha_1 H(t) \leq E(t) \leq \alpha_2 H(t). \tag{69}$$

en fait on a **:**

$$\begin{aligned} |H(t) - E(t)| &\leq \frac{\varepsilon}{l-1} \left| \int_{\Omega} u(t) \left| u_t(t) \right|^{l-1} dx \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{l-1} \left[\int_{\Omega} |u(t)| \left| u_t(t) \right|^{l-1} dx \right] \end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité de Young, et (64), (66), il vient

$$\begin{aligned} |H(t) - E(t)| &\leq \frac{\varepsilon}{l-1} \left[\delta \left\| u(t) \right\|_l^l + c(\delta) \left\| u_t(t) \right\|_l^l \right] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{l-1} \left(\delta c E(t) + c(\delta) l E(t) \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{l-1} \left(\delta c + c(\delta) l \right) E(t) \\ &= \varepsilon \theta E(t) \ ; \qquad \theta = \frac{1}{l-1} \left(\delta c + c(\delta) l \right) \geq 0, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} E(t) - H(t) &\geq -\varepsilon\theta E(t) \\ &\Rightarrow (1+\varepsilon\theta) E(t) \geq H(t) \\ &\Rightarrow E(t) \geq \frac{1}{(1+\varepsilon\theta)} H(t), \end{aligned} \tag{*}$$

d'autre part

$$E(t) - H(t) \leq \varepsilon\theta E(t)$$

alors

$$(1-\varepsilon\theta) E(t) \leq H(t),$$

on choisit ε assez petit de façon que $(1-\varepsilon\theta) > 0$, il vient alors

$$E(t) \leq \frac{1}{(1-\varepsilon\theta)} H(t). \tag{**}$$

De $(*)$ et $(**)$ on a

$$\exists \alpha_{1,}\ \alpha_2 > 0\ ; \alpha_1 F(t) \leq E(t) \leq \alpha_2 F(t),$$

avec

$$\text{pour } \alpha_1 = \frac{1}{(1+\varepsilon\theta)} \text{ et } \alpha_2 = \frac{1}{(1-\varepsilon\theta)}.$$

Dérivons la fonction H par rapport a t, on trouve

$$\frac{d}{dt} H(t) = \frac{d}{dt} E(t) + \frac{\varepsilon}{l-1} \frac{d}{dt} \int_\Omega u(t) |u_t(t)|^{l-1} dx$$

$$
\begin{aligned}
&= -a\left(\|u_t(t)\|_l^l + \|u_t(t)\|_m^m\right) + \frac{\varepsilon}{l-1}\int_\Omega u_t(t)\,|u_t(t)|^{l-1}\,dx \qquad (70)\\
&\quad +\varepsilon\int_\Omega u(t)\,u_{tt}(t)\,|u_t(t)|^{l-2}\,dx\\
&\le -a\left(\|u_t(t)\|_l^l + \|u_t(t)\|_m^m\right) + \frac{\varepsilon}{l-1}\|u_t(t)\|_l^l + \varepsilon\int_\Omega u(t)\,u_{tt}(t)\,|u_t(t)|^{l-2}\,dx.
\end{aligned}
$$

Multiplions l'équation dans (52) par u, intègrons par rapport à x,
il vient alors

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u(t)\,u_{tt}(t)\,|u_t(t)|^{l-2}\,dx &\le \int_\Omega u(t)\,\Delta u(t)\,dx + a\int_\Omega u(t)\left(|u_t(t)|^{l-1} + |u_t(t)|^{m-1}\right)dx\\
&\quad +b\,\|u(t)\|_p^p
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
H'(t) &\le -a\left(\|u_t(t)\|_l^l + \|u_t(t)\|_m^m\right) + \frac{\varepsilon}{l-1}\|u_t(t)\|_l^l + \varepsilon b\,\|u(t)\|_p^p - \varepsilon\,\|\nabla u(t)\|_2^2\\
&\quad +a\varepsilon\int_\Omega u(t)\left(|u_t(t)|^{l-1} + |u_t(t)|^{m-1}\right)dx
\end{aligned}
$$

En vertu de l'inégalité de Young, on a

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u(t)\left(|u_t(t)|^{l-1} + |u_t(t)|^{m-1}\right)dx &= \int_\Omega u(t)\,|u_t(t)|^{l-1}\,dx + \int_\Omega u(t)\,|u_t(t)|^{m-1}\,dx \qquad (71)\\
&\le \delta\left(\|u(t)\|_l^l + \|u(t)\|_m^m\right) + c(\delta)\left(\|u_t(t)\|_l^l + \|u_t(t)\|_m^m\right)
\end{aligned}
$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} b\left\|u\left(t\right)\right\|_p^p &= \alpha b\left\|u\left(t\right)\right\|_p^p+\left(1-\alpha\right)b\left\|u\left(t\right)\right\|_p^p \\ &\leq \alpha\left[-pE\left(t\right)+\frac{p}{l}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l+\frac{p}{2}\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2\right]+\left(1-\alpha\right)\beta\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2 \quad (72) \end{aligned}$$

alors:

$$\begin{aligned} H'\left(t\right) &\leq -a\left(1-\varepsilon c\left(\delta\right)\right)\left\|u_t\left(t\right)\right\|_m^m-\left[a-\varepsilon\left(\frac{1}{l-1}+\alpha\frac{p}{l}+ac\left(\delta\right)\right)\right]\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l \\ &+\varepsilon\left(-1+\alpha\frac{p}{2}+\beta\left(1-\alpha\right)\right)\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2-\varepsilon\alpha pE\left(t\right)+a\varepsilon\delta\left(\left\|u\left(t\right)\right\|_l^l+\left\|u\left(t\right)\right\|_m^m\right) \\ &\leq -a\left(1-\varepsilon c\left(\delta\right)\right)\left\|u_t\left(t\right)\right\|_m^m-\left[a-\varepsilon\left(\frac{1}{l-1}+\alpha\frac{p}{l}+ac\left(\delta\right)\right)\right]\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l \\ &+\varepsilon\left[\alpha\left(\frac{p}{2}-1\right)-\xi\left(1-\alpha\right)\right]\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2-\varepsilon\alpha pE\left(t\right)+a\varepsilon\delta\left(\left\|u\left(t\right)\right\|_l^l+\left\|u\left(t\right)\right\|_m^m\right), \\ \xi &= 1-\beta \end{aligned}$$

Prenons α proche de 1 pour

$$\alpha\left(\frac{p}{2}-1\right)-\xi\left(1-\alpha\right)>0,$$

et on utilise (62) ; $\left(\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2\leq\frac{2p}{p-2}E\left(t\right)\right)$, il vient alors

$$H'\left(t\right) \leq -a\left(1-\varepsilon c\left(\delta\right)\right)\left\|u_t\left(t\right)\right\|_m^m-\left[a-\varepsilon\left(\frac{1}{l-1}+\alpha\frac{p}{l}+c\left(\delta\right)\right)\right]\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l$$

$$+\varepsilon\left[\alpha\left(\frac{p}{2}-1\right)-\xi\left(1-\alpha\right)\right]\frac{2p}{p-2}E\left(t\right)-\varepsilon\alpha pEt+a\varepsilon\delta\left(\left\|u\left(t\right)\right\|_l^l+\left\|u\left(t\right)\right\|_m^m\right)$$

$$\begin{aligned}
\leq\quad & -a\left(1-\varepsilon c\left(\delta\right)\right)\left\|u_t\left(t\right)\right\|_m^m-\left[a-\varepsilon\left(\frac{1}{l-1}+\alpha\frac{p}{l}+ac\left(\delta\right)\right)\right]\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l \qquad (73)\\
& -\xi\varepsilon\left(1-\alpha\right)\frac{2p}{p-2}E\left(t\right)+a\varepsilon\delta\left(\left\|u\left(t\right)\right\|_l^l+\left\|u\left(t\right)\right\|_m^m\right).
\end{aligned}$$

En effet de (66), il existe $c_1,\, c_2\geq 0$:

$$\left\|u\left(t\right)\right\|_l^l\leq c_1E\left(t\right)\ ,\ \left\|u\left(t\right)\right\|_m^m\leq c_2E\left(t\right)$$

donc:

$$\begin{aligned}
H'\left(t\right)\ \leq\ & -a\left(1-\varepsilon c\left(\delta\right)\right)\left\|u_t\left(t\right)\right\|_m^m-\left[a-\varepsilon\left(\frac{1}{l-1}+\alpha\frac{p}{l}+ac\left(\delta\right)\right)\right]\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l\\
& -\xi\varepsilon\left(1-\alpha\right)\frac{2p}{p-2}E\left(t\right)+a\varepsilon\delta\left(c_1+c_2\right)E\left(t\right)\\
\leq\ & -a\left(1-\varepsilon c\left(\delta\right)\right)\left\|u_t\left(t\right)\right\|_m^m-\left[a-\varepsilon\left(\frac{1}{l-1}+\alpha\frac{p}{l}+ac\left(\delta\right)\right)\right]\left\|u_t\left(t\right)\right\|_l^l\\
& -\varepsilon\left[\xi\left(1-\alpha\right)\frac{2p}{p-2}-a\delta\left(c_1+c_2\right)\right]E\left(t\right)
\end{aligned}\qquad (74)$$

En choisissant δ, ε de telle sorte que

$$\begin{aligned}
1-\varepsilon c\left(\delta\right) &\geq 0,\\
\xi\left(1-\alpha\right)\frac{2p}{p-2}-a\delta\left(c_1+c_2\right) &> 0\\
a-\varepsilon\left(\frac{1}{l-1}+\alpha\frac{p}{l}+ac\left(\delta\right)+ac\left(\delta\right)\right) &\geq 0
\end{aligned}\qquad (75)$$

il vient alors

$$H'(t) \leq -\varepsilon \left[\xi (1-\alpha) \frac{2p}{p-2} - a\delta (c_1 + c_2) \right] E(t) \tag{76}$$

En effet de (69)

$$H'(t) \leq -\varepsilon\alpha_1 \left[\xi (1-\alpha) \frac{2p}{p-2} - a\delta (c_1 + c_2) \right] H(t) \tag{77}$$

L'intégration de (77) entre 0 et $t \in [0, T]$ nous donne

$$H(t) \leq H(0) e^{-\kappa t}, \;\; \kappa = \varepsilon \left[\xi (1-\alpha) \frac{2p}{p-2} - a\delta (c_1 + c_2) \right]$$

Et par conséquent de (69) on a

$$E(t) \leq \alpha_2 H(0) e^{-\kappa t}.$$

Finalement il existe deux constantes positives K, k tes que

$$E(t) \leq K e^{-\kappa t}, \text{ avec } K = \alpha_2 H(0) \;\text{ et }\; k = \varepsilon \left[\xi (1-\alpha) \frac{2p}{p-2} - a\delta (c_1 + c_2) \right]$$

Ce qui achève la démonstration.

Bibliographie

[1] Berrimi S and Messaoudi S. A, Global existence and decay of solutions in a quasilinear damped wave equation (Submitted).

[2] Benaissa a. et S. A. Messaoudi, Exponential decay of solutions of a nonlinearly damped wave equation, Nonlinear differ. equ. appl. **12** (2005) 391-399.

[3] Brezis H., Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Dunod 1999.

[4] R. Ikehata and T. Suzuki, Stable and unstable sets for evolution equations of parabolic and hyperbolic type, Hiroshima Math. J. 26 (1996), 475-491.

[5] R. Ikehata, Some remarks on the wave equations with nonlinear damping and source terms, Nonlinear Analysis. Vol27, No 10 (1996), 1165-1175.

[6] Georgiev V.and G. Todorova, Existence of solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms, J. Diff. Eqns.**109/ 2**(1994),295-308.

[7] Kalantarov V. K. and O. A. Ladyzhenskaya, the occurrence of collapse for quasi linear equations of parabolic and hyporbolic type. J. . Soviet Math. **10** (1978),53-70

[8] Levine H. A, Instability and nonexistence of global solutions of nonlinear wave equation of the form $Pu_{tt} = Au + F(U)$, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974) , 1 - 21.

[9] Levine H. A, Some additional rekarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equation, SIAM J. Math. Anal . **5** (1974), 138 - 146.

[10] Levine H. A and J. Serrin, A global nonexistence theorem for quasilinear evolution equation with dissipation, Arch. Rational Mech. Anal. **137** (1997),341 - 361.

[11] Levine H. A. P. Pucci and J. Serrin, Some remarks on global nonexistence for nonautonomous abstract evolution equations, Contemporary Math. **208** (1997), 253 - 263.

[12] Levine H. A and S. Ro Park, Global existence and global nonexistence of solutions of the Caechy problem for a nonlinearly damped wave equation, J. Math.Anal. Appl. **228** (1998). 181 - 205

[13] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires. Dunod. paris 1969.

[14] Messaoudi S. A, Decay of the solution energy Arab. for a nonlinearly damped wave equation, Science and Engineering Vol **26** (2001). 63 -68.

[15] Messaoudi S. A, Blow up in solutions of a linear wave equation, International Journal of Applied Math. Vol. 1. No. 6 (1999), 621-626.

[16] Messaoudi S. A, Decay of the solution energy for a nonlinearly damped wave equation, Arab. J. for Science and engineering, Vol. 26 (2001), 63-68.

[17] Messaoudi S. A, Blow up in a nonlinearly damped wave equation,Mathematische Nachrichten **231** (2001),1 - 7

[18] Messaoudi S. Blow up in semilinear wave equation, J. Partial Diff. Eqs. **14.**(2001), 105-111.

[19] Messaoudi S. A., Blow up in the Cauchy problem for a nonlinearly damped wave equation (CAA).

[20] Nakao M, Decay of solutions of some nonlinear evolution equations, J. Math.Anal. Appl **.60** (1977), 542 - 549.

[21] Nakao M, Remarks on the existence and uniqueness of global decaying solutions of the nonlinear dissipative wave equations , Math Z. **206** (1991), 265 - 275.

[22] Nakao M. and K. ono, Global existence to the Caechy problem of the semilinear wave equations with a nonlinear dissipation, Funkcial Ekvacioj 38 (1995) , 417 - 431

[23] Ono K, On the global existence and decay of solutions for semilinear telegraph equations, Int. Applied Math. Vol $\mathbf{2} \neq \mathbf{9}$ (2000), 1121 - 1136.

[24] Payne L. and Sattinger D. H, Saddle points and instability on nonlinear hyperbolic equations, Israel J. Math. **22** (1975), 273 - 303.

[25] Sattinger D. H, On glopal solutions for nonlinear hyperbolic equations, Arch.Rational Mech. Anal. **30** (1968). 148 - 172.

[26] Todorova G, Stable and unstable sets for the Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source termes, J. Math. Anal . Appl.**239** (1999), 213 - 226.

[27] Todorova G, Cauchy problem fpr a nonlinear wave wity nonlinear damping and source terms, C. R. Acad Sci. Pasis. I **326** (1998), 191 - 196.

[28] Vitillaro E, Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation, Arch. Rational Mech. Anal. **149** (1999), 155 - 182.

[29] Tsutsumi. M. Some Nonlinear evolution equations of second order, Pro. Japan. Acad., **47** (1971), pp 950-955.