Table des matières

Introduction

Un très grand nombre de problèmes de la physique mathématique peuvent être "modélisés" par des équations aux dérivées partielles. Par "modèle", nous entendons un ensemble d'équation (ou inéquation) qui, joints à des conditions aux limites (s'expriment sur la frontière du domaine spatial où le phénomène est étudié) et, lorsque le phénomène est d'évolution, à des condition initiales, permet de définir l'état du système.

Les équations aux dérivées partielles constituent aujourd'hui l'un des thèmes importants de la compréhension scientifique. Les raisons principale de cet état de fait sont, d'une part, les progrès de l'analyse mathématique et, d'autre part, l'arrivée de l'outil de calcul numérique qui était resté, pour les équations aux dérivées partielles, presque totalement inadéquat jusqu'aux années 1950.

Tout cela explique pourquoi, dans des sujets très divers, la modélisation par les équations aux dérivées partielles, suivie de l'analyse théorique, puis numérique, suivie à son tour de la confrontation à l'expérience, est devenue une démarche de base.

L'objectif principale de ce travail est l'étude théorique et numérique qui permet de résoudre quelques problèmes mécaniques d'un matériaux viscoélastique, on cite à titre d'exemple les travaux de Shillor et Sofonea [38] qui ont travaillé sur des problèmes viscoélastiques.

L'approximation numérique de ces problèmes a été le sujet de plusieurs études récentes telle que Chen, Han & Sofonea [21] et kendri [28] pour les matériaux viscoplastiques avec variable interne d'état, Han et Sofonea [21] ont considéré un processus quasistatique en viscoélasticité.

le processus d'adhésion est important dans le montage industriel où les parties, usuellement non métalliques sont collées ensemble. Récemment, les matériaux composites ont pris une grande importance. Leurs solidité et leurs légereté font qu'ils sont d'une grande utilité dans l'aviation, l'exploration spatiale et l'industrie automotrice. Cependant, les matériaux composites peuvent subir un décollement sous l'effet des tensions, où les différentes couches se détachent et bougent les unes par rapport aux autres.

Pour modéliser le processus, quand l'assemblage n'est pas permanent, et le détachement peut se produire, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact. De tels modèles, ont été le sujet d'un grand nombre de récentes publications, voir par exemple [6], [7], [26], [30] et les références qui y sont citées. Dans

[34], un modèle consistant de contact unilatéral couplant l'adhésion et le frottement à été construit sur les idées de Frémond [17], [18]. La principale nouvelle idée dans ces travaux est l'introduction d'une variable interne de surface appelée, champ d'adhésion, qui prend ses valeurs entre zéro et un et qui décrit la densité fractionnaire des liens actifs sur la surface de contact.

Ceci peut se trouver dans Cangémi [6], qui a élaboré des traitements numériques et les a appliqués à l'interface. De tels modèles, ont été le sujet de nombreuses récentes publications, citons par exemple les travaux de Chau, Fernàndez, Shillor et Sofonea [7] ; Jianu, Shillor et Sofonea [26] et Matei et sofonea [30] qui ont étudié des problèmes viscoélastiques adhésifs sans frottement.

Dans ce mémoire, nous présentons une contribution à l'analyse variationnelle et numérique de quelques problèmes mécaniques de contact avec adhésion. L'étude mathématique des problèmes de contact entre un corps déformable et une base rigide ou déformable varie selon les propriétés du matériau ainsi que les conditions aux limites. Les lois de comportement sont considérées non linéaire pour des matériaux viscoélastiques dans des processus quasistatique et obéissant à l'hypothèse des petites transformations.

Les conditions de contact sont du type *Signorini*. Les résultat obtenus concernent l'existence et l'unicité des solutions des problèmes variationnels.

Pour l'analyse des estimations d'erreur, on adopte deux types d'approximation variationnelle, l'approximation semi-discrète où on ne discrétise que la variable spatial, l'approximation complète où on discrétise, en plus de la variable spatiale, la variable temporelle. Les méthodes utilisées sont des arguments classiques sur les inéquations variationnelle, des arguments de point fixe et des techniques l'inégalités de *Gronwall*.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Le premier chapitre comprend des rappels des problèmes de contact unilatéral avec compliance normale et adhésion entre un corps viscoélastique et une base déformable. Ces problèmes ont été l'objet d'une analyse variationnelle détaillée par Hemici dans [22] après avoir rappelé les différents résultats, on applique une approximation semi-discrète pour le problème et on donne des estimations d'erreur entre la solution exacte et le solution approchée.

Dans le deuxième chapitre, on étudie un problème de processus quasistatique d'un contact unilatéral, avec adhésion, entre un corps viscoélastique et une base rigide, dans le cas où les forces extérieures varient lentement par rapport au temps. L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Le problème est formulé dans la première section, et dans la deuxième, on deduit une formulation variationnelle. On démontre un théorème d'existence et d'unicité de la solution dans la troisième section, sa démonstration est basée sur la construction des opérateurs entre des espaces de banach appropriés, dont leurs points fixes représentent une solution du problème original.

Finalement, le dernier chapitre est consacré à l'étude de l'approximation semi-discrète et complète du problème étudié pour obtenir des estimations d'erreur.

Enfin, et pour rendre facile la lecture de ce document, on insère une annexe qui comprend un rappel des principaux outils de la théorie de la mécanique des milieux continus, de l'approximation variationnelle et des espaces fonctionnels.

Notations principales

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^N$ $(N = 1, 2, 3)$, on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω ;
Γ	la frontière de Ω, supposée souvent assez régulière ;
Γ_i $\left(i = \overline{1,3}\right)$	une partition de la frontière Γ ;
$mes\Gamma_1$	la mesure de Lesbegue $(N-1)$ dimensionnelle de Γ_1 ;
ν	la normale extérieure unitaire à Γ ;
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions réelles sur Ω indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans Ω ;
$\mathcal{D}'(\Omega)$	espace des distributions sur Ω ;
$\mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$	espace des fonctions continûment différentiable sur $\overline{\Omega}$;

$D = \mathcal{D}(\Omega)^N$;
$D' = \mathcal{D}'(\Omega)^N$;
$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Omega)_s^{N\times N}$;
$\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\Omega)_s^{N\times N}$;
$H = L^2(\Omega)^N$;
$\mathcal{H} = L^2(\Omega)_s^{N\times N}$;
$H_1 = H^1(\Omega)^N$;
$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H}$ tel que $Div\sigma \in H\}$;
$H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^N$;
$H'_\Gamma = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^N$ =dual de H_Γ ;

$\gamma : H_1 \to H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles ;
$z : H_\Gamma \to H_1$	l'inverse à droite de l'application γ ;
$\overline{\gamma} : \mathcal{H}_1 \to H'_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions tensorielles ;
$\overline{z} : H'_\Gamma \to \mathcal{H}_1$	l'inverse à droite de l'application $\overline{\gamma}$.

Si X est un espace de *Hilbert* réel et $N \in \mathbb{N}^*$, on a les notations suivantes :

$\langle ., . \rangle_X$	le produit scalaire de X ;
$\langle ., . \rangle_{X'\times X}$	le produit de dualité entre X' et X ;
$\|.\|$	la norme de X ;

$x_n \rightharpoonup x$ la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans X ;
$x_n \to x$ la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans X ;
$\mathcal{L}(X)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans X.

Si de plus $[0, T]$ est un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$\mathcal{C}(0, T; H)$ l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans H ;
$\|\cdot\|_{0,H}$ la norme de $\mathcal{C}(0, T; H)$;
$\mathcal{C}^1(0, T; H)$ l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ;
$\|\cdot\|_{1,H}$ la norme de $\mathcal{C}^1(0, T; H)$;
$L^p(0, T; H)$ l'espace des fonctions fortement mesurables sur $[0, T]$ dans H ;
$\|\cdot\|_{L^p(0,T;H)}$ la norme de $L^p(0, T; H)$;
$W^{k,p}(0, T; H)$ l'espace de *Sobolev* de paramètres k et p ;
$\|\cdot\|_{W^{k,p}(0,T;H)}$ la norme de $W^{k,p}(0, T; H)$.

Pour une fonction f ; on note par

$\dot{f}, \ddot{f}$ les dérivées première et seconde de f par rapport au temps ;
$\partial_i f$ la dérivée partielle de f par rapport à la *ième* composante x_i ;
∇f le gradient de f ;
$Div f$ la divergence de f ;
$\varepsilon(f)$ la partie symétrique du gradient de f ;
∂f le sous différentiel (classique) de f.

Autre notations :

$\mathcal{S}_N$ l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^N$;
I_N le tenseur identité du second ordre sur $\mathbb{R}^N$;
0_N le zéro de $\mathbb{R}^N$ et $\mathcal{S}_N$;
C, c des constantes génériques strictement positives ;
$p.p.$ presque partout.

Chapitre 1

Analyse variationnelle et numérique d'un problème viscoélastique avec compliance normale et adhésion

L'approche numérique des problèmes aux limites est un domaine mathématique qui, historiquement, a fait l'objet de nombreuses recherches et continue cependant de rester d'actualité, par le fait quelle intéresse particulièrement des disciplines comme la mécanique, la biologie, .etc. Il est essentiel de construire des méthodes numériques de résolution de ces problèmes qui soient à la fois simples, peu coûteuses et efficaces. Les méthodes modernes sont basées sur une "discrétisation" des équations et inéquations dont l'idée est d'approcher la solution. Pour les cas quasistatiques, on distingue deux types de discrétisation : complète et incomplète. La première consiste à discrétiser seul l'espace ; cependant la deuxième est basée sur la discrétisation de l'espace ainsi que l'intervalle de temps. En faite, ces approches, dans le cas des inéquations variationnelles ont fait l'objet de plusieurs études tel que [7] dans le cas d'un problème viscoélastique et [21] pour des problème viscoplastique. Dans notre étude on considère l'approximation numérique du problème étudié dans [22]. Nous utilisons une méthode d'approximation variationnelle.
Dans ce chapitre, on s'intéresse à un problème quasistatique de contact avec compliance normale et adhésion entre un corps viscoélastique et une base déformable.Ce problème a été étudié par Mr. Hemici [22] dans le cadre de sujet de thèse de doctorat. Pour cela on ne rappelera que les résultats obtenues.
Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface appelée champ d'adhésion. Ce chapitre est divisée en quatres sections. Dans la premiere section, nous commençons par formuler le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Ensuite, dans la deuxième section nous donnons la formulation variationnelle du problème mécanique. Le problème est formulé comme un système couplé d'une équation variationnelle en déplacement et une équation intégro-différentielle pour le champ d'adhésion. Dans la troisième section, nous

énonçons un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible relatif au problème. Enfin, dans la quatrième section nous donnons une approximation numérique du problème par le schéma de discrétisation incomplète est analysé à l'aide de la méthode des éléments finis.

1.1 Position du problème mécanique - Hypothèses

Nous considérons un corps viscoélastique qui à l'instant $t = 0$ occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = (2,3)$ de frontière régulière de trois parties disjointes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ tel que $mes\Gamma_1 > 0$. Soit $T > 0$ et soit $[0,T]$ l'intervalle de temps en question.
Ce corps est encastré sur $\Gamma_1 \times [0,T]$, soumis à une densité de forces volumiques f_0 sur $\Omega \times [0,T]$ et à des forces surfaciques de densité f_2 sur $\Gamma_2 \times [0,T]$ et est en contact avec une fondation déformable le long de Γ_3. De plus le contact, avec cette fondation, est supposée avec adhésion.

Problème P **:** *Trouver le champ des déplacements* $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, *le champ des contraintes* $\sigma : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{S}_d$, *et le champ d'adhésion* $\beta : \Gamma_3 \times [0,T] \longrightarrow [0,1]$ *tels que :*

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\,\varepsilon(u) \qquad \text{dans} \quad \Omega \times [0,T], \tag{1.1.1}$$

$$Div\sigma + f_0 = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \times [0,T], \tag{1.1.2}$$

$$u = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0,T], \tag{1.1.3}$$

$$\sigma\nu = f_2 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times [0,T], \tag{1.1.4}$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2(-R(u_\nu))_+ \qquad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0,T], \tag{1.1.5}$$

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta, u_\tau) \qquad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0,T], \tag{1.1.6}$$

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, \zeta_\beta, R\,(\| u_\tau \|)) \qquad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0,T], \tag{1.1.7}$$

$$u(0) = u_0, \qquad \text{dans} \quad \Omega, \tag{1.1.8}$$

$$\beta(0) = \beta_0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_3. \tag{1.1.9}$$

L'équation (1.1.1) représente la loi de comportement viscoélastique, la relation (1.1.2) représente l'équation d'équilibre où f_0 est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable Ω. Les conditions (1.1.3)-(1.1.4) sont les conditions de déplacement-traction. Les conditions (1.1.5)-(1.1.7) représentent les conditions de contact avec compliance normale et adhésion sur la partie Γ_3 de la frontière de Ω. Finalement, la relation (1.1.8)-(1.1.9) représente les conditions initiales.
Pour l'étude du problème mécanique (1.1.1)-(1.1.9) on considère les hypothèses suivantes :

Nous supposons que l'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}_d \longrightarrow \mathbb{S}_d$ satisfait :

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{A}(x,\varepsilon_1) - \mathcal{A}(x,\varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}_d,\ p.p.x \in \Omega; \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{A}(x,\varepsilon_1) - \mathcal{A}(x,\varepsilon_2)) \,.\, (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2 \\ \quad \forall\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}_d,\ p.p.x \in \Omega; \\ \text{(c) L'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x,\varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}_d; \\ \text{(d) L'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x,0) \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{1.1.10}$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}_d \longrightarrow \mathbb{S}_d$ satisfait :

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{G}(x,\varepsilon_1) - \mathcal{G}(x,\varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{G}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| . \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}_d,\ p.p.x \in \Omega\,. \\ \text{(b) l'application } x \longrightarrow \mathcal{G}(x,\varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}_d \\ \text{(c) l'application } x \longrightarrow \mathcal{G}(x,0) \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{1.1.11}$$

De même, nous supposons que la fonction de compliance normale
$p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } L_\nu > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\ p_\nu(x,r_1) -\ p_\nu(x,r_2)\| \leq L_\nu\ \|r_1 - r_2\| . \\ \quad \forall\ r_1, r_2 \in \mathbb{R},\ \ p.p.x \in \Gamma_3; \\ \text{(b) L'application } x \longrightarrow\ p_\nu(x,r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\ \quad \forall\ r \in \mathbb{R}; \\ \text{(c) L'application } x \longrightarrow\ p_\nu(x,r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0 \end{cases} \tag{1.1.12}$$

La fonction de contact tangentielle :

$$\begin{cases} p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \text{ satisfait} \\ \text{(a) Il existe } L_\tau > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\ p_\tau(x,\beta_1,r_1) -\ p_\tau(x,\beta_2,r_2)\| \leq L_\tau\ (|\beta_1 - \beta_2| + \|r_1 - r_2\|) . \\ \quad \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R},\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}^d,\ \ p.p.x \in \Gamma_3; \\ \text{(b) L'application } x \longrightarrow\ p_\tau(x,r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\ \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^d; \\ \text{(c) L'application } x \mapsto p_\tau(x,0,0) \in L^\infty(\Gamma_3)^d; \\ \text{(d) } p_\tau(x,\beta,r)\,.\nu(x) = 0\ \forall r \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } r.\nu(x) = 0,\ p.p.x \in \Gamma_3. \end{cases} \tag{1.1.13}$$

La fonction d'adhésion $H_{ad} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-L, L] \to \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{l}
(a) \text{ il existe } L_{ad} > 0 \text{ telle que :} \\
\quad |H_{ad}(x, b_1, z, r) - H_{ad}(x, b_2, z, r)| \leq L_{ad} |b_1 - b_2| \\
\quad \forall b_1, b_2 \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, r \in [-L, L], p.p.\ x \in \Gamma_3 \\
\quad \text{et } |H_{ad}(x, b_1, z_1, r_1) - H_{ad}(x, b_2, z_2, r_2)| \leq L_{ad}(|b_1 - b_2| + |z_1 - z_2| + |r_1 - r_2|) \\
\quad \forall b_1, b_2 \in [0, 1], z_1, z_2 \in \mathbb{R}, r_1, r_2 \in [-L, L], p.p.\ x \in \Gamma_3; \\
(b) \text{ l'application } x \mapsto H_{ad}(x, b, z, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\
\quad \forall b, z \in \mathbb{R}, r \in [-L, L]; \\
(c) \text{ l'application } (b, z, r) \mapsto H_{ad}(x, b, z, r) \text{ est continue sur} \\
\quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-L, L], p.p.\ x \in \Gamma_3; \\
(d)\ H_{ad}(x, 0, z, r) = 0, \forall z \in \mathbb{R}, r \in [-L, L], p.p.\ x \in \Gamma_3; \\
(e)\ H_{ad}(x, b, z, r) \geq 0, \forall b \leq 0, z \in \mathbb{R}, r \in [-L, L], p.p.\ x \in \Gamma_3 \text{ et} \\
\quad H_{ad}(x, b, z, r) \leq 0, \forall b \geq 1, z \in \mathbb{R}, r \in [-L, L], p.p.\ x \in \Gamma_3.
\end{array}\right. \tag{1.1.14}$$

On note que si $\beta \in L^\infty(\Gamma_3)$, $z \in L^\infty(\Gamma_3)$ et $r : \Gamma_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, alors les conditions (1.1.14) impliquent que $x \longrightarrow H_{ad}(x, \beta(x), z(x), R\, r(x)) \in L^\infty(\Gamma_3)$.
On suppose que les forces volumiques et la traction surfacique ont la régularité

$$f_0 \in L^\infty(0, T; H), \qquad f_2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_2)^d). \tag{1.1.15}$$

Finalement, les conditions initiales satisfont

$$u_0 \in V, \tag{1.1.16}$$

$$\beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3) \text{ et } \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad p.p. \quad x \in \Gamma_3. \tag{1.1.17}$$

Nous notons que les conditions (1.1.14) et (1.1.17) assurent que le champ de liaison est limité aux valeurs entre 0 et 1. En effet, si $\{u, \beta\}$ sont les fonctions régulières qui satisfait (1.1.7) et (1.1.9) et les suppositions (1.1.14) et (1.1.17), alors on peut montrer que $0 \leq \beta(x, t) \leq 1$, pour $x \in \Gamma_3$, $t \in [0, T]$.
Le théorème de représentation de *Riesz*, entraîne l'existence d'un élément $f(t) \in V$ tel que

$$(f(t), v)_V = (f_0(t), v)_H + (f_2(t), v)_{L^2(\Gamma_2)^d} \qquad \forall v \in V, \quad p.p. \quad t \in (0, T). \tag{1.1.18}$$

Soit $j : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle :

$$\left\{\begin{array}{l}
j(\beta, u, v) = \int\limits_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu).v_\nu \, da - \left(\int\limits_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 (-R(u_\nu))_+ \right).v_\nu \, da + \\
\\
+ \int\limits_{\Gamma_3} p_\tau(\beta, u_\tau).v_\tau \, da, \qquad \forall\, \beta \in L^\infty(\Gamma_3), \ \forall\, u, v \in V.
\end{array}\right. \tag{1.1.19}$$

Les conditions (1.1.12) et (1.1.13) entraînent que l'intégrale (1.1.19) est bien définie. On note que la condition (1.1.18) implique

$$f \in L^{\infty}(0,T;V). \tag{1.1.20}$$

Où V est un sous-espace fermé de H_1 définit par

$$V = \{\ v \in H_1 \text{ tel que } v = 0 \ \text{ sur } \Gamma_1\} \tag{1.1.21}$$

et on le munit du produit scalaire, et de la norme défini respectivement par :

$$\langle u, v\rangle_V = \langle \varepsilon\,(u)\,, \varepsilon\,(v)\rangle_{\mathcal{H}}\,, \|\varepsilon\,(v)\|_{\mathcal{H}} = \|v\|_V\,.$$

1.2 Formulation variationnelle

En utilisant la formule de *Green*

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div\sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma\,\nu.v\,da, \quad \forall\ v \in H_1,$$

on a :

$$\int_{\Omega} \sigma.\varepsilon(v)\ dx + \int_{\Omega} Div\sigma.v\ dx = \int_{\Gamma_1} \sigma\nu.v\ da + \int_{\Gamma_2} \sigma\nu.v\ da + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu.v\ da, \quad \forall v \in V.$$

En utilisant (1.1.2), (1.1.3), (1.1.4) on obtient :

$$\int_{\Omega} \sigma\,(t)\,.\varepsilon(v)\,dx - \int_{\Omega} f_0\,(t)\,.v\,dx = \int_{\Gamma_2} f_2(t).v\,dx + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu.v\,da, \quad \forall v \in V$$

et puisque

$$\sigma\nu.v = \sigma_\nu.v_\nu + \sigma_\tau.v_\tau = -p_\nu(u_\nu).v_\nu + \gamma_\nu\beta^2(-R(u_\nu))_+.v_\nu -\ p_\tau(\beta, u_\tau).v_\tau,$$

il vient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \sigma\,(t)\,.\varepsilon(v)dx \quad &= \quad \int_{\Omega} f_0(t).v\ dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t).v\ dx - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu).v_\nu\ da + \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \left(\gamma_\nu\beta^2(-R(u_\nu))_+\right).v_\nu\ da - \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta, u_\tau).v_\tau\ da.\end{aligned}$$

D'après (1.1.18) et (1.1.19) nous obtenons

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v) = (f(t), v)_V, \quad \forall v \in V, \quad p.p.\ \ t \in (0,T). \tag{1.2.1}$$

De (1.1.1), (1.1.7)-(1.1.9) et (1.2.1), on obtient la formulation variationnelle du problème P.

Problème $\mathrm{P_V}$: *Trouver le champ des déplacements* $u : [0,T] \longrightarrow V$, *le champ des contraintes* $\sigma : [0,T] \longrightarrow \mathcal{H}$, *et le champ d'adhésion* $\beta : [0,T] \longrightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ *tels que :*

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}\,\varepsilon(u(t)) \quad p.p.\ \ t \in (0,T)\,, \tag{1.2.2}$$

$$\dot{\beta}(t) = H_{ad}(\beta(t), \zeta_\beta(t), R(\|u_\tau(t)\|)) \quad p.p.\ \ t \in (0,T)\,, \tag{1.2.3}$$

$$(\sigma(t), \varepsilon(w))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), w) = (f(t), w)_V\ , \quad \forall\, w \in V \quad p.p.\ \ t \in (0,T), \tag{1.2.4}$$

$$u(0) = u_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \tag{1.2.5}$$

Un triplet de fonctions $\{u, \sigma, \beta\}$ du problème $\mathrm{P_V}$ qui satisfaient (1.2.2)-(1.2.5) s'appelle solution faible du problème (1.1.1)-(1.1.9).

1.3 Existence et unicité de la solution

Notre intêret principal dans ce paragraphe est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel $\mathrm{P_V}$.

Théorème 1.3.1. *Sous les hypothèses (1.1.10)-(1.1.17), le problème variationnel* $\mathrm{P_V}$ *admet une solution unique* $\{u, \sigma, \beta\}$ *ayant la régularité suivante :*

$$u \in W^{1,\infty}(0,T;V), \tag{1.3.1}$$

$$\sigma \in L^\infty(0,T;\mathcal{H}_1), \tag{1.3.2}$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Gamma_3)). \tag{1.3.3}$$

On conclut que, sous les hypothèses (1.1.10)-(1.1.17), le problème P a une unique solution faible qui satisfait (1.3.1)-(1.3.3).
Démonstration. La démonstration du Théorème 1.3.1 sera établie en plusieurs étapes. Elle est basée sur les résultats des équations d'évolution avec les opérateurs monotones et les arguments du point fixe, mais avec un choix différent de l'espace V et de la fonctionnelle j (voir[36]). ■

Nous supposons dans la suite que (1.1.10)-(1.1.17) sont vérifiés.
Soit $\eta \in L^\infty(0,T;V)$ donné. Dans cette première étape on considère le problème de viscosité suivant :

Problème $\mathrm{P_V^\eta}$: *Trouver le champ des déplacements* $u_\eta : [0,T] \longrightarrow V$, *tel que :*

$$\begin{cases} \langle \mathcal{A}\varepsilon\,(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon\,(v)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \eta(t), v\rangle_V = \langle f\,(t), v\rangle_V\ , \\ \\ \forall\, v \in V,\ \ p.p.\ \ t \in (0,T) \end{cases} \tag{1.3.4}$$

$$u_\eta(0) = u_0. \tag{1.3.5}$$

Lemme 1.3.2. *Il existe une unique solution du problème* P_V^η*, et qui satisfait (1.3.1).*

Démonstration. voir ([22]). ■

On note par u_η la solution du problème P_V^η, obtenue dans le lemme 1.3.2. Dans la prochaine étape, on résout l'équation (1.2.3) du champ d'adhésion dans le cas $u = u_\eta$. Alors, on considère le problème d'évolution suivant :

Problème $\mathrm{Q}_\mathrm{V}^\eta$: *Trouver le champ d'adhésion* $\beta_\eta : [0,T] \longrightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ *tel que*

$$\dot{\beta}_\eta(t) = H_{ad}(\beta_\eta(t), \zeta_{\beta_\eta}(t), R(\|u_{\tau\eta}(t)\|)), \qquad p.p.\ t \in (0,T), \tag{1.3.6}$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0. \tag{1.3.7}$$

En utilisant la version du théorème *Cauchy-Lipschitz* et les arguments du point fixe de *Banach* on a le résultat suivant :

Lemme 1.3.3. *Il existe une unique solution du problème* $\mathrm{Q}_\mathrm{V}^\eta$*, et qui satisfait (1.3.3).*

Démonstration. voir ([22]). ■

Considérons l'opérateur $\Lambda : V \to V$ définie par :

$$(\Lambda\,\eta(t), v)_V = (\mathcal{G}\,\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_\mathcal{H} + j(\beta_{u_\eta}(t), u_\eta(t), v), \qquad \forall v \in V,\ \ t \in [0,T] \tag{1.3.8}$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 1.3.4. *Pour tout* $\eta \in L^\infty(0,T;V)$*, la fonction* $\Lambda\,\eta\ :\ [0,T] \longrightarrow V$ *est continue. En outre, il existe un unique élément* $\eta^* \in L^\infty(0,T;V)$ *tel que* $\Lambda\,\eta^* = \eta^*$*.*

Démonstration. voir ([22]). ■

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour prouver le théorème 1.3.1.

Démonstration du théorème 1.3.1.

Existence : Soit $\eta^* \in L^\infty(0,T;V)$ le point fixe de Λ défini par (1.3.8), et soit u, β la solution des problèmes P_V^η et Q_V^η pour $\eta = \eta^*$, *i.e* $u = u_{\eta^*}$, $\beta = \beta_{\eta^*}$. Nous désignons par σ la fonction donnée par (1.2.2). Il résulte que (1.2.2), (1.2.3) et (1.2.5) sont vérifiées.

De plus $\Lambda\,\eta^* = \eta^*$, on déduit

$$(\Lambda\,\eta^*(t), v) = (\eta^*(t)\,, v), \qquad \forall\, v \in V, \quad p.p.\ t \in (0,T),$$

et gardant en tête (1.3.4), (1.3.8) on déduit que l'égalité (1.2.4) est satisfaite.

La régularité (1.3.1) est déduite de (1.1.20) et la régularité (1.3.3) est une conséquence du lemme 1.3.4. En outre, puisque $u \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, il s'en suit de (1.2.2), (1.1.10) et (1.1.11) que $\sigma \in L^\infty(0,T;\mathcal{H})$.

Choisissant maintenant $w = \varphi$ où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^d$ dans (1.2.4) et utilisant (1.2.2), (1.1.18) on trouve :

$$Div\,\sigma(t) + f_0(t) = 0 \qquad p.p. \;\; t \in (0,T). \tag{1.3.9}$$

De plus (1.3.1) et (1.3.9) impliquent que $Div\sigma \in L^\infty(0,T;H)$ ce qui montre que $\sigma \in L^\infty(0,T;\mathcal{H}_1)$.

On conclut que le triplet $\{u,\, \sigma,\, \beta\}$ est une solution du problème (1.1.1)-(1.1.9) et qui satisfait (1.3.1)-(1.3.3).

Unicité : L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ, et de l'unicité de la solution des problèmes $\mathrm{P}_{\mathrm{V}}^{\eta}$ et $\mathrm{Q}_{\mathrm{V}}^{\eta}$. En effet, soit $\{u,\sigma,\beta\}$ la solution du problème (1.2.2)-(1.2.5) ayant la régularité (1.3.1)-(1.3.3), et on considère un élément $\eta \in L^\infty(0,T;V)$ défini par

$$\eta(t) = f(t) - A\,u(t). \tag{1.3.10}$$

Il s'en suit de (1.3.4)-(1.3.5) et (1.3.10)

$$u = u_\eta. \tag{1.3.11}$$

Et d'après le lemme 1.3.3, il existe une unique solution β_η du problème $\mathrm{Q}_{\mathrm{V}}^{\eta}$ et qui satisfait (1.3.3), (1.2.3) et (1.2.4) impliquent que

$$\beta = \beta_\eta. \tag{1.3.12}$$

Nous utilisons maintenant (1.3.11), (1.2.2), (1.2.4) et (1.3.12) pour voir que

$$(\Lambda\,\eta(t), v) = (\eta(t), v), \qquad \forall v \in V, \;\; p.p. \;\; t \in (0,T).$$

Ce qui implique que $\Lambda\,\eta = \eta$. Comme Λ a un point fixe unique, on conclut que

$$\eta = \eta^*. \tag{1.3.13}$$

La partie d'unicité du théorème 1.3.1 est maintenant une conséquence des égalités (1.3.11)-(1.3.13) et de (1.2.1). ■

1.4 Approximation numérique

Dans cette section on va présenter le problème approché, ensuite donner et estimer l'erreur de la discrétisation incomplète du problème approché, et puis on donne un résultat de convergence pour le schéma. Le schéma de discrétisation incomplète est analysé à l'aide de la méthode des éléments finis. En fait cette méthode est utilisée pour discrétiser l'espace. La convergence forte de ce cas est établie sous une régularité minimale de la solution. Finalement on donne une application brève pour mieux comprendre comment construire les espaces à dimension finie ainsi que les solutions approchées.

1.4.1 Approximation semi-discrète

On analyse dans cette section, une approximation semi-discrète du problème $\mathrm{P_V}$, en discrétisant le domaine spatial. On considère une position générale des espaces arbitraires de dimension finie $V_h \subset V$, $\mathcal{H}_h \subset \mathcal{H}$ et $L_h^2(\Gamma_3) \subset L^2(\Gamma_3)$ utilisés pour approcher les espaces V, $\mathcal{H}$ et $L^2(\Gamma_3)$, h est un paramètre de discrétisation destiné à tendre vers zéro. Partout dans cette section, C dénote une constante positive qui ne dépend que de h dont la valeur peut changer d'une place à une autre.
Considèrons l'approximation suivante du problème variationnel $\mathrm{P_V}$.

Problème $\mathrm{P_V^h}$: *Trouver le champ des déplacements* $u_h : [0,T] \longrightarrow V_h$, *et le champ des contraintes* $\sigma_h : [0,T] \longrightarrow \mathcal{H}_h$, *et le champ d'adhésion* $\beta_h : [0,T] \longrightarrow L_h^2(\Gamma_3)$ *tels que :*

$$\sigma_h(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_h(t)) + \mathcal{G}\,\varepsilon(u_h(t)) \quad \text{p.p. } t \in (0,T), \tag{1.4.1}$$

$$\dot{\beta}_h(t) = H_{ad}(\beta_h(t), \zeta_{\beta_h}(t), R(|u_{h\tau}(t)|)) \quad \text{p.p. } t \in (0,T), \tag{1.4.2}$$

$$(\sigma_h(t), \varepsilon(w_h))_{\mathcal{H}} + j(\beta_h(t), u_h(t), w_h) = (f(t), w_h)_V, \quad \forall\, w_h \in V_h \quad \text{p.p. } t \in (0,T), \tag{1.4.3}$$

$$u_h(0) = u_{0h}, \quad \beta_h(0) = \beta_{0h}. \tag{1.4.4}$$

En utilisant le théorème 1.3.1

Théorème 1.4.1. *On suppose que les conditions (1.1.10)-(1.1.14) sont vérifiées. Alors il existe une unique solution* (u_h, σ_h, β_h) *du problème* $\mathrm{P_V^h}$. *De plus, elle satisfait à* $u_h \in W^{1,\infty}(0,T;V_h)$, $\sigma_h \in L^\infty(0,T;\mathcal{H}_h)$, $\beta_h \in W^{1,\infty}(0,T;L_h^2(\Gamma_3))$.

Notre objet est l'estimations des erreurs $u - u_h$, $\sigma - \sigma_h$, $\beta - \beta_h$. Pour cela, soit $t \in [0,T]$, en utilisant (1.2.2)-(1.2.5) on a :

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}(\varepsilon(u(t))), \tag{1.4.5}$$

$$\beta(t) = \int_0^t H_{ad}\left(\beta(t), \zeta_\beta(t), R(|u_\tau(t)|)\right) + \beta_0, \tag{1.4.6}$$

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(w) \rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), w) = \langle f(t), w \rangle_V, \ \forall w \in V, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{1.4.7}$$

et de (1.4.1)-(1.4.4), on trouve :

$$\sigma_h(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_h(t)) + \mathcal{G}(\varepsilon(u_h(t))), \tag{1.4.8}$$

$$\beta_h(t) = \int_0^t H_{ad}\left(\beta_h(t), \zeta_{\beta_h}(t), R(|u_{h\tau}(t)|)\right) + \beta_{0h}, \tag{1.4.9}$$

$$\langle \sigma_h(t), \varepsilon(w_h) \rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta_h(t), u_h(t), w_h) = \langle f(t), w_h \rangle_V, \ \forall w_h \in V_h \quad \forall t \in [0,T]. \tag{1.4.10}$$

On sait que $v(t) = \dot{u}(t)$ alors $u(t) = \int_0^t v(s)\,ds + u_0$ donc on a le résultat suivant :

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(v(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(\int_0^t v(s)\,ds + u_0), \tag{1.4.11}$$

$$\sigma_h(t) = \mathcal{A}\varepsilon(v_h(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(\int_0^t v_h(s)\,ds + u_{0h}). \tag{1.4.12}$$

En soustrayant (1.4.8) de (1.4.5), on obtient :

$$\sigma - \sigma_h = \mathcal{A}\varepsilon(v) - \mathcal{A}\varepsilon(v_h) + \mathcal{G}\varepsilon(\int_0^t v(s)\,ds + u_0) - \mathcal{G}\varepsilon(\int_0^t v_h(s)\,ds + u_{0h}).$$

D'après (1.1.10) et (1.1.11), on trouve l'estimation d'erreur suivant :

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{\mathcal{H}} \leq C(\|v - v_h\|_V + \|u_0 - u_{0h}\|_V + \int_0^t \|(v - v_h)(s)\|_V\,ds. \tag{1.4.13}$$

En remplaçant (1.4.12) dans (1.4.10), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \left\langle \mathcal{A}\varepsilon(v_h) + \mathcal{G}\varepsilon(\int_{\Gamma_3} v_h(s)\,ds + u_{0h}), \varepsilon(w_h) \right\rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta_h, \int_{\Gamma_3} v_h(s)\,ds + u_{0h}, w_h) = \\ \\ = \langle f, w_h \rangle_V, \quad \forall w_h \in V_h. \end{array}\right. \tag{1.4.14}$$

En remplaçant (1.4.11) dans (1.4.7) et pour $w = w_h$, on déduit :

$$\left\{\begin{array}{l} \left\langle \mathcal{A}\varepsilon(v) + \mathcal{G}\varepsilon(\int_{\Gamma_3} v(s)\,ds + u_0), \varepsilon(w_h) \right\rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta, \int_{\Gamma_3} v(s)\,ds + u_0, w_h) = \\ \\ = \langle f, w_h \rangle_V, \quad \forall w_h \in V_h. \end{array}\right. \tag{1.4.15}$$

Maintenant, en soustrayant (1.4.14) de (1.4.15), on aura donc

$$\left\{\begin{array}{l} \langle \mathcal{A}\varepsilon(v) - \mathcal{A}\varepsilon(v_h), \varepsilon(w_h) \rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta, \int_{\Gamma_3} v(s)\,ds + u_0, w_h) - j(\beta_h, \int_{\Gamma_3} v_h(s)\,ds + u_{0h}, w_h) \\ \\ = -\left\langle \mathcal{G}\varepsilon(\int_{\Gamma_3} v(s)\,ds + u_0) - \mathcal{G}\varepsilon(\int_{\Gamma_3} v_h(s)\,ds + u_{0h}), \varepsilon(w_h) \right\rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall w_h \in V_h. \end{array}\right.$$

D'après quelques manipulations algébriques,

$$\begin{cases} \langle \mathcal{A}\varepsilon(v) - \mathcal{A}\varepsilon(v_h), \varepsilon(v - v_h)\rangle_{\mathcal{H}} = \\ = j(\beta_h, \int_0^t v_h(s)\,ds + u_{0h}, v - v_h) - j(\beta, \int_0^t v(s)\,ds + u_0, v - v_h) + \\ + j(\beta, \int_0^t v(s)\,ds + u_0, v - w_h) - j(\beta_h, \int_0^t v_h(s)\,ds + u_{0h}, v - w_h) + \\ + \langle \mathcal{A}\varepsilon(v) - \mathcal{A}\varepsilon(v_h), \varepsilon(v - w_h)\rangle_{\mathcal{H}} + \\ + \left\langle \mathcal{G}\varepsilon(\int_0^t v(s)\,ds + u_0) - \mathcal{G}\varepsilon(\int_0^t v_h(s)\,ds + u_{0h}), \varepsilon(v - w_h)\right\rangle_{\mathcal{H}} + \\ + \left\langle \mathcal{G}\varepsilon(\int_0^t v(s)\,ds + u_0) - \mathcal{G}\varepsilon(\int_0^t v_h(s)\,ds + u_{0h}), \varepsilon(v - v_h)\right\rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall w_h \in V_h. \end{cases}$$

La fonctionnelle j satisfait l'inégalité suivante pour tout $\beta_1, \beta_2 \in L^2(\Gamma_3)$ et $u_1, u_2, u_3 \in V$,

$$|j(\beta_1, u_1, u_3) - j(\beta_2, u_2, u_3)| \leq C(|\beta_1 - \beta_2| + |u_1 - u_2|)\,|u_3| \tag{1.4.16}$$

On applique l'inégalité de *Cauchy* et (1.4.16), (1.1.10) et (1.1.11), on déduit :

$$\begin{cases} \|v - v_h\|_V \leq C(\|\beta - \beta_h\|_{L^2(\Gamma_3)} + \int_0^t \|(v - v_h)(s)\|_V\,ds + \|u_0 - u_{0h}\|_V \\ + \|v - w_h\|_V), \qquad \forall w_h \in V_h. \end{cases} \tag{1.4.17}$$

On a

$$\beta(t) = \int_0^t H_{ad}(\beta(t), \zeta_\beta(t), R(\left\| \int_0^t v_\tau(s)\,ds + u_{0\tau} \right\|)) + \beta_0 \tag{1.4.18}$$

et

$$\beta_h(t) = \int_0^t H_{ad}(\beta_h(t), \zeta_{\beta_h}(t), R(\left\| \int_0^t v_{h\tau}(s)\,ds + u_{0h\tau} \right\|)) + \beta_{0h}. \tag{1.4.19}$$

Finalement en soustrayant (1.4.19) de (1.4.18), on obtient :

$$\begin{aligned} \beta - \beta_h = & \int_0^t H_{ad}(\beta(t), \zeta_\beta(t), R(\int_0^t v_\tau(s)\,ds + u_{0\tau})) + \beta_0 - \\ & - \int_0^t H_{ad}(\beta_h(t), \zeta_{\beta_h}(t), R(\left\| \int_0^t v_{h\tau}(s)\,ds + u_{0h\tau} \right\|)) + \beta_{0h} \end{aligned} \tag{1.4.20}$$

et en utilisant les mêmes techniques utilisées pour obtenir (1.1.14), on obtient :

$$\begin{aligned}\|\beta-\beta_h\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \quad & C\int_0^t\int_0^t \|(v-v_h)(s)\|_V\,ds+\int_0^t \|(\beta-\beta_h)(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\,ds+ \\ & +\|\beta_0-\beta_{0h}\|_{L^2(\Gamma_3)}+\|u_0-u_{0h}\|_V\,.\end{aligned} \tag{1.4.21}$$

Donc en additionnant (1.4.13), (1.4.17) et (1.4.21) on trouve :

$$\left\{\begin{aligned}&\|v-v_h\|_V+\|\sigma-\sigma_h\|_{\mathcal{H}}+\|\beta-\beta_h\|_{L^2(\Gamma_3)}\leq C(\int_0^t \|(v-v_h)(s)\|_V\,ds+\int_0^t\int_0^t \|(v-v_h)(s)\|_V\,ds+ \\ &+\|v-w_h\|_V+\int_0^t \|(\beta-\beta_h)(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\,ds+\|u_0-u_{0h}\|_V+\|\beta_0-\beta_{0h}\|_{L^2(\Gamma_3)}), \quad \forall w_h\in V_h.\end{aligned}\right. \tag{1.4.22}$$

D'après le lemme de *Gronwall* sur (1.4.22), on déduit :

$$\|v-v_h\|_V+\|\sigma-\sigma_h\|_{\mathcal{H}}+\|\beta-\beta_h\|_{L^2(\Gamma_3)}\leq C\left(\|v-w_h\|_V+\|u_0-u_{0h}\|_V+\|\beta_0-\beta_{0h}\|_{L^2(\Gamma_3)}\right).$$

Par conséquent, on a :

$$\left\{\begin{aligned}&\|u-u_h\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)}+\|\sigma-\sigma_h\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{H})}+\|\beta-\beta_h\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))}\leq C(\|u-w_h\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)}+ \\ &+\|u_0-u_{0h}\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)}+\|\beta_0-\beta_{0h}\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))}), \qquad \forall w_h\in V_h.\end{aligned}\right. \tag{1.4.23}$$

On est arrivé à démontre le théorème suivant :

Théorème 1.4.2. *soit* (u,σ,β) *la solution du problème* $\mathrm{P_V}$ *et soit* (u_h,σ_h,β_h) *la solution du problème* $\mathrm{P_V^h}$*. Alors on a l'estimation d'erreur suivante :*

$$\left\{\begin{aligned}&\|u-u_h\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)}+\|\sigma-\sigma_h\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{H})}+\|\beta-\beta_h\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))}\leq \\ &\leq C\ \inf_{w_h\in V_h}\left(\|u-w_h\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)}+\|u_0-u_{0h}\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)}+\|\beta_0-\beta_{0h}\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))}\right).\end{aligned}\right.$$

L'estimation (1.4.23) est la base de l'analyse de convergence de la méthode semi-discrète. En effet, en argumentant comme dans Raviart [35], on déduit le résultat de convergence suivant :

Corollaire 1.4.3. *On suppose que (1.1.10)-(1.1.14) ont lieu. Si*

$$\|u-w_h\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)}\to 0,\ \textit{et}\ \|\beta_0-\beta_{0h}\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))}\to 0 \quad \textit{quand } h\to 0,$$

alors lorsque $h\to 0$

$$\left(\|u-u_h\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)}+\|\sigma-\sigma_h\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{H})}+\|\beta-\beta_h\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))}\right)\to 0.$$

1.4.2 Analyse de la convergence

Dans cette section, on analyse la convergence de la discrétisation incomplète des solution du problème P.
On fait cette analyse sous les conditions de régularité $u \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, $\sigma \in L^{\infty}(0,T;\mathcal{H})$, $\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^{\infty}(\Gamma_3))$.
On premier on introduit ces hypothèses dans les espaces fonctionnelles $V, \mathcal{H}, L^2(\Gamma_3) \subset L^{\infty}(\Gamma_3)$ et les espaces à dimension finie V_h, $\mathcal{H}_h$, $L_h^2(\Gamma_3)$.
Hypothèse (S_1) :
Il existe un sous espace $V_0 \subset V$ dense dans V et une fonction $\alpha(h) \geq 0$ tel que :

$$\lim_{h \to 0^+} \alpha(h) = 0$$

et

$$\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V \leq \alpha(h) \|v\|_{V_0}, \qquad \forall v \in V_0.$$

Hypothèse (S_2) :
Il existe un sous espace $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ dense dans $\mathcal{H}$ et une fonction $\gamma(h) \geq 0$ tel que :

$$\lim_{h \to 0^+} \gamma(h) = 0$$

et

$$\inf_{z_h \in \mathcal{H}_h} \|z - z_h\|_{\mathcal{H}} \leq \gamma(h) \|z\|_{\mathcal{H}_0}, \qquad \forall z \in \mathcal{H}_0.$$

Hypothèse (S_3) :
Il existe un sous espace $(L^2(\Gamma_3))_0 \subset L^2(\Gamma_3)$ dense dans $L^2(\Gamma_3)$ et une fonction $\theta(h) \geq 0$ tel que :

$$\lim_{h \to 0^+} \theta(h) = 0$$

et

$$\inf_{\eta_h \in L^{\infty}(\Gamma_3)} \|\eta - \eta_h\|_{L^{\infty}(\Gamma_3)} \leq \theta(h) \|\eta\|_{(L^{\infty}(\Gamma_3))_0}, \quad \forall \eta \in (L^{\infty}(\Gamma_3))_0.$$

On peut maintenant étudier la convergence de la discrétisation incomplète du problème P donnée par l'estimation (**??**).

Théorème 1.4.4. *Soit $u \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, $\sigma \in L^{\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$, $\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^{\infty}(\Gamma_3))$ la solution du problème P et $u_h \in W^{1,\infty}(0,T;V_h)$, $\sigma_h \in L^{\infty}(0,T;\mathcal{H}_h)$, $\beta_h \in W^{1,\infty}(0,T;L_h^2(\Gamma_3))$ la solution qui correspond à la discrétisation incomplète du problème P^{h}. Ainsi sous les suppositions (S_1), (S_2) et (S_3) on a :*

$$(\|u - u_h\| + \|\sigma - \sigma_h\| + \|\beta - \beta_h\|) \to 0 \quad \textit{quand} \quad h \to 0.$$

Démonstration. De (S_1), (S_2) et (S_3) on a :

$$\|u_0 - u_{0h}\| \to 0, \ \ \|\beta_0 - \beta_{0h}\| \to 0 \text{ quand } h \to 0. \tag{1.4.24}$$

De plus $W^{1,\infty}(0,T;V_0)$ dense dans $W^{1,\infty}(0,T;V)$, on a pour tout $\delta > 0$, il existe $\widetilde{u} \in W^{1,\infty}(0,T;V_0)$ tel que :

$$\left\| u - \widetilde{u} \right\| \leq \frac{\delta}{2}. \tag{1.4.25}$$

Pour simplifier on suppose que Ω est un polygonal, on utilise l'interpolation standard d'élement finis qu'on note $\overset{h}{\Pi}$ (voir [35]), donc on a :

$$u_h(t) = \overset{h}{\Pi} u(t),$$

on obtient pour l'interpolation l'estimation d'erreur suivante :

$$\left\| \overset{h}{\Pi} \widetilde{u} - \widetilde{u} \right\| \leq \alpha(h) \left\| \widetilde{u} \right\| \leq \frac{\delta}{2}$$

On en déduit :

$$\inf_{v_h \in V_h} \| u - w_h \| \leq \left\| u - \widetilde{u} \right\| + \inf_{v_h \in V_h} \left\| \widetilde{u} - w_h \right\| \leq \varepsilon + \alpha(h) \left\| \widetilde{u} \right\|_{V_0}. \tag{1.4.26}$$

D'où la convergence. ■

Chapitre 2

Etude d'un problème viscoélastique avec adhésion

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème quasistatique de contact avec adhésion entre un corps viscoélastique et une base rigide. Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface, appelée champ d'adhésion. Il représente également une généralisation de quelques résultats obtenus dans [7] et [22].
Le problème est formulé par un système d'équation aux dérivées partielles contenant l'équation d'équilibre du corps, la loi de comportement du matériau, une équation intégro différentielle modélisant le champ d'adhésion et les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis.
Ce chapitre est structuré comme suit. Dans la première section, nous commonçons par formuler le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans la deuxième section nous donnons la première formulation variationnelle du problème mécanique. Ensuite, dans la troisième section, nous énonçons et démontrons un premier théorème d'existence et d'unicité de la solution faible relative au problème.Les techniques employées sont basées sur le théorème des opérateurs maximals monotones, suivi par des arguments de points fixes. Et puis dans la quatrième section nous établissons une deuxième formulation variationnelle du problème mécanique. La cinqième section est destinée à l'étude de quelque propriété de la solution, nous donnons un résultat d'équivalence entre les deux formulations variationnelles précédentes. Finalement nous énonçons un deuxièm résultat d'existence et d'unicité.

2.1 Position du problème - Hypothèses

Dans cette section, on décrit le modèle pour le processus quasistatique. Le cadre physique est comme suit :
Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ avec une surface

frontière supposée assez régulière Γ, divisée en trois partie disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telles que $mes\Gamma_1 > 0$. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ. Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2, agissent des tractions surfaciques de densité f_2 et dans Ω, agissent des forces volumiques de densité f_0 (voir figure). Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. On suppose que f_0 et f_2 varient lentement par apport au temps. Par conséquent, on impose que les accélérations dans le système soient négligeables, on se place donc dans le cas quasistatique.
Le corps est soumis à des conditions de contact unilatéral et adhésion sur la partie Γ_3 de la frontiére.
On suppose aussi que le matériau est viscoélastique avec une loi constitutive de la forme :

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u), \tag{2.1.1}$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}$ sont des fonctions constitutives données.
Ensuite, on va décrire les conditions de contact avec adhésion sur Γ_3, suivant [17] et [18] on introduit une variable interne de surface β définie sur Γ_3, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ en un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tout les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion $0 < \beta < 1$, l'adhésion est partielle et mesure la fraction des liens.
On suppose que la contrainte normale satisfait la condition suivante :

$$-\sigma_\nu \geq p_\nu(\beta, u_\nu) \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \tag{2.1.2}$$

On suppose que la résistance au mouvement tangentiel est générée par la colle et que la traction tangentielle est négligeable. Ainsi, elle dépend seulement de l'intensité d'adhésion et du déplacement tangentiel

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta, u_\tau) \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T].$$

En particulier, on peut considérer le cas :

$$p_\tau(\beta, u_\tau) = \begin{cases} q_\tau(\beta)\, r & \text{si } \|r\| < L_0; \\[2ex] q_\tau(\beta)\, \dfrac{r}{\|r\|} & \text{si } \|r\| > L_0, \end{cases} \tag{2.1.3}$$

où $L_0 > 0$ est la longueur caractéristique des liens, et q_τ est une fonction de raideur tangentielle non négative. Le processus est gouverné par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\beta} = H_{ad}\left(\beta, \zeta_\beta, R(|u_\tau|)\right) \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \tag{2.1.4}$$

H_{ad} est une fonction générale qui s'annulle quand le premier de ses variables s'annulle.

En plus, on considère la possibilité d'une diminution de l'éfficacité du collage, quand les cycles de collage et de décollement continuent. Par conséquent, le processus est supposé dépendre du temps du collage, qu'on note par :

$$\zeta_\beta (x,t) = \int_0^t \beta (x,s)\, ds \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times [0,T] \,.$$

La fonction $R : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une troncature définie par :

$$R(s) = \begin{cases} s & \text{si } 0 \leq s < L\,; \\ \\ L & \text{si } s > L, \end{cases} \tag{2.1.5}$$

où $L > 0$ est la longueur caractéristique des liens. On donne quelques exemples de telles fonctions

$$H_{ad} (\beta, r) = -\gamma_\nu \beta_+ r^2. \tag{2.1.6}$$

où γ_ν est la constante de l'énergie de collage. Un autre exemple, dans lequel H_{ad} dépend de ses trois variables, est

$$H_{ad} (\beta, \zeta, r) = -\gamma_\nu^- \beta_+ r^2 + \frac{\gamma_\nu^+ \beta_+ (1-\beta)_+}{1+\zeta^2}. \tag{2.1.7}$$

Le problème mécanique se formule de la manière suivante :

Problème P : *Trouver le champ des déplacements* $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, *le champ des contraintes* $\sigma : \Omega \times [0,T] \to \mathcal{S}_d$ *et le champ d'adhésion* $\beta : \Gamma_3 \times [0,T] \to \mathbb{R}$ *tels que :*

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon (\dot{u}) + \mathcal{G} (\varepsilon (u)) \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T] \,, \tag{2.1.8}$$

$$Div \sigma + f_0 = 0 \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T] \,, \tag{2.1.9}$$

$$u = 0 \qquad \text{dans } \Gamma_1 \times [0,T] \,, \tag{2.1.10}$$

$$\sigma\nu = f_2 \qquad \text{sur } \Gamma_2 \times [0,T] \,, \tag{2.1.11}$$

$$u_\nu \leq 0, \sigma_\nu + p_\nu (\beta, u_\nu) \leq 0,\ u_\nu (\sigma_\nu + p_\nu (\beta, u_\nu)) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times [0,T] \,, \tag{2.1.12}$$

$$-\sigma_\tau = p_\tau (\beta, u_\tau) \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times [0,T] \,, \tag{2.1.13}$$

$$\dot{\beta} = H_{ad} \left(\beta, \zeta_\beta, R (|u_\tau|)\right) \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times [0,T] \,, \tag{2.1.14}$$

$$u(0) = u_0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{2.1.15}$$

$$\beta (0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \tag{2.1.16}$$

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème P, on a besoin de quelques notations supplémentaires. Soit V le sous-espace de H_1 défini par :

$$V = \{v \in H_1 \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

On suppose que $mes\Gamma_1 > 0$, l'inégalité de korn est satisfaite et il existe une constante $C_k > 0$ qui dépend uniquement de Ω et de Γ_1, telle que :

$$\|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \geq C_k \|v\|_{H_1} \qquad \text{pour tout } v \in V.$$

On considère le produit scalaire et la norme associée définis sur V, donnés par :

$$\langle u, v\rangle_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} \ , \ \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} = \|v\|_V . \tag{2.1.17}$$

Il s'ensuit que les normes $\|.\|_{H_1}$ et $\|.\|_V$ sont équivalentes sur V, donc $(V, \|.\|_V)$est un espace de Hilbert réel. En plus, en utilisant le théorème de trace de *sobolev* et (2.1.17), il existe une constante C_0 qui dépend Ω, Γ_1 et Γ_3 telle que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 \|v\|_V . \tag{2.1.18}$$

On considère les hypthèses suivant :
On suppose que l'opérateur de viscosité $\mathcal{A}$ satisfait :

$$\begin{cases} \mathcal{A} : \ \Omega \times \mathcal{S}_d \longrightarrow \mathcal{S}_d \text{ est un tenseur symétrique positivement défini :} \\ (a) \ \ \mathcal{A}_{ijkl} \in L^\infty(\Omega) \ \text{ pour tout } i, j, k, l = \overline{1, d}; \\ (b) \ \ \mathcal{A}\sigma \cdot \tau = \sigma \cdot \mathcal{A}\tau \text{ pour tout } \sigma,\, \tau \in \mathcal{S}_d; \\ (c) \ \ \text{il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que } \mathcal{A}\sigma \cdot \sigma \geq m_{\mathcal{A}} |\sigma|^2 \ \text{ pour tout } \sigma \in \mathcal{S}_d. \end{cases} \tag{2.1.19}$$

On suppose que l'opérateur d'élasticité $\mathcal{G}$ satisfait :

$$\begin{cases} \mathcal{G} : \Omega \times \mathcal{S}_d \longrightarrow \mathcal{S}_d \text{ tel que :} \\ (a) \ \text{ il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que :} \\ \qquad |\mathcal{G}(\cdot, \varepsilon_1) - \mathcal{G}(\cdot, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{G}}(|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|) \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{S}_d \ p.p \text{ dans } \Omega; \\ (b) \ \ \mathcal{G}(\cdot, \varepsilon) \ \text{ est une fonction Lebesgue mesurable} \\ \quad \text{sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathcal{S}_d; \\ (c) \ \ \mathcal{G}(\cdot, 0) \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{2.1.20}$$

Nous supposons que la fonction normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\begin{cases} p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ (a) \ \text{ il existe } L_\nu > 0 \text{ tel que :} \\ \qquad |p_\nu(x, \beta_1, r_1) - p_\nu(x, \beta_2, r_2)| \leq L_\nu(|\beta_1 - \beta_2| + \|r_1 - r_2\|) \\ \quad \text{pour tout } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \ r_1, r_2 \in \mathbb{R}^d \ p.p \text{ sur } \Gamma_3; \\ (b) \ \ x \mapsto p_\nu(x, \beta, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } \beta \in \mathbb{R}, \ r \in \mathbb{R}^d; \\ (c) \ \ x \mapsto p_\nu(x, 0, 0) \in L^\infty(\Gamma_3)^d; \\ (d) \ \ p_\nu(x, \beta, r) \cdot \nu(x) = 0, \forall r \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } r \cdot \nu(x) = 0, \ p.p \text{ sur } \Gamma_3. \end{cases} \tag{2.1.21}$$

De même, nous supposons que la fonction de contact tangentielle p_τ satisfait :

$$\left\{\begin{array}{l} p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ (a)\ \text{il existe } L_\tau > 0 \text{ tel que :} \\ \quad |p_\tau(x, \beta_1, r_1) - p_\tau(x, \beta_2, r_2)| \leq L_\tau(|\beta_1 - \beta_2| + \|r_1 - r_2\|) \\ \quad \text{pour tout } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R},\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}^d\ p.p \text{ sur } \Gamma_3; \\ (b)\ x \mapsto p_\tau(x, \beta, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } \beta \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R}^d; \\ (c)\ x \mapsto p_\tau(x, 0, 0) \in L^\infty(\Gamma_3)^d; \\ (d)\ p_\tau(x, \beta, r) \cdot \nu(x) = 0, \forall r \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } r \cdot \nu(x) = 0,\ p.p \text{ sur } \Gamma_3. \end{array}\right. \tag{2.1.22}$$

Si $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une fonction *lipschitzienne* bornée, donc la fonction de contact tangentielle (2.1.3) satisfait la condition (2.1.22).

La fonction H_{ad} de taux d'adhésion $H_{ad} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-L, L] \to \mathbb{R}$ satisfait les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} (a)\ \text{il existe } L_{ad} > 0 \text{ telle que :} \\ \quad |H_{ad}(x, b_1, z, r) - H_{ad}(x, b_2, z, r)| \leq L_{ad}|b_1 - b_2| \\ \quad \forall b_1, b_2 \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, r \in [-L, L], p.p.\ x \in \Gamma_3 \\ \quad \text{et } |H_{ad}(x, b_1, z_1, r_1) - H_{ad}(x, b_2, z_2, r_2)| \leq L_{ad}(|b_1 - b_2| + |z_1 - z_2| + |r_1 - r_2|) \\ \quad \forall b_1, b_2 \in [0, 1], z_1, z_2 \in \mathbb{R}, r_1, r_2 \in [-L, L], p.p.\ x \in \Gamma_3; \\ (b)\ \text{l'application } x \mapsto H_{ad}(x, b, z, r) \text{ est Lebesgue mesurable} \\ \quad \text{sur } \Gamma_3, \forall b, z \in \mathbb{R},\ r \in [-L, L]; \\ (c)\ \text{l'application } (b, z, r) \mapsto H_{ad}(x, b, z, r) \text{ est continue sur} \\ \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-L, L], p.p.\ x \in \Gamma_3; \\ (d)\ H_{ad}(x, 0, z, r) = 0, \forall z \in \mathbb{R},\ r \in [-L, L], p.p.\ x \in \Gamma_3; \\ (e)\ H_{ad}(x, b, z, r) \geq 0, \forall b \leq 0, z \in \mathbb{R},\ r \in [-L, L], p.p.\ x \in \Gamma_3 \text{ et} \\ \quad H_{ad}(x, b, z, r) \leq 0, \forall b \geq 1, z \in \mathbb{R},\ r \in [-L, L], p.p.\ x \in \Gamma_3. \end{array}\right. \tag{2.1.23}$$

On note que si $\beta \in L^\infty(\Gamma_3)$, $z \in L^\infty(\Gamma_3)$ et $r : \Gamma_3 \to$ est une fonction mesurable, alors les conditions sur H_{ad}impliquent que $x \to H_{ad}(x, b(x), z(x), Rr(x)) \in L^\infty(\Gamma_3)$. Il est facile de voir que le coefficient d'$adhsion\gamma_\nu \in L^\infty(\Gamma_3)$vérifie $\gamma_\nu \geq 0$p.p. sur Γ_3, alors les fonctions H_{ad}données dans les exemples (2.1.6) et (2.1.7) vérifient les conditions (2.1.23).

On suppose que les forces volumiques et surfacique satisfaient :

$$f_0 \in W^{1,1}(0, T; H), \quad f_2 \in W^{1,1}\left(0, T; L^2(\Gamma_2)^d\right). \tag{2.1.24}$$

Finalement, les conditions initiales vérifient :

$$u_0 \in U_{ad},\ \beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3) \text{ et } 0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad p.p.\ x \in \Gamma_3. \tag{2.1.25}$$

Dans ce chapitre, nous utilisons

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}},\ \|u\|_{\mathcal{A}} = \langle u, u \rangle_{\mathcal{A}}^{1/2},$$

ce sont respectivement un produit scalaire et une norme sur V équivalent à $\langle .,. \rangle_V$, $\|.\|_V$. Notons que $\langle V, \langle .,. \rangle_{\mathcal{A}} \rangle$ est un espace de *Hilbert* et les normes $\|.\|_{\mathcal{A}}$, $\|.\|_V$ sont équivalentes. L'utilisation de produit scalaire $\langle .,. \rangle_{\mathcal{A}}$ simplifie certaines représentation dans ce chapitre.
En utilisant le théorème de représentation de *Riesz*, on obtient l'existence d'un élément $f(t) \in V$ tel que :

$$\langle f(t), v \rangle_{\mathcal{A}} = \langle f_0(t), v \rangle_H + \langle f_2(t), v \rangle_{L^2(\Gamma_2)^d}, \quad \forall v \in V \ p.p. \ t \in (0.T) \tag{2.1.26}$$

et soit $j : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle :

$$j(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(\beta, u_\nu) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta, u_\tau) v_\tau da, \quad \forall \beta \in L^\infty(\Gamma_3), \forall u, v \in V. \tag{2.1.27}$$

On remarque que les conditions (2.1.22) entraînent que l'intégrale (2.1.27) est bien définie, et on note que la condition (2.1.24) implique

$$f \in W^{1,1}(0, T; V).$$

On note par v_ν et v_τ les compsantes normale respectivement tangentielle de v sur la frontière Γ données par

$$v_\nu = v.\nu, \qquad v_\tau = v - v_\nu \nu. \tag{2.1.28}$$

Similairement, on définit les composantes normale et tangentielle du tenseur des contraintes par

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu, \qquad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu. \tag{2.1.29}$$

En outre, on définit l' ensemble des "déplacements admissibles"

$$U_{ad} = \{v \in H_1 \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } v_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

2.2 Première formulation variationnelle

On va donner une formulation variationnelle pour le problème mécanique P.

Lemme 2.2.1. *Si le triplet de fonctions (u, σ, β) est une solution régulière du problème mécanique P alors pour tout t appartenant à $[0, T]$ on a :*

$$\begin{cases} u(t) \in U_{ad}, \quad \langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v) - \\ -j(\beta(t), u(t), u(t)) \ \geq \langle f(t), v - u(t) \rangle_V, \quad \forall v \in U_{ad}. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Démonstration. Moyennant la formule de *Green* et (2.1.9) on a :

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f_0(t), v - u(t) \rangle_H + \int_\Gamma \sigma(t)\nu.(v - u(t)) da, \tag{2.2.2}$$

et en utilisant (2.1.10), (2.1.11) et (2.1.26) on trouve :

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f(t), v - u(t) \rangle_V + \int_{\Gamma_3} \sigma(t)\,\nu.(v - u(t))\,da. \qquad (2.2.3)$$

En remplaçant maintenant, par les relations (2.1.28) et (2.1.29) on obtient :

$$\begin{cases} \langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f(t), v - u(t) \rangle_V + \int\limits_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t).(v_\nu - u_\nu)da + \\ \qquad + \int\limits_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t).(v_\tau - u_\tau)\,da. \end{cases} \qquad (2.2.4)$$

D'après (2.1.13) on peut écrire la relation (2.2.4) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \quad &= \langle f(t), v - u(t) \rangle - \int\limits_{\Gamma_3} p_\tau(\beta(t), u_\tau).(v_\tau - u_\tau)\,da - \\ &- \int\limits_{\Gamma_3} p_\nu(\beta(t), u_\nu).(v_\nu - u_\nu)\,da + \\ &+ \int\limits_{\Gamma_3} (\sigma_\nu(t) + p_\nu(\beta(t), u_\nu)).(v_\nu - u_\nu)\,da \end{aligned} \qquad (2.2.5)$$

et moyennant (2.1.11), (2.1.12), (2.1.13), (2.1.27) et (2.2.5) il vient :

$$\begin{cases} \langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v - u(t)) \geq \langle f(t), v - u(t) \rangle_V, \\ \forall u, v \in U_{ad} \quad p.p.\ t \in (0, T). \end{cases} \qquad (2.2.6)$$

■

Le Lemme précédent nous permet donc de considérer la formulation faible suivante pour le problème mécanique P :

Probléme $\mathrm{P_V}$: *Trouver le champ des déplacement* $u : [0,T] \to V$, le *champ des contraintes* $\sigma : [0,T] \to \mathcal{H}_1$ *et le champ d'adhésion* $\beta : [0,T] \to L^\infty(\Gamma_3)$ *tels que :*

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}(\varepsilon(u(t))), \qquad (2.2.7)$$

$$\dot{\beta}(t) = H_{ad}\left(\beta(t), \zeta_\beta(t), R(|u(t)|)\right), 0 \leq \beta(t) \leq 1,\ p.p.\ t \in (0,T), \qquad (2.2.8)$$

$$\begin{cases} u(t) \in U_{ad}, \quad \langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v) - \\ -j(\beta(t), u(t), u(t)) \geq \langle f(t), v - u(t) \rangle_V, \quad \forall v \in U_{ad}, \end{cases} \qquad (2.2.9)$$

$$u(0) = u_0,\ \beta(0) = \beta_0. \qquad (2.2.10)$$

2.3 Premier théorème d'existence et d'unicité

Notre intérêt principal dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel $\mathrm{P_V}$.

Théorème 2.3.2. *Sous les hypothèse (2.1.19)-(2.1.25) le problème variationnel P_{V} admet une solution unique (u, σ, β) ayant la régularité suivante :*

$$u \in W^{1,\infty}(0,T;V)\,, \tag{2.3.11}$$

$$\sigma \in L^{\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)\,, \tag{2.3.12}$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^{\infty}(\Gamma_3))\,. \tag{2.3.13}$$

Remarque 2.3.3. Si la solution faible est assez régulière, alors le problème variationnel $\mathrm{P_V}$ et le problème P sont équivalente.

Remarque 2.3.4. On conclut que sous les hypothèses (2.1.19)-(2.1.25), le problème P possède une solution faible unique satisfait (2.3.11)-(2.3.13).

La démonstration du théorème (2.3.1) sera faite en plusieurs étapes. Elle est basée sur les résultats des inéquations d'évolution des opérateurs maximalaux monotones et en utilisant des arguments du point fixe.
Nous supposons dans la suite que (2.1.19)-(2.1.25) sont vérifiés.
Soit $\eta \in L^{\infty}(0,T;V)$ donné. Dans cette première étape on considère le problème de viscosité suivant :

Problème $\mathrm{P}_{\mathrm{V}}^{\eta}$: *trouver le champ des déplacements $u_\eta : [0,T] \to V$, tels que :*

$$\begin{cases} \langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\eta(t))\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\eta(t))\rangle_{\mathcal{H}} + \\ + \langle \eta(t), v - u_\eta(t)\rangle_V \geq \langle f(t), v - u_\eta(t)\rangle_{\mathcal{A}}, \qquad \forall v \in V \quad p.p.\ t \in (0,T)\,, \end{cases} \tag{2.3.14}$$

$$u_\eta(0) = u_0. \tag{2.3.15}$$

Lemme 2.3.5. *Sous les hypothèses (2.1.19)-(2.1.26) il existe une solution unique u_η du problème P_{V}^{η}, avec la régularité $u_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, et vérifie $u_\eta(0) = u_0$.*

Démonstration. D'après le théorème de représentation de *Riesz,* on peut définir l'opérateur $G : V \to V$ par :

$$\langle Gu, v\rangle_{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{G}\varepsilon(u), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}}\,, \qquad \forall u, v \in V.$$

D'après les hypothèses (2.1.19) de $\mathcal{A}$ et les hypothéses (2.1.20) de $\mathcal{G}$ on a :

$$\|Gu_1 - Gu_2\|_{\mathcal{A}} \leq \frac{L_{\mathcal{G}}}{m_{\mathcal{A}}}\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{A}}\,, \qquad \forall u_1, u_2 \in V,$$

c'est à dire G est un opérateur de *lipschitz* et continue. De plus, l'opérateur

$$G + \frac{L_{\mathcal{G}}}{m_{\mathcal{A}}} I : V \to V,$$

est un opérateur monotone de *lipschitz* et continue dans V.

Soit la fonction indicatrice de l'ensemble U_{ad}

$$\Psi_{U_{ad}} : V \to (-\infty, +\infty]$$

et soit $\partial\Psi_{U_{ad}}$ le sous-différentiabilité de $\Psi_{U_{ad}}$.

Comme U_{ad} est un convexe fermé de l'espace V, alors $\partial\Psi_{U_{ad}}$ est un opérateur maximal monotone dans V et $D\left(\partial\Psi_{U_{ad}}\right) = U_{ad}$. De plus, on a :

$$\partial\Psi_{U_{ad}} + G + \frac{L_{\mathcal{G}}}{m_{\mathcal{A}}} I : U_{ad} \subset V \to 2^{V},$$

est un opérateur maximal monotone.

sous l'hypothèse (2.1.25) on applique le théorème (A.2.26) avec $H = V$ associé le produit scalaire $\langle ., . \rangle_{\mathcal{A}}$,

$$A = \partial\Psi_{U_{ad}} + G : D(A) = U_{ad} \subset V \to 2^{V}$$

et

$$\alpha = \frac{L_{\mathcal{G}}}{m_{\mathcal{A}}}.$$

De plus, on définit l 'élément $f_{\eta}(t) \in V$ par :

$$\langle f_{\eta}(t), v \rangle_{V} = \langle f(t), v \rangle_{V} - \langle \eta(t), v \rangle_{V}, \qquad \forall v \in U_{ad}.$$

On conclut qu'il existe un élément unique $u_{\eta} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ tel que :

$$\dot{u}_{\eta}(t) + \partial\Psi_{U_{ad}}(u_{\eta}(t)) + Gu_{\eta}(t) \ni f_{\eta}(t), \qquad p.p.\ t \in (0,T), \tag{2.3.16}$$

$$u_{\eta}(0) = u_0. \tag{2.3.17}$$

On obsèrve que pour tout $u, g \in V$, on a l'hypothèse suivante :

$$g \in \partial\Psi_{U_{ad}} \Longleftrightarrow u \in U_{ad}\ ,\ \langle g, v - u \rangle_{\mathcal{A}} \leq 0, \qquad \forall v \in U_{ad}.$$

Donc d'après l'inclusion (2.3.16) on a $u_{\eta}(t) \in U_{ad}$ et l' inéquation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \langle \dot{u}_{\eta}(t), v - u_{\eta}(t) \rangle_{\mathcal{A}} + \langle Gu_{\eta}(t), v - u_{\eta}(t) \rangle_{\mathcal{A}} \geq \langle f_{\eta}(t), v - u_{\eta}(t) \rangle_{\mathcal{A}}, \\ \forall v \in U_{ad}, \qquad p.p.\ t \in (0,T). \end{cases}$$

Alors u_η satisfait $u_\eta(t) \in U_{ad}$ et l'inéquation

$$\begin{cases} \langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\eta(t))\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\eta(t))\rangle_{\mathcal{H}} + \\ + \langle \eta(t), v - u_\eta(t)\rangle_{\mathcal{A}} \geq \langle f(t), v - u_\eta(t)\rangle_{\mathcal{A}}, \qquad \forall v \in U_{ad} \ p.p. \ t \in (0,T). \end{cases} \tag{2.3.18}$$

Il s'ensuit de (2.3.18) et (2.3.16) que u_η est une solution du problème variationnel $\mathrm{P}_{\mathrm{V}}^{\eta}$ et qui satisfait (2.3.11) ce qui termine la partie d'existence du lemme (2.3.3). L'unicité de la solution $u_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ qui saitsfait (2.3.16) et (2.3.17) est assurée par le théorème (A.2.26). ■

On remarque, en prenant $v = u_\eta(t) \pm \varphi$ dans (2.3.14), $\forall \varphi \in D(\Omega)^d$, il vient à partir de la définition (2.1.26) pour $f(t)$ et la formule de *Green*

$$Div\sigma_\eta(t) + f_0(t) = 0 \qquad p.p. \ t \in (0,T). \tag{2.3.19}$$

Et sachant que $f_0 \in (0,T;H)$, il résulte que $Div\sigma_\eta \in L^\infty(0,T;H)$, et par suite $\sigma_\eta \in L^\infty(0,T;\mathcal{H}_1)$. Ainsi, on déduit l'éxistence et l'unicité du couple $(u_\eta, \sigma_\eta) \in W^{1,\infty}(0,T;V) \times L^\infty(0,T;\mathcal{H}_1)$ solution du problème $\mathrm{P}_{\mathrm{V}}^{\eta}$.
pour tout $\eta \in L^\infty(0,T;V)$, on note par u_η la solution du problème $\mathrm{P}_{\mathrm{V}}^{\eta}$ obtenue dans le lemme (2.3.4).
Dans l'étape suivante, on résout l'équation différentielle du champ d'adhésion sous l'hypothèse $u = u_\eta$.
On considère le problème d'évolution suivant :

Probléme $\mathrm{Q}_{\mathrm{V}}^{\eta}$: *trouver le champ d'adhésion* $\beta_\eta : [0,T] \to L^\infty(\Gamma_3)$ *tel que :*

$$\dot{\beta}_\eta(t) = H_{ad}\left(\beta_\eta(t), \zeta_{\beta_\eta}(t), R(|u_{\eta\tau}(t)|)\right), \tag{2.3.20}$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0. \tag{2.3.21}$$

En utilisant la version du théoréme *Cauchy-Lipschitz* et les arguments du point fixe de *Banach* on a le résultat suivant :

Lemme 2.3.6. *Il existe une solution unique du problème $\mathrm{Q}_{\mathrm{V}}^{\eta}$ qui satisfait (2.3.13).*

Démonstration. Pour simplifier, on supprime la dépendance des différentes fonctions de $x \in \Gamma_3$, et on note que les égalités et les inégalités ci-après sont valides *p.p.* sur Γ_3. Soit $\zeta \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))$ et soit l'application $F_{\eta\zeta}(t,.) : L^\infty(\Gamma_3) \to L^\infty(\Gamma_3)$ définie *p.p.* sur $(0,T)$ par :

$$F_{\eta\zeta}(t,\beta) = H_{ad}(\beta, \zeta(t), R(|u_{\eta\tau}(t)|)).$$

Il est facile de vérifier que $F_{\eta\zeta}$ est de *lipschitz* par rapport à la seconde variable, uniformément en temps. En plus, pour tout $\beta \in L^\infty(\Gamma_3)$, l'application $t \mapsto F_{\eta\zeta}(t,\beta)$

appartient à $L^{\infty}(0,T;L^{\infty}(\Gamma_3))$. Ainsi, en utilisant une version du théorème de *Cauchy-Lipschitz* (voir [43]), on déduit qu'il y a une solution unique $\beta_{\eta\zeta}\in W^{1,\infty}(0,T;L^{\infty}(\Gamma_3))$ telle que :

$$\dot{\beta}_{\eta\zeta}(t)=H_{ad}\left(\beta_{\eta\zeta}(t),\zeta(t),R(|u_{\eta\tau}(t)|)\right)\qquad p.p.t\in(0,T), \tag{2.3.22}$$

$$\beta_{\eta\zeta}(0)=\beta_0. \tag{2.3.23}$$

Maintenant on prouve que $\beta_{\eta\zeta}$ vérifier la condition $0\le\beta_{\eta\zeta}\le 1$, Supposant que $\beta_{\eta\zeta}(t_0)<0$ pour $t_0\in[0,T]$, l'opérateur $t\mapsto\beta(t):[0,T]\to\mathbb{R}$ est continue, on peut trouver $t_1\in[0,t_0)$ tel que $\beta_{\eta\zeta}(t_1)=0$.

Maintenant, soit $t_2=\sup\left\{t\in[t_1,t_0],\ \beta_{\eta\zeta}(t)=0\right\}$, alors $t_2<t_0$, $\beta_{\eta\zeta}(t_2)=0$ et $\beta_{\eta\zeta}(t)<0$ pour $t\in(t_2,t_0]$, de (2.1.23) et (2.3.22) on a $\dot{\beta}_{\eta\zeta}(t)\ge 0$ pour $t\in(t_2,t_0]$, donc $\beta_{\eta\zeta}(t_0)\ge\beta_{\eta\zeta}(t_2)=0$ ceci est absurde. De la même manière, on prouve que $\beta_{\eta\zeta}(t)\le 1$ pour tout $t\in[0,T]$.

On conclut donc :

$$0\le\beta_{\eta\zeta}(t)\le 1,\qquad\forall t\in[0,T]\qquad\text{sur }\Gamma_3. \tag{2.3.24}$$

On considère l'opérateur $\Lambda_\eta:L^{\infty}(0,T;L^{\infty}(\Gamma_3))\to L^{\infty}(0,T;L^{\infty}(\Gamma_3))$ définie par :

$$\Lambda_\eta\zeta(t)=\int_0^t\beta_{\eta\zeta}(s)\,ds,\qquad\forall t\in[0,T], \tag{2.3.25}$$

prouvons que Λ_η possède un unique point fixe.

Soit $\zeta_1,\zeta_2\in L^{\infty}(0,T;L^{\infty}(\Gamma_3))$ et soit $s\in[0,T]$, d'après (2.3.22), (2.3.23) pour $i=1,2$ on a :

$$\beta_{\eta\zeta}(s)=\beta_0+\int_0^t H_{ad}\left(\beta_{\eta\zeta_i}(\theta),\zeta_i(\theta),R(|u_{\tau\eta}(\theta)|)\right)d\theta.$$

On utilise (2.3.24) et (2.1.23) on trouve :

$$\left|\beta_{\eta\zeta_1}(s)-\beta_{\eta\zeta_2}(s)\right|\le L_{ad}\int_0^t\left|\beta_{\eta\zeta_1}(\theta)-\beta_{\eta\zeta_2}(\theta)\right|d\theta+L_{ad}\int_0^t|\zeta_1(\theta)-\zeta_2(\theta)|\,d\theta.$$

On applique l'inégalité de *Gronwall*

$$\left|\beta_{\eta\zeta_1}(s)-\beta_{\eta\zeta_2}(s)\right|\le C\int_0^t|\zeta_1(\theta)-\zeta_2(\theta)|\,d\theta$$

et on obtient :

$$\left\|\beta_{\eta\zeta_1}(s)-\beta_{\eta\zeta_2}(s)\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\leq C\int_0^t\|\zeta_1(\theta)-\zeta_2(\theta)\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\,d\theta. \tag{2.3.26}$$

Soit C une constante positive dépend de β, d'après (2.3.26) et (2.3.25) on trouve :

$$\|\Lambda_\eta\zeta_1(t)-\Lambda_\eta\zeta_2(t)\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\leq C\int_0^t\int_0^s\|\zeta_1(\theta)-\zeta_2(\theta)\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\,d\theta,\qquad\forall t\in[0,T],$$

pour n intégrale on a :

$$\left\|\Lambda_\eta^n\zeta_1-\Lambda_\eta^n\zeta_2\right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))}\leq\frac{(CT)^{2n}}{(2n)!}\|\zeta_1-\zeta_2\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))},$$

puisque le terme $\dfrac{C^{2n}}{(2n)!}$ tend vers 0, lorsque $n\to\infty$, alors pour n assez grand l'opérateur Λ_η^n est une contraction dans l'espace de Banach $L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))$. Donc il existe un unique $\zeta_\eta^*\in L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))$ tel que $\Lambda_\eta^n\zeta_\eta^*=\zeta_\eta^*$.

Il est clair de voir que ζ_η^* est aussi l'unique point fixe de l'opérateur Λ_η.

Soit $\beta_\eta=\beta_{\eta\zeta_\eta^*}$ et la solution de (2.3.22) et (2.3.23) pour $\zeta=\zeta_\eta^*$.

On utilise (2.3.25) et la définition de ζ_β on obtient :

$$\zeta_\eta^*(t)=\Lambda_\eta\zeta_\eta^*(t)=\int_0^t\beta_{\eta\zeta_\eta^*}(s)\,ds=\int_0^t\beta_\eta(s)\,ds=\zeta_{\beta_\eta}(t),\ \forall t\in[0,T].$$

D'après (2.3.22)-(2.3.24) on a β_η est la solution de problème $\mathrm{Q}_{\mathrm{V}}^\eta$ qui satisfait (2.3.13) et (2.3.24).

On conclut la partie d'existence de lemme (2.3.4), la partie d'unicité est une conséquence d'unicité de point fixe de l'opérateur Λ_η définie par (2.3.25). ■

Pour $\eta\in L^\infty(0,T;V)$ nous notons par β_η la solution de problème $\mathrm{Q}_{\mathrm{V}}^\eta$ obtenue dans lemme (2.3.5). On définit l'opérateur $\Lambda:L^\infty(0,T;V)\to L^\infty(0,T;V)$ par :

$$\langle\Lambda\eta(t),v\rangle_V=j\left(\beta_{u_\eta}(t),u_\eta(t),v\right),\qquad\forall v\in V,\ \forall t\in[0,T]. \tag{2.3.27}$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.3.7. *Pour tout $\eta\in L^\infty(0,T;V)$ la fonction $\Lambda\eta:[0,T]\to V$ est continue. En outre, il existe un unique élément $\eta^*\in L^\infty(0,T;V)$ tel que $\Lambda\eta^*=\eta^*$.*

Démonstration. soit $\eta \in L^{\infty}(0,T;V)$ et soit $t_1, t_2 \in [0,T]$, en utilisant (2.3.26), (2.1.27), (2.1.17) et (2.1.18) on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\langle \Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2), v\rangle_V\right| &\leq \int_{\Gamma_3} \left|p_\nu\left(\beta_\eta(t_1) - \beta_\eta(t_2), u_{\nu\eta}(t_1) - u_{\nu\eta}(t_2)\right)\right| |v|\, da + \\
&+ \int_{\Gamma_3} \left|p_\tau\left(\beta_\eta(t_1) - \beta_\eta(t_2), u_{\tau\eta}(t_1) - u_{\tau\eta}(t_2)\right)\right| |v|\, da;
\end{aligned}$$

A l'aide de (2.1.19)-(2.1.23) on trouve :

$$\begin{aligned}
\left|\langle \Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2), v\rangle_V\right| &\leq \int_{\Gamma_3} L_\nu\left(\left|\beta_\eta(t_1) - \beta_\eta(t_2)\right| + |u_{\nu\eta}(t_1) - u_{\nu\eta}(t_2)|\right) |v|\, da + \\
&+ \int_{\Gamma_3} L_\tau\left(\left|\beta_\eta(t_1) - \beta_\eta(t_2)\right| + |u_{\tau\eta}(t_1) - u_{\tau\eta}(t_2)|\right) |v|\, da; \\
&\leq (L_\nu + L_\tau) C_0 \left(\left|\beta_\eta(t_1) - \beta_\eta(t_2)\right|_{L^2(\Gamma_3)} + |u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)|_V\right) |v|_V .
\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

Puis que $t \mapsto u_\eta(t) : [0,T] \to V$ et $t \mapsto \beta_\eta(t) : [0,T] \to L^{\infty}(\Gamma_3)$ sont des fonctions continues, on déduit des inégalités (2.3.28) que $\Lambda\eta$ est une fonction continue.

Soit $t \in [0,T]$ fixé, et soit η_1 et $\eta_2 \in L^{\infty}(0,T;V)$, et notons $u_{\eta_i} = u_i, \quad \beta_{\eta_i} = \beta_i,$ pour $i = 1,2$, en utilisant les arguments, similaires pour montrer l'inégalité (2.3.28) on a :

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V \leq (L_\nu + L_\tau) C_0 \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}\right). \tag{2.3.29}$$

Majorons maintenant, le terme $\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}$.

De (2.3.20) et (2.3.21) on trouve

$$\beta_i(t) = \beta_0 + \int_0^t H_{ad}\left(\beta_i(s), \zeta_{\beta_i}(s), R(|u_{i\tau}(s)|)\right) ds, \qquad i = 1,2. \tag{2.3.30}$$

On utilise (2.3.30) et (2.1.23) et la définition de R dans (2.1.5), pour obtenir :

$$\begin{aligned}
|\beta_1(t) - \beta_2(t)| \leq\ & L_{ad} \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|\, ds + \\
&+ L_{ad} \int_0^t \left|\zeta_{\beta_1}(s) - \zeta_{\beta_2}(s)\right| ds + L_{ad} \int_0^t |u_{1\tau}(s) - u_{2\tau}(s)|\, ds.
\end{aligned} \tag{2.3.31}$$

En utilisant la relation

$$\zeta_\beta(x,t) = \int_0^t \beta(x,s)\, ds,$$

On a l'inégalité suivante :

$$\int_0^t \left|\zeta_{\beta_1}(s) - \zeta_{\beta_2}(s)\right| ds \leq c \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|\, ds, \qquad (2.3.32)$$

D'après (2.3.20), (2.3.21) et le lemme de *Gronwall* donnent :

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)| \leq L_{ad} e^{(1+c)TL_{ad}} \int_0^t |u_{1\tau}(s) - u_{2\tau}(s)|\, ds.$$

En intégrant l'inégalité précédente sur Γ_3 et en utilisant (2.1.18) on obtient :

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C_0 L_{ad} e^{(1+c)TL_{ad}} \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V\, ds. \qquad (2.3.33)$$

En remplaçant ce résultat dans (2.3.29) on trouve :

$$\begin{aligned} \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V &\leq (L_\nu + L_\tau)\, C_0 \|u_1(t) - u_2(t)\|_V \\ &+ (L_\nu + L_\tau)\, C_0^2 L_{ad} e^{(1+c)TL_{ad}} \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V\, ds. \end{aligned} \qquad (2.3.34)$$

D'après (2.3.14), (2.3.33) s'écrit sous la forme :

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V \leq N \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V + M \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|\, ds, \qquad (2.3.35)$$

telle que :

$$N = (L_\nu + L_\tau)\, C_0$$

et

$$M = (L_\nu + L_\tau)\, C_0^2 L_{ad} e^{(1+c)TL_{ad}}\ .$$

Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{cases} I_0(t) = \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V\,, \\ I_1(t) = \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V\, ds, \\ I_K(t) = \int_0^t \int_0^{s_{k-1}} \ldots \int_0^{s_1} \|\eta_1(r) - \eta_2(r)\|_V\, dr ds_1 \ldots ds_{k-1}, \forall k \geq 2. \end{cases} \qquad (2.3.36)$$

On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$I_k(t) \leq \frac{T^k}{k!} \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V, \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.3.37}$$

En réitérant l'inégalité (2.3.35) et en utilisant (2.3.36), on déduit que :

$$\|\Lambda^n \eta_1(t) - \Lambda^n \eta_2(t)\|_V \leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^{n-k} M^k I_k(t),$$

où Λ^n est la nième puissance de l'opérateur Λ. Moyennant maintenant (2.3.37), on obtient

$$\|\Lambda^n \eta_1(t) - \Lambda^n \eta_2(t)\|_V \leq \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k N^{n-k} \frac{M^k T^k}{k!} \right) \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V. \tag{2.3.38}$$

Il est facile de vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k N^{n-k} \frac{M^k T^k}{k!} \leq \frac{(Nn + MT)^n}{n!}$$

et par conséquent (2.3.38) implique, pour tout $t \in [0, T]$ et $n \in \mathbb{N}$, que :

$$\|\Lambda^n \eta_1 - \Lambda^n \eta_2\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq \frac{(Nn + MT)^n}{n!} \|\eta_1 - \eta_2\|_{L^\infty(0,T;V)}. \tag{2.3.39}$$

Supposons que $N = (L_\nu + L_\tau) C_0 < \frac{1}{e}$, il sensuit d'aprés le critère de *D'Alembert* que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Nn + MT)^n}{n!},$$

est convergente, d'où résulte que le terme général

$$\frac{(Nn + MT)^n}{n!} \quad \text{tend vers } 0, \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{2.3.40}$$

On conclut de (2.3.39) et (2.3.40) que pour n suffisamment grand, l'opérateur Λ^n est une contraction dans l'espace de *Banach* $L^\infty(0, T; V)$. Il existe un seul élément $\eta^* \in L^\infty(0, T; V)$ tel que $\Lambda^n \eta^* = \eta^*$ et, en plus, η^*est l'unique point fixe de l'opérateur Λ vérifiant :

$$\langle \eta^*(t), v \rangle_V = \langle \Lambda \eta^*(t), v \rangle_V = j\left(\beta_{\eta^*}(t), u_{\eta^*}(t), v\right), \ \forall v \in V.$$

$\blacksquare$

Démonstration du théorème 2.3.2

Existence : soit $\eta^* \in L^\infty(0,T;V)$ le point fixe de Λ définie par (2.3.27) et soit u,β la solution des problème $\mathrm{P}_\mathrm{V}^\eta$ et $\mathrm{Q}_\mathrm{V}^\eta$ pour $\eta = \eta^*$ c'est à dire $u = u_{\eta^*}$, $\beta = \beta_{\eta^*}$, nous désignons par σ la fonction donnée par (2.1.8), il résulte que (2.2.7), (2.2.10) et (2.3.11) sont vérifiées de plus $\Lambda\eta^* = \eta^*$,

on déduit :

$$\langle \Lambda\eta^*(t), v\rangle = \langle \eta^*(t), v\rangle, \qquad \forall\ v \in V\ p.p.t \in (0,T)$$

et d'après (2.3.19) on conclut que le triplet $\{u,\sigma,\beta\}$ est une solution du problème P_V et qui satisfait la régularité (2.3.11)-(2.3.13) ce qui conclut l'éxistence de la solution.
Unicité : l'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité de point fixe de l'opérateur Λ, et l'unicité des solutions des problèmes $\mathrm{P}_\mathrm{V}^\eta$ et $\mathrm{Q}_\mathrm{V}^\eta$. ■

2.4 Seconde formulation variationnelle

Dans cette section, on propose une seconde formulation variationnelle notée P_2 du problème mécanique P, le problème P_2 est formulé à l'aide du champ des contraintes et le champ d'adhésion.
Pour obtenir la formulation variationnelle on introduit la notation suivante :
Pour tout $(\beta,w) \in L^\infty(\Gamma_3) \times H_1$, on définie le champ des contraintes admissibles suivants :

$$\Sigma_{ad}(\beta,u,t) = \{\tau \in \mathcal{H} \text{ tel que } \langle \tau, \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta,u,v) \geq \langle f, v\rangle_V,\ \forall v \in U_{ad}\},\ \forall t \in [0,T]. \tag{2.4.1}$$

Lemme 2.4.1. *Si le triplet de fonctions (u,σ,β) est une solution régulière du problème mécanique P alors pour tout t appartenant à $[0,T]$ on a :*

$$\sigma(t) \in \Sigma_{ad}(\beta,u,t) \quad \langle \tau - \sigma(t), \varepsilon(u(t))\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(\beta,u,t). \tag{2.4.2}$$

Démonstration. Soit $t \in [0,T]$ et supposons que (u,σ) est solution de Pv. Alors pour $v = 2u(t)$ puis $v = 0$ dans (2.2.9) on obtient :

$$\begin{cases} \langle \sigma(t), \varepsilon(u(t))\rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), u(t)) = \langle f(t), u(t)\rangle_V, \qquad \forall t \in [0,T], \\ \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.4.3}$$

en utilisant l'équation précédente et une seconde fois (2.2.9) on déduit que

$$\sigma(t) \in \Sigma_{ad}(\beta,u,t), \tag{2.4.4}$$

en utilisant la définition de $\Sigma_{ad}(\beta,u,t)$, on obtient que :

$$\langle \tau - \sigma, \varepsilon(u(t))\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(\beta,u,t), \quad \forall t \in [0;T].$$

■

Le Lemme précedent nous permet donc de considérer la formulation faible suivante pour le problème mécanique P :

Problème P_2 : *Trouver le champ des déplacements* $u : [0,T] \to V$, *le champ des contraintes* $\sigma : [0,T] \to \mathcal{H}_1$ *et le champ d'adéhsion* $\beta : [0,T] \to L^\infty(\Gamma_3)$ *tels que :*

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}(\varepsilon(u)) \qquad p.p.\ t \in (0,T),$$

$$\dot{\beta}(t) = H_{ad}\left(\beta(t), \zeta_\beta(t), R(|u_\tau(t)|)\right), 0 \le \beta(t) \le 1,\ p.p.\ t \in (0,T),$$

$$\begin{cases} \sigma(t) \in \Sigma_{ad}(\beta, u, t) \\ \\ \langle \tau - \sigma(t), \varepsilon(u(t))\rangle_{\mathcal{H}} \ge 0, \qquad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(\beta, u, t)\ ,\ p.p.\ t \in (0,T), \end{cases} \tag{2.4.5}$$

$$u(0) = u_0, \quad \beta(0) = \beta_0.$$

D'après le lemme au dessus et d'après des arguments développés dans [16] on déduit que (u, σ, β) est solution du problème mécanique P si et seulement si (u, σ, β) est une solution régulière des problèmes $\mathrm{P_V}$ et P_2.
Donc on peut dire que $\mathrm{P_V}$ et P_2 sont formellement équivalents au problème P.

2.5 Résultat d'équivalence

On a le résultat suivant :

Théorème 2.5.2. *Sous les hypothèse (2.1.19)-(2.1.25). Alors* (u, σ, β) *est solution du problème variationnel* P_{V} *si et seulement si* (u, σ, β) *est solution du problème variationnel* P_2

Démonstration. Soit $t \in [0,T]$ et supposons que (u, σ, β) est solution de $\mathrm{P_V}$. Alors pour $v = 2u(t)$ puis $v = 0$ dans (2.2.9) on obtient :

$$\begin{cases} \langle \sigma(t), \varepsilon(u(t))\rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), u(t)) = \langle f(t), u(t)\rangle_V, \quad \forall t \in [0,T] \\ \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.5.6}$$

en utilisant l'équation précédente et une seconde fois (2.2.9) on déduit que

$$\sigma \in \Sigma_{ad}(\beta(t), u(t), t). \tag{2.5.7}$$

L'inégalité variationnelle dans (2.4.5) est maintenant une conséquence de (2.5.6) et (2.4.1). Ainsi on obtient que :

$$\langle \tau - \sigma, \varepsilon(u(t))\rangle_{\mathcal{H}} \ge 0, \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(\beta, u, t), \quad \forall t \in [0;T].$$

Ainsi on conclut que (u, σ, β) est une solution du problème variationnel P_2.

Réciproquement :

Supposons que (u, σ, β) est solution de P_2. On commence par montre tout d'abord que $u(t) \in U_{ad}$. Supposant que $u(t) \notin U_{ad}$ et notant par $P(u(t))$ la projection de $u(t)$ sur le convexe fermé $U_{ad} \subset V$ on a :

$$\begin{cases} \langle P(u(t)) - u(t), v \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle P(u(t)) - u(t), P(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} > \langle P(u(t)) - u(t), u(t) \rangle_{\mathcal{H}}, \\ \forall v \in U_{ad}. \end{cases} \tag{2.5.8}$$

il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle P(u(t)) - u(t), v \rangle_{\mathcal{H}} > \alpha > \langle P(u(t)) - u(t), u(t) \rangle_{\mathcal{H}}, \ \forall v \in U_{ad}, \tag{2.5.9}$$

posons

$$\tilde{\tau}(t) = \varepsilon(P(u(t)) - u(t)) \in \mathcal{H}. \tag{2.5.10}$$

Moyennant (2.5.9) et (2.5.10), on déduit

$$\langle \tilde{\tau}(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} > \alpha > \langle \tilde{\tau}(t), \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}}, \ \forall v \in U_{ad}. \tag{2.5.11}$$

pour $v = 0$ dans (2.5.11), il vient

$$\alpha < 0.$$

Supposant qu'il existe $w \in U_{ad}$

$$\langle \tilde{\tau}(t), \varepsilon(w) \rangle_{\mathcal{H}} < 0, \tag{2.5.12}$$

sachant que $\lambda w \in U_{ad}$ pour tout $\lambda \geq 0$, il vient d'après (2.5.11), que

$$\lambda \langle \tilde{\tau}(t), \varepsilon(w) \rangle_{\mathcal{H}} > \alpha, \quad \forall \lambda \geq 0. \tag{2.5.13}$$

Lorsque $\lambda \longrightarrow \infty$ (2.5.11) et (2.5.13) impliquent que $\alpha \leq -\infty$ qui est une contradiction avec le fait que α soit un réel. Il résulte donc que

$$\langle \tilde{\tau}(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall v \in U_{ad}. \tag{2.5.14}$$

De plus de (2.4.1) et (2.4.3),

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v) = \langle f(t), v \rangle_V, \quad \forall v \in U_{ad}, \tag{2.5.15}$$

en utilisant (2.5.14), (2.5.15), on déduit que

$$\langle \tilde{\tau}(t) + \sigma(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v) = \langle f(t), v \rangle_V, \quad \forall v \in U_{ad},$$

ceci implique que

$$\tilde{\tau}(t) + \sigma(t) \in \Sigma_{ad}(\beta(t), u(t), t). \tag{2.5.16}$$

En remplacant (2.5.16) dans (2.4.3), on obtient

$$\langle \tilde{\tau}(t), \varepsilon\left(u\left(t\right)\right)\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0. \tag{2.5.17}$$

Les inégalités (2.5.11) et (2.5.17) constituent une contradiction et ainsi on a

$$u(t) \in U_{ad}. \tag{2.5.18}$$

Sachant l'appartenance de $u(t)$ à U_{ad}, ceci nous permet maintenant de montrer la seconde relation du problème Pv en utilisant la sous différentiabilité de la fonctionnelle : $j\left(\beta(t), u(t), .\right) : U_{ad} \to \mathbb{R}_+$. On obtient donc l'existence d'un élément $\bar{\tau}(t) \in \mathcal{H}$ tel que :

$$\begin{cases} \left\langle \bar{\tau}(t), \varepsilon\left(v\right) - \varepsilon\left(u(t)\right) \right\rangle_{\mathcal{H}} + j\left(\beta(t), u(t), v\right) - j\left(\beta(t), u(t), u(t)\right) \geq \left\langle f\left(t\right), v - u(t) \right\rangle_{V}, \\ \forall v \in U_{ad}. \end{cases} \tag{2.5.19}$$

Pour $v = 0$ et $v = 2u(t)$ dans (2.5.19) il résulte que :

$$\left\langle \bar{\tau}(t), \varepsilon\left(u(t)\right) \right\rangle_{\mathcal{H}} + j\left(\beta(t), u(t), u(t)\right) = \left\langle f\left(t\right), u(t) \right\rangle_{V}, \quad \forall v \in U_{ad}, \tag{2.5.20}$$

de (2.5.19) et (2.5.20) on a donc

$$\bar{\tau}(t) \in \Sigma_{ad}\left(\beta(t), u(t), t\right).$$

En utilisant alors la relation du problème P_2, on montre aisement la relation suivante :

$$\left\langle \bar{\tau}(t), \varepsilon\left(u\left(t\right)\right) \right\rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle \sigma, \varepsilon\left(u\left(t\right)\right)\rangle_{\mathcal{H}}. \tag{2.5.21}$$

D'après (2.5.20) et (2.5.21) on a :

$$\langle \sigma, \varepsilon\left(u\left(t\right)\right)\rangle_{\mathcal{H}} + j\left(\beta\left(t\right), u\left(t\right), u\left(t\right)\right) \leq \langle f\left(t\right), u\left(t\right)\rangle_{V}. \tag{2.5.22}$$

Mais sachant que $\sigma \in \Sigma_{ad}\left(\beta(t), u(t), t\right)$ et $u(t) \in U_{ad}$ on a aussi

$$\langle \sigma, \varepsilon\left(u\left(t\right)\right)\rangle_{\mathcal{H}} + j\left(\beta\left(t\right), u\left(t\right), u\left(t\right)\right) \geq \langle f\left(t\right), u\left(t\right)\rangle_{V}. \tag{2.5.23}$$

Donc on déduit la relation suivante :

$$\langle \sigma, \varepsilon\left(u\left(t\right)\right)\rangle_{\mathcal{H}} + j\left(\beta\left(t\right), u\left(t\right), u\left(t\right)\right) = \langle f\left(t\right), u\left(t\right)\rangle_{V}. \tag{2.5.24}$$

de (2.5.23) et (2.5.24), on obtient :

$$\langle \sigma, \varepsilon\left(v\right) - \varepsilon\left(u\left(t\right)\right)\rangle_{\mathcal{H}} + j\left(\beta\left(t\right), u\left(t\right), v\right) - j\left(\beta\left(t\right), u\left(t\right), u\left(t\right)\right) \geq \langle f\left(t\right), v - u\left(t\right)\rangle_{V}. \tag{2.5.25}$$

Ceci achève la démonstration de l'équivalence entre les deux problèmes variationnels. ■

2.6 Deuxième résultat d'existence et d'unicité

Le principal résultat de cette partie conserne l'existence et l'unicité du problème variationnel P_2.

Théorème 2.6.1. *Sous les hypothèses (2.1.19)-(2.1.24), le problème P_2 admet une solution unique (u, σ, β) ayant la régularité :*

$$u \in W^{1,\infty}(0, T; V),$$

$$\sigma \in L^{\infty}(0, T; \mathcal{H}_1),$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^{\infty}(\Gamma_3)).$$

Démonstration. La démonstration est une conséquence directe du théorème 2.3.2 et du résultat d'équivalence théorème 2.5.2 ■

Chapitre 3

Approximation numérique

Dans ce chapitre, comme au chapitre 1, on va donner une approximation au problème qui a fait l'objet d'étude théorique dans le chapitre précédente.
Ce chapitre se compose de quatre sections.
La première section est destinée à présenter le problème approché, à donner et estimer l'erreur de la discrétisation incomplète du problème approché. Dans la seconde section on présente et on analyse le schéma de la discrétisation complète du même problème. Dans la troisième section on présente un résultat de convergence pour les deux schémas. Les schémas de discrétisation complète et incomplète sont analysés à l'aide de la méthode des éléments finis. La convergence forte des deux cas est établie sous une régularité minimale de la solution.

3.1 Approximation semi-discrète

On propose dans cette section, une approximation semi-discrète du problème $\mathrm{P_V}$, en discrétisant le domaine spatial. On considère une position générale des espaces arbitraires de dimension finie $V_h \subset V$, $\mathcal{H}_h \subset \mathcal{H}$ et $L_h^2(\Gamma_3) \subset L^2(\Gamma_3)$ utilisés pour approcher les espaces V, $\mathcal{H}$ et $L^2(\Gamma_3)$, h est un paramètre de discrétisation destiné à tendre vers zéro. Partout dans cette section, C dénote une constante positive qui ne dépend que de h dont sa valeur peut changer d'une place à une autre. On considère, pour chaque h, un ensemble $K_h \subset V_h$ qui approche U_{ad} (défini au chapitre 2) et qui vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 1)\ K_h = \text{ ensemble convexe fermé de } V_h, \\ 2)\ K_h \text{ «approche» } U_{ad} \text{ au sens suivant :} \\ (i)\ \ \forall v \in U_{ad},\ \text{on peut trouver } v_h \in K_h \text{ avec } v_h \to v \text{ dans } V; \\ (ii)\ \ \text{Si } u_h \in K_h,\ u_h \to u \text{ dans } V,\ \text{alors } u \in U_{ad}. \end{cases}$$

Ainsi, on considère l'approximation incomplète suivante du problème variationnel $\mathrm{P_V}$.

Problème $\mathrm{P_V^h}$: *Trouver le champ des déplacements* $u_h : [0,T] \to V_h$, *le champ des contraintes* $\sigma_h : [0,T] \to \mathcal{H}_h$ *et le champ d'adhésion* $\beta_h : [0,T] \to L_h^2(\Gamma_3)$ *tels que :*

$$\sigma_h(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_h(t)) + \mathcal{G}(\varepsilon(u_h(t))),\ t \in [0,T], \tag{3.1.1}$$

$$\dot{\beta}_h(t) = H_{ad}\left(\beta_h(t), \zeta_{\beta_h}(t), R(|u_{\tau h}(t)|)\right),\ 0 \le \beta_h(t) \le 1,\ p.p.\ t \in (0,T), \tag{3.1.2}$$

$$\begin{cases} u_h(t) \in K_h, \quad \langle \sigma_h(t), \varepsilon(v_h) - \varepsilon(u_h(t))\rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta_h(t), u_h(t), v_h) - \\ -j(\beta_h(t), u_h(t), u_h(t)) \ge \langle f(t), v_h - u_h(t)\rangle_V,\ \forall v_h \in K_h,\ \forall t \in [0,T], \end{cases} \tag{3.1.3}$$

$$u_h(0) = u_{0h},\ \beta_h(0) = \beta_{0h}. \tag{3.1.4}$$

En utilisant des arguments similaire utilisés par la démonstration du théorème 2.3.1, on montre que $\mathrm{P_V^h}$ possède une solution unique d'où le théorème suivant :

Théorème 3.1.1. *On suppose que les conditions (2.1.19)-(2.1.23) ont lieu. Alors il existe une unique solution* (u_h, σ_h, β_h) *du problème* $\mathrm{P_V^h}$. *De plus, elle satisfait à* $u_h \in W^{1,\infty}(0,T;V_h)$, $\sigma_h \in L^\infty(0,T;\mathcal{H}_h)$, $\beta_h \in W^{1,\infty}(0,T;L_h^2(\Gamma_3))$.

Notre objet est de tirer des estimations d'erreur pour les différences $u - u_h$, $\sigma - \sigma_h$, $\beta - \beta_h$. Pour cela, soit $t \in [0,T]$, en utilisant (2.2.7)-(2.2.9) on a :

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}(\varepsilon(u(t))), \tag{3.1.5}$$

$$\beta(t) = \int_0^t H_{ad}\left(\beta(s), \zeta_\beta(s), R(|u_\tau(s)|)\right) ds + \beta_0, \tag{3.1.6}$$

$$\begin{cases} u(t) \in U_{ad}, \quad \langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t))\rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v) - \\ -j(\beta(t), u(t), u(t)) \ \ge \langle f(t), v - u(t)\rangle_V,\ \forall v \in U_{ad},\ \forall t \in [0,T] \end{cases} \tag{3.1.7}$$

et de (3.1.1)-(3.1.4), on trouve :

$$\sigma_h(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_h(t)) + \mathcal{G}(\varepsilon(u_h(t))), \tag{3.1.8}$$

$$\beta_h(t) = \int_0^t H_{ad}\left(\beta_h(s), \zeta_{\beta_h}(s), R(|u_{\tau h}(s)|)\right) ds + \beta_{0h}, \tag{3.1.9}$$

$$\begin{cases} u_h(t) \in K_h, \quad \langle \sigma_h(t), \varepsilon(v_h) - \varepsilon(u_h(t))\rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta_h(t), u_h(t), v_h) - \\ -j(\beta_h(t), u_h(t), u_h(t)) \ \ge \langle f(t), v_h - u_h(t)\rangle_V,\ \forall v_h \in K_h,\ \forall t \in [0,T]. \end{cases} \tag{3.1.10}$$

En soustrayant (3.1.8) de (3.1.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma(t) - \sigma_h(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t) - \dot{u}_h(t)) + \\ &+ (\mathcal{G}(\varepsilon(u(t))) - \mathcal{G}(\varepsilon(u_h(t)))) . \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

De plus, en remplaçant (3.1.5) dans (3.1.7), on déduit :

$$\begin{cases} \langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(u(t)) - \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle \mathcal{G}(\varepsilon(u(t))), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} + \\ +j(\beta(t), u(t), v) - j(\beta(t), u(t), u(t)) + \langle f(t), u(t) - v \rangle_V, \ \forall v \in U_{ad} \end{cases} \tag{3.1.12}$$

et en remplaçant (3.1.8) dans (3.1.10), on déduit :

$$\begin{cases} \langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_h(t)), \varepsilon(u_h(t)) - \varepsilon(v_h) \rangle \leq \langle \mathcal{G}(\varepsilon(u_h(t))), \varepsilon(v_h) - \varepsilon(u_h(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \\ j(\beta_h(t), u_h(t), v_h) - j(\beta_h(t), u_h(t), u_h(t)) + \langle f(t), u_h(t) - v_h \rangle_V, \ \forall v_h \in K_h. \end{cases} \tag{3.1.13}$$

Maintenant, en soustrayant (3.1.13) pour $v = u_h(t)$ de (3.1.12) $v_h = v_h(t)$, et après quelques manipulations algébriques on aura donc

$$\begin{cases} \langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u} - \dot{u}_h)(t), \varepsilon((u - u_h)(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle \mathcal{A}\varepsilon((\dot{u}_h - \dot{u})(t)), \varepsilon((v_h - u)(t)) \rangle_{\mathcal{H}} + \\ + \langle \mathcal{G}(\varepsilon(u(t))) - \mathcal{G}(\varepsilon(u_h(t))), \varepsilon((u_h - u)(t)) \rangle_{\mathcal{H}} + \\ + \langle \mathcal{G}(\varepsilon(u_h(t))) - \mathcal{G}(\varepsilon(u(t))), \varepsilon((v_h - u)(t)) \rangle_{\mathcal{H}} + \\ +j(\beta(t), u(t), (u_h - u)(t)) - j(\beta_h(t), u_h(t), (u_h - u)(t)) + \\ +j(\beta_h(t), u_h(t), (v_h - u)(t)) - j(\beta(t), u(t), (v_h - u)(t)) + \\ +\mathcal{R}(v_h(t), u(t)), \qquad \forall v_h(t) \in K_h, \end{cases} \tag{3.1.14}$$

où le résuduel $\mathcal{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{R}(v_h(t), u(t)) = \langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}(\varepsilon(u(t))), \varepsilon((v_h - u)(t)) \rangle_{\mathcal{H}} - \\ - \langle f(t), (v_h - u)(t) \rangle_V + j(\beta(t), u(t), (v_h - u)(t)), \quad \forall v_h(t) \in K_h, \end{cases}$$

donc on a :

$$|\mathcal{R}(v_h(t), u(t))| \leq (\|(p_\tau + p_\nu)(\beta, u)(t)\| + \|f(t)\| + \|\sigma(t)\|) \|(v_h - u)(t)\| . \tag{3.1.15}$$

Sachant que :

$$\langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u} - \dot{u}_h), \varepsilon(u - u_h) \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathcal{A}\varepsilon(u - u_h), \varepsilon(u - u_h) \rangle_{\mathcal{H}} .$$

De (2.1.19) et l'inégalité de *Korn*, on a :

$$\langle \mathcal{A}\varepsilon(u-u_h), \varepsilon(u-u_h)\rangle_{\mathcal{H}} \geq m_{\mathcal{A}} \|u-u_h\|^2,$$

donc on a :

$$\langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}-\dot{u}_h), \varepsilon(u-u_h)\rangle_{\mathcal{H}} \geq \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}\frac{d}{dt}\|u-u_h\|^2. \tag{3.1.16}$$

La fonctionnelle j satisfait l'inégalité suivante pour tout β_1, β_2 de $L^2(\Gamma_3)$ et u_1, u_2, u_3 appartenant à V,

$$|j(\beta_1, u_1, u_3) - j(\beta_2, u_2, u_3)| \leq C(\|\beta_1-\beta_2\| + \|u_1-u_2\|)\|u_3\|. \tag{3.1.17}$$

D'après (2.1.16), (3.1.15), (3.1.16) et (3.1.17), l'inégalité (3.1.14) devient :

$$\begin{cases} \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}\frac{d}{dt}\|(u-u_h)(t)\|^2 \leq CL_{\mathcal{G}}\|(u-u_h)(t)\|^2 + CL_{\mathcal{G}}\|(u-u_h)(t)\|\|(v_h-u)(t)\| + \\ + \langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_h-\dot{u})(t), \varepsilon((v_h-u)(t))\rangle_{\mathcal{H}} + \\ +C\|(u-u_h)(t)\|(\|(\beta-\beta_h)(t)\| + \|(u-u_h)(t)\|) + \\ +C(\|(\beta-\beta_h)(t)\| + \|(u-u_h)(t)\|)\|(v_h-u)(t)\| + \\ +C(\|(p_\tau+p_\nu)(\beta,u)(t)\| + \|f(t)\| + \|\sigma(t)\|)\|(v_h-u)(t)\|, \ \forall v_h(t) \in K_h. \end{cases} \tag{3.1.18}$$

En intègrant l'inégalité (3.1.18) de 0 à t on trouve :

$$\begin{cases} \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}\|(u-u_h)(t)\|_V^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}\|u_0-u_{0h}\|^2 \leq CL_{\mathcal{G}}\int_0^t \|(u-u_h)(s)\|_V^2\, ds + \\ +C\|(u-u_h)(t)\|_V\|(v_h-u)(t)\|_V + C\int_0^t (\|(u-u_h)(s)\|_V\|(\dot{v}_h-\dot{u})(s)\|_V)\, ds + \\ +C\int_0^t \left(\left(\|(\beta-\beta_h)(s)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \|(u-u_h)(s)\|_V\right)\|(u-u_h)(s)\|_V\right) ds + \\ +C\int_0^t \left(\left(\|(\beta-\beta_h)(s)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \|(u-u_h)(s)\|_V\right)\|(v_h-u)(s)\|_V\right) ds + \\ +C\int_0^t ((\|(p_\tau+p_\nu)(\beta,u)(s)\| + \|f(s)\| + \|\sigma(s)\|)\|(v_h-u)(s)\|_V)\, ds, \ \forall v_h(t) \in K_h. \end{cases}$$

En appliquant l'inégalité élémentaire

$$ab \leq \frac{a^2}{2\delta} + \frac{\delta b^2}{2} \quad \delta > 0,$$

on aboutit à

$$\begin{cases} C\left\|u-u_h\right\|^2 \leq L_{\mathcal{G}} \int\limits_0^t \left\|\left(u-u_h\right)(s)\right\|^2 ds + C\left\|u_0-u_{0h}\right\|^2 + \\ +C\int\limits_0^t \left\|\left(\dot{v}_h-\dot{u}\right)(s)\right\|^2 ds + \left\|\left(v_h-u\right)(t)\right\|^2 + \\ +C\int\limits_0^t \left(\left\|\left(\beta-\beta_h\right)(s)\right\|^2 + \left\|\left(u-u_h\right)(s)\right\|^2\right) ds + C\int\limits_0^t \left\|\left(u-u_h\right)(s)\right\|^2 ds + \\ +C\int\limits_0^t \left(\left\|\left(\beta-\beta_h\right)(s)\right\|^2 + \left\|\left(u-u_h\right)(s)\right\|^2\right) ds + C\int\limits_0^t \left\|\left(v_h-u\right)(s)\right\|^2 ds + \\ +C\int\limits_0^t \left(\left(\left\|\left(p_\tau+p_\nu\right)(\beta,u)(s)\right\| + \left\|f(s)\right\| + \left\|\sigma(s)\right\|\right)\left\|\left(v_h-u\right)(s)\right\|\right) ds,\ \forall v_h(t)\in K_h. \end{cases}$$

Moyennant l'inégalité de *Minkowski,* on obtient *:*

$$\begin{cases} \left\|u-u_h\right\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq C\int\limits_0^t \left\|\left(u-u_h\right)(s)\right\| ds + C\left\|u_0-u_{0h}\right\| + C\int\limits_0^t \left\|\left(\dot{v}_h-\dot{u}\right)(s)\right\| ds + C\left\|\left(v_h-u\right)(t)\right\| \\ +C\int\limits_0^t \left\|\left(\beta-\beta_h\right)(s)\right\| ds + C\int\limits_0^t \left\|\left(u-u_h\right)(s)\right\| ds + \int\limits_0^t \left\|\left(v_h-u\right)(s)\right\| ds + \\ +C\int\limits_0^t \left(\left(\left\|\left(p_\tau+p_\nu\right)(\beta,u)(s)\right\| + \left\|f(s)\right\| + \left\|\sigma(s)\right\|\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\left(v_h-u\right)(s)\right\|^{\frac{1}{2}}\right) ds,\ \forall v_h(t)\in K_h, \end{cases}$$

d'après :

$$\begin{cases} \left\|\left(v_h-u\right)(t)\right\|_V = C\left(\left\|\left(v_{0h}-u_0\right)\right\| + \left\|\left(\dot{v}_h-\dot{u}\right)(t)\right\|\right) \\ \int\limits_0^t \left\|\left(v_h-u\right)(s)\right\| ds = C\left(\left\|\left(v_{0h}-u_0\right)\right\| + \int\limits_0^t \left\|\left(\dot{v}_h-\dot{u}\right)(s)\right\| ds\right) \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité de *Gronwall*, on trouve :

$$\begin{cases} \left\|u-u_h\right\|_V \leq C\left\|u_0-u_{0h}\right\|_V + C\left\|\dot{v}_h-\dot{u}\right\|_V + \\ +C\left\|\left(v_{0h}-u_0\right)\right\|_V + C\left\|\beta-\beta_h\right\|_{L^2(\Gamma_3)} + \\ +C\left(\left\|\left(p_\tau+p_\nu\right)(\beta,u)\right\| + \left\|f\right\| + \left\|\sigma\right\|\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\dot{v}_h-\dot{u}\right\|^{\frac{1}{2}},\ \forall v_h(t)\in K_h. \end{cases} \tag{3.1.19}$$

Finalement, en soustrayant (3.1.9) de (3.1.6) on trouve :

$$\begin{aligned}\beta-\beta_h &= \int_0^t \left[H_{ad}\left(\beta(s),\zeta_\beta(s),R(|u_\tau(s)|)\right)\right.\\ &\quad \left.-H_{ad}\left(\beta_h(s),\zeta_{\beta_h}(s),R(|u_{h\tau}(s)|)\right)\right]ds+\beta_0-\beta_{0h},\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

et en utilisant les mêmes techniques utilisées pour obtenir (2.3.33), on obtient

$$\|\beta-\beta_h\|_{L^2(\Gamma_3)} = C\int_0^t \|(u-u_h)(s)\|_V\,ds+\int_0^t \|(\beta-\beta_h)(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\,ds+C\|\beta_0-\beta_{0h}\|_{L^2(\Gamma_3)}. \tag{3.1.21}$$

Donc en additionnant de (3.1.18), (3.1.19) et (3.1.20) on trouve :

$$\left\{\begin{array}{l}\|u-u_h\|_V+\|\beta-\beta_h\|_{L^2(\Gamma_3)}\le C\|\dot v_h-\dot u\|+Ce_0+\\[2ex] +C\int_0^t\|(u-u_h)(s)\|_V\,ds+\int_0^t\|(\beta-\beta_h)(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\,ds+\\[2ex] +C\left(\|(p_\tau+p_\nu)(\beta,u)\|+\|f\|+\|\sigma\|\right)^{\frac12}\|\dot v_h-\dot u\|^{\frac12},\ \forall v_h(t)\in K_h.\end{array}\right. \tag{3.1.22}$$

Où

$$e_0=\|u_0-u_{0h}\|+\|\beta_0-\beta_{0h}\|+\|v_{0h}-u_0\|.$$

D'après le lemme de *Gronwall* sur (3.1.21), on déduit :

$$\left\{\begin{array}{l}\|u-u_h\|_{L^\infty(0,T;V)}+\|\beta-\beta_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_3))}\le C\|\dot v_h-\dot u\|+Ce_0+\\[2ex] +C\left(\|(p_\tau+p_\nu)(\beta,u)\|+\|f\|+\|\sigma\|\right)^{\frac12}\|\dot v_h-\dot u\|^{\frac12},\ \forall v_h(t)\in K_h.\end{array}\right. \tag{3.1.23}$$

Par conséquent, on est arrivé à démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.1.2. *soit* (u,σ,β) *la solution du problème* $\mathrm{P_V}$ *et soit* (u_h,σ_h,β_h) *la solution du problème* $\mathrm{P_V^h}$*. Alors on a l'estimation d'erreur suivante :*

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_{L^\infty(0,T;V)}+\|\beta-\beta_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_3))} &\le C\inf_{v_h(t)\in V_h}\left(\|\dot v_h-\dot u\|+e_0\right.\\ &\quad\left.+\left(\|(p_\tau+p_\nu)(\beta,u)\|+\|f\|+\|\sigma\|\right)^{\frac12}\|\dot v_h-\dot u\|^{\frac12}\right).\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

L'estimation (3.1.24) est la base de l'analyse de convergence de la méthode semi-discrète. En effet, en argumentant comme dans Raviart [35], on déduit le résultat de convergence suivant :

Corollaire 3.1.3. *On suppose que (2.1.19)-(2.1.22) ont lieu. Si*

$$\|u_0 - u_{0h}\| \to 0, \quad \|\beta_0 - \beta_{0h}\| \to 0 \text{ quand } h \to 0,$$

alors, lorsque $h \to 0$, *on a :*

$$\|(u - u_h)(t)\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|(\beta - \beta_h)(t)\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))} \to 0.$$

On peut estimer independament de $u - u_h$ et $\beta - \beta_h$ à partir de la lui de comportement :

$$\|\sigma - \sigma_h\| \leq \|\dot{u} - \dot{u}_h\|.$$

3.2 Approximation complète

On considère maintenant une approximation complète du problème P_V. Soit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$, une partition de l'intervalle de temps $[0, T]$ et soit $k = T/N$, le pas de discrétisation et $t_n = nk$ les noeuds, pour $n = 0, 1, \cdots, N$. Pour une fonction continue $t \mapsto w(t)$ on utilise la notation $w_n = w(t_n)$ et pour une suite $\{w_n\}_{n=0}^N$, on note $\delta w_n = (w_n - w_{n-1})/k$. Dans cette section, C dénote une constante positive indépendante des paramètres de discrétisation k et h.

La discrétisation complète est basée sur un schéma progressif d'*Euler* et elle est donnée sous la forme suivante :

Problème P_V^{hk} : Trouver le champ des déplacements $u^{hk} = \left\{u_n^{hk}\right\}_{n=0}^N \subset V_h$, le champ des contraintes $\sigma^{hk} = \left\{\sigma_n^{hk}\right\}_{n=0}^N \subset \mathcal{H}_h$ et le champ d'adhésion $\beta^{hk} = \left\{\beta^{hk}\right\}_{n=0}^N \subset L_h^2(\Gamma_3)$ tels que :

$$u^{hk}(0) = u_0^h, \ \beta^{hk}(0) = \beta_0^h, \tag{3.2.25}$$

et pour $n = 1, \cdots, N$

$$\sigma_n^{hk} = \mathcal{A}\varepsilon\left(\delta u_n^{hk}\right) + \mathcal{G}\left(\varepsilon\left(u_{n-1}^{hk}\right)\right), \tag{3.2.26}$$

$$\delta\beta_n^{hk} = H_{ad}\left(\beta_{n-1}^{hk}, \zeta_{\beta_{n-1}^{hk}}, R\left(\left|u_{(n-1)\tau}^{hk}\right|\right)\right), \tag{3.2.27}$$

$$\left\{\begin{array}{l} u_n^{hk} \in K_h, \quad \left\langle\sigma_n^{hk}, \varepsilon\left(v^h - u_n^{hk}\right)\right\rangle_{\mathcal{H}} + j\left(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, v^h\right) - \\ \\ -j\left(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, u_n^{hk}\right) \quad \geq \left\langle f_n, v^h - u_n^{hk}\right\rangle_V, \quad \forall v^h \in K_h. \end{array}\right. \tag{3.2.28}$$

En utilisant les arguments classiques des inégalités variationnelles (A.2.30), on déduit l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème P_V^{hk}. Notre intérêt est d'estimer les différences $u_n - u_n^{hk}$, $\sigma_n - \sigma_n^{hk}$, $\beta_n - \beta_n^{hk}$.

Soit $n \in \{1, \cdots, N\}$ et on définit $u_n = u(t_n)$, $\sigma_n = \sigma(t_n)$ et $\beta_n = \beta(t_n)$. D'abord, on réécrit l'équation (3.2.26) sous la forme équivalente

$$\sigma_n^{hk} = \frac{1}{k}\mathcal{A}\varepsilon\left(u_n^{hk} - u_{n-1}^{hk}\right) + \mathcal{G}\left(\varepsilon\left(u_{n-1}^{hk}\right)\right), \tag{3.2.29}$$

et par récurrence, on trouve :

$$\sigma_n^{hk} = \frac{1}{k}\mathcal{A}\varepsilon\left(u_n^{hk} - u_0^{hk}\right) + \sum_{j=0}^{n-1}\mathcal{G}\left(\varepsilon\left(u_j^{hk}\right)\right), \tag{3.2.30}$$

donc, en soustrayant (3.2.30) de (2.1.8) à $t = t_n$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_n - \sigma_n^{hk} \quad = \quad & \frac{1}{k}\mathcal{A}\varepsilon\left(u_n - u_n^{hk}\right) - \frac{1}{k}\mathcal{A}\varepsilon\left(u_0 - u_0^{hk}\right) + \\ & + \mathcal{G}\left(\varepsilon\left(u_n\right)\right) - \sum_{j=0}^{n-1}\mathcal{G}\left(\varepsilon\left(u_j^{hk}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.2.31}$$

On pose

$$D_n = \left\| \mathcal{G}\left(\varepsilon\left(u_n\right)\right) - \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{G}\left(\varepsilon\left(u_j^{hk}\right)\right) \right\|_{\mathcal{H}} \tag{3.2.32}$$

En utilisant (2.1.19) et à l'aide de [8], on trouve l'estimation

$$\begin{aligned} \left\|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\right\| &\leq C\left\|u_n - u_n^{hk}\right\| + C\left\|u_0 - u_0^{hk}\right\| + \\ &+ D_n + C\sum_{j=1}^{n}\left(\left\|u_{j-1} - u_{j-1}^{hk}\right\|\right) \end{aligned} \tag{3.2.33}$$

En remplaçant (3.2.30) dans (3.2.28), il résulte

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{1}{k}\mathcal{A}\varepsilon\left(u_n^{hk} - u_0^{hk}\right), \varepsilon\left(v^h - u_n^{hk}\right)\right\rangle + j\left(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, v^h\right) - j\left(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, u_n^{hk}\right) + \\ + \left\langle \sum\limits_{j=0}^{n-1} \mathcal{G}\left(\varepsilon\left(u_j^{hk}\right)\right), \varepsilon\left(v^h - u_n^{hk}\right) \right\rangle_{\mathcal{H}} \geq \left\langle f_n, v^h - u_n^{hk}\right\rangle_V, \ . \end{array} \right. \tag{3.2.34}$$

ensuite, en soustrayant (3.2.34) de (3.1.12) à $t = t_n$, pour $v = u_n^{hk}$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{1}{k}\mathcal{A}\varepsilon\left(u_n - u_n^{hk}\right), \varepsilon\left(u_n - u_n^{hk}\right)\right\rangle \leq \left\langle \sigma_n^{hk} - \sigma_n + \sigma_n, \varepsilon\left(v^h - u_n\right)\right\rangle + \\ + \left\langle \mathcal{G}\left(\varepsilon\left(u_n\right)\right) - \sum\limits_{j=0}^{n-1} \mathcal{G}\left(\varepsilon\left(u_j^{hk}\right)\right), \varepsilon\left(u_n^{hk} - u_n\right) \right\rangle + \\ + \left\langle \frac{1}{k}\mathcal{A}\varepsilon\left(u_0^{hk} - u_0\right), \varepsilon\left(u_n^{hk} - u_n\right)\right\rangle + j\left(\beta_n, u_n, u_n^{hk}\right) - \\ - j\left(\beta_n, u_n, u_n\right) + j\left(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, v^h\right) - j\left(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, u_n^{hk}\right) + \left\langle f_n, u_n - v^h\right\rangle_V. \end{array} \right.$$

Moyennant (2.1.18), (2.1.19), (3.1.16) et (3.2.33) et après quelques manipulations algébriques,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\|u_n - u_n^{hk}\right\| \leq C\left(\left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\| + \left\|u_n - u_n^{hk}\right\| + \left\|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\right\|\right) + C\left\|u_n - v^h\right\| + \\ + D_n + C\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\left\|u_{j-1} - u_{j-1}^{hk}\right\|\right) + C\left(\left\|u_0 - u_0^{hk}\right\|\right) + \\ + C\left(\left\|\left(p_\tau + p_\nu\right)\left(\beta_n, u_n\right)\right\| + \left\|f_n\right\| + \left\|\sigma_n\right\|\right)^{1/2}\left\|u_n - v^h\right\|^{1/2}, \ \forall v^h \in K_h. \end{array} \right. \tag{3.2.35}$$

Il en reste d'estimer $\left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\|$, pour cela on a de (3.2.27)

$$\beta_n^{hk} = k\sum_{j=1}^{n} H_{ad}\left(\beta_{j-1}^{hk}, \zeta_{\beta_{j-1}^{hk}}, R\left(\left|u_{(j-1)\tau}^{hk}\right|\right)\right) + \beta_0^{hk} \tag{3.2.36}$$

En soustrayant (3.2.36) de (3.2.27) à $t = t_n$, et en effectuant quelques transformations, on trouve

$$\begin{aligned} \left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\| &\leq C \sum_{j=1}^{n} k \left(\left\|\beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk}\right\| + \left\|u_{j-1} - u_{j-1}^{hk}\right\| \right) \\ &\quad + J_n + \left\|\beta_0^{hk} - \beta_{0h}\right\| \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

où

$$J_n = \int_0^{t_n} H_{ad}\left(\beta(s), \zeta_{\beta_h}(s), R\left(\left|u_{h\tau}(s)\right|\right)\right) ds - k \sum_{j=1}^{n} H_{ad}\left(\beta_{j-1}, \zeta_{\beta_{j-1}}, R\left(\left|u_{(j-1)\tau}\right|\right)\right) \tag{3.2.38}$$

De (3.2.33), (3.2.35) et (3.2.37), on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{cases} \left\|u_n - u_n^{hk}\right\|_V + \left\|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\right\|_{\mathcal{H}} + \left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \left\|u_n - v^h\right\| + C\left(D_n + J_n\right) + \\ +C \sum\limits_{j=0}^{n} \left(\left\|u_{j-1} - u_{j-1}^{hk}\right\| + \left\|\beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk}\right\| \right) + C\left\|e_0\right\| \\ +C\left(\left\|\left(p_\tau + p_\nu\right)\left(\beta_n, u_n\right)\right\| + \left\|f_n\right\| + \left\|\sigma_n\right\|\right)^{1/2} \left\|u_n - v^h\right\|^{1/2}, \ \forall v^h \in K_h. \end{cases} \tag{3.2.39}$$

En adaptant des techniques similaires à celles utilisées dans [8], et en utilisant les hypothèses (2.1.19) et (2.1.21), on aboutit à

$$D_n \leq C t_n \left(\|\dot{u}\|_{L^\infty(0,T;V)} \right)$$

$$J_n \leq C k t_n \left(\|\dot{u}\|_{L^\infty(0,T;V)} + \left\|\dot{\beta}\right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))} \right)$$

Alors, (3.2.39) devient

$$\begin{cases} \left\|u_n - u_n^{hk}\right\| + \left\|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\right\| + \left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\| \leq C \left\|u_n - v^h\right\| + \\ C k t_n \left(\|\dot{u}\|_{L^\infty(0,T;V)} + \left\|\dot{\beta}\right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))} \right) + C\left\|e_0\right\| + \\ +C \sum\limits_{j=1}^{n} k \left(\left\|u_{j-1} - u_{j-1}^{hk}\right\| + \left\|\beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk}\right\| \right) + \\ +C\left(\left\|\left(p_\tau + p_\nu\right)\left(\beta_n, u_n\right)\right\| + \left\|f_n\right\| + \left\|\sigma_n\right\|\right)^{1/2} \left\|u_n - v^h\right\|^{1/2}, \ \forall v^h \in K_h. \end{cases}$$

L'étape finale consiste à utiliser le lemme Suivant :

Lemme 3.2.4. *Soient $\{g_n\}_{n=1}^N$ et $\{e_n\}_{n=1}^N$ deux suites de nombres non négatifs satisfont à*

$$e_n \leq Cg_n + \sum_{j=1}^{n} k_j e_j \tag{3.2.40}$$

alors

$$e_n \leq C\left(g_n + \sum_{j=1}^{n} k_j g_j\right) \tag{3.2.41}$$

Donc

$$\max_{n\leq N} e_n \leq C \max_{n\leq N} g_n \tag{3.2.42}$$

Démonstration. Pour la démonstration, on peut consulter [28], et [8]. ■

Par l'application de ce dernier lemme, on déduit l'estimation de l'erreur suivante

$$\begin{cases} \max\limits_{n\leq N} \left\|u_n - u_n^{hk}\right\|_{L^\infty(0,T;V)} + \left\|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\right\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{H})} + \left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_3))} \leq \\ C \max\limits_{n\leq N} \left[\left(\left\|\left(p_\tau + p_\nu\right)\left(\beta_n, u_n\right)\right\| + \left\|f_n\right\| + \left\|\sigma_n\right\|\right)^{1/2} \left\|u_n - v^h\right\|^{1/2} + \left\|u_n - v^h\right\| \right] \\ Ckt_n \left(\left\|\dot{u}\right\|_{L^\infty(0,T;V)} + \left\|\dot{\beta}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_3))} \right) + C\left\|e_0\right\| \end{cases}$$

Cette estimation va être utilisée pour analyser la convergence de la méthode de discrétisation complète.

3.3 Analyse de la convergence

Dans cette section, on analyse la convergence de la discrétisation complète et incomplète des solution du problème P.

On fait cette analyse sous les conditions de régularité $u \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, $\sigma \in L^\infty(0,T;\mathcal{H})$, $\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Gamma_3))$.

On premier on introduit ces hypothèses dans les espaces fonctionnelles V, $\mathcal{H}$, $L^2(\Gamma_3)$ et les espaces à dimension finie V_h, $\mathcal{H}_h$, $L_h^2(\Gamma_3)$.

Hypothèse (S_1) :

Il existe un sous espace $V_0 \subset V$ dense dans V et une fonction $\alpha(h) \geq 0$ tel que :

$$\lim_{h\to 0^+} \alpha(h) = 0$$

et

$$\inf_{v_h \to V_h} \|v - v_h\|_V \leq \alpha(h) \|v\|_{V_0}, \qquad \forall v \in V_0.$$

Hypothèse (S_2) :
Il existe un sous espace $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ dense dans $\mathcal{H}$ et une fonction $\gamma(h) \geq 0$ tel que :

$$\lim_{h \to 0^+} \gamma(h) = 0$$

et

$$\inf_{z_h \in \mathcal{H}_h} \|z - z_h\|_{\mathcal{H}} \leq \gamma(h) \|z\|_{\mathcal{H}_0}, \qquad \forall z \in \mathcal{H}_0.$$

Hypothèse (S_3) :
Il existe un sous espace $(L^2(\Gamma_3))_0 \subset L^2(\Gamma_3)$ dense dans $L^2(\Gamma_3)$ et une fonction $\theta(h) \geq 0$ tel que :

$$\lim_{h \to 0^+} \theta(h) = 0$$

et

$$\inf_{\eta_h \in L^2(\Gamma_3)} \|\eta - \eta_h\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \theta(h) \|\eta\|_{(L^2(\Gamma_3))_0}, \quad \forall \eta \in \left(L^2(\Gamma_3)\right)_0.$$

On peut maintenant etudier la convergence de la discrétisation incomplète du problème P donnée par l'estimation (3.1.24).

Théorème 3.3.5. *Soit* $u \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, $\sigma \in L^\infty(0,T;\mathcal{H}_1)$, $\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Gamma_3))$ *la solution du problème P et* $u_h \in W^{1,\infty}(0,T;V_h)$, $\sigma_h \in L^\infty(0,T;\mathcal{H}_h)$, $\beta_h \in W^{1,\infty}(0,T;L^2_h(\Gamma_3))$ *la solution qui correspond à la discrétisation incomplète du problème* P^{h}.

Ainsi sous les suppositions (S_1), (S_2) *et* (S_3) *on a :*

$$(\|u - u_h\| + \|\sigma - \sigma_h\| + \|\beta - \beta_h\|) \to 0 \quad \textit{quand} \quad h \to 0.$$

Démonstration. De (S_1), (S_2) et (S_3) on a :

$$\|u_0 - u_{0h}\| \to 0, \qquad \|\beta_0 - \beta_{0h}\| \to 0 \text{ quand } h \to 0. \tag{3.3.43}$$

On a $W^{1,\infty}(0,T;V_0)$ dense dans $W^{1,\infty}(0,T;V)$ donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\widetilde{u} \in W^{1,\infty}(0,T;V_0)$ tel que :

$$\left\|u - \widetilde{u}\right\| \leq \frac{\delta}{2},$$

et on a aussi par l'interpolation, pour tout $\delta > 0$, il existe $\overset{h}{\Pi}\widetilde{u} \in W^{1,\infty}(0,T;V_0)$ tel que :

$$\left\|\overset{h}{\Pi}\widetilde{u} - \widetilde{u}\right\| \leq \alpha(h) \left\|\widetilde{u}\right\| \leq \frac{\delta}{2},$$

alors
$$\left\|\dot{u}-\overset{h}{\Pi}\dot{\tilde{u}}\right\| \leq \left\|\dot{u}-\dot{\tilde{u}}\right\| + \left\|\dot{\tilde{u}}-\overset{h}{\Pi}\dot{\tilde{u}}\right\| \leq \delta, \tag{3.3.44}$$

donc
$$\inf_{v_h\in V_h}\|\dot{u}-\dot{v}_h\|^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\dot{u}-\dot{\tilde{u}}\right\|^{\frac{1}{2}} + \inf_{v_h\in V_h}\left\|\dot{\tilde{u}}-\dot{v}_h\right\|^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\delta}+\sqrt{\alpha(h)}\left\|\dot{\tilde{u}}\right\|_{V_0}, \tag{3.3.45}$$

■

alors la convergence est déduite de (3.3.43) et (3.3.45).

Revenons maintenant à l'analyse de la convergence pour la discrétisation complète.

Théorème 3.3.6. *Soit* $u \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, $\sigma \in L^{\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$, $\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^{\infty}(\Gamma_3))$ *la solution du problème* P *et* $u_n^h \in W^{1,\infty}(0,T;V_h)$, $\sigma_n^h \in L^{\infty}(0,T;\mathcal{H}_h)$, $\beta_n^h \in W^{1,\infty}(0,T;L_h^2(\Gamma_3))$ *pour* $n=\overline{1,N}$ *, la solution qui correspond à la discrétisation complète du problème* P^{h}.

Alors sous les suppositions (S_1), (S_2) *et* (S_3) *on a :*
$$\max_n\left(\left\|u_n-u_n^h\right\|+\left\|\sigma_n-\sigma_n^h\right\|+\left\|\beta_n-\beta_n^h\right\|\right)\to 0 \quad \textit{quand} \quad h\to 0. \tag{3.3.46}$$

Démonstration. En suivant les mêmes étapes qu'au dessus on a :
$$\inf_{v_n^h\in V^h}\left\|u_n-v^h\right\|^{\frac{1}{2}} \leq \left\|u_n-\tilde{u}\right\|^{\frac{1}{2}} + \inf_{v_n^h\in V^h}\left\|\tilde{u}-v_n^h\right\|^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\delta}+\sqrt{\alpha(h)}\left\|\tilde{u}\right\|_{V_0},$$

donc :
$$\max_n\inf_{v_n^h\in V_h}\left\|u_n-v^h\right\|^{\frac{1}{2}} \leq \max_n\left(\left\|u_n-\tilde{u}\right\|^{\frac{1}{2}} + \inf_{v_n^h\in V_h}\left\|\tilde{u}-v_n^h\right\|^{\frac{1}{2}}\right) \leq \sqrt{\delta}+\sqrt{\alpha(h)}\left\|\tilde{u}\right\|_{V_0}. \tag{3.3.47}$$

alors de (3.3.43) et (3.3.47) ; la relation (3.3.46) est vérifiée, ce qui termine la démonstration. ■

Annexe A

Rappels de la mécanique des milieux continus

Afin de faciliter la lecture de ce mémoire, il nous est paru utile de rappeler des notions principales de la théorie de la mécanique des milieux continus, des résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de *Hilbert*, ainsi que les propriétés de base de l'approximation variationnelle. Ceci est l'objet de cet annexe qui est divisé en trois sections.

La première section est consacrée aux rappels de quelques notions de base tels que le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations linéarisé. On y introduit les lois de comportement du type élastique et viscoélastique. On y trouve aussi des conditions aux limites de contact avec frottement d'un corps déformable avec une base rigide. Ainsi, on y introduit de nouvelles conditions de contact couplé à l'adhésion et les différentes équations qui modélisent le processus d'adhésion.

La seconde section comprend des rappels sur les espaces de *Hilbert* et quelques éléments d'analyse non linéaire et particulièrement des résultats d'existence et d'unicité concernant les inéquations variationnelles elliptiques et les opérateurs maximals monotones et de *Lipschitz*. On y cite aussi, quelques lemmes du type *Gronwall* qu'on a utilisé dans ce travail.

La dernière section concerne les espaces fonctionnels, on y introduit des espaces de type *Sobolev* associés à l'opérateur déformation et à l'opérateur divergence et on présente leurs principales propiétés. notamment les théorèmes de trace.

A.1. Rappels & préliminaires

Il s'agit dans cette section de présenter quelques rappels de mécanique des milieux continus. Pour plus de détails sur ce sujet, on cite à titre d'exemple les ouvrages [10] et [16] .

A.1.1. contraintes & déformations

Soit un corps matériel qui occupe un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$, de frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$ supposée assez régulière, rapporté à un système cartésien Ox_i $\left(i = \overline{1, d}\right)$. Du point de vue mécanique, on étudie le nouvel état d'équilibre du corps résultant de l'application des forces volumiques dans Ω et des forces surfaciques sur une partie de la frontière Γ, dans un intervalle de temps $[0, T]$.

Les inconnues du problème sont :

-*Le champ des déplacements* $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$,

-*Le champ des contraintes* $\sigma : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{S}_d$ où $\mathbb{S}_d = \mathbb{R}_s^{d\times d}$est l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$,

-Le champ d'adésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \to [0, 1]$.

La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre des efforts extérieurs et le tenseur des accélérations pour un système quelconque, conduit à l'équation du mouvement suivante :

$$Div\sigma + f_0 = \rho\ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] . \tag{A.1.1}$$

Dans cette équation, $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ désigne *la densité de masse*, $\ddot{u}$ est le champ des accélérations, $f_0 : \Omega\times[0, T] \to \mathbb{R}^d$ représente le champ des densités des forces volumique appliquées sur le corps et qui sont des données du problème, $Div\sigma$ est la divergence du champ des contraintes.

Ces processus d'évolution modélisée par (A.1.1) s'appellent processus dynamiques, dans certaines situations l'équation (A.1.1) peut se simplifier, par exemple dans le cas où $\dot{u} = 0$, il s'agit d'un processus d'équilibre (*processus statiques),* ou bien dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho\ddot{u}$ peut être negligé (*processus quasistatiques*). Dans ces deux cas l'équation (A.1.1) devient :

$$Div\sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] . \tag{A.1.2}$$

Dans la suite, on va considérer des *matériaux élastiques et viscoélastiques* dans le cadre des *petites transformations. D*ans ce cas, on a besion du champ des *déformations linéarisé* $\varepsilon : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{S}_d$ définit par :

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) , \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] , \tag{A.1.3}$$

où ∂_k représente l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable x_k . On précise en outre qu'on adopte la convention de l'indice muet. Souvent, pour marquer la dépendance du champ des déformations ε par rapport au champ des déplacement u, on va le noter $\varepsilon (u)$.

Les équations (A.1.1) et (A.1.2) sont insuffisantes à elles seules pour décrire les mouvement des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations caractérisant le comportement de chaque matériau ; ce sont *les lois de comportement* que nous décrivons dans la section suivante.

A.1.2. lois de comportement

Les lois de comportement caractérisent le comportement de chaque type de milieu continu.
Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale et c'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Nous présentons ci-dessous les lois de comportement élastique et viscoélastique traitées dans cette thèse.

lois de comportement des matériaux élastiques

Nous considérons ici une catégorie de matériaux pour lesquels la loi de comportement peut être écrite sous la forme suivante :

$$\sigma = F\left(\varepsilon\left(u\right)\right), \tag{A.1.4}$$

où F est une application linéaire ou non linéaire. Cette loi peut modeler quelques propriétés mises en évidence par les expériences de chargement monotone : linéarité de la courbe $\sigma = \sigma\left(\varepsilon\right)$ (suivant que F soit linéaire ou non), durcissement ou adoucissement de la courbe $\sigma = \sigma\left(\varepsilon\right)$ (suivant que F soit monotone ou non). Par contre, ni le *fluage*, ni la *relaxation* ne peuvent être décrits par la loi (A.1.4). En effet, si par exemple à l'instant $t = 0$ on a $\varepsilon\left(0\right) = \varepsilon_0$ et on maintient la déformation constante $\varepsilon\left(t\right) = \varepsilon_0$, $\forall t > 0$ il résulte $\sigma\left(t\right) = F\left(\varepsilon_0\right), \quad \forall t > 0$. Par conséquent le modèle (A.1.4) ne peut pas décrire le phénomène de relaxation mis en évidence par les essais expérimentaux. De même, pour l'équation (A.1.4) les courbes charge-décharge $\sigma = \sigma\left(\varepsilon\right)$ coincident. Ce modèle ne peut donc pas décrire les déformations résiduelles ce qui justifie l'introduction d'autres lois de comportement capables de modéler ces phénomènes.
En élasticité linéaire σ est une fonction linéaire de ε, c'est à dire

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon, \quad \left(\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right), \tag{A.1.5}$$

où $\mathcal{A} = \left(a_{ijkl}\right)$ est un tenseur d'ordre quatre.

lois de comportement des matériaux viscoélastiques

La loi de comportement est de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon\left(\dot{u}\right) + \mathcal{G}\varepsilon\left(u\right), \tag{A.1.6}$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}$ sont des fonctions constitutives. $\mathcal{A}$ représente l'opérateur de *viscosité* et $\mathcal{G}$ désigne
l'opérateur d'*élasticité*.
Et pour un corps élastique lorsque $\mathcal{A} = 0$, la loi se réduit à

$$\sigma = \mathcal{G}\varepsilon\left(u\right).$$

Nous rappelons qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contraites $\sigma = (\sigma_{ij})$ est donné par :

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{u}) + g_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u), \tag{A.1.7}$$

$\mathcal{A} = (a_{ijkl})$ est le tenseur de viscosité et $\mathcal{G} = (g_{ijkl})$ le tenseur d'élasticité, pour $i, j, k, l = 1, ..., d$.
La loi de comportement (A.1.6) est une loi viscoélastique du type *Kelvin-Voigt*.
On utilisera cette loi dans le chapitre 1 et 2 de cette thèse.

A.1.3. Conditions aux limites de contact avec adhésion

Afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'équilibre d'un matériau, il faut encore préciser les conditions aux limites.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ le domaine régulier occupé par le corps, Γ la frontière de Ω et le ν vecteur normal unitaire extérieur à Γ. Soit également $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$, pour $i \neq j$, une partition de Γ. Pour simplifier, on se place dans le cas statique et par conséquent le temps n'interviendra pas par la suite.
On considère les conditions aux limites suivantes :

$$u = f_1 \quad \text{sur } \Gamma_1, \tag{A.1.8}$$

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2. \tag{A.1.9}$$

La condition (A.1.8) est appelée *condition aux limites de déplacement;* sa signification consiste en ce que le champ des déplacements est imposé sur la partie Γ_1 de la frontière Γ, la fonction f_0 étant une donnée du problème (par exemple, si $f_0 = 0$ le solide est encastré par la partie Γ_1 de sa frontière dans une structure fixe).
La condition (A.1.9) est appelée *condition aux limites de traction*; sa signification consiste en ce que le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ est imposé sur la partie Γ_2 de la frontière, la fonction f_2 représente la densité des forces appliquées de surface et constituant une donnée du problème.
Si $\Gamma_1 = \varnothing$ le problème aux limites est *un prblème de traction pure* et si $\Gamma_2 = \varnothing$ le problème aux limites est *un problème de déplacement pure.* Si les parties Γ_1 et Γ_2 sont toutes les deux de mesure de *Lebesgue* $N-1$ dimensionnelle strictement positive, le problème considéré est *un problème mixte déplacement-traction.*
On note par v_ν et v_τ la composante normale et respectivement tangentielle de tout champ vectoriel $v = v_\nu\nu + v_\tau$ où $v_\nu = v.\nu$. De même, soit σ_ν et σ_τ la composante normale et respectivement tangentielle du tenseur des contraintes de *Cauchy* $\sigma\nu$. Il vient : $\sigma_\nu = (\sigma\nu)_\nu$, $\sigma_\tau = (\sigma\nu)_\tau$ sur Γ_3. On considère les conditions aux limites suivantes :

condition de contact sans frottement

On dit que le contact entre le corps et la base rigide S est sans frottement, si les mouvements tangentiels sont libres, ce qui se traduit par

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \tag{A.1.10}$$

Puisque S représente une base rigide, elle ne subira donc pas de déformations. Le corps ne pourra donc pas y pénétrer. Cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité suivante :

$$u_\nu = u.\nu \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \tag{A.1.11}$$

Aux point de Γ_3 tels que $u_\nu < 0$, le corps déformable quitte la base rigide. Les contraintes normales y sont alors nulles. Par conséquent, on a :

$$u_\nu < 0 \Rightarrow \sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \tag{A.1.12}$$

Aux point de Γ_3 tels que $u_\nu = 0$, on suppose que la base rigide S exerce une réaction inconnue suivant la direction de la normale et orientée vers Ω. On a :

$$u_\nu = 0 \Rightarrow \sigma_\nu \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \tag{A.1.13}$$

Pour résumer, les conditions de contact (A.1.10) - (A.1.13) s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante :

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3. \tag{A.1.14}$$

Les conditions aux limites de contact de la forme (A.1.14) sont aussi appelés conditions de *contact de Signorini*.
Les conditions de contact de *Signorini* (A.1.14) modélisent le contact d'un corps déformable avec une base *rigide*. On peut envisager donc des conditions de contact d'un corps déformable avec une base *déformable*. On va en citer un exemple qui se présente comme des conditions aux limites *régularisées* des conditions de *Signorini* (A.1.14).
Plus précisément, sur les parties Γ_1 et Γ_2, on impose les conditions aux limites de déplacement-traction alors que sur la partie Γ_3, on suppose :

$$\begin{cases} \sigma_\nu = 0 & \text{si} \quad u_\nu < 0 \\ -h < \sigma_\nu < 0 & \text{si} \quad u_\nu = 0 \\ \sigma_\nu = -h & \text{si} \quad u_\nu > 0 \end{cases}, \quad \text{et} \quad \sigma_\tau = 0, \tag{A.1.15}$$

où $h > 0$ est un paramètre à tendre vers l'infini. On remarque que les conditions aux limites (A.1.15) tendent *formellement* vers les conditions aux limites de *Signorini* (A.1.14) quand le paramètre h tends vers l'infini.

conditions de contact avec frottement

On présente dans ce qui suit quelques exemples de lois de frottement. On se borne au cas statique utilisé notamment en modélisation des processus de chargement montone (voir aussi [12] et[16]).

Loi de *Coulomb* : C'est une des lois les plus répandues et elle est plus réaliste que la précédente. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de glissement et peut s'énoncer comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq \mu\,|\sigma_\nu|\,; \\ |\sigma_\tau| < \mu\,|\sigma_\nu| \ \ \Rightarrow u_\tau = 0; \\ |\sigma_\tau| = \mu\,|\sigma_\nu| \Rightarrow \ \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tels que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau, \end{array}\right. \tag{A.1.16}$$

où μ est le coefficient de frottement. A (A.1.16) on rajoute des conditions aux limites de contact bilatéral $(u_\nu = 0)$ ou unilatéral $(u_\nu \leq 0\ ,\ \sigma_\nu \leq 0\ ,\ \sigma_\tau = 0\ ,\ \sigma_\nu u_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_3)$. La loi de *Coulomb* est souvent utilisée pour les corps rigides ou élastiques. On remarque également qu'il s'agit d'une loi à seuil, tant que le seuil n'est pas atteint, il n'y a pas de glissement. Ce seuil est variable et dépend de la contrainte normale ce qui représente une difficulté majeure pour l'étude mathématique de cette loi de frottement, (voir par exemple [16] et[12]).

Loi de *Coulomb* avec seuil de type *Strömberg* : Cette loi de frottement est une version de la loi de *Coulomb* proposée récemment dans [42]. On peut supposer que le contact est bilatéral ou unilatéral. On remplace dans la loi précédente le seuil de frottement $p = |\sigma_\nu|$ par le seuil de type $p\left(|\sigma_\nu|\right) = |\sigma_\nu|\left(1 - |\alpha\sigma_\nu|\right)_+$ où α est une constante positive liée à l'usure de la surface en contact. La considération de ce seuil de frottement est faite à partir des principes de la thermodynamique. Les essais expérimentaux donnent pour α des valeurs très petites. En résumé, cette loi s'énonce comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq \mu p\left(|\sigma_\nu|\right); \\ |\sigma_\tau| < \mu p\left(|\sigma_\nu|\right) \ \Rightarrow \ u_\tau = 0; \\ |\sigma_\tau| = \mu p\left(|\sigma_\nu|\right) \ \Rightarrow \ \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tels que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau. \end{array}\right. \tag{A.1.17}$$

Loi de *Coulomb* non locale généralisée : Finalement, on présente la loi de frottement qui généralise la loi précédente. Soit l'opérateur R *une régularisante normale,* c'est à dire un opérateur linèaire continu $R : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$. La régularisante R est introduite pour des raisons techniques car la trace du tenseur des contraintes sur la frontière est très irrégulière. Cette loi s'énonce comme suit :

$$\left\{\begin{array}{lll} |\sigma_\tau| \leq \mu p\left(|R\sigma_\nu|\right); & & \\ |\sigma_\tau| < \mu p\left(|R\sigma_\nu|\right) & \Rightarrow & u_\tau = 0; \\ |\sigma_\tau| = \mu p\left(|R\sigma_\nu|\right) & \Rightarrow & \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau, \end{array}\right. \tag{A.1.18}$$

où $p : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est le seuil de frottement vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} (a) \ \text{il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ |p\left(x, r_1\right) - p\left(x, r_2\right)| \leq M\,|r_1 - r_2| \\ \text{pour tout } r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+ \ p.p. \text{ sur } \Gamma_3; \\ (b) \ x \to p\left(x, r\right) \ \text{est mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}_+; \\ (c) \ p\left(x, 0\right) = 0 \quad p.p. \text{ sur } \Gamma_3. \end{array}\right. \tag{A.1.19}$$

La présence de l'opérateur R dans (A.1.18) nous conduit à appeler (A.1.18) *loi de frottement non local.* Remrquons que l'hypothèse (A.1.19) est satisfaite pour les deux lois précédentes. Aux conditions (A.1.19) on rajoute des conditions de contact bilatéral ou unilatéral.
D'un autre côté, la diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de nature très différente. Pour modéliser les phénomène d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact. En se basant sur les idées de [17] et [18], on introduit une variable interne de surface appelée, champ d'adhésion, qui prend ses valeurs entre zéro et un et qui décrit la densité fractionnaire des liens actifs sur la surface de contact. Le processus est gouverné par l'équation différentielle

$$\dot{\beta} = H_{ad}\left(\beta, \zeta_\beta, R\left(|u_\tau|\right)\right) \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T].$$

H_{ad} est une fonction générale qui s'annule quand le premier de ses variables s'annule. En plus, on considère la possibilité que, quand les cycles de collage et de décollement continuent, il y a une diminution de l'efficacité du collage. Par conséquent, le processus est supposé dépendre du temps du collage, qu'on note par :

$$\zeta_\beta(x,t) = \int_0^t \beta(x,s)\, ds, \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T].$$

La fonction $R : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une troncature définie par :

$$R(s) = \begin{cases} s & \text{si} \quad 0 \leq s < L; \\ L & \text{si} \quad s > L, \end{cases}$$

où $L > 0$ est la longueur caractéristique des liens. On donne quelques exemples de ce genre de fonctions

$$H_{ad}(\beta, r) = -\gamma_\nu \beta_+ r^2,$$

où γ_ν est la constante de l'énergie de collage. Un autre exemple, dans lequel H_{ad} dépend de ses trois variables, est

$$H_{ad}(\beta, \zeta, r) = -\gamma_\nu^- \beta_+ r^2 + \frac{\gamma_\nu^+ \beta_+ (1-\beta)_+}{1+\zeta^2}.$$

A.2. Analyse non linéair dans les espaces de Hilbert

Cette section comporte des rappels de quelques résultats d'analyse non lénaire utilisés dans ce mémoire. On précise que pour avoir plus de détails sur les rappels figurants dans cette section, on peut consulter par exemple [44], [5] et [39].

A.2.1. Rappels sur les espaces de Hilbert

Dans la suite, H désigne un espace de *Hilbert* réel muni de son produit scalaire ainsi que de la norme associée notés respectivement par $\langle .,. \rangle_H$ et $|.|_H$. On note aussi par H' l'espace dual de H et par $\langle .,. \rangle_{H' \times H}$ la dualité entre H' et H.

Propriétés élémentaires

Théorème A.2.7. *(théorème de représentation de Riesz-Fréchet).*
Etant donné $\eta \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que :

$$\langle \eta, v \rangle_{H' \times H} = \langle f, v \rangle_H , \qquad \forall v \in H.$$

On a de plus

$$|\eta|_{H'} = |f|_H .$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire. L'application $\eta \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et son dual H'.
On dit que la suite $(u_n) \subset H$ est faiblement convergente vers l'élément $u \in H$ et on note $u_n \rightharpoonup u$ si

$$\langle v, u_n \rangle_H \to \langle v, u \rangle_H , \quad \forall v \in H.$$

Dans ce cas, u s'appelle *limite faible* de la suite (u_n). En utilisant l'inégalité de *Cauchy-Schwartz,* il résulte que si $u_n \to u$ dans H alors $u_n \rightharpoonup u$ dans H. La réciproque n'est pas en général vraie. De plus, puisque tout espace de *Hilbert* est *réflexif*, on a le résultat suivant :

Théorème A.2.8. *Soit (u_n) une suite bornée de H. Il existe alors un élément $u \in H$ et une sous-suite de (u_n) encore notée (u_n) telles que $u_n \rightharpoonup u$.*

Un élément $u \in H$ qui est la limite faible d'une sous-suite de la suite (u_n) s'appelle *point faiblement adhérent* à la suite (u_n). On prouve que :

Théorème A.2.9. *Si la suite $(u_n) \subset H$ possède un unique point fiablement adhérent $u \in H$, alors $u_n \rightharpoonup u$.*

Autrement dit, le théorème précédent affirme que si toute les sous-suites faiblement convergentes d'une suite (u_n) ont la même limite faible u, alors toute la suite (u_n) converge faiblement vers u.
Soient u et v deux éléments de H. On dit que u et v sont *orthogonaux* et on note $u \perp v$ si $\langle u, v \rangle_H = 0$. Soit M un sous-espaces vectoriel de H. On pose

$$M^\perp = \{v \in H \setminus v \perp u \quad \forall u \in M\} .$$

On dit que $M^\perp$ est *l'orthogonal* de M dans H et on peut prouver le résultat suivant :

Théorème A.2.10. *Soit M un sous-espaces fermé de H. Alors $M^\perp$ est un supplémentaire topologique de M c'est à dire*
1. $M^\perp$ est sous-espace fermé de H.
2. $M \cap M^\perp = \{0\}$ et $M + M^\perp = H$.

On va finir ce pragraphe par un résultat concernant la projection sur un convexe fermé :

Théorème A.2.11. *Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in H$ il existe $u \in K$ unique tel que :*

$$|f - u|_H = \min_{v \in K} |f - v|_H \,. \tag{A.2.20}$$

De plus, u est caractérisé par la propriété suivante :

$$u \in K, \ \langle u, v - u \rangle_H \geq \langle f, v - u \rangle_H \,, \qquad \forall v \in K. \tag{A.2.21}$$

Etant donné $K \subset H$ un convexe fermé non-vide, le théorème précédent nous permet d'associer à chaque élément $f \in H$ l'élément u définit par (A.2.20) ou (A.2.21). On note $u = P_K f$. On a mis ainsi en évidence l'opérateur $P_K : H \to K$ qui s'appelle *opérateur projection* de H sur K.

Théorème du piont fixe-Théorème de Lax-Milgram

On va commencer par rappeler un résultat classique qui est le théorème de point fixe de Banach. Ce résultat intervient dans les démonstrations de bon nombre des résultats d'existence et d'unicité établis dans les chapitres précédents.

Théorème A.2.12. *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $F : X \to X$ une application contractante, c'est à dire qu'il existe un réel k vérifiant $0 < k < 1$ tel que :*

$$d\left(F\left(x_1\right), F\left(x_2\right)\right) \leq k d\left(x_1, x_2\right), \qquad \forall x_1, x_2 \in X.$$

L'application F admet alors un point fixe unique $x \in X$ i.e. $F(x) = x$.

Soit maintenant $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur $H \times H$. La forme a est dite
1) *continue* s'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$|a(u, v)| \leq M |u|_H |v|_H \,, \qquad \forall u, v \in H\,;$$

2) *coercive* s'il existe un réel $m > 0$ tel que :

$$a(u, u) \geq m |u|_H^2 \,, \qquad \forall u \in H.$$

Remarque A.2.13. Soient $A : H \to H$ un opérateur et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ la forme définie par :

$$a(u,v) = \langle Au, v \rangle_H, \quad \forall u, v \in H. \tag{A.2.22}$$

On a alors les propriétés suivantes :

1. a est bilinéaire si et seulement si A est linéaire.
2. a est continue si et seulement si A est continu.
3. a est coercive si et seulement si A est définit positif.

Le second rappel de ce paragraphe concerne le fameux théorème de *Lax-Milgram :*

Théorème A.2.14. *Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéair, continue et coercive. Alors pour tout $f \in H$. Il existe un unique $u \in H$ tel que :*

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle_H, \quad \forall v \in H. \tag{A.2.23}$$

A.2.2. Fonctions convexes-semi-continuité inférieure

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$. Une telle fonction est dite *propre* si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, c'est à dire s'il existe $u_0 \in X$ tel que $\varphi(u_0) < +\infty$. La fonction φ est dite *convexe* si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v), \quad \forall u, v \in X,\ t \in]0,1[.$$

La fonction φ est dite *strictement convexe* si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in X$ tels que $u \neq v$.
Pour toute fonction $\varphi : X \to]-\infty, +\infty]$, on définit le domaine et l'épigraphe de φ respectivement par :

$$dom\varphi = \{u \in X \setminus \varphi(u) < +\infty\},$$

$$epi\varphi = \{(u,\alpha) \in X \times \mathbb{R} \setminus \varphi(u) \leq \alpha\}.$$

Il est claire qu'on peut établir les résultats suivants :

1. φ est propre si et seulment si $dom\varphi \neq \varnothing$.
2. Le domaine de φ est un ensemble convexe de X si φ est convexe.
3. φ est covexe si et seulement si $epi\varphi$ est un ensemble convexe dans $X \times \mathbb{R}$.

Une fonction $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est dite *semi-continue inférieurement* (s.c.i) en $u_0 \in H$ si

$$\lim_{u \to u_0} \inf \varphi(u) \geq \varphi(u_0).$$

Une fonction est dite s.c.i sur $K \subset H$ si elle est s.c.i. en tout point de K et elle est dite s.c.i. si elle est s.c.i. sur tout H.
La propriété de semi-continuité inférieure peut être caractérisée par :

Lemme A.2.15. *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *φ est semi-continue inférieurement.*
2. *L'épigraphe de φ est fermé dans $H \times \mathbb{R}$.*

Puisque dans un espace vectoriel normé tout ensemble convexe est simultanément fermé pour la topologie forte et la topologie faible, le lemme précédent conduit au résultat suivant :

Théorème A.2.16. *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et propre. Alors φ est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie faible de H.*

Soit maitenant K un sous-ensemble de H. On appelle fonction indicatrice de K, la fonction $\Psi_K : H \to]-\infty, +\infty]$ définie par :

$$\Psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u \in K; \\ +\infty & \quad \text{sinon.} \end{cases} \tag{A.2.24}$$

En utilisant cette défintion, on peut facilement prouver le résultat suivant :

Lemme A.2.17. *K est un ensemble convexe, fermé et non vide de H si et seulement si la fonction indicatrice ψ_K est convexe, semi-continue inférieurement et propre.*

A.2.3. Différentiabilité - sous différentiabilité

On note à présent par 2^H l'ensemble de toutes les parties de H.
Une fonction $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est dite *Gâteaux-différentiable* au point $u \in H$ s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in H$ tel que :

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = \langle \nabla\varphi(u), v \rangle_H, \qquad \forall v \in H.$$

L'élément $\nabla\varphi(u)$ s'appelle la différentielle au sens de *Gâteaux* de φ en u.
La fonction φ est dite *Gâteaux-différentiable* si elle est *Gâteaux-différentiable* en tout point de H ; dans ce cas l'opérateur $u \mapsto \nabla\varphi(u) : H \to H$ s'appelle *le gradient* de φ.
La convexité des fonctions Gâteaux-différentiable peut être caractérisée de la façon suivante :

Lemme A.2.18. *Soit $\varphi : H \to \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentiable. φ est alors une fonction convexe si et seulement si*

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle \nabla\varphi(u), v - u \rangle_H, \qquad \forall u, v \in H. \tag{A.2.25}$$

L'inégalité (A.2.25) suggère une généralisation de la notion de gradient aux fonctions convexes :
on dit que la fonction $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est *sous-différentiable* en un point $u \in H$ s'il existe $f \in H$ tel que :

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u \rangle_H, \quad \forall v \in H. \tag{A.2.26}$$

L'élément f est alors appelé un *sous-gradient* de φ en u et l'ensemble des sous-gradients de φ en u est appelé *le sous-différentiel* de φ en u et est noté $\partial\varphi(u)$:

$$\partial\varphi(u) = \{f \in H \setminus \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u \rangle_H, \quad \forall v \in H\}. \tag{A.2.27}$$

On note par $dom(\partial\varphi)$ l'ensemble défini par :

$$dom(\partial\varphi) = \{u \in H \setminus \partial\varphi(u) \neq \varnothing\}. \tag{A.2.28}$$

En utilisant (A.2.28), (A.2.27) ainsi que la définition du domaine d'une fonction, il résulte

$$dom(\partial\varphi) \subset dom\varphi. \tag{A.2.29}$$

L'opérateur multivoque $u \mapsto \partial\varphi(u) : H \to 2^H$ s'appelle le sous-différentiel de φ.
La fonction φ est dite *sous-différentiable* si elle est *sous-différentiable* en tout point de H, c'est à dire si $dom(\partial\varphi) = H$.
En utilisant l'inégalité (A.2.26), on obtient :

Lemme A.2.19. *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction sous-différentiable. φ est alors convexe, propre et semi-continue inférieurement .*

Lemme A.2.20. *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et semi-continue inférieurement. Alors φ est sous-différentiable en tout point intérieur de son domaine $dom\varphi$.*

Dans le cas d'une fonction convexe, le lien entre l'opérateur gradient et le sous-différentiel est donné par :

Lemme A.2.21. *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et Gâteaux-différentiable et $\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\}$ pour tout $u \in H$.*

A.2.4. Inéquations variationnelles elliptiques

Soit $A : H \to H$ un opérateur non linéaire, $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre et $f \in H$. Un nombre de problèmes aux limites en équation aux dérivées partielles ainsi qu'en mécanique des milieux continus ont un rapport avec des problèmes mathématiques de la forme suivante :

$$u \in H, \; \langle Au, v - u \rangle_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u \rangle_H, \quad \forall v \in H. \tag{A.2.30}$$

Le problème (A.2.30) est appelé *inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce* sur H. D'autres problèmes rencontrés en mécanique ont un rapport avec des problèmes mathématiques similaires de la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \text{ tel que :} \\ u \in K, \ \langle Au, v-u \rangle_H \geq \langle f, v-u \rangle_H, \quad \forall v \in K, \end{cases} \tag{A.2.31}$$

où K est un sous ensemble non vide de H. Le problème (A.2.31) est appelé *inéquation variationnelle elliptique de première espèce* sur H.
Remarquons que si $\varphi \equiv 0$ (ou $K = H$), alors (A.2.30) (resp.(A.2.31)) est équivalente au problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \text{ tel que :} \\ u \in H, \ \langle Au, v \rangle_H = \langle f, v \rangle_H, \quad \forall v \in H. \end{cases} \tag{A.2.32}$$

On obtient ainsi *une équation variationelle*. On dit que l'opérateur A défini sur un espace de *Hilbert* H est :

a) fortement monotone si A vérifie
il existe $m > 0$ tel que :

$$\langle A(\varepsilon_1) - A(\varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rangle_H \geq m \left| \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right|_H^2 \quad \text{pour tout } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in A;$$

b) de *Lipschitz* si A vérifie
il existe $L > 0$ tel que :

$$\left| A(\varepsilon_1) - A(\varepsilon_2) \right|_H \leq L \left| \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right|_H \quad \text{pour tout } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in A.$$

On peut démentre (voir [40]) que si A est fortement monotone et de *Lipschitz* alors A est inversible et A^{-1} est fortement monotone et de *Lipschitz.* En ce qui concerne les problèmes (A.2.30) et (A.2.31), on a les résultats d'existence et d'unicité suivants :

Théorème A.2.22. *Si A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et φ est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement alors l'inéqaution variationnelle elliptique (A.2.30) admet une solution unique.*

Théorème A.2.23. *Si A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et K est un convexe fermé non vide de H alors l'inéquatuon variationnelle elliptique (A.2.31) admet une solution unique.*

Définition A.2.24. On dit que l'opérateur A est *monotone si*

$$\langle u_1 - u_2, w_1 - w_2 \rangle_X \geq 0, \quad \forall w_1 \in Au_1, \ w_2 \in Au_2, \ \forall u_1, u_2 \in D(A).$$

Définition A.2.25. On dit que l'opérateur multivaleur A est maximal monotone s'il n 'existe pas un opérateur multivaleur $B : D(B) \subset H \to 2^H$ qui est un prolongement de l'opérateur A .

On a le résultat suivant :
si $\varphi : H \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre, convexe et s.c.i. alors le sous-différentiel $\partial\varphi$ est un opérateur maximal monotone .
On peut voir aussi que :
si $A_1 : D(A_1) \subset H \to 2^H$ un opérateur maximal monotone et $A_2 : D(A_2) \subset H \to 2^H$ un opérateur de valeur singulier, monotone et continue, alors $A_1 + A_2$ est un opérateur maximal monotone.

Théorème A.2.26. *Soit H un espace de Hilbert réel et $I_H : H \to H$ l'opérateur d'identité. Si $A : D(A) \subset H \to 2^H$ un opérateur multivaleur tel que l'opérateur $A + \alpha I_H$ est maximal monotone pour un réel α, alors pour $f \in W^{1,1}(0,T;H)$ et $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction unique $u \in W^{1,\infty}(0,T;H)$ tel que :*

$$\dot{u}(t) + Au(t) \ni f(t) \qquad p.p.t \in (0,T),$$

$$u(0) = u_0.$$

A.2.5. Compléments divers

On présente ici des lemmes classiques du type *Gronwall* utilisés dans les chapitres de ce mémoire.

Lemme A.2.27. *Soient m, $n \in C(0,T;\mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\,ds + \int_0^t n(s)\,\Psi(s)\,ds, \qquad \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\Psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)\,ds\right) \exp\left(\int_0^t n(s)\,ds\right), \qquad \forall t \in [0,T].$$

Lemme A.2.28. *Soit $m \in W^{1,\infty}(0,T;\mathbb{R})$ une fonction telle que $m(0) = 0$ et $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soient $a \geq 0$ et $b > 0$ deux constantes. Si $\psi \in L^\infty(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\Psi(t) \leq a + m(t) + b\int_0^t \Psi(s)\,ds, \qquad \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\Psi(t) \leq m(t) + \left(a + b \int_0^t m(s)\, ds \right) e^{bt}, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Lemme A.2.29. *Soient* $m, n \in C(0,T;\mathbb{R})$ *telles que* $m(t) \geq 0$ *et* $n(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in [0,T]$ *et soit* $a \geq 0$*. Si* $\Psi \in C(0,T;\mathbb{R})$ *est une fonction telle que :*

$$\frac{1}{2}\Psi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\,\Psi(s)\, ds + \int_0^t n(s)\,\Psi^2(s)\, ds, \qquad \forall t \in [0,T],$$

alors

$$|\Psi(t)| \leq \left(a + \int_0^t m(s)\, ds \right) \exp\left(\int_0^t n(s)\, ds \right), \qquad \forall t \in [0,T].$$

A.3. Espaces fonctionnels

Cette partie constitue une introduction succinte aux espaces de *Sobolev* qui sont la clef d'une bonne compréhension des problèmes aux limites. Il rassemble les prpiétés essentilles de ces espaces qui seront utilisées de façons constante dans les chapitres ultérieurs. On présente de leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On rappelle aussi quelques espaces définis sur un intervalle réel et à valeurs dans un espace de *Hilbert.* On adopte ici la convention de l'indice muet et on précise aussi que toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utiltsés dans cette thèse sont introduits dans cette section. En outre, dans la rédaction de cette section nous avons suivi [40]. Pour plus de détails sur les espaces de *Sobolev* et les espaces de distributions, on renvoie le lecteur à [37], [1] et [4].

A.3.1. Espaces de distributions

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On note par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles sur Ω, indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans Ω et par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω. Le produit de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ sera naté par $\langle .,. \rangle$.
On précise en outre que le produit scalaire canonique ainsi que la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$ seront respectivement notées par "." et $|.|$. Nous introduisons également les espaces suivants :

$$D = \left\{ \varphi = (\varphi_i) \setminus \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega),\ i = \overline{1,N} \right\} = \mathcal{D}(\Omega)^N,$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \phi = \left(\phi_{ij}\right) \setminus \phi_{ij} = \phi_{ji} \in \mathcal{D}(\Omega),\ i,j = \overline{1,N} \right\} = \mathcal{D}(\Omega)_s^{N\times N},$$

$$D' = \left\{u = (u_i) \setminus u_i \in \mathcal{D}'(\Omega),\ i = \overline{1,N}\right\} = \mathcal{D}'(\Omega)^N,$$

$$\mathcal{D}' = \left\{\sigma = (\sigma_{ij}) \setminus \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in \mathcal{D}'(\Omega),\ i,j = \overline{1,N}\right\} = \mathcal{D}'(\Omega)_s^{N\times N}.$$

Les dualités entre les espaces D' et D, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$ seront notées respactivement par $\langle .,. \rangle_{D'\times D}$ et $\langle .,. \rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}$. Plus précisement on a :

$$\langle u, \varphi \rangle_{D'\times D} = \langle u_i, \varphi_i \rangle,$$

$$\langle \sigma, \phi \rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = \left\langle \sigma_{ij}, \phi_{ij} \right\rangle,$$

pour tout $u \in D'$, $\varphi \in D$, $\sigma \in \mathcal{D}'$ et $\phi \in \mathcal{D}$ avec la convention de l'indice muet.
Considérons maintenant l'opérateur défini pour les fonctions et pour les distributions $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $i = \overline{1,N}$.
On a :

$$\langle \partial_i \theta, \psi \rangle = -\langle \theta, \partial_i \psi \rangle, \qquad \forall \theta \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \psi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{A.3.33}$$

On introduit également les opérateurs différentils du premier ordre définis par :

$$\varepsilon : D \to \mathcal{D},\ \varepsilon(\varphi) = (\varepsilon_{ij}(\varphi)),\ \varepsilon_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\partial_j \varphi_i + \partial_i \varphi_j\right),\ \forall i,j = \overline{1,N},\ \varphi \in D, \tag{A.3.34}$$

$$Div : \mathcal{D} \to D,\ Div\phi = \left(\partial_j \phi_{ij}\right), \qquad \forall i = \overline{1,N},\ \phi \in \mathcal{D}. \tag{A.3.35}$$

On va utiliser les mêmes notations pour les opérateurs correspondants définis sur les espaces de distributions :

$$\varepsilon : D' \to \mathcal{D}',\ \varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)),\ \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_j u_i), \qquad \forall i,j = \overline{1,N},\ u \in D', \tag{A.3.36}$$

$$Div : \mathcal{D}' \to D',\ Div\sigma = (\partial_j \sigma_{ij}),\ i = \overline{1,N},\ \sigma \in \mathcal{D}'. \tag{A.3.37}$$

En utilisant (A.3.33), on obtient facilement

$$\langle \varepsilon(u), \phi \rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = -\langle u, Div\phi \rangle_{D'\times D}, \qquad \forall u \in D',\ \phi \in \mathcal{D}, \tag{A.3.38}$$

$$\langle Div\sigma, \varphi \rangle_{D'\times D} = -\langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}, \qquad \forall \sigma \in \mathcal{D}',\ \varphi \in D. \tag{A.3.39}$$

L'opérateur ε défini par (A.3.34) pour les fonctions et par (A.3.36) pour les distributions s'appelle *opérateur déformation.* Lopérateur Div défini par (A.3.35) pour les fonctions et par (A.3.37) pour les distributions s'appelle *opérateur divergence.*
On va utiliser aussi les notations

$$H = \left\{u = (u_i) \setminus u_i \in L^2(\Omega),\ i = \overline{1,N}\right\} = L^2(\Omega)^N, \tag{A.3.40}$$

$$\mathcal{H} = \left\{\sigma = (\sigma_{ij}) \setminus \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega),\ i = \overline{1,N}\right\} = L^2(\Omega)_s^{N\times N}. \tag{A.3.41}$$

Les espaces H et $\mathcal{H}$ sont des espaces de *Hilbert* réels munis des produits scalaires canoniques

$$\langle u, v\rangle_H = \int_\Omega u_i v_i dx, \qquad \forall u, v \in H,$$

$$\langle \sigma, \tau\rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij} dx, \qquad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}.$$

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respactivement par $|.|_H$ et $|.|_{\mathcal{H}}$.
Compte tenu de l'identification de $L^2(\Omega)$ à un sous-espace de distributions sur Ω, on peut considérer que $H \subset D'$ et $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$. Par conséquent, les opérateurs déformation et divergence peuvent être définis respectivement sur les espaces H et $\mathcal{H}$. Cela nous conduira à l'étude d'autres espaces fonctionnels, dans les sections (A.3.34) et (A.3.35). Pour l'instant, on rappelle la définition de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \setminus \partial_i u \in L^2(\Omega),\, i = \overline{1, N}\right\}.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de *Hilbert* réel pour le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \partial_i u, \partial_i v\rangle_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

On notera la norme associée par $|.|_{H^1(\Omega)}$. On note de plus par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Lespace $H_0^1(\Omega)$ est un espace fermé de $H^1(\Omega)$.

A.3.2. Espaces liés à l'opérateur déformation

Pour l'opérateur déformation défini par (A.3.36), il est naturel d'introduire l'espace

$$H_1 = \{u \in H \setminus \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}.$$

On considère sur H_1 le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H_1} = \langle u, v\rangle_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}}, \qquad \forall u, v \in H_1$$

et on note la norme associée par $|.|_{H_1}$. On obtient ainsi que l'injection $H_1 \subset H$ et l'opérateur déformation $\varepsilon : H_1 \to \mathcal{H}$ sont des opérateurs continus. De même, compte tenu de l'identification de H et $\mathcal{H}$ à des sous-espaces de D'et $\mathcal{D}'$, en utilisant (A.3.38) il résulte

$$\langle \varepsilon(u), \phi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} + \langle u, Div\phi\rangle_H = 0, \qquad \forall u \in H,\ \phi \in \mathcal{D}, \tag{A.3.42}$$

$$\langle \varepsilon(u), \phi\rangle_{\mathcal{H}} + \langle u, Div\phi\rangle_H = 0, \qquad \forall u \in H_1,\ \phi \in \mathcal{D}. \tag{A.3.43}$$

Théorème A.3.30. *Muni du produit scalaire $\langle ., .\rangle_{H_1}$ l'espace H_1 est un espace de Hilbert réel.*

On munit maintenant l'espace produit $H^1(\Omega)^N$ du produit scalaire canonique et de la norme associée qu'on note respectivement par $\langle .,. \rangle_{H^1(\Omega)^N}$ et $|.|_{H^1(\Omega)}$.On a alors le résultat suivant :

Théorème A.3.31. *On a l'égalité algébrique $H_1 = H^1(\Omega)^N$ et $|.|_{H_1}$, $|.|_{H^1(\Omega)^N}$ sont des normes équivalentes sur H_1.*

On suppose maintenant que dans toute la suite, la frontière Γ de Ω est de classe $C^{1,1}$. Compte tenu du théorème précédent, toutes les propriétés de l'espace $H^1(\Omega)$ peuvent être transportées sur l'espace H_1 par passage aux espaces produits. Plus précisément, on a les résultats suivants :

- $C^1\left(\overline{\Omega}\right)^N$ est dense dans H_1.
- $H_1 \subset H$ avec injection compacte (*théorème de Rellich*).
- Il existe une application linéaire et continue $\gamma : H_1 \to L^s(\Gamma)^N$ vérifiant l'égalité $\gamma u = u_{|\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\Omega)^N$.

L'application γ est appelée *application trace.* Elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \mapsto u_{|\Gamma}$ définie pour tout $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)^N$. L'application trace $\gamma : H_1 \to L^2(\Omega)$ n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par H_Γ ; c'est un sous-espace de $L^2(\Gamma)^N$ qui est de *Hilbert* pour la structure transportée par γ. On a en outre :

- $H_\Gamma \subset L^2(\Gamma)$ avec injection continue.
- Il existe une application linéaire et continue $z : H_\Gamma \to H_1$ vérifiant l'égalité

$$\gamma(z(\xi)) = \xi, \qquad \forall \xi \in H_\Gamma. \tag{A.3.44}$$

- Le noyau de l'application trace est $H_0^1(\Omega)^N$ i.e.

$$H_0^1(\Omega)^N = \{u \in H_1 \setminus \gamma u = 0\}.$$

En notant par $\nu = (\nu_j)$ la normale sortante unitaire à Γ, on définit pour tout $\xi \in H_\Gamma$ les composantes normale et tangentielle de ξ respectivement par :

$$\xi_\nu = \xi.\nu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ et } \xi_\tau = \xi - \xi_\nu \nu \in H_\tau, \tag{A.3.45}$$

où H_τ est le sous-espace fermé de H_Γ défini par :

$$H_\tau = \{\xi \in H_\Gamma \setminus \xi_\nu = 0 \quad p.p. \text{ sur } \Gamma\}.$$

On peut prouver de plus que l'application $\xi \mapsto (\xi_\nu, \xi_\tau)$ est un isomorphisme de H_Γ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H_\tau$.

Dans la suite, on va utiliser respectivement les espaces duaux H'_Γ, $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et H'_τ de H_Γ, $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ et H_τ. On notera leurs normes respectives ainsi que leurs produits de dualité par $|.|_{H'_\Gamma}$, $\langle .,. \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$, $|.|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$, $\langle .,. \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$ et $|.|_{H'_\tau}$, $\langle .,. \rangle_{H'_\tau \times H_\tau}$.

Pour tout $\xi' \in H'_\Gamma$, les composantes *normale* et *tangentielle* de ξ' sont respectivement définies par :

$$\langle \xi'_\nu, \xi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \langle \xi', \xi\nu \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}, \qquad \forall \xi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \tag{A.3.46}$$

$$\langle \xi'_\tau, \xi \rangle_{H'_\tau \times H_\tau} = \langle \xi', \xi \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}, \qquad \forall \xi \in H_\tau. \tag{A.3.47}$$

L'application $\xi' \mapsto (\xi'_\nu, \xi'_\tau)$ est un isomorphisme de H'_Γ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H'_\tau$ et, compte tenu de (A.3.45)-(A.3.47), il résulte

$$\langle \xi', \xi \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \xi'_\nu, \xi_\nu \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \langle \xi'_\tau, \xi_\tau \rangle_{H'_\tau \times H_\tau}, \qquad \forall \xi' \in H'_\Gamma,\ \xi \in H_\Gamma. \tag{A.3.48}$$

Moyennant l'application trace, on définit pour tout $u \in H_1$, les élément $\gamma_\nu u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\gamma_\tau u \in H_\tau$ par :

$$\gamma_\nu u = (\gamma u)_\nu, \qquad \gamma_\tau u = (\gamma u)_\tau$$

et rappelons que si $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)^N$ alors

$$\gamma u = u_{|\Gamma}, \quad \gamma_\nu u = u_{|\Gamma}.\nu, \qquad \gamma_\tau u = u_{|\Gamma} - \left(u_{|\Gamma}.\nu\right)\nu.$$

De plus, par souci de simplicité, on utilisera souvent les notations u, u_ν, u_τ au lieu de γu, $\gamma_\nu u$, $\gamma_\tau u$ pour tout $u \in H_1$.
On note à présent par $\mathcal{R}$ l'ensemble des déplacements rigides défini par :

$$\mathcal{R} = \{u \in H_1 \setminus \varepsilon(u) = 0\} \tag{A.3.49}$$

et soit V un sous-espace fermé de H_1. On a alors le résultat suivant :

Théorème A.3.32. *Si le sous-espace V est tel que*

$$V \cap \mathcal{R} = \{0\}, \tag{A.3.50}$$

alors l'inégalité de Korn est vérifiées sur V, c'est à dire

$$|\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \geq C\,|u|^2_{H_1}, \qquad \forall u \in V, \tag{A.3.51}$$

où C est une constante strictement positive ne dépendant que de Ω et V .

Supposons maintenant que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$ est une partition de Γet soit V le sous-espace fermé de H_1 défini par

$$V = \{u \in H_1 \setminus \gamma u = 0 \quad p.p. \text{ sur } \Gamma_1\}. \tag{A.3.52}$$

Proposition A.3.33. *Si $mes\Gamma_1 > 0$ alors l'inégalité de Korn (A.3.51) est vérifiée sur le sous-espace V défini par (A.3.52).*

En utilisant ce résultat, il vient
Si $mes\Gamma_1 > 0$ alors "$u \mapsto |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}}$" est une norme sur le sous-espace V défini par (A.3.52), équivalente à la norme canonique $|.|_{H_1}$.

A.3.3. Espaces liés à l'opérateur divergence

Comme dans le cas de l'opérateur déformation, il est naturel d'introduire l'espace $\mathcal{H}_1$ lié à l'opérateur divergence et définit par :

$$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \setminus Div\sigma \in H\},$$

sur lequel on cosidère le produit scalaire

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, Div\tau \rangle_H, \qquad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}_1.$$

On note la norme associée par $|.|_{\mathcal{H}_1}$. On obtient ainsi que l'injection $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ et l'opérateur divergence $Div\sigma : \mathcal{H}_1 \to H$ sont des opérateurs continus. De plus, compte tenu de l'identification de H et $\mathcal{H}$ à des sous-espaces de D' et $\mathcal{D}'$, en utilisant (A.3.43), il résulte

$$\langle Div\sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} + \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} = 0, \qquad \forall \sigma \in \mathcal{H},\ \varphi \in D, \tag{A.3.53}$$

$$\langle Div\sigma, \varphi \rangle_H + \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} = 0, \qquad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1,\ \varphi \in D. \tag{A.3.54}$$

Théorème A.3.34. *Muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle_{\mathcal{H}_1}$ l'espace $\mathcal{H}_1$ est un espace de Hilbert réel.*

On peut prouver que l'espace

$$C^1\left(\overline{\Omega}\right)_s^{N\times N} = \left\{\sigma = (\sigma_{ij}) \setminus \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1\left(\overline{\Omega}\right),\ i,j = \overline{1,N}\right\},$$

est dense dans H. De plus, pour tout $\sigma \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)_s^{N\times N}$, on note par $\sigma\nu$ le vecteur de composante $(\sigma_{ij}\nu_j)$, $i = \overline{1,N}$. Comme dans le cas de l'espace H_1, on peut définir *l'application trace* pour l'espace $\mathcal{H}_1$ à l'aide du résultat suivant :

Théorème A.3.35. *Il existe une application linéaire, continue et surjective $\overline{\gamma} : \mathcal{H}_1 \to H'_\Gamma$ telle que :*

$$\langle \overline{\gamma}\sigma, \xi \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\nu.\xi da, \tag{A.3.55}$$

pour tout $\xi \in H_\Gamma$ et $\sigma \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)_s^{N\times N}$. Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, l'image $\overline{\gamma}\sigma \in H'_\Gamma$ est élément de H'_Γ vérifiant l'égalité

$$\langle \overline{\gamma}\sigma, \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, u \rangle_H, \qquad \forall u \in H_1. \tag{A.3.56}$$

De plus, il existe une application linéaire et continue $\overline{z} : H'_\Gamma \to \mathcal{H}_1$ telle que

$$\overline{\gamma}\left(\overline{z}\left(\Sigma\right)\right) = \Sigma, \qquad \forall \Sigma \in H'_\Gamma. \tag{A.3.57}$$

Compte tenu de ce résultat, on définit pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, les éléments $\overline{\gamma}_\nu \sigma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\overline{\gamma}_\tau \sigma \in H'_\Gamma$ par

$$\overline{\gamma}_\nu \sigma = (\overline{\gamma}\sigma)_\nu , \qquad \overline{\gamma}_\tau \sigma = (\overline{\gamma}\sigma)_\tau .$$

Rappelons que si $\sigma \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)_s^{N\times N}$ alors, à partir de (A.3.56), (A.3.46) et (A.3.47), il résulte

$$\overline{\gamma}\sigma = \sigma_{|\Gamma}\nu, \qquad \overline{\gamma}_\nu \sigma = \left(\sigma_{|\Gamma}\nu\right)_\nu , \qquad \overline{\gamma}_\tau \sigma = \sigma_{|\Gamma}\nu - \left(\sigma_{|\Gamma}\nu\right)\nu.$$

Afin de simplifier les notations, on utilisera dans la suite la notation $\sigma\nu$, σ_ν et σ_τ au lieu de $\overline{\gamma}\sigma$, $\overline{\gamma}_\nu\sigma$ et $\overline{\gamma}_\tau\sigma$ pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$ et, moyennant (A.3.48) et (A.3.56), on peut alors énoncer la double égalité suivante

$$\langle \sigma\nu, \gamma u\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma_\nu, u_\nu\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \langle \sigma_\tau, u_\tau\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(u)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, u\rangle_H , \tag{A.3.58}$$

pour tout $u \in H_1$ et $\sigma \in \mathcal{H}_1$.

Supposons maintenant que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$ est une partition de Γ et soit $\sigma \in \mathcal{H}_1$. On introduit les définitions suivantes :

$$\sigma\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \Leftrightarrow \langle \sigma\nu, \gamma u\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = 0, \quad \forall u \in H_1 \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \tag{A.3.59}$$

$$\sigma_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \Leftrightarrow \langle \sigma\nu, \gamma u\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = 0, \quad \forall u \in H_1 \text{ tel que } u_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \text{et } u_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma, \tag{A.3.60}$$

$$\sigma_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_1 \Leftrightarrow \langle \sigma\nu, \gamma u\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \geq 0, \quad \forall u \in H_1 \text{ tel que } u_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_2 \text{ et } u_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma, \tag{A.3.61}$$

$$\sigma_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \Leftrightarrow \langle \sigma\nu, \gamma u\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = 0, \ \forall u \in H_1 \text{ tel que } u_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \text{ et } u_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{A.3.62}$$

Ces définitions sont motivées par le souci de prolonger les définitions de ces mêmes propriétés de $C^1\left(\overline{\Omega}\right)_s^{N\times N}$ vers $\mathcal{H}_1$. De plus, on dit que $\sigma\nu = h$ sur Γ_1 si $\sigma\nu - h = 0$ sur Γ_1 est les propriétés $\sigma_\nu = h$ sur Γ_1, $\sigma_\nu \leq h$ sur Γ_1 et $\sigma_\tau = h$ sur Γ_1 sont définies de manière analogues.

On considère maintenant le sous-espace fermé $\mathcal{V}$ de $\mathcal{H}_1$ défini par :

$$\mathcal{V} = \{\sigma \in \mathcal{H}_1 \setminus Div\sigma = 0 \text{ dans } \Omega, \, \sigma\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}. \tag{A.3.63}$$

Le lien entre l'espace V défini par (A.3.52) et lespace $\mathcal{V}$ donné par la résultat suivant :

Théorème A.3.36. *Si $mes\Gamma_1 > 0$ alors $\varepsilon(V)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ dont l'orthogonal est l'espace $\mathcal{V}$.*

Ce théorème conduit au résultat suivant :

Si $mes\Gamma_1 < 0$, alors pour tout $\tau \in \mathcal{H}$, il existe un unique couple de fonctions $(\tau', v) \in \mathcal{V} \times V$ tel que

$$\tau = \tau' + \varepsilon(v), \tag{A.3.64}$$

où $\mathcal{V}$ et V sont respectivement donnés par (A.3.63) et (A.3.52). De plus, l'application $L : \tau \mapsto v$ est linéaire et continue de $\mathcal{H}$ dans V.

A.4. Approximation variationnelle

Soit H l'espace défini auparavent (de dimension infinie), on se donne un sous-espace H_h de H de dimension finie et dépendant d'un paramètre $h > 0$, soit I la dimension de H ; en pratique, H_h représente une approximation de l'espace H de dimension infinie et on aura :

$$\lim_{h \to 0} I(h) = +\infty$$

et soit le problème variationnel suivant :
Problème P : Trouver $u \in H$ tel que :

$$u \in H \ , \ \langle Au, v-u \rangle_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v-u \rangle_H \,, \qquad \forall v \in H,$$

où A et φ sont définis dans (A.2.30).
Afin d'obtenir une approximation numérique de la solution u on introduit in problème approché $\mathrm{P^h}$ posé dans un espace de dimension finie. On vérifie, en premier que le problème $\mathrm{P^h}$ a une solution unique puis on montre que sa solution converge vers la solution u du problème P.
Alors, au sous-espace H_h de H, on associe le problème approché $\mathrm{P^h}$ suivant :
Problème $\mathrm{P^h}$: trouver $u^h \in H_h$ tel que :

$$u^h \in H_h \ , \ \left\langle Au^h, v^h - u^h \right\rangle_H + \varphi\left(v^h\right) - \varphi\left(u^h\right) \geq \left\langle f, v^h - u^h \right\rangle_H \,, \qquad \forall v^h \in H_h.$$

l'intérêt de la méthode d'approximation variationnelle est de trouver une estimation d'erreur comise lorsqu'on approche u par u^h, c'est à dire démontrer le théorème :

Théorème A.4.37. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de H_h tel que*

$$\left\| u - u^h \right\| \leq C \inf_{v^h \in H_h} \left\| u - v^h \right\|.$$

Bibliographie

[1] Adams R. S," *Sobolev spaces"*, Academic press, New York (1975).

[2] B. Awbi, Thèse de Doctorat "*Analyse variationnelle de quelques problèmes visco-élastiques et viscoplastiques avec frottement*" Université de Perpignan (2001).

[3] V. Barbu, "*Non linear Semigroups and Differential Equations in Banach spaces",* Editura Academiei, Bucharest-Noordhoff, Leyden (1976).

[4] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications.* Masson, Paris (1987).

[5] H. Brézis, *Equations et Inéquations non Linéaires dans les Espaces Vectoriels en Dualité,* Ann. Inst. Fourrier, 18 (1968), p 115-175.

[6] L. Cangémi, "*Frottement et Adhérence : modèle, traitement numérique et application à l'interface fibre/matrice"*, Ph. D. Thesis, Univ. Méditerranée, Aix-Marseille II (1997).

[7] O. Chau, J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, "*Variational and Numerical Analysis of a Quasistatic Viscoelastic contact problem with adhesion*", J. Comput. Appl. Math, 159 (2003), 431–465.

[8] J. Chen, W. Han and M. Sofonea, "Numerical Analysis of a Contact Problem in Rate-type Viscoplasticity", *Numer. Funct. Anal. Optim. 22(2001), 505-527.*

[9] O. Chau, M. Shillor and M. Sofonea," *Dynamic frictionless contact with adhesion*", J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), 55 (2004), 32-47.

[10] P. G. Ciarlet, "*Elasticité Tridimensionnelle"*, Masson, Paris (1986).

[11] P. G. Ciarlet, "*The Finite Element Method for Elliptic Problems"*, North Holland, Amsterdam, (1978).

[12] M. Cocu, "*Unilateral Contact Problems with Friction for an Elasto-viscoplastic Material with internal State Variable*", Porc. Contact Mechanics Int. Symp. Edt. A. Curnier, PPUR (1992), 207-216.

[13] M. Cocu, "*On A Model Coupling Adhesion and Friction : Thermodynamics Basis and Mathematical Analysis*", Proceed. of the fifth. Inter. Seminar. On Geometry, Continua and Microstructures, Romania (2001), 37-52.

[14] M. Cocu and R. Rocca, "*Existence Results for Unilateral Quasistatic Contact Problems with Friction and Adhesion*", Math. Model. and Numer. Anal. 34, (2000), 981-1001.

[15] S. Drabla, Analyse Vriationnelle de Quelques Problèmes aux Limites en Elasticité et Viscoplasticité, thèse de doctorat, Université Farhat Abbes-Sétif (1999).

[16] G. Duvaut and J. L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris, (1972).

[17] M. Frémond, " *Equilibre des Structures qui Adhèrent à leur support*", C. R. Académie des sciences, Paris 295, Série II (1982), 913-916.

[18] M. Frémond, "*Adhérence des Solides*", Journal. Mécanique Théorique et Appliquée 6 (1987), 383-407.

[19] J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, "*Analysis and numerical simulations of a dynamic contact problem with adhesion*", Math. Comput. Modelling, 37 (2003), 1317–1333.

[20] R. Glowinski, J. L. Lions and R. Trémolières, "*Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles",* tome 1 et 2, Dunod, (1976).

[21] W. Han and M. Sofonea, "*Numerical Analysis of a Frictionless Contact Problem for Elastic-Viscoplastic Materials*" Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 190 (2000), 179-191.

[22] N. Hemici, B. Awbi, M. Sofonea,"*Viscoelastic problem contact with compliance normal and adhésion*"Annals of University of Bucarest 51 (2002) 131-142.

[23] N. Hemici, A. Matei," *A frictionless contact problem with adhesion between two elastic bodies"*Annals of university of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. 30, (2003) 90-99

[24] N. Hemici, M. Sofonea,"*Analysis of dynamic bilateral contact problem with adhésion*" Proceedings of the Fourth International Conference on Applied Mathematics and Engineering Sciences, (CIMASI 2002), Casablanca (2002), CD-ROM.

[25] I. R. Ionescu, M. Sofonea," *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity"*, Oxford University Press, Oxford, (1993).

[26] L. Jianu, M. Shillor and M. Sofonea, *"A viscoelastic bilateral frictionless contact problem with adhesion*", Applic.Anal. 80 (2001), 233–255.

[27] O. Kavian, *"Introduction à la théorie des points critiques et Applications aux équations elliptiques"*, Springer-Verlag (1993).

[28] D. Kendri," *Etude Théorique et Numérique de Quelques Problèmes de Contact"*, Mémoire de Magister en Mathématique Appliquées, Univ, Ferhat Abbas, Sétif, 2001.

[29] Z. Lerguet, "*Analyse Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact en Elasticité et en viscoplasticité"*. Mémoire de Magister en Mathématique Appliquées, Univ, Ferhat Abbas, Sétif, 2003.

[30] A. Matei, "*Modélisation Mathématique en Mécanique du Contact",* Thèse de Doctorat de l'Université de Perpignan (2002).

[31] J. Nečas "*Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*" Masson Paris (1981).

[32] J. Nečas and I. Hlavaček, "*Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies An Introduction*", Elsevier," Amsterdam (1981).

[33] P. D. Panagiotopoulos, "*Inequality Problems in Mechanical and Applications*," Birkhauser, Bassel (1985).

[34] M. Raous, L. Cangémi et M. Cocu, "*A Consistent Model Coupling Adhesion, Friction and Unilateral Contact*", Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 177 (1999), 383-399.

[35] P. A. Raviart et J. M. Thomas, "*Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles*", Masson, Paris (1992).

[36] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, "*Quasistatic Viscoelastic Contact with Normal Compliance and Friction*", J. Elasticity, 51 (1998), 105-126.

[37] L. Schwartz, "*Théorie des Distributions*", Hermann, Paris (1967).

[38] M. Sofonea, "*Problèmes non Linéaires dans la Théorie de l'Elasticité*", Cours de Magister de Mathématiques Appliquées à l'Université de Sétif (1993).

[39] M. Sofonea, *Problèmes Mathématiques en Elasticité et en Viscoplasticité,* cours de DEA, Université Blaise Pascal, Clermont Ferrand (1991).

[40] M. Sofonea and A. Matei, "*Elastic Antiplane Contact Problem with Adhesion*".J.Appl.Math.Phys, (ZAMP) 53 (2002),

[41] M. Sofonea and A. Matei, " *An Elastic Contact Problem with Adhesion and Normal Compliance*" preprint.

[42] N. Strömberg, "*Continuum Termodynamics of Contac, friction and wear*". Thèse de Ph.D, Linköping University, Sweden (1995).

[43] P. Suquet, "*Plasticité et Homogénéisation*", Thèse de Doctorat d'Etat, Univ, Pierre et Marie Curie, Paris 6 (1982).

[44] K. Yosida," *Functional Analysis*", Springer-Verlag, Berlin (1971).