

ليم العالي و البحث العلمي — وزارة التعل
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة فرحات عباس — سطيف
Université Ferhat Abbas - Sétif

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département d'Optique et de Mécanique de Précision
Pour l'obtention du Diplôme de

Doctorat d'état

Option : **Conception**

Par

Ferhat Djeddou

THÈME

Conception d'un nouveau profil des engrenages.

Soutenue le

devant le jury composé de :

M.	Bouزيد	Djamel	Prof. à l'Université de Sétif	Président
M.	Zegadi	Rabah	Prof à l'Université de Sétif	Rapporteur
M.	Bouزيد	Said	MC à l'université de Sétif	Examineur
M.	Benarioua	Younes	MC à l'université de M'sila	Examineur
M.	Allali	abdelrazak	MC. à l'université de Blida	Examineur

REMERCIEMENTS

En premier lieu je voudrais témoigner ma gratitude à Rabah Zegadi Professeure à la faculté de l'ingénieur de l'Université Ferhat Abbas Sétif, qui a encadré mon travail de thèse et au contact du quel j'ai beaucoup appris tout le long de ce travail.

Je remercie vivement le professeur Djamel Bouzid à l'Université de Sétif pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury.

Je tiens à associer à mes sincères remerciements aux Maîtres de Conférences : Said Bouzid , Younes Benarioua, Abdelrazak Allali, pour avoir accepté de faire partie du jury de soutenance et d'examiner ce travail.

Tout au long de mon travail, j'ai bénéficié de l'aide technique et de la compétence de plusieurs personnes, ainsi que de l'ambiance amicale régnant au laboratoire. Qu'elles trouvent ici toute ma reconnaissance pour leur précieux soutien.

Je ne saurais exprimer toute ma gratitude envers la patience de ma famille, et leurs encouragements tout au long de ce travail.

Sans oublier d'exprimer mes sentiments les plus chaleureux à mes parents, qui m'ont donnés tout ce dont j'avais besoin pour accomplir mon chemin.

Dédicace

*A la mémoire de mon père
A ma très chère mère,
à ma femme
à mes enfants
à mes frères et sœurs,
à ceux qui m'ont aidé,
à ceux qui m'ont soutenu
et à ceux qui estiment le savoir*

Je dédie ce mémoire

Résumé

Les normes modernes tels que ISO/DIS 6336, DIN/3990 et BS 436 actuellement recommandées pour l'estimation des contraintes dans les engrenages réels donnent des formules approximatives pour le calcul des facteurs géométriques de précision des engrenages et plus particulièrement ceux des engrenages fins.

Dans ce travail, toutes les sources possibles de déviation d'alignement de la denture sont discutées. Une formulation exacte est présentée pour un vrai réducteur de transmission simple pour une localisation de la denture entre deux paliers et en porte à faux. En outre, une approche alternative généralisée basée sur une procédure d'optimisation déterministe a été présentée afin de réduire au minimum l'effet des facteurs de distribution de charges des engrenages fins après l'étape de conception sans changer les paramètres de conception des engrenages ou leur processus de fabrication.

Deux méthodes probabilistes sont développées dans ce travail pour établir une analyse statistique des contraintes appliquées et permises utilisées dans la procédure ISO/DIS 6336. Celles-ci donnent une évaluation plus réaliste des contraintes et des résistances réelles pour des distributions données ou assumées des différentes erreurs aléatoires de fabrication. En plus, une procédure d'optimisation stochastique (PDO) a été utilisée pour l'estimation de la fiabilité des systèmes à engrenages.

Enfin, les erreurs élémentaires de fabrication dans les composants commerciaux d'un réducteur de vitesse ont été entièrement inspectées. Statistiquement évaluées et comparées aux données standard, la banque de données constituée à partir de ces mesures a servi à la validation des méthodes développées dans ce travail.

III.1.7 Battement des Roues Dentées, Battement des Epaulements des Arbres, des Faces du Pignon et de la Roue	42
III.1.8 Composante de Déviation d'Alignement d'Engrènement.....	43
Due aux Déformations des Paliers	
III.1.9 Composante de Déviation d'Alignement d'Engrènement.....	44
Due aux Déformations des Arbres	
III.1.10 Composante de Déviation d'Alignement d'Engrènement.....	44
Due aux Déformations du Carter	
III.2 Méthode d'Optimisation	45
III.3. Analyse Statistique	50
III.3.1. Méthode Analytique.....	50
III.3.1.1 Moyenne et Ecart Type de $K_{H\beta}$ et $K_{F\beta}$	54
III.3.1.2 Moyenne et Ecart Type de K_V	58
III.3.1.3 Moyenne et Ecart Type de $K_{H\alpha}$ et $K_{F\alpha}$	59
III.3.1.4 Moyenne et Ecart Type de σ_H et σ_F	59
III.3.1.5 Moyenne et Ecart Type de σ_{HP} , σ_{FP}	60
III.3.2. Technique de Monte Carlo.....	60
III.1.3. Résultats de l'Analyse	62
Références.....	69

CHAPITRE IV : METHODES DE PREDICTION DE LA FIABILITE DES ENGRENAGES

IV.1 Introduction.....	72
IV.1.1 Notion d'État de Limite	74
IV.1.2 Index de Fiabilité.....	75
IV.2 Méthodes de Prédiction de la Fiabilité des Engrenages	76
IV.2.1 Simulation de Monte Carlo.....	76
IV.2.2 Méthode de Fiabilité de Premier Ordre (FORM).....	77
IV.2.2.1 Détermination de l'Index de Sécurité.....	77
IV.2.2.2 Format Probabiliste d'Optimisation de Conception (PDO).....	80
IV.3 Résultats de L'Analyse.....	81
IV.3.1 Analyse par la Méthode Simplifiée (Fonction d'Etat Limite Linéaire)	81
IV.3.2 Analyse par la Méthode de Conception par Optimisation.....	84
Probabiliste (PDO)	
Références.....	90

CHAPITRE V : ETUDE EXPERIMENTALE DES ERREURS DE FABRICATION DES ENGRENAGES.

V.1. Introduction.....	93
V.2 Mesure de Erreurs dans les roues dentées.....	95
V.2.1 Les Erreurs d'Alignement, du Profil et du Pas de Base.....	95
V.2.1.1 Appareillage et Méthodes de Mesure.....	95
V.2.1.2 Interprétation des Résultats.....	95
V.2.2 Mesures de l'Etat de surface	98
V.2.3 Mesures de la Dureté.....	98
V.2.4 Mesures de l'Ecartement sur k Dents.....	98
V.2.5 Mesures des Erreurs du Battement Radial (excentricité) des Roulements.....	99
V.2.6 Mesures des Erreurs d'Alignement des Alésages.....	99

soutenant les Paliers.	
V.3 Evaluation de la Qualité de Précision de la Production.....	100
Globale.	
Références.....	101
CONCLUSION GENERALE.....	102
ANNEXE A	
Mesure des Erreurs de Fabrication.....	106
ANNEXE B	
Analyse Exacte des Statistiques des Facteurs.....	120
de Précision des Engrenages	

LISTE DES SYMBOLES

b	Largeur de la denture
b_{cal}	Largeur apparente de calcul
C'	Rigidité de denture simple par unité de largeur (N/mm/ μ m)
C_Y	Rigidité de l'engrènement par unité de largeur (N/mm/ μ m)
$d_{1,2}$	Diamètre primitif du pignon, roue
$e_A \dots e_D$	Ecart de l'ajustement entre les diamètres extérieurs des roulements et leur logements dans le carter A, ..., D
$e_1 \dots e_8$	Excentricités des bagues extérieures des roulements
$f_{a1,2}$	Battement axial des faces du pignon (roue) aux diamètres $\approx d_1, d_2$
f_{bm1}	Composante de l'erreur d'alignement* due au jeu entre les alésages des paliers et les bagues extérieures des roulements.
f_{bm2}	Composante de l'erreur d'alignement* due à l'excentricité Composante de l'erreur d'alignement* due au battement de bagues intérieures des roulements.
f_e	Composante de l'erreur d'alignement* due à la déformation élastique (sous charge) des arbres, corps de roues, paliers et carters.
f_f	Erreur de forme du profil
$f_{H\beta}$	Erreur de l'angle d'hélice
f_{ma}	Erreur d'alignement de l'engrènement de manufacture* (résultante des erreurs de fabrication accumulées) dans le plan d'action.
f_{Par1}	Erreur d'alignement* des axes du pignon et de la roue
f_{pb}	Erreur du pas de base
$f_{\Sigma\beta}$	Erreur de déviation relative des arbres du pignon et de la roue.
$f_{\Sigma\delta}$	Initial equivalent mesh misalignment* (before running-in)
$f_{\beta y}$	Erreur d'alignement de l'engrènement effective* (après rodage) dans le plan d'action.
F_t	Force Tangentielle au diamètre primitif
F_{aX}	Force axiale au niveau du cercle primitif
F_{bn}	Force Tangentielle normale à la ligne d'action
F_r	Force radiale au niveau du cercle primitif
$f_{sh1,2}$	Composante de l'erreur d'alignement de l'engrènement* due aux déflexions des arbres du pignon et de la roue (μ m.mm/N).
$f_{sh01,2}$	Déflexion actuelle* pour unité de charge des arbres du pignon et de la roue.
$G(x)$	Fonction d'état limite
h_F	Hauteur de la dent
i, j	Notations d'index
K_A	Facteur d'application
$K_{F\alpha}, K_{H\alpha}$	Facteurs de distribution transversale
$K_{F\beta}, K_{H\beta}$	Facteurs de distribution longitudinale

K_V	Facteur Dynamique
m_n	Module normale
n_1	Vitesse de rotation du pignon (tr/min)
N_L	Nombre de cycles
P_F	Probabilité de défaillance pour la fatigue de flexion
P_H	Probabilité de défaillance pour la fatigue de contact
R_F	Fiabilité pour la fatigue de flexion
R_H	Fiabilité pour la fatigue de contact
S_F	Facteur de sécurité pour la contrainte de flexion
S_H	Facteur de sécurité pour la contrainte de contact
STD	Ecart type
$T_{1,2}$	Couple nominale du pignon (roué)
T_β	Tolérance sur $f_{H\beta}$
y_β	Réduction de l'erreur d'hélice par rodage de fonctionnement
$\gamma_A, \dots, \gamma_D$	Angle formé entre la résultante de la réaction des paliers A, ... D et l'axe X comme défini dans Fig.5 (b).
$\delta_{BeaA, D}$	Déflexion des paliers A, ... D respectivement
θ, φ	Angles de phase
$\omega_{1,2}$	Vitesse angulaire du pignon, roue (rad/s)
u	Rapport de transmission
Z_β	Facteur de l'inclinaison de l'hélice
Y_F	Facteur de forme
Y_{NT}	Facteur de durée pour la résistance au pied de la dent
Y_{Rrelt}	Facteur de rugosité relatif
Y_X	Facteur de dimensions (similaire à Z_X)
Y_{ST}	Facteur de concentration de contrainte de l'engrenage d'essai
$Y_{\delta relt}$	Facteur de sensibilité relative à l'entaille
Z_E	Facteur d'élasticité
Z_H	Facteur géométrique au point primitif
Z_i	Variable standard
Z_L	Facteur lubrifiant
Z_N	Facteur de durée
Z_R	Facteur de rugosité pour la contrainte de contact
Z_X	Facteur de dimensions
Z_V	Facteur de vitesse
Z_W	Facteur de rapport de dureté entre pignon et roue
$Z_{1,2}$	Nombre de dents du pignon (roue)
Z_e	Facteur de conduite
α_n	Angle de pression normale au cylindre primitif
β	Angle d'hélice au cercle primitif ou indice de fiabilité
β_H, β_F	Indice de fiabilité de contact, rupture
$\Phi(\mathbf{xx})$	Fonction de distribution normale cumulative standard
$\Phi^{-1}(\mathbf{xx})$	Fonction inverse de distribution normale cumulative standard
σ_F	Contrainte de flexion du pied de la dent pour un engrenage réel.
σ_{Flim}	Endurance limite pour la flexion au niveau du pied de la dent
σ_{FP}	Contrainte de pied de dent (flexion) admissible
σ_H	Contrainte de contact (pression de Hertz) pour engrenage réel

σ_{Hlim}	Endurance limite pour la contrainte de contact
σ_{HP}	Contrainte de contact admissible
$\sigma_{(XX)}$	Ecart type de la variable xx.

* Se referez aux composantes dans le plan d'action.

INTRODUCTION

Les normes modernes actuellement recommandées pour l'estimation des contraintes dans les engrenages réels donnent des formules approximatives pour le calcul des facteurs de précision des engrenages. Toutes ces normes modernes incluent des conseils détaillés sur la façon dont on peut estimer l'influence des déformations sous charge des dents, des arbres, des roulements, ...etc. sur les facteurs de distribution de charges mais dans tous les cas elles supposent une valeur cumulée de l'erreur de fabrication basée sans une vraie justification, seulement sur le grade de précision des engrenages. Cependant, l'erreur combinée d'alignement des dents (due aux erreurs de fabrication et de montage des engrenages et aux déformations sous charge) est habituellement le facteur de précision le plus critique en déterminant la capacité de charge d'une paire de roues dentées en particulier pour les engrenages fins (dont le module est inférieur ou égale à 1mm). Puisque, pour des engrenages semblables de même matériau (c.-à-d. de même niveau de contraintes appliquées), le rapport de la distorsion d'alignement de la dent à la déflexion élastique est plus élevé pour les engrenages fins. Ceci rend leur répartition longitudinale de charges plus mauvaise et explique par conséquent pourquoi l'analyse soignée des erreurs de fabrication est particulièrement nécessaire pour les engrenages fins.

En plus des tolérances de fabrication des engrenages et de leurs accessoires, les incertitudes qui proviennent de la qualité du matériau et du traitement thermique ainsi que l'état de surface et l'effet des contraintes résiduelles présentent un problème épineux pour l'estimation des contraintes réelles appliquées dans un engrenage en service.

L'objectif principal de ce travail est donc de développer des méthodes pratiques simples pour estimer l'effet des tolérances de fabrication, la variation dans les durées limites de fatigue du matériau et l'état de surfaces des dentures sur la performance des engrenages en général, et plus particulièrement les engrenages fins.

Plusieurs méthodes et procédures sont développées dans ce travail :

- Formulation exacte (alternative à celle des normes actuelles) de l'équation déterminant la déviation d'alignement totale d'engrènement.
- Procédure d'optimisation déterministe (alternative aux méthodes classiques de correction des dentures (voir chapitre III)) permettant la réduction de l'effet des facteurs de distribution de la charge longitudinale sur la performance des engrenages.
- Méthode statistique analytique basée sur la série de Taylor permettant la détermination (par des formules simples et pratiques) des statistiques des différents paramètres de précision des engrenages fins qui sont nécessaires pour la prédiction de la durée de vie des systèmes à engrenages, ainsi que leurs fiabilités.
- Méthode numérique de Monte Carlo, permettant la validation du modèle analytique développé.
- Méthode analytique approximative (mais pratique) de calcul de fiabilité et du coefficient de sécurité des mécanismes à engrenages. Cette dernière est basée sur la théorie d'interférence des contraintes appliquées et celles admissibles, et utilise comme données de base les statistiques estimées par les méthodes théoriques (citées dans ce travail) ou mesurées (voir chapitres III et V).
- Méthode exacte de conception par optimisation probabiliste connue sous le nom de (PDO). Elle utilise les procédures d'optimisation stochastique pour la prédiction des paramètres de conception des engrenages.

Enfin, les erreurs élémentaires de fabrication dans les composants commerciaux d'un réducteur de vitesse ont été entièrement inspectées. Statistiquement évaluées et comparées aux données standard, la banque de données constituée à partir de ces mesures a servi à la validation des méthodes développées dans ce travail.

CHAPITRE I :

***METHODES DE PERFORMANCE DES
ENGRENAGES***

I.1. INTRODUCTION

Pour que les transmissions par engrenages soient satisfaisantes, elles doivent fonctionner comme prévu à l'étape de conception. Une mauvaise performance des boîtes de vitesse conduit généralement à la défaillance des engrenages qui peut être originellement due à :

- La fatigue par piqûres causée par le fait que les contraintes de contact excèdent la résistance de contact du matériau.

- La rupture de dents provoquée par le fait que les contraintes de flexion excèdent la résistance à la flexion du matériau.

- D'autres types de défaillances associées aux mauvaises conditions de lubrification telles qu'éraillures, piqûres et usure.

Les méthodes pratiques actuelles utilisées pour la prédiction des contraintes présentes durant le fonctionnement des engrenages sont généralement celles données par l'un des standards des engrenages tels que ISO/6336 [1], BS 436 [2], DIN/ 3990 [3] et AGMA 2101[4]. Tous ces standards sont basés en premier lieu sur la détermination des contraintes nominales de contact et de flexion σ_{H0} , σ_{F0} pour des engrenages parfaits (avec une géométrie exacte des dents, une charge constante et une distribution parfaite de charge le long de la denture). Les contraintes de contact et de flexion pour des engrenages réels sont ensuite calculées à partir de celles nominales tout en tenant compte des effets des déviations de la géométrie exacte des dents et des actuelles conditions de travail des engrenages. Tous les standards mentionnés ci-dessus adoptent des approches similaires et donc le standard international ISO/DIS/6336 [1] est pris dans ce travail comme exemple.

I.2. CONTRAINTES DANS LES ENGRENAGES PARFAITS

I.2.1. Contraintes de Contact

La contrainte maximale «Hertzienne» de contact au point primitif est généralement considérée comme un critère adéquat pour prédire la pression superficielle de contact. Le calcul de celle-ci est basée sur la théorie de deux cylindres pressés l'un contre l'autre sans roulement ni glissement ou lubrifiant. En utilisant la notation de la figure (I.1), la théorie d'Hertz [5] nous donne :

$$\sigma_{H0} = \sqrt{\frac{F_{bn}}{\pi \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)} \cdot \frac{1}{b(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{1}{\rho_1 + \rho_2} \right)} \quad (\text{I-1})$$

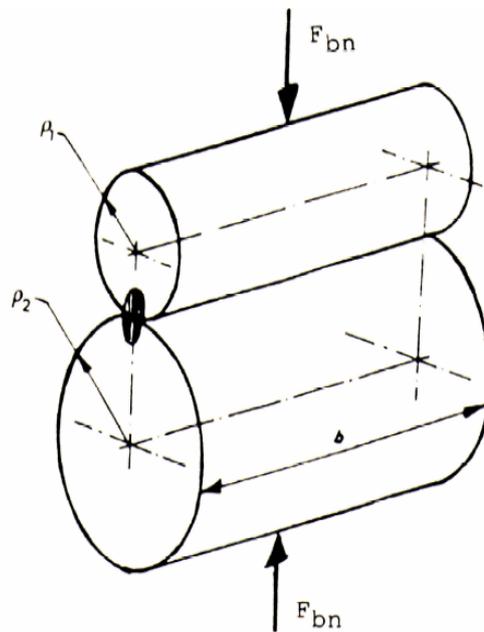


Fig.I.1 : Notation pour la Contrainte de Contact entre Deux Cylindres

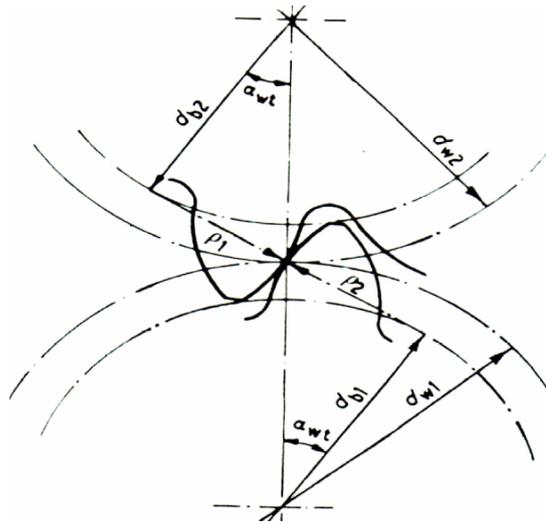


Fig.I.2 : Notation pour la Contrainte de Contact entre Deux Engrenages

En substituant ρ_1 , ρ_2 , ...etc., par des paramètres géométriques d'engrenages, la Figure (I.2) nous donne :

$$\sigma_{H0} = \sqrt{\frac{F_t}{b.d_1} \cdot \frac{u+1}{u} \cdot Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\epsilon \cdot Z_\beta} \quad (I-2)$$

où les différents facteurs sont :

Z_H : Le facteur géométrique qui tient compte de l'effet de l'angle de pression et de l'angle d'hélice sur le rayon de courbure et sur la composante de la force normale sur les flancs de la dent.

Z_E : Le facteur d'élasticité qui tient compte de l'effet des propriétés élastiques du matériau des dents engrenées.

Z_ϵ : Le facteur de conduite qui prend en considération le nombre de dents qui partage la charge à transmettre. Z_ϵ est estimé semi empiriquement de la moyenne de la longueur totale de la ligne de contact.

Z_β : Le facteur d'inclinaison déterminé empiriquement qui tient compte de l'augmentation de la longueur de contact dans les engrenages hélicoïdaux ainsi que l'effet de la non uniformité de la distribution de la charge le long de la ligne de contact même dans les engrenages «parfaits».

I.2.2. Contraintes de Flexion

Pour les contraintes de flexion, la norme ISO [1] adopte deux méthodes (B et C). Dans la méthode B, la charge maximale est supposée appliquée au « point de contact unique » comme cela se produit effectivement durant l'engrènement. Tant dis que dans la méthode C, la charge maximale est supposée appliquée au sommet de la dent où un facteur correctif Y_e est introduit pour être placé dans les conditions effectives de la méthode B. Les deux méthodes considèrent la roue dentée comme une poutre encastrée chargée en flexion par la composante tangentielle de la force totale appliquée sur la dent et aussi elles assument que la section critique de la dent est située au pied de la dent aux points tangents inclinés à 30° (Fig.I.3).

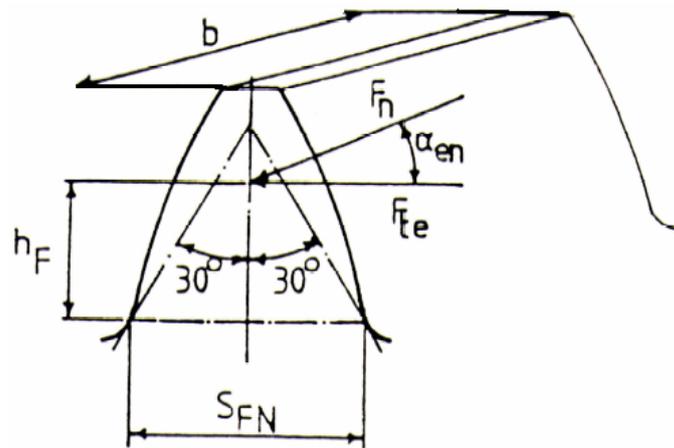


Fig.I.3 : Notation pour la contrainte de Flexion

Les contraintes de compression et de cisaillement sont négligées du fait qu'on connaît de l'expérience avant la rupture de la dent on observe des craquelures sur la surface de tension du filet du flanc chargé.

En utilisant la notation de la figure (1.3) et la méthode de la norme ISO [1], la contrainte de flexion pour un engrenage «parfait» est donnée par :

$$\begin{aligned}\sigma_{F0} &= \frac{6 F_t}{b.d_1} \cdot \frac{h_F}{S_{FN}^2} \cdot \frac{\cos \alpha_{en}}{\cos \alpha_n} Y_S \cdot Y_\beta \\ &= \left(\frac{F_t}{b \cdot m_n} \right) \cdot Y_F \cdot Y_S \cdot Y_\beta\end{aligned}\tag{I-3}$$

où,

Y_F est un facteur de forme donné par (Fig.I.3) :

$$Y_F = \frac{6 \left(\frac{h_F}{m_n} \right)}{\left(\frac{S_{FN}}{m_n} \right)^2} \cdot \frac{\cos \alpha_{en}}{\cos \alpha_n}\tag{I-4}$$

Y_S est un facteur empirique de concentration de contrainte du au filet de la dent.

Y_β est un facteur d'inclinaison de l'angle d'hélice avec un effet similaire à Z_β .

I.3 CONTRAINTES DANS LES ENGRENAGES REELS

Les contraintes de contact et de flexion pour les engrenages «réels» sont calculées à partir des contraintes nominales (σ_{H0} et σ_{F0}) en prenant en considération la non uniformité du couple transmis, les erreurs de fabrication et les distorsions élastiques des dents de l'engrenage. Les contraintes de contact et de flexion sont ensuite données par :

$$\sigma_H = \sigma_{H0} \sqrt{K_A \cdot K_V \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}}\tag{I-5}$$

$$\sigma_F = \sigma_{F0} \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha}\tag{I-6}$$

où les facteurs multiplicatifs des contraintes statiques de base sont :

K_A : facteur d'application

K_V : facteur dynamique

$K_{H\beta}$, $K_{F\beta}$: facteurs de distribution de charge longitudinale

$K_{H\alpha}$, $K_{F\alpha}$: facteurs de distribution de charge transversale.

Ces facteurs sont étudiés en détail ci-dessous.

I.3.1. Facteur d'Application K_A

Le facteur d'application K_A tient compte des surcharges dynamiques provenant des sources extérieures à l'engrenage qui tentent d'augmenter le couple moyen transmis. Ces surcharges dépendent des caractéristiques des machines menantes-menées, du rapport des masses, des accouplements et des conditions de service. K_A tient aussi compte des variations délibérées de la charge transmise provoquées par exemple par les fluctuations de la charge durant le cycle de travail de la machine. Ces dernières ne sont pas prises en considération par K_A ; leur effet est calculé séparément par un autre facteur K_{Duty} [6] superposé à K_A . La méthode B de la norme ISO [1], recommandée pour les conceptions préliminaires, donne des tableaux de valeurs de K_A identiques aux celles du Tableau (I.4) basées sur des manuelles pratiques. Néanmoins dans ce travail, on considère seulement le cas où le couple transmis est constant et par conséquent le facteur d'application est pris égal à l'unité ($K_A=1$).

Tableau.I.4 : Valeurs Recommandées pour K_A [6]

Caractéristiques de la machine menante	Caractéristiques de la machine menée		
	Uniforme	Chocs modérés	Chocs importants
Uniforme	1,00	1,25	1,75
Chocs légers	1,25	1,50	2 ou plus
Chocs moyens	1,50	1,75	2,25 ou plus

I.3.2. Facteur dynamique K_v

Le facteur dynamique est défini comme étant le rapport entre la charge maximale intervenant au contact des dentures conjuguées et la charge nominale due au couple extérieur appliqué $K_A \cdot T_{nom}$. Ce facteur représente ainsi les influences dynamiques internes dues aux vibrations du pignon et de la roue qui tentent de produire des augmentations dynamiques dans le couple transmis généralement à des fréquences de même niveau que celles d'engrènement [7,8].

Les influences principales sont :

- Les erreurs de denture en particulier les erreurs de division et de profil,
- Les moments d'inertie polaires du pignon et de la roue,
- La rigidité des couples de dents conjuguées,
- La charge transmise y compris le facteur d'application K_A .

Le standard ISO propose trois méthodes ou procédures pour le calcul du facteur dynamique. Néanmoins, comme l'objectif de ce travail est axé sur les engrenages fins dont les erreurs de fabrication ont un effet significatif sur la performance de ces derniers (voir Eq.I-8), seule la méthode B, la plus précise, est considérée.

Le facteur dynamique est ainsi défini comme étant une fonction du paramètre sans dimension N (voir ci-dessous). La méthode B, dans la zone subcritique ($N \leq 0,85$), nous donne :

$$K_v = N \cdot K + 1 \quad (\text{I-7})$$

$$K = C_{v1} \cdot B_p + C_{v2} \cdot B_f + C_{v3} \cdot B_K \quad (\text{I-8})$$

où,

N : la vitesse de référence égale au rapport entre la vitesse de rotation du pignon et la vitesse de rotation de résonance donné par :

$$N = \frac{n_1}{n_{E1}} = \frac{n_1}{\frac{30.10^3}{\pi \cdot Z_1} \sqrt{\frac{C_v}{m_{\text{réd}}}}} \quad (\text{I-9})$$

B_P , B_f et B_K : sont des paramètres sans dimensions qui tiennent compte de l'effet des erreurs de dentures sur la charge dynamique et de la modification du profil :

$$B_P = C' \left(\frac{f_{pb} - y_{pb}}{F_t \cdot \frac{K_A}{b}} \right) \quad (\text{I-10})$$

$$B_f = C' \left(\frac{f_f - y_f}{F_t \cdot \frac{K_A}{b}} \right) \quad (\text{I-11})$$

$$B_K = 1 - \frac{C \cdot C_a}{F_t \cdot \frac{K_A}{b}} \quad (\text{I-12})$$

C_{V1} , C_{V2} , et C_{V3} : sont des constantes empiriques définies dans le standard [1].

Y_p , Y_f : La valeur de la diminution par rodage de fonctionnement de l'erreur du pas ou du profil.

C_a : La valeur prévue de la dépouille de sommet.

C' : La valeur de la rigidité d'une paire de dents conjuguées.

I.3.3. Facteurs de Distribution de Charge Longitudinale $K_{H\beta}$, $K_{F\beta}$

La distribution longitudinale de la charge sur les dentures est un paramètre important pour la détermination de la capacité de charge d'un engrenage. Les normes de calcul abordent ce problème par l'intermédiaire de deux facteurs appelés facteurs de distribution longitudinale de la charge qui sont notés $K_{H\beta}$ et $K_{F\beta}$.

1.3.3.1 Facteur de Distribution de Charge Longitudinale $K_{H\beta}$

Les écarts géométriques existant sur les dentures font partie de nombreux paramètres ayant une influence sur la distribution de la charge. Ils sont habituellement pris en compte par l'intermédiaire des écarts maximaux d'inclinaison d'hélice existant sur les dentures [9,10].

L'objectif de ce travail est d'étudier plus précisément l'influence de ces écarts sur la distribution longitudinale de la charge sur les dentures.

Dès qu'il y aura une distorsion d'alignement relative des dentures conjuguées, la distribution des contraintes sous la charge n'est plus uniforme le long des lignes de contact comme le montre la figure (I.4).

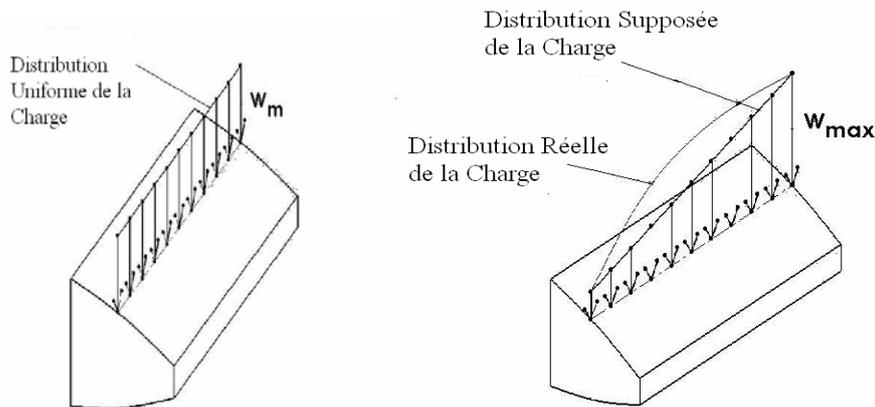


Fig. I.4 : Mauvaise Distribution de la Charge dans les Engrenages Réels

Le facteur longitudinal de la répartition de la charge ($K_{H\beta}$) est défini comme étant le rapport entre la charge spécifique maximale et la valeur moyenne qui serait obtenu avec un engrenage idéal. $K_{H\beta}$ est donc donné par : [1,2,3] .

$$K_{H\beta} = \frac{W_{\max}}{W_m} \quad (\text{I-13})$$

La charge spécifique moyenne $W_m = (F_m/b)$ est la valeur nominale de la force tangentielle (F_t/b) sur le rayon primitif modifiée par le facteur d'application (K_A) et le facteur dynamique (K_V). L'introduction de K_A et K_V

tient compte des surcharges dynamiques qui sont présents tout le temps.

Ainsi :

$$W_m = \left(\frac{F_t}{b} \right) \cdot K_A \cdot K_V \quad (\text{I-14})$$

Ce facteur dépend de nombreux paramètres :

- Caractéristiques des dentures,
- Ecart de taillage,
- Effets de rodage,
- Distorsion d'alignement et jeux internes des paliers,
- Corrections de denture,
- Rigidité des dentures, des arbres, des corps de roue, des paliers et des carters,
- Forces appliquées.

Pour déterminer la charge spécifique maximale, la courbe de la répartition de la charge le long de la largeur de la denture, après rodage initial de fonctionnement des engrenages, doit être connue. Cette courbe est cependant, une fonction de l'erreur totale de la distorsion d'alignement et la déformation relative des dentures conjuguées. La méthode B de la norme ISO [1] et d'autres normes telles que BS 436 [2] et DIN 3990 [3] ne supposent que la charge à une distribution linéaire (Fig.I.4). Si f_{By} est la distorsion totale d'alignement des dentures conjuguées sans charge (Fig.I.5) [1,11] et b_{cal} est la largeur apparente de contact, alors quatre solutions alternatives de contact peuvent être distinguées :

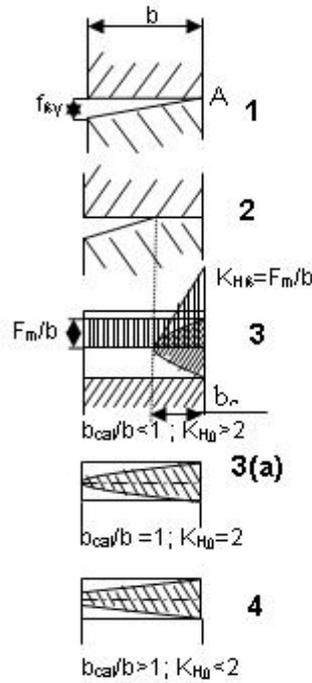


Fig.I.5: Facteur de distribution de charge Longitudinale [11]

- (1) Aucune charge : point de contact A.
- (2), (3) Contact partiel (charge légère ou grande $f_{\beta y}$). Dans ce cas-ci, le contact se produit réellement au-dessus d'une largeur b_{cal} avec $b_{cal}/b < 1$ et $K_{H\beta} > 2$, donc:

$$K_{H\beta} = \sqrt{\frac{2 \cdot f_{\beta y} \cdot C_{\gamma}}{W_m}} \tag{I-15}$$

3):a Plein contact de face (cas de limitation) avec $b_{cal} / b = 1$ et

$$K_{H\beta} = 2 \tag{I-16}$$

- (é) Plein contact de face (chargement lourd ou petite valeur de $f_{\beta y}$) avec $b_{cal} / b > 1$ et de $K_{H\beta} < 2$. Ceci correspond à :

$$K_{H\beta} = 1 + \frac{f_{\beta y}}{2 \cdot W_m} \cdot C_{\gamma} \tag{I-17}$$

Il est clair que les engrenages bien conçus devraient fonctionner dans le régime (4). La quantité $f_{\beta y}$ est la distorsion d'alignement efficace donnée par :

$$f_{\beta y} = f_{\beta x} - y_{\beta} \quad (\text{I-18})$$

où,

$f_{\beta x}$ est l'erreur totale initiale de la distorsion d'alignement des dents conjuguées au début de leur durée de vie et y_{β} est une réduction de l'erreur de distorsion initiale par rodage de fonctionnement.

La valeur de y_{β} est purement empirique et dépend de la dureté des matériaux. Elle est plutôt importante pour les aciers trempés totalement et pratiquement zéro pour les aciers cémentés ou nitrurés [1]. L'erreur totale de distorsion d'alignement $f_{\beta x}$ est la résultante de f_e et de f_{ma} où :

f_e représente des déformations élastiques sous la charge des arbres, des corps des roues dentées, des roulements, des carters d'engrenages, ...etc.

f_{ma} représente des erreurs de fabrication et de montages, des roues dentées, d'arbres, des carters, ...etc.

Par conséquent :

$$f_{\beta x} = f_e + f_{ma} \quad (\text{I-19})$$

Toutes les normes modernes incluent des conseils détaillés sur la façon dont on peut estimer la valeur de f_e à partir de l'arrangement des engrenages par rapport aux paliers mais dans tous les cas elles supposent une valeur de f_{ma} basée, sans une vraie justification, seulement sur le grade de précision des engrenages. Alors que les recommandations de la norme ISO [1] sont plus simples comme le montre la citation suivante (texte intégral en anglais de la norme ISO/DIS/6336).

“For a given grade of accuracy, with assembly of gears without correcting or adjusting procedures (no post-assembly check): since in accordance with ISO 1328-63

[1] and DIN 3962 [3] the total alignment tolerances are the same for pinion and wheel at the same gear quality and since bearing alignment tolerances should be in keeping with this, the most unfavorable combination of errors would be:

$$f_{ma} = 3.0 \cdot T_{\beta} \quad (\text{I-20})$$

Where T_{β} is the tooth alignment tolerance. Consideration of probability indicates that errors would be unlikely to combine to produce values exceeding $1.0 T_{\beta}$.

Sur la base de cet argument, une valeur de f_{ma} est adoptée :

$$f_{ma} = 1.0 T_{\beta} \quad (\text{I-21})$$

où T_{β} est la tolérance de distorsion d'une denture.

Ceci est une simplification exagérée. Plusieurs d'autres erreurs telles que les erreurs de montage des roues dentées, les battements de roulements [12] et d'alignement d'alésages du carter des boites de vitesse [12,13], ...etc. peuvent combiner pour produire une disparité dépassant de loin la tolérance T_{β} ; par exemple, Myers [13] et d'autres [14] ont prouvés que statistiquement le maximum probable $\pm 3\sigma$ de la déviation d'alignement f_{ma} est typiquement de l'ordre de $\pm 3 T_{\beta}$. La valeur la plus probable de f_{ma} (Eq.I-20) est peu susceptible d'être aussi la valeur probable. Henriot [11] a également prouvé que la différence entre les valeurs données par les équations (I-20) et (I-21) sont extrêmement importantes et peuvent avoir une influence considérable sur la valeur de $K_{H\beta}$. Cependant, dans ce travail, des méthodes pour estimer plus normalement une valeur probable de f_{ma} sont présentées.

I.3.3.2. Facteur de Distribution de Charge Longitudinale $K_{F\beta}$

Pour la flexion des dents la largeur entière de la denture participe plus ou moins à soutenir la charge même lorsqu'elle est concentrée seulement sur une partie de la largeur de la dent comme dans la figure (I.5) (cas 2 et 3). Le facteur de distribution de charge longitudinale pour la résistance à la flexion (K_{BF}) tient donc compte de cette "diffusion" de charge à travers la largeur de la denture. Le facteur $K_{F\beta}$ dépend ainsi non seulement de $K_{H\beta}$ mais également du

rapport de la hauteur de la dent h_F à la largeur b . Empiriquement [1], (basé sur la théorie des poutres encastrées) :

$$K_{F\beta} = (K_{H\beta})^N \quad (\text{I-22})$$

où,

$$N = \frac{\left(\frac{b}{h_F}\right)^2}{\left(1 + \frac{b}{h_F} + \left(\frac{b}{h_F}\right)^2\right)} \quad (\text{I-23})$$

Pour la plupart des engrenages larges (grande valeur de b), approximativement $K_{F\beta} = K_{H\beta}$.

I.3.4 Facteurs de Distribution de Charge Transversale : $K_{H\alpha}$, $K_{F\alpha}$

Dans un engrenage parfait il y'a une distribution «idéale» de la charge transmise sur plusieurs paires de dents conjuguées simultanément. Cette distribution est prise en considération par les facteurs Y_ε et Z_ε (voir Eq.I.2).

Par contre, la présence des erreurs du profil et du pas de base rend cette dernière non idéale ce qui augmente les contraintes de contact et de flexion. Les facteurs de distribution de charge transversale $K_{H\alpha}$ et $K_{F\alpha} \geq 1$ sont utilisés donc pour tenir compte de ces effets. Cependant, on remarque que ces facteurs ont des valeurs limitées pour les engrenages moins précis quand il y'a un seul couple de dents en contact.

Pour les engrenages de haute qualité ISO 5 et mieux, $K_{H\alpha}$ et $K_{F\alpha}$ sont égales à l'unité et pour les grades de précision ISO 6 et ISO 7, leurs valeurs sont entre 1,1 à 1,2.

Dans le cas des engrenages ayant un rapport total de conduite $\varepsilon_\gamma > 2$, ces facteurs sont données par :

$$K_{H\alpha} = K_{F\alpha} = 0,9 + 0,4 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{(\varepsilon_\gamma - 1)}{\varepsilon_\gamma}} \cdot C_\gamma \frac{(f_{pb} - y\alpha)}{F_{tH}/b} \quad (\text{I-24})$$

où,

F_{tH} : force tangentielle effective donnée par :

$$F_{tH} = F_t \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{H\beta} \quad (\text{I-25})$$

f_{pb} : erreur maximale du pas de base du pignon ou de la roue ; dans le cas d'une dépouille de sommet adaptée à la charge, on considérera seulement la moitié de cette tolérance.

Y_α : réduction de l'erreur escomptée par rodage de fonctionnement.

I.4 CONTRAINTES ADMISSIBLES

I.4.1 Contrainte Admissible de Contact : σ_{HP}

La contrainte calculée de Hertz (σ_H) d'un engrenage réel ne doit pas excéder celle admissible du matériau. Dans la méthode B du standard ISO [1]. Elle est basée sur la limite d'endurance ($\sigma_{H,lim}$) pour un engrenage d'essai «idéal» sous une charge constante corrigée par la suite pour tenir compte de la durée de vie demandée et des conditions de travail réelles. La contrainte admissible de contact est ainsi calculée séparément pour le pignon et la roue :

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{H,lim}}{S_{Hmin}} \cdot Z_N \cdot Z_L \cdot Z_V \cdot Z_R \cdot Z_W \cdot Z_X \quad (\text{I-26})$$

où,

$\sigma_{H,lim}$: limite d'endurance pour la pression superficielle pour le matériau considéré,

S_{Hmin} : facteur de sécurité minimal qui dépend de l'application et de la fiabilité exigée.

Z_N : facteur de durée qui rend compte du fait qu'une pression de Hertz plus élevée peut être admise si on ne demande qu'une endurance (nombre de cycles) limitée.

Z_L et Z_V : facteurs du lubrifiant et de vitesse qui prennent en considération l'effet de la viscosité et de la vitesse sur l'épaisseur du film d'huile élasto-hydrodynamique et par conséquent sur la résistance de contact.

Z_L , Z_V et Z_R : Ces facteurs ensemble tiennent compte de la réduction de la résistance à la fatigue quand les aspérités des surfaces des dents en contact excèdent l'épaisseur du film d'huile.

Z_W : facteur d'écroûissage qui rend compte de l'écroûissage superficiel de la denture d'une roue lorsque celle-ci engrène avec un pignon avec denture durcis superficiellement et très bon état de surface.

Z_X : facteur de dimensions qui rend compte de l'influence des dimensions de la dent sur la pression de Hertz admissible. Généralement, la valeur $Z_X=1$, est adoptée.

Dans les standards ISO [1] et DIN [3], la limite d'endurance du matériau peut être déterminée par des essais de même matériau. En l'absence des valeurs précises de $\sigma_{H,lim}$, des guides pratiques donnent ces valeurs pour différents matériaux et traitement thermiques pour trois grades de qualité de matériau ME, MQ et ML (Fig.I.6).

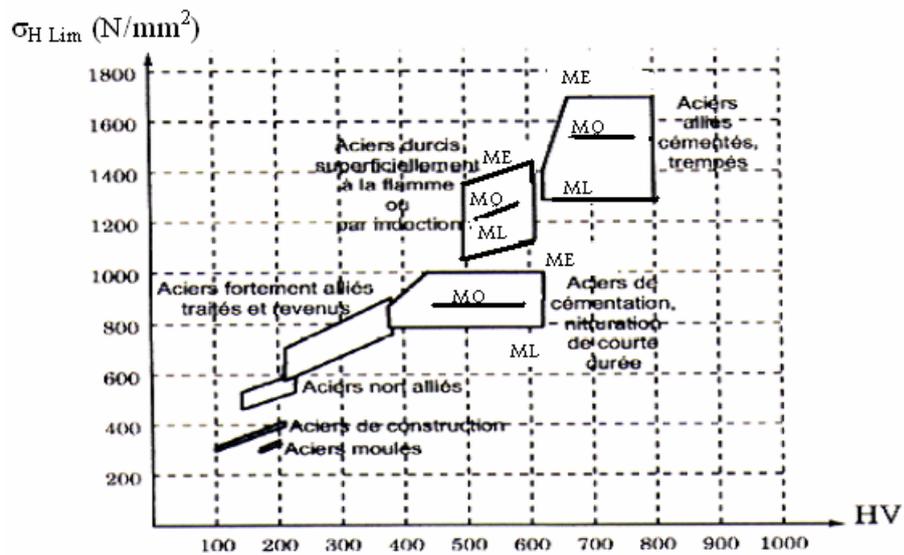


Fig.I.6 : Limites d'Endurances de contact [1,3]

1.4.2 Contrainte Admissible de Flexion : σ_{FP}

La contrainte calculée de flexion (σ_F) pour un engrenage réel ne doit pas excéder celle admissible du matériau. Dans la méthode B du standard ISO [1], la contrainte admissible de rupture de la dent est donnée par :

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{F\lim}}{S_{F\min}} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{NT} \cdot Y_{RrelT} \cdot Y_{\delta relT} \cdot Y_X \quad (I-27)$$

où,

$\sigma_{F\lim}$: limite d'endurance nominale à la rupture de l'engrenage d'essai ;

$S_{F\min}$: facteur de sécurité minimal qui ressemble à $S_{H\min}$ et qui dépend de l'application et de la fiabilité exigée ;

Y_{ST} : facteur de concentration de contrainte Y_S de l'engrenage d'essai égale à 2,1 et la quantité $\sigma_{FE} = \sigma_{F\lim} \cdot Y_{ST}$ de la figure (I.7) est l'endurance limite du spécimen sans entaille avec l'hypothèse que le matériau, après le traitement thermique, est parfaitement élastique ;

Z_{NT} : facteur de durée pour la résistance de pied de la dent relatif à l'engrenage d'essai qui considère l'augmentation possible de capacité de charge dans la zone de durée de vie limitée.

$Z_{\delta rel}$: facteur de sensibilité relative à l'entaille de l'engrenage étudié par rapport à l'engrenage d'essai ;

Z_{Rrel} : facteur de rugosité relatif qui tient compte de l'influence de la rugosité de surface du fond de dent de l'engrenage étudié ;

Y_X : facteur de dimensions qui rend compte de l'influence des dimensions de la dent sur la résistance du pied de la dent en particulier l'influence du module.

Dans les standards ISO [1] et DIN [3] la limite d'endurance du matériau peut être déterminée par des essais au pulsateur sur des engrenages d'essais pour toute condition du matériau ou d'état du

matériau. En l'absence des valeurs précises de $\sigma_{F,lim}$ les guides pratiques donnent les valeurs limites d'endurances de différents matériaux et traitement thermiques. Les normes donnent les valeurs de $\sigma_{F,lim}$ pour trois grades de qualité de matériau ME, MQ et ML (Fig.I.7).

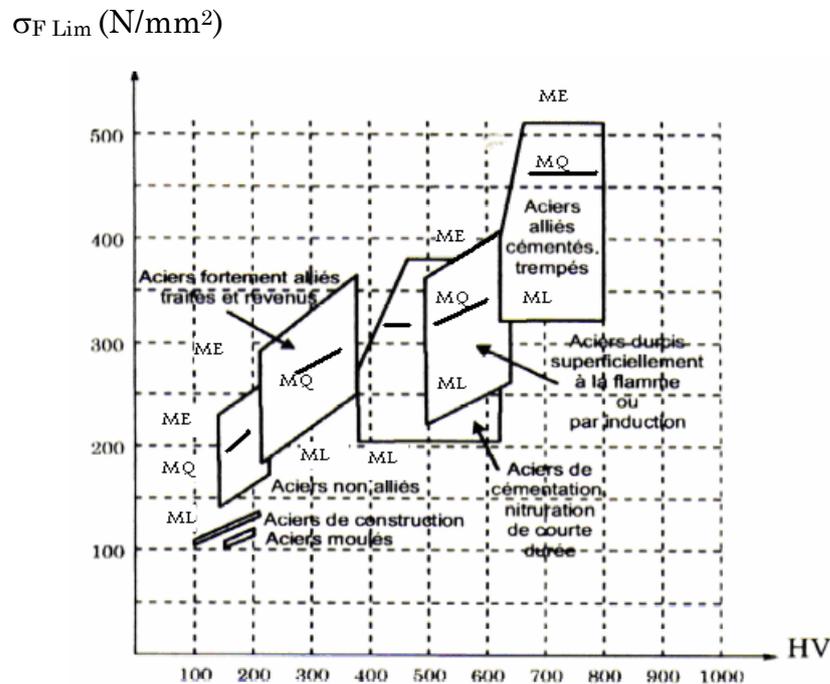


Fig.I.7: Limites d'Endurances de Flexion [1,3]

I.4.3 Facteurs de Sécurité S_H et S_F

Les facteurs de sécurité S_H et S_F sont des facteurs globaux présentés pour assurer la fiabilité exigée en présence des incertitudes d'estimation des variables qui sont inconnues à l'étape de conception. Ces incertitudes sont :

- L'endurance limite du matériau utilisé dû aux irrégularités et variations de la composition chimique, la structure, traitement thermique du matériau, ...etc.
- les charges dynamiques en service cycliques ou constantes. Leurs grandeurs sont toujours incertaines à un certain degré. Les variations dans les cycles de travail entre les utilisateurs peuvent être aussi une plus grande source d'incertitude.
- La qualité du lubrifiant utilisé et maintenance.

Les moyens de relier une fiabilité désirée (ou donnée) ainsi que les incertitudes ci-dessus à S_H et S_F ne sont pas donnés dans les normes. Le standard ISO/DIS6336 [1] tabule des valeurs recommandées de S_H et S_F qui sont originellement dérivés de Niemann et Winter [15] (Tableau (I.2)) et ceci pour des niveaux différents de fiabilité mais sans mesure de la probabilité prévue de défaillance des engrenages.

Tableau.I.2 : Valeurs Recommandées pour les Facteurs de Sécurité [15].

Conditions de Conception	S_H	S_F
A. Puissance ou couple de conception basés sur des valeurs nominales estimées.		
I. Transmissions industrielles Normales	1,1 - 1,2	1,4 - 1,5
II. Transmissions avec fiabilité élevée où la rupture de l'engrenage présente une perte substantielle	1,3 - 1,6	1,6 - 3,0
B. Puissance ou couple basés sur des valeurs mesurées ou connues		
I. Transmissions industrielles normales	1,0	1,2 - 1,4
II. Transmissions avec fiabilité élevée	1,2 - 1,4	1,4 - 2,0

De ce tableau on remarque que S_F est généralement plus haut que S_H ; cela est du au fait que pour beaucoup d'engrenages industriels les quantités modérées de piqûres sont tout à fait acceptables et par conséquent ils peuvent fonctionner, à faible vitesse, pendant des années avec $S_H < 1,0$ [16]. Cependant, la rupture de la dent implique presque toujours la défaillance totale de la commande. Il est important de noter néanmoins que dans les applications à grande vitesses les piqûres progressives mèneront rapidement à la destruction des dents ou excessif bruit et vibration. Dans ces cas S_H et S_F doivent être assez haut pour assurer un bas taux de défaillance [17,18].

Henriot [19] a supposé que la méthode B de la norme ISO expliquée précédemment assure une probabilité de détérioration de 1% quand $S_H = S_F = 1$; il présente alors un facteur global K_R de fiabilité (Fig.I.8) par lequel le facteur d'application devrait être multiplié quand une probabilité de défaillance plus grande ou inférieure à 1% est exigée.

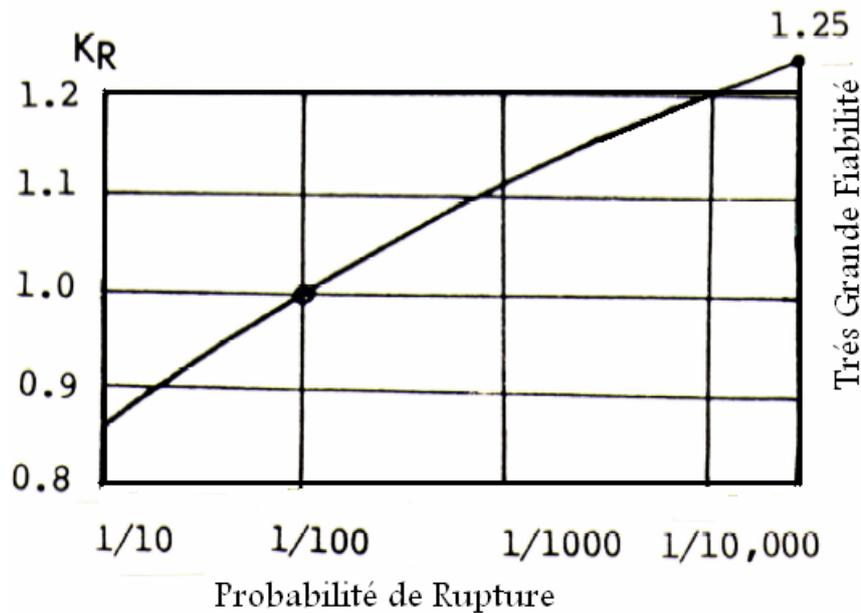


Fig.I.8. Facteur de Fiabilité K_R [19]

Hofmann [20], d'autre part, donne un diagramme à partir duquel S_H et S_F peuvent être choisis pour une probabilité donnée de défaillance. Son diagramme mentionne rudement tous les facteurs qui sont les sources principales des incertitudes mais la base de ces résultats n'est pas expliquée. Les valeurs attribuées aux facteurs de sécurité sont réellement basées en grande partie sur l'ignorance et une meilleure méthode pour les estimer est nécessaire (Comme l'ont expliquée plusieurs auteurs [21,22,23]). La recherche décrite dans ce travail est prévue pour fournir une base plus sûre pour estimer les effets des incertitudes sur la fiabilité.

REFERENCES

- [1] ISO/ 6336, Parts 1, 2 and 3, "Calculation of the Load Capacity of Spur and Helical Gears", 1996.
- [2] BS 437., "Spur and Helical Gears", Part 3: "Method of Calculation of Contact and Root Bending Stress- Limitations for Metallic Involute Gears", BSI, 1986.
- [3] DIN 3990., "Grundlagen für die Trafahigkeitsberechnung von Gerad-und Sghrastirnradern", (Principes de Base pour le Calcul de la Capacité de Charge des Engrenages à denture Droite et Hélicoïdale) parts 1-53, 5.Beuth, 1987.

- [4] AGMA 2101., "Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear teeth", AGMA 2101-C95, 1995.
- [5] H.Hertz., "Gesammelte Werke", Vol I, Leipzig, 1895.
- [6] ISO 6336-5, Part 5., "Calculation of load capacity of spur and helical gears - Strength and quality of materials", 2003.
- [7] D.Remond., J.Sabot., and P.Velix., "Comportement Dynamique et Accoustique des Transmissions par Engrenages", Senlis: CETIM, Synthèse bibliographique, 189p, 1993.
- [8] P.Velix., and M.Maatar., "A Mathematical Model for Analysing the Influence of Shape Deviations and Mounting Errors on Gear Dynamic Behaviour", Journal of Sound and Vibration, 191(5), pp 629-660, Academic Press Limited, 1996.
- [9] E.Chernet., P.Velix., and M.Pasquier., "Influence des Ecart d'Inclinaison d'Hélice sur le Facteur de Distribution Longitudinale de la Charge", 4^{ème} Congrès Mondial des Engrenages, Paris, 19-17 Mars, 1999.
- [10] ISO TR 10064., Parts: 1,2 and 3, "Cylindrical Gears—Code of Inspection Practice", 1996.
- [11] G.Henriot., "Reflections on the Longitudinal Distribution Factor $K_{H\beta}$ of the ISO Procedure", American Gear manufacturers Assocn. Paper 209.13, pp 231- 239, 1981.
- [12] DIN 3962., "Accuracy of Cylindrical Gears: Tolerances for Individual Errors", Beuth, 1978.
- [13] E.J.Myers., "Influence of Manufacturing Errors on Gear Mesh Misalignment", Unpublished Report DU902/MG, Design Unit, Univ. Newcastle Upon Tyne, 1988.
- [14] M.Maatar., "Contribution à l'Analyse du Comportement Dynamique de Réducteurs à Engrenages à simple étage. Influence des Ecart de Forme et des Défauts de Montage", Thèse de docteur ingénieur: Institut des Sciences Appliquées de Lyon, 189p, 1995.
- [15] G.Niemann., and G.Winter., "Maschinenelemente", (Eléments de machine), Vol.II, Springer, 1983.
- [16] D.W.Dudley., "Handbook of Practical Gear Design", McGraw Hill 1984.
- [17] Q.J.Yand., "Fatigue Test and Reliability Design of Gears", Int.J.Fatigue, Vol.18, N°3, pp 171- 177, Elsevier, 1996.
- [18] A . D . S . Carter., "A View of Mechanical Reliability", Proc.Symp. Mechanical Reliability". IPC Sci.Technol.Press pp 1-7, 1980.

- [19] G. Henriot, *Traité Théorique et Pratique des Engrenages*. 6th ed., Dunod, Paris, 1979.
- [20] D.A.Hofmann., “The design of Spur and Helical Involute Gears - A Procedure Compatible with BS 436”, Part 3 , ESDU 88033, Dec.1988.
- [21] Y.M Zhang., et al., “Practical Reliability-Based Design of Gear Pairs”, *J.Mechanism and Machine Theory*, Vol.38, pp.1363-1370, Elsevier, 2003.
- [22] J.A.Pennell., “Estimation of Safety Factors for a Given Reliability”, *Proc.IFTOMM/ISO, Seminar, Service Loading and Application Factors*, Trois Epis, 1987.
- [23] J.E.Shigley., and C.R.Mischke., “*Mechanical Engineering Design*”, McGraw-Hill, Ed.5, 1989.

CHAPITRE II :

***FACTEURS DE VARIATION DES CONTRAINTES
DANS LES
ENGRENAGES REELS***

II.1. ERREURS DE FABRICATION

Il y a trois groupes principaux dont dépendent les valeurs de la contrainte appliquée et la résistance du matériau ; les variations provenant de la précision de l'engrenage, la qualité du matériau et la qualité d'état de surfaces des dentures.

II.1.1. Variabilité de la Précision de l'Engrenage

Les contraintes réelles de Hertz (pression superficielle de contact) et de flexion (résistance à la rupture) appliquées sur un engrenage réel peuvent être écrites comme suit :

$$\sigma_H = [Z_E] \cdot [F_t \cdot K_A] \cdot \left[\sqrt{\frac{1}{d_1 \cdot b}} \right] \cdot [(Z_H \cdot Z_\varepsilon \cdot Z_\beta) \cdot \sqrt{\frac{u+1}{u}}] \cdot \sqrt{[K_V \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}]} \quad (II-1)$$

↑	↑	↑	↑	↑	↑
Facteur du Matériau	Facteur de la Charge Appliquée	Facteur de Dimensions	Facteurs géométriques de Contact	Facteurs de Précision de l'Engrenage	

$$\sigma_F = [F_t \cdot K_A] \cdot \left[\frac{1}{b \cdot m_n} \right] \cdot [Y_F \cdot Y_S \cdot Y_\beta] \cdot [K_V \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha}] \quad (II-2)$$

↑	↑	↑	↑	↑
Facteur de la Force Appliquée	Facteur de Dimensions	Facteurs Géométriques de Flexion	Facteurs de Précision de l'Engrenage	

Il est difficile d'identifier avec précision tous les facteurs qui contribuent à l'augmentation de l'incertitude et la variabilité dans les contraintes de contact et de rupture appliquées dans un système d'engrenage en service. Toutefois, en fournissant la charge appliquée connu et constante (c'est le cas de ce travail), et puisque les incertitudes dans les facteurs géométriques (excepté Y_S) sont négligeables [1,2,3], la variabilité et l'incertitude dans les contraintes σ_H et σ_F peuvent alors seulement surgir en raison des facteurs de précision de l'engrenage (K_V , $K_{H\beta}$, $K_{H\alpha}$, $K_{F\alpha}$ et $K_{F\beta}$). Dans les standards [4,5,6,7] mentionnés ci-dessus, la précision fondamentale de chaque engrenage est définie par la précision du profil, d'alignement, du pas des dents relativement à un certain axe défini, et des

erreurs de précision de montage de l'engrenage relativement à son axe de rotation. Les tolérances d'erreurs sont alors données par les grades de précision définies dans les normes standards des engrenages [8,9,10]. Cependant, l'erreur combinée d'alignement des dents est habituellement le facteur de précision le plus critique en déterminant la capacité de charge d'une paire de roues dentées en particulier pour les engrenages fins (dont le module est inférieur ou égale à 1mm). Puisque, pour des engrenages semblables de même matériau (c.-à-d. de même niveau de contraintes appliquées), le rapport de la distorsion d'alignement de la dent à la déflexion élastique ($f_{\beta y}/\delta_e$ utilisé pour le calcul de K_{HB}) [4] est plus élevé pour les engrenages fins. Ceci rend leur répartition longitudinale de charges plus mauvaise et explique par conséquent pourquoi l'analyse soignée des erreurs de fabrication est particulièrement nécessaire pour les engrenages fins.

IL est important de mentionner que dans les équations (I-15) et (I-17), apparaît un paramètre important dans l'estimation des facteurs de distribution de charge longitudinale qui est la déflexion élastique moyenne des dents donnée par :

$$\delta_e = \frac{W_m}{C_\gamma} \quad (\text{II-3})$$

Pour les engrenages similaires de même matériau (c'est à dire de même niveau de contraintes de flexion au fond du filet de la denture), W_m et par conséquent δ_e diminue proportionnellement au module. Tandis que pour des engrenages de petits modules inférieurs à 1 mm (engrenages fins), les erreurs de fabrication d'alignement, pour une classe de précision donnée, tendent vers des valeurs constantes (voir la partie 2 [5] de BS 436). Il s'en suit que le rapport de la distorsion d'alignement des dentures conjuguées à la déflexion élastique ($f_{\beta y}/\delta_e$) est plus grand pour les engrenages fins. Ceci rend leur répartition de charges longitudinales plus mauvaise, puisque les équations (I-15) et (I-17) peuvent être réécrites comme suit :

- Pour $f_{\beta y} > 2. \delta_e$

$$K_{H\beta} = \sqrt{2 \left(\frac{f_{\beta y}}{\delta_e} \right)} \quad (\text{II-4})$$

- Pour $f_{\beta y} \leq 2. \delta_e$

$$K_{H\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{f_{\beta y}}{\delta_e} \right) + 1 \quad (\text{II-5})$$

On conclut de ces dernières équations que les engrenages avec des valeurs larges du rapport ($f_{\beta y}/\delta_e$) nécessitent une attention particulière pendant leur fabrication. Dans ce qui suit, on présentera les types d'erreurs pouvant exister dans les systèmes d'engrenages.

II.1.1.1. Types d'erreurs

Généralement, les étapes nécessaires de fabrication des boîtes à engrenages sont :

- Usinage des arbres et des corps des roues dentées.
- Taillage des dents.
- Traitement thermique des roues/dents.
- Finition après traitement thermique.
- Assemblage des composants de la boîte à engrenages (roues, roulements, Arbres, ...etc.

Afin d'arriver à un engrenement satisfaisant des engrenages, un système logique de contrôle de qualité des engrenages selon le grade de précision désiré doit comporter l'inspection de toutes les étapes de fabrication citées ci-dessus. Le tableau (II.1) présente les erreurs géométriques pouvant exister durant le processus de fabrication des engrenages.

Tableau.II.1 : Erreurs Géométriques Affectant la Performance d'un Engrenage [11].

a/ Erreurs du Corps d'Engrenage

Erreurs de montages des surfaces de référence et des paliers

- Battement radial des surfaces de référence
- Battement axial des surfaces de référence
- Battement radial des surfaces des paliers
- Battement axial des surfaces des paliers

Erreurs du cylindre de tête

- Erreur du diamètre de tête
- Battement radial du diamètre de tête

b/ Erreurs de la roue (pignon)

Erreurs du pas

- Erreur du pas adjacent (transversale) f_{pt}
- Erreur du pas adjacent (normale) f_{pn}
- Erreur du pas de base adjacent (transversale) f_{pt}
- Erreur du pas adjacent (transversale) f_{pb}
- Différence entre les pas adjacents Δ_{fp}
- Erreur accumulée du pas F_{pk}
- Erreur maximale accumulée du pas F_p
- Erreur de la corde du pas sur l'écartement de k pas F_{pk^-}

Excentricité et battement radial

- Excentricité f_e
- Battement radial f_r

Erreurs du profil et angle de pression

- Erreur totale du profil f_f
- Erreurs de l'angle de pression et cercle de base f_{α}, f_b
- Erreur de forme du profil $f_{f\alpha}$

Erreurs longitudinales de la denture

- Erreur totale d'alignement de la denture F_{β}
- Erreur d'alignement de la denture f_{β}
- Erreur longitudinale de forme $f_{f\beta}$

Erreurs composées

- Erreur totale composée (flanc double) $F_{i'}$
- Erreur composée dent à dent (flanc double) $f_{i'}$
- Erreur totale composée (flanc unique) F_i
- Erreur composée dent à dent (flanc unique) f_i

c/ Erreurs d'une paire de roues (engrenage)

- Erreur d'entraxe f_a
- Erreur d'alignement de l'arbre f_{Σ}
- Erreur d'alignement de l'arbre dans le plan des axes $f_{\Sigma\delta}$

II.1.2. Les Erreurs Affectant la Capacité de Charge des Engrenages.

En général, les erreurs géométriques influant sur la capacité de charge des engrenages se divisent en trois types ; erreurs influant sur le facteur dynamique (K_V), celles influant sur la distribution longitudinale de la charge ($K_{H\beta}$, $K_{F\beta}$) et celles influant sur la distribution transversale de la charge ($K_{H\alpha}$, $K_{F\alpha}$).

En plus de ces erreurs géométriques, les variations de la qualité du matériau des engrenages (composition chimique, propreté, dureté, ...etc.) et la précision de l'état de surface des dents influent également sur la résistance à la fatigue du matériau des engrenages et par conséquent sur leur capacité de charge.

L'objectif de cette analyse (voir ci-dessous) est de quantifier l'effet de chacune des erreurs géométriques mentionnées dans le tableau (II.1) sur les facteurs de précision (K_V , $K_{H\beta}$, $K_{H\alpha}$, $K_{F\alpha}$ et $K_{F\beta}$). Pour mieux comprendre l'effet de ces erreurs, considérons un exemple spécifique. Pour simplifier la description, considérons un engrenage dont les caractéristiques sont données dans le tableau (II.2).

Tableau. II.2: Caractéristiques de l'engrenage sous étude

Spécifications de l'Engrenage	Pignon/Roue
Module normal m_n (mm)	0,847
Qualité de précision selon ISO	8 à 10
Nombre de dents, $Z_{1,2}$	35/75
Largeur de la denture, b (mm)	12,25/12,25
Diamètre primitif, $b_{1,2}$ (mm)	30,876/66,163
Angle de pression normal (α_n)	20,0000°
Angle d'hélice (β)	16,2333°
Couple appliqué, $T_{1,2}$ (N.m)	16,3/34,9
Facteur d'application (K_A)	1,000
Facteur dynamique (K_V)	1,085
Endurance limite $\sigma_{H\text{ Limit}}$ (N/mm ²)	1444,0/1444,0
Endurance limite $\sigma_{F\text{ Limit}}$ (N/mm ²)	401,5/401,5

II.1.2.1. Les Erreurs Affectant le Facteur Dynamique (K_V)

L'effet de l'erreur du profil (f_f) et l'erreur du pas (f_{pb}) sur le facteur dynamique K_V (Eq.I-7) est présenté sur la figure (II.1) pour l'engrenage fin du tableau (II.2). Les engrenages d'un même grade de précision pour ces deux types d'erreurs ont approximativement les mêmes valeurs limites de f_f et f_{pb} [10] (bien que les engrenages particuliers sont généralement plus précis pour le pas que pour le profil [12]). Néanmoins, si on suppose que, l'erreur f_f et f_{pb} sont égales et comparant le facteur dynamique (K_V) de cet engrenage pour les grades de précision DIN 5 et DIN 7 par exemple ; Il est clair de la figure (II.1) qu'une différence de l'ordre de 22% dans la capacité de charge est trouvée pour ces deux grades de précision (du à l'effet combiné de ces deux erreurs sur K_V).

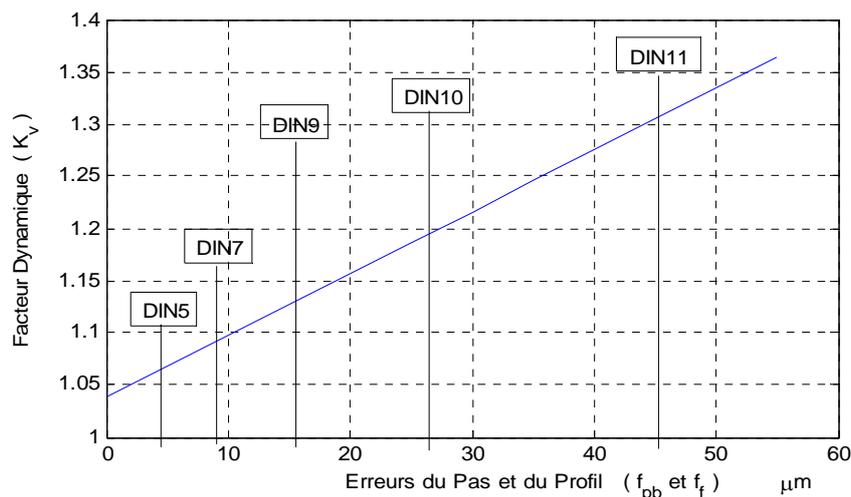


Fig.II.1: Variation de K_V en fonction des Erreurs du Pas et du Profil de l'Engrenage du Tableau (II.2).

Les erreurs du pas produites par un processus particulier de fabrication tentent d'être effectivement indépendants du module [10]. Par contre, le jeu fonctionnel entre les dents est petit et proportionnel au module [13]. Il s'en suit que les dents des engrenages fins non corrigés (sans valeur prévue de la dépouille au sommet) peuvent causer un problème d'interférence plus que les autres engrenages [14] (Fig.II.2).

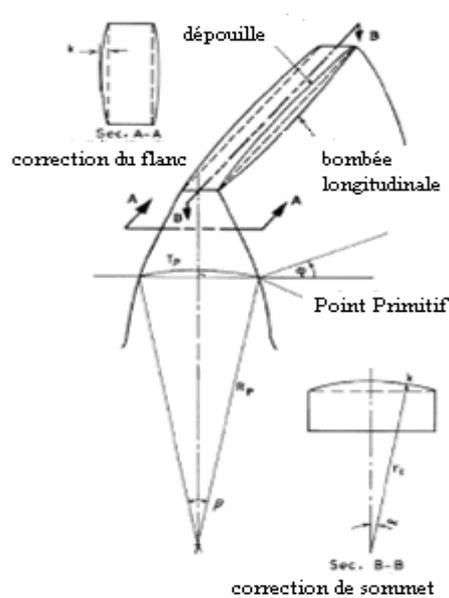


Fig.II.2 : Correction Longitudinale et Transversale de la Denture [14]

II.1.2.2. Les Erreurs Affectant les Facteurs de Distribution de Charge Transversale. (K_{Ha} , K_{Fd})

Les erreurs du pas de base (f_{pb}) et les variations du profil des dents (f_f) du profil théorique (Fig.II.3) ajoutent un déplacement additionnel aux équations de flexion de la denture et provoquent ainsi une répartition inégale de la charge entre les paires successives de dents. Ces effets sont périodiques pendant l'engrènement des dents seulement si les erreurs de pas/profil sont les mêmes pour toutes les dents. En utilisant la méthode B du standard ISO, l'effet de ces deux erreurs sur les facteurs de la distribution de la charge transversale est montré dans la figure (II.4) pour le cas spécifique de l'engrenage fin du tableau (II.2).

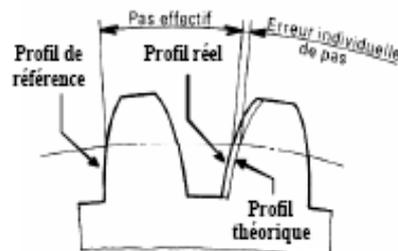


Fig.II.3 : Définition Graphique de l'Erreur Individuelle du Pas [13].

On remarque que $K_{H\alpha}$, $K_{F\alpha}$ sont calculés en utilisant la charge efficace donnée par l'équation (I-25) qui dépend également de K_V et par conséquent des erreurs f_f et f_{pb} ; les facteurs K_V et $K_{H\alpha}$ ne sont pas indépendants, et il y a ainsi un effet global "composé" de chaque erreur. La figure (II.4) montre cette influence combinée de f_f et f_{pb} sur $K_{H\alpha}$ avec l'effet de la variation de K_V inclu.

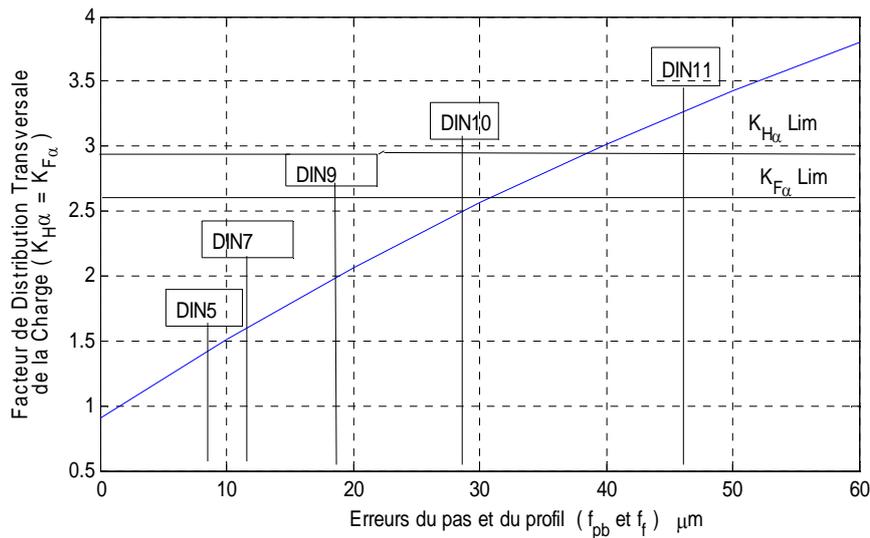


Fig.II.4 : Variation de $K_{H\alpha}$ ($K_{F\alpha}$) en Fonction des Erreurs du Pas et du Profil de l'Engrenage du Tableau (II.2).

Il est important de noter que les écarts positifs du profil de conception ne doivent pas se produire en dehors du profil théorique [14] (voir figure II.3). Si cela se produit réellement, le contact sera dans ce cas prolongé jusqu'au sommet de la dent tout en augmentant le bras du moment à la racine de la dent et par conséquent à la contrainte de flexion qui sera ainsi maximale. Cette dernière sera augmentée proportionnellement au rapport des moments. Pour le contact au sommet de la dent, le plus mauvais cas correspond à :

$$\frac{\sigma_{Fa}}{\sigma_F} = \frac{h_{Fa}}{h_F} \tag{II-6}$$

où,

σ_{Fa} , h_{Fa} : Sont la contrainte maximale de flexion et le bras du moment maximal pour un contact unique au sommet de la dent.

σ_F , h_F : Sont la contrainte de flexion et le bras du moment pour un contact unique au sommet de la dent d'un engrenage «parfait».

Le rapport $\left(\frac{\sigma_{Fa}}{\sigma_F} \right) = \frac{h_{Fa}}{h_F} = \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_\alpha \cdot Y_\varepsilon}$ est la limite maximale que peut prendre

K_{Fa} comme le montre la figure (II.4).

Des équations similaires peuvent être obtenues aussi pour K_{Ha} .

II.1.2.3. Les Erreurs Affectant les Facteurs de Distribution de Charge Longitudinale. ($K_{H\beta}$, $K_{F\beta}$)

a/ Erreur d'Inclinaison d'Hélice (erreur d'alignement) : ($f_{H\beta}$)

L'erreur d'inclinaison de l'hélice $f_{H\beta}$ est l'erreur de fabrication d'alignement sur une seule roue qui définit l'angle moyen entre le tracé réel de la dent et celui théorique ; elle est mesurée le long de la ligne d'action dans le plan transversal sur toute la largeur de la dent b (Fig.II.2) [15,16]. Pour toutes les définitions concernant les engrenages extérieurs, l'erreur d'alignement est dite positive si elle tend à augmenter l'angle nominal d'hélice, et négative si elle tend à le diminuer.

La figure II.5 montre l'influence de $f_{H\beta}$ sur le facteur longitudinal de distribution de la charge ($K_{H\beta}$) pour des engrenages de différents modules et grades de précision ; l'erreur $f_{H\beta}$ est supposée (dans Fig.II.5) égale à l'erreur totale d'alignement (voir Eq.I-21). On peut voir de cette figure que la taille des engrenages et le grade de précision de fabrication des dents influent considérablement sur la répartition des charges longitudinale. Par exemple, une amélioration du grade de précision de l'erreur d'alignement par deux catégories [4,6] (de DIN 7 à DIN 9) montre une augmentation de l'estimation de puissance de 30% pour des engrenages de module de 0,5 millimètre et de 22% pour des engrenages de module de 2,0 millimètres.

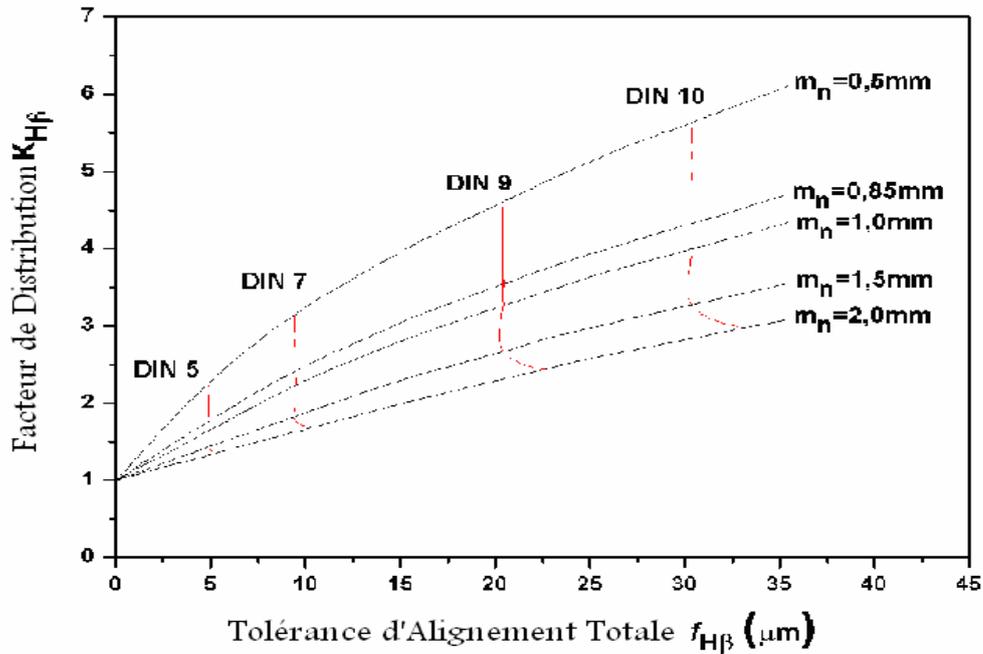


Fig.II.5 : Facteur de Distribution de la Charge Longitudinale $K_{H\beta}$.

b/ Erreurs de Montage

En plus de la déviation d'alignement des flancs conjugués ($f_{H\beta1} \pm f_{H\beta2}$) provoquée par la superposition de l'erreur individuelle d'alignement de chaque flanc, d'autres erreurs telles que : les erreurs de montage des roues dentées, les roulements et les erreurs de battement [8] des roues relativement aux surfaces de référence sur l'arbre (Fig.II.6), l'alignement des alésages des carters de boîtes de vitesse [9], jeu interne des paliers, ...etc., contribuent aussi à la déviation totale d'alignement de l'engrènement. La sommation simple de toutes ces erreurs individuelles (comme recommandée par ISO/DIN [4,6]) donne des valeurs très larges de f_{ma} beaucoup plus supérieures à $f_{H\beta}$ et par conséquent des valeurs improbables de $K_{H\beta}$ (Voir Fig.II.5). Néanmoins, l'addition simple de ces erreurs ne reflète pas la réalité car les erreurs de battement avec leurs angles de phase sont aléatoires, et les autres erreurs sont aussi aléatoirement distribuées à l'intérieur de leurs intervalles de tolérances (excepté pour les cas spécifiques où ces erreurs sont mesurées). Pour vérifier la validité des recommandations de la norme ISO/DIN [4,6] par exemple, une étude statistique paraît indispensable afin de déterminer la valeur probable de l'erreur totale d'alignement cumulée f_{ma} .

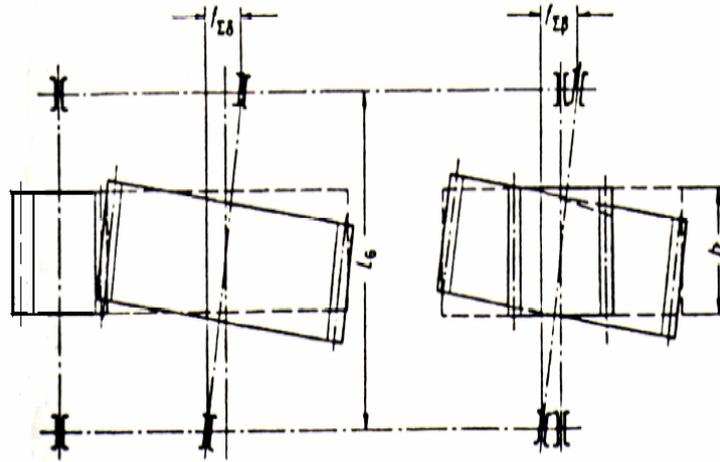


Fig.II.6 : Tolérances des Alésages des paliers [9].

II.1.2.4. Les Variations du Matériau des Engrenages

Les aciers de même dureté peuvent avoir des limites d'endurance de fatigue très différentes selon leurs compositions chimiques, propreté, taille des grains et traitement thermique. Le niveau de contrôle de la qualité des matériaux est souvent insatisfaisant. Ceci peut être clairement vu des figures (I.6) et (I.7) où il y a une différence de 27% dans la limite d'endurance de fatigue de contact entre le meilleur et le plus mauvais acier de cémentation. Dans quelques essais de fatigue de flexion des engrenages commercialement durcis [4,5,6], le rapport du maximum au minimum de résistance d'endurance était 1.60 pour l'acier cémenté et de 1,9 pour l'acier trempé superficiellement par flamme, confirmant ainsi la diffusion large de la limite d'endurance des engrenages.

La figure (II.7) montre un modèle statistique typique d'interférence des distributions de la contrainte appliquée et de la résistance du matériau. De ces dernières, il est clair qu'afin de réaliser une fiabilité élevée du matériau d'engrenage, il soit mieux et probablement plus économique d'opter pour une résistance modérée avec un contrôle de qualité rigoureux qu'opter pour un matériau avec une résistance élevée mais plus éparpillée.

Un tel objectif cependant, exige :

- Un contrôle stricte de la composition chimique du matériau (tolérances étroites dans le contenu d'alliages et la taille des grains).

- Un minimum d'impuretés dans le matériau.
- Un contrôle stricte du traitement thermique (tolérances étroites des températures dans les fours, refroidissement, ...etc.).

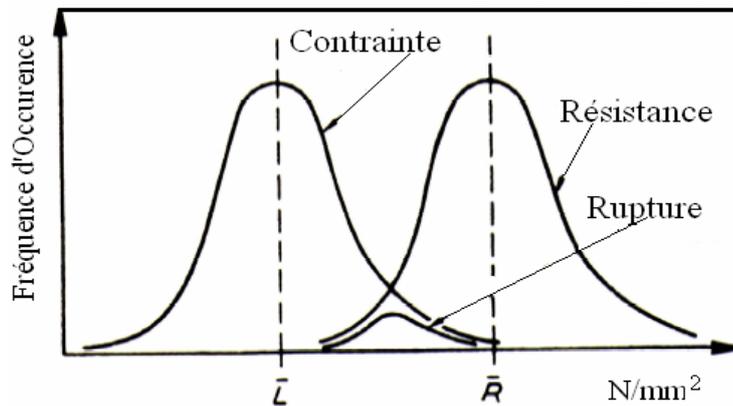


Fig.II.7 : Modèle d'Interférence Contrainte-Résistance

II.1.2.5. Variations des Conditions de Surface des Dentures

En plus des incertitudes qui proviennent du contrôle de qualité du matériau et du traitement thermique, les aciers de cémentation par exemple, qui sont capables de fournir une grande résistance, sont particulièrement très sensibles à la condition de surface du fond de filet de la denture, de l'état de surface [17] et des effets des contraintes résiduelles [18]. Le contrôle de tous ces paramètres présente un problème épineux pour les concepteurs des engrenages.

La rectification des dentures est généralement utilisée pour améliorer la résistance d'endurance des matériaux [19]. Néanmoins, les opérations de rectification mal contrôlées peuvent provoquées des contraintes de tensions de surfaces élevées qui produisent ainsi des fissures au niveau des dentures [20].

D'autre part, avec un contrôle rigoureux des opérations de rectification, il est possible de laisser la surface de la dent sans contraintes résiduelles de tension ; dans certains cas elles produisent des contraintes résiduelles de compression qui sont bénéfiques à la résistance de fatigue du matériau [21]. Cependant, avec les nouvelles techniques de finition tel que le brunissage par exemple [22,23,24], il est possible de convertir les contraintes hasardeuses de tensions obtenues de la rectification en contraintes bénéfiques de compression.

REFERENCES

- [1] G.Henriot., "Traité Théorique et Pratique des Engrenages", Vol.I, Dunod, Paris, 1979.
- [2] S.Pehan., T.K.Hellen., et al., « Numerical Methods for Determining Stress Intensity Factor Vs Crack Depth in Gear tooth Roots », Int.J.Fatigue Vol 19. N°10. pp 677- 685, Elsevier,1997.
- [3] J. I. Pedrero., A. Rueda., and A. Fuentes., " Determination of the ISO Tooth Form Factor for Involute Spur and Helical Gears", J.Mechanism and Machine Theory, Vol.34, pp 89-103, Elsevier, 2003.
- [4] ISO/ 6336., Parts 1, 2 and 3, "Calculation of the Load Capacity of Spur and Helical Gears", 1996
- [5] BS 437., "Spur and Helical Gears", Part 3: "Method of Calculation of Contact and Root Bending Stress, Limitations for Metallic Involute Gears", BSI 1986.
- [6] DIN 3990., Grundlagen für die Trafähigkeitsberechnung von Gerad-und Sghrastirnradern", (Principes de Base pour le Calcul de la Capacité de Charge des Engrenages à Denture Droite et Hélicoïdale) parts 1-53, 5.Beuth 1987.
- [7] AGMA 2101, "Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear teeth", AGMA 2101-C95, 1995.
- [8] ISO 1328., part:1., "Cylindrical Gears –ISO System of Accuracy", 1995.
- [9] DIN 3962., "Accuracy of Cylindrical Gears: Tolerances for Individual Errors", 1978.
- [10] BSI 436, Part:2., " Basic Rack Form, Modules and Accuracy (1 to 5 Metric Module)", 1972.
- [11] Anon, "Maag Gear Handbook", Maag Gear Co. Zurich, 1963.
- [12] H.Kohler., " Gear Dynamics", BGA State of the Art Review N°002. Report on BGA Contract RD/002, British Gear Assocn./Inst.Mech.Engrs.,1988.
- [13] D.L.Seager., "Separation of Gear Tooth in Approach and Recess, and the Likelihood of Corner Contact", Trans ASLE, Vol.19.2, pp164-17, 1975.
- [14] M.A.Alfares., A.H.Falah., and A.H.Alkholly., "Clearance Distribution of Misaligned Gear Coupling Teeth Considering Crowning and Geometry Variations", Mechanism and Machine Theory,41, pp 1258-1272, Elsevier, 2006.
- [15] E.Chernet., "Contribution à l'Analyse et à la Modélisation des Ecart Géométriques sur les Dentures d'Engrenages Cylindriques Taillés par Fraise Mère", Thèse de docteur ingénieur: Institut des Sciences Appliquées de Lyon, 228p, 1997.

- [16] E.Chernet., and J.L.Merigard., “Modélisation des Ecartés Géométriques Générés par le Taillage par Fraise Mère des Dentures d’Engrenages Cylindriques-Parties I et II”, Congrès Mondial des engrenages et des Transmissions de Puissance, Paris, 21p, 1999.
- [17] T.C.Jao., M.T.Devlin., et all., “ Influence of Surface Roughness on Gear Pitting Behavior”, Elsevier, 2004.
- [18] P.Bérest., and G.Vouille., ”Remarques sur les Contraintes Résiduelles”, C.R.Mécanique 331), pp455-460, Elsevier, 2003.
- [19] J.B.Searbrook., and D.W.Dudley., “Results of a Fifteen Years Program of Flexural Fatigue Testing of Gear Teeth”, Trans.ASME.Eng.Ind., pp 221-237, Discussion pp 237-239, 1964.
- [20] G.P.Gavalbaro., T.P.Wilks., et all., “Bending Fatigue and Contact Fatigue Characteristics of Crburized Gears”, Surface and Coatings Technology Journal, Vol.71 N°2, PP182-192(11), Elsevier, 1995.
- [21] B.A.Shaw., C.Aylott., and all., “The Role of Residual Stress on the Fatigue Strength of High Performance Gearing, International Journal of Fatigue, Vol.25, pp 1279-1283, Elsevier, 2003.
- [22] N.K.Burell, “Improved Gear Life Through Controlled Shot Peening”, Proc. AGMA Fall Tech. Meeting San Fransisco, paper AGMA 85 FTM-15, 1985.
- [23] N.Amini., B.G.Rosén., et all., “Optimisation of Gear Tooth Surfaces”, Int.J.Mach.Tools Manfact, Vol.32, Nos 5-6, pp 425-435, Elsevier, 1998.
- [24] M.Guagliano., E.Riva., et all., “Contact Fatigue Analysis of Shot-Peened Gears”, Engineering Failure analysis, Vol.9, pp 147-158, Elsevier, 2002.

CHAPITRE III :

***OPTIMISATION DETERMINISTIQUE ET ANALYSE
STATISTIQUE
DE L'EFFET DES ERREURS DE FABRICATION***

III.1 ERREURS INDIVIDUELLES DE FABRICATION AFFECTANT LA DÉVIATION D'ALIGNEMENT DE L'ENGRENEMENT

La première étape dans l'analyse est d'établir quel effet chacune des tolérances a sur la déviation d'alignement d'engrènement. Pour mieux comprendre l'effet de ces tolérances, considérons un exemple spécifique. Pour simplifier la description, considérons deux réducteurs de vitesses à un seul étage de type montré sur les figures (III.1a) et (III.1b), dans lesquelles l'arrangement de l'orientation des paliers est illustré dans les figures (III.2a) et (III.2b). La position du pignon et de la roue (cylindre primitif) relativement l'un à l'autre est déterminé par une chaîne linéaire de tolérances comportant les différentes quantités suivantes :

- Déviation de parallélisme des alésages du carter portant les paliers.
- Jeu entre les alésages du carter et les bagues extérieures des roulements.
- Le battement radial (excentricité) des bagues extérieures des roulements.
- Variations du diamètre des billes (rouleaux) des roulements.
- Le battement radial des bagues intérieures des roulements.
- Jeu entre les alésages des paliers du carter et les arbres.
- Battements des roues dentées lorsque sont montées sur leurs arbres.
- battement des épaulements des arbres et les faces latérales du pignon et de la roue.

Une source additionnelle de déviation d'alignement des dents est bien sûr l'erreur de manufacture $f_{H\beta 1.2}$ du pignon et de la roue.

La convention de signe utilisée dans les figures (III.2a) et (III.2b) est telle que n'importe quel composant de déviation d'alignement des dents du pignon ou de la roue est positif s'il tend à augmenter l'angle efficace de l'hélice du pignon ou de la roue, et négatif s'il tend à le diminuer. La même règle s'applique aussi pour les erreurs de déviations $f_{H\beta}$ des dents.

a/

b/

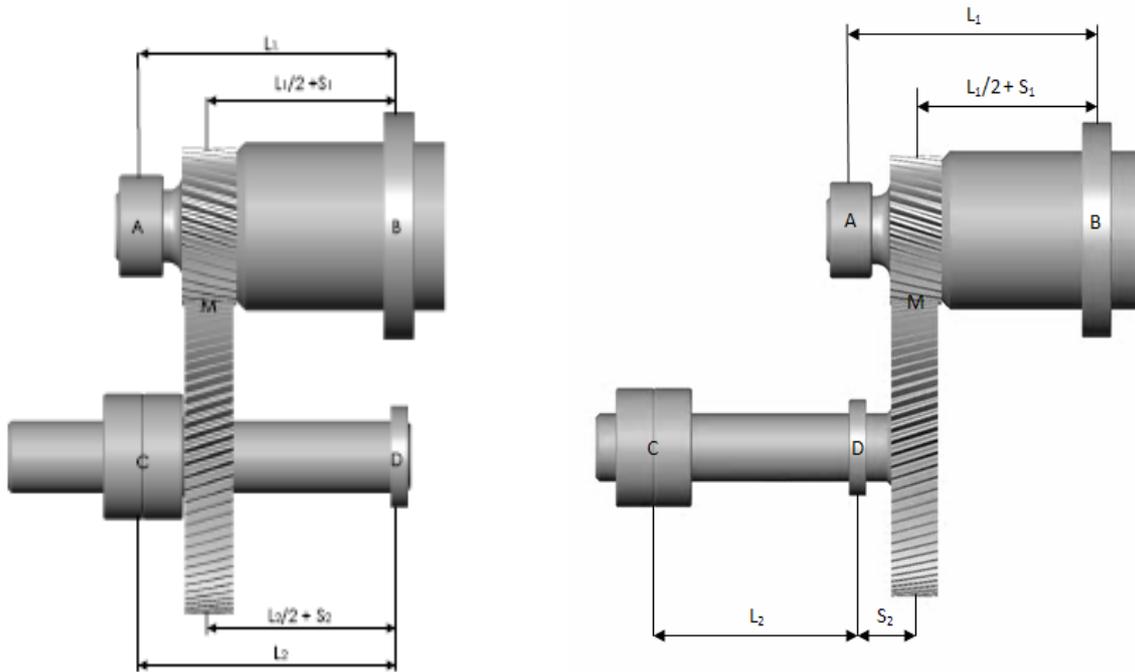


Fig.III.1 : Disposition des Paliers de l'Engrenage en Considération
a/ Montage Simple
b/ Montage en Porte à Faux

III.1.1 Déviation de Parallélisme des Paliers

Ces erreurs sont aléatoires dans la grandeur et dans la direction (à moins que mesurées), par conséquent leur effet sur la déviation d'alignement des dents peut être soustractif comme additif (voir Fig.II.6). Sa composante dans le plan d'action est (Fig.III.2 a) :

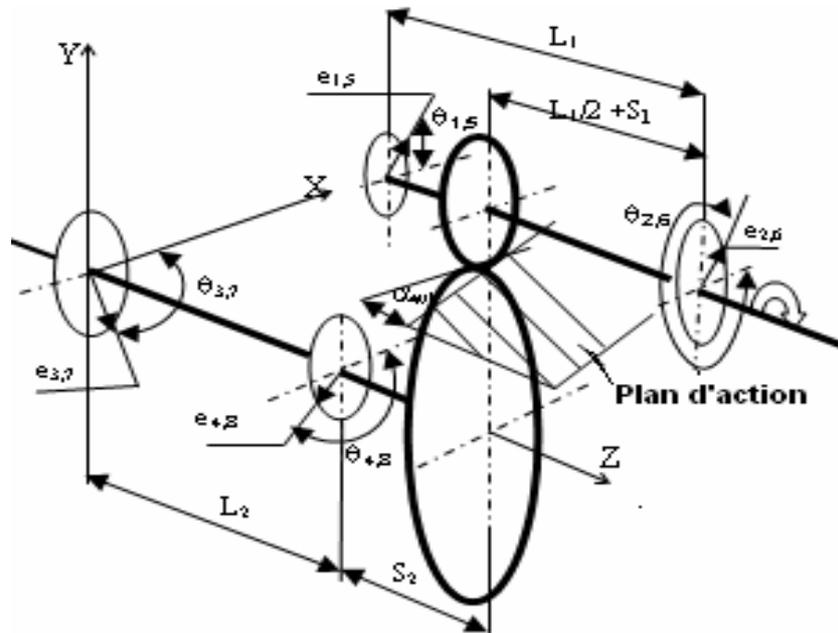
$$f_{Par} = \frac{b}{l} \left[\begin{array}{l} [f_{\Sigma\beta_1} \cdot \text{Cos}\alpha_{wt} - f_{\Sigma\delta_1} \cdot \text{Sin}\alpha_{wt}] \\ \pm [f_{\Sigma\beta_2} \cdot \text{Cos}\alpha_{wt} - f_{\Sigma\delta_2} \cdot \text{Sin}\alpha_{wt}] \end{array} \right] \quad (\text{III-1})$$

où,

$f_{\Sigma\beta}$: Erreur relative de déviation des deux arbres dans le plan horizontal (X-Z).

$f_{\Sigma\delta}$: Inclination relative des deux arbres dans le plan vertical (Y-Z), et l est la plus petite distance entre les paliers de roulements parmi l_1 et l_2 .

a/



b/

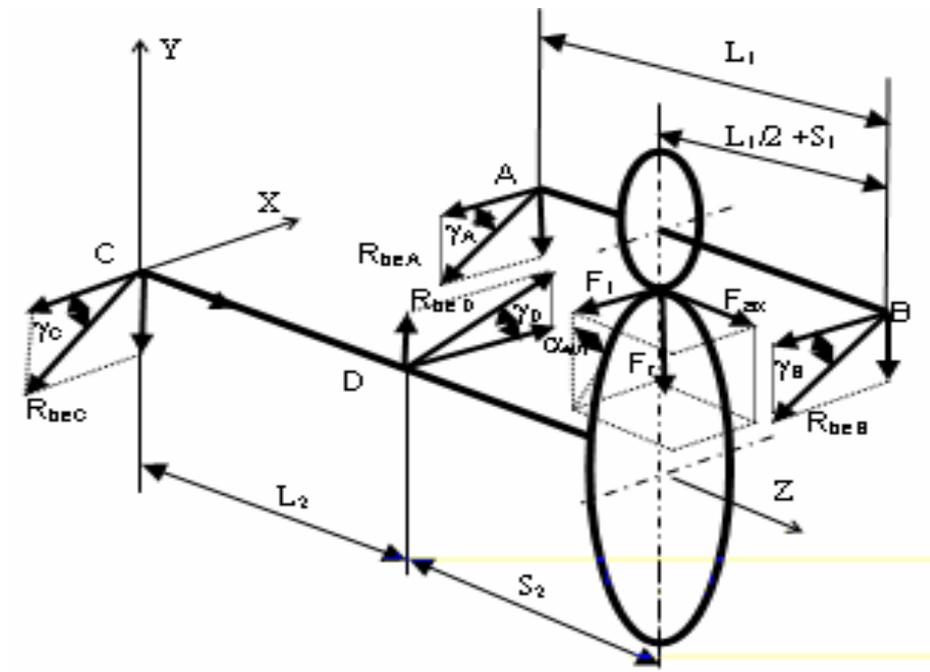


Fig.III.2: a/ Présentation des Batteredments des Paliers des Roulements du Réducteur de Vitesse de la Figure (III.1b).
 b/ Orientation des Charges sur les Paliers à Roulements du Réducteur de Vitesse de la Figure (III.1b).

III.1.2 Jeu entre les Alésages des Paliers et les Bagues Extérieures des Roulements

Les jeux radiaux sont souvent présents au support du diamètre extérieur des roulements à billes en raison des tolérances des roulements, des tolérances de diamètres des alésages et des ajustements choisis. Habituellement, les roulements sont montés avec des ajustements glissants dans leurs logements afin de faciliter leur montage et démontage ou de permettre le positionnement axial des roulements. Ces jeux radiaux introduisent une déviation d'alignement des dents sous la charge. La direction de la déviation d'alignement possible est identique à celles des réactions dans les paliers et sa grandeur résolu dans le plan d'action peut être donnée par :

$$f_{bm} = \frac{b}{2} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{l_1} (e_A \cdot \cos(\alpha_{wt} - \gamma_A) - e_B \cdot \cos(\alpha_{wt} - \gamma_B)) \pm \\ \frac{1}{l_2} (e_C \cdot \cos(\alpha_{wt} - \gamma_C) - e_D \cdot \cos(\alpha_{wt} - \gamma_D)) \end{array} \right] \tag{III-2}$$

où,

e_A, e_B, e_C, e_D sont les écarts de l'ajustement entre les diamètres extérieurs des roulements et leurs logements dans le carter du réducteur de vitesse..

b est la largeur du pignon.

$L_{1,2}$ sont les distances entres les paliers du pignon et de la roue.

α_{wt} est l'angle de pression transversale, et

$\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C, \gamma_D$ sont les angles formés entre les résultantes des réactions dans les paliers et l'axe X comme défini dans la figure (III.2 b).

III.1.3 Excentricité des Bagues Extérieures des Roulements

Toutes les excentricités "seront aléatoirement mises en phase", puisque les bagues des roulements peuvent être installées dans n'importe quelle position angulaire. Leur effet sur la déviation d'alignement des dents dépend ainsi non seulement du rapport $(b/l_{1,2})$ et les excentricités $e_1..... e_4$ des roulements, mais également des angles de phase $\theta_1.....\theta_i$ (voir Fig.2a), où $0 \leq \theta_i \leq 360^\circ$.

La déviation d'alignement possible des dents provoquée par ce type d'erreurs est donnée par :

$$f_{bm2} = \frac{b}{l_1} [e_1 \cdot \cos(\theta_1 + \alpha_{wt}) - e_2 \cdot \cos(\theta_2 + \alpha_{wt})] \pm \frac{b}{l_2} [e_3 \cdot \cos(\theta_3 + \alpha_{wt}) - e_4 \cdot \cos(\theta_4 + \alpha_{wt})] \quad (\text{III-3})$$

Les cas extrêmes où la déviation d'alignement est maximale et minimale sont :

$$f_{bm2 \max} = \frac{b}{l_1} (e_1 + e_2) + \frac{b}{l_2} (e_3 + e_4)$$

$$f_{bm2 \min} = 0$$

Il est important de noter cependant, que ceci peut seulement se produire pour des valeurs particulières de $\theta_1, \dots, \theta_4$ tels que e_1 et e_4 sont exactement en phase et que e_2 et e_3 sont exactement en anti-phase. Statistiquement, il est extrêmement peu probable que cela peut se produire avec les assemblages aléatoires.

III.1.4 Variations des Diamètres des Billes (rouleaux) de Roulements

Ces erreurs produiront des déplacements radiaux aléatoires dans chaque palier avec un intervalle maximal égale au diamètre individuel des billes (variation de circularité). Typiquement, ces erreurs sont de l'ordre $\pm 1 \mu\text{m}$ [1] et sont ainsi négligeables. Sous la charge, la répartition de la charge sur plusieurs billes réduira ces effets encore plus.

III.1.5 Battement des Bagues Intérieures des Roulements

Comme ceux de la bague extérieure, les excentricités de la bague intérieure sont également aléatoirement mises en phase. Cependant, elles ont moins d'effet sur la déviation d'alignement des dents en raison du battement de la bague intérieure dont le diamètre est toujours plus petit que celui de la bague extérieure. Puisque la bague intérieure tourne, la déviation d'alignement produite change cycliquement avec la rotation de l'arbre. Elle est donnée par :

$$f_{bm3} = \frac{b}{l_1} \left[e_5 \cdot \text{Cos}(w_1 \cdot t + \theta_5 + \alpha_{wt}) - e_6 \cdot \text{Cos}(w_1 \cdot t + \theta_6 + \alpha_{wt}) \right] \pm \frac{b}{l_2} \left[e_7 \cdot \text{Cos}(w_2 \cdot t + \theta_7 + \alpha_{wt}) - e_8 \cdot \text{Cos}(w_2 \cdot t + \theta_8 + \alpha_{wt}) \right] \quad \text{(III-4)}$$

où,

$\theta_5, \dots, \theta_8$ sont les angles de phase (Fig.III.2a),

e_5, \dots, e_8 sont les excentricités comme défini dans la figure (III.2a),

$\omega_{1,2}$ sont les vitesses angulaires du pignon et de la roue, (rad/s), et

t est le temps mesuré à partir d'un repère appropriée (s).

III.1.6. Jeu entre les Arbres et les Alésages des Roulements

Il peut y avoir un jeu radial entre les arbres et les roulements. Ces jeux proviennent de trois sources : tolérances du diamètre de l'arbre, tolérances d'alésage, et des allocations. Généralement, la déviation d'alignement des dents provoquée par ces jeux est négligeable puisque des ajustements incertains ou avec serrage sont normalement employés pour les arbres tournants.

III.1.7. Battement des Roues Dentées, Battement des Epaulements des Arbres, des Faces du Pignon et de la Roue

Les erreurs de formes (battement, circularité, concentricité) des surfaces localisant chaque roue dentée (alésage, brides, broches, cylindre primitif, arbre, corps de roue, ...etc.) [2], obtenus originellement de la production des éléments de la boîte de vitesses, peuvent toutes introduire une déviation d'alignement des dents. Pour simplifier le calcul, seulement l'effet du battement axial des faces des roues est pris en considération. Ainsi, la déviation d'alignement provoquée par cette erreur est donnée par :

$$f_{ar} = b \left[\frac{1}{d_1} \cdot f_{a1} \cdot \text{Cos}(w_1 \cdot t + \varphi_1 + \alpha_{wt}) \pm \frac{1}{d_2} \cdot f_{a2} \cdot \text{Cos}(w_2 \cdot t + \varphi_2 + \alpha_{wt}) \right] \quad \text{(III-5)}$$

où,

$f_{a1,2}$ sont les battements axiaux des faces du pignon (roue) aux diamètres d_1, d_2 (TIR)

$\varphi_{1,2}$ sont des angles de phase au niveau du battement maximal.

Déviatiion d'Alignement Totale de Manufacture

L'erreur totale de manufacture est l'erreur de déviation d'alignement des roues engrenées une fois montées dans un système d'engrenages en contact et sans charge. Sa valeur dépend de la façon dont les différentes déviations d'alignement combinent pour former une erreur cumulée. Pour le cas spécifique des figures (III.2a) et (III.2b), elle est donnée en additionnant les diverses erreurs plus les erreurs d'alignement des dents $f_{H\beta 1,2}$ sur les deux roues:

$$f_{ma} = f_{bm1} + f_{bm2} + f_{bm3} + f_{Par} + f_{ar} \pm \sum_{i=1}^2 f_{H\beta i} \tag{III-6}$$

III.1.8. Composante de Déviation d'Alignement d'Engrènement Due aux Déformations des Paliers

Etant donné que le pignon et la roue ne sont pas centralement placés entre leurs paliers (Fig.III.1), des déplacements relatifs sous la charge peuvent de manière significative influencer la déviation d'alignement d'engrènement. La grandeur et la direction de la déviation efficace d'alignement dans le plan d'action du pignon peuvent être déterminées comme suit :

$$f_{be} = b \left[\begin{array}{l} \frac{1}{l_1} (\delta_{beA} \cdot \cos(\gamma_A - \alpha_{wt}) - \delta_{beB} \cdot \cos(\gamma_B - \alpha_{wt})) \pm \\ \frac{1}{l_2} (\delta_{beC} \cdot \cos(\gamma_C - \alpha_{wt}) - \delta_{beD} \cdot \cos(\gamma_D - \alpha_{wt})) \end{array} \right] \tag{III-7}$$

$\delta_A, \dots, \delta_D$ sont les déformations correspondants des paliers A, ..., D (Fig.III.2b) et peuvent être calculés en utilisant des formules semi empiriques à partir des normes ISO/DIN. [3,4].

III.1.9. Composante de Déviation d'Alignement d'Engrènement Due aux Déformations des Arbres

En utilisant la procédure de calcul du standard ISO [3], les composantes de la déviation d'alignement d'engrènement dues aux déformations des arbres (f_{sh1} et f_{sh2}) sont donnés par :

$$f_{sh1} = \frac{F_m}{b} [f_{sh01} \pm f_{sh02}] \quad (\text{III-8})$$

où,

f_{sh01} et f_{sh02} sont les déformations effectives par unité de charge du pignon et de la roue respectivement ($\mu\text{m}/\text{N}/\text{mm}$). Ceux-ci prennent en considération les distorsions provenant de la flexion et de la torsion de l'arbre, du corps du pignon et de la roue respectivement. La norme ISO donne une formule simplifiée pour le calcul de f_{sh0i} pour différents arrangements de paliers. Cependant, dans ce travail f_{sh01} et f_{sh02} tous les deux sont recalculés dans le plan d'action comme suit :

$$f_{sh01} = \frac{b^2}{F_t} \left[\mathfrak{G}_{H1} \cdot \text{Cos}(\alpha_{wt}) + \mathfrak{G}_{V1} \cdot \text{Sin}(\alpha_{wt}) + \mathfrak{G}_{tor} \cdot \frac{d_{b1}}{2b} \right] \quad (\text{III-9})$$

$$f_{sh02} = \frac{b^2}{F_t} \left[\mathfrak{G}_{H2} \cdot \text{Cos}(\alpha_{wt}) + \mathfrak{G}_{V2} \cdot \text{Sin}(\alpha_{wt}) \right] \quad (\text{III 10})$$

où,

\mathfrak{G}_{H1} , \mathfrak{G}_{V1} et \mathfrak{G}_{H2} \mathfrak{G}_{V2} sont les composantes horizontales et verticales de la pente de flexion du pignon et de la roue respectivement (en rad) qui peuvent être calculées en utilisant la méthode d'intégration [5].

\mathfrak{G}_{tor} est la pente de torsion due au couple appliqué.

d_{b1} est le cercle de base du pignon.

III.1.10. Composante de Déviation d'Alignement d'Engrènement Due aux Déformations du Carter

Ces déformations peuvent être déterminées expérimentalement ou par l'emploi des formules approximatives [3]. Cependant, dans ce travail les réducteurs de transmission en considération sont considérés rigides, et en conséquence f_{ca} est négligé.

$$f_{ca} = 0 \quad (\text{III-11})$$

Déviatiion d'Alignement Totale d'Engrènement

La déviatiion d'alignement totale résultante des déformations élastiques des arbres, des corps de roues, des paliers, du carter, ...etc. (f_e), et les erreurs de fabrication et de montage des dents, roues, arbres, du carter, ...etc. (f_{ma}) est la somme de la déviatiion d'alignement sur chaque arbre tout en respectant la convention de signe définie précédemment (page 37). La déviatiion totale d'alignement d'engrènement projetée dans le plan d'action ($f_{\beta x}$) est donc la somme algébrique de chaque composante de déviatiion d'alignement.

$$f_{\beta x} = f_{bm1} + f_2 + f_{bm3} + f_{par} + f_{ar} \pm \sum_{i=1}^2 f_{H\beta i} + f_{be} + f_{sh} + f_{ca} \quad (\text{III-12})$$

L'équation (II-12) donne la valeur instantanée de $f_{\beta x}$ aux valeurs particulières des angles de rotation $\omega_1.t$, $\omega_2.t$ (qui sont liés via le rapport de transmission et les dimensions L_1, \dots, L_i) et ceci pour des valeurs particulières des erreurs $e_i, e_A, \dots, e_D, \dots$ etc. et les angles de phase θ_i . Afin d'étudier comment la déviatiion totale d'alignement d'engrènement des boîtes de vitesses assemblées avec des erreurs mesurées (ou données) se comporte, il est nécessaire d'étudier des boîtes de vitesse spécifiques de différentes configurations géométriques pendant que les divers quantités θ_i, L_i, \dots etc. changent. Ce problème a été résolu pour deux types de configurations de réducteurs de vitesse à un seul étage à engrenages cylindriques à denture hélicoïdale (simple et en porte à faux). En plus de ça, on propose dans ce qui suit une procédure d'optimisation déterministique afin de réduire l'effet de ces erreurs de fabrication et plus particulièrement pour les engrenages fins.

III.2 METHODE D'OPTIMISATION DETERMINISTIQUE

Dans ce travail, l'objectif est de déterminer la conception optimale pour un engrenage hélicoïdal en utilisant, au lieu de la procédure de la norme ISO, la méthode (exacte) alternative pour calculer la déviation totale d'alignement d'engrènement agissant le long du plan d'action (Eq.III-12) [6].

Il est important de définir un critère par lequel nous pouvons comparer différentes conceptions. Un qui vient à l'esprit est le coût. Tucker [7] dit que maximiser la capacité de charge pour un engrenage donné a généralement comme conséquence le plus bas coût par puissances. Sur la base de cet argument, l'objectif de cette optimisation est de réduire au minimum les facteurs de distribution de charge (c'est à dire maximiser la capacité de charge) des engrenages fins après l'étape de conception sans changer les paramètres de conception des engrenages ni leur processus de fabrication.

Comme pour la plupart des techniques d'optimisation [8], le procédé commence par plusieurs vecteurs. Ces vecteurs sont les variables indépendantes de conception qui sont dans notre cas la largeur de la denture (b), les angles de phase (φ_i, θ_i) et les dimensions (l_i, S_i) (voir Fig.III.1a et III.1b). Les erreurs de fabrication mentionnées dans la section précédente (e_i) sont considérées comme des variables aléatoires et qui principalement sont celles qui affectent la déviation d'alignement d'engrènement dans une série de composants d'un réducteur de vitesse spécifique à un seul étage. Le tableau (II.2) montre les caractéristiques de l'engrenage pris comme exemple. En tout, une boîte (carter), 21 sets de pignons et de roues et 16 roulements à billes de types 6202 et 6301 ont été entièrement inspectés au laboratoire de métrologie d'engrenages à l'université de Newcastle (Royaume-Uni). Cependant, pour des raisons de simplicité, on suppose dans ce travail que ces erreurs ont des distributions rectangulaires (uniforme) et l'intervalle de la variation correspondant à chaque tolérance est comme mentionné dans le tableau (III.1).

Tableau. III.1 : Tolérances de Fabrication Mesurées pour l'Analyse de l'Engrenage du Tableau.II.1.

Variable aléatoire	Intervalle de variation en μm	Variable aléatoire	Intervalle de variation en μm	Variable aléatoire	Intervalle de variation en μm
e_A	0.0 - 0.0	e_5	0,0 - 0,0	f_{pb}	5,5 - 26
e_B	24 - 43	e_6	0,5 - 2,0	f_f	31 - 61
e_C	11 - 29	e_7	0,0 - 0,0	R_{Z1}	1,8 - 7,4
e_D	31 - 61	e_8	0,0 - 2,5	R_{Z2}	2,0 - 6,6
e_1	31 - 61	$f_{H\beta 1}$	- 41 - 19	$\sigma_{H1\ im1}$	1413 - 1475
e_2	0,5 - 3,0	$f_{H\beta 2}$	-36,5 - 47	$\sigma_{H1\ im2}$	1413 - 1475
e_3	0,0 - 5,0	f_{Par}	- 10,5	$\sigma_{F1\ im1}$	386 - 417
e_4	0,0 - 6,5	f_{ar}	0,0	$\sigma_{F1\ im2}$	386 - 417

Les contraintes d'inégalité et d'égalité utilisées dans cette optimisation sont :

- Condition de résistance de contact du pignon et de la roue (Eqs.(I-5) et (I-26)).

$$\sigma_H \leq \sigma_{HP1,2}$$

- condition de résistance de la flexion du pignon et de la roue Eqs.(I-6) et (I-27)).

$$\sigma_{F1,2} \leq \sigma_{FP1,2}$$

- Limite maximale (admissible) de l'angle de torsion du pignon ou de la roue [9].

$$\theta_{tor1,2} \leq \theta_{torP1,2}$$

- Limites de la largeur de la denture imposée par la cinématique du pignon ou de la roue [10].

$$b \geq \frac{\pi \cdot m_n}{\sin \beta}$$

- Quelques restrictions géométriques prises de la figure (III.1a) et (III.1b)), et qui sont :

a/ Pour la configuration en porte à faux:

$$\frac{L_1}{2} - S_1 \geq \frac{b}{2} + 9$$

$$\frac{L_1}{2} + S_1 \leq 41.5$$

$$40 \leq L_2 \leq 51$$

$$S_2 \geq \frac{b}{2} + 8$$

b/ Pour la configuration simple :

$$\frac{L_1}{2} - S_1 \geq \frac{b}{2} + 9$$

$$\frac{L_1}{2} + S_1 \leq 41.5$$

$$S_2 \geq \frac{b}{2} + 8$$

Les fonctions objectives de cette optimisation sont :

- Réduction au minimum des valeurs des facteurs de distribution de la charge longitudinale dans les deux cas ($b/b_{cal} > 1$ et $b/b_{cal} < 1$; voir Fig.I.6) en utilisant les équations (I-15) or (I-17), tout en maintenant les valeurs des contraintes au sein de leurs limites indiquées.
- Augmentation au maximum du couple transmis par le pignon pour les deux sollicitations (contact et flexion) en utilisant les formules standard [3] et en remplaçant $K_{H\beta}$ et $K_{F\beta}$ par les équations (I-15), (I-17) et (I-22).

L'analyse numérique à été effectuée par le logiciel MATLAB version 7.1 [11] par l'emploi de la sub-routine de minimisation **fminc** qui est une composante de la boîte à outils d'optimisation de MATLAB [12]. Cet algorithme, qui met en application une routine de minimisation quasi-newtonienne avec contraintes, exhibe en général des bons résultats dans la résolution des problèmes de technologie [13].

Les résultats de l'analyse sont comme récapitulés dans le tableau (III.2).

Tableau.III.2 : Résultats de la Procédure d'Optimisation**A/ configuration en porte a faux**

Variable de Conception (mm)					Fonction Objective			
b	L ₁	S ₁	L ₂	S ₂	T _{1max} (N.m)	f _{βy} (μm)	K _{Hβ}	K _{Fβ}
13	22	5	51	13,5	36,09	14,30	2,75	1,37
11	40	6,5	51	13,5	31,20	19,14	3,18	1,43
11	32	2,5	40	13,5	28,72	22,59	3,45	1,47
11	45	9	51	13,5	29,58	21,29	3,35	1,45
12,25*	70*	14*	51*	19*	19,90	42,21	4,98	1,65

B/ Configuration simple

Variable de Conception (mm)				Fonction Objective		
b	L _{1,2}	S _{1,2}	T _{1max} (N.m)	f _{βy} (μm)	K _{Hβ}	K _{Fβ}
11,28	46	0.0	46,75	8,31	2,12	1,26
12,50	40	0,0	87,50	3,37	1,50	1,14
11,91	35	0,5	91,51	0,58	1,08	1,03
12,46	40	6,8	99,11	0,00	1,00	1,00
12,25*	70*	14*	26,06	24,62	3,80	1,52

* se rapporte à des valeurs originales de conception

L'optimisation globale permet aux différents paramètres de conception d'agir l'un sur l'autre, rapportant la meilleure conception composée. Après avoir trouvé l'optimum continu, comme peut être vu du Tableau.III.2, le facteur longitudinal $K_{H\beta}$ de la répartition des charges est réduit de 4,98 à 2,75 pour la configuration en porte à faux, ce qui signifie une augmentation de la capacité de charge d'environ 80%. Cependant, le concepteur peut analyser près des conceptions optimales pour la comparaison et le choix. Par contre, dans le cas de la configuration simple (Fig.III.1a), une valeur de $K_{H\beta}$ égale à 1 peut être atteinte théoriquement (réellement, l'effet des angles de phase est variable et ne peut pas être entièrement éliminé) ; ce qui signifie une augmentation de la capacité de charge de 280%. De ces résultats, on remarque que, le positionnement des roues

par rapport aux paliers influe considérablement sur la capacité de charge des engrenages et par conséquent, l'utilisation des procédures d'optimisation pendant et après l'étape de conception peut améliorer la performance des engrenages en général et plus particulièrement des engrenages fins, et ainsi remplacer les méthodes classiques de correction des dentures tels que : denture bombée, correction linéaire, ...etc. [14]

III.3 ANALYSE STATISTIQUE

III.3.1 Méthode Analytique

Il n'est pratiquement pas possible de concevoir une procédure analytique rigoureuse pour calculer les moyennes et les écarts types des fonctions générales de n variables aléatoires. Il est, en fait, très difficile de trouver la fonction de densité de probabilité même pour une fonction générale de plus de deux variables aléatoires. Néanmoins, dans la plupart des problèmes d'erreur d'engineering où on peut assumer que les variations aléatoires de chaque variable sont "petites", et puisque Sandler [15] a montré que les incertitudes dans l'estimation des différents facteurs de calcul d'engrenages sont relativement petites (voir tableau (III.3)), l'approximation par la série de Taylor [16,17,18] peut être considérée comme méthode adéquate pour combiner les variables aléatoires.

$$Y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y}{\partial X_i} \Big|_{x_i=\bar{x}_i} \cdot (X_i - \bar{X}_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 Y}{\partial X_i \cdot \partial X_j} \Big|_{x_i=\bar{x}_i} \cdot (X_i - \bar{X}_i) \cdot (X_j - \bar{X}_j) + \dots \tag{III-13}$$

Table.III.3 : Incertitudes d'estimations des Facteurs des Standards ISO et AGMA [15]

±ΔX	±1%		± 2%		± 5%		±7.5%		± 10%		± 15%		±20%		± 40%		
Méthode	ISO	AGMA	ISO	ISO	AGMA	ISO	AGMA	ISO	AGMA	ISO	AGMA	BOX	BOX				
X _i	Z _H	I	Z _N	K _{Hα}	C _m	δ _H lim	S _{ac}	K _A	C _{SF}	n	x						
	Z _E		Z _V	K _{Hβ}	C _L	K _V	C _V	S									
				Z _L				C _P									
				Z _R													
				Z _W													

Dans la plupart des problèmes d'erreurs d'engineering, les valeurs des termes d'ordre supérieurs dans l'expansion de Taylor sont considérées comme petites comparées aux valeurs moyennes et au premier ordre, et sont donc négligées. En utilisant des procédures standard, [18,19] nous obtenons alors la moyenne comme suit :

$$\bar{Y} = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) \tag{III-14}$$

Tandis que la petite variation aléatoire de Y est donnée par :

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y}{\partial X_i} \cdot \Delta X_i \tag{III-15}$$

où,

$\Delta \bar{X}_i = (X_i - \bar{X}_i)$ est la variation de X_i de sa moyenne, et ΔY est une fonction linéaire de ΔX_i. En utilisant des théorèmes standards, l'écart type résultant de Y est donné par :

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i} \Big|_{x_i = \bar{x}_i} \cdot \sigma_{X_i} \right)^2} \tag{III-16}$$

L'extension de l'équation (III-6) (donnant l'erreur totale d'alignement de fabrication) au moyen de la série de Taylor dans la région "proche" des valeurs moyennes, $\bar{e}_i, \bar{e}_A, \dots, \bar{e}_D$, etc., de n variables et en négligeant les termes d'ordre supérieur dans l'expansion [20], nous obtenons la moyenne comme suit :

$$\overline{f_{ma}} = \sum_{i=1}^3 \overline{f_{bmi}} + \overline{f_{Par}} + \overline{f_{ar}} - \overline{f_{H\beta 1}} + \overline{f_{H\beta 2}} \quad (\text{III-17})$$

et l'écart type résultant de f_{ma} est :

$$\sigma^2 f_{ma} = \sum_{i=1}^3 \sigma^2 f_{bmi} + \sigma^2 f_{Par} + \sigma^2 f_{ar} + \sum_{i=1}^2 \sigma^2 f_{H\beta i} \quad (\text{III-18})$$

où, par exemple,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sigma^2 f_{bmi} &= \sum_{i=A}^D \left[\frac{\partial f_{ma}}{\partial e_i} \Big|_{\bar{X}} \cdot \sigma e_i \right]^2 + \sum_{i=A}^D \left[\frac{\partial f_{ma}}{\partial \gamma_i} \Big|_{\bar{X}} \cdot \sigma \gamma_i \right]^2 + \sum_{i=1}^8 \left[\frac{\partial f_{ma}}{\partial e_i} \Big|_{\bar{X}} \cdot \sigma e_i \right]^2 + \\ &\sum_{i=1}^4 \left[\frac{\partial f_{ma}}{\partial \theta_i} \Big|_{\bar{X}} \cdot \sigma \theta_i \right]^2 + \sum_{i=1}^4 \left[\frac{\partial f_{ma}}{\partial (\omega_{1,2} \cdot t + \theta_i)} \Big|_{\bar{X}} \cdot \sigma (\omega_{1,2} \cdot t + \theta_i) \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{III-19})$$

Cependant, ces équations ne sont pas, en fait, entièrement valides car les fonctions f_{bm2} , f_{bm3} et f_{ar} de l'équation (III-6) impliquent le produit de deux variables aléatoires indépendantes dont les variations des angles aléatoires de phase ne sont clairement pas "petites", ainsi l'approximation par la série de Taylor ne donnera pas des évaluations valides des statistiques de f_{bm2} , f_{bm3} ou f_{ar} . Pour résoudre ce problème, chaque terme peut être traité séparément comme le produit de deux variables aléatoires indépendantes (par exemple, pour f_{bm3} ceux-ci sont : $X_i = e_i$ et $Y_i = \text{Cos}(\omega_{1,2} \cdot t + \theta_i + \alpha_{wt}) = \text{Cos}\Phi_i$), de sorte que les statistiques exactes d'un produit ($Z_i = X_i \cdot Y_i$) pour n'importe quelle distribution de X_i et Y_i peuvent être employées. Ceci donne : [21]

$$\overline{Z_i} = \overline{X_i} \cdot \overline{Y_i} \quad (\text{III-20})$$

$$\sigma^2 Z_i = \overline{X_i}^2 \cdot \sigma Y_i^2 + \overline{Y_i}^2 \cdot \sigma X_i^2 + \sigma X_i^2 \cdot \sigma Y_i^2 \quad (\text{III-21})$$

Pour les fonctions $Y_i = \text{Cos}\Phi_i$, comme Φ_i est uniformément réparti sur l'intervalle $-\pi \leq \Phi_i \leq \pi$ avec une moyenne de $\Phi_i = 0$ et écart type $= \pi/\sqrt{3}$, les règles de statistiques d'une fonction Y_i de Φ_i donnent [22] :

$$\overline{Y_i} = 0 \ ; \ \sigma Y_i = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Substituant ces résultats dans les équations (III-20), (III-21), les statistiques de f_{bm2} et f_{bm3} peuvent être obtenues, donnant :

$$\overline{f_{bm2}} = \overline{f_{bm3}} = 0 \tag{III-22}$$

$$\sigma^2 f_{bm2} + \sigma^2 f_{bm3} = \frac{b^2}{2} \sum_{i=1}^8 \frac{1}{l_{1,2}^2} (\overline{e_i}^2 + \sigma^2 e_i) \tag{III-23}$$

Un argument semblable peut être appliqué aux statistiques des termes f_{ar} de l'équation (III-17) pour donner :

$$\overline{f_{ar}} = 0 \tag{III-24}$$

$$\sigma^2 f_{ar} = \frac{b^2}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{d_i^2} (\overline{f_{ai}}^2 + \sigma^2 f_{ai}) \tag{III-25}$$

En conclusion, la moyenne et l'écart type de l'erreur totale de fabrication sont :

$$\begin{aligned} \overline{f_{ma}} = & \frac{b}{2} \left[\frac{1}{l_1} \cdot (\overline{e_A} \cdot \text{Cos}(\alpha_{wt} - \overline{\gamma_A}) - \overline{e_B} \cdot \text{Cos}(\alpha_{wt} - \overline{\gamma_B})) - \frac{1}{l_2} (\overline{e_C} \cdot \text{Cos}(\alpha_{wt} - \overline{\gamma_C}) + \overline{e_D} \cdot \text{Cos}(\alpha_{wt} - \overline{\gamma_D})) \right] \\ & \frac{b}{l} [\overline{f_{\Sigma\beta}} \cdot \text{Cos}\alpha_{wt} + \overline{f_{\Sigma\delta}} \cdot \text{Sin}\alpha_{wt}] - \overline{f_{H\beta1}} + \overline{f_{H\beta2}} \end{aligned} \tag{III-26}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 f_{ma} &= \frac{b^2}{2} \sum_{i=1}^8 \frac{1}{l_{1,2}^2} (e_i^2 + \sigma^2 e_i) + \frac{b^2}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{d_i^2} (f_{ai}^2 + \sigma^2 f_{ai}) + \\ &\frac{b^2}{4} \left[\frac{1}{l_1^2} \cdot (\sigma^2 e_A \cdot \text{Cos}^2(\alpha_{wt} - \bar{\gamma}_A) + \sigma^2 e_B \cdot \text{Cos}^2(\alpha_{wt} - \bar{\gamma}_B)) + \frac{1}{l_2^2} (\sigma^2 e_C \cdot \text{Cos}^2(\alpha_{wt} - \bar{\gamma}_C) + \sigma^2 e_D \cdot \text{Cos}^2(\alpha_{wt} - \bar{\gamma}_D)) \right] \\ &+ \frac{b^2}{l^2} [\sigma^2 f_{\Sigma\beta} \cdot \text{Cos}^2 \alpha_{wt} + \sigma^2 f_{\Sigma\delta} \cdot \text{Sin}^2 \alpha_{wt}] + \sigma^2 f_{H\beta 1} + \sigma^2 f_{H\beta 2} \end{aligned} \quad (\text{III-27})$$

Ceci donne les statistiques de la déviation d'alignement résultante d'engrènement en termes de ceux des différentes erreurs de fabrication e_i , $f_{H\beta i}$, etc., sans référence aux angles de "phase" θ_i ou aux ceux instantanés de rotation $\omega_{1,t}$, $\omega_{2,t}$ dont les effets moyens ont été entièrement prises en considération.

III.3.1.1 Moyenne et Ecart Type de $K_{H\beta}$ et $K_{F\beta}$

Considérons d'abord le cas où $b_{cal} / b < 1$. $K_{H\beta}$ et $K_{F\beta}$ sont donnés donc par les équations (I-15) et (I-22).

$$K_{H\beta} = \sqrt{\frac{2 |f_{\beta y}|}{W_m}} \cdot C_\gamma$$

$$K_{F\beta} = (K_{H\beta})^N$$

Il est nécessaire de noter que, par l'introduction de $|f_{\beta y}|$, la déviation d'alignement produit exactement le même effet sur les engrenages peu importe le signe de $f_{\beta y}$. Comme montré ci-après, cependant, les statistiques de la quantité $|f_{\beta y}|$ ne sont pas nécessairement les mêmes que celles de $f_{\beta y}$. En utilisant l'expansion de la série de Taylor, la moyenne et l'écart type de $K_{H\beta}$ sont dérivés comme :

$$\overline{K_{H\beta}} = \sqrt{\frac{2 \overline{|f_{\beta y}|}}{W_m}} \cdot C_\gamma \quad (\text{III-28})$$

et,

$$\overline{K_{F\beta}} = (\overline{K_{H\beta}})^N \quad (\text{III-29})$$

$$\sigma K_{H\beta} = \frac{1}{2} \cdot \overline{K_{H\beta}} \cdot \frac{\sigma |f_{\beta y}|}{|f_{\beta y}|} \quad (\text{III-30})$$

$$\sigma K_{F\beta} = \frac{N}{2} \overline{K_{F\beta}} \cdot \frac{\sigma |f_{\beta y}|}{|f_{\beta y}|} \quad (\text{III-31})$$

Pour les engrenages fins, où $f_e \ll (f_{ma})_{\max}$ et Y_B est petit, on peut raisonnablement supposer que :

$$|f_{\beta y}| = |f_{ma}| \quad (\text{III-32})$$

et

$$\sigma |f_{\beta y}| = \sigma |f_{ma}| \quad (\text{III-33})$$

d'où ,

$$\overline{K_{H\beta}} = \sqrt{\frac{2 |f_{ma}|}{W_m}} \cdot C_\gamma \quad (\text{III-34})$$

$$\sigma K_{H\beta} = \frac{1}{2} \cdot \overline{K_{H\beta}} \cdot \frac{\sigma |f_{ma}|}{|f_{ma}|} \quad (\text{III-35})$$

$$\sigma K_{F\beta} = \frac{N}{2} \cdot \overline{K_{F\beta}} \cdot \frac{\sigma |f_{ma}|}{|f_{ma}|} \quad (\text{III-36})$$

Pour le cas de $b_{\text{cal}} / b > 1$, $K_{H\beta}$ est donné de même par l'équation (I-17).

$$K_{H\beta} = 1 + \frac{f_{\beta y}}{2 \cdot W_m} \cdot C_\gamma \quad (\text{III-37})$$

Les statistiques de $K_{H\beta}$ dépendent ainsi entièrement (pour les engrenages fins avec $f_e \ll f_{ma}$) des les statistiques de $|f_{ma}|$.

De sorte qu'en employant encore l'approximation de la série de Taylor, les statistiques de $K_{H\beta}$ sont dérivées comme suit:

$$\overline{K_{H\beta}} = 1 + \frac{|f_{ma}|}{2 \cdot \overline{W}_m} \cdot C_\gamma \quad (\text{III-38})$$

$$\overline{K_{F\beta}} = (\overline{K_{H\beta}})^N \quad (\text{III-39})$$

$$\sigma K_{H\beta} = (\overline{K_{H\beta}} - 1) \cdot \frac{\sigma |f_{ma}|}{\overline{|f_{ma}|}} \quad (\text{III-40})$$

$$\sigma K_{F\beta} = \left(N - \frac{1}{\overline{K_{H\beta}}} \right) \cdot \overline{K_{F\beta}} \cdot \frac{\sigma |f_{ma}|}{\overline{|f_{ma}|}} \quad (\text{III-41})$$

L'erreur algébrique f_{ma} est défini comme la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et donc il est très probable qu'elle soit approximativement une distribution normale [23].

La distribution de la valeur absolue $|f_{ma}|$ cependant, est lié à f_{ma} de différentes manières :

(1) Si les différents composants de fabrication de f_{ma} ne sont pas mesurés et ne sont pas pris en tant que variables aléatoires distribuées symétriquement dans leurs bandes de tolérances (ceci est le cas général), l'erreur f_{ma} devrait alors être normalement distribué avec zéro comme moyenne. La quantité $|f_{ma}|$ alors aura une distribution normale pliée avec des statistiques données par : [24]

$$\overline{|f_{ma}|} = \sigma f_{ma} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0,798 \cdot \sigma f_{ma} \quad (\text{III-42})$$

$$\sigma |f_{ma}| = \sigma f_{ma} \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{\pi}} = 0,603 \cdot \sigma f_{ma} \quad (\text{III-43})$$

De sorte que l'équation déterminant $\sigma K_{H\beta}$ devienne :

Pour $b_{cal}/b < 1$,

$$\sigma K_{H\beta} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1} \cdot \overline{K_{H\beta}} = 0,378 \cdot \overline{K_{H\beta}} \quad (\text{III-44})$$

$$\sigma K_{F\beta} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1} \cdot N \cdot \overline{K_{F\beta}} = 0,378 \cdot N \cdot \overline{K_{F\beta}} \quad (\text{III-45})$$

et pour $b_{cal}/b > 1$,

$$\sigma K_{H\beta} = \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1} \cdot (\overline{K_{H\beta}} - 1) = 0,756 \cdot (\overline{K_{H\beta}} - 1) \quad (\text{III-46})$$

$$\sigma K_{F\beta} = \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1} \cdot N \left(1 - \frac{1}{\overline{K_{H\beta}}} \right) \cdot \overline{K_{F\beta}} = 0,756 \cdot N \cdot (1 - \overline{K_{F\beta}}) \quad (\text{III-47})$$

L'écart type de $\sigma K_{H\beta}$ et $\sigma K_{F\beta}$ sont ainsi des proportions fixes de la moyenne de $K_{H\beta}$ et $K_{F\beta}$ qui dépendent entièrement de la forme des distributions de fréquence de f_{ma} .

- (2) quand certains (ou tous) les composants de f_{ma} sont mesurés pour une production spécifique, ou quand par exemple, le réglage de la machine ou d'autres erreurs systématiques produisent une distribution qui n'est pas symétrique dans la bande de tolérance [25], alors la distribution de f_{ma} sera également (en général) non symétrique avec une moyenne différente de zéro. Ceci se produit également dans le cas des engrenages pour qui l'approximation $f_e \ll f_{ma}$ n'est plus valide. La distribution de f_{By} est alors habituellement non symétrique. Dans cette situation, deux cas se présentent :

a : La diffusion de la totalité de la déviation aléatoire f_{ma} se situe dans la région négative ou positive. Ainsi, les statistiques de la valeur absolue $|f_{ma}|$ sont exactement les mêmes que celles données par les équations (III-26) et (III-27).

b : La diffusion de la déviation aléatoire f_{ma} se trouve des deux côtés de l'origine zéro. La déviation aléatoire $|f_{ma}|$ d'intérêt dans ce cas-ci aura une distribution normale pliée dont les statistiques sont données par:[23].

$$|\overline{f_{ma}}| = \sigma f_{ma} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\mathcal{G}^2}{2}\right) \cdot \overline{f_{ma}} [1 - 2\phi(\mathcal{G})] \quad (\text{II-48})$$

$$\sigma |f_{ma}| = \sqrt{(\overline{f_{ma}})^2 + (\sigma f_{ma})^2 - (\overline{f_{ma}})^2} \quad (\text{III-49})$$

où,

$\mathcal{G} = \frac{\overline{f_{ma}}}{\sigma f_{ma}}$, et $\phi(\mathcal{G})$ est la fonction de distribution normale cumulative standard. Pour $\overline{f_{ma}} = 0$, ces équations se réduisent aux équations (III-42) et (III-43).

III.3.1.2 Moyenne et Ecart Type de K_v

Référons aux équations (III.14) et (III.16), la moyenne et l'écart type du facteur dynamique (K_v) peuvent être obtenus comme suit :

$$\overline{K_v} = 1 + N \left[\frac{C}{F_t \cdot K_A / b} (C_{v1} \cdot (\overline{f_{pb}} - y_{pb}) + C_{v2} \cdot (\overline{f_f} - y_f) + C_{v3} \cdot 1 - \frac{C \cdot C_a}{F_t \cdot K_A / b}) \right] \quad (\text{III-50})$$

$$\sigma K_v = \frac{N \cdot C}{F_t \cdot K_A / b} \cdot 0,925 \cdot \sqrt{C_{v1}^2 \cdot \sigma^2 f_{pb} + C_{v2}^2 \cdot \sigma^2 f_f} \quad (\text{III-51})$$

III.3.1.3 Moyenne et Ecart Type de $K_{H\alpha}$ et $K_{F\alpha}$

Référons encore aux équations (III.14) et (III.16), la moyenne et l'écart type des facteurs de distribution de la charge transversale ($K_{H\alpha}$ et $K_{F\alpha}$) peuvent être obtenus comme suit :

$$\overline{K_{H\alpha}} = \overline{K_{H\alpha}} = 0,9 + 0,4 \cdot \sqrt{2(\varepsilon_\gamma - 1)/\varepsilon_\gamma} \cdot \frac{C_\gamma}{F_{tH}} \cdot (\overline{f_{pb}} - y_{pb}) \quad (\text{III-52})$$

$$\sigma K_{H\alpha} = \sigma K_{H\alpha} = (\overline{K_{H\alpha}} - 0,9) \cdot \frac{\sigma f_{pb}}{f_{pb}} \quad (\text{III-53})$$

III.3.1.4 Moyenne et Ecart Type de σ_H et σ_F

En assumant que K_V , $K_{H\beta}$ et $K_{H\alpha}$ sont indépendants, la moyenne et l'écart type de σ_H et σ_F peuvent alors être dérivés des équations (III-14) et (III-16) comme suit :

$$\overline{\sigma}_H = Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\varepsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{K_A \cdot \overline{K}_V \cdot \overline{K}_{H\alpha} \cdot \overline{K}_{H\beta} \cdot \frac{F_t}{b \cdot d_1} \cdot \frac{u+1}{u}} \quad (\text{III-54})$$

$$\overline{\sigma}_F = (F_t / b \cdot m_n) \cdot Y_F \cdot Y_S \cdot Y_\beta \cdot K_A \cdot \overline{K}_V \cdot \overline{K}_{F\beta} \cdot \overline{K}_{F\alpha} \quad (\text{III-55})$$

et, en négligeant la variation de tous, sauf de K_V , $K_{H\beta}$, $K_{H\alpha}$, ...etc., et faisant la différentiation, on obtient pour les écarts types :

$$\sigma(\sigma_H) = \frac{1}{2} \cdot \overline{\sigma}_H \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma(K_V)}{\overline{K}_V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(K_{H\beta})}{\overline{K}_{H\beta}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(K_{H\alpha})}{\overline{K}_{H\alpha}}\right)^2} \quad (\text{III-56})$$

$$\sigma(\sigma_F) = \overline{\sigma}_F \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma(K_V)}{\overline{K}_V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(K_{F\beta})}{\overline{K}_{F\beta}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(K_{F\alpha})}{\overline{K}_{F\alpha}}\right)^2} \quad (\text{III-57})$$

Ces deux quantités peuvent être alors calculés en utilisant les formules de la norme ISO pour K_V , $K_{H\beta}$, $K_{H\alpha}$, ...etc., [3].

III.3.1.5 Moyenne et Ecart Type de σ_{HP} , σ_{FP}

Bien que la variabilité dans la résistance du matériau des engrenages résulte des changements de beaucoup de paramètres [3], seulement la dureté du matériau et les facteurs de rugosité (Z_R , $Z_{R,relT}$) sont considérés dans ce travail comme variables aléatoires de fabrication puisque, dans le travail expérimental, il n'était pas possible de mesurer aucun autre paramètre se rapportant au matériau. Cependant, selon le procédé de calcul du standard ISO [3], les paramètres Z_V et Z_L dépendent également de la dureté, mais seulement pour les aciers durcis dans la masse.

Les moyennes et les écarts types de σ_{HP} , σ_{FP} peuvent alors obtenus à partir de [3] :

$$\bar{\sigma}_{HP} = \frac{\bar{\sigma}_{H\lim}}{S_{H\min}} \cdot Z_N \cdot Z_L \cdot Z_V \cdot \bar{Z}_R \cdot Z_W \cdot Z_X \quad (\text{III-58})$$

$$\bar{\sigma}_{FP} = \frac{\bar{\sigma}_{F\lim}}{S_{F\min}} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{NT} \cdot \bar{Y}_{RrelT} \cdot Y_{\delta relT} \cdot Y_X \quad (\text{III-59})$$

Finalement les équations pour les écarts types peuvent être écrites comme suit :

$$\sigma(\sigma_{HP}) = \bar{\sigma}_{HP} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma(\sigma_{H\lim})}{\bar{\sigma}_{H\lim}}\right)^2 + (0,08)^2 \cdot \left(\frac{\sigma(R_Z)}{\bar{R}_Z}\right)^2} \quad (\text{III-60})$$

$$\sigma(\sigma_{FP}) = \bar{\sigma}_{FP} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma(\sigma_{F\lim})}{\bar{\sigma}_{F\lim}}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sigma(R_Z)}{\bar{R}_Z + 1}\right)^2 \cdot \left(\frac{\bar{Y}_{RelT} - 5,306}{\bar{Y}_{RelT}}\right)^2} \quad (\text{III-61})$$

III.3.2. Technique de Monte Carlo

Les statistiques (moyenne et écart type) des paramètres K_{HB} , K_{FB} peuvent également être estimées par la simulation de Monte Carlo [26]. Le procédé de simulation implique la production d'une succession de nombres aléatoires de n'importe quelle distribution dans l'intervalle (0,0 – 1,0). Ces ensembles de valeurs aléatoires peuvent être alors employés pour produire des valeurs synthétiques pour chaque erreur de fabrication dans les limites de son intervalle de tolérance. L'effet net de ces derniers peut alors être calculé par l'addition des valeurs choisies avec l'exception que les angles aléatoirement choisis sont associés aux battements. La répétition de ces prélèvements et addition d'un grand nombre d'exemples simulera ce qui se produit dans l'usine. Cette technique est connue sous le nom de technique de Monte Carlo [26].

Une telle pensée peut être appliquée à tous les aspects de l'analyse des contraintes dans les engrenages. Cependant, ce qui est exigé dans ce chapitre est le développement d'une méthode d'estimation d'une valeur de la déviation totale d'alignement efficace d'engrènement due aux tolérances de fabrication, f_{ma} , pour son insertion dans la procédure de calcul du standard ISO [3] afin de calculer les statistiques des facteurs étudiés par la méthode analytique.

La technique numérique développée dans ce travail produit 8000 valeurs aléatoires pour chaque composant de f_{ma} et ceci pour n'importe quelle distribution normalisée. Par exemple, pour obtenir des valeurs aléatoires dans les bandes de tolérance de n'importe quelle erreur de fabrication ayant une distribution uniforme dans l'intervalle 0,0 à 1,0 avec une moyenne égale à 0,5, l'équation suivante peut être employée :

$$e_i = \frac{e_{\max} + e_{\min}}{2} + (R_i - 0,5)(e_{\max} - e_{\min}) = \bar{e} + (R_i - 0,5)T_e \quad (\text{III-62})$$

où,

e_i est la valeur aléatoire exigée de l'erreur (e), e_{\max} and e_{\min} sont les limites maximale et minimale (tolérance) de l'erreur spécifique de fabrication (e), \bar{e} est la

valeur moyenne de l'erreur, et R_i est le nombre aléatoire normalisé d'une distribution rectangulaire uniforme décrite par : $\bar{R} = 0,5$ et $\sigma(R) = 1/(2\sqrt{3})$

Pour une distribution normale de e , l'équation (III-62) devienne :

$$e_i = \sigma(e).Z_i + \bar{e} \quad (\text{III-63})$$

où,

\bar{e} et $\sigma(e)$ sont la moyenne et l'écart type donnés de l'erreur normal (e), et Z_i est une valeur aléatoire d'une distribution normale standard ayant les statistiques : $\bar{Z} = 0$ et $\sigma(Z) = 1$

III.1.3. RÉSULTATS DE L'ANALYSE

Monte Carlo et méthode analytique ont été employés pour estimer les statistiques des divers paramètres (f_{by} , f_{ma} , $K_{H\beta}$, $K_{F\beta}$, ...etc.). Les erreurs de fabrication qui sont considérées comme des variables aléatoires sont principalement celles qui affectent la déviation d'alignement d'engrènement dans une série de composants d'un réducteur cylindrique à denture hélicoïdal à un seul étage. En tout, un carter, 21sets de pignons et de roues, et 16 roulements à billes (types 6202 et 6301) ont été entièrement inspectés au laboratoire de métrologie de l'université de Newcatle (UK). Cependant, dans ce travail, ces erreurs sont supposées, pour raisons de simplicité, avoir des distributions rectangulaires dont l'intervalle de la variation correspondant à chaque tolérance est comme mentionné dans le tableau (III.1).

Les résultats numériques des deux méthodes sont montrés dans le tableau (III.4). La figure (III.4) à la figure (III.13) montre les histogrammes des 8000 valeurs calculées pour chaque paramètre étudié ci-dessus. Comme peut être vu du tableau (III.4), les résultats de la méthode analytique exacte (voir Annexe B) sont en bon accord avec ceux calculés par la méthode de Monte Carlo dont l'interaction entre K_V , $K_{H\beta}$, et $K_{H\alpha}$ est automatiquement prise en considération.

L'erreur maximale de la méthode analytique "exacte" dans l'estimation de $\sigma(\sigma_H)$ et $\sigma(\sigma_F)$ est de l'ordre 10%. Par contre, $\sigma K_{H\alpha}$ ($\sigma K_{F\alpha}$) a été seulement estimé avec une erreur de l'ordre 20% (parce que la variation des différentes erreurs n'était pas "petite"). Clairement, cette erreur a peu d'effet sur les statistiques des paramètres de σ_H , σ_F étant donné que $\sigma(\sigma_H)$ et $\sigma(\sigma_F)$ sont principalement définis par $\sigma K_{H\beta}$ et $\sigma K_{F\beta}$ ($\sigma K_{H\alpha}$ et $\sigma K_{F\alpha}$ sont toujours petits).

D'autre part, la méthode analytique simplifiée décrite ci-dessus montre une erreur maximale de l'ordre 30%. Approximativement les mêmes valeurs sont cependant, trouvées par la méthode de Monte Carlo si l'interaction entre K_V , $K_{H\beta}$ et $K_{H\alpha}$ est enlevée (colonnes A, B, tableau (III.4)). L'erreur additionnelle provoquée par la méthode analytique simplifiée est ainsi clairement une conséquence de négliger les interactions, et non pas une imperfection de la méthode analytique. Cette méthode simplifiée s'est cependant avérée tout à fait précise (erreur moins de 10%) pour des engrenages de précision plus élevée (DIN 7 et mieux), quand la supposition de "petite" variabilité peut plus facilement être justifiée.

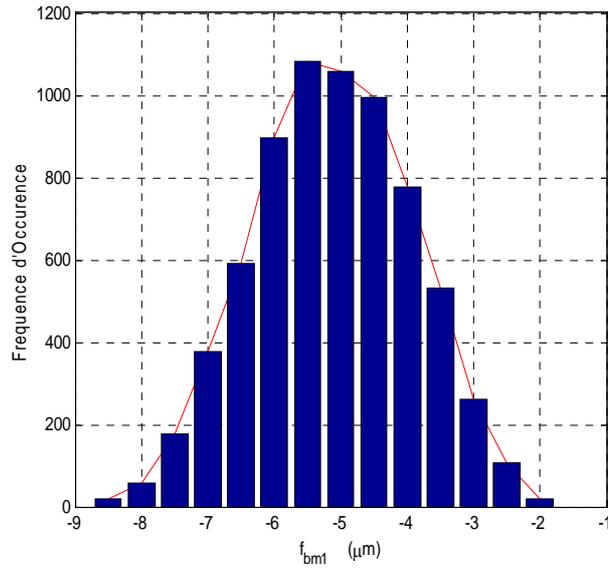


Fig.III.4: Distribution de f_{bm1} de l'Analyse de Monte Carlo (Moyenne = - 5,33 μm , Std = 1,27 μm) de 8000 valeurs.

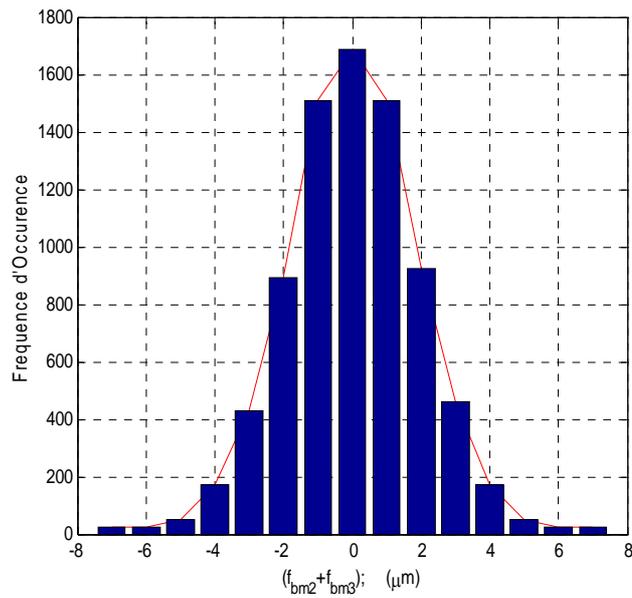


Fig.III.5: Distribution de $(f_{bm1} + f_{bm2})$ de l'Analyse de Monte Carlo (Moyenne = 0,00 μm , Std= 0,911 μm) de 8000 valeurs.

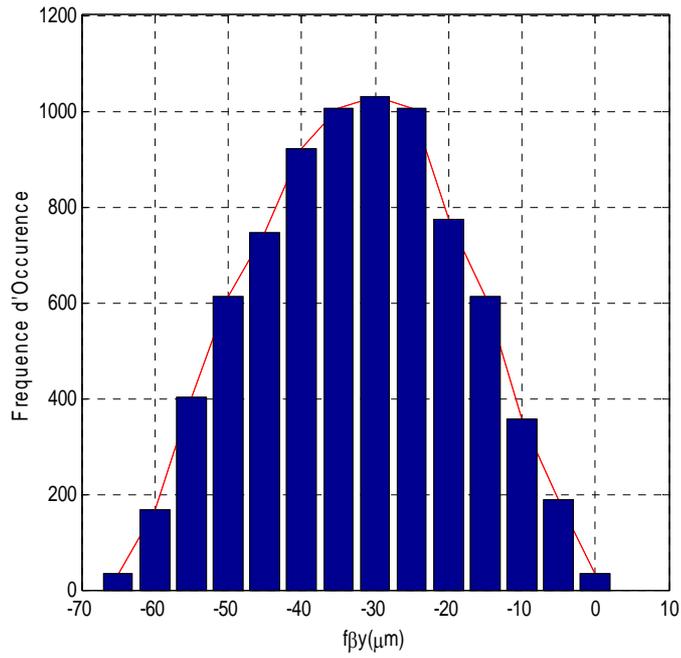


Fig.III.6: Distribution de $f_{\beta y}$ de l'Analyse de Monte Carlo (Moyenne = - 32,80 μm , Std = 13,68 μm) de 8000 valeurs.

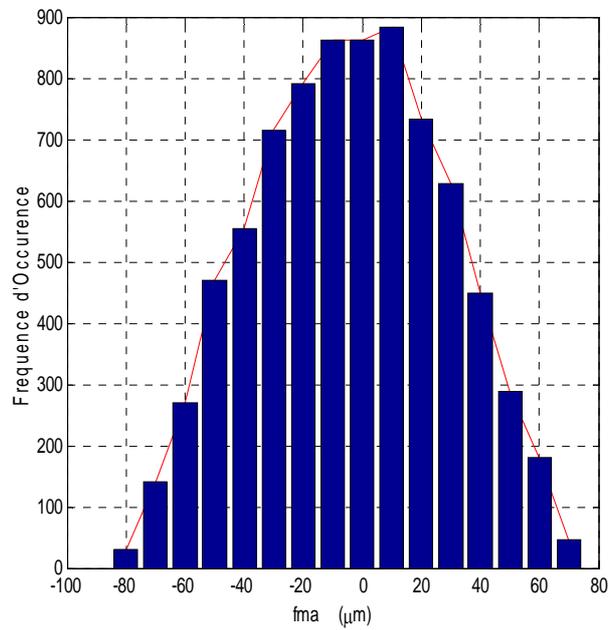


Fig.III.7: Distribution de f_{ma} de l'Analyse de Monte Carlo (Moyenne = - 4,51 μm , Std = 32,34 μm) de 8000 valeurs.

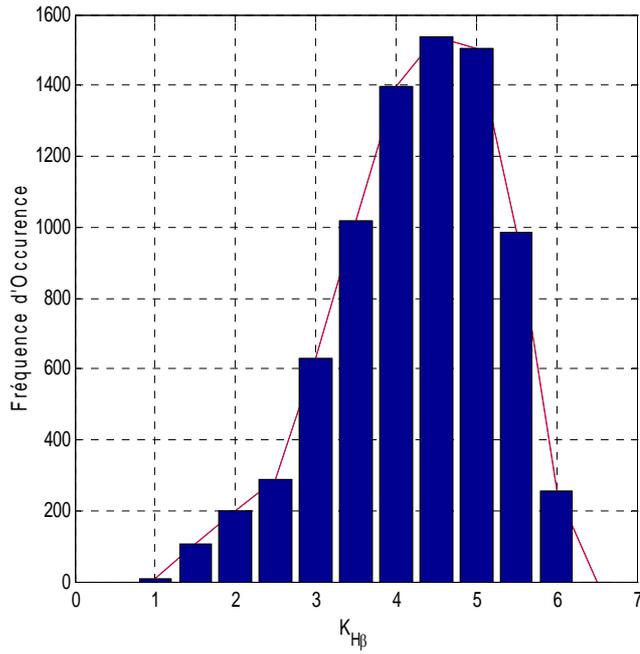


Fig.III.8: Distribution de $K_{H\beta}$ de l'Analyse de Monte Carlo (Moyenne =4,247, Std = 0,985) de 8000 valeurs.

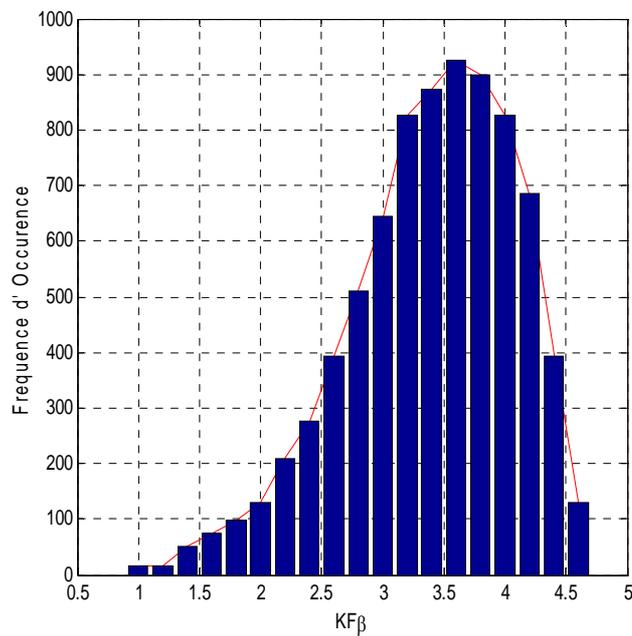


Fig.III.9: Distribution de $K_{F\beta}$ de l'Analyse de Monte Carlo (Moyenne =3,394, Std = 0,680) de 8000 valeurs.

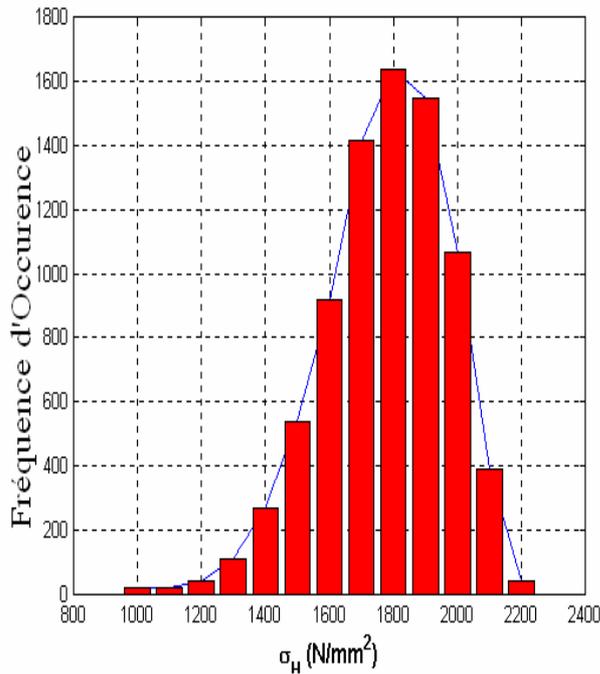


Fig.III.10 : Distribution de σ_H
 (Moyenne=1775,44 N/mm²,
 STD=189,48 N/mm², T1=16,33 N.m).

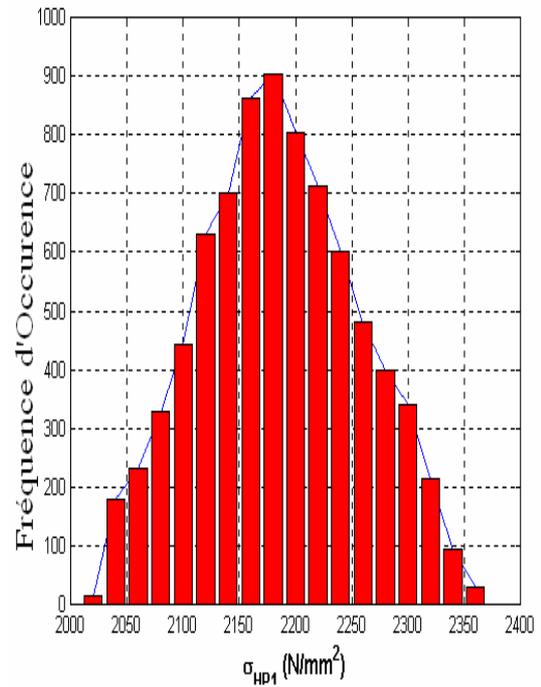


Fig.III.11 : Distribution de σ_{HP1}
 (moyenne = 2203,73 N/mm²,
 STD = 74,31N/mm2).

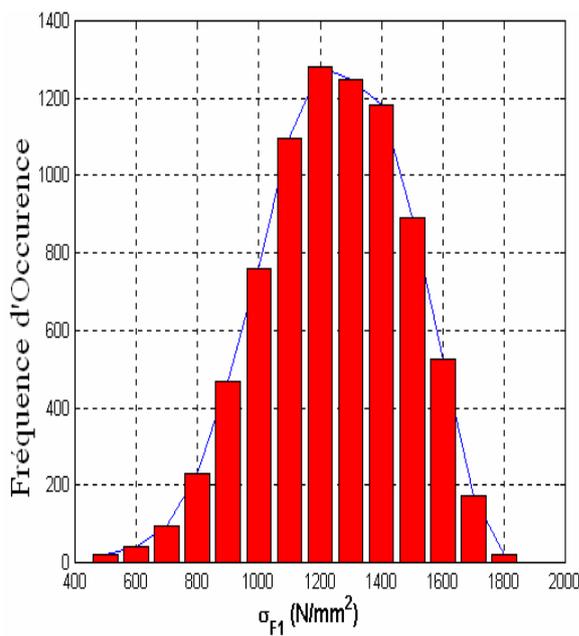


Fig.III.12 : Distribution de σ_{F1}
 (Moyenne=1245,30 N/mm²,
 STD=226,61 N/mm², T1=16,23N.m).

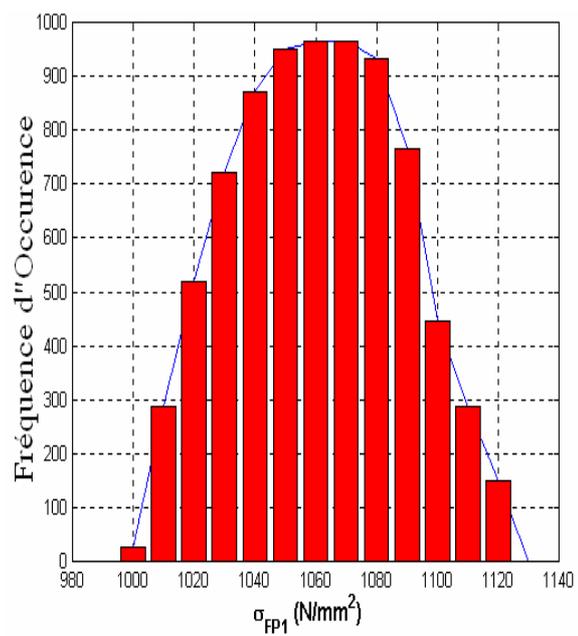


Fig.III.13 : Distribution de σ_{FP1}
 (Moyenne=1061,34 N/mm²,
 STD=27,27N/mm2).

Tableau.III.4 : Résultats de l'Analyse Statistique de l'Engrenage du Tableau.II.1 ($T_1=16,23$ N.m et $N_L = 3 \times 10^4$)

Nom du Paramètre (Moyenne, STD))	A	B	C	D
K_V	1,085	1,086	1,085	1,086
σK_V	0,023	0,024	0,023	0,024
$K_{H\beta}$	4,263	4,383	4,247	4,383
$\sigma K_{H\beta}$	0,990	0,914	0,985	0,916
$K_{F\beta}$	3,405	3,499	3,394	3,499
$\sigma K_{F\beta}$	0,683	0,619	0,680	0,620
$K_{H\alpha}$	1,362	1,346	1,388	1,346
$\sigma K_{H\alpha}$	0,173	0,168	0,238	0,188
σ_H	1771,17	1801,85	1775,44	1801,85
$\sigma(\sigma_H)$	257,81	219,72	189,480	172,37
σ_{F1}	1246,98	1263,50	1245,30	1263,50
$\sigma(\sigma_{F1})$	313,72	273,62	226,61	215,68
σ_{F2}	1281,91	1298,89	1280,18	1298,89
$\sigma(\sigma_{F2})$	322,51	281,29	232,95	221,72
σ_{HP1}	2203,73	2190,09	2203,73	2190,09
$\sigma(\sigma_{HP1})$	74,31	67,27	74,31	67,29
σ_{HP2}	2211,67	2201,93	2211,67	2201,93
$\sigma(\sigma_{HP2})$	64,88	60,86	64,88	60,86
σ_{FP1}	1060,34	1059,15	1061,34	1059,15
$\sigma(\sigma_{FP1})$	27,27	28,22	27,27	28,22
σ_{FP2}	1153,18	1151,64	1153,18	1151,64
$\sigma(\sigma_{FP2})$	28,47	29,59	28,47	29,59

A = Approximation de Monte Carlo ; **B** = Approximation par la série de Taylor (Sans interaction)
C = Approximation de Monte Carlo ; **D** = Approximation par la série de Taylor avec interaction (voir Annexe B)).
 (Avec interaction)

Conclusion

L'objectif principal de cette partie de ce travail était de développer des méthodes pratiques simples pour estimer l'effet des tolérances de fabrication, la variation dans les durées limites de fatigue du matériau et l'état de surfaces des dentures sur la performance des engrenages en général, et plus particulièrement les engrenages fins.

Cependant, les conclusions générales suivantes ont été obtenues :

- Pour des engrenages semblables ayant le même matériau et sollicités à un même niveau de contraintes, les engrenages fins auront des facteurs plus élevés de la répartition des charges longitudinales (où la déformation élastique est petite comparé aux erreurs de fabrication). Par conséquent, pour une performance équivalente, les engrenages fins doivent être de plus haute qualité.

- L'emploi de l'analyse par la méthode C du standard ISO avec des erreurs de déviation d'alignement estimées à partir des formules simplifiées ou sans prendre compte des composantes de déviation d'alignement de fabrication et de déformation, peut excessivement surestimer la performance des engrenages fins. Les tolérances d'alignement des logements du carter (alésages des roulements) et la déviation d'alignement d'engrènement due aux déflexions des roulements et des arbres sont avérées significatives dans les boîtes de vitesse étudiées. Ainsi, il n'est pas, en général, valide de supposer (comme dans la norme ISO) que la valeur efficace de f_{ma} de la déviation d'alignement de manufacture est égale à la tolérance $1,0 T_{\beta}$. Des valeurs raisonnables devraient être estimées à partir de l'équation (III.42) à l'équation (III.47).

- L'utilisation des procédures d'optimisation est très bénéfique et peut être employé facilement pendant l'étape de conception pour corriger à un certain niveau les facteurs de la répartition des charges et par conséquent la performance des engrenages. Pour le cas spécifique de ce travail, une augmentation de capacité de charge de l'ordre de 100% est obtenue. Les résultats obtenus de cette procédure montre qu'elle peut remplacer les méthodes classiques (coûteuses) de correction des dentures (bombée longitudinale, correction linéaire, ...etc.) [27].

REFERENCES

- [1] SKF., “General Catalogue”, 2003.
- [2] ISO1328, part:1., “Cylindrical Gears –ISO System of Accuracy”, 1995.
- [3] ISO/6336, Parts 1, 2 and 3., "Calculation of the Load Capacity of Spur and Helical Gears", 1996.
- [4] DIN 3962., "Accuracy of Cylindrical Gears: Tolerances for Individual Errors", Beuth, 1978.
- [5] R.C.Jvinall., “Fundamentals of Machine Component Design”, Jhon Wiley and Sons, 1983.
- [6] F.Djeddou., R.Zegadi., “Analysis and Deterministic Optimization of the Longitudinal Load Distribution Factors of Fine Pitch Gears of the I.S.O Procedure”, IREME, Vol.I N°5, September 2007.
- [7] A.I.Tucker., “The Gear Design Process”, ASME Paper 80-C2/DET-13, Aug.1980.
- [8] M.Savage., S.B.Lattine., and J.A.Kimmel., “Optimal Design of Compact Spur Reduction”, Sixth Int Power Transmissions and Gearing Conference, ASME, pp 13-16, Scottsdale Arizona, 1992.
- [9] J.E.Shigley, “Mechanical Engineering Design”, McGraw-Hill, 1986.
- [10] L.Chevaliet, “Guide du Dessinateur Industriel”, Hachette, 2004.
- [11] W. Y. Yang., W. Cao., T.Chung., and J. Morris., “ Applied Numerical Methods Using Matlab”, Wiley-Interscience, 2005.
- [12] D.Hanselma., and B.Littlefield., “Mastering Matlab 6, -A comprehensive Tutorial and reference”, Prentice Hall, 2001.
- [13] E.K.P.Chong., and S.H.Žak., “An Introduction to Optimization”, Wiley Interscience, 2001.
- [14] G. Chabert., “Le Choix du Bombement d’Engrenages Droits”, Bulletin N° 48, SEIE, December 1965.
- [15] B.Z.Sandler., “Probalistic Approach to Mechanisms”, Elsevier, 1984.
- [16] Y.M.Zhang., "Practical Reliability Based Design of Gear Pair", Mechanism and Machine Theory 38 pp 1363-1370, 2003.
- [17] X.Du., Sudjianto., and W.Chen., "An Integrated Framework for Probabilistic Optimisation using Inverse Reliability Strategy", Proceeding of DETC' 03 ASME, Design Eng. Tech.Conf. and Computers and information in Eng.Conf., Chigago, Illinois USA, September 2-6, 2003.
- [18] E.B.Haugen ., " Probabilistic Mechanical Design ", Wiley-Interscience, 1980.

- [19] F.Djeddou., and R.Zegadi., “Practical Statistical Methods for Predicting Life and Reliability of Fine Pitch Gear Pairs”, *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2(3), pp 494-500, Medwell online, 2007.
- [20] K.C.Kapur., and L.R. Lambertson., “Reliability in Engineering Design”, Wiley, 1977.
- [21] E.B. Haugen ., “Probabilistic Approaches to Mechanical Design”, Wiley, 1968.
- [22] G.W.Michalec., “Precision Gearing”, Wiley, 1966.
- [23] J.K.Patel., and C.B.Read., "Handbook of the Normal Distribution “, Marcel Dekker, New York, 1982.
- [24] S.Kotz., “Encyclopedia of Statistical Sciences”, (Vol.3). Wiley 1981.
- [25] E.M.Mansor., “ The application of Probability to Tolerances Used in engineering Design”, *Proc. Int.Engrs.*1963-64, 178 Part I, pp 22-39, Discussion pp 39-51. 1964.
- [26] H.Benaroya., and S.M.Han., “Probability Models in Engineering and Science”, Taylor and Francis Group, 2005.
- [27] M.A.Alfares., A.H.Falah., and A.H.Alkholi.,”Clearance Distribution of Misaligned Gear Coupling Teeth Considering Crowning and Geometry Variations”, *Mechanism and Machine Theory*, 41, pp 1258-1272, Elsevier, 2006.

CHAPITRE IV :

***METHODES DE PREDICTION DE LA FIABILITE DES
ENGRENAGES***

IV.1. Introduction

La fiabilité et sa signification dans la technologie est un champ rapidement croissant. La sûreté et la fiabilité d'un composant mécanique ou autre est invariablement l'objectif technique principal d'une conception de technologie. Pendant que ceux-ci doivent invariablement être faits en présence de l'incertitude, la fiabilité ou la sûreté appropriée peut seulement être énoncée dans la probabilité. En effet, des niveaux consistants de la sûreté et de la fiabilité peuvent être réalisés seulement si la conception est basée sur les méthodes probabilistes de fiabilité.

Les transmissions par engrenages sont largement adaptées à beaucoup de genres d'équipements mécaniques. La construction complexe d'une paire de roue dentées présente beaucoup de facteurs qui influencent la fiabilité; Les erreurs de fabrication, conditions variables de travail et la non homogénéité des propriétés des matériaux contribuent aux difficultés quand en à la résolution de ce problème. À ce jour, il n'y a aucune conclusion définie sur la conception de fiabilité, il est important donc, de rechercher la fiabilité des transmissions par engrenages, Bien que ce problème puisse être résolu par des expériences de fiabilité, il est difficile de porter l'expérience outre que les limites des conditions de l'expérience, de la main d'œuvre, des moyens et du temps d'expérience. Par conséquent des méthodes numériques devraient être présentées.

Plusieurs méthodes ont été proposées dans le passé pour la conception optimale des engrenages à denture droite et hélicoïdale [1,2]. Ces méthodes ont utilisées des techniques déterministiques d'optimisation de conception pour obtenir ce qui devrait être considéré comme paramètres de conception satisfaisants. Il y a beaucoup de problèmes qui surgissent avec les résultats de l'approche déterministique; L'incapacité de traiter les incertitudes dans les propriétés des matériaux, les conditions de service des engrenages et leurs défauts de fabrication,.....etc. [3,4,5]; ceci a provoqué la recherche dans les domaines des méthodologies de conception probabilistes applicables à la conception structurale et composants de machine. Cette méthode cherche à

expliquer les incertitudes dans les propriétés, les conditions de travail et les erreurs de fabrication. Dans ce chapitre, l'applicabilité de la méthodologie de conception probabiliste dans le réducteur de vitesse en considération est discutée.

L'incertitude de technologie des engrenages n'est pas limitée à la variabilité observée dans les variables de base. D'abord, les formules données dans les normes [6,7] sont basées sur beaucoup de prétentions et simplifications (voir page13). En second lieu, les modèles mathématiques ou de simulation ont souvent modélisé les incertitudes et la qualité de précision d'une manière approximative au moins pour certains paramètres [8,9] (voir également le tableau III.3). Par exemple, les formules, les équations, les algorithmes, et les modèles de laboratoire, qui sont souvent employés dans l'analyse et la conception des engrenages sont les représentations idéalisées de la réalité. En conséquence, les prévisions et les calculs effectués sur la base de ces modèles peuvent être imprécis et également contenir ainsi l'incertitude.

S'il y a incertitude dans la conception, la prochaine étape est de demander comment devraient des conceptions être formulées ou des décisions affectant une conception soient résolues ? Vraisemblablement, nous pouvons assumer les plus mauvaises conditions et développer ainsi une conception conservatrice sur cette base. De la performance et du point de vue de sûreté, cette approche peut convenir. Cependant, la conception résultante serait trop coûteuse et trop conservatrice. D'autre part, une conception peu coûteuse peut ne pas assurer le niveau désiré de performance et de sûreté. Par conséquent, les décisions devraient être prises tout en considérant le coût et la sûreté de la conception. La solution la plus souhaitable est celle optimale dans le sens du coût minimum et des avantages maximum. Si l'information disponible et les modèles à être évalués contiennent des incertitudes, l'analyse devrait inclure les effets de telles incertitudes ainsi, la conception probabiliste est concernée par la probabilité de défaillance. Cette méthodologie est la plus utile quand les incertitudes dans les erreurs de fabrication, les propriétés des matériaux et les conditions de service sont considérées. Pour appliquer les méthodologies probabilistes dans la

conception, les paramètres de conception sont modélisés pendant que des variables aléatoires, avec les types de distribution choisis ou mesurés (moyens et écarts types), prennent des valeurs aléatoires dans les limites de leurs intervalles de tolérances (voir section III.3).

IV.1.1 Notion d'État Limite

L'analyse probabiliste est principalement concernée par la probabilité de défaillance de l'engrenage ou plutôt de la fiabilité de l'engrenage ou d'un système mécanique à engrenages. Par fiabilité, on le signifie la probabilité que les engrenages conçus exécuteront leur fonction prévue sans échouer. Ceci suppose que ces engrenages sont employés dans la condition pour laquelle ils sont conçus. Deux facteurs sont considérés dans cette méthodologie, le premier est la résistance limite du matériau et l'autre est un niveau acceptable de sûreté. Pour cette raison nous définissons ce qui est connu en tant que fonction d'état limite ou conditions aux limites [10],

Dans les équations de vérification de la résistance des engrenages (σ_H (σ_F) $\leq \sigma_{HP}$ (σ_{FP})) on suppose normalement que la contrainte appliquée est connue avec certitude et qu'un facteur de sécurité a été appliqué. Cependant, dans la méthodologie de conception probabiliste on est concerné par la probabilité de l'occurrence de la condition citée ci-dessus. De toute façon, il est préférable d'exprimer cette condition en termes de variables de conception $g(x)$ où x est le vecteur des variables aléatoires. En utilisant ce concept, nous pouvons exprimer x par: [11]

$$g(x) \leq c \quad (\text{IV-1})$$

L'inégalité en l'équation (IV-1) est remplacé avec une égalité; l'équation résultante est connu en tant qu'équation d'état limite :

$$G(x) = g(x) - c \leq 0 \quad (\text{IV-2})$$

La fonction $G(x)$ s'appelle une fonction d'état-limite ou fonction de performance. Elle divise l'espace de conception en régions sûres et non sûres (Fig.IV.1).

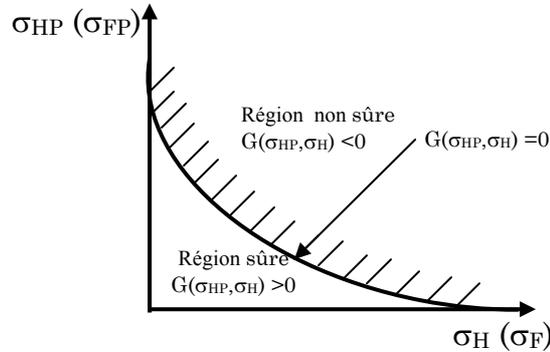


Fig.VI.1: Régions Sûre et non Sûre de l'Espace de Conception.

IV.1.2 Index de Fiabilité

Le souci principal dans l'analyse probabiliste est le calcul de la probabilité de défaillance des engrenages surgit quant à la façon dont nous mesurons leurs fiabilités. En général, nous sommes concernés que la contrainte appliquée, ne devrait pas excéder la résistance offerte par le matériau du concepteur. Après défaillance, la surface est :

$$G(\sigma_{HP}, \sigma_H) = 0 \quad ; \quad G(\sigma_{FP}, \sigma_F) = 0 \quad (IV-3)$$

L'endroit d'une surface de défaillance de l'origine affecte la région sûre. Par exemple, si la surface de défaillance est loin de l'origine (Fig.IV.1), la région sûre augmente ; si la surface de défaillance est plus proche de l'origine, la région sûre diminue, ainsi la position de la surface de défaillance en termes d'équation (IV-2) peut être représentée comme distance minimale de l'origine à la surface $G(x)=0$. En fait, si les variables originales de conception, x , sont transformées en nouvelles variables, z (voir les équations (IV-11) et (IV-12)), comme recommandés par Hasofer et Lind [12], puis le point sur la surface transformée avec la distance minimale à l'origine est connu comme «point de défaillance le plus probable» [13]. Ce point représente la plus mauvaise combinaison des variables stochastiques de

conception. La distance entre l'origine et le point de défaillance le plus probable est appelé fiabilité ou index de sûreté β (Fig.IV.2). [10]

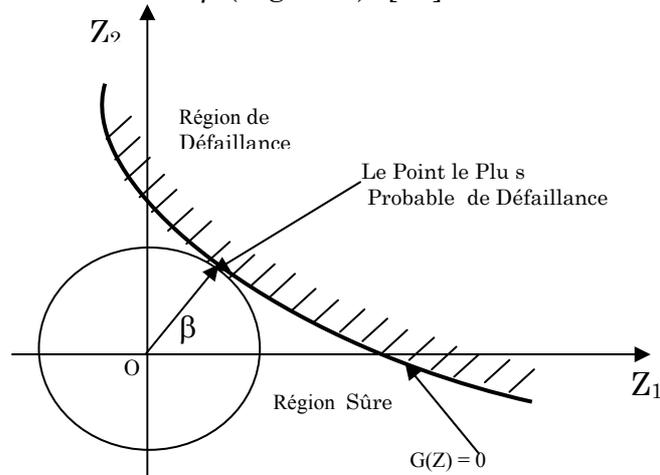


Fig.IV.2: Définition de l'Index de Sûreté β

Cette distance est une mesure de la fiabilité de la conception. Si l'index est haut, la probabilité de défaillance est réduite.

IV.2. Méthodes de Prédiction de la Fiabilité des Engrenages.

IV.2.1 Simulation de Monte Carlo

La méthode la plus populaire de détermination de la probabilité de défaillance est la méthode de Monte Carlo [14]. Dans le cas de l'analyse de la fiabilité structurale, ceci implique la génération de chaque variable X_i aléatoirement pour donner une valeur x_i d'échantillon. La fonction d'état limite $G(x) = 0$ est alors vérifiée. Si la fonction d'état limite est violée (c.-à-d. $G(x) \leq 0$), la structure ou l'élément structural a échoué. L'expérience est répétée beaucoup de fois, et chaque fois avec des valeurs aléatoirement générées d'un vecteur de valeurs x_i . Si des épreuves de N essais sont conduites, la probabilité de défaillance est donnée approximativement par [15] :

$$P_f = \frac{n(G(x_i) \leq 0)}{N} \tag{IV-4}$$

où,

$$K = n(G(x_i) = 0) \tag{IV-5}$$

Cette dernière équation représente le nombre d'épreuves n pour lesquelles ($G(x) = 0$). Évidemment le nombre d'épreuves exigé est lié à la précision désirée pour P_f

(voir aussi section III.3) [16]. Néanmoins, Mann et autres [17], on effectués des travaux afin de déterminer les échantillons requis pour la limite de fiabilité de 95% selon la fonction étant évaluée. Ils ont proposé que le nombre exigé d'échantillons soit dans la gamme de 10000-20000 [17].

IV.2.2 Méthode de Fiabilité de Premier Ordre (FORM)

Une critique commune de la méthode de Monte Carlo est que c'est une méthode brute et longue de solution. Pour des problèmes énormes ceci consomme beaucoup de temps informatique et d'espace. Il existe plusieurs autres méthodes permettant la détermination de l'index de fiabilité ; méthode analytique du moment de premier ordre (FORM) [18] et la méthode de fiabilité du moment de second ordre (SORM),.....etc. [19]. Pour des raisons de simplicité, seulement la méthode FORM est considérée dans ce travail.

IV.2.2.1 Détermination de l'Index de Sûreté

Si la fonction d'état-limite $G(x)$ est linéaire et les distributions des contraintes σ_{HP} (σ_{FP}) et σ_H (σ_F) sont connues et sont des variables aléatoires normalement distribuées, la fiabilité de cet engrenage (ou l'index de fiabilité) est la probabilité pour que sa résistance σ_{HP} (σ_{FP}) soit plus grande que la contrainte auquel est soumis σ_H (σ_F) [20,21,22].

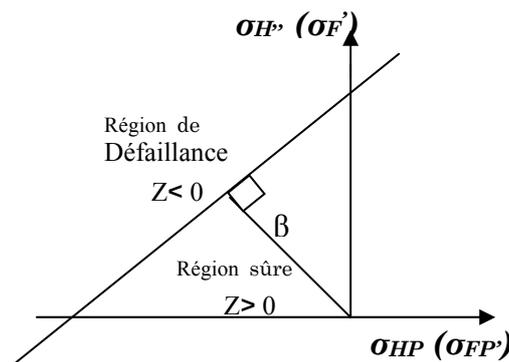


Fig.IV.3: Index de Sûreté pour une Fonction d'Etat Limite Linéaire.

$$R_H = P(\sigma_{HP} - \sigma_H) \geq 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma_H) \left[\int_{\sigma_F}^{\infty} f(\sigma_{HP}) d(\sigma_{HP}) \right] d(\sigma_H) \tag{IV-6}$$

où, $f(\sigma_H)$, $f(\sigma_{HP})$ sont les fonctions densités de probabilité des fonctions σ_H , σ_{HP} .

Par contre, la non fiabilité (la probabilité de défaillance) est définie par :

$$P_H = 1 - R_H \tag{IV-7}$$

Comme expliqué précédemment (voir section III.3), il est pratiquement impossible de trouver la fonction de densité de probabilité de σ_H , σ_{HP} . La seule alternative est de les estimer en ajustant les distributions de fréquence de σ_H , σ_{HP} obtenues à partir de l'analyse de Monte Carlo (ou par l'approximation de Taylor) aux distributions standard dont les fonctions de densité sont connues. Pour l'engrenage en question, ces distributions de fréquences sont comme montrées dans les figures (III.10) à (III.13). Si nous les assumons individuellement à des distributions normales comme montrées dans la figure (IV.4), alors les équations (IV-6) et (IV-7) deviennent [23,24] :

$$R_H = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-z_H^2/2} = 1 - \phi(\beta) \tag{IV-8}$$

Ainsi la non fiabilité (la probabilité de rupture de l'engrenage) est défini par :

$$P_H = \phi(\beta_H) \tag{IV-9}$$

où,

$\Phi(z)$ est la fonction de distribution normale cumulative standard.

β_H est l'index de sécurité pour la condition de contact de Hertz:

$$\beta_H = \frac{\overline{\sigma_{HP}} - \overline{\sigma_H}}{\sqrt{(\sigma(\sigma_H))^2 + (\sigma(\sigma_{HP}))^2}} \tag{IV-10}$$

Des équations semblables peuvent être obtenues pour la flexion R_F et P_F .

La fiabilité dépend clairement des limites inférieures de l'intégrale et par conséquent des statistiques de σ_H , σ_{HP} .

Une valeur plus élevée de fiabilité peut donc être obtenue par :

- a/ Une augmentation de la résistance moyenne $\overline{\sigma_{HP}}$ ou réduction de la contrainte appliquée moyenne $\overline{\sigma_H}$.
- b/ Une réduction de la diffusion des deux distributions $\sigma(\sigma_{HP}), \sigma(\sigma_H)$.

L'index de sûreté β défini par l'équation (IV-10) est dû à Cornell [23], et il serait basé sur les deux premiers moments qui sont la moyenne et l'écart type définis dans la section (III.3). Il est possible que divers index de sûreté puissent être obtenus pour le même état limite, cela dépend de la façon dont l'index de sûreté est défini [24]. Quand ceci est le cas, nous disons que l'index de sûreté manque d'invariance [25]. Pour s'assurer que x est invariables, Hasofer et Lind [12] suggère de transformer les variables en variables standard ayant comme moyenne zéro et un écart type égale à l'unité.

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma X} \tag{IV-11}$$

De même, la fonction d'état limite est aussi transformer pour donner :

$$G(Z) = 0 \tag{IV-12}$$

Si la fonction limite est linéaire et les contraintes σ_H (σ_F) et σ_{HP} (σ_{FP}) sont transformées conformément à l'équation (IV-11) pour donner σ_H' (σ_F') et σ_{HP}' (σ_{FP}'), dans ce cas l'index de sécurité peut être déterminé en trouvant la distance minimale perpendiculaire de l'origine à la ligne de défaillance (figure (IV.3)).

Par contre, si la fonction d'état-limite est non-linéaire (qui est le cas de ce travail), l'index de sûreté est déterminé en trouvant la distance minimale de la surface d'état-limite à l'origine. Ceci devient donc, une optimisation de la forme [26] :

Réduire au minimum $\beta = (Z^T Z)^{1/2} \tag{IV-13}$

Sujet à $G(Z) = 0 \tag{IV-14}$

L'index de sûreté déterminé par cette équation dépend de la nature de la fonction et de l'algorithme utilisés. Par exemple, pour une fonction d'état-limite possédant de multiples points minimum, seulement un de ces derniers peut être trouvé à moins que le concepteur emploie un algorithme qui localise le minimum global.

IV.2.2.2 Format Probabiliste d'Optimisation de Conception (PDO)

Le format de l'optimisation probabiliste de conception (PDO) est semblable à celui de l'optimisation déterministe. Généralement, le problème devrait d'abord être modélisé de manière déterministique comme suit [10] :

$$\text{Minimiser} \quad f(x) \quad (\text{IV-15})$$

$$\text{Sujet à :} \quad G_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{IV-16})$$

$$x_l \leq x \leq x_u \quad (\text{IV-17})$$

où

x est un vecteur de colonne avec des rangées de n et les indices inférieurs l et u qui représentent les limites inférieures et supérieures sur x , respectivement.

Puisque la conception probabiliste est concernée par la probabilité de défaillance ou la fiabilité d'un système, la formulation probabiliste équivalente de σ_H (σ_F) est :

$$\text{Minimiser} \quad f(x) \quad (\text{IV-18})$$

$$\text{Sujet à :} \quad P[G_i(x) \leq 0] \geq R_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{IV-19})$$

où,

x est un vecteur des variables aléatoires de n .

R_i est le niveau indiqué de fiabilité du système. Cependant, après la détermination de l'index de sûreté, la contrainte de l'équation (IV-16) est exprimée par :

$$G_i(x) = \beta_i - \theta^{-1}(R_i) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{IV-20})$$

où

$\theta^{-1}(R_i)$ est l'inverse de la fonction de distribution normale standard.

IV.3 Résultats de L'Analyse

IV.3.1 Analyse par la Méthode Simplifiée (Fonction d'Etat Limite Linéaire)

Afin de comparer la méthode analytique avec l'analyse de Monte Carlo, figure (IV.4) montre les fonctions de densité d'interférence contrainte-résistance de contact obtenues à partir de la méthode analytique et de Monte Carlo pour des engrenages d'une durée de vie de 3×10^4 (voir tableau (III.4)). Comme peut être vu, les deux méthodes sont en bon accord.

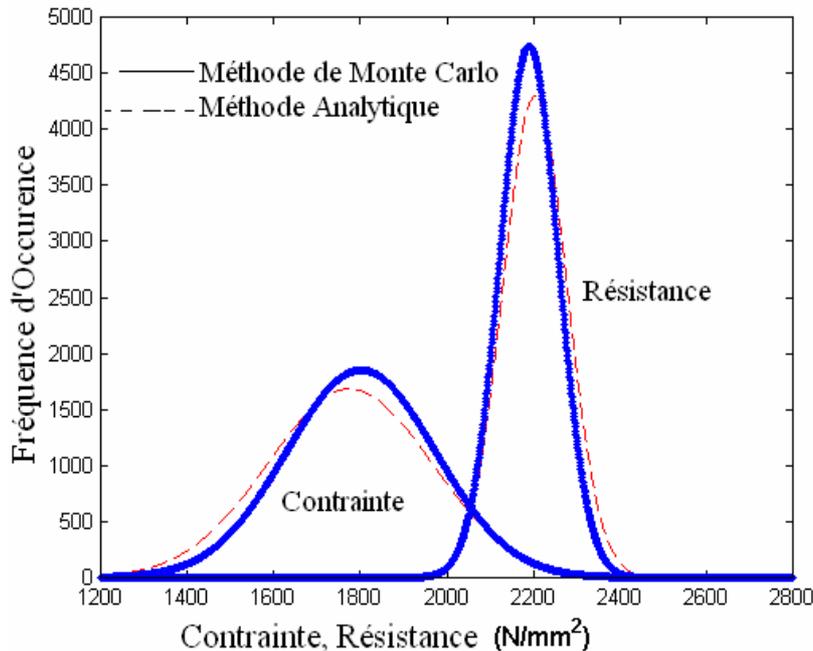


Fig.IV.4: Interférence Contrainte de Contact - Résistance ($T_1=16,23$ N.m pour $N_L=3 \times 10^4$)

La Fig.IV.5 montre la fiabilité qui peut être prévue pour différentes estimations du couple du pignon (ou puissance) pour un nombre de cycles 5×10^5 .

Comme peut être vu, les engrenages en considération devraient être évaluées à seulement environ 0,78 kilowatt pour une fiabilité de 99%.

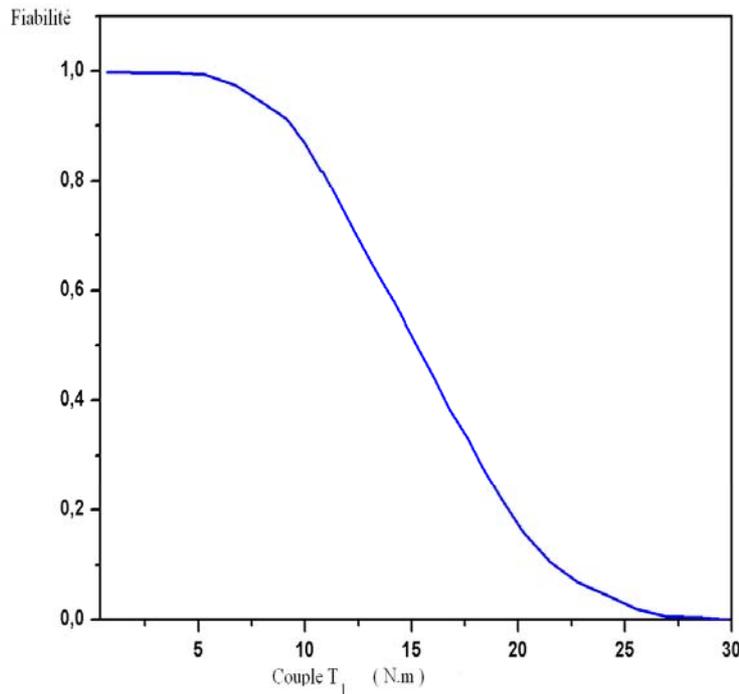


Fig.IV.5 : Fiabilité vs Couple du pignon de l’Engrenage du Tableau.II.1 pour N_L=5 x 10⁵ .

Une intéressante remarque qui peut être obtenue à partir de ces analyses théoriques est le fait qu’une fois que les statistiques de la résistance et de la contrainte appliquée pour un engrenage spécifique ont été calculées pour une durée de vie fixe, les résultats peuvent alors être ajustés pour donner la fiabilité à tous les nombres de cycles de charge dans la région finie. Toute ce qui change pendant que la durée de vie est changée est la moyenne $\overline{\sigma_{HP}}$ de résistance qui varie selon le facteur de durée de vie Z_N, de sorte que :

$$\left(\overline{\sigma_{HP}}\right)_0 = \left(\frac{Z_{N0}}{Z_N}\right) \cdot \overline{\sigma_{HP}} \tag{IV.21}$$

Si le coefficient de variation $(\sigma(\sigma_{HP})/\overline{\sigma_{HP}})$ est supposé indépendant de la durée de vie (donnant une courbe (S.N.P) parallèle sur un tracé log-log comme montré dans [27]), alors tout ce que nous devons faire est de recalculer la variable aléatoire standard comme suit :

$$Z_H = \frac{\overline{\sigma_{HP}} \cdot \left(\frac{Z_N}{Z_{N0}} \right) - \overline{\sigma_H}}{\sqrt{(\sigma(\sigma_{HP}))^2 \cdot \left(\frac{Z_N}{Z_{N0}} \right)^2 + (\sigma(\sigma_H))^2}} \quad (\text{IV.22})$$

où,

Z_N est le nouveau facteur de vie et Z_{N0} est le facteur de vie pour lequel les statistiques de σ_{HP} ont été initialement calculées.

Une autre quantité importante qui peut être déterminée une fois que les statistiques de la contrainte appliquée et celle de résistance du matériau sont connues, est le facteur de sécurité. Pour le cas spécifique où σ_H (σ_F) et σ_{HP} (σ_{FP}) sont normalement distribués, le facteur de sécurité S_H (S_F) peut être extrait à partir de l'équation (IV-10) comme suit :

$$S_H = 1 + Z_H \frac{\sqrt{(\sigma(\sigma_H))^2 + (\sigma(\sigma_{HP}))^2}}{\overline{\sigma_H}} \quad (\text{IV.23})$$

Il est clair que le facteur de sécurité défini ci-dessus est directement relié à la fiabilité (par l'intermédiaire de Z_H) aussi bien qu'à la qualité de contrôle du matériau et de la précision des engrenages. Ce pendant, les valeurs de S_H , S_F calculées à partir de l'équation (IV.23) pour une fiabilité donnée ne sont précisément pas équivalentes aux ceux du standard ISO ; cela est du au fait que, les contraintes limites de la norme ISO (voir Fig.(I.6) et (I.7)) sont déterminés avec une probabilité d'échec de 1% au lieu des valeurs moyennes (50%).

Il est bénéfique, de noter que concevoir des engrenages avec une grande fiabilité est d'aucun intérêt, seulement si, les éléments associés aux engrenages tels que : les arbres, les roulements, ...etc. sont traités de la même façon que les

engrenage. La défaillance des engrenages aura lieu souvent à cause des défaillances des autres pièces qui y sont associées [28].

IV.3.2 Analyse par la Méthode de Conception par Optimisation Probabiliste (PDO)

Pour appliquer le procédé de PDO, nous devons d'abord formuler le modèle déterministe d'optimisation.

Notre objectif de conception est de maximiser le couple qui pourrait être transmis par le pignon comme mentionné lors de la procédure d'optimisation déterministique de la section (III.2), tout en gardant les mêmes engrenages et l'usage des résultats obtenus de l'analyse statistique (voir Tableau.III.4) ainsi que les paramètres pris comme variables aléatoires de conception.

Par conséquent les fonctions objectives sont:

- Couple maximale à transmettre par le pignon déterminé à partir de la de résistance à la pression superficielle de contact [6] :

$$T_1 = \frac{b \cdot d_1^2}{2 \cdot 10^3} \cdot \frac{u}{u+1} \cdot \frac{Z_N^2 \cdot Z_L^2 \cdot Z_V^2 \cdot Z_R^2 \cdot Z_X^2 \cdot Z_W^2}{Z_H^2 \cdot Z_\varepsilon^2 \cdot Z_\beta^2 \cdot K_A \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}} \cdot \left(\frac{\sigma_{H \text{ Lim}}}{S_{H \text{ min}}} \right)^2 \quad (\text{IV-24})$$

- Couple maximale à transmettre par le pignon déterminé à partir de la condition de résistance à la rupture [6] :

$$T'_1 = \frac{b \cdot d_1 \cdot m_n}{2 \cdot 10^3} \cdot \frac{Y_{ST} \cdot Y_{NT} \cdot Y_{\delta \text{ rel.T}} \cdot Y_{R \text{ rel.T}} \cdot Y_X \cdot Y_W}{Y_F \cdot Y_S \cdot Y_\beta \cdot K_A \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha}} \cdot \frac{\sigma_{F \text{ Lim}}}{S_{F \text{ min}}} \quad (\text{IV-25})$$

Les contraintes de cette optimisation sont les modes de défaillance pour le la fatigue de contact (Eqs.(I-5) et (I-26)) et la fatigue à la rupture (Eqs.(I-6) et (I-27)):

$$\sigma_H \leq \sigma_{HP} \quad (\text{IV-26})$$

et

$$\sigma_F \leq \sigma_{FP} \quad (\text{IV-27})$$

Afin de comparer les résultats de cette analyse, les paramètres qui sont traités comme variables aléatoires normales sont identiques à ceux mesurés dans le travail expérimental (voir chapitre V) ainsi que dans l'étude théorique. Ceux-ci sont les facteurs géométriques de précision (K_V , K_{HB} ($K_{F\beta}$), $K_{H\alpha}$ ($K_{F\alpha}$), la limite de résistance $\sigma_{H\text{ Lim}}$ ($\sigma_{F\text{ Lim}}$) et le facteur de rugosité Z_R ($Y_{R\text{ rel.T}}$). Pour des raisons de simplification, ils sont dénotés comme le montre le tableau (IV.1).

Table.IV.1: Variables Correspondantes

K_V	→	X_1
K_{HB} ($K_{F\beta}$)	→	X_2 (X'_2)
$K_{H\alpha}$ ($K_{F\alpha}$)	→	X_3 (X'_3)
$\sigma_{H\text{ Lim}}$ ($\sigma_{F\text{ Lim}}$)	→	X_4 (X'_4)
Z_R ($Y_{R\text{ rel.T}}$)	→	X_5 (X'_5)

Tenant compte des considérations ci-dessus et remplaçant les constantes par leurs valeurs, l'optimisation déterministe devient :

Maximiser

- Couple de contact (N.m).

$$T_1 = 10^{-5} \cdot 8,25 \cdot \frac{X_4^2 \cdot X_5^2}{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3} \tag{IV-28}$$

et

- Couple de flexion (N.m).

$$T'_1 = 10^{-3} \cdot 241,63 \cdot \frac{X'_4 \cdot X'_5}{X_1 \cdot X'_2 \cdot X'_3} \tag{IV-29}$$

Sujet à :

- Condition de résistance de contact.

$$711,119 \cdot \sqrt{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3} \leq 1,6 \cdot X_4 \cdot X_5 \tag{IV-30}$$

- Condition de résistance de rupture.

$$246,5 \cdot X_1 \cdot X'_2 \cdot X'_3 \leq 3,65 \cdot X'_4 \cdot X'_5 \tag{IV-31}$$

-Valeurs limites pour $K_{H\alpha}$ et $K_{F\alpha}$ (voir figure (II.4)) [6].

$$X_3 \leq 2,92 \tag{IV-32}$$

$$X'_3 \leq 2,51 \tag{IV-33}$$

Le modèle de PDO est maintenant construit de ces équations sous forme de l'équation (IV-20) :

Maximiser
$$T_1 = 10^{-5} \cdot 8,25 \cdot \frac{X_4^2 \cdot X_5^2}{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3}$$

$$T'_1 = 10^{-3} \cdot 241,63 \cdot \frac{X'_4 \cdot X'_5}{X_1 \cdot X'_2 \cdot X'_3}$$

Sujet à :

$$711,119 \cdot \sqrt{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3} - 1,6 \cdot X_4 \cdot X_5 = \beta_H - \phi^{-1}(R) \tag{IV-34}$$

$$246,5 \cdot X_1 \cdot X'_2 \cdot X'_3 - 3,65 \cdot X'_4 \cdot X'_5 = \beta_F - \phi^{-1}(R) \tag{IV-35}$$

$$X_3 \leq 2,92$$

$$X'_3 \leq 2,51$$

Calcul de l'Indices de Sûreté β_H, β_F

Afin de résoudre les équations (IV-34) et (IV-35), les indices de sûreté doivent être calculés. L'index de sûreté pour la contrainte de contact (Eq.(IV-13) devient :

$$B_H = \min \left(\sum_{i=1}^5 Z_i^2 \right)^{1/2} \tag{IV-36}$$

Sujet à :

$$711,119 \cdot \sqrt{Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3} - 1,6 \cdot Z_4 \cdot Z_5 = 0 \tag{IV-37}$$

Les contraintes sur X_1, \dots, X_5 sont $\pm n$, où n est le nombre d'écart type. Généralement on prend [29] :

$$\bar{X}_i - 3 \cdot \sigma_{X_i} \leq Z_i \leq \bar{X}_i + 3 \cdot \sigma_{X_i} \tag{IV-38}$$

L'analyse numérique a été effectuée par le logiciel MATLAB version 7.1 par l'emploi de la sub-routine "fminc" qui est une composante de la boîte à outils d'optimisation de MATLAB. Cet algorithme, qui met en application une routine de minimisation quasi-Newtonienne avec contraintes, exhibe en général des bons résultats dans la résolution des problèmes de technologie (voir section III.2).

En insérant les valeurs de l'écart type et la moyenne de chaque variable X_i (obtenues de l'analyse statistique (voir tableau III.4)) dans les équations ci-dessus, les indices de contact et de rupture sont obtenus comme suit :

$$\beta_H = 1,51$$

$$\beta_F = 0.72$$

Ceci correspond à une fiabilité de 94,34 % de résistance à la contrainte de contact et 76.4 % de résistance à la rupture.

Après avoir déterminé l'index de sûreté pour chaque mode de défaillance, l'index minimal de sûreté ($\beta = 0.72$) est employé dans les équations (IV-34) et (IV-35). Le modèle de PDO a été exécuté pour différents niveaux de fiabilité donnant les résultats montrés dans le tableau (IV.2). L'utilisation de la méthode de conception par l'optimisation probabiliste (PDO) donne divers choix de conception qu'elle fournit aux concepteurs. Les variables de conception peuvent être choisies selon le concepteur et le niveau de fiabilité désiré. Il est important de mentionner aussi qu'une fois que le modèle mathématique de PDO est établi, on peut opter pour d'autres variables de conception tels que le module, l'entraxe, les diamètres, ...etc., et dans ce cas la on détermine les tolérances de ces dernières qui seront des cotes fonctionnelles exigées au niveau du bureau de méthodes pour la fabrication des engrenages [30, 31,32].

Tableau IV.2 : Résultats de l'analyse par la méthode PDO

Fiabilité en %	Variables de Conception de Contact						Variables de Conception de Flexion					
	K _V	K _{Hβ}	K _{Hα}	σ _{HLim}	Z _R	Couple max (N.m)	K _V	K _{Fβ}	K _{Fα}	σ _{FLim}	Y _{Rrel.T}	Couple max (N.m)
100%	1,10	4,10	1,32	1390	0,90	22,12	1,01	3,18	1,27	417	0,85	22,00
	1,01	4,30	1,40	1413	0,90	21,98	1,04	3,23	1,22	386	0,90	21,00
	1,20	4,30	1,43	1475	0,90	20,55	1,01	3,60	1,10	396	0,90	21,00
95%	1,10	4,20	1,42	1413	0,90	20,78	1,02	3,14	1,22	386	0,85	20,25
	1,10	4,30	1,48	1413	0,90	20,55	1,01	3,17	1,33	417	0,85	20,00
	1,20	4,30	1,54	1475	0,90	20,78	1,06	3,19	1,37	417	0,90	20,00
90%	1,10	4,29	1,47	1390	0,90	19,75	1,03	3,19	1,34	386	0,90	19,06
	1,10	4,34	1,45	1413	0,90	19,67	1,05	2,74	1,53	417	0,90	19,06
	1,20	4,30	1,59	1475	0,90	19,51	1,08	3,20	1,39	417	0,90	18,82
85%	1,01	4,39	1,61	1413	0,90	18,65	1,06	3,19	1,37	386	0,90	18,22
	1,01	4,40	1,83	1475	0,90	18,54	1,11	3,20	1,41	417	0,90	18,08
	1,20	4,32	1,55	1475	0,90	18,54	1,01	3,20	1,55	417	0,90	18,07
80%	1,10	4,60	1,60	1390	0,90	17,73	1,08	3,23	1,47	386	0,90	17,45
	1,20	4,38	1,56	1413	0,90	17,71	1,14	3,20	1,43	417	0,90	17,37
	1,30	4,33	1,50	1475	0,90	17,65	1,01	3,20	1,61	417	0,90	17,37
70%	1,20	6,04	2,52	1475	1,30	16,12	1,01	3,23	2,12	386	1,20	16,15
	1,01	7,42	2,57	1475	1,30	16,12	1,01	3,23	2,29	417	0,90	16,15
	1,30	4,49	1,68	1475	0,90	16,04	1,30	3,18	1,58	417	1,30	16,15
60%	1,30	6,19	2,50	1475	1,30	15,12	1,18	3,20	2,09	386	1,30	15,33
	1,01	8,08	2,50	1475	1,30	15,12	1,31	3,23	2,04	417	1,30	15,40
	1,01	9,00	2,20	1475	1,30	15,12	1,01	3,23	2,42	417	1,20	15,33
50%	1,30	6,59	2,50	1475	1,30	14,21	1,30	4,28	1,53	417	1,30	15,04
	1,01	8,55	2,50	1475	1,30	14,21	1,01	4,51	1,96	417	1,30	14,70
	1,10	7,49	2,90	1475	1,40	14,35	1,15	4,27	1,44	417	1,30	14,28

Conclusion

L'objectif principal de cette partie de ce travail était de développer des méthodes pratiques simples pour estimer la fiabilité du système à engrenages étudié dans ce travail et par conséquent la validation et l'évaluation des résultats obtenus des méthodes présentées dans le chapitre III, ainsi que ceux de la méthode de PDO obtenus ci-dessus. Cependant, les conclusions générales suivantes ont été obtenues de cette partie:

- l'estimation des statistiques (moyenne et écarts types) des différents paramètres (ayant une influence sur la performance des engrenages) par la méthode analytique ou numérique de Monte Carlo (voir section III.3) est nécessaire pour le calcul de la fiabilité sauf si les incertitudes de ces paramètres sont mesurées ou obtenues de la bibliographie à partir d'une banque de données. Néanmoins, les valeurs trouvées de la fiabilité en utilisant les résultats du tableau (III.4) montre que la méthode analytique développée dans ce travail (voir section III.3) est en bon accord avec la méthode exacte de Monte Carlo. La valeur de la fiabilité est de $\theta(\beta_F=0,80) = 78,85\%$ ($\theta(\beta_H=1,70) = 95,55\%$) en utilisant la méthode analytique contre $\theta(\beta_F=0,72) = 76,4\%$ ($\theta(\beta_H=1,51) = 94,34\%$) obtenue de la méthode de Monte Carlo.
- L'application de la méthode classique de Monte Carlo pour le calcul de la fiabilité via l'équation (IV-4) donne des résultats satisfaisants mais elle est longue de solution et consomme beaucoup de temps informatique et d'espace.
- L'application de la méthode analytique (FORM) simplifiée en utilisant les équations (IV-9) et (IV-10) est simple et très pratique mais elle est surtout précise pour les fonctions d'états linéaires. Néanmoins, dans le cas spécifique de ce travail, la fiabilité trouvée par cette méthode est de l'ordre de $\theta(\beta_F=0,81) = 77,91\%$ ($\theta(\beta_H=2,10) = 98,21\%$) contre $\theta(\beta_F=0,72) = 76,4\%$ ($\theta(\beta_H=1,51) = 94,34\%$) obtenue de la méthode d'optimisation probabiliste (PDO).

- L'utilisation de la méthode de conception par l'optimisation probabiliste (PDO) est valide pour le cas de ce travail où la fonction d'état limite est non linéaire. Elle donne divers choix de conception qu'elle fournit aux concepteurs et permet ainsi de choisir la conception optimale au point de vu coût, sûreté (fiabilité désirée), capacité de transmission, ...etc.).

References

- [1] H.A.Abuid., "Procedure for Optimum Design of a Two Stage Spur Gear System", JSME International Journal, Series C, Vol.46, N°4, 2003.
- [2] M.Zeyvelti., C.Göloğlu., "Design Optimization of Two Stage Gearbox with Helical Gears", Proceedings of 5th International Symposium on Intelligent Manufacturing Systems, May 29-31, pp.724-733, 2006.
- [3] T.Y.Torng., R.J.Yang, "Robust Structural System Design Using A System Reliability-Based Design Optimization Method" Proceedings of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics, San Antonio, Texas, June 7-10, 1993.
- [4] J.M.T.Thompson., C.W.Hunt., "Dangers of Structural Optimization", Engineering Optimization, Vol.2, pp.99-110, 1974.
- [5] V.B.Venkayya., "Structural Optimization: A Review and some Recommendations", Intl.J.Numer.Meth.Engr., Vol.13, pp.203-228, 1978.
- [6] ISO/ 6336, Parts 1, 2 and 3 "Calculation of the Load Capacity of Spur and Helical Gears", 1996.
- [7] DIN 3990., "Grundlagen für die Trafahigkeitsberechnung von Gerad-und stirnrädern", (Principes de Base pour le Calcul de la Capacité de Charge des Engrenages à denture Droite et Hélicoïdale) parts 1-53, 5.Beuth, 1987.
- [8] T.Torng, B.Thacker., "Confidence Bounds Assessment for Probabilistic Structural Reliability Analysis", 33rd SDM Conference, Paper N° AIAA-92-2409, Dallas, Texas, 1992.
- [9] B.Z.Sandler, "Probabilistic Approach to Mechanisms", Elsevier, 1984.
- [10] Onwubiko C., "Introduction to Engineering Design Optimisation", New Jersey Prentice Hall, 2000.
- [11] C.Onwubiko., L.Onyebueke., F.C.Chen., "Probabilistic Optimum Design of Compact Gear Set", Proceeding of 11th Biennial Conference on Reliability, Stress Analysis, and Failure prevention, ASME, 83(2), pp 115-124, 1995.
- [12] A.M.Hasofer., N.C.Lind., "Exact and Invariant Second-Moment Code Format", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, 100 (EMI) , pp.111-121, 1974.

- [13] X.Du., W.Chen., “A Most Probable Point Based Method for Uncertainty Analysis” Proc of DET’00, ASME Design Eng, Technical Conference and Computers and Information in Engineering conference, Baltimore, Maryland, September 10-13, 2000.
- [14] R.E.Melchers., “Structural Reliability Analysis and Prediction”, New York. John Wiley and Sons, 1999.
- [15] E.B.Haugen., “Probabilistic Mechanical Design”, Wiley Interscience 1980.
- [16] S.A. Brown., A.E. Sepulveda., “Approximation of System Reliability Using a Shooting Monte Carlo Approach,” *AIAA journal*, Vol. 35, No. 6, pp.1064-1071, 1997.
- [17] N.R.Mann, R.E.Scafer et all., “Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data”, Jhon Wiley, New York, 1974.
- [18] J.Cagan., B.C.Williams., “First-Order Necessary Conditions for Robust Optimality”, *Advances in Design Automation*, ASME DE-Vol. 65-1, pp.539-549, 1993.
- [19] J. E.Renaud., “Second Order Based Multidisciplinary Design Optimization Algorithm Development”. ASME DE, 2:347-357, 1993.
- [20] K.C.Kapur., L.R.Lambertson., “Reliability in Engineering Design”, Wiley, Interscience, 1977.
- [21] F.Djeddou., and R.Zegadi., “Practical Statistical Methods for Predicting Life and Reliability of Fine Pitch Gear Pairs”, *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2(3), pp 494-500, Medwell online, 2007.
- [22] C.Onwubiko., and L.Onyebueke., “The Study of the Relationship between Probabilistic Design and Axiomatic Design Methodology”, NASA Grant N°. NAG3-1479, Vol.2, December 12, 1996.
- [23] C.A.Cornell., “A Probability Based Structural Code” , *J.Amer.Conc.Inst.*, 66, N°12, pp974-985, 1969.
- [24] R.E.Melchers., “Structural Reliability-Analysis and prediction”, New York: Wiley, 1987.
- [25] E.Nikolaidis., R.Burdisso., “Reliability Based Optimization: A safety Index Approach”, *Computer and Structures*, Vol.28, N°6, pp.781-788, 1988.
- [26] A.H.S., W.H.Tang., “Probability Concepts in Engineering Planning and Design”, Vol.II, pp333-447, John Wiley, New York, 1984.

[27] W.E.Schlike., “The Reliability of Transmission Gears”, Trans.Soc.Auto.Engrs, SAE paper 67725, 1967.

[28] D.Yates., “Major Factors Influencing Gear Performance”, Proc.Inst.Engrs, 99 paper 16, pp25-31, 1987.

[29] E.M.Mansoor., The Application of Probability to Tolerances used in Engineering Design”, Proc. Inst.Mech.Engrs, 178 Part I, pp29-39,Discussion pp 39-51, 1964.

[30] Y.M Zhang., et al., “Practical Reliability-Based Design of Gear Pair”, J.Mechanism and Machine Theory, Vol.38, pp.1363-1370, Elsevier, 2003.

[31] F.D.Thompson., G.Shubhagm., and A.Shukla., “Tradeoff Analysis in Minimum Volume Design of Multi-Stage Spur Gear reduction Units”, Mechanism and Machine Theory, 35, pp 609-627, Elsevier, 2000.

[32] X.Du., and W.chen., “Sequential Optimisation and Reliability Assessment Method for Efficient Probabilistic Design”, Proceedings of DETC’02, ASME, Design Eng Tech Conf and Computers and Information in Eng Conf, September 29-October 2, Montréal, Canada, 2002.

CHAPITRE V :

***ETUDE EXPERIMENTALE DES ERREURS DE
FABRICATION DES ENGRENAGES***

V.1. INTRODUCTION

Ce chapitre présente les résultats d'une étude expérimentale des erreurs élémentaires de fabrication (principalement ceux affectant l'alignement de l'engrènement des dentures) dans une série de composants simples d'un réducteur de vitesse cylindrique à un seul étage. En tout, une boîte de vitesse, 21 ensembles de pignons et roues dentées et 16 set de roulements à billes de types 6202 et 6301 ont été entièrement inspectés au centre de métrologie des engrenages de l'université de Newcastle upon Tyne (U.K).

Trois objectifs principaux de cette recherche étaient :

- L'évaluation de la qualité de précision réellement réalisées dans la production typique des engrenages à usage commercial, et déterminer ainsi la distribution et les statistiques réelles de chaque erreur.
- Établissement et estimation de la déviation d'alignement totale d'engrènement de chaque engrenage individuellement afin de pouvoir prévoir sa durée de vie ainsi que sa fiabilité.
- Validation des méthodes théoriques de prédiction des différents paramètres de performance des engrenages présentées dans le chapitre III.

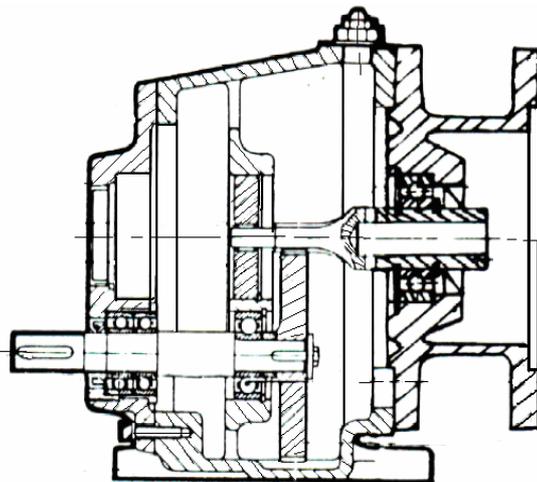


Fig.V.1 : Dessin d'Ensemble du Réducteur sous Etude

Les engrenages mesurés et le carter (boite à engrenages) sont du type présenté dans la figure (V.1) dont la boite est adaptable pour les deux configurations étudiées dans ce travail (simple et en porte à faux (voir Fig.(III.1a et II.1b)). Les spécifications principales de conception du pignon et de la roue sont comme données dans le Tableau (II.2). Ces derniers sont fabriqués à partir d'un acier faiblement allié de cémentation (En 351[1]) et ont été taillé par la machine à commande numérique « Pfauter » avant de subir une cémentation à 58.....62 HRC. Après le traitement thermique, les roues subissaient un usinage de finition de l'alésage ; et pour le pignon, une rectification de finition des surfaces soutenant les roulements. Les autres paramètres de conception des roues, d'usinage et d'assemblage peuvent être considérés comme typique de ceux généralement utilisés pour une qualité de précision moyenne. Néanmoins, aucun grade de qualité de précision n'a été indiquée sur les dessins des engrenages ; la qualité globale a été prétendu être approprié pour les engrenages d'une qualité correspondant à ISO 7...8. [2]

Les erreurs suivantes de fabrication ont été mesurées :

- Les erreurs affectant l'alignement de l'engrènement ($f_{\beta x}$) comme défini dans la section (III.1).
- Les erreurs affectant les facteurs K_V , et $K_{H\alpha}$ ($K_{F\alpha}$) (erreurs du pas, profil et excentricité).
- La rugosité des flancs des dents et la dureté du matériau qui affectent σ_{HP} , σ_{FP} .
- Les déviations de l'écartement sur k dents (W_k). Ceux-ci ont été mesurés afin de vérifier le jeu fonctionnel probable entre les dents.

V.2 Mesure des Erreurs dans les roues dentées

V.2.1 Les Erreurs d'Alignement, du Profil et du Pas de Base

V.2.1.1 Appareillage et Méthodes de Mesure

Les erreurs d'alignement f_{HB} , du profil f_f et du pas f_{pb} des roues et des pignons ont été mesurées sur une machine à commande numérique de marque « Gleason GMS 430 ». Cette machine mesure et donne automatiquement les erreurs de quatre dents équi-espacées sur les deux flancs.

Des difficultés ont été trouvées pendant le montage du pignon dans la machine de mesure à cause du battement élevé. Les deux centres entre pointes de l'arbre pignon n'étaient qu'ébauchés et c'était nécessaire donc, de les rectifiés afin d'arrivé à une concentricité acceptable des surfaces portant les roulements ($< 10 \mu\text{m TIR}$). Par contre, les roues ont été montées à partir de leur alésage en utilisant un mandrin conique spécial. Les deux faces des roues n'étaient pas finies après la cémentation, ainsi l'enregistrement approprié du battement axial n'était pas possible. Cependant, une attention particulière a été prise tout en montant les roues dans la machine de mesure afin de s'assurer qu'elles sont montées correctement. Le battement radial était toujours moins de $10 \mu\text{m TIR}$.

V.2.1.2 Interprétation des Résultats

- Erreurs de Déviation d'Alignement : f_{HB}

Les résultats de mesure de cette erreur sont donnés en Annexe A, tableaux (A.1) et (A.2). Le pignon et la roue ont montrés une erreur systématique de l'angle d'hélice f_{HB} , du fait qu'elle est toujours positive sur un flanc et négative sur l'autre. Telles erreurs peuvent avoir plusieurs causes ; Une possibilité est que la broche de la machine et le mandrin porte pièce possèdent une erreur de coaxialité. Néanmoins, sachant que les engrenages en question sont taillées sur une machine nouvelle, Il est très probable que cette erreur systématique est due à une distorsion provoquée par un mauvais

positionnement des roues dans les fours pendant l'opération de traitement thermique de cémentation après l'usinage. Des erreurs typiques de ce genre sont de l'ordre de 5....10 μm [2].

Dans le but d'avoir une analyse statistique de la production globale, les erreurs des quatre flancs mesurés pour chaque roue étaient considérées comme quatre roues séparées et par conséquent, les 21 pignons (ou roues) deviendront 84 données. De cette étude, la distribution de $f_{H\beta}$ est trouvée presque normale avec une moyenne de 14 μm pour le pignon et 20 μm pour la roue. L'écart type est de l'ordre de 10 μm pour les deux roues.

Les résultats en pourcentages des roues (pignons) ayant des grades de qualité de précision de DIN7 [3] à DIN 11 sont comme montrés dans le tableau (V.1).

Tableau.V.1 : Résultats de l'Erreur $f_{H\beta}$ en Pourcentage des Roues en Concordance avec la Norme DIN [4]

Grade DIN		< 11	< 10	< 9	< 8	< 7
Pignons	FD	100	98	86	58	39
	FG	100	93	67	34	18
Roues	FD	100	98	81	43	23
	FG	100	90	61	30	16

Du tableau ci-dessus, la production de ces engrenages est d'une qualité DIN 11 sans rebut et de DIN10 pour un rebut de 5%.

- Erreurs de Profil : f_f

Les résultats de ces mesures sont illustrés en Annexe A, tableaux (A3) et (A4). Comme pour les erreurs de l'angle d'hélice, les erreurs du profil ont prouvées qu'elles sont presque normalement distribuées. Les résultats en pourcentages des roues (pignons) ayant des grades de qualité de précision de DIN 7 à DIN 11 sont comme montrés sur le tableau (V.2).

Tableau.V.2 : Résultats de l'Erreur f_f en Pourcentage des Roues en Concordance avec la Norme DIN [4]

Grade DIN	< 11	< 10	< 9	< 8	< 7
Pignons	100	100	88	54	25
Roues	100	100	100	96	74

De ces résultats, il est clair que cette production assure un grade de précision de DIN10, bien que 10% des flancs mesurés n'atteignent pas le grade 9. Si, on considère les roues au lieu des flancs, seulement 83% atteignent le grade DIN9.

- Erreurs de Pas de Base et d'excentricité : f_{pb}

Les résultats des mesures du pas sont comme données en Annexe A, tableaux (A.5) et (A.6) et celles de l'excentricité sont comme présentés dans les tableaux (A.7) et (A..8). Les résultats en pourcentages des erreurs du pas sont montrés dans le tableau (V.3).

Tableau.V.3 : Résultats de l'Erreur f_{pb} en Pourcentage des Roues en Concordance avec la Norme DIN [4]

Grade DIN	< 11	< 10	< 9	< 8	< 7
Pignons	100	100	99	84	26
Roues	100	100	98	86	47

Du tableau (V.3), il parait que, ces engrenages qui n'avaient pas subi un usinage de finition après le traitement thermique, ont un grade de précision de DIN 9 pour seulement 2% de rejet. IL est clair que cette production assure une qualité meilleure que prévu. Cela est attendu d'une machine nouvelle car ce type d'erreurs est plus sensible que les autres erreurs à la précision de la machine de

taillage. D'autre part, les valeurs mesurées de ce type d'erreurs sont plutôt mal adaptées par une distributions normale et il y a (pour les quelques valeurs mesurées) des valeurs qui dépassent 20.....30 μm . Ceci suggère qu'une attention insatisfaisante ait été prêtée à monter les roues (pignons), pendant le l'opération de taillage ou, plus probablement, après le traitement thermique quand les surfaces de référence sont rectifiées.

Ces conclusions sont supportées par les valeurs relatives enregistrées du battement radial (excentricité) des roues (pignons) (voir Annexe A, tableaux (A.7) et (A.8)). Un maximum de battement du pignon de 60 μm correspond seulement à la catégorie DIN 10 ; le battement maximal mesuré sur la roue est de 120 μm et qui correspond à DIN 12.

V.2.2 Mesures de l'Etat de surface

La rugosité du flanc a été mesurée au milieu de la largeur de la denture pour deux dents de chaque roue et ceci sur les flancs gauches et droits. Les résultats de ces mesures sont donnés en Annexe A, tableaux (A.9) et (A.10).

Les mesures ont été faites sur une longueur de prélèvement de 0,25 mm le long du profil en utilisant l'appareil Mitutoyo 401. Les résultats statistiques pour les pignons et les roues montrent des variations dans la rugosité (R_z) de 1,8 à 7,4 μm et 0,6 à 8 μm avec des moyennes de 3,61 μm et 3,55 μm respectivement (correspondant à $R_a = 1\mu\text{m}$). Comme les flancs des engrenages ont été simplement fraisés, ces variations peuvent être prises comme satisfaisantes. Des sources bibliographiques [4,5] montrent que pour les engrenages fraisées, la rugosité est typiquement entre 3,8 et 22 μm (R_z).

V.2.3 Mesures de la Dureté

La dureté du matériau en question a été vérifiée pour quelques dents et a été trouvé variable entre 58 et 62 HRC.

V.2.4 Mesures de l'Ecartement sur k Dents

Afin de déterminer approximativement (sans tenir compte de l'effet des erreurs du pas et de montage) la valeur du jeu de fonctionnement entre les dentures, quatre mesures de l'écartement de k dents (W_k) ont été faites sur chaque roue (pignon) au moyen d'un palmer à plateaux tangents. Les résultats de ces mesures sont donnés en Annexe dans les tableaux (A.11) et (A.112). De ces derniers, les pignons et les roues sont vus avoir des variations dans l'écartement sur k dents (W_k) de $11,823^{-0,141}$ à $11,823^{-0,09}$ mm et de $24,649^{-0,073}$ à $24,649^{-0,01}$ respectivement. Ces résultats indiquent que l'épaisseur nominale de la dent sur les deux roues a été réduite d'une valeur entre 90 à 140 μm , ayant pour résultat un jeu de fonctionnement signifiant de l'ordre 100 à 200 μm .

Les sources bibliographiques [6] indiquent que ce jeu fonctionnel est typiquement de l'ordre de 50 μm . Néanmoins, il faut mentionner que les valeurs de ce jeu indiquées ci-dessus ne sont pas entièrement fiables. Elles sont simplement la somme des déviations de l'épaisseur des dents du pignon et de la roue ; l'effet des erreurs du pas et de montage sur ce jeu n'est pas pris en considération.

V.2.5 Mesures des Erreurs du Battement Radial (excentricité) des Roulements.

Afin de déterminer les excentricités (ou battement radial) des roulements correspondant aux variables e_1, \dots, e_8 de la figure (III.2a), les roulements ont été inspectés afin de déterminer l'amplitude de leurs battement radial (celui des roulements à aiguille a été négligé (Fig.IV.1)).

Les sources bibliographiques [7], indiquent que pour des roulements typiques aux roulements 6202 et 6301, le défaut d'excentricité maximal des bagues (extérieure et intérieure) ne devraient pas excéder un maximum de 5 à 10 μm respectivement, tandis que les valeurs mesurées correspondantes montrent un maximum de 3 et 5 μm (voir Annexe A, tableaux (A.13) et (A.14)). La déviation résultante d'alignement de l'engrènement due à ces excentricités de roulement (e_1, \dots, e_8) est avérée négligeable (voir Fig.III.2a).

V.2.6 Mesures des Erreurs d'Alignement des Alésages Soutenant les Paliers.

Les coordonnées des centres de chacun des quatre alésages soutenant les quatre paliers ont été déterminées dans des plans verticaux et horizontaux en utilisant la machine GMS 430 CNC comme machine de mesure de coordonnées. Les erreurs de coaxialité correspondantes ont été extraites comme défini par la norme DIN (voir Fig.II.6)[3].

Les déviations trouvées étaient très grandes ($f_{\Sigma\beta} = - 82,5 \mu\text{m}$ et $f_{\Sigma\delta} = 95,5 \mu\text{m}$) comparées à ce qu'est exigé pour des engrenages de DIN 8 à DIN 10 ($f_{\Sigma\beta} = f_{\Sigma\delta} = 25$ à $40 \mu\text{m}$). Les résultats sont néanmoins prévus de cette production, puisque chacun des quatre alésages est usiné séparément.

V.3 Evaluation de la Qualité de Précision de la Production Globale

Clairement la production des réducteurs de vitesses en question présente deux aspects principaux :

- Les résultats du profil, du pas et de l'état de surface des dents sont assez typiques à une qualité moyenne, bien que une amélioration de la qualité du profil de la denture est souhaitable ; probablement ce défaut est du au manque de précision de l'outil de taillage (fraise mère), ou aux erreurs de montage (fixation) de la fraise mère [8,9].

- Les erreurs de l'angle d'hélice et celles d'alignement des alésages du carter (qui affectent considérablement la performance des engrenages et plus particulièrement ceux fins) sont clairement non inspectées pendant le processus de fabrication et indiquent par conséquent une classe de précision médiocre de la production entière.

En général une amélioration dans la précision de l'angle d'hélice exige une meilleure attention aux :

- Montage et la fabrication des corps de roues dentées et les faces fonctionnelles du carter. Ceci, peut être réalisé par une correction des défauts de maintien des pièces, choix des surfaces de références, etc..).
- Précision des outils de coupe et des machines outils.
- Méthodes de disposition des engrenages dans les fours de traitement thermiques afin d'éviter les déformations.
- Inspection de toutes les erreurs élémentaires importantes qui affectent l'alignement de l'engrènement.

En outre valable, mais moins important, est le contrôle du jeu fonctionnel entre dents. Le jeu de denture de plus de 200 μm est trop grand pour ces engrenages fins et aura un effet significatif sur la résistance des dents puisque l'épaisseur nominale de la dent est seulement de l'ordre de 2,2 mm. Ceci, peut être réalisée par un meilleur contrôle de l'entraxe de l'engrenage et le positionnement de la fraise mère [8,9].

REFERENCES

- [1] ISO/ 6336, Parts 1, 2 and 3 "Calculation of the Load Capacity of Spur and Helical Gears", 1996
- [2] ISO TR 10064 Parts: 1,2 and 3, "Cylindrical Gears – Code of Inspection Practice", (1996).
- [3] DIN 3962 , "Accuracy of Cylindrical Gears: Tolerances for Individual Errors", Beuth , 1978
- [4] T.C.Jao, M.T.Devlin, et al., “ Influence of Surface Roughness on Gear Pitting Behavior”,Elsevier, 2004.
- [5] T.C.Jao., M.T.Devlin., et al., “ Influence of Surface Roughness on Gear Pitting Behavior”,Elsevier, 2004.
- [6] M.A.Alfares,A.H.Falah and A.H.Alkholi, "Clearance Distribution of Misaligned Gear Coupling Teeth Considering Crowning and Geometry Variations", Mechanism and Machine Theory,41, pp 1258-1272, Elsevier, 2006.

[7] SKF, “General Catalogue”, SKF 2003.

[8] E.Chermet., “Contribution à l’Analyse et à la Modélisation des Ecart Géométriques sur les Dentures d’Engrenages Cylindriques Taillés par Fraise Mère”, Thèse de docteur ingénieur: Institut des Sciences Appliquées de Lyon, 228p, 1997.

[9] E.Chermet., and J.L.Merigard., “Modélisation des Ecart Géométriques Générés par le Taillage par Fraise Mère des Dentures d’Engrenages Cylindriques-Parties I et II”, Congrès Mondial des engrenages et des Transmissions de Puissance, Paris, 21p, 1999.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION

L'objectif principal de ce travail était de développer des méthodes pratiques simples pour estimer l'effet des tolérances de fabrication, la variation dans les durées limites de fatigue du matériau et l'état de surfaces des dentures sur la performance des engrenages en général, et plus particulièrement les engrenages fins.

Plusieurs méthodes et procédures ont été développées :

- Formulation exacte (alternative à celle de la norme ISO) de l'équation déterminant la déviation d'alignement totale d'engrènement.
- Procédure d'optimisation déterministique (alternative aux méthodes classiques de correction des dentures (voir chapitre III)) permettant la réduction de l'effet des facteurs de distribution de la charge longitudinale sur la performance des engrenages
- Méthode statistique analytique basée sur la série de Taylor permettant la détermination (par des formules simples et pratiques) des statistiques des différents paramètres de précision des engrenages fins qui sont nécessaires pour la prédiction de la durée de vie des systèmes à engrenages, ainsi que leurs fiabilités.
- Méthode numérique de Monte Carlo, permettant la validation du modèle analytique développé.
- Méthode analytique approximative (mais pratique) de calcul de fiabilité et du coefficient de sécurité des mécanismes à engrenages. Cette dernière est basée sur la théorie d'interférence des contraintes appliquées et celles admissibles qui utilise comme données de base les statistiques estimées par les méthodes théoriques (citées ci-dessus) ou mesurées (voir chapitres III et V)
- Méthode exacte de conception par optimisation probabiliste connue sous le nom de (PDO). Elle utilise les procédures d'optimisation stochastique pour la prédiction des paramètres de conception des engrenages.

Cependant, et d'une façon générale les points suivants ont été retenus :

- Pour des engrenages semblables ayant le même matériau et sollicités à un même niveau de contraintes les engrenages fins auront des facteurs plus élevés de la répartition de la charge longitudinale dont la déformation élastique est petite comparé aux erreurs de fabrication. Par conséquent, pour une performance équivalente les engrenages fins doivent être de plus haute qualité.

- L'emploi de l'analyse par la méthode C du standard ISO avec des erreurs de déviation d'alignement estimées à partir des formules simplifiées ou sans prendre compte des composantes de déviation d'alignement de fabrication et de déformation peut excessivement surestimer la performance des engrenages fins. Les tolérances d'alignement des logements du carter (alésages des roulements) et la déviation d'alignement d'engrènement due aux déflexions des roulements et des arbres sont avérées significatives dans les boîtes de vitesse étudiées. Ainsi, il n'est pas en général valide de supposer, comme dans la norme ISO, que la valeur efficace de la déviation d'alignement de manufacture (f_{ma}) est égale à la tolérance $1.0 T_{\beta}$. Des valeurs raisonnables devraient être estimées à partir des Equations.III.42 à III.47.

- les résultats de la méthode analytique exacte (voir Annexe.A) sont en bon accord avec ceux calculés par la méthode de Monte Carlo dont l'interaction entre K_V , $K_{H\beta}$, et $K_{H\alpha}$ est automatiquement prise en considération. L'erreur maximale de la méthode analytique "exacte" dans l'estimation de $\sigma(\sigma_H)$ et $\sigma(\sigma_F)$ est de l'ordre 10%. D'autre part, la méthode analytique simplifiée décrite ci-dessus montre une erreur maximale d'ordre de 30%. Approximativement les mêmes valeurs sont cependant également trouvés par la méthode de Monte Carlo si l'interaction entre K_V , $K_{H\beta}$ et $K_{H\alpha}$ est enlevée. Néanmoins, l'erreur additionnelle provoquée par la méthode analytique simplifiée est due à la négligence de l'effet de l'interaction entre les paramètres (variables) et non pas à une imperfection de la méthode analytique en elle-même. Cette méthode simplifiée s'est cependant avérée tout à fait précise (erreur moins de 10%) pour des engrenages de précision

plus élevée (DIN 7 et mieux) quand la supposition de "petite" variabilité peut plus facilement être justifiée.

- L'utilisation des procédures d'optimisation est très bénéfique et peut être employée facilement pendant l'étape de conception pour corriger à un certain niveau les facteurs de la répartition des charges et par conséquent la performance des engrenages. Pour le cas spécifique de ce travail il est clair qu'une augmentation de capacité de charge de l'ordre de 100% est obtenue. Les résultats obtenus de cette procédure montre qu'elle peut remplacer les méthodes classiques (coûteuses) de correction des dentures (bombée longitudinale, correction linéaire, ... etc.)
- De l'analyse expérimentale il s'avère que, la majorité des erreurs individuelles de fabrication ont des distributions proches de la normale excepté les erreurs de l'angle d'hélice et les excentricités de roulements. Ces dernières ont montrées approximativement des distributions normales pliées.
- Les engrenages inspectés dans ce travail étaient prévus avoir un grade de précision équivalent à DIN 8, mais en réalité étaient d'une qualité DIN 10.

RECOMMANDATIONS

En tenant compte de la valeur scientifique qui découle de ce travail et en prenant en considération tous les résultats obtenus dans ce manuel les remarques suivantes sont jugées utiles pour des futurs travaux de recherche :

- 1/ Etude expérimentale de la fatigue des systèmes à engrenages.
- 2/ Etude détaillée sur les facteurs variables et plus particulièrement ceux affectant les limites d'endurance des matériaux. Ceci peut améliorer la prédiction des contraintes admissibles.

- 3/ La charge transmise est considérée constante il est ainsi souhaitable de considérer des charges variables délibérées (programmées) afin d'étudier les effets des spectres de la charge transmise.
- 4/ Application à grande échelle des procédures d'optimisation et plus particulièrement la méthode de conception par optimisation probabiliste (PDO).

ANNEXE A :

MESURES DES ERREURS DE FABRICATION

Tableau.A.1. Erreur de l'Angle d'Hélice. $f_{H\beta 1}$ (μm)

N°	Erreur		Moyenne		Ecart type		N°	Erreur		Moyenne		Ecart type	
	FG	FD	FG	FD	FG	FD		FG	FD	FG	FD	FG	FD
0	10,88	-27,0	11,25	-18,0	10,34	10,14	6	40,66	-11,9	18,71	-22,1	14,85	13,46
	26,06	-29,1						11,30	-29,6				
	11,25	-5,82						0,50	-40,2				
	-3,19	-10,3						22,37	-6,65				
1	24,50	-22,8	10,48	-22,4	10,44	7,55	7	22,41	-7,56	9,05	-19,9	8,90	10,67
	16,00	-31,0						4,34	-26,5				
	-2,32	-25,5						-1,54	-33,9				
	3,75	-10,4						11,00	-11,9				
2	-3,00	-36,5	9,36	-23,6	10,30	10,10	8	8,41	-24,0	9,57	-20,8	8,33	6,05
	17,30	-23,4						23,4	-29,1				
	21,55	-8,25						5,00	-15,0				
	1,60	-26,1						1,50	-15,0				
3	-19,5	-36,9	7,23	-24,2	18,18	12,72	9	-9,61	-21,0	3,90	-23,1	12,9	9,72
	14,50	-15,4						-7,46	-9,25				
	30,50	-8,15						21,00	-26,0				
	3,36	-36,5						11,66	-36,3				
4	15,25	-10,6	13,11	-19,2	5,13	7,66	10	2,35	-16,0	16,07	-16 ;0	9,36	6,24
	13,20	-27,3						16,76	-7,50				
	5,00	-26,3						28,79	-15,4				
	19,00	-12,5						16,38	-25,1				
5	34,10	-12,2	20,8	-15,2	15,71	11,34	11	5,20	-26,5	9,56	-18,1	5,59	5,64
	38,55	-34,4						15,68	-15,8				
	2,95	-8,31						15,47	-11,0				
	7,50	-5,71						2,87	-19,0				

Tableau.A.1. Erreur de l'Angle d'Hélice du Pignon. $f_{H\beta 1}$ (μm) (Suite)

N°	Erreur		Moyenne		Ecart type		N°	Erreur		Moyenne		Ecart type	
	FG	FD	FG	FD	FG	FD		FG	FD	FG	FD	FG	FD
12	23,00	-20,5	10,40	-22,0	14,91	11,59	17	12,15	-15,4	14,55	-20,0	3,95	2,88
	27,38	-41,0						12,94	-23,2				
	-5,79	-16,5						11,74	-21,4				
	-3,00	-10,0						21,35	-20,0				
13	28,45	-12,1	13,30	-17,3	14,65	10,55	18	19,00	-10,2	6,93	-21,0	12,00	9,33
	25,90	-34,6						-3,10	-22,5				
	-7,10	-15,9						-6,70	-35,3				
	5,94	-6,48						18,70	-16,0				
14	2,39	-33,7	10,15	-24,3	9,96	5,50	19	33,62	-24,7	15,76	-21,5	15,37	13,34
	16,30	-20,3						27,72	-40,0				
	23,15	-20,7						-3,50	-18,6				
	-1,25	-22,7						5,20	-2,8				
15	22,26	-5,00	13,50	-20,5	12,01	10,34	20	10,5	0,00	10,66	-21,5	20,58	19,41
	1,00	-21,9						-19,1	-5,45				
	2,40	-34,1						12,10	-46,5				
	28,35	-21,0						39,10	-34,1				
16	6,95	-17,7	7,08	-17,0	3,52	2,93							
	12,35	-20,6											
	6,57	-12,5											
	2,45	-16,7											

Moyenne des erreurs des 84 flancs gauches = 13,79 μm

Ecart type des erreurs des 84 flancs gauches = 10,26 μm

Moyenne des erreurs des 84 flancs droits = 20,36 μm

Ecart type des erreurs des 84 flancs droits = 10,44 μm .

Tableau.A.2. Erreur de l'Angle d'Hélice de la Roue. $f_{H\beta 2}$ (μm)

N°	Erreur		Moyenne		Ecart type		N°	Erreur		Moyenne		Ecart type	
	FG	FD	FG	FD	FG	FD		FG	FD	FG	FD	FG	FD
0	-18,7	-3,46	-13,5	1,30	10,16	5,30	6	14,82	-25,2	18,28	-22,7	6,80	2,48
	-16,4	8,87						26,50	-22,0				
	3,68	3,68						22,77	-19,0				
	-22,6	-3,89						9,04	-24,7				
1	29,00	-32,9	15,81	-27,4	9,64	10,73	7	-1,00	-15,7	-7,16	1,45	5,03	10,10
	21,06	-24,5						-6,87	10,5				
	6,18	-40,5						-5,78	5,04				
	7,00	-11,6						-15,0	5,93				
2	-12,0	-2,37	-5,40	-10,4	8,99	5,35	8	14,91	-24,8	18,53	-32,2	8,93	10,31
	-16,5	-11,0						6,6	-19,6				
	3,45	-10,7						21,8	-40,3				
	3,46	-17,4						30,9	-44,3				
3	8,96	-36,3	28,06	-29,2	19,32	13,42	9	23,2	-19,0	22,87	-26,0	7,11	5,70
	30,25	-12,1						16,6	-21,7				
	46,45	-21,4						17,32	-32,1				
	26,59	-47,0						17,32	-31,0				
4	25,50	-33,0	25,24	-31,7	6,14	4,96	10	20,38	-29,1	14,86	-28,9	4,21	2,96
	25,27	-31,9						8,55	-32,9				
	33,77	-37,8						14,82	-29,0				
	16,41	-24,0						15,69	-24,5				
5	7,22	-21,7	18,54	-23,3	7,36	3,59	11	24,14	-28,3	24,8	-29,2	1,18	1,12
	27,77	-23,2						26,77	-30,9				
	18,81	-19,3						23,79	-29,4				
	20,36	-29,0						24,30	-28,0				

Tableau.A.2. Erreur de l'Angle d'Hélice de la Roue. $f_{H\beta 2}$ (μm) (Suite)

N°	Erreur		Moyenne		Ecart type		N°	Erreur		Moyenne		Ecart type	
	FG	FD	FG	FD	FG	FD		FG	FD	FG	FD	FG	FD
12	12,89	-19,7	13,27	-30,0	5,39	6,20	17	22,11	-28,0	20,06	-33,7	2,44	5,92
	10,41	-37,4						16,64	-32,5				
	7,73	-35,0						18,86	-43,5				
	22,05	-27,7						22,62	-30,5				
13	30,23	-26,8	24,31	-20,3	6,77	3,88	18	-10,2	-6,32	-11,6	-9,37	1,82	2,15
	27,68	-18,6						-11,2	-11,4				
	26,5	-16,7						-14,7	-11,4				
	12,82	-19,6						10,43	-8,36				
14	-18,6	-4,41	-7,44	0,15	8,45	6,80	19	18,19	-30,1	20,58	-27,8	3,43	5,52
	4,91	10,97						26,50	-20,0				
	4,55	0,73						18,82	-35,6				
	-10,8	-6,7						18,82	-26,0				
15	11,95	5,32	2,83	-0,83	7,13	7,89	20	18,91	-29,9	22,70	-25,3	4,97	2,78
	2,55	-13,1						25,50	-22,4				
	-7,95	-2,32						29,36	-24,5				
	4,77	6,81						17,04	-24,5				
16	22,57	-20,8	19,03	-27,2	3,16	3,75							
	14,19	-30,5											
	20,96	-28,8											
	18,41	-28,6											

Moyenne des erreurs des 84 flancs gauches = 17,45 μm

Ecart type des erreurs des 84 flancs gauches = 8,76 μm

Moyenne des erreurs des 84 flancs droits = 21,96 μm

Ecart type des erreurs des 84 flancs droits = 11,10 μm .

Tableau.A.3. Erreur du Profil du Pignon. f_{f1} (μm)

N°	Erreur		Moyenne		Ecart type		N°	Erreur		Moyenne		Ecart type	
	FG	FD	FG	FD	FG	FD		FG	FD	FG	FD	FG	FD
0	16,00	11,00	15,25	14,50	0,83	2,69	6	13,00	9,00	11,50	6,00	0,87	1,87
	16,00	13,00						11,00	6,00				
	14,00	18,00						11,00	5,00				
	15,00	16,00						11,00	4,00				
1	11,00	9,00	11,00	10,50	2,45	1,50	7	15,00	15,00	12,50	14,00	1,66	1,87
	9,00	9,00						11,00	14,00				
	15,00	12,00						11,00	11,00				
	9,00	12,00						13,00	16,00				
2	15,00	11,00	16,75	8,50	2,86	1,66	8	12,00	9,00	13,00	12,25	2,92	3,42
	20,00	7,00						17,00	9,00				
	19,00	7,00						14,00	17,00				
	13,00	9,00						9,00	14,00				
3	10,00	9,00	11,75	6,50	2,38	1,50	9	12,00	12,00	13,25	12,25	1,64	2,49
	13,00	6,00						12,00	9,00				
	15,00	5,00						13,00	12,00				
	9,00	6,00						16,00	16,00				
4	11,00	9,00	12,50	6,00	1,12	2,24	10	11,00	9,00	10,25	11,25	0,83	0,92
	13,00	5,00						11,00	12,00				
	14,00	3,00						10,00	14,00				
	12,00	7,00						9,00	10,00				
5	10,00	7,00	9,75	11,00	1,79	3,08	11	11,00	14,00	9,75	16,75	1,09	2,17
	12,00	9,00						10,00	16,00				
	10,00	14,00						10,00	17,00				
	7,00	14,00						8,00	20,00				

Tableau.A.3. Erreur du Profil du Pignon. f_{f1} (μm) (Suite)

N°	Erreur Erreur		Moyenne Moyenne		Ecart type Ecart type		N° N°	Erreur Erreur		Moyenne Moyenne		Ecart type Ecart type	
	FG	FD	FG	FD	FG	FD		FG	FD	FG	FD	FG	FD
12	11,00	11,00	9,00	1,58	1,30	3,49	17	11,00	8,00	10,75	9,50	0,43	1,12
	7,00	9,00						10,00	10,00				
	8,00	6,00						11,00	11,00				
	10,00	7,00						11,00	9,00				
13	16,00	11,00	12,75	10,25	2,77	2,17	18	11,00	16,00	12,50	13,25	2,69	2,28
	10,00	10,00						16,00	11,00				
	15,00	7,00						14,00	15,00				
	10,00	13,00						9,00	11,00				
14	13,00	11,00	13,00	17,50	0,71	13,05	19	12,00	9,00	11,25	10,25	0,83	1,30
	14,00	11,00						12,00	11,00				
	12,00	8,00						11,00	12,00				
	13,00	40,00						10,00	9,00				
15	7,00	14,00	10,50	13,00	3,04	0,71	20	15,00	11,00	15,25	8,75	2,28	1,92
	8,00	13,00						13,00	6,00				
	14,00	13,00						14,00	8,00				
	13,00	12,00						19,00	10,00				
16	12,00	14,00	12,25	14,25	1,48	1,09							
	13,00	13,00											
	14,00	14,00											
	10,00	16,00											

Moyenne des 168 erreurs de profil = 11,66 μm

Ecart type des 168 erreurs de profil = 3,88 μm .

Tableau.A.4. Erreur du Profil de la Roue. f_2 (μm)

N°	Erreur		Moyenne		Ecart type		N°	Erreur		Moyenne		Ecart type	
	Erreur		Moyenne		Ecart type			Erreur		Moyenne		Ecart type	
	FG	FD	FG	FD	FG	FD		FG	FD	FG	FD	FG	FD
0	2,50	5,00	4,13	5,38	1,02	1,08	6	6,50	6,00	6,88	7,38	1,08	0,82
	4,00	5,50						8,50	7,50				
	5,00	7,00						7,00	8,00				
	5,00	4,00						5,50	8,00				
1	9,00	7,50	7,50	10,63	0,94	4,85	7	15,00	3,50	11,38	4,50	2,86	1,70
	7,50	8,50						7,50	2,50				
	6,50	7,50						10,00	7,00				
	7,00	19,00						13,00	5,00				
2	9,00	5,00	10,38	5,00	1,92	1,41	8	5,00	5,00	5,00	4,50	0,61	0,61
	12,50	7,00						6,50	3,50				
	12,00	5,00						5,00	4,50				
	8,00	3,00						5,50	5,00				
3	10,00	7,00	9,25	6,00	0,83	1,46	9	10,00	6,00	7,38	4,00	1,85	1,92
	9,00	3,50						5,00	3,00				
	8,00	7,00						6,50	7,00				
	10,00	6,50						8,00	2,50				
4	8,50	4,50	6,75	3,88	1,30	0,41	10	9,50	12,00	9,75	11,25	0,25	0,83
	5,50	3,50						10,00	10,00				
	7,50	3,50						9,50	12,00				
	5,50	4,00						10,00	11,00				
5	6,500	11,00	6,50	10,75	0,35	0,56	11	11,00	7,500	5,86	7,88	1,63	1,29
	7,00	10,00						10,00	6,50				
	6,00	11,50						10,00	10,00				
	6,50	10,50						8,00	7,50				

Tableau.A.4. Erreur du Profil de la Roue. f_{f2} (μm) (Suite)

N°	Erreur		Moyenne		Ecart type		N°	Erreur		Moyenne		Ecart type	
	FG	FD	FG	FD	FG	FD		FG	FD	FG	FD	FG	FD
12	6,50	7,50	5,75	6,25	1,30	1,52	17	8,50	2,50	7,25	3,50	0,83	1,46
	4,50	8,00						6,50	2,50				
	7,50	4,50						6,50	3,00				
	4,50	5,00						7,50	6,00				
13	7,00	7,00	7,25	6,13	0,83	1,67	18	13,00	14,00	13,00	10,00	0,71	2,42
	8,00	8,00						13,00	9,50				
	8,00	3,50						14,00	4,50				
	6,00	6,00						12,00	6,50				
14	9,50	9,00	9,00	6,63	1,37	2,16	19	5,00	8,00	8,38	6,63	2,16	1,34
	7,50	8,50						8,50	7,50				
	8,00	5,00						11,00	4,50				
	11,00	4,00						9,00	6,50				
15	5,50	4,00	5,38	6,75	0,74	1,68	20	4,00	9,00	5,38	7,63	1,34	2,48
	4,50	7,00						4,50	11,00				
	6,50	8,50						7,50	5,50				
	5,00	7,50						5,50	5,00				
16	6,50	9,500	7,25	4,00	3,05	2,30							
	11,50	4,50											
	8,00	5,00											
	3,00	3,50											

Moyenne des 168 erreurs de profil = 7,16 μm

Ecart type des 168 erreurs de profil = 2,80 μm .

Tableau.A.5. Erreur du pas du pignon. f_{pb1} (μm)

N°	f_{pb1}	Moy	STD												
0	10,3	10,15	0,15	6	8,0	7,55	0,45	12	12,9	19,45	0,70	18	11,6	12,35	4,00
	10,0				7,1				26,0				13,1		
1	9,5	9,50	0,00	7	10,4	10,05	0,35	13	12,1	12,30	5,35	19	10,6	10,45	0,30
	9,5				9,7				12,5				10,3		
2	11,9	13,95	2,05	8	10,4	10,95	0,55	14	7,8	9,75	4,45	20	10,3	11,15	0,45
	16,0				11,5				11,7				12,0		
3	13,3	13,65	0,35	9	10,8	11,10	0,30	15	9,9	9,20	0,45				
	14,0				11,4				8,5						
4	8,50	9,70	1,20	10	13,4	12,35	1,05	16	9,1	8,70	0,55				
	10,9				11,3				8,3						
5	9,2	8,30	0,90	11	8,3	10,60	2,30	17	9,7	8,70	0,10				
	7,4				12,9				7,7						

Moyenne des 42 Mesures du Pas = 10,95 μm

Ecart Type des 42 Mesures du Pas = 3,06 μm .

Tableau.A.6. Erreur du pas de la Roue. f_{pb2} (μm)

N°	f_{pb2}	Moy	STD	N°	f_{pb2}	Moy	STD	N°	f_{pb2}	Moy	STD	N°	f_{pb2}	Moy	STD
0	6,4	6,55	0,15	6	9,1	7,35	1,75	12	6,4	7,10	0,70	18	16,3	12,3	4,00
	6,7				5,6				7,8				8,3		
1	13,2	11,10	2,10	7	7,8	7,40	0,40	13	7,7	13,05	5,35	19	7,4	7,10	0,30
	9,0				7,0				18,4				6,8		
2	8,8	18,10	9,30	8	13,9	12,80	1,1	14	9,7	14,15	4,45	20	5,4	5,85	0,45
	27,4				11,7				18,6				6,3		
3	6,4	6,50	0,10	9	9,9	11,95	2,05	15	7,3	6,85	0,45				
	6,6				14,0				6,4						
4	9,30	9,10	0,20	10	6,9	6,85	0,05	16	5,7	6,25	0,55				
	8,9				6,8				6,8						
5	8,7	9,00	0,3	11	12,7	10,65	2,30	17	5,7	5,80	0,10				
	9,3				8,6				5,9						

Moyenne des 42 Mesures du Pas = 9,32 μm

Ecart Type des 42 Mesures du Pas = 4,34 μm .

Tableau.A.7. Erreur de Concentricité Maximal du Pignon. F_{r1} (μm)

N°	F_{r1}								
0	62,5	5	56,2	10	67,1	15	64,0	20	94,2
1	38,7	6	55,1	11	75,0	16	62,9		
2	123,8	7	72,7	12	81,9	17	59,1		
3	111,8	8	103,3	13	102,9	18	96,7		
4	55,3	9	87,5	14	74,6	19	90,1		

Moyenne des 21 erreurs de concentricité = 77,86 μm

Ecart type des 21 erreurs de concentricité = 21,40 μm .

Tableau.A.8. Erreur de Concentricité Maximal de la Roue. F_{r2} (μm)

N°	F_{r2}								
0	55,3	5	45,1	10	44,5	15	53,4	20	45,8
1	48,8	6	37,3	11	57,4	16	42,0		
2	78,4	7	58,8	12	48,6	17	65,7		
3	56,3	8	72,1	13	47,2	18	42,5		
4	22,3	9	45,9	14	87,5	19	45,6		

Moyenne des 21 erreurs de concentricité = 52,40 μm

Ecart type des 21 erreurs de concentricité = 14,15 μm .

Tableau.A.9. Valeurs de Rugosité des Dents du Pignon. R_{z1} (μm)

N°	R_{z1}	Moy	STD												
0	7,4	3,85	2,16	6	3,2	3,25	0,64	12	2,8	3,45	0,75	18	4,2	4,95	1,11
	2,0														
	3,8														
	2,2														
1	4,2	4,30	0,94	7	3,8	3,2	0,73	13	3,4	3,20	0,74	19	4,8	3,85	1,18
	5,8														
	4,0														
	3,2														
2	3,0	3,80	0,47	8	2,2	3,10	0,59	14	4,6	4,50	1,23	20	3,8	3,60	0,24
	4,0														
	4,0														
	4,2														
3	3,6	4,25	1,26	9	3,6	3,45	0,52	15	3,4	3,00	0,31				
	6,4														
	3,2														
	3,8														
4	3,8	3,20	0,60	10	2,8	3,60	1,35	16	3,6	3,10	0,33				
	2,6														
	3,8														
	2,6														
5	3,0	3,70	0,54	11	2,8	2,80	0,14	17	4,4	3,75	0,43				
	3,4														
	4,4														
	4,0														

Moyenne des 84 mesures de rugosité = 3,6 μm Ecart type des 84 mesures de rugosité = 1,04 μm .Tableau.A.10. Valeurs de Rugosité des Dents de la Roue. R_{z2} (μm)

N°	R_{z1}	Moy	STD												
0	4,0	4,35	0,50	6	6,2	3,70	2,51	12	2,8	3,30	0,78	18	4,2	3,25	0,47
	4,2														
	5,2														
	4,0														
1	3,0	3,10	0,10	7	4,8	3,65	0,80	13	4,8	3,40	0,83	19	4,8	3,00	0,63
	3,0														
	3,2														
	3,2														
2	4,0	4,00	0,28	8	3,0	3,55	0,71	14	3,8	4,85	1,82	20	2,6	2,85	0,82
	3,6														
	4,4														
	4,0														
3	2,2	2,00	0,83	9	3,2	3,00	0,42	15	5,6	3,65	1,28				
	2,4														
	0,6														
	2,8														
4	4,6	3,35	0,75	10	4,6	3,50	0,73	16	5,8	3,90	1,10				
	3,0														
	2,6														
	3,2														
5	4,0	3,20	0,51	11	3,0	5,15	1,33	17	4,0	3,45	0,47				
	3,2														
	3,0														
	2,6														

Moyenne des 84 mesures de rugosité = 3,55 μm Ecart type des 84 mesures de rugosité = 1,19 μm .

Tableau.A.11. Les Erreurs de l'Ecartement sur k Dents du Pinion A_{w1} (μm)
 W_{k1} nominale= 11,823 mm.

N°	A_{w1}	Moy	ST D	N	A_{w1}	Moy	ST D	N	A_{w1}	Moy	STD	N°	A_{w1}	Moy	STD
0	-99 -99 -95 -96	-97,3	1,8	6	-94 -92 -90 -96	-93,0	2,2	12	-108 -106 -107 -105	- 106,5	1,1	18	-112 -116 -112 -110	- 112,5	2,2
1	-126 -134 -133 -128	-130,5	3,0	7	-92 -94 -96 -100	-95,5	3,0	13	-121 -118 -114 -112	- 116,3	3,5	19	-128 -135 -135 -141	- 134,8	4,6
2	-112 -110 -113 -114	-112,3	1,5	8	-94 -90 -92 -99	-93,8	1,8	14	-100 -116 -114 -111	- 110,3	6,2	20	-118 -114 -109 -109	- 112,5	3,8
3	-141 -128 -127 -131	-137,8	5,5	9	-122 -123 -123 -131	- 124,8	3,6	15	-112 -119 -116 -118	- 116,3	2,7				
4	-110 -94 -108 -100	-103	6,4	10	-104 -100 -104 -106	- 103,5	2,2	16	-100 -102 -108 -110	-105	4,1				
5	-134 -132 -133 -127	-131,5	2,7	11	-104 -104 -106 -101	- 103,8	1,8	17	-116 -112 -122 -120	- 117,5	3,8				

Moyenne des 84 Déviations = -112 μm

Ecart type (STD) des 84 Déviations = 13,12 μm .

Tableau.A12. Les Déviations de l'Ecartement sur k Dents de la Roue A_{w2} (μm)
 W_{k2} nominale= 24,649 mm.

N°	A_{w2}	Moy	ST D	N	A_{w2}	Moy	ST D	N	A_{w2}	Moy	STD	N°	A_{w2}	Moy	STD
0	-61 -73 -61 -67	-65,5	5,0	6	-21 -21 -34 -21	-24,3	5,6	12	-33 -39 -35 -45	-38,0	4,6	18	-23 -33 -35 -33	-31,0	4,7
1	-23 -29 -14 -33	-24,8	7,2	7	-20 -29 -35 -28	-28,0	5,3	13	-25 -43 -27 -41	-34,0	8,1	19	-20 -15 -18 -16	-17,3	1,9
2	-39 -41 -49 -51	-45,0	5,1	8	-61 -65 -67 -73	-66,5	4,3	14	-63 -55 -53 -56	-56,8	3,8	20	-51 -43 -41 -45	-45,0	3,7
3	-70 -71 -66 -73	-70,0	2,5	9	-35 -28 -49 -23	-33,8	9,8	15	-27 -33 -24 -40	-31,0	6,1				
4	-27 -29 -23 -26	-26,3	2,2	10	-20 -11 -27 -27	-21,3	6,8	16	-45 -47 -41 -33	-41,5	5,4				
5	-37 -43 -10 -15	-26,3	14	11	-55 -43 -48 -47	-48,3	4,3	17	-43 -33 -37 -23	-34,0	7,3				

Moyenne des 84 Déviations = -38,49 μm

Ecart type (STD) des 84 Déviations = 16,27 μm .

Tableau.A.13. Les Mesures des Battements (excentricité) de la Bague extérieure des Roulements à Billes 6007

Angle de phase	Battement (μm)				Battement Moyen	Ecart type Battement
90°	1,2	2,4	1,4	3,9	4,0	1,07
180°	1,9	7,2	2,2	3,7	3,75	2,11
270°	4,5	7,4	0,5	3,4	3,95	2,47
360°	6,1	5,7	1,8	2,4	4,00	1,92
Excentricité	2,67	2,61	0,49	0,7	-	-

Moyenne de l'excentricité = 0, 13 μm

Ecart type de l'excentricité = 1, 35 μm

Tableau.A.14. Les Mesures des Battements (excentricité) de la Bague intérieure des Roulements à Billes 6007

Angle de phase	Battement (μm)				Battement Moyen	Ecart type Battement
90°	4,1	4,9	1,8	1,1	2,98	3,00
180°	3,5	2,3	2,1	1,1	2,25	0,85
270°	6,7	4,0	2,6	0,5	3,45	2,25
360°	6,0	2,7	2,2	0,8	2,93	1,91
Excentricité	1,8	0,49	0,40	0,34	-	-

Moyenne de l'excentricité = 0, 41 μm

Ecart type de l'excentricité = 1, 65 μm

ANNEXE B :

***ANALYSE EXACTE DES STATISTIQUES DES
FACTEURS DE PRECISION GEOMETRIQUE***

B.1. Introduction

Les équations ci-dessous donnent les déviations exactes de K_V , K_{HB} , K_{FB} et K_{Ha} analytiquement où l'interaction entre elles est entièrement prise en considération. L'expansion des séries de Taylor dans la région "proche" des valeurs moyennes est employée afin de prévoir l'effet des "petites" variations des erreurs aléatoires (voir section.III.3).

B.2. Le Facteur Dynamique, K_V

Des séries de Taylor, en prenant seulement le premier terme, on a :

$$\begin{aligned}\Delta K_V &= \frac{\partial K_V}{\partial f_{pb}} (\Delta f_{pb} - y_{pb}) + \frac{\partial K_V}{\partial f_f} \Delta (f_f - y_f) \\ &= \overline{K_V} [a_{11} \cdot \Delta f_{pb} + a_{12} \cdot \Delta f_f]\end{aligned}$$

où,

$$a_{11} = \frac{0,925 \cdot N \cdot C' \cdot C_{v1}}{F_i \cdot \overline{K_V} \cdot K_A / b}$$

et,

$$a_{12} = \frac{0,925 \cdot N \cdot C' \cdot C_{v2}}{F_i \cdot \overline{K_V} \cdot K_A / b}$$

B.3. Le Facteur Longitudinal de la Répartition de la Charge, K_{HB}

La différentiation donne :

$$\begin{aligned}\Delta K_{HB} &= \frac{\partial K_{HB}}{\partial f_{\beta y}} \Delta f_{\beta y} + \frac{\partial K_{HB}}{\partial K_V} \left[\frac{\partial K_V}{\partial f_{pb}} (\Delta f_{pb} - y_{pb}) + \frac{\partial K_V}{\partial f_f} \Delta (f_f - y_f) \right] \\ &= \overline{K_{HB}} [a_{23} \cdot \Delta f_{\beta y} + a_{22} \cdot \Delta f_f + a_{21} \cdot \Delta f_{pb}]\end{aligned}$$

où,

$$a_{21} = -\frac{1}{2} a_{11}$$

$$a_{22} = -\frac{1}{2} a_{12}$$

$$a_{23} = \frac{1}{2 \cdot f_{\beta y}}$$

B.4. Le Facteur Longitudinal de la Répartition de Charge, K_{FB}

$$\begin{aligned}\Delta K_{F\beta} &= \frac{\partial K_{FB}}{\partial f_{\beta y}} \Delta f_{\beta y} + \frac{\partial K_{FB}}{\partial K_V} \left[\frac{\partial K_V}{\partial f_{pb}} (\Delta f_{pb} - y_{pb}) + \frac{\partial K_V}{\partial f_f} \Delta (f_f - y_f) \right] \\ &= \overline{K_{FB}} \left[N (-a'_{21} \cdot \Delta f_{pb} - a'_{22} \cdot \Delta f_f + a'_{23} \cdot \Delta f_{\beta y}) \right]\end{aligned}$$

où,

$$a'_{21} = N \cdot a_{21}$$

$$a'_{22} = N \cdot a_{22}$$

$$a'_{23} = N \cdot a_{23}$$

B.5. Le Facteur Transversal de la Répartition de la charge, $K_{H\alpha}$ ($K_{F\alpha}$)

$$\begin{aligned}\Delta K_{H\alpha} &= \Delta K_{F\alpha} = \frac{\partial K_{H\alpha}}{\partial f_{pb}} (\Delta f_{pb} - y_{pb}) + \frac{\partial K_{H\alpha}}{\partial (K_V - K_{H\beta})} [K_V \cdot \Delta K_{H\beta} + K_{H\beta} \cdot \Delta K_V] \\ &= \overline{K_{H\alpha}} [a_{31} \cdot \Delta f_{pb} + a_{32} \cdot \Delta f_f + a_{33} \cdot \Delta f_{\beta y}]\end{aligned}$$

où,

$$a_{31} = \frac{(\overline{K_{H\alpha}} - 0,9)}{\overline{K_{H\alpha}}} \cdot \left(\frac{1}{f_{pb}} - a_{21} \right)$$

$$a_{32} = - \frac{(\overline{K_{H\alpha}} - 0,9)}{\overline{K_{H\alpha}}} \cdot a_{22}$$

$$a_{33} = - \frac{(\overline{K_{H\alpha}} - 0,9)}{\overline{K_{H\alpha}}} \cdot a_{23}$$

B.7. La Contrainte de Contact, σ_H

La différentiation donne,

$$\begin{aligned}\Delta \sigma_H &= \frac{\overline{\sigma_H}}{2} \cdot \left[\frac{\Delta K_V}{K_V} + \frac{\Delta K_{H\beta}}{K_{H\beta}} + \frac{\Delta K_{H\alpha}}{K_{H\alpha}} \right] \\ &= \frac{\overline{\sigma_H}}{2} \cdot [A_1 \cdot \Delta f_{pb} + A_2 \cdot \Delta f_f + A_3 \cdot \Delta f_{\beta y}]\end{aligned}$$

où,

$$A_1 = a_{11} - a_{21} + a_{31}$$

$$A_2 = a_{12} - a_{22} - a_{32}$$

$$A_3 = a_{23} - a_{33}$$

B.8. Les Contraintes de Flexion, σ_{F1} , σ_{F2}

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{F1} &= \overline{\sigma_{F1}} \cdot \left[\frac{\Delta K_V}{K_V} + \frac{\Delta K_{H\beta}}{K_{H\beta}} + \frac{\Delta K_{H\alpha}}{K_{H\alpha}} \right] \\ &= \overline{\sigma_{F1}} \cdot [A'_1 \cdot \Delta f_{pb} + A'_2 \cdot \Delta f_f + A'_3 \cdot \Delta f_{\beta y}] \end{aligned}$$

de même,

$$\Delta\sigma_{F2} = \overline{\sigma_{F2}} \cdot [A'_1 \cdot \Delta f_{pb} + A'_2 \cdot \Delta f_f + A'_3 \cdot \Delta f_{\beta y}]$$

où,

$$A'_1 = a_{11} - a'_{21} + a_{31}$$

$$A'_2 = a_{12} - a'_{22} - a_{32}$$

$$A'_3 = a_{13} - a'_{23}$$

L'écart type de chaque paramètre (K_V , $K_{H\beta}$, $K_{F\beta}$, ...etc.) peut être obtenu comme suit :

$$\sigma K_V = \overline{K_V} \cdot \sqrt{a^2_{11} \cdot \sigma^2 f_{pb} + a^2_{12} \cdot \sigma^2 f_f}$$

$$\sigma K_{F\beta} = \overline{K_{F\beta}} \cdot \sqrt{a'^2_{21} \cdot \sigma^2 f_{pb} + a'^2_{22} \cdot \sigma^2 f_f + a'^2_{23} \cdot \sigma^2 f_{\beta y}}$$

$$\sigma K_{H\beta} = \overline{K_{H\beta}} \cdot \sqrt{a^2_{21} \cdot \sigma^2 f_{pb} + a^2_{22} \cdot \sigma^2 f_f + a^2_{23} \cdot \sigma^2 f_{\beta y}}$$

$$\sigma K_{H\alpha} = \overline{K_{H\alpha}} \cdot \sqrt{a^2_{31} \cdot \sigma^2 f_{pb} + a^2_{32} \cdot \sigma^2 f_f + a^2_{33} \cdot \sigma^2 f_{\beta y}}$$

$$\sigma(\sigma_H) = \frac{\overline{\sigma_H}}{2} \cdot \sqrt{A_1^2 \cdot \sigma^2 f_{pb} + A_2^2 \cdot \sigma^2 f_f + A_3^2 \cdot \sigma^2 f_{\beta y}}$$

$$\sigma(\sigma_{F1,2}) = \overline{\sigma_{F1,2}} \cdot \sqrt{A'^2_{1,2} \cdot \sigma^2 f_{pb} + A'^2_{2,2} \cdot \sigma^2 f_f + A'^2_{3,2} \cdot \sigma^2 f_{\beta y}}$$

Abstract

The modern gearing standards (eg.ISO/DIS 6336, DIN/3990, BS 436) currently recommended for the estimation of stresses in reel gears, give approximate formulas for the calculation of gear geometrical precision factors, especially those of fine pitch gears.

In this work, all possible causes of tooth alignment deviation are discussed, and an exact formulation is presented for a reel speed reducer for both straddle and overhung configurations. However, an alternative generalised approach based on deterministic optimisation procedure has been applied in order to minimise the effect of load distribution factors of fine pitch gears after the design step and without modifying the design parameters or their production process.

Two probabilistic methods are developed in order to establish a statistical analysis for the applied and permissible stresses used in ISO/DIS 6336 procedure. These give a more realistic estimate of the actual stresses and strengths for given (or assumed) random distributions of the individual manufacturing errors. In addition, a probability design optimisation procedure (PDO) has been applied for estimating the reliability of gear systems.

Finally, the elemental manufacturing errors in single-stage commercial gearbox components were fully inspected, statistically assessed and compared with standard data sources. These results are then used to validate the methods developed in this work.

Keywords: gear, fatigue, stress, uncertainties, random, statistics, life, optimisation and reliability.

ملخص

المعايير الحديثة للتعشيقات المسننة (ISO/DIS 6336, DIN/ 3990, BS 436) حاليا المزكاة لتقويم الاجهاد ات في التعشيقات المسننة الواقعية تعطي صيغ تقريبية لحساب العوامل الهندسية للدقة للتعشيقات المسننة و خاصة تلك المسننة الرفيعة.

في هذا العمل، كل الأسباب الممكنة لانحراف صف السن نقشت و صيغة صحيحة قدمت لمخفض سرعة حقيقي في شكل باعد الساقين و شكل متدلي. على كل حال، تم تطبيق مدخل عام بديل و مؤسس على طريقة الامثلية المحددة لغرض تقليص اثر عوامل توزيع القوة للتعشيقات المسننة الرفيعة بعد مرحلة الهندسة بدون تغيير ثوابت الهندسة او طريقة التصنيع.

طريقتان احتماليتان طورتا لغرض ترسيخ تحليل إحصائي للإجهاد المطبق والمقاوم المستعمل في طريقة ISO/DIS 6336 هاتان تعطيان أكثر واقعية لتقدير الإجهاد المطبق والمقاوم الفعلي للأخطاء الفردية للتصنيع سواء كان توزيعها معطى أو مقاس. زيادة على ذلك طبقت طريقة الأمثلية الإحصائية الهندسة (PDO) و ذلك لغرض تقدير صدق أجهزة التعشيقات المسننة.

و أخيرا، الأخطاء الفردية لعلبة مسننات اقتصادية ذات طابق واحد تم قياسها و تقديرها احتماليا و مقارنتها بمعطيات موحدة. النتائج من هذه العملية تم استعمالها لتثبيت الطرق المطورة في هذا العمل

مفتاح الحروف : تعشيق مسنن، تعب، إجهاد، مترددات، عشوائي، حياة، الأمثلية، ضمان.