REPUBLUQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEINEMENT SUPERRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF
UFAS (ALGERIE)

THESE

Présentée à la faculté des sciences

Département de mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématiques appliquées

Présentée par : ***DILMI Mourad***

Problèmes aux limites obliques et non linéaires pour les équations de Lamé

Soutenue le : 21/01/2009 **Devant la commission d'examen :**

Mr. A. AYADI	**Prof.**	**U. OUM EL BOUAGHI**	**Président**
Mr. B. MEROUANI	**Prof.**	**U.F.A. SETIF**	**Rapporteur**
Mr. M. BOUKROUCHE	**Prof.**	**U.J.M. ST-ETIENNE**	**Examinateur**
Mr. N. BENHAMIDOUCHE	**Prof.**	**U.M.B. M'SILA**	**Examinateur**
Mr. S. DRABLA	**Prof.**	**U.F.A. SETIF**	**Examinateur**

بسم الله الرحمن الرحيم

Je remercie vivement monsieur B. Mérouani, professeur à l'université Ferhat Abbas de Sétif, pour avoir assuré la direction de ce travail, et pour m'avoir apporté tous les moyens nécessaires au bon déroulement de ces travaux de thèse.

Je remercie particulièrement Monsieur A. Ayadi qui a accepté d'être le président de mon jury, messieurs S. Drabla, N. Benhamidouche et M. Boukrouche pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'être membres de jury de soutenance de ma thèse.

Enfin, je remercie toute personne ayant participé, de près ou de loin, à l'élaboration de cette thèse.

À mes parents.

Table des matières

0.1 Introduction Générale

Dans l'étude des problèmes aux limites linéaires ou non linéaire, de nombreux résultats ont déjà été obtenus dans le cas de domaines à frontières régulières [24], [1], [2]. Ces résultats permettent à l'heure actuelle des applications en mécanique et dans l'industrie [11], [15]. Par contre, l'étude d'existence, de régularités et de sigularités des solutions de problèmes aux limites dans des domaines non-réguliers, tels que des domaines avec coins et arêtes (polygone, polyèdre) par exemple est plus complexe [17, 23, 26, 27]. Ce domaine de recherche est l'aboutissement logique du précédent, et il est plus réaliste dans de multiples applications industrielles, car en pratique, les hypothèses de régularité ne sont pas toujours vérifiées, au contraire.

Des résultats d'existence et de régularité pour le Laplacien dans des domaines non réguliers (fissurés ou non) ont été obtenus pour le problème de Dirichlet dans un polygone [18, 20, 21], polyèdre [19], pour les conditions de Neumann ou les condtions à dérivées obliques [29]. Pour le système de Lamé dans une classe d'espaces de Sobolev à doubles poids par [4]. Le cas d'un domaine non homogène par [7], [5].

Le travail de cette thèse traite différents types des problèmes pour le Laplacien et le système d'élasticité dans différents domaines. Dans une première partie, nous nous interessons à l'étude des régularités des dérivées secondes dans un domaine à frontière polygonale ou polyèdrale. Dans une deuxième partie, à l'aide d'une méthode de contraction de [10] nous étudions la régularités des solutions du système de Lamé perturbé avec des conditions aux limites non linéaires sur une partie de la frontière, on généralise ici les traveux de [6]. Enfin, dans la dernière partie nous étudions l'analyse asymptotique d'un problème dynamique pour l'élasticité dans un domaine borné de dimension trois avec des conditions de frottement de type Tresca.

Dans le **premier chapitre**, nous rappelons quelques notions sur les espaces de Sobolev définis sur des domaines non réguliers, les opérateurs de traces associés à ce type de domaines et quelques propriétés dont nous aurons besoin, telles que l'extension de la formule de Green sur un polygone ou un polyèdre, ainsi que quelques autres résultats qui nous seront utiles.

Dans le **deuxième chapitre**, nous considérons un corps homogène, élastique et isotrope occupant un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^2$ à frontière polygonale rectiligne $\partial\Omega = \overset{N}{\underset{j=1}{\cup}} \overline{\Gamma}_j$, où les Γ_j sont des segments de droites ouvertes, avec

- $s_j = \overline{\Gamma}_j \cap \overline{\Gamma}_{j+1}$.
- ω_j l'angle entre Γ_j et Γ_{j+1} vers l'interieur de Ω.

Le problème est gouverné par les équations et les conditions aux limites suivantes

$$(p_1)\begin{cases} \Theta u = f\,, & \text{dans } \Omega\,; \\ u = 0, & \text{sur}\,\Gamma_j,\ \ \forall j \in D\,; \\ \left.\begin{array}{c} \gamma_j\left(u.\eta^j\right) = 0 \\ \gamma_j(\sum(u)\eta^j.\tau^j) = 0 \end{array}\right\} & \text{sur } \Gamma_j,\ \ \forall j \in G\,; \end{cases} \tag{0.0.1}$$

où Θ désigne le système de Lamé L ou le Laplacien Δ, $f = (f_1, f_2)$ est la densité des forces extérieures, et $\sum$ le tenseur des contraintes qui dépend du tenseur de déformation ε par la loi de Hook :

$$\sum(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\varepsilon\,(u))I. \tag{0.0.2}$$

Nous nous intéressons à la régularité de la solution u du problème (p_1), pour cela nous cherchons les conditions sur les données et sur les angles ω_j pour que u soit dans $H^2\left(\Omega\right)^2$. Nous montrons d'abord que le problème (p_1) admet une solution faible unique. Ensuite, nous montrons, à l'aide de l'inégalité de Caccioppoli [20], une estimation a priori dans l'espace $W(\Omega)$ (l'espace où on cherche u) . Grâce à cette inégalité nous pourrons construire l'espace d'image de $W(\Omega)$ par Θ et son orthogonal $N(\Omega)$, nous passons à l'alternative de Fredholm, nous montrons que l'espace $N(\Omega)$ est de dimension finie égale à $\sum_{j=1}^{N}\mu_j$, où

$$\mu_j = \begin{cases} card\left\{k \in \mathbb{N};\ 1 \leq k < \frac{\omega_j}{\pi}\right\} & si\ s_j\ de\ type\ Dirichlet\,; \\ card\left\{k \in \mathbb{N};\ 1 \leq k < \frac{2\omega_j}{\pi}\right\} & sinon. \end{cases}$$

Enfin, nous calculons explicitement les fonctions singulières pour le système de Lamé L.

Dans le **troisième chapitre**, nous supposons que le domaine Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ à frontière polyèdrale, dont les ouvertures des angles des dièdres vers l'intérieur sont notées $\omega_{j,k}$, avec des conditions de contact sans frottement portées par un seul côté de la frontière. On montre que l'opérateur Θ (le Laplacien Δ ou le système L) considéré de $W(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)^3$ a une image fermée et de codimension finie si tous les angles $\omega_{j,k}$ sont strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$, sinon, l'image est de codimension infinie. Ce dernier résultat différentie le cas polyèdral du cas polygonal, à savoir que dans le cas polyèdral, si Δ n'est pas surjectif, il n'est pas non plus à indice.

Le **quatrième chapitre**, est consacré à l'étude du système de Lamé L perturbé dans un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^n(n = 2$ ou $3)$ de classe C^2. La frontière de Ω sera notée $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$ avec mesure $\Gamma_1 > 0$. On considère le problème suivant :

$$(p_2)\begin{cases} -Lu + \alpha u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \\ -\sigma(u)\nu + P(u) \in \beta(u) & \text{sur} \quad \Gamma_2 \end{cases} \tag{0.0.3}$$

où $f \in L^2(\Omega)^n$, P un opérateur différentiel, du premier ordre à coefficients lipschitziens, β un graphe maximal monotone tel que $0 \in \beta(0)$ et α un réel positif sur lequel nous apporterons des précisions plus loin.

On considère le problème linéaire approché associe à (p_2) où l'on a remplacé β par l'approchant de Yosida β_ξ. Nous montrons l'existence des solutions faibles de ce problème approché. Puis, en utilisant l'inégalité de Korn, nous obtenons des estimations a priori indépendamment de ξ qui nous permetent de passer à la limite lorsque ξ tend vers zéro.

Nous montrons que la solution du problème est dans $H^2(\Omega)$ lorsque α vérifie la condition (4.4.1.4).

Dans le **cinquième chapitre**, nous considérons un problème associé à des déformations lentes d'un corps homogène élastique et isotrope en régime dynamique avec des conditions de frottement non linéaire du type Tresca dans un film mince $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$:

$$\Omega^\varepsilon = \{(x',\, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ (x', 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\}.$$

où ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine et $h \in C^1(\mathbb{R})$. La frontière de Ω^ε sera notée $\Gamma^\varepsilon = \overline{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \overline{\Gamma}_L^\varepsilon \cup \overline{\omega}$, avec

- Γ_1^ε est la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h(x_1, x_2)$,
- Γ_L^ε est la frontière latérale.

Le problème complet dans $\Omega^\varepsilon \times]0, T[$, pour un donné $T > 0$, s'écrit :

$$(p_3)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} = div\,(\sigma^\varepsilon) + f^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \times]0,T[\\ u^\varepsilon = 0 \qquad\qquad \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \times]0,T[\\ u^\varepsilon = g \qquad\qquad \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \times]0,T[\\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}.n = 0 \qquad \text{sur } \omega \times]0,T[\\ \left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \Rightarrow \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \Rightarrow \exists\ \beta \geq 0 \text{ tel que } \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right\} \text{sur } \omega \times]0,T[\\ u^\varepsilon(x,0) = u_0(x), \qquad \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad \forall x \in \Omega^\varepsilon. \end{cases} \tag{0.0.4}$$

où $f^\varepsilon, k^\varepsilon, g$ sont des données du problème, et σ_τ^ε est la composante tangentielle du tenseur des contraines σ^ε.

On montre d'abord que pour $\varepsilon > 0$ fixé, le problème admet une solution unique faible. Ensuite, on étudie l'analyse asymptotique du problème en faisant un changement d'échelle, pour ramener l'étude sur un domaine Ω indépendant de ε, sur lequel nous définissons des nouvelles inconnues. Nous obtenons des estimations a priori indépendamment de ε sur la solution et son gradient en utilisant les inégalités de Korn, Poincaré et Young.

Grâce à ces estimations, on obtient un théorème de convergence, qui nous permet de passer à la limite lorsque ε tend vers zéro. Ensuite, nous obtenons le problème limite suivant :

$$\begin{gathered}\mu \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(t) . \frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\phi}_i - \frac{\partial u_i^\star}{\partial t}(t)\right) dx' dz + \hat{\jmath}(\hat{\phi}) - \\ -\hat{\jmath}\left(\frac{\partial u^\star}{\partial t}(t)\right) \geq \sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_i(t), \phi_i - \frac{\partial u_i^\star}{\partial t}(t)\right), \quad \forall \hat{\phi} \in \Pi(K) \\ u_i^\star(x', z, 0) = \hat{u}_{0,i}, \quad \forall i = 1, 2\end{gathered} \tag{0.0.5}$$

avec $\Pi(K)$ est un convexe de $H^1(\Omega)^2$,

$$\left.\begin{array}{l}\mu\left|\pi^\star\right| < \hat{k} \Rightarrow \dfrac{\partial s^\star}{\partial t} = 0 \\ \mu\left|\pi^\star\right| = \hat{k} \Rightarrow \exists\, \beta \geq 0 \ tel\ que\ \dfrac{\partial s^\star}{\partial t} = \beta \pi^\star\end{array}\right. \quad p.p\ sur \quad \omega \times]0, T[\tag{0.0.6}$$

$$\int_{\omega}\left(\widetilde{\mathcal{F}} - \frac{h}{2} s^\star + \int_0^h u^\star(x', y, t) dy\right) \nabla\psi(x') dx' = 0, \forall \psi \in H^1(\omega) \tag{0.0.7}$$

où

$$\begin{gathered} s^* = u^\star(x', 0), \quad \pi^\star = \frac{\partial u^\star}{\partial z}(x', 0, t) \\ \widetilde{\mathcal{F}}(x', t) = \frac{1}{\mu} \int_0^h \int_0^y \int_0^\xi \widehat{f}(x', \alpha, t) d\alpha d\xi dy - \frac{h}{2\mu} \int_0^h \int_0^\xi \widehat{f}(x', \alpha, t) d\alpha d\xi \end{gathered}$$

Enfin, nous montrons l'unicité de $u^\star$ solution du problème limite.

Chapitre 1

Les espaces de Sobolev dans des domaines non réguliers

Résumé

Dans ce chapitre, on donne, pour les besoins des chapitres suivants, un aperçu sur les espaces de Sobolev définis sur des domaines non réguliers (polygone, polyèdre) [17], les opérateurs de traces et quelques propriétés utiles, telles que l'extension de la formule de Green au cas des problèmes aux limites linéaires et non linéaires définis sur polygone ou polyèdre. On donnera aussi quelques résultats relatifs à cette classe de problèmes.

Contenu

1.1 Définitions de base et propriétés des espaces de Sobolev

Soit Ω un sous-ensemble ouvert arbitraire de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1$ ou 2). $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions de carrés intégrables pour la mesure de Lebesgue sur Ω. $\mathcal{D}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$) l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à supports compacts dans Ω (resp. l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$).

Dans ce qui suit, s est un nombre réel, m sa partie entière et σ sa partie fractionnaire :

$$s = m + \sigma \quad \text{et} \qquad 0 \leq \sigma < 1.$$

Pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on notera $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, et

$$D_i^{\alpha_i} = \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}, \quad D^\alpha \quad = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} .. D_n^{\alpha_n}.$$

Définition 1.1.1. *$H^s(\Omega)$ est l'espace de toutes les distributions u définies sur Ω et telles que :*

a) $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m$,

lorsque $s = m$ étant entier positif.

b) $u \in H^m(\Omega)$ et

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{\|x - y\|^{n+2\sigma}} dxdy < +\infty, \ |\alpha| = m$$

lorsque $s = m + \sigma$ étant réel positif non entier.

La norme (usuelle) de $H^s(\Omega)$ est définie par

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \qquad \text{dans le cas } (a),$$

et par

$$\|u\|_{s,\Omega}=\left\{\|u\|_{m,\Omega}+\sum_{|\alpha|=m}\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{|D^{\alpha}u(x)-D^{\alpha}u(y)|^{2}}{\|x-y\|^{n+2\sigma}}dxdy\right\}^{1/2} \quad \textit{dans le cas } (b).$$

Les définitions précédentes sont prolongées aux valeurs des négatives s par dualité comme suit :

Définition 1.1.2. *$H_0^s(\Omega)$ est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$.*

Définition 1.1.3. *$H^{-s}(\Omega)$ est l'espace dual topologique de $H_0^s(\Omega)$, $H^s(\Omega)$ est aussi l'espace de toutes les distributions T de la forme suivante*

$$T=\sum_{|\alpha|\leq m}D^{\alpha}f_{\alpha} \text{ où } \quad f_{\alpha}\in L^{2}(\Omega).$$

Définition 1.1.4. *Pour tout nombre positif s, on note par $\widetilde{H}^s(\Omega)$ l'espace des fonctions u définies dans Ω telles que il existe $\widetilde{u}\in H^s(\mathbb{R}^n)$, où $\widetilde{u}$ le prolongement par 0 de u.*

Dans toute la suite on rappellera quelques résultats extraits dans [17].

1.2 Résultat de densité

Notons par $v\,|_{\Omega}$ la restriction à Ω de toute distribution v définie sur $\mathbb{R}^n$

Définition 1.2.1. *Pour tout $k\in\overline{\mathbb{N}}$ on note par*

$$C^{k}\left(\overline{\Omega}\right)=\left\{f\,|_{\overline{\Omega}} \qquad \text{où } \ f\in C^{k}\left(\mathbb{R}^{n}\right)\right\},$$

$$C_0^{k}\left(\overline{\Omega}\right)=\left\{f\in C^{k}\left(\overline{\Omega}\right): \qquad \textit{support } f \text{ copmact } \subset\overline{\Omega}\right\}.$$

Théorème 1.2.2. *Soit* $\varphi \in C_0^k\left(\overline{\Omega}\right)$ *avec* $k \geq s$, *alors* $\varphi u \in H^s(\Omega)$ (*resp.*$H_0^s(\Omega)$, $\widetilde{H}^s(\Omega)$) *pour tout* $u \in H^s(\Omega)$ (*resp.*$H_0^s(\Omega)$, $\widetilde{H}^s(\Omega)$) *et il existe une constante* $K(\varphi, s)$ *telle que :*

$$\|\varphi u\|_{s,\Omega} \leq K \|u\|_{s,\Omega} .$$

Théorème 1.2.3. *Soit* Ω *un ouvert de frontière Lipchitzienne de* $\mathbb{R}^n$, *alors*

a) $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $H^s(\Omega)$ *pour tout* $s \geq 0$.

b) $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $\widetilde{H}^s(\Omega)$ *pour tout* $s \geq 0$.

Pour s très petit, on a un meilleur résultat à savoir :

Théorème 1.2.4. *Soit* Ω *un ouvert Lipchitzien de* $\mathbb{R}^n$, *alors* $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $H^s(\Omega)$ *pour* $s \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$.

Lemme 1.2.5. *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *à frontière Lipchitzienne, alors pour tout* $s > 0$, *il existe un opérateur linéaire et continue* P_s *de* $H^s(\Omega)$ *dans* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $P_s u\,|_{\Omega} = u$ *pour tout* $u \in H^s(\Omega)$.

Ce lemme signifie que chaque fonction $u \in H^s(\Omega)$ est un restriction d'une fonction qui appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$.

La preuve du lemme 1.2.5 est donnée dans [1], [30], [33].

Théorème 1.2.6. *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *à frontière Lipchitzienne, alors*

$$\frac{D^\alpha u}{\rho^{s-|\alpha|}} \in L^2(\Omega), \forall u \in H_0^s(\Omega),\ \rho > 0 \ \ et \ \ |\alpha| \leq s$$

à condition que $s - \dfrac{1}{2}$ *n'est pas entier.*

Cela implique aussi

$$\widetilde{H}^s(\Omega) = H_0^s(\Omega), \text{ pour } s - \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$
$$\widetilde{H}^s(\Omega) = H^s(\Omega) = H_0^s(\Omega), \text{ pour } 0 \leq s < \tfrac{1}{2}$$

alors $\widetilde{H}^s(\Omega)$ est caractérisé comme l'espace de tout $u \in H_0^m(\Omega)$ où

$$\frac{D^\alpha u}{\sqrt{\rho}} \in L^2(\Omega), \forall \alpha \text{ tel que } |\alpha| = m.$$

Théorème 1.2.7. *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^2$ *à frontière* Γ *polygonale, supposons que* $0 \in \Gamma$ et V *un voisinage de* 0 *tel que :*

$$V \cap \overline{\Omega} = \{(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\,; \quad R \geq r \geq 0, \quad a \leq \theta \leq b\},$$

pour toute R *réel positif et avec* $b - a < 2\pi$.

Soit u *une fonction régulière dans* $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$ *et coïncide avec* $r^\alpha \varphi(\theta)$ *dans* $V \cap \Omega$ *où* $\varphi \in H^{s_0}(]a, b[)$*, alors pour tout* $s < s_0$ *on a :*

- $u \in H^s(\Omega)$*, pour* $\mathrm{Re}(\alpha) > s - 1$

- $u \notin H^s(\Omega)$*, pour* $\mathrm{Re}(\alpha) \leq s - 1$

lorsque $\mathrm{Re}(\alpha)$ *non entier.*

En dimension trois, un critère semblable à celui vu dans le cas bidimonsionel où théorème 1.2.7 est :

Théorème 1.2.8. *Soit* Ω *un ouvet borné de* $\mathbb{R}^3$ *à frontière polyèdrale, supposons que* $0 \in \Gamma$ et V *un voisinage de* 0 *tel que*

$$V \cap \overline{\Omega} = \left\{\rho\sigma; \quad R \geq \rho \geq 0, \quad \sigma \in \overline{G}\right\}, \quad \forall R \geq 0$$

et G *ouvert à frentière Lipshitzine de* S^2 *(la sphère unité de* $\mathbb{R}^3$ *). Finalement soit* u *une fonction régulière dans* $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$ *et coïncide avec* $\rho^\alpha \varphi(\sigma)$ *dans* $V \cap \Omega$ *où* $\varphi \in H^{s_0}(G)$*. Alors pour tout* $s < s_0$ *on a :*

- $u \in H^s(\Omega)$, *pour* $\mathrm{Re}(\alpha) > s-1$

- $u \notin H^s(\Omega)$, *pour* $\mathrm{Re}(\alpha) \leq s-1$

lorsque $\mathrm{Re}(\alpha)$ *non entier.*

Les deux théorèmes sont obtenus par des calculs simples

1.3 Les théorèmes de trace dans un polygone

Théorème 1.3.1. *L'application de trace*

$$u \longmapsto \left\{\gamma_n u, \gamma_n Du, ..., \gamma_n D_n^k u\right\}$$

définie sur $D(\mathbb{R}^n)$ *pour* $k < s - \frac{1}{2}$ *a une extension continue unique comme un opérateur de* $H^s(\Omega)$ *sur* $\prod_{0\leq p\leq k} H^{s-p-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Maintenant, nous considérons un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière polygonale Γ. Nous aurons besoin d'espaces H et $\widetilde{H}$ sur les côtés Γ_j sur lesquels ne sont pas définis toujours. Dans ce cas on considère Γ_j comme un segment de droite ouvert.

Pour une fonction régulière u défini sur $\overline{\Omega}$ nous dénotons par $\gamma_j u$ sa restriction à Γ_j. Le lemme 1.2.5 et le théorème 1.3.1 ci-dessus impliquent le resultat suivant :

Théorème 1.3.2. *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *à frontière* Γ *polygonale, alors pour tout* $j \in \mathbb{N}$ *l'opérateur*

$$u \longmapsto \left\{\gamma_j u, \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \eta_j}, ..., \gamma_j \frac{\partial^k u}{\partial \eta_j^k}\right\}$$

définit sur $D(\overline{\Omega})$ *pour* $k < s - \dfrac{1}{2}$, *a une extension continue unique en un opérateur de* $H^s(\Omega)$ *sur* $\prod_{0\leq p\leq k} H^{s-p-\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$.

Ce théorème décrit les traces uniques sur un des côtés Γ_j d'une fonction qui appartient à un espace de sobolev sur Ω. On voudrait une formulation qui décrit les traces à tout prendre certainement. Cela nécessite de définir des espaces $H^{s-p-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Pour comprendre ces signification, nous décrirons les traces de fonctions qui appartiennent à $H^m(\Omega)$ quand Ω est le quart de plan.

Théorème 1.3.3. *Soit Ω le quart du plan défini par $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$, alors l'opérateur*

$$u \longmapsto \left\{\{f_k\}_{0\leq k\leq m-1}, \{g_l\}_{0\leq l\leq m-1}\right\},$$

défini par

$$f_k = D_2^k u \mid_{x_2=0}, g_l = D_1^l u \mid_{x_1=0},$$

pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ a une extension continue unique de $H^m(\Omega)$ sur le sous espace

$$T = \prod_{0\leq k\leq m-1} H^{m-k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+) \times \prod_{0\leq l\leq m-1} H^{m-l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+),$$

défini par

(a) $D_1^l f_k(0) = D_2^k g_l(0),\ k+1 < m-1,$

(b) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\left|D_1^l f_k(t) - D_2^k g_l(t)\right|^2}{t} dt < +\infty,\ k+1 = m-1.$

Preuve d'un cas particulier. Dans un premier temps, nous considérons le sous espace E de ces fonctions $u \in H^m(\Omega)$ tel que $g_l = 0$ pour $0 \leq l \leq m-1$ ou $\widetilde{u} \in H^m(\Omega_1)$ où Ω_1 est le demi plan a défini par $x_2 > 0$. Les fonctions $\widetilde{f_k}$ sont les traces correspondantes sur $\Gamma_1 = \partial\Omega_1$.

Lemme 1.3.4. *L'opérateur $u \longmapsto \{f_k\}_{0\leq k\leq m-1}$ a une extension continue unique de E sur le sous espace*

$$\prod_{0\leq k\leq m-1} H^{m-k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+),$$

défini par

(a) $D_1^l f_k(0) = 0$, *pour* $k+1 < m-1,$

(b) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\left|D_1^l f_k(t)\right|^2}{t} dt < +\infty$, *pour* $k+1 = m-1.$

Lemme 1.3.5. *Soit* $u \in H^m(\Omega)$ *alors* $f_0 = u\,|_{x_2}$ *et* $g_0 = u\,|_{x_1}$ *vérifie*

(a) $\quad f_0(0) = g_0(0)$, si $m > 1$,

(b) $\quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{|f_0(t)-g_0(t)|^2}{t} dt < +\infty$, si $m = 1$.

1.4 Les opérateurs maximaux monotones

De H. Brezis [10] on a :

Définition 1.4.1. *Soit* H_1, H_2 *deux espaces de Hilbert. On appelle opérateur linéaire non-borné de* H_1 *dans* H_2 *toute application linéaire* $A : D(A) \subset H_1 \to H_2$.
$D(A)$ *est le domaine de* A. *On note par*

$$G(A) = \underset{u \in D(A)}{\cup} (u,\, Au).$$

$G(A)$ *s'appelle le graphe de* A *et est un sous espace de l'espace vectoriel produit* $H_1 \times H_2$.

On dit qu'un opérateur A *est fermé si* $G(A)$ *est fermé dans l'espace produit* $H_1 \times H_2$.

Remarque 1.4.2. Pour prouver qu'un opérateur A est fermé on procède en général de la manière suivante : On prend une suite $(u_n)_n$ dans $D(A)$ telle que $u_n \to u$ dans H_1 et $Au_n \to f$ dans H_2. Il s'agit ensuite de vérifier que $u \in D(A)$ et $f = Au$. Ceci équivaut au fait que $G(A)$ est fermé dans $H_1 \times H_2$.

Dans toute la suite H désigne un espace de *Hilbert,* I l'identité dans H et $A : D(A) \subset H \to H$ est un opérateur linéaire non-borné.

Définition 1.4.3. *On dit que* A *est monotone si*

$$(Av, v) \geq 0 \qquad \forall v \in D(A).$$

A est maximal monotone si de plus $R(I+A)=H$, c'est à dire

$$\forall f \in H, \quad \exists u \in D(A) \ \textit{tel que} \ u + Au = f.$$

Proposition 1.4.4. *Soit A un opérateur maximal monotone. Alors*

a) $D(A)$ *est dense dans* H.

b) A *est fermé.*

c) Pour tout λ, $(I+\lambda A)$ *est bijectif de* $D(A)$ *sur* H, $(I+\lambda A)^{-1}$ *est un opérateur borné et* $\|(I+\lambda A)^{-1}\| \leq 1$.

Définition 1.4.5. *Soit A un opérateur maximal monotone. On pose, pour tout* $\lambda > 0$,

$$J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1} \quad \text{et} \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda).$$

J_λ est la résolvante de A et A_λ est la régularisée *Yosida* de A.

Proposition 1.4.6. *Soit A un opérateur maximal monotone,on a*

1) $A_\lambda v = A(J_\lambda v) \qquad \forall v \in H$ et $\forall \lambda > 0$

2) $A_\lambda v = J_\lambda(Av) \qquad \forall v \in D(A)$ et $\forall \lambda > 0$

3) $|A_\lambda v| \leq |Av| \qquad \forall v \in D(A)$ et $\forall \lambda > 0$

4) $\lim\limits_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v \qquad \forall v \in H$

5) $\lim\limits_{\lambda \to 0} A_\lambda v = Av \qquad \forall v \in D(A)$

6) $(A_\lambda v, v) \geq 0 \qquad \forall v \in H$ et $\forall \lambda > 0$

7) $|A_\lambda v| \leq \frac{1}{\lambda} |v| \qquad \forall v \in H$ et $\forall \lambda > 0$.

Chapitre 2

Problème de contact sans frottement-Dirichlet pour les équations de Laplace et de Lamé dans un polygone

Résumé

Soit Ω un polygone plan de $\mathbb{R}^2$, on va étudier la régularité de la solution de l'équation de Laplace et du système de Lamé (Elasticité) avec des conditions de contact sans frottement -Dirichlet. On donnera une inégalité a priori et en avec l'alternative de Fredholm en étudie la régularité $H^2(\Omega)^2$ de la solution u relative à notre problème, enfin on calcule l'indice de l'équation de Laplace qui nous permet de déduire l'indice pour le système de l'élasticité et par suite les solutions singulières de ce dernier système.

Contenu

2.1 Introduction

Dans [18] P. Grisvard a étudié la régularité de la solution du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace dans un polygone. La solution variationnelle du problème considéré est régulière (c'est-à-dire dans H^2) si et seulement si tous les angles du polygone sont strictement inférieur à π. Autrement dit ce problème admet un nombre fini de solutions singulières. Ce résultat est connu dans le cas particulier où le domaine est convexe (cf.[24]).

Dans ce chapitre, on étudie la régularité du déplacement d'un corps homogène élastique et isotrope occupant un domaine Ω borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière polygonale rectiligne (dans le cas si Ω non homogène voir H. Benseridi et M. Dilmi [5]). Ce déplacement est nul sur certaines segment de la frontière $\partial\Omega$ et sur les segments restants le déplacement tangentiel est libre et la traction tangentielle est nulle.

L'étude de ce problème par des techniques de P. Grisvard [18] et de B. Merouani [27] est généralement basé sur les étapes suivantes.

Dans la première étape, on établit une inégalité à priori valable pour u dans $(H^2(\Omega))^2$ vérifiant les mêmes conditions du problème considéré.

La seconde étape est consacrée à lutilisation de l'inégalité à priori, qui nous permet d'utiliser l'alternative de Fredholm relative à notre problème et de construire l'espace d'image et son orthogonal. On démontre qu'il est de dimension finie et on calcule cette dimension. Enfin, en utilisant des techniques analogues à celles de P. Grisvard [22], nous calculons l'indice du problème pour $(\Theta = L)$ par homotopie sur les coefficients de Lamé.

2.2 Notations et position du problème

On désigne par Ω un corps homogène, élastique et isotrope occupant un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière polygonale rectiligne $\partial\Omega = \overset{N}{\underset{j=1}{\cup}} \overline{\Gamma}_j$ où les Γ_j sont des segments de droites ouvertes, s_j est l'origine du segment Γ_{j+1} et s_{j+1} son extrémité suivant l'orientation usuelle (avec la convention $s_{N+1} = s_1$).

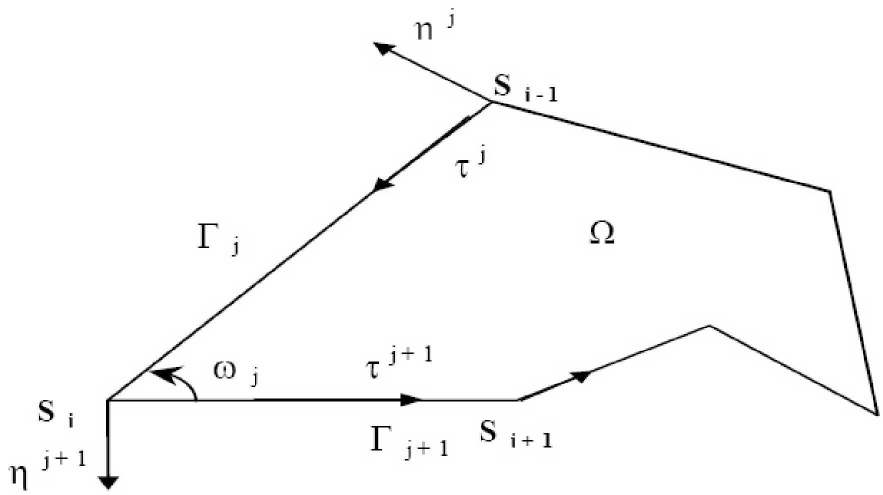

FIG. 2-1 –

l'ouverture de l'angle entre Γ_j et Γ_{j+1} vers l'intérieur de Ω est noté ω_j avec $0 < \omega_j < 2\pi$ pour tout $j = 1$ à N (dans ce cas on dit que Ω est un domaine strictement polygonal).

η^j(resp τ^j) désigne la normale unitaire sortante (resp la tangente unitaire dans le sens positif) sur Γ_j (fig 2.1), Ω ainsi défini est par conséquent un ouvert borné à frontière Lipschitzienne. En coordonnées polaires d'origine s_j, on note par r_j la distance d'un point $M(x_j, y_j)$ de Ω à s_j et par θ_j l'angle de Γ_j à Ms_j ; c'est -à-dire $x_j = r_j \sin(\theta_j)$ et $y_j = r_j \cos(\theta_j)$.

On note aussi par $u = (u_1, u_2)$, $f = (f_1, f_2)$ et $\sum$ respectivement le vecteur déplacement, la densité des forces extérieures et le tenseur des contraintes avec

$$\sum = (\sigma_{ij}), \quad i, j = 1, 2$$

matrice d'ordre 2, les éléments

$$(\sigma_{ij}), i, j = 1, 2$$

sont donnés par la loi de Hook

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))\gamma_{ij}, \quad i,j = 1,2,$$

où

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}),$$

est appelé tenseur de déformation linéarisé associé à u et λ, μ sont les coefficients de Lamé, avec $\mu > 0$ et $\lambda + \mu \geq 0$.

Finalement L désigne le système d'élasticité :

$$L = \mu\Delta + (\lambda + \mu)\nabla div,$$

où $\Delta = D_x^2 + D_y^2$ désigne l'opérateur de Laplace et $div = D_1 + D_2 + D_3$ l'opérateur de divergence.

Pour f donné dans $L^2(\Omega)^2$, on cherche u dans $H^2\left(\Omega\right)^2$ solution du problème suivant :

$$-\Theta u = f\,, \qquad \text{dans}\,\Omega\,; \tag{2.2.1}$$

$$u = 0, \qquad \text{sur}\,\Gamma_j, \ \ \forall j \in D\,; \tag{2.2.2}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma_j\left(u.\eta^j\right) = 0 \\ \gamma_j(\sum(u)\eta^j.\tau^j) = 0 \end{array} \right. \text{sur}\,\Gamma_j, \ \ \forall j \in G\,; \tag{2.2.3}$$

où Θ désigne un opérateur différentiel qui est le système de Lamé ou le Laplacien. D, G sont des ensembles tels que

$$D \cup G = \left\{1, 2, ..., N\right\}.$$

Lemme 2.2.1. *Sur* Γ_j , $j \in G$, *les conditions aux limites* (2.2.3) *sont équivalentes aux* *conditions* :

$$\left\{\begin{array}{l}\gamma_j\,(u.\eta^j)=0\\ \gamma_j(\dfrac{\partial u}{\partial\eta^j}.\tau^j)=0\end{array}\right.\quad \text{sur}\,\Gamma_j,\ \ \forall j\in G\,; \tag{2.2.4}$$

Preuve. On a

$$(\sum(u).\eta).\tau=\sum_{i,j=1}^{2}\sigma_{ij}.\eta_j.\tau_i$$

et comme

$$\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}(u)+\lambda tr(\varepsilon(u))\gamma_{ij}$$

donc

$$\sum_{i,j=1}^{2}\sigma_{ij}.\eta_j.\tau_i=\sum_{i,j=1}^{2}2\mu\varepsilon_{ij}\eta_j.\tau_i$$

car

$$\sum_{i,j=1}^{2}\lambda tr(\varepsilon(u))\gamma_{ij}\eta_j.\tau_i=\lambda tr(\varepsilon(u))\sum_{i=1}^{2}\eta_i.\tau_i=0,$$

et par suite

$$(\sum(u).\eta).\tau=0\Leftrightarrow\sum_{i,j=1}^{2}2\mu\varepsilon_{ij}\eta_j.\tau_i=0.$$

Et comme $\mu>0$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,.\eta_j.\tau_i+\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,.\eta_j.\tau_i=0,$$

ceci est équivalent à :

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}\,.\tau+\ \frac{\partial u}{\partial\tau}\,.\eta=0,$$

et comme $u.\eta=0$ implique que $\dfrac{\partial u}{\partial\tau}\,.\eta=0$, d'où

$$\left\{\begin{array}{l}u.\eta=0\\ (\sum(u).\eta).\tau=0\end{array}\right.\qquad\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}u.\eta=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial\eta}\,.\tau=0\end{array}\right.\quad\blacksquare$$

Pour montrer une majoration à priori des dérivées secondes par les techniques de P. Grisvard [18], on considère d'abord le problème (2.2.1)-(2.2.3) avec $\Theta = \Delta$:

$$-\Delta u = f\,, \qquad \text{dans}\,\Omega\,; \tag{2.2.5}$$

$$\gamma_j u = 0, \qquad sur\,\Gamma_j,\ \ \forall j \in D\,; \tag{2.2.6}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_j\left(u.\eta^j\right) = 0 \\ \gamma_j(\dfrac{\partial u}{\partial \eta^j}.\tau^j) = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur}\,\Gamma_j,\ \ \forall j \in G. \tag{2.2.7}$$

On multiplie l'équation (2.2.5) par $v \in H^1\left(\Omega\right)^2$, en intégrant et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx - \sum_{i,j=1}^{2}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\eta_j v_i ds = \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega} f_i v_i dx \tag{2.2.8}$$

où ds désigne la mesure sur $\partial\Omega$.

En utilisant les conditions aux limites (2.2.7) et le fait que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}.v = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}.\eta\right)(v.\eta) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}.\tau\right)(v.\tau)$$

en utilisant (2.2.8), il vient que

$$\int_{\Omega}\nabla u\nabla v dx - \int_{\Gamma_D}\frac{\partial u}{\partial \eta} v ds - \int_{\Gamma_G}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}.\eta\right)(v.\eta)\,ds = \int_{\Omega} f v dx$$

L'appatenance de u à $H^1\left(\Omega\right)^2$ (resp de $v \in H^1\left(\Omega\right)^2$), justifie l'existenance d'une trace pour $\dfrac{\partial u}{\partial \eta^j}.\eta^j$ dans $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}\left(\Gamma_j\right)$ $\forall j \in G$ et pour $\dfrac{\partial u}{\partial \eta^j}$ dans $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}\left(\Gamma_j\right)^2$ $\forall j \in D$ (resp pour $v.\eta^j$ dans $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma_j\right)$ $\forall j \in G$, et pour v dans $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma_j\right)^2$ $\forall j \in D$). (C.f. ([25]))

la dernière relation devient alors

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \sum_{j\in D} \left\langle \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \eta^j} . \gamma_j v \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j)^2 \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)^2} -$$
$$- \sum_{j\in G} \left\langle \gamma_j \left(\frac{\partial u}{\partial \eta^j} . \eta^j \right) . \gamma_j \left(v.\eta^j \right) \right\rangle_{\tilde{H} \times \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j)^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)} = \int_\Omega f v dx$$

où γ_j est l'application trace sur Γ_j.

Lorsque la fonction test v vérifie la condition

$$\begin{cases} \gamma_j v = 0 & \forall j \in D \\ \gamma_j \left(v.\eta^j \right) = 0 & j \in G \end{cases}$$

nous obtenons la formulaion variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V, \text{ tel que} \\ a(u,v) = l(v), \ \forall v \in V \end{cases} \tag{2.2.9}$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx, \qquad l(v) = \int_\Omega f_i v_i dx \tag{2.210}$$

et

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega)^2, \ \gamma_j v = 0, \ \forall j \in D, \ \gamma_j \left(v.\eta^j \right) = 0, \ \forall j \in G \right\}. \tag{2.2.11}$$

A fin de démontrer l'existence et l'unicité de la solution faible de (2.2.5)-(2.2.7), on a besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 2.2.2. *L'espace V munit du produit scalaire de $\left(H^1(\Omega)\right)^2$ est un espace de Hilbert.*

Preuve. Il est claire que V est un sous-espace fermé de $\left(H^1(\Omega)\right)^2$, car les applications traces γ_j sur Γ_j sont continues et puisque $H^1(\Omega)^2$ est un espace de Hilbert, donc V est aussi est un espace de Hilbert par rapport à la norme induite de $\left(H^1(\Omega)\right)^2$ ■

Théorème 2.2.3. *Le problème (2.2.5)-(2.2.7) admet une solution unique u dans l'espace V.*

Preuve.

• La forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue sur $V \times V$. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient que

$$|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{\left(L^2(\Omega)^2\right)^2} \|\nabla v\|_{\left(L^2(\Omega)^2\right)^2} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)^2} \|v\|_{H^1(\Omega)^2} ,$$

• La forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive sur $V \times V$. En effet, d'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $K > 0$ tel que

$$a(v,v) = \|\nabla v\|^2_{\left(L^2(\Omega)^2\right)^2} \geq K \|v\|^2_{H^1(\Omega)^2} \ , \ \forall v \in V$$

• La forme linéaire l *est une forme linéaire continue sur* V. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient que

$$|l(v)| \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)^2} \quad \text{où } c = \|f\|_{L^2(\Omega)^2} .$$

D'après le théorème de Lax-Milgram le problème variationel (2.2.9) admet une solution unique u dans V. En utilisant cette fois ci la formule de Green dans le problème faible, on obtient l'équivalence entre les problèmes (2.2.5)-(2.2.7) et (2.2.9). ■

Le problème (2.2.5)-(2.2.7) n'admet pas généralement des solutions assez régulières, pour cela on essaye pour $f \in L^2(\Omega)^2$, de chercher des conditions sur Ω pour que u soit dans $H^2(\Omega)^2$.

2.3 Inégalité à priori

Ce paragraphe est consacré à la démonstration de l'inégalité :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)^2} \leq c \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)^2} . \tag{2.3.1}$$

Cette inégalité résultera en fait de l'égalité de Caccioppoli.

On introduit maintenant l'espace où on cherche u :

$$W(\Omega)=\Big\{u\in H^2(\Omega)^2\ :\gamma_j u=0\ \ \forall j\in D;$$
$$\gamma_j\left(\tfrac{\partial u}{\partial \eta^j}.\tau^j\right)=\gamma_j\left(u.\eta^j\right)=0,\quad \forall j\in G\Big\}.$$

Lemme 2.3.1. *L'espace* $W(\Omega)\cap(H^m(\Omega))^2$ *est dense dans* $W(\Omega)$ *pour la norme induite par* $(H^m(\Omega))^2$, $\forall\ m\geq 1$.

Preuve. Par partition de l'unité on se ramène facilement au cas où Ω est un secteur infini d'ouverture ω ($\neq\pi$). Ensuite par un changement de variable affine on se ramène au cas où $\omega=\dfrac{\pi}{2}$. Pour cela les conditions aux limites qui définissent $W(\Omega)$ sont les conditions aux limites aux dérivées obliques et l'espace $W(\Omega)$ devient :

$$W(\Omega)=\left\{u\in H^2(\Omega)^2\ :\alpha_j D_x u_1+\beta_j D_y u_1=0 \text{ et } u_2=0 \text{ sur } \Gamma_j\right\},$$

le résultat de densité est bien connu (voir [17]).

Théorème 2.3.2. *On a :*

$$\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)^2}=\left\|\nabla^2 u\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)^2\right)^2},\quad \forall\ u\in W(\Omega) \tag{2.3.2}$$

Preuve. Pour tout $u\in W(\Omega)$ tel que de plus $u\in H^3(\Omega)^2$, l'égalité de Caccioppoli donne :

$$\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)^2}-\left\|\nabla^2 u\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)^2\right)^2}=\sum_{j\in D}\int_{\Gamma_j}\left\{\tfrac{\partial u}{\partial\eta^j}\cdot\tfrac{\partial}{\partial\tau^j}\left(\tfrac{\partial u}{\partial\tau^j}\right)-\tfrac{\partial u}{\partial\tau^j}\cdot\tfrac{\partial}{\partial\tau^j}\left(\tfrac{\partial u}{\partial\eta^j}\right)\right\}ds$$
$$+\sum_{j\in G}\int_{\Gamma_j}\left\{\tfrac{\partial u}{\partial\eta^j}\cdot\tfrac{\partial}{\partial\tau^j}\left(\tfrac{\partial u}{\partial\tau^j}\right)-\tfrac{\partial u}{\partial\tau^j}\cdot\tfrac{\partial}{\partial\tau^j}\left(\tfrac{\partial u}{\partial\eta^j}\right)\right\}ds.$$

Ici, bien sûr on a posé :

$$\left|\nabla^2 u\right|^2=\sum_{i,\,l=1}^{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_l}\right|^2.$$

Comme $u\in W(\Omega)$ on a la condition $u=0$ sur Γ_j pour $j\in D$ qui implique :

$$\frac{\partial u}{\partial\tau^j}=0\ \text{ et }\ \frac{\partial}{\partial\tau^j}\left(\frac{\partial u}{\partial\tau^j}\right)=0,$$

et par conséquent la première somme sur D est nulle.

Des conditions $u.\eta^j = 0$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \eta^j}.\tau^j = 0$ sur Γ_j pour $j \in G$, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta^j}.\tau^j = \frac{\partial u}{\partial \tau^j}.\eta^j = \frac{\partial}{\partial \tau^j}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau^j}\right).\eta^j = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^j \partial \eta^j}.\tau^j = 0,$$

et par suit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \eta^j}\frac{\partial}{\partial \tau^j}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau^j}\right) &= \left(\frac{\partial u}{\partial \eta^j}.\eta^j\right)\left(\frac{\partial}{\partial \tau^j}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau^j}\right).\eta^j\right) + \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial \eta^j}.\tau^j\right)\left(\frac{\partial}{\partial \tau^j}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau^j}\right).\tau^j\right) = 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau^j}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^j \partial \eta^j} &= \left(\frac{\partial u}{\partial \tau^j}.\eta^j\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^j \partial \eta^j}.\eta^j\right) + \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial \tau^j}.\tau^j\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^j \partial \eta^j}.\tau^j\right) = 0\end{aligned}$$

on constate que les intégrales de bord sont toutes nulles, donc :

$$\left\|\nabla^2 u\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)^2\right)^2} = \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)^2},$$

pour tout $u \in W(\Omega) \cap H^3(\Omega)^2$, d'où (2.3.2) (lemme 2.3.1).

Corollaire 2.3.3. *Il existe une constante c positive, telle que l'inégalité (2.3.1) ait lieu pour tout $u \in W(\Omega)$.*

Preuve. D'après la coercivité de $a(.,.)$, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)^2} \leq ca(u,u) = (f,u),$$

comme $a(u,u) \leq \|u\|_{H^1(\Omega)^2}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)^2}$ et $\Delta u = f$ on obtient

$$\|u\|_{H^1(\Omega)^2} \leq c\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall\, u \in V,$$

Le théorème 2.3.1 donne le résultat directement ∎

2.4 Alternative de Fredholm

Dans ce paragraphe on tirera les conséquences de l'inégalité à priori (2.3.1) comme il est indiqué dans l'introduction. On désignera par $R(\Omega)$ l'image de $W(\Omega)$ par l'opérateur Δ, c'est à dire que :

$$R(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega)^2 \ ; \ f = \Delta u \, , \, u \in W(\Omega) \right\}.$$

Grâce à l'inégalité (2.3.1), $R(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)^2$ et par conséquent on cherchera son orthogonal dans l'espace $L^2(\Omega)^2$, c'est-à-dire l'espace :

$$N(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega)^2 \ ; \ (v; f) = 0, \quad \forall f \in R(\Omega) \right\}.$$

Comme il est naturel on prouvera que les éléments de $N(\Omega)$ sont les solutions d'un problème de Dirichlet-contact sans frottement strictement homogène, on a :

Lemme 2.4.1. *Soit $v \in N(\Omega)$, alors v est solution du problème dual suivant :*

$$\Delta v = 0, \ \textit{dans } \Omega\,; \tag{2.4.1}$$

$$\gamma_j(v) = 0, \ \ \textit{sur } \Gamma_j \quad \forall j \in D\,; \tag{2.4.2}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma_j(v.\eta^j) = 0 \\ \gamma_j\left(\dfrac{\partial v}{\partial \eta^j}.\tau^j\right) = 0 \end{array} \right. , \quad \textit{sur } \Gamma_j \ \ \forall j \in G\,. \tag{2.4.3}$$

Preuve. Soient v un élément de $N(\Omega)$ et $u \in \mathcal{D}(\Omega)^2$, puisque $\mathcal{D}(\Omega)^2$ est inclu dans $W(\Omega)$ alors :

$$\langle v; \Delta u \rangle = \langle \Delta v; u \rangle = 0,$$

ceci implique que

$$\Delta v = 0, \ \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)^2,$$

et par conséquent $v \in D\left(\Delta, L^2(\Omega)^2\right)$ l'espace maximale de Δ.

Il reste à montrer que v vérifie les mêmes conditions que le problème (2.2.5)-(2.2.7). Pour tout $\varphi_j = \left(\varphi_j^1, \varphi_j^2\right) \in D(\Gamma_j)^2\ \forall\ j \in D$, $\psi_j \in D(\Gamma_j)$ et $\chi_j \in D(\Gamma_j)\ \forall\ j \in G$, il existe $u \in H^2(\Omega)^2$ tel que

$$\begin{cases} \gamma_j(u) = 0\ ,\ \gamma_j\left(\dfrac{\partial u}{\partial \eta^j}\right) = \varphi_j, \quad \forall\, j \in D\,; \\ \gamma_j(u.\eta^j) = 0\,,\ \gamma_j(u.\tau^j) = \psi_j, \quad \forall\, j \in G\,; \\ \gamma_j\left(\dfrac{\partial u}{\partial \eta^j}.\tau^j\right) = 0\,,\ \gamma_j\left(\dfrac{\partial u}{\partial \eta^j}.\eta^j\right) = \chi_j, \quad \forall\, j \in G\,. \end{cases}$$

de plus u est nulle au voisinage de $s_j, \forall j = 1, ..., N$, et par conséquent, on peut appliquer la formule de Green généralisée pour cette fonction u et $v \in N(\Omega)$ on obtient

$$\sum_{j\in D} \langle \varphi_j; \gamma_j v\rangle + \sum_{j\in G}\left\{\langle \chi_j; \gamma_j(v.\eta^j)\rangle - \left\langle \psi_j; \gamma_j\left(\frac{\partial v}{\partial \eta^j}.\tau^j\right)\right\rangle\right\} = 0,$$

et comme φ_j, χ_j et ψ_j sont arbitraires dans $\mathcal{D}(\Gamma_j)^2$, $\mathcal{D}(\Gamma_j)$ et $\mathcal{D}(\Gamma_j)$ respectivement, cette égalité montre que :

$$\begin{cases} \gamma_j v = 0\ , & \forall\, j \in D\,; \\ \gamma_j(v.\eta^j) = \gamma_j\left(\dfrac{\partial v}{\partial \eta^j}.\tau^j\right) = 0, & \forall\, j \in G\,. \end{cases}$$

Le lemme 2.4.1 montre que pour tout $v \in N(\Omega)$ est une solution du problème homogène d'adjoint. Cependant le lemme 2.4.1 ne caractérise pas complètement $N(\Omega)$.

On peut remarque que pour tout $v \in N(\Omega)$ et si $\omega_j = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\omega_j = \dfrac{\pi}{2}$ on a :

(i) $\left\langle v, \Delta(y_j\zeta_j)\right\rangle = 0$ si $j \in D$ et $j+1 \in G$;

(ii) $\left\langle v, \Delta(x_j\zeta_j)\right\rangle = 0$ si $j \in G$ et $j+1 \in D$;

où $\zeta_j \in D\left(\overline{\Omega}\right)$ est une fonction de troncature qui dépend seulement de s_j, tel que $\zeta_j = 1$ au voisinage de s_j et nulle sur toute $\overline{\Gamma}_k$ sauf pour $k = j$ et $k = j+1$.

Lemme 2.4.2. *Soit $v \in D\left(\Delta, L^2(\Omega)^2\right)$ solution du problème dual tel que v vérifie les conditions (i) et (ii), alors $v \in N(\Omega)$.*

Preuve. On va montrer que $\langle v; \Delta u\rangle = 0$, $\forall\ u \in W(\Omega)$. Actuelement d'après le lemme 2.3.1 on peut considérer $u \in (H^4(\Omega))^2 \cap W(\Omega)$ pourvu que $u \in (C^2(\overline{\Omega}))^2$, et on pose

$$\varpi = u - \sum_{j\in D,\ j+1\in G} D_{y_j}u(s_j)y_j\zeta_j - \sum_{j\in G,\ j+1\in D} D_{x_j}u(s_j)x_j\zeta_j.$$

Il est clair que $\langle v; \Delta u\rangle = \langle v; \Delta\varpi\rangle$.

Maintenant, on a $u(s_j) = 0, \forall\ j \in D$ ou $j+1 \in D$, cela implique que $\varpi(s_j) = 0 \forall j$. Donc $\bigtriangledown u.\mu_j = 0$ sur chaque Γ_j où $\mu_j = \eta^j$, pour $j \in G$ et $\mu_j = \tau^j$, pour $j \in D$, ceci implique que $\bigtriangledown u(s_j) = 0$ a moins que μ_j et μ_{j+1} soient paralleles. Cela se passe seulement quand $j \in G$ et $j+1 \in D$ ou $j \in D$ et $j+1 \in G$. Cependant quand $j \in G$ et $j+1 \in D$ on a $u = 0$ sur Γ_{j+1} et par conséquent $D_{x_j}u(s_j) = \bigtriangledown\varpi(s_j) = 0$. Le même chemin quand $j \in D$ et $j+1 \in G$, on trouve $\bigtriangledown\varpi(s_j) = 0$.

Finalement on a trouver $\varpi(s_j) = \bigtriangledown\varpi(s_j) = 0$ dans tout les cas, et par suite on peut appliquer la formule de Green généralisé pour ϖ et v on obtient $\langle v; \Delta\varpi\rangle = 0$, c'est- à-dire $v \in N(\Omega)$.

Lemme 2.4.3. *Soit $v \in N(\Omega)$, alors $v \in C^\infty(\Omega\backslash S)$, où S est l'ensemble des sommets.*

Le lemme 2.4.3 exprime un résultat de régularité au voisinage des morceaux réguliers de la frontière, qui est assez bien connu ; par la méthode de réflexions.

2.5 Régularité des dérivées secondes

Dant cette section nous allons déterminé la dimention de l'espace $N(\Omega)$, pour cela nous allons étudier la régularité de $v \in N(\Omega)$. D'après le lemme 2.4.3, v est C^∞ dans Ω et jusqu'au sommets de la frontière, il nous reste alors à étudier le comportement de v au voisinage de chaque sommet s_j.

Nous avons alors dans ce cas particulier le :

Théorème 2.5.1. *Si tout les angles ω_j de Ω sont strictement infèrieur à $\dfrac{\pi}{2}$ alors :*

i) $N(\Omega) \subset H^2(\Omega)^2$;

ii) $N(\Omega) = \{0\}$.

Preuve

i) Il reste à prouver que pour tout $s_j \in S$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de s_j dans $\mathbb{R}^2$ tel que $v \in H^2(\Omega \cap \mathcal{V})^2$ dés que $v \in N(\Omega)$.

Pour s_j de type Dirichlet de part et d'autre on a la régularité H^2 (voir [18]).

Donc, il suffit de démontrer la régularité H^2 au voisinage de sommet de type mélé. On tarnslate le point s_j considéré en $(0,0)$ (ce qui ne change rien au problème) et on suppose que $\mathcal{V}$ est une boule de centre $(0,0)$ et de rayon ρ assez petit pour que $\Omega \cap \mathcal{V}$ soit un secteur fini d'ouverture ω. C'est-à-dire

$$\Omega \cap \mathcal{V} = \{x = r(\cos\theta, \sin\theta) \quad 0 < r < \rho, \ \theta \in]0, \omega[\,\}.$$

En définissant l'opérateur non-borné Λ sur $H = L^2(]0,\omega[)^2$ comme suit :

$$\Lambda\varphi = -\varphi'',$$

où $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in D(\Lambda)$, $D(\Lambda)$ représente le domaine de Λ défini par

$D(\Lambda) = \left\{\varphi \in H^2(]0,\omega[)^2 \quad \varphi_1'(0) = \varphi_1(\omega) = 0, \ \varphi_2(0) = \varphi_2(\omega) = 0\right\}$.

L'opérateur Λ est un opérateur auto-adjoint et non négatif. Nous allons noter par $\varphi_m, m \geq 1$ les fonctions propres normalisées et par λ_m^2 leurs valeurs propres correspondantes dans l'ordre croissant de leurs modules. Nous avons

$$-\varphi_m'' = \lambda_m^2 \varphi_m,$$

et comme λ_m, $m \geq 1$ sont solutions de l'équation transcendante

$\sin(2\lambda_m\omega) = 0$ (voir [27], [4]) alors

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{2\omega}\ , \quad m \geq 1.$$

Soit maintenant $v \in N(\Omega)$, on a, $v \in L^2(]0,\omega[)^2$ pour presque tout $r \in]0,\rho[$ fixé :

$$v\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{k\geq 1} c_k(r)\,\varphi_k(\theta) \text{ avec } c_k(r) = \int_0^\omega v\left(re^{i\theta}\right)\varphi_k(\theta)\,d\theta\,;$$

on va calculer c_k en utilisant l'equation dont v est solution de :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Lambda v = 0\,,\ \ 0 < r < \rho\,,\ \ \theta \in]0,\omega[\,;$$

et par conséquent $c_k''(r) + \frac{1}{r}c_k'(r) - \frac{\lambda_k^2}{r^2}c_k(r) = 0\,,\ 0 < r < \rho$. Donc
$c_k(r) = a_k\, r^{\lambda_k} + b_k\, r^{-\lambda_k}, \quad \lambda_k > 0$, a_k et b_k sont des constantes arbitraires telle que l'on ait :

$$\int_0^\omega \left|v\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \sum_{k\geq 1} |c_k(r)|^2 \quad \text{p p,}$$

donc

$$\int_{\Omega\cap\mathcal{V}} |v(x)|^2\, dx = \sum_{k\geq 1}\int_0^\rho |c_k(r)|^2\, rdr < +\infty,$$

puisque $v \in L^2(\Omega)^2$, on voit imédiatement que $b_k = 0$ dés que $\displaystyle\int_0^\rho r^{1-2\lambda_k}dr = +\infty$,
c'est-à-dire : $2 - 2\lambda_k < 0 \Leftrightarrow \lambda_k > 1$.
Mais pour $\omega < \dfrac{\pi}{2}$, on aura que $\lambda_k \geq \dfrac{\pi}{2\omega} > 1$, il en résulte immédiatement que $b_k = 0$ pour tout k. Donc $v\left(re^{i\theta}\right) = \displaystyle\sum_{k\geq 1} a_k r^{\lambda_k}\varphi_k(\theta)$ avec $\displaystyle\int_0^\omega \left|v\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \sum_{k\geq 1} |a_k|^2\, r^{2\lambda_k}$,
d'où

$$\int_\Omega |v(x)|^2\, dx \geq \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 \int_0^\rho r^{2\lambda_k+1}dr = \sum_{k\geq 1} |a_k|^2\, \tfrac{\rho^{2+2\lambda_k}}{2+2\lambda_k}.$$

Il est maintenant essayé de vérifie que $v \in H^2(\Omega)^2$ au voisinage de zéro, autrement dit pour ε assez petit on a :

$$\int_0^{\varepsilon} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right\|^2_{L^2(]0,\omega[)^2} r dr + \int_0^{\varepsilon} \left\| \frac{\partial v}{\partial r} \right\|^2_{H^1(]0,\omega[)^2} \frac{dr}{r} + \int_0^{\varepsilon} \|v\|^2_{H^2(]0,\omega[)^2} \frac{dr}{r^3} < +\infty.$$

En effet, comme $\lambda_k > 1$ on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\varepsilon} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right\|^2_{L^2(]0,\omega[)^2} r dr &= \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 \lambda_k^2 (\lambda_k - 1)^2 \int_0^{\varepsilon} r^{2\lambda_k - 3} dr \\ &= \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 \lambda_k^2 (\lambda_k - 1)^2 \frac{\varepsilon^{2\lambda_k - 2}}{2\lambda_k - 2}. \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $\lambda_k \sim Kk$ lorsque $k \to +\infty$, on en deduit que

$$\lambda_k^2 (\lambda_k - 1)^2 \frac{\varepsilon^{2\lambda_k - 2}}{2\lambda_k - 2} \sim \frac{(Kk)^3 \varepsilon^{2Kk}}{2} \text{ et } \frac{\rho^{2+2\lambda_k}}{2 + 2\lambda_k} \sim \frac{\rho^{2Kk}}{2Kk},$$

donc pour $\varepsilon < \rho$ on a

$$\frac{\lambda_k^2 (\lambda_k - 1)^2 \varepsilon^{2\lambda_k - 2}}{2\lambda_k - 2} = 0 \left(\frac{\rho^{2+2\lambda_k}}{2 + 2\lambda_k} \right), \quad k \to +\infty.$$

Ceci prouve la convergence de la dernière série écrite. Pour estimer les autres intégrales, on utilise l'inégalité à priori $\|\varphi\|^2_{H^2(]0,\omega[)^2} \leq c \left\|\varphi''\right\|^2_{L^2(]0,\omega[)^2}$, d'où

$$\|v\|^2_{H^2(]0,\omega[)^2} \leq c \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 r^{2\lambda_k} \lambda_k^4$$

donc

$$\int_0^{\varepsilon} \|v\|^2_{H^2(]0,\omega[)^2} \frac{dr}{r^3} \leq \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 \lambda_k^4 \frac{\varepsilon^{2\lambda_k - 2}}{2\lambda_k - 2},$$

avec l'équivalence $\lambda_k^4 \frac{\varepsilon^{2\lambda_k - 2}}{2\lambda_k - 2} \sim \frac{(Kk)^3}{2} \varepsilon^{2Kk}$.
D'où la convergence de la série.

On majore la troisième intégrale de la même manière.

ii) si $v \in N(\Omega)$, de i) $v \in W(\Omega)$ et l'unicité variationnelle implique que $v = 0$, ce qui equivalent de dire que :

$$N(\Omega) = \{0\}.$$

On cherche maintenant pour $\omega_j \geq \frac{\pi}{2}$ la contribution du sommet de type Dirichlet de part et d'autre, et la contribution du sommet de type mêlé à l'epace des $N(\Omega)$.

Théorème 2.5.2. *La dimension de* $N(\Omega)$ *est* $\sum_{j=1}^{N} \mu_j$ *où :*

$$\mu_j = \begin{cases} card\left\{k \in \mathbb{N};\ 1 \leq k < \frac{\omega_j}{\pi}\right\} & si\ s_j\ de\ type\ Dirichlet \\ card\left\{k \in \mathbb{N};\ 1 \leq k < \frac{2\omega_j}{\pi}\right\} & sinon. \end{cases}$$

Preuve. On introduit l'opérateur non borné Λ_j sur $H_j = L^2(]0, \omega_j[)^2$ comme suit :

$$\Lambda_j \varphi = -\varphi'', \qquad \text{dans } D(\Lambda_j),$$

où $D(\Lambda_j) = H^2(]0, \omega_j[)^2 \cap H_0^1(]0, \omega_j[)^2$ si s_j de type Dirichlet de part et d'outre, et

$$D(\Lambda_j) = \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H^2(]0, \omega_j[)^2 \quad \varphi_1'(0) = \varphi_1(\omega_j) = 0;$$
$$\varphi_2(0) = \varphi_2(\omega_j) = 0\}, \text{ sinon.}$$

Nous allons noter par $\varphi_{j,m}$, $m \geq 1$, les fonctions propres normalisées et par $\lambda_{j,m}^2$, $m \geq 1$, les valeurs propres correspondantes. Donc on a : $-\varphi_{j,m}'' = \lambda_{j,m}^2 \varphi_{j,m}$

$$\text{où } \varphi_{j,m} \in D(\Lambda_j) \text{ et } \lambda_{j,m} = \begin{cases} \dfrac{m\pi}{\omega_j}, & \text{pour } j \in D\,; \\ \dfrac{m\pi}{2\omega_j}, & \text{pour } j \in G\,. \end{cases}$$

Soit maintenant $v \in M(\Omega) \subset L^2(\Omega)^2$, comme v est régulière, pour tout $r > 0$ (d'après le lemme 2.4.3 et la démonstration de théorème 2.5.1), alors : $v\left(re^{i\theta}\right) \in D(\Lambda_j)$, pour $0 < r < \rho$ et

$$v\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{m \geq 1} \alpha_{j,m} r^{\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta) + \sum_{0 < \lambda_{j,m} < 1} \beta_{j,m} r^{-\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta),$$

où $\alpha_{j,m}$ et $\beta_{j,m}$ sont des nombres réels.

Pour pouvoir continuer la démonstration, on admet provisoirement le lemme suivant :

Lemme 2.5.3. *Pour tout* j *et pour tout* $\lambda_{j,m} \in]0, 1[$*, il existe* $\sigma_{j,m} \in M(\Omega)$ *tel que*

$$\sigma_{j,m} - \zeta_j r_j^{-\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta) \in H^1(\Omega)^2.$$

Donc d'après le lemme 2.5.3, on a :

$$v\left(re^{i\theta}\right)-\sum_{m\geq 1}\alpha_{j,m}r^{\lambda_{j,m}}\varphi_{j,m}\left(\theta\right)-\sum_{0<\lambda_{j,m}<1}\beta_{j,m}\sigma_{j,m}\in H^{1}\left(D_{\rho}\right)^{2},$$

où

$$D_{\rho}=\Omega\cap\{0<r<\rho\}$$

et

$$w=\sum_{m\geq 1}\alpha_{j,m}r^{\lambda_{j,m}}\varphi_{j,m}\left(\theta\right)\in H^{1}\left(D_{\rho}\right)^{2}.$$

Donc

$$v\left(re^{i\theta}\right)-\sum_{0<\lambda_{j,m}<1}\beta_{j,m}\sigma_{j,m}\in H^{1}\left(D_{\rho}\right)^{2}.$$

Et par conséquent : $w=v-\sum_{0<\lambda_{j,m}<1}\beta_{j,m}\sigma_{j,m}$ est de classe H^1 au voisinage de s_j.

Le lemme 2.4.3 montre que $w\in H^{1}\left(\Omega\right)^{2}$, et donc $w\in M\left(\Omega\right)\cap H^{1}\left(\Omega\right)^{2}$. D'après l'unicité de la solution variationnelle, on a

$$M\left(\Omega\right)\cap H^{1}\left(\Omega\right)^{2}=\{0\}.$$

Cela montre que :

$$v=\sum_{j}\left\{\sum_{0<\lambda_{j,m}<1}\beta_{j,m}\sigma_{j,m}\right\}.$$

En d'autre sens v est une combinaison linéaire des fonctions $\sigma_{j,m}$, $1\leq j\leq N$ et $0<\lambda_{j,m}<1$.

Il est clair que ces fonctions sont linéairements indépendantes.

On déduit finalement que $M\left(\Omega\right)$ est un sous-espace de $L^{2}\left(\Omega\right)^{2}$ de dimension égale à

$$\sum_{j=1}^{N}\mu_{j}.$$

Preuve du lemme 2.5.3. On note par $u_{j,m}$ la fonction

$\zeta_j r_j^{-\lambda_{j,\,m}} \varphi_{j,\,m}(\theta)$, on a :

$$\Delta u_{j,\,m} = f_{j,\,m} \in \mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right),$$

et de plus

$$\gamma_k u_{j,\,m} = 0\,,\ \forall k \in D \quad \text{et} \quad \gamma_k\left(u_{j,m}.\eta^k\right) = \gamma_k\left(\tfrac{\partial u_{j,m}}{\partial \eta^k}.\tau^k\right) = 0, \quad \forall k \in G\,.$$

Donc, il existe $v_{j,m} \in H^1(\Omega)^2$ solution variationnelle de :

$$\int_\Omega \nabla v_{j,k}.\nabla h dx = -\int_\Omega h \Delta u_{j,m} dx, \quad \forall\, h \in V\,.$$

On pose : $\sigma_{j,m} = u_{j,m} - v_{j,m}$. Il est clair que

$\sigma_{j,m} \in M(\Omega)$ et $\sigma_{j,m} - \zeta_j r_j^{-\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta) = v_{j,m} \in H^1(\Omega)^2$.

Corollaire 2.5.4. *l'opérateur Δ est un opérateur à indice de $W(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)^2$, plus précisement, Δ est injectif et a une image fermée de codimension égale à $\sum_{j=1}^{N} \mu_j$ dans $L^2(\Omega)^2$.*

2.6 Application au système d'élasticité

Le point central de ce paragraphe est l'obtention de la majoration (2.3.1) pour $\Theta = L$, où c est une constante indépendante des coefficients de Lamé. La dimenstration de cette majoration se fait, comme dans B. Benabderrahmane, B. Merouani [3] et de P. Grisvard [22], par une intégration par partie, on retrouve la restriction sur les coefficients de Lamé $\lambda \leq \sqrt{3}\,|\mu|$ pour que (2.3.1) soit vérifiée.

Donc l'opérateur de Lamé est un opérateur de type semi-Fredholm. Comme l'opérateur L dépend continument de λ en tant qu'opérateur son indice est indépendant de λ.

2.7 Les solutions singulières pour le système d'élasticité

Il résulte du calcul de l'indice qu'il existe un nombre fini des solutions singulières S_j pour les angles de Ω sont supérieur à $\frac{\pi}{2}$. On peut calculer explicitement ces fonctions singulières en cherchant S_j de la forme :

$$S_j(r\ ,\ \theta) = r_j^{\alpha}\Psi_\alpha(\theta),$$

où $LS_j = 0$ dans le secteur $\{0 < \theta < \omega_j\}$, on trouve alors que α doit être solution de l'equation transcendante :

1) $\sin^2(\alpha\omega_j) = \frac{\alpha^2}{(3-4\nu)^2}\sin^2(\omega_j)$, si $j \in D$ et $\ j+1 \in D$;

2) $\sin(2\alpha\omega_j) = \frac{\alpha}{3-4\nu}\sin(2\omega_j)$, si $j \in D$ et $\ j+1 \in G$ ou $j \in G$ et $\ j+1 \in D$;

3) $\sin^2(\alpha\omega_j) = \sin^2(\omega_j)$, si $j \in G$ et $\ j+1 \in G$;

où ν est le coefficient de poisson ($0 < \nu < \frac{1}{2}$).

Les fonctions $\Psi_\alpha(\theta)$ sont données par :

1) $$\Psi_\alpha(\theta) = \{(\rho_0+\rho_1)\sin(\alpha-2)\omega_j + (\rho_0-3\rho_1)\sin\alpha\omega_j\} \times \left| \begin{array}{c} (\rho_0+\rho_1)\left[\cos(\alpha-2)\theta - \cos\alpha\theta\right] \\ -(\rho_0+\rho_1)\sin(\alpha-2)\theta + (3\rho_0-\rho_1)\sin\alpha\theta \end{array} \right.$$
$$+(\rho_0+\rho_1)\{\cos(\alpha-2)\omega_j - \cos\alpha\omega_j\} \left| \begin{array}{l} -(\rho_0+\rho_1)\sin(\alpha-2)\theta \\ -(\rho_0+\rho_1)\cos(\alpha-2)\theta \end{array} \right.$$
$$\left. \begin{array}{r} +(3\rho_1-\rho_0)\sin\alpha\theta \\ +(\rho_0+\rho_1)\cos\alpha\theta \end{array} \right| ;$$

si le sommet s_j est de type Dirichlet de par et d'outre

2) $$\Psi_\alpha(\theta) = \left| \begin{array}{l} [(\rho_0+\rho_1)\cos\alpha\omega_j]\cos(\alpha-2)\theta \\ [-(\rho_0+\rho_1)\cos\alpha\omega_j]\sin(\alpha-2)\theta \end{array} \right.$$
$$\left. \begin{array}{r} +[-(\rho_0+\rho_1)\cos(\alpha-2)\omega_j]\cos\alpha\theta \\ +[-2(\rho_1-\rho_0)\cos\alpha\omega_j + (\rho_0+\rho_1)\cos(\alpha-2)\omega_j]\sin\alpha\theta \end{array} \right| ;$$

si le sommet s_j est de type C-S-F Dirichlet

3) $\Psi_\alpha(\theta) = \left| \begin{array}{l} [(\rho_0+\rho_1)\sin(\alpha+1)\omega_j]\cos(\alpha-2)\theta \\ [-(\rho_0+\rho_1)\sin(\alpha+1)\omega_j]\sin(\alpha-2)\theta \end{array} \right.$

$$\left. \begin{array}{l} -[(\rho_1-\rho_0)\sin(\alpha+1)\omega_j + 2\rho_1\sin(\alpha-1)\omega_j]\cos\alpha\theta \\ -[(\rho_1-\rho_0)\sin(\alpha+1)\omega_j + 2\rho_1\sin(\alpha-1)\omega_j]\sin\alpha\theta \end{array} \right| ;$$

si le sommet s_j est de type C.S.F de par et d'outre,

avec $\rho_0 = \frac{\alpha-1}{1-2\nu} - 2$ et $\rho_1 = \frac{\alpha+1}{1-2\upsilon} + 2$.

Remarque

1- On a trouvé que $u \in H^2(\Omega)^2$ (*la régularité de la solution*) *dans le seul cas où* Ω *est un triangle dont tous les angles sont* $< \dfrac{\pi}{2}$.

Chapitre 3

Problème de contact sans frottement-Dirichlet pour les équations de Laplace et de Lamé dans un polyèdre

Résumé

Dans le deuxième chapitre, où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ â frontière polygonale, on a établi le résultat suivant : l'opérateur de laplace Δ considéré de $W(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)^2$, a une image fermée et de codimension finie. En partculier, Δ est surjectif si $\omega_j < \frac{\pi}{2}$, $\forall\, j = 1, 2, ..., N$, que n'est verifiée que par un triangle dont tous les angles sont $< \frac{\pi}{2}$. Nous allons donc reprendre l'étude faite dans le deuxième chapitre en supposant que Ω est un polyèdre de $\mathbb{R}^3$ et aussi les conditions de contact sans frottement sont portées par un seule côté de la frontière.

Contenu

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on montre que si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ à frontière polyèdrale dont les ouvertures des angles des dièdres (vers l'intérieur de Ω) sont notées $\omega_{j,k}$, le résultat correspondant au chapitre 2 s'énonce comme suit : Δ considéré de $W(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)^3$ a une image fermée et de codimension finie, si $\omega_{j,k} < \dfrac{\pi}{2}$ pour tout j et tout k ,si non, l'image de Δ est de codimension infinie.

C'est ce dernier phénomène qui différentie le cas polyèdral du cas polygonal, à savoir que dans le cas polyèdral, si Δ n'est pas surjectif, il n'est pas non plus ≪ à indice≫ . On a regroupé dans ce chapitre les théorèmes concernant la régularité des dérivées secondes et établir des estimations à priori des dérivées d'ordre deux qui différent de celle de [14] relatives au cas bidimensionnel. Nous montrons ces estimations en utilisant des inégalités dans le plan, puis, nous étudions la régularité des dérivées secondes.

3.2 Notations et position du problème

Dans ce chapitre, on utilisera les notations suivantes, Ω est un corps homogène, élastique et isotrope, occupant un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ à frontière polyèdrale, c'est-à-dire $\partial\Omega = \overset{N}{\underset{j=1}{\cup}} \overline{\Gamma}_j$, où les faces Γ_j sont des ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$ deux à deux disjoints. Nous supposons de plus que Ω est d'un seul côté de $\partial\Omega = \Gamma$. Pour tout $j \geq 1$, Γ_j est donc un ouvert plan à frontière polygonale. On notera $A_{j,k}$ l'arête commune à $\overline{\Gamma}_j$ et $\overline{\Gamma}_k$

$$A_{j,k} = \overline{\Gamma}_j \cap \overline{\Gamma}_k\,, \qquad 1 \leq j,k \leq N\ ,j \neq k\,.$$

On note aussi $\omega_{j,k}$ l'angle que forme la face Γ_j avec la face Γ_k , autrement dit l'ouverture du dièdre formé par Γ_j et Γ_k vers l'intérieur de Ω. On suppose que $\omega_{j,k} \neq \pi$, on ne considère bien entendu que les couples (i,j), tels que $A_{j,k} \neq \varnothing$, (voir fig 3.1.1).

Pour tout Γ_j les vecteurs η^j et τ^j désignent respectivement la normale unitaire extérieure et la tangente unitaire à Γ_j, remarquons qu'en tout point de Γ_j, il existe une

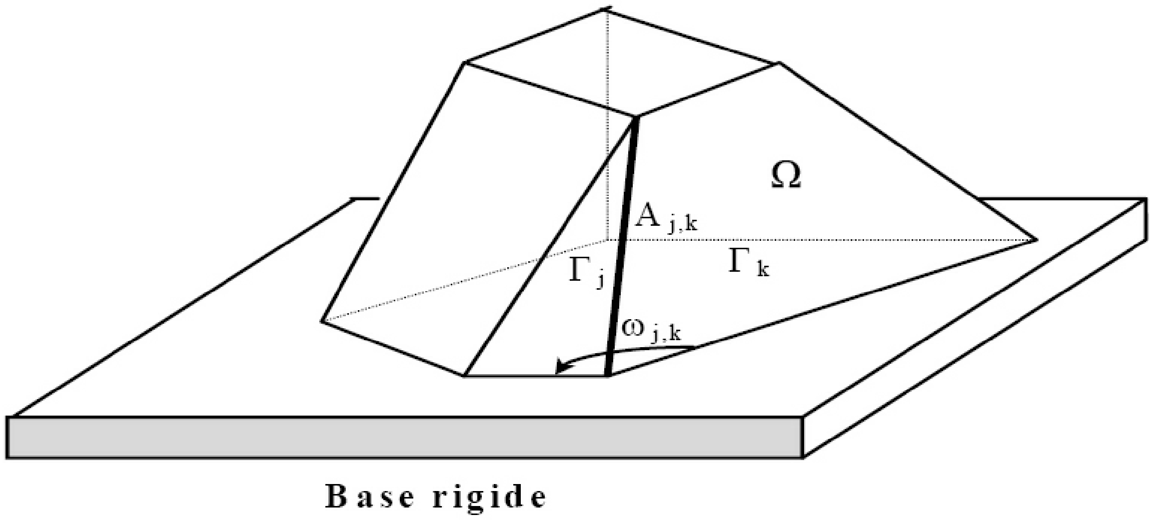

FIG. 3-1 –

infinité de vecteurs tangents à Γ_j .

On considère le problème gouverné par l'opérateur Θ. Pour $f \in L^2(\Omega)^3$ donné, on cherche u si possible dans $H^2(\Omega)^3$, solution du problème :

$$\Theta u = f\,,\ \text{dans}\ \Omega\,; \tag{3.2.1}$$

$$\gamma_j u = 0,\ \ \text{sur}\,\Gamma_j,\ \ \forall j = 2, ..., N \tag{3.2.2}$$

$$\begin{cases} \gamma_1\left(u.\eta^1\right) = 0 \\ \gamma_1\left(\left(\sum(u)\eta^1\right).\tau^1\right) = 0 \end{cases},\ \text{sur}\ \Gamma_1, \tag{3.2.3}$$

où Θ un opérateur différentiel, désigne le système de Lamé où le Laplacien, et $u = (u_1, u_2, u_3)$, $f = (f_1, f_2, f_3)$ sont des vecteurs de trois composantes représentants respectivement le déplacement et la densité des forces extérieures. Enfin $\sum(u) = (\sigma_{i,j})$ est une matrice d'ordre 3 représentant le tenseur des contraintes, les éléments $\sigma_{i,j}$ sont donnés par la loi de Hook :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))\delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3 \text{ où } \ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}).$$

Un raisonnement semblable à celui vu dans le cas polygonale, permet de donner la formulation variationnelle de ce problème, Ainsi l'existence et l'unicité d'une solution u dans l'espace :

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega)^3, \, \gamma_j v = 0, \ \forall j \in D, \ \gamma_j \left(v.\eta^j \right) = 0, \ \forall j \in G \right\}.$$

D'autre part, les conditions aux limites de contact sans frottement (3.2.3), sont équivalents aux conditions $\gamma_1 (u.\eta^1) = \gamma_1(\frac{\partial u}{\partial \eta^1}.\tau^1) = 0$. (la démonstration est la même que celle de chapitre 2).

Pour montrer une majoration à priori des dérivées second par la technique de P. Grisvard [19] on simplifie le problème (3.2.1)-(3.2.3) comme suit :

$$\Delta u = f \, , \qquad \text{dans } \Omega \, ; \tag{3.2.4}$$

$$\gamma_j u = 0, \qquad \text{sur } \Gamma_j, \ \ \forall j = 2, ..., N \tag{3.2.5}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma_1 (u.\eta^1) = 0 \\ \gamma_1 ((\sum(u)\eta^1).\tau^1) = 0 \end{array} \right. , \ \ \text{sur } \Gamma_1, \tag{3.2.6}$$

c'est-à-dire, les conditions de contact sans frottement sont portées par un seule côté Γ_1.

3.3 Inégalité à priori

On introduit l'espace $W(\Omega)$ des éliments $u \in H^2(\Omega)^3$ vérifiants les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \gamma_j u = 0, & \text{sur}\, \Gamma_j, \;\; \forall j = 2, ..., N \\ \begin{cases} \gamma_1(u.\eta^1) = 0 \\ \gamma_1((\sum(u)\eta^1).\tau^1) = 0 \end{cases}, & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases}$$

c'est à dire l'espace où on cherche $u,$ et on démontre la majoration à priori suivante :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)^3} \leq c\, \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)^3}\,. \tag{3.3.1}$$

Pour u dans cet espace, on commence par le résultat essentiel suivant :

Théorème 3.3.1. *Pour tout $u \in W(\Omega)$, on a :*

$$\|D_x^2 u\|^2 + \;\|D_y^2 u\|^2 + \;\|D_z^2 u\|^2 + \|D_x D_y u\|^2 + \|D_x D_z u\|^2 + \|D_y D_z u\|^2$$

$$\leq \|\Delta u\|^2$$

(*où la norme sans indice, sera toujours celle de $L^2(\Omega)^3$*).

La démonstration de ce théorème repose sur le

Lemme 3.3.2. *Soit Ω un polygone de $\mathbb{R}^2$ on note par $K_{\alpha,\beta}(\Omega)$ le sous-espace de $H^2(\Omega)$ formé des fonctions u vérifiants les conditions*

$$\alpha_j D_x u + \beta_j D_y u = 0, \text{ sur } \Gamma_j, \text{ et } \alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0, \;\; j = 1, ..., N.$$

Alors :

$$(D_x^2 u; D_y^2 u)_0 = \|D_x D_y u\|_0^2\,, \, \forall\, u \in K_{\alpha,\beta}(\Omega)$$

(*l'indice 0 signifie qu'il s'agit de la norme de $L^2(\Omega)$*).

La démonstration du lemme 3.3.2 est bien détailé dans [18].

Preuve du théorème 3.3.1. On va expliciter les conditions aux limites vérifiées par u. On choisit le système d'axes de coordonnées de façon que Γ_1 soit porté sur le plan (xoy). Dans ce cas, on a le vecteur normal à Γ_1 est donné par $\eta^1 = (0, 0, -1)$ et les vecteurs tangents sont $\tau^1 = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$. Par conséquent les conditions $\gamma_1 (u.\eta^1) = \gamma_1(\frac{\partial u}{\partial \eta^1}.\tau^1) = 0$ deviennent $\gamma_1 u_3 = 0$ et $\gamma_1(\frac{\partial u_1}{\partial \eta^1}) = \gamma_1(\frac{\partial u_2}{\partial \eta^1}) = 0$. C'est-à-dire on découple le problème (3.2.4)-(3.2.6) avec des conditions aux limites satisfaites pour chaque composante u_k, $(k = 1, 2, 3)$ comme suit. Un problème de Dirichlet pour u_3 et deux problème de Dirichlet-Neumann pour u_1 et u_2.

On calcule maintenant explicitement $\|\Delta u\|^2$ avec $u = (u_1, u_2, u_3)$. Pour cela, on écrit

$$\|\Delta u\|^2 = \|\Delta u_1\|_0^2 + \|\Delta u_2\|_0^2 + \|\Delta u_3\|_0^2 .$$

Pour tout $k = 1, 2, 3,$ on a :

$$\begin{aligned}
\|\Delta u_k\|_0^2 &= \left\|D_x^2 u_k + D_y^2 u_k + D_z^2 u_k\right\|_0^2 \\
&= \|D_x^2 u_k\|_0^2 + \left\|D_y^2 u_k\right\|_0^2 + \|D_z^2 u_k\|_0^2 + \\
&+ 2(D_x^2 u_k; D_y^2 u_k)_0 + 2(D_x^2 u_k; D_z^2 u_k)_0 + 2(D_y^2 u_k; D_z^2 u_k)_0.
\end{aligned}$$

Il suffit de montrer que

$$(D_x^2 u_k; D_y^2 u_k)_0 = \|D_x D_y u_k\|_0^2 , \ \forall k = 1, 2, 3.$$

Ainsi que des indentités analogues pour chacun des autres couples de variables.
Explicitement on a :

$$(D_x^2 u_k; D_y^2 u_k)_0 = \int_\Omega D_x^2 u_k D_y^2 u_k dxdydz.$$

On note Ω_z l'intersection de Ω avec le plan de hauteur z fixé, et comme Ω_z est à frontière polygonale et les conditions aux limites satisfaites pour u_k sont des conditions de Dirichlet c'est-à-dire,

$$u_k \in H^2(\Omega_z) \cap H_0^1(\Omega_z),$$

On a $u_k \in K_{\alpha,\beta}(\Omega_z)$. Donc d'après le lemme 3.3.2 :

$$\int\limits_{\Omega_z} D_x^2 u_k D_y^2 u_k dxdy = \int\limits_{\Omega_z} |D_x D_y u_k|^2 \, dxdy,$$

pour tout z fixé, en intégrant en z on obtient :

$$\int\limits_{\Omega} D_x^2 u_k D_y^2 u_k dxdydz = \int\limits_{\Omega} |D_x D_y u_k|^2 \, dx.dydz,$$

d'où

$$(D_x^2 u_k; D_y^2 u_k)_0 = \|D_x D_y u_k\|_0^2 \, , \forall k = 1, 2, 3.$$

Pour montrer $(D_x^2 u_k ; D_z^2 u_k)_0 = \|D_x D_z u_k\|_0^2$ (resp $(D_y^2 u_k ; D_z^2 u_k)_0 = \|D_y D_z u_k\|_0^2$), on note par Ω_y(resp Ω_x), l'intersection de Ω avec le plan de largeur y (resp longueur x) fixé, et en observant que les conditions aux limites restent les mêmes pour u_k sur Ω_y (resp Ω_x). Par conséquent on a toujours $u_k \in K_{\alpha,\beta}(\Omega_y)$ pour Ω_y (resp $u_k \in K_{\alpha,\beta}(\Omega_x)$ pour Ω_x), voir [29], [19].

Finalement on a :

$$\begin{aligned} \|D_x^2 u_k\|_0^2 &+ \left\|D_y^2 u_k\right\|_0^2 + \|D_z^2 u_k\|_0^2 + \|D_x D_y u_k\|_0^2 + \\ &+ \|D_x D_z u_k\|_0^2 + \|D_y D_z u_k\|_0^2 \\ &\leq \|\Delta u_k\|_0^2 \, . \end{aligned}$$

Pour tout $k = 1, 2, 3$. Et par addition on obtient le théorème ■

Corollaire 3.3.3. *Soit $u \in W(\Omega)$, solution du problème (3.2.4)-(3.2.6), alors il existe $c > 0$ telle que*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)^3} \leq c \, \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)^3}$$

Preuve. On a démontré dans le théorème précédent que :

$$\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|^2 \leq \|\Delta u\|^2$$

de plus la majoration variationnelle de u et l'inégalité de Poincaré montre que :

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)^3} \leq c_1 \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)^3}$$

ceci implique immédiatement que :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)^3} \leq c \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)^3} . \ \blacksquare$$

3.4 Régularité des dérivées secondes

L'inégalité (3.3.1) montre que l'image de $W(\Omega)$ par Δ est fermée dans $L^2(\Omega)^3$. On désigne dans ce qui suit cette image par $R(\Omega)$.

$$R(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega)^3 \ ; \ f = \Delta u \, , \ u \in W(\Omega) \right\}$$

On va maintenant déterminer $N(\Omega)$ l'orthogonale de $R(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)^3$.
A partir de ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent on peut découpler le probème (3.2.4)-(3.2.6) en deux problèmes. Le problème de Dirichlet est étudié par P.Grisvard [19]. Donc il suffit d'étudier le problème de Dirichlet-Neumann suivant :

$$\Delta u_1 = f_1, \quad \text{dans } \Omega \, ; \tag{3.4.1}$$

$$\gamma_j u_1 = 0, \ \text{ sur } \Gamma_j, \ \ \forall j = 2, ..., N \, ; \tag{3.4.2}$$

$$\gamma_1 (\frac{\partial u_1}{\partial \eta^1}) = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1. \tag{3.4.3}$$

Pour cela, on note par $V_1(\Omega)$ l'espace

$$V_1(\Omega) = \left\{ v_1 \in H^1(\Omega) \, ; \gamma_j v_1 = 0 \ \text{ sur } \Gamma_j, \ \ \forall j = 2, ..., N \right\} .$$

et par

$$W_1(\Omega) = \left\{ u_1 \in H^2(\Omega) \, ; \gamma_j u_1 = 0 \, , \ \text{sur}\, \Gamma_j, \ \ \forall j = 2, ..., N \text{ et } \gamma_1(\frac{\partial u_1}{\partial \eta^1}) = 0 \, , \ \text{sur } \Gamma_1 \right\},$$

l'espace où nous voulons chercher u_1.

D'après corollaire 3.3.3, il existe $c_1 > 0$ tel que $\|u_1\|_{H^2(\Omega)} \leq c_1 \|\Delta u_1\|_{L^2(\Omega)}$, pour tout $u_1 \in W_1(\Omega)$. Donc on peut construire l'orthogonal $N_1(\Omega)$ de $R_1(\Omega)$, où $R_1(\Omega)$ représente l'image de $W_1(\Omega)$ par Δ.

Une démonstration semblable à celui vu dans [14], [28] fournit les deux lemmes suivants :

Lemme 3.4.1. *Soit $v_1 \in N_1(\Omega)$. Alors v_1 est solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} \Delta v_1 = 0, & \text{dans } \Omega \ ; \\ \gamma_j v_1 = 0, & \text{sur}\, \Gamma_j, \ \ \forall j = 2, ..., N \, ; \\ \gamma_1(\dfrac{\partial v_1}{\partial \eta^1}) = 0, & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

Lemme 3.4.2. *Soit $v_1 \in N_1(\Omega)$. Alors $v_1 \in C^\infty(\Omega \backslash A)$, où $A = \overset{N}{\underset{j,k=1}{\cup}} \overline{A}_{j,k}$ est l'ensemble des sommets et des arêtes de $\overline{\Omega}$.*

Le lemme 3.4.2 exprime un résultat de régularité au voisinage des morceaux réguliers de la frontière, qui est assez bien connu par la méthode de réflexions. Pour plus de détails voir [18], [19].

On va maintenant déterminer la dimension de $N_1(\Omega)$. Pour cela, nous allons introduire les notations suivantes

On note Λ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur S^2(la sphère unité de $\mathbb{R}^3$), Λ s'écrit comme suit :

$$\Lambda(\xi) = \frac{1}{\sin\varphi} D_\varphi(\sin\varphi D_\varphi \xi) + \frac{1}{\sin^2\varphi} D_\theta^2 \xi \, .$$

G est un ouvert de S^2 de la forme particulière suivante : ∂G est formé d'un nombre fini d'arcs qu'on note T_j , $1 \leq j \leq N$. En d'outres termes, G est l'intersection avec S^2

d'un cône polyédral Ω de sommet 0 ; Ω est limité par ses faces Γ_j et $T_j = S^2 \cap \Gamma_j$. On note ω_j l'angle que font les tangentes à T_j et à T_{j+1} en leurs points de rencontre, c'est-à-dire, l'angle de Γ_j avec Γ_{j+1} (vers l'intérieur de Ω).

On va montrer ici un résultat utilisé dans la démonstration du théorème 3.4.4 ci-dessous, qui est relatif à des problèmes bidimentionnels donc plus liés aux travaux de [18].

Lemme 3.4.3. *Si $\omega_j < \dfrac{\pi}{2}$ pour tout j, alors Λ est un isomorphisme de $H^2(G) \cap V_1(G)$ sur $L^2(G)$.*

Il en résulte que si $\xi_k \in V_1(G)$ est une fonction propre de L, c'est-à-dire

$$\Lambda \xi_k = -\lambda_k \xi_k, \text{ dans } G,$$

alors $\xi_k \in H^2(G)$ si $\omega_j < \dfrac{\pi}{2}$ pour tout j .

Preuve. Il sagit d'un résultat de régularité qui compte tenu de l'ellipticité de Λ, est évident à l'intérieur de G et au voisinage des arcs T_j. Il n'y a de difficulté qu' au voisinage des sommets. Il suffit donc de considérer le cas où la fonction u_1, dont on veut prouver la régularité, est à support au voisinage d'un des sommets. En coordonnées locales, on est ramené au probléme suivant :

G est le secteur plan limité par l'axe ox et la demi-droite qui fait avec ox un angle ω_j dans le sens-direct, $u_1 \in V_1(G)$, est à support borné et de plus u_1 est solution de

$$\Lambda u_1 = f_1 \in L^2(G)$$

où $\Lambda = \sum\limits_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x; y) D_x^{\alpha_1} D_y^{\alpha_2}$ avec a_α fonctions régulières, on a donc :

$$\Delta u_1 = f_1 + A u_1 + B u_1$$

où B est un opérateur du premier ordre et A un opérateur du second ordre dont les coefficients s'annulent en zéro (voir [19]).

Si $f_1 \in L^2(G)$, on a

$$g_1 = \Delta u_1 - A u_1 \in L^2(G).$$

On peut trouver un triangle coîncidant avec G au voisinage de 0 et contenant le support de u_1. Soit Δ_1 la restriction de Δ à $V_1(\Omega_1)$. De [14] on sait que Δ_1 est un isomorphisme de $H^2(\Omega_1) \cap V_1(\Omega_1)$ sur $L^2(\Omega_1)$, comme les coefficients de A tendent vers zéro lorsqu'on diminue Ω, on voit que si Ω_1 est assez petit $\Delta_1 + A$ est encore un isomorphisme de $H^2(\Omega_1) \cap V_1(\Omega_1)$ sur $L^2(\Omega_1)$. Il en résulte que

$$u_1 = (\Delta_1 + A)^{-1} g_1 \in H^2(G). \blacksquare$$

Théorème 3.4.4

(i) dim $N_1(\Omega) = \sum_{i=1}^{I} card \left\{ l, \text{ tel que } \lambda_{i,l} < \frac{3}{4} \right\}$, *si* $\omega_{j,k} < \frac{\pi}{2}$, *où* I *représente le nombre de sommets.*

(ii) dim $N_1(\Omega) = +\infty$, *si* $\omega_{j,1} > \frac{\pi}{2}$.

Preuve

• (i) Il est bien connu que $v_1 \in N_1(\Omega)$ est analytique dans Ω et jusqu'aux parties planes de la frontière. Ainsi on a la régularité à l'intérieur de chaque arête et sur les sommets de type Dirichlet pur pour vu que $\omega_{j,k} < \frac{\pi}{2}$ (voir [19], [3]). Il reste donc à étudier v_1 au voisinage des sommets de type Dirichlet-Neumann. Pour cela, on choisit un sommet de ce type, et on translate ce sommet en 0 (ce qui ne change rien au problème) et on suppose que le voisinage V est une boule de centre 0 et de rayon R assez petit pour que $\Omega \cap V$ soit un tronc de cône (de hauteur R) sous-tendu par l'ouvert G de S^2 :

$$\Omega \cap V = \{x = r.\omega;\ 0 < r < R, \omega \in G\}.$$

Il est clair que G est à frontière lipschitzienne dans S^2. On considère l'opérateur de Laplace-Beltrami Λ sur G avec les conditions de Dirichlet-Neumann (c'est-à-dire pour fixer les idées Λ réalisé comme isomorphisme de $V_1(G)$ sur $H^{-1}(G)$). La compacité de l'injection de $V_1(G)$ dans $L^2(G)$ permet de diagonaliser Λ dans $L^2(G)$. Il existe donc une base orthonormale (ξ_l), $l = 1, 2, ...$de $L^2(G)$ formée de fonctions propres de L :

$$\begin{cases} \xi_l \in V_1(\Omega), & l \geq 1\,; \\ \Lambda\xi_l = -\lambda_l \xi_l, & l \geq 1, \end{cases}$$

avec $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ..., \lambda_l \longrightarrow +\infty$.

Soit alors $v_1 \in N_1(\Omega)$, on a $v_1 \in L^2(G)$, pour tout $r \in]0, R[$ fixé. Donc

$$v_1(r.\omega) = \sum_{l \geq 1} c_l(r).\xi_l(\omega), 0 < r < R\ ,\ \omega \in G,$$

avec

$$c_l(r) = \int_G v_1(r\omega)\,\xi_l(\omega) d\omega.$$

On va calculer c_l, en utilisant l'équation dont v_1 est solution :

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Lambda v_1 = 0, 0 < r < R, \omega \in G.$$

D'après le lemme 3.4.3, on a $\xi_l \in H^2(G)$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(]0, R[)$, il est facile de voir que la fonction u_l définie par

$$u_l(r\omega) = \begin{cases} \varphi(r).\xi_l(\omega)\ , 0 < r < R\ ,\ \omega \in G\,; \\ 0, \qquad\qquad \text{sinon}, \end{cases}$$

est dans $W_1(\Omega)$. De la définition de N_1 (Ω), il résulte que v_1 est orthogonal à Δu_l pour tout l :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^R \int_G v_1(r\omega)\,\Delta u_l(r\omega) r^2 dr d\omega \\
&= \int_0^R \int_G v_1(r\omega) \left\{\varphi''(r) + \tfrac{2}{r}\varphi'(r) - \tfrac{\lambda_l}{r^2}\varphi(r)\right\} \xi_l(\omega) r^2 dr d\omega \\
&= \int_0^R \left\{r^2\varphi''(r) + 2r\varphi'(r) - \lambda_l \varphi(r)\right\}.c_l(r)\, dr. \\
&= \left\langle r^2 c_l; \varphi''\right\rangle + 2\left\langle r c_l; \varphi'\right\rangle - \lambda_l \left\langle c_l; \varphi\right\rangle \\
&= \left\langle (r^2 c_l)'' - 2(r c_l)' - \lambda_l c_l; \varphi\right\rangle \\
&= \left\langle\ r^2 c_l'' - 2r c_l' - \lambda_l c_l\ ;\ \varphi\right\rangle.
\end{aligned}$$

Comme l'identité ci-dessus est vérifiée pour toute $\varphi \in \mathcal{D}\left(]0,R[\right)$, on a

$$r^2 c_l^{''} - 2r c_l^{'} - \lambda_l c_l = 0, \text{ dans }]0,R[$$

au sens des distributions. Donc

$$c_l(r) = a_l r^{\alpha_l} + b_l r^{\beta_l}$$

où

$$\alpha_l = \frac{-1+\sqrt{1+4\lambda_l}}{2}, \quad \beta_l = \frac{-1-\sqrt{1+4\lambda_l}}{2}$$

et a_l, b_l sont des constantes arbitraires, telles que l'on ait

$$\int\limits_G \left|v_1\left(r\omega\right)\right|^2 d\omega = \sum_{l\geq 1} \left|c_l\left(r\right)\right|^2, p.p.$$

Donc

$$\int\limits_{\Omega\cap V} \left|v_1\left(x\right)\right|^2 dx = \sum_{l\geq 1} \int_0^R \left|c_l\left(r\right)\right|^2 r^2 dr < +\infty\,.$$

Puisque $v_1 \in L^2(\Omega)$, on voit immédiatement que $b_l = 0$, dès que :

$$\int_0^R r^{2+2\beta_l} dr = +\infty \text{ c'est-à-dire } \lambda_l \geq \frac{3}{4}.$$

Il en résulte que :

$$v_1\left(r.\omega\right) = \sum_{l\geq 1} a_l r^{\alpha_l}.\xi_l\left(\omega\right) + \sum_{l<\frac{3}{4}} b_l r^{\beta_l}.\xi_l\left(\omega\right)$$

avec

$$\int\limits_G \left|v_1\left(r\omega\right)\right|^2 d\omega \geq \sum_{l\geq 1} \left|a_l\right|^2 r^{2\alpha_l}$$

d'où

$$\int_{\Omega} |v_1(x)|^2\, dx \geq \sum_{l\geq 1} |a_l|^2 \int_0^R r^{2+2\alpha_l} dr = \sum_{l\geq 1} |a_l|^2 \frac{R^{3+2\alpha_l}}{3+2\alpha_l}.$$

Soit $w = \sum_{l\geq 1} a_l r^{\alpha_l}.\xi_l(\omega)$.

Il est maintenant aisé de vérifier que $w \in H^1$ au voisinage de zéro,c'est-à-dire que

$$\int_0^{\varepsilon} \left\| \frac{\partial w}{\partial r} \right\|_{L^2(G)}^2 r^2 dr + \int_0^{\varepsilon} \|w\|_{H^1(G)}^2 dr < +\infty.$$

Pour ε assez petit, on a

$$\int_0^{\varepsilon} \left\| \frac{\partial w}{\partial r} \right\|_{L^2(G)}^2 r^2 dr = \sum_{l\geq 1} |a_l|^2 \alpha_l^2 \int_0^{\varepsilon} r^{2\alpha_l} dr = \sum_{l\geq 1} |a_l|^2 \alpha_l^2 \frac{\varepsilon^{2\alpha_l+1}}{2\alpha_l+1}$$

Compte tenu du fait que $\lambda_l \sim Kl$ lorsque $l \longrightarrow +\infty$, on déduit que

$$\alpha_l^2 \sim \sqrt{Kl} \text{ et } \frac{\alpha_l^2 \varepsilon^{2\alpha_l+1}}{2\alpha_l+1} \sim \frac{\sqrt{Kl}\varepsilon^{2\sqrt{Kl}}}{2}$$

et aussi

$$\frac{R^{3+2\alpha_l}}{3+2\alpha_l} \sim \frac{R^{2\sqrt{Kl}}}{2\sqrt{Kl}}$$

donc pour $\varepsilon < R$, on a $\dfrac{\alpha_l^2 \varepsilon^{2\alpha_l+1}}{2\alpha_l+1} = \circ\left(\dfrac{R^{3+2\alpha_l}}{3+2\alpha_l}\right)$, $l \longrightarrow +\infty$,
ceci prouve la convergence de la dernière série écrite. Pour estimer l'autre intégrale, on utilise l'inégalité suivante :

$$\|\xi\|_{H^1(G)}^2 \leq c \|\Lambda\xi\|_{L^2(G)}^2 .$$

D'où

$$\begin{array}{rcl} \|w\|_{H^1(G)}^2 & \leq & c\sum_{l\geq 1} |a_l|^2 r^{2\alpha_l} \lambda_l^2 et \int_0^{\varepsilon} \|w\|_{H^1(G)}^2 dr \\ & \leq & c\sum_{l\geq 1} |a_l|^2 \lambda_l^2 \frac{r^{2\alpha_l+1}}{2\alpha_l+1} \end{array}$$

avec l'équivalence

$$\lambda_l^2 \frac{\varepsilon^{\alpha_l+1}}{2\alpha_l+1} \sim \frac{(Kl)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{2\sqrt{Kl}}}{2}$$

d'où la convergence de la série.

En conclut de [3], que :

$$v_1\left(r.\omega\right)-\sum_{l<\frac{3}{4}} b_l r^{\beta_l}.\xi_l\left(\omega\right)$$

définit un élément de $H^1(\Omega\cap V)$.

En répétant le même raisonnement au voisinage de chacun des sommets de type Dirichlet -Neumann de Ω, on voit qu'il existe un sous-espace vectoriel $N_1^{'}(\Omega)$ de dimension

$$\sum_{i=1}^{I} card\left\{l,\ \text{tel que } \lambda_{i,l}<\frac{3}{4}\right\}$$

dans $N_1(\Omega)$, tel que $N_1(\Omega)\subseteq N_1^{'}(\Omega)+H^1(\Omega)$.

L'unicité de la solution variationnelle du problème de Dirichlet -Neumann implique que

$$N_1(\Omega)\cap H^1(\Omega)=\{0\},$$

on a donc $N_1(\Omega)=N_1^{'}(\Omega)$

d'où

$$dim N_1(\Omega)=\sum_{i=1}^{I} card\left\{l \text{ tel que } \lambda_{i,l}<\frac{3}{4}\right\}$$

- (ii) On raisonne par l'absurde, supposant que :

$$\dim N_1(\Omega)=d<+\infty\,.$$

On choisit une arête d'ouverture $\alpha>\dfrac{\pi}{2}$ de Ω et par un choix convenable des axes de coordonnées, on peut supposer cette arête portée par l'axe oy. On note Ω_0 l'intersection de Ω avec le plan $y=0$; c'est un polygone plan d'angles $>\dfrac{\pi}{2}$ et d'après Grisvard [9] on sait qu'il existe u_1^0 à support dans un voisinage de zéro, tel que

$$u_1^0\in V_1(\Omega_0),\ \Delta u_1^0=f_1^0\in L^2(\Omega_0) \text{ et } u_1^0\notin H^2(\Omega_0).$$

Comme Ω est ouvert, on peut choisir un intervalle $I = (a, b)$, tel que si $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, la fonction u_1 définie par

$$u_1(x, y, z) = u_1^0(x, z)\varphi(y)$$

est à support dans Ω. On a donc $u_1 \in V_1(\Omega)$ et

$$\Delta u_1 = f_1^0(x, z)\varphi(y) + u_1^0(x, z)\varphi''(y) = f_1.$$

Soit $\{v_1, ..., v_d\}$ une base de $N_1(\Omega)$. On sait que si

$$\langle\ f_1; v_j\ \rangle = 0,\ j = 1, 2, ..., d$$

alors $u_1 \in H^2(\Omega)$ et si $\varphi \neq 0$ cela implique $u_1^0 \in H^2(\Omega_0)$ ce qui impossible. Cependant on a évidement $\langle\ f_1; v_j\ \rangle = 0$ si et seulement si $\langle\varphi\ ; F_j\ \rangle = 0$, où F_j est la distribution définie par

$$F_j(y) = \int_{\Omega\ y} f_1^0(x, z)v_j(x, y, z)dxdz + D_y^2 \int_{\Omega\ y} u_1^0(x, z)v_j(x, y, z)dxdz$$

et Ω_y est l'intersection de Ω avec le plan de hauteur y. Il est clair que $\mathcal{D}(I)$ est de dimension infinie. On peut donc trouver $\varphi \neq 0$, telle que $\langle\varphi\ ; F_j\ \rangle = 0$, pour $j = 1, 2, ..., d$ ce qui est contradictoire. $\blacksquare$

Corollaire 3.4.5. *Si on peut montrer que* $\lambda_{i,l} > \frac{3}{4}$, *pour* $\omega_{j,k} < \frac{\pi}{2}$, *(le calcul des valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami* Λ *ainsi que leurs majoration reste un problème ouvert jusqu'à présent,).*

Il résulte du théoréme 3.4.4 *la relation suivante :*

$$dim N_1(\Omega) = \{0\}, \quad si\ \ \omega_{i,\ j} < \frac{\pi}{2}\ .$$

C'est-à-dire que Δ *est un isomorphisme de* $W_1(\Omega)$ *dans* $L^2(\Omega)$. *Par conséquent, on a la régularité* $H^2(\Omega)$.

Corollaire 3.4.6

(i) dim $N(\Omega) = 2\sum_{i=1}^{I} card\left\{l \text{ tel que } \lambda_{i,l} < \frac{3}{4}\right\}$, *si* $\omega_{j,k} < \frac{\pi}{2}$ *, où* I *représente le nombre de sommets.*

(ii) dim $N(\Omega) = +\infty$, *si* $\omega_{j,1} > \frac{\pi}{2}$.

Remarque 3.4.7. *Dans le cas particulier où tous les angles de* Ω *sont strictement inférieurs à* $\frac{\pi}{2}$ *, les résultats précédents permettent de conclure que l'image de* $W(\Omega)$ *par* Δ *est un sous-espace fermé de* $L^2(\Omega)^3$ *et de codimension égale à*

$$2\sum_{i=1}^{I} card\left\{ l \;\; tel\ que\ \lambda_{i,l} < \frac{3}{4}\right\}.$$

Chapitre 4

Problèmes aux limites obliques et non lineaires pour les équations de Lamé dans un domaine de classe C^2

Résumé

Dans ce chapitre on généralise les résultats de H. Benseridi [6] pour le système de l'élasticité avec des conditions aux limites non linéaires sur une partie de la frontière et Dirichlet sur l'autre partie. Pour cela, on à considéré le problème approché où l'on a remplacé β par l'approchant de Yosida β_ξ et on a résolu ce dernier problème en s'inspirant d'une méthode de contraction de Brézis [10].

Contenu

4.1 Introduction et position du problème

Nous considérons un corps homogène, elastique et isotrope, occupant un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ de classe C^2, la frontière de Ω sera notée $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$ avec mesure $\Gamma_1 > 0$.

Il s'agit de résoudre le problème suivant dans $H^2(\Omega)^n$, $(n = 2, 3)$:

$$\begin{cases} -Lu + \alpha u = f & \text{dans} \quad (\Omega) \\ u = 0 & \text{sur} \quad (\Gamma_1) \\ -\sigma(u)\nu + P(u) \in \beta(u) & \text{sur} \quad (\Gamma_2) \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^2, $f \in L^2(\Omega)^n$, P un opérateur différentiel, du premier ordre à coefficients lipschitziens, β un graphe maximal monotone tel que $0 \in \beta(0)$ et α un réel positif sur lequel nous apporterons des précisions plus loin.

L désigne le système de l'élasticité :

$$\mu\Delta + (\lambda + \mu)\nabla div,$$

où λ et μ sont les coefficients d'élasticité avec $\lambda > 0$ et $\lambda + \mu \geq 0$, et σ désigne le tenseur de contraintes, avec $\sigma = (\sigma_{ij}), i, j = 1...n$. les éléments σ_{ij} sont donnés par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij}(u) = 2\mu\varepsilon_{ij}(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))\delta_{ij},$$

où $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ est le tenseur des déformations linéairisé associe à u.

Je rappelle que lorsque l'opérateur P est identiquement nul, $\alpha = 0$ et Ω est un polygone plan, le problème (4.1.1) dans ce cas est exactement étudié par B. Merauani [26].

Ici, pour arriver au but désiré, on à considéré le problème approché où l'on a remplacé β par l'approchant de Yosida β_ξ et on a résolu ce dernier problème en s'inspirant d'une méthode de contraction de Brézis [10], pour cela on va étudier dans un premier temps le problème approché suivant :

$$\begin{cases} -Lu_\xi + \alpha u_\xi = f & \text{dans} \quad (\Omega) \\ u_\xi = 0 & \text{sur} \quad (\Gamma_1) \\ -\sigma(u_\xi)\nu + P(u_\xi) = \beta_\xi(u_\xi) & \text{sur} \quad (\Gamma_2) \end{cases} \tag{4.1.2}$$

où β_ξ est l'approchant de Yosida de β, et les hypothèses sur les autres facteurs sont les mêmes pour (4.1.1).

Et par suite une inégalité à priori basée sur la formule d'intégration par parties de Grisvard-Looss [23], un passage à la limite donne l'existence d'une solution u appartenant a $H^2(\Omega)^n$ de (4.1.1) pour α vérifier (4.4.1.4).

4.2 Préliminaire

Lemme 4.2.1. *Ω étant un ouvert de classe C^2, P un opérateur tangentiel du premier ordre, quel que soit $v \in L^1(\Omega)^n$ tel que $Pv \in L^1(\Omega)^n$ on a :*

$$\int_\Gamma Pv ds \leq c_1 \int_\Gamma |v| \, ds \tag{4.2.1}$$

où c_1 dépend de l'ouvert et des coefficients de P.

Lemme 4.2.2. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Γ Lipschtzienne, si $u \in H^1(\Omega)^n$ et si β est une fonction uniformêment Lipschtzienne alors $\beta(u)$ appartient à $H^1(\Gamma)^n$.*

Théorème 4.2.3. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{0,1}$, $\forall \;\; \epsilon > 0$ il existe $C_2(\varepsilon)$ tel que :*

$$\|v\|^2_{L^2(\Gamma)^n} \leq \varepsilon \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}} + C_2(\varepsilon) \|v\|^2_{L^2(\Omega)^n}, \forall v \in H^1(\Omega)^n. \tag{4.2.2}$$

Théorème 4.2.4. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{0,1}$, $\forall \;\; \epsilon > 0$ il existe $C_3(\varepsilon)$ tel que :*

$$\|\nabla\omega\|^2_{L^2(\Gamma)^{n\times n}} \leq \varepsilon \|\omega\|^2_{H^2(\Omega)^n} + C_3(\varepsilon) \|\omega\|^2_{H^1(\Omega)^n}, \forall \omega \in H^2(\Omega)^n. \tag{4.2.3}$$

4.3 Résolution du problème approché

4.3.1 Introduction et résolution d'un nouveau système

Soit $\beta_\xi = \frac{I-(I+\xi\beta)^{-1}}{\xi}$ la régularisée Yosida de β, on posera :

$\gamma_\xi = -(I+\xi\beta)^{-1}$ la résolvante de β, qui est un application contractante, considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -Lv + \alpha v = f & (\Omega) \\ v = 0 & (\Gamma_1) \\ -\sigma(v)\nu + P(v) - \dfrac{v}{\xi} = \dfrac{\gamma_\xi(u)}{\xi} & (\Gamma_2) \end{cases} \tag{4.3.1.1}$$

où $u \in L^2(\Gamma_2)^n$, les hypothèses sur les autres facteurs sont les mêmes que celle concernant (4.1.2). On remarquera qu'un point fixe de (4.3.1.1) (i.e. si on trouve une solution : v tel que $v/\Gamma_2 = u$) donnera une solution (4.1.2).

Théorème 4.3.1.1. *Le problème (4.3.1.1) admet une solution unique* $v \in K$, où

$$K = \{w \in H^1(\Omega)^n : w = 0 \text{ on } \Gamma_1\}.$$

Preuve. On résoud (4.3.1.1) par la même méthode variationnelle, pour tout $w \in K$, on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial \sigma_{ij}(v)}{\partial x_j}.v_i dx + \alpha \int_\Omega v_i.w_i dx = \int_\Omega f_i.w_i dx, \forall w \in K$$

En utilisant la formule de Green, on en déduit :

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(v).\frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \int_\Gamma (\sigma_{ij}(v).\nu_j).v_i ds + \alpha \int_\Omega v_i.w_i dx = \int_\Omega f_i.w_i dx, \forall w \in K$$

et par conséquent, on a :

$$\int_\Omega \sigma(v).\varepsilon(w) dx - \int_{\Gamma_2} (\sigma(v).\nu).w ds + \alpha \int_\Omega v.w dx = \int_\Omega f.w dx$$

on pose sur $K \times K$:

$$a(v,w) = \int_{\Omega} \sigma(v).\varepsilon(w)dx + \alpha \int_{\Omega} v.wdx - \langle Pv, w\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)^n \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)^n} + \frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2} v.wds$$

cette forme est bilinéaire continue, regardons si elle est coercitive.

On prend $v \in H^2(\Omega)^n \cap K$ est on fait

$$a(v,v) = \int_{\Omega} \sigma(v).\varepsilon(v)dx + \alpha \int_{\Omega} v^2dx - \int_{\Gamma_2} Pv.vds + \frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2} v^2ds.$$

Considérant l'intégrale de bord $\int_{\Gamma_2} Pv.vds$, d'après le lemme 4.2.1 on a :

$$\int_{\Gamma_2} Pv.vds = \int_{\Gamma_2} P(\frac{v^2}{2})ds \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_2} Pv.vds \leq c_1 \int_{\Gamma_2} v^2ds$$

donc on a :

$$\begin{aligned}
a(v,v) &\geq 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v).\varepsilon_{ij}(v)dx + \lambda \int_{\Omega} \varepsilon_{kk}(v).\varepsilon_{kk}(v)dx + \alpha \int_{\Omega} v^2dx - c_1 \int_{\Gamma_2} v^2ds \\
&\geq 2\mu \sum_{1\leq i,j\leq n} \int_{\Omega} |\varepsilon_{ij}(v)|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} v^2dx - c_1 \int_{\Gamma_2} v^2ds \\
&\geq 2\mu \|\varepsilon(v)\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}} + \alpha \int_{\Omega} v^2dx - c_1 \int_{\Gamma_2} v^2ds
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Korn on obtient :

$$a(v,v) \geq k\|v\|^2_{H^1(\Omega)^n} + \alpha \int_{\Omega} v^2dx - c_1 \int_{\Gamma_2} v^2ds$$

et le lemme 4.2.2 donne que :

$$a(v,v) \geq k\|v\|^2_{H^1(\Omega)^n} - c_1\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + (\alpha - c_1.c_2(\varepsilon)) \int_{\Omega} v^2dx$$

$$a(v,v) \geq (k - c_1\varepsilon) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + (\alpha - c_1.c_2(\varepsilon)) \int_{\Omega} v^2dx.$$

Si on choisit

$$\varepsilon < \frac{k}{c_1} \quad \text{et} \quad \alpha \geq c_1.c_2(\varepsilon) = \alpha_1 \tag{4.3.1.2}$$

on a alors :

$$a(v,v) \geq cte\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)^n},\ \forall v \in H^2(\Omega)^n$$

et comme $H^2(\Omega)^n \cap K$ est dense dans K on a :

$$a(v,v) \geq cte\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)^n},\forall v \in K,$$

ce qui montre la coercivité de la forme $a(v,w)$.

Considérant maintenant la forme :

$$S(w) = \int_\Omega f.wdx - \frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2} \gamma_\xi(u).wds$$

cette forme étant linéaire et continue, d'après le théorème de Lax Milgram il existe un unique $v \in K$ tel que :

$$a(v,\omega) = S(w),\ \ \forall w \in K \tag{4.3.1.3}$$

Il reste à voir que (4.3.1.1) et (4.3.1.3) sont équivalents, l'implication (4.3.1.1) $\Longrightarrow$ (4.3.1.3) est facilement vérifiable, a-t-on (4.3.1.3) $\Longrightarrow$ (4.3.1.1).

Si $w \in \mathcal{D}'(\Omega)^n$, on a alors :

$$\int_\Omega \sigma(v).\varepsilon(w)dx + \alpha\int_\Omega v.wdx = \int_\Omega f.wdx$$
$$\Longrightarrow -Lv + \alpha v = f \ \text{ au sens de } \mathcal{D}'(\Omega)^n$$

si on prend $\omega \in H^2(\Omega)^n \cap K$ on a :

$$-\int_\Omega Lv.wdx = \int_\Omega \sigma(v).\varepsilon(w)dx - \int_{\Gamma_2} (\sigma(v).v).wds$$

d'après Lions- Magenes [25] et v étant solution de (4.3.1.3), on a :

$$\int_\Omega \sigma(v).\varepsilon(w)dx + \alpha\int_\Omega v.wdx - \langle Pv, w\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)^n \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)^n} + \frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2} v.wds$$

$$= -\int_\Omega Lv.wdx + \langle \sigma(v).\nu, w\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)^n \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)^n} - \langle Pv, w\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)^n \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)^n} +$$

$$\frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2} v.wds + \alpha\int_{\Omega} v.wdx = \int_{\Omega} f.wdx \ - \int_{\Gamma_2} \frac{\gamma_\xi(u)}{\xi}.wds$$
$$\Longrightarrow \sigma(v).\nu - Pv + \frac{v}{\xi} = -\frac{\gamma_\xi(u)}{\xi}$$

Donc il existe une solution $v \in H^1(\Omega)^n$ de (4.3.1.1).

Théorème 4.3.1.2. *Le problème (4.1.2) admet une solution $u_\xi \in K$.*

Preuve

On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} T : L^2(\Gamma_2)^n & \longrightarrow & L^2(\Gamma_2)^n \\ u & \longmapsto & T(u) = v/\Gamma_2 \end{array}$$

où v solution de (4.3.1.1).

On va montre que c'est une contraction stricte, dans ce paragraphe on peut prendre $\Gamma \in C^{0,1}$ seulement, soit v_1 et v_2 solutions des problèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{cc} -Lv_1 + \alpha v_1 = f & (\Omega) \\ v_1 = 0 & (\Gamma_1) \\ -\sigma(v_1)\nu + Pv_1 - \dfrac{v_1}{\xi} = \gamma_\xi(u_1) & (\Gamma_2) \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{cc} -Lv_2 + \alpha v_2 = f & (\Omega) \\ v_2 = 0 & (\Gamma_1) \\ -\sigma(v_2)\nu + Pv_2 - \dfrac{v_2}{\xi} = \gamma_\xi(u_2) & (\Gamma_2) \end{array}\right.$$

avec les mêmes hypothèses que pour (4.1.2), α vérifiant (4.3.1.2). On pose $w = v_2 - v_1$ et on voit que w est solution de

$$\left\{\begin{array}{cc} -Lw + \alpha w = 0 & (\Omega) \\ w = 0 & (\Gamma_1) \\ -\sigma(w)\nu + Pw - \dfrac{w}{\xi} = \gamma_\xi(u_2) \ - \gamma_\xi(u_1) & (\Gamma_2) \end{array}\right. \qquad (4.3.1.4)$$

ce qui nous permet d'écrire que :

$$\int_{\Omega}(-Lw+\alpha w).wdx=\int_{\Omega}\sigma(w).\varepsilon(w)dx+\alpha\int_{\Omega}w^2dx-\int_{\Gamma_2}(\sigma(w)\nu).wds=0$$

ceci implique :

$$\int_{\Omega}\sigma(w).\varepsilon(w)dx+\alpha\int_{\Omega}w^2dx-\int_{\Gamma_2}Pw.wds+\int_{\Gamma_2}\frac{w^2}{\xi}ds+\int_{\Gamma_2}\frac{\gamma_\xi(u_2)\ -\gamma_\xi(u_1)}{\xi}ds=0$$

du lemme 4.2.1 et du théorème 4.2.3, on déduit que :

$$\begin{array}{cc} & -C_1\varepsilon\int_{\Omega}|\nabla w|^2\,dx-C_1C_2(\varepsilon)\int_{\Omega}|w^2|\,dx+\int_{\Omega}\sigma(w).\varepsilon(w)dx \\ + & \alpha\int_{\Omega}w^2dx+\int_{\Gamma_2}\frac{w^2}{\xi}ds \\ \leq & \frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2}(\gamma_\xi(u_1)-\gamma_\xi(u_2))ds \\ \Longrightarrow & (K-C_1\varepsilon)\int_{\Omega}|\nabla w|^2\,dx+(\alpha-C_1C_2(\varepsilon))\int_{\Omega}w^2dx+\int_{\Gamma_2}\frac{w^2}{\xi}ds \\ \leq & \frac{1}{2\xi}\int_{\Gamma_2}(\gamma_\xi(u_1)-\gamma_\xi(u_2))^2ds+\frac{1}{2\xi}\int_{\Gamma_2}\frac{w^2}{\xi}ds. \end{array}$$

Etant donné que γ_ξ est une application contractante, et si ε et α vérifient (4.3.1.2) on a alors :

$$\begin{array}{cc} & \inf\left[\xi(K-C_1\varepsilon),\xi(\alpha-C_1C_2(\varepsilon))\right]\|w\|^2_{H^1(\Omega)^n}+\int_{\Gamma_2}w^2ds \\ \leq & \int_{\Gamma_2}|u_2-u_1|^2\,ds \end{array}$$

et grâce aux théorèmes de traces on déduit que :

$$(C_4+1)\,\|w\|^2_{L^2(\Omega)^n}\leq\|u_2-u_1\|^2_{L^2(\Omega)^n} \tag{4.3.1.5}$$

cette inégalité implique que

$$\|w\|^2_{L^2(\Omega)^n}=\|v_2-v_1\|^2_{L^2(\Omega)^n}\leq\tfrac{1}{\sqrt{C_4+1}}\,\|u_2-u_1\|^2_{L^2(\Omega)^n}$$

et comme $\dfrac{1}{\sqrt{C_4+1}} < 1$, T est une contraction stricte. Donc il existe un et seul $u \in L^2(\Gamma_2)^n$ tel que $T(u) = u = v/_{\Gamma_2}$ et donc v est solution de

$$\begin{cases} -Lv + \alpha v = f & (\Omega) \\ v = 0 & (\Gamma_1) \\ -\sigma(v)\nu + P(v) - \dfrac{v}{\xi} = \dfrac{\gamma_\xi(v)}{\xi} & (\Gamma_2) \end{cases} \tag{4.3.1.6}$$

En fait on vient de montrer l'existence d'une solution v appartenant à $H^1(\Omega)^n$ de (4.1.2).
Remarque 4.3.1.3. *On a* $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)^n$ *car* $v/_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)^n$

4.3.2 Régularité de la solution du problème approché

Revenons à (4.3.1.1), où le u intervenant dans les conditions aux limites, sera le u réalisant le point fixe de T.

Théorème 4.3.2.1. *Soit Ω un ouvert borné de R^n de classe C^2, si $f \in L^2(\Omega)^n, g \in H^1(\Omega)^n, P$ un opérateur tangentiel à coefficients Lipschtziens et α vérifiant (3.1.2), alors il existe une unique v solution appartenant à $H^2(\Omega)^n$ de*

$$\begin{cases} -Lv + \alpha v = f & (\Omega) \\ v = 0 & (\Gamma_1) \\ -\sigma(v)\nu + P(v) = g & (\Gamma_2) \end{cases} \tag{4.3.2.1}$$

Preuv. On regarde ce qui se passe localement

a) Pour les points se trouvant à l'interieur de Ω ou à la frontière Γ_1,on sait que (résultat classique) $v \in H^2(\Omega)^n$.

b) Pour les points appartenant à la frontière Γ_2 que se passe-t-il ?

Soit σ_0 et $\Phi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ telle que $\sigma_0 \in supp\Phi = k$ et $\Phi \equiv 1$ au voisinage de σ_0. Γ_2 étant une sous-variété compacte, il existe un ouvert de carte U_i tel que $\sigma_0 \in U_i$ et ψ_i est un isomorphiseme de classe C^2 tel que

$$\psi_i : U_i \cap K \longrightarrow W_i$$

où W_i est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Par ψ_i on transporte donc notre problème (4.3.2.1) au voisinage d'un point $X_0 = \psi_i(\sigma_0)$ appartenant à $x_n = 0$. Ce problème devient

$$\begin{cases} -L\omega + \alpha\omega = f' & (W_i) \\ -\sigma(\omega)\nu + P_1(\omega) = g' & (x_n = 0) \end{cases} \tag{4.3.2.2}$$

où $\omega = \psi_i \circ v$, $f' = \psi_i \circ f$, $g' = \psi_i \circ g$ et $P_1 = \sum_{k=1}^{n-1} a_k(X) \frac{\partial}{\partial X_k} + a_0(X)$ avec donc $f' \in L^2(W_i)^n$, $g' \in H^{\frac{1}{2}}(x_n = 0)^n$, P_1 opérateur différentiel du premier ordre et α vérifiant (4.3.1.2)

ω est aussi solution de

$$\begin{cases} -L\omega + \alpha\omega = f' & (W_i) \\ -\sigma(\omega)\nu + P_1(X_0) + & \\ + (P_1(s) - P_1(X_0)) = g' & (W_i \cap x_n = 0) \end{cases} \tag{4.3.2.3}$$

Etant seulement concerné par les valeurs des fonctions sur $\psi_i(U_i \cap K \cap \Gamma_2)$, on va une fonction $\psi_r(X) = \psi\left(\frac{x}{r}\right)$ appartenant à $\mathcal{D}(\overline{W_i})$ qui est égale à 1 sur $\psi_i(K)$ (elle permet d'enviter de raisonne sur $\partial\psi_i(U_i \cap K \cap \Gamma_2)$).

(4.3.2.3) devient alors :

$$\begin{cases} -L\omega + \alpha\omega = f' & (W_i) \\ -\sigma(\omega)\nu + P_1(X_0) + & \\ +\psi_r(X)(P_1(s) - P_1(X_0)) = g' & (W_i \cap x_n = 0) \end{cases}$$

On considère l'opérateur

$$\begin{array}{rccl} \Lambda: & H^2(W_i) & \longrightarrow & L^2(W_i) \times H^{\frac{1}{2}}(W_i \cap x_n = 0) \\ & \omega & \longmapsto & \begin{array}{c} (-L\omega + \alpha\omega, -\sigma(\omega)\nu + P_1(X_0)(\omega) + \\ \psi_r(X)\{P_1(s)(\omega) - P_1(X_0)(\omega)\}) \end{array} \end{array}$$

et comme l'opérateur

$$\begin{array}{rccl} \Lambda_1: & H^2(W_i) & \longrightarrow & L^2(W_i) \times H^{\frac{1}{2}}(W_i \cap x_n = 0) \\ & \omega & \longmapsto & (-L\omega + \alpha\omega, -\sigma(\omega)\nu + P_1(X_0)(\omega)) \end{array}$$

est un isomorphisme voir Lions-Magenes [25] et de plus

$$\|\psi_r (P_1 (X) - P_1 (X_0))\|_{H^{\frac{1}{2}}(W_i \cap x_n=0)} \to 0 \text{ quand } \operatorname{supp}\psi \to 0$$

d'après Schechter [31] , Λ sera un isomorphisme, et en revenant à Ω on aura montré que $v \in H^2_{loc} (\Gamma)^n$.

En combinant a) et b) et en utilisant une partition de l'unité on aura montré que $v \in H^2 (\Omega)^n$.

Remarque 4.3.2.2. *La solution de (4.1.2) est dans* $H^2 (\Omega)^n$.

En effet d'après la remarque 4.3.1.3 et le lemme 4.2.2 on a $\gamma_\xi(u) \in H^{\frac{1}{2}} (\Gamma_2)^n$ et par suite la solution v de (4.3.1.1), appartient à $H^2 (\Omega)^n$, mais comme d'après, v est solution de (4.1.2), on a donc la solution de (4.1.2) appartient à $H^2 (\Omega)^n$. On appellera cette solution u_ξ (α vérifiant (4.3.1.2)).

4.4 Existence d'une solution appartenant a $H^2 (\Omega)^n$

4.4.1 Inégalité a priori

Soit u_ξ solution de (4.1.2) on a le

Théorème 4.1.1. *Il existe une constante C indépendante de ξ tel que :*

$$\|u_\xi\|^2_{H^2(\Omega)^n} \leq C \|f\|^2_{L^2(\Omega)^n} \tag{4.4.1.1}$$

pour u_ξ solution de (4.1.2) avec α vérifiant (4.3.1.2).

Preuve. Pour plus de comodité, on posera $u_\xi = u$, alors on a

$$\begin{aligned}(-Lu + \alpha u, -Lu + \alpha u) &= \|Lu\|^2_{L^2(\Omega)^n} - 2\alpha (Lu, u) + \alpha^2 \|u\|^2_{L^2(\Omega)^n} \\ &= \|Lu\|^2_{L^2(\Omega)^n} + 2\alpha \int_\Omega \sigma(u).\varepsilon(u)dx \\ &- 2\alpha \int_{\Gamma_2} (\sigma(u).\nu) .uds + \alpha^2 \|u\|^2_{L^2(\Omega)^n}\end{aligned}$$

et nous avons aussi :

$$-2\alpha \int\limits_{\Gamma_2} (\sigma(u).\nu) .uds = -2\alpha \int\limits_{\Gamma_2} Pu.uds + 2\alpha \int\limits_{\Gamma_2} \beta_\xi(u).uds$$

En utilisant le fait que β_ξ est Lipschitzienne croissante avec $\beta_\xi(0) = 0$, on a

$$-2\alpha \int\limits_{\Gamma_2} (\sigma(u).\nu) .uds \geq -2\alpha c_1 \int\limits_{\Gamma_2} |u|^2 \, ds \tag{4.4.1.2}$$

d'autre part on utilisons les même méthodes de [14] [32], et de Grisvard [17] [23] on montre l'existence d'une constante $c_5 > 0$ tel que

$$c_5 \|u\|^2_{H^2(\Omega)^n} \leq \|Lu\|^2_{L^2(\Omega)^n} \tag{4.4.1.3}$$

nous obtenons aussi (4.4.1.3) commme dans Schechter [31].

En utilisant les théorèmes de traces de Lions [25], les inégalités (4.4.1.2) et (4.4.1.3), le théorèmes 4.2.3 et l'inégalité de Korn on obtient

$$\begin{array}{rcc} (-Lu + \alpha u, -Lu + \alpha u) & \geq & c_5 \|u\|^2_{H^2(\Omega)^n} + 2\alpha k \|u\|^2_{H^1(\Omega)^n} \\ & + & \alpha^2 \|u\|^2_{L^2(\Omega)^n} - 2\alpha c_1 \varepsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}} \\ & - & 2\alpha c_1 c_2(\varepsilon) \|u\|^2_{L^2(\Omega)^n} \end{array}$$

c'est-a-dire que

$$\begin{array}{rcc} (f, f) & \geq & c_5 \|u\|^2_{H^2(\Omega)^n} + 2\alpha (k - c_1\varepsilon) \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}} \\ & + & (\alpha^2 - 2\alpha c_1 c_2(\varepsilon)) \|u\|^2_{L^2(\Omega)^n} \end{array}$$

Donc on voit que si

$$\varepsilon < \frac{k}{c_1} \quad et \quad \alpha \geq \alpha_2 = \max \{\alpha_1, \alpha_2 = 2c_1.c_2(\varepsilon)\} \tag{4.4.1.4}$$

l'inégalité (4.4.1.1) est exactement verifie.

4.4.2 Passage à la limite

Corollaire. *Pour (3.3.4) vérifie, il existe* $u \in H^2(\Omega)^n$ *solution de (1.1)*

D'après (3.1.1) on a $\|u_\xi\|^2_{H^2(\Omega)^n} \leq c\,\|f\|^2_{L^2(\Omega)^n}$.

Donc on peut trouver une suite $\xi_j \longrightarrow 0$ telle que,

$$\begin{array}{ccc} u_{\xi_j} \longrightarrow u & \text{faiblement dans} & H^2(\Omega)^n \\ u_{\xi_j} \longrightarrow u & \text{fortement dans} & H^1(\Omega)^n \\ u = 0 & \text{sur} & \Gamma_1 \end{array}$$

et on voit que :

$$\begin{array}{lcl} \sigma(u_{\xi_j})\nu \longrightarrow \sigma(u)\nu & \text{dans} & L^2(\Gamma_2)^n \\ P(u_{\xi_j}) \longrightarrow P(u) & \text{dans} & L^2(\Gamma_2)^n \end{array}$$

Donc,

$$\beta_{\xi_j}(u_{\xi_j}) \longrightarrow -\sigma(u)\nu + P(u).$$

Mais étant donné que

$$\beta_\xi \subset \beta \circ (1 + \xi\beta)^{-1}$$

on déduit que :

$$\beta_{\xi_j}(u_{\xi_j}) \in \beta \circ (1 + \xi_j\beta)^{-1}$$

et

$$u_{\xi_j} - (1 + \xi_j\beta)^{-1}u_{\xi_j} = \xi_j\beta_{\xi_j}(u_{\xi_j}) \underset{\xi_j \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

ceci implique

$$(1 + \xi_j\beta)^{-1}u_{\xi_j} \underset{\xi_j \longrightarrow 0}{\longrightarrow} u.$$

En combinant ce résultat avec les autres on a :

$$-\sigma(u)\nu + P(u) \in \beta(u)$$

Donc il existe une solution $u \in H^2(\Omega)^n$de (1.1) avec α vérifiant (4.4.1.4)□

Chapitre 5

Analyse Asymptotique d'un problème dynamique d'Elasticité linéaire avec frottement

Résumé

Dans ce chapitre nous prouvons en premier le résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible, aux équations dynamique pour Elasticité linéaire dans un domaine borné à trois dimensions avec des conditions de frottement sur une partie de la frontière et Dirichlet sur l'autre partie ; alors nous étudions l'analyse asymptotique quand ε tend vers zéro. La convergence forte de la vitesse est prouvée, l'équation spécifique de Reynolds est aussi prouvée.

Contenu

5.1 Introduction et Position du problème

Nous considérons un problème associé à des déformations d'un corps homogène élastique et isotrope en régime dynamique dans le domaine mince $\Omega^{\varepsilon} \subset \mathbb{R}^3$ dont une partie de sa frontière est soumise à des conditions de frottement et une autre partie est soumise à des conditions de Dirichlet, où $0 < \varepsilon < 1$ est un réel positif déstiné à tendre vers zéro. La frontière de Ω^{ε} sera notée $\Gamma^{\varepsilon} = \overline{\Gamma}_1^{\varepsilon} \cup \overline{\Gamma}_L^{\varepsilon} \cup \overline{\omega}$, avec Γ_1^{ε} est la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h(x_1, x_2)$, Γ_L^{ε} est la frontière latérale, ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω^{ε}. On suppose que h est une fonction de classe C^1 définie sur ω telle que

$$0 < h_{\min} \leq h(x') \leq h_{\max} = \overline{h} \quad \forall (x', 0) \in \omega.$$

On note $x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Le domaine Ω^{ε} est donné par

$$\Omega^{\varepsilon} = \{(x',\, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ (x', 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\}.$$

Soit $T > 0$, $u^{\varepsilon}(x,t)$ est la vitesse de déplacement du corps élastique au point x et à l'instant $t \in [0,T]$. On désigne par $D = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ le tenseur des taux de déformations avec

$$d_{ij}\left(u^{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i,j \leq 3.$$

On suppose que la loi de comportement suit la loi de Hooke, écrite avec la convention d'Einstein

$$\sigma_{ij}^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}) = 2\mu d_{ij}\left(u^{\varepsilon}\right) + \lambda d_{kk}\left(u^{\varepsilon}\right)\delta_{ij}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé et δ_{ij} est le symbole de Krönecker.

Les équations qui gouvernent les déformations d'un corps homogène élastique isotrope en *régime dynamique* dans le domaine Ω^{ε} sont les suivantes [15]

$$\frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon}}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j}^{\varepsilon} + f_i^{\varepsilon} \quad \text{dans } \Omega^{\varepsilon} \times]0,T[\tag{5.1.1}$$

où f^{ε} représente une densité massique des forces extérieures.

On utilise les notations usuelles

$$u_n^{\varepsilon} = u^{\varepsilon}.n \qquad u_{\tau}^{\varepsilon} = u^{\varepsilon} - u_n^{\varepsilon}.n \qquad \sigma_n^{\varepsilon} = (\sigma^{\varepsilon}.n).n, \qquad \sigma_{\tau}^{\varepsilon} = \sigma^{\varepsilon}.n - (\sigma_n^{\varepsilon}).n$$

où n désigne le vecteur unitaire normal à Γ^{ε} extérieur à Ω^{ε}.

Nous supposons que la vitesse est connue sur $\Gamma_1^{\varepsilon} \times]0,T[$ et sur $\Gamma_L^{\varepsilon} \times]0,T[$

$$u^{\varepsilon} = 0 \text{ sur } \Gamma_1^{\varepsilon} \times]0,T[\tag{5.1.2}$$

$$u^{\varepsilon} = g \text{ sur } \Gamma_L^{\varepsilon} \times]0,T[\tag{5.1.3}$$

où $g = (g_1, g_2, g_3)$ est une fonction ne dépend pas de t, avec $g_3 = 0$.

Sur ω la vitesse est supposée inconnue et elle vérifié la condition suivante

$$\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}.n = 0 \text{ sur } \omega \times]0,T[\tag{5.1.4}$$

Nous supposons aussi l'existence du frottement sur ω, ce frottement est modélisé par la loi non linéaire de Tresca [15]

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_{\tau}^{\epsilon}| < k^{\epsilon} \Rightarrow \left(\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\right)_{\tau} = 0 \\ |\sigma_{\tau}^{\epsilon}| = k^{\epsilon} \Rightarrow \exists\ \beta \geq 0 \text{ tel que } \left(\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\right)_{\tau} = -\beta\sigma_{\tau}^{\epsilon} \end{array}\right\} \text{sur } \omega \times]0,T[\tag{5.1.5}$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, et k^{ϵ} est une fonction donnée.

Le problème consiste à trouver u^{ϵ} vérifiant le problème (1.1)-(1.5) avec les conditions initiales suivantes

$$u^{\varepsilon}(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad \forall x \in \Omega^{\varepsilon}. \tag{5.1.6}$$

Lemme 5.1.1. *La condition (5.1.5) sur* $\omega \times]0,T[$ *est equivalant a condition suivante :*

$$\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\cdot\sigma_\tau^\varepsilon+k^\varepsilon\cdot\left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right|=0. \tag{5.1.7}$$

Peuve.

• Supposons que u^ε vérifie la condition aux limites de tresca (5.1.5).

$\triangleright$ Si $|\sigma_\tau^\epsilon|<k^\epsilon$, alors $\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau=0$, d'où (5.1.7)

$\triangleright$ Si $|\sigma_\tau^\epsilon|=k^\epsilon$ alors il existe $\beta\geq 0$ tel que $\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau=-\beta\sigma_\tau^\epsilon$, d'où

$$\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\cdot\sigma_\tau^\varepsilon+k^\varepsilon\cdot\left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right|=-\beta\,|\sigma_\tau^\epsilon|^2+\beta\,|\sigma_\tau^\epsilon|^2=0.$$

• Réciproquement, on suppose que $\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\cdot\sigma_\tau^\varepsilon+k^\varepsilon\cdot\left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right|=0.$

$\triangleright$ Si $|\sigma_\tau^\epsilon|=k^\epsilon$, alors de (5.1.7) on a

$$\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\cdot\sigma_\tau^\varepsilon=-\,|\sigma_\tau^\epsilon|\cdot\left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right|$$

d'où l'existence d'un $\beta\geq 0$ tel que $\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}=-\beta\sigma_\tau^\varepsilon$

$\triangleright$ Si $|\sigma_\tau^\epsilon|<k^\epsilon$, alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\cdot\sigma_\tau^\varepsilon+k^\varepsilon\cdot\left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right|=0 \quad &\geq -\left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right|\cdot|\sigma_\tau^\epsilon|+k^\varepsilon\cdot\left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right|\\ &\geq\left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right|(k^\varepsilon-|\sigma_\tau^\epsilon|)\end{aligned}$$

et comme $k^\varepsilon-|\sigma_\tau^\epsilon|>0$, d'où $\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}=0.\square$

5.2 Formulation variationnelle du problème

Nous supposons que la fonction vectorielle $g\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_L^\varepsilon)^3$ (l'ensemble des traces de $H^1(\Omega^\varepsilon)^3$ sur Γ_L^ε) telle que

$$\int_{\Gamma_L^\varepsilon} g.n\ ds=0 \tag{5.2.1}$$

Nous pouvons alors montrer comme dans [16] que cette condition est équivalente à l'existence d'un relèvement $G^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3$ de g sur Ω^ε vérifiant

$$G^\varepsilon = g \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon, G^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon, G^\varepsilon.n = 0 \text{ sur } \omega. \tag{5.2.2}$$

Pour l'ouvert Ω^ε on définit l'espace et l'ensemble suivants :

$$H^1(\Omega^\varepsilon)^3 = \left\{ v \in \left(L^2(\Omega^\varepsilon)\right)^3 : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega^\varepsilon), \forall i, j = 1, ..., 3 \right\}$$

l'espace de Sobolev muni de la norme $\|.\|_{1,\Omega^\varepsilon}$, où la norme de $\left(L^2(\Omega^\varepsilon)\right)^3$ sera noté $\|.\|_{0,\Omega^\varepsilon}$, $H_0^1(\Omega^\varepsilon)^3$ désigne le sous espace vectoriel des fonctions de $H^1(\Omega^\varepsilon)^3$ nulles sur Γ^ε, on note $H^{-1}(\Omega^\varepsilon)^3$ son dual topologique.

Nous définissons le convexe ferme non vide de $H^1(\Omega^\varepsilon)^3$

$$K^\varepsilon = \left\{ v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \ \Gamma_1^\varepsilon, \ v.n = 0 \text{ sur } \omega \right\},$$

Pour simplifier l'écriture du problème faible on note :

$$a(u, v) = 2\mu \int_{\Omega^\varepsilon} d_{ij}(u)\, d_{ij}(v)\, dx + \lambda \int_{\Omega^\varepsilon} div\,(u)\,.div\,(v)\, dx \tag{5.2.3}$$

Pour $v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3$, on définie la fonctionnelle j^ε par

$$j^\varepsilon(v) = \int_\omega k^\varepsilon \left| v_\tau \right| dx' \tag{5.2.4}$$

Enfin on note

$$(f, v) = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i v_i dx, \forall v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3.$$

Lemme 5.2.1. *soit u^ε solution de (5.1.1)-(5.1.6), alors elle vérifie le problème variationnel suivant :*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u^\varepsilon \text{ où } \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \in K^\varepsilon, \ \forall t \ \in [0,T]\,, \textit{ telle que} \\ \left(\dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \phi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + a(u^\varepsilon(t), \phi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)) + \\ j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)) \geq (f^\varepsilon, \phi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)), \quad \forall \phi \in K^\varepsilon \\ \textit{avec} \qquad u^\varepsilon(0) = u_0, \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0) = u_1 \end{cases}$$

Preuve. On multiplie l'équation (5.1.1) par $\phi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)$, où $\phi \in K^\varepsilon$, en utilisant la formule de Green on obtient pour $t \in [0,T]$

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \phi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\phi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx - \\ - \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j \left(\phi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) ds = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon \left(\phi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx, \forall \phi \in K^\varepsilon \ . \end{gathered} \tag{5.2.5}$$

En utilisant maintenant les conditions aux limites on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma^\varepsilon n \left(\phi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) ds &= \int_\omega \sigma^\varepsilon n \left(\phi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx' \\ &= \int_\omega \left[\sigma_\tau^\varepsilon \left(\phi_\tau - \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \sigma_n^\varepsilon \left(\phi_n - \frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\right] dx' \\ &= \int_\omega \sigma_\tau^\varepsilon \left(\phi_\tau - \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx' \end{aligned}$$

car $\phi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)$ sur $\Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon$ et $\phi_n = \dfrac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial t}(t) = 0$ sur ω.

Donc de (5.2.5) on obtient :

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \phi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\phi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx + \\ + j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) - \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon \left(\phi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx = \\ \int_\omega \left[\sigma_\tau^\varepsilon \left(\phi_\tau - \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + k^\varepsilon \left(|\phi_\tau| - \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}(t)\right|\right)\right] dx', \forall \phi \in K^\varepsilon \ . \end{gathered}$$

et comme $\displaystyle\int_\omega \left[\sigma_\tau^\varepsilon \left(\phi_\tau - \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + k^\varepsilon \left(|\phi_\tau| - \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}(t)\right|\right)\right] dx' \geq 0$ d'après le Lemme 5.1.1, donc

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2},\phi-\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+a\left(u^\varepsilon(t),\phi-\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+\\ j^\varepsilon(\phi)-j^\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\geq\left(f^\varepsilon,\phi-\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right),\quad\forall\phi\in K^\varepsilon\end{aligned}\tag{5.2.6}$$

et par suit on obtient le problème variationel en vitesse suivant :

Trouver u^ε où $\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\in K^\varepsilon,\quad\forall t\in[0,T]$, telle que

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t),\phi-\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+a\left(u^\varepsilon(t),\phi-\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+\\ +j^\varepsilon(\phi)-j^\varepsilon\left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\geq\left(f^\varepsilon,\phi-\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right),\forall\phi\in K^\varepsilon\\ \qquad\text{avec}\qquad u^\varepsilon(0)=u_0,\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0)=u_1\end{array}\right.\tag{5.2.7}$$

Théorème 5.2.2. *On fait les hypothèses suivantes :*

$$f^\varepsilon,\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}\in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)\tag{5.2.8}$$

$$k^\varepsilon\in C_0^\infty(\omega),k^\varepsilon>0\ \ \textit{ne depend pas de}\ \ t\tag{5.2.9}$$

$$u_0\in H^2(\Omega^\varepsilon)^3,\quad u_1\in H^1(\Omega^\varepsilon)^3,\quad(u_1)_\tau=0\tag{5.2.10}$$

Alors, il existe une fonction u^ϵ unique solution de $Pb(K^\epsilon)$ avec

$$u^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\in L^\infty\left(0,T;H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)\tag{5.2.11}$$

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}\in L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)\tag{5.2.12}$$

Preuve. Suivant [15] on a

a) L'unicité de la solution

Soient $u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon$ deux solutions éventuelles. Prenant dans (5.2.7) $\phi=\dfrac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial t}(t)$ (resp $\phi=$

$\dfrac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial t}(t))$ dans l'inéquation relative à u_1^ε (resp u_2^ε) et ajoutant, il vient, en posant $w^\varepsilon = u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon$:

$$-\left(\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t}\right) - a\left(w^\varepsilon, \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t}\right) \geq 0$$

ceci implique que

$$\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + a(w^\varepsilon(t), w^\varepsilon(t))\right] \leq 0$$

Donc, comme $a(v,v) \geq 0$, on a

$$\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t}(t) \leq \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t}(0) = 0, \forall t \Rightarrow w^\varepsilon(t) = 0$$

d'où l'unicité de la solution.

b) Existence de la solution

Supposant que k^ε peut dépendre de t, avec $k^\varepsilon, \dfrac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 k^\varepsilon}{\partial t^2} \in L^\infty(\omega \times]0,T[)$

On régularise la fonctionnelle j^ε, en posant

$$j_\zeta^\varepsilon(v) = \int_\omega k^\varepsilon(x,t)\varphi_\zeta\left(|v_\tau|^2\right)dx', \text{ où } \varphi_\zeta(\lambda) = \frac{1}{1+\zeta}|\lambda|^{(1+\zeta)} \quad \zeta > 0. \tag{5.2.13}$$

on considère l'équation approchée

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \phi\right) + a\left(u_\zeta^\varepsilon(t), \phi\right) + \left(\left(j_\zeta^\varepsilon\right)'\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right), \phi\right) = \left(f^\varepsilon(t), \phi\right) \forall \phi \in K^\varepsilon \\ \text{avec} \quad u_\zeta^\varepsilon(0) = u_0, \quad \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0) = u_1.\end{gathered} \tag{5.2.14}$$

On montre d'abord l'existence d'une solution u_ζ^ε de (5.2.14) puis l'on établit des estimations a priori indépendantes de ζ. On passe ensuite à la limite en ζ.

Estimation a priori (I)

On prend dans (5.2.14) $\phi = \dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)$, comme $\left(\left(j_\zeta^\varepsilon\right)'(w), w\right) \geq 0, \quad \forall w \in K^\varepsilon$, on obtient

$$\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + a\left(u_\zeta^\varepsilon(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) \leq \left(f^\varepsilon(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + a(u_\zeta^\varepsilon(t), u_\zeta^\varepsilon(t))\right] \leq (f^\varepsilon(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)) \tag{5.2.15}$$

comme, pour $\rho > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a(v,v) + \rho \|v\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \geq \alpha \|v\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2$$

on déduit de (5.2.15) après intégration en t :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \alpha \left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 - \rho \left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \leq \|u_1\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \\ +c\|u_0\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 + 2\int_0^t \left(f^\varepsilon(\sigma), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right) d\sigma\end{aligned} \tag{5.2.16}$$

utilisant

$$\left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \leq c\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + \|u_0\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2$$

et comme

$$\begin{aligned}2\int_0^t \left(f^\varepsilon(\sigma), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right) d\sigma \qquad &= 2\int_0^t \left[\frac{d}{d\sigma}(f^\varepsilon(\sigma), \left(u_\zeta^\varepsilon\right)(\sigma)) - 2\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma), \left(u_\zeta^\varepsilon\right)(\sigma)\right)\right] d\sigma. \\ &= 2(f^\varepsilon(t), \left(u_\zeta^\varepsilon\right)(t)) - 2(f^\varepsilon(0), u_0) - 2\int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma), \left(u_\zeta^\varepsilon\right)(\sigma)\right) d\sigma\end{aligned}$$

on déduit de (5.2.16) que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 \leq c + c\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + c\int_0^t \left\|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + \\ 2\int_0^t \left(f^\varepsilon(\sigma), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right)\sigma \leq c(1 + \int_0^t \left[\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \left\|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2\right] d\sigma) + \\ +2(f^\varepsilon(t), \left(u_\zeta^\varepsilon\right)(t)) + 2(f^\varepsilon(0), u_0) + 2\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon} \left\|\left(u_\zeta^\varepsilon\right)(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon} d\sigma\end{aligned}$$

d'où finalement

$$\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 \leq c\left(1+\int_0^t\left[\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \left\|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2\right]d\sigma\right)$$

par conséquant, d'après le lemme de Gronwall :

$$\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 \leq c \tag{5.2.17}$$

où c est ne constante indépendante de ζ.

Estimation a priori (II). On dérive (5.2.14) en t on obtient :

$$\left(\frac{\partial^3 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^3}(t),\phi\right) + a\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t),\phi\right) + \left(\frac{d}{dt}\left(j_\zeta^\varepsilon\right)'\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right),\phi\right) = \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t),\phi\right)$$

on prend $\phi = \dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)$ on obtient

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^3 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^3}(t),\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) + a\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t),\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) + \\ +X(t) = \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t),\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right)\end{gathered} \tag{5.2.18}$$

où $X(t) = \left(\dfrac{d}{dt}\left(j_\zeta^\varepsilon\right)'\left(\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right),\dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right)$

mais

$$\left(\left(j_\zeta^\varepsilon\right)'(v),\phi\right) = \int_\omega k^\varepsilon \varphi_\zeta'\left(|v_\tau|^2\right).v_\tau.\phi_\tau dx' = \int_\omega k^\varepsilon \psi_\zeta(v_\tau).\phi_\tau dx'$$

où $\psi_\zeta(v_\tau) = \varphi_\zeta'\left(|v_\tau|^2\right).v_\tau$, donc

$$\begin{gathered}\left(\frac{d}{dt}\left(j_\zeta^\varepsilon\right)'(v(t)),\phi\right) = \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}\psi_\zeta(v_\tau(t)).\phi_\tau dx' + \\ +\int_\omega k^\varepsilon \lim_{h\to 0}\frac{\psi_\zeta(v_\tau(t+h)) - \psi_\zeta(v_\tau(t))}{h}.\phi_\tau dx'\end{gathered}$$

ceci implique que

$$\begin{gathered}\left(\frac{d}{dt}\left(j_\zeta^\varepsilon\right)'(\phi(t)),\phi'(t)\right) = \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}\psi_\zeta(\phi_\tau(t)).\phi_\tau'(t)dx' + \\ +\int_\omega k^\varepsilon \lim_{h\to 0}\frac{\psi_\zeta(\phi_\tau(t+h)) - \psi_\zeta(\phi_\tau(t))}{h}.\frac{\phi_\tau(t+h)-\phi_\tau(t)}{h}dx'\end{gathered}$$

comme l'opérateur est monotone, la dernière intégrale est positif et donc

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{d}{dt}\left(j_\zeta^\varepsilon\right)'(\phi(t)),\phi'(t)\right) \geq \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}\psi_\zeta(\phi_\tau(t)).\phi_\tau'(t)dx' = \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial t}\psi_\zeta(\phi_\tau(t))dx'$$

avec cette inégalité, (5.2.18) donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + a\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\right] + \\ +\int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial t}\psi_\zeta\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right)dx' \leq \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t),\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right)$$

où l'on remplace ϕ par $\dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)$.
Intégrant de 0 à t on en déduit

$$\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 \leq +c\left(\|u_1\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 + \left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2\right) \\ +c\int_0^t \left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma - 2\int_0^t\int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial t}\psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)_\tau(\sigma)\right)dx'd\sigma \\ +2\int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma),\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(\sigma)\right)\, d\sigma \tag{5.2.19}$$

mais

$$\int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma),\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(\sigma)\right)\, d\sigma = \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) - \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0),u_1\right) \\ -\int_0^t \left(\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(\sigma),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right)d\sigma$$

et comme $\dfrac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2} \in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)$, alors avec l'inégalité de Poincaré,

$$\int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(\sigma)\right) d\sigma \leq c \left|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t)\right| . \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon} + \\ +c + \int_0^t \left\|\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon} . \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon} d\sigma \tag{5.2.20}$$

d'où l'on déduit, à partir de (5.2.19) :

$$\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \leq c\left(\|u_1\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 + \left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2\right) \\ +c\int_0^t \left(\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 + \left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2\right) d\sigma + \\ +2\left|\int_0^t \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t} . \frac{\partial}{\partial t}\psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)_\tau(\sigma)\right) dx' d\sigma\right| \tag{5.2.21}$$

il faut maintenant estimer $\dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)$.

On déduit de (5.2.14) et (5.2.10) que

$$\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0), \phi\right) = (f^\varepsilon(0), \phi) - a(u_0, \phi),\ \forall \phi \in K^\varepsilon \tag{5.2.22}$$

et par suit

$$\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon} \leq cte \tag{5.2.23}$$

donc le dernier terme de (5.2.21), qui vaut

$$\int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t} . \psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)_\tau(\sigma)\right) dx' - \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}(x,0)\psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)_\tau(0)\right) dx' \\ +\int_0^t \int_\omega \frac{\partial^2 k^\varepsilon}{\partial t^2} . \psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)_\tau(\sigma)\right) dx' d\sigma$$

On suppose maintenant $\dfrac{\partial k^\varepsilon}{\partial t} = 0$ (l'hypothèse (5.2.9)), alors (5.2.21) et (5.2.23) donnent :

$$\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2+\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2\leq c\left[1+\int_0^t\left(\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2+\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2\right)d\sigma\right]$$

d'après le lemme de Gronwall on obtient

$$\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}+\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}\leq c \tag{5.2.24}$$

Passage à la limites en ξ

D'après (5.2.17) et (5.2.24) on peut extraire de u_ζ^ε une suite notée encore u_ζ^ε, telle que

$$\begin{aligned}
u_\zeta^\varepsilon &\longrightarrow u^\varepsilon &&\text{dans}\quad L^\infty\left(0,T;H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)\\
\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} &\longrightarrow \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} &&\text{dans}\quad L^\infty\left(0,T;H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)\\
\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} &\longrightarrow \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} &&\text{dans}\quad L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)
\end{aligned}\tag{5.2.25}$$

on déduit de (5.2.14) que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2},\phi-\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)+a\left(u_\zeta^\varepsilon,\phi-\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)+j_\zeta^\varepsilon\left(\phi\right)\ -\\
&-\ j_\zeta^\varepsilon\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)-\left(f^\varepsilon,\phi-\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)=j_\zeta^\varepsilon\left(\phi\right)-\\
&-\ j_\zeta^\varepsilon\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)-\left(\left(\ j_\zeta^\varepsilon\right)'\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right),\phi-\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)\geq 0
\end{aligned}\tag{5.2.26}$$

Prenant dans (5.2.26) $\phi=\phi(t),\phi\in L^2\left(0,T;K^\varepsilon\right)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\left[\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\left(t\right),\phi\right)+a(u_\zeta^\varepsilon,\phi)+j_\zeta^\varepsilon\left(\phi\right)-\left(f^\varepsilon,\phi-\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)\right]dt\geq\\
&\int_0^T\left[\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\left(t\right),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right)\right)+a\left(u_\zeta^\varepsilon,\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+j_\zeta^\varepsilon\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t})\right)\right]dt\\
&=\frac{1}{2}\left[\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(T)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2+a(u_\zeta^\varepsilon(T),u_\zeta^\varepsilon(T))\right]-\\
&-\frac{1}{2}\left[\left\|u_1\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2+a(u_0,u_0)\right]+\int_0^T j_\zeta^\varepsilon\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t})\right)dt
\end{aligned}\tag{5.2.27}$$

mais

$$\liminf_{\xi\to 0}\left[\frac{1}{2}\left[\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(T)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2+a(u_\zeta^\varepsilon(T),u_\zeta^\varepsilon(T))\right]+\int_0^T j_\xi^\varepsilon\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t})\right)dt\right]$$
$$\geq\frac{1}{2}\left[\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(T)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2+a(u^\varepsilon(T),u^\varepsilon(T))\right]+\int_0^T j^\varepsilon\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)dt$$

et donc (5.2.27) donne

$$\begin{aligned}\int_0^T\Bigg[\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2},\phi-\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)+a\left(u^\varepsilon,\phi-\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)+j^\varepsilon(\phi)-j^\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\\ -\left(f^\varepsilon,\phi-\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\Bigg]dt\geq 0,\ \forall\phi\in L^2(0,T;K^\varepsilon)\end{aligned}\tag{5.2.28}$$

On passe de (5.2.28) à l'inégalité ponctielle (5.2.7)

Soit $s\in]0,T[$ fixé quelconque et soit $w\in K^\varepsilon$ quelconque. Prenons la famille $\mathcal{O}_k=\left]s-\frac{1}{k},s+\frac{1}{k}\right[$ de voisinages de s :

et soit v définie par

$$\phi(t)=\begin{cases}\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) & \text{si } t\notin\mathcal{O}_k\\ w(t) & \text{si } t\in\mathcal{O}_k\end{cases}$$

Alors (5.2.28) donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}_k}\left[\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2},w\right)+a(u^\varepsilon,w)+j^\varepsilon(w)-(f^\varepsilon,w)\right]dt-\\ -\int_{\mathcal{O}_k}\left[\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2},\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)+a\left(u^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)-j^\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)-(f^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t})\right]dt\geq 0\end{aligned}$$

d'où encore en désignant par $|\mathcal{O}_k|$ la mesure de $\mathcal{O}_k$:

$$\begin{aligned}\left(|\mathcal{O}_k|^{-1}\int_{\mathcal{O}_k}\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t)dt,w\right)+a\left(|\mathcal{O}_k|^{-1}\int_{\mathcal{O}_k}u^\varepsilon(t)dt,w\right)+j^\varepsilon(w)-\\ -(|\mathcal{O}_k|^{-1}\int_{\mathcal{O}_k}f^\varepsilon(t)dt,w)-|\mathcal{O}_k|^{-1}\int_{\mathcal{O}_k}\Bigg[\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2},\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)+a\left(u^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\\ -j^\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)-\left(f^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\Bigg]dt\geq 0.\end{aligned}\tag{5.2.29}$$

Mais d'après le *Théorème de Lebesgue, on a*

$$|\mathcal{O}_k|^{-1}\int_{\mathcal{O}_k} g(t)dt \to g(s), \text{ pour presque tout } s$$

On déduit donc de (5.2.29) que

$$\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(s), w - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) + a\left(u^\varepsilon(s), w - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) + j^\varepsilon(w)$$
$$-j^\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) \geq \left(f^\varepsilon(s), w - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right), \quad \forall w \in K^\varepsilon$$

d'où (5.2.7), le théorème 5.2.2 est démontré.

5.3 Analyse asymptotique du problème

Pour l'analyse asymptotique du problème on utilise le changement d'échelle $z = x_3/\varepsilon$. Comme dans [2] cette méthode consiste à transposer le problème initialement posé dans le domaine Ω^ε en un problème équivalent posé sur un domaine Ω indépendant de ε, où

$$\Omega = \{(x', z) \in \mathbb{R}^3 : x' \in \omega, \quad 0 < z < h(x')\}$$

on note $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_L \cup \overline{\omega}$ sa frontière. Nous définissons sur Ω des nouvelles inconnues

$$\begin{aligned} \widehat{u}_i^\varepsilon(x', z, t) &= u_i^\varepsilon(x', x_3, t), \ i = 1, 2 \\ \widehat{u}_3^\varepsilon(x', z, t) &= \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon(x', x_3, t) \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

pour les données du problème, on suppose qu'elles dépendent de ε de la manière suivante

$$\begin{aligned} \widehat{k} &= \varepsilon k^\varepsilon \\ \widehat{f}(x', z, t) &= \varepsilon^2 f^\varepsilon(x', x_3, t) \\ \widehat{g}(x', z, t) &= g(x', x_3, t) \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\widehat{u}_0\right)_i(x',z)=\left(u_0\right)_i(x',x_3),\ i=1,2 \text{ et } \left(\widehat{u}_0\right)_3(x',z)=\varepsilon^{-1}\left(u_0\right)_3(x',x_3)\\
&\left(\widehat{u}_1\right)_i(x',z)=\left(u_1\right)_i(x',x_3),\ i=1,2 \text{ et } \left(\widehat{u}_1\right)_3(x',z)=\varepsilon^{-1}\left(u_1\right)_3(x',x_3)
\end{aligned}
\tag{5.3.3}
$$

avec $\widehat{k},\widehat{f},\widehat{g},\widehat{u}_0,(\widehat{u}_1)$ ne dépend pas de ε

Soit $\widehat{G}(x',z,t)$ tel que $\widehat{G}=\widehat{g}$ sur Γ

Ainsi on peut définir le rêlevement G^ε de g précédement introduit, par

$$G_i^\varepsilon(x',x_3,t)=\widehat{G}_i(x',z,t),\ i=1,2$$

$$G_3^\varepsilon(x',x_3,t)=\varepsilon\widehat{G}3(x',z,t)$$

Posons

$$
\begin{aligned}
K&=\left\{v\in H^1(\Omega)^3 : v=0 \text{ p.p sur } \Gamma_L\cup\Gamma_1,\ v.n=0 \text{ sur } \omega\right\},\\
\Pi(K)&=\left\{\overline{\varphi}\in H^1(\Omega)^2 : \overline{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2),\varphi_i=0 \text{ sur } \Gamma_1\cup\Gamma_L \text{ pour } i=1,2\ \right\}\\
V_z&=\left\{v=(v_1,v_2)\in L^2(\Omega)^2 : \frac{\partial v_i}{\partial z}\in L^2(\Omega), i=1,2; v=0 \text{ sur } \Gamma_1\right\}
\end{aligned}
$$

V_z est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_{V_z}=\left(\sum_{i=1}^{2}\left(|v_i|^2+\left|\frac{\partial v_i}{\partial z}\right|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

En multipliant (5.2.7) par ε, et en passant au domaine fixe Ω on montre que le problème variationel est équivalent au problème donné par :

$$
\begin{gathered}
\textit{Trouver } \widehat{u}^\varepsilon \text{ où } \frac{\partial\widehat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t)\in K\ \ \forall t\ \in[0,T],\ \textit{telle que}\\
\sum_{i=1}^{2}\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2}(t),\widehat{\phi}_i\frac{\partial\widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+\varepsilon^4\left(\frac{\partial^2\widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2}(t),\widehat{\phi}_3-\frac{\partial\widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+\\
+\widehat{a}\left(\widehat{u}^\varepsilon(t),\widehat{\phi}-\frac{\partial\widehat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+\widehat{j}(\widehat{\phi})-\widehat{j}\left(\frac{\partial\widehat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\geq\\
\geq\sum_{i=1}^{2}\left(\widehat{f}_i^{\,\varepsilon}(t),\phi_i-\frac{\partial\widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+\varepsilon\left(\widehat{f}_3^{\,\varepsilon}(t),\phi_3-\frac{\partial\widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t)\right),\forall\widehat{\phi}\in K
\end{gathered}
\tag{5.3.4}
$$

$$\widehat{u}^{\varepsilon}(0)=\widehat{u}_0,\ \frac{\partial\widehat{u}^{\varepsilon}}{\partial t}(0)=\widehat{u}_1 \tag{5.3.5}$$

où

$$\widehat{j}(\widehat{\phi})=\int_{\omega}\widehat{k}\left|\widehat{\phi}_{\tau}\right|\ dx'$$

et

$$\widehat{a}\left(\widehat{u}^{\varepsilon},\widehat{\phi}-\frac{\partial\widehat{u}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)=\mu\varepsilon^2\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\widehat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial x_j}+\frac{\partial\widehat{u}_j^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\widehat{\phi}_i-\frac{\partial\widehat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial t}\right)dx'dz+$$
$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\widehat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\widehat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\widehat{\phi}_i-\frac{\partial\widehat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial t}\right)+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widehat{\phi}_3-\frac{\partial\widehat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial t}\right)\right]dx'dz$$
$$+2\mu\varepsilon^2\int_{\Omega}\frac{\partial\widehat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\widehat{\phi}_3-\frac{\partial\widehat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial t}\right)dx'dz+\lambda\varepsilon^2\int_{\Omega}div\left(\widehat{u}^{\varepsilon}\right).div\left(\widehat{\phi}-\frac{\partial\widehat{u}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)\ dx'dz$$

5.3.1 Estimation a priori

Théorème 5.3.1.1. *Sous les hypothèses du théorème 5.2.2, il existe une constante C indépendante de ε telle que :*

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial\widehat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial z}(t)\right\|_{0,\Omega}^2+\left\|\varepsilon\frac{\partial\widehat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega}^2+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial\widehat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial x_i}(t)\right\|_{0,\Omega}^2\right)+\\&\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial\widehat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial x_j}(t)\right\|_{0,\Omega}^2+\left\|\varepsilon\frac{\partial\widehat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial z}(t)\right\|_{0,\Omega}^2+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial\widehat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega}^2\leq C\end{aligned} \tag{5.3.1.1}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial^2\widehat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial z\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega}^2+\left\|\varepsilon\frac{\partial^2\widehat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega}^2+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial^2\widehat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial x_i\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega}^2\right)+\\&+\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial^2\widehat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial x_j\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega}^2+\left\|\varepsilon\frac{\partial^2\widehat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial z\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega}^2+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial^2\widehat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega}^2\leq C\end{aligned} \tag{5.3.1.2}$$

Preuve. Soit u^{ε} la solution du problème (5.2.7), donc

$$\left(\frac{\partial^2u^{\varepsilon}}{\partial t^2}(t),\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)+a\left(u^{\varepsilon}(t),\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)\leq\left(\frac{\partial^2u^{\varepsilon}}{\partial t^2}(t),\phi\right)+$$
$$+a\left(u^{\varepsilon}(t),\phi\right)+j^{\varepsilon}(\phi)+\left(f^{\varepsilon},\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)-(f^{\varepsilon},\phi),\ \forall\phi\in K^{\varepsilon}$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|^2+a(u^{\varepsilon}(t),u^{\varepsilon}(t))\right]\leq\left(\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2}(t)\,,\phi\right)+$$
$$+a(u^{\varepsilon}(t),\phi)+j^{\varepsilon}(\phi)+\left(f^{\varepsilon}(t),\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)-(f^{\varepsilon}(t),\phi),$$

comme $\sum_{i,j=1}^{2}|d_{ij}(v)|^2\leq|\nabla(v)|^2$ et $|div\,(v)|^2\leq 3\,|\nabla(v)|^2$, en intégrant en temps pour $s\in[0,t]$ on a,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|^2&+a(u^{\varepsilon}(t),u^{\varepsilon}(t))\leq\|u_1\|^2_{0,\Omega}+(2\mu+3\lambda)\,\|\nabla u_0\|^2_{0,\Omega}+\\&+2\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2}(s),\phi\right)ds+2\int_0^t a(u^{\varepsilon}(s),\phi)ds+2Tj^{\varepsilon}(\phi)+\\&\quad+2\int_0^t\left(f^{\varepsilon}(s),\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(s)\right)ds-2\int_0^t(f^{\varepsilon}(s),\phi)ds,\end{aligned}\tag{5.3.1.3}$$

de l'inégalité de Korn, il existe C_K indépendant de ε telle que

$$2\mu C_K\,\|\nabla u^{\varepsilon}(t)\|^2_{0,\Omega^{\varepsilon}}\leq a(u^{\varepsilon}(t),u^{\varepsilon}(t))\tag{5.3.1.4}$$

En appliquant les inégalités de Hölder et de Young, il vient que

$$\begin{aligned}2a(u^{\varepsilon},\phi)\;&\leq\int_{\Omega^{\varepsilon}}4\mu\,|d_{ij}(u^{\varepsilon})|\,.\,|d_{ij}(\phi)|\;dx+2\lambda\int_{\Omega^{\varepsilon}}|div\,(u^{\varepsilon})|\,.\,|div\,(\phi)|\;dx\\&\leq\int_{\Omega^{\varepsilon}}2\left(\sqrt{\frac{\mu C_K}{4}}\,|d_{ij}(u^{\varepsilon})|\right).\left(\sqrt{\frac{16\mu}{C_K}}\,|d_{ij}(\phi)|\right)\;dx+\\&+\int_{\Omega^{\varepsilon}}2\left(\sqrt{\frac{\mu C_K}{12}}.\,|div\,(u^{\varepsilon})|\right).\left(\lambda\sqrt{\frac{12}{\mu C_K}}.\,|div\,(\phi)|\right)\;dx\\&\leq\frac{\mu C_K}{4}\int_{\Omega^{\varepsilon}}|d_{ij}(u^{\varepsilon})|^2\,dx+\frac{16\mu}{C_K}\int_{\Omega^{\varepsilon}}|d_{ij}(\phi)|^2\,dx+\\&+\frac{\mu C_K}{12}\int_{\Omega^{\varepsilon}}|div\,(u^{\varepsilon})|^2\,dx+\frac{12\lambda^2}{\mu C_K}\int_{\Omega^{\varepsilon}}|div\,(\phi)|^2\;dx\end{aligned}$$

donc

$$2\int_0^t a(u^\varepsilon(s),\phi)ds \leq \frac{\mu C_K}{2}\int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} ds + \\ +T\left(\frac{16\mu}{C_K}+\frac{36\lambda^2}{\mu C_K}\right)\|\nabla\phi\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} \tag{5.3.1.5}$$

$$2\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(s),\phi\right)ds = 2\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t),\phi\right) - 2\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0),\phi\right) \\ \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + 3\|\phi\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + \|u_1\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} \tag{5.3.1.6}$$

comme

$$2\int_0^t \left(f^\varepsilon(s),\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right)ds = 2(f^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t)) - 2(f^\varepsilon(0),u_0) - 2\int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s),u^\varepsilon(s)\right)ds$$

en utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \leq \varepsilon\overline{h}\,\|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}$$

donc on a :

$$\left|2\int_0^t (f^\varepsilon(s),\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s))ds\right| \leq \mu C_K\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu C_K}\|f^\varepsilon(t)\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + \\ +\varepsilon^2\overline{h}\,\|f^\varepsilon(0)\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + \|\nabla u_0\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + \frac{\mu C_K}{2}\int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} ds + \\ +\frac{2\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu C_K}\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} ds \tag{5.3.1.7}$$

et

$$\left|-2\int_0^t (f^\varepsilon(s),\phi)ds\right| \leq \varepsilon^2\overline{h}^2\int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} ds + T\|\nabla\phi\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} \tag{5.3.1.8}$$

En utilisant (5.3.1.4)-(5.3.1.8), on déduit que :

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\mu C_{K}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}\right]\leq 2\left\|u_{1}\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\\
&+(1+2\mu+3\lambda)\left\|\nabla u_{0}\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+T\left(\frac{\mu C_{K}+16\mu^{2}+36\lambda^{2}}{\mu C_{K}}\right)\left\|\nabla\phi\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\\
&+3\left\|\phi\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+2Tj^{\varepsilon}(\phi)+\varepsilon^{2}\overline{h}\left\|f^{\varepsilon}(0)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\frac{\varepsilon^{2}\overline{h}^{2}}{\mu C_{K}}\left\|f^{\varepsilon}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\\
&+\frac{2\varepsilon^{2}\overline{h}^{2}}{\mu C_{K}}\int_{0}^{t}\left\|\frac{\partial f^{\varepsilon}}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds+\varepsilon^{2}\overline{h}^{2}\int_{0}^{t}\left\|f^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds+\\
&+\int_{0}^{t}\left[\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\mu C_{K}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}\right]ds
\end{aligned}\tag{5.3.1.9}$$

et comme $\varepsilon^{2}\left\|f^{\varepsilon}\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}=\varepsilon^{-1}\left\|\widehat{f}^{\varepsilon}\right\|_{0,\Omega}^{2}$ et $j^{\varepsilon}(\phi)=\varepsilon^{-1}\widehat{j}^{\varepsilon}\left(\phi\right)$, en multipliant (5.3.1.9) par ε on déduit :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\varepsilon\mu C_{K}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}\leq A+\\
&+\int_{0}^{t}\left[\varepsilon\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\varepsilon\mu C_{K}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}\right]ds
\end{aligned}$$

où A est une constante qui ne dépend pas de ε

$$\begin{aligned}
A=&(1+2\mu+3\lambda)\left\|\nabla\widehat{u}_{0}\right\|_{0,\Omega}^{2}+2\left\|\widehat{u}_{1}\right\|_{0,\Omega}^{2}+T\left(\frac{\mu C_{K}+16\mu^{2}+36\lambda^{2}}{\mu C_{K}}\right)\left\|\nabla\widehat{\phi}\right\|_{0,\Omega}^{2}+\\
&+3\left\|\widehat{\phi}\right\|_{0,\Omega}^{2}+2T\widehat{j}(\widehat{\phi})+\overline{h}\left\|\widehat{f}^{\varepsilon}(0)\right\|_{0,\Omega}^{2}+\frac{\overline{h}^{2}}{\mu C_{K}}\left\|\widehat{f}^{\varepsilon}\right\|_{L^{\infty}(0,T,L^{2}(\Omega)^{3})}^{2}+\\
&+\frac{2\overline{h}^{2}}{\mu C_{K}}\left\|\frac{\partial\widehat{f}^{\varepsilon}}{\partial t}\right\|_{L^{2}(0,T,L^{2}(\Omega)^{3})}^{2}+\overline{h}^{2}\left\|\widehat{f}^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(0,T,L^{2}(\Omega)^{3})}^{2}
\end{aligned}$$

Utilisant maintenant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\varepsilon\left(\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\left\|\nabla u^{\varepsilon}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}\right)\leq C$$

d'où la majoration (5.3.1.1).

Pour montrer l'estimation a priori (5.3.1.2), en dérive (5.2.14) en t et on prend $\phi = \dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)$

$$\left(\frac{\partial^3 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^3}(t), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) + a\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) + \\ + \left(\left(j_\zeta^\varepsilon\right)''\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) = \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right)$$

où $\left(\left(j_\zeta^\varepsilon\right)''\left(\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right), \dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) \geq 0$, utilisant l'inégalité de Korn on obtient

$$\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + 2\mu C_K \left\|\nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \leq \left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \\ + a\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right) + 2\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) - 2\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right) - \\ -2\int_0^t \left(\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(s), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) ds$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + 2\mu C_K \left\|\nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 &\leq \left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \\ + (2\mu + 3\lambda)\left\|\nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 &+ \frac{\varepsilon^2 \overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \\ + \mu C_K \left\|\nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 &+ \mu C_K \left\|\nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \\ + \frac{\varepsilon^2 \overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 &+ \int_0^t \frac{\varepsilon^2 \overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \\ + \int_0^t \mu C_K \left\|\nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds & \end{aligned} \tag{5.3.1.10}$$

il faut estimer $\dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)$, on déduit de (5.2.14) et (5.2.10) que

$$\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0), \phi\right) = \left(f^\varepsilon(0), \phi\right) - a\left(u_\zeta^\varepsilon(0), \phi\right), \ \forall \phi \in K^\varepsilon$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0),\phi\right)\right| \le \|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon}\cdot\|\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon} + (2\mu+3\lambda)\left\|u_\zeta^\varepsilon(0)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}\|\phi\|_{1,\Omega^\varepsilon}$$
$$\le \left(\varepsilon\overline{h}\,\|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon} + (2\mu+3\lambda)\left\|u_\zeta^\varepsilon(0)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}\right)\|\phi\|_{1,\Omega^\varepsilon}$$

si on multipliant cette inégalité par $\sqrt{\varepsilon}$, on obtient

$$\sqrt{\varepsilon}\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|_{0,\Omega} \le c \tag{5.3.1.11}$$

où $c = \overline{h}\left\|\widehat{f}^\varepsilon(0)\right\|_{0,\Omega} + (2\mu+3\lambda)\|\widehat{u}_0\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2$ ne dépend pas de ε.
En passant à la limite en ζ dans (5.3.1.10), alors

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \mu C_K\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \le \left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 +\\ + (2\mu+3\lambda+\mu C_K)\|\nabla u_1\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 +\\ +\frac{\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \int_0^T \frac{\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds +\\ +\int_0^t\left[\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \mu C_K\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2\right] ds\end{aligned} \tag{5.3.1.12}$$

En multipliant maintenant (5.3.1.12) par ε on obtient

$$\begin{aligned}\varepsilon\left[\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \mu C_K\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2\right] \le B+\\ +\int_0^t \varepsilon\left[\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \mu C_K\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2\right] ds +\end{aligned}$$

où B est une constante ne dépond de ε

$$\begin{aligned}B = (2\mu+3\lambda+\mu C_K)\|\nabla\widehat{u}_1\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + (c)^2 + \frac{\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial\widehat{f}^\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L^\infty(0.T,L^2(\Omega))}^2\\ +\frac{\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial\widehat{f}^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial^2\widehat{f}^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|_{L^2(0.T,L^2(\Omega))}^2\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Gronwall, il existe une constante C ne dépond pas de ε telle que

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t) \right\|_{0,\Omega}^2 + \varepsilon \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega}^2 \leq C$$

d'où (5.3.1.2).

5.3.2 Résultat de convergence et problème limite

Théorème 5.3.2.1. *Sous les hypothèses du théorème 5.3.1.1, il existe* $u_i^\star \in L^2(0.T, V_z) \cap L^\infty(0.T, V_z)$, $i = 1, 2$ *tel que pour toute sous suite de* $\widehat{u}^\varepsilon$ *notée encore* $\widehat{u}^\varepsilon$ *on a les résultats de convergences* suivants *faiblement dans* $L^2(0.T, V_z)$ et *faiblement* $\star$ *dans* $L^\infty(0.T, V_z)$

$$\widehat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^\star, \quad \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u_i^\star}{\partial t}, \quad i = 1, 2 \tag{5.3.2.1}$$

$$\begin{gathered} \varepsilon \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0, \ \varepsilon \frac{\partial^2 \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j \partial t} \rightharpoonup 0, \quad i, j = 1, 2 \\ \varepsilon \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0, \ \varepsilon \frac{\partial^2 \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup 0, \quad i = 1, 2 \end{gathered} \tag{5.3.2.2}$$

$$\begin{gathered} \varepsilon^2 \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0, \ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i \partial t} \rightharpoonup 0, \quad i = 1, 2 \\ \varepsilon^2 \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0, \ \varepsilon \frac{\partial^2 \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial z \partial t} \rightharpoonup 0 \text{ et } \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup 0 \end{gathered} \tag{5.3.2.3}$$

Preuve.

D'après (5.3.1.1), il existe une cconstante C indépendante de ε telle que

$$\left\| \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}^2 \leq C \qquad (1 \leq i \leq 2)$$

utilisant cette estimation et l'inégalité de Poincaré

$$\|\widehat{u}_i^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq \overline{h} \left\| \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}, \ i = 1, 2, 3$$

on déduit que la suite $(\widehat{u}_1^\varepsilon, \widehat{u}_2^\varepsilon)_\varepsilon$ est borné dans $L^2(0.T, V_z) \cap L^\infty(0.T, V_z)$, donc le résultat de convergence faible et faible $\star$.

de même d'après (5.3.1.2) et l'inégalité de Poincaré pour $\dfrac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}$, on déduit que $\left(\dfrac{\partial \widehat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}, \dfrac{\partial \widehat{u}_2^\varepsilon}{\partial t}\right)_\varepsilon$ est borné dans $L^2(0.T, V_z) \cap L^\infty(0.T, V_z)$ et par suite converge vers une limite (l_1, l_2), et comme $\widehat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^\star, i = 1, 2$, donc $(l_1, l_2) = \left(\dfrac{\partial u_1^\star}{\partial t}, \dfrac{\partial u_2^\star}{\partial t}\right)$

Aussi les convergences (5.3.2.2), (5.3.2.3) découlent à partir de (5.3.1.1), (5.3.1.2) et (5.3.2.1). $\square$

Théorème 5.3.2.2. *Avec les mêmes* hypothèses du théorème 5*.3.2.1*, $u^\star$ *vérifie*

$$\begin{gathered}\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(t) . \frac{\partial}{\partial z}\left(\widehat{\phi}_i - \frac{\partial u_i^\star}{\partial t}(t)\right) dx' dz + \widehat{j}(\widehat{\phi}) - \\ -\widehat{j}\left(\frac{\partial u^\star}{\partial t}(t)\right) \geq \sum_{i=1}^{2}\left(\widehat{f}_i(t), \phi_i - \frac{\partial u_i^\star}{\partial t}(t)\right), \quad \forall \widehat{\phi} \in \Pi(K) \\ u_i^\star(x', z, 0) = \widehat{u}_{0,i}, \quad \forall i = 1, 2\end{gathered} \tag{5.3.2.4}$$

$$-\mu \frac{\partial^2 u_i^\star}{\partial z^2}(t) = \widehat{f}_i(t), \quad i = 1, 2 \text{ dans } L^2(\Omega) \tag{5.3.2.5}$$

Preuve. De (5.3.4) on a

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \widehat{\phi}_i - \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial^2 \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \widehat{\phi}_3 - \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \\ \widehat{a}\left(\widehat{u}^\varepsilon(t), \widehat{\phi} - \frac{\partial \widehat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \widehat{j}(\widehat{\phi}) - \widehat{j}\left(\frac{\partial \widehat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) \geq \\ \geq \sum_{i=1}^{2}\left(\widehat{f}_i(t), \widehat{\phi}_i - \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \varepsilon\left(\widehat{f}_3(t), \widehat{\phi}_3 - \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t)\right).\end{gathered} \tag{5.3.2.6}$$

En utilisant les résultats de convergence du théorème 5.3.2.1 et le fait que $\widehat{j}$ est convexe et semi-continue inférieurement, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i^{\star}}{\partial z}(t)\,.\frac{\partial}{\partial z}\left(\widehat{\phi}_i-\frac{\partial u_i^{\star}}{\partial t}(t)\right)dx'dz+\\
&+\widehat{j}(\widehat{\phi})-\widehat{j}\left(\frac{\partial u^{\star}}{\partial t}(t)\right)\geq\sum_{i=1}^{2}(\widehat{f}_i\,(t)\,,\widehat{\phi}_i-\frac{\partial u_i^{\star}}{\partial t}(t))
\end{aligned}
\tag{5.3.2.7}
$$

D'après [9], nous pouvons choisir $\widehat{\phi}$ dans (5.3.2.7) tel que

$$
\widehat{\phi}_i=\frac{\partial u_i^{\star}}{\partial t}(t)\pm\varphi_i\quad i=1,2\quad\forall\varphi_i\in H_0^1(\Omega)
$$

donc

$$
\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i^{\star}}{\partial z}(t)\,.\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}dx'dz=\sum_{i=1}^{2}(\widehat{f}_i\,(t)\,,\varphi_i)
\tag{5.3.2.8}
$$

utilisant maintenant la formule de Green, et en choisissant $\varphi_1=0$ et $\varphi_2\in H_0^1(\Omega)$, puis $\varphi_2=0$ et $\varphi_1\in H_0^1(\Omega)$, on obtient.

$$
\mu\frac{\partial^2 u_i^{\star}}{\partial z^2}(t)=\widehat{f}_i\,(t)\ \text{ pour } i=1,2 \text{ dans } H^{-1}(\Omega)
\tag{5.3.2.9}
$$

et comme $\widehat{f}_i(t)\in L^2(\Omega),\forall t\in[0,T]$, alors (5.3.2.9) devient (5.3.2.5).

Théorème 5.3.2.3. *Sous les hypothèses que le théorème précédent, les traces*

$$
s^{\star}=u^{\star}(x',0,t)\qquad\qquad \pi^{\star}=\frac{\partial u^{\star}}{\partial z}(x',0,t),
$$

vérifient

$$
\int_{\omega}\widehat{k}\ \left(\left|\psi_{\tau}+\left(\frac{\partial s^{\star}}{\partial t}\right)_{\tau}\right|-\left|\left(\frac{\partial s^{\star}}{\partial t}\right)_{\tau}\right|\right)dx'-\int_{\omega}\mu\pi^{\star}\psi dx'\geq 0,\forall\psi\in L^2(\omega)^2
\tag{5.3.2.10}
$$

et la condition au limite de Tresca suivante

$$
\left.\begin{aligned}
&\mu\left|\pi^{\star}\right|<\widehat{k}\Rightarrow\frac{\partial s^{\star}}{\partial t}=0\\
&\mu\left|\pi^{\star}\right|=\widehat{k}\Rightarrow\exists\ \beta\geq 0\ \textit{tel que}\ \frac{\partial s^{\star}}{\partial t}=\beta\pi^{\star}
\end{aligned}\right.\qquad p.p\ sur\quad \omega\times\,]0,T[
\tag{5.3.2.11}
$$

aussi $\pi^\star, s^*$ vérifient linéquation généralisée faible de Reynolds

$$\int\limits_\omega \left(\widetilde{\mathcal{F}} - \frac{h}{2}s^\star + \int\limits_0^h u^\star(x', y, t)dy \right) \nabla\psi(x')dx' = 0, \forall\psi \in H^1(\omega) \tag{5.3.2.12}$$

où $\mathcal{F}(x', y, t) = \int\limits_0^y \int\limits_0^\xi \widehat{f}(x', \alpha, t)d\alpha d\xi$ *et*

$\widetilde{\mathcal{F}}(x', t) = \dfrac{1}{\mu} \int\limits_0^h \mathcal{F}(x', y, t)dy - \dfrac{h}{2\mu}\mathcal{F}(x', h, t)$

Preuve. En utilisant le [9], on peut choisir $\widehat{\phi}$ dans (5.3.2.4) tel que $\widehat{\phi}_i = \dfrac{\partial u_i^\star}{\partial t}(t) + \psi_i$ pour $i = 1, 2$, où $\psi \in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}(\Omega)^2$ avec,

$$H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}(\Omega) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\right\},$$

donc

$$\mu \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(t) . \frac{\partial \psi_i}{\partial z} dx'dz + \widehat{j}\left(\psi + \frac{\partial s^\star}{\partial t}(t)\right) - \widehat{j}\left(\frac{\partial s^\star}{\partial t}(t)\right) \geq \sum_{i=1}^2 (\widehat{f}_i(t), \widehat{\phi}_i - \psi_i)$$

et comme $n = (0, 0, -1)$ sur ω, en utilisant la formule de Green, il vient que

$$\sum_{i=1}^2 \int_\Omega \left\{-\mu \frac{\partial^2 u_i^\star}{\partial z^2}(t)\right\} . \psi_i dx'dz + \int\limits_\omega \widehat{k} \left(\left| \psi_\tau + \left(\frac{\partial s^\star}{\partial t}\right)_\tau \right| - \left| \left(\frac{\partial s^\star}{\partial t}\right)_\tau \right| \right) dx' - \int\limits_\omega \mu\pi^\star(t)\psi dx' \geq \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \widehat{f}_i(t) . \psi_i dx'dz \tag{5.3.2.13}$$

en utilisant (5.3.2.5), on déduit que pour tout $\psi \in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}(\Omega)^2$

$$\int\limits_\omega \widehat{k} \left(\left| \psi_\tau + \left(\frac{\partial s^\star}{\partial t}\right)_\tau \right| - \left| \left(\frac{\partial s^\star}{\partial t}\right)_\tau \right| \right) dx' - \int\limits_\omega \mu\pi^\star\psi dx' \geq 0$$

cette inégalité reste valable pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\omega)^2$, et par la densité de $\mathcal{D}(\omega)$ dans $L^2(\omega)$ on déduit (5.3.2.10).

Nous obtenons aussi (5.3.2.11) comme dans [9].

Pour prouver (5.3.2.12), on intégre deux fois (5.3.2.5) entre 0 et z, on obtient

$$-\mu u_i^\star(x', z, t) \ + \mu s_i^\star + \mu z \pi_i^\star = \int_0^z \int_0^\xi \widehat{f}_i(x', y, t) dy d\xi, i = 1, 2, \tag{5.3.2.14}$$

en particulier pour $z = h$, donc

$$\mu s_i^\star + \mu h \pi_i^\star = \int_0^h \int_0^\xi \widehat{f}_i(x', y, t) dy d\xi, \ i = 1, 2, \tag{5.3.2.15}$$

Intégrant (5.3.2.14) entre 0 et h, on obtient

$$-\mu \int_0^h u^\star(x', y, t) dy \ + \mu s^\star h + \mu \frac{h^2}{2} \pi_i^\star = \int_0^h \mathcal{F}(x', y, t) dy \tag{5.3.2.16}$$

avec

$$\mathcal{F}(x', y, t) = \int_0^y \int_0^\xi \widehat{f}(x', \alpha, t) d\alpha d\xi \ , \ i = 1, 2$$

de (5.3.2.15)-(5.3.2.16), on déduit (5.3.2.12).$\square$

Théorème 5.3.2.4. *La solution $u^\star$ du problème limite (5.3.2.4)-(5.3.2.5) est unique dans $L^2(0.T, V_z) \cap L^\infty(0.T, V_z)$.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux solutions $u^\star$ et $u^{\star\star}$ *de (5.3.2.4)-(5.3.2.5)*, alors

$$\begin{gathered} \mu \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \frac{\partial u_i^\star}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} \left(\widehat{\phi}_i - \frac{\partial u_i^\star}{\partial t} \right) dx' dz + \\ + \widehat{j}(\widehat{\phi}) - \widehat{j} \left(\frac{\partial u^\star}{\partial t} \right) \geq \sum_{i=1}^2 (\widehat{f}_i, \phi_i - \frac{\partial u_i^\star}{\partial t}), \quad \forall \widehat{\phi} \in \Pi(K) \end{gathered} \tag{5.3.2.17}$$

$$\begin{aligned}
&\mu \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i^{\star\star}}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} \left(\widehat{\phi}_i - \frac{\partial u_i^{\star\star}}{\partial t} \right) dx' dz + \\
&+ \widehat{j}(\widehat{\phi}) - \widehat{j} \left(\frac{\partial u^{\star\star}}{\partial t} \right) \geq \sum_{i=1}^{2} (\widehat{f}_i, \phi_i - \frac{\partial u_i^{\star\star}}{\partial t}), \quad \forall \widehat{\phi} \in \Pi(K)
\end{aligned} \tag{5.3.2.18}$$

on prend $\widehat{\phi} = \dfrac{\partial u^{\star\star}}{\partial t}(t)$ dans (5.3.2.17), puis $\widehat{\phi} = \dfrac{\partial u^{\star}}{\partial t}(t)$ dans (5.3.2.18) et en sommant les deux inéquations, il vient en posant $\overline{W} = (u^{\star})(t) - (u^{\star\star})(t)$

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{W}_i \right) . \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \overline{W}_i}{\partial t} \right) dx' dz \leq 0$$

ceci implique

$$\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{W} \right) \right\|_{0,\Omega}^{2} \leq 0$$

comme $\overline{W}(0) = 0$, donc $\left\| \dfrac{\partial}{\partial z} \overline{W}(t) \right\|_{0,\Omega}^{2} = 0$, utilisant l'inégalité de Poincaré, on déduit que

$$\left\| \overline{W} \right\|_{L^2(0.T, V_z)} = \left\| \overline{W} \right\|_{L^{\infty}(0.T, V_z)} = 0. \blacksquare$$

Bibliographie

[1] S. Agmon, *Lecturs on elliptic boundary value problems.* Van Nostrand mathematical Studies $n^0 2$, Princeton.

[2] G. Bayada, M. Boukrouche, *On a free boundary problem for Reynolds equation derived from the Stokes system with Tresca boundary conditions.* J. Math. Anal. Appl. **382** (2003), 212-231.

[3] B. Benabderrahmane et B. Merouani, *Compertement singulier des solutions du système de Lamé dans un polyèdre.* Rev. Roum. Sci. Tech. Méc. Appl. **44(2)**, Boucarest, (1999), 231-239.

[4] H. Benseridi et B. Merouani, *Quelques problèmes de transmission liés au système de Lamé dans un polyèdre pour une classe d'espaces de sobolev à doubles poids.* Rev. roum. Sci. Techn - Méc. Appl., Tome **48**, N 1-6, Bucarest, (2003), 21-34.

[5] H. Benseridi et M. Dilmi, *Régularité des solutions de quelques problèmes aux limites dans un domaine de $\mathbb{R}^2$ non homogène.* An. Univ. Oradea, fasc. Mathematica, Tom **XII** (2005), 221-235.

[6] H. Benseridi, B. Merouani, *Regularity of the solution of a nonlinear boundary value problem governed by Lame operator in an irregular domain.* Far East J. Appl. Math. **16(3)**, (2004), 305-314.

[7] H. Benseridi**,** *Singularité des solutions de quelques problèmes aux limites liés au système de Lamé au voisinage d'une arête d'un corps non homogène,* Thèse de Magister, Univ. F. Abbas, Sétif, nov.1998.

[8] M. Boukrouche, R. El mir, *Asymptotic analysis of non-Newtonian fluid in a thin domain with Tresca law.* Nonlineat analysis, Theory Methods and applications. **59** (2004), 85-105.

[9] M. Boukrouche, G. Łukaszewicz, *Asymptotic analysis of solutions of a thin film lubrication problem with nonlinear boundary conditions*, Int. J. Eng. Sci. **41** (2003) 521–537.

[10] H. Brezis, *Monotonicity methods in H-spaces and some applications to non linear partial differential equations.* Academic Press, 1971.

[11] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics.* Interscience, 1953.

[12] M. Dilmi, *Alternative de fredholm relative au problème de Dirichlet-Contact sans frottement dans un polygone ou polyèdre.*Thèse de magister, sétif, Avr. 2001.

[13] M. Dilmi, B. Merouani & H. Benseridi, *Problem of contact without friction- Dirichlet for Laplace and Lamé systems in a polyhedron, Far East J. Appl. Math.* ***26(1)****, (2007), 45 - 57.*

[14] M. Dilmi et H. Benseridi, *Problème de Contact sans frottement –Dirichlet pour les équations de Laplace et de Lamé dans un polygone.* Anal. Univ. Oradea, Fasc. Mathematica, Tom **XIV** (2007), 221-236.

[15] G. Duvant, J.L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod Paris (1972).

[16] V. Girault, P.A. Raviart, *Finite Element Approximation of the Navier–Stokes Equations*, Springer-Verlag,1979.

[17] P. Grisvard, *Singularités in boundary value problémes.* Masson1992*.*

[18] P. Grisvard, *Alternative de Frédholm relative au problème de Dirichlet dans un polygone.* Bollettion della*,* unione mathemtica, Italiana, **5** (1972), 132-146.

[19] P. Grisvard, *Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polyèdre.* Annali S.N.S. Pissa, série IV-vol. II, **3** (1975), 359-388.

[20] P. Grisvard, *Problémes aux limites pour l'operateur de Laplace dans un polygone plan.* Conférences au séminaire d'analyse numerique de Lyon-St-Etienne ,11- 12-13 Mai 1976.

[21] P. Grisvard, *Boundary value problémes in plan polygons.* Instructions for use, E.D.F, serie **C** , no.**1**,(1986), 21-59.

[22] P. Grisvard, *Le problème de Dirichlet pour les équations de Lamé.* C.R.Acad.Sc, t.304, série **I**, no :**3**, (1987), 71-73.

[23] P. Grisvard et Iooss, *Problème unilatéraux dans des domaines non réguliers.*

[24] M. S.Hanna K.T.Smith, *Some remarks on the Dirichlet problem in piecewise smooth domains.* Comm. Pure appl. Math., **20** (1967), 575-593.

[25] Lions-Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Dunod, Vol **1-2**, 1968.*

[26] B. Merouani, *Solutions singuliers du système de l'élasticité dans un polygone pour différentes conditions aux limites.* Maghreb Maths. Rev., Vol. **5**, Nos **1** & **2**, (1996), 95- 112.

[27] B. Merouani, *Quelques problèmes aux limites pour le système de Lamé dans un secteur plan.* C.R.A.S, t.304, serieI, no :**13**,(1987), 387-390.

[28] B. Merouani et B. Benabderrahmane, *Résultats numériques de régularité du système de Lamé dans un polygone.* Partie I, Rev. Roum. Sci.Tech. Méc. Appl, **44(3)**, Boucarest, (1999), 305-330.

[29] M. Moussaoui, *Broblème de Neumanne dans un domaine de $\mathbb{R}^2$ à frotière polygonale.* Thèse de Doctorat de troisième sycle, Alger, Mai 1973.

[30] J. Neĉas, *Les méthodes directes en théorie des équations ellipltiques*, Masson, Paris.

[31] Schechter, *Principles of functional analysis. Academic Press, 1971.*G. Duvant, J.L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod Paris (1972).

[32] P. Shi, S. Wright, *$W^{2,p}$ Regularity of the Displacement problem for the Lamé system on $W^{p,s}$ domains*, J. Math. Anal. Appl. **239** (1999), 291-305.

[33] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press.

الملخص بالعربية

في هذه الأطروحة، عالجنا عدة مسائل التي يتحكم فيها مؤثر لابلاس وجملة المرونة في ميادين مختلفة. فقمنا أولا بدراسة نتائج وجود و وحدانية الحلول الضعيفة. كما برهنا ايضا عدة متراجحات قبلية على الحلول الضعيفة لهذه المسائل، التي تسمح لنا بالمرور لمتناوبة فريدولم و بالمرورالى النهاية من اجل اثبات نضامية هذه الحلول. في ختام هذه الأطروحة قمنا بدراسة التحليل التقاربي لمسالة حدية حركية تتحكم فيها جملة المرونة في ميدان رقيق.

Résumé

Dans cette thèse, on traitera plusieurs problèmes gouvernés par l'opérateur de Laplace ou le système d'élasticité dans différents domaines. On étudiera les résultats d'existences et d'unicités des solutions faibles. Nous montrons aussi des estimations a priori sur les solutions faibles, qui nous permet de passer à l'alternative de Fredholm et à la limite pour établir la régularité de ces solutions. Enfin, nous étudions l'analyse asymptotique d'un problème dynamique pour l'élasticité dans un film mince.

AMS classification: 65N38, 34B60, 35B40, 35B65, 35C20, 35R35, 76E30.

Mots clés: Espace de Sobolev, système d'Elasticité, Laplace, polygone, Polyèdre, régularité, singularité, graphe maximal monotone, alternative de Fredholm, Estimations a priori, les équations de Reynolds, conditions de Tresca, Analyse asymptotique.

Abstract

In this thesis, we trait several problems governed by the Laplace operator and the elasticity system in different fields. We study the existences and uniqueness results for the weak solutions. The a-priori inequalities on the weak solutions are also proved, which permit us Fredholm alternative and the pass to the limit for establish the regularity of these solutions. Finally, we study the asymptotic analysis of a dynamic problem for the elasticity system in a thin domain.

Keywords: Sobolev space, Elasticity system, Laplace, polygon, Polyhedron, regularity, singularity, monotoneous maximal graph, Fredholm alternative, A-priori inequalities, Reynolds equations, Tresca conditions, asymptotic Analysis.

AMS subject classification: 65N38, 34B60, 35B40, 35B65, 35C20, 35R35, 76E30.

ديلمي مراد

mouraddil@yahoo.fr