

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS - SETIF -

## **MEMOIRE DE FIN D' ETUDES**

Présenté à la faculté des sciences de l'ingénieur  
Département d'électronique  
Pour obtenir le diplôme de :

### **MAGISTER**

Option

INSTRUMENTATION

Par

**EL KOLLI TOUFIK**

Thème

**APPROCHE HYBRIDE D'ESTIMATION SPECTRALE**

Soutenu le:.... .., devant la commission d'examen:

**PR : T. MOHAMMADI**

**-UFA. SETIF -**

**Président**

**PR : F. KRIM**

**-UFA. SETIF -**

**Rapporteur**

**MC: A. BERTIL**

**-UFA. SETIF -**

**Examineur**

**MC : D. SLIMANI**

**-UFA. SETIF -**

**Examineur**

**MC : N. BOUKAZZOULA**

**-UFA. SETIF -**

**Examineur**

# SOMMAIRE

<b>Remerciements</b> .....	<b>i</b>
<b>Résumé</b> .....	<b>ii</b>
<b>Introduction Générale</b> .....	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I : Les méthodes d'analyse spectrale</b>	
<b>I.1. Classification et modèles des signaux</b> .....	<b>2</b>
<b>I.2. Méthodes d'analyse spectrale</b> .....	<b>3</b>
<b>I.5. La transformée de Fourier rapide (FFT)</b> .....	<b>6</b>
<b>I.6. Comparaison de la TFD et la TFR</b> .....	<b>9</b>
<b>I.7. Inversion binaire des indices</b> .....	<b>10</b>
<b>1.8. Fonction de filtrage remplie par la TFD</b> .....	<b>11</b>
<b>I.9. Fenêtres de troncature</b> .....	<b>13</b>
<b>I.10. Choix d'une fenêtre</b> .....	<b>14</b>
<b>I.11. Méthodes d'estimation de la densité spectrale de puissance d'un signal</b>	
<b>Numérique</b> .....	<b>15</b>
<b>I.11.1 Eléments de la théorie de l'estimation</b> .....	<b>15</b>
<b>I.11.2. Estimateurs spectraux</b> .....	<b>17</b>
<b>I.11.2.1. Estimateur spectral simple (Périodogramme)</b> .....	<b>17</b>
<b>CONCLUSION</b> .....	<b>22</b>
<b>CHAPITRE II : Nouvelle technique paramétrique d'analyse spectrale</b>	
<b>II.1.Introduction</b> .....	<b>23</b>
<b>II.2. La Transformée en Z</b> .....	<b>23</b>
<b>II.3.Présentation de la méthode paramétrique adoptée</b> .....	<b>25</b>
<b>II.3.1. Modèle du signal</b> .....	<b>26</b>
<b>II.3.2. Critère d'identification</b> .....	<b>27</b>
<b>II.4. Généralités sur les méthodes d'optimisation</b> .....	<b>28</b>

II.4.1.Introduction .....	28
II.4.2. Généralisation des définitions .....	29
II.4.3. Classification des méthodes d'optimisation.....	30
II.4.4 Généralités sur les métaheuristiques modernes .....	31
II.5 Méthodes numériques (conventionnelles) d'optimisation.....	32
II.5.1 . Méthode de Gauss-Newton .....	34
II.5.2. Méthode de Levenberg-Marquardt.....	34
II.5.3. Méthode Quasi-Newton.....	35
II.5.4 Implémentation, avec Matlab, de la méthode de Levenberg-Marquard.....	36
CONCLUSION.....	37

### **CHAPITRE III : Optimisation par métaheuristiques**

III.1.1.Généralités sur les métaheuristiques.....	38
III.1.2.Propriétés fondamentales des métaheuristiques.....	38
III.1.3. Organisation générale.....	39
III.1.4. Applications.....	39
III.1.5. Liste des métaheuristiques.....	40
III.1.6. Avantages et inconvénients des métaheuristiques.....	40
III.2. La méthode du recuit simulé (Simulated Annealing SA) .....	40
III.3 L'algorithme RS hybride.....	45
Conclusion.....	45

### **CHAPITRE IV : Implémentation et résultats**

IV.1. Introduction.....	46
IV.2. Analyse spectrale d'un signal déterministe.....	46
IV.2.1. Effet de la fenêtre d'acquisition sur le spectre obtenu par FFT .....	46
IV.3. Technique d'optimisation par recuit simulé.....	50

<b>VI .4. Résolution (fréquentielle et dynamique).....</b>	<b>56</b>
<b>VI .4.1. Résolution fréquentielle.....</b>	<b>56</b>
<b>IV .4.2. Résolution dynamique.....</b>	<b>58</b>
<b>IV.4.3. Combinaison du zero-padding et du fenêtrage.....</b>	<b>59</b>
<b>IV.4.4.1 l'algorithme RS simple .....</b>	<b>62</b>
<b>IV.4.4.2 l'algorithme RS hybride .....</b>	<b>63</b>
<b>IV.5.1 Estimation spectrale d'un signal bruité(par estimateurs spectraux).....</b>	<b>64</b>
<b>IV.5.2 Estimation spectrale d'un signal bruité(méthode paramétrique).....</b>	<b>70</b>
<b>Conclusion.....</b>	<b>72</b>
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>73</b>

## Résumé

L'estimation spectrale d'un signal distordu en présence de bruit constitue un domaine d'intérêt important de recherche dans beaucoup de disciplines scientifiques et techniques.

Cette estimation est basée sur une modélisation du signal par un nombre fini de paramètres dont l'optimisation est réalisée par une formulation adéquate de la fonction de coût. Dans le cadre de ce travail de magister, la méthode d'optimisation globale est basée sur l'algorithme de recuit simulé (RS) associé à un algorithme d'optimisation locale pour former un algorithme hybride, robuste et plus précis qu'un algorithme RS simple. Pour ce faire un programme en MATLAB a été développé.

En vue de tester cette technique et évaluer ses performances en termes de précision, simplicité et rapidité, différents types de signaux ont été utilisés. Les résultats obtenus ont été comparés avec ceux provenant d'autres méthodes spectrales classiques.

**Mots clés :** estimation spectrale - modélisation du signal - optimisation des paramètres- recuit simulé- optimisation locale - algorithme hybride.

The spectral estimate of a signal distorted in the presence of noise constitutes a field of important interest of search in much for scientific and technical disciplines.

This estimate is based on a modelling of the signal by a finished number of parameters whose optimization is carried out by an adequate formulation of the performance index. Within the framework of this work of magister, the method of total optimization is based on the algorithm of simulated annealing (SA) associated with an algorithm of local optimization to form an hybrid algorithm, robust and more precise than a simple SA algorithm. With this intention a program in MATLAB was developed.

In order to test this technique and to evaluate its performances in terms of precision, simplicity and speed, various types of signals were used. The results obtained were compared with those coming from other traditional spectral methods.

**Key words:** spectral estimate- modelling of the signal- optimization of the parameters- simulated annealing- local optimization - hybrid algorithm.

إن التقدير الطيفي لإشارة مشوشة يشكل مجالاً مهماً في كثير من التطبيقات العلمية والتقنية، وهو مبني على نمذجة الإشارة بواسطة عدد محدود من الوسائط. الاختيار الأمثل لقيم الوسائط يتحقق بصياغة مناسبة لدالة التكلفة. في إطار هذه الرسالة، تركز طريقة الاختيار الأمثل الكلي على خوارزمية تحمية مقلدة مدعمة بخوارزمية للاختيار الأمثل الموضوعي و هذا لتشكيل خوارزمية هجينة، متينة و أكثر دقة من خوارزمية تحمية مقلدة بسيطة. لإنجاز هذا العمل، قمنا بتطوير برنامج- ماتلاب-.

لاختبار هذه التقنية و تقييمها من حيث: الدقة، البساطة، و السرعة، قمنا باستعمال عدة إشارات، كما تمت مقارنة النتائج المتحصل عليها مع النتائج المنبثقة عن الطرق التقليدية للتقييم الطيفي.

**الكلمات الأساسية:** التقدير الطيفي- نمذجة الإشارة- الاختيار الأمثل لقيم الوسائط- التحمية المقلدة- خوارزمية موضوعية-

خوارزمية هجينة.

# REMERCIEMENTS

**Je voudrais en premier lieu exprimer tous mes remerciements au Prof. F. Krim pour sa Confiance et de m'avoir proposé le sujet et le thème qui a fait l'objet de ce présent mémoire.**

**Je remercie aussi tous les membres du jury d'avoir accepté d'examiner ce modeste travail et d'apporter leurs avis honorifiques.**

**Je n'oublie pas de remercier mes amis Ziet Lahcène, Sarra Mustapha, Djazia Kamel et Ouarem Mohamed pour leurs soutiens et encouragements.**

**En fin je remercie tout ceux qui ont permis de près ou de loin à l'aboutissement de ce présent mémoire.**

## Introduction Générale

Une des plus importantes applications des techniques du traitement du signal est l'analyse spectrale. L'analyse spectrale est utile dans de nombreuses disciplines (radar, sonar, synthèse et reconnaissance de la parole, biomédicale, géophysique, etc.). Elle est aussi l'outil majeur pour l'étude des signaux vibratoires de machines tournantes, dans le cadre de la maintenance des machines. [1]. Elle peut être abordée de différentes manières selon que l'on envisage l'emploi de filtres sélectifs, la transformée de Fourier ou la modélisation paramétrique. Les méthodes d'analyse spectrale basées sur la transformée de Fourier sont dites classiques et celles basées sur la modélisation paramétrique sont dites modernes et ne s'appuient pas sur la transformation de Fourier.

L'analyse spectrale par banc de filtres présente les inconvénients suivants :

- La résolution spectrale est limitée par le faible nombre de filtres.
- Les caractéristiques des filtres sont sujettes à des dérives ce qui gêne la précision des mesures.

Les limites de l'analyse spectrale par FFT sont :

- Elle ne peut fournir que des informations sur les fréquences et les amplitudes des harmoniques mais pas sur un éventuel déphasage.
- La portion du signal à analyser doit être composée d'un nombre entier de périodes ce qui présume connaître à priori la fréquence du fondamental.

Les estimateurs spectraux présentent la difficulté suivante :

- Quelque soit l'estimateur choisi, pour obtenir des résultats satisfaisants, il faut choisir les paramètres de l'analyse avec soin et il faut bien comprendre leurs rôles et leurs effets.

Pour ces raisons, nous avons essayé de présenter une nouvelle technique paramétrique pour l'analyse spectrale. Cette technique est basée sur la modélisation du signal à analyser par un modèle à l'aide d'un nombre fini de paramètres et l'optimisation de ces paramètres est réalisée en minimisant une fonction de coût, qui est l'erreur quadratique entre le signal et la valeur calculée par le modèle.

Dans ce présent mémoire, la méthode d'optimisation globale est basée sur l'algorithme de recuit simulé (RS) associé à un algorithme d'optimisation locale pour former un algorithme hybride, robuste et plus précis qu'un algorithme RS simple.

## Chapitre I

### Les méthodes classiques d'analyse spectrale

#### Introduction

L'analyse spectrale peut être abordée de différentes manières selon que l'on envisage l'emploi de filtres sélectifs, la transformée de Fourier ou la modélisation paramétrique. Les méthodes d'analyse spectrale basées sur la transformée de Fourier sont dites classiques et celles basées sur la modélisation paramétrique sont dites modernes et ne s'appuient pas sur la transformation de Fourier. Nous allons considérer, dans ce chapitre, les méthodes classiques de l'estimation de la densité spectrale. Ces méthodes classiques d'analyse spectrale sont bonnes du point de vue calcul et permettent d'obtenir de bons résultats pour une classe importante de signaux.

#### I.1 CLASSIFICATION ET MODELES DES SIGNAUX [2]

Différents modes de classification des modèles de signaux peuvent être envisagés.

Parmi les principaux, on peut citer :

**Classification phénoménologique** : on met ainsi en évidence le type d'évolution du signal, son caractère prédéterminé ou son comportement aléatoire ;

Cette classification fait apparaître deux types fondamentaux de signaux (tableau 1.1)

- Les signaux déterministes.
- Les signaux aléatoires.

**Classification énergétique** : une distinction fondamentale peut être faite entre deux catégories de signaux

-**les signaux à énergie finie** : cette catégorie comprend tous les signaux de type transitoire, qu'ils soient déterministes ou aléatoires.

-**les signaux à puissance moyenne finie non nulle** : cette catégorie englobe presque tous les signaux périodiques, quasi-périodiques et les signaux aléatoires permanents.

**Classification morphologique** : celle-ci permet de distinguer quatre types de signaux :

- le signal à amplitude et temps continu appelé signal analogique ;



- le signal à amplitude discrète et temps continu appelé signal quantifié ;
- le signal à amplitude continu et temps discret appelé signal échantillonné ;
- le signal à amplitude et temps discret appelé signal numérique.

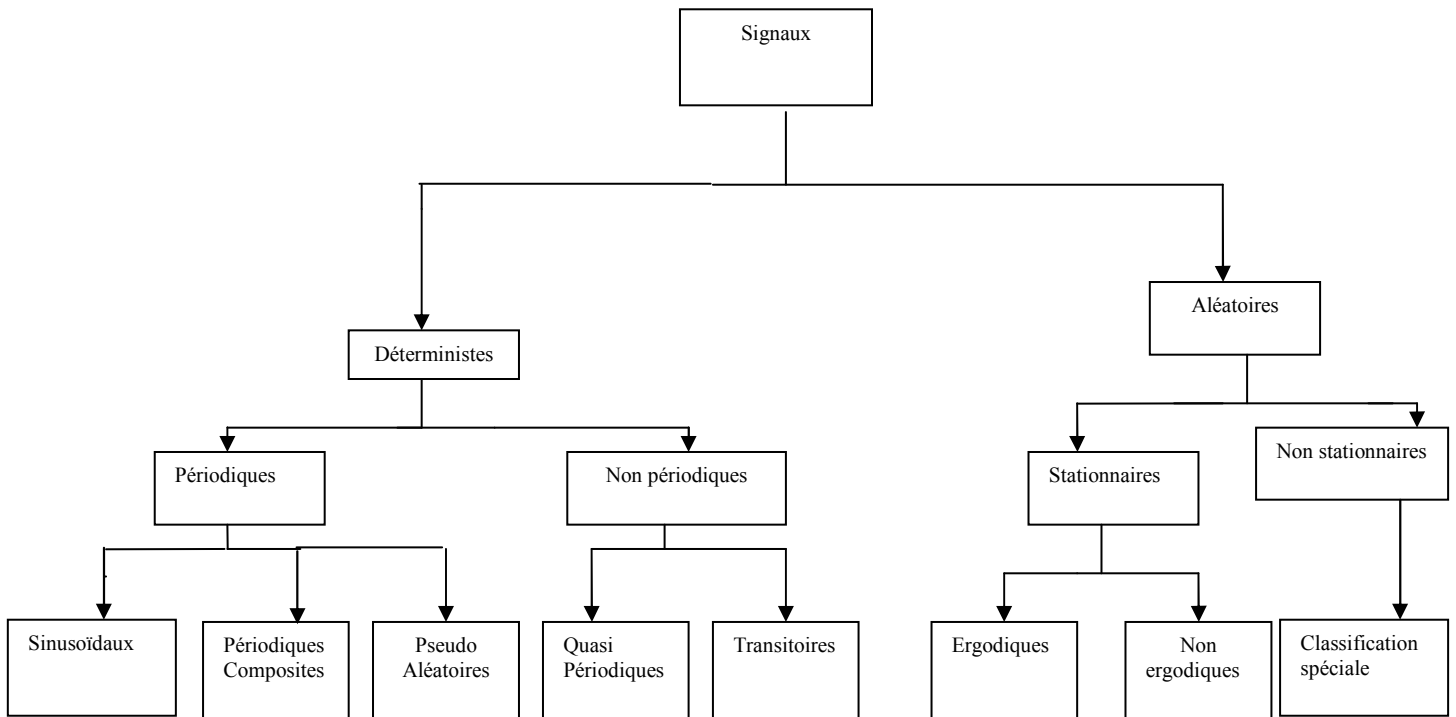


Tableau 1.1 les différents types de signaux –selon la classification phénoménologique-

## I.2 Méthodes d'analyse spectrale

### I.2.1 Analyse spectrale des signaux analogiques par banc de filtre passe-bande [3]

#### a) Principe

Ce type d'analyseur fait intervenir N filtres passe bande contigus. Chaque filtre est affecté à la surveillance d'une bande de fréquence de largeur LB centrée autour d'une fréquence  $f_0$ .

#### b) Avantages et inconvénients de cette méthode

- Elle est basée sur un principe simple, son exploitation l'est également.
- Ce type d'analyse permet une surveillance permanente de chaque bande de fréquence.
- La résolution spectrale est limitée par le faible nombre de filtres.
- Les caractéristiques des filtres sont sujettes à des dérives ce qui gêne la précision des mesures.

Compte tenu de ces considérations, ce type d'analyse est réservé aux signaux de basse fréquence comme par exemple les signaux sonores.

## I.2.2 Analyse spectrale des signaux numériques

### I.2.2.1 Série de Fourier [4]

La série de Fourier est une représentation des signaux périodiques. Considérons un signal périodique  $x(t)$ , de période fondamentale  $T_o$  et de fréquence fondamentale  $f_o$  ( $f_o = \frac{1}{T_o}$ ).

Si le signal périodique  $x(t)$  vérifie les conditions de Dirichlet dans l'intervalle  $T_o$ , il peut être développé en série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_o t} \quad \text{Pour } -\infty < t < +\infty \quad (\text{I.1})$$

Avec :

$$X_n = \frac{1}{T_o} \int_{(T_o)} X(t) e^{-j2\pi n f_o t} dt \quad (\text{I.2})$$

En posant  $X(nf_o) = X_n$ , on obtient le spectre de fréquence qui est une grandeur complexe (en général). ce spectre peut se décomposer en :

- un spectre d'amplitude  $|X(nf_o)|$ .
- et un spectre de phase  $\phi(nf_o)$ .

Ce spectre  $X(nf_o) = |X(nf_o)| e^{j\phi(nf_o)}$  est composé de raies. Il s'agit d'un spectre discret.

En remplaçant dans l'équation (I.1), l'exponentielle par la formule d'Euler et en exploitant les propriétés de parité des fonctions sinusoïdales, on obtient la forme trigonométrique de la série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 2\pi n f_o t + b_n \sin 2\pi n f_o t \quad \dots\dots\dots (\text{I.3})$$

Avec :

$$a_o = \frac{1}{T_o} \int_{(T_o)} x(t) dt \quad \dots\dots\dots (\text{I.4})$$

$$a_n = \frac{2}{T_o} \int_{(T_o)} x(t) \cos 2\pi n f_o t dt \quad \dots\dots\dots (\text{I.5})$$

$$b_n = \frac{2}{T_o} \int_{(T_o)} x(t) \sin 2\pi n f_o t dt \quad \dots\dots\dots (\text{I.6})$$

\* cas de simplification :

Si  $x(t)$  est paire, tous les  $b_n$  sont nuls et :

$$a_n = \frac{4}{T_o} \int_{(T_o/2)} x(t) \cos(2\pi n f_o t) dt \dots \dots \dots (I.7)$$

Si  $x(t)$  est impaire, tous les  $a_n$  sont nuls et :

$$b_n = \frac{4}{T_o} \int_{(T_o/2)} x(t) \sin(2\pi n f_o t) dt \dots \dots \dots (I.8)$$

### I.2.2.2 Transformée de Fourier

#### -Définition :

La transformée de Fourier est une généralisation de la série de Fourier appliquée aux signaux non périodiques. On considère que le signal est périodique de période infinie.

La transformée de Fourier d'un signal apériodique  $x(t)$  est donnée par la formule :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \dots \dots \dots (I.9) .$$

La transformée inverse est obtenue par :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \dots \dots \dots (I.10) .$$

Ces transformations directe et inverse montrent à l'évidence, la parfaite symétrie qui relie les espaces temps et fréquence.

A cette symétrie correspond la propriété suivante :

A un signal temporel continu non périodique correspond un spectre continu périodique. [5].

### I.2.2.3 Transformée de Fourier discrète (TFD)

La transformée de Fourier :  $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$ , ne s'applique pas aux signaux discrets.

On leur affecte la transformée de Fourier qui a été établie pour les signaux à échantillonnage idéalisé: la TFD. [6].

Le passage de la TF à la TFD fait intervenir trois opérations :

- L'échantillonnage du signal, temporel
- La limitation de la durée d'analyse de ce signal.
- La discrétisation de la fréquence pour l'analyse spectrale numérique.

Pour une série  $x(n)$  constituée d'un nombre N fini de valeurs, l'expression de la TFD est donnée par L'équation suivante :

$$X[K] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{nK}{N}} \dots\dots\dots (I.11)$$

De même l'expression de la TFD inverse est donnée par l'équation ci-dessous.

$$x(n) = \sum_{K=0}^{N-1} X[K] e^{j2\pi \frac{nK}{N}} \dots\dots\dots (I.12)$$

**Forme matricielle de la TFD**

La TFD peut-être représentée sous forme matricielle plus commode, en posant:

$$W_n = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \dots\dots\dots (I.13)$$

$W_N$  : est appelé facteur de phase, et les affixes des nombres  $W_N^{Kn}$  sont appelés coefficients de la TFD

L'équation (I.11) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$X[K] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{Kn} \dots\dots\dots (I.14).$$

De l'équation (I.14), on déduit la forme matricielle de la TFD.

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & \dots & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}}_{T_N} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

La matrice carrée  $T_N$  présente les particularités suivantes :

- a) les lignes et les colonnes de même indice ont les mêmes éléments.
- b) Les éléments sont des puissances du nombre  $W$  tel que  $W^N = 1$ .

Le calcul de la transformée de Fourier discrète par l'équation (I.11) nécessite l'exécution de  $N^2$  multiplications et  $N^2-N$  additions sur les nombres complexes.

La série de coefficients  $X[K]$  est composée de  $N$  valeurs complexes, chacune représentant une estimation de l'amplitude et de la phase d'une composante sinusoïdale d'indice fréquentiel  $K$  et de fréquence égale à  $K\Delta f$

La constante  $\Delta f$  est définie comme étant la résolution spectrale de l'analyse est donnée par la relation  $\Delta f = \frac{F_e}{N} (Hz)$ .....(I.16)

où  $F_e$  est la fréquence d'échantillonnage

### **1.5 La transformée de Fourier rapide (FFT)**

La TFR n'est pas une nouvelle transformée, mais un algorithme permettant le calcul de la TFD en un nombre considérablement plus faible d'opération. [4].

L'examen de la forme matricielle (I.15) montre que la détermination de la DFT nécessite  $N^2$  multiplications complexes et  $N(N-1)$  addition complexes.

L'idée de base la FFT est de réduire le nombre de multiplications et d'additions complexes permettant de déterminer la DFT.

La FFT existe sous deux formes :

- 1) FFT avec entrelacement temporel
- 2) FFT avec entrelacement fréquentiel.

Dans notre cas nous allons aborder l'algorithme dit à 'entrelacement temporel, également appelé à 'Décimation en Temps' (DIT : Décimation In Time) qui a été développé originalement par Cooley et Tukey en 1965 et qui porte également leur nom. Dans cet algorithme de TFR à DIT, la suite d'éléments  $x(n)$  de taille  $N$  est décomposée en deux suites entrelacées, chacune de taille  $N/2$ , celle des éléments  $x(n)$  d'indice pair et celle des éléments d'indice impair.

En opérant cette décomposition, les  $N/2$  premiers éléments de l'ensemble des  $X[k]$  sont calculés par :

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N/2-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^2 & \dots & w^{2(N/2-1)} \\ 1 & w^4 & \dots & w^{4(N/2-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{2(N/2-1)} & \dots & w^{(N/2-1)2(N/2-1)} \\ & w^{2(N/2-1)} & \dots & w^{(N/2-1)2(N/2-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2(N/2-1)} \end{bmatrix} \\
+ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ w & w^3 & \dots & w^{(N/2-1)} \\ w^2 & w^6 & \dots & w^{2(N/2-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w^{(N/2-1)} & w^{3(N/2-1)} & \dots & w^{(N/2-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

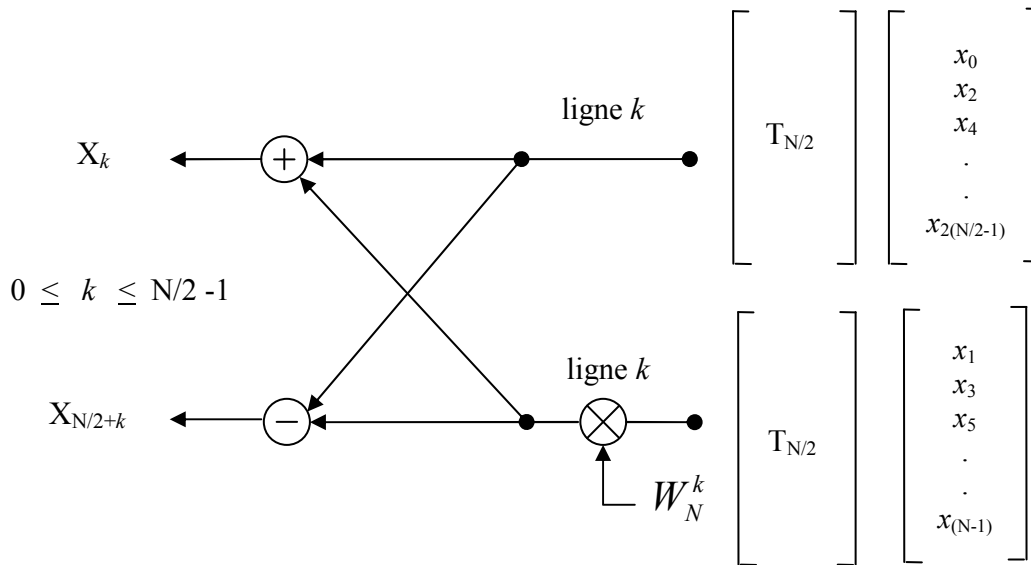
En désignant par  $T_{N/2}$  la matrice qui vient en facteur du vecteur colonne des éléments d'indice pair et en décomposant la matrice facteur du vecteur colonne d'indice impair en un produit d'une matrice diagonale par la matrice  $T_{N/2}$  on obtient :

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N/2-1} \end{bmatrix} = T_{N/2} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2(N/2-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & w^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & w^{N/2-1} \end{bmatrix} T_{N/2} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{(N-1)} \end{bmatrix}$$

Et pour les  $N/2$  derniers éléments de  $X[k]$  et compte tenu du fait que  $W^N = 1$ , ils sont calculés comme suit :

$$\begin{bmatrix} X_{N/2} \\ X_{N/2+1} \\ X_{N/2+2} \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = T_{N/2} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2(N/2-1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & w^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & w^{N/2-1} \end{bmatrix} T_{N/2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{(N-1)} \end{bmatrix}$$

On voit que le calcul de  $X[k]$  et de  $X[k+N/2]$  pour  $0 \leq k \leq N/2 - 1$ , met en œuvre les mêmes calculs avec seulement un changement de signe dans la somme finale. D'où le diagramme:

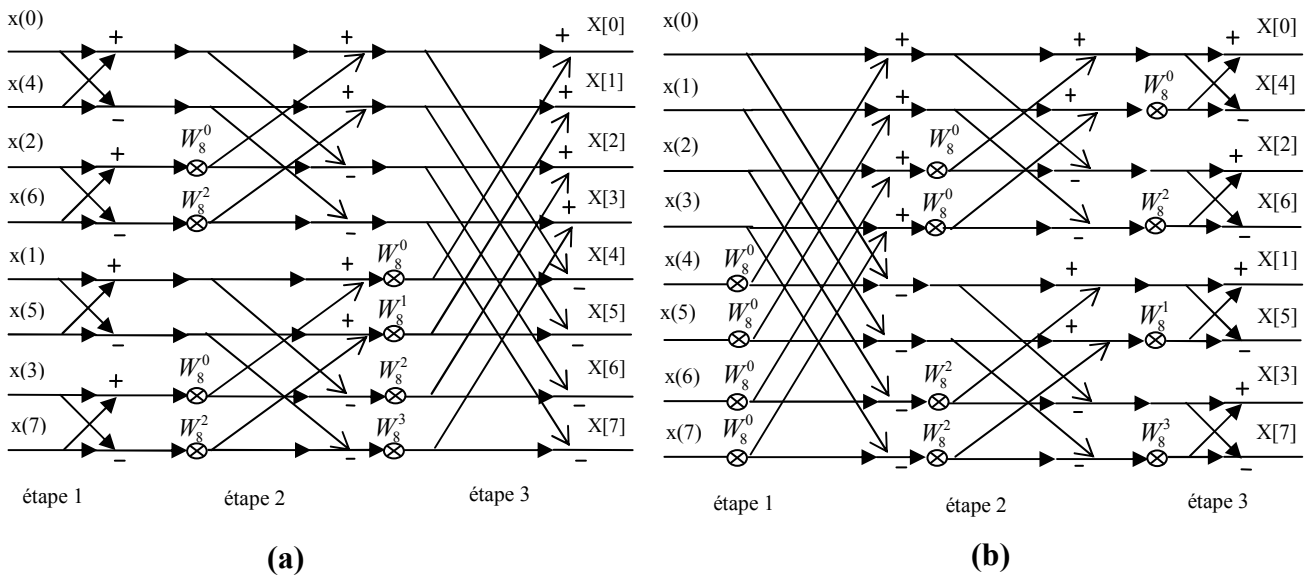


Les deux expressions matricielles ci-dessus peuvent être exprimées à l'aide de l'équation (I.14) suivante :

$$\begin{cases} X[k] = X_2[k] + W_N^k \cdot X_1[k] \\ X[k + \frac{N}{2}] = X_2[k] - W_N^k \cdot X_1[k] \end{cases} \quad \text{Avec } 0 \leq k \leq N/2 - 1 \quad (\text{I.16})$$

En utilisant l'entrelacement temporel, le calcul de la TFD d'ordre  $N$ , revient à calculer deux transformées de Fourier d'ordre  $N/2$  ( $X_2[k]$  et  $X_1[k]$ ), respectivement celle des  $x(n)$  d'indice pair et celle des éléments d'indice impair auxquelles s'ajoutent  $N/2$  additions et multiplications complexes. De plus, si  $N = 2^p$  (une puissance de 2), on peut réitérer  $p$  fois cette décomposition en temps sur chacune des transformées précédentes jusqu'à aboutir à des transformées d'ordre 2 et obtenir finalement  $X[k]$ .

La figure (I.1) illustre les décompositions nécessaires pour obtenir une transformée de Fourier d'une série  $x(n)$  de  $N = 2^3 = 8$  échantillons.



**Figure I.1** *Détail de calcul de la TFR-DIT pour un signal de 8 échantillons.*

On remarque sur cette figure, que l'algorithme est bâti autour d'un opérateur élémentaire de calcul, qui a la forme d'un papillon. Cet opérateur calcule deux éléments de sorties en fonction de deux éléments d'entrée et le détail de calcul à l'intérieur du papillon a été déjà donné par le diagramme qui précède cette figure.

### I.6 Comparaison de la TFD et de la TFR [4]

La différence fondamentale entre la TFD et la TFR réside dans la méthode de calcul des éléments de la suite  $X(K)$ .

La TFD calcule directement ces éléments à partir de la relation (I.9).

Si  $N$  est une puissance de 2 ( $N = 2^M$ ), la **TFR** est simplement une méthode de décomposition d'un TFD d'ordre  $N$  en deux TFD d'ordre  $N/2$  chacune.

Ce processus de décomposition est répété jusqu'à ce que des TFD d'ordre 2 soient engendrées.

Ces étapes ont pour but de réduire le nombre de multiplications et d'additions complexes

Si  $N = 2^M$  on peut réitérer la méthode  $M$  fois et calculer la TFD d'ordre  $N$  à l'aide de  $M$  étages de  $N/2$  papillons, avec  $M = \log(N)$ . La complexité de calcul d'une TFD d'ordre  $N$  devient celle de  $M$  étages de  $N/2$  papillons, soit :



$$M \frac{N}{2} = \log_2(N) \frac{N}{2} \text{ multiplications complexes}$$

et

$$MN = \log_2(N).N \text{ additions complexes}$$

Ainsi pour :  $N= 1024 = 2^{10}$ , le calcul direct demande :

1024 x 1024 multiplications et 1024 x 1023 additions, alors que le calcul avec l'algorithme de FFT demande :

10x512 multiplications et 10 x 1024 additions.

L'algorithme divise environ par 200 le nombre d'opérations à effectuer. L'efficacité de la FFT augmente avec N. [4].

### I.7 Inversion binaire des indices

On remarque que les coefficients X(k) sont classés selon l'ordre naturel (figure I.1.a) , alors les échantillons X(n) sont classés dans un ordre dit en binaire inversé . L'obtention de cet adressage des valeurs d'entrée est donnée par le tableau suivant :

Adresse linéaire	0	1	2	3	4	5	6	7
Equivalent en binaire	000	001	010	011	100	101	110	111
Adresse en binaire inversée	000	100	010	110	001	101	011	111
Equivalent en décimal	0	4	2	6	1	5	3	7

Tableau (I.1) Calcul de l'adresse en binaire inversée.

### 1.8 Fonction de filtrage remplie par la TFD [7]

Examinons la relation qui établit la transformation de Fourier discrète entre les sorties X(k) et les entrées x(n) considérées comme le résultat de l'échantillonnage d'un signal x(t) avec la période T .Pour k= 0, cette relation s'écrit :

$$X[0] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) = x(t) * \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - nT_e) \right] \dots\dots\dots (I.17)$$

Le signal  $X[k]$  ainsi défini résulte donc du produit de convolution du signal  $x(t)$  avec la

$$\text{distribution } \varphi_0(t) \text{ telle que : } \varphi_0(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - nT_e) \dots\dots\dots (I.18)$$

Et dont la transformée de Fourier est donnée par :

$$\Phi_0(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n f T_e} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j2\pi f N T_e}}{1 - e^{-j2\pi f T_e}} \dots\dots\dots (I.19)$$

Ou encore :

$$\Phi_0(f) = e^{-j2\pi(N-1)T_e f} \cdot \Phi(f) \dots\dots\dots (I.20)$$

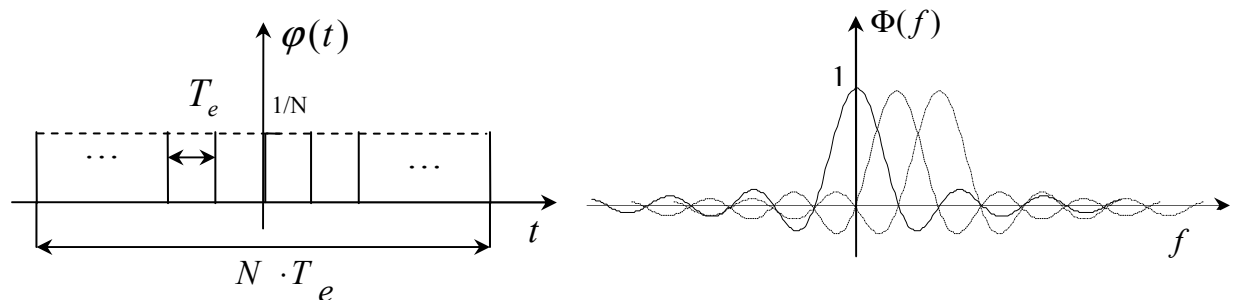
$$\text{Avec } \Phi(f) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi f N T_e)}{\sin(\pi f T_e)} \dots\dots\dots (I.21)$$

Or une opération de convolution dans le domaine temporel correspond à un produit dans le domaine fréquentiel, c'est-à-dire que  $X[0]$  résulte donc du filtrage du signal d'entrée  $x(t)$  par la fonction  $\Phi_0(f)$ .

En généralisant, à une sortie  $X[k]$  correspond donc la fonction  $\varphi_k(t)$  telle que :

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \delta(t - nT_e) \dots\dots\dots (I.22)$$

$$\Phi_k(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} e^{-j2\pi n f T_e} \dots\dots\dots (I.23)$$



**Figure I.2** Fonction de filtrage de la TFD.

$\Phi_k(f)$  peut être simplifiée et réécrite sous la forme suivante :

$$\Phi_k(f) = (-1)^k e^{-j\pi f(N-1)T_e} \cdot e^{j\pi \frac{k}{N}} \cdot \Phi\left(f + \frac{k}{NT_e}\right) \dots \dots \dots (I.24)$$

La sortie  $X(k)$  fournit le signal filtré suivant la fonction  $\Phi(f)$  traduite de  $k/NT$  sur l'axe des fréquences.

On peut conclure donc, que la Transformée de Fourier Discrète  $X[k]$  de la série  $x(n)$  est obtenue par le filtrage du signal  $x(t)$  par un ensemble de  $N$  filtres identiques, ou banc de filtres de type passe-bande et dont chaque filtre élémentaire possède une fréquence centrale  $f_0$

multiple de la résolution spectrale

$$f_0 = k \cdot \frac{1}{NT_e} = k \cdot \frac{F_e}{N} = k \cdot \Delta f \dots \dots \dots (I.25)$$

Par conséquent, lorsque le signal  $x(t)$  possède une composante sinusoïdale de fréquence non multiple de la résolution spectrale  $\Delta f$ , l'amplitude de cette raie est répartie sur les raies environnantes étant donné le recouvrement des réponses fréquentielles des filtres adjacents.

Il s'en suit l'apparition de composantes parasites qui viennent perturber le spectre vrai du signal. Des précautions doivent être donc prises quant à la signification exacte du spectre obtenu par TFD (notamment par FFT), car l'amplitude et la phase des composantes fréquentielles sont en général des valeurs approchées.

Ce phénomène connu sous le nom d'étalement de fréquences est une conséquence de la limitation temporelle du signal d'entrée.

Le spectre obtenu n'est pas celui du signal  $x(t)$  défini de  $-\infty$  à  $+\infty$  mais celui d'un signal limité :  $\chi_T(t) = x(t) \cdot \text{rect}_T(t)$ . [8].

Il peut être atténué en remplaçant la fenêtre temporelle rectangulaire  $\varphi(t)$  par d'autres fenêtres de troncature telle que celles de Hamming, Hanning, Bartlett ou Blackman qui ont pour effet de diminuer les lobes latéraux des filtres passe-bande et par conséquent celles des composantes fréquentielles parasites.

## I.9 Fenêtre de troncature

L'analyse spectrale par TFD impose de travailler sur un signal numérique  $x_k$  de durée limitée. La multiplication du signal par une fenêtre  $w_k$  de troncature temporelle permet de limiter la durée à N échantillons. Cette multiplication temporelle correspond à une convolution fréquentielle.

Les caractéristiques principales d'une fenêtre d'analyse sont :

- La résolution fréquentielle  $\Delta f$  ;
- La dynamique imposée par l'amplitude des lobes secondaires définit la dynamique de la fenêtre.

Les principales caractéristiques des fenêtres courantes sont résumées dans le tableau (I.2) ci-dessous. [9].

Type de fenêtre	Equations (N échantillons)	Lobes secondaires		Lobe principal	
		Niveau (dB)	Pente (dB/oct)	Largeur à -3dB	Largeur à -6dB
Rectangulaire	$w_k = 1$ pour $k=0,1,\dots,N-1$ $w_k = 0$ ailleurs	-13	-6	$\frac{0.89}{N}$	$\frac{1.21}{N}$
Hamming	$w_k = 0.5 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$ pour $k=0,1,\dots,N-1$ $w_k = 0$ ailleurs	-43	-6	$\frac{1.3}{N}$	$\frac{1.81}{N}$
Hanning	$w_k = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$ pour $k=0,1,\dots,N-1$ $w_k = 0$ ailleurs	-32	-18	$\frac{1.44}{N}$	$\frac{2}{N}$
Blackman	$w_k = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) - 0.08 \cos\left(\frac{4\pi}{N}k\right)$ pour $k=0,1,\dots,N-1$ $w_k = 0$ ailleurs	-58	-18	$\frac{1.68}{N}$	$\frac{2.35}{N}$

Tableau (I.2) les principales caractéristiques des fenêtres d'acquisition

## **I.10 Choix d'une fenêtre [5]**

Le choix d'une fenêtre est un compromis entre une bonne définition spectrale (spectre étroit) et un étalement spectral aussi faible que possible (douceur de la fenêtre).

Qualitativement, leurs caractéristiques peuvent être résumées comme suit.

1. La fenêtre rectangulaire ne modifie pas l'enregistrement ; c'est celle que l'on utilisera dans le cas de signaux transitoires ou non permanents et, dans le cas de signaux périodiques, lorsque l'on est sûr que le nombre de périodes enregistrées est un entier.
2. La fenêtre en cosinus, dite de Hann, est mathématiquement la plus simple et elle offre de bons résultats dans le cas de composantes spectrales pas trop proches.
3. La fenêtre de Hamming , n'élimine pas complètement l'étalement spectral. Elle offre en contre partie une meilleure définition spectrale mais ne permet pas de voir des composantes spectrales de faibles amplitudes.
4. La fenêtre de Blackman , constituée de deux cosinus,atténue très fortement les effets de bord et permet ainsi de bien distinguer des raies spectrales proches et de faible amplitudes.

## **I.11 Méthodes d'estimation de la densité spectrale de puissance d'un signal numérique**

Il n'est pas toujours utile de connaître le spectre de phase, et dans beaucoup d'applications, on ne s'intéresse qu'à la densité de puissance moyenne (DSP) du signal.

Deux méthodes sont couramment utilisées pour estimer cette densité : la méthode du périodogramme et celle du corrélogramme.

### **I.11.1 Eléments de la théorie de l'estimation**

#### **Généralités**

L'analyse spectrale numérique d'un signal aléatoire est essentiellement un problème d'estimation. Dans la théorie de l'estimation on utilise les données disponibles pour estimer la valeur d'un paramètre caractéristique et pour établir la précision de cette estimation.

#### **Définitions**

Soit  $x(k)$  un signal aléatoire stationnaire et ergodique. Pour qu'un traitement quelconque sur ce

signal soit réalisable, il faut considérer un ensemble fini de k échantillons. Comme il s'agit d'un signal aléatoire, chacun de ces échantillons peut être représenté par une variable aléatoire.

L'estimation  $\hat{\alpha}$  d'un paramètre  $\alpha$  du processus aléatoire représenté par k échantillons  $x(k)$  est une fonction de variables aléatoires.

$$\hat{\alpha} = S(x(0), x(1), x(2), \dots, x(k-1)) \dots\dots\dots (I.26)$$

La fonction S est appelée **l'estimateur** du paramètre correspondant. La relation ( I.26 ) indique que l'estimation  $\hat{\alpha}$ , étant une fonction de variables aléatoires, est elle-même une variable aléatoire.

La densité de la probabilité de l'estimation  $\hat{\alpha}$  sera dénotée par  $p_{\alpha}(\hat{\alpha})$ . Son expression analytique dépend de l'estimateur S et de la densité de probabilité des variables aléatoires  $x(k)$ . Intuitivement, un estimateur est considéré comme satisfaisant si la probabilité pour que l'estimateur  $\hat{\alpha}$  soit proche de la vraie valeur  $\alpha$  est grande ( $p_{\alpha}(\hat{\alpha})$  soit concentrée autour de la valeur cherchée  $\alpha$ ).

**Biais et variance**

Pour une comparaison objective, on utilise souvent deux grandeurs pour caractériser un estimateur : **le biais et la variance.**

-Le biais d'un estimateur est, par définition, la différence entre son espérance mathématique et la vraie valeur cherchée, c'est-à-dire :

$$B_{\alpha}^{\hat{\alpha}} = E[\hat{\alpha}] - \alpha \dots\dots\dots (I.27)$$

Si le biais est nul, la densité de probabilité de l'estimation est centrée sur la valeur cherchée.

L'estimateur correspond est appelé **estimateur non biaisé**. Si la densité  $p_{\alpha}(\hat{\alpha})$  est

symétrique, pour un tel estimateur, la valeur cherchée est la valeur centrale de  $\hat{\alpha}$ .

Un estimateur dont le biais n'est pas nul est appelé **estimateur biaisé**.

-La variance d'un estimateur est une mesure de l'étendue de la densité de probabilité  $p_{\alpha}(\hat{\alpha})$

Elle est définie par :

$$Var[\hat{\alpha}] = E[(\hat{\alpha} - E[\hat{\alpha}])^2] = \sigma_{\alpha}^2 \dots\dots\dots (I.28)$$

Une faible valeur de la variance indique une concentration de la densité de probabilité autour de la valeur moyenne  $E[\hat{\alpha}]$ . Donc, un estimateur satisfaisant doit posséder un biais et une variance aussi petits que possible.

En général, la diminution de l'un provoque l'augmentation de l'autre et vice versa.

-Le compromis entre le biais et la variance peut être étudié à l'aide de l'erreur quadratique moyenne d'un estimateur, défini par :

$$E_{qm}(\hat{\alpha}) = E[(\hat{\alpha} - \alpha)^2] \dots\dots\dots (I.29)$$

En développant, on obtient :

$$E_{qm}(\hat{\alpha}) = E[\hat{\alpha}^2 - 2\alpha\hat{\alpha} + \alpha^2] = E[\hat{\alpha}^2] - 2\alpha E[\hat{\alpha}] + \alpha^2 \dots\dots\dots (I.30)$$

En ajoutant et en soustrayant le terme  $(E[\hat{\alpha}])^2$  et après groupement, on a finalement :

$$E_{qm}(\hat{\alpha}) = \sigma_{\hat{\alpha}}^2 + B_{\hat{\alpha}}^2 \dots\dots\dots (I.31)$$

Si le biais et la variance d'un estimateur tendent vers zéro, lorsqu'on augmente le nombre k de variables observées, l'estimateur est appelé **consistant**.

## I.11.2 Estimateurs spectraux

### I.11.2.1 Estimateur spectral simple (Périodogramme)

Cette méthode est basée sur le théorème de Wiener-khintchine qui démontre que la densité spectrale est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation :

$$G_x(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m) e^{-j2\pi fm} \dots\dots\dots (I.32)$$

L'équation (I.32) suppose que la suite de données  $x(n), n=1,2,\dots,N-1$ , est issue d'un processus aléatoire stationnaire. Si en plus le processus aléatoire est ergodique et le nombre d'échantillons de la suite de données réelles est limité à N, alors la fonction d'autocorrélation estimée est donnée par :

$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+m) \dots\dots\dots (I.33)$$

En substituant l'équation (I.33) dans l'équation (I.32), on obtient la densité spectrale estimée :

$$\hat{G}_x(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+m) \right] e^{-j2\pi fm} \dots\dots\dots (I.34)$$

Sachant que

$$1 = e^{j2\pi fn} \cdot e^{-j2\pi fn}, \text{ il vient :}$$

$$\hat{G}_x(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{j2\pi f n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+m) e^{-j2\pi f(n+m)} \dots\dots\dots (I.35)$$

En effectuant le changement de variable  $n+m=k$  et en remarquant pour une suite de données Réelles que  $x^*(n) = x(n)$ , l'équation (I.35) se met sous la forme :

$$\hat{G}_x(f) = \frac{1}{N} X(f) X^*(f) = \frac{|X(f)|^2}{N} \dots\dots\dots (I.36)$$

$X(f)$  est la transformée de Fourier de la suite de données réelles  $x(n)$ ,  $n=1,2,\dots,N-1$ .

La densité spectrale estimée de l'équation (I.36) est appelée **périodogramme**, dénoté  $\hat{G}_{per}(f)$ .

$$\hat{G}_{per}(f) = \frac{|X(f)|^2}{N} \dots\dots\dots (I.37)$$

**Propriétés statistiques :**

Pour caractériser l'estimation de la densité spectrale par le périodogramme, nous allons déterminer le biais et la variance de cet estimateur.

**Biais du périodogramme :**

On a, pour  $k=0,1,\dots,N-1$  :

$$E\{\hat{R}_x(m)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} E\{x(n+k)x^*(n)\} \dots\dots\dots (I.38)$$

Ce résultat signifie que l'espérance mathématique du périodogramme est la convolution de la vraie densité spectrale avec la fenêtre de Bartlett. Ainsi, le périodogramme est un estimateur biaisé de la vraie densité spectrale.

Si  $N \rightarrow \infty$ , alors  $W_B(f) \rightarrow \delta(f)$  conduisant à un périodogramme asymptotiquement non biaisé.

Dans le cas particulier d'un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma_x^2$  :  $R_x(m) = \sigma_x^2 \delta(m)$ , on a

$$E[\hat{G}_{per}(f)] = \sigma_x^2 = G_x(f) \dots\dots\dots (I.39)$$

Il en résulte que le périodogramme est un estimateur **non biaisé** de la vraie densité spectrale.



## Variance du périodogramme

La variance du périodogramme est donnée par l'équation suivante :

$$\text{Var}[\hat{G}_{per}(f)] = G_x^2(f) \dots\dots\dots (I.40)$$

Ainsi, la variance est indépendante de N conduisant à un estimateur non consistant et par conséquent il ne peut être fiable pour l'analyse spectrale. Pour améliorer la fiabilité du périodogramme des modifications ont été introduites.

### I.11.2.2 Procédure d'amélioration du périodogramme

#### a) Procédure de Bartlett : moyenne de périodogramme

Cette approche introduite par Bartlett permet de réduire la variance de l'estimation en considérant la moyenne de plusieurs périodogrammes indépendants.

Dans cette procédure, une suite de données  $x(n)$ ,  $n=0,1,\dots, N-1$ , est divisée en  $k$  segments successifs de  $M$  échantillons chacun, où  $N=KM$ . Le  $i$ ème segment est donnée par

$$x^i(n) = x(n + iM) \quad n=0,1,\dots, M-1 ; i=0,1,\dots, k-1$$

Le périodogramme du segment  $i$  est donnée par

$$\hat{G}_{per}^i(f) = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x^i(n) e^{-j2\pi fn} \right|^2, \quad i=0,1,\dots, k-1 \dots\dots\dots (I.41)$$

Si la fonction d'autocorrélation est négligeable pour  $m > M$ , alors les périodogrammes des différents segments sont indépendants.

La moyenne des  $k$  périodogrammes permet d'estimer la densité spectrale. Si les périodogrammes sont identiquement distribués, alors la moyenne de l'estimateur de Bartlett est définie par

$$E[\hat{G}_B(f)] = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{k-1} E[\hat{G}_{per}^i(f)] = E[\hat{G}_{per}^i(f)] \dots\dots\dots (I.42)$$

La moyenne de l'estimateur de Bartlett est donc égale à la moyenne du périodogramme de chaque segment de données de longueur  $M$ . La valeur moyenne du périodogramme d'un segment est donnée par :

$$\text{Var}[\hat{G}_B(f)] = \frac{1}{K} \text{var}[\hat{G}_{per}^i(f)] \dots\dots\dots (I.43)$$

La variance de l'équation (I.43) tend vers zéro quand  $K$  tend vers l'infini. Par conséquent l'estimateur de Bartlett est considéré un bon estimateur de la vraie densité spectrale.

**b) Procédure de Blackman-Tuckey : fenêtre associée à la fonction d'autocorrélation**

Nous avons montré que la variance de l'estimateur de Bartlett est réduite au détriment de la résolution spectrale. Cette diminution de la variance est obtenue en opérant sur des segments de longueur inférieure à celle de la suite de données à analyser. Une autre façon de réduire la variance, tout en opérant sur la longueur N de la suite de données, consiste à pondérer la fonction d'autocorrélation estimée par une fenêtre temporelle appropriée. La densité spectrale estimée est donnée alors par

$$\hat{G}_{BT}(f) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}_x(m)w(m)e^{-j2\pi fm} \dots\dots\dots (I.44)$$

Où w(m) est une fenêtre réelle paire définie pour |m| ≤ M avec M ≤ N - 1.

L'équation (I.44) peut donc s'écrire sous la forme :

$$\hat{G}_{BT}(f) = \sum_{m=-M}^M \hat{R}_x(m)w(m)e^{-j2\pi fm} \dots\dots\dots (I.45)$$

L'expression (I.45) est appelée **l'estimateur de Blackman-Tuckey** de la vraie densité spectrale. Cet estimateur est équivalent au périodogramme pour w(m)=1 pour |m| ≤ M = N - 1

$\hat{G}_{BT}(f)$  est la transformée de Fourier du produit  $\hat{R}_x(m)w(m)$  :

$$\hat{G}_{BT}(f) = TF\{\hat{R}_x(m)w(m)\} = \hat{G}_{per}(f) * W(f) \dots\dots\dots (I.46)$$

Cette opération de convolution introduit un effet de lissage sur le périodogramme. Par conséquent, toutes les variations rapides de la densité spectrale à l'intérieur de cette fenêtre sont indiscernables.

**Biais de l'estimateur BT (estimateur adouci) :**

La valeur moyenne de l'équation (I.46) est :

$$E[\hat{G}_{BT}(f)] = W(f) * E[\hat{G}_{per}(f)] \dots\dots\dots (I.47)$$

D'autre part on a :

$$E[\hat{G}_{per}(f)] = W(f) * G_x(f) \dots\dots\dots (I.48)$$

D'où :

$$E[\hat{G}_{BT}(f)] = W(f) * W_B(f) * G_x(f) \dots\dots\dots (I.49)$$

Si M << N, alors la bande passante de  $W(f)$  est supérieure à celle de  $W_B(f)$

$(W_B(f) \rightarrow \delta(f))$ . Par conséquent, on a approximativement :

$$E[\hat{G}_{BT}(f)] = W(f) * G_x(f) \dots\dots\dots (I.50)$$

Ce résultat peut être déduit en considérant le périodogramme asymptotiquement non biaisé.

Une large bande passante de  $W(f)$  implique un grand biais et une faible résolution spectrale et par conséquent un lissage effectif du périodogramme.

**La variance :**

La variance de l'estimateur BT est donnée par :

$$\text{var}[\hat{G}_{BT}(f)] = \frac{G_x^2}{N} \int_{-1/2}^{1/2} W^2(f) df \dots\dots\dots (I.51)$$

Le théorème de Parseval permet d'écrire

$$\int_{-1/2}^{1/2} W^2(f) df = \sum_{m=-M}^M W^2(m) \dots\dots\dots (I.52)$$

On obtient finalement

$$\text{Var}[\hat{G}_{BT}(f)] = \frac{G_x^2(f)}{N} \sum_{m=-M}^M W^2(m) \dots\dots\dots (I.53)$$

L'équation (I.50) montre que l'estimateur de BT est asymptotiquement non biaisé pour une grande valeur de M ( $w(f) \rightarrow \delta(f)$ ). Cependant l'équation (I.52) montre qu'une faible variance est obtenue pour une faible valeur de M. Il est donc clair qu'un compromis doit trouver entre le biais et l'estimateur de BT. Le but recherché par l'estimateur de BT est de choisir une valeur de M et une fenêtre  $w(m)$  permettant d'avoir :

$\text{Var}[\hat{G}_{BT}(f)] < \text{Var}[\hat{G}_{per}(f)]$  . Une valeur maximale de  $M=N/5$  est généralement recommandée.

## I.8 Conclusion

- L'analyse spectrale par TFD est la technique la plus utilisée dans les analyseurs de spectre, ces derniers implémentent des algorithmes de calcul rapides (TFR ou FFT) pour le calcul de la TFD. Ces algorithmes, comme leur nom l'indique sont très rapides ce qui leur permet de réaliser des analyses de signaux en temps réel.

Ce grand avantage leurs a permis de trouver de larges applications dans de nombreux domaines tels que radar, sonar, communication, parole, biomédical, géophysique et dans d'autres systèmes de traitement de données. Cependant, cette technique d'analyse spectrale non paramétrique a un très grand inconvénient qui est sa faible résolution spectrale, particulièrement si l'échantillon du signal est court et avec un faible rapport signal sur bruit.

- L'estimateur simple possède une variance proportionnelle au carré du spectre cherché. Elle ne peut pas être réduite par l'augmentation de la durée d'observation. En plus, l'estimateur simple est sujet au phénomène de distribution des composantes fréquentielles, partout sur l'axe des fréquences sauf aux fréquences harmoniques. Ceci provient de la fenêtre rectangulaire implicitement contenue dans l'observation à durée finie.
- L'estimateur moyenné permet, grâce au nombre  $L$  de sections de réduire la variance. Mais, il se comporte de la même manière que l'estimateur simple en ce qui concerne le phénomène de la distribution. Si, pour une durée d'observation  $k$  donnée, on réduit trop la variance, le biais augmente sensiblement. Le compromis n'est pas toujours facile à optimiser.
- L'estimateur adouci permet aussi de réduire sensiblement la variance par la durée et la forme de la fonction fenêtre utilisée. En générale, il a une bonne résolution fréquentielle, mais une mauvaise résolution dynamique.
- L'estimateur modifié est celui qui permet la meilleure résolution dynamique. Mais, à durée égale d'observation totale sa résolution fréquentielle est inférieure à celle de l'estimateur simple. Par contre, il est moins sensible au phénomène de distribution des composantes fréquentielles. [10].

## Chapitre II

# Nouvelle Technique Paramétrique d'Analyse Spectrale

### II.1 Introduction

Les harmoniques à déterminer sont caractérisées par les valeurs de leurs fréquences, amplitudes et phases respectives  $(f_i, V_i, \varphi_i)$ . L'analyse spectrale par identification de paramètres proposée, repose sur la modélisation du signal à analyser par un modèle adaptatif du signal avec un nombre fini de paramètres, qui à partir des quels, on peut déterminer les valeurs  $(f_i, V_i, \varphi_i)$  de chaque harmonique. Ces paramètres sont calculés par une technique à optimiser une fonction de coût, qui est l'erreur quadratique entre le signal réel à analyser et le signal estimé.

Au début de ce chapitre, on présentera en bref un important outil pour l'étude des signaux et des systèmes discrets LIT (Linéaires et Invariants dans le Temps) qui est la Transformée en Z, puis on donnera une présentation de la méthode paramétrique adoptée, le modèle paramétrique sur lequel est basée cette technique d'analyse spectrale et en fin on présentera quelques méthodes conventionnelles pour l'optimisation et l'identification de ces paramètres.

### II.2 La Transformée en Z [11].

La transformée en Z notée  $X(Z)$ , d'un signal discret ou échantillonné  $x(n)$  est définie par la relation suivante :

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)Z^{-n} \quad (\text{II.1})$$

Où  $Z$  est une variable complexe, définie tel que:  $R_1 < |Z| < R_2$ , c.à.d, qu'elle appartient à l'anneau délimité par les deux cercles  $R_1$  et  $R_2$ . Cet anneau représente le domaine de convergence de la fonction  $X(Z)$ .  $R_1$  et  $R_2$  dépendent de la suite  $x(n)$ .

Si la suite  $x(n)$  représente la suite des échantillons d'un signal prélevé avec la période  $T_e$ , et en posant  $Z=e^{j2\pi f}$  dans l'expression (II.1) la transformée en Z de  $x(n)$  coïncidera avec sa

transformée de Fourier. Alors l'analyse d'un système peut se faire donc par sa transformée en  $Z$ , et sa réponse en fréquence est calculée en remplaçant  $Z$  par  $e^{j2\pi f}$ .

La transformée en  $Z$  possède aussi une transformée inverse, qui peut se calculer directement à partir de la formule suivante :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} Z^{-n-1} X(Z) dZ \quad (\text{II.2})$$

$\Gamma$ , est un contour situé dans le domaine de convergence contenant tous les pôles de  $X(Z)$  ainsi que l'origine, et si  $X(Z)$  est une fonction rationnelle, le théorème des Résidus permet d'écrire :

$$x(n) = \sum_i \text{Résidus} [Z^{-n-1} X(Z)] / P_i \quad (\text{II.3})$$

Si le signal  $x(n)$  est causal, c.à.d  $x(n)=0$  pour  $n<0$ , alors cela nous amène à la définition de la transformée en  $Z$  monolatérale de la suite  $x(n)$  qui s'écrit :

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) Z^{-n} \quad (\text{II.4})$$

Les principales propriétés de la transformée en  $Z$  sont résumées dans le Tableau (II.1) ci-dessous.

Propriétés	$x(n)$	$X(z)$
Linéarité	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(Z) + bX_2(Z)$
Translation temporelle	$x(n - m)$	$Z^{-m} X(Z)$
Convolution	$x(n) * h(n)$	$X(Z) \cdot H(Z)$
Multiplication par $n$	$nx(n)$	$(-Z) dX(Z)/dZ$
Valeur initiale	$x(0)$	$= \lim_{Z \rightarrow \infty} X(Z)$
Valeur finale	$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$	$= \lim_{Z \rightarrow 1} (1 - Z^{-1}) X(Z)$

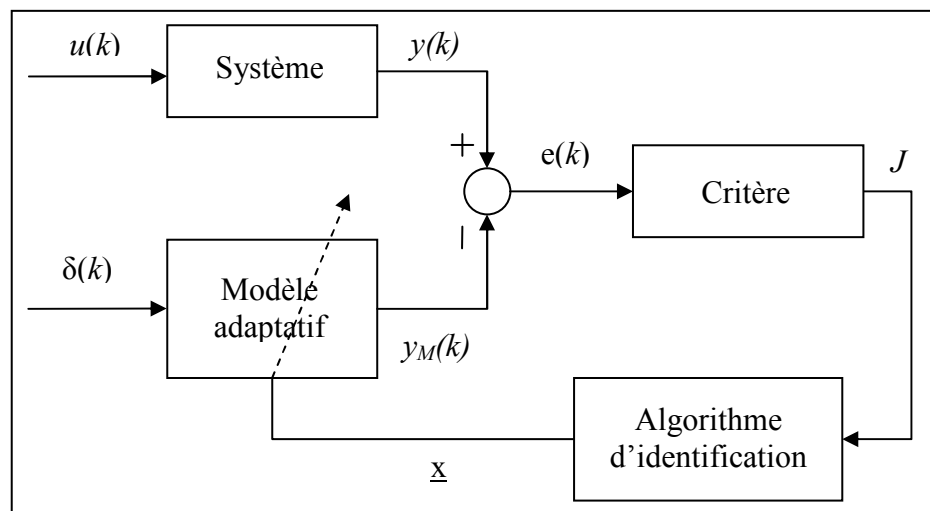
**Tableau (II.1).** Principales propriétés de la transformée en  $Z$ .

### II.3 Présentation de la méthode paramétrique adoptée

La méthode adoptée repose sur la modélisation du signal à analyser, par un modèle adaptatif à l'aide d'un nombre fini de paramètres. L'identification de ces paramètres permet de calculer les caractéristiques de l'harmonique extrait (fréquence, amplitude et phase). La figure (II.1) représente la structure de la procédure d'identification des paramètres pour l'extraction des harmoniques du signal  $y(k)$ .

Le critère des moindres carrés mesurant l'erreur quadratique entre le signal à analyser et celui obtenu par le modèle adaptatif, offre une bonne alternative pour la détermination et l'optimisation des paramètres du modèle. Il est évident que la plus grande composante harmonique, en terme d'amplitude (le fondamental du signal à analyser), a le plus grand effet sur l'erreur quadratique. En d'autres termes, les paramètres correspondants à la composante harmonique avec la plus grande amplitude représentent les indices du minimum global de la fonction de performance (l'erreur quadratique).

Une technique de recherche optimale est utilisée pour la localisation du minimum global, puis du second minimum et ainsi de suite, car l'optimisation s'effectue dans une surface de recherche multimodale formée par les paramètres représentant les solutions.



**Figure (II.1)** Structure de la procédure d'identification.

L'approche adoptée n'utilise pas un modèle représentatif de toutes les caractéristiques du signal à analyser, mais il nous permet plutôt d'extraire les harmoniques individuellement, de manière successive et par ordre décroissant de leurs amplitudes relatives.

### 2.3.1 Modèle du signal [12]

En considérant que la sortie du système  $y(k)$ , peut être reconstituée à partir des harmoniques (composantes sinusoïdales) qui le constitue,  $y(k)$  peut être approximé à la somme de ses harmoniques par l'expression suivante :

$$y(kT_e) = \sum_{i=1}^M V_i \sin(\omega_i kT_e + \varphi_i) \quad (\text{II.5})$$

Où  $M$  : est le nombre d'harmoniques à extraire ou contenu dans le signal ;

$V_i$  : amplitude de la  $i^{\text{ème}}$  harmonique ;

$f_i$  : fréquence de la  $i^{\text{ème}}$  harmonique ;

$\varphi_i$  : phase de la  $i^{\text{ème}}$  harmonique ;

$T_e = 1/F_e$  ;  $F_e$  : fréquence d'échantillonnage du signal.

La réponse impulsionnelle du système est donnée par :

$$\begin{aligned} y_M(kT_e) &= \sum_{i=1}^M g(iT_e) \delta[(k-i)T_e] \\ &= g(kT_e) \\ &= \sum_{i=1}^M V_{iM} \sin(\omega_{iM} kT_e + \varphi_{iM}) \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Par la transformée en Z, la fonction de transfert du modèle sera donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{i=1}^M \frac{V_i \sin(\varphi_i) z^2 + V_i \sin(\omega_i T_e - \varphi_i) z}{z^2 - 2 \cos(\omega_i T_e) z + 1} \\ &= \sum_{i=1}^M G_i(z) \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Où à chaque harmonique  $i$ , correspond une fonction de transfert (un modèle)  $G_i(z)$  telle que :

$$G_i(z) = \frac{V_i \sin(\varphi_i) z^2 + V_i \sin(\omega_i T_e - \varphi_i) z}{z^2 - 2 \cos(\omega_i T_e) z + 1} \quad (\text{II.8})$$



En divisant le numérateur et le dénominateur par  $z^2$  l'expression précédente peut être simplifiée et exprimée comme suit :

$$G_i(z) = \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1}}{1 + a_{1i}z^{-1} + z^{-2}} \quad (\text{II.9})$$

Cette dernière équation représente une fonction de transfert d'un filtre sélectif passe-bande, ce qui nous ramène aux notions de filtrage que réalise la TFD évoquée dans le chapitre I.

Les coefficients du filtre sont reliés aux caractéristiques de l'harmonique par :

$$\begin{cases} a_{1i} = -2 \cos(\omega_i T_e) \\ b_{0i} = V_i \sin(\varphi_i) \\ b_{1i} = V_i \sin(\omega_i T_e - \varphi_i) \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

L'équation (II.9), permet d'exprimer la valeur de la sortie de manière récursive en fonction des valeurs antérieures de l'entrée et de la sortie comme suit.

$$Y_M(z) = -a_{1M}z^{-1}Y_M(z) - z^{-2}Y_M(z) + b_{0M}U(z) + b_{1M}z^{-1}U(z) \quad (\text{II.11})$$

Par transformation en Z inverse de l'équation précédente, on obtient l'équation aux différences, dans le domaine temporel, suivant

$$y_M(k) = -a_{1M}y_M(k-1) - y_M(k-2) + b_{0M}u(k) + b_{1M}u(k-1) \quad (\text{II.12})$$

### 2.3.2 Critère d'identification

L'approche proposée consiste à calculer successivement le système du second ordre qui minimise l'erreur entre la réponse impulsionnelle du modèle  $y_M(k)$  (calculée par l'équation (II.12)) et le signal  $y(k)$ , cette erreur ou différence est définie par :

$$e(k) = y(k) - y_M(k) \quad (\text{II.13})$$

Cette différence dépend non linéairement des trois paramètres  $(a_{1i}, b_{0i}, b_{1i})$ . Pour cette raison, une technique d'optimisation basée sur la recherche de la solution dans l'espace formé par les trois paramètres  $(a_{1i}, b_{0i}, b_{1i})$  est adoptée. La recherche se fait de manière itérative jusqu'à ce que le minimum global de l'erreur quadratique obtenu soit dans un intervalle de tolérance prédéterminé, ou l'erreur quadratique ne décroît plus.

La fonction de performance utilisée par le critère des moindres carrés, et qui est donc l'erreur quadratique à minimiser est définie par l'équation suivante.

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} [e(k)]^2 = e^T \cdot e. \quad (\text{II.14})$$

Où  $e$  : est le vecteur erreur ;

$N$  : est le nombre d'échantillons du signal.

Notre problème devient donc un problème d'optimisation (minimisation de l'erreur quadratique).

## II.4 Généralités sur les méthodes d'optimisation [13]

### II.4.1 Introduction

Dans la vie courante, nous sommes fréquemment confrontés à des problèmes "d'optimisation" plus ou moins complexes. Cela peut commencer au moment où l'on tente de ranger son bureau, de placer son mobilier, et aller jusqu'à un processus industriel, par exemple pour la planification des différentes tâches. Ces problèmes peuvent être exprimés sous la forme générale d'un "problème d'optimisation". On définit alors une fonction objectif (fonction de coût ou fonction profit), que l'on cherche à optimiser (minimiser ou maximiser) par rapport à tous les "paramètres" (ou degrés de liberté) concernés.

Selon le type des variables, les problèmes d'optimisation se divisent en deux sortes de problèmes, qui ont la réputation d'être "difficiles" :

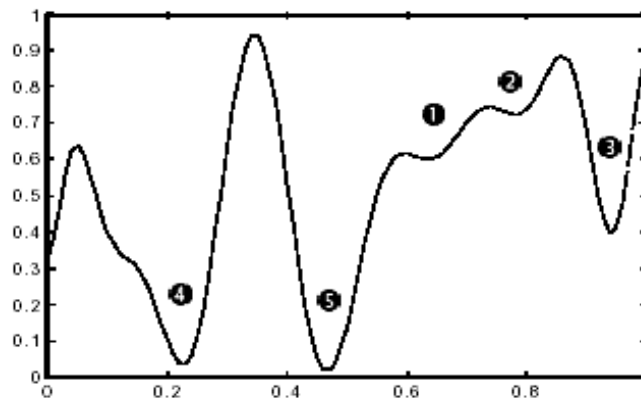
- Variables à valeurs discrètes, par exemple binaires, on parle alors de problème d'optimisation combinatoire ; où pour certains, on ne connaît pas d'algorithme précis "rapide" ;
- Variables à valeurs continues ; où pour certains on ne connaît pas d'algorithme permettant de trouver le minimum global à coup sur, et en un nombre fini de calculs.

Le choix d'une méthode d'optimisation repose sur le type de la fonction à optimiser ainsi que de l'objectif visé par cette optimisation. En pratique, l'objectif n'est pas d'obtenir un optimum absolu, mais seulement une bonne solution, et la garantie de l'inexistence d'une solution

sensiblement meilleure. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser une méthode d'optimisation globale assez robuste pour surmonter les minimums locaux vers le minimum globale, ou une valeur avoisinante. Avant de présenter en bref les différentes classes des méthodes d'optimisation globale ; il est nécessaire de faire une généralisation de quelques définitions.

## II.4.2 Généralisation des définitions

Soit la fonction à une variable  $f(x)$  de la figure (II.3), dont la variable  $x$  est réelle variant dans l'intervalle  $[0,1]$  (espace de recherche), et dont on cherche le minimum.



**Figure (II.3).** Exemple d'une fonction objectif à une variable.

L'ensemble des solutions  $X$  de cette fonction, est caractérisé par :

Un minimum global ⑤ ;

Un minimum local ④ presque aussi bas que le minimum global, mais situé dans une vallée plus large ;

plusieurs autres minima locaux (③, ②, ①), moins importants situés dans des vallées moins profondes.

L'optimisation globale consiste à trouver le minimum global de  $f$ , et éviter d'être piégé dans un minimum local. Il s'en suit que :

$f(x^*)$  est un minimum local  $\Leftrightarrow [\exists \varepsilon > 0 / \forall x \in X : \|x - x^*\| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(x^*)]$  et  $x^* \in X$ .

$f(x^*)$  est un minimum global  $\Leftrightarrow \forall x \in X : f(x) \geq f(x^*)$  et  $x^* \in X$ .

Nous pouvons donc partager les méthodes d'optimisation en deux catégories. Celles qui permettent de déterminer un minimum local : ces méthodes sont appelées méthodes locales, et celles qui s'efforcent de déterminer un optimum global en explorant tout l'espace de recherche : ces méthodes sont appelées méthodes de recherche globale.

## II.4.3 Classification des méthodes d'optimisation

Les méthodes d'optimisation sont subdivisées selon les critères de robustesse, en trois types : les méthodes *déterministes*, les méthodes *énumératives*, et les méthodes *stochastiques* utilisant un processus aléatoire guidé.

- **les méthodes déterministes** : fondées sur le calcul, ces méthodes supposent que la fonction à optimiser  $f$ , est continue et dérivable en tout point de l'espace de recherche.

Les méthodes déterministes se divisent en deux classes principales : les méthodes d'exploration directe et les méthodes d'exploration indirecte.

Les méthodes indirectes cherchent à atteindre les extrema locaux en résolvant les systèmes d'équations, souvent non linéaires, obtenus en annulant le vecteur gradient de la fonction étudiée. La recherche d'un extremum hypothétique commence par la restriction de l'espace de recherche aux points de pente nulle dans toutes les directions.

Les méthodes d'exploration directes recherchent les optima locaux en se déplaçant dans une direction qui dépend du gradient de la fonction. Pour trouver un minimum local, on peut emprunter la direction de la plus forte pente.

Ces méthodes présentent deux inconvénients majeurs :

- ☞ en pratique, un grand nombre de fonctions à optimiser ne sont pas dérivables et souvent même pas continues. Il est difficile de savoir si la fonction  $f$  à étudier satisfait ou non à de telles conditions ;
- ☞ ces méthodes ne convergent vers l'optimum global que lorsque le point de départ de l'algorithme est proche de cet optimum.

**les méthodes énumératives** : sont de principe simple ; dans un espace de recherche fini, ou infini mais discrétisé, un algorithme énumératif évalue la valeur de la fonction à optimiser en chaque point de l'espace un par un. Un tel algorithme est intéressant lorsque le nombre de points n'est pas très important. Mais en pratique beaucoup d'espaces de recherche sont trop vastes pour que l'on puisse explorer toutes les solutions une par une et tirer une information utilisable.

Ces méthodes présentent deux inconvénients majeurs :

- elles sont inadaptées aux problèmes de grande dimension ;
- elles ne sont pas guidées par un raisonnement ou un processus intelligent, qui conduit la recherche vers des sous-espaces, susceptible de contenir une bonne solution, sans balayer tout l'espace des solutions.

**les méthodes stochastiques** : qui sont des méthodes où l'approche de l'optimum est en partie ou entièrement guidée par un processus stochastique. Les procédures purement aléatoires, qui explorent et mémorisent le meilleur élément trouvé, ne sont pas non plus efficaces et robustes. On leur préfère les méthodes dites pseudo-aléatoires; ces méthodes utilisent un choix aléatoire comme outil pour guider une exploration "intelligente" de l'espace des solutions.

Ces méthodes présentent un inconvénient majeur :

- On ne peut garantir leur convergence que d'une manière asymptotique (ou pas du tout...).

En résumé, les méthodes d'exploration traditionnelles, déterministes ou énumératives, ne sont pas efficaces pour tout type de problème. Lorsqu'on veut résoudre un problème difficile, dès que la dimension du problème est grande, ces méthodes peuvent avoir des temps de calcul déraisonnables, et on a alors recours aux méthodes stochastiques pseudo – aléatoire, utilisant des méthodes stochastiques guidées. Parmi ces méthodes sont apparues des méthodes heuristiques modernes connues sous le nom de « Métaheuristiques ».

#### **II.4.4 Généralités sur les métaheuristiques modernes**

Depuis le début des années 1980, des techniques très génériques de résolution des problèmes combinatoires, regroupées sous le nom de « métaheuristiques », ont été proposées pour traiter les problèmes de très grande complexité. Ces méthodes d'optimisation sont itératives capable de trouver le minimum global. La théorie de ces méthodes relève de l'étude des systèmes dynamiques, discrets ou continus, multidimensionnels et en général non linéaires. Ces méthodes sont issues de la modélisation mathématique de processus naturels :

La modélisation de processus physiques, notamment par les approches de la physique statistique, a permis le développement de méthodes telles que le «recuit simulé».

La modélisation de processus à mémoires a été à l'origine de la méthode appelée «recherche tabou». La particularité de cette méthode est de mémoriser, au cours de la recherche de la solution, le passé proche (et éventuellement des bribes du passé lointain) du déroulement de cette recherche.

La modélisation de processus génétiques a initié le développement des «algorithmes génétiques» ou «évolutionnistes», dans lesquels des solutions potentielles sont considérées comme des individus qui évoluent dans une population.

Enfin, il faut signaler l'existence de méthodes hybrides, qui couplent des métaheuristiques entre elles ou des métaheuristiques et des méthodes plus conventionnelles.

#### **II.5 Méthodes numériques (conventionnelles) d'optimisation. [11]**

Considérons notre problème d'optimisation, qui est un problème d'optimisation au sens des moindres carrés dont la fonction objectif ou fonction de coût à minimiser est une somme de carrés équation (II.14), qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$J(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{N-1} [y(k) - y_M(k, \underline{x}_i)]^2 \quad (\text{II.15})$$

où N est le nombre de points ou longueur du signal, cette fonction dépend non linéairement

des paramètres  $\underline{x}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ b_{0i} \\ b_{1i} \end{bmatrix}$  ( $\underline{x}_i$  vecteur de paramètres) et présente un minimum au point

$\underline{x} = \underline{x}^*$ , si son gradient est nul ; c.à.d :

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} J(\underline{x}^*) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial a_{1i}} \\ \frac{\partial J}{\partial b_{0i}} \\ \frac{\partial J}{\partial b_{1i}} \end{bmatrix} \\ &= 2 \cdot e^T \cdot \underline{\nabla} e /_{x=x^*} \\ &= -2 \cdot e^T \cdot D^{(it)} /_{x=x^*} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

où  $D^{(it)}$  est la matrice du Jacobian de dimension (N×m), m : est le nombre de paramètres (3 dans notre cas), définie par :

$$D^{(it)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_M(0)}{\partial a_{1i}} & \frac{\partial y_M(0)}{\partial b_{0i}} & \frac{\partial y_M(0)}{\partial b_{1i}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_M(N)}{\partial a_{1i}} & \frac{\partial y_M(N)}{\partial b_{0i}} & \frac{\partial y_M(N)}{\partial b_{1i}} \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

Les éléments de la matrice du Jacobian, sont calculés par les équations récurrentes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y_M(k)}{\partial a_{1i}} = -a_{1i} \frac{\partial y_M(k-1)}{\partial a_{1i}} - \frac{\partial y_M(k-2)}{\partial a_{1i}} - y_M(k-1). \\ \frac{\partial y_M(k)}{\partial b_{0i}} = -a_{1i} \frac{\partial y_M(k-1)}{\partial b_{0i}} - \frac{\partial y_M(k-2)}{\partial b_{0i}} - u(k). \\ \frac{\partial y_M(k)}{\partial b_{1i}} = -a_{1i} \frac{\partial y_M(k-1)}{\partial a_{1i}} - \frac{\partial y_M(k-2)}{\partial b_{1i}} - u(k-1). \end{array} \right. \quad (\text{II.18})$$

Les méthodes utilisant le gradient, sont des méthodes itératives, c.à.d, que le minimum est atteint itérativement avec la condition que, à chaque itération  $J(\underline{x})$  doit décroître et diminuée, c.à.d :  $J(\underline{x}^{(it+1)}) < J(\underline{x}^{(it)})$  ou  $(it)$  est un compteur d'itérations.

Les nouvelles valeurs des paramètres, ou leur mise à jour est réalisée par la formule :

$$\underline{x}^{(it+1)} = \underline{x}^{(it)} + \delta^{(it)} \quad (\text{II.19})$$

où  $\delta^{(it)}$  est le vecteur de direction défini par :

$$\delta^{(it)} = -R^{(it)} \underline{\nabla} J(\underline{x}^{(it)}) \quad (\text{II.20})$$

$R^{(it)}$  est une matrice de dimension  $(m \times m)$ ,  $m$  : nombre de paramètres) dont les éléments doivent être positifs, pour avoir une direction descendante  $-\underline{\nabla} J(\underline{x})$ .

$$R^{(it)} = \frac{1}{2} (G^{(it)})^{-1} \quad (\text{II.21})$$

$(G^{(it)})^{-1}$  est la matrice inverse du Hessian ; la matrice du Hessian est calculée par la dérivée partielle suivante :

$$G(\underline{x}) = \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j} = 2 \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \left( \frac{\partial y_M(k; \underline{x})}{\partial x_i} \frac{\partial y_M(k; \underline{x})}{\partial x_j} \right) - [y_k - y_M(k; \underline{x})] \frac{\partial^2 y_M(k; \underline{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad (\text{II.22})$$

En utilisant une notation matricielle, l'équation précédente s'écrira comme suit :

$$G^{(it)}(\underline{x}) = 2D^{(it)}(\underline{x})^T D^{(it)}(\underline{x}) + 2Q^{(it)}(\underline{x}) \quad \text{et où } Q^{(it)}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N e_i^{(it)}(\underline{x}) G_i^{(it)}(\underline{x})$$

Le facteur  $\frac{1}{2}$  dans l'équation (II.21) est introduit pour éliminer le facteur 2 dans (II.16). Généralement les méthodes dites du gradient différent dans la détermination et le calcul du Hessian.

### II.5.1 Méthode de Gauss-Newton

Dans cette méthode, la dérivée seconde  $\frac{\partial^2 y_M(k; \underline{x})}{\partial x_i \partial x_j}$  dans l'équation (II.22) est négligée devant la dérivée première, et le Hessian est calculé par :

$$G^{(it)}(\underline{x}) = \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j} = 2 \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \left( \frac{\partial y_M(k; \underline{x})}{\partial x_i} \frac{\partial y_M(k; \underline{x})}{\partial x_j} \right) \right] = 2(D^{(it)})^T D^{(it)}. \quad (II.23)$$

Cette méthode est simple et ne demande que la connaissance de la dérivée première (le Jacobian). Le minimum est calculé itérativement et la procédure s'arrête si la condition suivante est satisfaite :

$$\|\underline{\nabla} J(\underline{x})\| \leq \varepsilon \quad (II.24)$$

où  $\varepsilon$  est une constante fixée correspondant à la précision de calcul voulue (généralement de l'ordre de  $10^{-7}$  à  $10^{-4}$ ). L'algorithme s'arrête si l'erreur ne décroît plus.

### II.5.2 Méthode de Levenberg-Marquardt

La méthode de Levenberg-Marquardt fonctionne très bien en pratique, et elle est devenue presque la méthode standard pour les problèmes de moindres carrés non linéaires [10]. Elle a la réputation d'être plus robuste que la méthode précédente, et le vecteur de direction est obtenu en résolvant l'équation [11]:

$$((D^{(it)})^T D^{(it)} + \lambda^{(it)} I) \underline{\delta}^{(it)} = -\underline{\nabla} J(\underline{x}^{(it)}) \quad (II.25)$$

$\lambda^{(it)}$  : est un scalaire, et  $I$  est la matrice identité. Si  $\lambda = 0$ , cette méthode devient identique à celle de Gauss-Newton. Les éléments de la matrice  $R_L^{(it)}$  seront donc calculés par rapport aux éléments de celle dans la méthode de Gauss-Newton  $R^{(it)}$  comme suit :

$$\begin{aligned} R_L^{(it)}(i, i) &= R^{(it)}(i, i)(1 + \lambda^{(it)}) && \text{pour } i=j ; \\ R_L^{(it)}(i, j) &= R^{(it)}(i, j) && \text{pour } i \neq j . \end{aligned}$$

En démarrant par un vecteur de paramètres initiaux  $\underline{x}$ , l'algorithme de Levenberg-Marquardt peut être décrit comme suit :



1. calculer  $J(\underline{x})$  ;
2. donner une petite valeur à  $\lambda$ , disons  $\lambda = 0.001$  ;
3. résoudre l'équation (II.22) pour  $\delta$  et évaluer  $J(\underline{x} + \delta)$  ;
4. si  $J(\underline{x} + \delta) \geq J(\underline{x})$ , diminuer  $\lambda$  d'un facteur de 10 (ou un autre facteur substantiel) et revenir vers (3) ;
5. si  $J(\underline{x} + \delta) < J(\underline{x})$ , diminuer  $\lambda$  d'un facteur de 10, mettre à jour les paramètres  $\underline{x} \leftarrow \underline{x} + \delta$ , et revenir vers (1).

### II.5.3 Méthode Quasi-Newton

Dans cette méthode la matrice inverse du Hessian  $(G^{(it)})^{-1}$  est approximée par une matrice symétrique  $H^{(it)}$ , cette matrice est calculée itérativement de manière à ce que  $\lim_{i \rightarrow \infty} H_i \approx G^{-1}$ . Il existe plusieurs formules itératives pour le calcul du Hessian parmi les quelles la formule du DFP (Davidon – Fletcher – Powell) qui est donnée par :

$$H_{DFP}^{(it+1)} = H + \frac{\delta\delta^T}{\delta^T S} - \frac{H S S^T H}{S^T H S}. \quad (\text{II.26})$$

où  $\delta^{(it)} = \underline{x}^{(it+1)} - \underline{x}^{(it)}$  et  $S^{(it)} = \underline{\nabla} J(\underline{x}^{(it+1)}) - \underline{\nabla} J(\underline{x}^{(it)})$ .

Le facteur d'itération  $it$  dans la formule, a été omis par simplicité.

Une autre formule d'approximation utilise une approximation du Hessian  $G^{(it)}$  au lieu de  $(G^{(it)})^{-1}$ . En posant  $B^{(it)} = (H^{(it)})^{-1}$  la formule du BFGS (Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno) pour l'approximation du Hessian est donnée par :

$$B_{BFGS}^{(it+1)} = B + \frac{S S^T}{S^T \delta} - \frac{B \delta \delta^T B}{\delta^T B \delta}. \quad (\text{II.27})$$

Si on veut calculer la mise à jour de  $H^{(it)}$  au lieu de  $B^{(it)}$  la formule (II.25) ci-dessous satisfait la condition  $B_{BFGS}^{(it+1)} \cdot H_{BFGS}^{(it+1)} = I$  :

$$H_{BFGS}^{(it+1)} = H + \left(1 + \frac{S^T H S}{\delta^T S}\right) \frac{\delta\delta^T}{\delta^T S} - \frac{\delta S^T H + H S \delta^T}{\delta^T S}. \quad (\text{II.28})$$

### II.5.3 Implémentation, avec matlab, de la méthode de Levenberg-Marquard

Cette méthode d'optimisation locale est implémentée, sous matlab, par la boîte à outil :lsqnonlin.

#### II.5.3.1 La boîte à outil d'optimisation : lsqnonlin.[17]

Lsqnonlin : résout les problèmes au sens des moindres carrés.

$$\min_x (f(x)) = f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + f_3(x)^2 + \dots + f_m(x)^2.$$

#### Syntaxe :

X = lsqnonlin (fun,x0)

X = lsqnonlin (fun,x0,lb,ub)

X = lsqnonlin (fun,x0,lb,ub,options)

[x,resnorm] = lsqnonlin(...)

[x,resnorm,residual] = lsqnonlin(...)

...  
...  
...

#### Description:

X = lsqnonlin (fun, x0) : commence au point x0 et cherche le minimum des moindres carrés de la fonction décrite par **fun**.

La fonction **fun** retourne un vecteur de valeurs et non la somme des carrés des valeurs. (L'algorithme élève au carré et fait la somme sur les éléments du vecteur issu par **fun**)

X = lsqnonlin (fun, x0, lb, ub) : définit un ensemble de bornes (supérieure et inférieure) pour la variable x. La solution est, toujours, de la forme : lb <= x <= ub .

X = lsqnonlin (fun, x0, lb, ub, options) : minimise avec les options spécifiées par la structure : **options**.

[x, resnorm] = lsqnonlin (...) : retourne la valeur du résidu (de la somme des carrés) au point x.

[x, resnorm, residual] = lsqnonlin (...): retourne la valeur du résidu de **fun(x)** à la solution x.

## **Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle méthode paramétrique d'analyse spectrale, basée sur la modélisation, l'identification et l'optimisation de paramètres. Cette technique permet d'extraire les harmoniques contenues dans un signal dans l'ordre décroissant de leurs amplitudes. Pour ce faire, la méthode d'optimisation choisie doit être capable d'explorer tout l'espace de recherche et de trouver le minimum global de la fonction à optimiser. Les méthodes numériques ne convergent vers le minimum global, que si le point de départ est proche de celui-ci.

Les métaheuristiques explorent, efficacement, l'espace de recherche et elles sont capables de s'échapper des optima locaux et, par suite, surmonter l'inconvénient des méthodes numériques.

Dans le chapitre suivant, on s'intéressera au recuit simulé comme méthode d'optimisation globale.

### OPTIMISATION PAR METAHEURISTIQUES

#### **Introduction**

Les algorithmes de recherche aléatoires ont connu un succès grandissant depuis que les chercheurs ont observé les limitations des méthodes basées sur le calcul et l'énumération.

Ils explorent et mémorisent le meilleur élément. Ces méthodes ne sont pas d'exploration purement aléatoires, puisque elles utilisent un choix aléatoire pour guider une exploration hautement intelligente dans l'espace des paramètres. [14].

#### **III.1 Les métaheuristiques [15]**

##### **Généralités.**

Le mot métaheuristique est dérivé de la composition de deux mots grecs :

- heuristique : qui vient du verbe heuriskêin et qui signifie : “ trouver”. Un heuristique, ou méthode approximative, et qui est le contraire d'un algorithme exacte qui trouve une solution optimale pour un problème donné.
- Meta : qui est un suffixe signifiant : “ au-delà, dans un niveau supérieur.

Les métaheuristiques forment une famille d'algorithmes d'optimisation visant à résoudre des problèmes d'optimisation difficiles pour lesquels on ne connaît pas de méthodes classiques plus efficaces.

Les métaheuristiques sont généralement des algorithmes stochastiques itératifs, qui progressent vers un optimum global, par échantillonnage d'une fonction objectif.

##### **III.1.2 Propriétés fondamentales des métaheuristiques**

- Les métaheuristiques ne nécessitent pas de connaissances particulières sur le problème optimiser pour fonctionner, le fait de pouvoir associer une, ou plusieurs valeurs à une solution est la seule information nécessaire.
- Le but visé par les métaheuristiques est d'explorer l'espace de recherche afin de déterminer des solutions presque optimales.
- Elles sont généralement non déterministes et ne donnent aucune garantie d'optimalité.
- Elles peuvent contenir des mécanismes qui permettent d'éviter d'être bloqué dans des optima locaux.

##### **III.1.3 Organisation générale**

Les métaheuristiques s'articulent autour des notions suivantes :

- voisinage
- diversification / exploration
- intensification / exploitation
- mémoire et apprentissage

**Voisinage :** Le voisinage d'une solution est un sous ensemble de solutions qu'il est possible d'atteindre par une série de transformations données.

**Diversification – exploration :** Ce synonyme, désigne le processus visant à récolter de l'information sur le problème optimisé.

**Intensification – exploitation :** L'intensification vise à utiliser l'information récoltée pour définir et parcourir les zones intéressantes de l'espace de recherche.

**Apprentissage :** la mémoire est le support de l'apprentissage, qui permet à l'algorithme de ne tenir compte que des zones où l'optimum global est susceptible de se trouver, évitant ainsi les optima locaux.

*Note :*

Les métaheuristiques progressent de façon itérative, en alternant des phases d'intensification, de diversification et d'apprentissage, ou en mêlant ces notions de façon plus étroites.

L'état de départ est souvent choisi aléatoirement, l'algorithme se déroulant ensuite jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit atteint.

#### **III.1.4 Applications**

Les métaheuristiques sont souvent employées pour leurs facilités de programmation et de manipulation. Elles sont en effet facilement adaptables à tout type de problème d'optimisation. Toute fois, elles sont judicieusement plus employées sur des problèmes d'optimisation difficiles, où des méthodes classiques (méthodes déterministes) montrent leurs limites.

Utilisées en lieu et place d'heuristiques spécialisées, elles montrent généralement de moins bonnes performances.

De façon générale, on peut considérer que des problèmes présentant les caractéristiques suivantes sont assez propices à l'utilisation de métaheuristique.

- Nombreux optima locaux
- Discontinuités
- Non dérivabilité
- Temps de calcul de la fonction objectif prohibitif

- Etc...

### **III.1.5 Liste de métaheuristiques**

Les métaheuristiques les plus connues sont :

- Les algorithmes évolutionnistes, parmi lesquels on distingue : les algorithmes génétiques.
- Le recuit simulé
- La recherche avec tabou
- Les algorithmes de colonies de fourmis
- Les algorithmes d'optimisation par essais particuliers
- Les méthodes GRASP
- Etc....

### **III.1.6 Avantages et inconvénients des métaheuristiques**

#### **a- Avantages :**

- Les métaheuristiques étant très généralistes, peuvent être adaptées à tout type de problème d'optimisation
- Un grand nombre de problèmes réels n'est pas optimable efficacement par des approches mathématiques, les métaheuristiques peuvent dans ce cas être utilisées avec un profil.

#### **b- Inconvénients :**

- Elles ne garantissent pas non plus la découverte de l'optimum global en un temps fini
- Elles sont souvent moins puissantes que les méthodes exactes sur certains types de problèmes.

### **III.2 La méthode du recuit simulé ( Simulated Annealing SA).**

Le recuit simulé a été proposé la première fois par Kirkpatrick et ses collaborateurs en 1983, comme une méthode pour résoudre des problèmes d'optimisation combinatoires. Aussitôt, Cette technique a attiré l'attention comme étant une méthode convenable pour résoudre les problèmes d'optimisation de grande échelle, surtout ceux où le minimum global désiré est caché ou entouré par un grand nombre d' extrema locaux, moins importants.

Cette méthode est issue d'une analogie entre le phénomène physique de refroidissement lent d'un corps en fusion, qui le conduit à un état solide, de basse énergie. Il faut abaisser lentement la température, en marquant des paliers suffisamment longs pour que le corps atteigne «l'équilibre thermodynamique » à chaque palier de température. Pour les matériaux, Cette basse énergie se manifeste par l'obtention d'une structure régulière, comme dans les cristaux et l'acier.

Autrement dit, à haute température, les molécules d'un liquide (métal en fusion) bougent librement avec respect du mouvement de l'une par rapport à l'autre. Si le liquide est refroidi lentement, la mobilité thermique sera perdue progressivement, et les atomes sont souvent capables de s'aligner et former un cristal pur qui est complètement rangé. Ce cristal est l'état d'énergie minimale pour ce système (métal). Le fait stupéfiant, est que pour un refroidissement lent d'un système, la nature est capable de trouver l'état d'énergie minimale de celui-ci par contre, si un métal liquide est refroidi rapidement ou « trempé », l'état d'énergie minimale ne sera pas atteint et le métal fini plutôt dans une forme polycristalline ou état amorphe qui a énergie quelque peu supérieure. Donc l'essence de la technique est le refroidissement lent, en autorisant le temps suffisant pour la redistribution des atomes pendant la perte de mobilité. Ceci est la définition technique du Recuit « Annealing », qui est essentiel pour que l'état de basse énergie soit atteint.

On peut dire que, la nature a son propre algorithme de minimisation, qui est basé sur la distribution de Boltzmann,

$$\text{Prob}(E) = \exp(-E/KT) \quad (\text{III.1})$$

Qui exprime l'idée qu'à l'équilibre thermique du système à une température T, son énergie est probabilistement distribuée, pour tous les différents états d'énergie E. (K est la constante de Boltzmann).

En 1953, Métropolis et ses collaborateurs, sont les premiers à avoir utilisé ce genre de principe dans un calcul numérique.

Présentant ainsi un algorithme simple qui peut être utilisé pour produire une bonne simulation (un simulé) de l'équilibre d'un système thermodynamique, qui assume que, à l'équilibre thermodynamique à une température T, la distribution de Boltzmann donne la probabilité relative selon laquelle le système passe d'un état A vers un état B :

$$p = \frac{p(B)}{p(A)} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{K'T}\right) = \exp\left(-\frac{\Delta E}{K'T}\right) \quad (\text{III.2})$$

Où  $E_1$  et  $E_2$  sont les énergies associées aux états A et B respectivement.

On peut constater que si  $\Delta E \leq 0$  (c.à.d  $E_2 \leq E_1$ ) la nouvelle configuration est acceptée ( $P \geq 1$ , on lui attribue la valeur arbitraire  $p=1$ ). Par contre si  $\Delta E > 0$  (c.à.d  $E_2 > E_1$ ) la configuration est acceptée avec une probabilité égale à p. cette procédure ou schéma général qui prend toujours

un pas descendant et prenant parfois un pas montant, est connue comme étant l' algorithme de Métropolis.

Dans un problème d' optimisation, l' analogie exploitée par recuit simulé consiste à considérer une fonction à minimiser comme fonction d' énergie ; et une solution  $x$  peut être considérée comme un état donné de la matière dont  $f(x)$  est l'énergie. Le recuit simulé exploite généralement le critère défini par l' algorithme de Métropolis pour l' acceptation d' une solution obtenue par perturbation de la solution courante.

Pour une « température »  $T$  donnée, à partir d' une solution courante  $x$ , on considère une transformation élémentaire qui changerait  $x$  en  $s(x)$ . Si cette perturbation induit une diminution de la valeur de la fonction objectif  $f$ .  $f(s(x)) - f(x) < 0$ , elle est acceptée.

Dans le cas contraire, si.  $f(s(x)) - f(x) \geq 0$ , la perturbation est acceptée tout de même avec une probabilité :  $p = \exp\left(\frac{-\Delta f}{T}\right)$  (III.3)

Le pseudo\_code l' algorithme de Métropolis est donné dans le tableau (III.1) ci-dessous.

```

Si  $f(s(x)) < f(x)$  alors
   $f(x) \leftarrow f(s(x));$ 
   $x \leftarrow s(x);$ 
Sinon
   $p = \exp\left(-\frac{\Delta f}{T}\right)$ 
  Si  $r \leq p$  alors
     $f(x) \leftarrow f(s(x));$ 
     $x \leftarrow s(x);$ 
  Fin Si.
Fin Si.

```

Tableau (III.1) Pseudo code de la règle de Metropolis.



Le paramètre de contrôle  $T$  est la " température" du système, qui influe sur la probabilité d'accepter une solution plus mauvaise. A une température élevée, la probabilité d'acceptation d'un mouvement quelconque tend vers 1: presque tous les changements sont acceptés l'algorithme équivaut alors à une marche aléatoire dans l'espace de recherche. Cette température est diminuée lentement au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme pour simuler le processus de refroidissement des matériaux, et sa diminution est suffisamment lente pour que l'équilibre thermodynamique soit maintenu. L'algorithme du recuit simulé est donné dans le tableau (III.2)

L'efficacité du recuit simulé dépend fortement du choix de ses paramètres de contrôle, dont le réglage reste très empirique.

Les principaux paramètres de contrôle sont les suivants:

- $L$  a valeur initiale de la température,
- La fonction de décroissance de la température,
- $L$  e critère de changement de palier de température,
- durée de température ou nombre d'essais ou mouvements par palier de température,
- les critères d'arrêt.

<p>Générer une solution initiale aléatoire <math>x</math>  Évaluer <math>f(x)</math> (<math>f</math> étant la fonction objective)</p> $f_{\min} \leftarrow f(x)$ $x_{\min} \leftarrow x$ <p><math>T_{\text{init}}</math> : initialiser la température (une valeur assez élevée)</p> <p>REPETER (pour chaque palier de température <math>T</math>)</p> <p>REPETER <math>m</math> fois (<math>m</math> nombre d'essais par palier de température)</p> <p>    Générer un voisin <math>s(x)</math> voisinage <math>S(x)</math></p> <p>    Appliquer la règle de metropolis (tableau (III.1))</p> <p>    Si <math>f(x) &lt; f_{\min}</math> alors</p> $f_{\min} \leftarrow f(x);$ $x_{\min} \leftarrow x;$ <p>    Fin Si</p> <p>JUSQU'A équilibre thermodynamique atteint</p> <p>    Décroître la température <math>T(T=g(T)</math> généralement <math>T = \alpha T</math>     <math>\alpha \in [0.5, 0.99]</math> )</p> <p>JUSQU'A conditions d'arrêt satisfaites ou <math>T_{\text{fin}}</math> (température finale atteinte).</p>
---

Tableau (III.2) pseudo –code de l'algorithme du recuit simulé.

La performance du recuit simulé dépend largement du schéma de refroidissement utilisé. De nombreux schémas théoriques et pratiques ont été proposés. De manière générale, les schémas de refroidissement connus peuvent être classés en trois catégories :

- réduction par paliers : chaque température est maintenue égale pendant un certain nombre d'itérations, et décroît ainsi par paliers.
- réduction continue : la température est modifiée à chaque itération.
- réduction non monotone: la température décroît à chaque itération avec des augmentations occasionnelles. [16].

Une forte décroissance de température risque de piéger l'algorithme dans un minimum local.

Alors qu'une faible décroissance au début du processus entraîne une convergence très lente de l'algorithme. On peut citer deux transformations (types de refroidissement) qui ont été testées :

- Transformation linéaire ou géométrique, où  $T$  est calculée par

$$T_{k+1} = \alpha T_k = \alpha^k T_{init} \quad \text{où } 0 < \alpha < 1. \quad (\text{III.4})$$

- Transformation discrète donnée par

$$T_{k+1} = T_k - \Delta T \quad (\text{III.5})$$

où  $\Delta T$  est un pas fixé par l'utilisateur.

Généralement la transformation linéaire est la plus utilisée, et le nombre de paliers de température ou de décroissement varie entre 30 et 50 avec un nombre d'essais par palier de température 50 à 200 essais (ce qui donne un nombre maximal d'essais de 10000 essais mouvements, ou points visités).

Le recuit simulé est une méthode très délicate à utiliser, car ses paramètres sont difficiles à déterminer et les choix ont un effet considérable sur l'exécution ce qui fait qu'il peut être difficile de trouver la meilleure solution. Néanmoins elle est une méthode de principe très simple, facile à implémenter et très robuste.

La méthode du recuit simulé a été utilisée dans différentes applications, elle est réputée pour être la seule qui arrive à donner des résultats pour 10000 villes pour le fameux problème du voyageur de commerce (TSP travelling Salesman problème). Elle est utilisée aussi pour:

- L'optimisation combinatoire (l'ordonnancement);

- La CAO (conception de circuits, placements de composants) ;
- Le traitement d'image (restitution ou restauration d'images brouillée) ;

En bref cette méthode est très utilisée dans l'industrie.

### **III.3 L'algorithme RS hybride**

L'algorithme hybride est formé d'un algorithme de recuit simulé(méthode d'optimisation globale), suivi de l'algorithme de Levenberg-Marquard (méthode d'optimisation locale).

Ce type d'hybridation est nommé : hybridation en relais, la méthode locale est lancée après la méthode globale et prene comme point de départ ( $X_0$ ) le résultat fourni par cette dernière.

L'algorithme de Levenberg-Marquard est lancé, sous matlab, par la boite à outil : **lsqnonlin** .

#### **Conclusion**

Le recuit simulé est un algorithme assez robuste pour résoudre des problèmes d'optimisation complexes où les espaces de recherches sont importants. Il est capable de s'échapper des optima locaux, et de converger vers l'optimum global. La méthode de Levenberg-Marquard (méthode énumérative) converge vers l'optimum global si son point de départ  $X_0$ , obtenu par RS, est proche de l'optimum global. L'association de ces deux méthodes donne un algorithme hybride robuste qui permet de : bien explorer l'espace de recherche, s'échapper des optima locaux et trouver l'optimum global avec précision.

# Chapitre IV

## Implémentation et résultats

### IV.1) introduction:

Afin de mettre en évidence l'efficacité et la fiabilité de la méthode paramétrique d'analyse spectrale proposée, des tests ont été effectués sur différents signaux. Les résultats obtenus sont comparés avec les valeurs théoriques (série de fourrier) et avec ceux issus des méthodes classiques d'analyse spectrale .

On commencera par la présentation des inconvénients ou limites de la technique d'analyse spectrale par FFT.

Puis on réalisera quelques tests sur la méthode paramétrique proposée, dont la procédure a été détaillée au chapitre II, en appliquant l'algorithme du recuit simulé, comme méthodes d'optimisation globale.

On testera, ensuite, le pouvoir séparateur (la résolution) des différentes méthodes citées ci-dessus.

Enfin, nous aborderons l'estimation spectrale d'un signal bruité et cela avec les méthodes classiques puis avec l'algorithme hybride adopté.

### IV.2) Analyse spectrale d'un signal déterministe :

#### IV.2.1) Effet de la fenêtre d'acquisition sur le spectre obtenu par FFT:

Comme il a été souligné au chapitre I , le spectre obtenu par FFT (ou par TFD) n'est qu'une approximation du spectre réel du signal, car il est généralement entaché d'erreurs. Ces erreurs sont dues aux raisons suivantes:

- La résolution spectrale (et fréquence) est limitée. Elle est fonction de la fréquence d'échantillonnage  $F_e$  et de la longueur des données  $N$   $\Delta f = \frac{F_e}{N}$  (Hz) ,

alors le spectre obtenu par FFT ne contient que les fréquences multiples de  $\Delta f$  ;

- La fenêtre d'acquisition ou d'observation si le signal est périodique, doit contenir un nombre entier de périodes du signal.

Pour voir l'effet de la fenêtre d'acquisition sur le spectre obtenu par FFT, nous avons appliqué la FFT pour l'analyse d'un signal périodique en prenant deux fenêtres d'acquisition différentes, la première périodique (contenant un nombre entier de périodes du signal), la seconde n'est pas périodique, c.à.d, qu'elle ne contient pas un nombre entier de périodes du signal.

Le signal utilisé est une somme pondérée de sinusoïdes, et il est défini comme suit:

$$V(t) = \sum_{k=1}^{13} \frac{220}{k} \sin(2\pi 50 kt), \quad k=1,3,5,\dots,13 \quad (\text{IV.1})$$

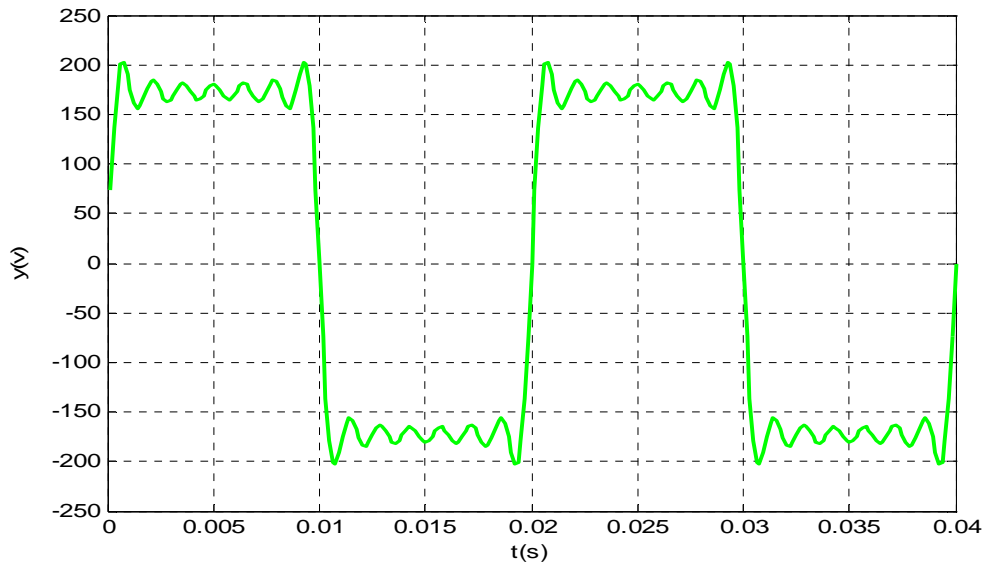
Ce signal contient donc, une fréquence fondamentale  $f_0 = 50$  Hz avec une amplitude

$A_0 = 220$  V et des fréquences harmoniques multiples de  $f_0$ , tel que  $f_k = k \cdot f_0$  (Hz)

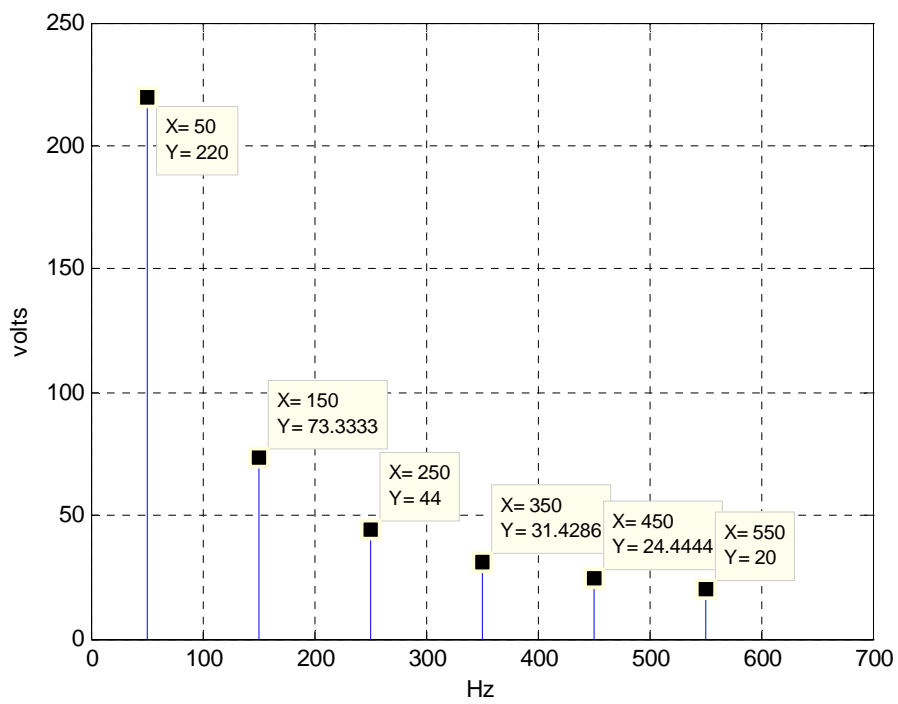
et d'amplitudes  $A_k = \frac{A_0}{k} = \frac{220}{k}$  V où  $k$  est l'ordre de l'harmonique ( $k = \frac{f_k}{f_0}$ )

Le signal (somme pondérée de sinusoïdes) et son spectre obtenu par FFT pour une fenêtre périodique (contenant deux périodes du signal) sont représentés dans la figure (IV.1)

Le même signal est analysé par FFT pour une fenêtre non périodique (contenant une période et demi du signal) et le spectre obtenu est représenté dans la figure (IV.2).



(a)

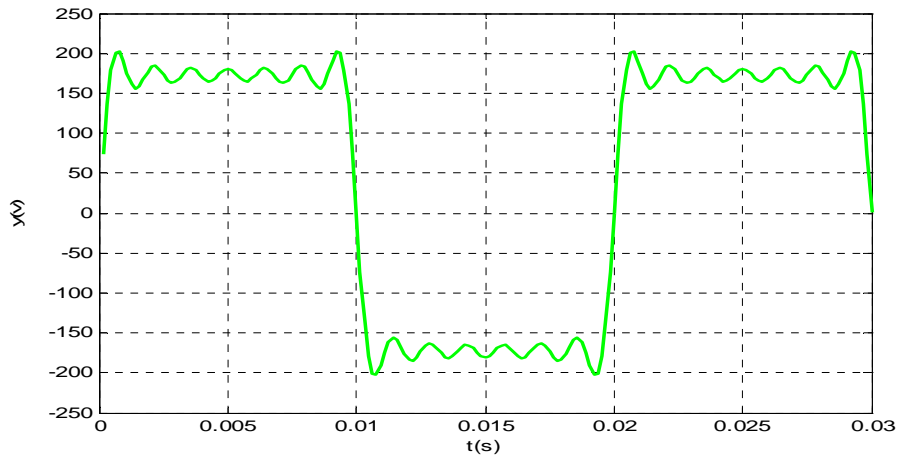


(b)

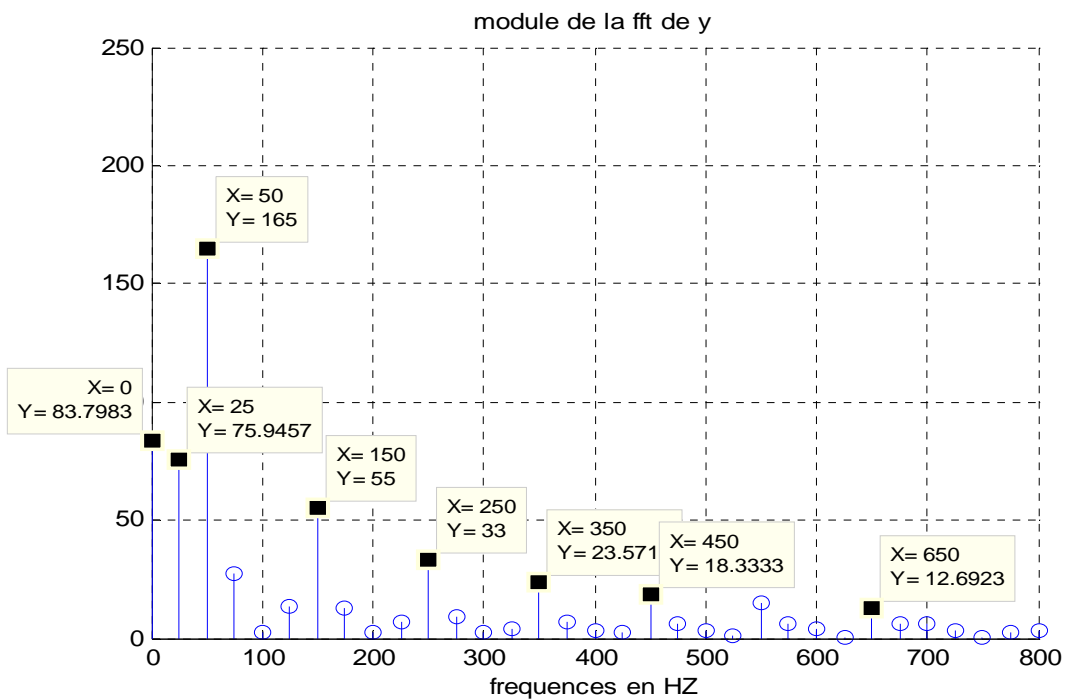
**Fig. IV.1.**

(a) Fenêtre signal.

(b) Spectre obtenu par FFT (fenêtre périodique).



(a)



(b)

**Fig. IV.2.**

(a) Fenêtre signal.

(b) Spectre obtenu par FFT (fenêtre non périodique).

La TFR, ou FFT, donne le spectre exact (fréquences et amplitudes des harmoniques) du signal si la fenêtre contient un nombre entier de périodes du signal figure( IV.1).

Par contre si la fenêtre n'est pas périodique le spectre obtenu est erroné et contient des composantes fréquentielles parasites figure (IV.2), et il ne peut pas être considéré comme étant le spectre le spectre du signal analysé.

Alors comme il a été déjà expliqué, le spectre calculé par FFT n'est qu'une approximation du spectre réel du signal. Pour obtenir de bons résultats, il faut avoir a priori des informations sur le spectre du signal à analyser, telles que sa fréquence fondamentale ou sa période pour faire un bon choix de la fenêtre d'acquisition. Même en prenant soin de choisir la bonne fenêtre d'observation, on ne peut pas avoir une bonne interprétation quant au spectre de phase calculé par FFT. Il faut aussi connaître la plus petite distance entre deux fréquences adjacentes pour fixer le bon choix pour la fréquence d'échantillonnage  $F_e$  et la longueur des données  $N_{\text{écht}}$  pour avoir une bonne résolution spectrale capable de séparer (détecter) toutes les composantes fréquentielles du signal.

### **IV.3 technique d'optimisation par recuit simulé.**

La procédure est décrite par le diagramme de la figure (IV.3) ci-dessous et les caractéristiques de l'algorithme du recuit simulé sont détaillées dans le tableau (IV.4)



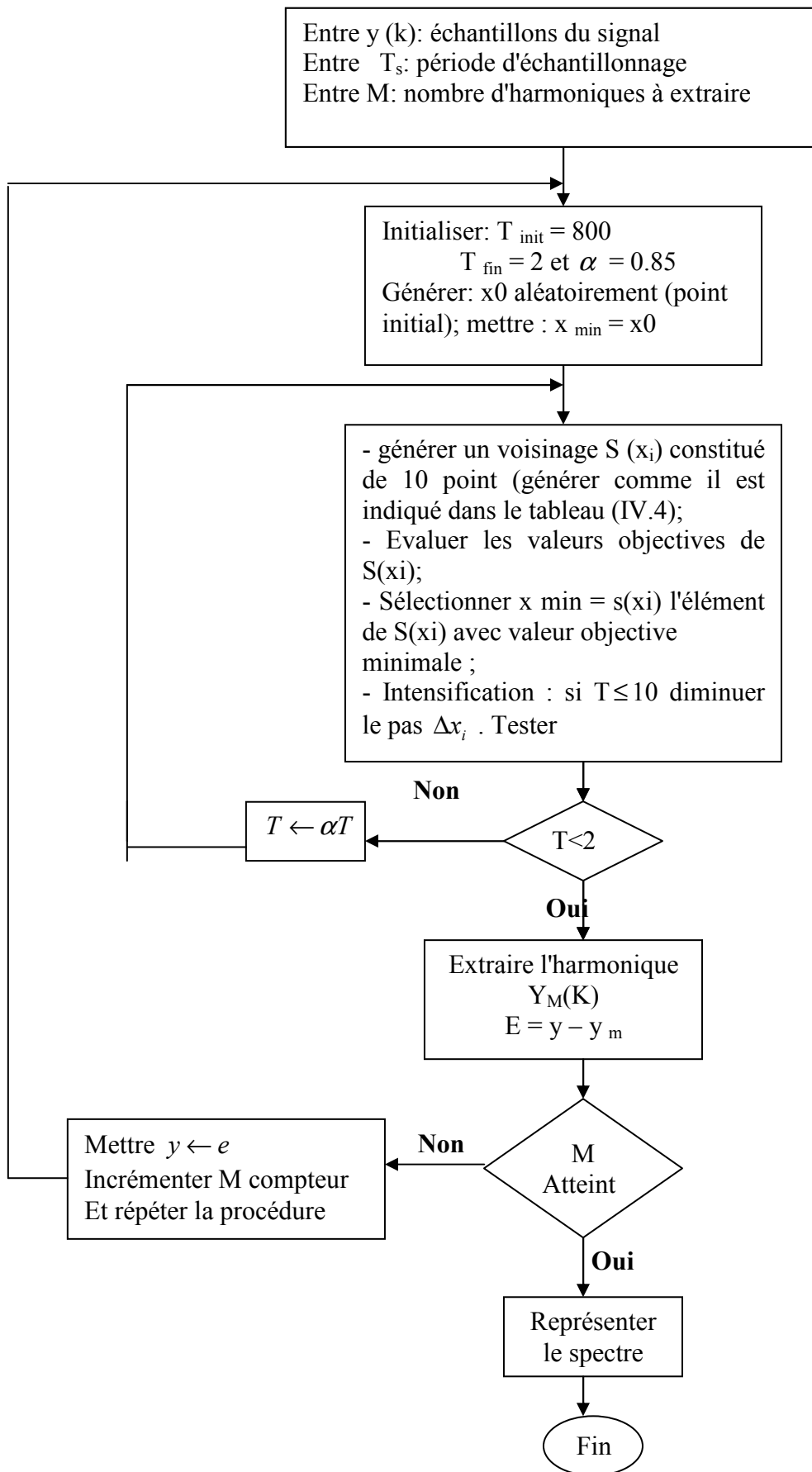


Figure (IV.3) : Organigramme de l'algorithme du Recuit Simulé.

- \* Le point initial  $x_0$  est généré aléatoirement;
- \* Température finale  $T_{init} = 800$ ;
- \* Température Finale  $T_{fin} = 2$ ;
- \* Diminution de la température par: transformation linéaire avec  $\alpha = 0.85$ ;
- \* Nombre de mouvements ou d'essais par palier de température est  $m = 250$ ;
- \* le voisinage  $S(x_i)$  de  $x_i$  est constitué de 10 point: 8 points obtenus en modifiant au moins un des paramètre de  $x_i$  d'un pas  $\Delta x_i$  généré aléatoirement ( $x_{i+1} = x_i \pm \Delta x_i$ ) + 1 point généré aléatoirement appartenant à l'espace de recherche + 1 point obtenu par élitisme. c.à.d que le meilleur point  $x_{best}$  obtenu est intro suit dans  $S(x_i)$ .
- \* Intensification: si la température  $T \leq 10$  alors le pas de variation  $\Delta x_i$  est diminué d'un facteur de 0.01:

**Tableau (IV.4)** les caractéristiques de l'algorithme du recuit simulé

Le voisinage  $S(x_i)$  de  $X_i$  est constitué, comme il est indiqué dans le tableau (IV.4) , de 10 points, dont, 8 sont obtenus à partir d u point  $X_i$  en modifiant au moins, un des paramètres d' un pas aléatoire  $\Delta X_i$  et en prenant en considération le domaine de variation de chaque paramètre.

Un 9<sup>ème</sup> point est généré aléatoirement, comme pour le point initial  $X_0$ , les paramètres de ce point sont des valeurs aléatoires qui appartiennent au domaine de variation correspondant de chaque paramètre. Ce point est introduit pour renforcer la recherche globale de l'algorithme.

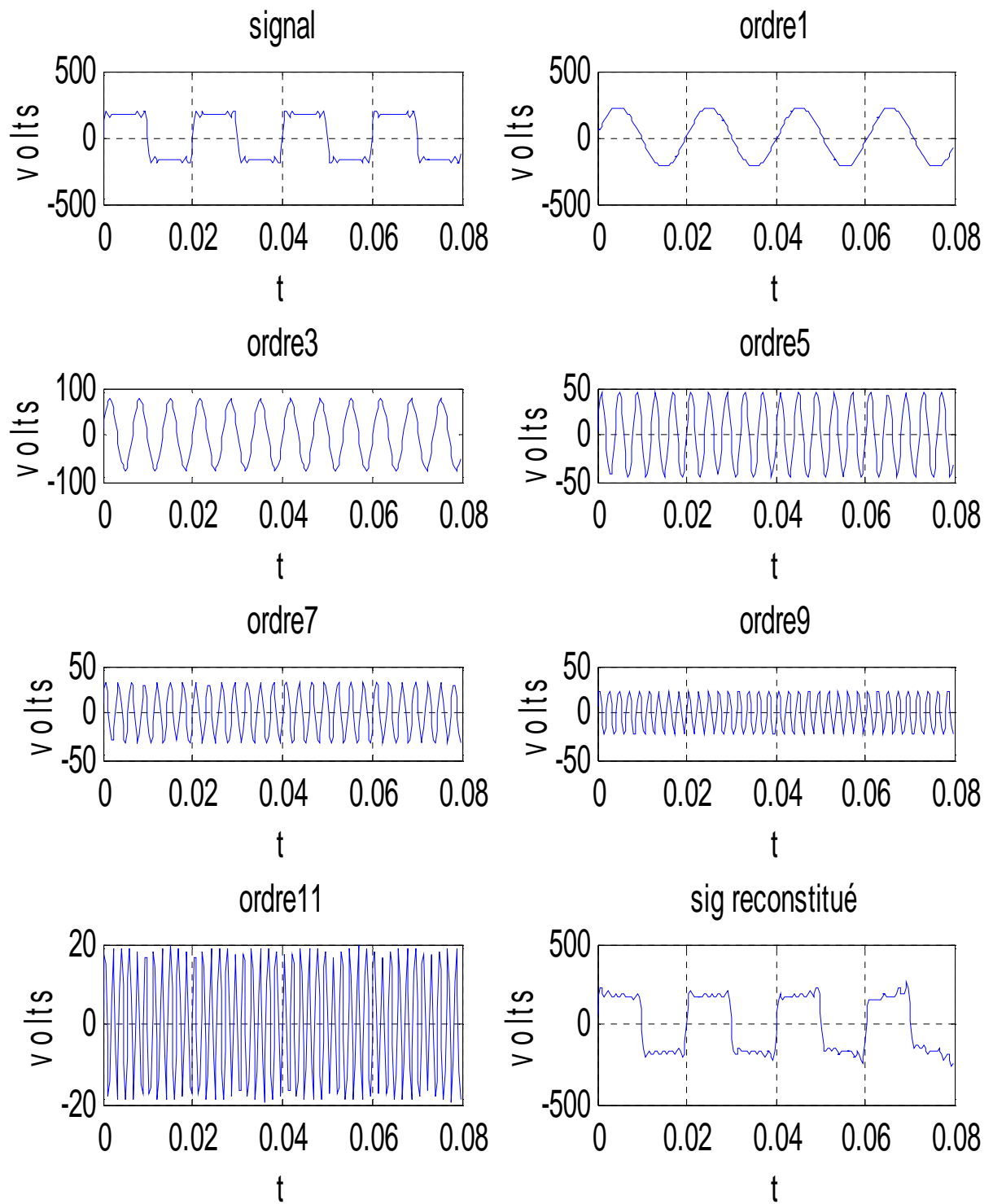
Le 10<sup>ème</sup> point est obtenu par élitisme, c.à.d, que le meilleur point  $X_{Best}$  (avec la plus petite valeur de l'erreur quadratique  $J$ ) obtenu jusqu à l' tape courante est introduit comme 10<sup>ème</sup> point d ans le voisinage  $S(X_i)$  du point  $X_i$

Pour améliorer la recherche locale, une fois le minimum global approché une intensification ou concentration de la recherche locale est faite à partir du palier  $T=10$ , en diminuant le pas  $\Delta X_i$  d' un facteur de 0,01.

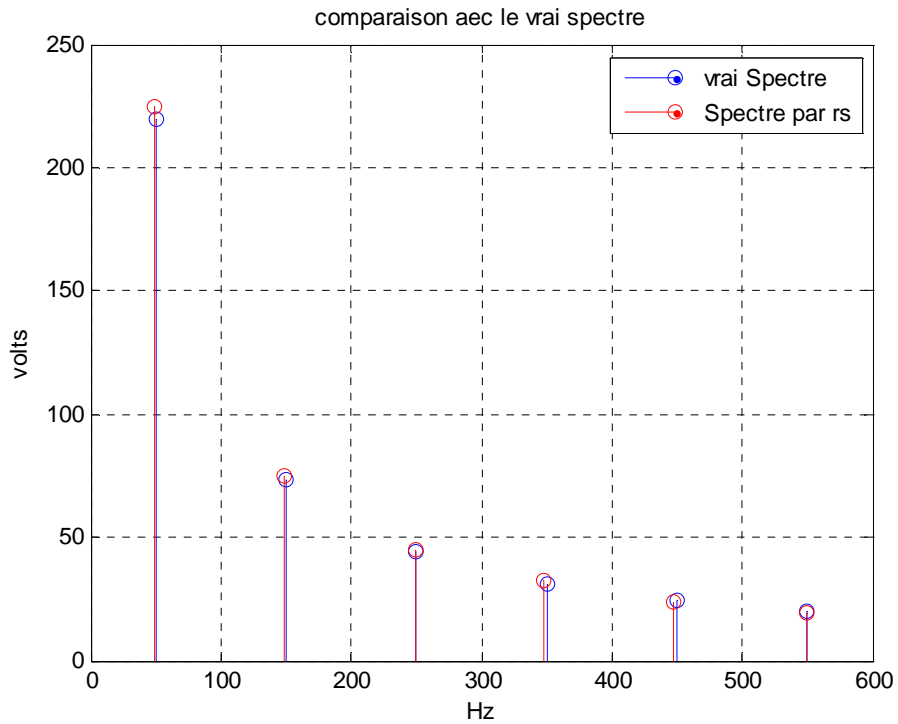
Pour une température initiale  $T_{\text{init}}= 800$  et une température finale  $T_{\text{Fin}}= 2$ , et que la température est diminuée par transformation linéaire avec  $\alpha = 0.85$ , on a alors un nombre de paliers égale à 37. De plus pour un nombre d'essais par palier de température égale à 250 essais, on aura un nombre total de mouvements ou points visités, de 9250 mouvements.

Cependant le nombre total de points calculés est égal à 92500. Ce grand nombre de points calculés justifie la robustesse d'une telle méthode pour trouver le minimum global.

Pour tester la procédure de la figure (IV.3) qui utilise le recuit simulé comme méthode d'optimisation, nous l'avons appliquée sur le signal précédent. La figure (IV.4) détaille les étapes d'extraction des harmoniques du signal. La figure (IV.5) compare le spectre obtenu par le recuit simulé avec le vrai spectre du signal et le tableau (IV.5) résume les valeurs des caractéristiques des 5 premiers harmoniques obtenus par la méthode paramétrique.



**Figure (VI.4)** Extraction des harmoniques par la méthode paramétrique (optimisation par recuit simulé).



**Figure (IV.5)** Comparaison des spectres : calculé et celui obtenu avec le recuit simulé.

Calcul		Par FFt		Méthode paramétrique utilisant le Recuit Simulé		
Freq	Amp	Freq	Amp	Freq (Hz)	Amp(V)	Phase (Degré)
50	220	50	220	49.17	224.89	5.73
150	73.33	150	73.33	148.81	75.11	9.74
250	44	250	44	249.21	44.71	4.01
350	31.42	350	31.41	347.55	32.21	16.05
450	24.44	450	24.44	447.88	23.93	13.75
550	20	550	20	549.23	19.24	4.01

**Tableau (IV.5)** Résultats obtenus par FFT et par RS

## IV .4 Résolution (fréquentielle et dynamique) :

### IV.4.1 Résolution fréquentielle

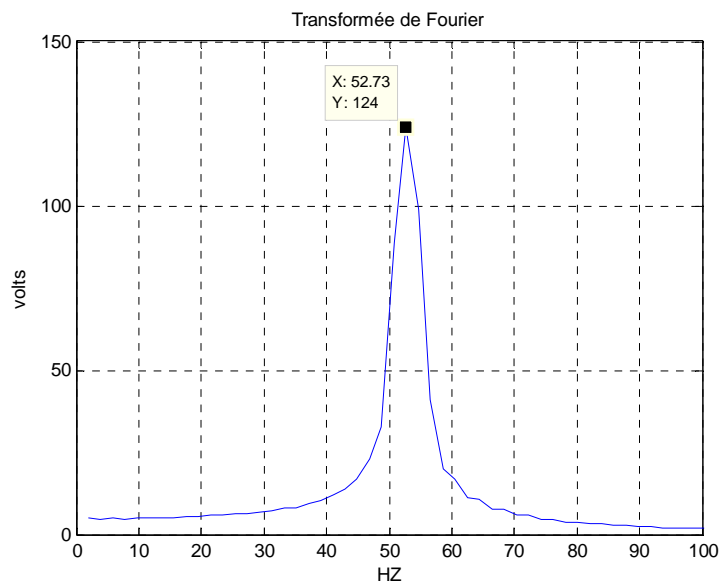
Pour tester le pouvoir séparateur des différentes méthodes, nous les avons testées sur un signal constitué de deux sinusoïdes de fréquences respectives 50Hz et 52Hz et de mêmes amplitudes (100V), défini comme suit

$$x(t) = 100[\sin(2\pi 50t) + \sin(2\pi 52t)].$$

#### IV.4.1.1 Méthode de la FFT

**Pour :**  $N=256$  ;  $N_{FFT} = 256$ .

Le spectre issu par cette méthode est représenté par la figure (IV.6).



**Fig. IV.6** Spectre par FFT.

**Remarque :** On ne distingue pas le pic en  $f_2$  du pic en  $f_1$ . Ceci s'explique par le fait que les fréquences  $f_1$  et  $f_2$  sont sensiblement égales :  $f_2 - f_1 = 2$  Hz, ce qui est inférieur à la résolution

spectrale qui est dans ce cas :  $\Delta f = \frac{f_e}{N_{pts}} = \frac{1000}{256} = 3.90 \text{ Hz}$ .

#### VI .4.1.1 Technique du zero-padding

**Pour :**  $N = 256$  ;  $N_{FFT} = 512 \text{ pts..}$

On complète les échantillons du signal par des zéros.  
On obtient le spectre représenté par la figure (IV.7).

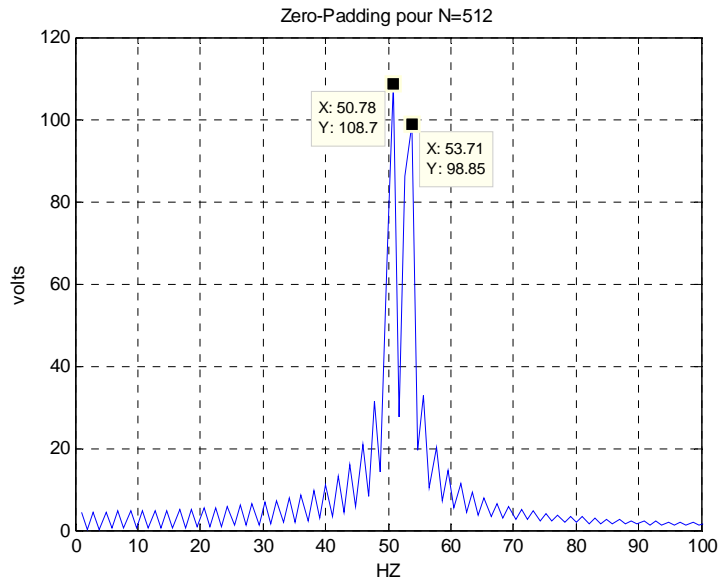


Fig. IV.7 Spectre par zero-padding.

**Remarque :** On distingue, facilement, les pics en  $f_1$  et en  $f_2$ .  
L'utilisation du zero-padding améliore la résolution spectrale, qui devient :

$$\Delta f = \frac{f_e}{N_{pts}} = \frac{1000}{512} = 1.95 \text{ Hz.}$$

Pour :  $N = 256$  ;  $N_{FFT} = 1024 \text{ pts.}$

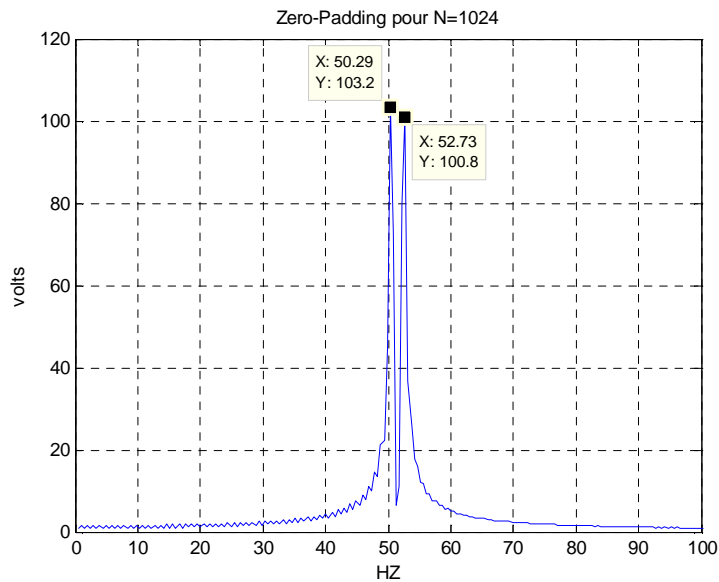


Fig. IV.8 Spectre par zero-padding.

On remarque tout d'abord que lorsque  $N$  augmente, le spectre devient de plus en plus lisse. De plus, on constate que plus  $N$  est grand, plus les pics en  $f_1$  et  $f_2$  sont visibles. Ainsi, on peut distinguer les pics en  $f_1$  et  $f_2$ .

### Conclusion :

La méthode du zero-padding est performante car elle permet d'augmenter la résolution spectrale.

#### IV.4.2 Résolution dynamique

Le signal, dans ce cas, est constitué de deux sinusoïdes de fréquences respectives 50Hz et 52Hz et d'amplitudes respectives : 100V et 2V, défini comme suit :

$$x(t) = 100.\sin(2\pi 50t) + 2.\sin(2\pi 52t).$$

##### IV .4.2.1 Méthode de la FFT

Pour :  $N=256$  ;  $N_{FFT} = 256$ .

Le spectre issu par cette méthode est représenté par la figure (IV.9).

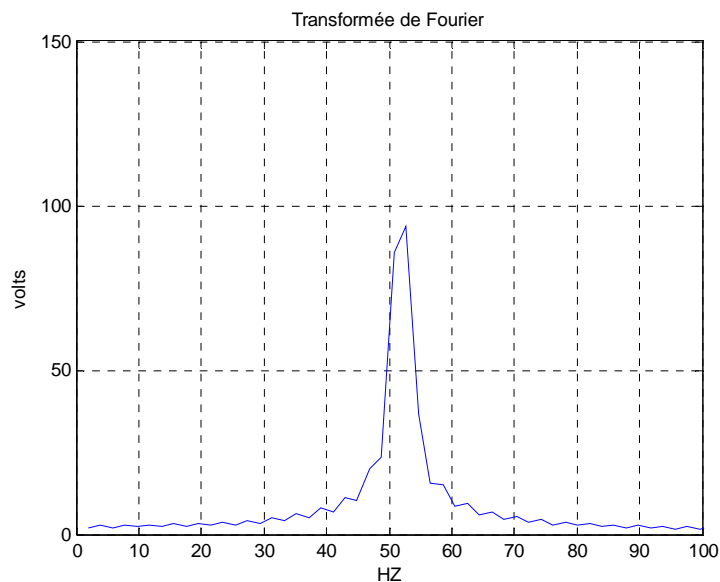


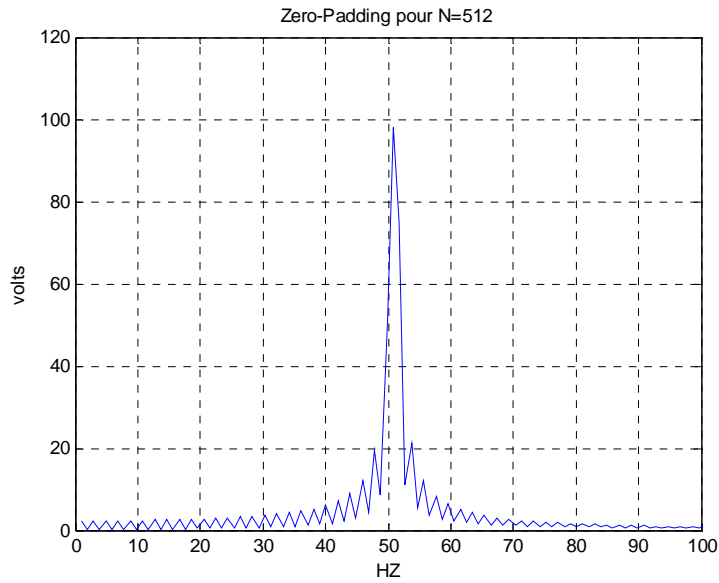
Fig. IV.9 Spectre par FFT.

La méthode de la FFT, ne permet pas de distinguer les deux pics.

##### IV .4.2.2 Méthode zero-padding

Pour :  $N = 256$  ;  $N_{FFT} = 512 pts..$

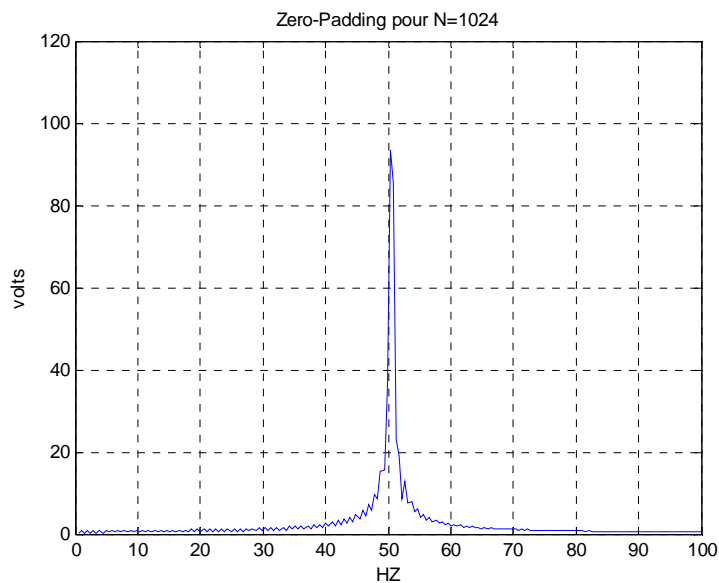




**Fig. IV.10** Spectre par zero-padding.

Le spectre est plus étroit mais on ne distingue pas, toujours, les deux pics.

**Pour :  $N = 256$  ;  $N_{FFT} = 1024$  pts.**



**Fig. IV.11** Spectre par zero-padding

Le spectre est devenu plus lisse et plus étroit mais il ne permet pas de visualiser la composante spectrale de faible amplitude.

**Conclusion :** La méthode des zero-padding ne permet pas de visualiser la composante spectrale de faible amplitude, elle n'améliore pas la résolution dynamique.

#### IV .4.3 Combinaison de la technique du fenêtrage avec le zero-padding .

Cette méthode permet d'optimiser le calcul du spectre. Elle permet aussi de réaliser un bon Compromis entre la résolution fréquentielle et la résolution dynamique.

##### a) Fenêtre rectangulaire :

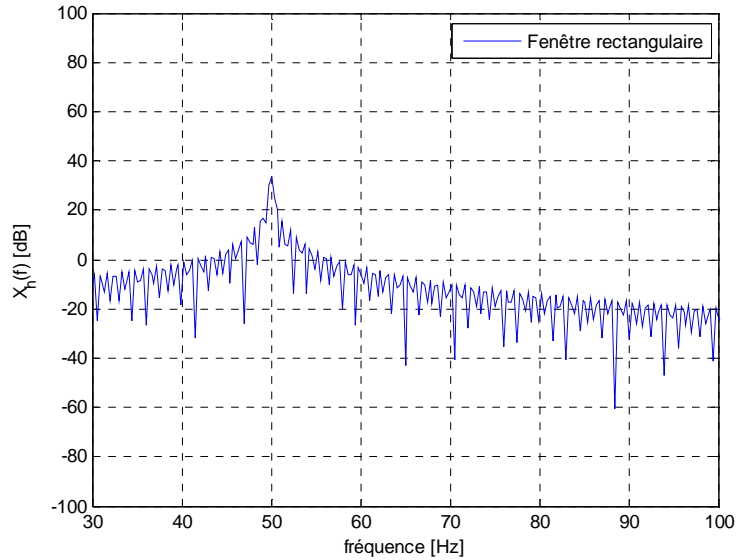


Fig. IV.13 Spectre fourni par la fenêtre rectangulaire.

Le spectre obtenu fait apparaître une seule composante spectrale aux environs de 50 Hz et il n'y a pas de deuxième composante spectrale (celle de faible amplitude). Celle-ci est masquée par l'étalement spectral dû à la fenêtre rectangulaire.

##### b) Fenêtre de Hanning :

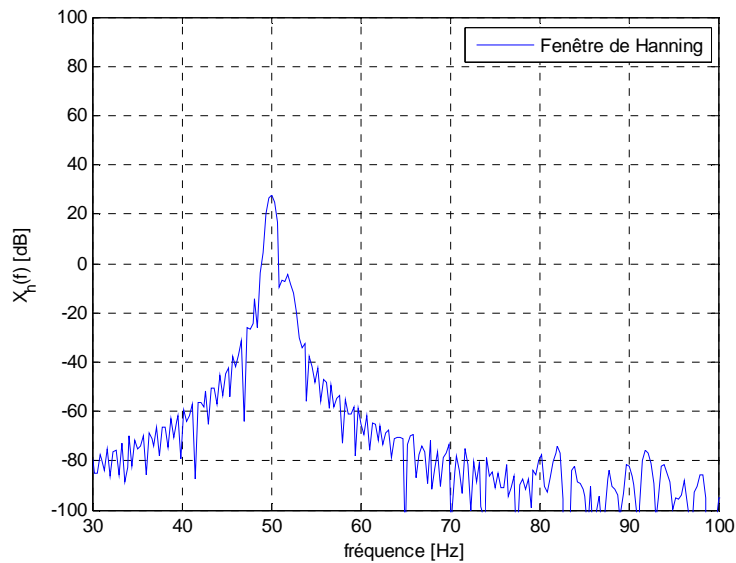


Fig. IV.13 Spectre fourni par la fenêtre de Hanning

La fenêtre de Hanning fournit un spectre tout à fait satisfaisant sans diminuer fortement l'étalement spectral ; c'est pourquoi le spectre est un peu large à la base.

**c) Fenêtre de Hamming :**

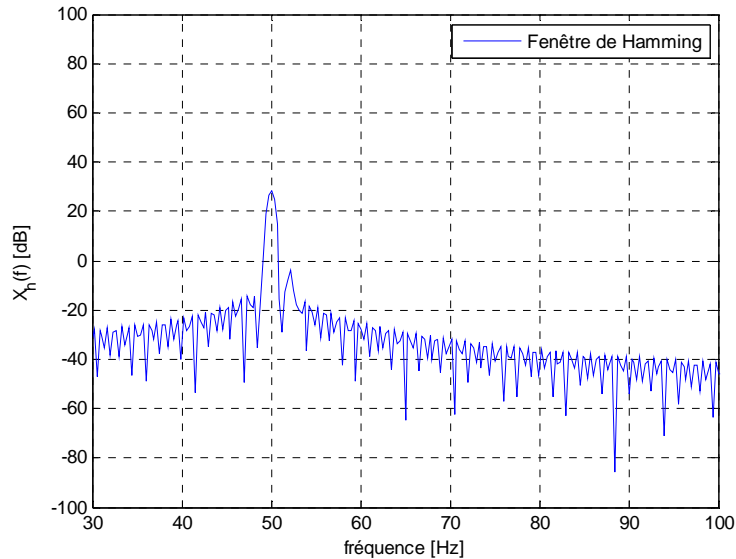


Fig. IV.14 Spectre fourni par la fenêtre de Hamming.

La fenêtre de Hamming fournit un spectre étroit mais, à cause de l'effet de bord résiduel, l'étalement spectral n'est pas suffisamment réduit et il masque composante spectrale de faible amplitude (manque de résolution dynamique).

**d) Fenêtre de Blackman :**

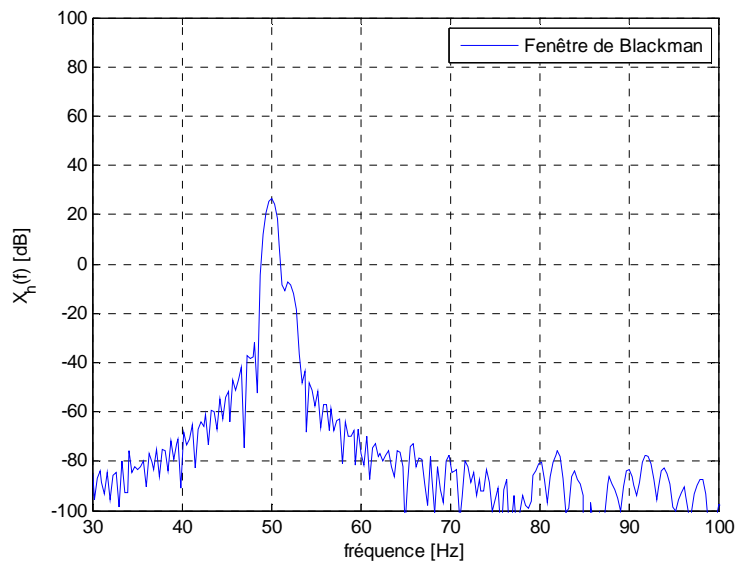


Fig. IV.15 Spectre fourni par la fenêtre de Blackman.

La fenêtre de Blackman donne le meilleur résultat grâce à la double cosinusoïde qui masque bien les effets de bord et permet ainsi de bien distinguer des raies spectrales proches et de faibles amplitudes.

**Remarque :** On constate une fois de plus que le fait de cumuler le fenêtrage au zero-padding permet d'augmenter la résolution, à condition de bien choisir la fenêtre.

#### IV.4.4.1 Utilisation d'un algorithme de recuit simulé simple

Pour tester le pouvoir séparateur de la technique proposée, nous l'avons testée sur le signal

Cité ci-dessus.

$$x(t) = 100 \sin(2\pi 50t) + 2 \sin(2\pi 52t).$$

Les résultats obtenus sont illustrés dans le tableau (IV.6) suivant :

Résultats RS		spectre théorique	
amp	freq	amp	freq
89.31	50.06	100	50
10.71	49.63	2	52

Tableau IV.6 Comparaison des valeurs

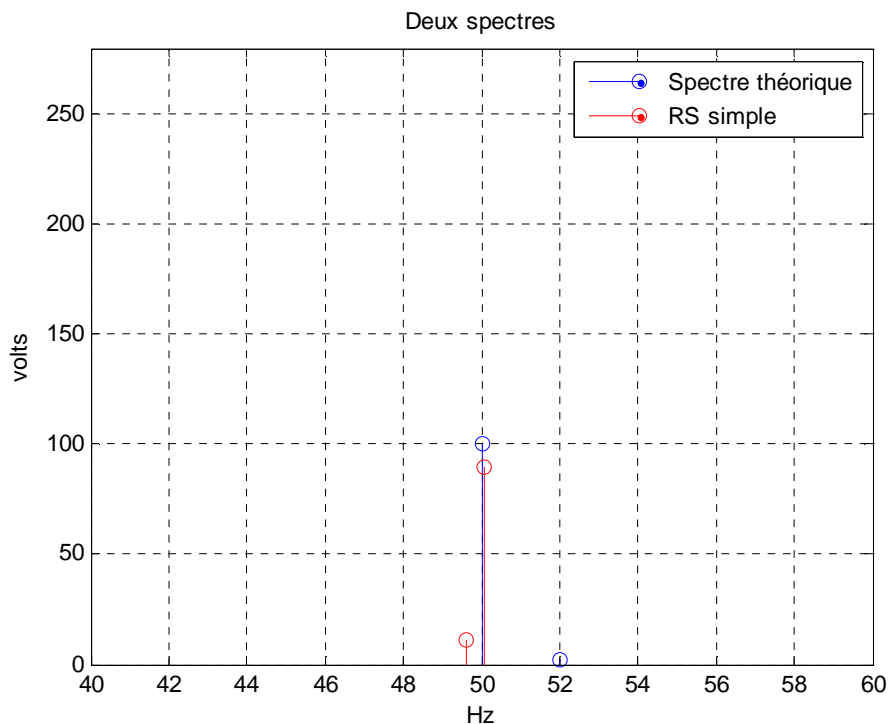


Figure IV.16 Représentation des deux spectres (théorique et RS simple).

L'algorithme de recuit simulé simple ne permet pas de distinguer les deux fréquences adjacentes (**manque de résolution fréquentielle**) et la faible amplitude ( $A_2=2V$ ) n'est pas détectée avec précision (**manque de résolution dynamique**).

#### IV.4.4.2 Utilisation de l'algorithme de recuit simulé hybride :

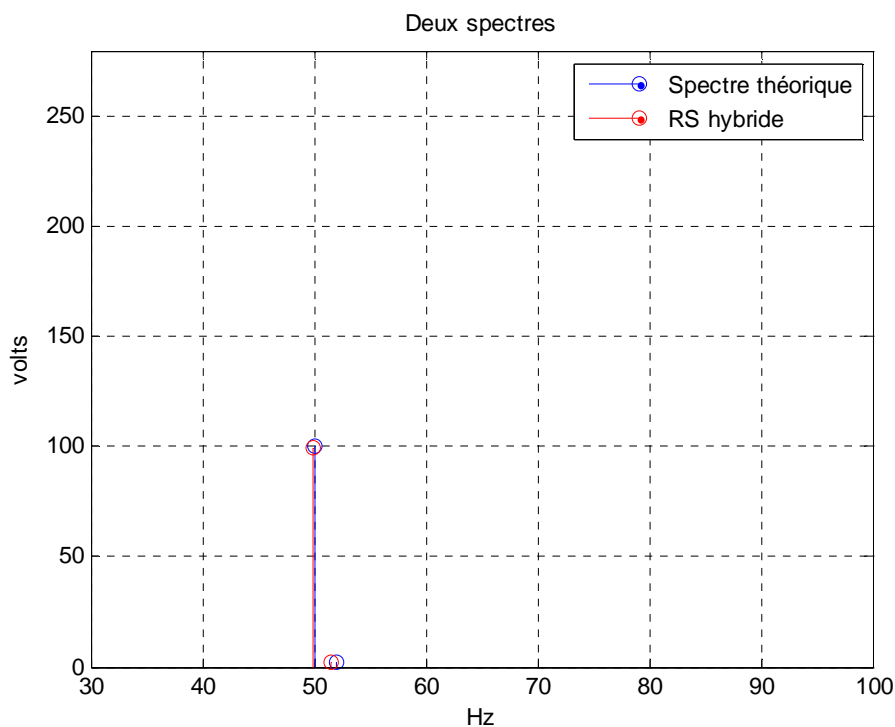
L'algorithme hybride est constitué par l'association d'un algorithme de recuit simulé simple et d'un algorithme de Levenberg-Marquard.

L'algorithme de Levenberg-Marquard, succède l'algorithme du recuit simulé simple et utilise les résultats obtenus, par ce dernier, comme point de départ ( $X_0$ ).

Les résultats obtenus sont illustrés dans le tableau (VI .7).

Résultats RS hybride		Spectre théorique	
amp	freq	amp	freq
99.62	49.99	100	50
2.18	51.49	2	52

**Tableau IV.7** Comparaison des deux spectres.



**Figure IV.17** Représentation des deux spectres (théorique et RS hybride).

D'après les résultats obtenus, il est clair que l'algorithme hybride possède une excellente résolution (fréquentielle et dynamique).

#### IV.5 Estimation spectrale d'un signal bruité

Dans cette section, nous allons appliquer les estimateurs spectraux à l'étude d'une sinusoïde d'amplitude A et de fréquence  $f_0 = F_e/10$ .

Sa densité spectrale de puissance devrait faire apparaître deux impulsions de Dirac d'amplitude  $A^2/4$ .

Le périodogramme, le périodogramme modifié, et le périodogramme moyenné calculent la densité spectrale de puissance comme le carré d'une TFD divisé par N, ils font apparaître, en lieu et place des impulsions de Dirac attendues, le carré des spectres des fonctions fenêtres divisés par N, et multiplié par  $A^2/4$ . Dans le cas du périodogramme simple, l'amplitude du lobe principal vaut  $A^2/4$  multiplié par un coefficient  $N^2/N = N$ .

Pour le périodogramme modifié, le coefficient multiplicatif vaut :

$$\frac{1}{NP} \left( \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \right)^2 = \frac{\left( \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \right)^2}{\left( \sum_{n=0}^{N-1} w(n)^2 \right)} \dots\dots\dots (IV.4)$$

Pour le périodogramme moyenné, le coefficient multiplicatif :  $\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{N-1} w(n)^2$ .

M : nombre de point dans chaque segment.

L'estimateur adouci procède par le fenêtrage direct de la fonction d'autocorrélation (et non du signal). Les impulsions de Dirac attendues apparaissent comme le spectre de la fonction fenêtre multiplié par  $A^2/4$ . L'amplitude du lobe principal vaut donc  $A^2/4$  multiplié par un

coefficient :  $\sum_{n=0}^{N-1} w(n)$ .

Notre signal est décrit par l'équation :

$$x = 10 * \sin(2 * \pi * 1 / 10 * (0 : 511)) \dots\dots\dots (IV.5)$$

512 échantillons d'une sinusoïde à  $F_e/10$ , d'amplitude 10.

### IV.5.1 Estimation spectrale du signal en absence du bruit

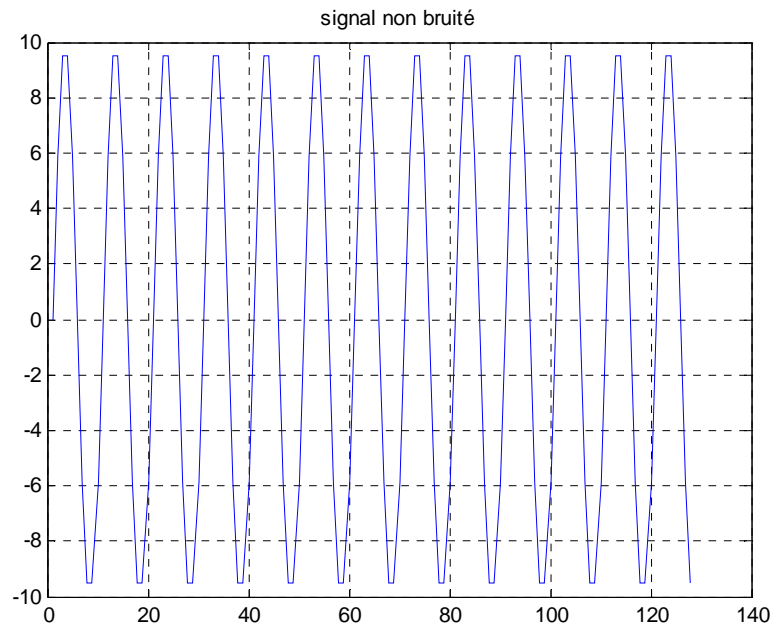


Figure IV.18 signal non bruité.

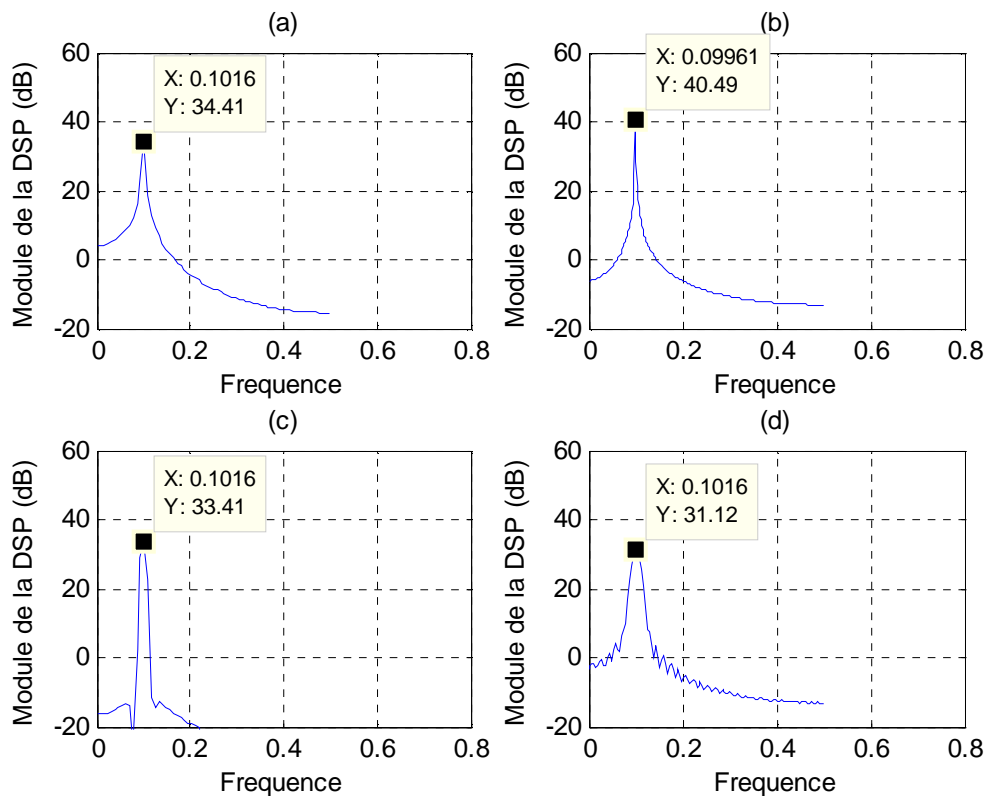


Fig.IV.19 Estimateurs de la densité spectrale de puissance du signa non bruité :

(a) : Périodogramme (N=128).

(b) : Périodogramme (N=256).

(c) : Périodogramme moyenné(N = 512, L =4 , fenêtre de Hamming).

(d) : Périodogramme adouci (N=512 ,M = 64, fenêtre de Blackman)

**Analyse :**

On retrouve bien les valeurs maximales attendues :

- Périodogramme simple

$$(128) : 10\log_{10}(NA^2/4) = 10\log_{10}(25*128) = 35dB \dots\dots\dots (IV.6)$$

- Périodogramme simple (512) :  $10\log_{10}(25*512) = 41dB \dots\dots\dots (IV.7)$

- Périodogramme moyenné (128 ; hamming) :

$$10\log_{10}\left(A^2/4 * \left(\sum_{n=0}^{N-1} w(n)\right)^2 / \left(\sum_{n=0}^{N-1} w(n)^2\right)\right) = 10 * \log_{10}(25 * 93.4) = 33.6dB \dots\dots\dots (IV.8)$$

- Estimateur adouci :

- $10 * \log_{10}\left(A^2/4 * \sum_{n=0}^M w(n)\right) = 31.3dB \dots\dots\dots (IV.9)$

La valeur théorique de la variance = 50 (la densité spectrale de puissance théorique est constituée de deux raies de valeurs 25). Elle peut être calculée sur la psd estimée :

Variance = sum (psd(x, 128, 1, hamming (128)))/128\*2    %périodogramme moyenné

Variance = 49.9994

**IV.5.2 Estimation spectrale du signal bruité**

Notre signal est, maintenant, parasité par un bruit à distribution uniforme.

Ce bruit est généré par le code, Matlab, suivant :

$$b(t) = B * \text{rand}((1,N)-0.5) \dots\dots\dots (IV.10)$$

En faisant varier le facteur B, on pourra varier le SNR (rapport signal sur bruit).

Après addition du bruit l'expression analytique du signal deviendra donc :

$$x = 10 * \sin(2 * \pi * 1/10 * (0 : 511)) + b \dots\dots\dots (IV.11)$$



- SNR = -10dB.

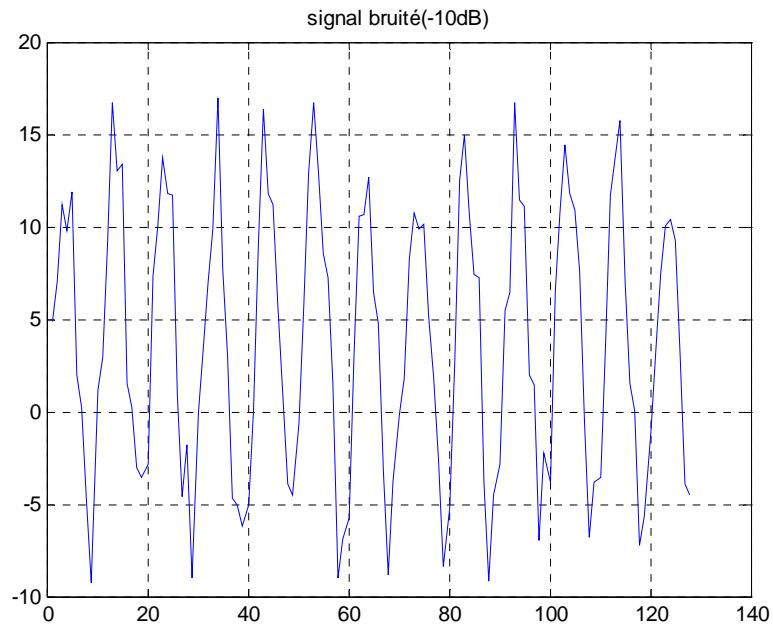


Figure IV.18 signal bruité (SNR = - 10dB).

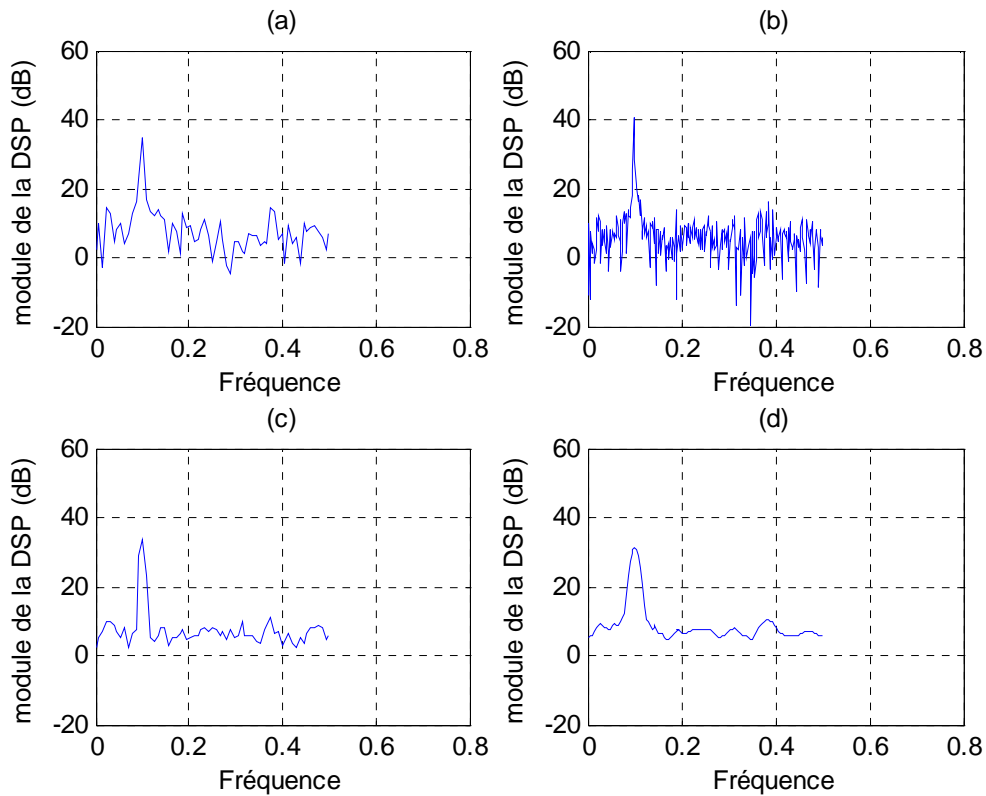


Fig.IV.21 Estimateurs de la densité spectrale de puissance du signa bruité (SNR= -10dB) :

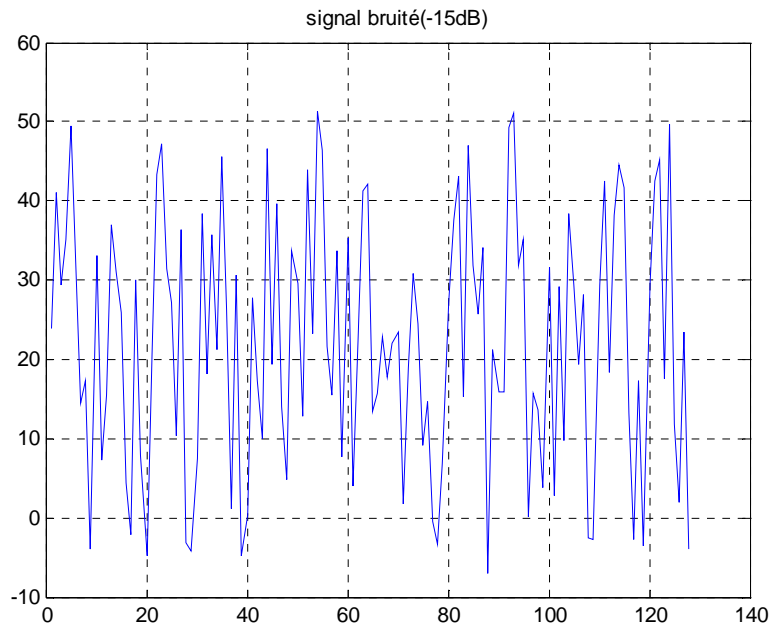
(a) : Périodogramme (N=128).

(b) : Périodogramme (N=256).

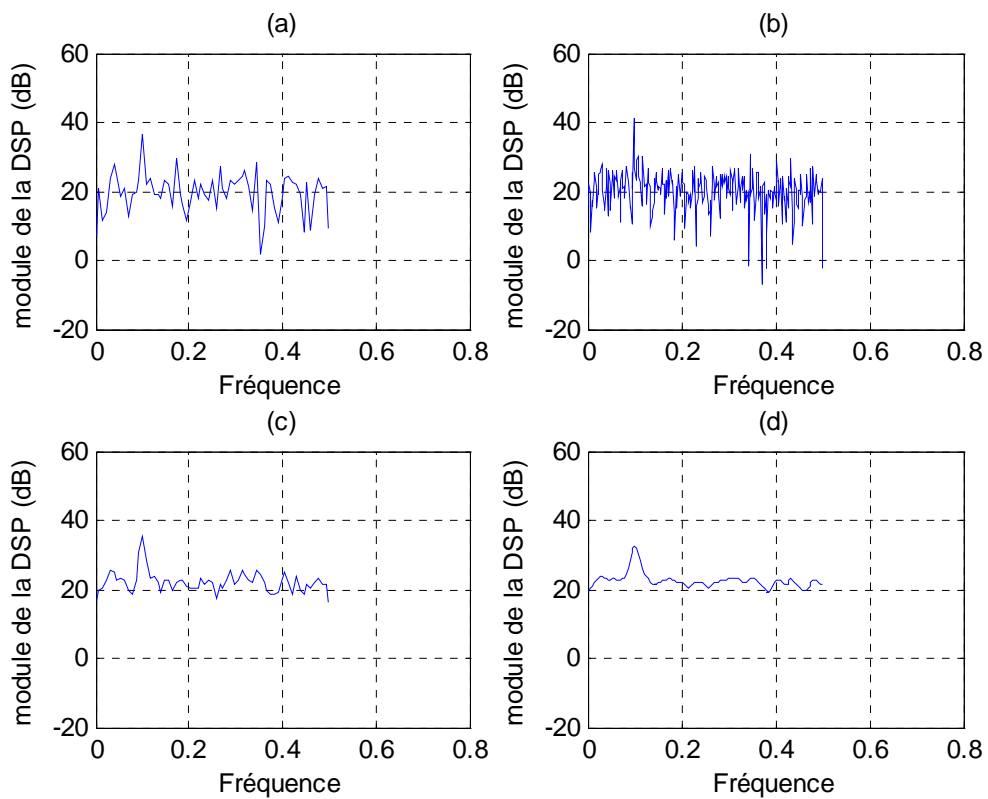
(c) : Périodogramme moyenné (N = 512, L =4 , fenêtre de Hamming).

(d) : Périodogramme adouci (N=512, M = 64, fenêtre de Blackman).

- SNR = -15dB.



**Figure IV.22** signal bruité (SNR = - 15dB).



**Fig.IV.23** Estimateurs de la densité spectrale de puissance du signa bruité (SNR= -15dB) :

(a) : Périodogramme (N=128).

(b) : Périodogramme (N=256).

(c) : Périodogramme moyenné (N = 512, L =4 , fenêtre de Hamming).

(d) : Périodogramme adouci (N=512, M = 64, fenêtre de Blackman).

- SNR = -20dB.

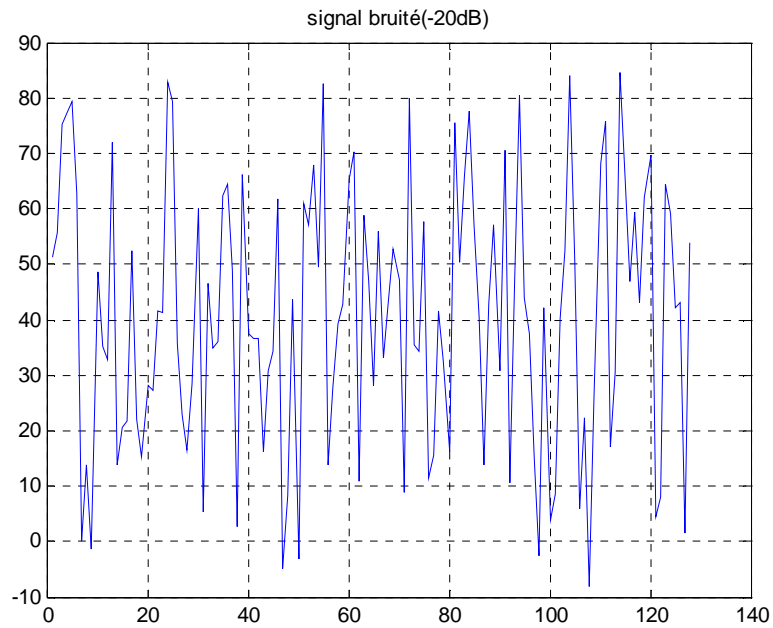


Figure IV.24 signal bruité (SNR = - 20dB).

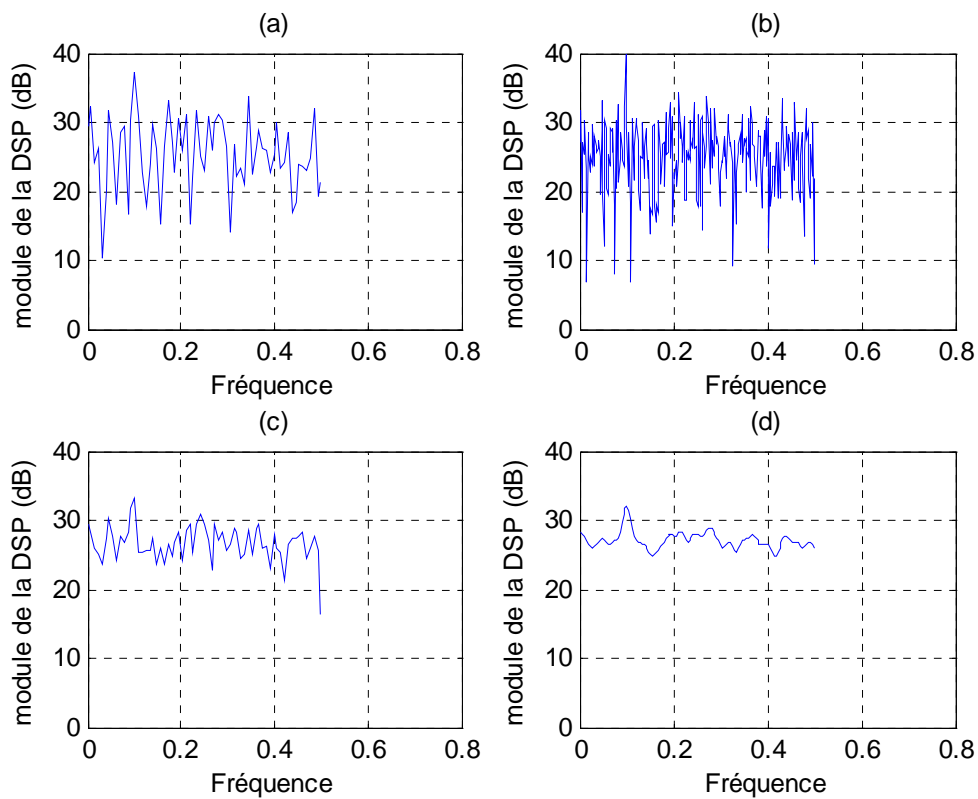


Fig.IV.25 Estimateurs de la densité spectrale de puissance du signa bruité (SNR= - 20dB) :

(a) : Périodogramme (N=128).

(b) : Périodogramme (N=256).

(c) : Périodogramme moyenné (N = 512, L =4, fenêtre de Hamming).

(d) : Périodogramme adouci (N=512, M = 64, fenêtre de Blackman).

## Analyse

-L'estimateur simple présente des fluctuations importantes de la densité spectrale, elles sont dues à la durée finie d'analyse. En d'autres termes, cela revient à multiplier  $x(n)$  par une fenêtre rectangulaire.  $w(n)=1, n \leq N-1$ , qui se traduit, dans le domaine fréquentiel, par la convolution de la transformée de Fourier de  $x(n)$  avec celle d'une fenêtre rectangulaire. Cette convolution va engendrer des distorsions dans le spectre théorique.

Une augmentation du nombre d'échantillons à 256 entraînera une augmentation des lobes secondaires qui se traduit par des fluctuations plus rapides du périodogramme. En plus la variance reste constante. Ainsi on peut dire que l'estimateur simple est indépendant du nombre d'échantillons, dans ce cas le périodogramme n'est pas consistant.

-L'estimateur moyenné permet, grâce au nombre  $L$  de segments de réduire la variance. Mais il se comporte de la même manière que l'estimateur simple en ce qui concerne le phénomène de distorsions. Il donne une approximation plus globale de l'allure du signal que l'estimateur, on constate que l'estimateur moyenné est efficace.

-L'estimateur adouci permet aussi de réduire sensiblement la variance par la durée et la forme de la fenêtre utilisée.

### VI.5.1 la méthode paramétrique :

#### VI.5.1.1 utilisation de l'algorithme hybride

Dans cette section, la composante spectrale va être extraite, du signal bruité, en utilisant la méthode paramétrique et l'optimisation, du calcul des paramètres, est faite par l'algorithme hybride (recuit simulé + Levenberg Marquard).

On fait varier les valeurs du SNR (rapport signal sur bruit).

Paramètres de l'algorithme RS :

$T_{init} = 800$ ,  $T_{fin} = 2$ ,  $\alpha = 0.85$ , Nbre essais /palier = 200.

- SNR = -10dB

Spectre obtenu par RS hybride		Spectre théorique	
Amp	Fréq	Amp	Fréq
10.04	0.099	10	0.1

Tableau IV.7 Spectre par RS hybride (SNR = -10dB)

- SNR = -15dB

Spectre obtenu par RS hybride		Spectre théorique	
Amp	Fréq	Amp	Fréq
9.92	0.099	10	0.1

Tableau IV.8 Spectre par RS hybride (SNR = -15dB)

- SNR = -20dB

Spectre obtenu par RS hybride		Spectre théorique	
Amp	Fréq	Amp	Fréq
10.72	0.093	10	0.1

Tableau IV.8 Spectre par RS hybride (SNR = - 20dB)

D'après les résultats, présenté ci-dessus, on peut conclure que l'algorithme hybride est efficace. Il peut extraire la composante spectrale même en présence d'un fort bruit.

Cela prouve la robustesse et la précision de cet algorithme.

## Conclusion

- La technique du zéro-padding augmente la résolution fréquentielle, le fenêtrage augmente la résolution dynamique. La combinaison des deux techniques augmente la résolution spectrale (fréquentielle et dynamique).
- La méthode paramétrique, dont les paramètres sont optimisés par RS hybride, possède une excellente résolution en fréquence et en amplitude, indépendante de la fréquence d'échantillonnage et de la taille du signal.
- Pour obtenir des résultats satisfaisants, avec les estimateurs spectraux, il faut choisir les paramètres d'analyse avec soin, ce qui n'est pas toujours facile à faire.
- La méthode paramétrique, optimisée par RS hybride, est performante car elle permet d'extraire, avec précision, la composante spectrale du signal fortement bruité.

## **Conclusion Générale**

Les travaux réalisés dans le cadre de ce mémoire de magister ont permis d'aboutir aux conclusions suivantes :

- L'analyse spectrale par FFT reste un outil très important par sa rapidité. Pour avoir de bons résultats il faut bien choisir les paramètres d'analyse, faute de quoi les résultats obtenus seront erronés.
- L'analyse spectrale par la méthode paramétrique adoptée, donne des spectres fiables et n'a pas besoin de connaissances à priori sur ces derniers. Elle nous fait, aussi, éviter les difficultés rencontrées lors du bon choix des paramètres d'analyse spectrale avec les estimateurs spectraux.
- Le recuit simulé est une méthode d'optimisation très puissante, il est employé sur des problèmes d'optimisation difficiles, où des méthodes classiques (méthodes déterministes) montrent leurs limites. Malgré sa robustesse, il ne converge pas toujours vers le minimum global.
- L'hybridation de l'algorithme de RS, le rend : plus robuste et plus précis qu'un algorithme de RS simple.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] : A.Ouahabi. Techniques avancées de traitement du signal et applications. © connaissance du monde.Alger 1993
- [2]: Frédéric de Coulon.Théorie et traitement des signaux.Volume VI.  
© 1998 Presses polytechniques et universitaires romandes. Lausanne.-p27-
- [3] :EtienneTisserand.Analys et traitement des signaux. Dunod, Paris, 2004.-P107-
- [4] : Rais El’hadi Bekka.Fondement du traitement du signal. OPU.2005.
- [5] : Freddy Mudry .Cours de traitement du signal (chap6)  
<http://files.iai.heig-vd.ch/enseignements>.
- [6] :H.Egon, M.Marie, P.Pore.Traitement du signal et automatique.  
T1. © 2000, Hermann.Editeurs des sciences et des arts.Paris.-p116-
- [7] :M.Bellanger.Traitement numérique du signal.  
© Dunod, Paris, 1998 ,2002.
- [8] :J.Auvray.Traitement dusignal.I Transformée de Fourier TFD ET FFT.  
[Pages perso-orange.fr/avrj : cours/TDS\\_notes.pdf](http://Pages.perso-orange.fr/avrj%3Acours/TDS_notes.pdf)
- [9]:F.Cottet.Aide-mémoire de traitement du signal. © Dunod, Paris, 2000.
- [10] M. Kunt. Traitement Numérique Des Signaux. © 1999 Presses polytechniques et universitaires romandes CH – 1015 Lausanne.
- [11] :Z.abdelli. Implémentation d’une technique d’analyse spectrale à l’aide de méthodes dites non conventionnelles, thèse de magister, UFA, 2004.
- [12] :R .Lorenz,R.Cook. Exact inverter waveform analysis using z-transform estimation techniques.IEEE Transactions on Power Electronics.Vol 5, NO 3, July 1990.
- [ 13] :[ina2.eivd.ch/collaborateurs/rch/pages\\_htm](http://ina2.eivd.ch/collaborateurs/rch/pages_htm).
- [14] :David E.Goldberg.Les algorithmes génétiques. © Juin 1994Editions Addison-Wesley.FRANCE.S,A.-p6-
- [15]: [Fr.wikipedia.org/WIKI/Métaheuristique](http://Fr.wikipedia.org/WIKI/Metaheuristique).
- [ 16] : Jin-Kao Hao, Philippe Galinier, Michel Habib. Métaheuristiques pour l’optimisation combinatoire et l’affectation sous contraintes.Revue d’intelligence artificielle vol : No.1999.
- [17 ]<http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/signal/index.html>





