REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF

FACULTE DES SCIENCES-DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER
Option : Equations Différentielles

Par

Khalouta Ali

Thème

Etude des solutions des équations aux dérivées partielles stochastiques.
Cas de l'équation de la chaleur stochastique

Soutenu le : … / … /2009

Devant le jury :

Président :	**S. DRABLA**	**Professeur**	**Université Ferhat Abbas Sétif**
Rapporteur :	**L. ABBAOUI**	**Professeur**	**Université Ferhat Abbas Sétif**
Examinateurs :	**A. ZIADI**	**Professeur**	**Université Ferhat Abbas Sétif**
	Y. BENCHEIKH-KHEMAL	**Professeur**	**Université Ferhat Abbas Sétif**

Remerciements

J'exprime mes vifs remerciements et ma sincère reconnaissance à l'honorable M^{er} L. Abbaoui, pour l'honneur que vous m'avez fait en acceptant de diriger ce travail et pour votre disponibilité malgré vos nombreuses préoccupations. Vous m'avez écouté avec modestie et tolérance ce qui m'a permis d'élaborer ce travail dans les meilleures conditions. Vos riches connaissances et votre vision profonde, rigoureuse et claire ont amélioré mon bagage mathématique assez modeste. Grâce aux discussions que nous avons eues dans plusieurs domaines, j'ai beaucoup profité de votre expérience.

Le travail avec vous est un honneur et un plaisir ; permettez moi de vous témoigner mes considérations les plus respectueuses.

Je remercie M^{er} S. Drabla qui a bien voulu examiner ce travail et accepté d'être le président de jury.

Je remercie également M^{eme} Y. Bencheikh-khamal et M^{er} A. Ziadi, pour l'intérêt que vous avez porté à ce travail en participant au jury de ce mémoire.

Je remercie aussi M^{elle} L. Debbi, et tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin surtout à concrétiser ce travail.

Je profite aussi de cette occasion pour remercie tous les enseignants du département de mathématique de l'Université Ferhat Abbas de Sétif et mes collègues de toutes mes années scolaires et universitaires.

Dédicaces

Je dédis le fruit de mon modeste travail à ma famille, qui était toujours à mes côtés et qui ma beaucoup encouragé : mon père, ma mère, mon frère, Houssine, mes sœurs, Rima, Halima, Siham et Aïda et sa famille, sans oublier tous mes amis.

Table des matières

Introduction générale

La théorie des équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS) connaît actuellement un développement important, faisant intervenir des concepts et des résultats nouveaux aussi bien en théorie des probabilités qu'en analyse.

Les EDPS servent à modéliser de nombreux phénomènes dans des domaines variés tels que les phénomènes de propagation d'ondes en milieux aléatoires, la dispersion en milieux poreux, la turbulence, les études de populations en biologie, les modèles de taux en finance etc....

En schématisant, on peut dire qu'une EDPS est constituée de deux termes : une équation aux dérivées partielles (terme déterministe) et un bruit aléatoire.

Dans de nombreuses modélisations, le bruit est introduit afin de rendre compte du fait que l'on ne peut pas décrire parfaitement le système à partir des grandeurs dont on dispose. Ceci est le cas par exemple en économie, où certaines grandeurs sont inobservables. Les systèmes évoluant de façon déterministe au cours du temps et pour un temps "continu" sont souvent décrits par une EDO ou une EDP si l'évolution temporelle est liée à des fluctuations spatiales. On peut alors rendre compte de l'incertitude sur l'état du système, par exemple l'évolution d'une particule en présence de fluctuation de la température ou la valeur d'un produit financier, par un terme de bruit dans l'équation. Nous sommes alors en présence d'équations différentielles stochastiques (EDS) ou aux dérivées partielles stochastiques (EDPS). Prenons le cas des équations aux dérivées partielles du type d'évolution. Ces équations sont souvent valables pour une certaine plage de valeurs des paramètres. Elles décrivent l'évolution dans des milieux idéalisés et ne tiennent pas compte, par exemple, des impuretés et des fluctuations des propriétés du milieu notamment en fonction des fluctuations de la température. Elles correspondent aussi à des approximations de modèles plus complexes et négligent des termes d'ordre supérieur. Le terme aléatoire peut alors rendre compte des termes que l'on a négligés et ou des fluctuations du milieu. De ce point de vue, il est intéressant d'évaluer la robustesse des résultats qualitatifs obtenus pour ces modèles idéalisés en présence d'une petite perturbation.

L'étude des équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS) paraboliques intervient dans des problèmes aussi variés que la théorie du filtrage, l'étude de l'évolution du potentiel électrique d'un réseau de neurones ou la description de modèle de pollution atmosphérique. La plupart des travaux effectués dans ce domaine concernent des EDPS dirigées par un bruit blanc. Ainsi, dans son cours à l'école de probabilités de St-Flour en 1984 [**21**], Walsh présente une étude détaillée de l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - V + f(V,t)\dot{W} & t > 0,\ 0 < x < L \\ \frac{\partial V}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial V}{\partial x}(L,t) = 0 & t > 0 \\ V(x,0) = V_0(x) & \end{cases},$$

où $\dot{W}$ est un bruit blanc basé sur $[0,+\infty[\times[0,L]$. Cette équation intervient en neurophysiologie, lors de l'étude de l'évolution d'un potentiel électrique neuronique. La resolution est basée sur la recherche d'une solution par la méthode itérative de Picard.

Plus généralement, il est possible d'étudier des EDPS dirigé par une semi-martingale quelconque. Une des possibilités de résolution consiste à rechercher une solution X_t comme une fonction du temps à valeurs dans un espace des fonctions. Une EDPS se ramène alors à une équation différentielle stochastique à valeurs dans un espace vectoriel de dimension infinie, généralement un espace de Hilbert ou de Banach, [**7**]**,**[**15**]**,**[**19**]**,**[**5**],[**13**].

Les EDPS paraboliques peuvent être dirigées par différents types de bruits : bruit blanc en espace et en temps, bruit coloré (c.à.d bruit blanc en temps avec une certaine corrélation en espace) [**18**],[**6**], bruit poissonnien [**3**]et bruit fractionnaire [**11**].

Dans ce travail, nous étudions le cas de l'équation de la chaleur stochastique qui est une équation aux dérivées partielles stochastique parabolique dirigé par un bruit blanc en espace et en temps. Nous considérons le cas d'une variable spatiale à une seule dimension.

Comme dans le cas du bruit blanc unidimensionnel, le bruit blanc dépendant de deux (ou plusieurs paramètres) n'existe pas au sens usuel. C'est un processus aléatoire gaussien centré de fonction de corrélation (ou covariance) de la forme $\delta(t-s)\delta(y-x)$, ou $\delta(.)$ désigne la fonction de Dirac et en particulier ses valeurs en deux points différents sont non corrélées (et donc indépendantes puisque le processus est gaussien).

Les équations aux dérivées partielles stochastiques paroboliques qui nous intéressent sont de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + f(t,x,u(t,x)) + g(t,x,u(t,x))\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}W(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{0.1}$$

sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$, où $W(t,x)$ est un drap brownien. On considère aussi les cas où les variables temporelle et spatiale sont dans un intervalle borné en ajoutant des conditions aux limites.

L'équation (0.1) est formelle car W n'est pas différentiable. Il y a deux manières de donner une signification rigoureuse à l'équation (0.1). La première consiste à écrire l'équation sous la forme faible et la seconde à l'écrire sous la forme intégrale en utilisant le noyau de la chaleur $G_t(x,y)$.

Dans ce travail, on montre que les deux formulations sont équivalentes.

En 1984, J.B. Walsh a défini une intégrale stochastique de la forme $\displaystyle\iint f(t,x)M(dtdx)$ pour une large classe des fonctions f prédictibles (par rapport à une mesure martingale) et le même auteur avec R. Cairoli **[4]** ont définit une intégrale stochastique pour des processes à deux paramètres (dans le plan).

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de la chaleur stochastique sous différentes conditions sur les coefficients f et g

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions liées à la théorie des équations aux dérivées partielles stochastiques telle que le bruit blanc, le drap brownien et la mesure martingale.

Au second chapitre, on définit l'intégrale stochastique et on montre l'équivalence entre les deux formulations.

Le troisième chapitre est consacré à présenter quelques théorèmes concernant l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation de la chaleur stochastique dans les cas lipschitzien et non lipschitzien ainsi que dans le cas où l'équation est dirigée par un bruit blanc basé sur une mesure quelconque, le cas classique correspondant à la mesure de Lebesgue.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions essentielles du calcul stochastique sans entrer dans les détails. La théorie des probabilités s'intéresse aux expériences dont les résultats dépendent du hasard. Si ces résultats sont des scalaires ou des vecteurs, on a des variables aléatoires réelles ou vectorielles, par contre si les résultats de l'expérience sont des fonctions, alors on parle de fonction ou de processus aléatoire.

1.2 Processus aléatoire

En général, on définit une fonction aléatoire de la manière suivante :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $\mathcal{I}$ un ensemble quelconque. On appelle fonction aléatoire, une fonction qui associe à chaque α de $\mathcal{I}$ (ensemble d'indices) une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans E.

Nous nous intéressons plus particulièrement au cas où $\mathcal{I} = [0, T]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^+$ ou même $\mathbb{R}$ en entier) et $E = \mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne. Dans ce cas, la fonction aléatoire est appelée processus aléatoire et $t \in [0, T]$ est interprété comme le temps. Si $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^m$, on a la notion de champ aléatoire.

Définition 1.2.1 *[10]On appelle tribu des évenements prédictibles, la sous tribu $\mathcal{P}_T$ de $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}$ engendrée par les ensembles*

- $]s, t] \times F, 0 \leqslant s < t \leq T$ *et* $F \in \mathcal{F}_s$.
- $\{0\} \times F, F \in \mathcal{F}_0$.

où $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration c.à.d une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_0$ contient les sous-ensembles $A \in \mathcal{F}$ tels que $P(A) = 0$ ($\mathcal{F}_0$ est appelée tribu initiale).

Un processus est dit prédictible s'il est mesurable relativement à $\mathcal{P}_T$. On note $L^2_{\mathcal{P}}([0,T]\times\Omega)$ le sous espace de $L^2([0,T]\times\Omega)$ formé des processus prédictibles de carré intégrable.

Un processus $X(s,x,\omega)$ dépendant de la variable d'espace x sera alors dit prédictible s'il est mesurable relativement à la tribu $\mathcal{P}=\mathcal{P}_T\otimes\mathcal{B}_E$.

1.3 Bruit blanc

Soit $(E,\mathcal{B}_E,\mu)$ un espace mesuré,où μ est σ-finie. Un bruit blanc basé sur μ est une fonction aléatoire W sur les ensembles $A\in\mathcal{B}_E$ de $\mu-$mesure finie telle que :

i) $W(A)$ est une variable aléatoire $\mathcal{N}(0,\mu(A))$.

ii) si $A\cap B=\emptyset$ alors $W(A)$ et $W(B)$ sont indépendants et $W(A\cup B)=W(A)+W(B)$. p.s.

La condition (ii) signifie que la fonction W est une fonction additive d'ensembles. Dans la plupart des cas, E est un espace euclidien et μ est la mesure de Lebesgue. Pour voir qu'un tel processus existe, on peut le considérer comme un processus aléatoire gaussien indexé par les ensembles de $\mathcal{B}_E$ de μ-mesure finie $\{W(A),A\in\mathcal{B}_E,\mu(A)<\infty\}$, d'après (i) et (ii) , ceci signifie que c'est un processus aléatoire gaussien centré de fonction de covariance C donnée par

$$C(A,B)=E(W(A)W(B))=\mu(A\cap B).$$

Grace à un théorème général sur les processus aléatoires gaussiens, si C est semi-définie positive, alors il existe un processus aléatoire gaussien $\{W(A),A\in\mathcal{B}_E\}$ de moyenne zéro et de fonction de covariance C.

Il y a d'autres manières de définir le bruit blanc. Dans le cas ou $E=\mathbb{R}$ et μ est la mesure de Lebesgue, il est souvent décrit comme la dérivée du mouvement brownien. Une telle description est possible en dimension supérieure en utilisant le drap brownien au lieu du mouvement brownien.

1.4 Drap brownien

Le drap brownien joue pour $\mathbb{R}^n_+$ le rôle que joue le mouvement brownien pour $\mathbb{R}_+$.

Dans le cas $E=\mathbb{R}^n_+=\{(t_1,....,t_n),t_i\geqslant 0,i=1....n\}$ et μ est la mesure de Lebesgue, si $t=(t_1,....,t_n)\in\mathbb{R}^n_+$, posons $]0,t]=]0,t_1]\times]0,t_2]\times....\times]0,t_n]$.

Définition 1.4.1 *[21]On appelle drap brownien sur $\mathbb{R}^n_+$ tout processus aléatoire $\{W_t,t\in\mathbb{R}^n_+\}$ défini par $W_t=W(]0,t])$, où W est un bruit blanc. C'est un processus aléatoire gaussien* *centré, sa fonction de covariance est donnée par : si* $s = (s_{1,....}, s_n)$ *et* $t = (t_1, ..., t_n)$ *:*

$$E(W_s W_t) = (s_1 \wedge t_1)....(s_n \wedge t_n)$$

avec $s \wedge t = \min(s, t)$

Si nous considérons $W(A)$ comme une mesure, W_t est sa fonction de distribution. Notons que nous pouvons représenter le bruit blanc dans $\mathbb{R}_+^n$ à partir de W_t. En effet si R est un rectangle, $W(R)$ est donné par la formule habituelle, si $n = 2$ et $0 \leqslant u \leqslant s, 0 \leqslant v \leqslant t : W\left(]u, s] \times]v, t]\right) = W_{st} - W_{sv} - W_{ut} + W_{uv}$.

Le drap brownien a été présenté la première fois par un statisticien J. Kitagawa en 1951 afin de faire l'analyse de la variance en temps continu. Dans le cas $n = 2$ et μ est la mesure de Lebesgue. Considérons quelques propriétés dans $\mathbb{R}^2$:

1) W s'annule sur les axes.
2) Si $s = s_0$ est fixé, $\{W_{s_0 t}, t \geqslant 0\}$ est un mouvement brownien parce que c'est un processus aléatoire gaussien centré de fonction de covariance $C(t, t') = s_0(t \wedge t')$.
3) Le long de la diagonale, le processus $M_t = W_{tt}$ est une martingale et même un processus à accroissements indépendants.
4) Le processus $E_{st} = W_{s_0+s, t_0+t} - W_{s_0+s, t_0} - W_{s_0, t_0+t} + W_{s_0 t_0}$ est un drap brownien $E_{s,t}$ indépendant de la tribu $\mathcal{F}_{s_0 t_0} = \sigma\left\{W_{uv}, u \leqslant s_0, v \leqslant t_0\right\}$. Pour voir cela, il suffit de remarquer que $E_{s,t} = W(]s_0, s] \times]t_0, t])$ et utiliser les propriétés (i) et (ii).

1.5 Le bruit blanc comme distribution

Sur $\mathbb{R}$ le bruit blanc est la dérivée aux sens des distributions du processus du mouvement brownien. Dans le cas de deux paramètres ou plus, le bruit blanc peut être considéré comme la dérivée aux sens des distributions du drap brownien.

Le drap brownien W_{st} n'est nulle part différentiable dans le sens ordinaire mais ses dérivées partielles existent au sens des distributions. On pose :

$$\dot{W_{st}} = \frac{\partial^2 W_{st}}{\partial s \partial t}$$

c.à.d si $\Phi(s, t)$ est une fonction test à support compact dans $\mathbb{R}_+^2$, $\dot{W}$ est la distribution définie par :

$$\dot{W}(\Phi) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} \Phi(u, v) \frac{\partial^2 W_{uv}}{\partial u \partial v} du dv = \iint_{\mathbb{R}_+^2} W_{uv} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}(u, v) du dv.$$

Formellement, si $\Phi(u,v) = I_{\{0\leqslant u\leqslant s\ ,\ 0\leqslant v\leqslant t\}}$, alors :

$$\dot{W}(\Phi) = \int_0^s \int_0^t \frac{\partial^2 W_{uv}}{\partial u \partial v} dudv = W_{st} = \iint \Phi dW.$$

Si nous considérons la mesure W comme une distribution, alors on a :

$$W(\Phi) = \iint \Phi dW.$$

En d'autre termes $\dot{W}(\Phi) = W(\Phi)$ de sorte que $\dot{W}$ et W soient la même distribution. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\dot{W} = \frac{\partial^n}{\partial t_1 .....\partial t_n} W_{t_1 ... t_n}.$$

1.6 Mesure aléatoire

Soit $(E, \mathcal{B}_E)$ un espace de Lusin. On suppose que $U(A,\omega)$ est une fonction aléatoire définie sur $\mathcal{A}\times\Omega$ ($\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_E$ est une algèbre) telle que $E\left(U(A)^2\right) < \infty$, $\forall A \in \mathcal{A}$. On suppose que U est additive c.à.d si $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \cap B \neq 0$, alors :

$$U(A \cup B) = U(A) + U(B) \text{ p.s}$$

Dans la plupart des cas, U n'est pas σ-additive si nous la considérons comme une fonction d'ensembles à valeurs réelles. Cependant, elle peut vérifier la condition de σ-additivité si nous la considérons comme une fonction d'ensembles à valeurs dans un espace de fonctions par exemple $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. C'est le cas du bruit blanc.

Soit $\|U(A)\|_2 = \left(E\left(U(A)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ la norme de $U(A)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On dit que U est σ-finie, s'il existe une suite croissante $\{E_n\}_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ dont la réunion est l'ensemble E et telle que pour tout $n \geq 1$:

i) $\mathcal{B}_{E_n} \subset \mathcal{A}$, où $\mathcal{B}_{E_n} = \mathcal{B}_{E|_{E_n}}$.

ii) $\sup\{\|U(A)\|_2, A \in \mathcal{B}_{E_n}\} < \infty$.

Définissons une fonction d'ensembles μ par :

$$\mu(A) = \|U(A)\|_2^2.$$

Proposition 1.6.1 *Une fonction d'ensembles additive σ-finie U est σ-additive sur $\mathcal{B}_{E_n}$ ssi pour toute suite $\{A_j\}_{j\geq 1}$ de $\mathcal{B}_{E_n}$ décroissante vers ϕ, on a $\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = 0$.*

Preuve. $\Rightarrow$) Supposons que U est σ-additive sur $\mathcal{B}_{E_n}$ et que $\{A_j\}_{j\geq 1}$ est une suite de $\mathcal{B}_{E_n}$ tel que $A_j \downarrow \phi$.

Puisque U est σ-additive, alors :

$$U(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{j\to\infty} U(A_j),$$

et donc :

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \lim_{j\to\infty} \|U(A_j)\|_2^2 = \left\|\lim_{j\to\infty} U(A_j)\right\|_2^2 = \left\|U(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j)\right\|_2^2 = \|U(\phi)\|_2^2 = 0.$$

$\Leftarrow$) Supposons maintenant que pour toute suite $\{A_j\}_{j\geq 1}$ de $\mathcal{B}_{E_n}$ décroissante vers ϕ, on a $\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = 0$ et montrons que U est σ-additive c.à.d si $B_n \cap B_m = \phi$ pour tous $n \neq m$, alors :

$$U(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} U(B_i).$$

On a $B_i \in \mathcal{B}_{E_n}$ et donc $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}_{E_n}$. Posons :

$$A_j = B - \bigcup_{i=1}^{j} B_i,$$

alors $A_j \in \mathcal{B}_{E_n}$ et $A_j \downarrow \phi$ et donc :

$$U(A_j) = U(B - \bigcup_{i=1}^{j} B_i) = U(B) - \sum_{i=1}^{j} U(B_i),$$

et puisque :

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \lim_{j\to\infty} \|U(A_j)\|_2^2 = \left\|\lim_{j\to\infty} U(A_j)\right\|_2^2 = 0 \Rightarrow \lim_{j\to\infty} U(A_j) = 0,$$

alors :

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} (U(B) - \sum_{i=1}^{j} U(B_i)) &= 0 \Rightarrow U(B) - \sum_{i=1}^{\infty} U(B_i) = 0 \\ &\Rightarrow U(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = U(B) = \sum_{i=1}^{\infty} U(B_i). \end{aligned}$$

■

1.7 Mesure martingale.

Nous nous intéressons à l'intégrale stochastique par rapport à des mesures martingales.

Définition 1.7.1 *[21]Soient $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ une filtration et $\mathcal{A}$ une algèbre incluse dans $\mathcal{B}_E$. Un processus aléatoire $\{M_t(A),\ (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, A\in\mathcal{A}\}$ est une mesure martingale si :*
i) $M_0(A)=0, \forall A\in\mathcal{A}$.
ii) Si $t>0, M_t$ est une mesure σ-finie sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$.
iii) Pour A fixé dans $\mathcal{A}$, $\{M_t(A),(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}\}$ est une martingale.

Définition 1.7.2 *Une mesure martingale M est orthogonale si pour deux ensembles disjoints $A,B\in\mathcal{A}$, les martingales $\{M_t(A), t\geqslant 0\}$ et $\{M_t(B), t\geqslant 0\}$ sont orthogonales.*

Remarque 1.7.3 *M est orthogonale ssi le produit $M_t(A)M_t(B)$ est une martingale pour deux ensembles disjoints quelconques $A,B\in\mathcal{A}$.*

L'exemple canonique d'une mesure martingale orthogonale est le bruit blanc. Si W est un bruit blanc sur $E\times\mathbb{R}_+$,on a $M_t(A)=W(A\times[0,t])$ pour $A\in\mathcal{B}_E$ tel que $\mu(A)<\infty$. Il est clair que M est une mesure martingale car si $A\cap B=0$, alors $M_t(A)$ et $M_t(B)$ sont indépendants et donc orthogonaux.

Définition 1.7.4 *On appelle fonctionnelle de covariance de la mesure martingale M , la fonctionnelle $\overline{Q}_t$ définie sur $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ par :*

$$\overline{Q}_t(A,B)=\langle M(A),M(B)\rangle_t$$

Notons que $\overline{Q}_t$ est symétrique en A et B et biadditive : pour A fixé $\overline{Q}_t(A,.)$ et $\overline{Q}_t(.,A)$ sont des fonctions additives d'ensembles.

Définissons une fonction d'ensembles Q sur les rectangles $A\times B\times\,]s,t]$, où $A,B\in\mathcal{A}$ par :

$$Q(A\times B\times\,]s,t])=\overline{Q}_t(A,B)-\overline{Q}_s(A,B).$$

Remarque 1.7.5 *On peut prolonger Q par addivité aux réunions finies disjointes de rectangles c.a.d si $A_i\times B_i\times\,]s_i,t_i]$, $i=1..n$, sont disjoints deux à deux, on pose*

$$Q(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\times B_i\times\,]s_i,t_i])=\sum_{i=1}^{n}(\overline{Q}_{t_i}(A_i,B_i)-\overline{Q}_{s_i}(A_i,B_i)).$$

Q est définie positive c.à.d si $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ et $A_1, ..., A_n$ sont disjoints, alors pour tous $s < t$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j Q(A_i \times A_j \times]s,t]) \geq 0.$$

Définition 1.7.6 *Une mesure signée $K(dxdyds)$ sur $\mathcal{B}_E \otimes \mathcal{B}_E \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$ est définie positive si pour chaque fonction mesurable bornée pour laquelle l'intégrale suivante à un sens , on a :*

$$\iiint_{E\times E\times \mathbb{R}_+} f(x,s)f(y,s)K(dxdyds) \geq 0$$

Pour une mesure signée K définie positive, posons :

$$(f,g)_K = \iiint_{E\times E\times \mathbb{R}_+} f(x,s)g(y,s)K(dxdyds).$$

Notons que $(f,f)_K \geq 0$.

Remarque 1.7.7 *Si K est symétrique en x et y, alors on a les inégalités de Schwartz et de Minkowski :*

$$(f,g)_K \leq (f,f)_K^{\frac{1}{2}}(g,g)_K^{\frac{1}{2}}.$$
$$(f+g,f+g)_K^{\frac{1}{2}} \leq (f,f)_K^{\frac{1}{2}} + (g,g)_K^{\frac{1}{2}}.$$

Il n'est pas toujours possible de prolonger Q à une mesure sur $\mathcal{B}_E \otimes \mathcal{B}_E \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$. Pour cela, on considère une classe de mesures martingales pour lesquelles ce prolongement est possible.

Définition 1.7.8 *[21]Une mesure martingale M est worthy (digne) s'il existe une mesure aléatoire σ-finie $K(\Lambda,\omega)$, où $\Lambda \in \mathcal{B}_E \otimes \mathcal{B}_E \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$ et $\omega \in \Omega$ telle que :*

i) K est définie positive et symétrique en x, y.

ii) Pour A, B fixés, $\{K(A \times B \times]0,t]),\ t \geq 0\}$ est prédictible.

iii) Pour tout $n, E\{K(E_n \times E_n \times [0,T])\} < \infty$.

iv) Pour tout rectangle $\Lambda, |Q(\Lambda)| \leq K(\Lambda)$.

K est dite mesure dominante de la mesure martingale M.

Proposition 1.7.9 *Une mesure martingale worthy est orthogonale ssi :*

$$supp\ Q \subset \Delta(E) \times \mathbb{R}_+,$$

où $\Delta(E) = \{(x,x) : x \in E\}$ est la diagonale de $E \times E$.

1.8 Théorème de décomposition de Doob

Soit ($X_t, t \in \mathbb{R}^+$) une sous-martingale (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) continue. Alors il existe un unique processus ($A_t, t \in \mathbb{R}^+$) croissant, continue et adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tel que $A_0 = 0$ et ($X_t - A_t, t \in \mathbb{R}^+$) est une martingale.

Soit $\{M_t(A), A \in \mathcal{A}\}$ une mesure martingale continue de carré intégrable. Alors $M_t^2(A)$ est une sous-martingale et donc d'après le théorème ci-dessus, il existe un unique processus $N_t(A)$ croissant, continue et adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tel que $N_0(A) = 0$ et $(M_t^2(A) - N_t(A))$ est une martingale. On note par $N_t(A) = \langle M(A), M(A)\rangle_t$ et on appelle ce processus variation quadratique de $M_t(A)$.

1.9 Critère de Kolmogorov pour la continuité des trajectoires

Le résultat suivant permet de montrer la continuité presque sûre des trajectoires des processus aléatoires. Il est fondamental pour l'étude des équations stochastiques et est appelé critère de Kolmogorov.

Théorème 1.9.1 *[10]Soit $X = \{X(t,x), t \in [0,T], x \in D\}$, où D est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, un processus aléatoire à valeurs réelles. On suppose qu'il existe des constantes $C > 0, \delta > 1$ et $\varepsilon > 1$ telles que :*

$$E\left(|X(t,x) - X(s,y)|^\delta\right) \leq C(|t-s| + |x-y|)^{1+\varepsilon} \quad \text{pour } t,s \in [0,T] \text{ et } x,y \in D,$$

alors pour tout $\alpha \in \left[0, \frac{\varepsilon}{\delta}\right[$, il existe une modification de $X(t,x)$ dont les trajectoires sont presque sûrement $\alpha-$hölderiennes sur $[0,T] \times D$. En particulier $X(t,x)$ admet une modification continue sur $[0,T] \times D$.

Chapitre 2

Intégrale stochastique et notions de solutions pour les EDPS

2.1 Intégrale stochastique par rapport à une mesure martingale

Soient M une mesure martingale "worthy" sur l'espace de Lusin $(E, \mathcal{B}_E)$, Q_M sa mesure de covariance et K_M sa mesure dominante.

Dans le cas classique, on construit l'intégrale stochastique comme un processus ou une variable aléatoire c.à.d on construit $\left\{\int_0^t f dB_s, t \geq 0\right\}$ pour tout t, on peut alors montrer que l'intégrale est une martingale. L'analogue d'une martingale dans notre cadre est la mesure martingale. Ainsi intégrale stochastique sera une mesure martingale.

Rappelons que nous nous limitons à un intervalle fini de temps $[0, T]$ et à l'un des E_n de sorte que M soit finie. On commence d'abord par définir l'intégrale pour des fonctions élémentaires puis pour des fonctions simples et enfin pour les fonctions dans une certaine classe.

Définition 2.1.1 *Une fonction $f : E \times [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite élémentaire si elle est de la forme :*

$$f(x, s, \omega) = X(\omega) I_{]a,b]}(s) I_A(x), \tag{1}$$

où $0 \leq a < b, X$ est une variable aléatoire bornée $\mathcal{F}_a-$mesurable et $A \in \mathcal{B}_E$. f est dite simple si elle est combinaison linéaire finie de fonctions élémentaires. Notons par $\mathcal{S}$ la classe des fonctions simples.

Définition 2.1.2 *On appelle tribu prédictible sur $E \times [0, T] \times \Omega$ et on note $\mathcal{P}$ tribu engendrée par les fonctions simples. Une fonction f est dit prédictible si elle est $\mathcal{P}-$mesurable.*

Si K_M est la mesure dominante pour la mesure martingale M, alors on peut définir pour toute fonction prédictible f :

$$\|f\|_M = E\left[(|f|,|f|)_K\right]^{1/2} = \left(E\left[\iiint\limits_{E\times E\times]0,T]} |f(x,t)|\,|f(y,t)|\,K_M(dxdydt)\right]\right)^{1/2}.$$

On a utilisé la valeur absolue de f pour definir $\|f\|_M$ de sorte que :

$$(f,f)_Q \leq \|f\|_M^2 .$$

Soit $\mathcal{P}_M$ la classe de toutes les fonctions prédictibles f pour lesquelles : $\|f\|_M < \infty$.

Proposition 2.1.3 *$\|.\|_M$ est une norme sur $\mathcal{P}_M$ et $\mathcal{P}_M$ est complet et par conséquent c'est un espace de Banach.*

Preuve. [21]. ■

Proposition 2.1.4 *$\mathcal{S}$ est dense dans $\mathcal{P}_M$.*

Preuve. [21]. ■

Maintenant, nous pouvons construire l'intégrale stochastique.

Si M est une mesure martingale et f une fonction élémentaire de la forme (1), alors on peut définir l'intégrale stochastique de f par :

$$(f.M)_t(B) = X(\omega)\left[M_{t\wedge b}(A\cap B) - M_{t\wedge a}(A\cap B)\right](\omega).$$

Si $f \in \mathcal{S}$, alors nous pouvons écrire $f = c_1 f_1 + ... + c_k f_k$, où $c_1,...,c_k \in \mathbb{R}$, et $f_1,....,f_k$ sont élémentaires et on pose :

$$(f.M)_t(B) = \sum_{j=1}^{k} c_j (f_j.M)_t(B).$$

Proposition 2.1.5 *On suppose que $f \in \mathcal{S}$ et M est une mesure martingale. Alors*

$$E\left[\left((f.M)_t(B)\right)^2\right] = E\left[\iiint\limits_{B\times B\times]0,t]} f(x,s)f(y,s)Q(dxdyds)\right].$$

Preuve. Première étape :

Puisque X est une variable aléatoire $\mathcal{F}_a-$mesurable et bornée par la définition de la variation quadratique, on démontre que :

$$\begin{aligned} & E\left[X^2(M^2_{t\wedge b}(A\cap B) - \langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge b})\right] \\ = \ & E\left[X^2(M^2_{t\wedge a}(A\cap B) - \langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge a})\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

Soit $M_{t\wedge b}(A\cap B)$ une martingale continue de carré intégrable alors $M^2_{t\wedge b}(A\cap B)$ est une sous-martingale et donc d'après le théorème de décomposition de Doob, il existe un unique processus croissant, continue et adapté noté $\langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge b}$ appelé variation quadratique de $M_{t\wedge b}(A\cap B)$ tel que $M^2_{t\wedge b}(A\cap B) - \langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge b}$ soit une martingale. Puisque X est $\mathcal{F}_a-$mesurable et bornée et en utilisant la propriété de l'espérance condionnelle :

"si X est $\mathcal{B}-$mesurable et bornée alors $E(XY/\mathcal{B}) = XE(Y/\mathcal{B})$",

on obtient :

$$\begin{aligned} & E\left[X^2(M^2_{t\wedge b}(A\cap B) - \langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge b})/\mathcal{F}_a\right] \\ = \ & X^2E\left[(M^2_{t\wedge b}(A\cap B) - \langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge b})/\mathcal{F}_a\right] \\ = \ & X^2(M^2_{t\wedge a}(A\cap B) - \langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge a}). \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} & E\left[E\left[X^2(M^2_{t\wedge b}(A\cap B) - \langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge b})/\mathcal{F}_a\right]\right] \\ = \ & E\left[X^2(M^2_{t\wedge a}(A\cap B) - \langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge a})\right]. \end{aligned}$$

D'autre part, on a $E\left[E(X/\mathcal{B})\right] = E(X)$ et donc :

$$\begin{aligned} & E\left[E\left[X^2(M^2_{t\wedge b}(A\cap B) - \langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge b})/\mathcal{F}_a\right]\right] \\ = \ & E\left[X^2(M^2_{t\wedge b}(A\cap B) - \langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge b})\right] \\ = \ & E\left[X^2(M^2_{t\wedge a}(A\cap B) - \langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge a})\right]. \end{aligned}$$

En utilisant la même démonstration, on obtient :

$$\begin{aligned} & E\left[X^2(M_{t\wedge b}(A\cap B)M_{t\wedge a}(A\cap B) - \langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge a})\right] \\ = \ & E\left[X^2(M^2_{t\wedge a}(A\cap B) - \langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge a})\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Deuxième étape :

Soit f une fonction élémentaire de la forme :

$$f(x,s)=X(\omega)I_{]a,b]}(s)I_A(x)=\begin{cases} X(\omega), \text{ si } (x,s)\in A\times]a,b] \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{si non}\end{cases}.$$

Donc :

$$f(x,s)f(y,s)=X^2(\omega)I_{]a,b]}(s)I_A(x)I_A(y)=\begin{cases} X^2(\omega), \text{ si } (x,y,s)\in A\times A\times]a,b] \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{si non}\end{cases}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
& \iiint\limits_{B\times B\times]0,t]} f(x,s)f(y,s)Q(dxdyds) \\
= & \iiint\limits_{B\times B\times]0,t]} X^2 I_{]a,b]}(s)I_A(x)I_A(y)Q(dxdyds) \\
= & X^2 Q(A\times A\times]a,b]\cap B\times B\times]0,t]) \\
= & X^2 Q\left[(A\cap B)\times (A\cap B)\times]t\wedge a, t\wedge b]\right] \\
= & X^2\left[\overline{Q}_{t\wedge b}(A\cap B, A\cap B)-\overline{Q}_{t\wedge a}(A\cap B, A\cap B)\right] \\
= & X^2\left[\langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge b}-\langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge a}\right]
\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
& E\left[\iiint\limits_{B\times B\times]0,t]} f(x,s)f(y,s)Q(dxdyds)\right] \\
= & E\left[X^2\left(\langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge b}-\langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge a}\right)\right].
\end{aligned}$$

D'un autre côté, on a :

$$\begin{aligned}
& E\left[\left(\left(fM\right)_t(B)\right)^2\right] \\
= & E\left[X^2(M_{t\wedge b}(A\cap B)-M_{t\wedge a}(A\cap B))^2\right] \\
= & E\left[X^2M^2_{t\wedge b}(A\cap B)\right]-2E\left[X^2M_{t\wedge b}(A\cap B)M_{t\wedge a}(A\cap B)\right]+E\left[X^2M^2_{t\wedge a}(A\cap B)\right] \\
= & E\left[X^2(M^2_{t\wedge b}(A\cap B)-\langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge b}+\langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge b})\right] \\
& -2E\left[X^2(M_{t\wedge b}(A\cap B)M_{t\wedge a}(A\cap B)-\langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge a}\right. \\
& \left.+\langle M(A\cap B), M(A\cap B)\rangle_{t\wedge a})\right]+E\left[X^2M^2_{t\wedge a}(A\cap B)\right].
\end{aligned}$$

D'après (2) et (3), on a :

$$
\begin{aligned}
& E\left[\left((fM)_t(B)\right)^2\right] \\
= \; & E\left[X^2(M^2_{t\wedge a}(A\cap B)-\langle M(A\cap B),M(A\cap B)\rangle_{t\wedge a})\right] \\
& +E\left[X^2\langle M(A\cap B),M(A\cap B)\rangle_{t\wedge b}\right] \\
& -2E\left[X^2(M^2_{t\wedge a}(A\cap B)-\langle M(A\cap B),M(A\cap B)\rangle_{t\wedge a})\right] \\
& -E\left[X^2\langle M(A\cap B),M(A\cap B)\rangle_{t\wedge a}\right] \\
& +E\left[X^2(M^2_{t\wedge a}(A\cap B)-\langle M(A\cap B),M(A\cap B)\rangle_{t\wedge a}\right] \\
= \; & E\left[X^2\left(\langle M(A\cap B),M(A\cap B)\rangle_{t\wedge b}-\langle M(A\cap B),M(A\cap B)\rangle_{t\wedge a}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Finalement si f est élémentaire et M est une mesure martingale, alors on a :

$$
\begin{aligned}
E\left[\left((fM)_t(B)\right)^2\right] &= E\left[\iiint\limits_{B\times B\times]0,t]} f(x,s)f(y,s)Q(dxdyds)\right] \\
&= E\left[X^2\left(\langle M(A\cap B),M(A\cap B)\rangle_{t\wedge b}-\langle M(A\cap B),M(A\cap B)\rangle_{t\wedge a}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Si $f\in\mathcal{S}$, alors on peut écrire $f=C_1f_1+......+C_kf_k$, où $f_1,....,f_k$ sont des fonctions élémentaires et $C_1,....,C_k$ sont des nombres réels, alors :

$$
E\left[\left((f.M)_t(B)\right)^2\right]=\sum_{j=1}^{k}C_j^2E\left[\left((f_jM)_t(B)\right)^2\right].
$$

■

Proposition 2.1.6 *Si M est une mesure martingale worthy de mesure de covariance et dominante Q_M et K_M respectivemant et $f\in\mathcal{S}$, alors $(f.M)$ est une mesure martingale worthy. Les mesures de covariance et dominante sont données par :*

$$
Q_{f.M}(dxdyds)=f(x,s)f(y,s)Q_M(dxdyds) \tag{4}
$$

$$
K_{f.M}(dxdyds)=\left|f(x,s)f(y,s)\right|K_M(dxdyds) \tag{5}
$$

Preuve. [14]. ■

A partir de la proposition 2.1.5, on a :

$$
E\left[(f.M)_t^2(B)\right]\leq\|f\|_M^2,
$$

pour tous $t\leq T$, $f\in\mathcal{S}$ et $B\in\mathcal{B}_E$.

Supposons maintenant que $f \in \mathcal{P}_M$. D'après la proposition 2.1.4, il existe une fonction $f_n \in \mathcal{S}$ telle que $\|f_n - f\|_M \to 0$. Si $A \in \mathcal{B}_E$ et $t \leq T$, on a :

$$E\left[((f_m.M)_t(A) - (f_n.M)_t(A))^2\right] \leq \|f_m - f_n\|_M^2 \to 0$$

quand $m, n \to \infty$. Il en suit que $\{(f_n.M)_t(A)\}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ de sorte qu'elle converge dans $L^2(\Omega)$ vers une martingale que nous notons $(f.M)_t(A)$. La limite est indépendante du choix de la suite $\{f_n\}$.

Théorème 2.1.7 *Soit M une mesure martingale worthy. Alors pour toute $f \in \mathcal{P}_M$, $(f.M)$ est une mesure martingale worthy et satisfait (4) et (5). Si M est orthogonale, alors $(f.M)$ est orthogonale. De plus, pour tous $t \leq T$ et $A, B \in \mathcal{B}_E$,on a :*

$$\langle (f.M)(A), (f.M)(B) \rangle_t = \iiint\limits_{A \times B \times]0,t]} f(x,s) f(y,s) Q_M(dxdyds). \tag{6}$$

$$E\left[(f.M)_t^2(A)\right] \leq \|f\|_M^2. \tag{7}$$

Preuve.

$(f.M)_t(A)$ est la limite dans $L^2(\Omega)$ des martingales $(f_n.M)_t(A)$ et par conséquent, c'est une martingale de carré intégrable. Pour chaque n :

$$(f_n.M)_t(A).(f_n.M)_t(B) - \iiint\limits_{A \times B \times]0,t]} f_n(x,s) f_n(y,s) Q_M(dxdyds), \tag{8}$$

est une martingale $(f_n.M)_t(A)$ et $(f_n.M)_t(B)$ convergent dans $L^2(\Omega)$ et par conséquent, leur produit converge dans $L^1(\Omega)$. De plus :

$$E\left[\left| \iiint\limits_{A \times B \times]0,t]} (f_n(x,s) f_n(y,s) - f(x,s) f(y,s)) Q_M(dxdyds) \right|\right]$$

$$\leq E\left[\iiint\limits_{E \times E \times]0,T]} |f_n(x,s)| \, |f_n(y,s) - f(y,s)| \, K_M(dxdyds)\right]$$

$$+ E\left[\iiint\limits_{E \times E \times]0,T]} |f_n(x,s) - f(x,s)| \, |f(y,s)| \, K_M(dxdyds)\right]$$

$$\le E\left[(|f_n|,|f_n-f|)_K+(|f_n-f|,|f|)_K\right]$$
$$\le (\|f_n\|_M+\|f\|_M)\,\|f_n-f\|_M \to 0.$$

Notons que nous avons utilisé l'inégalité de Cauchy Schwartz. Ainsi, l'expression (8) converge dans $L^1(\Omega)$ vers :

$$(f.M)_t(A).(f.M)_t(B)-\iiint\limits_{A\times B\times]0,t]} f(x,s)f(y,s)Q_M(dxdyds)$$

qui est donc une martingale. La dernière intégrale étant prédictible doit donc être égale à $\langle f.M(A),f.M(B)\rangle_t$ qui vérifie (4) et (5). Pour voir que $(f.M)$ est une mesure martingale, on doit vérifiier la $\sigma-$additivité. Si $A_n\in\mathcal{B}_E, A_n\downarrow\phi$, alors :

$$E\left[(f.M)_t(A_n)^2\right]\le E\left[\iiint\limits_{A_n\times A_n\times]0,T]} |f(x,s)f(y,s)|\,K_M(dxdyds)\right]$$

qui tend vers zéro à cause de la convergence monotone.

Si M est orthogonale, alors *supp* $Q_M\subset\Delta(E)\times\mathbb{R}_+$ et par conséquent et en utilisant (4), on a *supp* $Q_{f.M}\subset\Delta(E)\times\mathbb{R}_+$ et par la proposition 1.7.9 $(f.M)$ est orthogonale. ■

On peut définir maintenant l'intégrale stochastique sur $A\times]0,t]$ par :

$$\iint\limits_{A\times]0,t]} f dM=(f.M)_t(A).$$

L'intégrale stochastique sur $E\times\mathbb{R}^+$ est définie par :

$$\iint\limits_{E\times\mathbb{R}^+} f dM=\lim_{t\to\infty}(f.M)_t(E).$$

En cas de nécessité, nous indiquerons les variables d'intégration. Par exemple :

$$\iint\limits_{A\times]0,t]} f(x,s)dM_{xs} \text{ ou bien } \int_0^t\int_A f(x,s)M(dxds).$$

L'intégrale stochastique ainsi définie possède la propriété de Fubini-Tonelli.

Théorème 2.1.8 *Soit M une mesure martingale worthy de mesure dominante K. Soit $(A,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $f: E\times\mathbb{R}_+\times\Omega\times A\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{P}\otimes\mathcal{A}-$mesurable* *telle que :*

$$E\left[\iiiint\limits_{E\times E\times[0,T]\times A} |f(x,s,\omega,u)f(y,s,\omega,u)|\, K(dxdyds)\mu(du)\right] < \infty.$$

Alors presque sûrement,

$$\int_A \left(\iint\limits_{E\times[0,T]} f(x,s,.,u)M(dxds) \right) \mu(du) = \iint\limits_{E\times[0,T]} \left(\int_A f(x,s,.,u)\mu(du) \right) M(dxds).$$

Preuve. [21] ■

2.2 Notions de solution pour l'équation de la chaleur stochastique

Considérons un bruit blanc $W = \{W(A), A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, |A| < \infty\}$, où $|A|$ est la mesure de Lebesgue de A.

Rappelons que W est une fonction aléatoire gaussienne centrée de fonction de covariance :

$$E(W(A)W(B)) = |A \cap B|.$$

Si on pose $W(t,x) = W([0,t]\times[0,x])$ pour $t, x \geq 0$, alors $W = \left\{W(t,x), (t,x) \in [0,+\infty[^2\right\}$ est un processus de Wiener à deux paramètres ou drap brownien caractérisé par la relation :

$$W(\left]t,t'\right] \times \left]x,x'\right]) = W(t',x') - W(t',x) - W(t,x') + W(t,x).$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilités. Pour tout $t \geq 0$, on note $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $\{W(s,x), 0 \leq s \leq t, x \geq 0\}$ et les ensembles de $P-$mesure nulle. On dit qu'un champ aléatoire $\{u(t,x), t \geq 0, x \geq 0\}$ est adapté si pour tout x, $u(t,x)$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

Considérons l'équation aux dérivées partielles stochastique suivante sur $[0,+\infty[\times [0,1]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(u(t,x)) + g(u(t,x))\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}(t,x) \tag{I}$$

avec la condition initiale $u(0,x) = u_0(x)$ et les conditions aux limites de Dirichlet

$u(t,0) = u(t,1) = 0$. Les fonctions f et g sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Supposons que $u_0 \in C([0,1])$ avec $u_0(0) = u_0(1) = 0$.

L'équation (I) est formelle parce que la dérivée $\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}$ n'existe pas. Ainsi, la formulation de l'équation (I) doit être précisée. Il y a deux manières de donner une signification rigoureuse à l'équation (I).

La première consiste à écrire l'équation sous la forme faible et la seconde à l'écrire sous la forme intégrale en utilisant le noyau de la chaleur $G_t(x,y)$.

Définition 2.2.1 *[23]On dit qu'un processus aléatoire continu $\{u(t,x), t \geqslant 0, x \in [0,1]\}$, est une solution forte de l'EDPS (I) avec l'état initial u_0, si pour un bruit blanc donné $(W, \Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$, le processus $u(t,x)$ est $\mathcal{F}_t-$adapté et satisfait :*

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(t,x)\varphi(x)dx &= \int_0^1 u_0(x)\varphi(x)dx + \int_0^t \int_0^1 u(s,x)\varphi''(x)dxds \\ &+ \int_0^t \int_0^1 f(u(s,x))\varphi(x)dxds + \int_0^t \int_0^1 g(u(s,x))\varphi(x)W(dxds) \end{aligned} \tag{II}$$

pour tout $t \geqslant 0, x \in [0,1]$ et pour toute " fonction test " φ appartenant à $C^\infty([0,1])$ telle que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Définition 2.2.2 *[23]On dit qu'un processus aléatoire continu $\{u(t,x), t \geqslant 0, x \in [0,1]\}$, est une solution mild de l'EDPS (I) avec l'état initial u_0, si pour un bruit blanc donné $(W, \Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$, le processus $u(t,x)$ est $\mathcal{F}_t-$adapté et satisfait l'équation intégrale stochastique suivante : pour tous $t \geqslant 0, x \in [0,1]$:*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_0^1 G_t(x,y)u_0(y)dy + \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)f(u(s,y))dyds \\ &+ \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)g(u(s,y))W(dyds), \end{aligned} \tag{III}$$

où $G_t(x,y)$ est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur homogène avec les conditions aux limites de Dirichlet :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}, G_0(x,y) = \delta_x(y) = \delta(x-y), G_t(x,0) = G_t(x,1) = 0.$$

Le noyau $G_t(x,y)$ est donné par la formule explicite suivante :

$$G_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{(y-x-2n)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(y+x-2n)^2}{4t}\right) \right\}.$$

D'autre part, $G_t(x,y)$ peut être interprété comme la densité de probabilités au point y du mouvement brownien de variance $2t$ commençant en x et disparaissant dès qu'il quitte l'intervalle $[0,1]$:

$$G_t(x,y) = \frac{d}{dy} E^x \left(B_t \in dy, B_s \in \left]0,1\right[, \forall s \in [0,t] \right).$$

Ceci implique que :

$$G_t(x,y) \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t} \right). \tag{9}$$

Par conséquent, pour tout $\beta > 0$, on a :

$$\int_0^1 G_t^\beta(x,y)dy \leq (4\pi t)^{-\beta/2} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\beta |z|^2}{4t} \right) dz = C_\beta t^{(1-\beta)/2}.$$

La solution dans le cas particulier $u_0 = 0$, $f = 0$ et $g = 1$ est donnée par :

$$u(t,x) = \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y) W(dyds).$$

Cette intégrale stochastique existe, c'est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance :

$$E\left[u(t,x)^2\right] = \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}^2(x,y)dyds = \int_0^t G_{2s}(x,x)ds < \infty,$$

car en utilisant (9) et les propriétés du semi groupe $G_t(x,y)$ suivantes :

$$\int_0^1 G_t(x,y)G_s(y,z)dy = G_{t+s}(x,z) \qquad \text{et} \qquad G_t(x,y) = G_t(y,x),$$

on trouve que $G_{2s}(x,x) \leq Cs^{-1/2}$.

Notons que dans le cas où la dimension de la variable d'espace $d \geq 2$, on a $G_{2s}(x,x) \backsim Cs^{-d/2}$ et la variance est infinie car le noyau de la chaleur $\theta(t,x)$ est donné par :

$$\theta(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\|x\|^2 / 4t \right),$$

et par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$E\left[u(t,x)^2\right] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G_{t-s}^2(x,y)dyds = \int_0^t G_{2s}(x,x)ds = \int_0^t Cs^{-d/2}ds = \infty.$$

Pour cette raison, l'étude des équations paraboliques dirigées par un bruit blanc en espace et en temps se limite au cas où la variable d'espace est de dimension un.

Remarque 2.2.3 *La formulation (III) est la plus utile car c'est elle qu'on utilise pour prouver l'existence et l'unicité de la solution.*

Proposition 2.2.4 *Les formulations (II) et (III) sont équivalentes.*

Preuve.

En multipliant l'équation (I) par $\varphi(x)$, $\varphi \in C^{\infty}([0,1])$ avec $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ et en intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(t,x)\varphi(x)dx &= \int_0^1 u_0(x)\varphi(x)dx + \int_0^t \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s,x)\varphi(x)dxds \\ &+ \int_0^t \int_0^1 f(u(s,x))\varphi(x)dxds + \int_0^t \int_0^1 g(u(s,x))\varphi(x)W(dxds).\end{aligned}$$

L'intégrale stochastique est bien définie, mais comme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ n'est pas défini, on intègre formellement deux fois par parties et puisque $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ et $u(t,0) = u(t,1) = 0$, on obtient :

$$\int_0^t \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s,x)\varphi(x)dxds = \int_0^t \int_0^1 u(s,x)\varphi^{''}(x)dxds.$$

Ainsi, on obtient une formulation correcte.

On cherche la solution u telle que pour tous $\varphi \in C^{\infty}([0,1])$ avec $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, on ait :

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(t,x)\varphi(x)dx &= \int_0^1 u_0(x)\varphi(x)dx + \int_0^t \int_0^1 u(s,x)\varphi^{''}(x)dxds \\ &+ \int_0^t \int_0^1 f(u(s,x))\varphi(x)dxds + \int_0^t \int_0^1 g(u(s,x))\varphi(x)W(dxds).\end{aligned}$$

D'un autre côté, si u satisfait (II), alors pour toute fonction $\psi(t,x) \in C^{\infty}([0,1] \times \mathbb{R}^{+})$ avec $\psi(t,0) = \psi(t,1) = 0$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(t,x)\psi(t,x)dx &= \int_0^1 u_0(x)\psi(0,x)dx + \int_0^t \int_0^1 u(s,x)\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(s,x) + \frac{\partial \psi}{\partial s}(s,x)\right]dxds \\ &+ \int_0^t \int_0^1 f(u(s,x))\psi(s,x)dxds + \int_0^t \int_0^1 g(u(s,x))\psi(s,x)W(dxds).\end{aligned}$$

En effet, en multipliant l'équation (I) par une fonction $\psi(t,x) \in C^{\infty}([0,1] \times \mathbb{R}^{+})$ avec

$\psi(t,0)=\psi(t,1)=0$, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_0^1\left[\int_0^t \frac{\partial u}{\partial s}(s,x)\psi(s,x)ds\right]dx &= \int_0^t\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s,x)\psi(s,x)dxds\\ &+\int_0^t\int_0^1 f(u(s,x))\psi(s,x)dxds\\ &+\int_0^t\int_0^1 g(u(s,x))\psi(s,x)W(dxds).\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 u(t,x)\psi(t,x)dx-\int_0^1 u(0,x)\psi(0,x)dx-\int_0^t\int_0^1 u(s,x)\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,x)dxds\\ =\ &\int_0^t\int_0^1 u(s,x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(s,x)dxds+\int_0^t\int_0^1 f(u(s,x))\psi(s,x)dxds\\ &+\int_0^t\int_0^1 g(u(s,x))\psi(s,x)W(dxds).\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(t,x)\psi(t,x)dx &= \int_0^1 u_0(x)\psi(0,x)dx+\int_0^t\int_0^1 u(s,x)\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(s,x)+\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,x)\right]dxds\\ &+\int_0^t\int_0^1 f(u(s,x))\psi(s,x)dxds+\int_0^t\int_0^1 g(u(s,x))\psi(s,x)W(dxds).\end{aligned}$$

Soit $G_t(x,y)$ la solution fondamentale de l'équation de la chaleur homogène satisfaisant les conditions aux limites de Dirichlet.

Définissons pour toute fonction régulière $\varphi:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$

$$G_t(\varphi,y)=\int_0^1 G_t(x,y)\varphi(x)dx.$$

Si $t\geq 0$ et $G_0(\varphi,y)=\int_0^1 G_0(x,y)\varphi(x)dx=\int_0^1\delta(x-y)\varphi(x)dx=\varphi(y)$, on peut intégrer (I) (avec ($f\ \equiv 0$ et $g\ \equiv 0$) par parties pour toute fonction $\varphi\in C^\infty([0,1])$ telle que $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ et on obtient :

$$G_t(\varphi,y)=\varphi(y)+\int_0^t G_s(\varphi'',y)ds. \tag{10}$$

Fixons $t>0$ et posons $\psi(s,x)=G_{t-s}(\varphi,x)$, alors $\psi(t,x)=G_0(\varphi,x)=\varphi(x)$ et

$\psi(0,x) = G_t(\varphi, x)$ et grâce à (10), ψ est une solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(s,x) + \frac{\partial \psi}{\partial s}(s,x) = 0.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
G_{t-s}(\varphi, x) &= \varphi(x) + \int_{u=s}^{t} G_{u-s}(\varphi'', x)du \\
&\Leftrightarrow \psi(s,x) = \psi(t,x) + \int_{u=s}^{t} \frac{\partial^2 G_{u-s}(\varphi, x)}{\partial x^2}du \\
&\Leftrightarrow \psi(t,x) - \psi(s,x) = -\int_{u=s}^{t} \frac{\partial^2 \psi(u,x)}{\partial x^2}du \\
&\Leftrightarrow \int_{u=s}^{t} \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,x)du = \int_{u=s}^{t} -\frac{\partial^2 \psi(u,x)}{\partial x^2}du \\
&\Leftrightarrow \int_{u=s}^{t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\right)(u,x)du = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(u,x) + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,x) = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi toute solution $u(t,x)$ de (II) satisfait :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u(t,x)\varphi(x)dx &= \int_0^1 u_0(y)G_t(\varphi, y)dy + \int_0^t \int_0^1 f(u(s,y))G_{t-s}(\varphi, y)dyds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 g(u(s,y))G_{t-s}(\varphi, y)W(dyds)
\end{aligned}$$

pour toute fonction $\varphi \in C^\infty([0,1])$ telle que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u(t,x)\varphi(x)dx &= \int_0^1 u_0(y)\left(\int_0^1 G_t(x,y)\varphi(x)dx\right)dy \\
&+ \int_0^t \int_0^1 f(u(s,y))\left(\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\varphi(x)dx\right)dyds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 g(u(s,y))\left(\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\varphi(x)dx\right)W(dyds).
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini et en rassemblant les termes, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u(t,x)\varphi(x)dx &= \int_0^1 \left[\int_0^1 u_0(y)G_t(x,y)dy + \int_0^t \int_0^1 f(u(s,y))G_{t-s}(x,y)dyds\right. \\
&\left.+ \int_0^t \int_0^1 g(u(s,y))G_{t-s}(x,y)W(dyds)\right]\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_0^1 G_t(x,y)u_0(y)dy + \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)f(u(s,y))dyds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)g(u(s,y))W(dyds) \end{aligned}$$

pour presque tous les (t,x) (par rapport à la mesure de Lebesgue).

Il reste à prouver que si u vérifie (III) et pour toute fonction $\varphi \in C^\infty([0,1])$ avec $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, alors le processus u vérifie (II).

Par constuction, le processus u vérifie :

$$\begin{aligned} u(t,x) &= u^0(t,x) + \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)f(u(s,y))dyds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)g(u(s,y))W(dyds), \end{aligned}$$

avec

$$u^0(t,x) = \int_0^1 G_t(x,y)u_0(y)dy$$

.

On peut donc écrire pour toute fonction $\varphi \in C^\infty([0,1])$ avec $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$:

$$\begin{aligned} \langle u(t,.),\varphi\rangle &= \left\langle u^0(t,.),\varphi\right\rangle + \int_0^t \int_0^1 \langle G_{t-s}(.,y),\varphi\rangle\, f(u(s,y))dyds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 \langle G_{t-s}(.,y),\varphi\rangle\, g(u(s,y))W(dyds) \end{aligned} \tag{11}$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2([0,1])$. Or u^0 vérifie :

$$\left\langle u^0(t,.),\varphi\right\rangle = \langle u_0,\varphi\rangle + \int_0^t \left\langle u^0(s,.),\varphi''\right\rangle ds\ . \tag{12}$$

De la même façon et en utilisant (10), on a :

$$\langle G_{t-s}(.,y),\varphi\rangle = \varphi(y) + \int_{u=s}^t \left\langle G_{u-s}(.,y),\varphi''\right\rangle du \tag{13}$$

En reportant (12) et (13) dans (11) et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\langle u(t,.),\varphi\rangle &= \langle u_0,\varphi\rangle + \int_0^t \left\langle u^0(s,.),\varphi^{''}\right\rangle ds \\
&+ \int_0^t\int_0^1 \left(\varphi(y) + \int_{u=s}^t \left\langle G_{u-s}(.,y),\varphi^{''}\right\rangle du\right) f(u(s,y))dyds \\
&+ \int_0^t\int_0^1 \left(\varphi(y) + \int_{u=s}^t \left\langle G_{u-s}(.,y),\varphi^{''}\right\rangle du\right) g(u(s,y))W(dsdx).
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
\langle u(t,.),\varphi\rangle &= \langle u_0,\varphi\rangle + \int_0^t \left\langle u^0(s,.),\varphi^{''}\right\rangle ds + \int_0^t\int_0^1 f(u(s,y))\varphi(y)dyds \\
&+ \int_0^t\int_0^1 g(u(s,y))\varphi(y)W(dsdx) \\
&+ \int_0^t \left[\int_{u=s}^t\int_0^1 \left\langle G_{u-s}(.,y),\varphi^{''}\right\rangle f(u(s,y))dyds\right] du \\
&+ \int_0^t \left[\int_{u=s}^t\int_0^1 \left\langle G_{u-s}(.,y),\varphi^{''}\right\rangle g(u(s,y))W(dsdx)\ \right] du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ \ &\langle u(t,.),\varphi\rangle = \langle u_0,\varphi\rangle + \int_0^t \left\langle u(s,.),\varphi^{''}\right\rangle ds + \int_0^t\int_0^1 f(u(s,y))\varphi(y)dyds \\
&+ \int_0^t\int_0^1 g(u(s,y))\varphi(y)W(dsdx).
\end{aligned}
$$

Par conséquent, u vérifie :

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 u(t,x)\varphi(x)dx &= \int_0^1 u_0(x)\varphi(x)dx + \int_0^t\int_0^1 u(s,x)\varphi^{''}(x)dxds \\
&+ \int_0^t\int_0^1 f(u(s,x))\varphi(x)dxds + \int_0^t\int_0^1 g(u(s,x))\varphi(x)W(dxds)
\end{aligned}
$$

et donc le processus $u(t,x)$ est bien solution de (II). ■

Chapitre 3

Théorèmes d'existence et d'unicité de la solution de l'équation de la chaleur stochastique.

3.1 Cas lipschitzien

Dans cette section, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation de la chaleur stochastique dirigée par un bruit blanc en espace et en temps où les coefficients f et g satisfont les conditions de Lipschitz.

Considérons l'équation aux dérivés partielles stochastique sur $[0, +\infty[\times [0, 1]$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(u(t,x)) + g(u(t,x))\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}(t,x) \tag{1.1}$$

avec la condition initiale $u(0,x) = u_0(x)$ et les conditions aux limites de Dirichlet $u(t,0) = u(t,1) = 0$, où $\{W(t,x)\ ,\ t \geqslant 0\ ,\ x \in [0,1]\}$ est un drap brownien défini sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ telle que $\mathcal{F}_0$ contienne tous les ensembles de $P-$mesure nulle. On rappelle que c'est un processus aléatoire gaussien centré adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ de fonction de covariance :

$$E\left[W(s,x)W(t,y)\right] = (s \wedge t)(x \wedge y)$$

pour tout $s, t \geq 0$ et $x, y \in [0, 1]$.

- les fonctions f et g sont des fonctions continues de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés :

1) $\exists K_1 > 0$ tel que $\forall u, u^{'} \in \mathbb{R}$:

$$\left|f(u) - f(u^{'})\right| + \left|g(u) - g(u^{'})\right| \leqslant K_1 \left|u - u^{'}\right|.$$

(condition de Lipschitz).

2) $\exists K_2 > 0$ tel que $\forall u \in \mathbb{R}$:

$$|f(u)|^2 + |g(u)|^2 \leqslant K_2(1 + |u|^2).$$

(condition de restriction sur la croissance).

- $u_0(x)$ est $\mathcal{F}_0-$mesurable pour tout $x \in [0,1]$ et $\sup_{0\leq x\leq 1} E\left[|u_0(x)|^2\right] < \infty$.

Comme on l'a déjà vu, il y a deux manières de donner une signification rigoureuse à l'EDPS (1.1).

La première consiste à écrire l'équation sous la forme faible, c.à.d $\{u(t,x)\}$ est une solution si pour toute $\varphi \in C^2([0,1])$ avec $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(t,x)\varphi(x)dx &= \int_0^1 u_0(x)\varphi(x)dx + \int_0^t \int_0^1 u(s,x)\varphi''(x)dxds \\ &+ \int_0^t \int_0^1 f(u(s,x))\varphi(x)dxds \\ &+ \int_0^t \int_0^1 g(u(s,x))\varphi(x)W(dxds) \end{aligned} \tag{1.2}$$

La seconde consiste à écrire l'équation sous la forme intégrale en utilisant le noyau de la chaleur $G_t(x,y)$. Dans cette formulation $\{u(t,x)\}$ est une solution si elle vérifie l'équation intégrale stochastique suivante : pour tous $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_0^1 G_t(x,y)u_0(y)dy + \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)f(u(s,y))dyds \\ &+ \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)g(u(s,y))W(dyds), \end{aligned} \tag{1.3}$$

où $G_t(x,y)$ est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur homogène avec les conditions aux limites de Dirichlet.

On a déja démontré que les deux formulations sont équivalentes.

Théorème 3.1.1 ***(Existence et unicité)***

Supposons que les coefficients f et g satisfont les conditions de Lipschitz globale et de restriction sur la croissance, $u_0(x)$ est $\mathcal{F}_0-$mesurable pour tout $x \in [0,1]$ et

$$\sup_{0\leq x\leq 1} E\left[|u_0(x)|^2\right] < \infty.$$

Alors il existe un unique processus aléatoire adapté $u = \{u(t,x)\ ,\ t \geq 0\ ,\ x \in]0,1[\}$ sa-

tisfaisant (1.2) tel que pour tout $T > 0$:

$$\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{0\leq x\leq 1} E\left[|u(t,x)|^2\right] < \infty. \tag{1.4}$$

Pour la démonstration, on a besoin de quelques résultats qui constituent des outils essentiels.

Lemme 3.1.2 ***(Lemme de Gronwall)***

Soit $t \to X(t)$ une application de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$, telle qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec

$$X(t) \leq a + b\int_0^t X(s)ds,$$

alors :

$$X(t) \leq ae^{bt}.$$

Lemme 3.1.3 ***(Isométrie de Itô)***

Soit $\{h(t,x), (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1]\}$ un processus aléatoire $\mathcal{F}_t-$mesurable et tel que

$$\int_0^t\int_0^1 E\left[h(s,x)^2\right] dsdx < \infty,$$

pour tout $t > 0$, on a l'isométrie de Itô :

$$E\left[\left(\int_0^t\int_0^1 h(s,x)W(dsdx)\right)^2\right] = \int_0^t\int_0^1 E\left[h(s,x)^2\right] dsdx.$$

Lemme 3.1.4 **(Hölder)** *[2]*

Soient f et h deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et μ une mesure positive telles que $f.h \in L^1(\mu)$. Alors pour tout $q > 1$, on a :

$$\left|\int f\,|h|\,d\mu\right|^q \leq \left(\int |f|^q\,|h|\,d\mu\right)(|h|\,d\mu)^{q-1}.$$

Lemme 3.1.5 *[2]*

Soient $\theta > 0, \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de fonctions positives sur $[0,T]$ et α, β deux nombres réels positifs tels que pour tous $0 \leq t \leq T$ et $n \geq 1$:

$$f_n(t) \leq \alpha + \int_0^t \beta\ f_{n-1}(s)(t-s)^{\theta-1}ds.$$

Si $\sup_{0\leq t\leq T} f_0(t) = M$, alors $\sup_{n\geq 0}\sup_{0\leq t\leq T} f_n(t) < \infty$ et si $\alpha = 0$ alors $\sum_{n\geq 0} f_n(t)$ converge uniformément sur $[0,T]$.

Preuve. (**Unicité**)
Supposons que u et v satisfont (1.3) et la condition d'intégrabilité (1.4).
Soit $d(t,x) = u(t,x) - v(t,x)$, alors :

$$\begin{aligned} E\left[d^2(t,x)\right] &\leq 2E\left[\left(\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\left[f(u(s,y)) - f(v(s,y))\right]dyds\right)^2\right] \\ &\quad +2E\left[\left(\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\left[g(u(s,y)) - g(v(s,y))\right]W(dyds)\right)^2\right]. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur le premier terme et l'isométrie de Itô sur le deuxième et la condition de Lipschitz pour f et g, on obtient :

$$\begin{aligned} E\left[d^2(t,x)\right] &\leq 2K^2E\left[\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}^2(x,y)\left[u(s,y) - v(s,y)\right]^2 dyds \times \int_0^t\int_0^1 dyds\right] \\ &\quad +2K^2E\left[\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}^2(x,y)\left[u(s,y) - v(s,y)\right]^2 dyds\right] \\ &\leq 2K^2(t+1)\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}^2(x,y)E\left[d^2(s,y)\right]dyds. \end{aligned}$$

Posons :

$$H(t) = \sup_{0\leq s\leq t}\sup_{0\leq x\leq 1} E\left[d^2(s,x)\right].$$

D'après ce qui précède, on a :

$$H(t) \leq 2K^2(t+1)\int_0^t H(s)\left(\int_0^1 G_{t-s}^2(x,y)dy\right)ds.$$

En utilisant (9) et les propriétés du semi groupe $G_{t-s}(x,y)$ suivantes :

$$\int_0^1 G_t(x,y)G_s(y,z)dy = G_{t+s}(x,z) \qquad \text{et} \qquad G_t(x,y) = G_t(y,x),$$

on obtient :

$$\int_0^1 G_t^2(x,y)dy = G_{2t}(x,x) \leq Ct^{-1/2}.$$

Par conséquent :

$$H(t) \leq 2K^2C(t+1)\int_0^t \frac{H(s)}{\sqrt{t-s}}ds.$$

Par itération, on obtient :

$$H(t) \leq (2K^2C)^2(s+1)(t+1)\int_0^t\int_0^s \frac{H(u)}{\sqrt{(t-s)(s-u)}}duds.$$

On interchange l'ordre d'intégration et on pose $\alpha = t-u$ et $\beta = s-u$, alors :

$$\int_u^t \frac{ds}{\sqrt{(t-s)(s-u)}} = \int_0^\alpha \frac{d\beta}{\sqrt{(\alpha-\beta)\beta}} = \frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha \frac{d\beta}{\sqrt{1-(\frac{2}{\alpha}\beta-1)^2}}.$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha \frac{d\beta}{\sqrt{1-(\frac{2}{\alpha}\beta-1)^2}} = \int_{-1}^1 \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} = [\arcsin]_{-1}^1 = \pi,$$

et donc :

$$H(t) \leq \pi(2K^2C)^2(s+1)(t+1)\int_0^t H(s)ds.$$

Appliquons le lemme de Gronwall pour $b = \pi(2K^2C)^2(s+1)(t+1)$ et $a = 0$, on trouve $H(t) \equiv 0$, d'où $E\left[d^2(t,x)\right] = 0$ et donc on a :

$$u(t,x) = v(t,x) \quad \text{p.s} \;\; \forall t \geq 0, x \in [0,1].$$

(**Existence**)

Nous désignerons dans cette démonstration par C une constante positive, dépendante de T . La valeur de C peut changer sans que ce soit indiqué.

On cherche une solution de l'équation (1.3) qui sera aussi solution de l'équation (1.2) grâce à l'equivalence entre les deux formulations.

Soit l'itération de Picard :

$$\begin{cases} u^0(t,x) = \int_0^1 G_t(x,y)u_0(y)dy \\ u^{n+1}(t,x) = u^0(t,x) + A_n(t,x) + B_n(t,x), \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} A_n(t,x) &= \int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)f(u^n(s,y))dyds \\ B_n(t,x) &= \int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)g(u^n(s,y))xW(dyds). \end{aligned}$$

$1^{ère}$ **étape** :

Montrons que pour $t > 0$:

$$\sup_{n\geq 0}\sup_{0\leq s\leq t}\sup_{0\leq x\leq 1} E\left[|u^n(s,x)|^2\right] < \infty. \tag{1.5}$$

On a :

$$E\left[\left|u^{n+1}(t,x)\right|^2\right] \leq C\left\{E\left[\left|u^0(t,x)\right|^2\right] + E\left[|A_n(t,x)|^2\right] + E\left[|B_n(t,x)|^2\right]\right\}.$$

Considérons chacun des trois termes du second membre.

Grâce au lemme de Hölder pour $f = u_0(y)$ et $h = G_t(x,y)$, on a :

$$\left|u^0(t,x)\right|^2 \leq \left(\int_0^1 G_t(x,y)\left|u_0(y)\right|^2 dy\right).$$

Prenons l'espérance et appliquons le théorème de Fubini, on obtient :

$$E\left[\left|u^0(t,x)\right|^2\right] \leq E\left[|u_0(y)|^2\right]\int_0^1 G_t(x,y) \leq \sup_{0\leq y\leq 1} E\left[|u_0(y)|^2\right].$$

Puisque $\sup_{0\leq x\leq 1} E\left[|u_0(x)|^2\right] < \infty$, alors :

$$\sup_{0\leq s\leq t}\sup_{0\leq x\leq 1} E\left[\left|u^0(s,x)\right|^2\right] < \infty.$$

D'un autre côté :

$$E\left[|A_n(t,x)|^2\right] = E\left[\left|\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)f(u^n(s,y))dyds\right|^2\right].$$

En appliquant le lemme de Hölder pour $f = f(u^n(s,y))$ et $h = G_t(x,y)$ et la condition de restriction sur la croissance pour f, on obtient :

$$\begin{aligned}
E\left[|A_n(t,x)|^2\right] &\leq E\left[\left(\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\left|f(u^n(s,y))\right|^2 dyds\right)\left(\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)dyds\right)\right] \\
&\leq tK\int_0^t \left(1 + E\left[|u^n(s,y)|^2\right]\right)ds \\
&\leq C\int_0^t \left(1 + \sup_{0\leq s\leq t}\sup_{0\leq y\leq 1} E\left[|u^n(s,y)|^2\right]\right)ds
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$E\left[|B_n(t,x)|^2\right] = E\left[\left|\int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)g(u^n(s,y))W(dyds)\right|^2\right].$$

En utilisant l'isométrie de Itô et la condition de restriction sur la croissance pour g, on obtient :

$$\begin{aligned} E\left[|B_n(t,x)|^2\right] &\leq E\left[\left(\int_0^t \int_0^1 G_{t-s}^2(x,y)\left|g(u^n(s,y))\right|^2 dyds\right)\right] \\ &\leq C\int_0^t \left(1 + E\left[|u^n(s,y)|^2\right]\right)(t-s)^{-1/2}ds \\ &\leq C\int_0^t \left(1 + \sup_{0\leq s\leq t}\sup_{0\leq y\leq 1} E\left[|u^n(s,y)|^2\right]\right)(t-s)^{-1/2}ds. \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$E\left[\left|u^{n+1}(t,x)\right|^2\right] \leq C\left\{E\left[\left|u^0(t,x)\right|^2\right] + \int_0^t \left(1 + \sup_{0\leq y\leq 1} E\left[|u^n(s,y)|^2\right]\right)\left((t-s)^{-1/2}+1\right)ds\right\},$$

et donc :

$$\sup_{0\leq s\leq t}\sup_{0\leq x\leq 1} E\left[\left|u^{n+1}(s,x)\right|^2\right] \leq C\left(1 + \int_0^t \sup_{0\leq s\leq t}\sup_{0\leq y\leq 1} E\left[|u^n(s,y)|^2\right](t-s)^{-1/2}ds\right),$$

où C est une constante positive.

Soit H_n une fonction réelle croissante définie sur $[0,T]$ par :

$$H(t) = \sup_{0\leq s\leq t}\sup_{0\leq x\leq 1} E\left[\left|u^{n+1}(s,x)\right|^2\right].$$

Il est clair que H_0 est bornée sur $[0,T]$, alors d'après le lemme 3.1.5, on a :

$$\sup_{n\geq 0}\sup_{0\leq t\leq T} H_n(t) < \infty,$$

ce qui implique que :

$$\sup_{n\geq 0}\sup_{0\leq s\leq t}\sup_{0\leq x\leq 1} E\left[|u^n(s,x)|^2\right] < \infty.$$

$2^{ème}$ **étape** :

Montrons que $\{u^n(t,x)\ ,\ n\geq 0\}$ est une suite convergente dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Soient

$n \geq 0$ et $0 \leq t \leq T$. On définit la fonction M_n sur $[0,T]$ par :

$$M_n(t) = \sup_{0\leq s\leq t}\sup_{0\leq x\leq 1} E\left[\left|u^{n+1}(s,x) - u^n(s,x)\right|^2\right].$$

Posons $d^n(t,x) = u^{n+1}(t,x) - u^n(t,x)$, alors :

$$\begin{aligned} E\left[|d^n(t,x)|^2\right] &\leq 2E\left[\left(\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\left|f(u^n(s,y)) - f(u^{n-1}(s,y))\right| dyds\right)^2\right] \\ &\quad +2E\left[\left(\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\left|g(u^n(s,y)) - g(u^{n-1}(s,y))\right| W(dyds)\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Grâce à la condition de Lipschitz sur f et g et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur le premier terme et l'isométrie de Itô sur le deuxième, on obtient :

$$\begin{aligned} E\left[|d^n(t,x)|^2\right] &\leq 2K^2E\left[\left(\int_0^t\int_0^1 G^2_{t-s}(x,y)\left|u^n(s,y) - u^{n-1}(s,y)\right|^2 dyds \times \int_0^t\int_0^1 dyds\right)\right] \\ &\quad +2K^2E\left[\left(\int_0^t\int_0^1 G^2_{t-s}(x,y)\left|u^n(s,y) - u^{n-1}(s,y)\right|^2 dyds\right)\right] \\ &\leq 2K^2C(t+1)\int_0^t E\left[\left|u^n(s,y) - u^{n-1}(s,y)\right|^2\right](t-s)^{-1/2}ds \\ &\leq C_t\int_0^t E\left[|d^n(s,y)|^2\right](t-s)^{-1/2}ds, \end{aligned}$$

où $C_t = 2K^2C(t+1)$ est une constante positive.

Ceci implique :

$$\sup_{0\leq s\leq t}\sup_{0\leq x\leq 1} E\left[|d^n(s,x)|^2\right] \leq C_t\int_0^t \sup_{0\leq s\leq t}\sup_{0\leq y\leq 1} E\left[|d^n(s,y)|^2\right](t-s)^{-1/2}ds,$$

et donc on a :

$$M_n(t) \leq C_t\int_0^t M_{n-1}(t)\,(t-s)^{-1/2}ds.$$

D'autre part, à partir de (1.5), on a $\sup_{0\leq t\leq T} M_0(t) < \infty$ et puisque $\alpha = 0$, alors d'après le dernier lemme 3.1.5, la série $\sum_{n\geq 0} M_n(t)$ converge uniformément sur $[0,T]$. La suite $\{u_n(t,x)\ ,\ n \geq 0\}$ est donc de Cauchy dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ et par conséquent la suite $\{u_n(t,x)\}$ converge dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ uniformément relativement à t et x vers une limite $u(t,x)$. Il est facile de voir que $u(t,x)$ satisfait (1.4).

Posons :

$$\begin{aligned}\Phi(u)(t,x) &= \int_0^1 G_t(x,y)u_0(y)dy + \int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)f(u(s,y))dyds \\ &\quad + \int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)g(u(s,y))W(dyds).\end{aligned}$$

De la même manière, il est facile de montrer que si

$$u(t,x)\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P),\ \text{alors } \Phi(u)(t,x)\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P), \forall(t,x)\in[0,T]\times[0,1].$$

Il reste à démontrer que si

$$\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le x\le 1} E\left[|u^n(t,x)-u(t,x)|^2\right]\to 0, \text{alors } \sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le x\le 1} E\left[|\Phi^n(u)(t,x)-\Phi(u)(t,x)|^2\right]\to 0.$$

Posons $\Psi^n(u)(t,x)=\Phi^n(u)(t,x)-\Phi(u)(t,x)$, alors on a :

$$\begin{aligned}E\left[|\Psi^n(u)(t,x)|^2\right] &\le 2E\left[\left(\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\left|f(u^n(s,y))-f(u(s,y))\right|dyds\right)^2\right] \\ &\quad +2E\left[\left(\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\left|g(u^n(s,y))-g(u(s,y))\right|W(dyds)\right)^2\right].\end{aligned}$$

Grâce à la condition de Lipschitz sur f et g et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur le premier terme et l'isométrie de Itô sur le deuxième, on obtient :

$$\begin{aligned}E\left[|\Psi^n(u)(t,x)|^2\right] &\le 2K^2E\left[\left(\int_0^t\int_0^1 G^2_{t-s}(x,y)\left|u^n(s,y)-u(s,y)\right|^2 dyds\times\int_0^t\int_0^1 dyds\right)\right] \\ &\quad +2K^2E\left[\left(\int_0^t\int_0^1 G^2_{t-s}(x,y)\left|u^n(s,y)-u(s,y)\right|^2 dyds\right)\right] \\ &\le 2K^2C(t+1)\int_0^t E\left[|u^n(s,y)-u(s,y)|^2\right](t-s)^{-1/2}ds \\ &\le C_t\int_0^t E\left[|\Psi^n(u)(t,x)|^2\right](t-s)^{-1/2}ds,\end{aligned}$$

où $C_t=2K^2C(t+1)$ est une constante positive. Ceci implique :

$$\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le x\le 1}E\left[|\Psi^n(u)(t,x)|^2\right]\le C_t\int_0^t \sup_{0\le s\le t}\sup_{0\le y\le 1}E\left[|u^n(s,y)-u(s,y)|^2\right](t-s)^{-1/2}ds\to 0.$$

Ainsi, la suite $\Phi^n(u)(t,x)$ converge uniformément dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ vers une limite $\Phi(u)(t,x)$

et donc on a :

$$u^{n+1}(t,x) = \Phi^n(u)(t,x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u^{n+1}(t,x) = \lim_{n\to\infty} \Phi^n(u)(t,x) \Rightarrow u(t,x) = \Phi(u)(t,x).$$

Finalement $u(t,x)$ satisfait l'équation (1.3) et pour $T > 0$:

$$\sup_{0\leq t\leq T} \sup_{0\leq x\leq 1} E\left[|u(t,x)|^2\right] < \infty,$$

ce qui prouve l'existence de la solution. ■

Remarque 3.1.6 *On peut montrer, en utilisant le critère de Kolmogorov, qu'il existe une modification continue de $u(t,x)$ de l'EDPS (1.1).*

3.2 Cas non lipschitzien

Dans cette section, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation de la chaleur stochastique quand les coefficients f et g ne sont pas lipschitziens mais vérifient quelques conditions plus faibles.

Considérons l'équation de la chaleur stochastique suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + f(t,x,u(t,x)) + g(t,x,u(t,x))\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}W(t,x), t>0, x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), t\geqslant 0, x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\{W(t,x), t\geqslant 0, x\in\mathbb{R}\}$ est le drap brownien dit recto-verso **[22]** défini sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$. C'est un processus aléatoire gaussien centré adapté a la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ de fonction de covariance :

$$E\left[W(s,x)W(t,y)\right] = \frac{1}{2}\min(s,t)(|x|+|y|-|x-y|)$$

pour tous $s,t\geqslant 0, x,y\in\mathbb{R}$.

W peut être considéré comme la composition de deux draps browniens indépendants, l'un est dans la direction positive de la variable d'espace et l'autre dans la direction negative.

Les coefficients f,g :$[0,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont des fonctions continues mais non linéaires en général.

Précisons maintenant la notion de solution pour cette équation.

Un processus aléatoire prédictible $\{u(t,x), t\geqslant 0, x\in\mathbb{R}\}$ est une solution mild de l'EDPS (2.1) s'il satisfait l'équation intégrale stochastique suivante :

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} G_t(x,y)u_0(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y)f(s,y,u(s,y))dsdy \qquad (2.2)\\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y)g(s,y,u(s,y))W(dsdy),
\end{aligned}
$$

où $G_t(x,y) = (2\pi t)^{-1/2}\exp(-(x-y)^2/2t)$ est la solution fondamentale du problème de Cauchy homogène associé à (2.1).

Considérons les espaces suivants :

Soit $B_r, r \in \mathbb{R}$, l'espace des fonctions mesurables Φ définies sur $\mathbb{R}$, telles que $|\Phi(x)|\, e^{-r|x|}$ soit bornée presque sûrement.

On munit B_r de la norme $\|\Phi\|_r = \operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\Phi(x)|\, e^{-r|x|}$.

Soit $C_r = C(\mathbb{R}) \cap B_r$ où $C(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues définis sur $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{S}_{r,p,T}$, $r \in \mathbb{R}, p \geqslant 2, T > 0$ l'espace des processus aléatoires$\{X(t,x),\ t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}\}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tels que $\sup\limits_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} e^{-r|x|}E\left[|X(t,x)|^p\right] < \infty$.

On munit $\mathcal{S}_{r,p,T}$ de la norme $\|X\|_{\ r,p,T} = \sup\limits_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} e^{-r|x|}E\left[|X(t,x)|^p\right]$.

$\mathcal{S}_{r,p,T}$ est un espace de Banach pour chaque $r > 0$ et $p \geqslant 2$. Pour $p = 2$, on note $\mathcal{S}_{r,T}$ et $\|.\|_{r,T}$.

Pour assurer l'existence et l'unicité de la solution de (2.1), on impose l'hypothèse suivante sur les coefficients f et g.

On dit que l'hypothèse (A) est satisfaite, s'il existe un entier $p > 12$ tel que :

A1) Il existe une fonction positive $\varphi(t,v)$ définie sur $[0,T] \times \mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ croissante, continue en $v \in \mathbb{R}_+$ pour $t \in [0,T]$ fixé et intégrable sur $[0,T]$ pour $v \in \mathbb{R}_+$ fixé, telle que pour $r > 0$:

$$
E\left[|f(t,x,X(x))|^p\right] + E\left[|g(t,x,X(x))|^p\right] \leq e^{r|x|}\varphi\left(t, e^{-r|x|}E\left[|X(x)|^p\right]\right)
$$

pour $t \in [0,T]$ et $X(x) \in L^p\ (\Omega, \mathcal{F}, P)$, où $x \in \mathbb{R}$.

A2) Pour tout nombre ζ positif, l'équation différentielle $\beta^{'}(t) = \zeta\varphi(t,\beta(t))$ avec $\beta(0) = \beta_0 \geq 0$ admet une solution globale dans $[0,T]$.

A3) Il existe une fonction positive $\Psi(t,v)$ définie sur $[0,T] \times \mathbb{R}_+$ telle que :

$$
\begin{aligned}
& E\left[|f(t,x,X(x)) - f(t,x,Y(x))|^p\right] + E\left[|g(t,x,X(x)) - g(t,x,Y(x))|^p\right] \\
\leq\ & e^{r|x|}\Psi\left(t, e^{-r|x|}E\left[|X(x) - Y(x)|^p\right]\right)
\end{aligned}
$$

pour $t \in [0,T]$ et $X(x), Y(x) \in L^p\ (\Omega, \mathcal{F}, P)$, où $x \in \mathbb{R}$.

A4) L'application $v \to \Psi(t,v)$ est continue, croissante pour $t \in [0,T]$ fixé et

$t \to \Psi(t,v)$ est intégrable sur $[0,T]$, pour $v \in \mathbb{R}_+$ fixé. De plus $\Psi(t,0) \equiv 0, \forall t \in [0,T]$.

A5) Pour tout $\alpha > 0$, la seule fonction positive $Z(t)$ satisfaisant :

$$Z(t) \leq \alpha \int_0^t \Psi(s, Z(s))ds \ , \quad \forall t \in [0,T]$$

est la fonction $Z \equiv 0$.

Théorème 3.2.1 *Supposons que les coefficients de l'équation (2.1) vérifient l'hypothèse (A) et que* $\{u_0(x), x \in \mathbb{R}\}$ *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_0-$*mesurable à valeurs dans* C_r, *telle que* $\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-r|x|} E\left[|u_0(x)|^p\right] < \infty$. *Alors il existe un unique processus aléatoire continu* $\{u(t,x) : t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}\}$ *à valeurs dans* C_r *satisfaisant l'équation (2.2) et* $u \in \mathcal{S}_{r,p,T}$.

Avant de démontrer le théorème, on commence par présenter quelques inégalités fondamentales concernant le noyau de la chaleur $G_t(x,y)$.

Lemme 3.2.2 *[22]*

1) *Pour tous* $r \in \mathbb{R}$ *et* $T > 0$, *il existe une constante* C *dépendant seulement de* T *et* r *telle que :*

$$\int_{\mathbb{R}} G_t(x,y) e^{r|y|} dy \leq C e^{r|x|} \ , \forall x \in \mathbb{R} \ , \forall 0 \leq t \leq T.$$

2) *Si* $0 < q < 3$, *alors il existe une constante positive* C *telle que :*

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_{t-s}(x,y)|^q \, dsdy \leq C t^{\frac{3-q}{2}} \ , \forall x \in \mathbb{R} \ , \ \forall 0 \leq t \leq T.$$

Preuve. (**Existence**)

Afin de simplifier les notations, on omettra souvent les dépendances de f et g en s et y pour ne garder que celle en u qui est la plus importante dans les calculs.

La constante C denote une constante positive dépendant de r, T et p qui peut changer d'une ligne à l'autre.

Soit la fonctionnelle Φ définie par :

$$\begin{aligned} \Phi(u)(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} G_t(x,y) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y) f(u(s,y)) dsdy \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y) g(u(s,y)) W(dsdy) \ . \\ &= \Phi_0(t,x) + \Phi_1(t,x) + \Phi_2(t,x). \end{aligned}$$

Φ est une application continue dans $\mathcal{S}_{r,p,T}$. En effet pour $u \in \mathcal{S}_{r,p,T}$, on a :

$$E\left[|\Phi(u)(t,x)|^p\right] \leq 3^{p-1}\left\{E\left[|\Phi_0(t,x)|^p\right] + E\left[|\Phi_1(t,x)|^p\right] + E\left[|\Phi_2(t,x)|^p\right]\right\}.$$

En appliquant les inégalités de Burkholder et de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned}
E\left[|\Phi_2(t,x)|^p\right] &\leq CE\left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x,y) g^2(u(s,y)) dsdy\right)^{\frac{p}{2}}\right] \\
&\leq C \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^{\frac{2p-2}{p-2}}(x,y) dsdy\right)^{\frac{p-2}{2}} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y) E\left[|g(u(s,y))|^p\right] dsdy\right).
\end{aligned}$$

Puisque $u \in \mathcal{S}_{r,p,T}$, d'après le lemme et la condition (A1), on a :

$$\begin{aligned}
E\left[|\Phi_2(t,x)|^p\right] &\leq Ct^{\frac{p-4}{4}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y) e^{r|y|} \varphi(s, e^{-r|y|} E\left[|u(s,y)|^p\right]) dsdy \\
&\leq C_1 e^{r|x|} \int_0^t \varphi(s, \sup_{y \in \mathbb{R}} e^{-r|y|} E\left[|u(s,y)|^p\right]) ds,
\end{aligned}$$

où C_1 est une constante positive dépendante de T et p.

De manière analogue, on a :

$$\begin{aligned}
E\left[|\Phi_1(t,x)|^p\right] &\leq t^{p-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y) E\left[|f(u(s,y))|^p\right] dsdy \\
&\leq t^{p-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y) e^{r|y|} \varphi(s, e^{-r|y|} E\left[|u(s,y)|^p\right]) dsdy \\
&\leq t^{p-1} e^{r|x|} \int_0^t \varphi(s, \sup_{y \in \mathbb{R}} e^{-r|y|} E\left[|u(s,y)|^p\right]) ds.
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Hölder, on a :

$$E\left[|\Phi_0(t,x)|^p\right] \leq \int_{\mathbb{R}} G_t(x,y) E\left[|u_0(y)|^p\right] dy \leq e^{r|x|} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{-r|x|} E\left[|u_0(x)|^p\right].$$

En rassemblant les trois inégalités, on obtient :

$$\begin{aligned}
E\left[|\Phi(u)(t,x)|^p\right] \leq\ & 3^{p-1} e^{r|x|} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{-r|x|} E\left[|u_0(x)|^p\right] \\
& + C_2 e^{r|x|} \int_0^t \varphi(s, \sup_{y \in \mathbb{R}} e^{-r|y|} E\left[|u(s,y)|^p\right]) ds,
\end{aligned}$$

où $C_2 = 3^{p-1}(C_1 + T^{p-1})$.

Puisque $u, u_0 \in \mathcal{S}_{r,p,T}$ et φ est intégrable et monotone, alors $\Phi(u) \in \mathcal{S}_{r,p,T}$.

Soient u_1 et $u_2 \in \mathcal{S}_{r,p,T}$. En utilisant les mêmes techniques et les conditions (A3) et (A4), on obtient :

$$\begin{aligned} E\left[|\Phi(u_1)(t,x) - \Phi(u_2)(t,x)|^p\right] &\leq 2^{p-1}E\left[|\Phi_1(u_1)(t,x) - \Phi_1(u_2)(t,x)|^p\right] \\ &\quad +2^{p-1}E\left[|\Phi_2(u_1)(t,x) - \Phi_2(u_2)(t,x)|^p\right]. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Burkholder et Hölder ainsi que la condition (A3) et le lemme 3.2.2 on obtient :

$$\begin{aligned} E\left[|\Phi_2(u_1) - \Phi_2(u_2)|^p\right] &= E\left[\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y)\left(g(u_1(s,y)) - g(u_2(s,y))\right)W(dsdy)\right|^p\right] \\ &\leq C\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y)e^{r|y|}\Psi(s, e^{-r|y|}E\left[|u_1(s,y) - u_2(s,y)|^p\right])dsdy \\ &\leq Ce^{r|x|}\int_0^t \Psi(s, \sup_{y\in\mathbb{R}} e^{-r|y|}E\left[|u_1(s,y) - u_2(s,y)|^p\right])ds. \end{aligned}$$

De manière analogue, on a :

$$\begin{aligned} E\left[|\Phi_1(u_1) - \Phi_1(u_2)|^p\right] &= E\left[\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y)\left|f(u_1(s,y)) - f(u_2(s,y))\right|dsdy\right|^p\right] \\ &\leq Ce^{r|x|}\int_0^t \Psi(s, \sup_{y\in\mathbb{R}} e^{-r|y|}E\left[|u_1(s,y) - u_2(s,y)|^p\right])ds. \end{aligned}$$

D'où :

$$E\left[|\Phi(u_1)(t,x) - \Phi(u_2)(t,x)|^p\right] \leq Ce^{r|x|}\int_0^t \Psi(s, \sup_{y\in\mathbb{R}} e^{-r|y|}E\left[|u_1(s,y) - u_2(s,y)|^p\right])ds,$$

où C est une constante positive dépendante de p et T.

Par conséquent, on a :

$$\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\|_{r,p,t} \leq C\int_0^t \Psi(s, \|u_1 - u_2\|_{r,p,s})ds, \forall t \in [0,T].$$

Grâce à la condition (A4) et la continuité de Ψ ainsi que le théorème de la convergence dominé, on conclut que Φ est continue dans $\mathcal{S}_{r,p,T}$.

On définit la suite des approximations successives $\{u^n\}_{n\geq 0}$, par :

$$\begin{cases} u^0(t,x) = \int_{\mathbb{R}} G_t(x,y)u_0(y)dy \\ u^n(t,x) = u^0(t,x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y)f(s,y,u^{n-1}(s,y))dsdy \\ \qquad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y)g(s,y,u^{n-1}(s,y))W(ds,dy). \end{cases}$$

On montre par récurrence que u^n est uniformement bornée dans $\mathcal{S}_{r,p,T}$. En utilisant les arguments similaires à ceux utilisés précédemment, on a :

$$\|u^n\|_{r,p,t} \leq 3^{p-1} \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-r|x|} E\left[|u_0(x)|^p\right] + C_2 \int_0^t \varphi(s, \left\|u^{n-1}\right\|_{r,p,s}) ds, \ \forall t \in [0,T].$$

Soit $\beta(t)$ une solution de l'équation différentielle ordinaire décrite dans la condition (A2) avec $\beta_0 > 3^{p-1} \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-r|x|} E\left[|u_0(x)|^p\right]$ et $\xi = C_2$. Puisque $\varphi(t,x)$ est positive, alors $\|u^0\|_{r,p,t} \leq \beta(t)$, $\forall t \in [0,T]$.

Supposons que pour n,on a $\|u^n\|_{r,p,t} \leq \beta(t)$, $\forall t \in [0,T]$, alors :

$$\beta(t) - \left\|u^{n+1}\right\|_{r,p,t} > C_2 \int_0^t \varphi(s,\beta(s)) ds - C_2 \int_0^t \varphi(s, \|u^n\|_{r,p,s}) ds \geq 0,$$

ce qui implique que $\beta(t) > \|u^{n+1}\|_{r,p,t}$, $\forall t \in [0,T]$ et par conséquent $\sup_n \|u^n\|_{r,p,t} \leq \beta(t)$, $\forall t \in [0,T]$ et donc u^n est uniformément bornée dans $\mathcal{S}_{r,p,T}$.

Il reste à prouver que la suite $\{u^n\}_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathcal{S}_{r,p,T}$.

Soit n, m deux nombres entiers. De manière analogue, on a :

$$\begin{aligned} E\left|u^n(t,x) - u^m(t,x)\right|^p &\leq 2^{p-1} E\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y) \left(f(u^{n-1}(s,y) - f(u^{m-1}(s,y))\right) dsdy\right|^p \\ &\quad + 2^{p-1} E\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y) \left(g(u^{n-1}(s,y) - g(u^{m-1}(s,y))\right) W(dsdy)\right|^p \\ &\leq C e^{r|x|} \int_0^t \Psi(s, \sup_{y\in\mathbb{R}} e^{-r|y|} E\left[\left|u^{n-1}(s,y) - u^{m-1}(s,y)\right|^p\right]) ds. \end{aligned}$$

Donc :

$$\|u^n - u^m\|_{r,p,t} \leq C \int_0^t \Psi(s, \left\|u^{n-1} - u^{m-1}\right\|_{r,p,s}) ds, \ \forall t \in [0,T].$$

Puisque $\{u^n\}_{n\geq 0}$ est uniformément bornée dans $\mathcal{S}_{r,p,T}$ alors $\sup_{n,m} \|u^n - u^m\|_{r,p,T} < \infty$.

Grâce à la continuité de Ψ en v et en appliquant le lemme de Fatou, on a :

$$\lim_{n,m\to\infty} \|u^n - u^m\|_{r,p,t} \leq C \int_0^t \Psi(s, \lim_{n,m\to\infty} \left\|u^{n-1} - u^{m-1}\right\|_{r,p,s}) ds, \forall t \in [0,T].$$

Comme $t \to \lim_{n,m\to\infty} \|u^n - u^m\|_{r,p,t}$ est positive et monotone sur $[0,T]$, alors grâce à la condition (A5), on a $\lim_{n,m\to\infty} \|u^n - u^m\|_{r,p,t} = 0$, $\forall\ t \in [0,T]$. Ceci signifie que $\{u^n\}_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathcal{S}_{r,p,T}$. Par conséquent la suite $\{u^n\}_{n\geq 0}$ converge dans $\mathcal{S}_{r,p,T}$ vers u. Il est clair que le processus aléatoire $\{u(t,x), t \in [0,T], x \in \mathbb{R}\}$ satisfait l'équation (2.2) et donc par définition $u(t,x)$ est une solution de l'EDPS (2.1). ■

Preuve. (Unicité)

On suppose que u_1 et u_2 sont deux solutions de L'EDPS (2.1). Par les mêmes techniques utilisées dans la démonstration de l'existence, on montre que :

$$\begin{aligned} E\left[|u_1(t,x)-u_2(t,x)|^p\right] &\leq 2^{p-1}E\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y)\left((f(u_1(s,y)-f(u_2(s,y)))\right)dsdy\right|^p \\ &\quad +2^{p-1}E\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y)\left((g(u_1(s,y)-g(u_2(s,y)))\right)W(dsdy)\right|^p \\ &\leq Ce^{r|x|}\int_0^t \Psi(s,\sup_{y\in\mathbb{R}} e^{-r|y|}E\left[|u_1(s,y)-u_2(s,y)|^p\right])ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit qu'il existe une constante positive C telle que :

$$\|u_1-u_2\|_{r,p,t}\leq C\int_0^t \Psi(s,\|u_1-u_2\|_{r,p,s})ds, \forall t\in[0,T],$$

et grâce à la condition (A5), on obtient :

$$\|u_1-u_2\|_{r,p,t}\equiv 0, \forall t\in[0,T],$$

ce qui implique que $u_1(t,x)=u_2(t,x), \forall t\in[0,T]$ et $\forall x\in\mathbb{R}$. ■

Remarque 3.2.3 *On montre que la solution de l'équation (2.1) admet une modification continue à valeurs dans C_r.*

Pour cela, on utilise les lemmes :

Lemme 3.2.4 *[22]*

1) *Si $\frac{3}{2}<q<3$, alors il existe une constante C telle que pour tout $t\geq 0$:*

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left|G_{t-s}(x,y)-G_{t-s}(x',y)\right|^q dsdy\leq C\left|x'-x\right|^{(3-q)}, \forall x,x'\in\mathbb{R}.$$

2) *Si $1<q<3$, alors il existe une constante C telle que pour tous $0\leq t\leq t'$:*

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left|G_{t-s}(x,y)-G_{t'-s}(x,y)\right|^q dsdy\leq C\left|t'-t\right|^{\frac{(3-q)}{2}}, \forall x\in\mathbb{R},$$

et

$$\int_t^{t'}\int_{\mathbb{R}}\left|G_{t'-s}(x,y)\right|^q dsdy\leq C\left|t'-t\right|^{\frac{(3-q)}{2}}, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lemme 3.2.5 ***(Kolmogorov)[22]*** *On suppose que $\{u(t,x) : t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}\}$ est un champ aléatoire à valeurs réelles. S'il existe des constantes $\alpha > 0, \delta > 2$ et $c_r > 0$ telles que pour tout sous-ensemble compact K,*

$$E\left[|u(s,x) - u(t,y)|^{\alpha}\right] \leq c_r e^{r|x|}\left(|s-t|^{\delta} + |x-y|^{\delta}\right),$$

pour $|t-s| \leq 1$ et $x, y \in K$, alors $u(t,.)$ admet une version continue à valeurs dans C_r.

Remarque 3.2.6 *Le théorème d'existence et d'unicité reste valable pour $p = 2$ si on remplace les conditions A1-A5 par les conditions B1-B3 suivantes :*

B1) Il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$|f(t,x,v)| + |g(t,x,v)| \leq K\left(1 + |v|\right) \ , \quad \forall v \in \mathbb{R}.$$

B2) Il existe une fonction strictement positive $\lambda(t)$ croissante et continue définie sur $[0,T]$ et une fonction croisssante $\Phi(v)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ telles que :

$$\left|f(t,x,v) - f(t,x,v^{'})\right|^2 + \left|g(t,x,v) - g(t,x,v^{'})\right|^2 \leq \lambda(t)\Phi(\left|v - v^{'}\right|^2).$$

B3) Φ est une fonction concave telle que $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(v) > 0$, $\forall v > 0$ telle que :

$$\int_{0^+} (\Phi \circ \Phi)^{-1}(v)dv = \infty.$$

3.3 Cas de l'équation de la chaleur stochastique dirigée par un bruit blanc non homogène.

Nous considérons l'équation de la chaleur stochastique dans le cas d'une variable spatiale unidimensionnelle avec un drift singulier dirigé par un bruit blanc en espace et en temps non homogène. La mesure de la variation quadratique de ce bruit blanc n'est pas obligatoirement la mesure de Lebesgue et n'est pas absolument continue ni dans l'espace ni dans le temps. Sous quelques conditions, nous donnons des résultats sur l'existence et l'unicité des solutions continues.

On considère l'équation aux dérivées partielles stochastique suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) + f(t,x,u(t,x))\frac{\sigma(dtdx)}{dtdx} + g(t,x,u(t,x))\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}W^{\varphi}(t,x) \\ u(0,x) = \eta(x), t \geqslant 0, x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.1}$$

à qui une signification précise sera donnée dans les définitions suivantes.

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $f, g : [0,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, $\sigma(dtdx)$ et $\varphi(dtdx)$ sont des mesures de radon positives sur $[0,+\infty[\times \mathbb{R}$, $\frac{\sigma(dtdx)}{dtdx}$ est la densité de Lebesgue de $\sigma(dtdx)$ qui n'existe qu'au sens généralisé (comme distribution), $W^{\varphi} : [0,+\infty[\times \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$, est un mouvement brownien dépendant de deux paramètres (drap brownien) non homogène basé sur $\varphi(dtdx)$ et caractérisé par la relation :

$$W^{\varphi}(\left]t,t'\right] \times \left]x,x'\right]) = W^{\varphi}(t',x') - W^{\varphi}(t',x) - W^{\varphi}(t,x') + W^{\varphi}(t,x),$$

où W^{φ} est un bruit blanc "mesure" basé sur $\varphi(dtdx)$.

Walsh **[21]** construit W^{φ} comme un processus gaussien sur l'algèbre $\mathcal{A}$,

où $\mathcal{A} = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{B}([0,n] \times [-n,n]) \subset \mathcal{B}([0,+\infty[\times \mathbb{R})$. Si $\varphi(dtdx) = \sigma(dtdx) = dtdx$, alors $\frac{\sigma(dtdx)}{dtdx} = 1$ et W^{φ} est juste le mouvement brownien dépendant de deux paramètres homogène W sur $[0,+\infty[\times \mathbb{R}$. Dans ce cas, l'équation (3.1) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) + f(t,x,u(t,x)) + g(t,x,u(t,x))\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}W(t,x) \\ u(0,x) = \eta(x), t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}_+ \end{cases}.$$

Cette équation à été étudiée par plusieurs auteurs**[2],[21]**,**[14]**,**[22]** qui se sont intéressés à l'existence et l'unicité des solutions.

Dans cette section, on s'intéresse à l'existence et l'unicité des solutions continues de l'EDPS (3.1) avec les coefficients f et g satisfaisant les conditions de Lipschitz et de restriction sur la croissance, les mesures $\varphi(dtdx)$ et $\sigma(dtdx)$ satisfont certaines conditions.

Soit E un espace métrique. Notons par $\mathcal{M}(E)$ l'espace des mesures de Radon positives sur E. On pose :

$$\mathcal{M}_{uni}(\mathbb{R}) = \left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) / \sup_{x\in\mathbb{R}} \mu(B(x,1)) < \infty \right\}.$$

Définition 3.3.1 *[23] On dit que la mesure $\mu(dtdx) \in \mathcal{M}([0,+\infty[\times \mathbb{R})$ satisfait la condition (A) respectivement (B) si $\mu(dtdx) = \mu_1(t,dx)\mu_2(dt)$, où μ_1 est le noyau de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ avec $\mu_1(t,dx) \in \mathcal{M}_{uni}(\mathbb{R})$, $\forall t \geq 0$ et $\mu_2(dt) \in \mathcal{M}([0,+\infty[)$ tel que $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$, $\forall T > 0$, $\exists C_T > 0$:*

(a) $\sup_{t\leq T} \sup_{x\in\mathbb{R}} \mu_1(t, B(x,r)) \leq C_T r^{\alpha_1} \quad \forall\, r \in]0,1]$.

(b) $\sup_{t\leq T} \mu_2([0,+\infty[\cap B(t,r)) \leq C_T r^{\alpha_2} \quad \forall\, r \in]0,1]$.

(c) $\alpha_1/2 + \alpha_2 > 1$ *(respectivement* $\alpha_1/2 + \alpha_2 > 1/2$*)*

Soit $C(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Soit l'ensemble $C_{tem}(\mathbb{R}) = \left\{ \Psi \in C(\mathbb{R}) / \ |\Psi|_{(-\lambda)} < \infty, \forall \lambda > 0 \right\}$,

où $|\Psi|_{(-\lambda)} = \left\| e^{-\lambda|.|}\Psi(.) \right\|_{\infty}$ et $\|.\|_{\infty}$ est la norme usuelle. Nous équipons $C_{tem}(\mathbb{R})$ avec des métriques

$d_{tem}(\Phi, \Psi) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k}(|\Phi - \Psi|_{(-\frac{1}{k})} \wedge 1)$ et $\langle \Phi, \Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x)\Psi(x)dx$.

L'équation (3.1) est formelle. D'une part la densité de Lebesgue de $\sigma(dtdx)$ n'existe pas au sens usuel et d'autre part W^φ n'est pas différentiable. Pour cela, on interprète l'EDPS (3.1) comme une équation intégrale stochastique.

Définition 3.3.2 *[23] Un processus aléatoire continu $\{u(t, .)\ ,\ t \geqslant 0\ \}$ à valeurs dans $C_{tem}(\mathbb{R})$ est une solution forte de l'EDPS (3.1) avec l'état initiale $\eta \in C_{tem}(\mathbb{R})$, si donné le bruit blanc $(W^\varphi, \Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$, il est $\mathcal{F}_t-$adapté et satisfait :*

$$\begin{aligned} \langle u(t, .), \Psi \rangle &= \langle \eta, \Psi \rangle + \int_{\mathbb{R}} \langle u(s, .), \frac{1}{2}\Delta\Psi \rangle ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(s, x, u(s, x))\Psi(x)\sigma(dsdx) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(s, x, u(s, x))\Psi(x)W^\varphi(dsdx) \end{aligned} \tag{3.2}$$

pour tous $t \geqslant 0$ et $\Psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Définition 3.3.3 *[23] Un processus aléatoire continu $\{u(t, .)\ ,\ t \geqslant 0\ \}$ à valeurs dans $C_{tem}(\mathbb{R})$ est une solution mild de l'EDPS (3.1) avec l'état initial $\eta \in C_{tem}(\mathbb{R})$, si donné le bruit blanc $(W^\varphi, \Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$, il est $\mathcal{F}_t-$adapté et satisfait l'équation intégrale stochastique suivante :*

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{\mathbb{R}} G_t(x, y)\eta(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x, y)f(s, y, u(s, y))\sigma(dsdy) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x, y)g(s, y, u(s, y))W^\varphi(dsdy) \end{aligned} \tag{3.3}$$

où $G_t(x, y) = (2\pi t)^{-1/2} \exp(-(x - y)^2/2t)$ est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur homogène associé à (3.1).

Maintenant, on peut énoncer le théorème principal :

Théorème 3.3.4 *Supposons que les coefficients f et g sont continues et que pour chaque $T > 0$, il existe des constantes $C_T, L_T > 0$ telles que pour tous $t \leq T$ et $x, u, u' \in \mathbb{R}$:*

$$|f(t, x, u)| + |g(t, x, u)| \leq C_T(1 + |u|) \tag{1}$$

$$|f(t, x, u) - f(t, x, u')| + |g(t, x, u) - g(t, x, u')| \leq L_T\, |u - u'| \tag{2}$$

Soit $\eta \in C_{tem}(\mathbb{R})$, $\varphi(dtdx)$ satisfait la condition (A) avec α_1, α_2 et $\sigma(dtdx)$ satisfait la condition (B) avec β_1, β_2. Alors l'EDPS (3.1) avec l'état initial η admet une unique solu-

tion forte. De plus la solution est localement $\gamma-$höldérienne pour tous $\gamma \in \left]0, (\alpha/2) \wedge \beta\right[$, où $\alpha = \alpha_1/2 + \alpha_2 - 1$, $\beta = \beta_1/2 + \beta_2 - 1/2$.

Avant de démontrer le théorème, on commence par présenter quelques resultats qui sont des outils principaux.

Proposition 3.3.5 *Supposons que la condition (1) du théorème est vérifiée et $\sup_{t\leq T}\sup_{x\in\mathbb{R}}\mu(B(t,1)\times B(x,1)) < \infty$, pour tous $T > 0$ et $\mu \in \{\varphi, \sigma\}$. Alors toute solution forte de l'EDPS (3.1) avec l'état initial η dans le sens de la définition 3.3.2 est une solution mild avec l'état initial η dans le sens de la définition 3.3.3 et vice versa.*

Preuve. [20] ∎

Lemme 3.3.6 ***(Kolmogorov)*** *Soit $X = \{X(t,x) \ : \ t \geqslant 0 \ , \ x \in \mathbb{R}\}$ un processus aléatoire à valeurs réelles tel que $X(t,0) \in C_{tem}(\mathbb{R})$. On suppose que $q, \varepsilon > 0$ sont des constantes telles que pour tous $\lambda, T > 0$, il existe une constante $C_{\lambda,T} > 0$ satisfaisant :*

$$E\left[|X(t,x) - X(t',x')|^q\right] \leq C_{\lambda,T}\left(|t-t'|^{2+\varepsilon} + |x-x'|^{2+\varepsilon}\right)e^{\lambda|x|},$$

pour tous $t, t' \leq T$ et $x, x' \in \mathbb{R}$ où $|x - x'| \leq 1$.

Alors X admet une modification continue $\widetilde{X}$ tel que $\left\{\widetilde{X}(t,.) \ : \ t \geqslant 0\right\}$ soit à valeurs dans $C_{tem}(\mathbb{R})$. De plus, $\widetilde{X}$ est localement $\gamma-$ höldérienne pour $\gamma \in \left]0, \varepsilon/q\right[$.

Lemme 3.3.7 *Soit $\mu_1(dx) \in \mathcal{M}_{uni}(\mathbb{R})$, $\alpha_1 \in \left]0,1\right]$, $\gamma > 0$ et soient les affirmations suivantes :*

(a) $\exists C > 0$: $\sup_{x\in\mathbb{R}}\mu_1(B(x,r)) \leq Cr^{\alpha_1}, r \in \left]0,1\right]$;

(b) $\exists C > 0$: $\sup_{x\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/r}\mu_1(y) \leq Cr^{\alpha_{1/2}}, r \in \left]0,1\right]$;

(c) $\exists C_\lambda > 0$: $\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-\lambda|x|}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/r}e^{\lambda|y|}\mu_1(y) \leq C_\lambda r^{\alpha_{1/2}}, r \in \left]0,1\right]$;

(d) $\exists C_\lambda > 0$: $\sup_{x,x'\in\mathbb{R}} e^{-\lambda|x-x'|-\lambda|x|}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x'-y)^2/r}e^{\lambda|y|}\mu_1(y) \leq C_\lambda r^{\alpha_{1/2}}, r \in \left]0,1\right]$.

Alors (a)⇔(b)⇒(c),(d), pour tout $\lambda > 0$.

Preuve. [24] ∎

Lemme 3.3.8 *Soit $\mu_2(dt) \in \mathcal{M}([0, +\infty[)$. S'il existe $\alpha_2 \in \left]0,1\right]$ tel que :*

$\forall T > 0 \ \exists C_T$: $\sup_{t\leq T}\mu_2([0,+\infty[\cap B(t,r)) \leq C_T r^{\alpha_2}, \forall \ r \in \left]0,1\right]$,

alors pour tous $T > 0$, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout $0 \leq t \leq T$, on ait :

(a) $\int_s^t (t-r)^{-\gamma}\mu_2(dr) \leq C_T(t-s)^{\alpha_2-\gamma}, \forall\gamma \in [0, \alpha_2], 0 \leq s \leq t$;

(b) $\int_s^v (t-r)^{-\gamma}\mu_2(dr) \leq C_T(t-v)^{\alpha_2-\gamma}, \forall\gamma \in \left]\alpha_2, \infty\right[, 0 \leq s \leq v < t$;

(c) $\int_0^t r^\delta (t-r)^{-\gamma} \mu_2(dr) \leq C_T (t-s)^{\delta-\alpha_2-\gamma} (\theta^\delta + (1-\theta)^{\alpha_2-\gamma}), \forall \gamma \in [0, \alpha_2], \delta > 0,$ $\theta \in [0,1]$;

(d) $\int_0^T e^{-\gamma r} \mu_2(dr) \leq C_T \gamma^{-\alpha_2}, \forall \gamma > 0.$

Preuve. [23] ■

Lemme 3.3.9 *Supposons que $\varphi(dtdx)$ satisfait la condition (A) avec α_1, α_2 et $\sigma(dtdx)$ satisfait la condition (B) avec β_1, β_2. Alors pour tous $\lambda \geq 0$ et $T > 0$, il existe une constante $C_{\lambda,T} > 0$ telle que pour tous $0 \leq t \leq t' \leq T$ et $x, x' \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (G_{t-s}(x,y) - G_{t'-s}(x',y))^2 e^{\lambda|y|} \varphi(dsdy) \\ \leq \ & C_{\lambda,T} \left(|t-t'|^\alpha + |x-x'|^{2\alpha} \right) e^{\lambda|x|} e^{\lambda|x-x'|}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (G_{t-s}(x,y) - G_{t'-s}(x',y)) e^{\lambda|y|} \sigma(dsdy) \\ \leq \ & C_{\lambda,T} \left(|t-t'|^\beta + |x-x'|^{2\beta} \right) e^{\lambda|x|} e^{\lambda|x-x'|}, \end{aligned} \tag{5}$$

où $\alpha = \alpha_1/2 + \alpha_2 - 1$, $\beta = \beta_1/2 + \beta_2 - 1/2$.

Preuve. [24] ■

Lemme 3.3.10 *Soient $k \geq 1$ et $\mu_2^i(dt) \in \mathcal{M}([0,+\infty[), (1 \leq i \leq k)$. On suppose qu'il existe $\alpha_2^i \in]0,1], (1 \leq i \leq k)$ tel que $\forall T > 0 \ \exists \widetilde{C}_T > 0$:*

$\sup_{t \leq T} \mu_2^i([0,+\infty[\cap B(t,r)) \leq \widetilde{C}_T r^{\alpha_2^i}, \forall \ r \in]0,1], \ (1 \leq i \leq k).$

Soit $g_n : [0,+\infty[\ \to [0,+\infty[$ une suite de fonctions mesurables ($n \geq 1$) et g_1 est bornée. S'il existe des constantes $\gamma^i \in [0, \alpha_2^i[, (1 \leq i \leq k)$ et $C_0 \geq 0$ telles que pour tout $T > 0$, il existe une constante $C_T > 0$ avec :

$$g_{n+1}(t) \leq C_T (C_0 + \sum_{i=1}^k \sup_{s \leq t} \int_0^s \frac{1}{(s-r)^{\gamma^i}} g_n(r) \mu_2^i(dr), \forall t \leq T, n \geq 1, \tag{6}$$

alors pour tout $T > 0$, il existe une constante $q_T \in]0,1[$ et une constante $\widetilde{C}_T > 0$ (dépendante de $T, C_T, \widetilde{C}_T, \alpha_i, \gamma_i, \|g_1\|_\infty$ et indépendante de C_0) telles que

$$\sup_{t \leq T} g_n(t) \leq \widetilde{C}_T (C_0 + q_T^n), \forall n \geq 1.$$

Dans le cas particulier où $g_n = g, \forall n \geq 1$, l'inégalité (6) implique :

$$\sup_{t \leq T} g(t) \leq \tilde{C}_T C_0, \forall T > 0.$$

Preuve. [23] ∎

Preuve.

Soit $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions prédictibles $u : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, avec $\|u\|_{\lambda,T,m} < \infty$, pour tous $\lambda, T > 0$ et $m \geq 1$, où :

$$\|u\|_{\lambda,T,m} = \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{-\lambda|x|} E\left[|u(t,x)|^{2m}\right] \right)^{1/2m},$$

muni de la métrique $d_{\mathcal{P}}(f, f') = \sum_{k,l,m=1}^{\infty} 2^{-(k+l+m)}(1 \wedge \|f - f'\|_{\frac{1}{k},l,m})$ pour laquelle $\mathcal{P}$ est complet.

On définit la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} \Phi(u)(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} G_t(x,y)\eta(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y) f(s,y,u(s,y))\sigma(dsdy) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y) g(s,y,u(s,y)) W^{\varphi}(dsdy) \\ &= \Phi_0(t,x) + \Phi_1(u)(t,x) + \Phi_2(u)(t,x). \end{aligned}$$

Pour $u \in \mathcal{P}$, l'intégrale stochastique par rapport à W^{φ} est bien définie.

En effet, en utilisant la condition (1) et le lemme 3.3.7((a)⇒(c)) et le lemme 3.3.8 (a), on obtient :

$$\begin{aligned} & E\left[\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y) g(s,y,u(s,y)) W^{\varphi}(dsdy)\right|^2\right] \\ \leq\ & E\left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x,y) g^2(s,y,u(s,y)) \langle W^{\varphi}\rangle(dsdy)\right] \varphi_1(s,dy)\varphi_2(ds) \\ \leq\ & C \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x,y) e^{\lambda|y|} e^{-\lambda|y|} E\left[(1 + |u(s,y)|^2\right] \varphi(dsdy) \\ \leq\ & C \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi(t-s)} e^{-(x-y)^2/(t-s)} e^{\lambda|y|} \left(1 + \sup_{0 \leq s \leq t} \sup_{y \in \mathbb{R}} e^{-\lambda|y|} E\left[|u(s,y)|^2\right]\right) \varphi_1(s,dy)\varphi_2(ds) \\ \leq\ & C' \left(1 + \|u\|_{1,t,1}^2\right) \int_0^t \frac{1}{t-s} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/(t-s)} e^{\lambda|y|} \varphi_1(s,dy)\right) \varphi_2(ds) \\ \leq\ & C'_t \int_0^t \frac{1}{t-s} e^{\lambda|x|} (t-s)^{\alpha_1/2} \varphi_2(ds) \leq C_t t^{\alpha_1/2 - \alpha_2 - 1} e^{\lambda|x|} < \infty, \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Etape 1 : On démontre que $\Phi(u)$ est continue à valeurs dans $C_{tem}(\mathbb{R})$ quand $u \in \mathcal{P}$.

En utllisant les inégalités de Burkholder et de Hölder pour $(\frac{m-1}{m}+\frac{1}{m}=1)$, (1) et (4), on obtient : pour tous $\lambda>0, 0\leq t\leq t'\leq T$ et $x,x'\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& E\left[\left|\Phi_2(u)(t,x)-\Phi_2(u)(t',x')\right|^{2m}\right] \\
\leq\ & CE\left[\left|\int_0^{t'}\int_{\mathbb{R}}(G_{t-s}(x,y)-G_{t'-s}(x',y))^2 g(s,y,u(s,y))^2\varphi(dsdy)\right|^m\right] \\
\leq\ & C'\left(\int_0^{t'}\int_{\mathbb{R}}(G_{t-s}(x,y)-G_{t'-s}(x',y))^2\varphi(dsdy)\right)^{m-1} \\
& \times\left(\int_0^{t'}\int_{\mathbb{R}}(G_{t-s}(x,y)-G_{t'-s}(x',y))^2 E\left[\left(1+|u(s,y)|^{2m}\right)\right]\varphi(dsdy)\right) \\
\leq\ & C_T\left(|t-t'|^{\alpha}+|x-x'|^{2\alpha}\right)^{m-1} \\
& \times\left(\int_0^{t'}\int_{\mathbb{R}}(G_{t-s}(x,y)-G_{t'-s}(x',y))^2 e^{\lambda|y|}e^{-\lambda|y|}\left(1+E\left[|u(s,y)|^{2m}\right]\right)\varphi(dsdy)\right) \\
\leq\ & C_T\left(|t-t'|^{\alpha}+|x-x'|^{2\alpha}\right)^{m-1} \\
& \times\left(\int_0^{t'}\int_{\mathbb{R}}(G_{t-s}(x,y)-G_{t'-s}(x',y))^2 e^{\lambda|y|}\left(1+\|u\|^{2m}_{\lambda,s,m}\right)\varphi(dsdy)\right) \\
\leq\ & C_{\lambda,T}\left(|t-t'|^{\alpha}+|x-x'|^{2\alpha}\right)^{m} e^{\lambda|x|}e^{\lambda|x-x'|}.
\end{aligned}$$

Par le lemme de Kolmogorov, $\Phi_2(u)$ admet une modification continue à valeurs dans $C_{tem}(\mathbb{R})$.

De manière analogue, en utllisant les inégalités de Hölder pour $(\frac{2m-1}{2m}+\frac{1}{2m}=1)$, (1) et (5), on obtient : pour tous $\lambda>0$, $0\leq t\leq t'\leq T$ et $x,x'\in\mathbb{R}$:

$$E\left[\left|\Phi_1(u)(t,x)-\Phi_1(u)(t',x')\right|^{2m}\right]\leq C_{\lambda,T}\left(|t-t'|^{\beta}+|x-x'|^{2\beta}\right)^{2m} e^{\lambda|x|}e^{\lambda|x-x'|}.$$

Par conséquent, $\Phi_1(u)$ admet une modification continue à valeurs dans $C_{tem}(\mathbb{R})$.

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
|\Phi_0(t,x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} G_t(x,y)\,|\eta(y)|\,dy \leq \int_{\mathbb{R}} G_t(x,y)e^{\lambda|y|}\sup_{y\in\mathbb{R}} e^{-\lambda|y|}\,|\eta(y)|\,dy \leq e^{\lambda|x|}\,|\eta|_{(-\lambda)} \\
&\Rightarrow \sup_{0\leq t\leq T}\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-\lambda|x|}\,|\Phi_0(t,x)|\leq|\eta|_{(-\lambda)}<\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\Phi_0(t,x)$ est continue à valeurs dans $C_{tem}(\mathbb{R})$.

En rassemblant les inégalités ci-dessus, on voit que $\Phi(u)$ admet une modification continue à valeurs dans $C_{tem}(\mathbb{R})$. Par conséquent et grâce aux estimations ci-dessus, $\Phi(u)$ est localement $\gamma-$höldérienne sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$ pour tout $\gamma\in]0,(\alpha/2)\wedge\beta[$,

où $\alpha=\alpha_1/2+\alpha_2-1$, $\beta=\beta_1/2+\beta_2-1/2$.

Etape 2 : On définit l'itération de Picard :

$$\begin{cases} u_0(t,x)=\int_{\mathbb{R}}G_t(x,y)\eta(y)dy \\ u_{n+1}(t,x)=\Phi(u_n)(t,x)=u_0(t,x)+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}G_{t-s}(x,y)f(s,y,u_n(s,y))\sigma(dsdy) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\int_0^t\int_{\mathbb{R}}G_{t-s}(x,y)g(s,y,u_n(s,y))W^{\varphi}(dsdy) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =\Phi_0(t,x)+\Phi_1(u_n)(t,x)+\Phi_2(u_n)(t,x). \end{cases}$$

On démontre que $u_n\in\mathcal{P}$, pour tout $n\geq 0$ et en particulier :

$$\sup_{n\geq 1}\|u\|_{\lambda,T,m}\leq C_{\lambda,T,m}<\infty,\forall\lambda,T>0,m\geq 1$$

quand $\eta\in C_{tem}(\mathbb{R})$.

Pour cela, il suffit de démontrer que pour tous $\lambda,T>0$ et $m\geq 1$, on a $\Phi(u)\in\mathcal{P}$ quand $u\in\mathcal{P}$.

Soit $u\in\mathcal{P}$. En utilisant les inégalités de Burkholder et de Hölder pour $(\frac{m-1}{m}+\frac{1}{m}=1)$, (1), le lemme 3.3.7 ((a)$\Leftrightarrow$(b)$\Rightarrow$(c)) et le lemme 3.3.8 (a), on obtient :

$$\begin{aligned} \|\Phi_2(u)\|_{\lambda,T,m}^{2m} &= \sup_{0\leq t\leq T}\sup_{x\in\mathbb{R}}e^{-\lambda|x|}E\left[|\Phi_2(u)(t,x)|^{2m}\right] \\ &\leq \sup_{0\leq t\leq T}\sup_{x\in\mathbb{R}}e^{-\lambda|x|}E\left[\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}}G_{t-s}^2(x,y)g^2(s,y,u_n(s,y))\varphi(dsdy)\right|^{2m}\right] \\ &\leq \sup_{0\leq t\leq T}\sup_{x\in\mathbb{R}}e^{-\lambda|x|}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}}G_{t-s}^2(x,y)\varphi_1(s,dy)\varphi_2(ds)\right)^{m-1} \\ &\quad\times\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}}G_{t-s}^2(x,y)e^{\lambda|y|}e^{-\lambda|y|}E\left[\left(1+|u(s,y)|^{2m}\right)\right]\varphi_1(s,dy)\varphi_2(ds)\right) \\ &\leq C_{T,m}\left\{1+\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{x\in\mathbb{R}}\int_0^t e^{-\lambda|x|}\left(\int_{\mathbb{R}}G_{t-s}^2(x,y)e^{\lambda|y|}\varphi_1(s,dy)\right)\|u\|_{\lambda,s,m}^{2m}\varphi_2(ds)\right\} \\ &\leq C_{\lambda,T,m}\left\{1+\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t\frac{1}{(t-s)^{1-\alpha_1/2}}\|u\|_{\lambda,s,m}^{2m}\varphi_2(ds)\right\}. \end{aligned}$$

De manière analogue, en utilisant l'inégalité de Hölder pour $(\frac{2m-1}{2m}+\frac{1}{2m}=1)$, (1), le lemme 3.3.8 (a), on obtient :

$$\begin{aligned}\|\Phi_1(u)\|^{2m}_{\lambda,T,m} &= \sup_{0\le t\le T}\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-\lambda|x|}E\left[|\Phi_1(u)(t,x)|^{2m}\right]\\ &\le C_{\lambda,T,m}\left\{1+\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1-\beta_1/2}}\|u\|^{2m}_{\lambda,s,m}\,\sigma_2(ds)\right\}.\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}E\left[|\Phi_0(t,x)|^{2m}\right] &= E\left[\left|\int_{\mathbb{R}} G_t(x,y)\eta(y)dy\right|^{2m}\right] \le \int_{\mathbb{R}} G_t(x,y)e^{\lambda|y|}e^{-\lambda|y|}E\left[|\eta(y)|^{2m}\right]dy\\ &\le e^{\lambda|x|}\sup_{y\in\mathbb{R}} e^{-\lambda|y|}E\left[|\eta(y)|^{2m}\right]\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \|\Phi_0(t,x)\|^{2m}_{\lambda,T,m} \le \|\eta\|^{2m}_{\lambda,m} < \infty.$$

Alors d'après ce qui précède, on a : pour tous $\lambda, T > 0$ et $m \ge 1$:

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)\|^{2m}_{\lambda,T,m} \le\ & C_{\lambda,T,m}\left\{1+\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1-\beta_1/2}}\|u\|^{2m}_{\lambda,s,m}\,\sigma_2(ds)\right.\\ &\left.+\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha_1/2}}\|u\|^{2m}_{\lambda,s,m}\,\varphi_2(ds)\right\}.\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\Phi(u) \in \mathcal{P}$. En particulier $u_n \in \mathcal{P}$ pour tout $n \ge 0$.

D'un autre côté, on a :

$$\begin{aligned}\|u_{n+1}\|^{2m}_{\lambda,T,m} \le\ & C_{\lambda,T,m}\left\{1+\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1-\beta_1/2}}\|u_n\|^{2m}_{\lambda,s,m}\,\sigma_2(ds)\right.\\ &\left.\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha_1/2}}\|u_n\|^{2m}_{\lambda,s,m}\,\varphi_2(ds)\right\}.\end{aligned}$$

Alors d'après le lemme 3.3.10, on a : pour tous $\lambda, T > 0$ et $m \ge 1$, il existe une constante $C_{\lambda,T,m}$ telle que :

$$\sup_{n\ge 1}\|u\|_{\lambda,T,m} \le C_{\lambda,T,m} < \infty.$$

Etape 3 : On démontre que $\lim_{n\to\infty}\|u_{n+1}-u_n\|_{\lambda,T,m} = 0$, pour tous $\lambda, T > 0$ et $m \ge 1$.

De manière analogue à celle utilisée dans l'étape 2, mais en utilisant la condition de Lipschitz (2) au lieu de la condition de restriction sur la croissance (1), on obtient :

$$\|\Phi_1(u_n)-\Phi_1(u_{n-1})\|^{2m}_{\lambda,T,m} \le C_{\lambda,T,m}\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1-\beta_1/2}}\|u_n-u_{n-1}\|^{2m}_{\lambda,s,m}\,\sigma_2(ds),$$

et

$$\|\Phi_2(u_n) - \Phi_2(u_{n-1})\|_{\lambda,T,m}^{2m} \leq C_{\lambda,T,m} \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha_1/2}} \|u_n - u_{n-1}\|_{\lambda,s,m}^{2m} \varphi_2(ds).$$

En rassemblant les inégalités et puisque $u_{n+1} = \Phi(u_n)$, alors pour tous $\lambda, T > 0$ et $m \geq 1$, il existe une constante $C_{\lambda,T,m} > 0$ indépendante de n telle que :

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\|_{\lambda,T,m}^{2m} \quad \leq \quad & C_{\lambda,T,m} \left\{ \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1-\beta_1/2}} \|u_n - u_{n-1}\|_{\lambda,s,m}^{2m} \sigma_2(ds) \right. \\ & \left. + \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha_1/2}} \|u_n - u_{n-1}\|_{\lambda,s,m}^{2m} \varphi_2(ds) \right\}. \end{aligned}$$

Grâce au lemme 3.3.10, on a : $\lim_{n\to\infty} \|u_{n+1} - u_n\|_{\lambda,T,m} = 0$, pour tous $\lambda, T > 0$ et $m \geq 1$.

Ceci implique que $\{u_n\}_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans l'espace complet $(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}})$. Par conséquent $\{u_n\}_{n\geq 0}$ est convergente dans $\mathcal{P}$ vers une limite u. D'après l'étape 1, $\Phi(u)$ admet une modification continue à valeurs dans $C_{tem}(\mathbb{R})$, alors $u(t,x) = \Phi(u)(t,x)$ pour tout (t,x), $P-$presque sûrement. Par conséquent, u satisfait l'équation (3.3). Par définition et grâce à la proposition 3.3.4, u est une solution forte continue à valeurs dans $C_{tem}(\mathbb{R})$ de l'EDPS (3.1). De plus u est localement $\gamma-$höldérienne pour tous $\gamma \in \,]0, (\alpha/2) \wedge \beta[$, où $\alpha = \alpha_1/2 + \alpha_2 - 1$, $\beta = \beta_1/2 + \beta_2 - 1/2$.

Etape 4 : Il reste à démontrer l'unicité de la solution.

Soient u et u' deux solutions de l'EDPS (3.1). De manière analogue à celle utilisée dans l'étape 3 et puisque $u = \Phi(u)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|u - u'\|_{\lambda,T,1}^2 \quad = \quad & \|\Phi(u) - \Phi(u')\|_{\lambda,T,1}^2 \leq C_{\lambda,T,1} \left\{ \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1-\beta_1/2}} \|u - u'\|_{\lambda,s,1}^2 \sigma_2(ds) \right. \\ & \left. + \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha_1/2}} \|u - u'\|_{\lambda,s,1}^2 \varphi_2(ds) \right\}, \end{aligned}$$

pour tous $\lambda, T > 0$.

Grâce au lemme 3.3.10, on a : $\|u - u'\|_{\lambda,T,1} = 0$, pour tous $\lambda, T > 0$. Ce qui implique $u(t,x) = u'(t,x)$ pour tous $\lambda, T > 0$, $P-$presque sûrement. $\blacksquare$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié les solutions des équations aux dérivées partielles stochastiques et plus particulièrement le cas de l'équation de la chaleur stochastique. Nous avons accordé une attention particulière à l'intégrale stochastique relative à une mesure martingale car c'est elle qui permet de donner un sens rigoureux à la notion de solution. Nous avons présenté ensuite quelques théorèmes d'existence et d'unicité des solutions pour l'équation de la chaleur stochastique dans différents cas : cas lipschitzien, cas non lipschitzien et le cas où l'équation est dirigée par un bruit blanc non homogène basé sur une mesure non absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Nous avons utilisé une documentation classique et des articles récents et complété et détaillé de nombreuses démonstrations.

Le thème des équations aux dérivées partielles stochastiques offre de nombreuses perspectives de recherche et ce dans différentes directions correspondant aux différents choix du type des équations (hyperbolique par exemple) et de la nature du bruit (poissonien ou fractionnaire par exemple). L'étude des EDPS nécessite de développer une intégrale stochastique convenable qui peut être un thème de recherche intéressant dans le cas de certains bruits. une autre direction de recherche consiste à étudier les EDPS fractionnaires.**[1]**,**[8]**,**[9]**

Bibliographie

[1] **L. Abbaoui, L. Debbi.** *Explicit Solution of Some Fractional Heat Equation Via Levy Motion.* Accepté à paraître dans Maghreb. Math. Rev.

[2] **P. Azerad, M. Mellouk**. *On a Stochastic Partial Differential Equation with Non-local Diffusion*, Springer Science + Business Media B.V. 2007, Potential Anal (2007) 27 : 183–197.

[3] **L. Bié, E. Saint.** *Etude d'une EDPS Conduite par un Bruit Poissonien*, Probab. Theory Relat. Fields 111, 1998, p.287-321.

[4] **R. Cairoli, J.B. Walsh**. *Stochastic Integrals in the Plan.* Akta Mathematica, 134 :111-183,1975.

[5] **A. Chojnowska –Michalik**. *Stochastic Differential Equations in Hilbert Spaces*, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland 1979.

[6] **R.C. Dalang .** *Extending the Martingale Measure Stochastic Integral with Applications to Spatially Homogeneous s.p.d.e.'s*, Electron. J. Probab. Vol 4 1999, no.pp.1, 29 (electronic).

[7] **G. Da Prato, J. Zabczyk**. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge University. Press,Cambridge, 1992.

[8] **L. Debbi, M. Dozzi.** *On the Solution of Non Linear Stochastic Fractional Partial Differential Equation in One Spatial Dimension.* Stochastic Processus and their Application 115 (2005) 1764-1781.

[9] **L. Debbi.** *Explicit Solutions of Some Fractional Partial Differential Equations Via stable subordinators.* Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis (2006).

[10] **A. Debussche, Anne de Bouard**. *Introduction à l'Etude des Equations aux Dérivées Partielles Stochastique*, Analyse Numérique et EDP CNRS UMR 8628 et Université de PARIS SUD (December 16, 2004).*Diffusion*, Springer Science + Business Media B.V. 2007, Potential Anal (2007) 27 : 183–197.

[11] **T.E. Duncan, B. Maslowski, B. Parsik-Duncan**. *Stochastic Equation in Hilbert Space with a Multiplication Fractional Gaussian Noise*, Stochastic Processes and their Applications 115 (2005) 1257-1383.

[12] **M. Eddahbi, M. Erraoui.** *EDPS Paroboliques à Coefficients Non-Lipschitziens avec Réflexion.* Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 5, $N^0 2$ (1998), 7-19.

[13] **D. Gatarek, B. Goldys**. *On Weak Solutions of Stochastic Equation in Hilbert Space*. Stochastic and Stochastic Reports, 46 (1992), 41-51.

[14] **D. Khoshnevisan**. *Stochastic Integration and Stochastic Partial Differential Equations*, Department of Mathematics. The University of Utah (May 8-19, 2006).

[15] **N.V Krylov, M. Röckner, J. Zabczyk**, *Stochastic PDE's and Kolmogorov Equations in Infinite Dimensions*, Held in cetraro. Italy. August 24- September 1, 1998.

[16] **C. Mueller, E.A. Perkins**. *The Compact Support Property for Solutions to the Heat Equation with Noise*. Probab. Theory Related Fields 93 (3), 325-358.

[17] **L. Mytnik.** *Weak Uniqueness for the Heat Eqution with Noise.* Ann. Probab. 26 (3), (1998), 968-984.

[18] **E. Pardoux**. *Stochastic Partial Differential Equation a Review*. Bull. Sci. Math. 117, 1993, 29-47.

[19] **C. Prévôt, M. Röckner**. *A Concise Course on Stochastic Partial Differential Equation*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007.

[20] **T. Shiga**.*Two Contrasting Properties of Solutions for One-Dimensional Stochastic Partial Differential Equation.* Canad. J. Math. 46 (2) (1994), 415-437.

[21] **J.B. Walsh**. *An Introduction to Stochastic Partial Differential Equations*, Ecole d'été de probabilites de Saint-Flour, XIV-1984, Lecture Notes in Math., vol. 1180, Springer, Berlin, 1986, pp. 265-439.

[22] **B. Xie**. *Stochastic Parabolic Partial Differential Equation with Non-Lipschitz Coefficients*, *On the Unbounded Domain*, J Math. Anal. Appl. 339 (2008) 705-718.

[23] **H. Zähle**. *Heat Equation with Strongly Inhomogeneous Noise*, Stochastic Processes and Applications 112 (2004) 95-118.

[24] **H. Zähle.** *Space-time Regularity of Catalytic Super-Brownian Motion.* Math. Nachr, in press 2004.

ملخـــص.

في هذا العمل، ندرس حلول المعادلات ذات المشتقات الجزئية العشوائية و بالأخص معادلة الحرارة العشوائية. نولي اهتمام خاص للتكامل العشوائي نسبة إلى قياس مارتنجيل لأنه ضروري لإعطاء معنى دقيق لمفهوم الحل. بعد ذلك نعرض بعض نظريات وجود و وحدانية الحلول لمعادلة الحرارة العشوائية في مختلف الحالات.

كلمات مفتاحيه:

ضجيج أبيض فضائي-زمني, لحاف براونيان, قياس مارتنجيل، التكامل العشوائي، المعادلات ذات المشتقات الجزئية العشوائية، معادلة الحرارة العشوائية.

Résumé.

Dans ce travail, nous étudions les solutions des équations aux dérivées partielles stochastiques et plus particulièrement le cas de l'équation de la chaleur stochastique. Nous accordons une attention particulière à l'intégrale stochastique relative à une mesure martingale qui est nécessaire pour donner un sens rigoureux à la notion de solution. Nous présentons ensuite quelques théorèmes d'existence et d'unicité des solutions pour l'équation de la chaleur stochastique dans différents cas.

Mots clés :

bruit blanc spatio-temporel, drap brownien, mesure martingale, intégrale stochastique, équations aux dérivées partielles stochastiques, équation de la chaleur stochastique.

Abstract.

In this work, we study the solutions of stochastic partial differential equations and more particularly the case of the stochastic heat equation. We give a particular attention to the stochastic integral relative to a martingale measure because it is necessary to give a rigorous sense to the concept of solution. Then, we presente some theorems of existence and uniqueness of the solutions of the stochastic heat equation in different cases.

Key words:

space-time white noise, brownian sheet, martingale measure, stochastic integral, stochastic partial differential equations, stochastic heat equation.