

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF

MEMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
En vue de l'Obtention du diplôme de

MAGISTER

Option : Equations Différentielles

Par

Mr. GHERMOUL BILAL

THEME

Comportement Asymptotique d'un
Ecoulement Fluide

Soutenu le : 07 / 07 / 2009 devant le jury :

Président :	S. DJABI	Professeur	U.F.A Sétif
Rapporteur :	H. MEKIAS	Professeur	U.F.A Sétif
Examineurs :	D. BENTERKI	M. Conférence	U.F.A Sétif
	A. MERZOUGUI	M. Conférence	U.M.B. M'sila

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UN
ÉCOULEMENT FLUIDE

Par

Ghermoul Bilal

Université Ferhat Abbas,
Sétif, Algérie
07 Juillet 2009

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

قال الله تعالى : « و ما من غائبة في السّماء و الأرض إلّا في كتاب مبين » سورة النمل، الآية 75.

Avant tout, louange à Dieu de m'avoir l'occasion de finir mon travail.

Remerciements

J'exprime mes vifs remerciements et toute ma reconnaissance à mon encadreur monsieur *H. Mekias*, pour l'honneur que vous m'avez fait en acceptant de diriger ce travail et pour votre disponibilité malgré votre nombreuse préoccupation.

Je remercie monsieur *S. Djabi* qui a bien voulu examiner ce travail et accepté d'être le président de jury. Je remercie également monsieur *D. Benterki* et monsieur *A. Merzougui*, pour l'intérêt que vous avez porté à ce travail en participant au jury de ce mémoire.

Je remercie aussi tous ceux qui ont contribué de près ou de loin surtout à concrétiser ce travail.

Je profite aussi de cette occasion pour remercier tous les enseignants du département de mathématique de l'Université Farhet Abbas de Sétif et mes collègues de toutes mes années scolaires et universitaires.

Dédicaces

Je dédis le fruit de mon modeste travail à ma famille, qui était toujours à mes côtés et qui ma beaucoup encouragé : *ma mère, mon père, mes frères, mes sœurs* et tous mes parents, sans oublier tous mes amis.

Ghermoul Bilal

Cette page est laissée intentionnellement en blanc

TABLE DES MATIÈRES

1	<i>INTRODUCTION GÉNÉRALE</i>	1
2	<i>FLUIDE COMME MILIEU CONTINU</i>	3
2.1	Description du mouvement	4
2.1.1	Description lagrangienne	4
2.1.2	Description eulérienne	5
2.2	Équivalence des deux descriptions	6
2.3	Trajectoire et ligne de courant	7
2.3.1	Les trajectoires (pathlines).	8
2.3.2	Ligne de courant (streamline).	8
2.4	Définitions	9
2.4.1	Fluide incompressible.	9
2.4.2	Fonction de courant (stream function) dans le cas d'un écoulement plan.	9
2.4.3	Écoulement stationnaire.	9
2.4.4	Écoulement uniforme.	10
2.4.5	Débit volumique et débit massique.	10
2.4.6	Dérivée particulaire.	10
3	<i>ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE</i>	12
3.1	Pourquoi l'analyse dimensionnelle?	13
3.2	Théorème Pi de Buckingham	14
3.2.1	Exemple d'application du théorème Pi. (Fluide sortant d'un récipient)	15
4	<i>ÉTABLISSEMENT DES ÉQUATIONS DE MDF</i>	18
4.1	Conservation de la masse	18
4.1.1	Conservation de la masse et jacobienne.	20
4.2	Conservation de la quantité du mouvement	20
4.2.1	Forme intégrale des équations. Équation du mouvement.	22
4.2.2	Équation de Navier-Stokes.	23
4.2.3	Cas particulier. Équation d'Euler.	25
4.3	Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes	26
4.4	Conditions aux limites et initiales	28
4.4.1	Conditions initiales	28
4.4.2	Conditions aux limites	28
4.4.3	Conditions d'Entrée et de Sortie	29
4.4.4	Conditions à l'infini	29

5	<i>ANALYSE ASYMPTOTIQUE</i>	30
5.1	Notions de base	30
5.1.1	Relation d'ordre $\ll O, o, \sim \gg$	30
5.1.1.1	Relation grand $o \ll O \gg$	30
5.1.1.2	Relation petit $o \ll o \gg$	30
5.1.1.3	Relation équivalent à $\ll \sim \gg$	31
5.1.1.4	Relation uniforme.	31
5.1.2	Opérations sur les relations d'ordre.	31
5.2	Suites asymptotiques	32
5.3	Suites équivalentes	33
5.4	Développement asymptotique	33
5.4.1	Série asymptotique.	33
5.4.2	Développement asymptotique.	33
5.4.3	Calcul des coefficients d'un développement asymptotique.	34
5.4.4	Opération sur les développements asymptotiques.	35
5.4.5	Comparaison de série asymptotique avec une série convergente.	36
5.5	Problème de perturbation	41
5.5.1	Perturbation régulière et singulière.	42
5.5.2	Symptôme de singularité.	42
5.5.3	Exemple de perturbation régulière.	42
5.5.4	Exemple de perturbation singulière.	43
5.5.5	Problèmes de perturbations pour les EDOs.	44
5.5.5.1	Exemple de perturbation régulière.	44
5.5.5.2	Exemple de perturbation singulière.	45
5.5.5.3	Le principe du raccordement de Van Dyke (Van Dyke's matching rule).	47
5.5.5.4	Exemple d'application de la méthode des développements asymptotiques raccordés.	47
6	<i>MÉTHODE DE PERTURBATION EN MDF</i>	51
6.1	Domaine de validité de l'approximation de fluide parfait	51
6.2	Approximation de Prandtl lorsque $Re \rightarrow +\infty$	52
6.2.1	Cas d'une plaque plane.	52
6.2.2	Cas d'un corps de forme quelconque.	55
6.3	Approximations d'Oseen-Stokes lorsque $Re \rightarrow 0$	56
6.3.1	Approximation de Stokes.	56
6.3.2	Approximation d'Oseen et le problème de raccordement avec la solution de Stokes.	58
6.3.3	Écoulement plan autour d'un cylindre.	59
	Bibliographie	65

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La mécanique des fluides est un domaine très vaste qui nécessite un large spectre des connaissances physiques et mathématiques pour modéliser et puis résoudre un problème d'écoulement posé.

Dans notre mémoire, on va faire une synthèse fondamentale nécessaire à l'étude des écoulements des fluides. On donne une notion brève sur le modèle de la mécanique des milieux continus en générale, puis on se limite aux fluides dits newtoniens pour l'établissement des équations mathématiques.

Dans le chapitre 2, sans distinguer les fluides des autres matériaux étudiés dans le large domaine de la mécanique des milieux continus, on donne le concept du milieu continu et les deux modes de descriptions : la description lagrangienne et la description eulérienne. L'équivalence des deux descriptions est établie. Les notions de particule, du point matériel et autres notions fondamentales telles que lignes de courant et trajectoires sont mises en évidence.

Le chapitre 3 est consacré à l'analyse dimensionnelle : un outil fondamental à la modélisation en générale et à la mécanique des fluides en particulier. Les trois objectifs de l'analyse dimensionnelle sont :

1. rendre les variables et les paramètres du modèle mathématique obtenu sans dimensions physiques.
2. réduire le nombre des paramètres d'un problème.
3. par similitude, construire des prototypes miniatures faciles à la manipulation expérimentale.

Le chapitre termine par le théorème Pi de Buckingham, qui exprime la possibilité de réduire un problème physique quelconque dimensionnellement <<bien posé>> à un problème mathématique, dont les variables et les paramètres sont sans dimensions. De plus, le nombre des paramètres dans le problème mathématique adimensionnel est inférieur au nombre des paramètres dans le problème physique original. Un exemple d'application pour illustrer le théorème est donné.

Le chapitre 4 est l'objectif principal de ce mémoire : on utilise les notions et concepts prérequis vus dans les chapitres précédents pour établir les équations du mouvement adiabatique d'un fluide newtonien. On utilise deux principes de conservation :

1. principe la conservation de la masse.

2. et le principe la conservation de la quantité de mouvement (la loi fondamentale de la dynamique de Newton).

Si le mouvement n'est pas adiabatique (ce que nous ne considérons pas dans ce mémoire), le principe de la conservation de l'énergie pour établir l'équation de la chaleur est utilisé.

Avec le principe de la conservation de la quantité de mouvement, on établit l'équation vectorielle générale du mouvement. Les tenseurs des contraintes et des déformations sont définis et la relation linéaire qui lie les deux tenseurs est justifiée. Les fonctions d'états ou les lois de comportement sont expliquées et la loi de comportement des fluides newtoniens est donnée comme exemple. Pour les fluides newtoniens, l'équation du mouvement se réduit à l'équation de Navier-Stokes. L'équation de Navier-Stokes, étant non linéaire, est difficile à résoudre même pour des cas assez simples, des simplifications sont nécessaires. L'équation de Stokes est une forme linéarisée de l'équation de Navier-Stokes et l'équation d'Euler est une simplification dans le cas où le fluide est parfait (viscosité nulle). Comme pour tout problème mathématique des équations aux dérivées partielles, les conditions initiales et les conditions aux limites doivent être connues. On donne à la fin les différentes conditions aux limites qui peuvent être considérées dans un problème d'écoulement.

Les problèmes de la mécanique des fluides sont très difficiles à résoudre. Les problèmes résolus exactement n'ont qu'un intérêt académique. Dans les cas réel, on est toujours amené à faire des approximations. Deux grands types d'approximation : approximation numérique et approximation analytique. Parmi les méthodes d'approximations analytiques se place l'analyse asymptotique qui, en quelques sortes, étudie les cas "limites" (quand une variable ou un paramètre tend vers une valeur critique). Dans le chapitre 5 on fait une synthèse des notions fondamentales de l'analyse asymptotique. On donne les notions de base de grand O , petit o , et équivalent, puis on définit les suites, les séries et les développements asymptotiques tout, en donnant une comparaison d'approximation par une série convergente et une série asymptotique d'une même fonction. À la fin de ce chapitre, on donne une synthèse sur les méthodes de perturbation et leurs utilisations dans la résolution des différents problèmes. Comme la méthode des couches limites a son origine dans la mécanique des fluides, cette méthode est illustrée par un exemple et le principe de raccordement de Van Dyke est utilisé.

Le chapitre 6 est le nœud des quatre chapitres précédents. Un problème d'écoulement d'un fluide réel en contact d'un solide est modélisé, rendu sans dimension faisant apparaître le paramètre sans dimension : le nombre de Reynolds Re , et puis traité par les méthodes d'analyse asymptotique (perturbation) pour essayer de le résoudre. Deux cas sont étudiés : le cas Re tend vers l'infini et le cas Re tend vers zéro.

CHAPITRE 2

FLUIDE COMME MILIEU CONTINU

La mécanique concerne en générale l'étude dynamique ou statique des corps rigides ou déformables. L'étude du mouvement d'une voiture, d'une fusée ou d'un obus fait l'objet de la mécanique des corps rigides, tandis que le mouvement d'un fluide, la déformation d'un corps élastique fait l'objet de la mécanique des milieux continus.

La mécanique des milieux continus tente à expliquer des phénomènes des corps déformables. La mécanique des milieux continus ignore les détails de la structure moléculaire ou atomique et suppose que les structures discontinues des matériaux réels peuvent être remplacées par un milieu hypothétique continu.

L'observation de la déformation d'un solide donne la notion de milieu continu déformable. Elle signifie que l'observateur retire de ces expériences l'idée que certains problèmes peuvent être traités à une échelle macroscopique en assimilant cette matière à un milieu continu, sans contredire les modélisations de la physique microscopique.

En mécanique des milieux continus, on identifie le domaine occupé par le milieu à un domaine Ω purement mathématique. Tout point $X \in \Omega$ est identifié à une particule du milieu continu. Toutes les propriétés quantitatives du milieu continu seront des fonctions de la variable spatiale $X \in \Omega$ et de la variable temporelle $t \in [0, T]$, T peut être $= \infty$.

Dans ce mémoire, on ne s'intéresse qu'aux fluides qui sont des milieux continus déformables. Par exemple, de l'eau circulant autour d'un bateau navigant dans les océans, de l'eau s'écoulant dans un canal, de l'air sortant d'un ventilateur sont des milieux continus déformables, car la distance entre deux particules du milieu peut varier au cours du mouvement. On va donc s'intéresser aux mouvements, déformations, efforts intérieurs et extérieurs et aux lois qui les relient.

Les lois fondamentales utilisées en mécanique des milieux continus sont celles traduisant la conservation d'une caractéristique quantitative. elles sont au nombre de trois :

1. *L'équation de la continuité traduisant la conservation de la masse.*
2. *Les équations de Navier-Stokes traduisant la conservation de la quantité de mouvement et se basant sur la loi de Newton.*
3. *L'équation de l'énergie traduisant la conservation de l'énergie.*

2. 1 Description du mouvement

Dans la démarche expérimentale, pour suivre l'écoulement d'un fluide ou les déformations d'un solide, l'observateur est conduit à procéder au marquage d'éléments matériels constitutifs du système à l'instant donnée et à repérer ensuite leur évolution. Il est évident que le marquage d'un tel élément, aussi fin soit-il, concerne un «petit domaine matériel», qui sera réputé infinitésimal à l'échelle *macroscopique*, mais qui se situe au-dessus de l'échelle *microscopique* : ce qu'on appelle *échelle mésoscopique*.

Du point de vue géométrique, la modélisation du milieu continu part de l'idée que le système considéré est représenté par un volume Ω dont les volumes infinitésimaux « $d\Omega$ » représentent les constituants élémentaires appelés «*particules*» qui seront identifiées à des points intuitifs mathématique. L'état géométrique de ces particules est caractérisé uniquement par leur position. Ceci explique la terminologie de «*point matériel*» employé aussi pour désigner les particules.

L'état du système à l'instant t est appelé «*configuration*» de ce système et occupe un volume Ω_t . Dans le volume Ω_t la position de chaque particule est $x = (x_1, x_2, x_3)$, la frontière est dénotée par $\partial\Omega_t$. L'état initial du fluide est noté par Ω_0 et chaque particule à cet état occupe la position $X = (X_1, X_2, X_3) \in \Omega_0$.

Il y a deux différentes modes de description en mécanique. L'une consiste à identifier toutes les particules du système puis donner les caractéristiques mécaniques et thermodynamiques de chaque particule du système, c'est ce qu'on appelle la description *lagrangienne*. L'autre consiste à donner les champs des caractéristiques mécaniques et thermodynamiques en fonction des points du domaine Ω_t indépendamment des particules qui les occupent. Dans cette description, la connaissance des positions des particules n'est pas nécessaire «*description eulérienne*».

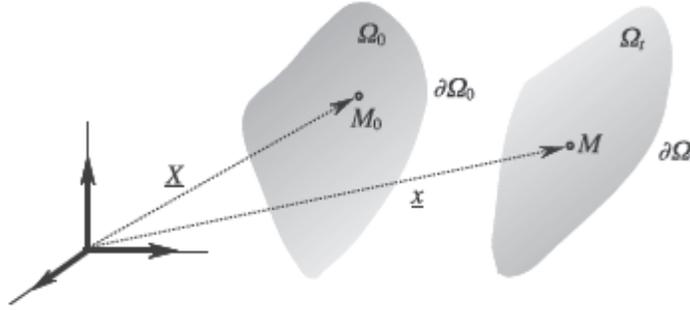
2.1.1 Description lagrangienne

La description lagrangienne consiste à :

- ▷ Identifier les particules constitutives du système par leur position géométrique dans une configuration initiale de celui-ci, prise comme référence, c'est-à-dire par la variable vectorielle $X = (X_1, X_2, X_3)$.
- ▷ Exprimer la valeur de toute grandeur physique dans la configuration actuelle en fonction de la particule à laquelle elle est attachée et de l'instant actuel, c'est-à-dire en fonction des variables X et t .

Ainsi, le vecteur-position x «pour X fixé» (FIG. 2.1) de la particule située initialement en M_0 est donnée par :

$$\boxed{x = \phi(X, t)}, \quad (2.1)$$

FIG. 2.1 – L'évolution au cours du temps t de la configuration.

et la valeur d'une grandeur physique φ attachée à cette particule, est :

$$\boxed{\varphi = \varphi(X, t)}.$$

Dans la formule (2.1), ϕ est une fonction vectorielle définie sur Ω_0 , $\forall t$, et qui vérifie évidemment :

$$\boxed{\phi(X, 0) = X}.$$

Ainsi, la vitesse et l'accélération dans la description lagrangienne sont données par :

1. la vitesse,

$$v(X, t) = \frac{\partial \phi(X, t)}{\partial t},$$

2. l'accélération,

$$a(X, t) = \frac{\partial^2 \phi(X, t)}{\partial t^2}.$$

2.1.2 Description eulérienne

On va voir maintenant les conditions mathématiques sur ϕ qui permettent de rendre compte convenablement du concept intuitif de continuité. On propose les hypothèses suivantes :

- ▷ ϕ est bijective de Ω_0 sur Ω_t (on suppose que la particule en X se déplace vers une position unique x et vice-versa) :

$$[\forall t, \forall M_0 \in \Omega_0 \quad x = \phi(X, t)] \Leftrightarrow [\forall t, \forall M_0 \in \Omega_0 \quad X = \phi^{-1}(x, t)].$$

- ▷ ϕ et ϕ^{-1} sont continues par rapport à l'ensemble des variable de l'espace et de temps.

- ▷ ϕ et ϕ^{-1} sont supposées de classe C^1 voire C^2 .

En ce qui concerne la grandeur physique typique φ , la fonction φ est supposée continue et, en règle générale, de classe C^1 ou C^2 par rapport à l'ensemble des variables X et t .

▷ Nous adoptons la continuité et la continue différentiabilité de ϕ par morceaux de quelques phénomènes : c'est le cas d'un corps déformable constitué par deux ou plusieurs matériaux non homogène.

Dans la description lagrangienne, l'identification prise de chaque particule au fil de l'évolution est une condition nécessaire. Cette condition est pratiquement impossible pour tout milieu déformable. Ce qui rend cette description inutilisable.

En remède, la description eulérienne donne l'état d'évolution macroscopique du milieu déformable sans identifier ses particules. Elle consiste à définir les fonctions et les champs de vecteurs décrivant l'évolution en fonction de la variable espace x et la variable temps t sans donner l'identité à la particule qui occupe la position x au temps t .

Ainsi pour l'aspect géométrique eulérienne, on définit le mouvement du système par la donnée à l'instant t , de la vitesse v de la particule située au point géométrique M dans Ω_t :

$$\boxed{\forall t, \forall M \in \Omega_t \quad v = v(x, t)}.$$

On retrouve les quatre 4 variables scalaires $x = (x_1, x_2, x_3)$ et t mais, à la différence de la description lagrangienne, les variables spatiales x_1, x_2, x_3 sont relatives à la configuration actuelle et non plus à une configuration de référence : elle n'identifie donc plus les particules au cours du temps.

Toute grandeur physique est ainsi définie sur Ω_t sous la forme :

$$\boxed{\forall t, \forall M \in \Omega_t \quad \varphi = \varphi(x, t)}.$$

2. 2 Équivalence des deux descriptions

Supposons qu'on connaît la description de Lagrange du mouvement d'un milieu continu, et la configuration de référence le domaine géométrique Ω_0 . La position actuelle des particules est donnée par :

$$x = \phi(X, t).$$

Alors la vitesse d'une particule (identifiée par sa position de référence M_0) est :

$$v(X, t) = \frac{\partial \phi(X, t)}{\partial t},$$

$v(X, t)$ est le champ des vitesses dans la description de Lagrange. Pour obtenir la description de vitesses d'Euler, il faut donner le champ des vitesses en fonction des positions actuelles.

La transformation $\phi(X, t)$ étant inversible, on peut écrire :

$$X = \phi^{-1}(x, t).$$

En substituant X par sa valeur, on en déduit la description du champ des vitesses en fonction de leur position actuelle x et de t :

$$\frac{\partial \phi(\phi^{-1}(x, t), t)}{\partial t} = v(x, t),$$

ce qui est la description d'Euler du mouvement.

▷ Il est clair qu'en égalant les deux expressions de la vitesse de la particule à l'instant t , puis les deux expressions de la grandeur φ pour la particule à l'instant t , il vient (pour les deux descriptions) :

$$\begin{aligned} v(x, t) &= v(\phi^{-1}(x, t), t), \\ \varphi(x, t) &= \varphi(X, t) = \varphi(\phi^{-1}(x, t), t), \end{aligned}$$

v est continûment différentiable par morceaux, si ϕ est C^2 par morceaux.

Inversement, supposons qu'on connaisse la description d'Euler du mouvement d'un milieu continu sur le domaine géométrique Ω_t . On connaît donc le champ des vitesses :

$$v = v(x, t).$$

Les positions x sont solution de l'équation différentielle vectorielle suivante (système de 3 équations différentielles scalaires) :

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t),$$

avec les conditions initiales en M_0 . La solution de ce système différentiel avec ses conditions initiales donne les positions M des particules en fonction de M_0 et de t , ce qui est la description de Lagrange.

- ▷ La description eulérienne, est bien équivalente à la description lagrangienne.
- ▷ De là, on s'intéresse par la suite aux écoulements des fluides, par conséquent on se limite aux notions et équations de *la mécanique des fluides* (noté *MDF*).

2.3 Trajectoire et ligne de courant

De nombreuses techniques expérimentales sont utilisées pour visualiser la structure d'un écoulement. Elles conduisent à introduire les notions de trajectoire de particules, de ligne d'émission, de ligne de courant. Il y a alors des divers concepts qui peuvent être employés pour la visualisation et l'analyse des champs d'écoulement.

2.3.1 Les trajectoires (pathlines).

On appelle *trajectoire* de la particule, l'ensemble des positions occupées par la particule au cours du temps.

1. La description de Lagrange donne directement la trajectoire, en effet :

$$x = \phi(X, t),$$

est l'équation paramétrée par t de *la trajectoire* de la particule identifiée par X .

2. Si le mouvement est décrit par la méthode d'Euler la connaissance des trajectoires revient à la description de Lagrange selon la méthode d'équivalence. Les trajectoires sont alors solution du système différentiel :

$$\frac{dx}{dt} = v,$$

alors :

$$\boxed{\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} = dt}.$$

2.3.2 Ligne de courant (streamline).

On appelle *lignes de courant* à l'instant t les lignes de champ du champ des vitesses à l'instant t , c'est-à-dire les courbes qui sont tangentes au champ vecteur vitesse à l'instant t donné, en chacun de leur point, c'est une ligne théorique qu'il est difficile d'observer expérimentalement mais que l'on peut calculer à l'issue d'une simulation.

- ▷ Si le mouvement est décrit par la méthode d'Euler. Il découle de la définition des lignes de courant qu'on cherche les courbes de point courant M tel que dM est partout colinéaire à v , i.e. $v \times dM = 0$. En posant :

$$dM = dx = (dx_1, dx_2, dx_3),$$

les lignes de courant sont les courbes solution du système différentiel :

$$\boxed{\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}},$$

où t est un paramètre.

Remarque.

Dans tout ce qui suit, on adopte la description d'Euler. Toutes caractéristiques quantitatives du fluide sont données en fonction de la variable spatiale $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_t$ et la variable temporelle t .

2.4 Définitions

2.4.1 Fluide incompressible.

On dit qu'un fluide est *incompressible* si le volume de chaque particule du fluide ne varie pas au cours du mouvement, i.e., la masse volumique ρ de chaque particule se conserve au cours du mouvement (donc sur chaque trajectoire, ρ est constante). Il ne faut pas confondre un tel fluide avec un fluide à masse volumique constante où ρ a la même valeur, constante, dans tout le domaine occupé par l'écoulement (*Fluide homogène*).

2.4.2 Fonction de courant (stream function) dans le cas d'un écoulement plan.

On appelle *écoulement plan* si toutes les caractéristiques de l'écoulement sont dépendantes que de deux variables spatiales considérés (x_1, x_2) , et au préalable de la variable temporelle t . Si ψ est une fonction de l'écoulement, on a alors :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0, \text{ et } v_3 = 0, \text{ où } v = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}.$$

Pour un écoulement plan incompressible nous allons voir que l'hypothèse de conservation de la masse conduit à l'équation $\operatorname{div} v = 0$, on montre alors qu'il existe une fonction $\psi(x_1, x_2, t)$, appelée *fonction de courant*, tel que l'on ait :

$$\boxed{v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad \text{i.e., } v = \operatorname{rot}(\psi \mathbf{k}) = \operatorname{rot}(0, 0, \psi)}.$$

La fonction ψ vérifie :

1. Les lignes qui vérifient $\psi = \text{Cte}$, sont à chaque instant t , les lignes de courant du champ v .
2. La différence entre deux lignes de courant aux points A, B , $(\psi_A - \psi_B)$ représente le débit volumique passant entre A et B .

2.4.3 Écoulement stationnaire.

On appelle *écoulement stationnaire* ou encore *écoulement permanent*, un écoulement dont toutes les caractéristiques quantitatives sont indépendantes du temps. En particulier pour la vitesse, $\partial v(x_1, x_2, x_3, t) / \partial t = 0$ et cela ne signifie pas que la particule n'est pas accéléré. Cela signifie simplement que les lignes de courants n'évoluent pas au cours du temps.

Il est facile de voir que dans un écoulement stationnaire, les lignes de courant sont les mêmes que les trajectoires.

2.4.4 Écoulement uniforme.

On appelle *écoulement uniforme* si les composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées d'espace, sinon il est *non-uniforme*.

2.4.5 Débit volumique et débit massique.

1. Soit S une surface fixe dans un domaine du fluide en mouvement. On suppose S orientable et on appelle \mathbf{n} sa normale unitaire en un point N de S . On appelle *débit volumique* (ou flux du vecteur vitesse) à travers la surface S le scalaire Q_V défini par :

$$Q_V = \int_S v(N, t) \cdot \mathbf{n} ds ; \quad N \in S.$$

2. On appelle *débit massique* (ou flux de la quantité du mouvement) à travers la surface S le scalaire Q_m défini par :

$$Q_m = \int_S \rho(N, t) v(N, t) \cdot \mathbf{n} ds ; \quad N \in S,$$

où ρ est la masse volumique du fluide.

2.4.6 Dérivée particulière.

En description eulérienne, on distingue deux dérivées partielles temporelles différentes. Soit une quantité d'écoulement du fluide $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ attachée au point spatial (x_1, x_2, x_3) et au temps t . Alors $\partial\varphi/\partial t$ ne décrit pas la variation de la quantité φ rattaché à une particule du fluide.

Pour décrire la variation de la quantité φ rattaché à une particule, on définit une autre dérivation partielle temporelle, noté $D\varphi/Dt$, comme suit :

La particule de fluide au temps $t + \Delta t$ sera au point de coordonnées $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) = (x_1 + v_{x_1}\Delta t, x_2 + v_{x_2}\Delta t, x_3 + v_{x_3}\Delta t)$.

Alors, par le développement de Taylor :

$$\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, t + \Delta t) = \varphi(x_1, x_2, x_3, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \Delta t + \dots,$$

Puisque $\Delta x_i = v_{x_i} \Delta t$, $i = 1, 2, 3$, on trouve :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, t + \Delta t) - \varphi(x_1, x_2, x_3, t), \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} v_{x_1} \Delta t + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} v_{x_2} \Delta t + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} v_{x_3} \Delta t + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \Delta t + \dots \end{aligned}$$

On divise les deux membres par Δt , et on fait tendre $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{D\varphi}{Dt} = (v \cdot \text{grad}) \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Par conséquent, l'accélération en description eulérienne est donnée par :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{Dv}{Dt} = (v \cdot \text{grad}) v + \frac{\partial v}{\partial t}, \\ &= \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + \text{rot } v \times v. \end{aligned} \quad (2.3)$$

CHAPITRE 3

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE

À la base de tous les phénomènes physiques se trouvent plusieurs paramètres ou quantités variables dimensionnelles soumises à certaines relations d'interdépendance. Il y a égalité numérique de deux quantités physiques si ces quantités sont semblables qualitativement, c'est-à-dire qu'elles ont les mêmes dimensions. La notion d'homogénéité dimensionnelle fait intervenir la technique qui s'appelle analyse dimensionnelle, laquelle représente une méthode pour réduire le nombre de paramètres expérimentaux affectant un phénomène physique.

L'analyse dimensionnelle est l'étude de la forme générale des équations physiques. Elle permet d'obtenir des informations sur un phénomène physique en tenant seulement compte du fait qu'il doit être décrit par une équation dimensionnellement correcte par rapport à certaines variables. Les équations scientifiques sont en effet des relations entre différentes grandeurs ou encore entre les mesures de ces grandeurs. Si le système d'unités utilisé est cohérent, les équations sont homogènes, c'est-à-dire indépendantes du système d'unités. Les méthodes de l'analyse dimensionnelle conduisent alors à étudier les «dimensions» qui se trouvent attribuées à ces grandeurs (vitesse, surface, accélération...), compte tenu des dimensions de certaines grandeurs prises comme fondamentales.

La portée de l'analyse ne se limite pas à ces considérations; elle constitue aussi un outil de valeur dans l'établissement des programmes d'essais des diverses disciplines de la technique. Elle permet de réduire le nombre et la durée des expériences sans rien perdre de la généralité des informations attendues des résultats. De ce point de vue, l'analyse dimensionnelle d'un problème permet de réduire le nombre des paramètres, par la considération des paramètres sans dimensions formées à partir des premières. Par le recours à ces variables sans dimension, il est alors possible d'envisager le problème considéré intégralement à l'aide seulement d'un nombre limité d'expériences.

L'analyse dimensionnelle est employée principalement pour obtenir des informations sur des phénomènes physiques trop compliqués, et pour obtenir des informations sur les solutions mathématiques. Elle permet de prévoir le comportement d'un système (Prototype ou le modèle physique réel) par une représentation de celui-ci (Modèle ou maquette). Donc de composer plus facilement des expériences réalisées dans des conditions très différentes. C'est un outil (ou technique) très important pour la modélisation mathématique des phénomènes. La mécanique des fluides est l'un des champs d'application les plus importants de l'analyse dimensionnelle.

Les conceptions de base de l'analyse dimensionnelle furent exposées pour la première fois par Joseph Fourier (1768-1830) dans son traité *Théorie analytique de la chaleur* (1822). James Clerk Maxwell (1831-1879) publia un article sur la question en 1863. Mais l'analyse dimensionnelle n'a pris toute son importance que depuis les années 1930.

3. 1 Pourquoi l'analyse dimensionnelle ?

On considère dans une expérience le cas d'une sphère se déplaçant à la vitesse v dans un fluide de masse volumique ρ . Étudions la force de traînée F que le fluide exerce sur la sphère.

Il faut d'abord dénombrer les variables qui interviennent dans le problème : la force de traînée F , la vitesse v de la sphère, son diamètre d , la masse volumique ρ et la viscosité dynamique μ du fluide. Il y a donc une relation de la forme $f(F, v, d, \rho, \mu) = 0$; les grandeurs fondamentales sont la masse M , le temps T et la longueur L , et on a :

$$\begin{aligned} [v] &= L/T, \\ [d] &= L, \\ [\rho] &= M/(L)^3, \\ [\mu] &= M/(L \times T), \\ [F] &= (M \times L)/(T)^2. \end{aligned}$$

Maintenant, on considère le fait qu'on veut savoir une relation entre la force F et la vitesse $v = v(d, \rho, \mu)$, nous considérons alors l'équation :

$$F = F(v, d, \rho, \mu).$$

Cette équation donne l'idée de faire beaucoup d'expériences et de tracer beaucoup de courbes pour trouver comment F varie par rapport à v , d , ρ et μ .

Pour trouver une relation entre F et les autres quatre variables expérimentalement, il faut fixer trois valeurs des quatre variables, pour obtenir la variation de F par rapport à la quatrième variable (v par exemple), et il faut faire l'expérience à chaque fois avec chacune des trois variables. Mais cela peut être très coûteux :

- ▷ On a besoin de beaucoup de temps pour le faire.
- ▷ On a la difficulté de fixer des paramètres sans fixer les autres. Dans cet exemple, si on change la viscosité dynamique μ il faut changer le fluide, donc la densité ρ change. La solution de ce problème est qu'on va faire les expériences sur des nombres sans dimensions, à la place de ces éléments.

Alors pour trois valeurs différentes de chacun de d , ρ , μ . On trouve neufs graphiques différents, chacun de ces graphiques contient trois courbes. Cette accumulation des données (et du travail), fournit une illustration graphique du besoin de l'analyse dimensionnelle.

- ▷ L'analyse dimensionnelle est utilisée aussi pour minimiser le nombre des paramètres dans une expérience.
- ▷ L'analyse dimensionnelle permet de considérer la consistance dimensionnelle des équations (soit que ces équations écrite par des variables dimensionnelle, ou des paramètres ou par des groupes dimensionnelles), donc de considérer des dimensions appropriées pour décrire un problème de modélisation. Elle permet d'éviter des erreurs.

Pour faire l'homogénéité dimensionnelle, nous vérifions premièrement les dimensions de toutes les grandeurs dérivées pour voir qu'ils sont représentés correctement en termes des grandeurs primaires. Puis on définit les groupes des variables sans dimensions ; pour ça il y a une méthode pour définir des groupes sans dimensions ; c'est *le théorème Pi de Buckingham*.

3. 2 Théorème Pi de Buckingham

Le théorème *Pi de Buckingham* est un théorème fondamental à l'analyse dimensionnelle, il a été énoncé et publié par Vaschy et Buckingham en 1914. Il peut être énoncé comme suit :

Toute équation physique complète de la forme générale :

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0,$$

où les q_i représente n variables physiques choisies pour la description du problème, exprimées en termes de k unités physiques indépendantes peut être réécrite sous la forme :

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p) = 0,$$

où les Π_i sont des variables sans dimensions construites à partir des q_i par $p = n - k$ équations de la forme :

$$\boxed{\Pi_i = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_n^{m_n}},$$

où les m_i sont des constantes.

Nous allons appliquer *le théorème Pi* comme suit :

- ▷ On considère les n grandeurs dérivées q_1, q_2, \dots, q_n dans un problème.
- ▷ On choisit de ces grandeurs dérivées, k grandeurs (*variable de référence*) telles qu'elles contiennent toutes les dimensions primaires et indépendantes, par exemple pour $k = 3$ on prend q_1, q_2, q_3 . Des groupes sans dimensions sont alors constitués en permutant chacune des $n - k$ variables restantes alternativement (q_4, q_5, \dots, q_n , pour $k = 3$), et on a :

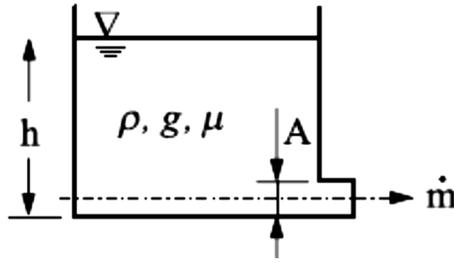


FIG. 3.1 – Fluide sortant d'un récipient.

$$\Pi_1 = q_1^{a_1} q_2^{b_1} q_3^{c_1} q_4,$$

$$\Pi_2 = q_1^{a_2} q_2^{b_2} q_3^{c_2} q_5,$$

$$\vdots$$

$$\Pi_r = q_1^{a_r} q_2^{b_r} q_3^{c_r} q_n.$$

et choisir les coefficients numériques a_i, c_i, b_i tels que l'on ait pour la dimension de Π_i , $[\Pi_i] = [L^0 M^0 T^0] = [1]$. La dimension de Π_i est alors nulle et on dit que Π_i est un paramètre (grandeur ou produit) réduit sans dimension.

3.2.1 Exemple d'application du théorème Pi. (Fluide sortant d'un récipient)

Comme exemple d'application du *théorème Pi* à la mécanique des fluides, considérons un fluide (à viscosité dynamique μ et de masse volumique ρ) sortant d'un récipient (FIG. 3.1). Pour ce problème on a :

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = f(\rho, g, h, A, \mu).$$

Dans ce cas $n = 6$ et $k = 3$, alors $r = 3$. Selon *le théorème Pi* il y a 3 paramètres sans dimensions. Choisissons l'hauteur h , la viscosité dynamique μ , et la densité ρ comme des variables de référence ($k = 3$), et on permute alors \dot{m} , g et A pour obtenir les trois groupes sans dimensions Π_1, Π_2 et Π_3 .

On doit faire l'inventaire des grandeurs qui interviennent dans le problème :

$$[\dot{m}] = \left[\frac{dm}{dt} \right] = \frac{M}{T}, \quad [A] = L^2, \quad [g] = \frac{L}{T^2},$$

$$[\rho] = \frac{M}{L^3}, \quad [h] = L, \quad [\mu] = \frac{M}{L \times T}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= h^{a_1} \mu^{b_1} \rho^{c_1} \dot{m}, \\ \Pi_2 &= h^{a_2} \mu^{b_2} \rho^{c_2} g, \\ \Pi_3 &= h^{a_3} \mu^{b_3} \rho^{c_3} A.\end{aligned}$$

En termes des dimensions primaires :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \text{L}^{a_1} (\text{M} \times \text{L}^{-1} \times \text{T}^{-1})^{b_1} (\text{M} \times \text{L}^{-3})^{c_1} \text{M} \times \text{T}^{-1}, \\ \Pi_2 &= \text{L}^{a_2} (\text{M} \times \text{L}^{-1} \times \text{T}^{-1})^{b_2} (\text{M} \times \text{L}^{-3})^{c_2} \text{L} \times \text{T}^{-2}, \\ \Pi_3 &= \text{L}^{a_3} (\text{M} \times \text{L}^{-1} \times \text{T}^{-1})^{b_3} (\text{M} \times \text{L}^{-3})^{c_3} \text{L}^2.\end{aligned}$$

Afin que Π_1 , Π_2 et Π_3 soient sans dimensions, les exposants pour chacune des trois dimensions primaires doivent disparaître. Ainsi, pour Π_1 :

$$\begin{aligned}\text{L} &: a_1 - b_1 - 3c_1 = 0, \\ \text{M} &: b_1 + a_1 + 1 = 0, \\ \text{T} &: -b_1 - 1 = 0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

pour Π_2 :

$$\begin{aligned}\text{L} &: a_2 - b_2 - 3c_2 + 1 = 0, \\ \text{M} &: b_2 + c_2 = 0, \\ \text{T} &: -b_2 - 2 = 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

et pour Π_3 :

$$\begin{aligned}\text{L} &: a_3 - b_3 - 3c_3 + 2 = 0, \\ \text{M} &: b_3 + c_3 = 0, \\ \text{T} &: -b_3 = 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

On résout les deux équations (3.1), (3.2) et (3.3), on trouve :

$$\begin{aligned}a_1 &= b_1 = -1, c_1 = 0, \\ a_2 &= 3, b_2 = -2, c_2 = 2, \\ a_3 &= -2, b_3 = c_3 = 0.\end{aligned}$$

Alors, les trois groupes sans dimensions pour cet exemple sont :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= h^{-1} \mu^{-1} \rho^0 \dot{m} \Rightarrow \Pi_1 = \frac{\dot{m}}{h\mu}, \\ \Pi_2 &= h^3 \mu^{-2} \rho^2 g \Rightarrow \Pi_2 = \frac{h^3 \rho^2 g}{\mu^2} = \frac{h^3 g}{\nu^2}, \nu = \mu/\rho \\ \Pi_3 &= h^{-2} \mu^0 \rho^0 A \Rightarrow \Pi_3 = \frac{A}{h^2}.\end{aligned}$$

Finalement, on trouve :

$$\Pi_1 = \frac{\dot{m}}{h\mu} = f(\Pi_2, \Pi_3). \quad (3.4)$$

Notons que cette expression a été obtenue sans utiliser explicitement les équations du mouvement. Mais il est tout de même essentiel pour l'établir de bien connaître toutes les grandeurs qui peuvent a priori intervenir dans l'expression cherchée (la solution).

Le problème n'est bien sûr pas complètement résolu, mais on sait déjà qu'il n'intervient dans l'expression sans dimensions de la variation de m seulement deux paramètres Π_2 , Π_3 et non cinq comme on pouvait le croire du début. Cela sera très utile du point de vue expérimental il reste à déterminer une relation (par l'expérience) entre Π_1 , Π_2 et Π_3 .

L'intérêt de l'analyse dimensionnelle est de définir les règles de similitude, indispensables au point de vue expérimental pour préciser les conditions qu'il faut respecter afin de pouvoir déduire d'une étude sur maquette les valeurs réelles que l'on mesurerait sur le modèle en vraie grandeur : on dit alors qu'il y a "*similitude*" entre les deux écoulements.

Le résultat est le suivant (*la condition de similitude*) :

Pour qu'il y ait similitude entre deux écoulements correspondant aux deux expériences distinctes, il suffit que chacun des paramètres sans dimension, intervenant explicitement dans les relations finales du mouvement, ont mêmes valeurs dans les deux expériences (on dit dans ce cas que les deux problèmes sont similaires), ce qu'on appelle "la loi de modèles".

CHAPITRE 4

ÉTABLISSEMENT DES ÉQUATIONS DE MDF

Dans ce chapitre, nous allons formuler l'équation de la continuité (conservation de la masse), et les équations régissant l'écoulement d'un fluide sous l'effet des divers forces de pression, de gravité, de viscosité, etc... Nous établissons les équations de Stokes, de Navier-Stokes (pour un fluide visqueux), et d'Euler (pour un fluide parfait).

On ne considère que des systèmes adiabatiques, où il n'y a pas un transfert important d'énergie. L'équation de la conservation de l'énergie est ignorée. L'équation de la conservation de l'énergie est nécessaire si on considère le transfère de la chaleur.

Dans tout ce qui suit, considérons un fluide occupant un volume Ω_t à l'instant t et de densité $\rho(x, t)$, de frontière une surface fermée S_t et d'élément $d\Omega_t = dx_1 dx_2 dx_3$ entourant un point x de coordonnées (x_1, x_2, x_3) .

4. 1 Conservation de la masse

Elle traduit le fait que la masse n'est ni créée ni détruite (sauf en des cas particuliers en présence des puits ou des sources), et par conséquent elle est conservé.

Considérons un fluide occupant un volume de contrôle V (un volume fixé dans les coordonnées eulériennes) de densité $\rho(x, t)$ et de frontière une surface fermée S .

La masse du fluide contenues dans V (FIG. 4.1) est donnée par :

$$m(t) = \int_V \rho(x, t) dV.$$

La variation de la masse contenue dans V est donnée par :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(x, t) dV. \quad (4.1)$$

D'autre part, la variation de la masse est égale au bilan du flux massique à travers la surface S . Soit \mathbf{n} le vecteur extérieur unitaire normal à un élément de surface de S et $v(x, t)$ le vecteur vitesse alors le flux massique est donné par :

$$\oint_S \rho v(x, t) \cdot \mathbf{n} ds. \quad (4.2)$$

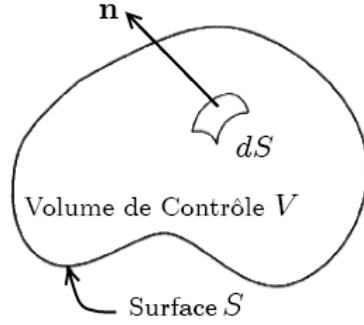


FIG. 4.1 – Volume de Contrôle.

Puisque la relation (4.1) indique que la masse augmente à l'intérieur de S si $dm(t)/dt > 0$. Tandis la relation (4.2) indique que la masse augmente à l'intérieur de S si $\oint_S \rho v(x, t) \cdot \mathbf{n} ds < 0$, d'où on a :

$$\begin{aligned} \frac{dm(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_V \rho(x, t) dV = - \oint_S \rho v(x, t) \cdot \mathbf{n} ds, \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \int_V \rho(x, t) dV + \oint_S \rho v(x, t) \cdot \mathbf{n} ds &= 0, \end{aligned}$$

la continuité de $\rho(x, t)$ et $\partial\rho(x, t)/\partial t$ montre que :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(x, t) dV = \int_V \frac{\partial\rho(x, t)}{\partial t} dV,$$

d'où :

$$\int_V \frac{\partial\rho(x, t)}{\partial t} dV + \oint_S \rho v(x, t) \cdot \mathbf{n} ds = 0. \quad (4.3)$$

D'après le théorème de divergence (Gauss-Ostrogradsky) :

$$\int_V \nabla \cdot \rho v dV = \oint_S \rho v(x, t) \cdot \mathbf{n} ds,$$

l'équation (4.3) peut être écrite sous la forme :

$$\boxed{\int_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div } \rho v \right) dV = 0.}$$

Puisque le volume V étant arbitraire, on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div } \rho v &= 0, \\ \Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \text{div } v + v \text{grad } \rho &= 0, \end{aligned}$$

on a alors :

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0}, \quad (4.4)$$

c'est l'équation de continuité, ou de la conservation de la masse qui traduit le fait que la masse n'est ni créée ni détruite au cours d'un écoulement.

Si le fluide est *incompressible* (ie : $D\rho/Dt = 0$), l'équation (4.4) devient :

$$\boxed{\operatorname{div} v = 0}.$$

4.1.1 Conservation de la masse et jacobienne.

Soient $\rho(x, t)$ la densité du volume Ω_t , et $\rho_0(X, 0)$ la densité du volume Ω_0 . Alors le principe de la conservation de la masse permet d'écrire :

$$\int_{\Omega_t} \rho(x, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_0} \rho(\phi(X, t), t) J(X, t) d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0(X) d\Omega_0.$$

Alors :

$$\rho(\phi(X, t), t) \cdot J(X, t) = \rho_0(X). \quad (4.5)$$

D'où l'équation de continuité (sous forme différentielle «lagrangienne») :

$$\boxed{\frac{d(\rho J)}{dt} = 0}. \quad (4.6)$$

L'équation (4.5) donne :

$$\boxed{J = \frac{d\Omega_t}{d\Omega_0} = \frac{\rho_0}{\rho}}, \quad (4.7)$$

4.2 Conservation de la quantité du mouvement

Appliquons maintenant le deuxième principe de Newton sur un système matériel constitué des particules fluides contenues dans Ω_t . Pour cela, il nous faut d'abord faire l'inventaire des efforts extérieurs appliqués à Ω_t délimité par S_t (FIG. 4.2).

On distingue deux types de forces :

1. Les forces volumiques qui agissent sur tout élément élémentaire de la matière à l'intérieur du volume (gravité, électrique ou forces électromagnétiques, etc...). Elles sont données par la formule :

$$F_{\text{ext}} = \int_{\Omega_t} \rho f d\Omega_t,$$

où ρf est la force par unité de volume.

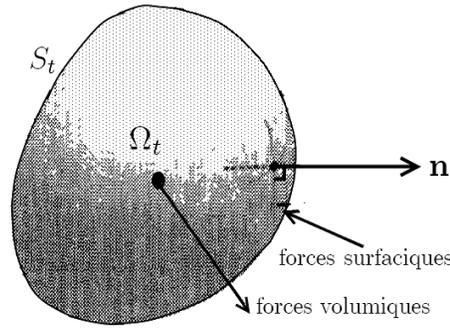


FIG. 4.2 – Milieu fluide de volume Ω_t délimité par la surface S_t .

2. Les forces surfaciques qui agissent uniquement à la surface S_t du volume Ω_t . Elles sont données par :

$$F_{\text{surf}} = \int_{S_t} \mathbf{f}(x, \mathbf{n}) dS,$$

où $\mathbf{f}(x, \mathbf{n})$ est la force par unité de surface.

3. En mécanique des fluides la contrainte \mathbf{f} est une fonction linéaire de la normale \mathbf{n} . Il existe donc une matrice σ d'ordre 3, appelée tenseur des contraintes, tel que :

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{n}) = \sigma \cdot \mathbf{n}.$$

Une conséquence importante de ce résultat est que, si les neuf composants du tenseur des efforts (des contraintes) sont connues en un point, alors la traction exercée sur n'importe quelle surface infinitésimal centrée à ce point peut être évaluée en termes de vecteur normal unitaire, simplement en effectuant une multiplication de matrice-vecteur, i.e. : Le tenseur σ est défini de façon intrinsèque au point de surface, c'est-à-dire, en particulier, indépendamment de la surface S_t choisie.

Pour établir les équations de la mécanique des fluides nous appliquons le principe fondamental de la dynamique :

La variation de la quantité de mouvement = Somme des forces extérieures.

La quantité du mouvement est donnée par :

$$\text{La masse} \times \text{La vitesse} = \int_{\Omega_t} \rho v d\Omega_t,$$

où ρv décrit la densité de la quantité du mouvement. Le principe de la conservation de la quantité du mouvement est :

$$\text{Les forces extérieures} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho v d\Omega_t,$$

i.e. :

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho v d\Omega_t = F_{\text{ext}} + F_{\text{surf}}.}$$

4.2.1 Forme intégrale des équations. Équation du mouvement.

D'après ce qui a précédé, l'application du principe fondamental de la dynamique conduit à :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho v d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho f d\Omega_t + \int_{S_t} \mathbf{f}(x, \mathbf{n}) dS,$$

la supposition de la mécanique des fluides donne :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho v d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho f d\Omega_t + \int_{S_t} \sigma \cdot \mathbf{n} dS,$$

en appliquant le théorème de la divergence à l'intégrale de surface du membre à droite, on obtient :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho v d\Omega_t = \int_{\Omega_t} (\rho f + \text{div } \sigma) d\Omega_t. \quad (4.8)$$

Théorème.

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho v d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \frac{Dv}{Dt} d\Omega_t.}$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho v d\Omega_t &= \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} \rho v J d\Omega_0, \quad (\text{de (4.5) et (4.7)}) \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{D(\rho v J)}{Dt} d\Omega_0, \\ &= \int_{\Omega_0} \left(v \frac{D(\rho J)}{Dt} + \rho J \frac{Dv}{Dt} \right) d\Omega_0, \end{aligned}$$

d'après (4.6), on trouve :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho v d\Omega_t = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho J \frac{Dv}{Dt} d\Omega_0, \quad (\text{puis de (4.5) et (4.7)})$$

$$\text{D'où : } \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho v d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \frac{Dv}{Dt} d\Omega_t. \quad \blacksquare$$

Donc d'après ce théorème, (4.8) devient :

$$\boxed{\int_{\Omega_t} \rho \frac{Dv}{Dt} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} (\rho f + \text{div } \sigma) d\Omega_t.}$$

Comme elles doivent être vérifiées quelque soit le volume matériel Ω_t , on en déduit l'équation de quantité de mouvement qui s'écrit :

$$\begin{aligned}\rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \text{grad } v \right) = \rho f + \text{div } \sigma, \\ \Leftrightarrow \frac{Dv}{Dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \text{grad } v = f + \frac{1}{\rho} \text{div } \sigma.\end{aligned}$$

D'où l'équation du mouvement :

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \text{grad } v = f + \frac{1}{\rho} \text{div } \sigma}. \quad (4.9)$$

▷ Dans un fluide au repos, les contraintes sont purement normales et sont données par *la pression*, $\mathbf{f} = -p\mathbf{n}$. dès que *des contraintes de cisaillement* sont appliquées, elles entraînent l'apparition d'un écoulement. On posera alors :

$$\boxed{\sigma = -p\mathbf{I} + \tau},$$

l'équation (4.9) du mouvement devient :

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \text{grad } v = f - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \tau},$$

le tenseur τ est appelé le tenseur *des contraintes visqueuses*. Pour un fluide le tenseur τ ne dépend que du tenseur *des taux de déformation* D et des variables p , ρ , etc....

4.2.2 Équation de Navier-Stokes.

Lorsqu'une particule de fluide se déplace, elle effectue en général une translation combinée à une rotation et subit en plus une certaine déformation. La différence de vitesse d'un point à l'autre de l'écoulement est à l'origine de ces mouvements de rotation et de déformation. Les dérivées des composantes de vitesse constituent également un tenseur pouvant se décomposer en une partie antisymétrique R et une partie symétrique comme suite :

$$\boxed{\text{grad } v = D + R}.$$

1. Le tenseur des taux de déformation, ou tenseur de vitesse de déformation :

$$D = \frac{1}{2} (\text{grad } v + (\text{grad } v)^t), \quad d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

il se décompose de même en deux termes, le premier terme est la trace du tenseur gradient de vitesse traduisant la dilatation (variation du volume) :

$$\text{Tr}(\text{grad } v) = \text{Tr}(D) = \text{div } v,$$

et le second c'est la vitesse des déformations angulaires de la particule (ils ne modifient pas le volume de la particule fluide).

2. Le tenseur antisymétrique R traduit une rotation globale de la particule fluide sans variation de forme ni de volume. Il est alors le tenseur des taux de rotation local :

$$R = \frac{1}{2} (\text{grad } v - (\text{grad } v)^t), r_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

il est lié au rotationnel $\Omega = \text{rot } v$ du champ v par :

$$R \cdot w = \frac{1}{2} \Omega \times w, \quad \forall w.$$

- ▷ Pour un fluide visqueux, la loi de comportement, est :

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \tau.$$

Définition.

Un fluide newtonien est un fluide pour lequel l'hypothèse :

$$\boxed{\tau = 2\mu D + \eta \text{div } v},$$

est vérifiée.

- ▷ Les coefficients μ (*viscosité dynamique*) et η (*second coefficient de viscosité*) sont appelés les coefficients de viscosité de Lamé. Ils dépendent essentiellement de la température et dans une moindre mesure de la pression.
- ▷ On leur adjoint généralement l'hypothèse de Stokes :

$$\mu_V = \eta + \frac{2}{3}\mu = 0,$$

μ_V , est appelée la viscosité volumique.

Alors pour un fluide newtonien on a :

$$\sigma = [-p + \eta \text{div } v] + 2\mu D,$$

alors, l'équation (4.9) devient :

$$\boxed{\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f + \text{div} ([-p + \eta \text{div } v] + 2\mu D)}.$$

c'est ce qu'on appelle l'équation de Navier-Stokes.

Avec l'hypothèse du comportement *adiabatique* les coefficients μ et η sont des constantes, et on a alors :

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f - \text{grad } p + \eta \text{grad} (\text{div } v) + \mu \text{div} (\nabla v + (\nabla v)^t),$$

en utilisant l'identité :

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}^t v) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} v),$$

On obtient alors :

$$\boxed{\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f - \nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla v) + (\eta + \mu) \nabla (\nabla \cdot v)}, \quad (4.10)$$

c'est l'équation de *Navier-Stokes*, pour le cas *adiabatique*.

Pour un fluide *visqueux newtonien* pour le cas *adiabatique* et lorsque l'écoulement est *incompressible* ($\operatorname{div} v = 0$), on a alors :

$$\boxed{\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 v + f}, \quad (4.11)$$

$\nu = \mu/\rho$ est la *viscosité cinématique*. Qui est l'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible newtonien.

4.2.3 Cas particulier. Équation d'Euler.

Définition.

Un fluide est dit *idéal* « ou *parfait* » s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de viscosité, c'est un fluide sans viscosité. Le fluide parfait ne peut être qu'une approximation quand on fait tendre cette viscosité vers zéro. Cela revient à faire tendre le nombre de Reynolds vers l'infini.

Pour un écoulement d'*un fluide idéal*, il y a une seule force $p(x, t)$ appelé la pression tels que si S_t est une surface de volume fluide, $p(x, t)$ est la force perpendiculaire exercée sur la surface S_t en un point $x \in S_t$ au temps t . Dans ce cas il n'y a pas des forces tangentielles.

les forces sur Ω_t (sur S_t) sont égales à :

$$-\int_{S_t} p \mathbf{n} dS = -\int_{\Omega_t} \operatorname{grad} p d\Omega_t, \quad (\mathbf{n} \text{ la normale unitaire extérieure}).$$

La force totale est alors :

$$-\int_{S_t} p \mathbf{n} dS,$$

il y a des force extérieures, comme des forces volumique (massique) qu'on note $F = \rho f$, par exemple le poids :

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad} v = -\frac{\nabla p}{\rho} + f}. \quad (4.12)$$

C'est l'équation d'Euler pour un fluide parfait.

On arrive à la même équation à partir de (4.11) pour $\nu = 0$.

4.3 Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes

Pour un fluide newtonien incompressible, on a l'équation de Navier-Stokes dimensionnée :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 v + f.$$

En choisissant une longueur caractéristique L , une vitesse caractéristique v_0 , une pression de référence p_0 , on adimensionne les variables par :

$$t^* = \frac{tv_0}{L}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad v^* = \frac{v}{v_0}, \quad p^* = \frac{p}{p_0}, \quad f = f^*F,$$

où les termes L et v_0 , p_0 et G (en général $f = g = g^*G$) sont des constantes dimensionnées et les termes avec une étoile les variables sans dimension. On peut remplacer dans l'équation de Navier-Stokes et l'on obtient :

$$\frac{v_0^2}{L} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{v_0^2}{L} v^* \cdot \nabla^* v^* = -\frac{p_0}{\rho L} \nabla^* p^* + \frac{v_0 \nu}{L^2} \nabla^{*2} v^* + g^*G.$$

Soit si on fait apparaître un coefficient unité devant le terme inertiel (on divise les deux membres sur v_0^2/L) :

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \cdot \nabla^* v^* = -\frac{p_0}{\rho v_0^2} \nabla^* p^* + \frac{\nu}{v_0 L} \nabla^{*2} v^* + \frac{LG^*}{v_0^2} g. \quad (4.13)$$

▷ Le rapport de la force d'inertie et de la force de pression c'est *le nombre d'Euler*, il apparaît souvent dans les écoulements non visqueux, précisément en aérodynamique :

$$\begin{aligned} \text{Eu} &= \frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de pression}} = \frac{\rho v_0^2}{p_0} \\ &\Rightarrow \frac{p_0}{\rho v_0^2} = \frac{1}{\text{Eu}}. \end{aligned}$$

▷ Dans le cas, où la compressibilité du fluide peut être négligée et en l'absence d'un écoulement à surface libre, par exemple un écoulement de fluide dans une pipe, un sous-marin dans un conduit d'eau, on a seulement l'importance de la force de viscosité et de la force d'inertie. Ce rapport de la force d'inertie et de la force de viscosité c'est *le nombre de Reynolds* :

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de viscosité}} = \frac{\rho v_0 L}{\eta} = \frac{v_0 L}{\nu} \\ &\Rightarrow \frac{\nu}{v_0 L} = \frac{1}{\text{Re}}. \end{aligned}$$

▷ Le rapport de la force d'inertie et de la force de pesanteur c'est le nombre :

$$\frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de gravité}} = \frac{v_0^2}{LG},$$

la racine carrée de ce rapport, v_0^2/LG , est connue sous le nom de *nombre de Froude*, il apparaît dans les écoulements aux canaux ouverts :

$$\begin{aligned} \text{Fr} &= \frac{v_0}{\sqrt{LG}} \\ \Rightarrow \frac{LG}{v_0^2} &= \frac{1}{\text{Fr}^2}. \end{aligned}$$

On conclut alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \cdot \nabla^* v^* &= -\frac{1}{\text{Eu}} \nabla^* p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} v^* + \frac{1}{\text{Fr}^2} g^* \\ \Updownarrow & \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v &= -\frac{1}{\text{Eu}} \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v + \frac{1}{\text{Fr}^2} g. \end{aligned}$$

Si on pose dans l'équation de Navier-Stokes, la pression de référence $p_0 = \rho v_0^2$, on trouve :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v + \frac{1}{\text{Fr}^2} g.$$

L'équation de continuité :

$$\nabla \cdot v = 0.$$

En général on a :

$$\boxed{\begin{cases} \nabla \cdot v = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v + \frac{1}{\text{Fr}^2} g. \end{cases}} \quad (4.14)$$

D'autres nombres sans dimension, plus utilisés en mécanique des fluides sont :

▷ *Nombre de Mach* M (la racine carrée du rapport entre les forces d'inertie et les force dues à la compressibilité) : il paraît quand l'écoulement du fluide à vitesse élevée, ou quand un corps solide se déplace à grande vitesse dans un fluide au repos. La compressibilité du fluide est alors importante de sorte que le rapport de la force d'inertie à la force d'élasticité est non négligeable : une grande vitesse est une vitesse de l'ordre ou dépasse la vitesse du son dans le fluide considéré.

▷ *Nombre de Weber* We (le rapport entre les forces d'inertie et les forces de tension superficielle) : il apparaît dans les interfaces, quand un liquide est en contact avec un autre fluide.

▷ Si dans un écoulement le fluide est en contact avec un obstacle en oscillation, on a *le nombre de Strouhal* S . Si on s'intéresse aux vibrations élastiques d'obstacle sous l'effet de l'écoulement (vibration des aubes de turbine), on a *le nombre de Cauchy* C . Comme on peut définir d'autres nombres sans dimensions et cela selon la nature du problème à étudier : *Nombre de Thomas* (ou paramètre de cavitation) Ca , *nombre de Stokes* St , *nombre de Peclet* Pe , *nombre de Prandtl* Pr , etc.

Enfin ces nombres sans dimension mènent à la règle de similitude suivante :

On dit qu'il y a similitude entre deux écoulement correspondant à deux expériences distinctes, s'ils ont les mêmes nombres sans dimensions et qui ont les mêmes valeurs.

4. 4 Conditions aux limites et initiales

Pour résoudre un problème d'écoulement d'un fluide modélisé par des équations mathématiques, on doit savoir son état initial et son comportement aux frontières du domaine qu'il occupe. L'établissement de l'état initial est donné par la condition initiale et celui du comportement aux frontières est donné par *les conditions aux limites*.

4.4.1 Conditions initiales

On doit donner l'état de l'écoulement (du fluide) dans tout le domaine occupé Ω à l'instant $t = 0$, choisi comme instant initial : $v(x, 0) = v(x)$, $\rho(x, 0) = \rho(x)$, $p(x, 0) = p(x)$ et $T(x, 0) = T(x)$, etc.

4.4.2 Conditions aux limites

Dans un écoulement réel le fluide est en contact avec :

- 1] **Paroi rigide** : L'expérience montre qu'au contact d'une paroi rigide les particules juste en contact s'accroche à la paroi rigide. De ce fait, si on considère que la paroi rigide est *fixe* et *imperméable*, la vitesse des particules au contacte est nulle, i.e.

$$v(x, t)|_{x \in \partial\Omega} = 0.$$

- 2] **Paroi rigide perméable** : Dans ce cas, on doit savoir la perméabilité de la paroi, c'est à dire la quantité du fluide qui traverse la paroi rigide, supposons qu'elle est égale à Q/s . D'où la condition aux limite considère que la paroi rigide est *fixe* et *perméable*, la condition de perméabilité est :

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = Q.$$

3] **Une surface entre deux fluides :** Si l'écoulement est de plusieurs fluides non miscibles des surfaces séparatrices (appelées interfaces) entre les différents fluides se créent. À l'interface il y a discontinuités des fonctions des différents fluides, il faut exprimer une condition sur la continuité des contraintes à la surface de séparation entre les deux fluides. En effet, on doit avoir l'équilibre entre les contraintes à l'intérieur de chacun des deux fluides et les contraintes sur l'interface, cet équilibre est traduit par l'équation de Bernoulli.

4.4.3 Conditions d'Entrée et de Sortie

Cette condition signifie qu'il faut connaître la distribution des fonctions de l'écoulement, dans le cas où l'écoulement a une section d'entrée et de sortie.

4.4.4 Conditions à l'infini

Lorsque le domaine Ω s'étend à l'infini, on suppose connu l'état du fluide à l'infini, à chaque instant. Ces conditions s'écrivent généralement sous la forme :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x, t) &= v_\infty(t), \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \rho(x, t) &= \rho_\infty(t), \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x, t) &= p_\infty(t), \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} T(x, t) &= T_\infty(t).\end{aligned}$$

Notons toutefois, que certaines de ces limites, lorsque x croît indéfiniment, peuvent ne pas exister ; il faut alors connaître le comportement en x de ces fonctions au voisinage du point à l'infini.

CHAPITRE 5

ANALYSE ASYMPTOTIQUE

L'analyse asymptotique est une collection des méthodes d'analyse qui permet de classer les comportements de fonctions dans un voisinage donné en se concentrant sur certaines tendances caractéristiques. On l'exprime en générale au moyen des relations grand o $\ll O \gg$, petit o $\ll o \gg$ et équivalent $\ll \sim \gg$.

5. 1 Notions de base

5.1.1 Relation d'ordre $\ll O, o, \sim \gg$.

Dans tout ce qui suit, on se donne un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathcal{D}}$. Deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ définies dans \mathcal{D} .

5.1.1.1 Relation grand o $\ll O \gg$.

On dit que $\varphi(x)$ est grand O de $\psi(x)$ quand $x \rightarrow x_0$ dans \mathcal{D} , s'il existe un voisinage $v(x_0)$ et une constante $k > 0$ tel que :

$$|\varphi(x)| \leq k |\psi(x)|, \quad \forall x \in \mathcal{D} \cap v(x_0),$$

On écrit alors : $\varphi(x) = O(\psi(x))$ quand $x \rightarrow x_0$, $x \in \mathcal{D}$, i.e., $|\varphi(x)/\psi(x)|$ est bornée dans le domaine $\mathcal{D} \cap v(x_0)$.

5.1.1.2 Relation petit o $\ll o \gg$.

On dit que $\varphi(x)$ est petit o de $\psi(x)$ quand $x \rightarrow x_0$ dans \mathcal{D} , si $\forall \varepsilon > 0, \exists v(x_0)$ (un voisinage de x_0) tel que :

$$|\varphi(x)| \leq \varepsilon |\psi(x)|, \quad \forall x \in \mathcal{D} \cap v(x_0),$$

et on écrit :

$$\varphi(x) = o(\psi(x)), \quad x \rightarrow x_0, \quad x \in \mathcal{D}.$$

Si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathcal{D}}} (\varphi(x)/\psi(x))$ existe la définition est équivalente à :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathcal{D}}} (\varphi(x)/\psi(x)) = 0.$$

On dit alors que $\varphi(x)$ est *négligeable* par rapport à $\psi(x)$ au voisinage de x_0 , dans \mathcal{D} .

5.1.1.3 Relation équivalent à $\llsim\gg$.

Si $\varphi(x) - \psi(x) = o(\varphi(x))$ quand $x \rightarrow x_0$ dans \mathcal{D} , ou bien $\psi(x) - \varphi(x) = o(\psi(x))$. On dit que $\varphi(x)$ est équivalente à $\psi(x)$ au voisinage de x_0 , et on écrit :

$$\varphi(x) \sim \psi(x), \quad x \rightarrow x_0, x \in \mathcal{D}.$$

Si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathcal{D}}} (\varphi(x)/\psi(x))$ existe alors :

$$[\varphi(x) \sim \psi(x)] \Leftrightarrow \left[\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathcal{D}}} \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \right) = 1 \right].$$

5.1.1.4 Relation uniforme.

Si les fonctions φ et ψ dépendent de la variable $x \in \mathcal{D}$ et d'un paramètre $\xi \in I$ (i.e., $\varphi = \varphi(x, \xi)$, $\psi = \psi(x, \xi)$, $x \in \mathcal{D}$, $\xi \in I$), alors dans les relations précédentes si les constantes et les voisinages sont indépendantes du paramètre ξ . Alors les relations sont dites *uniformes*, sinon elles sont *non-uniformes*.

5.1.2 Opérations sur les relations d'ordre.

Dans tout ce qui suit, le domaine \mathcal{D} et le point $x_0 \in \overline{\mathcal{D}}$ sont fixés la phrase $\ll\text{quand } x \rightarrow x_0, x \in \mathcal{D}\gg$ est toujours sous entendue.

1. $\varphi = O(\psi)$, si $\alpha > 0$ alors : $|\varphi|^\alpha = O(|\psi|^\alpha)$.
2. $\varphi_i = O(\psi_i)$, $i = 1, \dots, n$, pour des constantes a_i on a :

$$\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i = O\left(\sum_{i=1}^n |a_i| |\psi_i|\right).$$

3. $\varphi_i = O(\psi_i)$, $i = 1, \dots, n$, et s'il existe ψ tel que $|\psi_i| \leq \psi$. Alors :

$$\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i = O(\psi),$$

a_i sont des constantes.

4. $\varphi_i = O(\psi_i)$, $i = 1, \dots, n$ alors $\prod_{i=1}^n \varphi_i = O(\prod_{i=1}^n \psi_i)$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D} =]a, b[$ et $\varphi(x) = O(\psi(x))$ quand $x \rightarrow b$, si de plus φ et ψ sont mesurable sur \mathcal{D} , alors :

$$\int_x^b \varphi(t) dt = O\left(\int_x^b |\psi(t)| dt\right), \text{ quand } x \rightarrow b.$$

6. Soit $a < \xi < b$ un paramètre et $\varphi(x, \xi) = O(\psi(x, \xi))$ uniformément quand $x \rightarrow x_0$. Alors :

$$\int_a^b \varphi(x, \xi) d\xi = O\left(\int_a^b |\psi(x, \xi)| d\xi\right), \text{ quand } x \rightarrow x_0.$$

Remarque.

1. Toutes les opérateurs 1-6 sont aussi vrais pour $\ll o \gg$ et $\ll \sim \gg$.
2. L'opération *dérivée* n'est pas valable ni par rapport à la variable ni par rapport au paramètre.

5. 2 Suites asymptotiques

Définition.

Soit $(\delta_i(x))$ une suite définie au voisinage d'un point x_0 . $(\delta_i(x))_{i \geq 1}$ est dite *une suite asymptotique*, si on a :

$$\boxed{\forall i, \delta_{i+1}(x) = o(\delta_i(x)), x \rightarrow x_0}.$$

Exemples.

1. On prend $x_0 = 0$ et $\delta_i(x) = x^i$, on a :

$$\delta_{i+1}(x) = x^{i+1} = o(x^i) = o(\delta_i(x)), \quad x \rightarrow 0,$$

cette suite est appelée suite des puissances.

2. On prend $x_0 = +\infty$ et $\delta_i(x) = 1/x^i$, on a :

$$\delta_{i+1}(x) = 1/x^{i+1} = o(1/x^i) = o(\delta_i(x)), \quad x \rightarrow 0,$$

$\delta_i(x)$ est *une suite asymptotique* au voisinage de $+\infty$. c'est la suite des puissance.

Remarque.

1. Une *suite asymptotique* n'est pas obligatoirement convergente vers 0. $\delta_i(x) = x^{\frac{1}{i}}$, $x \rightarrow +\infty$ donne un exemple.
2. Si $f(x)$ est une fonction continue au point x_0 , et $\delta_i(x)$ une *suite asymptotique* au point x_0 . Alors : $f(x) \cdot \delta_i(x)$ est aussi une *suite asymptotique*.

Théorèmes.

1. Toutes sous suite d'une suite asymptotique est une suite asymptotique.
2. Si $(\delta_i(x))_{i \geq 1}$ est une suite asymptotique quand $x \rightarrow x_0$ et $\alpha > 0$, alors : $(|\delta_i(x)|^\alpha)_{i \geq 1}$ est aussi une suite asymptotique.

5.3 Suites équivalentes

Définition.

Soient $(\delta_i(x))_{i \geq 1}$ et $(\gamma_i(x))_{i \geq 1}$ deux suites asymptotiques au voisinage de x_0 , si $\forall i : \delta_i(x) = O(\gamma_i(x))$ et $\gamma_i(x) = O(\delta_i(x))$ alors les deux suites sont dites *équivalentes*.

Théorème.

Soient $(\delta_i(x))_{i \geq 1}$ et $(\gamma_i(x))_{i \geq 1}$ deux *suites équivalentes* au voisinage de x_0 , si l'une est asymptotique quand $x \rightarrow x_0$ l'autre l'est aussi.

Théorème.

Soit $(\phi_i(x, t))_{i \geq 1}$ une suite asymptotique uniforme et $\alpha < t < \beta$ lorsque $x \rightarrow x_0$:

1. $\phi_i(x, t)$ mesurable $\forall i$.
2. $\phi_1(x, t)$ est intégrable par rapport à t , c'est à dire : $\int_{\alpha}^{\beta} |\phi_1(x, t)| dt$ est fini.

Alors : $\psi_i(x) = \int_{\alpha}^{\beta} |\phi_i(x, t)| dt$ existe $\forall i$, de plus $(\psi_i(x))_{i \geq 1}$ forment une suite asymptotique quand $x \rightarrow x_0$.

Théorème.

Soit $(\phi_i(x))_{i \geq 1}$ une suite asymptotique définie sur l'intervalle $a < x < x_0$ lorsque $x \rightarrow x_0$. Supposons que $\phi_i(x)$ sont mesurables et $\phi_1(x)$ est intégrable, i.e. : $\int_a^{x_0} |\phi_1(x)| dx < \infty$. Alors : $\psi_i(x) = \int_x^{x_0} |\phi_i(t)| dt$ existe $\forall i$, de plus $(\psi_i(x))_{i \geq 1}$ forment une suite asymptotique quand $x \rightarrow x_0$.

5.4 Développement asymptotique

5.4.1 Série asymptotique.

Soit $(\delta_i(x))_{i \geq 1}$ une suite asymptotique lorsque $x \rightarrow x_0$, $(a_i)_{i \geq 1}$ une suite numérique. La série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i \delta_i(x)$ est appelée *une série asymptotique* quand $x \rightarrow x_0$.

5.4.2 Développement asymptotique.

Soit $f(x)$ une fonction définie dans \mathcal{D} , $x_0 \in \bar{\mathcal{D}}$ et $(\delta_i(x))_{i \geq 1}$ *une série asymptotique* lorsque $x \rightarrow x_0$. On dit que $f(x)$ admet *un développement asymptotique* à l'ordre N par rapport à $(\delta_i)_{i \geq 1}$ quand $x \rightarrow x_0$, s'il existe des constantes a_i , $i = 1, \dots, N$ tel que :

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{i=1}^n a_i \delta_i(x) &= o(\delta_n(x)), \\ &= O(\delta_{n+1}(x)), x \rightarrow x_0 \text{ et } n = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

▷ Si $N = 1$: $f(x) - a_1\delta_1(x) = o(\delta_1(x))$, c'est à dire :

$$f(x) = a_1\delta_1(x) + o(\delta_1(x)).$$

▷ Si le développement asymptotique est valable $\forall N = 1, 2, 3, \dots$ on écrit alors :

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{+\infty} a_i\delta_i(x), \quad x \rightarrow x_0.$$

Théorème.

Le développement par rapport à une suite asymptotique $(\delta_i(x))_{i \geq 1}$ d'une fonction donnée $f(x)$ -s'il existe- il est unique.

5.4.3 Calcul des coefficients d'un développement asymptotique.

Soit $(\delta_i(x))_{i \geq 1}$ une suite asymptotique, $x \rightarrow x_0$, $f(x)$ une fonction définie sur \mathcal{D} , $x_0 \in \bar{\mathcal{D}}$. Supposons que $f(x)$ admet un développement asymptotique par rapport à $\delta_i(x)$, $x \rightarrow x_0$:

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{+\infty} a_i\delta_i(x) = a_1\delta_1(x) + a_2\delta_2(x) + \dots,$$

on divise les deux membre par $\delta_1(x)$ (on suppose toujours que les limites existent), on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{\delta_1(x)} &\sim a_1 + a_2 \frac{\delta_2(x)}{\delta_1(x)} + \dots, \text{ quand } x \rightarrow x_0, \\ \Rightarrow a_1 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{\delta_1(x)} - a_2 \frac{\delta_2(x)}{\delta_1(x)} + \dots \right), \end{aligned}$$

donc :

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\delta_1(x)}, \text{ puisque } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\delta_n(x)}{\delta_1(x)} = 0, \quad n \geq 2,$$

de même :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - a_1\delta_1(x)}{\delta_2(x)} &\sim a_2 + a_3 \frac{\delta_3(x)}{\delta_2(x)} + \dots, \text{ quand } x \rightarrow x_0, \\ \Rightarrow a_2 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - a_1\delta_1(x)}{\delta_2(x)} \right), \end{aligned}$$

et par récurrence :

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\delta_1(x)}, a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\delta_i(x)}{\delta_n(x)} \right), n = 2, 3, \dots.$$

5.4.4 Opération sur les développements asymptotiques.

On considère la suite asymptotique $(\delta_i(x))_{i \geq 1}$ et supposons que $f(x)$ et $g(x)$ ont des développements asymptotiques au voisinage de x_0 :

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \delta_i(x), \quad x \rightarrow x_0,$$

$$g(x) \sim \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \delta_i(x), \quad x \rightarrow x_0,$$

on a les propriétés suivantes :

1. L'addition et produit avec constante :

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \sim \sum_{i=1}^{+\infty} [\alpha a_i + \beta b_i] \delta_i(x), \quad x \rightarrow x_0 \text{ et } \alpha, \beta = \text{Cte.}$$

2. L'intégration :

$$f(x; \varepsilon) \sim \sum_{i=1}^{+\infty} a_i(x) \delta_i(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

si $f(x, \varepsilon)$, $a_i(x)$ intégrables par rapport à x , on a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, \varepsilon) dx \sim \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_n(\varepsilon) \int_{\alpha}^{\beta} a_i(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

De même, si $f(x, \varepsilon)$, $a_i(x)$ intégrables par rapport à ε , on a :

$$\int_0^{\xi} f(x, \varepsilon) d\varepsilon \sim \sum_{n=1}^{+\infty} a_i(x) \int_0^{\xi} \delta_i(\varepsilon) d\varepsilon, \quad \xi \rightarrow 0.$$

3. Le produit de deux fonctions :

$$f(x) \cdot g(x) \sim \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i \delta_i(x) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{+\infty} b_i \delta_i(x) \right), \quad x \rightarrow x_0.$$

$$\sim a_1 b_1 \delta_1^2(x) + \dots$$

4. La différentiation n'est pas permise :

$$f(x; \varepsilon) \sim \sum_{i=1}^{+\infty} a_i(x) \delta_i(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \not\Rightarrow \frac{\partial f(x; \varepsilon)}{\partial x} \sim \sum_{i=1}^{+\infty} a'_i(x) \delta_i(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Théorème.

Si $f(x; \varepsilon) \sim \sum_{i=1}^{+\infty} a_i(x) \delta_i(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ et si :

$$\frac{\partial f(x; \varepsilon)}{\partial x} \sim \sum_{i=1}^{+\infty} b_i(x) \delta_i(\varepsilon), \varepsilon \rightarrow 0,$$

alors :

$$b_i(x) = a_i'(x) = \frac{da_i(x)}{dx}.$$

5.4.5 Comparaison de série asymptotique avec une série convergente.

Une série asymptotique est un développement asymptotique comprenant une infinité de termes (i.e. $N \rightarrow +\infty$), cette série peut être convergente dans un sens classique pour un certain voisinage de x , ou divergente. La fonction $f(x)$ écrite sous forme d'une série convergente de la manière suivante :

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N a_i \delta_i(x), \text{ pour une valeur fixe de } x.$$

Dans le cas où la série de $f(x)$ est divergente, on peut représenter par un développement asymptotique, avec un petit x qui tend vers 0, et on a :

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N a_i \delta_i(x), \text{ pour une valeur fixe de } N.$$

Exemple.

On considère :

$$F(x) = x e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad x \rightarrow +\infty,$$

▷ **Utilisation d'une série convergente :**

On a :

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt &= \int_x^{+\infty} e^{-t} d \ln t, \\ &= e^{-t} \ln t \Big|_{t=x}^{+\infty} + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t dt, \\ &= -e^{-x} \ln x + \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt - \int_0^x e^{-t} \ln t dt, \end{aligned}$$

remarquons que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = -\gamma = -\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n=1}^m (1/n) - \ln(m) \right] \simeq -0.5772156649 \dots,$$

γ c'est la constante d'Euler.

On trouve donc :

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt &= -e^{-x} \ln x - \gamma - \int_0^1 e^{-t} \ln t dt - \int_1^x e^{-t} \ln t dt, \\ &= -e^{-x} \ln x - \gamma - \int_0^1 e^{-t} \ln t dt + e^{-t} \ln t \Big|_{t=1}^x - \int_1^x \ln t de^{-t}, \\ &= -\gamma - \int_0^1 e^{-t} \ln t dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt, \end{aligned}$$

puisque la série $e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} [(-t)^n / n!]$ est absolument convergente, alors :

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt &= -\gamma - \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^n}{n!} \ln t dt - \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^x \frac{(-t)^n}{t \cdot n!} dt, \\ &= -\gamma - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \int_0^1 \ln t dt^{n+1} - \int_1^x \frac{dt}{t} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^x t^{n-1} dt, \\ &= -\gamma - \ln(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \cdot (n+1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} (x^n - 1), \end{aligned}$$

la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} (x^n - 1)$ est absolument convergente $\forall x$, alors :

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt &= -\gamma - \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot n!} x^n, \\ &= -\gamma - \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot n!} x^n. \end{aligned}$$

On trouve finalement :

$$\boxed{F(x) = x e^x \left\{ [-\ln x - \gamma] + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot n!} x^n \right\}}, \quad (5.1)$$

malgré que la série (5.1) est convergente, elle est très lentement convergente. Pour calculer par exemple, $F(10)$ on somme 40 termes pour obtenir une précision de 10^{-2} . La situation devient plus grave lorsque $x \rightarrow +\infty$.

▷ **Utilisation d'une série asymptotique :**

Pour faciliter les calculs, on prend :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}e^{-x}F(x) &= I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \\ &= - \int_{t=x}^{+\infty} \frac{d(e^{-t})}{t} = \frac{e^{-t}}{t} \Big|_{t=x}^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt, \\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt, \end{aligned}$$

si on fait n -intégrations on trouve :

$$I(x) = e^{-x} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{x^i} (i-1)! + (-1)^n n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt,$$

on est tenté d'écrire : $I(x) = e^{-x} \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\left((-1)^{i+1} / x^i \right) (i-1)! \right]$, mais ça est faux car la série est divergente $\forall x$. Mais la série est asymptotique lorsque $x \rightarrow +\infty$, avec $\delta_i(x) = 1/x^i$ une suite asymptotique lorsque $x \rightarrow +\infty$.

On doit montrer que :

$$I(x) \sim e^{-x} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{x^i} (i-1)!, \quad x \rightarrow \infty,$$

d'où :

$$I(x) = e^{-x} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{x^i} (i-1)! + r_n(x),$$

où :

$$r_n(x) = (-1)^n n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt.$$

On estime le terme $r_n(x)$:

$$\begin{aligned} |r_n(x)| &= \left| n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt \right| \\ &\leq n! \frac{1}{x^{n+1}} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt \\ &\leq \frac{n!e^{-x}}{x^{n+1}} = o\left(\frac{e^{-x}}{x^n}\right), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Si on prend $r_n(x) = n!e^{-x}/x^{n+1}$, on voit que si x est fixé :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n(x)| = +\infty,$$

mais si on fixe n , alors on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |r_n(x)| = 0.$$

Alors :

$$\begin{aligned} F(x) &= xe^x I(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^n}, \quad x \rightarrow \infty, \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i i!}{x^i} + R_n^A(x), \end{aligned} \quad (5.2)$$

avec :

$$|R_n^A(x)| \leq \frac{n!}{x^n}.$$

Supposons que $R_n^A(x) = n!/x^n$:

1. Pour $x = x_0$ fixé :

Étude de $R_n^A(x)$ en fonction de n :

$$\begin{aligned} R_1^A(x_0) &= \frac{1}{x_0}, \\ R_2^A(x_0) &= \frac{1}{x_0} \cdot \frac{2}{x_0} = \frac{2}{x_0} R_1^A(x_0), \\ R_3^A(x_0) &= \frac{1}{x_0} \cdot \frac{2}{x_0} \cdot \frac{3}{x_0} = \frac{3}{x_0} R_2^A(x_0), \end{aligned}$$

on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{2}{x_0} &< 1 \Rightarrow R_2^A(x_0) < R_1^A(x_0), \\ \frac{3}{x_0} &< 1 \Rightarrow R_3^A(x_0) < R_2^A(x_0), \\ &\vdots \\ \frac{n_0}{x_0} &< 1 \Rightarrow R_{n_0}^A(x_0) < R_{n_0-1}^A(x_0), \\ \frac{n_0+1}{x_0} &> 1 \Rightarrow R_{n_0+1}^A(x_0) > R_{n_0}^A(x_0), \end{aligned}$$

à partir de certain nombre $n_* = n_0 + 1$, le reste $R_n^A(x)$ de la série asymptotique (5.2) croître vers l'infini (puisque x est fixé), pendant que le reste $R_n^C(x)$ de la série convergente (5.1) tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ (FIG. 5.1 et 5.2).

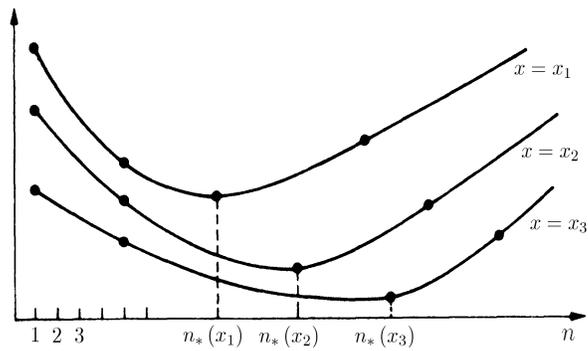


FIG. 5.1 – Étude de $R_n^A(x)$ en fonction de n et $x : x_1 < x_2 < x_3$.

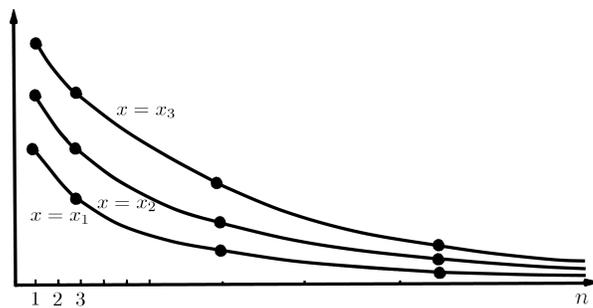


FIG. 5.2 – Étude de $R_n^C(x)$ en fonction de n et $x : x_1 < x_2 < x_3$.

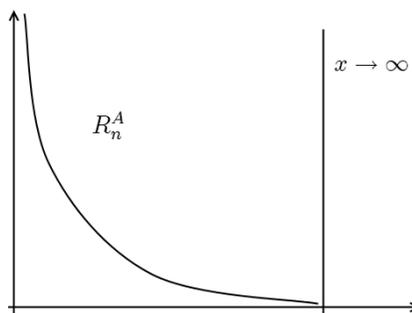


FIG. 5.3 – Comportement de R_n^A pour n fixé lorsque $x \rightarrow \infty$.

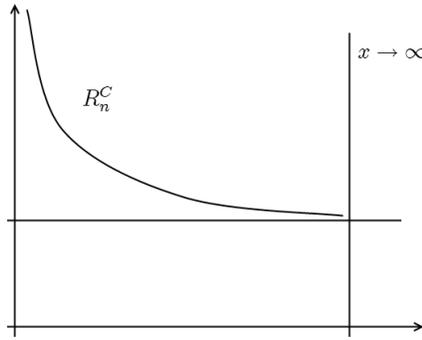


FIG. 5.4 – Comportement de R_n^C pour n fixé lorsque $x \rightarrow \infty$.

2. Pour n fixé :

On voit que, le reste $R_n^A(x)$ tend vers 0, et que le reste $R_n^C(x)$ tend vers une valeur fixée lorsque $x \rightarrow \infty$ (FIG. 5.3 et 5.4). Pour trouver $F(10)$ dans (5.2), on somme 2 termes pour obtenir une précision de 10^{-2} . La série asymptotique (5.2) elle donne une bonne approximation dans les premiers termes pour des valeurs de x suffisamment larges, mais à partir d'une certaine valeur de n la série devient divergente.

5.5 Problème de perturbation

D'un point de vue heuristique, *la théorie des perturbations* est une méthode mathématique générale qui permet de trouver une solution approchée d'un problème mathématique \mathcal{P}_ε dépendant d'un paramètre ε lorsque la solution du problème \mathcal{P}_0 (*problème réduit* $\mathcal{P}(u, 0) = \mathcal{P}_0(u)$ lorsque $\varepsilon = 0$), correspondant à la valeur $\varepsilon = 0$, est connue exactement. Le problème mathématique \mathcal{P}_ε peut être une équation algébrique, une équation différentielle, ... La méthode consiste à chercher la solution approchée du problème \mathcal{P}_ε sous la forme d'un développement en série asymptotique du paramètre ε , cette solution approchée étant supposé être une approximation d'autant meilleure de la solution exacte, mais inconnue, que la valeur absolue du paramètre ε est plus petit.

De façon générale, on va trouver une fonction $u(x)$, $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, qui satisfait un certain problème $\mathcal{P}(u, \varepsilon) = \mathcal{P}_\varepsilon(u)$ avec des conditions aux limites; en terme d'un développement asymptotique, c'est à dire :

$$u(x; \varepsilon) \sim u_0(x) + u_1(x) \delta_1(\varepsilon) + u_2(x) \delta_2(\varepsilon) + \dots, \varepsilon \rightarrow 0, \quad (5.3)$$

où $u_i (i = 0, 1, \dots)$ ne dépendent pas de ε , et u_0 est la solution du *problème réduit* pour $\varepsilon = 0$. La suite $(\delta_i(x))_{i \geq 1}$ est une *suite asymptotique*, on commence souvent d'essayer la *suite des puissances*. x est une variable appartenant à un domaine \mathcal{D}

de \mathbb{R}^n et $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, ε_1 étant un nombre positif fixé aussi petit que souhaité, ε est sans dimension, ce qui implique que le problème a été, au préalable, rendu sans dimension.

5.5.1 Perturbation régulière et singulière.

Si la série (5.3) est valable uniformément, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et $x \in \mathcal{D}$. Alors : on dit qu'on a un problème de perturbation *régulière*. Sinon le problème est *singulier* (On ne peut pas représenter la solution $u(x, \varepsilon)$ en un développement asymptotique uniformément valable $\forall x \in \mathcal{D}$ et $\varepsilon > 0$).

5.5.2 Symptôme de singularité.

La singularité apparaît en générale lorsque :

1. Si $\mathcal{P}_0(u)$ est de nature différente de $\mathcal{P}_\varepsilon(u)$ (type différent).
2. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) \neq u_0(x)$.

5.5.3 Exemple de perturbation régulière.

Considérons l'équation algébrique :

$$x^2 + (0.001)x - 1 = 0,$$

on pose $\varepsilon = 0.001$, le problème perturbé est :

$$\mathcal{P}(x, \varepsilon) : \quad x^2 + \varepsilon x - 1 = 0, \tag{5.4}$$

le problème réduit est :

$$\mathcal{P}(x, 0) : \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = a_0 = \pm 1,$$

Pour $x = 1$, on choisit :

$$x(\varepsilon) \sim a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + \dots,$$

avec $a_0 = 1$. En remplaçant cette forme de x dans l'équation (5.4), on trouve :

$$(1 - 1)\varepsilon^0 + (2a_1 + 1)\varepsilon + (a_1 + a_1^2 + 2a_2)\varepsilon^2 + (a_2 + 2a_1a_2 + 2a_3)\varepsilon^3 + \dots = 0.$$

Ça sera :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \varepsilon^0 : \quad 1 - 1 = 0, \\ \text{pour } \varepsilon^1 : \quad 2a_1 + 1 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}, \\ \text{pour } \varepsilon^2 : \quad a_1 + a_1^2 + 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{8}, \\ \text{pour } \varepsilon^3 : \quad a_2 + 2a_1a_2 + 2a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0, \end{array} \right.$$

on trouve alors :

$$x_1(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 + 0 \cdot \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4),$$

d'où :

$$\Rightarrow x_1(0.001) \simeq 1 - \frac{0.001}{2} + \frac{0.0001}{8} = 0.99951,$$

en remplaçant par $\varepsilon = 0.001$, on trouve la racine x_1 avec une erreur d'ordre 10^{-12} .

On fait la même chose pour $x = -1$, pour trouver la deuxième solution $x_2(\varepsilon)$ du problème (5.4).

5.5.4 Exemple de perturbation singulière.

On considère maintenant le problème :

$$\mathcal{P}(x, \varepsilon) : \quad \varepsilon x^2 + x - 1 = 0, \quad (5.5)$$

le problème réduit est :

$$\mathcal{P}(x, 0) : \quad x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1,$$

on constate que $\mathcal{P}(x, \varepsilon)$ est une équation du deuxième degré tandis que $\mathcal{P}(x, 0)$ est une équation du premier degré, donc c'est un problème singulier.

Supposons que $x_1(\varepsilon) \sim a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots$, on trouve $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$. Alors :

$$x_1(\varepsilon) = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Si $\varepsilon = 0$, on a une seule racine $x = 1$, tandis que pour $\varepsilon \neq 0$ le problème (5.5) admet deux solutions, on a donc un problème de *perturbation singulière*. Une idée très utile pour des problèmes de perturbation singulière est de *changement d'échelle (rescale)* avant de faire d'un développement asymptotique, dans ce cas, on pose :

$$x = \frac{X}{\delta(\varepsilon)}, \quad \delta(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0,$$

alors :

$$\mathcal{P}(x; \varepsilon) \Leftrightarrow \mathcal{P}_{\delta(\varepsilon)}(X; \varepsilon) : \quad \frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} X^2 + \frac{1}{\delta(\varepsilon)} X - 1 = 0,$$

en multipliant les deux membre par $\delta(\varepsilon)$ on trouve :

$$\mathcal{P}(X; \varepsilon) : \quad \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} X^2 + X - \delta(\varepsilon) = 0,$$

pour capter la solution singulière on pose $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$:

$$\mathcal{P}(X; \varepsilon) : \quad X^2 + X - \varepsilon = 0, \quad (5.6)$$

et le problème réduit :

$$\mathcal{P}(X;0) : X^2 + X = 0 \Leftrightarrow X = 0 \text{ ou } X = -1,$$

$X = 0$ donne la solution régulière, et $X = a_0 = -1$, on fait un développement de la forme :

$$X = \varepsilon \cdot x_2(\varepsilon) \sim -1 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + \dots.$$

Si on remplace cette formule dans l'équation (5.6) on trouve :

$$(1 - 1)\varepsilon^0 + (-a_1 - 1)\varepsilon + (a_1^2 - a_2)\varepsilon^2 + (2a_1a_2 - a_3)\varepsilon^3 + \dots = 0,$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \varepsilon^0 : 1 - 1 = 0, \\ \text{pour } \varepsilon^1 : -a_1 - 1 = 0 \Rightarrow a_1 = -1, \\ \text{pour } \varepsilon^2 : a_1^2 - a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 1, \\ \text{pour } \varepsilon^3 : 2a_1a_2 - a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = -2, \end{array} \right.$$

donc :

$$\begin{aligned} X &= \varepsilon \cdot x_2(\varepsilon) \sim -1 + -\varepsilon + \varepsilon^2 - 2\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \\ &\Rightarrow \boxed{x_2(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)}, \end{aligned}$$

finalement :

$$\Rightarrow x_2(0.001) \simeq -1000 + -1 + 0.001 - 0.000002 = -1001.0,$$

en remplaçant par $\varepsilon = 0.001$, on trouve la racine x_2 avec une erreur d'ordre 10^{-9} .

5.5.5 Problèmes de perturbations pour les EDOs.

5.5.5.1 Exemple de perturbation régulière.

On considère l'équation et les conditions initiales :

$$\mathcal{P}(u; \varepsilon) : \begin{cases} u'' + 2\varepsilon u' + u = 0, \\ u(0, \varepsilon) = 0, u'(0, \varepsilon) = 1, \end{cases}, \quad (5.7)$$

La solution exacte du problème est :

$$u(x) = \frac{e^{-\varepsilon x}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \sin \left[\sqrt{1 - \varepsilon^2} x \right].$$

Résolvons l'équation par la méthode des perturbations. Si on pose $\varepsilon = 0$, on trouve :

$$u'' + u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1,$$

la solution est :

$$u(x) = \sin x,$$

est la limite de la solution exacte du problème (5.7) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-\varepsilon x}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \sin \left[\sqrt{1 - \varepsilon^2} x \right] \right) = \sin x.$$

On va chercher maintenant une solution sous la forme :

$$u(x; \varepsilon) \sim u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

en substituant dans l'équation (5.7), on trouve :

$$\begin{cases} \text{pour } \varepsilon^0 : & u_0(0) = 0, \quad u_0'(0) = 1 \text{ et } u_0'' + u_0 = 0 \Rightarrow u_0(x) = \sin x, \\ \text{pour } \varepsilon^1 : & u_1(0) = u_1'(0) = 0 \text{ et } u_1'' + u_1 = -2u_0' \Rightarrow u_1(x) = -x \sin x, \\ & \vdots \\ \text{pour } \varepsilon^i : & u_i'' + u_i = -2u_{i-1}', \quad u_i(0) = u_i'(0) = 0, \quad i \geq 1, \end{cases}$$

d'où :

$$\boxed{u(x; \varepsilon) = \sin x - \varepsilon x \sin x + O(\varepsilon^2 x^2)}.$$

De ce que nous avons vu sur les propriétés des séries asymptotiques, notamment que le terme suivant doit être négligeable devant le terme précédent, on voit que, cette approximation est uniformément valable sur tout intervalle de temps fini, $0 < x < \tau$, où τ indépendant de ε ; ceci n'est plus vrai lorsque $x \rightarrow \infty$, on utilise dans ce cas *la méthode des échelles multiples* (MEM), (*multiple scale*).

5.5.5.2 Exemple de perturbation singulière.

On considère le problème aux limites suivant :

$$\mathcal{P}(u; \varepsilon) : \begin{cases} \varepsilon u'' + (1 + 2\varepsilon) u' + 2u = 0, \\ u(0, \varepsilon) = 0, \quad u(1, \varepsilon) = 1, \end{cases} \quad (5.8)$$

on recherche la solution sur l'intervalle $0 \leq x \leq 1$, le problème réduit pour $\varepsilon = 0$, s'écrit :

$$u_0' + 2u_0 = 0 \Rightarrow u_0(x) = C e^{-2x},$$

où C est une constante qu'il faut déterminer avec deux conditions aux limites ce qui n'est, en générale, pas possible.

En $x = 0$, on obtient, $u_0(x) = 0$. Cette approximation ne peut être uniformément valable puisque, $u_0(1) = 1$.

De même, en vérifiant la condition en $x = 1$, on obtient :

$$u_0(x) = e^{2(1-x)},$$

qui est telle que, $u_0(x) = \exp(2)$, la condition à l'origine n'est pas vérifiée. Ce qui indique nécessairement une zone de non-uniformité.

La solution exacte s'écrit :

$$u(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-x/\varepsilon}}{e^{-2} - e^{-1/\varepsilon}}. \quad (5.9)$$

Dès que $x > 0$, on voit qu'une bonne approximation de la solution exacte (5.9) est donnée par :

$$u(x) \simeq e^{2(1-x)}, \quad (5.10)$$

Ceci montre qu'il fallait se placer dans le second cas est vérifier, pour le problème réduit, la condition en $x = 1$.

L'approximation (5.10) est dite *solution externe* :

$$\boxed{u_{ext}(x) = e^{2(1-x)}},$$

au voisinage de $x = 0$, on va changer l'échelle, et on pose :

$$X = \frac{x}{\delta(\varepsilon)}, \quad \delta(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Le problème (5.8) devient :

$$u''(X) + (1 + 2\varepsilon)u'(X) + 2\varepsilon u(X) = 0, \text{ pour } \delta(\varepsilon) = \varepsilon,$$

on trouve, le problème réduit :

$$u''(X) + u'(X) = 0, \quad u(0) = 0.$$

Alors :

$$\boxed{u_{int}(x) = A_1 [1 - e^{-x/\varepsilon}]},$$

$u_{int}(x)$ dite *solution interne* au voisinage \mathcal{D}_ε de $x = 0$, ce voisinage est appelé *couche limite* (*boundary layer*).

Le principe *de matching* (sera précisé au paragraphe 5.5.5.3) donne :

$$\begin{aligned} u_{match}(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} u_{ext}(x), \\ &= \lim_{X \rightarrow \infty} u_{int}(X) = A_1 = e^2, \end{aligned}$$

d'où :

$$u_{unif}(x) = u_{ext}(x) + u_{int}(x) - u_{match}(x).$$

Donc :

$$u_{unif}(x) = e^{2(1-x)} + e^2 [1 - e^{-x/\varepsilon}] - e^2,$$

on trouve :

$$\boxed{\begin{cases} u_{unif}(x) = e^{2(1-x)} - e^2 \cdot e^{-x/\varepsilon}, \\ u_{unif}(0) = 0, \quad u_{unif}(1) = 1 - e^{2-1/\varepsilon}. \end{cases}} \quad (5.11)$$

Dans (5.11) $u_{unif}(x)$ dite *solution uniformément valable*.

5.5.5.3 Le principe du raccordement de Van Dyke (Van Dyke's matching rule).

Ce principe permet de déterminer les constantes arbitraires qui apparaissent dans la solution interne et d'écrire la solution sous une seule forme uniformément valable. Dans sa globalité, le principe de Van Dyke indique que : la limite de la solution interne écrite en fonction de la variable externe lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, est égale à la limite de la solution externe écrite en fonction de la variable interne. i.e. :

$$\boxed{u_{match} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ X \text{ fixé}}} u_{ext}(X, \varepsilon) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ x \text{ fixé}}} u_{int}(x, \varepsilon)},$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{u_{match} = \lim_{x \rightarrow 0} u_{ext}(x) = \lim_{X \rightarrow \infty} u_{int}(X)}.$$

La solution u_{match} joue le rôle *d'un raccord entre la solution interne et la solution externe*.

▷ Cette méthode de perturbation est dite : *méthode des développements asymptotiques raccordés* (MDAR).

5.5.5.4 Exemple d'application de la méthode des développements asymptotiques raccordés.

Soit à résoudre le problème aux limites suivant⁽¹⁾ :

$$\mathcal{P}(u; \varepsilon) : \begin{cases} \varepsilon u'' + (1+x)u' + u = 0, \\ u(0, \varepsilon) = 1, \quad u(1, \varepsilon) = 1, \end{cases} \quad (5.12)$$

puisque $a(x) = 1+x > 0$, on a alors *une couche limite au voisinage de 0*.

¹⁾ Pour des équations différentielles ordinaires du second ordre à coefficient variable de la forme : $\varepsilon u'' + a(x)u' + b(x)u = 0$, avec des conditions aux limites $u(0, \varepsilon) = \alpha$ et $u(1, \varepsilon) = \beta$, si $a(x) > 0$ on a une couche limite au voisinage de 0 et si $a(x) < 0$ on a une couche limite au voisinage de 1 (voir par exemple [12], [19]).

1. La solution externe :

$$u_{ext}(x; \varepsilon) \sim u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

on substitue dans (5.12), on trouve :

$$\begin{cases} \text{pour } \varepsilon^0 : & (1+x)u_0'(x) + u_0(x) = 0, \quad u_0(0) = u_0(1) = 1, \\ \text{pour } \varepsilon^i : & (1+x)u_i'(x) + u_i(x) = -u_i''(x), \quad u_i(0) = u_i(1) = 0, \end{cases}$$

cette équation est de premier ordre avec deux conditions, puisque la couche limite est en 0, on prend la condition en $x = 1$, ceci implique :

$$\begin{cases} (1+x)u_0'(x) + u_0(x) = 0, \quad u_0(1) = 1, \\ (1+x)u_i'(x) + u_i(x) = -u_i''(x), \quad u_i(1) = 0, \quad i \geq 1, \end{cases}$$

Alors :

$$u_0(x) = 2(1+x)^{-1},$$

$$u_1(x) = 2(1+x)^{-3} - \frac{1}{2}(1+x)^{-1},$$

$$u_2(x) = 6(1+x)^{-6} - \frac{1}{2}(1+x)^{-3} - \frac{1}{4}(1+x)^{-1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_{ext}(x; \varepsilon) &= \frac{2}{1+x} + \varepsilon \left[\frac{2}{(1+x)^3} - \frac{1}{2(1+x)} \right] \\ &+ \varepsilon^2 \left[\frac{6}{(1+x)^6} - \frac{1}{2(1+x)^3} - \frac{1}{4(1+x)} \right] + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

2. La solution interne :

Dans \mathcal{D}_ε (au voisinage de 0) on pose :

$$X = \frac{x}{\varepsilon} \Rightarrow \begin{cases} u''(X) + (1 + \varepsilon X)u'(X) + \varepsilon u(X) = 0, \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

d'où :

$$u_{int}(X; \varepsilon) \sim u_0(X) + \varepsilon u_1(X) + \varepsilon^2 u_2(X) + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{pour } \varepsilon^0 : & u_0''(X) + u_0(X) = 0, \quad u_0(0) = 1, \\ \vdots \\ \text{pour } \varepsilon^i : & u_i''(X) + u_i(X) = -X \cdot u_{i-1}''(X), \quad u_i(0) = 0, \end{cases}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} u_0(X) &= 1 + A_0 (e^{-X} - 1), \\ u_1(X) &= -X + A_0 \left(-\frac{1}{2} X^2 e^{-X} + X \right) + A_1 (e^{-X} - 1), \\ u_2(X) &= X^2 - 2X + A_0 \left(\frac{1}{8} X^4 e^{-X} - X^2 + 2X \right) \\ &\quad + A_1 \left(-\frac{1}{2} X^2 e^{-X} + X \right) + A_2 (e^{-X} - 1). \end{aligned}$$

3. La solution intermédiaire :

Pour déterminer les constantes A_0 , A_1 et A_2, \dots , on utilise le principe de *matching*, en écrivant la solution interne sous la forme :

$$u_{int}(X; \varepsilon) \sim u_0(X) + \varepsilon u_1(X) + \varepsilon^2 u_2(X) + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

en faisant un développement limité pour les deux solutions $u_{ext}(x; \varepsilon)$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ et $u_{int}(X; \varepsilon)$ pour $X \rightarrow +\infty$, $\varepsilon X = x \rightarrow 0$, alors :

$$u_{ext}(x) = 2 - 2x + 2x^2 + \varepsilon \left(\frac{3}{2} - \frac{11}{2}x \right) + \frac{21}{4}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3, \varepsilon^2x, \varepsilon x^2, x^3),$$

et :

$$\begin{aligned} u_{ext}(x) &= 1 - A_0 - \varepsilon x + \varepsilon A_0 x - \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 X^2 - 2\varepsilon^2 X - \varepsilon^2 A_0 X^2 \\ &\quad + 2\varepsilon^2 A_0 X + \varepsilon^2 A_1 X - \varepsilon^2 A_2 + O(\varepsilon^3, \varepsilon^2x, \varepsilon x^2, x^3), \end{aligned}$$

tel que, $O(\varepsilon^3, \varepsilon^2x, \varepsilon x^2, x^3) = O(\varepsilon^3) + O(\varepsilon^2x) + O(\varepsilon x^2) + O(x^3)$, on obtient par identification :

$$A_0 = -1, \quad A_1 = -3/2 \text{ et } A_2 = -21/4.$$

La condition qui se pose dans ce cas, est que la limite de toutes les deux solutions $u_{ext}(x; \varepsilon)$ et $u_{int}(X; \varepsilon)$ existe et tend vers la même limite $u_{match}(x)$, sinon le principe de *matching* n'est plus valable.

▷ Donc, la solution uniforme du problème (5.12) qui est vraie dans tout le domaine $[0, 1]$ est donnée par :

$$u_{unif}(x) = u_{ext}(x) + u_{int}(x) - u_{match}(x).$$

Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} u_{unif}(x) &= \frac{2}{1+x} - e^{-x/\varepsilon} + \varepsilon \left[\frac{2}{(1+x)^3} - \frac{1}{2(1+x)} + \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{2} \right) e^{-x/\varepsilon} \right] \\ &+ \varepsilon^2 \left[\frac{6}{(1+x)^5} - \frac{1}{2(1+x)^3} - \frac{1}{4(1+x)} - \left(\frac{x^4}{8\varepsilon^4} - \frac{3x^2}{4\varepsilon^2} + \frac{21}{4} \right) e^{-x/\varepsilon} \right] \\ &+ O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

les conditions aux limites sont vérifiées à l'ordre de $O(\varepsilon^3)$.

CHAPITRE 6

MÉTHODE DE PERTURBATION EN MDF

La formulation sous forme adimensionnelle des équations de Navier-Stokes a déjà été présentée. En choisissant une longueur caractéristique L , une vitesse caractéristique v_∞ , une pression de référence ρv_∞^2 , les équations de Navier-Stokes stationnaire sans dimensions pour un mouvement de fluide en présence de parois, mais en l'absence de forces de masse (pour alléger la présentation) donne :

$$\begin{cases} v \cdot \nabla v = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 v. \\ \nabla \cdot v = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Il ne reste plus dans l'équation de Navier-Stokes qu'un seul paramètre sans dimension. Le nombre de Reynolds, $Re = v_0 L / \nu$ qui présente le rapport des effets d'inertie à ceux visqueux. En l'absence de la viscosité, Re est infinie et en absence de tous les effets d'inertie (masse négligeable ou $\nu = cte$) Re est nulle. Pour un écoulement donné, Re est compris entre ces deux limites. Dans le cas d'un fluide passant au dessus d'un objet donné, la nature de l'écoulement dépend de la valeur de Re , s'il est petit l'écoulement est dominé par les effets d'inertie et s'il est élevé l'écoulement est dominé par les effets visqueux. La structure de l'écoulement ne dépend alors que de la valeur du nombre de Reynolds Re . On a alors, en particulier, deux cas limites :

- ▷ $Re \rightarrow 0$, les effets visqueux sont dominants, les écoulements rampants (modèle de Stokes et d'Oseen).
- ▷ $Re \rightarrow +\infty$, les effets inertiels dominant, L'aérodynamique (les équations d'Euler) et la théorie de la couche limite de Prandtl.

En particulier, lorsque cela est le cas, on dit que l'on a affaire à un problème de perturbations singulières. Les régions sont, en général, en mécanique des fluides des voisinages viennent se placer près de l'instant initial (couches initiales), près des parois solides délimitant l'écoulement (couches limites), ou encore, à l'infini (couches distales).

6. 1 Domaine de validité de l'approximation de fluide parfait

Lorsque $Re \rightarrow +\infty$, les équations de Navier-Stokes se simplifient pour donner les équations d'Euler qui décrivent le mouvement de fluide parfait, mais les solutions de fluide parfait ne vérifiant pas les conditions requises à la paroi (la

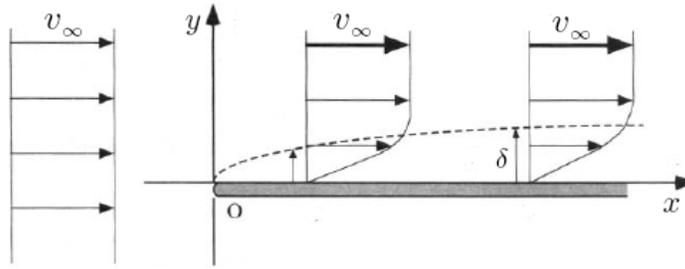


FIG. 6.1 – Développement d’une couche limite le long d’une plaque plane (profil de vitesse).

condition $v = 0$), il en résulte que l’approximation de fluide parfait n’est pas valable au voisinage des parois. La raison physique se trouve dans le fait que Δv est très grand près de la paroi de sorte que le terme en $(1/Re) \Delta v$ ne peut plus être négligés, le produit $(1/Re) \Delta v$ peut devenir du même ordre de grandeur que les termes d’inertie.

La question qui se pose peut se formuler de la façon suivante : existe-t-il une autre approximation permettant de décrire l’écoulement dans les zones où l’approximation de fluide parfait n’est plus valable ? Nous allons voir, dans le paragraphe qui suit, qu’il faut, au voisinage d’une paroi, remplacer les équations d’*Euler* non valables, par les équations de *Prandtl*, encore appelées équations de la *Couche Limite* (mis de l’avant par *Prandtl* en 1904) : C’est une «région» ou couche enveloppant un corps où les effets visqueux sont très importants ; à l’extérieur de cette couche le fluide se comporte essentiellement comme s’il est non visqueux.

6.2 Approximation de Prandtl lorsque $Re \rightarrow +\infty$

Pour illustrer le phénomène de la couche limite et pour donner une approximation des équations de Navier-Stokes dans celle-ci, on prend un écoulement à un nombre de Reynolds élevé autour d’un solide.

6.2.1 Cas d’une plaque plane.

Pour simplifier, on considère un écoulement stationnaire bidimensionnel de fluide visqueux incompressible uniforme à l’infini v_∞, p_∞ , au dessus d’une plaque plane. Prenons ce plan pour plan x, z , l’axe des x étant dirigé suivant la direction de l’écoulement. La distribution des vitesses est indépendante de z ; la composante z de la vitesse est absente (FIG. 6.1).

Supposons que $Re = v_\infty L/\nu$ est très grand, les équations de Navier-Stokes prennent la forme des équations d’*Euler*, qui permettent de déterminer le champ

de v et p , en particulier lorsque $y \rightarrow 0$ sur l'obstacle. Mais donc la condition ($v = 0$ sur la paroi) n'est plus satisfaite, ce qui impose qu'au voisinage de la plaque, une épaisseur évanescence lorsque $Re \rightarrow 0$, dans laquelle les équations d'Euler ne sont plus valables. Dans cette zone la composante v_x de la vitesse varie très rapidement de $v_x(y = \delta) = v_\infty$ (la vitesse longitudinal loin de la plaque, en réalité ne vaut pas v_∞ exactement) à zéro $v_x(y = 0) = 0$; pour ça la condition sur la paroi soit satisfaite (δ l'épaisseur de la couche limite).

On décompose la recherche de la solution en deux problèmes :

1. Un problème *extérieur*, où est valable l'approximation de fluide parfait, en résolvant les équations d'Euler avec la condition de vitesse normale à la paroi nulle.
2. Un problème *intérieur* au voisinage immédiat de la paroi, où est valable une autre approximation dite approximation de couche limite, qui doit se <<raccorder>> avec la solution extérieur.

Pour décrire ce voisinage immédiat de la paroi, il faut introduire de nouvelles références qui caractérisent l'ordre de grandeur des diverses quantités dans cette région :

- ▷ L'épaisseur de la zone étudiée, $\delta \ll L$ (au voisinage immédiat de la paroi, L longueur caractéristique de la plaque), de même une vitesse v_0 qui est beaucoup plus petite que v_∞ , car on attend des vitesses v_y très petites dans cette région, $v_y \ll v_x$.

La vitesse hors de la couche limite est connue et prescrite comme une fonction de x . L'écoulement hors de la couche limite est non visqueux et par conséquent, il peut généralement se calculer par l'intégration de l'équation d'Euler, et on a :

$$\begin{aligned} \rho v_\infty \frac{dv_\infty}{dx} &= -\frac{dp_\infty}{dx}, \\ \Rightarrow p_\infty + \rho v_\infty^2 &= \text{Cte}, \\ \Rightarrow p_\infty &= O(\rho v_\infty^2). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Rappelons que v_∞ et p_∞ sont respectivement la vitesse et la pression prévues par l'écoulement externe à la paroi. De plus :

$$\boxed{v_x = O(v_\infty), \Delta x = O(L) \text{ et } \Delta y = O(\delta)}.$$

L'équation de continuité donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &\simeq \frac{v_\infty}{L} + \frac{v_y}{\delta} = 0 \\ \Rightarrow v_y &= O\left(\frac{v_\infty \delta}{L}\right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

On a donc les nouvelles variables, pour l'adimensionalisation des équations :

$$x = Lx^*, y = \delta y^*, v_x = v_\infty v_x^*, v_y = \frac{v_\infty \delta}{L} v_y^*, p = \rho v_\infty^2 p^*, \delta/L \ll 1,$$

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} = 0, \quad (6.4)$$

l'équation de quantité du mouvement dans la direction de x :

$$v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (6.5)$$

l'équation de quantité du mouvement dans la direction de y :

$$v_x^* \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} + \frac{L v_\infty}{\delta} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v_y^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 v_y^*}{\partial y^{*2}} \right). \quad (6.6)$$

La quantité δ n'est pas connue a priori le raisonnement est le suivant : l'équation de *Navier-Stokes* dimensionnelle est donnée par :

$$\begin{array}{ccccccc} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} & + & v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} & = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} & + & \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} & + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} & , \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & \parallel & \\ O(v_\infty^2/L) & & O(v_\infty^2/L) & & O(v_\infty^2/L) & & O(\nu [v_\infty^2/L^2]) & O(\nu [v_\infty^2/\delta^2]) & \end{array}$$

si on divise par $\nu [v_\infty^2/\delta^2]$, on voit que le terme $\nu (v_\infty^2/L^2) / \nu [v_\infty^2/\delta^2]$ est de l'ordre de $(\delta/L)^2 \ll 1$, on peut donc négliger le terme $\nu (\partial^2 v_x / \partial x^2)$ devant le terme $\nu (\partial^2 v_x / \partial y^2)$. L'approximation d'épaisseur de la couche limite est donc :

$$\begin{aligned} \nu \frac{v_\infty^2}{\delta^2} \cdot \frac{L}{v_\infty^2} &= O(1), \\ \Rightarrow \frac{1}{Re} \cdot \frac{L^2}{\delta^2} &= O(1), \\ \Rightarrow \delta &= O\left(\frac{L}{\sqrt{Re}}\right), \end{aligned}$$

on peut prendre :

$$\boxed{\delta \simeq \frac{L}{\sqrt{Re}}}.$$

Les équations (6.4), (6.5) et (6.6) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} = 0, \\ v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}}, \\ \frac{1}{Re} \left(v_x^* \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} \right) + \frac{\partial p^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v_y^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_y^*}{\partial y^{*2}}, \end{cases}$$

si $Re \rightarrow \infty$, on trouve les équations de Prandtl dans la couche limite :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} = 0, \\ v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}}, \\ \frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0. \end{cases}$$

Il faut ajouter à ce système :

1. La condition limite sur la paroi :

$$\text{en } y^* = 0, \quad v_x^* = v_y^* = 0.$$

2. La condition de raccordement de solution de ce dernier système avec la solution de fluide parfait exprime l'existence d'une couche intermédiaire, où les deux solutions sont asymptotiquement équivalentes :

$$\lim_{y^* \rightarrow \infty} v_x^* \left(x^*, y^* \right) = \lim_{y^* \rightarrow 0} v_x^* \left(x^*, \bar{y} \right) = v_e,$$

où $y^* = y/\delta$, $x^* = x/L$ et $\bar{y} = y/L$. De même pour p .

3. Un profil de vitesse initial, $v_{x_0}^* = v_x^* \left(x_0^*, y^* \right)$, dans une section donnée, par exemple en $x^* = 0$, $v_x^* = v_y^* = 0$.

6.2.2 Cas d'un corps de forme quelconque.

Dans ce cas, on peut aussi établir les équations de Prandtl ; il suffit de définir un système de coordonnées curvilignes. Les équations de Prandtl restent valables sous la condition que, x désigne l'abscisse curviligne le long de la paroi de corps et la variable y est la distance normale à la paroi (FIG. 6.2).

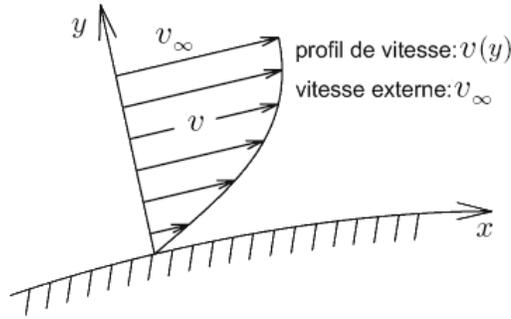


FIG. 6.2 – Profil de vitesse dans une couche limite.

6.3 Approximations d'Oseen-Stokes lorsque $Re \rightarrow 0$

Dans ce qui suit nous nous intéressons principalement aux formes limites prises par les équation de Navier-Stokes pour un écoulement de petit nombre de Reynolds et lorsque le nombre de Reynolds tends vers zéro. On considère un écoulement plan stationnaire d'un fluide incompressible uniforme à l'infini de vitesse v_∞ suivant la direction \mathbf{i} ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sont les vecteurs de base en coordonnées cartésiennes) et autour d'une obstacle rigide.

6.3.1 Approximation de Stokes.

Les équations de Navier-Stokes (6.1) montre que lorsque $Re \rightarrow 0$ l'écoulement est entièrement commandé par l'équilibre entre le gradient de pression et force visqueuse. Ce type d'écoulement s'observé très fréquemment dans des écoulements à travers des matériaux poreux, des écoulements près d'obstacles (couches limites laminaires), des problèmes de sédimentation de particules fines, etc...

Pour $Re \rightarrow 0$, l'équation de *Navier-Stokes* (6.1) donne :

$$\boxed{\nabla^2 v = 0, \quad \nabla \cdot v = 0}.$$

Mais la pression dans un écoulement à petit nombre de *Reynolds* n'est pas de l'ordre de ρv_∞^2 (si le fluide par exemple est incompressible, fortement visqueux, contenu dans un récipient dont les parois sont animées d'un mouvement imposé, cela signifie que v doit satisfaire à $\nabla^2 v = 0$, à l'intérieur et prend une valeur donnée sur le bord du récipient, mais il est bien connu que ce problème à la limite détermine complètement v , puisqu'il revient à résoudre trois problèmes de Dirichlet relativement à l'équation de Laplace, pour les trois composantes de la vitesse. De ce fait il n'y a aucune raison que la solution satisfasse de plus à $\nabla \cdot v = 0$ sauf pour des cas exceptionnels de v), cette difficulté se résout très simplement en effectuant un changement d'échelle dans l'équation de *Navier-Stokes*. Dans ce cas on a de l'équation (4.11) :

$$\boxed{p \sim L\mu\nabla^2 v = O(\mu v_\infty/L)},$$

Donc, on pose :

$$\boxed{x = Lx^*, \quad v = v_\infty v^*, \quad p = \frac{\mu v_\infty^*}{L} p^*},$$

En substituant ces changements d'échelle dans l'équation de *Navier-Stokes* (4.11), on trouve :

$$Re \cdot [v \cdot \nabla v] = -\nabla p + \nabla^2 v. \quad (6.7)$$

Lorsque $Re \rightarrow 0$, le terme inertiel $v \cdot \nabla v = o(\nu \nabla^2 v)$, l'équation (6.7) se réduit à une *approximation linéaire* de l'équation de *Navier-Stokes* dite *l'équation de Stokes* :

$$\boxed{\begin{cases} -\nabla p + \nabla^2 v = 0, \\ \nabla v = 0. \end{cases}} \quad (6.8)$$

Proposée par Stokes en 1851. Les écoulements à faible nombre de *Reynolds* «fortement visqueux», ou à faible vitesse sont appelés *les écoulements rampants*.

Dans le cas d'*écoulements rampants*, stationnaire uniforme (l'exemple le plus connu : est l'écoulement autour d'une sphère ou d'un cylindre), il faut remarquer que, l'approximation de *Stokes* $v \cdot \nabla v = o(\nu \nabla^2 v)$, n'est pas valable loin de la paroi du corps, où les gradients de vitesse disparaissent, et par conséquent les forces d'inertie deviennent comparables aux forces visqueuses. C'est *le paradoxe célèbre de Stokes* (cas d'un obstacle cylindrique) et *de Whitehead* (cas d'écoulement autour d'une sphère immobile).

On remarque dans ce cas, qu'il n'existe pas d'écoulement plan stationnaire solution des équations de Stokes (6.8) satisfaisant à la condition d'adhérence sur la paroi (cas d'un cylindre ou d'une sphère), et tendant vers un écoulement uniforme à l'infini. Cela veut dire que la limite de la solution de Stokes n'est pas uniformément valable si le domaine d'écoulement est l'infini. On doit, au voisinage de l'infini, rechercher une autre représentation «asymptotique» caractérisée par un passage à la limite différent de celui de Stokes dite approximation d'Oseen (Oseen en 1910).

Remarquons, que le paradoxe de Stokes (pour le cylindre) «à savoir que les conditions physiques permettant de ramener l'équation de Navier-Stokes à l'équation de Stokes ne sont pas nécessairement réalisées dans tout le domaine de solution, a priori. Le cas par exemple "à l'infini" où souvent le terme inertiel finit par l'emporter sur le terme visqueux» et de Whitehead (pour la sphère) est valable pour un obstacle tout entier à distance finie (avec $Re \ll 1$). La raison en est que les résultats sont liés au comportement à l'infini des solutions des équations de Stokes et que ce comportement, dans sa forme, ne dépend pas de la nature de l'obstacle.

6.3.2 Approximation d'Oseen et le problème de raccordement avec la solution de Stokes.

Rappelons, que le nombre de Reynolds dans les équations de Navier-Stokes (4.9), $Re = v_\infty L / \nu$, a été construit à partir de l'échelle de longueur L caractérise une dimension de l'obstacle et qui ni trop petite ni trop grande. De même on voit que la théorie de Stokes, qui conduit au système (6.8) n'est pas adéquate pour représenter, même pour Re très petit, l'écoulement à des grandes distances d'un obstacle de dimensions finies.

Pour étudier l'écoulement en des points très éloignés de l'obstacle, il convient de choisir une nouvelle échelle de longueur caractéristique L_0 , de l'ordre de grandeur de la distance de ces points de l'obstacle donc très grande relativement à L :

$$\frac{L}{L_0} = \delta_0 \gg 1,$$

si bien que le nombre de Reynolds correspondant :

$$\boxed{\mathcal{R}e = \frac{v_\infty L_0}{\nu} = \delta_0 Re},$$

n'est plus très petit devant l'unité, même si la viscosité est grande ou les vitesses petites.

Cette idée explique comment on peut trouver une solution asymptotique des équations de Navier-Stokes, valable aux grandes distances ($\delta_0 \gg 1$).

Si $L_0 = \delta_0 L$, il est logique de changer l'échelle, on pose donc, dans l'équation (6.1) :

$$\overset{*}{x} = \frac{x}{\delta_0} \Rightarrow \overset{*}{\nabla} = \delta_0 \nabla,$$

l'équation de Navier-Stokes à la place de (6.1) donne :

$$\begin{cases} \overset{*}{\nabla} \cdot v = 0, \\ v \cdot \overset{*}{\nabla} v + \overset{*}{\nabla} p = \frac{1}{\mathcal{R}e} \overset{*}{\nabla}^2 v, \end{cases} \quad (6.9)$$

et on voit effectivement, apparaître le nombre de Reynolds (dit distal) :

$$\mathcal{R}e = \delta_0 Re \Rightarrow \left[\delta_0 \simeq \frac{1}{Re} \Leftrightarrow \text{Les termes d'inertie} = O(\text{Les termes visqueux}) \right].$$

Ce qui est la théorie d'Oseen valable très loin de l'obstacle considéré.

Ainsi, le nombre de Reynolds, très petit, s'introduit implicitement dans les conditions aux limites et nous sommes ainsi conduit à étudier un écoulement

uniforme de vitesse \mathbf{i} . De ce fait, nous pouvons effectuer au niveau d'équations (6.9) le changement de fonction suivant :

$$v = \mathbf{i} + \delta(Re) v', \quad p = \delta(Re) p'.$$

En substituant ces expressions dans (6.9), on trouve :

$$\begin{cases} \nabla^* \cdot v' = 0, \\ \left(\mathbf{i} \cdot \nabla^* \right) v' + \nabla^* p' - \frac{1}{Re} \nabla^{*2} v' = O(\delta(Re)). \end{cases}$$

Lorsque $Re \rightarrow 0$, on trouve les équations stationnaires d'Oseen :

$$\boxed{\begin{cases} \nabla^* \cdot v' = 0, \\ \left(\mathbf{i} \cdot \nabla^* \right) v' + \nabla^* p' = \frac{1}{Re} \nabla^{*2} v'. \end{cases}} \quad (6.10)$$

On note que $\delta(Re)$ reste arbitraire et seul le raccord avec la solution de Stokes (stationnaire) doit permettre de le déterminer.

Finalement on est conduit à résoudre deux problèmes :

1. Un problème *intérieur*, où est valable l'*approximation de Stokes*.
2. Un problème *extérieur*, où est valable une autre approximation dite *approximation d'Oseen*, qui doit se «raccorder» avec la solution *intérieur*, pour trouver une solution uniformément valable. Cette théorie uniformément valable est due initialement à Kaplun (1957), mais on notera aussi les travaux de Proudman et Pearson (1957) qui ont utilisée la méthode des développement asymptotique raccordés, dans le cas d'écoulement autour d'une sphère et le cas d'un cylindre.

6.3.3 Écoulement plan autour d'un cylindre.

Considérons maintenant un problème d'écoulement bidimensionnel infini autour d'un cylindre. Le fluide est considéré comme étant incompressible et irrotationnel (FIG. 6.3).

Remarquons que, dans ce cas, en coordonnées polaires on doit utiliser une autre définition de la fonction de courant ; puisque l'écoulement est plan on a en coordonnées cylindriques (r, θ, z) de base $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$, $v_r = v_r(r, \theta)$, $v_\theta = v_\theta(r, \theta)$ et $v_z = 0$, l'équation de la continuité en coordonnées cylindriques est :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

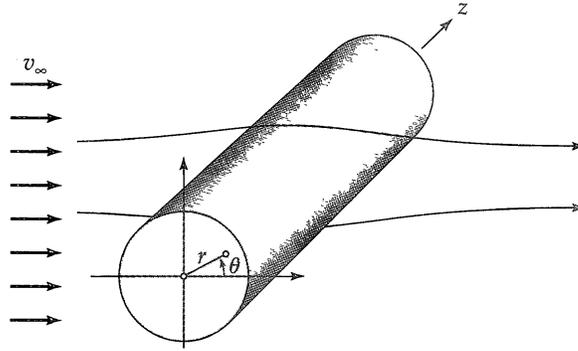


FIG. 6.3 – Écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre.

d'où, puisque $v_z = 0$, on obtient :

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0,$$

la fonction de courant dans ce cas ou la fonction de Stokes $\psi(r, \theta)$, est donnée par :

$$rv_r = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Considérons, un écoulement plan, incompressible stationnaire, uniforme à l'infini autour d'un cylindre de rayon a .

En coordonnées cylindriques (r, θ, z) , la fonction de courant ψ est donnée par :

$$\boxed{v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial r}}. \quad (6.11)$$

On utilise pour l'addimensionalisation de v , ψ et r :

$$\boxed{v = v_\infty v, \quad r = ar, \quad \psi = v_\infty a \psi}.$$

Rappelons de l'équation (2.3), que l'équation de Navier-Stokes (6.7), prise la forme :

$$Re \cdot \left[\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \text{rot } v \times v \right] + \text{grad } p = \Delta v,$$

calculons le rotationnel de cette expression, il vient :

$$Re \cdot \left[\text{rot grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \text{rot}(\text{rot } v \times v) \right] + \text{rot grad } p = \text{rot}(\Delta v),$$

puisque, $\text{rot grad} = 0$, et $\Delta v = \text{grad div } v - \text{rot rot } v$, on trouve :

$$Re \cdot \nabla \times ([\nabla \times v] \times v) = -\nabla \times \nabla \times (\nabla \times v),$$

ou :

$$Re \cdot \nabla \times (v \times [\nabla \times v]) = \nabla \times \nabla \times (\nabla \times v). \quad (6.12)$$

Dans ce cas, en coordonnées cylindriques, on a :

$$\nabla \times v = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z,$$

rappelons qu'en coordonnées cylindriques (r, θ) , on a :

$$\nabla \times v = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} v \right] \mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z,$$

de (6.11), on trouve :

$$\begin{aligned} \nabla \times v &= -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] \mathbf{e}_z, \\ &= -\frac{1}{r} \left[r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right] \mathbf{e}_z, \\ &= -\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right] \mathbf{e}_z, \\ &= -E^2 \psi \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

et donc :

$$\nabla \times v = -E^2 \psi \mathbf{e}_z, \quad (6.13)$$

où :

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \nabla^2.$$

Maintenant, pour simplifier le second membre, on calcule :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times v) &= \nabla \times (-E^2 \psi \mathbf{e}_z), \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial (E^2 \psi)}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \frac{\partial}{\partial r} (E^2 \psi) \mathbf{e}_\theta. \end{aligned}$$

Pour calculer $\nabla \times \nabla \times (\nabla \times v)$, on a :

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times (\nabla \times v) &= \nabla \times \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial (E^2 \psi)}{\partial \theta}, \frac{\partial (E^2 \psi)}{\partial r}, 0 \right), \\
&= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial (E^2 \psi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (E^2 \psi)}{\partial \theta} \right) \right] \mathbf{e}_z, \\
&= \left[\frac{\partial^2 (E^2 \psi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (E^2 \psi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (E^2 \psi)}{\partial \theta^2} \right] \mathbf{e}_z, \\
&= \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] E^2 \psi \mathbf{e}_z, \\
&= E^2 (E^2 \psi) \mathbf{e}_z = E^4 \psi \mathbf{e}_z,
\end{aligned}$$

et alors :

$$\nabla \times \nabla \times (\nabla \times v) = E^2 (E^2 \psi) \mathbf{e}_z = E^4 \psi \mathbf{e}_z. \quad (6.14)$$

Reste la simplification de premier membre $Re \cdot \nabla \times (v \times [\nabla \times v])$, d'après (6.13) :

$$\begin{aligned}
v \times [\nabla \times v] &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, -\frac{\partial \psi}{\partial r}, 0 \right) \times (0, 0, -E^2 \psi), \\
&= \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} E^2 \psi \right] \mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} E^2 \psi \right] \mathbf{e}_\theta,
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\nabla \times (v \times [\nabla \times v]) &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} E^2 \psi \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} E^2 \psi \right) \right] \mathbf{e}_z, \\
&= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial (E^2 \psi)}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial (E^2 \psi)}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z.
\end{aligned}$$

Donc :

$$Re \cdot \nabla \times (v \times [\nabla \times v]) = \frac{Re}{r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial (E^2 \psi)}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial (E^2 \psi)}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z. \quad (6.15)$$

Finalement, en substituant (6.14) et (6.15) dans (6.12), on obtient, l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{Re}{r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] E^2 \psi = E^2 E^2 \psi, r \geq 1. \quad (6.16)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} [v = 0, \text{ lorsque } r = 1] \Leftrightarrow [v_r = 0 \text{ et } v_\theta = 0], \\ [v \rightarrow \mathbf{i}, \text{ lorsque } r \rightarrow \infty] \Leftrightarrow [v_r \rightarrow \cos \theta \text{ et } v_\theta \rightarrow -\sin \theta], \end{cases}$$

puisque $[v_r = 0] \Leftrightarrow [\partial\psi/\partial\theta = 0]$ et $[v_\theta = 0] \Leftrightarrow [\partial\psi/\partial r = 0]$, puis on intègre les deux équations :

$$\cos \theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad \sin \theta = \frac{\partial\psi}{\partial r},$$

on trouve finalement les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \psi = \partial\psi/\partial r = 0, \text{ lorsque } r = 1, \\ \psi \rightarrow r \sin \theta, \text{ lorsque } r \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (6.17)$$

On va donc résoudre, le système (6.16), (6.17). Dans ce cas on a les deux approximations :

1. **Approximation interne :** Lorsque $Re \rightarrow 0$ et r fixé, on cherche à une approximation asymptotique du problème sous la forme :

$$\psi(r, \theta; Re) = \psi_0(r, \theta) + \psi_1(r, \theta) Re + O(Re^2), \quad (6.18)$$

où ψ_0 est la solution du problème réduit :

$$E^2 E^2 \psi_0 = 0,$$

on prend dans cette zone la condition au limite de non-glissement sur la paroi du cylindre :

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \text{ lorsque } r = 1,$$

en substituant ψ_0 dans l'équation (6.18), puis (6.18) dans (6.16) on trouve ψ_1 . Le raccord d'approximation interne avec l'approximation externe, permet de déterminer les constantes d'intégrations (les constantes arbitraires qui apparaissent dans cette solution).

2. **Approximation externe :** Dans la région externe, on pose $\varrho = Re \cdot r$ et $\Psi = Re \cdot \psi$, le développement dans la région externe pour ϱ fixé et $Re \rightarrow 0$, ou la solution d'Oseen est donnée par :

$$\begin{aligned} \Psi(\varrho, \theta; Re) &= \Psi_0(\varrho, \theta) + \Psi_1(\varrho, \theta) Re + O(Re^2), & (6.19) \\ &\Updownarrow \\ \psi(r, \theta; Re) &= \frac{1}{Re} \Psi_0(\varrho, \theta) + \Psi_1(\varrho, \theta) + O(Re), \end{aligned}$$

qui vérifie la condition à l'infini :

$$[\psi \rightarrow r \sin \theta, \text{ lorsque } r \rightarrow \infty] \Leftrightarrow [\Psi \rightarrow \varrho \sin \theta, \text{ lorsque } Re \rightarrow 0],$$

le changement d'échelle, $\varrho = Re \cdot r$ et $\Psi = Re \cdot \psi$, permet de réduire l'équation (6.16) à l'équation :

$$\boxed{\frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] E_\varrho^2 \Psi = E_\varrho^2 E_\varrho^2 \Psi}, \quad (6.20)$$

tel que :

$$E_\varrho^2 = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Puisque $\Psi \rightarrow \varrho \sin \theta$, lorsque $Re \rightarrow 0$, on peut prendre $\Psi_0 = \varrho \sin \theta$ (remarquons que $E_\varrho^2 \Psi_0 = 0$), ce qui donne :

$$\Psi(\varrho, \theta; Re) \sim \varrho \sin \theta + \Psi_1(\varrho, \theta) Re, \quad Re \rightarrow 0,$$

substituons dans l'équation (6.20), et on fait tendre $Re \rightarrow 0$, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial (E_\varrho^2 \Psi)}{\partial \varrho} &\sim \left[\frac{\partial \Psi_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} Re \right] \frac{\partial (E_\varrho^2 \Psi_1)}{\partial \varrho} Re, \\ &= \varrho \cos \theta \frac{\partial (E_\varrho^2 \Psi_1)}{\partial \varrho} Re + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} \frac{\partial (E_\varrho^2 \Psi_1)}{\partial \varrho} Re^2, \end{aligned} \quad (6.21)$$

de même :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Psi}{\partial \varrho} \frac{\partial (E_\varrho^2 \Psi)}{\partial \theta} &\sim -\left[\frac{\partial \Psi_0}{\partial \varrho} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varrho} Re \right] \frac{\partial (E_\varrho^2 \Psi_1)}{\partial \theta} Re, \\ &= -\sin \theta \frac{\partial (E_\varrho^2 \Psi_1)}{\partial \theta} Re - \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varrho} \frac{\partial (E_\varrho^2 \Psi_1)}{\partial \theta} Re^2, \end{aligned} \quad (6.22)$$

maintenant, en substituant (6.21), (6.22) dans (6.20), on obtient :

$$\frac{1}{\varrho} \left[\varrho \cos \theta \frac{\partial (E_\varrho^2 \Psi_1)}{\partial \varrho} - \sin \theta \frac{\partial (E_\varrho^2 \Psi_1)}{\partial \theta} \right] = E_\varrho^2 E_\varrho^2 \Psi_1,$$

alors, on a l'équation d'Oseen :

$$\boxed{\left(E_\varrho^2 \Psi_1 - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{\sin \theta}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) E_\varrho^2 \Psi_1 = 0}, \quad (6.23)$$

Si l'équation d'Oseen décrit mieux l'écoulement que l'équation de Stokes loin de la cylindre, elle est incorrecte près de celle-ci, car l'estimation des termes non linéaires ou d'accélération est erronée. La méthode des développements asymptotiques raccordés est nécessaires pour raccorder les deux types de solutions.

BIBLIOGRAPHIE

Papier
.....

- [1] M.C. Potter, D.C. Wiggert, Fluid mechanics, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 2008.

- [2] J.S. Darrozes, C. Francois, Mécanique des Fluides Incompressibles, Springer Verlag, 1982.

- [3] T.C. Papanastasiou, G.C. Georgiou, A. N. Alexandrou, Viscous Fluid Flow, CRC Press, 2000.

- [4] I. Paraschivoiu, M. Prud'homme, L. Robillard, P. Vasseur, Mécanique des Fluides, École Polytechnique de Montréal, 2003.

- [5] R.Kh. Zeytounian, Les Modèles Asymptotiques de la Mécanique des Fluides I, Lecture Notes in Physics 245, Springer-Verlag, 1986.

- [6] R.Kh. Zeytounian, Les Modèles Asymptotiques de la Mécanique des Fluides II, Lecture Notes in Physics 276, Springer-Verlag, 1987.

- [7] R.Kh. Zeytounian, Asymptotic Modelling of Fluid Flow Phenomena, Fluid Mechanics and its Applications 64, Kluwer Academic Publishers, 2004.

- [8] J. Awrejcewicz, V.A. Krysko, Introduction to Asymptotic Methods, Chapman and Hall/CRC, 2006.

-
- [9] C.L. Dym, Principles of Mathematical Modelling, Elsevier Academic Press, 2004.
- [10] G.E. Mase, Theory and Problems of Continuum Mechanics, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1970.
- [11] E.J. Hinch, Perturbation Methods, Cambridge Texts in Applied Mathematics, 1991.
- [12] C.M. Bender, S.A. Orszag, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, McGraw-Hill, 1978.
- [13] F. Durst, Fluid mechanics An Introduction to the Theory of Fluid Flows, Springer-Verlag, 2008.
- [14] J.D. Murray, Asymptotic Analysis, Springer-Verlag, 1984.
- [15] F.M. White, Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill, 1991.
- [16] É. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, Hydrodynamique Physique, EDP Sciences, 2001.
- [17] R.K. Kundu, I.M. Cohen, Fluid Mechanics, Academic Press, 2002.
- [18] R.B. Bird, W.E. Stewart, E.N. Lightfoot, Transport Phenomena, John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [19] J. Cousteix, J. Mauss, Analyse Asymptotique et Couche Limite, Mathématiques & Applications 56, Springer-Verlag, 2006.
- [20] H. Mekias, Cours de Magistère, U.F.A. Sétif, Année Universitaire 2006-2007.

Électronique

- [21] Mécanique des Milieux Continus, Jean Salençon :

<http://catalogue.polytechnique.fr/cours.php?id=2544>
<http://catalogue.polytechnique.fr/site.php?id=109>

- [22] Articles de Wikipédia, L'encyclopédie libre :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Dynamique_des_fuides
http://fr.wikipedia.org/wiki/Mécanique_des_milieux_continus
http://fr.wikipedia.org/wiki/Tenseur_des_contraintes
http://fr.wikipedia.org/wiki/Tenseur_des_déformations
http://fr.wikipedia.org/wiki/Equations_de_Navier-Stokes
http://fr.wikipedia.org/wiki/Couches_Limites
http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Buckingham
http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_des_perturbations
http://fr.wikipedia.org/wiki/Developpement_asymptotique

- [23] Mécanique des Fluides, Olivier Daube :

<http://gmfe16.cemif.univ-evry.fr:8080/~daube/>

- [24] Mécanique des fluides, Philippe Fichou :

[http://www.librecours.org/cgi-bin/course
?callback=info&elt=996](http://www.librecours.org/cgi-bin/course?callback=info&elt=996)

- [25] Mécanique des fluides, Claude Saint-Blanquet :

[http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso
/blanquet/synophys/synodex.htm](http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/blanquet/synophys/synodex.htm)

- [26] Mécanique des milieux continus, Jean Garrigues :

<http://jgarrigues.perso.ec-marseille.fr/mmhtml/index.html>

- [27] Concise Fluid Mechanics, A.V.Smirnov :

<http://209.85.229.132/search?q=cache:rlBJPI1srH4J:lost-contact.mit.edu/afs/net/project/afs32/mech.kth.se/home/mech/eriks/Mathematica/cfm.pdf+Concise+Fluid+Mechanics+A.V.Smirnov&cd=7&hl=en&ct=clnk>

- [28] Mécanique des Fluides, V. Legat, G. Winckelmans :

<http://www.uclouvain.be/45913.html>

- [29] Mécanique des milieux continus et discrets :

<http://www.ec-nantes.fr/version-anglaise/programmes/engineer-training-programme/2008-2009-mecanique-des-milieux-continus-et-discrets-65072.kjsp?RH=ZYZYZYZYZYZYZYZYZYZYZY>

- [30] Mécanique des Fluides, Marc Rabaud :

<http://www.fast.u-psud.fr/~rabaud/>

- [31] Notes de cours, Mécanique des Fluides, Christophe Ancey :

http://lhe.epfl.ch/joomla/index.php?option=com_content&view=article&id=35%3Amecanique-des-fluides&catid=14%3Acours-bachelor&Itemid=3&lang=fr

- [32] Mécanique des Fluides, Marc Fermigier :

<http://www.espci.fr/enseignement/ressources.php?e=mflu>

- [33] Mécanique des fluides, première partie, Olivier Louisnard :

<http://perso.enstimac.fr/~louisnar/polys.html>
<http://perso.enstimac.fr/~louisnar/MECADEF/PolyMecaDef.pdf>

[34] Mécanique des fluides :

[http://ielmx1.epfl.ch/e-lin/Ryhming/documents/
chapters/documents_published/doc6/doc6.html](http://ielmx1.epfl.ch/e-lin/Ryhming/documents/chapters/documents_published/doc6/doc6.html)

[35] Encyclopædia Universalis 2006.

ملخص:

العمل الأساسي في هذه المذكرة يتمثل في إعطاء المفاهيم والتقنيات الأساسية لفهم علم ميكانيك الموائع. مفاهيم المواد المستمرة، التحليل التقاربي والتحليل البعدي هي أدوات أساسية لفهم وطرح و من ثم حل مسألة في ميكانيك الموائع. في الأخير، مسألة سيلان مائع حقيقي طرحت ثم عولجت باستعمال التقنيات المعطاة في هذه المذكرة.

Abstract:

The main objective of this work is to give the fundamental background of fluid mechanics. Different related subjects as mechanics of continuum media, dimensional analysis and asymptotic analysis are given as they are important in understanding and solving fluid mechanic problems. Finally, a real flow problem is treated using the technics given in this thesis.

Résumé:

L'objectif principal de ce travail est de donner un résumé des différentes notions et techniques utilisées en mécanique des fluides. La mécanique des milieux continus, l'analyse dimensionnelle et l'analyse asymptotique sont données car elles sont très importantes pour comprendre et traiter des problèmes de la mécanique des fluides. Enfin, un problème d'écoulement réel est traité en utilisant les différentes techniques données dans ce mémoire.