

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS SETIF-1

FACULTE DE TECHNOLOGIE

THESE

Présentée au Département d'Electronique

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Filière : Electronique

Option : Electronique

Par

BEDAUCHE Fatah

THEME

Commande Linéaire à Paramètres Variants d'un Robot

Soutenue le 17/07/2018 devant le Jury:

FERHAT Hamida Abdelhak	Professeur	Univ. F. Abbas Sétif 1	Président
HASSAM Abdelouahab	Professeur	Univ. F. Abbas Sétif 1	Directeur de thèse
DIB Abderrahmane	Professeur	Univ. Oum El Bouaghi	Examineur
SRAIRI Kamel	Professeur	Univ. M.Khider Biskra	Examineur
HOCINI Abdeslam	Professeur	Univ. M. Boudiaf Msila	Examineur
BARTIL Arres	Professeur	Univ. F. Abbas Sétif 1	Examineur

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer ma gratitude et mes énormes remerciements à mon directeur de thèse Pr. Abdelouahab HASSAM qui m'a donné cette opportunité de faire cette recherche et de m'avoir pris sous sa responsabilité pendant mes années de thèse. Je vous remercie pour tout ce que vous m'avez fait pour moi, votre soutien, vos conseils, votre enthousiasme et bien sûr votre optimisme qui a créé en moi un courage et la patience continuer dans le travail.

Mes sincères remerciements vont aux membres du Jury, Pr. FERHAT Hamida Abdelhak qui est le président de mon jury et mes examinateurs, Pr. BARTIL Arres, Pr DIB Abderrahmane, Pr. SRAIRI Kamel et Pr. HOCINI Abdeslam pour leur précieux temps de relecture et leurs bons commentaires afin que je puisse améliorer ma thèse. Je tiens à remercier également mes collègues de travail pour leurs soutiens absolus. Je les remercie encore pour leurs enthousiasmes lors de ma préparation de la thèse. Je ne vais pas oublier d'adresser mes sincères remerciements à mes amis... Je tiens à tous vous remercier car sans vous, mes années de thèse auraient été très difficiles.

Finalement, je tiens à remercier mes parents et toute ma famille pour leur confiance en moi. Ils sont toujours derrière moi et m'encouragent lors de mes difficultés. Et tout particulièrement, ma petite famille, ce n'est pas facile d'exprimer toutes mes pensées vers mes deux familles. Ils étaient toujours à côté de moi, en me soutenant.

Merci à tous...

Dédicace

*Je dédie cette thèse
à mes très chers parents,
à toute ma famille,
à ma petite famille,
à ma très chère fille,
à mes amis.*

Table des matières

Introduction générale	1
Chapitre I Introduction à la modélisation et la commande des systèmes LPV	4
I.1. Introduction	4
I.1.1. Définitions préliminaires	4
I.1.1.1. Systèmes linéaire à temps invariants (LTI)	4
I.1.1.2. Systèmes linéaire à temps variants (LTV)	4
I.1.1.3. Systèmes linéaire à paramètres variables (LPV)	4
I.1.1.4. Systèmes quasi-LPV (q-LPV)	5
I.1.2. Evolution historique des systèmes LPV	6
I.1.3. Le problème LPV: des garanties en terme de gain \mathcal{L}_2	7
I.2. Classification des paramètres	7
I.2.1. Classification physique	7
I.2.1.1. Paramètres en fonction d'états	8
I.2.1.2. Paramètres endogènes	9
I.2.1.3. Paramètres exogènes	9
I.2.2. Classification mathématiques	10
I.2.2.1. Paramètres continus-discrets	10
I.2.2.2. Paramètres continus-discontinus	11
I.2.2.3. Paramètres dérivables-non dérivables	11
I.2.3. Règles de mise en forme et l'influence des paramètres	12
I.3. Modélisation des systèmes LPV	13
I.3.1. Pourquoi la modélisation LPV?	13
I.3.2. Différents types de systèmes	14
I.3.2.1. Systèmes affine et multi-affine	14
I.3.2.2. Systèmes polynomiaux	14
I.3.2.3. Systèmes rationnels	14
I.3.3. Les trois représentations essentielles des systèmes LPV	15
I.3.3.1. Représentation polytopique	15
I.3.3.2. Représentation dépendant de paramètres	16
I.3.3.3. Représentation LFT	16
I.4. Commande des systèmes LPV	18
I.4.1. Pourquoi la commande LPV?	18
I.4.2. Synthèse de correcteur LPV par retour d'état statique	19
I.4.3. Synthèse de correcteur LPV par retour de sortie statique	20
I.4.4. Synthèse de correcteur LPV par retour de sortie dynamique	20
I.4.5. Synthèse de correcteur LPV à gain scheduling	21
I.4.5.1. Synthèse de correcteur LPV par retour d'état à gain scheduling	21

I.4.5.2.	Synthèse de correcteur LPV par retour de sortie à gain scheduling	22
I.4.5.3.	Synthèse de correcteur LPV par retour de sortie dynamique à gain scheduling	22
I.4.6.	Approches de synthèse de correcteur LPV	23
I.4.6.1	Synthèse de correcteur LPV par approche polytopique	23
I.4.6.2	Synthèse de correcteur LPV par approche LFT	25
I.5	Conclusion	28
Chapitre II	Analyse et synthèse des systèmes LPV	29
II.1.	Introduction	29
II.2.	Définitions préliminaires sur la stabilité	29
II.2.1.	Théorie de Lyapunov	30
II.2.2	Méthode directe de Lyapunov	32
II.2.3.	Stabilité entrée-sortie	33
II.3.	Notions de stabilité pour système LTI et LPV	34
II.3.1.	Stabilité quadratique	35
II.3.1.1.	Cas de systèmes LTI	36
II.3.1.2.	Stabilité quadratique des systèmes LPV	37
II.3.1.3.	Cas de systèmes LPV polytopiques	38
II.3.2.	Stabilité de Lyapunov	38
II.3.2.1.	Critère de Lyapunov pour systèmes LTI	39
II.3.2.2.	Critère de Lyapunov pour systèmes LPV	39
II.4.	Stabilité robuste des systèmes LPV	40
II.4.1.	Cas de systèmes LPV polytopiques	41
II.4.2.	Cas de systèmes LPV sous forme LFT	41
II.4.2.1	Passivité	42
II.4.2.2.	Théorème du petit gain	43
II.5.	Performance robuste des systèmes LPV	43
II.5.1.	Extension de la norme \mathcal{H}_2	44
II.5.2.	Extension de la norme \mathcal{H}_∞	44
II.5.3.	Notion de pôles	45
II.5.4.	Performance quadratique	45
II.5.4.1.	Performance quadratique \mathcal{H}_2	45
II.5.4.2.	Performance quadratique \mathcal{H}_∞	46
II.5.4.3.	Performance par localisation des pôles	46
II.5.4.4.	Performance quadratique des systèmes LPV polytopiques	46
II.5.4.5.	Performance quadratique des systèmes LPV sous forme LFT	47
II.6.	Synthèse de correcteur LPV par approche quadratique	48
II.6.1.	Stabilisation quadratique par retour d'état statique	48
II.6.2.	Stabilisation quadratique par retour de sortie dynamique	49
II.7.	Conclusion	51
Chapitre III	Commande robuste des systèmes LPV	53
III.1.	Introduction	53
III.1.1.	Spécification des performances	54
III.1.2.	Formulation générale du problème de commande robuste	54

III.1.2.1.	Commande \mathcal{H}_2 optimale	57
III.1.2.2.	Commande \mathcal{H}_∞ optimale	58
III.1.3.	Correspondance entre la stabilité quadratique et la commande \mathcal{H}_∞	58
III.2.	La commande \mathcal{H}_∞ des systèmes LPV	59
III.2.1.	Problème \mathcal{H}_∞ standard	59
III.2.2.	Motivation de la synthèse \mathcal{H}_∞ par LMI	59
III.2.3.	Commande \mathcal{H}_∞ par retour d'état	60
III.2.3.1	Commande \mathcal{H}_∞ par retour d'état sans taux de variation borné des paramètres	60
III.2.3.2	Cas de systèmes LPV polytopiques	61
III.2.3.3	Commande \mathcal{H}_∞ par retour d'état avec taux de variation borné des paramètres	62
III.2.3.4	Cas de systèmes LPV polytopiques	63
III.2.4.	Commande \mathcal{H}_∞ par retour de sortie dynamique	64
III.2.4.1.	Commande \mathcal{H}_∞ par retour de sortie dynamique sans taux de variation borné des paramètres	64
III.2.4.2	Cas de systèmes LPV polytopiques	66
III.2.4.3	Cas de systèmes LPV sous forme LFT	68
III.2.4.4.	Commande \mathcal{H}_∞ par retour de sortie dynamique avec taux de variation borné des paramètres	72
III.2.4.5	Cas de systèmes LPV polytopiques	73
III.3.	Synthèse par placement de pôles	73
III.4.	Conclusion	75
Chapitre IV	Commande d'un héliostat	77
IV.1.	Introduction	77
IV.2.	Héliostat-Tour en terrain accidenté	78
IV.3.	Modèle de référence	79
IV.3.1.	Position du soleil	79
IV.3.2.	Relations Héliostat-Tour	80
IV.3.3.	Orientation de la normale	81
IV.4.	Description mécanique et géométrique de l'héliostat	81
IV.4.1.	Modèle dynamique	82
IV.4.2.	Représentation quasi-LPV polytopique	83
IV.5.	Description et analyse du problème	85
IV.6.	Mise en forme du problème de synthèse	86
IV.6.1.	Commande par couple calculé	87
IV.6.2.	Commande par retour d'état	87
IV.6.3.	Commande par retour de sortie dynamique	88
IV.7.	Simulation Héliostat-Tour	89
IV.7.1.	Résultats de simulation	90
IV.7.1.1.	Par retour d'état	90
IV.7.1.2.	Par retour de sortie dynamique	94
IV.7.2.	Discussion des résultats	98
IV.7.3.	Comparaison des résultats	98
IV.8.	Conclusion	99

Conclusion générale		100
Annexe I	Rappels de topologie	103
A.I.1.	Simplexe	103
A.I.2.	Polyèdre	103
A.I.3.	Polytope	103
A.I.4.	Ensemble convexe	103
A.I.5.	Combinaison convexe	104
A.I.6.	Enveloppe convexe	104
A.I.7.	Combinaison positive	104
A.I.8.	Ensemble compact	105
Annexe II	Éléments d'algèbre linéaire espace \mathcal{L}_q	106
A.II.1.	Valeurs propres	106
A.II.2.	Valeurs singulières	106
A.II.3.	Rang et noyau d'une matrice	106
A.II.4.	Positivité d'une matrice	106
A.II.5.	Espace \mathcal{L}_q	107
A.II.6.	Preuve du lemme II.6.2.1	108
Annexe III	Normes	110
A.III.1.	Normes de signal et système	110
A.III.2.	Notion de gain \mathcal{L}_2	111
Annexe IV	Lemmes usuels	112
A.IV.1.	Lemme de Kalman-Yakubovich-Popov	112
A.IV.2.	Complément de Schur	112
A.IV.3.	Lemme positive réel	113
Annexe V	Inégalités matricielles linéaires	114
A.V.1.	Inégalités matricielles	114
A.V.2.	Inégalités matricielles équivalentes	115
A.V.3.	Matrice Hamiltonienne	116
Bibliographie		

Liste des tableaux et figures

Liste des tableaux

Tableau.IV.1	Les paramètres géométriques de l'héliostat	82
Tableau.IV.2	Les paramètres physiques de l'héliostat	83
Tableau.IV.3	Paramètres Héliostat-Tour	90

Liste des figures

Fig.I.1	Diagramme de liaisons des différents systèmes	5
Fig.I.2	Représentation LFT	17
Fig.I.3	Commande LPV en boucle fermée	19
Fig.I.4	Le schéma bloc du retour de sortie dynamique	22
Fig.I.5	Système polytopique	23
Fig.I.6	Correcteur polytopique	24
Fig.I.7	Système LFT	25
Fig.I.8	Structure du système et de correcteur LFT	27
Fig.I.9	Correcteur LFT modifié	27
Fig.II.1	Modèle entrée-sortie	33
Fig.II.2	Schéma d'interconnection	43
Fig.III.1	Configuration générale de la commande	54
Fig.III.2	Lieu des pôles de la boucle fermée $\mathcal{S}(\beta, \mathbf{r}, \varphi)$	74
Fig.IV.1	Champ d'héliostat dans le terrain accidenté	78
Fig.IV.2	Coordonnées solaires selon le repère horizontal	79
Fig.IV.3	Azimut et l'élévation du soleil (a, h)	79
Fig.IV.4	Coordonnées cartésiennes Héliostat-Tour et le réfléchissement du rayon solaire par l'héliostat vers la cible fixe	80
Fig.IV.5	Robot manipulateur à 2ddl	81
Fig.IV.6	Caractéristiques de la vitesse et le couple du vent	86
Fig.IV.7	Répartition des pôles	86
Fig.IV.8	Schéma de simulation Héliostat-Tour	89
Fig.IV.9	Évolution des paramètres variants	90
Fig.IV.10	Placement de pôles par retour d'état	91
Fig.IV.11	Orientation de l'héliostat $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$	91
Fig.IV.12	Erreur de poursuite de l'héliostat	91
Fig.IV.13	Position du rayon réfléchi (ϕ, λ)	92
Fig.IV.14	Commandes (u_1, u_2)	92
Fig.IV.15	Couples (τ_1, τ_2)	92

Fig.IV.16	Orientation de l'héliostat (\mathcal{A}, \mathcal{H})	93
Fig.IV.17	Position du rayon réfléchi (ϕ, λ)	93
Fig.IV.18	Commandes (u_1, u_2)	93
Fig.IV.19	Couples (τ_1, τ_2) avec perturbation	93
Fig.IV.20	Placement de pôles par retour de sortie dynamique	95
Fig.IV.21	Orientation de l'héliostat (\mathcal{A}, \mathcal{H})	95
Fig.IV.22	Erreur de poursuite de l'héliostat	95
Fig.IV.23	Position du rayon réfléchi (ϕ, λ)	96
Fig.IV.24	Commandes (u_1, u_2)	96
Fig.IV.25	Couples (τ_1, τ_2)	96
Fig.IV.26	Orientation de l'héliostat (\mathcal{A}, \mathcal{H})	97
Fig.IV.27	Position du rayon réfléchi (ϕ, λ)	97
Fig.IV.28	Commandes (u_1, u_2)	97
Fig.IV.29	Couples (τ_1, τ_2)	97

Notations et Acronymes

Notations

\mathbb{R}	Corps des nombres réels
\mathbb{C}	Corps des nombres complexes
\mathbb{R}^n	Espace des vecteurs réels de dimension n
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Espace des matrices réelles de dimension $(n \times n)$
\mathbb{R}_+	Ensemble des nombres réels non négatifs
I_n	Matrice identité de dimension n
A^*	Le conjugué de la matrice complexe A
A^{-1}	Inverse de A
A^T	Matrice transposée de A
A^{-T}	Transposée de l'inverse de A
$Re(z)$	Partie réelle du complexe z
$Im(z)$	Partie imaginaire du complexe z
$Ric H$	La solution de Riccati stabilisatrice associée à l'hamiltonien H
\mathfrak{X}	Sous-espace spectral de dimension n .
$\ker(A)$	Noyau de la matrice A

Acronymes

LTI	Linéaire à Temps Invariant le (<i>Linear Time Invariant</i>)
LTV	Linéaire à Temps Variant le (<i>Linear Time Variant</i>)
LPV	Linéaire à Paramètres Variables (<i>Linear Parameter Varying</i>)
LFT	Transformation linéaire fractionnaire (<i>Linear Fractional Transformation</i>)
LMI	Linear Matrix Inequality
SISO	Système monovariabes (Single-Input Sigle-Output)
MIMO	Système multivariabes (Multiple-Input Multiple -Output)

THÈSE DOCTORAT

INTRODUCTION GÉNÉRALE

COMMANDE LINÉAIRE À PARAMÈTRES VARIANTS D'UN ROBOT

Introduction générale

Tous les systèmes physiques sont virtuellement non linéaires et variables dans le temps. Les exemples de non-linéarités auxquels nous sommes souvent confrontés vont de la non-linéarité simple, telle que la saturation, les limiteurs de taux, et le jeu, au comportement intrinsèquement non linéaire des systèmes physiques tels que les robots manipulateurs. Néanmoins, il est souvent possible de décrire le fonctionnement du système physique par un système linéaire, dans les circonstances où le fonctionnement réel du système physique ne s'écarte pas trop de la condition nominale de fonctionnement (ou d'équilibre). Pour cette raison, l'analyse et la synthèse des systèmes linéaires ont occupé une place importante dans la théorie des systèmes. Par conséquent, de nombreuses techniques d'analyse et de synthèse (calculables par ordinateur) ont été développées.

Le commande et la simulation des robots manipulateurs est un domaine mature mais fructueux pour la recherche, le développement et la fabrication. Les robots industriels sont essentiellement des dispositifs de positionnement et de manipulation. Par conséquent, un robot utile est celui qui est capable de contrôler son mouvement et les forces interactives et les couples entre le robot et son environnement. Cette thèse s'intéresse à l'aspect commande des robots manipulateurs. Commander nécessite généralement la disponibilité d'un modèle mathématique et d'une sorte d'intelligence pour agir sur le modèle. Le modèle mathématique d'un robot est obtenu à partir des lois physiques fondamentales régissant son mouvement dont plusieurs niveaux de modélisation géométrique, cinématique et dynamique sont nécessaires en fonction des objectifs, des contraintes de la tâche et de la performance souhaitée. D'un autre côté, l'intelligence requiert des capacités sensorielles et des moyens pour agir et réagir aux variables détectées. Ces actions et les réactions du robot sont le résultat de la conception du correcteur.

Une solution prometteuse est la théorie de la commande avancée connue sous le nom de commande linéaire à paramètres variants (LPV) [1-14]. Cette théorie a été largement acceptée par les systèmes et les théoriciens du contrôle comme un point de départ fondamental pour traiter l'analyse et le contrôle des systèmes dynamiques. Chaque fois que des systèmes de commande sont concernés, la stabilité est l'une des propriétés les plus importantes qu'un système de commande doit

posséder. Assurer la stabilité asymptotique du système en boucle fermée est un moyen efficace d'évaluer que le processus contrôlé se comporte de la manière souhaitée, par exemple, converge vers un point d'équilibre souhaité. Les systèmes LPV sont des systèmes variants dans le temps dont les composants variants dans le temps sont constitués de paramètres mesurables. Au fil des ans, de nombreux développements ont été réalisés dans le domaine de la théorie de la commande LPV. Au début, la commande LPV consistait principalement en des approches heuristiques qui ont été reportées de la commande classique à gain scheduling, et en tant que tels, ces correcteurs ne fournissaient aucune stabilité, robustesse ou performance garanties. Les auteurs comme [10] ont fourni des conditions d'analyse pour ces approches heuristiques qui peuvent produire une stabilité garantie avec des paramètres lentement variable. Heureusement, des méthodes plus avancées basées sur l'optimisation convexe des inégalités matricielles linéaires (LMI) ont été développées [1-14]. Bien qu'il y ait eu des recherches considérables sur la conception des correcteurs via la théorie de la commande LPV, il y a encore place à d'autres améliorations. Toutes les méthodes LPV mentionnées spécifient la performance du système LPV en tant que performance \mathcal{H}_∞ ou \mathcal{H}_2 .

Objectifs de la thèse

Dans ce travail de thèse, l'objectif principal est d'enrichir le domaine robotique avec une vue plus ou moins complète et relativement détaillée sur l'ensemble des méthodes LPV pour l'asservissement des robots manipulateurs rigides. L'intérêt de la représentation d'état sous forme LPV du système est la synthèse de lois de commande robuste en stabilité et en performance. Outre la stabilisation, des spécifications de performance, telles que l'optimalité sous contraintes LMI et la robustesse de la boucle fermée, seront également abordées. Un autre point prioritaire à soulever de la commande robuste sera la stabilisation du robot manipulateur pour suivre une trajectoire de référence avec prise en compte de perturbations. Ces points nous semblent en effet intéressants vu l'application de la commande LPV sur un problème que nous avons souhaité le plus réaliste possible.

Structure de la thèse

Cette thèse dont les principales contributions seront présentées en quatre chapitres. Chacun servira ensuite comme un résultat de base au chapitre suivant.

Le chapitre I présente des généralités sur les différentes classifications de paramètres et types de représentation pour un système LPV d'un système dynamique ainsi que les méthodes de synthèse de correcteurs LPV proposés dans la littérature scientifique.

L'analyse et le contrôle des systèmes LPV sont consacrés au chapitre II. Différents aperçu sur la stabilité et les performances quadratiques sont présentées. Pour la synthèse quadratique, le retour d'état statique et le retour de sortie dynamique sont discutés. Nous exposerons des résultats basés sur la modélisation LPV à savoir les modèles polytopiques et LFT autour desquels s'articulent les différentes méthodes d'analyse.

Chapitre III repose sur l'ensemble des contributions présentées dans les deux chapitre I et II. Concernant la modélisation LPV ainsi que la synthèse de correcteurs LPV basée sur un modèle LPV détaillé au premier chapitre, la commande robuste des systèmes LPV garantit la performance \mathcal{H}_∞ est en particulier proposée et portée à la formulation convexe.

Chapitre IV expose une application de poursuite de trajectoire du soleil par un héliostat considéré comme un robot manipulateur à deux degrés de liberté (RR) de dimension réelle. L'héliostat est un processus lent dont les variations paramétriques sont moins sensibles mais néanmoins elles sont présentes compte tenu des évolutions de la vitesse. En plus de poursuite, il s'agira encore ici de résoudre le problème de rejection de perturbation en évolution non stationnaire causé par les charges du vent.

Chapitre I

THÈSE DOCTORAT

INTRODUCTION À LA MODÉLISATION ET À LA COMMANDE DES SYSTÈMES LPV

COMMANDE LINÉAIRE À PARAMÈTRES VARIANTS D'UN ROBOT

Chapitre I: Introduction à la modélisation et à la commande des systèmes LPV

I.1. Introduction

I.1.1 Définitions préliminaires

I.1.1.1. Systèmes linéaires à temps invariant (LTI)

Un système LTI est un système multivariable d'ordre n états x , avec m entrées u et p sorties y , sa dynamique peut être décrite par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants car ces dynamiques restent inchangées dans le domaine temporel. Le système LTI s'écrit de plusieurs façons comme représentation d'état (I. 1) et fonction de transfert (I. 2):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (I. 1)$$

où les matrices A, B, C et D appartiennent respectivement aux espaces $\mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbb{R}^{p \times n}$, et $\mathbb{R}^{p \times m}$.

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (I. 2)$$

où s est la variable de Laplace.

I.1.1.2. Systèmes linéaires à temps variant (LTV)

Les systèmes LTV sont aussi linéaires. Contrairement aux systèmes LTI, les coefficients des équations différentielles qui décrivent la dynamique du système LTV dépendent du temps. Le système LTV peut être écrit sous forme d'équation d'état (I. 3), mais la notion de fonction de transfert n'existe pas.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (I. 3)$$

I.1.1.3. Systèmes linéaires à paramètres variants (LPV)

La différence entre les systèmes LPV et les systèmes LTV est au niveau des paramètres exogènes qui engendrent les matrices A, B, C et D dont ils ne dépendent pas explicitement par rapport au temps.

La représentation d'état (I. 4) de ce type de système existe, la fonction de transfert n'a plus de sens du fait que les matrices sont en fonction du vecteur de paramètres $\rho(t)$. Néanmoins, si on fige ces paramètres variables, le système s'interprète comme un système LTI et on peut parler tout de suite de fonction de transfert.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) \\ y(t) = C(\rho(t))x(t) + D(\rho(t))u(t) \\ \forall t \geq 0, \rho(t) = [\rho_1(t) \ \rho_2(t) \ \dots \ \rho_r(t)]^T \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^r \end{cases} \quad (I. 4)$$

où \mathcal{P} un domaine de l'espace \mathbb{R}^r .

La dépendance paramétrique entre les trois systèmes est illustrée par le schéma suivant :

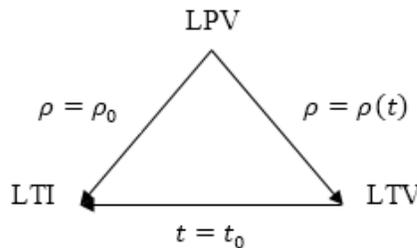


Fig.I.1. Diagramme de liaisons des différents systèmes

On voit clairement qu'un système LTV est un cas particulier d'un système LPV lorsque le vecteur de paramètres variants dans le temps est égal au temps. D'un point de vue pratique, les systèmes LPV ont au moins deux interprétations intéressantes:

- ils peuvent être considérés comme des systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI) soumis à une incertitude paramétrique variable dans le temps $\rho(t)$,
- ils peuvent être des modèles de systèmes linéaires variants dans le temps ou des modèles résultant de la linéarisation de systèmes non linéaires le long des trajectoires du paramètre ρ .

Il est important de noter que parfois la totalité du vecteur de paramètres ou certaines de ses entrées sont choisis pour être certains des signaux du système, telles que certaines variables d'état étant aussi des quantités variantes dans le temps. Avec cette approche, nous pouvons décrire un système vraiment non linéaire comme un système LPV, et cela peut avoir des avantages.

I.1.1.4. Systèmes quasi-LPV (q-LPV)

Capter la dynamique non linéaire du système physique s'avère difficile [15] même si la forme non fiable des systèmes LPV soit similaire à celle d'un système LTI. En 1993, Shamma

[16] à présenter une autre alternative qui consiste à représenter le système non linéaire sous la forme d'un modèle q-LPV qui peut dépendre d'un état, de l'entrée ou de toute autre variable de décision $\rho(t)$ du système d'équation d'état (I.5) sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) \\ y(t) = C(\rho(t))x(t) + D(\rho(t))u(t) \\ \rho(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (I.5)$$

Réellement, ce type de système couvre la plus grande plage de systèmes physiques puisqu'il ouvre la possibilité de mettre ses non-linéarités dans un vecteur de paramètres variables.

1.1.2. Evolution historique des systèmes LPV

Le concept des systèmes linéaires à paramètres variables (LPV) concerne les systèmes dynamiques linéaires dont les représentations dans l'espace d'état dépendent des paramètres exogènes non stationnaires. Depuis son introduction par Shamma et Athans en 1988 pour modéliser les systèmes, le paradigme LPV est devenu un formalisme standard en systèmes et commandes, avec de nombreux articles consacrés à l'analyse, à la synthèse des correcteurs et à l'identification des modèles LPV.

Le paradigme LPV a été introduit dans la thèse de Shamma [17] pour l'analyse et la commande des systèmes. Bref, gain scheduling est une approche de commande qui construit un correcteur non linéaire pour un système non linéaire par commutation ou interpolation de l'ensemble des correcteurs linéaires synthétisés en temps réel en fonction des mesures en ligne disponibles. Voir [17-23] pour le début travaux analytiques sur le gain scheduling et [24,25] sur les articles d'expertise.

L'architecture induite par le gain scheduling suggère le concept LPV comme un terrain d'entente entre les dynamiques linéaires et non linéaires. La relation est comme suit. Une analyse de gain scheduling produit une collection indexée de systèmes linéaires. De même, un modèle LPV consiste en une collection indexée de systèmes linéaires, dans lesquels le paramètre d'indexation est exogène, c'est-à-dire indépendant de l'état. En gain scheduling, ce paramètre est en réalité en fonction de l'état, et donc endogène.

Le concept LPV résout cette dépendance non linéaire, résultant en une dynamique linéaire, mais non stationnaire. Ce chapitre passe en revue les concepts de base et présente une sélection représentative d'approches de modélisation et de commande pour les systèmes LPV.

I.1.3. Le problème LPV : des garanties en terme de gain \mathcal{L}_2

La commande de systèmes LPV est un problème difficile car l'espace des paramètres engendre un problème de dimension infinie si l'on veut vérifier la stabilité d'un système pour toutes les valeurs des paramètres variables. Récemment, des travaux ont considéré diverses approches permettant de réduire le problème à une dimension finie, comme l'approche polytopique ou l'approche LFT.

Dans le contexte LPV, le problème \mathcal{H}_∞ pour un système LTI est considéré comme le problème \mathcal{L}_2 d'un système LPV menant à une commande LPV assurant au système en boucle fermée une propriété de \mathcal{L}_2 .

I.2. Classification des paramètres

Le comportement des paramètres influe fortement sur le comportement des systèmes LPV. En effet, le système global est défini sur un continuum de systèmes linéaires induit par un continuum de paramètres. Si les paramètres prennent des valeurs discrètes (l'ensemble des valeurs est fini) ou sont constants par morceaux, le système aurait un comportement spécifique et, en général, une dénomination spécifique est donnée pour ces types particuliers de systèmes sur ces trajectoires particulières des paramètres. Cela motive les besoins de classer les paramètres afin de différencier chaque comportement et donc, tout système qui pourrait se résulter. Deux points de vue appropriés peuvent être adoptés: soit du point de vue mathématique, centré sur l'analyse des propriétés mathématiques des paramètres, telles que la continuité et la dérivabilité; ou du point de vue physique, en se concentrant sur la signification physique des paramètres telles que la mesurabilité et la calculabilité. Une telle classification vise à discuter sur la validité et la signification de la modélisation LPV afin d'appliquer des stratégies de commande. Il est important de noter que si la première classification est importante pour des considérations théoriques sur le choix des résultats de stabilité, la seconde est cruciale pour une application rigoureuse de commande LPV sur les systèmes physiques.

I.2.1. Classification physique

En général, les paramètres peuvent être classés en trois types, en fonction de leur signification et de leur origine.

I.2.1.1. Paramètres en fonction d'états

Les paramètres peuvent être définis en tant que fonctions d'états, et de tels cas apparaissent lorsque les systèmes LPV sont utilisés pour approximer les paramètres non linéaires; par exemple

$$\dot{x}(t) = -x(t)^3 + u(t)$$

peut être approximer par le système LPV

$$\dot{x}(t) = -\rho(t)x(t) + u(t)$$

où $\rho(t) = x(t)^2$.

Le système LPV approximé est un système q-LPV; voir [22,23,26-32] pour certaines applications de systèmes q-LPV.

La principale difficulté de q-LPV vient du fait que théoriquement, les états sont illimités, alors que par définition, les paramètres sont aussi illimités. Si, par hasard, les fonctions représentant les états aux valeurs des paramètres sont bornées pour toutes les valeurs d'état, le problème ne se produirait pas (mais cette hypothèse est trop forte pour être intéressante). Au contraire, si les fonctions sont non bornées, une condition supplémentaire doit être ajoutée afin de satisfaire la propriété de limitation des valeurs des paramètres. Heureusement, en pratique, les états sont généralement limités et ce problème ne se pose que dans des considérations théoriques.

Il convient de noter qu'en général, plusieurs systèmes LPV correspondent à un système non linéaire et que trouver le meilleur modèle LPV reste un problème ouvert difficile [29,33,34]. En effet, dans le dernier exemple, $\rho(t) = x(t)^2$ aurait été choisi. Mais le dernier exemple est simple car l'origine (c'est-à-dire $x = 0$) est un point attractif asymptotiquement stable globalement et par conséquent toute paramétrisation donnerait un système LPV asymptotiquement stable. Contrairement à l'équation de Van-der-Pol (avec champ de vecteurs inverses) considéré dans [33]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - a(1 - x_2(t)^2)x_2(t)\end{aligned}$$

avec $a > 0$. Il est bien connu que ce système a un cycle limite instable: chaque trajectoire commençant à l'intérieur du cycle limite converge vers 0 tandis que chaque trajectoire commençant à l'extérieur diverge. Dans [33], il est montré qu'une bonne approximation LPV, donnant l'exacte la région de stabilité (c'est-à-dire l'intérieur du cycle limite) est difficile à obtenir.

I.2.1.2. Paramètres endogènes

Les paramètres peuvent être utilisés pour représenter des parties à temps variant impliquées dans l'expression du système (en supposant que les termes à temps variant sont bornés), en vue de simplifier l'analyse de stabilité et / ou de les utiliser dans des lois de commande avancées. Par exemple, le système LTV:

$$\dot{x}(t) = a(t) + b \sin(t) x(t), a(t) \text{ borné dans le temps}$$

Peut-être représenter par

$$\dot{x}(t) = \rho_1(t) + b\rho_2(t)x(t)$$

où $\rho_1(t) = a(t)$ et $\rho_2(t) = \sin(t)$. Le terme paramètres internes signifie que les informations utilisées pour calculer les valeurs des paramètres font partie du modèle dynamique du système et du temps écoulé. Ceci est à mettre en contraste avec la dernière classe de paramètres exposés dans la section suivante

I.2.1.3. Paramètres exogènes

Les paramètres externes ne sont impliqués que dans les problèmes de conception de commande et d'observation. De tels paramètres virtuels peuvent être ajoutés dans la conception (par exemple dans les fonctions de pondération de fréquence en commande / observation \mathcal{H}_∞) afin de modifier le comportement du système en boucle fermée en temps réel.

Ces signaux externes peuvent provenir d'un système de surveillance et peuvent être utilisés pour représenter les états d'urgence, les modes de fonctionnement [35] ou toute autre chose, en vue de modifier le comportement du système, comme la bande passante du système, gains...

Considérons le système LTI/SISO suivant:

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$$

Il est proposé pour déterminer une loi de commande telle que le système en boucle fermée ait une largeur de bande variable et contrôlée. La loi de commande suivante est donc suggérée:

$$u(t) = -(1 + \rho(t))x(t) + \rho(t)r(t), \rho(t) > 0$$

où r est la référence à suivre. L'interconnection donne:

$$\dot{x}(t) = -\rho(t)(x(t) - r(t)), \rho(t) > 0$$

À partir de cette dernière expression, le paramètre exogène $\rho(t)$ contrôle la bande passante du système en boucle fermée et tente de maintenir l'erreur de poursuite à 0. Dans ce scénario, un système de surveillance incluant des heuristiques serait capable de gérer la valeur du paramètre aux données de haut niveau.

I.2.2 Classification mathématique

D' autre part, les mathématiques visent à éclaircir le comportement des paramètres en considérant les propriétés mathématiques des trajectoires. Par conséquent, ces propriétés seront prises en compte dans des analyses de stabilité afin de fournir des résultats moins conservateurs qu'en ignorant ces caractéristiques.

I.2.2.1. Paramètres continus-discrets

La première idée est d'isoler les paramètres en fonction du type de valeurs qu'ils prennent (ou plus précisément du type de l'ensemble image d'une fonction). En effet, les paramètres doivent être considérés comme des fonctions du temps $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow \rho(\mathbb{R}_+)$$

où $\rho(\mathbb{R}_+)$ est l'ensemble image de \mathbb{R}_+ par la fonction vectorielle $\rho(\cdot)$. Rappelons que l'ensemble image des paramètres est toujours borné, alors on peut facilement imaginer que l'ensemble image est continu ou discret, par exemple

$$\rho: t \rightarrow \sin(t)$$

Pour $t \in T$ dans $[-1,1]$ en continuité tant que

$$\rho: t \rightarrow [\sin(t)]_r$$

où $[\cdot]_r$ est l'arrondi à l'opérateur entier le plus proche, pour T dans $\{-1, 0, 1\}$.

La principale différence entre ces ensembles image est que, tandis que le premier contient un nombre infini de valeurs, le second n'en contient que trois. Les ensembles image à valeur discrète sont plus simples à prendre en compte, car il suffit de vérifier la stabilité sur un nombre fini de points seulement. Les systèmes pour lesquels les paramètres prennent des valeurs discrètes sont appelés systèmes commutés (cas déterministe) ou systèmes avec paramètres de saut (cas stochastique) [28,36-46]. Il est clair, à partir de la définition des ensembles image discrètes, que les trajectoires des paramètres sont discontinues (plus précisément, elles sont constantes par

morceaux) tandis que pour les paramètres avec des ensembles image continues, la continuité des trajectoires peut se produire. Cela nous amène à l'idée de considérer la continuité comme un deuxième critère de classification des paramètres.

I.2.2.2. Paramètres continus-discontinus

Les valeurs des paramètres avec un ensemble image continu peuvent évoluer dans l'ensemble image de deux manières différentes: soit d'une façon continue ou discontinue.

Définition I.2.1: Soit une fonction continue f , définie sur \mathbb{R}_+ telle que

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow U$$

satisfait l'implication bien connue suivante:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |t - t_0| \leq \eta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon, \forall t_0 \in \mathbb{R}_+$$

Il convient de noter qu'il existe une grande différence entre les systèmes commutés (systèmes à paramètres évalués en discrets) et les systèmes à paramètres discontinus évalués en continu.

Considérons par exemple le paramètre général de trajectoire discontinue suivant

$$\rho(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \rho_i (H(t - t_i) - H(t - t_{i+1}))$$

où $\rho_i \in [\rho^-, \rho^+] \subset \mathbb{R}$, $0 = t < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_{i+1}$ et $H(\cdot)$ est la fonction Heaviside définie par

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, en raison du nombre infini de valeurs pour ρ_i , les systèmes impliquant une telle trajectoire de paramètres ne peuvent pas être réduits à un nombre fini de systèmes. Par conséquent, de tels systèmes sont plus complexes que les systèmes commutés; ces systèmes sont appelés systèmes LPV avec un paramètre arbitrairement rapide. L'avantage des paramètres continus est leur dérivabilité possible et sera le dernier critère pour classer les paramètres d'un point de vue mathématique.

I.2.2.3. Paramètres dérivable-non dérivable

Le critère final est la dérivée du premier ordre des paramètres. En considérant les bornes sur les dérivées des paramètres, il est alors possible de caractériser la nature des paramètres à temps

variable en termes de vitesse de variation. Il est important de noter que la vitesse de variation a un effet très néfaste sur la stabilité des systèmes LPV.

Définition I.2.2: Soit une fonction continue et dérivable f , définie sur \mathbb{R}_+ telle que

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow U$$

satisfait la relation bien connue suivante:

$$\exists f': \forall t_0 \in \mathbb{R}_+, : \lim_{\Delta t \rightarrow \{0^-, 0^+\}} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

Notez que dans la définition classique de la dérivée, la limite de chaque côté de 0 doit coïncider. Il est clair que les fonctions discontinues ne satisfont pas une telle condition et ont donc une dérivée non bornée à la discontinuité (avec un léger abus de langage). Par conséquent, aucune limite globale ne peut être définie pour les paramètres discontinus. De plus, à partir de la propriété de dérivée ci-dessus, le paramètre $\rho(t)$ défini par

$$\rho: t \rightarrow |\sin(t)|, t \geq 0$$

n'admet pas de dérivée aux points $t_i = k\pi, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. En effet, la valeur dérivée prend respectivement les valeurs -1 et 1 en calculant la limite gauche et droite: donc aucune fonction f' n'existe. Ceci est une conséquence du fait que la fonction de valeur absolue n'est pas dérivable en 0. La non-existence de la fonction f' est apparemment ennuyante puisque la propriété de dérivée globale est perdue en raison de la présence d'un nombre infini dénombrable de points isolés. Heureusement, étant donné que les bornes sur les paramètres dérivés ne sont nécessaires, il est possible de montrer que cette particularité importune n'introduit aucune difficulté supplémentaire.

I.2.3. Règles de mise en forme et l'influence des paramètres

Afin d'avoir un modèle q-LPV à partir d'un modèle non linéaire, il est nécessaire de trouver un arrangement qui convient sur un regroupement des non-linéarités dans le vecteur des paramètres variables. Pratiquement, des considérations doivent être prises en compte sur le choix des paramètres variables car la suggestion de plusieurs regroupements peuvent avoir lieu pour ne pas compliquer la tâche de synthèse d'un correcteur LPV:

- respecter la nature du système,
- de ne pas introduire des pôles ou des zéros instables dans le système.

L'idée derrière ces recommandations révèle qu'un mauvais choix sur les paramètres variables pouvait affecter la nature du système qui introduirait du conservatisme dans la synthèse et qui rend la solution délicate, par contre, un autre choix pourrait confier une solution unique.

Naturellement, les paramètres influent sur la dynamique d'un système. Pour comprendre cette influence, prenons l'exemple d'un modèle non linéaire d'un avion de chasse récrit sous forme d'un modèle LPV. Les paramètres variables du modèle LPV peuvent être classés en trois groupes principaux:

- **Paramètres virtuellement constants:** par exemple la masse et le centre de gravité varient très lentement et ils peuvent être considérés comme virtuellement constants lorsqu'on les compare avec la dynamique du système.
- **Paramètres lentement variables:** la vitesse et l'altitude varient plus rapidement que la masse et le centre de gravité. Des bornes supérieures et inférieures sur ces paramètres ainsi que sur leurs vitesses de variation peuvent être déterminées.
- **Paramètres variant arbitrairement vite:** ce sont des paramètres rapidement variables comme par exemple l'angle d'attaque. Ces paramètres varient au moins aussi vite que la dynamique du système et il est généralement difficile de déterminer des bornes sur leurs vitesses de variation.

I.3. Modélisation des systèmes LPV

Le but de cette section est de fournir différentes formulations utilisées pour représenter les systèmes LPV avec leurs outils respectifs pour l'analyse de stabilité. Les méthodes de synthèse de correcteurs LPV utilisées pour la commande des systèmes physiques reposent sur l'existence d'un modèle LPV. Les modèles LPV ont une plus grande liberté de paramétrisation que les modèles LTI. Cela est dû à la présence d'une dépendance fonctionnelle et souvent dynamique des paramètres du modèle.

I.3.1. Pourquoi la modélisation LPV?

Le système physique qui est en général non linéaire n'est pas utilisable tel qu'il est dans l'état. Cependant, la synthèse d'une commande LPV nécessite un modèle LPV du système non linéaire sous l'hypothèse que les paramètres soient mesurables ou estimables pour

- reformuler des non-linéarités comme paramètres variants;
- la discrimination des systèmes LPV suivant la nature de leur dépendance paramétrique.

I.3.2. Différents types de systèmes

Il est possible d'isoler trois types principaux de systèmes LPV parmi la grande variété de ces systèmes en fonction de la dépendance aux paramètres. Dans ce qui suit, nous utiliserons la notation ρ au lieu de $\rho(t)$ pour éclaircir la notation.

I.3.2.1. Systèmes affine et multi-affine

Les systèmes affine et multi-affine sont les systèmes LPV les plus simples que l'on puisse rencontrer. En raison de la dépendance affine en les paramètres, la formulation affine de la représentation d'état (I. 4) est donnée par:

$$\begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^r \rho_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \quad (I. 6)$$

La stabilité de tels systèmes peut être déterminée avec un faible degré de conservatisme (dans certains cas, il n'y a pas de conservatisme).

I.3.2.2. Systèmes polynomiaux

Les systèmes polynomiaux sont la généralisation immédiate des systèmes affines à une dépendance polynomiale. La formulation polynomiale de la représentation d'état (I. 4) est donnée ci-dessous:

$$\begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^r \rho^{\sigma_i} \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \quad (I. 7)$$

où $\sigma_i = [\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^r]$ et $\rho^{\sigma_i} = \rho_1^{\sigma_i^1} \rho_2^{\sigma_i^2} \dots \rho_r^{\sigma_i^r}$. De tels systèmes sont légèrement plus compliqués à analyser, mais récemment, plusieurs approches ont apporté des solutions intéressantes à l'analyse de stabilité et à la synthèse de commande pour ce type de systèmes.

I.3.2.3. Systèmes rationnels

La dernière à être présentée est la classe des systèmes rationnels:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) \\ y(t) &= C(\rho)x(t) + D(\rho)u(t) \end{aligned} \quad (I. 8)$$

où $A(\rho), B(\rho), C(\rho)$ et $D(\rho)$ sont des matrices avec des coefficients prenant la forme de fonctions rationnelles. De tels systèmes ont l'avantage de pouvoir modéliser le plus grand ensemble de systèmes et les systèmes multi-affines / polynomiaux sont des cas particuliers de ce type.

I.3.3. Les trois représentations essentielles des systèmes LPV

Seules trois techniques globales sont couramment utilisées en ce moment pour faire face aux systèmes LPV même si un système LPV peut être classé dans plusieurs familles en fonction de la façon dont les paramètres agissent sur le système. Différentes représentations de systèmes LPV et de systèmes q-LPV existent: la représentation polytopique, la représentation dépendant de paramètres et la représentation LFT.

I.3.3.1. Représentation polytopique

Les systèmes polytopiques sont vraiment répandus dans l'analyse robuste et la commande robuste. Ils ont été étudiés dans de nombreux articles, par exemple voir [47-52].

Considérons le système LPV définie ci-dessus par l'équation (I.4). Son modèle polytopique variant dans le temps est un système régi par la formulation suivante:

$$S(\rho) = \begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N=2^r} \alpha_i S_i, \quad \rho \in \mathcal{P} \quad (I.9)$$

avec

$$S_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \quad (I.10)$$

Le terme polytopique vient du fait que le vecteur de coordonnées barycentriques α évolue sur l'unité simplexe qui est un polytope (**voir l'annexe I**) défini par:

$$\Omega := \left\{ Co(\alpha_i) : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\} \in \mathcal{P} \quad (I.11)$$

Ce modèle polytopique non conservatif existe avec la détermination de l'ensemble des matrices S_i constituant les sommets du polytope défini par:

$$Co\{S_1, S_2, \dots, S_N\} \equiv \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i S_i, \alpha_i(t) \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\} \quad (I.12)$$

Pour un modèle polytopique conservatif il existe une combinaison barycentrique telle que:

$$Co\{S_1, S_2, \dots, S_N\} \subset \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i S_i, \alpha_i(t) \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\} \quad (I.13)$$

Du fait que la convexité de la combinaison barycentrique ne peut être garantie de façon générale, la définition d'une enveloppe convexe comme l'enveloppe paramétrique est une solution possible pour avoir le meilleur modèle polytopique le moins conservatif.

I.3.3.2. Représentation dépendant de paramètres

Selon le paradigme LPV, les systèmes dépendants de paramètres sont des systèmes linéaires, dont les descriptions d'espaces d'états sont des fonctions connues de paramètres variables dans le temps. Alors que la variation de temps de chacun des paramètres n'est pas connue à l'avance, il est supposé être mesurable en temps réel. Cette formulation est la plus directe, le système est considéré dans sa forme originale. L'analyse de stabilité ou la synthèse de commande sont réalisées directement avec des outils spécifiques. Cette formulation est mieux adaptée aux systèmes dépendants des paramètres polynomiaux mais peut être utilisée avec n'importe quel type de systèmes LPV (I. 4):

$$\begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^r \rho^{\sigma_i} \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \quad (I. 14)$$

avec $\sigma_i = [\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^r]$ et $\rho^{\sigma_i} = \rho_1^{\sigma_i^1} \rho_2^{\sigma_i^2} \dots \rho_r^{\sigma_i^r}$. Il est évident que le cas multi-affine est un cas particulier de cette représentation plus générale. De plus, même si la définition est donnée pour les systèmes avec dépendance polynomiale uniquement sur les paramètres, elle s'applique également aux systèmes avec dépendance rationnelle aux paramètres. Cependant, une représentation plus appropriée pour les systèmes est donnée dans la section suivante.

I.3.3.3. Représentation LFT

La dernière représentation pour les systèmes LPV est appelée, avec un léger abus de langage, les systèmes LFT. En effet, le terme LFT signifie transformation fractionnaire linéaire et est la transformation utilisée pour convertir un système LPV / incertain en une forme linéaire fractionnaire (LFR). L'intérêt de cette formulation pour les systèmes LPV a été souligné dans [9] et cette approche a donné lieu à de nombreux articles, citons par exemple [2,11,53]. Une telle formulation permet d'intégrer une grande variété de systèmes dans une seule classe, englobant de manière unifiée les deux systèmes avec une dépendance polynomiale et rationnelle sur les paramètres.

L'idée clé de cette représentation est de diviser le système en deux parties: la partie variable et la partie constante en vue de les analyser séparément. Il est à noter que l'idée de séparer le système en deux parties indépendantes connectées n'est pas nouvelle. Cela nous ramène aux années 50 quand les non-linéarités sur les actionneurs étaient traitées et conduire aux systèmes de Lu're [54]. Dans l'analyse de stabilité robuste, une telle transformation est largement utilisée comme indiqué dans [55-58].

La représentation LFT est plus générale et s'adresse à des systèmes LPV (I. 4) de la forme

$$\begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^q \varphi_i(\rho) \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, \rho \in \mathcal{P} \quad (I. 15)$$

où $\varphi(\rho_1, \dots, \rho_r)$ est une fonction dépendant des paramètres variables ρ liés par des relations polynomiales ou rationnelles et qui sont réécrits en une interconnection de deux systèmes comme représenté sur la Fig.I.2, le système inférieur $S(s)$ est un système LTI tandis que la partie de paramètres variables est située dans le système supérieur $\theta(\rho)$.

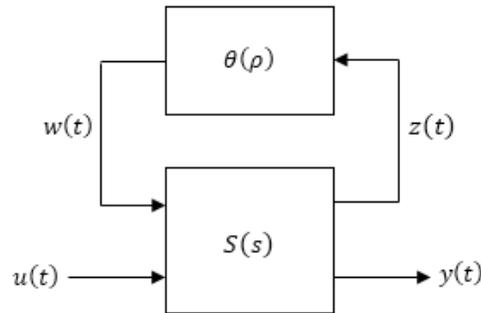


Fig.I.2. Représentation LFT

Et $S(s)$ la représentation d'état augmenté du système LTI s'écrivant:

$$S(s): \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{cases} \quad (I. 16)$$

où

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état.

$w(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ est le vecteur des actions externes (bruits de mesure, consigne, perturbations...).

$u(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ est le vecteur d'entrée de commande.

$z(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$ est le vecteur des sorties à contrôler (erreurs de suivi de consigne, commandes...).

$y(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$ est le vecteur de sorties mesurées.

$A(\rho) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'évolution (ou de dynamique) ou la matrice d'état.

$B_1(\rho) \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$, $B_2(\rho) \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$ sont les matrices de commande (ou d'entrée).

$C_1(\rho) \in \mathbb{R}^{p_1 \times n}$, $C_2(\rho) \in \mathbb{R}^{p_2 \times n}$ sont les matrices d'observation (ou de sortie).

$D_{11}(\rho) \in \mathbb{R}^{p_1 \times m_1}$, $D_{12}(\rho) \in \mathbb{R}^{p_1 \times m_2}$, $D_{21}(\rho) \in \mathbb{R}^{p_2 \times m_1}$, $D_{22}(\rho) \in \mathbb{R}^{p_2 \times m_2}$ sont les matrices de transmission directe.

Par rebouclage du système $S(s)$ avec la matrice $\theta(\rho)$ en écrivant que

$$w(t) = \theta(\rho)z(t) \quad (I.17)$$

le système résultant est un système LPV de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \tilde{A}(\rho)x(t) + \tilde{B}(\rho)u(t) \\ y(t) &= \tilde{C}(\rho)x(t) + \tilde{D}(\rho)u(t) \end{aligned} \quad (I.18)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{A}(\rho) = A + B_1\theta(\rho)(I - D_{11}\theta(\rho))^{-1}C_1 \\ \tilde{B}(\rho) = B_2 + B_1\theta(\rho)(I - D_{11}\theta(\rho))^{-1}D_{12} \\ \tilde{C}(\rho) = C_2 + D_{21}\theta(\rho)(I - D_{11}\theta(\rho))^{-1}C_1 \\ \tilde{D}(\rho) = D_{22} + D_{21}\theta(\rho)(I - D_{11}\theta(\rho))^{-1}D_{12} \end{cases} \quad (I.19)$$

et à condition que si la matrice $I - D_{11}\theta(\rho)$ soit non singulière.

Une propriété importante des systèmes LFT est que leur interconnection (par exemple, somme, concaténation) et aussi l'inversion, si elle existe, aboutit toujours à une autre LFT.

I.4. Commande des systèmes LPV

Pour conclure sur ce chapitre introductif sur les systèmes LPV, nous présentons brièvement dans cette section les différentes synthèses de correcteur qui peuvent être considérées dans le contexte des systèmes LPV. Le problème de commande LPV est cependant très important à couvrir car des approches très spécifiques et importantes méritent d'être présentées. Dans la suite de cette section, le système LPV (I.4) est remplacé par sa représentation d'état augmenté $G(\rho)$ défini par:

$$G(\rho): \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B_1(\rho)w(t) + B_2(\rho)u(t) \\ z(t) = C_1(\rho)x(t) + D_{11}(\rho)w(t) + D_{12}(\rho)u(t) \\ y(t) = C_2(\rho)x(t) + D_{21}(\rho)w(t) + D_{22}(\rho)u(t) \end{cases} \quad (I.20)$$

I.4.1. Pourquoi la commande LPV

La commande LPV nécessite un modèle LPV du système non linéaire pour

- la synthèse de lois de commande avec garantie en stabilité et en performance sur l'ensemble de l'espace de travail;
- généralisation de certains outils classiques utilisés pour les systèmes LTI.

reboucler avec un correcteur LPV (voir Fig.I.3).

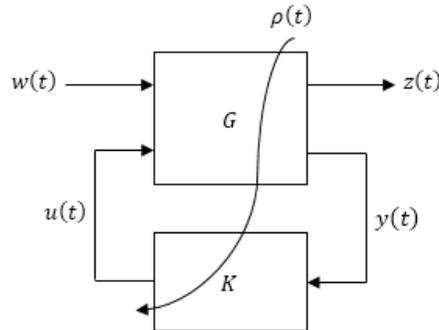


Fig.I.3. Commande LPV en boucle fermée

I.4.2. Synthèse de correcteur par retour d'état statique

L'extension aux systèmes LPV des correcteurs par retour d'état ont été proposés par Wu [59]. Peu après ce type de correcteur fait l'objet de plusieurs travaux [30,60,61]. Le principe de la synthèse d'un correcteur par retour d'état consiste à effectuer une contre-réaction sur le vecteur d'état du système à tout instant, le vecteur de commande est calculé à partir de la valeur du vecteur d'état retourné par les capteurs, et du vecteur d'état désiré, ou consigne.

La loi de commande s'écrit alors :

$$u(t) = Kx(t) \quad (I.21)$$

L'implantation de cette commande par retour d'état nécessite la mesure de tous les états du système, ce qui est une hypothèse assez forte.

où $K \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ est une matrice appelée gain du retour d'état. C'est une commande en boucle fermée car elle dépend des signaux internes du système même si elle ne prend pas en compte directement la sortie du système $y(t)$.

Le système augmenté en boucle fermée G_{BF} s'écrit donc:

$$G_{BF}: \begin{cases} \dot{x}(t) = (A - B_2 k)x(t) + B_1 w(t) \\ z(t) = (C_1 - D_{12} k)x(t) + D_{11} w(t) \\ y(t) = (C_2 - D_{22} k)x(t) + D_{21} w(t) \end{cases} \quad (I.22)$$

I.4.3. Synthèse de correcteur par retour de sortie statique

La forte constatation de non disponibilité complète des états du système est l'une des causes d'envisager le retour de sortie. La synthèse de correcteurs utilisant la sortie est réalisée dans [62-68]. L'existence d'une loi de commande par retour de sortie statique est généralement d'ordre plein:

$$u(t) = Ky(t) \quad (I.23)$$

Comme dans le cas du retour d'état statique, le retour de sortie statique est aussi une commande en boucle fermée, mais cette fois ci la contre-réaction se fait par le vecteur de sorties mesurées.

Le système augmenté en boucle fermée G_{BF} s'écrit donc:

$$G_{BF}: \begin{cases} \dot{x}(t) = \check{A}x(t) + \check{B}_1w(t) \\ z(t) = \check{C}_1x(t) + \check{D}_{11}w(t) \\ y(t) = \check{C}_2x(t) + \check{D}_{21}w(t) \end{cases} \quad (I.24)$$

avec

$$\check{A} = A + B_2K(I - D_{22}K)^{-1}C_2$$

$$\check{B}_1 = B_1 + B_2K(I - D_{22}K)^{-1}D_{21}$$

$$\check{C}_1 = C_1 + D_{12}K(I - D_{22}K)^{-1}C_2$$

$$\check{D}_{11} = D_{11} + D_{12}K(I - D_{22}K)^{-1}D_{21}$$

$$\check{C}_2 = (I - D_{22}K)^{-1}C_2$$

$$\check{D}_{21} = (I - D_{22}K)^{-1}D_{21}$$

Cette représentation n'existe que si la matrice $I - D_{22}K$ n'est pas singulière.

Dans le cas où le système augmenté est strictement propre, c'est-à-dire $D_{22} = 0$, les matrices du système (I.24) deviennent:

$$\check{A} = A + B_2KC_2, \check{B}_1 = B_1 + B_2KD_{21},$$

$$\check{C}_1 = C_1 + D_{12}KC_2, \check{D}_{11} = D_{11} + D_{12}KD_{21},$$

$$\check{C}_2 = C_2, \check{D}_{21} = D_{21}$$

I.4.4. Synthèse de correcteur par retour de sortie dynamique

Un type très important de correcteurs est celui des correcteurs par retour de sortie dynamique. Ce type de correcteurs a été utilisé, par exemple, dans [68,69]. Grâce à sa structure, cette loi de commande permet d'améliorer les performances en introduisant des spécifications relatives à la

dynamique souhaitée en boucle fermée [70]. Cette approche consiste à utiliser un correcteur ayant sa propre dynamique:

$$K(s): \begin{cases} \dot{x}_k(t) = A_k x_k(t) + B_k y(t) \\ u(t) = C_k x_k(t) + D_k y(t) \end{cases} \quad (I.25)$$

où $x_k \in \mathbb{R}^{n_k}$ est l'état du correcteur de dimension n_k de fonction de transfert associée:

$$K(s) = C_k (sI - A_k)^{-1} B_k + D_k \quad (I.26)$$

Lorsque la dimension du correcteur est la même que celle du système, on dit que le correcteur est de plein ordre, sinon de commande réduite ou fixe. Un des problèmes de retour de sortie dynamique est de minimiser n_k et de le rendre le plus petit possible par rapport à n . Pour $n_k = 0$, le problème de retour de sortie dynamique est exactement le problème de retour de sortie statique.

I.4.5. Synthèse de correcteur LPV à gain scheduling

Les traitements théoriques de gain scheduling sur les systèmes de commande non linéaires étaient très rares [25]. Immédiatement souligné, les méthodes à gain scheduling heuristiques ont fait l'objet d'une alternative rigoureuse constitutif des méthodes LPV [9,11,71,72]. Les premières idées de gain scheduling imposées pour les systèmes LPV ont été proposées par Shamma dans sa thèse [17] et d'autres articles [10,22,23]. La méthode de synthèse à gain scheduling est une méthode empirique, la principale difficulté était l'absence de théorie générale pour l'analyse de la stabilité des systèmes LPV et la conception de lois de commande LPV à gain scheduling. Avant, le correcteur à gain scheduling est construit à partir d'une famille de correcteurs linéaires locaux conçus en utilisant des méthodes linéaires invariantes dans le temps, alors le correcteur LPV est le résultat d'un ensemble de correcteurs locaux du système LPV séquencé par les paramètres variables.

I.4.5.1. Synthèse de correcteur LPV par retour d'état à gain scheduling

Comme la commande des systèmes LPV à l'aide de retour d'état à gain statique, le retour d'état à gain scheduling a connu lui aussi une évolution sans précédente ces dernières années [73-78]. Il est possible que le gain soit dépendant des paramètres variables du systèmes LPV dont la loi de commande la plus simple qui peut être conçue est retour d'état à gain scheduling:

$$u(t) = K(\rho)x(t) \quad (I.27)$$

Ceci est une extension immédiate du retour d'état LTI au retour d'état LPV: la matrice du gain du correcteur est maintenant en fonction des paramètres variables. Ce correcteur est le plus facile à concevoir mais il nécessite la connaissance du vecteur d'état du système pour être implémenter.

I.4.5.2. Synthèse de correcteur LPV par retour de sortie à gain scheduling

Ce type de correcteur LPV à gain scheduling a répondu pour l'un des premières application sur les systèmes LPV [79] suivi de plusieurs autres applications ces derniers temps [80-83]. Une loi de commande apparemment simple et à gain scheduling dépendant elle aussi des paramètres variables du système LPV est la loi de commande par retour de sortie à gain scheduling qui prend la forme suivante:

$$u(t) = K(\rho)y(t) \quad (I.28)$$

Cette classe de correcteurs est très facile à mettre en œuvre car l'entrée de commande est directement calculée à partir de la sortie mesurée. La principale difficulté réside toutefois dans la difficulté d'obtenir des conditions faciles pour concevoir de telles lois de commande.

I.4.5.3. Synthèse de correcteur LPV par retour de sortie dynamique à gain scheduling

L'acquisition d'une grande importance par ce type de correcteur a conduit d'envisager l'introduction de l'aspect gain scheduling bien évidemment dans le cadre d'améliorer les performances dynamiques et de garantir la stabilité du système commandé [84-86]. De la Fig.I.4, le correcteur est une structure à un seul bloc dont le but est uniquement le calcul d'une entrée de commande appropriée $u(t)$ à partir de la sortie mesurée $y(t)$.

$$K(\rho): \begin{cases} \dot{x}_k(t) = A_k(\rho)x_k(t) + B_k(\rho)y(t) \\ u(t) = C_k(\rho)x_k(t) + D_k(\rho)y(t) \end{cases} \quad (I.29)$$

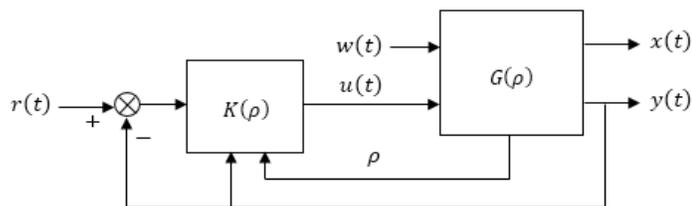


Fig.I.4. Le schéma bloc du retour de sortie dynamique

Cette classe de correcteurs a été étudiée, par exemple, dans [2,9,53,87]. De manière intéressante, lorsque l'ordre du correcteur est égal à l'ordre du processus, c'est-à-dire $n = n_k$, le problème de conception s'avère admettre des solutions convexes dans plusieurs configurations. Lorsque le

correcteur est de commande réduite, c'est-à-dire $n_k < n$, le problème est connu pour être difficile en raison de la présence d'une contrainte de rang (non convexe) dans les conditions de stabilisation; voir par exemple [63].

I.4.6. Approches de synthèse de correcteur LPV

La synthèse d'une loi de commande nécessite d'une part un modèle mathématique du système à commander et d'autre part, une approche efficace et adaptée au modèle car toute la démarche repose sur un modèle suffisamment fidèle. Parmi ces modèles, on peut distinguer deux approches différentes: l'approche polytopique et l'approche LFT.

I.4.6.1. Synthèse de correcteur LPV par approche polytopique

Soit le système LPV défini par l'équation (I. 20) sous une formulation compacte:

$$G(\rho) = \begin{pmatrix} A(\rho) & B_1(\rho) & B_2(\rho) \\ C_1(\rho) & D_{11}(\rho) & D_{12}(\rho) \\ C_2(\rho) & D_{21}(\rho) & D_{22}(\rho) \end{pmatrix}, \rho \in \mathcal{P} \quad (I. 30)$$

La représentation d'état augmentée $G(\rho)$ peut être convertie en un système polytopique $S(\rho)$ en utilisant l'ensemble des sommets $\{S_i\}$ construit par l'image du polytope formé par les paramètres variables donné par la Fig.I.5. Tout système à l'intérieur du polytope est représenté par une combinaison convexe des sommets pondérés par le vecteur de coordonnées barycentriques α_i . Les coordonnées barycentriques sont utilisées pour spécifier la localisation d'un point comme centre de masse, ou barycentre, des masses placées aux sommets d'un simplexe. Warren [88] fournit une formule pour calculer les coordonnées barycentriques de tout polytope convexe. Parmi les travaux exploitant cette approche [3,89].

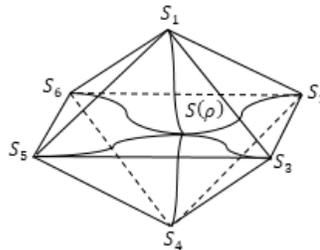


Fig.I.5. Système polytopique

Admet une représentation polytopique sous forme d'état:

$$S(\rho) = \sum_{i=1}^N \alpha_i S_i, \rho \in \mathcal{P} \tag{I.31}$$

avec

$$S_i = \begin{pmatrix} A_i & B_{1i} & B_{2i} \\ C_{1i} & D_{11i} & D_{12i} \\ C_{2i} & D_{21i} & D_{22i} \end{pmatrix} \tag{I.32}$$

où A_i, B_{1i}, \dots , sont les sommets images par $S(\cdot)$ des sommets de \mathcal{P} .

\mathcal{P} est un polytope de N sommets. On peut écrire $\mathcal{P} = Co\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_N\}$, or $\rho \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \rho = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathcal{P}_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$.

Le choix d'un correcteur à une structure analogue à celle du système s'avère profitable Fig.I.6.

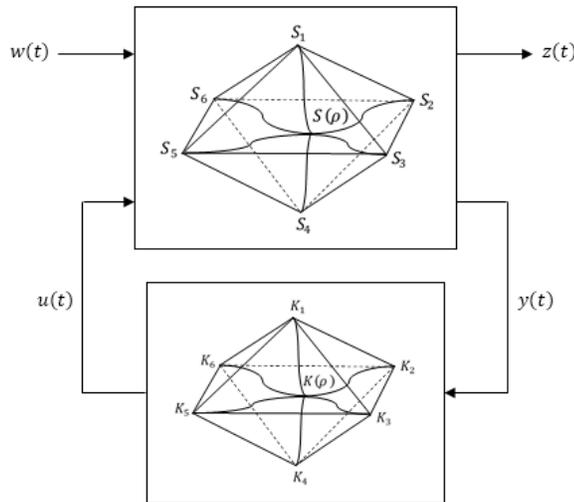


Fig.I.6. Correcteur polytopique

La construction du correcteur clairement requise s'obtient par la combinaison barycentrique des correcteurs calculés pour chaque sommet:

$$K(\rho) = \sum_{i=1}^N \alpha_i K_i, \rho \in \mathcal{P} \tag{I.33}$$

où K_i est le gain de correcteur qui correspond au sommet S_i .

Le gain du correcteur (I.33) est exprimé en fonction du vecteur de paramètres variables ρ . Pour cela, les coordonnées barycentriques du vecteur ρ sont déterminées à chaque instant par résolution en ligne le système:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i = \rho \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \\ \alpha_i \geq 0 \end{cases} \quad (I.34)$$

I.4.6.2. Synthèse de correcteur LPV par approche LFT

L'idée de conception de correcteur sous forme de LFT pour les systèmes LPV est limitée par la restriction d'utiliser uniquement des expressions rationnelles et d'appliquer uniquement des opérations mathématiques rationnelles. Dans ce cas, toute manipulation d'une forme LFT, donne à nouveau une expression qui peut être représentée sous une forme LFT. De nombreux résultats ont été développés au cours des 15 dernières années pour résoudre le problème de commande des systèmes LPV par l'approche LFT [90]. L'approximation du système non linéaire basé sur la structure LFT est également trouvée dans [2,9,91].

Reprenons comme équations de départ (I.20). Lorsque les différentes matrices de cette représentation d'état dépendent du vecteur de paramètres ρ de manière rationnelle, ce système peut être présenté comme sur la Fig.I.7, où un système LTI décrit par la matrice $M(s)$ est bouclé par une matrice $\theta(\rho)$ dépendant de paramètres:

$$\theta(\rho) = \text{diag} \left(\rho_1 I_{r_1}, \dots, \rho_r I_{r_q} \right) \quad (I.35)$$

où $r_i > 1$ chaque fois que le paramètre ρ_i est répété [92]. L'ensemble des opérateurs de structure (I.35) est désigné par

$$\Theta(\rho) = \left\{ \text{diag} \left(\rho_1 I_{r_1}, \dots, \rho_r I_{r_q} \right), \rho_i \in \mathbb{R} \right\} \quad (I.36)$$

Notez que Θ est traditionnellement dénommée la structure d'incertitude.

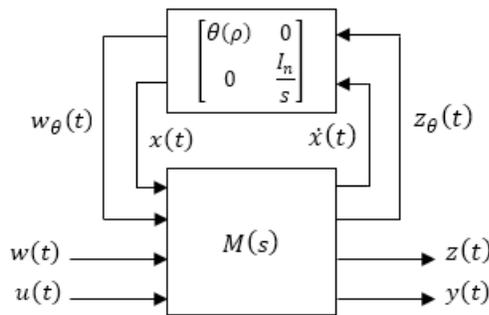


Fig.I.7. Système LFT

Par interprétation, $z_\theta(t)$ et $w_\theta(t)$ sont des entrées/sorties du bloc-diagonal $\theta(\rho)$ dont les paramètres variables sont rassemblés. Pour souligner le fait qu'il existe une LFT par rapport à $\theta(\rho)$, les matrices d'espace d'état peuvent être réarrangées dans la LFT supérieure suivant la figure ci-dessus:

$$M(s): \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_{1\theta}w_\theta(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z_\theta(t) = C_{1\theta}x(t) + D_{11\theta}w_\theta(t) + D_{12\theta}w(t) + D_{13\theta}u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_{21\theta}w_\theta(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{31\theta}w_\theta(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{cases} \quad (I.37)$$

$$w_\theta(t) = \theta(\rho)z_\theta(t)$$

La matrice variant dans le temps $\theta(\rho)$ peut être réabsorbée dans les matrices d'espace d'état de sorte que ces matrices soient données par le système LPV $G(\rho)$. Ce système peut être représenté sous forme:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \mathcal{F}_u(M, \theta(\rho)) \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (I.38)$$

où

$$\begin{aligned} G(\rho) &:= \mathcal{F}_u(M, \theta(\rho)) \\ &= \begin{bmatrix} C_{1\theta} \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \theta(\rho) (I - A\theta(\rho))^{-1} [B_{1\theta} \quad B_1 \quad B_2] + \begin{bmatrix} D_{11\theta} & D_{12\theta} & D_{13\theta} \\ D_{21\theta} & D_{11} & D_{12} \\ D_{31\theta} & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (I.39)$$

Comme dans le cas de l'approche polytopique, la forme du correcteur recherché est identique que celle du système LFT rebouclé avec le même bloc $\theta(\rho)$. Notez que bien que dans la plupart des cas nous utilisons le même bloc pour interconnecter le système et le correcteur, en général on peut utiliser des blocs avec une structure différente. Par souci de simplicité dans les formules, nous utilisons des blocs identiques. Ce fait est reflété dans la Fig.I.8.

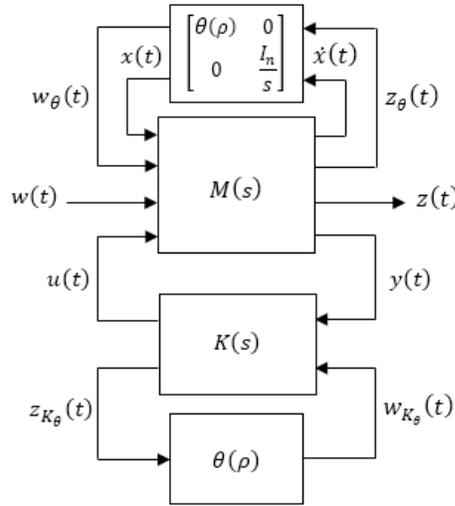


Fig.I.8. Structure du système et de correcteur LFT

La relation de retour entre $u(t)$ et $y(t)$ est

$$u(t) = \mathcal{F}_l(K, \theta(\rho))y(t) \tag{I.40}$$

Par conséquent, le correcteur sous forme d'état est donné par:

$$K: \begin{cases} u(t) &= K_{11}y(t) + K_{12K_\theta}w_{K_\theta}(t) \\ z_{K_\theta}(t) &= K_{21K_\theta}y(t) + K_{22K_\theta}w_{K_\theta}(t) \end{cases} \tag{I.41}$$

dont la structure d'interconnection LFT inférieure est la suivante:

$$K := \mathcal{F}_l(K, \theta(\rho)) = K_{12K_\theta}\theta(\rho) \left(I - K_{22K_\theta}\theta(\rho) \right)^{-1} K_{21K_\theta} + K_{11} \tag{I.42}$$

La structure LFT peut être transformée en une structure modifiée dans laquelle tous les composants dépendants des paramètres sont rassemblés en un seul bloc, voir Fig.I.9.

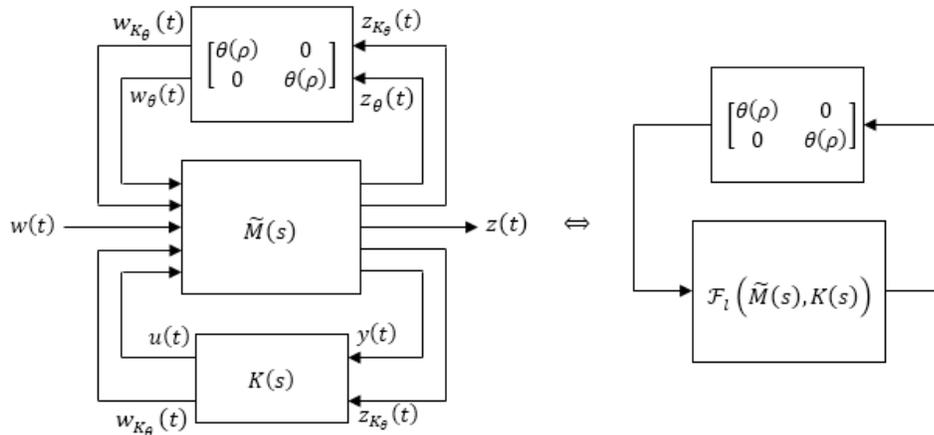


Fig.I.9. Correcteur LFT modifié

La boucle fermée de la perturbation $w(t)$ à la sortie contrôlée $z(t)$ est donné par

$$T_{zw}(M, K, \theta(\rho)) = \mathcal{F}_l \left(\mathcal{F}_u(M, \theta(\rho)), \mathcal{F}_l(K, \theta(\rho)) \right) \quad (I.43)$$

Ensuite, le système augmenté modifié est formalisé de la façon suivante:

$$\begin{bmatrix} z_{K_\theta}(t) \\ z_\theta(t) \\ z(t) \\ y(t) \\ z_{K_\theta}(t) \end{bmatrix} = \tilde{M} \begin{bmatrix} w_{K_\theta}(t) \\ w_\theta(t) \\ w(t) \\ u(t) \\ w_{K_\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (I.44)$$

avec

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_n \\ 0 & M & 0 \\ I_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (I.45)$$

Ici, $M(s)$ est formalisé en utilisant l'équation (I.37). Ainsi, on obtient:

$$T_{zw}(M, K, \theta(\rho)) = \mathcal{F}_u \left(\mathcal{F}_l(\tilde{M}, K), \begin{bmatrix} \theta(\rho) & 0 \\ 0 & \theta(\rho) \end{bmatrix} \right) \quad (I.46)$$

Le problème LPV d'origine peut être considéré comme un problème de performance robuste plus classique face au bloc répété $diag(\theta(\rho), \theta(\rho))$.

I.5. Conclusion

Commencant par une définition précise des différentes classes de paramètres que certaines ont de bonnes propriétés qui peuvent être exploitées pour fournir des outils de stabilité et de synthèse plus précis, ce chapitre a présenté une vue d'ensemble des systèmes. Parmi eux, les systèmes LPV, de leurs origines aux diverses approches pour l'analyse et la synthèse: les systèmes LPV polytopique, LPV polynomiaux et LFT. D'un autre côté, il est très excitant de voir l'adoption généralisée du paradigme LPV en côtoyant les différentes synthèses de correcteurs LPV à savoir le retour d'état statique, le retour de sortie statique ou dynamique de même forme que le modèle du système.

Chapitre II

THÈSE DOCTORAT

ANALYSE ET SYNTHÈSE DES SYSTÈMES LPV

COMMANDE LINÉAIRE À PARAMÈTRES VARIANTS D'UN ROBOT

Chapitre II: Analyse et synthèse des systèmes LPV

II.1. Introduction

La terminologie «linéaire à paramètre variable» a été introduite dans [17] pour distinguer les systèmes LPV des deux systèmes LTI et LTV. La distinction des systèmes LTI est claire dans la mesure où les systèmes LPV sont non stationnaires. La distinction des systèmes LTV est moins apparente, car pour toute trajectoire du vecteur paramètres ρ , la dynamique de (I.4) constitue un système linéaire variant dans le temps. Au contraire, les systèmes LPV se distinguent des systèmes LTV du point de vue de l'analyse et de la synthèse. L'analyse et la synthèse des systèmes LPV est principalement basée sur des approches d'analyse de stabilité, de performance et le contrôle, car un système LPV n'est rien d'autre qu'un système incertain avec des paramètres variables dans le temps. Dans ce contexte, au cours des vingt-cinq dernières années, les problèmes de stabilité et de conception d'une commande pour un système LPV donné qui maintient la stabilité en boucle fermée et garantissent en même temps des exigences de performance données en présence de paramètres variables dans le temps largement étudié sont résolus informatiquement avec élégance grâce au développement théorique des outils d'analyse et de synthèse de certaines classes de systèmes projetés aux systèmes LPV.

Le but du chapitre est de présenter ces outils, mais d'abord, quelques définitions préliminaires sur la stabilité des systèmes dynamiques sont nécessaires. Le reste de ce chapitre on présente divers résultats sur l'analyse pour les systèmes LPV avec ses différentes représentations exposées au chapitre I. Le chapitre débute par quelques définitions générales de la stabilité soutenue par la théorie de Lyapunov et la stabilité quadratique suivi en complément par l'aspect de robustesse et la performance robuste des systèmes LPV en exposant des théorèmes importants. Enfin, la dernière partie du chapitre est consacrée à la stabilisation quadratique des systèmes LPV par retour d'état statique et retour de sortie dynamique.

II.2. Définitions préliminaires sur la stabilité

La stabilité est une propriété de base des systèmes dynamique. Avant de fournir des résultats clés sur la stabilité des systèmes LPV, il semble nécessaire de fournir plusieurs définitions générales sur la stabilité des systèmes dynamiques [55,93-99]. Comme indiqué dans la section,

nous essayons d'apporter une énonciation simple sur la stabilité de Lyapunov et la stabilité entrée-sortie qui ont été largement utilisées dans la commande [100,101].

II.2.1. Théorie de Lyapunov

La méthode de Lyapunov pour vérifier la stabilité asymptotique est la technique applicable aux systèmes dynamiques. Nous présentons ici un ensemble de définitions sur la stabilité (asymptotique, exponentielle, etc...) d'un système non linéaire variant dans le temps. L'"uniformité" est nécessaire pour caractériser les systèmes variants dans le temps dont le comportement a une certaine uniformité pour différentes valeurs du temps initial t_0 (référer aux [100,101] pour plus de détails).

Nous définissons un système non linéaire variant dans le temps:

$$\dot{x}(t) = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (II.1)$$

Par hypothèse, les conditions garantissant l'existence et l'unicité de solutions de la fonction $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ supposée localement Lipschitzienne dès lors que la dérivée partielle de f par rapport à x est continue et continue par morceaux par rapport à t .

Définition II.2.1.1 (Condition de Lipschitz)

La fonction f est localement Lipschitzienne par rapport à x si, $\forall K \subset \mathcal{D}$, $\exists L > 0 / \forall (x, y) \in K^2$, $\forall t \in [t_0, t_1]$ tel que

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq L\|x - y\| \quad (II.2)$$

Définition II.2.1.2 (Point d'équilibre)

Le système (II.1) possède le point d'équilibre x_e s'il vérifie

$$f(x_e, t) = 0, \quad \forall t \geq t_0 \quad (II.3)$$

Définition II.2.1.3 (Stabilité simple)

Le point d'équilibre x_e est simplement stable si, $\forall \epsilon > 0$, $\forall t_0 \geq 0$, $\exists \delta(\epsilon, t_0)$, tel que

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon, \forall t \geq t_0 \quad (II.4)$$

Définition II.2.1.4 (Stabilité uniforme)

Le point d'équilibre x_e est uniformément stable si, $\forall \epsilon > 0$, $\delta(\epsilon) > 0$ tel que

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon, \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (II.5)$$

Définition II.2.1.5 (Stabilité asymptotique)

Le point d'équilibre x_e est asymptotiquement stable si, $\forall t_0 \geq 0, \exists c > 0$ tel que

$$\|x(t_0) - x_e\| < c \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| \rightarrow x_e \quad (II.6)$$

Définition II.2.1.6 (Stabilité asymptotique uniforme)

Le point d'équilibre x_e est uniformément asymptotiquement stable si:

- la stabilité uniforme est vérifiée,
- la stabilité asymptotique est vérifiée.

On dit que la stabilité asymptotique uniforme est globale si les conditions de stabilité asymptotique uniforme sont vérifiées avec $c = +\infty$.

Définition II.2.1.7 (Stabilité exponentielle)

Le point d'équilibre x_e est exponentiellement stable si, $\forall t_0 \geq 0$, il existe deux réels positives α et λ tel que pour $x(t_0)$ suffisamment petit,

$$\|x(t) - x_e\| \leq \alpha \|x(t_0) - x_e\| e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall t \geq t_0 \quad (II.7)$$

Définition II.2.1.8 (Stabilité exponentielle uniforme)

- la stabilité asymptotique uniforme est vérifiée,
- la stabilité exponentielle est vérifiée.

On dit que la stabilité exponentielle uniforme est globale si les conditions de stabilité exponentielle uniforme sont vérifiées pour toute condition initiale $x(t_0)$.

Notez que la stabilité exponentielle implique une stabilité asymptotique uniforme mais que l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

On assume que le système (II.1) a au moins une solution $x(\cdot)$ sur \mathbb{R}_+ . On le suppose également que l'origine $x_0 = 0$ est un point d'équilibre pour ce système, c'est-à-dire,

$$f(0, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (II.8)$$

cette dernière notion est fondamentale dans la théorie de Lyapunov.

Notez que si l'équilibre n'est pas à l'origine, nous pouvons toujours redéfinir les coordonnées sur \mathbb{R}^n de telle manière que l'équilibre devient la nouvelle origine [100].

II.2.2. Méthode directe de Lyapunov

La seconde méthode de Lyapunov appelée aussi méthode directe [102] généralise la constatation que le comportement stable ou instable d'un système est relié à la caractéristique et à l'évolution de sa fonction d'énergie généralement de forme

$$V(x) = x^T P x \quad (II.9)$$

où $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ l'état du système et $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique définie positive.

Avantages:

- Étude de la stabilité par examen de l'énergie totale du système,
- Système linéaires et non linéaires,
- Ne nécessite pas la solution de l'équation d'état, ni la connaissance des pôles du système.

Candidat de Lyapunov

Il y a deux propriétés essentielles que la fonction d'énergie possède, à savoir la propriété d'être maximum ou minimum au point d'équilibre qui a tendance à être stable pour le minimum de la fonction d'énergie. C'est ce type de particularité que présente le candidat de Lyapunov.

Définition II.2.2.1 $V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie positive telle que

- $V(x) = 0 \quad x = 0$
- $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

Définition II.2.2.2 $V(x)$ définie positive est continue, est un candidat de Lyapunov.

Fonction de Lyapunov

Lors de l'évolution d'un système stable, la fonction d'énergie a tendance à diminuer ou d'être conservée. C'est la deuxième particularité de la fonction d'énergie avec l'exigence en plus que la dérivée du candidat de Lyapunov $\dot{V}(x)$ soit négative ou nulle.

La dérivée s'écrit

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}$$

La dérivée fait intervenir la dynamique du système mais aussi la dynamique de la fonction de Lyapunov.

Définition II.2.2.3 Une fonction de Lyapunov est un candidat de Lyapunov, à savoir une fonction continue $V(x)$ telle que

- $V(x) = 0 \quad x = 0$
- $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$
- $\dot{V}(x) = 0 \quad x = 0$
- $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0$

Théorème II.2.2.1

- Si une fonction de Lyapunov existe pour un système donné alors ce système est stable.
- Si $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ et $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0$, alors l'origine est stable au sens de Lyapunov.
- Si $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0$ alors l'origine est uniformément stable.
- Si $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$ alors l'origine est uniformément asymptotiquement stable.

II.2.3. Stabilité entrée-sortie

Intuitivement, la stabilité égale équilibre. C'est une qualité de ce qui est stable, de ce qui tend à conserver sa position d'équilibre. Cette définition de la stabilité est insuffisante pour les systèmes dynamiques en général, autrement dit, un système est stable si ses sorties d'énergie finie sont produites à partir de ses entrées d'énergie finie. Ce type de stabilité s'appuie sur le comportement du système dont la représentation classique suivante:

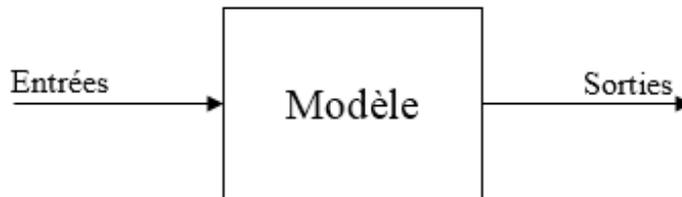


Fig. II.1 Modèle entrée/sortie

Théoriquement, la notion de stabilité entrée-sortie est apparue il y a une trentaine d'années [103-105] y compris une référence riche dans le domaine [106] sans oublier la définition synthétique exposée dans [94]. Nous énonçons brièvement les définitions de base de la stabilité entrée-sortie.

Considérons le système non linéaire suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \forall t \geq t_0 \quad (II. 10)$$

où f et g reposent sur les mêmes hypothèses que celles du paragraphe II.2.1 pour assurer l'existence et l'unicité des solutions.

Encore, on supposera en l'absence de sollicitations extérieures $u \equiv 0$ dans les conditions initiales $x_0 = 0$ les sorties du système $y(t)$ sont nulles, c'est-à-dire que

$$\forall t \geq t_0, f(0,0,t) = 0 \text{ et } g(0,0,t) = 0.$$

on notera que $H: \mathcal{L}_{qe}^m \rightarrow \mathcal{L}_{qe}^p$ un opérateur associé au système (II. 10), tel que

$$y = H(x) \quad (II. 11)$$

où \mathcal{L}_q^m et \mathcal{L}_q^p sont des espaces fonctionnels dont les signaux $u(t)$ et $y(t)$ appartiennent respectivement.

Pour donner une définition précise sur la stabilité entrée-sortie au sens des espaces \mathcal{L}_q il faut faire appel à l'opérateur de troncature noté simplement $(\cdot)_T$ (voir l'annexe II).

Définition II.2.3.1 (\mathcal{L}_q – stable) Le système (II. 10) est \mathcal{L}_q – stable si:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall u \in \mathcal{L}_q^m, H(u) \in \mathcal{L}_q^p \\ \exists(\gamma, \beta) / \forall u \in \mathcal{L}_q^m, \forall T > 0, \left\| (H(u))_T \right\|_q \leq \gamma \|u_T\|_q + \beta \end{array} \right. \quad (II. 12)$$

β un terme résiduel par hypothèse en l'absence de conditions initiales sur f et g qui devient nul. On s'intéresse à la plus petite valeur de γ que nous appellerons le gain \mathcal{L}_q de l'opérateur H .

Définition II.2.3.2 (\mathcal{L}_q – gain) Si H est \mathcal{L}_q – stable avec gain fini, alors le \mathcal{L}_q – gain de H est défini comme

$$\gamma = \inf\{\gamma: \exists \beta \geq 0\} \quad (II. 13)$$

telle que l'équation (II. 12) soit vérifiée.

II.3. Notions de stabilité pour système LTI et LPV

Il est commode, pour le lecteur, d'introduire plusieurs notions de stabilité des systèmes LPV. Puisque les systèmes LPV sont définis sur un continuum de systèmes, la stabilité peut prendre plusieurs formes à la différence des systèmes LTI. Cette section est consacrée à montrer la complexité de l'analyse de stabilité des systèmes LPV et introduit des notions de stabilité pour ce type de systèmes. Contrairement aux systèmes LTI, différents types de stabilité peuvent être définis pour les systèmes LPV. Les plus communs sont appelés stabilité quadratique, stabilité de Lyapunov et stabilité robuste. Mais, avant de les définir, il semble nécessaire d'adapter les définitions de stabilité de la section II.2.1. Notez, cependant, que puisque les systèmes LPV sont des systèmes

linéaires, alors toutes les propriétés de stabilité sont globales. Le terme global est donc implicitement compris dans les définitions ci-dessous.

Considérons maintenant des systèmes linéaires avec des paramètres variables dans le temps. De tels systèmes peuvent être représentés de manière suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad t \geq t_0 \quad (II.14)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $\rho \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^r$ est le vecteur des paramètres variables dans le temps à r dimension.

Définition II.3.1 (Stabilité simple) Le système (II.14) est simplement stable si, $\forall \epsilon > 0, \forall t_0 \geq 0, \forall \rho \in \mathcal{P}, \exists \delta(\epsilon, t_0)$ tel que

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t, \rho)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0 \quad (II.15)$$

Définition II.3.2 (Stabilité uniforme) Le système (II.14) est uniformément stable si, $\forall \epsilon > 0, \forall \rho \in \mathcal{P}, \exists \delta(\epsilon) > 0$ tel que

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t, \rho)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (II.16)$$

Définition II.3.3 (Stabilité asymptotique) Le système (II.14) est asymptotiquement stable si, $\forall t_0 \geq 0, \forall \rho \in \mathcal{P}, \exists c > 0$ tel que

$$\|x(t_0)\| < c \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, \rho)\| \rightarrow 0 \quad (II.17)$$

Définition II.3.4 (Stabilité exponentielle) Le système (II.14) est exponentiellement stable si, $\forall t_0 \geq 0, \forall \rho \in \mathcal{P}$, il existe deux réels positives α et λ tel que pour $x(t_0)$ suffisamment petit,

$$\|x(t, \rho)\| \leq \alpha \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall t \geq t_0 \quad (II.18)$$

II.3.1. Stabilité quadratique

Une conséquence du résultat de la complexité est que l'on doit se contenter de méthodes non définitives ou d'algorithmes inefficaces pour évaluer la stabilité. La condition suffisante suivante est connue sous le nom de stabilité quadratique [107]. Par définition, la stabilité quadratique est la stabilité au sens de Lyapunov avec une fonction d'énergie quadratique de la forme (II.9) où la matrice de Lyapunov P est constante et unique.

II.3.1.1. Cas de systèmes LTI

Chaque fois que les systèmes LTI sont considérés, les choses deviennent beaucoup plus agréables puisque les conditions de Lyapunov nécessaires pour la stabilité peuvent être facilement énoncées, comme le montre le résultat suivant.

Considérons le système LTI suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad t \geq t_0 \quad (II.19)$$

Théorème II.3.1.1 Le point d'équilibre $x_e = 0$ du (II.19) est quadratiquement stable si et seulement si, pour toute matrice $Q = Q^T > 0$, il existe une matrice $P = P^T > 0$ vérifiant l'équation de Lyapunov

$$A^T P + P A + Q = 0 \quad (II.20)$$

On remarque que pour les systèmes LTI, la stabilité asymptotique est équivalente à la stabilité quadratique.

Exemple II.3.1.1

Considérons la matrice suivante:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si possible de calculer P par l'équation (II.20) avec

$$Q = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

comme le système de matrice d'état A est stable ($\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1$) et que Q est défini positive (a des valeurs propres positives), il existe une matrice P symétrique définie positive pour satisfaire l'équation (II.19). Cherchant P de la forme

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

en utilisant le fait que $P_{12} = P_{21}$, il faut résoudre un ensemble d'équations linéaires pour obtenir la solution pour P

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

II.3.1.2. Stabilité quadratique des systèmes LPV

Contrairement au cas du système LTI, lorsque la stabilité est garantie par certaines propriétés d'affectation des pôles de la matrice d'état A , dans le cas du système LPV, le problème de la stabilité est plus important.

Définition II.3.1.2 [108-110] Le système (II.14) est quadratiquement stable dans \mathcal{P} si et seulement s'il existe une matrice définie positive $P \in R^{n \times n}$ telle que pour tout $\rho \in \mathcal{P}$

$$A(\rho)^T P + P A(\rho) < 0 \quad (II.21)$$

Théorème II.3.1.2 Supposons que le système (II.14) est quadratiquement stable. Alors pour tout $p(\cdot) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}_+, \mathcal{P})$ le système LPV

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, t \geq t_0 \quad (II.22)$$

est exponentiellement stable.

Exemple II.3.1.2

Considérons le système LPV suivant:

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ -4/\rho & -3 \end{bmatrix}, \rho = [-1, -1/2] \cup [1/2, 1]$$

Le polynôme caractéristique du système de matrice d'état A est donné par

$$\det(sI - A(\rho)) = s^2 + 2s + 1$$

montre qu'il est asymptotiquement stable pour tout ρ . Nous montrerons maintenant que ce système n'est pas quadratiquement stable. Pour ce faire, supposons que le système est quadratiquement stable. Ensuite, il doit exister une matrice

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > 0$$

telle que (II.21) soit satisfaite.

$$M_q(\rho) = A(\rho)^T P + P A(\rho) = \begin{bmatrix} 2P_{11} - \frac{8P_{12}}{\rho} & P_{11}\rho - 2P_{12} - \frac{4P_{22}}{\rho} \\ P_{11}\rho - 2P_{12} - \frac{4P_{22}}{\rho} & 2P_{12}\rho - 6P_{22} \end{bmatrix} < 0$$

vérifiée pour tout $\rho = [-1, -1/2] \cup [1/2, 1]$. Par conséquent, pour tout $\rho_0 \in [1/2, 1]$, nous avons à la fois $M_q(-\rho_0) < 0$ et $M_q(\rho_0) < 0$, et donc $M_q(-\rho_0) + M_q(\rho_0) < 0$. Le calcul de cette somme donne explicitement

$$M_q(-\rho_0) + M_q(\rho_0) = [A(-\rho_0) + A(\rho_0)]^T P + P[A(-\rho_0) + A(\rho_0)] = \begin{bmatrix} 4P_{11} & -4P_{12} \\ -4P_{12} & -12P_{22} \end{bmatrix}$$

qui ne peut pas être définie négative en raison du terme positif $4P_{11}$. Par conséquent, le système n'est pas quadratiquement stable.

II.3.1.3. Cas de systèmes LPV polytopiques

Cette section est consacrée à l'analyse de stabilité des systèmes LPV polytopiques dont la stabilité quadratique est discutée. Dans ce qui suit, le système LPV polytopique suivant est considéré

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad t \geq t_0 \quad (II.23)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i$, $\alpha \in \mathcal{P}$

Une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité quadratique des systèmes LPV polytopiques est donnée ci-dessous:

Théorème II.3.1.3 Le système (II.23) est quadratiquement stable dans le sens de définition II.3.1.2 si seulement s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que

$$A_i^T P + P A_i < 0, i = 1, \dots, N \quad (II.24)$$

Preuve: utilisant la fonction de Lyapunov de la définition II.3.1.2, nous obtenons la condition de stabilité

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i [A_i^T P + P A_i] < 0 \quad (II.25)$$

II.3.2. Stabilité de Lyapunov

Contrairement aux systèmes LTI, en général, la stabilité des systèmes ne peut pas être déduite en examinant les solutions explicites car elles sont, la plupart du temps, difficiles, voir impossibles à calculer. Dans le cas des systèmes LPV, les solutions sont même infiniment nombreuses, c'est-à-dire une solution par trajectoire de paramètre. De plus, le spectre de la matrice $A(\rho(t))$ seul ne peut généralement pas être utilisé pour conclure sur la stabilité puisque les variations de temps

doivent être prises en compte. La théorie de Lyapunov nous permet de surmonter cette difficulté en caractérisant implicitement la stabilité à partir de l'expression du système dynamique, c'est-à-dire la matrice $A(\rho(t))$, à travers l'utilisation d'une fonction de Lyapunov. Nous résumons donc ici les notions de stabilité et de méthode de Lyapunov ainsi que la vérification de la stabilité des systèmes LPV.

II.3.2.1. Critère de Lyapunov pour systèmes LTI

Dans cette section nous considérons le comportement qualitatif des solutions du système d'équations différentielles linéaires invariant dans le temps (II. 19).

Théorème II.3.2.1 La matrice d'état A du système LTI (II. 19) est une matrice de stabilité, c'est-à-dire $Re\{\lambda_i(A)\} < 0$ si et seulement si pour toute matrice symétrique définie positive Q il existe une matrice symétrique définie positive P tel que,

$$A^T P + P A = -Q \quad (II. 26)$$

Notez que Q peut être semi-définie positive si le système est observable.

$A^T P + P A$ est négatif si et seulement si Q est positif. Pour les systèmes observables, nous pouvons choisir $Q = C^T C$.

Inversement en montrant que si A est une matrice de stabilité alors

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt \quad (II. 27)$$

où Q est la matrice symétrique définie positive donnée, satisfera $A^T P + P A = -Q$

II.3.2.2. Critère de Lyapunov pour systèmes LPV

Le théorème de Lyapunov et la fonction de Lyapunov, dont l'existence est la condition du théorème, jouent un rôle central dans l'analyse de la stabilité asymptotique des systèmes non linéaires. C'est le plus répandu et presque la seule technique généralement applicable pour ce cas. Par conséquent, la projection du théorème sur les systèmes LPV est une méthode fondamentale pour l'analyse de stabilité [48,111].

Les modèles de système LPV ont été introduits dans la section I.1.1.3 du premier chapitre en tant qu'extensions modérées des systèmes LTI avec des paramètres variables. La version tronquée d'une équation d'état LPV utilisée pour l'analyse de stabilité asymptotique est donnée par l'équation

(II. 14) où la matrice d'état $A(\rho)$ est en fonction d'un vecteur de paramètres réel (éventuellement variable dans le temps) $\rho = [\rho_1, \dots, \rho_r]$ d'un domaine délimité $\rho \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^r$.

Si nous considérons les systèmes LPV comme étant des systèmes linéaires, nous pouvons nous attendre à ce qu'ils soient quadratiquement stabilisables avec une fonction de Lyapunov quadratique appropriée (II. 9).

II.4. Stabilité robuste des systèmes LPV

Pour palier certaines des déficiences des fonctions de Lyapunov indépendantes des paramètres, une idée naturelle est de rendre la fonction de Lyapunov dépendant de paramètres. Une alternative intéressante est l'utilisation de ce type de fonction impliquant une dépendance explicite à la fois sur le temps et sur les paramètres. Vraisemblablement, les bornes de variations sur la vitesse des paramètres sont introduites dans ces fonctions [112-114]. Dans la littérature de l'utilisation récente de ces fonctions, les premières propositions sont abordées dans [8,113]. Plusieurs d'autres contributions qu'on peut citer par exemple [115,116].

La fonction dépendant des paramètres recherchée dans cette approche est quadratique par rapport à l'état x :

$$V(x, \rho) = x^T P(\rho) x \quad (\text{II. 28})$$

Théorème II.3.2.2 Le système (II. 14) est quadratiquement stable s'il existe une matrice symétrique définie positive $P(\rho)$ pour tout $\rho \in \mathcal{P}$ telle que

$$A(\rho)^T P(\rho) + P(\rho) A(\rho) + \dot{\rho} \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} < 0 \quad (\text{II. 29})$$

Cela nous amène au concept de stabilité robuste. Contrairement à la stabilité quadratique, cette notion de stabilité fait la distinction entre les paramètres dérivables constants et variables dans le temps. Dans le cas de paramètres variants dans le temps, une stabilité robuste tient en effet compte des informations sur le taux de variation des paramètres. D'après les définitions ci-dessus, il est clair que la stabilité quadratique implique une stabilité robuste puisque la stabilité quadratique est un cas particulier de stabilité robuste où $P(\rho) = P$. La réciproque ne tient pas en général car il est facile de construire des systèmes qui sont robustes, mais non quadratiquement stables.

II.4.1. Cas de systèmes LPV polytopiques

Le théorème II.3.2.2 peut s'étendre pour le cas d'un système polytopique (II. 14) où $A(\rho)$ est donné par (I. 9) avec α_i vérifiant (I. 11). La fonction de Lyapunov dépendant de paramètres $P(\rho)$ se réécrit sous forme

$$P(\rho) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i \quad (II. 30)$$

où P_i est la matrice symétrique définie positive du sommet d'indice i .

Sa dérivée temporelle est donnée par

$$\dot{P}(\rho) = \sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i P_i, \quad \sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i = 0 \quad (II. 31)$$

Proposition II.4.1.1 Le système (II. 14) est robustement stable sous les écritures (II. 30) et (II. 31) si la condition suivante est vérifiée

$$\sum_{i=1}^N A_i^T \alpha_i \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i + \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i + \sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i P_i < 0 \quad (II. 32)$$

II.4.2. Cas des systèmes LPV sous forme LFT

La stabilité des systèmes LFT reste un sujet de recherche actif. En effet, ces systèmes LFT fournissent une manière unifiée de modéliser les systèmes LPV avec tout type de dépendance aux paramètres: affine, polynomial et rationnel. En réécrivant les systèmes LPV sous la forme LFT, le système initial est divisé en deux sous-systèmes interconnectés: un système constant et un autre variable dans le temps.

Considérons dans cette section les systèmes LPV sous forme LFT donné par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \\ w(t) = \Delta(\rho) z(t) \end{cases} \quad (II. 33)$$

La structure de la matrice de paramètres $\Delta(\rho)$ dépend des méthodes d'analyse de stabilité. Parmi ces méthodes, la passivité et le théorème du petit gain. Il est important de noter que ces outils ont été initialement développés pour l'analyse robuste de la stabilité des systèmes linéaires, En raison de la forme LFT, ces outils s'appliquent naturellement au système LPV.

II.4.2.1. Passivité

La passivité est un résultat très fort pour les systèmes LPV. Il ne peut être utilisé qu'avec le positif $\Delta(\rho)$ et le système LTI doit satisfaire une inégalité très contraignante. Soit $F(s) = C_2(sI - A)^{-1}B_2 + D_{22}$ la fonction de transfert de w à z correspondant au système (II.33) et supposons que $\Delta(\rho)$ soit diagonale avec des composantes non négatives bornées (voir Fig.II.2). Nous avons la définition suivante [55,98,117].

Définition II.4.2.1 $F(s)$ est passive (strictement passive) si seulement si

$$F(j\omega) + F(j\omega)^* \geq 0 (> 0), \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (II.34)$$

Cela signifie que, dans le cas de SISO, le tracé de Nyquist de $F(j\omega)$ doit se situer dans le demi-plan complexe droit (ce qui est très contraignant pour un système d'ordre supérieur à 1). Nous avons besoin du résultat suivant.

Proposition II.4.2.1 Si un système strictement passif est interconnecté avec un système passif, le système résultant est passif.

Tout système passif est asymptotiquement stable, la stabilité de l'interconnexion est montrée. Donc le Système (II.33) est asymptotiquement stable si $\Delta(\rho)$ est passive et $F(s)$ strictement passif. $\Delta(\rho)$ est passive car elle est diagonale et a des éléments non négatifs et $F(s)$ est strictement passif si l'inégalité stricte (II.34) est vérifiée.

Cependant, si la fonction de transfert est plus complexe (systèmes MIMO), une analyse analytique est beaucoup plus difficile. Heureusement, un théorème a été fourni [104], permettant de tester facilement les systèmes MIMO.

Théorème II.4.2.1 Un système (A, B_2, C_2, D_{22}) est strictement passif si seulement s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B_2 - C_2^T \\ B_2^T P - C_2 & -(D_{22} + D_{22}^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (II.35)$$

est faisable.

L'origine de (II.35) est détaillé dans l'annexe II.

Le fait que très peu de systèmes soient (strictement) passifs implique que l'analyse de stabilité des systèmes LPV sous forme LFT soit très restrictive et n'est pas considérée dans la littérature. Cependant, la passivité est intéressante dans de nombreux problèmes applicatifs, par exemple

téléopération [118-120], le contrôle des systèmes Hamiltoniens à ports [121] et ainsi de suite [98,122].

II.4.2.2. Théorème du petit gain

Le théorème des petits gains est une amélioration de l'analyse de stabilité basée sur la passivité des interconnexions car il prend en compte les variations d'énergie entre les entrées et les sorties des systèmes dynamiques impliqués dans l'interconnexion. Une analyse énergétique simple des signaux de boucle suggère que la stabilité asymptotique de l'interconnexion est équivalente à la finitude de l'énergie des signaux de boucle impliqués dans l'interconnexion. Le problème reste donc de déterminer si l'énergie de ces signaux est finie ou non. Permettant d'analyser la robustesse des systèmes linéaires, la stabilité robuste d'un système LPV est garantie par le théorème du petit gain qui a donné une condition suffisante [56].

Théorème II.4.2.2 Le système (II. 33) est asymptotiquement stable si

$$\frac{\|\Delta(\rho)Fw\|_{\mathcal{L}_2}}{\|w\|_{\mathcal{L}_2}} < 1 \quad (\text{II. 36})$$

où d'après la figure Fig.II.2, $\Delta(\rho)$ est une matrice dépendant des paramètres tels que $\Delta^T(\rho)\Delta(\rho) \leq I$ et F est l'opérateur LTI de transfert de w à z du système (II. 33).
où \mathcal{L}_2 est un signal d'énergie bornée (voir l'annexe III).

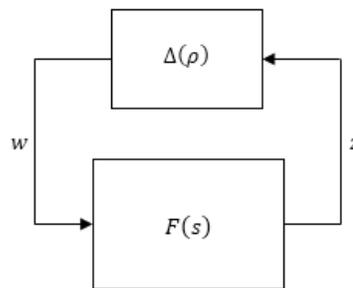


Fig.II.2 Schéma d'interconnexion

II.5. Performance robuste des systèmes LPV

L'objectif le plus important du système commandé stable au départ est d'atteindre certaines performances. On peut citer par exemple la performance d'un système de suivi pourrait être mesurée par la taille du signal d'erreur de suivi, des performances liées au rejet de perturbations, à des critères énergétiques, à des exigences temporelles en terme de temps de réponse ou de temps

de montée... La mesure de performance dans le cadre des systèmes LTI se fait par la borne sur la norme \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ d'une fonction de transfert ou à la localisation de ses pôles.

Contrairement aux systèmes LTI, on peut pas parler de fonction de transfert ni de norme \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ ou encore de pôles pour les systèmes LPV. Pour se faire, cela nécessite certaines extensions.

II.5.1. Extension de la norme \mathcal{H}_2

Définition II.5.1.1 L'extension de la norme \mathcal{H}_2 est définie comme étant la plus grande énergie atteignable par la réponse impulsionnelle du système LPV lorsque $\rho \in \mathcal{P}$ décrit l'ensemble des trajectoires.

$$\gamma_{\mathcal{H}_2} = \sup_{\rho(t) \in \mathcal{P}} \int_0^\infty y(t)^T y(t) dt \quad (II.37)$$

Si on considère le système (I.4) strictement propre ($D(\rho) = 0, \forall \rho \in \mathcal{P}$) à m entrées:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) \\ y(t) = C(\rho)x(t) \end{cases}$$

avec $B(\rho) = [b_1(\rho), \dots, b_m(\rho)]$

on aura m sous-systèmes auxquels on associe pour chacun une entrée non nulle produisant le même effet impulsionnel sur la sortie:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A(\rho)x_i(t) + b_i(\rho)u(t) \\ y_i(t) = C(\rho)x_i(t) \\ x_i(0) = b_i(\rho_0) \end{cases}$$

dont au cas des systèmes LPV l'extension de la norme \mathcal{H}_2 est donnée par la relation suivante:

$$\gamma_{\mathcal{H}_2} = \sup_{\rho(t) \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^m \int_0^\infty y_i(t)^T y_i(t) dt \quad (II.38)$$

II.5.2. Extension de la norme \mathcal{H}_∞

Dans le cas des systèmes LPV, on parle plus précisément de la norme \mathcal{L}_2 -induite. En effet, la norme induite \mathcal{L}_2 -induite est l'extension de la norme \mathcal{H}_∞ au cas des systèmes LPV mesurant l'amplification maximale de l'énergie du signal d'entrée sur toutes les trajectoires paramétriques admissibles.

Définition II.5.2.1 La norme \mathcal{L}_2 -induite d'un système (I.4) est bornée par γ pour toute trajectoire $\rho \in \mathcal{P}$ si

$$\forall u \in \mathcal{L}_2, \forall T \geq 0, \int_0^T y(t)^T y(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^T u(t)^T u(t) dt \quad (II.39)$$

Par conséquence, cette définition coïncide avec celle de la norme \mathcal{H}_∞ classique pour les systèmes LTI. Autrement dit, pour cette norme il n'existe pas d'interprétation dans le domaine fréquentiel compte tenu que l'on ne peut pas définir la notion de pôles pour les systèmes LPV. La plus petite valeur de γ telle que la relation (II.39) soit vérifiée:

$$\gamma_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{u \in \mathcal{L}_2, \rho(t) \in \mathcal{P}} \frac{\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt}{\int_0^\infty u(t)^T u(t) dt} \quad (II.40)$$

II.5.3. Notion de pôles

Quand on parle de systèmes LPV, la notion de pôles ne trouve plus sa place pour la raison qu'il n'existe pas de fonction de transfert dont la notion repose. Cependant, si pour toute valeur figée du vecteur de paramètres on pourra connaître la localisation de ces pôles et d'exploiter les outils d'analyse de performance robuste.

II.5.4 Performance quadratique

Dans la section II.3.1.2 on a parlé sur la stabilité quadratique des systèmes LPV (I.4). Cette approche assimilée à une stabilité robuste à des paramètres variant moins vite dans le temps a fait l'objet de nombreuses publications [123,124]. Néanmoins, reposons nous sur la proposition d'arranger l'association entre la stabilité quadratique et les différentes performances citées ci-dessus avec les théorèmes suivants.

II.5.4.1. Performance quadratique \mathcal{H}_2 [90]

Théorème II.5.4.1 Le système (I.4) propre ($D(\rho) = 0, \forall \rho \in \mathcal{P}$) pour un réel positif γ et la contrainte de performance:

$$\gamma_{\mathcal{H}_2} < \gamma$$

est quadratiquement stable sur \mathcal{P} s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A(\rho)^T P + P A(\rho) & C(\rho)^T \\ C(\rho) & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} X & B(\rho)^T P \\ P B(\rho) & P \end{bmatrix} > 0 \\ tr(X) < \gamma \end{cases}, \forall \rho \in \mathcal{P} \quad (II.41)$$

où la matrice $X(\rho)$ dépendant des paramètres ρ est supposée constante et γ correspond maintenant à une borne supérieure de la performance quadratique \mathcal{H}_2 .

II.5.4.2. Performance quadratique \mathcal{H}_∞ [125]

Théorème II.5.4.2 Le système (I.4) propre ($D(\rho) = 0, \forall \rho \in \mathcal{P}$) pour un réel positif γ et la contrainte de performance:

$$\gamma_{\mathcal{H}_\infty} < \gamma$$

est quadratiquement stable sur \mathcal{P} s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que

$$\begin{bmatrix} A(\rho)^T P + P A(\rho) & P B(\rho) & C(\rho)^T \\ B(\rho)^T P & -\gamma I & D(\rho)^T \\ C(\rho) & D(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \forall \rho \in \mathcal{P} \quad (II.42)$$

II.5.4.3. Performance par localisation des pôles [126]

Théorème II.5.4.3: Pour toutes valeurs figées des paramètres du système (I.4) dont les pôles des systèmes LTI associés restent dans le disque de centre c et de rayon r est quadratiquement stable sur \mathcal{P} s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que

$$\begin{bmatrix} -rP & P(A(\rho) - cI) \\ (A(\rho)^T - cI)P & -rP \end{bmatrix} < 0, \forall \rho \in \mathcal{P} \quad (II.43)$$

II.5.4.4. Performance quadratique des systèmes LPV polytopiques

Considérons le système (I.4) décrit par (I.9) – (I.10) – (I.11).

Théorème II.5.4.4.1 (Performance quadratique \mathcal{H}_2)

Le système (I.4) satisfait aux conditions du théorème de performance quadratique \mathcal{H}_2 si seulement si:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i & C_i^T \\ C_i & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} X & B_i^T P \\ P B_i & P \end{bmatrix} > 0 \\ tr(X) < \gamma \end{cases}, \exists P, X > 0, \forall i = 1, \dots, N \quad (II.44)$$

Théorème II.5.4.4.2 (Performance quadratique \mathcal{H}_∞)

Le système (I.4) satisfait aux conditions du théorème de performance quadratique \mathcal{H}_∞ si seulement si:

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i & P B_i & C_i^T \\ B_i^T P & -\gamma I & D_i^T \\ C_i & D_i & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \exists P > 0, \forall i = 1, \dots, N \quad (II.45)$$

Théorème II.5.4.4.3 (Performance par localisation des pôles)

Le système (I.4) satisfait aux conditions du théorème de performance quadratique par localisation des pôles dans un disque si seulement si:

$$\begin{bmatrix} -rP & P(A_i - cI) \\ (A_i^T - cI)P & -rP \end{bmatrix} < 0 \quad (II.46)$$

Dans le cadre du modèle polytopique et dans chacun des théorèmes apparaissent un nombre fini d'inégalités linéaires par rapport à P et éventuellement X .

II.5.4.5. Performance quadratique des systèmes LPV sous forme LFT

Considérons le système (I.4) décrit par (I.16) – (I.17).

Théorème II.5.4.5.1 (Performance quadratique \mathcal{H}_2) [90]

Le système (I.4) tel que $D_{12} = 0$ et $D_{22} = 0$ vérifie les conditions de performance quadratique \mathcal{H}_2 s'il existe deux matrices $P = P^T > 0$ et $L > 0$:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A^T P + P A & P B_1 & C_1^T & C_2^T \\ B_1^T P & -L & D_{11}^T & D_{21}^T \\ C_1 & D_{11} & -L^{-1} & 0 \\ C_2 & D_{21} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \text{tr}(B_2^T P B_2) < \gamma \end{cases} \quad (II.47)$$

Théorème II.5.4.5.2 (Performance quadratique \mathcal{H}_∞) [90]

Le système (I.4) vérifie les conditions de performance quadratique \mathcal{H}_∞ s'il existe deux matrices $P = P^T > 0$ et $L > 0$:

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B_1 & P B_2 & C_1^T & C_2^T \\ B_1^T P & -L & 0 & D_{11}^T & D_{21}^T \\ B_2^T P & 0 & -\gamma I & D_{12}^T & D_{22}^T \\ C_1 & D_{11} & D_{12} & -L^{-1} & 0 \\ C_2 & D_{21} & D_{22} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (II.48)$$

Théorème II.5.4.5.3 (Performance quadratique par localisation des pôles) [90]

Le système (I.4) vérifie les conditions de performance quadratique par localisation des pôles dans un disque ouvert de centre c si seulement s'il existe deux matrices $P = P^T > 0$ et $L > 0$:

$$\begin{bmatrix} (A - cI)^T P (A - cI) & (A - cI)^T P B_2 & C_1^T \\ B_2^T P (A - cI) & -L & D_{22}^T \\ C_1 & D_{22} & -L^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (II.49)$$

Comme pour le cas du modèle polytopique, l'application des théorèmes ci-dessus sur le plan numérique pour le modèle LFT s'agit en effet de résoudre une seule inégalité par rapport aux variables P et L .

II.6. Synthèse de correcteur LPV par approche quadratique

Dans cette section, nous considérons un système LPV sous la forme.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) \\ y(t) = C(\rho)x(t) \\ \forall t \geq 0, \rho = [\rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_r]^T \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^r \end{cases} \quad (II.50)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$, ρ est le vecteur des paramètres variables dans le temps à r dimension dans l'hyper-cube \mathcal{P} défini par

$$\mathcal{P} := [\underline{\rho}_1, \overline{\rho}_1] \times [\underline{\rho}_2, \overline{\rho}_2] \times \dots \times [\underline{\rho}_r, \overline{\rho}_r] \quad (II.51)$$

et $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ et $CA(\cdot)$ sont des matrices de dimensions appropriées. Notons que, sans perte de généralité, on suppose que le système est strictement propre ($D(\rho) = 0, \forall \rho \in \mathcal{P}$); effectivement les techniques que nous présenterons plus tard peuvent être facilement modifiées (cela revient à un changement de variable dans les matrices du correcteur) afin de reproduire le cas où il existe une matrice de transition non nulle.

Notez que les systèmes sous la forme (II.50), soumis à des paramètres variant dans le temps, sont également connus dans la littérature de commande des systèmes LPV [2,10,127-129]. L'objectif de cette section est de discuter de la stabilisation du système (II.50) sous diverses hypothèses sur le comportement temporel des paramètres.

II.6.1. Stabilisation quadratique par retour d'état statique

Dans cette section, nous supposons que tout l'état du système (II.50) est disponible pour le retour, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) \\ y(t) = x(t) \\ \forall t \geq 0, \rho = [\rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_r]^T \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^r \end{cases} \quad (II.52)$$

La définition suivante introduit le concept de stabilisation quadratique par retour d'état.

Définition II.6.1.1 Le système (II. 52) est dit stabilisable quadratiquement via la commande par retour d'état statique si et seulement s'il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que le système en boucle fermée, obtenu à partir de (II. 52) et $u = Kx$,

$$\dot{x}(t) = (A(\rho) + B(\rho)K)x(t) \quad (II. 53)$$

est quadratiquement stable.

D'après la définition II.3.1.2, il s'ensuit que le système (II. 52) est quadratiquement stable via une commande linéaire si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive P et une matrice K telle que

$$(A(\rho) + B(\rho)K)P + P(A(\rho) + B(\rho)K)^T < 0, \forall \rho \in \mathcal{P} \quad (II. 54)$$

comme indiqué dans [124,130],

$$V = KP \quad (II. 55)$$

nous obtenons le résultat suivant.

Théorème II.6.1.1 Le système (II. 52) est quadratiquement stable via une commande linéaire si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive P et une matrice V telle que

$$A(\rho)P + PA(\rho)^T + B(\rho)V + V^T B(\rho)^T < 0 \quad (II. 56)$$

Dans ce cas, un correcteur de retour d'état linéaire qui stabilise le système de manière quadratique (II. 52) est donné par $u = Kx$ avec $K = VP^{-1}$.

Afin de transformer l'inégalité (II. 56) en un nombre fini des LMI, supposons ce qui suit.

II.6.2. Stabilisation quadratique par retour de sortie dynamique

Dans cette section, nous considérons le cas général dans lequel l'état n'est pas complètement disponible pour le retour. La définition suivante généralise la définition II.6.1.1 au cas de retour de sortie dynamique.

Afin d'obtenir des résultats opérationnels, la commande est autorisée à dépendre des paramètres; cela implique que le vecteur de paramètres $\rho(\cdot)$, bien qu'incertain a priori, doit être mesurable en ligne. Pour la même raison, les correcteurs d'ordre supérieur ou égal à l'ordre du système sont pris en compte. Par souci de simplicité et sans perte de généralité, nous nous concentrons sur des correcteurs du même ordre que le système.

Définition II.6.2.1 Le système (II. 50) est stabilisable quadratiquement via la commande par retour de sortie dynamique si et seulement s'il existe un correcteur dynamique de la forme (I. 29) où $x_k(t) \in \mathbb{R}^n$, et $A_k(\cdot)$, $B_k(\cdot)$, $C_k(\cdot)$, $D_k(\cdot)$ sont des matrices telles que le système en boucle fermée obtenu par la connexion du système (II. 50) avec le correcteur (I. 29) est quadratiquement stable.

Pour prouver le résultat principal de cette section, considérons le lemme suivant dont la démonstration est détaillée dans l'annexe II.

Lemme II.6.2.1 [128] Étant donné les matrices symétriques $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, les relations suivantes sont équivalentes.

- Il existe des matrices symétriques $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices non singulières $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que

$$P := \begin{bmatrix} S & M \\ M^T & T \end{bmatrix} > 0, P^{-1} = \begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & Z \end{bmatrix} \quad (\text{II. 57})$$

- $\begin{bmatrix} P & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0$ (II. 58)

Nous avons maintenant que le système (II. 50) est quadratiquement stable via une commande linéaire par retour de sortie dynamique dépendant de paramètre si et seulement s'il existe un correcteur sous la forme (I. 29) et une matrice positive $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ telle que

$$A_{BF}(\rho)^T P + P A_{BF}(\rho) < 0, \forall \rho \in \mathcal{P} \quad (\text{II. 59})$$

où

$$A_{BF}(\rho) = \begin{bmatrix} A(\rho) + B(\rho)D_k(\rho)C(\rho) & B(\rho)C_k(\rho) \\ B_k(\rho)C(\rho) & A_k(\rho) \end{bmatrix} \quad (\text{II. 60})$$

En utilisant le lemme II.6.2.1 nous obtenons

$$\begin{bmatrix} A_{11}(\rho) & A_{12}(\rho) \\ A_{12}(\rho)^T & A_{22}(\rho) \end{bmatrix} < 0, \forall \rho \in \mathcal{P} \quad (\text{II. 61})$$

avec

$$A_{11}(\rho) = A(\rho)P + PA(\rho)^T + B(\rho)\hat{C}_k(\rho) + \hat{C}_k(\rho)^T B(\rho)^T$$

$$A_{12}(\rho) = A(\rho) + \hat{A}_k(\rho)^T + B(\rho)D_k(\rho)C(\rho)$$

$$A_{22}(\rho) = SA(\rho) + A(\rho)^T S + \hat{B}_k(\rho)C(\rho) + C(\rho)^T \hat{B}_k(\rho)^T$$

où

$$\begin{aligned}\hat{A}_k(\rho) &= MA_k(\rho)E^T + SB(\rho)C_k(\rho)E^T + MB_k(\rho)C(\rho)P \\ &\quad + S(A(\rho) + B(\rho)D_k(\rho)C(\rho))P\end{aligned}\quad (II.62a)$$

$$\hat{B}_k(\rho) = MB_k(\rho)^T + SB(\rho)D_k(\rho) \quad (II.62b)$$

$$\hat{C}_k(\rho) = C_k(\rho)E^T + D_k(\rho)C(\rho)P \quad (II.62c)$$

De la discussion ci-dessus et du lemme II.6.2.1 il s'ensuit que la stabilité quadratique du système (II.50) est équivalente à l'existence de matrices définies positives S et P et de matrices $\hat{A}_k(\rho)$, $\hat{B}_k(\rho)$, $\hat{C}_k(\rho)$ et $D_k(\rho)$ telles que (II.61) et (II.62) soient vérifiées.

Étant donné Q , S , $\hat{A}_k(\rho)$, $\hat{B}_k(\rho)$, $\hat{C}_k(\rho)$ et $D_k(\rho)$ satisfaisant (II.58) et (II.61), par inversion de (II.62a) – (II.62c) nous pouvons récupérer les matrices du correcteur. En effet, soit M et E des matrices non singulières satisfaisant $ME^T = I - SP$; nous avons

$$\begin{aligned}A_k(\rho) &= M^{-1}(\hat{A}_k(\rho) - SB(\rho)C_k(\rho)E^T - MB_k(\rho)C(\rho)P \\ &\quad - S(A(\rho) + B(\rho)D_k(\rho)C(\rho))P)E^{-T}\end{aligned}\quad (II.63a)$$

$$B_k(\rho) = M^{-1}(\hat{B}_k(\rho) - SB(\rho)D_k(\rho)) \quad (II.63b)$$

$$C_k(\rho) = (\hat{C}_k(\rho) - D_k(\rho)C(\rho)P)E^{-T} \quad (II.63c)$$

Notez que (II.63b) et (II.63c) doivent être résolus avant (II.63a).

Il est facile de reconnaître que, en ce qui concerne la condition abstraite de la stabilité quadratique, on peut se débarrasser de (II.58); cependant la satisfaction de cette dernière est nécessaire pour reconstruire le correcteur.

II.7. Conclusion

Sur la base des notions de stabilité et des outils d'analyse développés pour les systèmes LTI, les concepts de base pour analyser la stabilité des systèmes LPV sont décrits dans ce chapitre. Outre les techniques basées sur des modèles linéarisés et adaptées à l'étude de la stabilité à proximité d'un point d'équilibre, la méthode de Lyapunov en tant qu'outil principal d'analyse de la stabilité est présentée ici. Aussi nous retiendrons sur l'ensemble des résultats précédemment obtenus, la stabilisation quadratique, la passivité et le théorème du petit gain sont décrits.

Des techniques d'analyse de robustesse en stabilité et en performance pour chaque type de systèmes LPV sont présentées. Il est montré que les LMI jouent un rôle crucial dans l'analyse des systèmes LPV. En effet, ils offrent un moyen efficace et simple de gérer la stabilité et les performances des systèmes LPV ainsi que des systèmes LTI. Cependant, en raison du type de

système LPV, les LMI varient également en fonction des paramètres et sont donc plus difficiles à vérifier. Il a été montré que dans le cadre polytopique cet ensemble infini de LMI peut être caractérisé de manière équivalente par un ensemble fini en considérant les LMI aux sommets du polytope seulement. C'est une propriété puissante qui rend l'approche polytopique largement utilisée dans la littérature. En revanche par rapport aux systèmes LFT, il s'agit de résoudre une seule LMI.

Chapitre III

THÈSE DOCTORAT

COMMANDE ROBUSTE DES SYSTÈMES LPV

COMMANDE LINÉAIRE À PARAMÈTRES VARIANTS D'UN ROBOT

Chapitre III: Commande robuste des systèmes LPV

III.1. Introduction

La synthèse de commande LPV est une approche de conception de correcteur basée sur LPV ou LPV/LFT qui fournit des correcteurs dépendants des paramètres avec a priori des propriétés de stabilité et de performance garanties. Les informations en temps réel disponibles sur la variation des paramètres sont utilisées dans la méthode de synthèse de la commande. Ainsi, contrairement aux méthodes classiques de gain scheduling, la nature variable dans le temps de la dynamique LPV correspondante est incorporée dans la structure de la commande LPV. L'un des principaux avantages de la synthèse de commande LPV est qu'il existe une base théorique solide garantissant a priori la stabilité et la performance pour tous les paramètres variables dans le temps avec un taux de variation correspondants. De plus, le correcteur correspondant est global par rapport à l'ensemble des paramètres, tant disqu'aux approches de gain scheduling, le correcteur est synthétisé directement, plutôt que sa construction à partir d'une famille de correcteurs linéaires locaux. Alors que la synthèse de la commande LPV se concentre sur un modèle linéaire plutôt que sur un modèle non linéaire du système, mais le correcteur résultant est non linéaire.

Dans ce chapitre, nous présentons une autre classe de correcteurs \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ non linéaires avec ou sans dépendance paramétrique de la fonction de Lyapunov y compris la synthèse par placement de pôles. Les conceptions que nous considérons ici sont basées sur des approches de retour d'état et de sortie. On s'arrangeant avec des systèmes linéaires à paramètres variables (LPV) et leurs modèles (Polytopique et LFT), après un bref aperçu sur la présentation de l'approche de Riccati, la procédure de commande est synthétisée en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMI) développés en commande robuste pour les systèmes linéaires (LTI), nous essayons d'exposer les définitions et théorèmes les plus utilisés dans la littérature de la commande robuste en particulier la commande \mathcal{H}_∞ :

Objectifs:

- Suivre les variations de la consigne;
- Rejeter les perturbations;
- Garantir des marges de robustesse (robustesse en stabilité et en performances).

Méthodes:

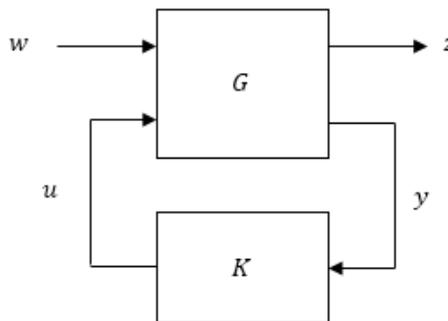
- Synthèse à partir d'un modèle nominal du système sur base de critères de stabilité et de performances;
- Prise en compte dans la synthèse des critères explicites de robustesse vis-à-vis des incertitudes et/ou paramètres variants dans le temps.

III.1.1. Spécification des performances

L'objectif le plus important d'un système de commande en plus de fournir la stabilité interne est d'atteindre certaines spécifications de performance. Une façon de décrire les spécifications de performance d'un système de commande est la taille de certains signaux utiles. Par exemple, la performance d'un système de poursuite pourrait être mesurée par la taille du signal d'erreur de poursuite. Commençons par définir la taille de ces signaux, c'est-à-dire les normes \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ puisque la synthèse de commande LPV les utilise comme mesure de performance (voir l'annexe III). En tant qu'inconvénient, la synthèse de commande est beaucoup plus impliquée, et en général, un conservatisme doit être introduit pour arriver à un problème faisable et convexe.

III.1.2. Formulation générale du problème de commande robuste

Les problèmes de conception de contre réaction peuvent être interprétés comme des problèmes d'optimisation \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ . Il est donc très utile d'avoir une formulation de problème standard dans laquelle un problème particulier peut être manipulé. Une telle formulation générale est fournie par la configuration générale présentée à la Fig.III.1 où G est le système et K est le correcteur.

**Fig.III.1.** Configuration générale de la commande

L'objectif de la commande est de minimiser une certaine norme de la fonction de transfert de w à z , par exemple, la norme \mathcal{H}_∞ . Le problème de conception de la commande est alors de trouver un correcteur K qui est basé sur les informations de y et qui génère un signal de commande u qui contrarie l'influence de w sur z , minimisant ainsi la norme de la boucle fermée de w à z .

Le point le plus important de cette section est d'apprécier que presque n'importe quel problème de commande linéaire peut être formulé en utilisant la configuration de la Fig.III.1 (pour système LTI) ou de la Fig.I.3 (pour système LPV).

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (III.1)$$

$$u = K(s)y \quad (III.2)$$

avec une réalisation de l'espace-état du système augmenté G donnée par

$$G(s) = \begin{bmatrix} A(s) & B_1(s) & B_2(s) \\ C_1(s) & D_{11}(s) & D_{12}(s) \\ C_2(s) & D_{21}(s) & D_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (III.3)$$

Les signaux sont: u les variables de commande, y les variables mesurées, w les signaux exogènes tels que les perturbations, les consignes et les signaux dits d'erreur qui doivent être minimisés dans un certain sens pour atteindre les objectifs de commande. La fonction de transfert en boucle fermée de w à z est donnée par la transformation fractionnaire linéaire

$$z = F_l(G, K)w \quad (III.4)$$

où

$$F_l(G, K) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \quad (III.5)$$

Les commandes \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ impliquent la minimisation des normes \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ de $F_l(G, K)$ respectivement. Quelques remarques sur les algorithmes utilisés pour résoudre de tels problèmes, les algorithmes les plus généraux, largement disponibles et largement utilisés pour les problèmes de synthèse \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ sont basés sur les solutions d'espace d'état [131,132]. Il convient de mentionner à nouveau que les similitudes entre la théorie \mathcal{H}_2 et la théorie \mathcal{H}_∞ sont les plus évidentes dans les algorithmes susmentionnés. Par exemple, \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ nécessitent les solutions de deux équations de Riccati, elles donnent toutes deux des correcteurs de dimension d'état égale à celle du système augmenté G .

Les hypothèses suivantes sont généralement appliquées dans les problèmes \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ :

- i) (A, B_2, C_2) est stabilisable et détectable.
- ii) $\text{rang}(D_{12}) = m_2$ et $\text{rang}(D_{21}) = p_2$.
- iii) $\text{rang} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \right) = n + m_2, \forall \omega \in \mathbb{R}$.

$$\text{iv) } \text{rang} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) = n + p_2, \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

$$\text{v) } D_{11} = 0 \text{ et } D_{22} = 0.$$

L'hypothèse i) est nécessaire pour l'existence de correcteurs de stabilisation K , et l'hypothèse ii) est suffisante pour s'assurer que les correcteurs sont propres et donc réalisables. Les hypothèses iii) et iv) garantissent que le correcteur optimal n'essaie pas d'annuler les pôles ou les zéros sur l'axe imaginaire, ce qui aboutirait à une instabilité de la boucle fermée. L'hypothèse v) est conventionnelle dans la commande \mathcal{H}_2 . $D_{11} = 0$ rend G_{11} strictement propre. Rappelons que \mathcal{H}_2 est l'ensemble des fonctions de transfert stables strictement propres. $D_{22} = 0$ met G_{22} strictement propre et simplifie les formules dans les algorithmes \mathcal{H}_2 . En \mathcal{H}_∞ , ni $D_{11} = 0$, ni $D_{22} = 0$ sont requis mais simplifient considérablement les formules de l'algorithme. S'ils ne sont pas nuls, un problème \mathcal{H}_∞ équivalent peut être construit dans lequel ils sont; voir [133,134]. Pour la simplicité, il est également parfois supposé que D_{12} et D_{21} sont donnés par

$$\text{vi) } D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \text{ et } D_{21} = [0 \quad I].$$

Ceci peut être réalisé, sans perte de généralité, par scaling de u et v et une transformation unitaire de w et z ; voir par exemple [135]. En outre, pour simplifier l'exposition, les hypothèses supplémentaires suivantes sont parfois applicables:

$$\text{vii) } D_{12}^T C_1 = 0 \text{ et } B_1^T D_{21}^T = 0.$$

viii) (A, B_1, C_1) est stabilisable et détectable.

Notez que si Vii) est validée, alors iii) et iv) peuvent être remplacés par viii).

Bien que les hypothèses ci-dessus puissent paraître décourageantes, les problèmes de commande les plus raisonnablement posés les rencontreront. Par conséquent, si le logiciel (par exemple μ -tools ou Robust Control toolbox de MATLAB) se plaint, alors cela signifie probablement que votre problème de synthèse n'est pas bien formulé et vous devriez y réfléchir à nouveau.

Enfin, il faut dire que les algorithmes \mathcal{H}_∞ , en général, trouvent un correcteur sous-optimal. C'est-à-dire que pour γ spécifiée une commande de stabilisation est trouvée pour lequel $\|F_l(G, K)\|_\infty < \gamma$. Si un correcteur optimal est requis, l'algorithme peut être utilisé de manière itérative, réduire jusqu'à ce que le minimum soit atteint dans une tolérance donnée. En général, trouver une commande \mathcal{H}_∞ optimale est compliqué numériquement et théoriquement. Ceci

s'oppose significativement avec la théorie \mathcal{H}_2 , dans laquelle le correcteur est unique et peut être trouvé à partir de la solution de deux équations de Riccati.

Considérons le système (III.3). Deux mesures de performance populaires en théorie de commande optimale sont les normes \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ définies dans le domaine fréquentiel (voir section A.III.1.2).

III.1.2.1. Commande \mathcal{H}_2 optimale [132]

Lemme III.1.2.1 Supposons H appartient au domaine de Riccati et $X = Ric(H)$, alors

- X est symétrique ;
- X satisfait l'équation algébrique de Riccati $A^T X + XA + XRX - Q = 0$;
- $A + RX$ est stable.

Lemme III.1.2.2 Supposons que H a la forme

$$H = \begin{bmatrix} A & BB^T \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix} \quad (III.6)$$

avec (A, B) stabilisable et (C, A) détectable (désigner le sous-espace inobservable par \mathfrak{X}). Alors H appartient au domaine de Riccati, $X = Ric(H) \geq 0$, et $Ker(X) \subset \mathfrak{X}$.

Problème III.1.2.1 Le problème de la commande \mathcal{H}_2 est de trouver un correcteur K admissible qui minimise $\|T_{zw}\|_2$. Par le lemme III.1.2.2, les matrices Hamiltoniennes (voir l'annexe V).

$$H_2 = \begin{bmatrix} A & B_2 B_2^T \\ C_1 C_1^T & -A^T \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} A^T & -C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} \quad (III.7)$$

appartiennent au domaine de Riccati et de plus, $X_2 := Ric(H_2)$ et $Y_2 := Ric(J_2)$ sont semi-définies positives. Définir $F_2 := -B_2 X_2$, $L_2 := -Y_2 C$, et

$$A_{F_2} := A + B_2 F_2, \quad C_{1F_2} := C_1 + D_{12} F_2$$

$$A_{L_2} := A + L_2 C_2, \quad B_{1L_2} := B_1 + L_2 D_{21}$$

$$\hat{A}_2 := A + B_2 F_2 + L_2 C_2$$

$$G_c(s) := \begin{bmatrix} A_{F_2} & I \\ C_{1F_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad G_f(s) := \begin{bmatrix} A_{L_2} & B_{1L_2} \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

Théorème III.1.2.1 L'unique correcteur optimal est

$$K_{opt}(s) := \begin{bmatrix} \hat{A}_2 & -L_2 \\ F_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (III.8)$$

De plus, $\min \|T_{zw}\|_2^2 = \|G_c B_1\|_2^2 + \|F_2 G_f\|_2^2 = \|G_c L_2\|_2^2 + \|C_1 G_f\|_2^2$.

III.1.2.2. Commande \mathcal{H}_∞ optimale [132]

Problème III.1.2.2 Le problème considéré est de trouver un correcteur sous-optimal K admissible qui minimise $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$. Clairement, γ doit être supérieur à \mathcal{H}_∞ optimale.

La solution \mathcal{H}_∞ implique deux nouvelles matrices Hamiltoniennes

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix}, J_\infty = \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} \quad (III. 9)$$

Théorème III.1.2.2 Il existe un correcteur admissible tel que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ si seulement si les conditions suivantes sont satisfaites.

- i) H_∞ appartient au domaine de Riccati et $X_\infty := Ric(H_\infty) \geq 0$.
- ii) J_∞ appartient au domaine de Riccati et $Y_\infty := Ric(J_\infty) \geq 0$.
- iii) le rayon spectral $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$.

De plus, lorsque ces conditions sont vérifiées, un tel correcteur est

$$K_{subopt}(s) := \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ F_\infty & 0 \end{bmatrix} \quad (III. 10)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{A}_\infty &:= A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 \\ F_\infty &:= -B_2^T X_\infty, L_\infty := -Y_\infty C_2^T, Z_\infty := (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}. \end{aligned}$$

Problème \mathcal{H}_∞ optimale: Minimiser $\|T_{zw}\|_\infty$ sur l'ensemble des correcteurs K admissibles qui garantissent la stabilité interne du système G .

III.1.3. Correspondance entre la stabilité quadratique et la commande \mathcal{H}_∞

A la fin des années 80, un certain nombre d'articles [136-138] ont souligné plusieurs liens entre la stabilité quadratique et la commande \mathcal{H}_∞ . En fait, les résultats contenus dans ces articles sont basés sur les travaux de la stabilité absolue et la théorie de la passivité dû à Popov [139-144]. Le point commun est que pour un système variable dans le temps, la norme induite par le gain \mathcal{L}_2 est égale à la norme \mathcal{H}_∞ de la matrice de fonction de transfert correspondante.

III.2. La commande \mathcal{H}_∞ des systèmes LPV

Au cours des dernières décennies, la théorie de commande robuste \mathcal{H}_∞ pour les systèmes physiques s'accroît considérablement et s'est répandue dans plusieurs domaines. Les communautés industrielles et académiques ont été intéressées par l'utilisation de l'analyse et des outils de synthèse fournis par cette théorie de commande. En effet, la conception par la synthèse \mathcal{H}_∞ est exprimée comme un problème d'optimisation mathématique et présente l'avantage d'être applicable aux problèmes impliquant des systèmes multivariables.

Dans ce qui suit, des résultats de retour d'état et de retour de sortie dynamique seront fournis, à la fois dans la commande robuste avec ou sans dérivés des paramètres. Afin de concevoir des correcteurs judicieux, les conditions de stabilité considérées caractériseront également le gain \mathcal{L}_2 du transfert de w à z . En utilisant un tel résultat, les correcteurs peuvent être déterminés de telle sorte qu'un certain gain \mathcal{L}_2 est assuré pour le système en boucle fermée.

III.2.1. Problème \mathcal{H}_∞ standard

Ce problème côtoie deux résolutions possibles. La première solution déjà en parler qui est basée sur la résolution d'un ensemble d'équations de Riccati et la deuxième basée sur la résolution d'un problème d'optimisation convexe sous contraintes d'inégalités matricielles linéaires (LMIs) qu'on va développer dans les sections qui suivent.

1. Étant donné $\gamma > 0$, existe-il une loi de commande K telle que
 - le système bouclé $G * K$ soit asymptotiquement stable (tous les pôles du système en boucle fermée sont à partie réelle strictement négative);
 - $\|T_{zw}\|_\infty = \|F_l(G, K)\|_\infty < \gamma$.
2. Si oui, construire une loi de commande K assurant pour le système en boucle fermée les deux propriétés précédentes.

III.2.2. Motivation de la synthèse \mathcal{H}_∞ par LMI

Le problème \mathcal{H}_∞ avec l'approche de Riccati nécessite la vérification des hypothèses citées ci-dessus pour l'existence d'un correcteur. Pour faire l'économie de ces hypothèses, une autre approche de solution au problème est envisagée nécessitant que la première hypothèse, de telle solution est fondée sur l'utilisation du Lemme Réel Borné [145]. La vérification de cette hypothèse pour toute la trajectoire des paramètres variables dans le temps n'est pas toujours facile, néanmoins, afin d'aboutir à satisfaire l'hypothèse pour des systèmes LPV où ses matrices sont affines par

rapport au paramètre variant ρ il existe des outils d'analyse basés sur une approche géométrique [146]. Une telle approche est basée sur la résolution d'un ensemble de LMIs. Il est important de souligner une différence intéressante entre cette solution et la solution présentée dans la section III.1.2, basées sur des équations algébriques de Riccati dans lesquelles le gain du correcteur est indépendant des variations des paramètres du système. Dans les solutions fournies dans cette section, nous résolvons un problème d'optimisation convexe à travers un ensemble de LMIs et nous obtenons un gain de correcteur variable dans le temps. L'avantage de cette approche est que nous pouvons incorporer les dérivés des paramètres dans la synthèse du correcteur.

III.2.3. Commande \mathcal{H}_∞ par retour d'état

Considérons le système décrit par la Fig.I.3 où G est le système LPV augmenté d'équation (I.20) et K le correcteur LPV. Considérons la première stabilisation robuste par retour d'état avec contrainte de performance \mathcal{H}_∞ .

III.2.3.1 Commande \mathcal{H}_∞ par retour d'état sans taux de variation borné des paramètres

Comme indiqué dans la section II.6.1, la stabilité quadratique et la stabilisation traitent le cas de paramètres lentement variables. c'est-à-dire $\rho \in \mathcal{P}$.

Définition III.2.3.1 Étant donné $\gamma > 0$, le système (I.20) est robustement stable avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour d'état si et seulement s'il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que le système en boucle fermée obtenu à partir de (I.20) et $u = Kx$ possède une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ .

De (II.42) on sait que le système (I.20) est robustement stable avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour d'état s'il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et une matrice symétrique définie positive P telle que pour tout $\rho \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} (A(\rho) + B_2(\rho)K)^T P + P(A(\rho) + B_2(\rho)K) & PB_1(\rho) & (C_1(\rho) + D_{12}(\rho)K)^T \\ B_1(\rho)^T P & -\gamma I & D_{11}(\rho)^T \\ C_1(\rho) + D_{12}(\rho)K & D_{11}(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (III.11)$$

En utilisant le raisonnement habituelle, nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Théorème III.2.3.1 Le système (I.20) est robustement stable avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour d'état si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive P et une matrice V telle que

$$\begin{bmatrix} A(\rho)P + PA(\rho)^T + B_2(\rho)V + V^T B_2(\rho)^T & B_1(\rho) & PC_1(\rho) + V^T D_{12}(\rho)^T \\ B_1(\rho)^T & -\gamma I & D_{11}(\rho)^T \\ C_1(\rho)P + D_{12}(\rho)V & D_{11}(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (III.12)$$

Dans ce cas, un correcteur par retour d'état qui stabilise le système (I.20) avec une limite de performance quadratique \mathcal{H}_∞ par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ est donné par (I.21) avec $K = VP^{-1}$.

III.2.3.2 Cas de systèmes LPV polytopiques

Dans cette section sur les systèmes LPV polytopiques (I.32), nous allons considérer une version polytopique du retour d'état de forme (I.27). Commençons par le cas de la stabilisation robuste avec omission du taux de variation borné des paramètres.

Définition III.2.3.2 Le système (I.20) bouclé avec la commande (I.27) est robustement stable avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour d'état si et seulement s'il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que le système bouclé possède une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ .

De (II.45) on sait que le système (I.20) est robustement stable avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour d'état s'il existe un ensemble de matrices $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, i = 1, \dots, N$ et une matrice symétrique définie positive P telle que pour tout $\rho \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} (A_i + B_{2i}K_i)^T P + P(A_i + B_{2i}K_i) & PB_{1i} & (C_{1i} + D_{12i}K_i)^T \\ B_{1i}^T P & -\gamma I & D_{11i}^T \\ C_{1i} + D_{12i}K_i & D_{11i} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (III.13)$$

Théorème III.2.3.2 Le système (I.20) est robustement stable avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour d'état si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive P et des matrices $V_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, i = 1, \dots, N$ telle que

$$\begin{bmatrix} A_i P + P A_i^T + B_{2i} V_i + V_i^T B_{2i}^T & B_{1i} & P C_{1i}^T + V_i^T D_{12i}^T \\ B_{1i}^T & -\gamma I & D_{11i}^T \\ C_{1i} P + D_{12i} V_i & D_{11i} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (III.14)$$

Dans ce cas, un correcteur par retour d'état qui stabilise le système (I.20) avec une limite de performance quadratique \mathcal{H}_∞ par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ est donné par (I.33) avec $K_i = V_i P^{-1}$ où les K_i sont les gains à déterminer.

Remarque III.2.3.1 Il est important de souligner que B_2 ou D_{12} dépendaient de ρ , nous aurions obtenu des termes quadratiques en ρ dans la condition LMI (III. 14). Ces termes sont plus difficiles à gérer car la convexité est généralement perdue. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour traiter un tel cas; voir par exemple [47,114,147,148].

III.2.3.3 Commande \mathcal{H}_∞ par retour d'état avec taux de variation borné des paramètres

Notez que, différemment de la commande \mathcal{H}_∞ par retour d'état vue en section III.2.3.1, le gain du correcteur K est autorisé à dépendre des paramètres. Ce type de résultats concerne le cas des trajectoires des paramètres dans un ensemble $\dot{\mathcal{P}}$ tel que

$$\dot{\mathcal{P}} = \{\rho \in \mathcal{P}, |\dot{\rho}| \leq \nu\} \quad (III. 15)$$

où $\dot{\rho}$ est le vecteur des taux de variation des paramètres variables dans le temps à r dimension.

Cette condition (III. 15) implique que le vecteur $\dot{\rho}$ appartient à l'ensemble $\dot{\mathcal{P}}$ définie comme suit

$$\dot{\mathcal{P}} := [-\nu_1, \nu_1] \times [-\nu_2, \nu_2] \times \dots \times [-\nu_r, \nu_r] \quad (III. 16)$$

Définition III.2.3.3 Le système (I. 20) est robustement stable via des fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres dans $\mathcal{P} \times \dot{\mathcal{P}}$ avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour d'état si et seulement s'il existe une matrice K telle que le système (I. 20) bouclé avec la commande (I. 27) est robustement stable via les fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres dans $\mathcal{P} \times \dot{\mathcal{P}}$.

De (II. 29) et (II. 42), il s'ensuit que la stabilité robuste via les fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres dans le cas de retour d'état est équivalente à l'existence d'une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et d'une matrice symétrique définie positive P telle que pour tout $\rho \in \mathcal{P}$

$$\begin{bmatrix} (A(\rho) + B_2(\rho)K(\rho))^T P(\rho) + P(\rho)(A(\rho) + B_2(\rho)K(\rho)) - \sum_{j=1}^r \nu_j \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho_j} & P(\rho)B_1(\rho) & (C_1(\rho) + D_{12}(\rho)K(\rho))^T \\ & B_1(\rho)^T P(\rho) & & & D_{11}(\rho)^T \\ & C_1(\rho) + D_{12}(\rho)K(\rho) & -\gamma I & & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (III. 17)$$

Nous pouvons facilement énoncer le théorème suivant.

Théorème III.2.3.3 Le système (I. 20) est robustement stable via des fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres dans $\mathcal{P} \times \dot{\mathcal{P}}$ avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ

minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour d'état si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive dérivable P et une matrice V telle que

$$\begin{bmatrix} A(\rho)P(\rho) + P(\rho)A(\rho)^T + B_2(\rho)V + V^T B_2(\rho)^T - \sum_{j=1}^r v_j \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho_j} & B_1(\rho) & P(\rho)C_1(\rho) + V^T D_{12}(\rho)^T \\ & B_1(\rho)^T & & D_{11}(\rho)^T \\ & C_1(\rho)P(\rho) + D_{12}(\rho)V & -\gamma I & -\gamma I \\ & & D_{11}(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (III.18)$$

pour tout $(\rho, \dot{\rho}) \in \mathcal{P} \times \dot{\mathcal{P}}$

Dans ce cas, un correcteur par retour d'état qui stabilise robustement le système (I.20) via des fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ est donné par (I.27) avec $K(\rho) = VP(\rho)^{-1}$.

III.2.3.4 Cas de systèmes LPV polytopiques

De même pour cette section sur les systèmes LPV polytopiques (I.32), nous allons considérer encore ici une la même version polytopique du retour d'état de forme (I.27). Cette fois ci la stabilisation robuste avec taux de variation borné des paramètres.

Définition III.2.3.4 Le système (I.20) est robustement stable via des fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres dans $\mathcal{P} \times \dot{\mathcal{P}}$ avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour d'état si et seulement s'il existe une matrice K telle que le système (I.20) bouclé avec la commande (I.27) est robustement stable via les fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres dans $\mathcal{P} \times \dot{\mathcal{P}}$.

De (II.29) – (II.31) et (II.45), il s'ensuit que la stabilité robuste via les fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres dans le cas de retour d'état est équivalente à l'existence d'un ensemble de matrices $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 1, \dots, N$ et d'une matrice symétrique définie positive P telle que pour tout $\rho \in \mathcal{P}$

$$\begin{bmatrix} (A_i + B_{2i}K_i)^T P(\rho) + P(\rho)(A_i + B_{2i}K_i) - \sum_{j=1}^r v_j \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho_j} & P(\rho)B_{1i} & (C_{1i} + D_{12i}K_i)^T \\ & B_{1i}^T P(\rho) & & D_{11i}^T \\ & C_{1i} + D_{12i}K_i & -\gamma I & -\gamma I \\ & & D_{11i} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (III.19)$$

Nous pouvons facilement énoncer le théorème suivant.

Théorème III.2.3.4 Le système (I.20) est robustement stable via des fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres dans $\mathcal{P} \times \dot{\mathcal{P}}$ avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour d'état si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive dérivable P et des matrices $V_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, i = 1, \dots, N$ telle que

$$\begin{bmatrix} A_i P(\rho) + P(\rho) A_i^T + B_{2i} V + V^T B_{2i}^T - \sum_{j=1}^r v_j \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho_j} & B_{1i} & P C_{1i}^T + V^T D_{12i}^T \\ & B_{1i}^T & D_{11i}^T \\ & C_{1i} P + D_{12i} V & D_{11i} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (III.20)$$

pour tout $(\rho, \dot{\rho}) \in \mathcal{P} \times \dot{\mathcal{P}}$

Dans ce cas, un correcteur par retour d'état qui stabilise robustement le système (I.20) via des fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ est donné par (I.33) avec $K_i = V_i P^{-1}$ où les K_i sont les gains à déterminer.

III.2.4. Commande \mathcal{H}_∞ par retour de sortie dynamique

Considérons maintenant le même système décrit par la Fig.I.3 où G est le système LPV augmenté strictement propre d'équation (I.20) (c'est-à-dire $D_{22}(\rho) = 0$) et K le correcteur LPV. Considérons la deuxième stabilisation robuste par retour de sortie dynamique avec contrainte de performance \mathcal{H}_∞ .

III.2.4.1. Commande \mathcal{H}_∞ par retour de sortie dynamique sans taux de variation borné des paramètres

Ensuite, nous procédons à un retour de sortie dynamique. Considérons le système (I.20) strictement propre.

Définition III.2.4.1 Le système (I.20) est robustement stable avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour de sortie dynamique dépendant de paramètres si et seulement s'il existe un correcteur dynamique $K(\rho)$ de forme (I.29) tel que le système en boucle fermée obtenu par la connexion du système (I.20) avec le correcteur (I.29) possède une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ . Le système en boucle fermée commandé est alors donné par:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{cl} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cl}(\rho) & B_{cl}(\rho) \\ C_{cl}(\rho) & D_{cl}(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cl} \\ w \end{bmatrix} \quad (III. 21)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{cl}(\rho) &= \begin{bmatrix} A(\rho) + B_2(\rho)D_k(\rho)C_2(\rho) & B_2(\rho)C_k(\rho) \\ B_k(\rho)C_2(\rho) & A_k(\rho) \end{bmatrix} \\ B_{cl}(\rho) &= \begin{bmatrix} B_1(\rho) + B_2(\rho)D_k(\rho)D_{21}(\rho) \\ B_k(\rho)D_{21}(\rho) \end{bmatrix} \\ C_{cl}(\rho) &= [C_1(\rho) + D_{12}(\rho)D_k(\rho)C_2(\rho) \quad D_{12}(\rho)C_k(\rho)] \\ D_{cl}(\rho) &= D_{11}(\rho) + D_{12}(\rho)D_k(\rho)D_{21}(\rho) \end{aligned} \quad (III. 22)$$

où $x_{cl} = [x^T \ x_k^T]^T$.

Avec (III. 19), la LMI (II. 42) n'est pas affine par rapport aux matrices inconnues du correcteur dynamique (I. 29); la résolution de cette LMI par des technique d'optimisation n'est pas possible. Pour cela, Scherer a proposé un changement de variable linéarisant pour se ramener à un ensemble de LMIs [149]. Le théorème suivant énonce le fruit de la proposition de scherer.

Théorème III.2.4.1 Le système (I. 20) est robustement stable avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour de sortie dynamique dépendant de paramètres si et seulement s'il existe des matrices symétriques définies positives $X(\rho)$, $Y(\rho)$ et des matrices $\tilde{A}(\rho)$, $\tilde{B}(\rho)$, $\tilde{C}(\rho)$ et $\tilde{D}(\rho)$ telles que

$$\begin{bmatrix} M_{11}(\rho) & M_{21}(\rho)^T & M_{31}(\rho)^T & M_{41}(\rho)^T \\ M_{21}(\rho) & M_{22}(\rho) & M_{32}(\rho)^T & M_{42}(\rho)^T \\ M_{31}(\rho) & M_{32}(\rho) & M_{33}(\rho) & M_{43}(\rho)^T \\ M_{41}(\rho) & M_{42}(\rho) & M_{43}(\rho) & M_{44}(\rho) \end{bmatrix} < 0 \quad (III. 23)$$

$$\begin{bmatrix} X(\rho) & I_n \\ I_n & Y(\rho) \end{bmatrix} > 0 \quad (III. 24)$$

où

$$\begin{aligned} M_{11}(\rho) &= A(\rho)X(\rho) + X(\rho)A(\rho)^T + B_2(\rho)\tilde{C}(\rho) + \tilde{C}(\rho)^T B_2(\rho)^T \\ M_{21}(\rho) &= \tilde{A}(\rho) + \tilde{A}(\rho)^T + C_2(\rho)^T \tilde{D}(\rho) B_2(\rho)^T \\ M_{22}(\rho) &= A(\rho)^T Y(\rho) + Y(\rho)A(\rho) + \tilde{B}(\rho)C_2(\rho) + C_2(\rho)^T \tilde{B}(\rho)^T \\ M_{31}(\rho) &= B_1(\rho)^T + D_{21}(\rho)^T \tilde{D}(\rho)^T B_2(\rho)^T \\ M_{32}(\rho) &= B_1(\rho)^T Y(\rho) + D_{21}(\rho)^T \\ M_{33}(\rho) &= -\gamma I_{m_2} \\ M_{41}(\rho) &= C_1(\rho)X(\rho) + D_{12}(\rho)\tilde{C}(\rho) \\ M_{42}(\rho) &= C_1(\rho) + D_{12}(\rho)\tilde{D}(\rho)C_2(\rho) \\ M_{43}(\rho) &= D_{11}(\rho) + D_{12}(\rho)\tilde{D}(\rho)D_{21}(\rho) \\ M_{44}(\rho) &= -\gamma I_{p_2} \end{aligned} \quad (III. 25)$$

Une fois les matrices \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} , \tilde{D} , X et Y obtenues, la construction du correcteur nécessite de trouver les matrices M et N . Dans ce cas, un correcteur par retour de sortie dynamique qui stabilise robustement le système (I.20) avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ est donné par (I.29) avec

$$\begin{aligned} D_k(\rho) &= \tilde{D}(\rho) \\ C_k(\rho) &= \left(\tilde{C}(\rho) - D_k(\rho)C_2(\rho)X(\rho) \right) M(\rho)^{-T} \\ B_k(\rho) &= N(\rho)^{-1} \left(\tilde{B}(\rho) - Y(\rho)B_2(\rho)D_k(\rho) \right) \\ A_k(\rho) &= N(\rho)^{-1} \left(\tilde{A}(\rho) - Y(\rho)A(\rho)X(\rho) - Y(\rho)B_2(\rho)D_k(\rho)C_2(\rho)X(\rho) \right. \\ &\quad \left. - N(\rho)B_k(\rho)C_2(\rho)X(\rho) - Y(\rho)B_2(\rho)C_k(\rho)M(\rho)^T \right) M(\rho)^{-T} \end{aligned} \quad (III.26)$$

où $M(\rho)$ et $N(\rho)$ sont des matrices non singulières telles que $M(\rho)N(\rho)^T = I_n - X(\rho)Y(\rho)$ (qui peut être résolu par une décomposition en valeurs singulières).

III.2.4.2 Cas de systèmes LPV polytopiques

Pour le système LPV (I.20) sous forme polytopique (I.32), nous allons considérer une version polytopique du retour de sortie dynamique de forme (I.29). Commençons par le cas de la stabilisation robuste avec omission du taux de variation borné des paramètres.

Comme dans [3,66], s'il existe des matrices \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} et \tilde{D} et des matrices symétriques définies positives X et Y satisfaisant la LMI suivante

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11}(\rho) & \mathcal{M}_{12}(\rho) \\ \mathcal{M}_{12}(\rho)^T & \mathcal{M}_{22}(\rho) \end{bmatrix} < 0 \quad (III.27)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11}(\rho) &= A(\rho)X + XA(\rho)^T + B_2(\rho)\tilde{C}(\rho) + \tilde{C}(\rho)^TB_2(\rho)^T \\ \mathcal{M}_{12}(\rho) &= \tilde{A}(\rho) + \tilde{A}(\rho)^T + C_2(\rho)^T\tilde{D}(\rho)B_2(\rho)^T \\ \mathcal{M}_{22}(\rho) &= A(\rho)^TY + YA(\rho) + \tilde{B}(\rho)C_2(\rho) + C_2(\rho)^T\tilde{B}(\rho)^T \end{aligned}$$

alors le correcteur polytopique qui stabilise le système (I.20) est calculé en synthétisant un correcteur à chaque sommet du système polytopique. Cela signifie qu'un ensemble de correcteurs est donné par

$$K(\rho) = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \alpha_i K_i, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \quad (III.28)$$

avec

$$K_i = \begin{bmatrix} A_{ki} & B_{ki} \\ C_{ki} & D_{ki} \end{bmatrix} \quad (III.29)$$

où

$$\begin{cases} D_{ki} = \tilde{D}_i \\ C_{ki} = (\tilde{C}_i - D_{ki}C_{2i}X)M^{-T} \\ B_{ki} = N^{-1}(\tilde{B}_i - YB_{2i}D_{ki}) \\ A_{ki} = N^{-1}(\tilde{A}_i - YA_iX - YB_{2i}D_{ki}C_{2i}X - NB_kC_{2i}X - YB_{2i}C_kM^T)M^{-T} \end{cases} \quad (III.30)$$

où M, N sont définis telles que $MN^T = I_n - XY$ qui peut être résolu par une décomposition en valeurs singulières.

Définition III.2.4.2 Le système (I.20) est robustement stable avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour de sortie dynamique si et seulement s'il existe un correcteur dynamique de forme (I.29) tel que le système en boucle fermée obtenu par la connexion du système (I.20) avec le correcteur (I.29) possède une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ . Le système en boucle fermée commandé pour chaque sommet est alors donné par:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{cli} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cli} & B_{cli} \\ C_{cli} & D_{cli} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cli} \\ w \end{bmatrix}, i = 1 \dots, N \quad (III.31)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{cli} &= \begin{bmatrix} A_i + B_{2i}D_{ki}C_{2i} & B_{2i}C_{ki} \\ B_{ki}C_{2i} & A_{ki} \end{bmatrix} \\ B_{cli} &= \begin{bmatrix} B_{1i} + B_{2i}D_{ki}D_{21i} \\ B_{ki}D_{21i} \end{bmatrix} \\ C_{cli} &= [C_{1i} + D_{12i}D_{ki}C_{2i} \quad D_{21i}C_{ki}] \\ D_{cli} &= D_{11i} + D_{12i}D_{ki}D_{21i} \end{aligned} \quad (III.32)$$

Le système global est calculé à partir de la combinaison barycentrique (I.31). Maintenant que le système LPV a une formulation polytopique, nous énonçons le théorème suivant.

Théorème III.2.4.2 Le système (I.20) est robustement stable avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour de sortie dynamique si et seulement s'il existe des matrices symétriques définies positives X, Y et des ensembles de matrices $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i$ et $\tilde{D}_i, i = 1, \dots, N$ telles que

$$\begin{bmatrix} M_{11i} & M_{21i}^T & M_{31i}^T & M_{41i}^T \\ M_{21i} & M_{22i} & M_{32i}^T & M_{42i}^T \\ M_{31i} & M_{32i} & M_{33i} & M_{43i}^T \\ M_{41i} & M_{42i} & M_{43i} & M_{44i} \end{bmatrix} < 0 \quad (III.33)$$

$$\begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (III.34)$$

où

$$\begin{aligned} M_{11i} &= A_i X + X A_i^T + B_{2i} \tilde{C}_i + \tilde{C}_i^T B_{2i}^T \\ M_{21i} &= \tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T + C_{2i}^T \tilde{D}_i B_{2i}^T \\ M_{22i} &= A_i^T Y + Y A_i + \tilde{B}_i C_{2i} + C_{2i}^T \tilde{B}_i^T \\ M_{31i} &= B_{1i}^T + D_{21i}^T \tilde{D}_i^T B_{2i}^T \\ M_{32i} &= B_{1i}^T Y + D_{21i}^T \tilde{B}_i^T \\ M_{33i} &= -\gamma I_{m_2} \\ M_{41i} &= C_{1i} X + D_{12i} \tilde{C}_i \\ M_{42i} &= C_{1i} + D_{12i} \tilde{D}_i C_{2i} \\ M_{43i} &= D_{11i} + D_{12i} \tilde{D}_i D_{21i} \\ M_{44i} &= -\gamma I_{p_2} \end{aligned} \quad (III.35)$$

Dans ce cas, un correcteur par retour de sortie dynamique qui stabilise le système (I.20) avec une limite de performance quadratique \mathcal{H}_∞ par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ est donné par (III.28) où les K_i sont les gains à déterminer.

III.2.4.3 Cas de systèmes LPV sous forme LFT

Seule la stabilisation robuste par retour de sortie dynamique sera traitée dans cette section. La justification de nous limitant à ce cas est pour la simplicité de l'exposition en introduisant un outil simple derrière la conception de la commande LPV sous forme de LFT (voir Fig.I.8). Pour le système LPV (I.20) sous forme LFT (I.37), nous allons considérer un retour de sortie dynamique de forme (I.29). Commençons par le cas de la stabilisation robuste avec omission du taux de variation borné des paramètres.

Définition III.2.4.3 Le système (I.20) est robustement stable avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}(M, K, \theta(\rho))\|_\infty, \forall \rho \in \mathcal{P}$ via la commande par retour de sortie dynamique dépendant de paramètres si et seulement s'il existe un correcteur dynamique $K(\rho)$ de forme (I.29) tel que le système en boucle fermée obtenu par la connexion du système (I.20) avec le correcteur (I.29) possède une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ . Le système en boucle

fermée commandé est alors donné par (III. 31). Comme déjà signaler au chapitre I, la réalisation du correcteur K est identique à celle du système LFT donné par

$$K := \begin{bmatrix} A_k & B_{k1} & B_{k2} \\ C_{k1} & D_{k11} & D_{k12} \\ C_{k2} & D_{k21} & D_{k22} \end{bmatrix} \quad (III. 36)$$

Pour la simplicité de notation, les raccourcis suivants sont utilisés dans la suite

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & B_0 &= \begin{bmatrix} 0 & B_{1\theta} & B_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} 0 & B_2 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_{1\theta} & 0 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathcal{D}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{11\theta} & D_{12\theta} \\ 0 & D_{21\theta} & D_{11} \end{bmatrix}, & \mathcal{D}_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & D_{13\theta} & 0 \\ 0 & D_{12} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{C} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ C_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathcal{D}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{31\theta} & D_{21} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (III. 37)$$

Plus loin, nous noterons la représentation d'état de $M(s)$ sous la forme (I. 37). Nous définissons un ensemble de matrices de scaling calculées sur la structure de la matrice $\theta(\rho)$. De plus, selon [2,90], étant donné une structure d'incertitude L_θ indiquant un bloc diagonal d'incertitude variable dans le temps θ , l'ensemble des matrices de scaling définies positives associées à la structure θ est définie comme

$$L_\theta = \{L > 0 : L\theta = \theta L, \forall \theta \in \Theta\} \subset \mathbb{R}^{r \times r} \quad (III. 38)$$

avec

$$r = \sum_{i=1}^q r_i \quad (III. 39)$$

Étant donné L_θ , l'ensemble des matrices de scaling commutant avec la structure répétée $\Theta \oplus \Theta$ est facilement déduite comme

$$L_{\Theta \oplus \Theta} = \left\{ \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2^T & L_3 \end{bmatrix} > 0 : L_1, L_3 \in \Theta \text{ et } L_2\theta = \theta L_2, \forall \theta \in \Theta \right\} \subset \mathbb{R}^{r \times r} \quad (III. 40)$$

De la théorie du petit gain, une condition suffisante pour une performance robuste face à l'incertitude $\Theta \oplus \Theta$, ou de manière équivalente pour l'existence de correcteur est la suivante.

Théorème III.2.4.3

Considérons une structure d'incertitude Θ et l'ensemble des matrices de scaling associé à $L_{\Theta\oplus\Theta}$ définies en (III. 40). S'il existe une matrice de scaling $L \in L_{\Theta\oplus\Theta}$ et un correcteur LTI K (I. 40) telles que le système nominal en boucle fermée $\mathcal{F}_l(\tilde{M}, K)$ soit stable de manière interne et satisfait

$$\left\| \begin{bmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \mathcal{F}_l(\tilde{M}, K) \begin{bmatrix} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma \quad (III. 41)$$

alors $\mathcal{F}_l(K, \Delta)$ est un correcteur LPV sous-optimal.

La faisabilité du problème présenté est énoncée par le théorème suivant [2].

Théorème III.2.4.4

Le système (I. 20) est robustement stable avec une performance quadratique \mathcal{H}_{∞} bornée par γ minimisant $\|T_{zw}(M, K, \theta(\rho))\|_{\infty}$, $\forall \rho \in \mathcal{P}$ via la commande par retour de sortie dynamique si et seulement s'il existe des matrices symétriques définies positives $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{r \times r}$ et $J \in \mathbb{R}^{r \times r}$ telles que

$$\begin{aligned} N_R^T & \begin{bmatrix} RA^T + AR & RC_{1\theta}^T & RC_1^T & B_{1\theta} & B_1 \\ C_{1\theta}R & -\gamma J_3 & 0 & D_{11\theta} & D_{12\theta} \\ C_1R & 0 & -\gamma I & D_{21\theta} & D_{11} \\ B_{1\theta}^T & D_{11\theta}^T & D_{21\theta}^T & -\gamma L_3 & 0 \\ B_1^T & D_{12\theta}^T & D_{11}^T & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} N_R < 0 \\ N_S^T & \begin{bmatrix} A^T S + SA & SB_{1\theta} & SB_1 & C_{1\theta}^T & C_1^T \\ B_{1\theta}^T S & -\gamma L_3 & 0 & D_{11\theta}^T & D_{21\theta}^T \\ B_1^T S & 0 & -\gamma I & D_{12\theta}^T & D_{11}^T \\ C_{1\theta} & D_{11\theta} & D_{12\theta} & -\gamma J_3 & 0 \\ C_1 & D_{21\theta} & D_{11} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} N_S < 0 \\ & \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} L_3 & I \\ I & J_3 \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (III. 42)$$

où N_R et N_S forment une base de noyaux de $(B_2^T, D_{13\theta}^T, D_{12}^T, D_{22}^T)$ et $(C_2, D_{31\theta}, D_{21}, D_{22})$ respectivement.

Sur la base des matrices R, S, L_3 et J_3 , un correcteur répondant au problème peut être construit selon [2]. Comme mentionné au chapitre I, le correcteur LPV est donné sous la forme LFT (I. 41). De manière équivalente, ses équations d'état données par (I. 29) où

$$\begin{aligned}
A_k(\rho) &= A_k + B_{k2}Y_\rho C_{k2} \\
B_k(\rho) &= B_{k1} + B_{k2}Y_\rho D_{k21} \\
C_k(\rho) &= C_{k1} + D_{k12}Y_\rho C_{k2} \\
D_k(\rho) &= D_{k11} + D_{k12}Y_\rho D_{k21} \\
Y_\rho &= \theta(\rho)(I - D_{k22}\theta(\rho))^{-1}
\end{aligned} \tag{III.43}$$

Compte tenu de la mesure ρ du vecteur de paramètres, la matrice Y_ρ est facilement calculée et l'entrée de commande u est obtenue par intégration en temps réel de (I.29).

Résolution des conditions caractéristiques des LMIs du théorème III.2.4.4 pour une performance quadratique γ fournit un quadruple de matrices symétriques (R, S, L_3, J_3) . Un algorithme implique la résolution d'un LMI supplémentaire et met en parallèle l'algorithme décrit dans [150] pour la commande \mathcal{H}_∞ . Notez que l'ensemble des LMIs (III.42) paramétrise toutes les solutions K problème \mathcal{H}_∞ énoncé dans le théorème III.2.4.3 [150].

Proposition III.2.4.4 Étant donné toute la solution (R, S, L_3, J_3) du système LMI (III.42), la reconstruction du correcteur K se fait en deux étapes:

1^{ère} étape: à partir de R, S dériver la matrice de lemme réelle bornée $X > 0$

- 1) calculer par l'intermédiaire des valeurs singulières deux matrices M, N telles que $MN^T = I_n - RS$.
- 2) calculer X comme unique solution du système linéaire [150]

$$X \begin{bmatrix} I & R \\ 0 & M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & I \\ N^T & 0 \end{bmatrix} \tag{III.44}$$

2^{ème} étape: calculer pour K LMI

$$\Psi + \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} P^T K Q + Q^T K^T P \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \tag{III.45}$$

où

$$\Psi = \begin{bmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\gamma \mathcal{L} & \mathcal{D}_{11}^T \\ C_0 & \mathcal{D}_{11} & \gamma \mathcal{J} \end{bmatrix} \tag{III.46}$$

$$P = (B^T, 0, \mathcal{D}_{12}^T), \quad Q = (C, \mathcal{D}_{21}, 0) \tag{III.47}$$

avec

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J} = \mathcal{L}^{-1} \tag{III.48}$$

où

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2^T & L_3 \end{bmatrix}, \quad J = L^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2^T & J_3 \end{bmatrix} \quad (III.49)$$

et

$$L_2^T J_2 = I - L_3 J_3 \quad (III.50)$$

III.2.4.4. Commande \mathcal{H}_∞ par retour de sortie dynamique avec taux de variation borné des paramètres

Maintenant nous considérons la stabilité robuste via le retour de sortie dynamique avec présence en taux de variation borné des paramètres.

Définition III.2.4.4 Le système (I.20) est robustement stable via des fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres dans $\mathcal{P} \times \dot{\mathcal{P}}$ avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour de sortie dynamique si et seulement s'il existe une matrice K telle que le système (I.20) bouclé avec la commande (I.29) est robustement stable via les fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres dans $\mathcal{P} \times \dot{\mathcal{P}}$. Considérons le même système en boucle fermée commandé (III.21).

Théorème III.2.4.4 Le système (I.20) est robustement stable via des fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres dans $\mathcal{P} \times \dot{\mathcal{P}}$ avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour de sortie dynamique dépendant de paramètres si et seulement s'il existe des matrices symétriques définies positives $X(\rho)$, $Y(\rho)$ et des matrices $\tilde{A}(\rho)$, $\tilde{B}(\rho)$, $\tilde{C}(\rho)$ et $\tilde{D}(\rho)$ solutions des LMIs (III.23) et (III.24) telles que

$$\begin{aligned} M_{11}(\rho) &= A(\rho)X(\rho) + X(\rho)A(\rho)^T + \dot{\rho} \frac{\partial X(\rho)}{\partial \rho} + B_2(\rho)\tilde{C}(\rho) + \tilde{C}(\rho)^T B_2(\rho)^T \\ M_{22}(\rho) &= A(\rho)^T Y(\rho) + Y(\rho)A(\rho) + \dot{\rho} \frac{\partial Y(\rho)}{\partial \rho} + \tilde{B}(\rho)C_2(\rho) + C_2(\rho)^T \tilde{B}(\rho)^T \end{aligned} \quad (III.51)$$

or que le reste des composantes de la LMI (III.23) sont les mêmes que (III.25).

Dans ce cas, un correcteur par retour de sortie dynamique qui stabilise robustement le système (I.20) via des fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ est donné par (I.29) avec ses matrices calculées par (III.26) où $M(\rho)$, $Q(\rho)$ sont définis telles que $M(\rho)Q(\rho)^T = I_n - X(\rho)Y(\rho)$ qui peut être résolu par une décomposition en valeurs singulières.

III.2.4.5 Cas de systèmes LPV polytopiques

En effet, puisque la synthèse de la commande est réalisée grâce à l'optimisation des LMIs, l'utilisation de l'approche polytopique est très attrayante d'un point de vue informatique. De même pour le système LPV (I. 20) sous forme polytopique (I. 32), nous allons considérer comme même la version polytopique du retour de sortie dynamique de forme (I. 29).

Définition III.2.4.5 Le système (I. 20) est robustement stable avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour de sortie si et seulement s'il existe un correcteur dynamique de forme (I. 29) tel que le système en boucle fermée obtenu par la connexion du système (I. 20) avec le correcteur (I. 29) possède une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ . Le système en boucle fermée commandé pour chaque sommet est alors donné par (III. 31).

Théorème III.2.4.5 Le système (I. 20) est robustement stable avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ bornée par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ via la commande par retour de sortie dynamique si et seulement s'il existe des matrices symétriques définies positives X, Y et des ensembles de matrices $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i$ et $\tilde{D}_i, i = 1, \dots, N$ solutions des LMIs (III. 33) et (III. 34) telles que

$$\begin{aligned} M_{11} &= A_i X + X A_i^T + \rho \frac{\partial X(\rho)}{\partial \rho} + B_{2i} \tilde{C}_i + \tilde{C}_i^T B_{2i}^T \\ M_{22} &= A_i^T Y + Y A_i + \rho \frac{\partial Y}{\partial \rho} + \tilde{B}_i C_{2i} + C_{2i}^T \tilde{B}_i^T \end{aligned} \quad (III. 52)$$

or que le reste des composantes de la LMI (III. 33) sont les mêmes que (III. 35).

Dans ce cas, un correcteur par retour de sortie dynamique qui stabilise le système (I. 20) avec une limite de performance quadratique \mathcal{H}_∞ par γ minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ est donné par (III. 28) où les K_i sont les gains à déterminer.

III.3. Synthèse par placement de pôles

Par définition, les pôles d'un système LTI $G(s)$ coïncide avec les valeurs propres de sa matrice d'état A . En outre, des performances caractéristiques influencées directement par la localisation de ces pôles dans le plan complexe comme:

- la stabilité du système en boucle fermée
- son comportement transitoire [151]
 - temps de réponse t_r

- amortissement ξ

Lieu des pôles retenu est généralement un secteur de la forme suivante:

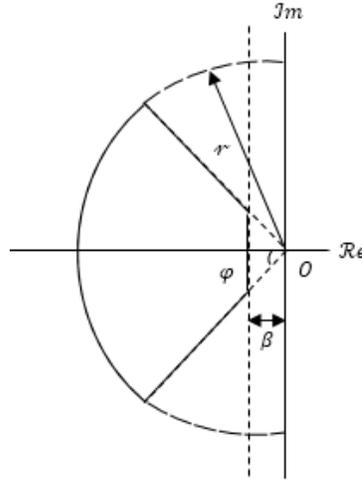


Fig.III.2. Lieu des pôles de la boucle fermée $\mathcal{S}(\beta, r, \varphi)$

Comme nous l'avons mentionné plus haute, la position du pôle complexe z de la boucle fermée dans le secteur $\mathcal{S}(\beta, r, \varphi)$ vérifie simultanément trois contraintes spécifiant le temps de réponse et l'amortissement déterminées en fonction de β, r, φ et de la nature du pôle (premier ou second ordre):

- $\text{Re}(z) < -\lambda \Rightarrow t_r < t_{rmax}$
- $|z| < r \Rightarrow t_r > t_{rmin}$
- $|\text{Im}(z)| < \tan \varphi |\text{Re}(z)| \Rightarrow \xi < \xi_{min}$

En pratique, les contraintes sur la position des pôles de la boucle fermée dans des régions convexes les plus couramment utilisées sont:

- **Éloignement des pôles de l'axe imaginaire:** Appartenance au demi-plan éloigné avec β de l'axe imaginaire traduisant le fait que toutes les valeurs propres sont à partie réelle strictement inférieure à $-\beta$. Cela revient à trouver une matrice $X = X^T > 0$ telle que

$$A^T X + X A + 2\beta X < 0 \quad (\text{III.53})$$

- **Amortissement minimum des pôles:** Appartenance à un cône de demi-angle φ traduisant le fait que toutes les valeurs appartiennent au cercle de centre O (l'origine du plan complexe) et de rayon r . Cela revient à trouver une matrice $X = X^T > 0$ telle que

$$\begin{bmatrix} -rX^{-1} & A \\ A^T & -rX \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{III.54})$$

- **Restriction des hautes fréquences:** Appartenance à un disque de centre A^T et de rayon r traduisant le fait que toutes les valeurs appartiennent au cône de demi-angle φ . Cela revient à trouver une matrice $X = X^T > 0$ telle que

$$\begin{bmatrix} \sin \varphi (A^T X + X A) & \cos \theta (A^T X - X A) \\ \cos \varphi (X A - A^T X) & \sin \theta (A^T X + X A) \end{bmatrix} < 0 \quad (III.55)$$

Toutes ces contraintes ont la permission de garantir la stabilité et les performances en régime transitoire de la boucle fermée. Pendant ce temps, le principe de la méthode par placement de pôles peut s'étendre au cas des systèmes LPV pour la synthèse robuste de correcteurs LPV dans une région convexe définie par l'intersection des domaines convexes de ces trois LMIs (III.53) – (III.55). De ce fait, la caractérisation obtenue de la localisation des pôles dans un secteur $\mathcal{S}(\beta, r, \varphi)$ convexe compte les trois inégalités rassemblées dans le théorème suivant [152]:

Théorème III.2.4.6 Les pôles du système (I.20) sont contenus dans le secteur $\mathcal{S}(\beta, r, \varphi)$ si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive X telle que

$$\begin{cases} A(\rho)X + XA(\rho)^T + 2\beta X < 0 \\ \begin{bmatrix} -rX & A(\rho)X \\ XA(\rho)^T & -rX \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} \sin \varphi (A(\rho)X + XA(\rho)^T) & \cos \varphi (A(\rho)X - XA(\rho)^T) \\ \cos \varphi (XA(\rho)^T - A(\rho)X) & \sin \varphi (A(\rho)X + XA(\rho)^T) \end{bmatrix} < 0 \end{cases}, \forall \rho \in \mathcal{P} \quad (III.56)$$

La convexité du secteur $\mathcal{S}(\beta, r, \varphi)$ est conservée avec la résolution du problème d'optimisation illustré par le théorème III.2.4.6.

III.4 Conclusion

La majeure partie de ce chapitre a traité du problème de commande robuste via à la fois le retour d'état et le retour de sortie dynamique par optimisation des LMI pour les systèmes LPV en utilisant les résultats d'analyse du chapitre II. Pour les paramètres variables dans le temps et leurs vitesses d'évolution, la stabilisation robuste plus le problème de performance robuste ont été considérés. Conditions nécessaires et suffisantes de stabilisation avec une performance quadratique \mathcal{H}_∞ et l'introduction d'une nouvelle caractérisation LMI du concept de localisation des pôles en démontrant son utilité pour la synthèse \mathcal{H}_∞ .

En ce qui concerne les solutions offertes, un ensemble de méthodes de synthèse pour les systèmes LPV sont exposées en ouvrant le choix sur le type de commande (retour d'état ou retour de sortie dynamique) et celui du système (Polytopique ou LFT) en choisissant le correcteur sous

une forme similaire à celle du système. Dans ce contexte de la commande \mathcal{H}_∞ , le système LPV polytopique a fait l'objet d'un exploit considérable par le retour d'état et le retour de sortie dynamique également, tant que le système LPV sous forme LFT, seul le retour de sortie dynamique est utilisé.

Finalement, les fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres dont nous nous sommes intéressés car pour les variations plus ou moins rapides des paramètres variables, il est très important de prendre en compte explicitement les taux de variation de ces paramètres lorsqu'ils sont disponibles. Dans ce cas, seul le système LPV polytopique est considéré.

Chapitre IV

THÈSE DOCTORAT

COMMANDE D'UN HÉLIOSTAT

COMMANDE LINÉAIRE À PARAMÈTRES VARIANTS D'UN ROBOT

Chapitre IV: Commande d'un héliostat

IV.1. Introduction

Le monde connaît une importante croissance dans le domaine des énergies renouvelables comme la technologie des concentrations solaires. Cependant, la production d'électricité à partir du rayonnement solaire est un processus direct, alors l'énergie solaire étant peu dense de sorte qu'une technologie est nécessaire pour la concentrer afin d'obtenir des températures exploitables pour la production d'électricité. Parmi ces technologies les centrales à tour qui sont constituées de nombreux miroirs concentrant les rayons solaires vers un absorbeur situé au sommet d'une tour. Les miroirs uniformément répartis sont appelés héliostats. Chaque héliostat est orientable par un système de poursuite solaire qui suit le soleil individuellement et réfléchit ses rayons incidents précisément en direction de l'absorbeur. L'avantage de celle-ci par rapport aux capteurs cylindro-paraboliques est que les pertes à l'ambiance sont inférieures car la surface exposée est limitée [153].

La robotique avec son champ d'utilisation dans l'industrie révèle une idée cachée de considérer le système de poursuite solaire à deux axes comme un robot manipulateur à 2ddl où la modélisation et la commande des robots sont bien avancées dans le domaine automatique aussi bien qu'en informatique industriel [154].

La conception des robots manipulateurs en général, à l'aide des outils de logiciel est devenue plus nécessaire, puisqu'il est possible de simuler des conditions de fonctionnement critiques. Les études sur la théorie de commande des systèmes mécaniques périodiques ont été le sujet de la recherche intensive pendant les deux dernières décennies. Cependant, le suivi avec une commande robuste au-dessus du domaine entier de la dynamique non linéaire de ces systèmes est une matière provocante de la recherche.

Ce chapitre a pour but l'exploitation des commandes proposées dans cette thèse sur une commande d'un héliostat. Dans cette application, on présente une structure mécanique d'un héliostat élaborer par SolidWorks dont la conception et la commande nécessitent alors le calcul de certains modèles mathématiques, tels que les modèles qui expriment la position des miroirs en fonction des variables articulaires des axes de l'héliostat [155]. Bien avant jusqu'aujourd'hui, la commande de l'héliostat s'effectue en boucle ouverte, sans aucune vérification que le rayonnement arrive réellement à la cible désirée. Les erreurs dues à la commande en boucle ouverte sont souvent

considérables et peuvent s'accumuler pendant le fonctionnement. Une réduction significative de l'erreur de poursuite en fermant la boucle de commande est présentée, il s'agit bien évidemment des méthodes de synthèse modernes décrites dans le chapitre III fournissant une solution adéquate qui repose sur la synthèse \mathcal{H}_∞ et placement de pôles garantissant en même temps la poursuite et le rejet de perturbations.

Un problème fondamental dans la commande des robots est de faire en sorte que le manipulateur suive une trajectoire désirée préalablement planifiée. Avant que le robot ne puisse effectuer un travail utile, nous devons le positionner au bon endroit et au bon moment. Dans ce chapitre, nous discutons aussi de la commande par couple calculé, qui fournit une famille de systèmes de commande faciles à comprendre qui fonctionne souvent bien dans la pratique [156].

IV.2. Héliostat-Tour en terrain accidenté

Nous présentons dans la Fig.IV.1 une mini centrale à tour installée dans un terrain accidenté. Chaque héliostat est caractérisé par des paramètres qui sont la hauteur, la position par rapport à la tour.

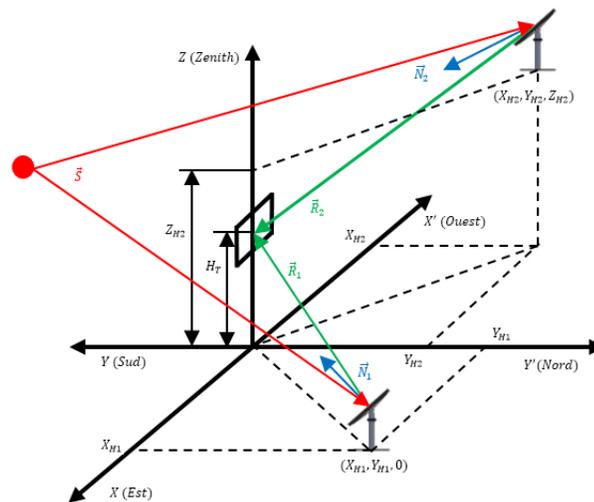


Fig.IV.1. Champ d'héliostat dans le terrain accidenté

Indépendamment de leurs hauteurs par rapport à la tour, les deux héliostats sont chargés de refléter le rayon solaire vers l'absorbeur au sommet de la tour.

IV.3. Modèle de référence

IV.3.1. Position du soleil

Position du soleil est définie par les coordonnées horizontales angle azimut a et élévation h exprimé par les relations suivantes (voir Fig.IV.2) [157]:

$$\sin a = \frac{\cos \delta \sin \omega}{\cos h} \quad (IV.1)$$

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega \quad (IV.2)$$

où δ est la déclinaison du soleil, ω est l'angle horaire solaire et φ est latitude du lieu.

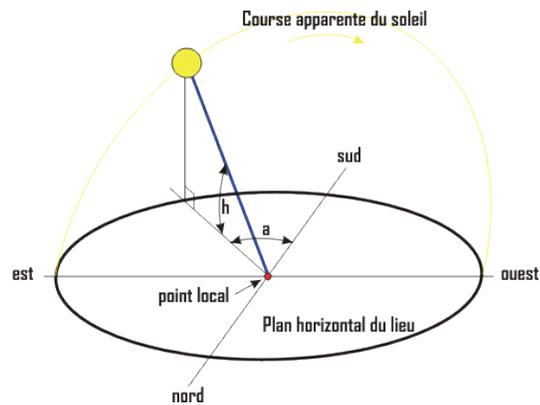


Fig.IV.2. Coordonnées solaires selon le repère horizontal

La Fig.IV.3 suivante montre les courbes de ces coordonnées horizontales azimut a et l'élévation h du soleil.

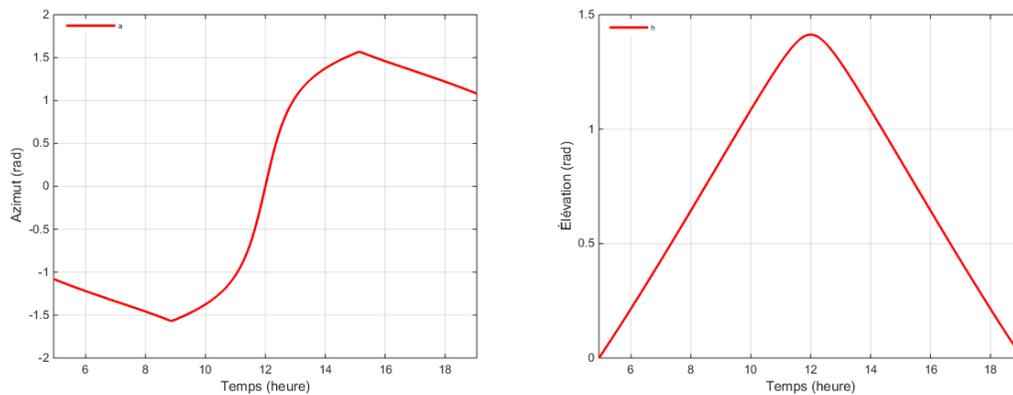


Fig.IV.3. Azimut et l'élévation du soleil (a, h)

IV.3.2. Relations Héliostat-Tour

Présente l'ensemble Héliostat-Tour dans un système de coordonnées cartésiennes associé à la tour. La position de l'héliostat par rapport à la tour est définie par celle du bâti (X_H, Y_H, Z_H) , et les coordonnées de la cible sur la tour sont donnée par $(0, 0, H_T)$ [158-160].

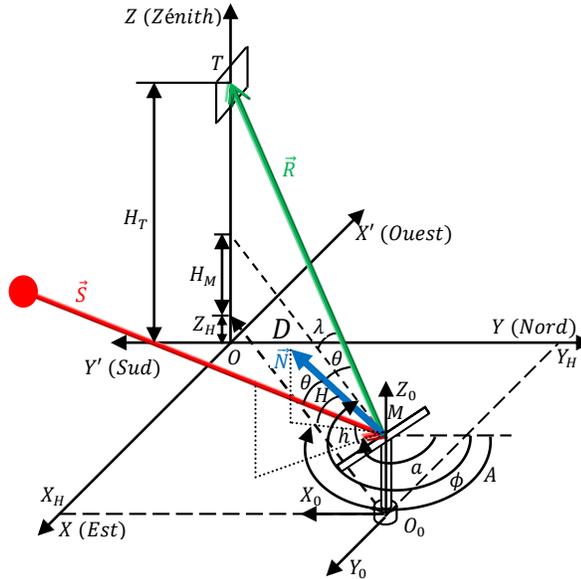


Fig.IV.4. Coordonnées cartésiennes Héliostat-Tour et le réfléchissement du rayon solaire par l'héliostat vers la cible fixe

Les coordonnées du centre de l'héliostat M sont définies par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} {}^0X_M &= X_H + X_M \sin q_1 \cos q_2 \\ {}^0Y_M &= -Y_H + X_M \cos q_1 \cos q_2 \\ {}^0Z_M &= Z_H + r_1 + X_M \sin q_2 \end{aligned} \quad (IV.3)$$

Plusieurs relations géométriques utiles peuvent être obtenues de la Fig.IV.4. Ces relations sont importantes dans la détermination de l'azimut ϕ et l'élévation λ du rayon réfléchi \vec{R} par l'héliostat:

$$\begin{aligned} {}^0X_M &= -D \sin \phi \\ {}^0Y_M &= -D \cos \phi \\ {}^0Z_M &= Z_H + H_M \end{aligned} \quad (IV.4)$$

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{H_T - {}^0Z_M}{D} \right) \quad (IV.5)$$

avec

$$D = \sqrt{{}^0X_M^2 + {}^0Y_M^2} \quad (IV.6)$$

En substituant les relations (IV. 3), (IV. 4) et (IV. 5) on obtient les équations de ϕ et λ suivantes:

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1}\left(\frac{{}^0X_M}{{}^0Y_M}\right) \\ \lambda &= \tan^{-1}\left(\frac{H_T - {}^0Z_M}{D}\right)\end{aligned}\quad (IV. 7)$$

IV.3.3. Orientation de la normale

La normale de l'héliostat est définie par les angles de rotation azimut \mathcal{A} et élévation \mathcal{H} suivants:

$$\mathcal{A} = \sin^{-1}\left(\frac{\sin a \cos h + \cos \lambda \sin \phi}{2 \cos \vartheta \cos H}\right) \quad (IV. 8)$$

$$\mathcal{H} = \sin^{-1}\left(\frac{\sin h + \sin \lambda}{2 \cos \vartheta}\right) \quad (IV. 9)$$

avec

$$\vartheta = \frac{1}{2} \cos^{-1}(\sin h \sin \lambda + \cos h \cos \lambda (\sin a \sin \phi + \cos a \cos \phi)) \quad (IV. 10)$$

Ce sont les angles que doit suivre l'héliostat pour s'orienter vers des positions désirées.

IV.4. Description mécanique et géométrique de l'héliostat

La structure de l'héliostat est une chaîne ouverte simple à deux articulations de type rotoïde avec sa représentation géométrique [155].

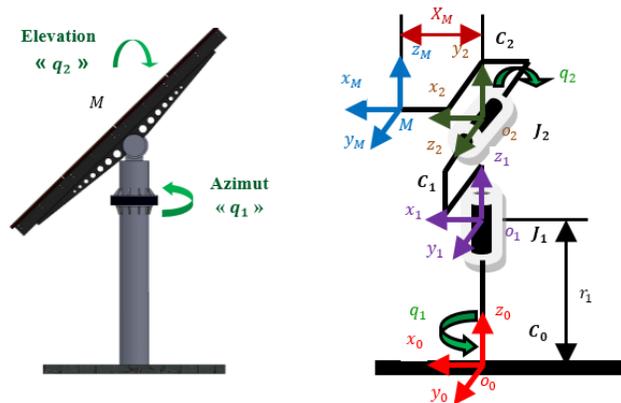


Fig.IV.5. Robot manipulateur à 2ddl

Le système est composé de deux corps C_1 et C_2 et de deux articulations J_1 et J_2 (voir Fig.IV.5 à droite). Le corps C_0 désigne la base du robot. Le corps C_2 est celui qui porte le support des miroirs de l'héliostat. L'articulation j connecte le corps C_j au corps C_{j-1} . Les paramètres de Denavit-Hartenberg obtenus après avoir associé un repère fixe pour chaque corps sont classés dans le tableau I suivant:

Articulation j	θ_j	d_j	α_j	a_j
$0 \rightarrow 1$	q_1	0	0	r_1
$1 \rightarrow 2$	q_2	0	$\pi/2$	0

Tableau.IV.1. Les paramètres géométriques de l'héliostat

L'orientation et la position de la normale d'origine M sont définies à partir de la matrice de passage calculée par rapport à la base du robot:

$${}^oT_M = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_1 & -\cos q_1 \sin q_2 & X_M \cos q_1 \cos q_2 \\ \sin q_1 \cos q_2 & \cos q_1 & -\sin q_1 \sin q_2 & X_M \sin q_1 \cos q_2 \\ \sin q_2 & 0 & -\cos q_2 & r_1 + X_M \sin q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (IV.11)$$

L'orientation de la normale de l'héliostat par rapport à la base de l'héliostat est donnée par les vecteurs colonnes R_N et P_N suivant:

$$R_N = [\cos(q_1) \cos(q_2) \quad \sin(q_1) \cos(q_2) \quad \sin(q_2)]^T \quad (IV.12)$$

$$P_N = [X_M \cos(q_1) \cos(q_2) \quad X_M \sin(q_1) \cos(q_2) \quad r_1 + X_M \sin(q_2)]^T \quad (IV.13)$$

IV.4.1. Modèle dynamique

Le modèle dynamique est la relation entre les couples appliqués des actionneurs et les positions, vitesses et accélérations articulaires. L'équation du modèle dynamique est de la forme:

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (IV.14)$$

où q , \dot{q} , \ddot{q} sont les vecteurs de position, vitesse et d'accélération articulaire. τ est le vecteur des couples des actionneurs. $D(q)$ est la matrice d'inertie symétrique définie positive, $C(q, \dot{q})$ est la matrice représentant les forces de Coriolis et des forces centrifuges, $G(q)$ est le vecteur des forces de gravité.

Le modèle dynamique calculé par le formalisme de Lagrange est:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{zz1} + I_{xx2} \sin^2(q_2) + I_{yy2} \cos^2(q_2) & 0 \\ 0 & I_{zz2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [(I_{xx2} - I_{yy2}) \sin(2q_2)] \dot{q}_2 & 0 \\ -\frac{1}{2} [(I_{xx2} - I_{yy2}) \sin(2q_2)] \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 g x_{G2} \cos(q_2) \end{bmatrix} \quad (IV. 15)$$

où q_1 et q_2 des angle azimut et élévation de l'héliostat en radian.

Masse de C_2 m_2	1129.07475 kg
Moment d'inertie de C_1 I_{zz1}	1.7191 kg.m ²
Moment d'inertie de C_2 I_{xx2}	2343.5593 kg.m ²
Moment d'inertie de C_2 I_{yy2}	1600.3720 kg.m ²
Moment d'inertie de C_2 I_{zz2}	777.7458 kg.m ²
Centre de masse de C_2 C_{G2}	0.20275 m

Tableau.IV.2. Les paramètres physiques de l'héliostat

IV.4.2. Représentation quasi-LPV polytopique

Un modèle linéaire à paramètres variables (quasi-LPV) peut maintenant être obtenu comme suit. Les paramètres non constants qui entrent dans les équations d'état sont les vitesses de l'angle d'azimut \dot{q}_1 et d'élévation \dot{q}_2 . Ces angles sont les taux de variation des états dans le modèle dynamique. En respectant le vecteur d'état x et l'entrée de commande u , le modèle (IV. 15) peut s'écrire [161]:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -D^{-1}(q)C(q, \dot{q})\dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D^{-1}(q) \end{bmatrix} \tau \quad (IV. 16)$$

Le modèle (IV. 16) étant non linéaire et peut se présenter en équation d'état sous forme d'état :

$$\dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + Bu(t) \quad (IV. 17)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -D^{-1}(q)C(q, \dot{q}) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ D^{-1}(q) \end{bmatrix}, x = [q \ \dot{q}]^T, u = \tau \quad (IV. 18)$$

où $-D^{-1}(q)C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et $D^{-1}(q) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

D'après l'équation(IV. 18),

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{31} & 0 \\ 0 & B_{42} \end{bmatrix} \quad (IV.19)$$

où

$$\begin{aligned} A_{33} &= -\frac{\left((I_{xx2} - I_{yy2}) \sin(2q_2)\right)}{d} \dot{q}_2 \\ A_{43} &= \frac{\left((I_{xx2} - I_{yy2}) \sin(2q_2)\right)}{(2I_{zz2})} \dot{q}_1 \\ B_{31} &= \frac{1}{d} \\ B_{42} &= \frac{1}{I_{zz2}} \end{aligned} \quad (IV.20)$$

avec

$$d = I_{yy2} \cos(q_2)^2 + I_{xx2} \sin(q_2)^2 + I_{zz1} \quad (IV.21)$$

Y a que les composantes A_{33} et A_{43} de la matrice d'état A qui dépendaient des paramètres variables choisies $\rho_1 = \dot{q}_1$ et $\rho_2 = \dot{q}_2$. Alors on obtient le système quasi-LPV suivant:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & A_{33}^S \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43}^S \rho_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{31} & 0 \\ 0 & B_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (IV.22)$$

où

$$\begin{aligned} A_{33}^S &= -\frac{\left((I_{xx2} - I_{yy2}) \sin(2q_2)\right)}{d} \\ A_{43}^S &= \frac{\left((I_{xx2} - I_{yy2}) \sin(2q_2)\right)}{(2I_{zz2})} \end{aligned} \quad (IV.23)$$

En revanche, le modèle polytopique du système quasi-LPV (IV.22) nécessite le calcul de ses sommets $A_i, i = 1, \dots, 4$ qui représentaient la matrice A donnés par

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 \quad (IV.24)$$

dont les sommets sont

$$\begin{aligned}
A_1 &= A_0 + \underline{\rho}_1 A_{43}^s + \underline{\rho}_2 A_{33}^s \\
A_2 &= A_0 + \overline{\rho}_1 A_{43}^s + \overline{\rho}_2 A_{33}^s \\
A_3 &= A_0 + \underline{\rho}_1 A_{43}^s + \overline{\rho}_2 A_{33}^s \\
A_4 &= A_0 + \overline{\rho}_1 A_{43}^s + \underline{\rho}_2 A_{33}^s
\end{aligned} \tag{IV.25}$$

qui correspondent aux différentes combinaisons extrémales des paramètres variables reposant sur la transformation de coordonnées suivante:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{(\overline{\rho}_1 - \underline{\rho}_1)(\overline{\rho}_2 - \underline{\rho}_2)}{(\overline{\rho}_1 - \underline{\rho}_1)(\overline{\rho}_2 - \underline{\rho}_2)}, & \alpha_2 &= \frac{(\underline{\rho}_1 - \overline{\rho}_1)(\overline{\rho}_2 - \underline{\rho}_2)}{(\overline{\rho}_1 - \underline{\rho}_1)(\overline{\rho}_2 - \underline{\rho}_2)} \\
\alpha_3 &= \frac{(\overline{\rho}_1 - \underline{\rho}_1)(\underline{\rho}_2 - \overline{\rho}_2)}{(\overline{\rho}_1 - \underline{\rho}_1)(\overline{\rho}_2 - \underline{\rho}_2)}, & \alpha_4 &= \frac{(\underline{\rho}_1 - \overline{\rho}_1)(\underline{\rho}_2 - \overline{\rho}_2)}{(\overline{\rho}_1 - \underline{\rho}_1)(\overline{\rho}_2 - \underline{\rho}_2)}
\end{aligned} \tag{IV.26}$$

où

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \rho_1 = [-10,10] \text{ et } \rho_2 = [-10,10] \text{ en (rad/s)}.$$

La représentation d'état polytopique $(A; B; C; D)$ est maintenant supposée évoluer dans l'ensemble convexe:

$$\begin{bmatrix} A(\rho) & B_1(\rho) & B_2(\rho) \\ C_1(\rho) & D_{11}(\rho) & D_{12}(\rho) \\ C_2(\rho) & D_{21}(\rho) & D_{22}(\rho) \end{bmatrix} = Co \left\{ \begin{bmatrix} A_i & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \forall \rho \in \mathcal{P}, i = 1, \dots, 4 \right\} \tag{IV.27}$$

IV.5. Description et analyse du problème

Cependant, le système de poursuite solaire à deux axes de l'héliostat est un processus lent car le fonctionnement de celui-ci dure plusieurs heures dans la journée selon la saison, mais tout de même cache un inconvénient majeur qu'était possible que l'ensemble structure mécanique et la commande s'étalent le vent durant tout ce temps qu'on qualifie pour une perturbation au niveau de la commande, car l'héliostat est simulé pour différentes hauteurs. Il est à noter qu'en plus l'orientation des rayons solaires vers l'absorbeur avec la poursuite du soleil par l'héliostat, ce dernier doit résister au vent peu importe ses angles d'attaque. Fig.IV.6 montre l'évolution du vent et le couple produit en fonction de la hauteur de l'héliostat.

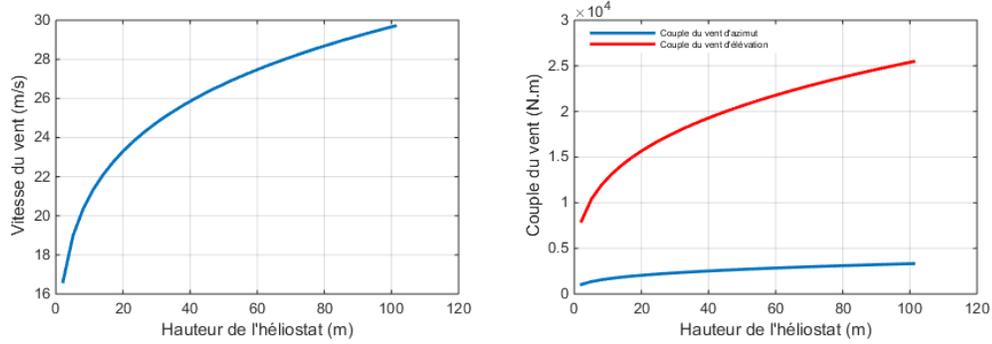


Fig.IV.6. Caractéristiques de la vitesse et le couple du vent

En vertu du domaine de variation paramétrique le système en boucle ouverte demeure instable sans amortissement dans toute la trajectoire des paramètres variants. En effet, l'instabilité n'est pas flagrante et il n'y a pas de forte disparité entre les quatre sommets du polytope. Pour une idée plus précise, on associe aux différents couples (\dot{q}_1, \dot{q}_2) représentatifs du domaine de fonctionnement les pôles représentés dans la Fig.IV.7 suivante:

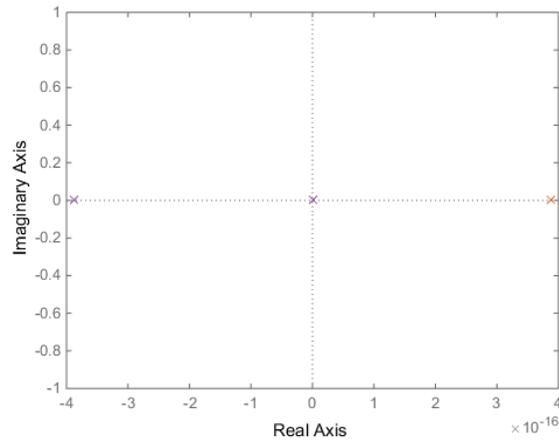


Fig.IV.7. Répartition des pôles

Éventuellement, la position des pôles nous informe sur la limite de stabilité du système qui d'ailleurs la recherche d'un correcteur robuste n'est pas difficile à de telles variations des paramètres variants.

IV.6. Mise en forme du problème de synthèse

Dans cette section, nous présentons la commande par retour d'état et retour de sortie dynamique avec synthèse \mathcal{H}_∞ et placement de pôles basées sur l'optimisation convexe par LMI. De plus, pour tenir compte des exigences de robustesse, nous utilisons l'approche polytopique.

Dans les deux commandes, ces contraintes peuvent également être considérées de façon intéressante si le modèle d'actionneur est omis dans le modèle de conception. Dans un tel cas, le correcteur n'utilisera que les sorties du système et sera donc plus facilement mis en œuvre. La première contrainte est utilisée pour spécifier l'atténuation des performances et des perturbations, la seconde est très utile pour contraindre les pôles en boucle fermée afin de s'assurer que par exemple, aucune interaction n'apparaîtra avec une dynamique non modélisée à haute fréquence.

IV.6.1. Commande par couple calculé

Au fil des ans, il a été proposé de nombreuses sortes de systèmes de commande de robot. En l'occurrence, la plupart d'entre eux peuvent être considérés comme des cas particuliers de la classe des commandes par couple calculé. Le couple calculé, en même temps, est une application spéciale de la linéarisation par rétroaction des systèmes non linéaires, qui a gagné une popularité dans la théorie des systèmes modernes [162,163].

En fait, nous explorons cette classe de commandes de robots qui comprend un large éventail de conceptions. Vu les conceptions modernes, la commande par couple calculé fournisse un cadre permettant de combiner la commande des articulations du robot et la commande robuste. Nous proposons la commande en couple pour la poursuite solaire de l'héliostat est définie par:

$$\tau = D(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (IV.28)$$

où \ddot{q}_d est l'accélération désirée permettant d'imposer à l'héliostat de suivre la trajectoire désirée selon la vitesse souhaitée.

On considère la nouvelle loi de commande suivante :

$$u = \ddot{q}_d \quad (IV.29)$$

alors l'équation (IV.14) se réécrit comme suit :

$$\tau = D(q)u + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (IV.30)$$

IV.6.2. Commande par retour d'état

Nous considérons le problème posé précédemment dans l'introduction. Pour cela, la solution au problème est l'application du théorème III.2.3.2 et le théorème III.2.4.6. La technique de synthèse est basée sur la proposition suivante:

Proposition IV.6.2.1 Le problème pour le système polytopique (IV.27) est résolu pour un scalaire $\gamma > 0$ donné, s'il existe les matrices $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ et $V_i \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$, $i = 1, \dots, 4$ et vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} A_i P + P A_i^T + B_2 V_i + V_i^T B_2^T & B_1 & P C_1^T + V_i^T D_{12}^T \\ B_1^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 P + D_{12} V_i & D_{11} & -\gamma I \end{array} \right] < 0 \\ A_i P + P A_i^T + B_2 V_i + V_i^T B_2^T + 2\beta P < 0 \\ \left[\begin{array}{cc} -rP & A_i P + B_2 V_i \\ P A_i^T + V_i^T B_2^T & -rP \end{array} \right] < 0 \\ \left[\begin{array}{cc} \sin \varphi (A_i P + P A_i^T + B_2 V_i + V_i^T B_2^T) & \cos \varphi (A_i P + B_2 V_i - P A_i^T - V_i^T B_2^T) \\ \cos \varphi (P A_i^T + V_i^T B_2^T - A_i P - B_2 V_i) & \sin \varphi (A_i P + P A_i^T + B_2 V_i + V_i^T B_2^T) \end{array} \right] < 0 \end{array} \right. \quad (IV.31)$$

Ensuite, chaque système LTI en boucle fermée à l'intérieur du polytope $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ avec $K = VP^{-1}$ présente les propriétés suivantes:

- $\|G(s)\|_\infty < \gamma$
- $\text{spec}(A) \subset \mathcal{S}(\beta, r, \varphi)$

IV.6.3. Commande par retour de sortie dynamique

Les résultats de retour d'état de la section IV.6.2 sont maintenant généralisés au cas de retour de sortie dynamique. Pour le traitement du même problème précédemment défini par la commande, la solution est portée par le théorème III.2.4.2 et le théorème III.2.4.6 sous forme d'une proposition suivante:

Proposition IV.6.3.1 Le problème pour le système polytopique (IV. 27) est résolu pour un scalaire $\gamma > 0$ donné, s'il existe les matrices $X = X^T > 0 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $Y = Y^T > 0 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $\tilde{A}_i \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $\tilde{B}_i \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $\tilde{C}_i \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ et $\tilde{D}_i \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$, $i = 1, \dots, 4$ et vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc} M_{11i} & M_{21i}^T & M_{31i}^T & M_{41i}^T \\ M_{21i} & M_{22i} & M_{32i}^T & M_{42i}^T \\ M_{31i} & M_{32i} & M_{33i} & M_{43i}^T \\ M_{41i} & M_{42i} & M_{43i} & M_{44i} \end{array} \right] < 0 \\ \left[\begin{array}{cc} X & I_n \\ I_n & Y \end{array} \right] > 0 \\ A_i X + X A_i^T + B_2 \tilde{C}_i + \tilde{C}_i^T B_2^T + 2\beta X < 0 \\ A_i^T Y + Y A_i + \tilde{B}_i C_2 + C_2^T \tilde{B}_i^T + 2\beta Y < 0 \\ \left[\begin{array}{cc} -rX & A_i X + B_2 \tilde{C}_i \\ X A_i^T + \tilde{C}_i^T B_2^T & -rX \end{array} \right] < 0 \\ \left[\begin{array}{cc} -rY & Y A_i + \tilde{B}_i C_2 \\ A_i^T Y + C_2^T \tilde{B}_i^T & -rY \end{array} \right] < 0 \\ \left[\begin{array}{cc} \sin \varphi (A_i X + X A_i^T + B_2 \tilde{C}_i + \tilde{C}_i^T B_2^T) & \cos \varphi (A_i X + B_2 \tilde{C}_i - X A_i^T - \tilde{C}_i^T B_2^T) \\ \cos \varphi (X A_i^T + \tilde{C}_i^T B_2^T - A_i X - B_2 \tilde{C}_i) & \sin \varphi (A_i X + X A_i^T + B_2 \tilde{C}_i + \tilde{C}_i^T B_2^T) \end{array} \right] < 0 \\ \left[\begin{array}{cc} \sin \varphi (A_i^T Y + Y A_i + \tilde{B}_i C_2 + C_2^T \tilde{B}_i^T) & \cos \varphi (Y A_i + \tilde{B}_i C_2 - A_i^T Y - C_2^T \tilde{B}_i^T) \\ \cos \varphi (A_i^T Y + C_2^T \tilde{B}_i^T - Y A_i - \tilde{B}_i C_2) & \sin \varphi (A_i^T Y + Y A_i + \tilde{B}_i C_2 + C_2^T \tilde{B}_i^T) \end{array} \right] < 0 \end{array} \right. \quad (IV.32)$$

où

$$\begin{aligned}
M_{11i} &= A_i X + X A_i^T + B_{2i} \tilde{C}_i + \tilde{C}_i^T B_{2i}^T \\
M_{21i} &= \tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T + C_{2i}^T \tilde{D}_i B_{2i}^T \\
M_{22i} &= A_i^T Y + Y A_i + \tilde{B}_i C_{2i} + C_{2i}^T \tilde{B}_i^T \\
M_{31i} &= B_{1i}^T + D_{21i}^T \tilde{D}_i^T B_{2i}^T \\
M_{32i} &= B_{1i}^T Y + D_{21i}^T \tilde{B}_i^T \\
M_{33i} &= -\gamma I_{m_2} \\
M_{41i} &= C_{1i} X + D_{12i} \tilde{C}_i \\
M_{42i} &= C_{1i} + D_{12i} \tilde{D}_i C_{2i} \\
M_{43i} &= D_{11i} + D_{12i} \tilde{D}_i D_{21i} \\
M_{44i} &= -\gamma I_{p_2}
\end{aligned} \tag{III.33}$$

Comme dans le cas du retour d'état, chaque système LTI en boucle fermée à l'intérieur du polytope $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ avec $K = [A_k \ B_k; C_k \ D_k]$ présente les mêmes propriétés.

IV.7. Simulation Héliostat-Tour

L'objectif principal de cette simulation est de réfléchir le rayon incident \vec{s} du soleil par l'héliostat vers une cible fixe au sommet de la tour entre le lever et le coucher du soleil, et cela pour différentes positions verticales Z_H entre la base de la tour et le bâti de l'héliostat. La simulation est réalisée suivant le schéma développé avec MATLAB/SIMULINK présenté en Fig.IV.8, il constitue les différents blocs de calcul: position du soleil, angle d'incidence, position du rayon réfléchi et l'orientation de l'héliostat.

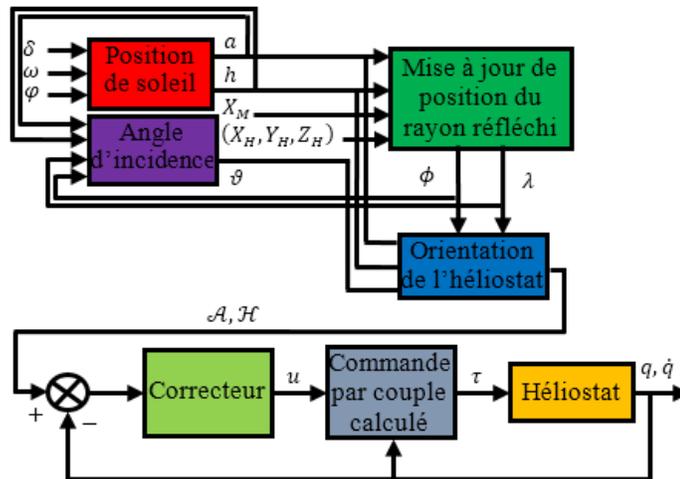


Fig.IV.8. Schéma de simulation Héliostat-Tour

La simulation Héliostat-Tour est faite pour 21 Juin 2016 qui est la plus longue journée de l'année en utilisant l'ensemble des équations de (IV.3) au (IV.10). La localisation du lieu et les paramètres de l'ensemble Héliostat-Tour sont rassemblés dans le tableau IV.3 suivant:

Localisation	
Latitude	32.38°
Altitude	450 m
Paramètres de l'héliostat	
Hauteur par rapport à la base r_1	1.897m
Coordonnées du centre M de l'héliostat X_M	(0.316, 0, 0)m
Coordonnées de l'héliostat (X_H, Y_H, Z_H)	(0, 50, Z_H)m
Paramètres de la tour	
Hauteur de la tour	10m

Tableau.IV.3. Paramètres Héliostat-Tour

Les matrices du système (I.20) sont données par (IV.19) et celles suivantes :

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = B, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_{12} = 0_2, D_{21} = D_{22} = 0_{(4 \times 2)}.$$

IV.7.1. Résultats de simulation

En section IV.4.2 a été souligné dans la modélisation que le vecteur des paramètres variables dans le temps se compose des vitesses angulaires des articulations de l'héliostat. La Fig.IV.9 montre leurs évolutions temporelles.

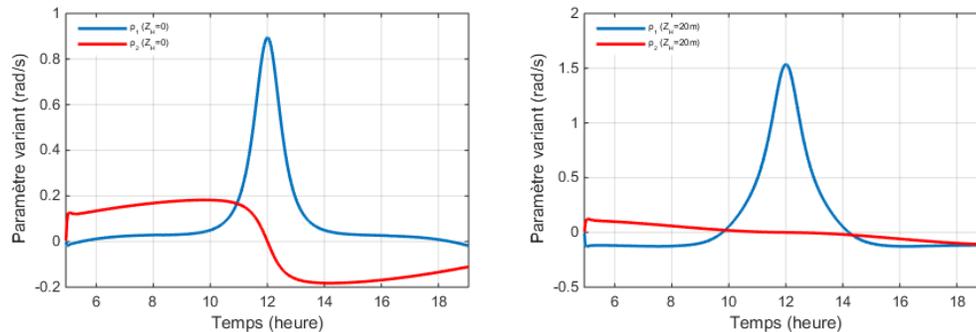


Fig.IV.9. Évolution des paramètres variants

IV.7.1.1. Par retour d'état

Les différents gains K_i sont obtenus avec $\gamma = 1,3893$:

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = \begin{bmatrix} -588,19 & 0 & -82,28 & 0 \\ 0 & -285,54 & 0 & -39,94 \end{bmatrix}$$

On observe d'après la Fig.IV.10 que la dynamique du système en boucle fermée est bien imposée par la commande de retour d'état et que les pôles sont à l'intérieur du secteur $(0,5, 100, \pi/4)$.

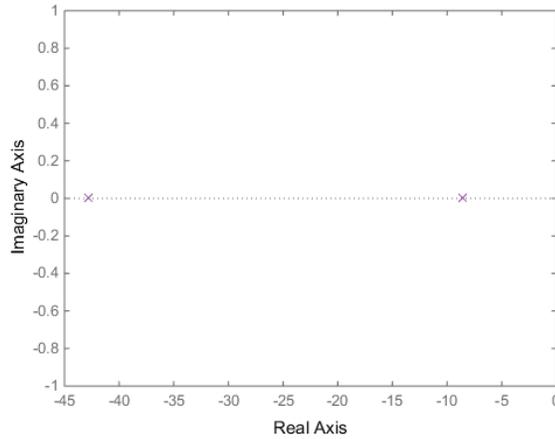


Fig.IV.10. Placement de pôles par retour d'état

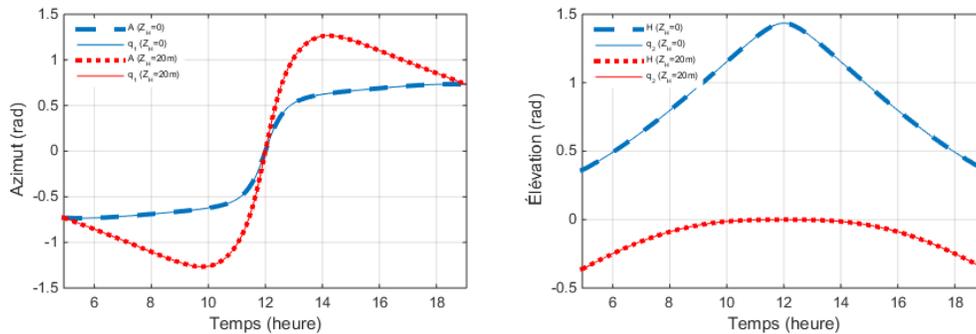


Fig.IV.11. Orientation de l'héliostat (\mathcal{A}, \mathcal{H})

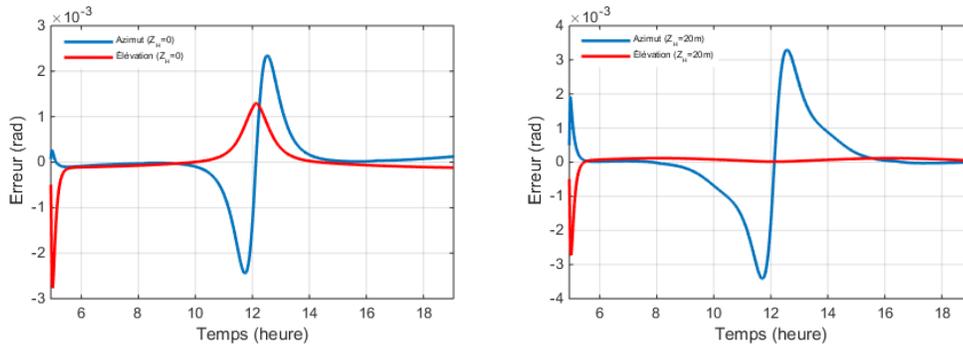


Fig.IV.12. Erreur de poursuite de l'héliostat

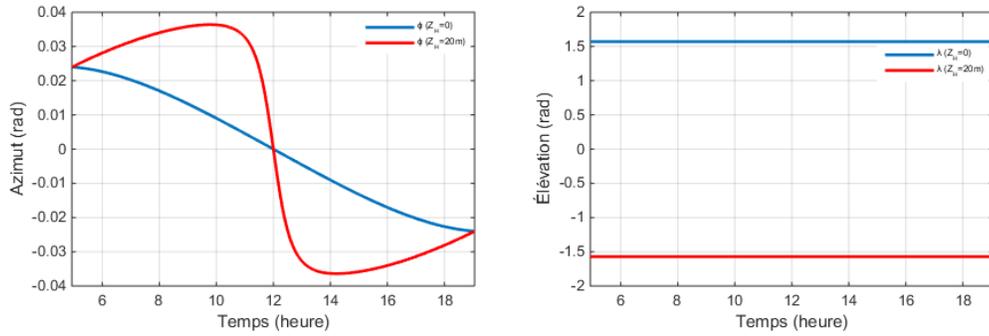


Fig.IV.13. Position du rayon réfléchi (ϕ, λ)

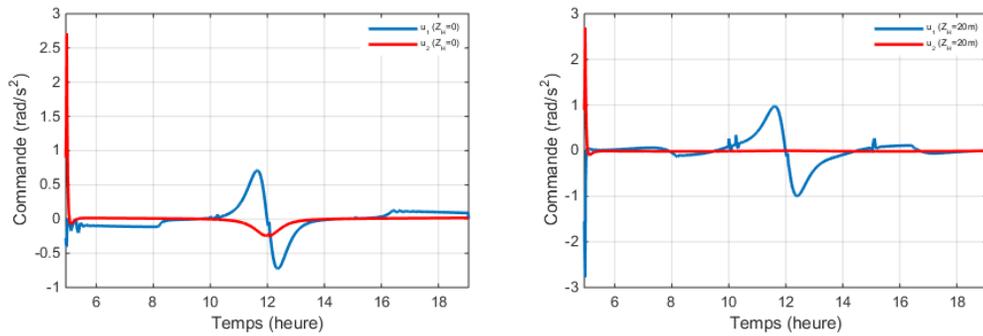


Fig.IV.14. Commandes (u_1, u_2)

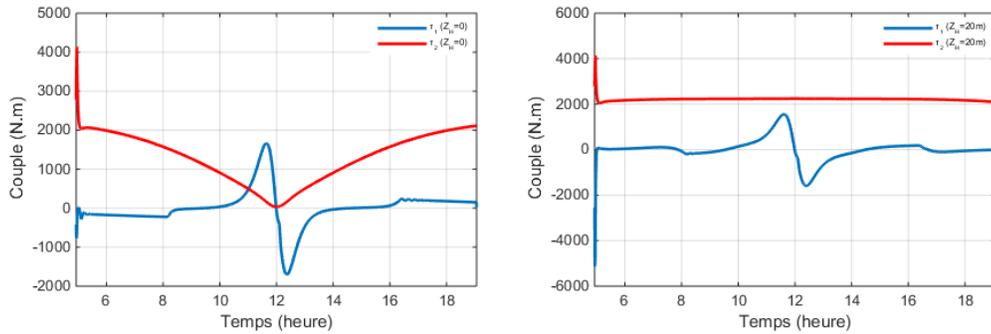


Fig.IV.15. Couples (τ_1, τ_2)

Pour l'évaluation de la robustesse de la commande, une charge du vent considérée comme perturbation sous forme d'une séquence d'impulsions de 50000 $N.m$ est ajoutée à l'entrée de commande du système pour illustrer le témoignage d'un comportement robuste du correcteur par retour d'état.

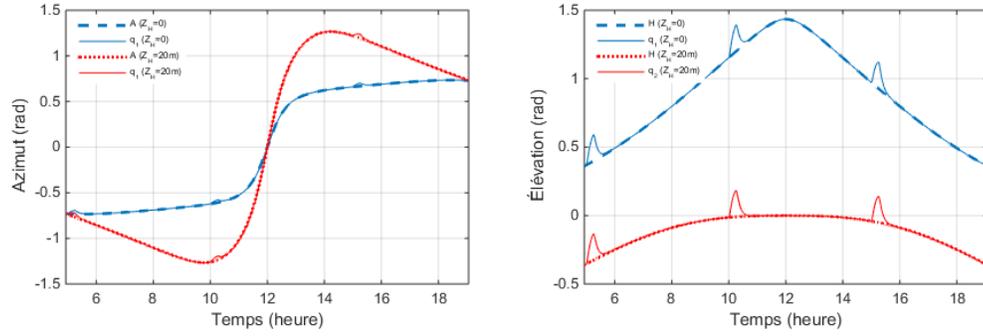


Fig.IV.16. Orientation de l'héliostat (\mathcal{A}, \mathcal{H})

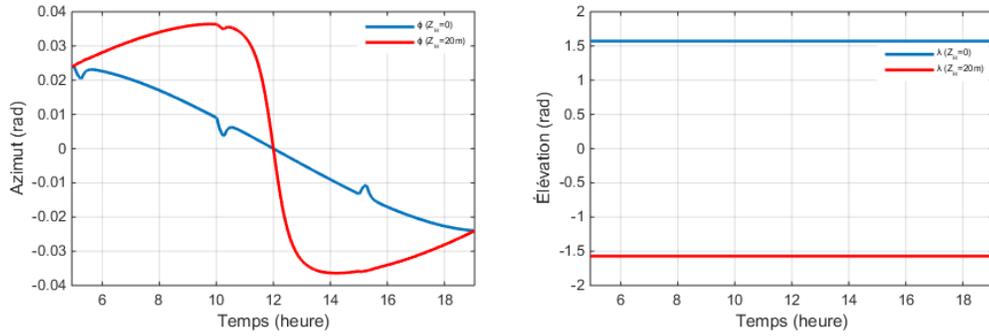


Fig.IV.17. Position du rayon réfléchi (ϕ, λ)

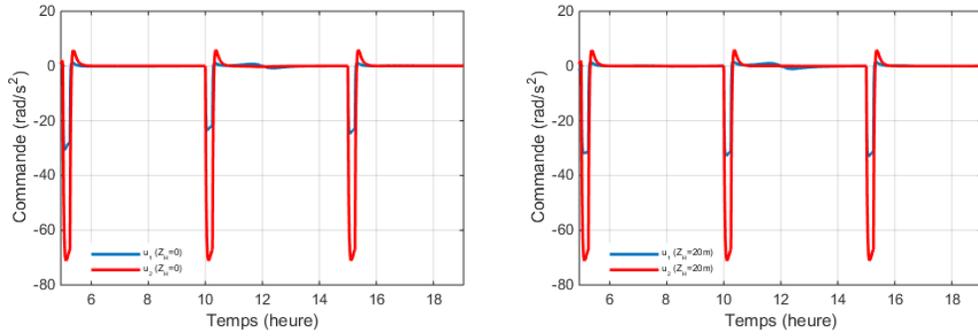


Fig.IV.18. Commandes (u_1, u_2)

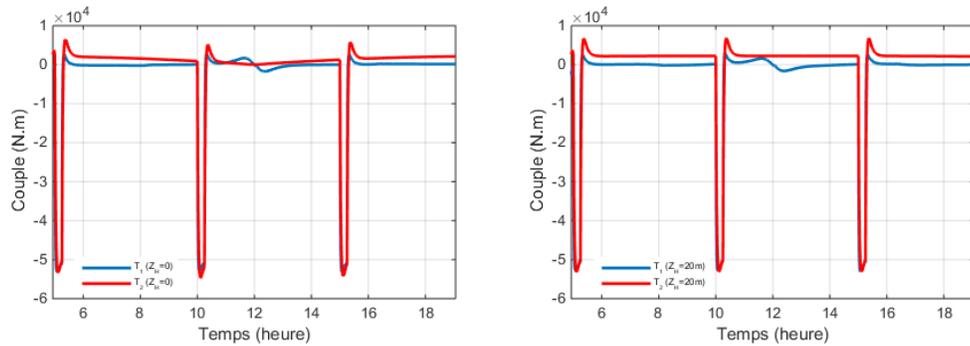


Fig.IV.19. Couples (τ_1, τ_2) avec perturbation

IV.7.1.2. Par retour de sortie dynamique

Les différents gains K_i sont obtenus avec $\gamma = 1,2554$:

$$A_{k1} = \begin{bmatrix} -97,0311 & 0 & -7,5038 & 0 \\ 0 & -97,0407 & 0 & -7,5034 \\ 127,0427 & 0 & -47,2487 & 0 \\ 0 & 127,0879 & 0 & -47,2489 \end{bmatrix}$$

$$A_{k2} = \begin{bmatrix} -96,8973 & 0 & -7,4903 & 0 \\ 0 & -96,8914 & 0 & -7,4887 \\ 126,8220 & 0 & -47,2253 & 0 \\ 0 & 126,7912 & 0 & -47,2347 \end{bmatrix}$$

$$A_{k3} = \begin{bmatrix} -96,8996 & 0 & -7,4904 & 0 \\ 0 & -96,8935 & 0 & -7,4897 \\ 126,8095 & 0 & -47,2306 & 0 \\ 0 & 126,8007 & 0 & -47,2303 \end{bmatrix}$$

$$A_{k4} = \begin{bmatrix} -96,9037 & 0 & -7,4910 & 0 \\ 0 & -96,8985 & 0 & -7,4907 \\ 126,8333 & 0 & -47,2260 & 0 \\ 0 & 126,8046 & 0 & -47,2307 \end{bmatrix}$$

$$B_{k1} = \begin{bmatrix} -7,3414 & 0 & -0,1278 & 0 \\ 0 & -7,3418 & 0 & -0,1278 \\ 27,4638 & 0 & 2,0396 & 0 \\ 0 & 27,4656 & 0 & 2,0394 \end{bmatrix}$$

$$B_{k2} = \begin{bmatrix} -7,3301 & 0 & -0,1274 & 0 \\ 0 & -7,3301 & 0 & -0,1274 \\ 27,4217 & 0 & 2,0354 & 0 \\ 0 & 27,4218 & 0 & 2,0356 \end{bmatrix}$$

$$B_{k3} = \begin{bmatrix} -7,3303 & 0 & -0,1274 & 0 \\ 0 & -7,3300 & 0 & -0,1274 \\ 27,4223 & 0 & 2,0356 & 0 \\ 0 & 27,4215 & 0 & 2,0355 \end{bmatrix}$$

$$B_{k4} = \begin{bmatrix} -7,3304 & 0 & -0,1274 & 0 \\ 0 & -7,3301 & 0 & -0,1274 \\ 27,4228 & 0 & 2,0355 & 0 \\ 0 & 27,4219 & 0 & 2,0355 \end{bmatrix}$$

$$C_{k1} = C_{k2} = C_{k3} = C_{k4} = \begin{bmatrix} -3,0878 & 0 & -1,3971 & 0 \\ 0 & -1,4991 & 0 & -0,6783 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$D_{k1} = D_{k2} = D_{k3} = D_{k4} = \begin{bmatrix} 0,2397 & 0 & 0,0159 & 0 \\ 0 & 0,4991 & 0 & -0,6783 \end{bmatrix}$$

Pour le même secteur $(0.5, 100, \pi/4)$ que la commande de retour d'état, on observe aussi d'après la Fig.IV.20 que la dynamique du système en boucle fermée est bien imposée par la commande de retour de sortie dynamique et que les pôles sont à l'intérieur du secteur.

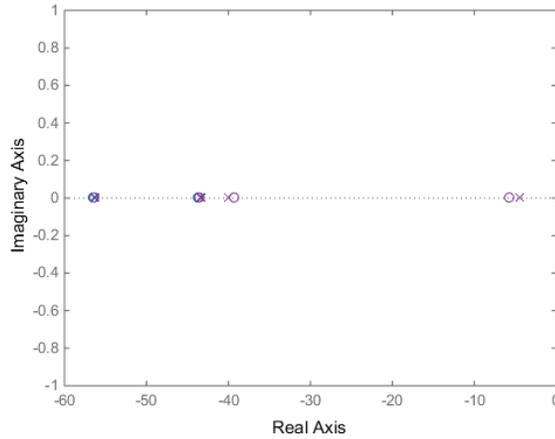


Fig.IV.20. Placement de pôles par retour de sortie dynamique

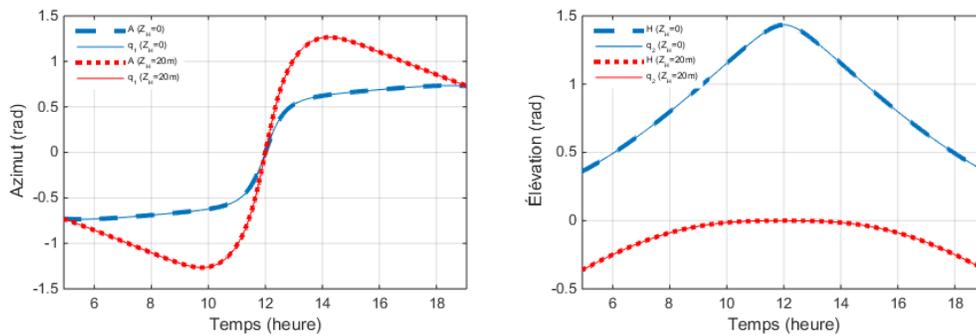


Fig.IV.21. Orientation de l'héliostat (\mathcal{A}, \mathcal{H})

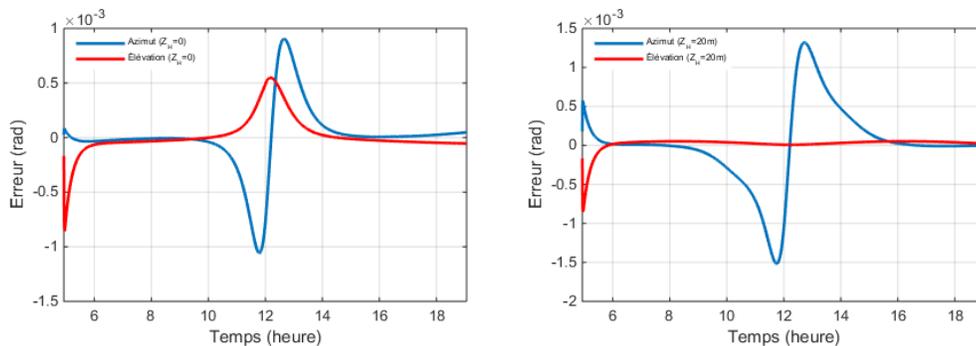


Fig.IV.22. Erreur de poursuite de l'héliostat

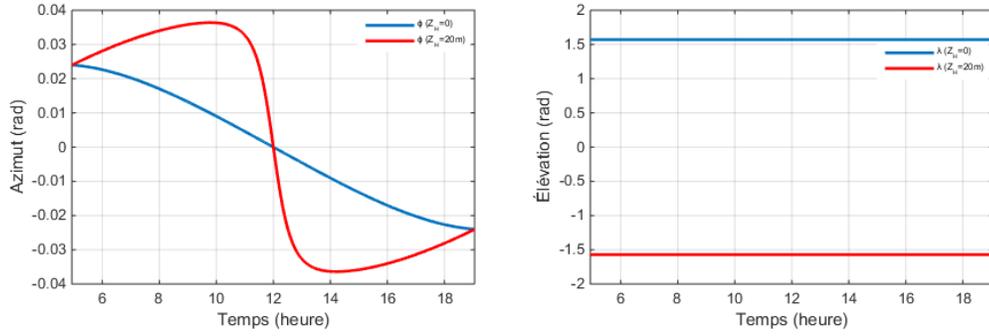


Fig.IV.23. Position du rayon réfléchi (ϕ, λ)

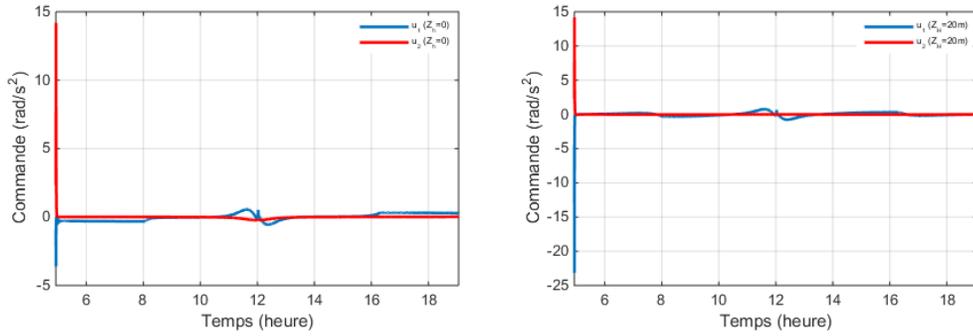


Fig.IV.24. Commandes (u_1, u_2)

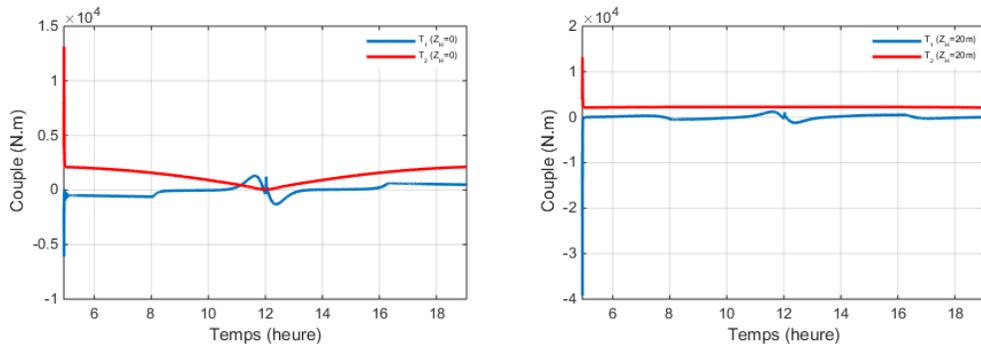


Fig.IV.25. Couples (τ_1, τ_2)

Là aussi la charge du vent considérée comme perturbation est une séquence d'impulsions mais deux fois plus grande que la précédente et elle l'est de 100000 $N.m$ ajoutée à l'entrée de commande du système pour illustrer le témoignage d'un comportement robuste du correcteur par retour de sortie dynamique.

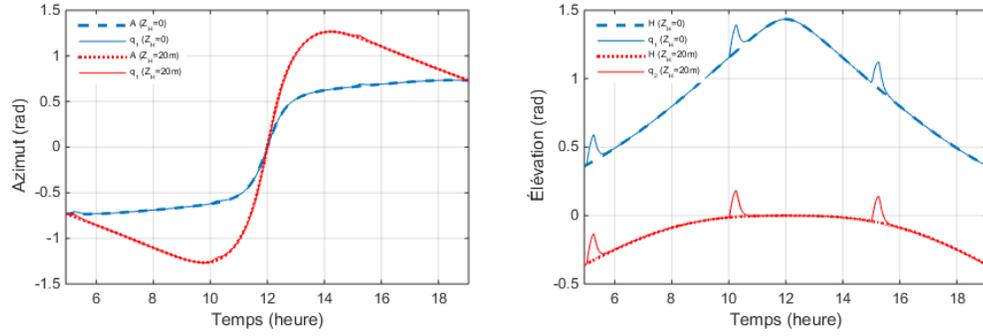


Fig.IV.26. Orientation de l'héliostat (\mathcal{A}, \mathcal{H})

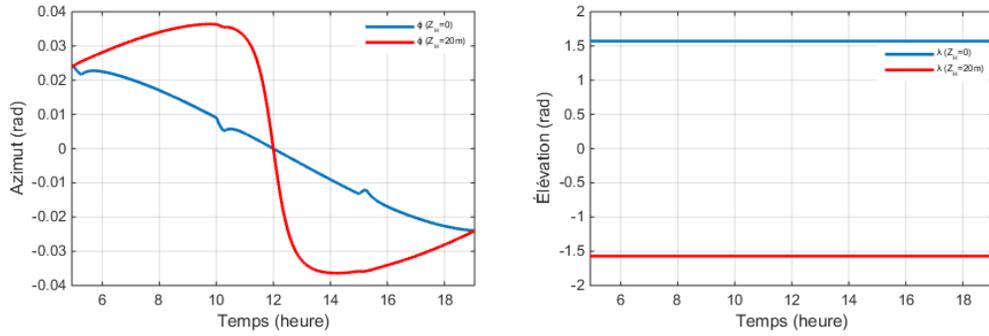


Fig.IV.27. Position du rayon réfléchi (ϕ, λ)

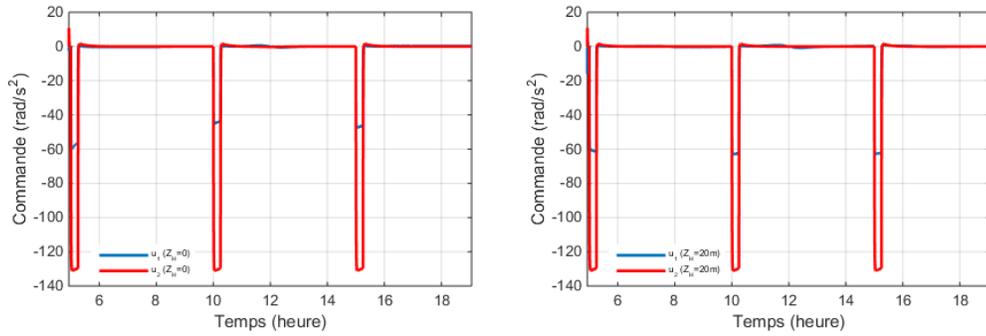


Fig.IV.28. Commandes (u_1, u_2)

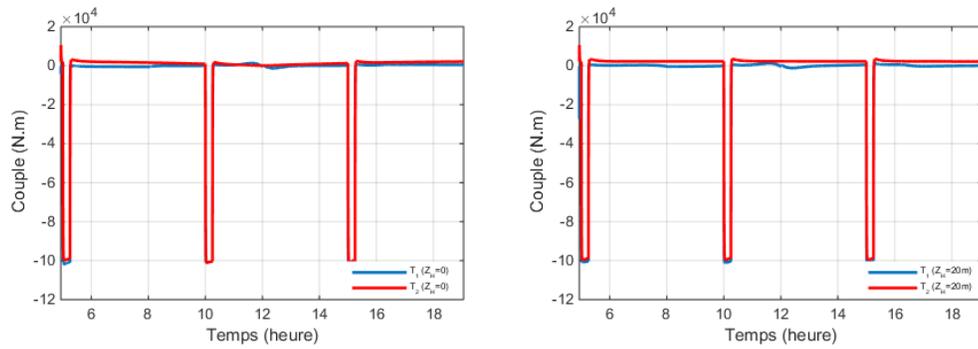


Fig.IV.29. Couples (τ_1, τ_2)

IV.7.2. Discussion des résultats

L'objectif de la commande est de permettre à l'héliostat de suivre la trajectoire imposée avec rejet de perturbations. Les gains sont ajustés de manière que la commande converge. Pour cette raison, deux types de commande le retour d'état et le retour de sortie dynamique sont appliquées à l'héliostat afin de contrôler ses axes et de satisfaire l'exigence exacte de la trajectoire suivie.

Fig.11 et Fig.21 montrent le suivi de la position désirée de la normale \vec{N} de l'héliostat dans le but de réfléchir le rayon incident \vec{S} vers la cible fixée au sommet de la tour avec différente position verticale Z_H de l'héliostat par rapport à la tour. Deux cas sont observés durant la simulation de l'héliostat sur le terrain d'expérience:

- ✓ 1^{er} cas $Z_H = 0$
- ✓ 2^{ème} cas $Z_H = 20m$

dont nous remarquons que les courbes sont différentes. La position de l'héliostat (X_H, Y_H, Z_H) par rapport à la tour et la hauteur de celui-ci H_T sont des paramètres clés pour le calcul de l'azimut ϕ et de l'élévation λ du rayon réfléchi \vec{R} .

La Fig.13 et Fig.23 présentent la variation de ces deux angles (ϕ, λ) qui sont très faibles, preuve que la position du rayon réfléchi est peu variante dire constante, là aussi dans les deux cas les courbes sont différentes. Enfin, c'est vrai que la hauteur de l'héliostat qui dépend de sa structure mécanique influence la réponse du système de poursuite sans affecter sa stabilité par la commande proposée. En plus, après quelques tests de perturbation des entrées de commande de l'héliostat, celui-là suit comme même sa consigne avec moins de 5% d'erreur statique (voir Fig.IV.12 et Fig.IV.22), cela prouve que la commande est certainement robuste (voir Fig.IV.16, Fig.IV.17, Fig.IV.26 et Fig.IV.27).

IV.7.3. Comparaison des résultats

La comparaison équitable entre deux méthodes de commande paraît difficile puisqu'elles sont de nature assez différente. La commande par retour d'état nécessite la connaissance de l'état du système or que la commande par retour de sortie dynamique contient elle-même un système linéaire multivariable dont les entrées sont les sorties du système, ce qui implique plus de degrés de liberté par rapport au retour d'état.

Les commentaires de comparaisons donnés ci-après sont basés sur les résultats montrés dans les Fig.IV.12, Fig.IV.14, Fig.IV.15, Fig.IV.22, Fig.IV.24 et Fig.IV.25. Les deux commandes réalisent le suivi de trajectoire avec une bonne précision statique (voir Fig.IV.12 et Fig.IV.22), les

commande délivrées par les correcteurs sont plus lisse sauf qu'on observe un comportement oscillatoire dans certains moments avec le correcteur par retour d'état (voir Fig.IV.14 et Fig.IV.24).

Si on compare les deux commandes, de meilleurs résultats ont été obtenus avec la commande par retour de sortie dynamique sauf qu'elle demande des couples plus au moins importants au démarrage (voir Fig.IV.15 et Fig.IV.25).

IV.8. Conclusion

Ce travail présente une structure mécanique d'un réel héliostat réalisé par le logiciel SolidWorks avec représentation géométrique et modèle dynamique calculé par le formalisme de Lagrange. Afin d'élargir le champ d'application de l'héliostat, il est simulé avec deux différentes hauteurs par rapport à la tour.

La poursuite en réfléchissant le rayon du soleil vers la cible fixée située au sommet de la tour pour différentes hauteurs de l'héliostat avec rejet de perturbations est l'objectif de notre contribution. En effet, la robustesse des commandes par retour d'état et retour de sortie dynamique avec synthèse \mathcal{H}_∞ et placement de pôles basées sur les contraintes LMI répondent avec succès à cet objectif d'avoir en termes d'erreurs de poursuite sur les angles d'azimut et d'élévation de l'héliostat des résultats efficaces et cela, pour différentes hauteurs de l'héliostat. Cependant, la commande par retour d'état s'avère robuste face à la perturbation de la commande délivrée par le correcteur, mais vu les résultats de comparaisons montrent que la commande par retour de sortie dynamique est plus robuste.

Cette étude vise à être une introduction à l'intégration de la robotique dans les énergies renouvelables et à l'installation de centrales électriques à tour non seulement sur le sol plat mais aussi sur le sol déformé et compris le concept LPV avec l'exploit des outils de la commande robuste.

THÈSE DOCTORAT

CONCLUSION GÉNÉRALE

COMMANDE LINÉAIRE À PARAMÈTRES VARIANTS D'UN ROBOT

Conclusion générale

Le domaine de l'analyse et de la commande des systèmes LPV a reçu beaucoup d'attention récemment en raison de son rôle dans le développement d'une technique systématique le gain scheduling. L'approche quadratique et le cadre de système polytopique ou LFT sont associés à la technique d'analyse et de synthèse des systèmes LPV. Ces systèmes peuvent directement traiter les paramètres variants dans le temps et donner un correcteur de type LPV, et sont les préférés pour la commande LPV. Cependant, le cadre actuel des systèmes polytopiques ou LFT comporte deux progrès potentiels:

- Sélectionner le vecteur de paramètres variants afin de réduire le conservatisme (voir l'annexe) de l'approche du système représentatif;
- Résoudre exactement les problèmes d'optimisation convexe impliquant un nombre infini de LMI.

Dans cette thèse, qui est le résultat d'un travail de recherche poussé d'un axe récent, on est intéressé à la commande de systèmes dynamiques comme celui du robot manipulateur par l'approche LPV en tentant d'apporter une solution à deux types de problèmes liés à la synthèse d'un correcteur stabilisant avec des paramètres variants supposés mesurables: le suivi de trajectoire de référence et le rejet de perturbations. Cette approche qui est celle du LPV a été proposée comme une extension de l'approche \mathcal{H}_∞ dans le contexte des systèmes linéaires à paramètres variants dans le temps, voir des systèmes non linéaires. En effet, l'approche LPV constitue une alternative rigoureuse aux approches heuristiques à gain-scheduling, il a été montré qu'elle propose un cadre théorique attractif et bien posé. Le but ultime de notre recherche est de formuler les résultats d'analyse et de synthèse par les LMIs (Inégalités matricielles linéaires). LMI est un type particulier de problème convexe qui peut être résolu efficacement par des algorithmes tels que LMI Control Toolbox de MATLAB.

Initialement, après avoir exposé la représentation d'état des différents types de système brièvement passée en revue dans le chapitre I, nous avons défini les classes des paramètres qui peuvent engendrer les systèmes variants et systèmes LPV. Deuxièmement, trois formulations de

systèmes LPV sont présentées: les systèmes LPV polytopiques, les systèmes LPV polynomiaux et les systèmes LFT. Alors que le premier est particulièrement adapté aux systèmes avec une dépendance affine sur les paramètres, il conduit généralement à une représentation conservatrice des systèmes à dépendance non affine. Des exemples sont donnés pour montrer l'intérêt d'une telle représentation. D'un autre côté, les systèmes polynomiaux sont mieux adaptés à une représentation plus générale excluant la dépendance rationnelle. Enfin, les systèmes LFT dont on n'a pas fait l'objet d'une illustration applicatif sont la représentation la plus puissante puisqu'ils permettent de considérer n'importe quel type de dépendance aux paramètres, y compris les relations rationnelles. Par ailleurs, basé sur les résultats d'analyse, les deux modèles (polytopique ou LFT) peuvent être exploités pour la synthèse de correcteurs LPV via à la fois le retour d'état et le retour de sortie dynamique selon la représentation LPV du système dynamique.

Le contenu de ce mémoire de thèse exposé rappelle quelques antécédents et outils théoriques, nous avons vu que le critère de Lyapunov dans le cas des systèmes LTI s'étend même aux systèmes LPV. En effet, l'analyse de la stabilité quadratique des systèmes LPV polytopiques via la fonction de Lyapunov dépendante des paramètres est une stabilité robuste. L'analyse de stabilité des systèmes LPV sous forme LFT est définie. Deux approches passivité et petit gain sont présentées et les différents résultats sont liés les uns aux autres. Suite à la stabilité quadratique, les performances quadratiques \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ et notion de pôles sont aussi présentées sous LMI pour le système LPV polytopique ou LFT. Enfin, dans le contexte de l'approche quadratique, nous n'avons pas omis de citer dans le cadre de la synthèse sur les correcteurs retour d'état et retour de sortie dynamique qui garantissent la stabilisation quadratique aux systèmes LPV.

Cependant, la commande robuste avec synthèse \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ via le retour de sortie est équivalente à la solvabilité d'une paire des équations de Riccati, de telles conditions peuvent être tournées sous certaines hypothèses sur les matrices du système LPV, il s'agit de la synthèse \mathcal{H}_∞ dont la résolution optée est sous forme de contraintes LMI. En effet, une partie importante du travail de recherche réalisé, la formulation générale du problème de commande robuste, le choix nous a orienté au problème de commande \mathcal{H}_∞ pour les systèmes LPV qu'il soit polytopique ou LFT, qui ont limité les taux de variation des paramètres et la mesure du paramètre et de sa dérivée. Compte tenu de cette dernière option, la synthèse des correcteurs retour d'état et retour de sortie dynamique est remise en cause bien évidemment en tenant compte ou pas du taux de variation borné des paramètres.

Deux lois de commande LPV sont proposées pour réaliser un suivi de trajectoire dans l'espace articulaire:

- Commande par retour d'état avec synthèse \mathcal{H}_∞ et placement de pôles
- Commande par retour de sortie dynamique avec synthèse \mathcal{H}_∞ et placement de pôles

Ces commandes proposées ont été appliquées intensivement au système de poursuite à deux axes nommé héliostat et considéré comme un robot manipulateur. La modélisation LPV ainsi que la synthèse de correcteurs LPV ont été présentées. Un modèle dynamique de l'héliostat et sa représentation polytopique ont été développés y compris que la comparaison des correcteurs a été abordée.

Finalement, nous nous sommes contentés de ne présenter que les résultats théoriques agrémentés par quelques résultats applicatifs. Nous donnons les conclusions suivantes: La théorie de la commande LPV exposée dans cette thèse est la généralisation des problèmes standard \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ , et telle qu'elle élargisse l'applicabilité et l'utilité de la méthodologie de commande moderne. Ils constituent une nouvelle approche pour gain scheduling et fournissent une procédure bien fondée pour la conception de planification de gain.

Perspectives

Les principales perspectives envisagées sont comme suit:

- Les commandes proposées utilisées pour la poursuite de consigne d'un système mécanique immobile peuvent être exploitées pour un système mobile.
- Le modèle dynamique calculé est dépourvu d'autres modèles comme les actionneurs et capteurs, la prise en compte de ces modèles conduit à l'amélioration des performances de poursuite de consigne.
- Au niveau de l'application et pour un système multi-agent, la combinaison de la commande LPV avec d'autres méthodes telles que les commandes conçues pour l'évitement d'obstacle peut être envisagée pour résoudre le problème de l'ombre causés par les héliostats les uns des autres.

Annexe I

THÈSE DOCTORAT

RAPPELS DE TOPOLOGIE

COMMANDE LINÉAIRE À PARAMÈTRES VARIANTS D'UN ROBOT

Annexe I: Rappels de topologie

A.I.1. Simplexe: Un simplexe dans \mathfrak{R}^n est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de \mathfrak{R}^n .

A.I.2. Polyèdre: Un polyèdre dans \mathfrak{R}^n est un ensemble de la forme

$$P := \{x \in \mathfrak{R}^n | Ax \leq b\}$$

où $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathfrak{R}^m$ sont fixés.

Soit $P := \{x \in \mathfrak{R}^n | Ax \leq b\}$ un polyèdre de \mathfrak{R}^n . Pour $j \in \{1, \dots, m\}$, notons A^j la $j^{\text{ème}}$ ligne de A (considérée comme un élément de \mathfrak{R}^n) et b^j la $j^{\text{ème}}$ composante de b . on peut dès lors décrire de manière équivalente

$$P := \left\{ x \in \mathfrak{R}^n \mid \langle A^j, x \rangle \leq b^j, \forall j \in \{1, \dots, m\} \right\}$$

Autrement dit, un sous-ensemble de \mathfrak{R}^n est un polyèdre si et seulement si c'est une intersection finie de semi-espace fermés de \mathfrak{R}^n . En particulier, tout polyèdre dans \mathfrak{R}^n est un convexe fermé.

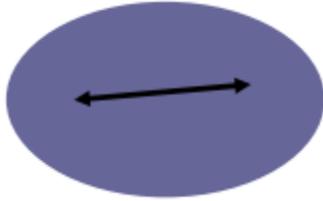
A.I.3. Polytope: Soit un polyèdre P , il s'agit d'un polytope si et seulement si il vérifie les trois propriétés suivantes :

- P est convexe,
- P est compact,
- $P \neq \emptyset$

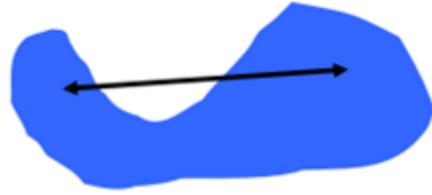
Un polytope dans \mathfrak{R}^n est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de \mathfrak{R}^n .

A.I.4. Ensemble convexe: Dans un espace vectoriel euclidien \mathfrak{R}^n , un sous-ensemble C est convexe si, chaque fois que l'on relie deux points appartenant à cet ensemble par un segment de droite Δ , ce segment reste à l'intérieur de l'ensemble C . Un ensemble C est dit convexe si

$$\forall x, y \in C, \exists \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$



Ensemble convexe



Ensemble non convexe

Dans la suite, par abus de langage et lorsque cela n'amène aucune ambiguïté, on parlera simplement d'un convexe ou d'un convexe de \mathfrak{R}^n pour désigner un sous-ensemble convexe de \mathfrak{R}^n . D'un point de vue géométrique, un convexe est donc un ensemble qui, lorsqu'il contient deux points, contient nécessairement le segment les reliant.

A.I.5. Combinaison convexe: Soient x_1, \dots, x_k un nombre fini de points de \mathfrak{R}^n , et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des réels tel que $\forall j = 1, \dots, k \lambda_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$. On dit que

$$x := \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j$$

est une combinaison convexe des points x_1, \dots, x_k .

Plus généralement, si $S \subseteq \mathfrak{R}^n$ est un sous-ensemble quelconque, on dit que $x \in \mathfrak{R}^n$ est une combinaison convexe de points de S s'il existe un nombre fini de points de S dont x soit une combinaison convexe.

Dans le cas particulier de deux points x_1 et x_2 , toute combinaison convexe des x_1, x_2 peut s'écrire sous la forme

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda \in [0,1]$$

Qui intervient dans la définition d'un ensemble convexe.

A.I.6. Enveloppe convexe: L'enveloppe convexe d'un sous-ensemble S de \mathfrak{R}^n est l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de \mathfrak{R}^n contenant S , L'enveloppe convexe de S est par conséquent le plus petit sous-ensemble convexe de \mathfrak{R}^n qui contienne S , on le note $conv(S)$.

A.I.7. Combinaison positive: Soient x_1, \dots, x_k un nombre fini de points de \mathfrak{R}^n , et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des réels positifs. On dit alors que

$$x := \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j$$

est une combinaison positive des points x_1, \dots, x_k .

Plus généralement, si $S \subseteq \mathfrak{R}^n$ est un sous-ensemble quelconque, on dit que $x \in \mathfrak{R}^n$ est une combinaison positive de points de S s'il existe un nombre fini de points de S dont x soit une combinaison positive.

A.I.8. Ensemble compact: Dans un espace vectoriel euclidien, un ensemble E est compact si et seulement s'il est séparable et vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.

Un ensemble E est séparable si et seulement si pour $x, y \in E$, on peut trouver deux voisinages de x et y (X, Y) tels que : $X \cap Y = \emptyset$.

L'ensemble E vérifie la propriété de Borel-Lebesgue si et seulement s'il existe un ensemble fini J tel que $(X_i)_{i \in J} \supset E$ où X_i sont des ouverts.

Le sous-ensemble de points O de l'espace euclidien \mathfrak{R}^n est ouvert lorsque tout point P de O est un point intérieur.

Le point P est dit intérieur de S (avec S une partie de l'espace euclidien \mathfrak{R}^n) s'il existe une boule ouverte centrée en P qui est contenue dans S .

Dans un espace métrique (E, d) , $x \in E$ et $\rho \in \mathfrak{R}_+^*$, la boule ouverte B de centre x_0 et de rayon ρ est définie par l'ensemble : $B(x_0, \rho) := \{x \in E / d(x, x_0) < \rho\}$.

Annexe II

THÈSE DOCTORAT

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE ESPACE \mathcal{L}_q

COMMANDE LINÉAIRE À PARAMÈTRES VARIANTS D'UN ROBOT

Annexe II: Éléments d'algèbre linéaire espace \mathcal{L}_q

A.II.1. Valeurs propres: Soit A une matrice carrée réelle ou complexe. On appelle valeur propre la grandeur λ telle qu'il existe un vecteur propre x vérifiant $Ax = \lambda x$.

Le calcul des valeurs propres se fait par l'intermédiaire de la résolution de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$.

A.II.1.1. Propriété: Les valeurs propres des matrices réelles symétriques ($A^T = A$) et complexes hermitiennes ($A^H = (A^*)^T$) sont toutes réelles.

A.II.2. Valeurs singulières:

A.II.2.1 définition: Les valeurs singulières d'une matrice complexe M sont les racines carrées des valeurs propres de $M^H M$ où M^H est le hermitien (transposé conjugué) de M . On les note $\sigma_i(M)$.

A.II.2.1. Propriété:

- Les valeurs singulières sont des nombres réels positifs.
- Les valeurs singulières non nulles de M sont identiques à celles de M^H (invariance par l'opération transposé/conjugué)

A.II.3. Rang et noyau d'une matrice

Le rang d'une matrice M réelle noté $\text{rang}(M)$ est son nombre maximal de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes.

- On dit que M est de plein rang en lignes si son nombre maximal de lignes linéairement indépendantes est égal à sa dimension en lignes.
- On dit que M est de plein rang en colonnes si son nombre maximal de lignes linéairement indépendantes est égal à sa dimension en colonnes.

A.II.4. Positivité d'une matrice:

A.II.4.1. Définition: Une matrice $A \in \mathbb{R}^n$ est dite positive et on not $A \geq 0$ si la forme quadratique $x^T Ax$ est positive pour tout vecteur x .

Cette définition se transpose évidemment au cas négatif. On peut toujours écrire une forme quadratique à partir d'une matrice symétrique. Ainsi, $x^T Ax = \frac{1}{2} x^T (A^T + A)x$. On ne contentera donc de considérer le cas des matrices symétriques. Ces matrices ont la particularité d'avoir toutes leurs valeurs propres réelles.

A.II.4.1. Propriété: Une matrice A symétrique est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives et on note $A \geq 0$.

On définit aussi la positivité stricte et on dit qu'une matrice est définie positive si toutes ses valeurs propres sont strictement positives. C'est équivalent à dire que la forme quadratique correspondante $x^T Ax$ est strictement positive pour tout x non nul.

A.II.4.2. Propriété:

- Soit λ un scalaire, $A - \lambda I > 0$ si et seulement si les valeurs propres de A sont strictement supérieures à λ .
- $P > 0 \Leftrightarrow -P < 0$; on peut donc toujours se ramener à un problème de positivité (ou de négativité).

A.II.5. Espace \mathcal{L}_q

Les signaux avec des propriétés mathématiques similaires appartiennent à des espaces de signal qui sont généralement équipés de normes de signal appropriées. Les espaces \mathcal{L}_q sont les espaces de signaux généraux les plus fréquemment utilisés décrits ci-dessous.

A.II.5.1. Définition:

Pour $q = 1, 2, \dots$ l'espace $\mathcal{L}_q[0, \infty[$ contient les fonctions $f: \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}$, qui sont des mesures de Lebesgue (c'est-à-dire que leur intégrale généralisée existe au sens de Lebesgue) et satisfait

$$\int_0^\infty |f(t)|^q dt \leq \infty$$

La grandeur des fonctions dans un espace \mathcal{L}_q est mesurée en utilisant les normes.

A.II.5.2. Définition:

Soit $f \in \mathcal{L}_q[0, \infty[$ pour $q = 1, 2, \dots$. Le q -norme de f désignée par $\|f\|_q$ est définie comme

$$\|f\|_q = \left(\int_0^\infty |f(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

On sait que $\mathcal{L}_q[0, \infty[$ sont des espaces linéaires normés complets (espaces de Banach) par rapport aux q – normes.

Les espaces \mathcal{L}_q peuvent être étendus de la manière suivante:

Pour toute fonction $f(\cdot)$, on notera $f_T(\cdot)$ sa troncature au-delà de l'instant T , c'est-à-dire:

$$\begin{cases} f_T(t) = f(t) & \text{si } q < \infty \\ f_T(t) = 0 & \text{si } q = \infty \end{cases}$$

A.II.5.3. Définition:

$\mathcal{L}_{q,e}$ est une extension classique de \mathcal{L}_q à l'espace des fonctions $f(\cdot)$ telles que

$$\forall T > 0, f_T(\cdot) \in \mathcal{L}_q(\text{resp. } \mathcal{L}_q^n)$$

A.II.5.4. Définition:

$\mathcal{L}_q^n(\text{resp. } \mathcal{L}_{q,e}^n)$ est l'espace des fonctions $f(\cdot)$ telles que:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, f_i(\cdot) \in \mathcal{L}_q(\text{resp. } \mathcal{L}_{q,e}^n)$$

A.II.5.1. Propriété

$\mathcal{L}_q, \mathcal{L}_q^n, \mathcal{L}_{q,e}, \mathcal{L}_{q,e}^n$ sont des espaces vectoriels.

A.II.6. Preuve du lemme II.6.2.1:

De la relation (II. 60) nous avons

$$\begin{bmatrix} S & M \\ M^T & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & Z \end{bmatrix} = I \quad (1)$$

et aussi

$$MN^T = I - SQ \quad (2)$$

$$SN + MZ = 0 \quad (3)$$

$$M^T Q + TN^T = 0 \quad (4)$$

De (2), (3) et (4) nous avons que

$$P\Pi_1 = \Pi_2 \quad (5)$$

avec

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} P & I \\ E^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & M^T \end{bmatrix} \quad (6)$$

Puisque N est non singulière, Π_1 est non singulière et

$$\Pi_1^T P \Pi_1 = \Pi_1^T \Pi_2 = \begin{bmatrix} Q & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0 \quad (7)$$

Inversement supposer (II. 61) satisfaite. Alors $I - SP$ est non singulière et nous pouvons trouver des matrices non singulières M et E telles que (2) soit vérifiée. De plus définir

$$T = -M^T Q N^{-T} \quad (8)$$

$$Z = -M^{-1} S N \quad (9)$$

Notez que T et Z sont symétriques; en effet (pour T)

$$T^T = -N^{-T} Q M = -N^{-T} Q (I - S Q) N^{-T} = -N^{-T} (I - S Q) Q N^{-T} = T \quad (10)$$

Définissons maintenant P et la matrice non singulière Π_1 selon (II. 60) et (6) respectivement. Nous avons

$$\Pi_1^T P \Pi_1 = \begin{bmatrix} Q & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0 \quad (11)$$

donc $P > 0$; enfin, il est simple de vérifier que P^{-1} est égal au second de (II. 60).

Annexe III

THÈSE DOCTORAT

NORMES

COMMANDE LINÉAIRE À PARAMÈTRES VARIANTS D'UN ROBOT

Annexe III: Normes

A.III.1. Normes de signal et système

A.III.1.1. Normes de signal

En supposant que $x(t)$ est une fonction dans l'espace complexe où $x(t) \in \mathbb{C}$, alors le conjugué de $x(t)$ est noté $x^*(t)$. Les normes de signal sont définies comme suit:

Définition (normes $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_\infty$)

- la norme-1 d'une fonction $x(t)$ est donnée par

$$\|x(t)\|_1 = \int_0^{+\infty} |x(t)| dt \quad (1)$$

- la norme-2 (qui introduit la norme énergétique) est donnée par

$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} x^*(t)x(t) dt} \quad (2)$$

- la norme- ∞ est donnée par

$$\|x(t)\|_\infty = \sup_t |x(t)| \quad (3)$$

$$\|x(t)\|_\infty = \sup_{\text{Re}(s) \geq 0} \|X(s)\| = \sup_\omega \|X(j\omega)\| \quad (4)$$

A.III.1.2. Normes du système

Définition (Norme \mathcal{H}_2) La norme \mathcal{H}_2 d'un système LTI strictement propre définie par (I.1) (chapitre I) de l'entrée $u(t)$ à la sortie $y(t)$ est l'énergie (norme \mathcal{L}_2) de la réponse impulsionnelle $g(t)$ définie comme,

$$\begin{aligned} \|G(j\omega)\|_2 &= \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} g^*(t)g(t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}[G^*(j\omega)G(j\omega)] d\omega} \\ &= \sup_{u(s) \in \mathcal{H}_2} \frac{\|Y(s)\|_\infty}{\|U(s)\|_2} \end{aligned} \quad (5)$$

La norme \mathcal{H}_2 est finie si seulement si $G(s)$ est strictement propre.

Définition (Norme \mathcal{H}_∞) La norme \mathcal{H}_∞ d'un système LTI strictement propre définie par (I.1) (chapitre I) de l'entrée $u(t)$ à la sortie $y(t)$ est le gain énergie-énergie induit (norme \mathcal{L}_2 à \mathcal{L}_2) défini comme,

$$\begin{aligned} \|G(j\omega)\|_\infty &= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \\ &= \sup_{u(s) \in \mathcal{H}_2} \frac{\|Y(s)\|_2}{\|U(s)\|_2} \\ &= \max_{u(t) \in \mathcal{L}_2} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \end{aligned} \quad (6)$$

La norme \mathcal{H}_∞ représente le gain maximal de la réponse en fréquence du système. Il est également appelé le niveau d'atténuation le plus défavorable dans le sens où il mesure l'amplification maximale que le système peut délivrer sur l'ensemble de fréquence entier. Pour les systèmes SISO (ou MIMO), il représente la valeur maximale du pic sur la grandeur de Bode (respectivement la valeur singulière). La norme \mathcal{H}_∞ ne peut être obtenue qu'à partir de solutions numériques telles que la résolution LMI.

A.III.2. Notion de gain \mathcal{L}_2

D'un point de vue physique, la norme \mathcal{L}_2 représente l'énergie d'un signal. 2 – norme d'un signal $u(t)$ est

$$\|u(t)\|_{\mathcal{L}_2} = \left(\int_0^\infty \|u(t)\|_2^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Annexe IV

THÈSE DOCTORAT

LEMMEs USUELS

COMMANDE LINÉAIRE À PARAMÈTRES VARIANTS D'UN ROBOT

Annexe IV: Lemmes usuels

A.IV.1. Lemme de Kalman-Yakubovich-Popov

Lemme de Kalman-Yakubovich-Popov [58, 164, 165] indique l'équivalence entre un critère de fréquence et une LMI.

Lemme: Étant donné $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $M = M^T \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$, avec $\det(j\omega I - A) \neq 0$

$\forall \omega \in \mathbb{R}$ et (A, B) stabilisable, les relations suivantes sont équivalentes.

$$\text{i) } \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \leq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$$

ii) il existe une matrice $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que

$$M + \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \leq 0$$

L'équivalence correspondante pour les inégalités strictement inférieures est vérifiée même si (A, B) n'est pas stabilisable.

Notez que P est nécessairement pas besoin d'être définie positive. Cependant, si A est stable, c'est-à-dire a toutes ses valeurs propres dans le demi-plan gauche ouvert, alors $P > 0$.

A.IV.2. Complément de Schur

L'équivalence entre l'inégalité de Riccati et LMI peut être vue par le fait bien connu suivant:

Lemme: Supposons que R et S sont hermitiens, c'est-à-dire $R = R^T$ et $S = S^T$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

$$R > 0, \quad S + G^T R^{-1} G < 0 \quad (7)$$

et

$$\begin{bmatrix} S & G^T \\ G & -R \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

Preuve: Post-multiplier (8) par la non singulière $\begin{bmatrix} I & 0 \\ R^{-1}G & I \end{bmatrix}$ et pré-multiplier par sa transposition:

$$\begin{bmatrix} I & G^T R^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & G^T \\ G & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ R^{-1}G & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S - G^T R^{-1} G & 0 \\ 0 & -R \end{bmatrix} < 0$$

ce qui est équivalent à la condition (11).

A.IV.3. Lemme réel positive

Le lemme réel positif est fortement lié à la passivité d'un système et a joué un rôle crucial dans les questions liées à la stabilité des systèmes interconnectés et à la synthèse des systèmes passifs.

Soit le système LTI suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Lemme: Le système LTI est passif (ou réel positive) si seulement s'il existe une matrice

$P = P^T > 0$ telle que

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - C^T \\ B^T P - C & -(D + D^T) \end{bmatrix} < 0$$

Alors pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ avec $\det(j\omega I - A) \neq 0$ on a $H(j\omega) + H(j\omega)^* \geq 0$.

De plus, $V(x) = x^T P x$ définit une fonction stockage quadratique.

Annexe V

THÈSE DOCTORAT

INÉGALITÉS MATRICIELLES LINÉAIRES

COMMANDE LINÉAIRE À PARAMÈTRES VARIANTS D'UN ROBOT

Annexe V: Inégalités matricielles linéaires

A.V.1. Inégalités matricielles

A.V.1.1. Temps continu

Nous allons voir ici des systèmes linéaires et stables soumis à des incertitudes non linéaires:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx + Dw \end{cases} \quad (9)$$

où w est l'entrée de perturbation et z est la sortie de performance.

L'objectif de cette section est de fournir des critères pour assurer des limites supérieures de la norme \mathcal{L}_2 -induite de w à z pour le système LTI, c'est-à-dire pour montrer que

$$\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2 \quad (10)$$

En faisant une mise à l'échelle de w ou z , il n'y a aucune restriction à supposer que $\gamma = 1$:

$$\|z\|_2 < \|w\|_2 \quad (11)$$

ou équivalent

$$\|z\|_2 - \|w\|_2 = \int z^T(t) z(t) - w^T(t) w(t) dt < 0 \quad (12)$$

Pour ce problème, la fonction de coût suivante peut être utilisée

$$g(x, w) = \|z\|^2 - \|w\|^2 = z^T z - w^T w \quad (13)$$

et une fonction de Lyapunov quadratique est choisie

$$V(x) = x^T P x \quad (14)$$

Pour assurer la stabilité interne, on suppose que la matrice de Lyapunov P est symétrique définie positive ($P > 0$), c'est-à-dire $V(x) > 0, \forall x \neq 0$. Si $x(0) = 0$, la norme \mathcal{L}_2 -induite de w à z est inférieure à 1 si le Hamiltonien pour (1) et (3) est négatif pour tout x :

$$\begin{aligned} H &= \dot{V} + g(x, w) \\ &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + z^T z - w^T w \\ &= x^T P (Ax + Bw) + (Ax + Bw)^T P x + (Cx + Dw)^T (Cx + Dw) - w^T w \end{aligned} \quad (15)$$

Afin d'assurer que $\|z\|_2 < \|w\|_2$ alors $H < 0$ doit être satisfait pour tout x et w .

A.V.1.2. Inégalité de Riccati

Une façon d'arriver à l'inégalité de Riccati est de compléter les carrés de (15). Remarquons d'abord qu'en laissant $x = 0$, on peut déduire que $D^T D < I$ et donc $R = I - D^T D$ sont inversibles. Alors

$$\begin{aligned} H &= x^T (A^T P + PA + (B^T P + D^T C)R^{-1}(B^T P + D^T C)^T + C^T C)x \\ &\quad - (w - R^{-1}(B^T P + D^T C)x)^T R^{-1}(w - R^{-1}(B^T P + D^T C)x) \\ &\leq x^T (A^T P + PA + (B^T P + D^T C)R^{-1}(B^T P + D^T C)^T + C^T C)x \end{aligned}$$

L'égalité est obtenue pour

$$w = R^{-1}(B^T P + D^T C)x \quad (16)$$

ce qui peut être interprété comme la pire perturbation.

A.V.1.3. Inégalités matricielles linéaires (LMIs)

Au lieu de remplir les cases, le Hamiltonien (15) peut être réécrit en

$$H = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA + A^T P + C^T C & PB + C^T C \\ B^T P + D^T C & D^T D - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

qui doit être maintenu pour tout x et w non nul. Ceci implique que

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + C^T C & PB + C^T C \\ B^T P + D^T C & D^T D - I \end{bmatrix} < 0$$

qui est une inégalité matricielle linéaire (LMI) par rapport à P , pour donné (A, B, C, D) . Ceci implique que l'ensemble de P satisfaisant LMI est convexe, ce qui simplifie considérablement la recherche de P .

A.V.2. Inégalités matricielles équivalentes

Nous avons montré l'équivalence entre l'inégalité de Riccati et LMI correspondante. Ils ont des vertus différentes, qui seront utilisées lorsque cela est pratique. L'un des objectifs du choix de LMI est qu'il fournit souvent un outil simple pour montrer que l'ensemble des solutions est convexe.

En répétant le complément de Schur, nous arrivons aux conditions équivalentes suivantes:

- i) $\begin{cases} \bar{\sigma}(D) < 1 \\ A^T P + PA + (B^T P + D^T C)^T (I - D^T D)^{-1} (B^T P + D^T C) + C^T C \end{cases}$
- ii) $\begin{bmatrix} PA + A^T P + C^T C & PB + C^T C \\ B^T P + D^T C & D^T D - I \end{bmatrix} < 0;$

$$\text{iii) } \begin{bmatrix} P A + A^T P & P B & C^T \\ B^T P & -I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0.$$

Toutes sauf la première de ces inégalités sont linéaires par rapport à P si (A, B, C, D) sont maintenues fixes. La dernière de ces inégalités (iii) est linéaire par rapport à (A, B, C, D) pour un P donné, d'où nous concluons que l'ensemble des matrices de système satisfaisant l'inégalité de Riccati ou de manière équivalente la LMI est convexe. Le lemme réel borné indique une extension de ces résultats.

Lemme réel borné [145, 166]

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) $\|G\|_\infty < \gamma$ et A stable avec $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$;
- ii) il existe une solution $P > 0$ à LMI

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

Preuve: Nous avons déjà montré que (ii) \Rightarrow (i). En utilisant le lemme de Kalman-Yakubovich-Popov, le sens opposé est prouvé.

A.V.3. Matrice Hamiltonienne

En mathématiques, une matrice hamiltonienne (ou de Hamilton) A est une matrice réelle $2n \times 2n$ satisfaisant la condition que le produit KA soit symétrique, K étant la matrice antisymétrique:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

et I_n étant la matrice identité $n \times n$. En d'autres termes, A est hamiltonienne si et seulement si:

$$KA - A^T K^T = KA + A^T K = 0 \quad (20)$$

Dans l'espace vectoriel des matrices $2n \times 2n$, les matrices hamiltoniennes forment un sous-espace vectoriel de dimension $2n^2 + n$.

Bibliographie

THÈSE DOCTORAT

BIBLIOGRAPHIE

COMMANDE LINÉAIRE À PARAMÈTRES VARIANTS D'UN ROBOT

Bibliographie

- [1] P. Apkarian and R. J. Adams. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Trans. Control Sys. Tech.*, 6 :21–32, 1998.
- [2] P. Apkarian and P. Gahinet. A convex characterization of gain-scheduled \mathcal{H}_∞ controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 5:853–864, 1995.
- [3] APKARIAN, Pierre, GAHINET, Pascal, et BECKER, Greg. Self-scheduled \mathcal{H}_∞ control of linear parameter-varying systems: a design example. *Automatica*, 1995, vol. 31, no 9, p. 1251-1261.
- [4] De Caigny, J. Camino, R. Oliveira, P. Peres, J. Swevers, Gain scheduled \mathcal{H}_∞ control of discrete-time polytopic time-varying systems, in *Proceedings of 47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2008, pp. 3872–3877.
- [5] De Caigny, J. Camino, R. Oliveira, P. Peres, J. Swevers, Gain scheduled \mathcal{H}_2 control of discrete-time polytopic time-varying systems, in *Congresso Brasileiro de Automatica*, 2008.
- [6] De Caigny, Jan, CAMINO, Juan F., OLIVEIRA, Ricardo CLF, *et al.* Gain-scheduled \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control of discrete-time polytopic time-varying systems. *IET control theory & applications*, 2010, vol. 4, no 3, p. 362-380.
- [7] De Caigny, Jan, CAMINO, Juan F., OLIVEIRA, Ricardo CLF, *et al.* Gain-scheduled dynamic output feedback control for discrete-time LPV systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, vol. 22, no 5, p. 535-558.
- [8] GAHINET, Pascal, APKARIAN, Pierre, et CHILALI, Mahmoud. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic control*, 1996, vol. 41, no 3, p. 436-442.
- [9] PACKARD, Andy. Gain scheduling via linear fractional transformations. *Systems & control letters*, 1994, vol. 22, no 2, p. 79-92.
- [10] J. Shamma, M. Athans, Guaranteed properties of gain scheduled control of linear parameter varying plants. *Automatica* 27(3), 559–564 (1991).

-
- [11] WU, Fen et DONG, Ke. Gain-scheduling control of LFT systems using parameter-dependent Lyapunov functions. *Automatica*, 2006, vol. 42, no 1, p. 39-50.
- [12] F. Wu. A generalized LPV system analysis and control synthesis framework. *International Journal of Control*, 74(7) :745–759, July 2001.
- [13] WU, Fen, YANG, Xin Hua, PACKARD, Andy, *et al.* Induced \mathcal{L}_2 -norm control for LPV systems with bounded parameter variation rates. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1996, vol. 6, no 9, p. 983-998.
- [14] YU, Jie et SIDERIS, Athanasios. \mathcal{H}_∞ control with parametric Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, 1997, vol. 30, no 2-3, p. 57-69.
- [15] M. Bernal and T. M. Guerra, “Generalized Nonquadratic Stability of Continuous-Time Takagi-Sugeno Models”, *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, Vol. 18, No. 4, pp. 815-822, 2010.
- [16] J. Shamma and J. Cloutier, “Gain-Scheduled Missile Autopilot Design Using Linear Parameter Varying Transformations”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16, No. 2, pp. 256-261, 1993.
- [17] Shamma J (1988) Analysis and design of gain scheduled control systems. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering, advised by M. Athans.
- [18] Lawrence D, RughW(1995) Gain scheduling dynamic linear controllers for a nonlinear plant. *Automatica* 31(3):381–390.
- [19] Rugh W (1991) Analytical framework for gain-scheduling. *IEEE Contr Syst Mag* 11(1):79–84.
- [20] Shamma J (1996a) Linearization and gain-scheduling. In: Levine W (ed) *The Control Handbook*, CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, pp 388–398.
- [21] Shamma J (1999) Gain-scheduling. In: Webster J (ed) *Encyclopedia of electrical and electronics engineering*, John Wiley & Sons, New York.
- [22] Shamma J, Athans M (1990) Analysis of nonlinear gain scheduled control systems. *IEEE Trans Autom Contr* AC-35(8):898–907.
- [23] Shamma J, Athans M (1992) Gain scheduling: potential hazards and possible remedies. *IEEE Contr Syst Mag* 12(3):101–107.

- [24] Leith D, Leithead W (2000) Survey of gain-scheduling analysis and design. *Int J Contr* 73(11):1001–1025.
- [25] Rugh W, Shamma J (2000) A survey of research on gain scheduling. *Automatica* 36:1401–1425.
- [26] B. He and M . Yang. Robust LPV control of diesel auxiliary power unit for series hybrid electric vehicles. *IEEE Trans. on Power Electronics*, 21(3):791–798, 2006.
- [27] M. Jung and K. Glover. Calibrate linear parameter-varying control of a turbocharged diesel engine. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 14(1):45–62, 2006.
- [28] D. Liberzon, J .P. Hespanha, and A. S. Morse. Stability of switched systems: a lie-algebraic condition. *System and Control Letters*, 37:117–122, 1999.
- [29] J. Y. Shin. Analysis of linear parameter varying system models based on reachable set. In *American Control Conference*, Anchorage, AK, USA, 2002, 2002.
- [30] TAN, Kan et GRIGORIADIS, Karolos M. State-feedback control of LPV sampled-data systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2000, vol. 6, no 2-3, p. 145-170.
- [31] X. Wei and L. del Re. Gain scheduled \mathcal{H}_∞ control for air path systems of diesel engines using LPV techniques. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 15(3):406–415, 2007.
- [32] B. A. White, L. Bruyere, and A. Tsourdos. Missile autopilot design using quasi-LPV polynomial eigen structure assignment. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronics Systems*, 43(4):1470–1483, 2007.
- [33] Bruzelius, Fredrik. *Linear parameter varying systems*. Diss. PhD Dissertation, Departement of Signal and Systems, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 2004.
- [34] C. S. Mehendale and K. M. Grigoriadis. A new approach to LPV gain-scheduling design and implementation. In *43rd IEEE Conference on Decision and Control, Atlantis, Paradise Island, Bahamas*, 2004.
- [35] B. Lu, F. Wu, and S. Kim. Switching LPV control of an F-16 aircraft via controller state reset. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 14(2):267–277, 2006.
- [36] F. Blanchini, S. Miani, and C. Savorgnan. Stability results for linear parameter varying and switching systems. *Automatica*, 43:1817–1823, 2007.

-
- [37] D. Cheng, Y. Lin, and Y. Wang. Accessibility of switched linear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 51(9):1486–1491, 2006.
- [38] P. Colaneri, J.C. Geromel, and A. Astolfi. Stabilization of continuous-time switched nonlinear systems. *System and Control Letters*, 57:95–103, 2008.
- [39] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung. Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched Lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(11):1883–1887, 2002.
- [40] L. El Ghaoui and M. Ait Rami. Robust state-feedback stabilization of jump linear systems via LMIs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(9-10):1015–1022, 1997.
- [41] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. Ait Rami. A Cone Complementary linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42:1171–1176, 1997.
- [42] J.P. Hespanha and A.S. Morse. Stability of switched systems with average dwell-time. In *38th Conference on Decision and Control*, Phoenix, Arizona, USA, 1999.
- [43] M. Mariton. *Jump Linear Systems in Automatic Control*. Marcel Dekker, Inc, 1990.
- [44] E.I. Verriest. Optimal control for switched point delay systems with refractory period. In *16th IFAC World Congress, Prague, Czeck Republic*, 2005.
- [45] G. Xie, D. Zheng, and L. Wang. Controllability of switched linear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 47(8):1401–1405, 2002.
- [46] X. Xu and P. J. Antsaklis. Optimal control of switched autonomous systems. In *Conference on Decision and Control*, Las Vegas, NV, USA, 2002.
- [47] Apkarian, Pierre, and Hoang Duong Tuan. "Parameterized LMIs in control theory." *SIAM Journal on Control and Optimization* 38.4 (2000): 1241-1264.
- [48] PEAUCELLE, D., ARZELIER, D., BACHELIER, O., et al. A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & control letters*, 2000, vol. 40, no 1, p. 21-30.
- [49] R. A. Borges and P. L. D. Peres. H_∞ LPV filtering for linear systems with arbitrarily timevarying parameters in polytopic domains. In *Conference on Decision and Control, San Diego, USA*, 2006.

-
- [50] J. C. Geromel and P. Colaneri. Robust stability of time-varying polytopic systems. *Systems and Control Letters*, 55:81–85, 2006.
- [51] M. Jungers, P.L.D. Peres, E.B. Castelan, E.R. De Pieri, and H. Abou-Kandil. Nash strategy parameter dependent control for polytopic systems. In *3rd IFAC Symposium on Systems, Structure and Control, 2007, Brazil, 2007*.
- [52] R.C.L.F. Oliveira, V.F. Montagner, P.L.D. Peres, and P.-A. Bliman. LMI relaxations for \mathcal{H}_∞ control of time-varying polytopic systems by means of parameter dependent quadratically stabilizing gains. In *3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control, Foz do Iguassu, Brasil, 2007*.
- [53] C. W. Scherer. LPV control and full-block multipliers. *Automatica*, 37:361–375, 2001.
- [54] A.I. Lur'e. *Some nonlinear problems in the Theory of Automatic Control (Nekotorye Nelineinye Zadachi Teorii Avtomaticheskogo Regulirovaniya)*. Gostekhizdat, Moscow, 1951.
- [55] C. W. Scherer. Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 27(2):365–395, 2005.
- [56] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1996.
- [57] T. Iwasaki, G. Meinsma, and M. Fu. Generalized S-procedure and finite frequency KYP lemma. *Mathematical Problems in Engineering*, 6:305–320, 1998.
- [58] A. Rantzer and A. Megretski. System analysis via Integral Quadratic Constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(6):819–830, 1997.
- [59] F. Wu, Control of linear parameter varying systems. PhD thesis, University of California Berkeley, 1995.
- [60] Blanchini, Franco. "The gain scheduling and the robust state feedback stabilization problems." *IEEE Transactions on Automatic Control* 45.11 (2000): 2061-2070.
- [61] Bara, G. Iulia, and Jamal Daafouz. "Parameter-dependent control with gamma-performance for affine LPV systems." *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on*. Vol. 3. IEEE, 2001.
- [62] J. C. Geromel, C. C. de Souza, and R. E. Skelton. Static output feedback controllers: Robust stability and convexity. Submitted to *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 1993.

- [63] Scherer, C., Gahinet, P. et Chilali, M. (1997). Multiobjective output-feedback control via lmi optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7):896–911.
- [64] Scherer, C. (1999). From mixed to multi-objective control. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, 1999, 4:3621 – 3626.
- [65] Colmenares, W. (1996). Sur la robustesse des systèmes linéaires incertains : Approche quadratique, retour de sortie. Mémoire de thèse, (96414).
- [66] Courties, C. (1999). Sur la commande robuste et LPV de systèmes à paramètres lenetement variables. Mémoire de thèse, 99552.
- [67] Benton, R. et Smith, D. (1999). A noniterative lmi-based algorithm for robust static-output-feedback stabilization. *International Journal of Control*, 72(14):1322–U1330.
- [68] TAN, Kan, GRIGORIADIS, Karolos M., and WU, Fen. Output-feedback control of LPV sampled-data systems. *International Journal of Control*, 2002, vol. 75, no 4, p. 252-264.
- [69] Courties, C., J. Bernussou, and G. Garcia. "LPV control by dynamic output feedback." *American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999*. Vol. 4. IEEE, 1999.
- [70] CHEN, Jie, QIU, Li, et TOKER, Onur. Limitations on maximal tracking accuracy. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, vol. 45, no 2, p. 326-331.
- [71] Packard, Andy, and Michael Kantner. "Gain scheduling the LPV way." *Decision and Control, 1996., Proceedings of the 35th IEEE Conference on*. Vol. 4. IEEE, 1996.
- [72] Li, J., Wang, H., Niemann, D. et Tanka, K. (1999). Synthesis of gain-scheduled controller for a class of lpv systems. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, 1999., 3:2314 – 2319.
- [73] LEE, Chirl Hwa et CHUNG, Myung Jin. Gain-scheduled state feedback control design technique for flight vehicles. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2001, vol. 37, no 1, p. 173-182.
- [74] MONTAGNER, Vinícius F. et PERES, Pedro LD. State feedback gain scheduling for linear systems with time-varying parameters. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 2006, vol. 128, no 2, p. 365-370.

- [75] Montagner, Vinicius F., et al. "Stability analysis and gain-scheduled state feedback control for continuous-time systems with bounded parameter variations." *International Journal of Control* 82.6 (2009): 1045-1059.
- [76] SATO, Masayuki, EBIHARA, Yoshio, et PEAUCELLE, Dimitri. Gain-scheduled state-feedback controllers using inexactly measured scheduling parameters: \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ problems. In : *American Control Conference (ACC), 2010*. IEEE, 2010. p. 3094-3099.
- [77] PARK, Bum Yong, PARK, Poogyeon, et YUN, Sung Wook. Gain-scheduling state-feedback control for LPV systems with multiple parameters. In : *Control Conference (ASCC), 2011 8th Asian*. IEEE, 2011. p. 524-529.
- [78] ABBAS, Hossam S., ALI, Ahsan, HASHEMI, Seyed M., et al. LPV gain-scheduled control of a control moment gyroscope. In : *American Control Conference (ACC), 2013*. IEEE, 2013. p. 6841-6846.
- [79] Masubuchi, I., Akiyama, T., & Saeki, M. (2003, December). Synthesis of output feedback gain-scheduling controllers based on descriptor LPV system representation. In *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on* (Vol. 6, pp. 6115-6120). IEEE.
- [80] Blanchini, F., & Miani, S. (2010, June). Gain scheduling versus robust control of LPV systems: the output feedback case. In *American Control Conference (ACC), 2010* (pp. 3871-3876). IEEE.
- [81] SATO, Masayuki. Gain-scheduled output-feedback controllers using inexactly measured scheduling parameters. In : *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*. IEEE, 2010. p. 3174-3180.
- [82] SATO, Masayuki. Gain-scheduled output-feedback controllers depending solely on scheduling parameters via parameter-dependent Lyapunov functions. *Automatica*, 2011, vol. 47, no 12, p. 2786-2790.
- [83] SATO, Masayuki et PEAUCELLE, Dimitri. Gain-scheduled output-feedback controllers using inexact scheduling parameters for continuous-time LPV systems. *Automatica*, 2013, vol. 49, no 4, p. 1019-1025.
- [84] Kajiwara, Hiroyuki, Pierre Apkarian, and Pascal Gahinet. "LPV techniques for control of an inverted pendulum." *IEEE Control Systems* 19.1 (1999): 44-54.

-
- [85] Mehendale, C. S., & Grigoriadis, K. M. (2006, June). Performance of LPV gain-scheduled systems. In *American Control Conference, 2006* (pp. 6-pp). IEEE.
- [86] GEROMEL, José C., GONÇALVES, Alim PC, et FIORAVANTI, André R. Dynamic output feedback control of discrete-time Markov jump linear systems through linear matrix inequalities. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, vol. 48, no 2, p. 573-593.
- [87] C.W. Scherer, I.E. Köse, Gain-scheduled control synthesis using dynamic D-scales. *IEEE Trans. Autom. Control* **57**(9), 2219–2234 (2012).
- [88] WARREN, Joe, SCHAEFER, Scott, HIRANI, Anil N., et al. Barycentric coordinates for convex sets. *Advances in computational mathematics*, 2007, vol. 27, no 3, p. 319-338.
- [89] MONTAGNER, V. F., OLIVEIRA, R. C. L. F., LEITE, Valter JS, et al. LMI approach for \mathcal{H}_∞ linear parameter-varying state feedback control. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 2005, vol. 152, no 2, p. 195-201.
- [90] J. M. Biannic. Commande robuste des systèmes à paramètres variables. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, SUPAERO, France, Octobre 1996.
- [91] PACKARD, A. et WU, Fen. Control of linear fractional transformations. In : *Decision and Control, 1993.*, Proceedings of the 32nd IEEE Conference on. IEEE, 1993. p. 1036-1041.
- [92] DOYLE, John C. Structured uncertainty in control system design. In : *Decision and Control, 1985 24th IEEE Conference on.* IEEE, 1985. p. 260-265.
- [93] N.N. Krasovskii. *Stability of motion.* Standford university press, Standford, CA, 1963.
- [94] M. Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis.* Electrical Engineering. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978.
- [95] Doyle, John. "Analysis of feedback systems with structured uncertainties." *IEE Proceedings D-Control Theory and Applications.* Vol. 129. No. 6. IET, 1982.
- [96] H.K. Khalil. *Nonlinear systems.* Macmillan publishing company, 1992.
- [97] E. Sontag. *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems.* Springer, New York, USA, 1998.
- [98] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems.* Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2002.

- [99] S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems & an introduction to Chaos*. Academic Press, 2004.
- [100] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, second edition, 1992.
- [101] H.K. Khalil, *Nonlinear systems*, Prentice Hall Inc, 1996.
- [102] Borne, Pierre. *Analyse et régulation des processus industriels: régulation continue*. Vol. 1. Editions Technip, 1993.
- [103] SANDBERG, I. W. On the-Boundedness of Solutions of Nonlinear Functional Equations. Bell Labs Technical Journal, 1964, vol. 43, no 4, p. 1581-1599.
- [104] ZAMES, G. On the Input-Output Stability of Time-Varying Nonlinear Feedback Systems--Part I: Conditions Derived Using Concepts of Loop Gain, conicity, and Positivity. IEEE transactions on automatic control, 1966, no 3, p. 465-477.
- [105] ZAMES, George. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems--Part II: Conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities. IEEE Transactions on Automatic Control, 1966, vol. 11, no 3, p. 465-476.
- [106] CHARLES, A. DESOER et VIDYASAGAR, MATHUKUMALLI. *Feedback Systems: Input-Output Properties*. 1975.
- [107] Packard, Andy, and Gregory Becker. "Quadratic stabilization of parametrically-dependent linear systems using parametrically-dependent linear, dynamic feedback." *Advances in robust and nonlinear control systems* (1992): 29-36.
- [108] BARMISH, B. Stabilization of uncertain systems via linear control. IEEE Transactions on Automatic Control, 1983, vol. 28, no 8, p. 848-850.
- [109] BOYD, Stephen et YANG, Qinqing. Structured and simultaneous Lyapunov functions for system stability problems. *International journal of Control*, 1989, vol. 49, no 6, p. 2215-2240.
- [110] LEITMANN, G. Guaranteed asymptotic stability for some linear systems with bounded uncertainties. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1979, vol. 101, no 3, p. 212-216.
- [111] LEITE, Valter Júnior de Souza. *Sur la stabilité robuste de systemes linéaires: Une approche par des fonctions dépendantes de parametres*. 2005. Thèse de doctorat. Toulouse, INSA.

- [112] CHESI, Graziano, GARULLI, Andrea, TESI, Alberto, et al. Robust stability of time-varying polytopic systems via parameter-dependent homogeneous Lyapunov functions. *Automatica*, 2007, vol. 43, no 2, p. 309-316.
- [113] FERON, Eric, APKARIAN, Pierre, et GAHINET, Pascal. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, vol. 41, no 7, p. 1041-1046.
- [114] OLIVEIRA, Ricardo CLF et PERES, Pedro LD. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, 2006, vol. 55, no 1, p. 52-61.
- [115] ZHANG, Xiping, TSIOTRAS, Panagiotis, et IWASAKI, Tetsuya. Parameter-dependent Lyapunov function for exact stability analysis of single-parameter dependent LTI systems. In: *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on*. IEEE, 2003. p. 5168-5173.
- [116] BLIMAN, P. A convex approach to robust stabilisability for linear systems with uncertain scalar parameters. 2004.
- [117] WYATT, J., CHUA, Leon, GANNETT, Joel, et al. Energy concepts in the state-space theory of nonlinear n-ports: Part I-Passivity. *IEEE transactions on Circuits and Systems*, 1981, vol. 28, no 1, p. 48-61.
- [118] ANDERSON, Robert J. et SPONG, Mark W. Bilateral control of teleoperators with time delay. *IEEE Transactions on Automatic control*, 1989, vol. 34, no 5, p. 494-501.
- [119] HOKAYEM, Peter F. et SPONG, Mark W. Bilateral teleoperation: An historical survey. *Automatica*, 2006, vol. 42, no 12, p. 2035-2057.
- [120] NIEMEYER, Günter Dieter. Using wave variables in time delayed force reflecting teleoperation. 1996. Thèse de doctorat. Massachusetts Institute of Technology.
- [121] ORTEGA, Romeo, VAN DER SCHAFT, Arjan, CASTANOS, Fernando, et al. Control by interconnection and standard passivity-based control of port-Hamiltonian systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, vol. 53, no 11, p. 2527-2542.
- [122] Van Der Schaft, Arjan J., and A. J. Van Der Schaft. \mathcal{L}_2 -gain and passivity techniques in nonlinear control. Vol. 2. London: Springer, 2000.

- [123] Barmish, B. Ross. "Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system." *Journal of Optimization theory and applications* 46.4 (1985): 399-408.
- [124] Bernussou, J., P. L. D. Peres, and J. C. Geromel. "A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems." *Systems & Control Letters* 13.1 (1989): 65-72.
- [125] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., & Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory* (Vol. 15). Siam.
- [126] GARCIA, Germain et BERNUSSOU, Jacques. Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, vol. 40, no 1, p. 184-190.
- [127] Apkarian, P., Gahinet, P., Becker, G., 1994, Self-Scheduled \mathcal{H}_∞ control of linear parameter-varying systems, *Proceedings of the American Control Conference*, Baltimore (MD), 856–860.
- [128] BECKER, Greg et PACKARD, Andy. Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback. *Systems & Control Letters*, 1994, vol. 23, no 3, p. 205-215.
- [128] BECKER, Greg et PACKARD, Andy. Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback. *Systems & Control Letters*, 1994, vol. 23, no 3, p. 205-215.
- [129] SHAMMA, J. S. et XIONG, Dapeng. Stabilization of linear parameter varying systems. In : *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on.* IEEE, 1993. p. 1042 vol. 2.
- [130] GEROMEL, J. C., PERES, PL Dias, et BERNUSSOU, J. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1991, vol. 29, no 2, p. 381-402.
- [131] GLOVER, Keith et DOYLE, John C. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an \mathcal{H}_∞ -norm bound and relations to relations to risk sensitivity. *Systems & Control Letters*, 1988, vol. 11, no 3, p. 167-172.
- [132] DOYLE, John C., GLOVER, Keith, KHARGONEKAR, Pramod P., et al. State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 1989, vol. 34, no 8, p. 831-847.

- [133] SAFONOV, Michael G., LIMEBEER, D. J. N., et CHIANG, R. Y. Simplifying the \mathcal{H}_∞ theory via loop-shifting, matrix-pencil and descriptor concepts. *International Journal of Control*, 1989, vol. 50, no 6, p. 2467-2488.
- [134] LIMEBEER, M. et GREEN, Michael. Linear robust control. Ed. Prentice Hall, 1995.
- [135] Maciejowski, Jan Marian. "Multivariable feedback design." *Electronic Systems Engineering Series, Wokingham, England: Addison-Wesley, c1989* (1989).
- [136] HINRICHSEN, Diederich et PRITCHARD, Anthony J. Stability radius for structured perturbations and the algebraic Riccati equation. *Systems & Control Letters*, 1986, vol. 8, no 2, p. 105-113.
- [137] KHARGONEKAR, Pramod P., PETERSEN, Ian R., et ZHOU, Kemin. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and \mathcal{H}_∞ control theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, vol. 35, no 3, p. 356-361.
- [138] PETERSEN, Ian R. Notions of stabilizability and controllability for a class of uncertain linear systems. *International Journal of Control*, 1987, vol. 46, no 2, p. 409-422.
- [139] POPOV, V. M. Nouveaux criteriums de stabilité pour les systemés automatiques non-linéaires. *Revue d'Electrotechnique et d'Energetique, Acad. de la Rep. Populaire Romaine*, 1960, vol. 5, no 1.
- [140] POPOV, Vasile-Mihai. Absolute stability of nonlinear systems of automatic control. *Automation and Remote Control*, 1962, vol. 22, no 8, p. 857-875.
- [141] POPOV, Vasile Mihai et GEORGESCU, Radu. Hyperstability of control systems. 1973.
- [142] YAKUBOVICH, Vladimir A. The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory. In : *Soviet Math. Dokl.* 1962. p. 620-623.
- [143] YAKUBOVICH, V. A. Solution of certain matrix inequalities encountered in the nonlinear control theory. In : *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1964. p. 278-281.
- [144] Yacubovich, V. A., 1967, The method of matrix inequalities in the stability theory of nonlinear control systems, I, II, III, *Automation and Remote Control*, 25-26, 905-917, 577-592, 753-763.
- [145] SCHERER, Carsten W. The Riccati inequality and state-space \mathcal{H}_∞ -optimal control. 1990. Thèse de doctorat. Julius Maximilians University Würzburg, Germany.

- [146] BALAS, Gary, BOKOR, József, et SZABÓ, Zoltán. Invariant subspaces for LPV systems and their applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, vol. 48, no 11, p. 2065-2069.
- [147] OLIVEIRA, Ricardo CLF et PERES, Pedro LD. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, vol. 52, no 7, p. 1334-1340.
- [148] CHESI, Graziano. LMI techniques for optimization over polynomials in control: a survey. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, vol. 55, no 11, p. 2500-2510.
- [149] SCHERER, Carsten et WEILAND, Siep. Linear matrix inequalities in control. Lecture Notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands, 2000, vol. 3.
- [150] GAHINET, Pascal et APKARIAN, Pierre. A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control. *International journal of robust and nonlinear control*, 1994, vol. 4, no 4, p. 421-448.
- [151] Kuo, Benjamin C. Automatic control systems. Prentice Hall PTR, 1987.
- [152] CHILALI, Mahmoud et GAHINET, Pascal. \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach. *IEEE Transactions on automatic control*, 1996, vol. 41, no 3, p. 358-367.
- [153] Sylvain, Quoilin. "Les centrales solaires à concentration." Faculté des sciences appliquées, Université de Liège (2007).
- [154] YU, Zhongwei, CHEN, Huitang, et WOO, Peng-yung. Gain scheduled LPV \mathcal{H}_∞ control based on LMI approach for a robotic manipulator. *Journal of Field Robotics*, 2002, vol. 19, no 12, p. 585-593.
- [155] KHALIL, Wisama et DOMBRE, Etienne. *Modeling, identification and control of robots*. Butterworth-Heinemann, 2004.
- [156] LEWIS, Frank L., DAWSON, Darren M., et ABDALLAH, Chaouki T. *Robot manipulator control: theory and practice*. CRC Press, 2003.
- [157] Capderou, Michel. "Atlas solaire de l'Algérie." (1988).
- [158] CHONG, K.-K. et TAN, M. H. Comparison study of two different sun-tracking methods in optical efficiency of heliostat field. *International Journal of Photoenergy*, 2012, vol. 2012.

- [159] GAMIL, Ahmed, GILANI, Syed Ihtsham Ul-haq, et AL-KAYIEM, Hussain H. Simulation of incident solar power input to fixed target of central receiver system in Malaysia. In : Sustainable Utilization and Development in Engineering and Technology (CSUDET), 2013 IEEE Conference on. IEEE, 2013. p. 92-97.
- [160] CHONG, K. K. et TAN, M. H. Range of motion study for two different sun-tracking methods in the application of heliostat field. *Solar Energy*, 2011, vol. 85, no 9, p. 1837-1850.
- [161] ANGELIS, Georgo Z. System analysis, modelling and control with polytopic linear models. 2001. Thèse de doctorat. Technische Universiteit Eindhoven.
- [162] HUNT, K. H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 1983, vol. 105, no 4, p. 705-712.
- [163] GILBERT, Elmer G. et HA, In Joong. An approach to nonlinear feedback control with applications to robotics. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, 1984, no 6, p. 879-884.
- [164] WILLEMS, Jan C. The generation of Lyapunov functions for input-output stable systems. *SIAM Journal on Control*, 1971, vol. 9, no 1, p. 105-134.
- [165] WILLEMS, Jan. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, vol. 16, no 6, p. 621-634.
- [166] GAHINET, Pascal et APKARIAN, Pierre. An LMI-based parametrization of all \mathcal{H}_∞ controllers with applications. In : Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on. IEEE, 1993. p. 656-661.

ملخص

التحكم في الروبوتات المناورة هو مجال بحث واسع ومعقد، جذب إنتباه الكثير من الباحثين والمهندسين لعدة عقود. العديد من الدراسات التي إهتمت بتطبيق تقنيات خطية لتحكم على نماذج غير الخطية. وبالإضافة إلى ذلك، التحكم الموضعي يعتبر واحد من المهام الرئيسية التي تتعلق بتعقيده نظام التحكم الصلب بالنسبة لنماذج غير خطية، كان من الضروري إيجاد حل آخر. هذه الأطروحة مكرسة بالتحديد لهذا الحل حيث يعالج مشكل الإستقرار وإنشاء بعض أنظمة التحكم الصلبة لنماذج غير خطية في شكل نماذج خطية ذات معلمات متغيرة (LPV). أنظمة التحكم LPV المقترحة تستخدم أدوات التحكم الصلب والتحسين المحدب في شكا قيود (LMI). حتى ولم تم الحصول على الإستقرار، كل أنظمة التحكم هذه ببساطة ومنهجية تستخدم أيضا الأداء والمتانة. أنظمة التحكم المقترحة تم التحقق منها تطبيقيا على نموذج هيليوسات (Héliostat) حيث لوحظ خلال المحاكاة العددية أن نظام التحكم LPV حقق متانة أفضل ضد التشويش الخارجي.

الكلمات المفتاحية: نموذج LPV، نظام التحكم، الإنشاء \mathcal{H}_∞ ، كسب التسلسل، المصفوفات الخطية غير المتساوية (LMI)، وضع الأقطاب، روبوت مناور.

Résumé

La commande des robots manipulateurs reste un domaine de recherche d'actualité qui a toujours attiré l'attention des scientifiques et des ingénieurs pendant plusieurs décennies. De nombreuses recherches menées tentent d'appliquer des techniques linéaires pour commander les systèmes non linéaires. Par ailleurs, l'asservissement en position est l'une des tâches majeures en robotique de manipulation dans les espaces articulaire et opérationnel. En effet, au-delà même de certaines limites théoriques liées à la complexité de la commande robuste des systèmes non linéaires, une autre solution s'avère nécessaire. Cette thèse est précisément consacrée à cette solution dont les recherches portent sur l'analyse de stabilité et la synthèse de correcteurs robustes pour les systèmes non linéaires sous forme de systèmes linéaires à paramètres variants (LPV). Les lois de commande LPV proposées s'aspirent des outils de la commande robuste et de l'optimisation convexe sous forme de contraintes LMI. Même si la stabilité étant acquise, tout simplement et systématiquement ces commandes font appel aussi aux contraintes de performance et de robustesse. Ainsi, que les propositions de commande sont ensuite validées sur héliostat et qu'il a été observé durant les simulations numériques que la commande LPV manifeste une meilleure robustesse face aux perturbations externes.

Mot-clés: Systèmes LPV, commande LPV, synthèse \mathcal{H}_∞ , gain-scheduling, inégalités matricielles linéaires (LMI), placement de pôles, robot manipulateur.

Abstract

The control of robot manipulators is a challenging research area that has attracted a large attention from scientists and engineers for several decades. Many researches concerns the attempts to apply linear techniques to control nonlinear systems. In addition, position control is one of the major tasks in robotic manipulation at the joint and end-effector levels. Indeed, even beyond certain theoretical limits related to the intrinsic complexity of the robust control of nonlinear systems, another solution is necessary. This thesis is particularly devoted to this solution, whose research focuses on stability analysis and the synthesis of robust controllers for nonlinear systems in the form of linear parameter varying systems (LPV). The proposed LPV control laws are aspired by the implements of robust control and convex optimization in the form of LMI constraints. Even if the stability is acquired, all simply and systematically these commands also use the performance and robustness constraints. Thus, the control propositions are then validated on heliostat and it has been observed during numerical simulations that the LPV command shows a better robustness against external disturbances.

Keyword: LPV systems, LPV control, \mathcal{H}_∞ synthesis, gain-scheduling, Linear Matrix Inequalities (LMI), pole placement, robot manipulator.