MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS - SETIF

MÉMOIRE

Présenté à la faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTÈRE

Option: Mathématiques Appliquées

Par

Mr: AZEB AHMED ABDELAZIZ

THÈME

Étude analytique de quelques problèmes dynamiques en mécanique des milieux continus

soutenu le: 24 / 11 / 2010

devant le jury:

Président	**Mr. B. Merouani**	**Pr.**	**Université de Sétif**
Encadreur	**Mme. S. Boutechebak**	**M.C.A.**	**Université de Sétif**
Examinateurs	**Mr. T. Serrar**	**M.C.A.**	**Université de Sétif**
	Mme. N. Lebri	**M.C.A.**	**Université de Sétif**

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements les plus profonds à Dr: SOURAYA BOUTECHEBAK maître de conférences à l'université de Ferhat Abbas Sétif, pour m'avoir proposé ce passionnant sujet, m'avoir aiguillé dans ma recherche, pour sa patience, son encouragement et sa disponibilité ainsi le soutien très précieux tout au long de cette étude.

Comme je tiens à remercier vivement, Docteur BOUBAKEUR MEROUANI, professeur à l'université de Ferhat Abbas Sétif pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à Docteur TOUFIK SERRAR et à Docteur NAMIRA LEBRI, maîtres de conférences à l'université de Ferhat Abbas Sétif, d'avoir accepter de juger mon travail.

Je tiens aussi à manifester toute ma gratitude envers tous les members du conseil scientifique.

Enfin, mes remerciements aussi à toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

Introduction

Dans de nombreuses situations de la physique et de la mécanique, les processus quasi-statiques sont insuffisants à décrire les phénomènes, on rencontre alors des processus dynamiques de contact. Dans la plupart des cas, le contact se produit avec présence d'un type de frottement caractérisé par une loi seuil. Ceci nous conduit au vaste sujet des inéquations variationnlelles d'ordres deux en temps.

Toutes les difficultés d'ordres mathématiques lors de la formulation des problèmes dynamiques de contact avec frottement ont motivé de nombreux travaux.

Les premiers résultats dans J.J Moreau [35], et dans M. Schatzman [45] concernaient la formulation mathématique en dimension finie de problèmes dynamiques de contact entre solides rigides. L'ajout du frottement est effectué, toujours en dimension finie, plus tards dans (Marques, 1993), (Jean et Pratt, 1985), il est à noter que le modèle de contact strict (Signorini,1959) entre solides dont le comportement est viscoelastique n'a été résolu dans le cas dynamique que très récemment dans J. Jarušek [23]. G Duvaut et J.L Lions [18] a étudié les problèmes de contact dynamique et quasi-statique avec frottement donné, pour un matériau viscoélastique, d'une solution à des problèmes de contact dynamique avec frottement non local à des corps viscoélastiques.

G. Lebeau et M. Schatzman [30] ont obtenu des resultats d'existence et d'unicité pour la solution de l'équation des ondes dans un demi-espace, avec une condition aux limites de contact unilatéral sans frottement, J.U.Kim [28] a montré l'existence d'une solution au même problème dans un domaine borné régulier. J.A.C.Martins et J.T.Oden [33] ont prouvé des résultats pour des problèmes dynamiques de contact avec une loi de compliance normale. Ils ont d'abort considéré un matériau élastique, sans frottement, puis, ils ont supposé le matériau viscoélastique soumis au frottement. J. Jarušek [23] a été le premier à obtenir un résultat d'existence sur des problèmes dynamiques de contact unilatéral avec frottement de Tresca, pour un milieu viscoélastique. Son résultat d'existence est surtout intéressant car il est valable dans le cas sans frottement, étant donné que considérer le frottement de Tresca avec la condition de Signorini est peu réalisé mécaniquement. Ensuite, J.Muňoz-Rivera et R.Racke [36] ont étudié le problème de l'élastodynamique avec symétrie radiale et une condition de contact unilatéral sans frottement. Plus récemment, M.cocou et J.M.Recaud [14] ont prouvé des résultats d'existence pour des problèmes dynamiques de contact avec frottement non local, dans des domaines bornés réguliers, sous des hypothèses sur la vitesse et l'accélération. E.Pratt et J.M.Recaud [43] ont étudié des problèmes dynamiques de contact avec frottement par des techniques incrémentales, dans un cas particulier de loi de compliance normale, A.Petrov et M.Schatzman [39] ont étudié un problème de contact unilatéral en viscoélasticité avec le modèle de Kilvin-Voigt, dans un demi-espace, dans le cas unidimensionnel. Ils ont utilisé des espaces de mesures pour leur étude. M.Cocou [12] a obtenu un résultat d'existence pour un problème de contact unilatéral dynamique avec frottement non local pour un matériau viscoélastique de Kilven-Voigt

Très récemment, de nouveaux résultats concernant les problèmes dynamiques de contacts avec frottement entre un solide viscoélastique et un obstacle ont été obtenus dans M.Cocou, J.M.Ricaud [14], I.R Ionescu [22], et J.M.Ricaud [42]

L'objet de ce mémoire est de proposer une contribution à l'étude de quelques problèmes aux limites en mécaniques du contact, Les conditions de contacts sont de type unilatéral, frottement de Tresca. et frottement de Coulomb non local.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres que nous allons brièvement décrire. Dans le premier chapitre, le but est d'introduire les éléments nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des objets traités. Nous començons par rappeler les espaces fonctionnels et principales notations utilisés, puis nous décrivons le cadre physique des problèmes de contact étudiés. Ensuite nous passons en revue quelques resultats fondamentaux d'analyse fonctionnelles, concernant les inéquations variationnelles elliptiques. Dans le deuxième chapitre nous présentons une étude d'un problème dynamique de contact unilatéral d'un corps viscoélastique fissuré suivant une lois de Kilvin-Voigt. On utilise une méthode de pénalisation pour résoudre ce problème. On introduit un problème pénalisé qui peut être considéré comme un problème particulier d'une classe de problèmes, pour laquelle on montre l'existence d'une solution par une technique incrémentale. Cette technique a été déja utilisée dans [19, 43] . Des estimations sont obtenues sur les solutions pénalisées. De plus, on utilise une décompostion de Ω d'une part et d'autre de la fissure, afin d'appliquer des résultats de compacité. Ces résultats permettent de passer à la limite dans le problème pénalisé et d'obtenir une solution pour le problème unilatéral avec frottement non local.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons aux résultas d'existence et d'unicité d'un problème dynamique de contact unilatéral avec frottement de Tresca entre deux corps viscoélastiques. La méthode repose sur l'application des résultats d'existence et d'unicité d'une inéquation d'évolution abstraite présentés par Jeam-Marc Ricaud [42].

Notations

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d\,(d=1,2,3)$, on note par

$\bar{\Omega}$	l'adhérence de Ω.
Γ	la frontière de Ω supposée régulière.
$\Gamma_i\,(i=C,D$ où $F)$	une partie mesurable de la frontière de la Γ.
$mes\ \Gamma_i$	la mesure de Lebesgue $(n-1)$ dimentielle de Γ_i.
N	la normale unitaire sortante.
v_N, v_T	les composantes normales et tangentielles du champs vectoriel v défini sur Ω.
$C^1(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles continûment défférentiables sur Ω.
$v^j(resp.\tau^j)$	désigne le normale unitaire(resp.la tangente unitaire dans le sens positif).
$D(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment défférentiables et à support compact contenu dans Ω.
$D'(\Omega)$	l'espace de distributions sur Ω.
$\mathcal{D}=D(\Omega)_S^{d\times d}$	
$\mathcal{D}'=D'(\Omega)_S^{d\times d}$	
$L^\infty(\Omega)$	l'espace des fonctions mesurables sur Ω telles que $\exists$ c>0: $\lvert u(x)\rvert \leq c,\ p.p\ sur\ \Omega$.
H	l'espace $\left(L^2(\Omega)\right)^d$.
$\mathcal{H}$	l'espace $\left(L^2(\Omega)\right)_S^{d\times d}$.
H_1	l'espace $\left(H^1(\Omega)\right)^d$.
$\mathcal{H}_1$	l'espace $\left(H^1(\Omega)\right)^{d\times d}$.
$H_0^1(\Omega)$	l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ.
$H_{00}^{1/2}(\Xi)$	l'espace de restrictions sur Ξ de fonctions de $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ qui s'annulent en dehors de Ξ
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
H'_Γ	l'espace dual de H_Γ.
$\gamma\ :H_1\rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si H est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes.

$\langle .,. \rangle_H$	le produit scalaire de$H$.
$\lvert.\rvert_H$	la norme de H
$\langle .,. \rangle_{H'}$	le produit de dualité entre H et H'.
H^d	l'espace $\left\{x = (x_i) \;/\; x_i \in H,\ i = \overline{1,d}\right\}$
$H_S^{d\times d}$	l'espace $\left\{x = (x_{ij}) \;/\; x_{ij} = x_{ji} \in H,\ i,j = \overline{1,d}\right\}$
$x_n \to x$	la convergente forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H.
$x_n \rightharpoonup^* x$	la convergente faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H'.
$x_n \rightharpoonup x$	la convergente faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H.
$\mathcal{L}(H)$	l'espace des applications linéaires et continues de H dans$H$.

Pour une fonction f, on note par

$dom\ f$	le domaine de f.
$suppf$	le support de f.
$\partial_i f$	la dérivée partielle de f par rapport à l'ième composante x_i.
∇f	le gradient de f.
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de $f = \frac{1}{2}\left(\nabla f + \nabla^T f\right)$
$Divf$	la divergence de f.
∂f	le sous différentiel(classique) de f.

Si H^1et H^2 sont deux espaces de Hilbert réels, on note par

$\mathcal{L}(H^1, H^2)$	l'espace des applications linéaires et continues de H^1dans H^2
$\lVert.\rVert_{\mathcal{L}(H^1,H^2)}$	la norme de $\mathcal{L}(H^1, H^2)$.
$\liminf$	la limite inférieure.
S_d	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}_S^{d\times d}$.
I_d	le tenseur identité du seconde ordre sur $\mathbb{R}^d$.
0	le zéro de $\mathbb{R}^d$ où S_d.
C	une constante générique strictement positive.
$p.p$	presque par tout

Chapitre 1

Notions préliminaires

Ce chapitre a pour but l'introduction et la formulation des problèmes mécaniques qui sont traités dans la suite, ainsi que le rappel des notions principales de la théorie des milieux continus et d'analyse fonctionnelle nécessaires pour la compréhension de ce mémoire.

Ce chapitre est constitué de quatre sections. La première section est consacrée aux espaces fonctionnels. On y intoduit des espaces de types Sobolev associées à l'opérateur déformation et à l'opérateur divergence. Ensuite nous décrivons le modèle général mécanique de contact étudiés ici.

Dans la deuxième section, nous commençons par préciser le cadre physique et le modèle mathématique généraux utilisés, ensuite nous décrivons les lois de comportement, les conditions de contact et les lois de frottement.

Dans la troixième section, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert, quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz , les inéquations variationnelles elliptiques et les inéquations quassivariationnelles ainsi que quelques principaux résultats portant sur ce type de problèmes et dans la quatrième section nous finissons en donnant quelques lemmes et théorèmes importantes dont nous aurons besoin dans les chapitres qui viennent comme les lemmes de type Gronwall, qui seront plus utiles notamment dans les démonstrations d'unicité des solutions faibles.

1.1 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section les espaces de type Sobolev utilisés en mécanique et associés aux opérateurs divergence et déformation, leurs principales propriètés notamment les théorèmes de trace. On adopte ici la convention de l'indice muet, et un indice qui suit une virgule undique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante de la variable. Toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire sont introduit dans cette section.

1.1.1 Cadre fonctionnel scalaire

Dans ce paragraphe, nous faisons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles. Nous allons aborder les espaces des fonctions continues, continûment différentiables, les fonctions $p-$intégrables, les espaces de Sobolev, qui nous permettons d'introduire les espaces spécifiques à la mécanique au prochain paragraphe. Nous rappelons par la suite les définitions et quelques propriétés de ces espaces.

Espaces de Sobolov

Les espaces de Sobolev sont des espaces vectoriels normés qui sont bien adaptés à la résolution de nombreux problèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles.

Ce paragraphe contient quelques rappels. Nous aurons également l'occasion de clarifier quelques notations usuelles.

Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.1. Soit p un élement de $[1, +\infty]$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on appelle espace de Lebesgue, et on note $L^p(\Omega)$, l'espace vectoriel des (classes d'équivalence de fonctions, au sens de l'égalité presque par tout) u de Ω dans $\mathbb{R}$, Lebesgue mesurable, vérifiant [49]:

(i) Si $\quad 1 \leq p < +\infty, \quad \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < +\infty$

(ii) Si $\quad p = +\infty, \quad \sup\limits_{x\in\Omega} ess \, |u(x)| < +\infty$

où $\sup\limits_{x\in\Omega} ess \, |u(x)| = \inf \{M > 0 \quad / \quad |u(x)| \leq M \quad p.p.\}$

a) Norme de $L^p(\Omega)$

L'application de $L^p(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$:

$$u \longmapsto \begin{cases} \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} , \quad 1 \leq p < +\infty \\ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup\limits_{x\in\Omega} ess \, |u(x)| \; , \quad p = +\infty \end{cases} \tag{1.1}$$

définit une norme sur $L^p(\Omega)$, norme pour laquelle $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach [9].

Pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions u de carré sommable sur Ω, i.e. mesurable et telles que:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{1.2}$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u(x) v\,(x) \, dx \tag{1.3}$$

associé à la norme (1.3), où $(u, v)_{L^2(\Omega)}$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

b) Inégalité de Hölder :

Soit (p, q) un couple de $[1, +\infty]^2$, tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. L'application suivante :

$$L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \longmapsto \int\limits_{\Omega} u(x) v\,(x) \, dx dx$$

est bilinéaire continue à valeurs dans $L^1(\Omega)$, et

$$(u, v) \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

c) Dual de $L^p(\Omega)$:

Pour tout réel p dans $[1, +\infty[$, le dual de $L^p(\Omega)$ est isomorphe algebriquement et topologiquement à $L^q(\Omega)$, avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, l'application de dualité est définie par:

$$L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \longmapsto \int\limits_{\Omega} u(x) v\,(x) \, dx dx$$

pour tout réel p dans $]1,+\infty[$, le bidual de $L^p(\Omega)$, ou encore le dual de son dual $L^q(\Omega)$, s'identifie algebriquement et topologiquement à $L^p(\Omega)$. On dit que $L^p(\Omega)$ est réflexif [1].

Théorème 1.1. (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue).

Soit (u_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que

(i) $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ p.p. sur Ω,

(ii) il existe une fonction $v \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n, $|u_n(x)| \leq v(x)$ p.p. sur Ω.

Alors $u \in L^1(\Omega)$ et $\|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0$. (pour plus de détails renvoyons à [26]).

Le résultat suivant, qui est presque l'inverse du théorème de convergence dominée de Lebesgue, il est d'une certaine importance dans l'étude des équations non linéaires, il établit une certaine relation entre la convergence dans le sens de la norme de $L^1(\Omega)$ et la convergence presque partout sur Ω.

Définition1.2. Un point x du domaine de définition d'une application $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue-intégrable est dit point de Lebesgue de u si

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\lambda\left(B\left(x,r\right)\right)} \int_{B(x,r)} \left|u\left(t\right) - u\left(x\right)\right| d\lambda\left(t\right) = 0$$

où $B(x,r)$ désigne la boule de $\mathbb{R}^n$ centrée en x et de rayon $r > 0$ et λ désigne la mesure de Lebesgue.

Théorème1.2. Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions intégrables telle que $u_n \to u$ dans $L^1(\Omega)$. Alors, il existe une sou-suite $(u_{n_k})_k$ et $v \in L^1(\Omega)$ telle que

$$u_n \to v \;\; p.p \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad |u_{n_k}| \leq v \quad p.p \text{ dans } \Omega.$$

Proposition1.1. Soit (f_n) une suite telle que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$, et soit (v_n) une suite telle que $v_n \to v$ dans $L^q(\Omega)$. Alors

- $\left(\|u_n\|_p\right)$ est bornée.
- $\liminf \|u_n\|_p \geq \|u\|_p$.
- $\int_\Omega u_n.v_n \to \int_\Omega u.v$

Espace de fonctions test $D(\Omega)$

Définition 1.3. (Support d'une fonction). On appelle support d'une fonction u, et on note *supp* u, le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel u est nulle, c'est aussi la fermeture de l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels : $u(x) \neq 0$.

Définition 1.4. (Espace $D(\Omega)$). On appelle espace des fonctions test, et on note $D(\Omega)$, l'espace vectoriel des fonctions indéfiniments différentiables sur Ω et à supports compacts dans Ω, i.e.

$$D(\Omega) = \{u \in C^{\infty}(\Omega) \quad / \quad \exists K \text{ compact}, \;\; K \subset \Omega, \;\; supp\ u \subset K\}$$

(certains auteurs utilisent la notation $C_0^{\infty}(\Omega)$ où bien $C_c^{\infty}(\Omega)$ au lieu de $D(\Omega)$ [1] , [9]).

On munit $D(\Omega)$ de la «pseudo-topologie» suivante [32]:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $D(\Omega)$. On dit que u_n converge vers 0 dans $D(\Omega)$ (en notation : $u_n \to 0$ dans $D(\Omega)$) si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :

(i) Il existe un compact K de Ω tel que $supp\ u_n \subset K$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Pour tout multi-indice de dérivation $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la suite $D^{\alpha}u_n$ converge vers 0 uniformément sur K. Autrement dit:

$$\sup_{x\in\Omega} |D^{\alpha}u_n(x)| \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty$$

La notation $D^{\alpha}u$, pour $\alpha = (\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{N}^n$, désigne la dérivée d'ordre $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, elle est définie par:

$$D^{\alpha}u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$$

Remarque 1.1.

1) Si $u \in D(\Omega)$, comme $supp\ D^{\alpha}u \subset supp\ u$, on aura aussi $D^{\alpha}u \in D(\Omega)$, quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Pour la même raison, si $u_n \to 0$ dans $D(\Omega)$, alors $D^{\alpha}u_n \to 0$ dans $D(\Omega)$, quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

2) On dira que $u_n \longrightarrow u$ dans $D(\Omega)$ si et seulement si $u_n - u \to 0$ dans $D(\Omega)$.

Proposition 1.2. Soit $p \in \mathbb{R}$; $1 \leq p \leq +\infty$, alors $D(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ [9] .

Définition 1.5. (Espace $D(\overline{\Omega})$). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$; $D(\overline{\Omega})$ désigne l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $D(\mathbb{R}^n)$, ces fonctions sont à support compact inclus dans $\overline{\Omega}$. [28]

Espace des distributions $D'(\Omega)$

Définition 1.6. On appelle distribution toute forme linéaire continue sur $D(\Omega)$, et on note $D'(\Omega)$ l'ensemble des distributions.

Définition 1.7. Soit $T \in D^{'}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la derivée $D^{\alpha}T$ est définie par:

$$\langle D^{\alpha}T, u\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^{\alpha}u\rangle,\ \forall u \in D(\Omega)$$

La notation $\langle T, u\rangle$, pour tout $(T, u) \in D^{'}(\Omega) \times D(\Omega)$, désigne l'image de u par T.

Proposition 1.3 . Si $T \in D^{'}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors $D^{\alpha}T \in D^{'}(\Omega)$ [52].

Définition 1.8. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $D^{'}(\Omega)$. On dit que T_n converge vers 0 dans $D^{'}(\Omega)$, notée $T_n \to 0$ dans $D^{'}(\Omega)$, si et seulement si :

$$\langle T_n, u\rangle \to 0, \quad \forall u \in D(\Omega)$$

Espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ $(m \in \mathbb{Z})$

Définition 1.9. Pour $m \in \mathbb{N}$, On pose:

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \quad D^{\alpha}u \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n\ ;\ |\alpha| \leq m\right\}, \tag{1.4}$$

où les dérivées $D^{\alpha}u$ sont prises au sens des distributions sur Ω [31] .

On posera souvent

$$L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$$

On munit $H^m(\Omega)$ de la norme :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.5}$$

Le produit scalaire de deux élements u, v de $H^m(\Omega)$, étant donné par :

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^{\alpha}u, D^{\alpha}v\rangle_{L^2(\Omega)} \tag{1.6}$$

Remarque 1.2. En théorie des équations aux dérivées partielles, on utilise aussi les espaces $W^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, obtenus en remplaçant $L^2(\Omega)$ par $L^p(\Omega)$ dans (1.4) [1].

Théorème 1.3. $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme (1.6) [41].

Définition 1.10. Pour $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$. De manière évidente $H_0^m(\Omega)$ est un espace fermé dans $H^m(\Omega)$, et en général,

$H_0^m(\Omega) \neq H^m(\Omega)$ (renvoyons à [31]).

Signalons deux cas où on a bien l'égalité :

1) Si $m = 0$, alors $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

2) Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors on peut montrer que $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$ [52] .

Théorème 1.4. Si Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné tel que $\overline{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞, alors l'espace $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$ [31] .

Définition 1.11. On dit qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ possède la porpriété de m-prolongement, $m \in \mathbb{N}$, s'il existe un opérateur P tel que

$$\begin{cases} \text{(i)} \;\; p \in \mathcal{L}\left(H^m(\Omega), H^m\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \\ \text{(ii)} \; Pu = u \qquad p.p \text{ dans } \Omega, \, \forall u \in H^m(\Omega). \end{cases}$$

Théorème 1.5. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$‹‹ régulier ›› (Γ de classe C^m, $m \in \mathbb{N}^*$). Alors Ω possède la porpriété de k-prolongement avec $0 \leq k \leq m$.

Théorème 1.6. (Rellich) Si Ω est ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ possedant la propriété du $(m+1)$-prolongement. Alors

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c H^{m-1}(\Omega), \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

En particulier:

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^2(\Omega), \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

(Pour plus de détails de ce théorème voir par exemple [37])

Remarque 1.3.

Si (seulement) Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Le théorème de Rellich devient [37] :

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow_c H_0^{m-1}(\Omega), \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ $(m \in \mathbb{R})$. [17]

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, avec

$$\begin{cases} \text{la frontière } \Gamma \text{ de } \Omega \text{ est une variété indéfiniment différentiable de} \\ \text{dimention } (d-1), \, \Omega \text{ étant localement d'un seul côté de } \Gamma \text{ (i.e.} \\ \text{on considère } \bar{\Omega} \text{ variété à bord de classe } C^\infty\text{, le bord étant } \Gamma\text{).} \end{cases} \tag{1.7}$$

On notera $d\Gamma$ ou $d\sigma$ la mesure superficielle sur Γ, induite par dx.

On supposera généralement que

$$\Omega \text{ est borné} \tag{1.8}$$

(sauf dans des cas particuliers tel que $\Omega = \mathbb{R}^d$ où $\Omega =$ demi-espace)[31].

Théorème 1.7. On suppose que Ω vérifie (1.7), (1.8) .Soit $s \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors,

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \ H^s(\Omega) \hookrightarrow_c H^{s-\varepsilon}(\Omega)\ .$$

Définition 1.13. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $H^{-m}(\Omega)$ le dual topologique de l'espace $H_0^m(\Omega)$.

Proposition 1.4 :(propriétés des espaces $H^{-m}(\Omega)$)

(i) $H^{-m}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme :

$$\|F\|_{H^{-m}(\Omega)} = \sup_{\substack{\|u\|_{H^m(\Omega)} \leq 1 \\ u \neq 0}} \frac{|F(u)|}{\|u\|_{H^m(\Omega)}} \tag{1.9}$$

(ii) Si $m > m'$, $H^{-m'}(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega)$ avec injection continu.

(Pour plus de détails de cette proposition voir par exemple [17])

Remarque 1.4 . On fait $H^{-m}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme (1.9) [31].

Analyse fonctionnelle de base [12]

Définition1.14. Soit E un espace de Banach. Une suite $(u_n) \subset E$ est converge faiblement dans E vers un élement $u \in E$ si et seulement si

$$(f, u_n) \to (f, u)\,,\ \forall f \in E',\ \text{où } E' \text{ est le dual de } E.$$

Le convergence faible est noté par $u_n \rightharpoonup u$.

Définition1.15. Un élement $u \in E$ qui a la limite faible d'une sous-suite de la suite (u_n) s'appelle point faible adhérent à la suite (u_n) . On peut prouver que.

Théorème1.8. Si la suite $(u_n) \subset E$ possède un unique point faiblement adhérent $u \in E$, alors $u_n \rightharpoonup u$.

Autrement dit, le théorème précédent affirme que si toutes les sous-suites faiblement convergentes d'une suite (u_n) ont la même limite faible u, alors toute suite (u_n) converge faiblement vers u.

Théorème1.9.(**de Eberlein et Smulyan**) .Soit E un espace de Banach réflexif, et soit (x_n) une suite bornée dans E. Alors il existe une sous-suite extraire (x_{n_k}) qui converge faiblement dans E.

Proposition1.5. Soient E un espace de Banach, et une suite $(u_n) \subset E$. Alors

(i) $u_n \to u$ implique $u_n \rightharpoonup u$.

(ii)Si E est un espace de dimension finie, alors le convergence faible et forte sont équivalentes.

(iii)Si $u_n \to u$, alors (u_n) est bornée et $\liminf\limits_{n\to\infty} \|u_n\| \geq \|u\|$.

(iv)Si $u_n \rightharpoonup u$ dans E et $f_n \to f$ dans E, alors il suit que $(f_n, u_n) \to (f, u)$.

(v)Si $u_n \to u$ dans E et $f_n \rightharpoonup f$ dans E', alors il suit que $(f_n, u_n) \to (f, u)$.

Definition1.16. Soit E un espace de Banach, une suite $(f_n) \subset E'$ est converge faiblement étoile vers un élement $u \in E'$ si et seulement si

$$(f_n, u) \to (f, u), \forall u \in E.$$

Le convergence faible étoile est noté par $u_n \rightharpoonup^* u$.

Théorème1.10.(d'Aloaglu).Soit E un espace de Banach separable, et soit (f_n) une suite bornée dans E' le dual de E. Alors il existe une sous-suite extraire (f_{n_k}) qui converge faiblement dans E'.

Proposition1.6. Soit E un espace de Banach, et soit (f_n) une suite dans E' le dial d'espace E.

(i) $f_n \to f$ dans E'implique $f_n \rightharpoonup^* f$.

(ii) Si $f_n \rightharpoonup^* f$, alors (f_n) est bornée et $\liminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\| \geq \|f\|$

(iii)Si $u_n \to u$ dans E et $f_n \rightharpoonup^* f$ dans E', alors il suit que $(f_n, u_n) \to (f, u)$.

(iv) $f_n \rightharpoonup f$ dans E'implique $f_n \rightharpoonup^* f$.

(v) Si E est refléxif, alors $f_n \rightharpoonup^* f$ est équivlante à $f_n \rightharpoonup f$ dans E'.

Definition1.17. Soit $A : E \to F$ un opérateur linéaire, où E et F sont des espaces de Banach.

A est dit séquentiellement faiblement continu si et seulement si

$$u_n \rightharpoonup u \text{ implique } Au_n \rightharpoonup Au.$$

A est dit fortement continu si et seulement si

$$u_n \rightharpoonup u \text{ implique } Au_n \to Au.$$

Proposition1.7. Soit $A : E \to F$ un opérateur linéaire, où E et F sont des espaces de Banach.

(i) Si A est fortement continu, alors A est séquentiellement faiblement continu.

(ii) Si A est compact, alors A est fortement continu.

(iii)Si A est est fortement continu et E est réflexif, alors A est compact.

Définition 1.18. Soient X et Y deux espaces de Banach tels que $X \subset Y$.

On dit que Y s'injecte de manière continue dans X (en notation $X \hookrightarrow Y$) si et seulement si l'opérateur identité:

$$Id : X \longrightarrow Y, \quad Id\,(u) = u$$

est continue, i.e, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|u\|_Y \leq c\,\|u\|_X \ ,$$

qui est equivalent avec

$$\forall\,(u_n) \subset X, \ \ u_n \to u \text{ dans } X \ \text{ implique } u_n \to u \text{ dans } Y.$$

De même, on dit que X s'injecte de manière compacte dans Y (en notation $X \hookrightarrow_c Y$) si et seulement si l'opérateur identité Id est compact de X dans Y , i.e, Id est continue et pour toute suite borné (u_n) dans X on peut extraire une sous-suite converge dans Y, qui est equivalent avec

$$\forall\,(u_n) \subset X, \ \ u_n \rightharpoonup u \text{ dans } X \ \text{ implique } u_n \to u \text{ dans } Y.$$

Nous renvoyons le lecteur à [37, 48]

Théorème1.11.(d'Ascoli). Soit E un espace normé, le sous-enseble K de E est relativement compact si et selement si, pour tout ε stictement positif, il existe un sous-ensemble $\{e_i,\ 1 \leq i \leq I\}$ de K tel que

$$\forall e \in K,\ \exists e_i \text{ tel que } \ \|e - e_i\| < \varepsilon$$

1.1.2 Cadre fonctionnel vectoriel

Nous désignons par S_d l'espaces des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$,"." et $|.|$ répresentent le produit scalaire et la norme euclidieune sur $\mathbb{R}^d$ et S_d, respectivement. Ainsi

$$u.v = u_i v_i, \qquad |v| = (v, v)^{1/2}\,,\ \forall u, v \in \mathbb{R}^d,$$
$$\sigma.\tau = \sigma_{ij}\tau_{ij}, \quad |\tau| = (\tau, \tau)^{1/2}\ ,\ \forall \sigma, \tau \in S_d.$$

Dans toute la suite, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné avec une surface frontière réguliere de Lipschitz notée Γ. Nous utilisons les espaces suivants:

$$
\begin{aligned}
H &= \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\} \\
\mathcal{H} &= \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\} \\
H_1 &= \{u = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega)\} \\
\mathcal{H}_1 &= \{\sigma \in \mathcal{H} \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in H^1(\Omega)\}.
\end{aligned}
$$

$H, \mathcal{H}$, H_1et $\mathcal{H}_1$ sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés par:

$$
\begin{aligned}
(u.v)_H &= \int_\Omega u_i v_i \, dx, \\
(\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} &= \int_\Omega \sigma_{ij} \tau_{ij} \, dx, \\
(u, v)_{H_1} &= (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \\
(\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} &= (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (Div(\sigma), Div\ (\tau))_H.
\end{aligned}
$$

respestivement, où $\varepsilon : H_1 \to \mathcal{H}$ et $Div : \mathcal{H}_1 \to H$ sont les opérateurs de deformation et de divergence, definis par

$$
\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \ \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \ Div(\sigma) = (\sigma_{ij,j}).
$$

Les normes sur les espaces $H, \mathcal{H}$, H_1et $\mathcal{H}_1$ sont notées par $|.|_H, |.|_{\mathcal{H}}, |.|_{H_1}, |.|_{\mathcal{H}_1}$,respectivement.

Pour tout champ de vecteur u, nous désignons par u_N et u_T les composantes normale et tangentielle à la frontière, c'est-à-dire:

$$
u_N = u.N \ , \ u_T = u - u_N N. \tag{1.11}
$$

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \to L^2(\Gamma)^d$ est linéaire continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 pare cette application notée par H_Γ, ce sous espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$.

Désignons par H'_Γ le dual de H_Γ, et $\langle ., . \rangle$ le produit de dualité entre H et H' . Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$,il existe un élément noté $\sigma\nu \in H'_\Gamma$ tel que

$$
\langle \sigma N, \gamma v \rangle = \langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, v \rangle_H \qquad \forall v \in H_1 \tag{1.12}
$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule suivante de Green:

$$
\langle \sigma N, \gamma v \rangle = \int_\Gamma \sigma N.v \, da \qquad \forall v \in H_1 \tag{1.13}
$$

On définit de façon analogue les composantes normale et tangentielle de σ sur la frontière par les formules

$$\sigma_N = (\sigma N) .N, \qquad \sigma_T = \sigma N - \sigma_N N \tag{1.14}$$

La formule de green permet en particulier de définir la restriction de σN à une partie mesurable Γ_F de Γ.Plus précisément, pour $g \in L^2(\Gamma)^d$, on a $\sigma N = g$ sur Γ_F si et selement si $\langle \sigma N, \gamma v\rangle = \int\limits_{\Gamma} g.v \, da$, pour tout $v \in H_1$ s'annulent sur $\Gamma \backslash \Gamma_F$. Cette définition sera utilisée dans les chapitres suivants.

Tout au long de la mémoire dans les problèmes mécaniques, Γ est partitionée en trois parties mesurables Γ_C, Γ_D et Γ_F, telles que $mes\,(\Gamma_D) > 0$. Nous aurons constamment besoins de l'espace des déplacement admissibles V défini comme étant un sous-espace fermé de H_1

$$V = \{v \in H_1 \,| v = 0 \; sur \; \Gamma_D \}$$

Puisque $mes\,(\Gamma_D) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V : il existe une constante $C_K > 0$ dépendent uniquement de Ω et Γ_D telle que

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq C_K \, |v|_{H_1} \qquad \forall v \in V \tag{1.15}$$

En outre, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $C_0 > 0$ dépendent uniquement de Ω et Γ_C et Γ_D telle que

$$|v|_{L^2(\Gamma)^d} \geq C_0 \, |v|_V \qquad \forall v \in V \tag{1.16}$$

1.1.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un interval de temps dans un espace de Banach réel. Bien que le contenu de ce paragraphe est standard et peut être trouvé dans un grand nombre d'ouvrages, une revue d'ensemble sur ce sujet nous a parru bienvenue.

Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $C_c\,(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support $(0, T)$ à valeurs dans X.

Définition 1.19. Une fonction $u : [0, T] \to X$ est dite mesurable s'il existe un sous-ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c\,(0, T; X)$ telle que $\|u_n(t) - u(t)\|_X \to 0$, pour tout $t \in [0, T] \backslash E$.

Définition 1.20. Une fonction $u : [0,T] \to X$ est dite fortement dérivable à $t_0 \in (0,T)$ s'il existe un élement $\frac{du}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de u à t_0, telle que

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}\left(u\left(t_0+h\right)-u\left(t_0\right)\right)-\frac{du}{dt}\left(t_0\right)\right\|_X = 0.$$

Définition 1.21. Une fonction $u : [0,T] \to X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0,T;X)$ telle que

$$\lim_{h\to 0}\int_0^T \|u_n(t)-u(t)\|_X \; dt = 0.$$

Théorème1.12.(Bochner) Une fonction $u : [0,T] \to X$ est dite mesurable et intégrable si et sellemet si $x \longmapsto \|u(x)\|_X : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ est intégrable. Dans ce cas

$$\left\|\int_0^T u_n(t)\,dt\right\|_X \leq \int_0^T \|u_n(t)\|_X \; dt.$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0,T;X)$ des (classes de) fonctions $u : (0,T) \to X$ mesurables, telles que l'application $t \longmapsto \|u(t)\|_X$ appartient à $L^p(0,T)$. On sait que $L^p(0,T;X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u_n(t)\|_X^p \; dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si} \;\; 1 \leq p < \infty.$$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\left\{c > 0 \;:\; \|u_n(t)\|_X \leq c, \;\; p.p. \; t \in (0,T)\;\right\} \quad \text{si} \;\; p = \infty.$$

par ailleurs, on a les résultats suivants.

Proposition 1.8.

(1) $L^p(0,T;\,X)$ $(1 \leq p < \infty)$ est un espace de Banach.

(2) Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(.,.)_X$ alors $L^p(0,T;\,X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u,v)_{L^p(0,T;X)} = \int_0^T (u(t)\,,v(t))_X \; dt.$$

(3) $L^r(0,T;\,X) \subset L^q(0,T;\,X)$, avec injection continue, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

(4) Si X un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0,T;X)' = L^q(0,T;X), si\; 1 < p,q < \infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0,T;X)' = L^\infty(0,T;X)$$

où $L^p(0,T;\,X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0,T;\,X)$, $1 \leq p < \infty$.

Théorème1.13. Soient X, U et Y trois espaces de Banach tels que $X \subset U \subset Y$ et $X \hookrightarrow_c U$. Soit $\mathcal{F}$ est borné dans $L^p(0,T;X)$, où $1 \leq p \leq \infty$ et $\partial\mathcal{F}/\partial t = \left\{\dot{f}; f \in \mathcal{F}\right\}$ est borné dans $L^1(0,T;Y)$. Alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^p(0,T;U)$. Soit $\mathcal{F}$ borné dans $L^\infty(0,T;X)$, et $\partial\mathcal{F}/\partial t$ est borné dans $L^r(0,T;Y)$, où $r > 1$. Alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $C(0,T;U)$. [46]

Soit $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(0,T;X)$ est l'espace des fonctions $u : [0,T] \to X$ telles que $u \in L^p(0,T;\ X)$ et $\dot{u} \in L^p(0,T;\ X)$, $W^{1,p}(0,T;X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

En particulier, $W^{1,2}(0,T;X)$ est un espace de Hilbert pour la norme précédente.

Définition 1.22. Une fonction $f : [0,T] \to X$ est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_i, b_i) disjoints, inclus dans $[0,T]$, tels que $\sum\limits_i (b_i - a_i) < \delta$ on a $\sum\limits_i \|f(b_i) - f(a_i)\|_X \leq \varepsilon$.

Maintenant nous rappelons le lien entre les fonctions absolument continues et les fonctions de l'espace $W^{1,p}(0,T;X)$.

Théorème1.14. Soit $1 \leq p \leq \infty$, X un espace de Banach réflexif et soit $u \in L^p(0,T;\ X)$. Les propriétés suivantes son équivalentes:

(1) $u \in W^{1,p}(0,T;X)$.

(2) u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans $L^p(0,T;\ X)$.

(3) Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^p(0,T;\ X)$, telles que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Étant donnés un entier $k \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0,T;X) = \left\{u \in W^{k-1,p}(0,T;X);\ \dot{u} \in W^{k-1,p}(0,T;X)\right\}$$

On vérifie aisément que $u \in W^{k,p}(0,T;X)$ si et seulement s'il existe k fonctions $g_1, g_2, ...g_k \in L^p(0,T;X)$ telles que

$$\int_0^T u(t)\,\varphi^{(i)}dt = (-1)^i \int_0^T g_i(t)\,\varphi dt, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty([0,T]),\ \forall i = 1, 2...k,$$

où $\varphi^{(i)}$ désigne la dérivée d'ordre i de φ. On peut donc considérer les dérivées successives $\dot{u} = g_1,\ u^{(2)} = g_2, ...,\ u^{(k)} = g_k$. L'espace $W^{k,p}(0,T;X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^{k} \left\|u^{(\alpha)}\right\|_{L^p(0,T;X)}.$$

On a alors les résultats suivants:

Théorème1.15. Si la fonction u appartient à présent à l'espace $W^{1,p}(0,T;X),\ p \in [1,\infty]$. Nous avons alors:

(1) $\|u(t) - u(s)\|_X \leq \int_s^t \|\dot{u}(\tau)\|_X \, d\tau \quad 1 \leq s \leq t \leq T,$

(2) si de plus $p < \infty$, on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X^p \leq (t-s)^{p-1} \int_s^t \|\dot{u}(\tau)\|_X^p \, d\tau \quad 1 \leq s \leq t \leq T,$$

(3) si $p = \infty$, on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X \leq (t-s) \|\dot{u}(\tau)\|_{L^\infty(0,T;X)} \qquad 1 \leq s \leq t \leq T.$$

Théorème1.16. Dans le cas où l'espace $(X, (.,.)_X)$ est un espace de Hilbert et si la fonction u appartient à à l'espace $H^1(0,T;X)$, alors:

(1) la fonction $t \to \frac{1}{2}\|u(t)\|_X^2$ est une fonction absolument continue sur l'intervalle $]0,T[$,

(2) $\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|u(t)\|_X^2 = (\dot{u}(t), u(t))_X \qquad$ p.p. $t \in]0,T[$

(3) $\frac{1}{2}\|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2}\|u(0)\|_X^2 + \int_0^t (\dot{u}(s), u(s))_X \, ds \qquad$ pour tout $t \in [0,T]$

Théorème1.17. Soit X un espace de Banach et $p \in [1,\infty]$. Alors $W^{1,p}(0,T;X) \hookrightarrow C([0,T];X)$.

Le théorème précédent montre que chaque élément $v \in W^{1,p}(0,T;X)$ peut être identifié avec un élément, encore noté v dans l'espace $C([0,T];X)$, après une modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $[0,T]$. De plus, il existe une constante positive c tel que

$$\|v\|_{C([0,T];X)} \leq c\|v\|_{W^{1,p}(0,T;X)} \quad \forall v \in W^{1,p}(0,T;X).$$

Nous renvoyons le lecteur à $[12, 38]$.

1.2 Description du cadre physique des problèmes de contact

On va introduire dans cette section le modèle du problème mécanique qui intervient dans presque tout le mémoire, le contact avec ou sans frottement entre un corps et une fondation. On envisage un corps qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ avec une surface frontière régulière Γ partitionnée en trois parties mesurables Γ_C, Γ_D et Γ_F,telles que $mes\,(\Gamma_D) > 0$. Soit $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. On étudie dans un intervalle de temps $[0, T]$ l'evolution du corps matériel due à l'application des forces de volume et des tractions de surface.

On note par $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ le champ des déplacements, par $\sigma : \Omega \times [0, T] \to S_d$ le champ des containtes, et $\varepsilon\,(u)$ représente le tenseur des déformations linéairisées.

Dans ce qui suit, pour simplifier, on n'indique pas la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \Omega \cup \Gamma$ et $t \in [0, T]$. On outre, les points au dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport à la variable temps,

$$\dot{u} = \frac{du}{dt},\ \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

On note la densité de masse $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ et la densité des forces volumiques

$f : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$, l'evolution du corps est décrite par l'équation du mouvement

$$\rho\ddot{u} = Div\ \sigma + f \qquad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T)\,, \tag{1.17}$$

où $\ddot{u}$ représente l'accélération et $\dot{u}$ la vitesse du corps. Les processus d'evolution modelés par l'équation (1.7) s'applelent processus dynamiques dans certain situation, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple dans le cas où $\dot{u} = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statiques). où bien dans le cas où le champ des vitesses varie lentement par rapport au temps et de ce fait le terme $\rho\ddot{u}$ devient négligeable (processus quasistatiques)dans ces deux cas l'équation (1.7) devient

$$Div\ \sigma + f = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T)\,. \tag{1.18}$$

L'équation (1.17) où (1.18) est insuffisante à elle seule pour décrire les mouvements des milieux continus. En effet, il reste à decrire ce quit est propre au matériau lui même. c'est l'objet des lois de comportement.

Les lois de comportement caractérisent le comportement de chaque type de milieu continu. Bien qu'elles doivent respeter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale et c'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Dans le cas viscoélastique, le corps suit une loi de comportement de Kilvin-Voigt de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon\left(\dot{u}\right) + \mathcal{F}\varepsilon\left(u\right) \tag{1.19}$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ sont des fonctions constitueves non linéaires. $\mathcal{A}$ représente l'operateur de viscosité et $\mathcal{F}$ désigne l'operateur d'élasticité. Et pour un corps élastique, la loi se réduit à

$$\sigma = \mathcal{F}\varepsilon\left(u\right) \tag{1.20}$$

On rappele qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contrainte $\sigma = (\sigma_{ij})$ est donné par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\left(\dot{u}\right) + g_{ijkl}\varepsilon_{kl}\left(u\right) \tag{1.21}$$

où $\mathcal{A} = (a_{ijkl})$ est le tenseur de viscosité et $\mathcal{F} = (g_{ijkl})$ est le tenseur d'élasticité, pour $i, j, k, l = 1, ..., d$.

On définit maintenant les conditions aux limites sur chaque un des trois parties de Γ

• La condition aux limites de déplacement:

$$u = \varphi \qquad \text{sur} \qquad \Gamma_D \times (0, T) \tag{1.22}$$

Sa signification consiste en ce que le champ des déplacements est imposé sur la partie Γ_D de la frontière Γ, la fonction φ étant une donnée du problème (par exemple, si $\varphi = 0$ le corps est encastré par la partie Γ_D).

• La condition aux limite de traction:

$$\sigma N = h \qquad \text{sur} \qquad \Gamma_F \times (0, T) \tag{1.23}$$

Elle signifie que le vecteur des containtes de Cauchy σN est imposé sur la partie Γ_F de la frontière, h représentant la densité des forces appliquées de surface et constituant une donnée du problème.

Enfin, le corps est éventuellement en contact avec une fondation sur $\Gamma_C \times (0, T)$. C'est ici que commence toute la richesse des problème et que réside notre intérêt, car les conditions sur la surface potentielle de contat Γ_C peuvent être très diverses et donner ainsi lieu à une varieté de modèles de contact avec où sans frottement. Nous citons ici les principales lois de frottement.

Contact bilatéral avec frottement de Tresca

On suppose que le contact entre le corps et la fondation se produit avec frottement bilatéral c'est-à-dire le contact est maintenu pendant le mouvement, cette propriètè se traduit mathématiquement par:

$$u_N = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0,T)\,.$$

La loi de Tresca présente un seuil de frottement fixe g lorsque le solide et la fondation sont en contact, la fondation exerce sur le solide un effort tangentiel qui ne dépasse pas un certain seuil

$$|\sigma_T| \leq g \quad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0,T)\,.$$

Tant que la containte tangentielle n'a pas atteint le seuil, le milieu continu ne peut pas se déplacer par rapport à l'obstale et il y a blocage, ce qui se traduit par:

$$|\sigma_T| < g \Longrightarrow \dot{u}_T \;= 0 \;\text{ sur} \quad \Gamma_C \times (0,T)\,.$$

Lorsque ce seuil est atteint le solide peut se déplacer tangentiellement par rapport à la fondation et il ya alors glissement. La containte tangentielle s'oppose à la vitesse.

Alors on a:

$$|\sigma_T| \leq g \Longrightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_T = -\lambda\,\dot{u}_T \quad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0,T)\,.$$

En conclusion, le conditions aux limites de type frottement de Tresca s'ecrivent alors comme suit

$$\begin{cases} u_N = 0 \\ |\sigma_T| \leq g \\ |\sigma_T| < g \Longrightarrow \dot{u}_T \;= 0 \\ |\sigma_T| \leq g \Longrightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_T = -\lambda\,\dot{u}_T \end{cases} \qquad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0,T)\,,$$

où $g > 0$ est le seuil de frottement.

Contact avec compliance normale, avec ou sans frottement:

Ici, la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale satisfait à la condition dite de "compliance normale", c'est-à-dire

$$\sigma_N = -p_N\left(u_N \ - g\right)$$

où u_N est le déplacement normale, g représente le gap entre le corps et la fondation, et p_N est une fonction positive donnée. Cette condition dit que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration $u_N \ - g$.

Dans le cas sans frottement, les mouvements tangentiels sont libres, ce qui se traduit par

$$\sigma_T = 0$$

En présence de frottement, la loi de type coulomb associèe sur $\Gamma_C \times (0, T)$ est, dans le cas statique

$$\begin{aligned}
&|\sigma_T| \leq -p_T\left(u_N \ - g\right) \\
&|\sigma_T| < -p_T\left(u_N \ - g\right) \Longrightarrow u_T \ = 0 \\
&|\sigma_T| \leq -p_T\left(u_N \ - g\right) \Longrightarrow \text{ilexiste } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_T = -\lambda \ u_T
\end{aligned}$$

Dans le cas quasistatique et dynamique, elle s'écrit

$$\begin{aligned}
&|\sigma_T| \leq -p_T\left(u_N \ - g\right) \\
&|\sigma_T| < -p_T\left(u_N \ - g\right) \Longrightarrow \dot{u}_T \ = 0 \\
&|\sigma_T| \leq -p_T\left(u_N \ - g\right) \Longrightarrow \text{ilexiste } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_T = -\lambda \ \dot{u}_T
\end{aligned}$$

Ici p_T est une fonction positive, représent le seuil de frottement. Tant que le seuil n'est pas atteint, il y a immobilité (nullité de la vitesse tangentielle où du déplacement tangentiel).

Quand ce seuil est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement. Comme exemple, on peut considérer

$$p_N\left(r\right) = c_N\left(r_+\right)^{m_N}, \ p_T\left(r\right) = c_T r_+$$

avec $m_N \in \left]0, 1\right]$, c_N et c_T des constantes positives et $r_+ = \max\left\{0, r\right\}$. D'autres exemples envisageables, comme

$$p_T = \mu p_N \ \text{ où } p_T = \mu p_N\left(1 - \alpha p_N\right)_+$$

où $\mu > 0$ est un coefficient de frottement et α est un petit coefficient positif relatif à la durité de la surface de contact.

Réponse normale instantané:

La condition dite de la réponse normale instantanée sur la surface potentielle de contact $\Gamma_C \times (0, T)$ s'écrit:

$$-\sigma_N = p_N (\dot{u}_N),$$

où $\dot{u}_N$ désigne la vitesse normale et p_N est une fonction prescrite telle que

$$p_N (r) = 0 \text{ pour } r \leq 0.$$

Cette égalité traduit une dépendance générale de la contrainte normale par rapport à la vitesse normale, elle peut représenter le comportement d'une couche de lubrifiant sur la surface de contact. Dans le cas où

$$p_N (r) = k_N r_+ \forall r \in \mathbb{R}$$

où $k_N \geq 0$, la résistence de la fondation à la pénétration est proportionnelle à la vitesse normale. Ce type de comportement modélisant le mouvement d'un corps déformable sur le sable où sur un matétiau granulaire.

La loi de frottement associée est donnée par

$$-\sigma_T = p_N (\dot{u}_N).$$

Ici, la loi est sans seuil et dit que le cisaillement tangentiel sur la surface de contact est une certaine fonction de vitesse tangentielle.

Loi de Coulomb:

C'est une loi les plus répandues et elle est réaliste que la loi de Tresca. Elle se caractérise par l'intérvention de la contrainte normale et peut s'ennoncer comme suit

$$\begin{cases} |\sigma_T| \leq \mu |\sigma_N| \\ |\sigma_T| < \mu |\sigma_N| \Longrightarrow \dot{u}_T = 0 \\ |\sigma_T| \leq \mu |\sigma_N| \Longrightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_T = -\lambda \, \dot{u}_T \end{cases} \quad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0, T),$$

où $\mu > 0$ est un coefficient de frottement. On peut compliter ces conditions par des conditions de contact unilatéral où bilatéral. La loi de Coulomb est souvent utilisée pour les corps rigides où élastiques. On remarque également qu'il s'agit d'une loi à seuil, tant que le seuil n'est pas atteint, il n'y a pas de glissement. Ce seuil est variable et dépend de la contrainte normale, ce qui représente une difficulté majeure pour l'étude mathématique de cette loi de frottement. C'est pourquoi on introduit:

Loi de Coulomb avec contrainte normale imposée:

Cette loi de frottement est une version simplifiée de la précédente. Cela consiste à imposer directement la contrainte normale, soit

$$\sigma_N = S \qquad sur \;\; \Gamma_C \times (0,T)\,.$$

Pour simplifier l'exposé on suppose que S est une donnée du problème et elle indépendante de temps. Comme les précédentes, cette loi présente également un seuil qui est désormais connu et fixé.

On a donc

$$\begin{cases} |\sigma_N| = S \\ |\sigma_T| \le \mu\,|\sigma_N| \\ |\sigma_T| < \mu\,|\sigma_N| \Longrightarrow \dot{u}_T \;= 0 \\ |\sigma_T| \le \mu\,|\sigma_N| \Longrightarrow \text{il existe } \lambda \ge 0 \text{ tel que } \sigma_T = -\lambda\,\dot{u}_T \end{cases} \qquad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0,T)\,,$$

où S est une fontion de $L^2(\Gamma_C)$ et $\mu > 0$ est un coefficient de frottement. Cette loi de frottement modélise un contact unilatéral entre le corps déformable et la base rigide.

Contact avec condition aux limites de type sous-différentielle:

Ce sont des conditions de contact qui conduisent à une inégalité générale de type sous-différentielle:

$$u \in U \quad \varphi\,(v) - \varphi\,(\dot{u}) \ge -\sigma_N\,(v - \dot{u}) \qquad \forall v \in U,$$

où U représente l'ensemble des déplacement admissibles, et φ une fonction convexe donnée.

1.3 Elements d'analyse non linéaire dans les éspaces de Hilbert

Dans cette section nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les inéquations variationnelles elliptiques qui interviennent dans l'étude des problèmes de ce mémoire. Pour finir, nous passons en revue les lemmes de Gronwall qui seront utilisés. De nombreux ouvrages parcourent ce sujet, nous renvoyer le lecteur soucieux de plus détails à, par exemple $[5, 38]$.

1.3.1 Inéquations variationnelles elliptiques

Nous commençons ce paragraphe par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert H munit du produit scalaire $(.,.)_H$ et de la norme associée $|.|_H$. Nous pouvons identifier l'espace H à son dual H'. Soient $A : H \to H$ un operateur non linéaire, $j : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre et $f \in H$, rappelons la définition suivante.

Définition1.24. L'opérateur A est dit:
(1) monotone si

$$(Au - Av, u - v)_H \geq 0 \ \forall u, v \in H;$$

(2) fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_H \geq m\,|u - v|^2 \quad \forall u, v \in H.$$

(3)de Lipschitz s'il existe $L > 0$ tel que

$$|Au - Av|_H \leq L\,|u - v|_H \quad \forall u, v \in H$$

Un bon nombre de problèmes aux limites en équations aux dérivées partielles ainsi qu'en mécanique des milieux continus ont un rapport avec des problèmes mathématiques de la forme suivante.

Problème. Trouver u tel que :

$$u \in H \qquad (Au, v - u)_H + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_H \quad \forall v \in H. \tag{1.14}$$

Ce problème est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur H. D'autre problèmes rencontrés en mécanique ont un rapport avec des problèmes mathématiques similaires de la forme suivante:

Trouver u tel que:

$$u \in K \qquad (Au, v-u)_H \geq (f, v-u)_H \quad \forall v \in K, \tag{1.15}$$

où K est un sous-ensemble non vide de H. Le probléme (1.15) est appelé inéquations variationnelle elliptique de prémière espèce sur H.

Remarquons que si $j \equiv 0$ (où $K = H$), alors (1.14) (rep. (1.15)) est équivalente au problème suivant:

Trouver u tel que:

$$u \in K \qquad (Au, v)_H \geq (f, v)_H \quad \forall v \in K. \tag{1.16}$$

On obtient ainsi une équation variationnelle.

En ce qui concerne les problèmes(1.14) et (1.15), on a le résultat d'existence et d'unicité suivants:

Théorème1.16. Si A est un opérateur non linéaire, fortement monotone et de Lipschitz et K est un convexe fermé non vide de H alors l'inéquation variationnelle elliptique (1.15) admet une solution unique.

Théorème1.17. Si A est un opérateur non linéaire, fortement monotone et de Lipschitz et j est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement alors l'inéquation variationnelle elliptique (1.17) admet une somution unique.

1.3.2 Convexité et semi-continuité

Soit E un espace normé, et K un sous ensemble de E est convexe si et seulement si

$$u, v \in K \text{ implique } tu + (1-t)\, v \in K \text{ pour tout } 0 \leq t \leq 1.$$

Definition1.17. Un sous ensemble M de l'espace normé E est appelé séquentiellement faiblement fermé si la limite de toute suite faiblement convergente $(u_n) \subset M$, i.e

$$(u_n) \subset M \text{ et } u_n \rightharpoonup u \text{ implique } u \in M.$$

Proposition1.8. Soit M un sous ensemble convexe de E. Alors M est fermé si et seulement si M est séquentiellement faiblement fermé.

Définition1.18. On considère E un espace de Banach et $\phi : M \subset E \to]-\infty, \infty]$ avec $M = D(\phi)$.

(i) La fonctionnelle ϕ est dite séquentiellement faiblement semi-continue à $u \in M$ si et seulement si

$$\liminf_{n\to\infty} \ \phi(u_n) \geq \phi(u) \tag{1.10}$$

vérifie pour toute suite $(u_n) \subset M$ telle que $u_n \to u$ si $n \to \infty$.

(ii) La fonctionnelle ϕ est dite semi-continue inférieurement si et seulement si l'ensemble M est fermé pour tout $r \in \mathbb{R}$, où $M = \{u \in M : \phi(u) \leq r\}$

(iii) La fonctionnelle ϕ est dite séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement à $u \in M$ si et seullement si (1.10) est vérifie pour toute suite faiblement convergente (u_n) vers u. i.e. $u_n \rightharpoonup u$.

(iv) La fonctionnelle ϕ est dite séquentiellement supérieurement semi-continue(respectivement, séquentiellement faiblement semi-continue supérieurement, semi-continue supérieurement) si et seulement si $-\phi$ est séquentiellement semi-continue inférieurement (respectivement, séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement, semi-continue inférieurement).

(v) La fonctionnelle ϕ est dite convexe si et seulement si M est convexe et

$$\phi(tu + (1-t)v) \leq t\phi(u) + (1-t)\phi(u), \forall u, v \in M, \ 0 \leq t \leq 1.$$

(vi) La fonctionnelle ϕ est dite strictement convexe si et seulement si M est convexe et

$$\phi(tu + (1-t)v) < t\phi(u) + (1-t)\phi(u), \forall u, v \in M \text{ avec } u \neq v, \ 0 < t < 1.$$

Proposition1.9. On considère E un espace de Banach et $\phi : M \subset E \to]-\infty, \infty]$ avec $M = D(\phi)$.

(i) ϕ est séquentiellement semicontinue inférieurement sur M si et seulement si ϕ est semicontinue inférieurement sur M.

(ii) On suppose $u \in M$ avec $\phi(u) \neq \pm\infty$. Alors ϕ est séquentiellement semi-continue inférieurement à u si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $v \in M$ avec

$$\|u - v\| < \delta(\varepsilon) \text{ implique } \phi(u) < \phi(v) + \varepsilon.$$

(iii) ϕ est continue si et seulement si ϕ est semi-continue inférieurement et supérieurement.

(iv) Si, en outre, M est fermé et convexe, et ϕ est convexe, alors semi-continu inférieurement, séquentiellement semi-continu inférieurement et séquentiellement faiblement semi-continu inférieurement sont mutuellement équivalents.

Definition1.19. On considère E un espace de Banach et $\phi : E \to \left]-\infty, \infty\right]$ est une fontionnelle convexe.

(i) Le domaine efficace de ϕ est l'ensemble $dom\,(\phi)$ défini par

$$dom\,(\phi) = \{u \in E : \phi\,(u) < +\infty\}\,.$$

(ii) ϕ est propre si $dom\,(\phi) \neq \emptyset$.

(iii) L'epigraphe de ϕ,est denoté par $epi\,(\phi)$, est donné par

$$epi\,(\phi) = \{(u, \lambda) \in E \times \mathbb{R} : \phi\,(u) \leq \lambda\}\,.$$

Corollaire1.1. On considère E un espace de Banach et $\phi, \phi_i : E \to \left]-\infty, \infty\right]$, $i = 1, 2$, sont des fontionnelles convexes, alors les suivants sont vérifiés.

(i) $dom\,(\phi)$ est convexe.

(ii) Si $\lambda \geq 0$, alors $\lambda\phi$ est convexe.

(iii) Si $\phi_1$et ϕ_2 sont convexes, alors ϕ_1+ ϕ_2 est convexe.

(iv) ϕ est convexe, propre, et semi-continue inférieurement si et seulement si $epi\,(\phi)$ est convexe, nonvide, et fermé dans $E \times \mathbb{R}$ respectivement .

(v) Si ϕ est convexe alors pour tout $r \in \mathbb{R}$ l'ensemble $[\varphi \leq r] = \{u \in E : \phi\,(u) \leq r\}$ est convexe mais la réciproque n'est pas vraie.

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à $[12, 38]$.

1.4 Compléments divers

Soit H un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire $(.,.)_H$ et de la norme associée $\|.\|_H$. On note aussi par H' l'espace dual H et par $(,)_{H\times H'}$la dualité entre H et H'.

Théorème(de représentation de Riesz-Fréchet). Etant donné $\eta \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que

$$(\eta, v)_{H\times H'} = (f, v)_H \quad \forall v \in H,$$

on a de plus

$$\|\eta\|_{H'} = \|f\|_H \ .$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur H peut représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire. L'aplication $\eta \to f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et son dual H'.

Théorème1.18.(de fonction implicite définie par une seule équation).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, On considère $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k (où $k \geq 1$) sur Ω, et $a = (a_1, ..., a_n) \in \Omega$. On suppose que

$$f(a) = 0, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0.$$

Il existe alors un voisinage ouvert U de $(a_1, ..., a_{n-1})$ et un voisinage ouvert V de a_n, et une fonction $g : U \to V$ de classe C^k telle que

(i) $\forall x = (x_1, ...x_n) \in U \times V, \quad f(x) = 0 \Longleftrightarrow x_n = g(x_1, ...x_{n-1})$.

(ii) $\forall x \in U \times V \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) \neq 0.$

(iii) $\forall \bar{x} = (x_1, ...x_{n-1}) \in U$, $\forall i \in \mathbb{N}_{n-1} \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) = -\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \times \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right]^{-1}$.

Lemme1.1. Soit U un espace de Banach réflexif, L un sous ensemble borné convexe fermé de U. Soit γ une application de $L \times L$ dans $\mathbb{R}$ telle que:

(i) $\gamma(u, u) \geq 0 \ \forall u \in L$.

(ii) Pour tout $u \in L$ fixé, l'ensemble$\{v \in L; \gamma(u, v) < 0\}$ est convexe.

(iii) Pour tout $v \in L$ fixé, l'ensemble$\{v \in L; \gamma(u, v) \geq 0\}$ est séquentiellement faiblement fermé.

Alors il existe au moins une solution $u \in L$ à l'équation $\gamma(u, v) \geq 0 \ \forall v \in L$.

(Pour plus de détails de ce lemme voir par exemple [38])

Nous rappelons ici les lemmes classiques de type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans ce paragraphe, on pourra consulter par exemple [21, 47] . Notons par ailleurs que dans certains paragraphes de ce mémoire, nous allons utiliser des versions "presque partout" de ces lemmes.

Lemme1.2. Soient $m, n \in C([0,T];\mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$, $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0,T[$, $a \geq 0$ une constante, $\phi \in C(0,T;\mathbb{R})$

(1) Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\,ds + \int_0^t n(s)\,\phi(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T],$$

Alors

$$\phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)\,ds\right) \exp\left(\int_0^t n(s)\,ds\right) \quad \forall t \in [0,T],$$

(2) Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a\int_0^t \phi(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T],$$

Alors

$$\int_0^t \phi(s)\,ds \leq \exp(aT) \int_0^t m(s)\,ds \quad .$$

Dans le cas particulier $m = 0$ la partie de (1) de ce lemme devient:

Corollaire1.2. Soit $n \in C([0,T];\mathbb{R})$ telle que, $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0,T[$, et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in C(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\,\phi(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T],$$

Alors

$$\phi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t n(s)\,ds\right) \quad \forall t \in [0,T].$$

le corollaire1.2 est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. En supposant qu'il existe deux solutions, en notant par ϕ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ϕ sous la forme

$$\phi(t) \leq \int_0^t n(s)\,\phi(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T],$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de ϕ.

Lemme1.3. Soient $m, n \in C([0,T];\mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0,\ n(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0,T[$, $a \geq 0$ une constante. Soit également $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t)\,dt + \int_0^s n(t)\phi^2(t)\,dt \quad \forall s \in [0,T],$$

Alors

$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t)\,dt\right)\exp\left(\int_0^s n(t)\,dt\right) \quad \forall s \in [0,T].$$

Dans le cas particulier $n = 0$ le lemme1.4 devient:

corollaire1.3. Soit $m \in C([0,T];\mathbb{R})$ telle que $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0,T[$, $a \geq 0$ une constante. Soit également $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t)\,dt \quad \forall s \in [0,T],$$

Alors

$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t)\,dt\right) \quad \forall s \in [0,T].$$

Lemme1.4. Si $p_j,\ j = 1,...,i$ sont des nombres qui vérifient $0 \leq p_1 \leq C_1$

où C_1 est une constante positive, $0 \leq p_{1+1} \leq C_1 + C_2 \sum_{j=1}^{i} k_j p_j,\ i = 1,...n,$

avec C_2 constante positive et pour $k_j \geq 0,\ j = 1,...,i,\ \sum_{j=1}^{i} k_j = T$, où T est une constante positive, alors

$p_i \leq C_1 \exp\left(C_2 \sum_{j=1}^{i} k_j\right) \leq C_1 \exp(C_2 T)$, pour $i = 1,...n.$

Chapitre 2

Analyse mathématique pour un problème viscoélastique de contact unilatéral

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème dynamique de contact unilatéral avec frottement non local pour un corps viscoélastique fissuré, suivant une loi de Kilvin-Voigt.

On utilise une méthode de pénalisation pour résoudre ce problème. On introduit un problème pénalisé qui peut être considéré comme un problème particulier d'une classe de problèmes, pour laquelle on montre l'existence d'une solution par une technique incrémentale. Cette technique a été déja utilisée dans [19, 43] . Des estimations sont obtenues sur les solutions pénalisées. De plus, on utilise une décompostion de Ω d'une part et d'autre de la fissure, afin d'appliquer des résultats de compacité.

Ces résultats permettent de passer à la limite dans le problème pénalisé et d'obtenir une solution pour le problème unilatéral avec frottement non local.

2.1 Introduction

Pour les problèmes de diffraction par des fissures, on considère habituellement une condition aux limites de surface libre (voir [51]). D'un point de vue mécanique, cela signifie qu'il ya absence d'efforts sur les deux lévres de la fissure. La fissure correspond donc à une cavité toujours ouverte au cours du temps, sur toute sa longueur. Il semble plus réaliste de supposer que les lèvres de la fissure peuvent se recoller sur totalité où une partie de la fissure, pendant un certain intervalle de temps. cette modélisation est prise en compte en modifiant des conditions aux limites sur la fissure. On considère, alors une condition de contact unilatéral, appelée aussi condition de Signorini dan la litérature, au lieu de la condition de surface libre. Supposons cette condition unilatéral, les lèvres de la fissure peuvent partiellement se fermer ou s'ouvrir. Lorsqu'il y a contact , il y a une pression d'une lèvre de la fissure à l'autre. Du point de vue mécanique, la prise en compte de conditions de contact unilatéral sur la fissure peut donc sembler plus réaliste. De plus, on peut enrichir le modèle, en considérant du frottement. A partir d'une certaine intensité seul de la pression, on peut supposer que les lèvres de la fissure glissent l'une par rapport à l'autre, ce phénomène est modélisé par la loi de frottement de Coulomb.

Dans un permier temps, on présente une méthode permettant de paramétriser les lèvres d'une fissure comprenant une ouverture. Cette paramétrisation peut être utile lorsqu'on fait correspondre les deux lèvres pour exprimer, par exemple, les conditions de contact unilatéral. Dans une deuxième partie, on introduit un problème de contact pour un milieu viscoélastique fissuré. Des conditions de contact unilatéral avec frottement de Coulomb non local sont prises en compte. L'existence d'une solution au problème est obtenue en utilisant une méthode de pénalisation.

2.2 Paramétrisation de la fissure

Dans ce chapitre, on suppose que la fissure comporte une partie ouverte. c'est-à-dire un “gap” entre ses deux lèvres. On adopte donc une modélisation plus générale. Néanmoins, elle oblige à utiliser une paramétrisation de la fissure, ce qui est plus compliquée.

Pour exprimer les conditions aux limites de contact unilatéral sur une fissure quelconque comportant une partie ouverte, il est nécessaire de faire correspondre les deux lèvres de la fissure entre elles pour exprimer les conditions de contact sur un même espace. Une possibilité est d'introduire une paramétrisation de la fissure. Cette paramétrisation doit être valable si l'on considère une fissure fermée. D'autre part, cette paramétrisation va conduire à exprimer les conditions aux limites sur la fissure dans un espace de dimension $d-1$ si d est la dimension de l'espace.

On considére la représentation suivante d'une fissure, qui reprend les représentations de Hlaváček, Haslinger, Nečas, Lovíšek [20] et de Boieri, Gastaldi et Kinderlehrer [4], qui avaient étudié la représentation d'une zone de contact entre deux corps et exprimé les conditions de contact unilatéral entre ces deux corps. Dans $\mathbb{R}^3$ elle se représente comme sur la figure 2.1 et figure 2.2.

Un corps viscoélastique fissuré, suivant une loi de Kelvin-Voigt, occupe initialement le domaine Ω avant déformation. On se place sous l'hypothèse des petites déformations. La frontière de Ω, $\partial\Omega$, est composée de trois parties telles que $\partial\Omega = \overline{\Gamma}_U \cup \overline{\Gamma}_F \cup \overline{\Gamma}_C$ où Γ_U et Γ_F sont suffisament régulières avec $mes\,(\Gamma_U) > 0$. Le corps est soumis à une densité de force volumique f , et il est fixé sur Γ_U. Une force F est imposée sur Γ_F et Γ_C désigne la fissure sur laquelle on considère une condition de contact unilatéral avec frottement.

On suppose comme sur la figure2.1 que Γ_C est composée de deux lèvres $\bar{\Gamma}_C = \overline{\Gamma}_C^{+} \cup \overline{\Gamma}_C^{-}$. Γ_C^+ représente la lèvre “supérieure” de la fissure, Γ_C^- la lèvre “inférieure”.

On suppose la décomposition suivante de Ω: $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \bar{\Gamma}_V$, Ω^+et Ω^- sont deux ouverts disjoints de frontière Lipschtzienne, $\Gamma_V \subset \Gamma_C^+ \cap \Gamma_C^-$ est une surface virtuelle entre Ω^+et Ω^- .

On choisi une décomposition de Ω en Ω^+et Ω^- telle que $mes(\Gamma_U^\alpha) > 0$ où $\Gamma_U^\alpha = \Gamma_U \cap \Gamma_C^\alpha$ $\alpha = +, -$.

Pour exprimer les conditions aux limites de la fissure, nous introduisons un sous-ensemble Ξ de $\mathbb{R}^{d-1}$, et nous supposons que les deux lèvres de la fissure peuvent être paramètrisées par deux fonctions de classe C^1 : φ^+, φ^-sont définies sur Ξ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\varphi^+(\overline{x}) - \varphi^-(\overline{x}) \geq 0, \forall x \in \Xi$

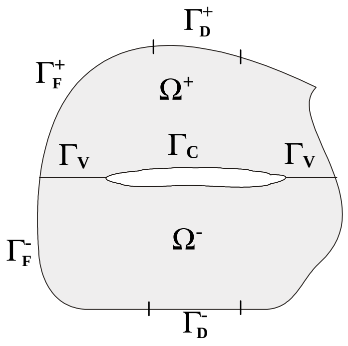

Figure 2.1

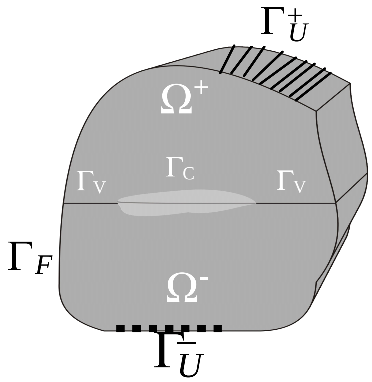

Figure 2.2

-Représentation d'une fissure paramétrée en 2D et 3D-

Nous définissons chaque lèvre de la fissure, comme le graphe de φ^{α} sur Ξ

$$\Gamma_C^{\alpha} = \{(\overline{x}, \varphi^{\alpha}(\overline{x}))\,; \overline{x} \in \Xi\}.$$

On note $x = (x_{1,....,} x_d) \in \Omega$ la position initiale d'un point matériel quelconque du corps. Le terme $y(t,x)$ désigne la position à l'instant t du point matériel, $u(t,x)$ répresente le champ de déplacement du point x à l'instant t défini par $u(t,x) = y(t,x) - x$.

Soient $\mu^+ = (\bigtriangledown\varphi^+(\zeta), -1)$ et $\mu^- = (-\bigtriangledown\varphi^-(\zeta), 1)$ les vecteurs normals sortants à Γ_C^+ et Γ_C^- respectivement, définis sur Ξ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Nous supposons qu'il existe une application $h :]0,T\,[\, \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que la surface du contact à l'instant t est implicitement représentée par $h(t,y) = 0$ avec $\dfrac{\partial h}{\partial y} > 0$, et la condition de non-interpénitration des lèvres de la fissure, est donnée par

$$h\left(t, y\left(t, x^+\right)\right) \geq 0, \ \forall x^+ \in \Gamma_C^+, \quad h\left(t, y\left(t, x^-\right)\right) \leq 0, \ \forall x^- \in \Gamma_C^-. \tag{2.1}$$

Ces inégalités désignent que le point matériel qui à l'instant $t = 0$ sur Γ_C^+ ne peut pas pénétrer Γ_C^- .

Comme $\dfrac{\partial h}{\partial y} > 0$, alors conformément le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction:

$$\psi : \ ]0,T[\times\mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que:

$$h(t,y) = 0 \Leftrightarrow y_d = \psi(t, \overline{y}), \quad \overline{y} = (y_1, y_2, ...y_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}, \tag{2.2}$$

En reprenant (2.1), on a

$$h\left(t, y\left(t, x^+\right)\right) \geq 0 \Longleftrightarrow y_d^+ - \psi\left(t, \overline{y}^+\right) \geq 0,$$

avec

$$\overline{y}^{+}=\left(y_{1}\left(t,x^{+}\right),y_{2}\left(t,x^{+}\right),...,y_{d-1}\left(t,x^{+}\right)\right),\ \overline{y}^{+}=\overline{x}^{+}+\overline{u}^{+},$$
$$\text{où, } \overline{x}^{+}=\left(x_{1}^{+},x_{2}^{+},...x_{d-1}^{+}\right),\quad \overline{u}^{+}=\left(u_{1}\left(t,x^{+}\right),u_{2}\left(t,x^{+}\right),...,u_{d-1}\left(t,x^{+}\right)\right).$$

On applique le même raisonnement pour Γ_{C}^{-} et si on considère

$$x^{+}=\left(\zeta,\varphi^{+}\left(\zeta\right)\right),x^{-}=\left(\zeta,\varphi^{-}\left(\zeta\right)\right)$$

on obtient

$$\begin{cases} x_{d}^{+}+u_{d}^{+}\left(t,x^{+}\right)-\psi\left(t,\zeta+\overline{u}^{+}\right)\ \geq 0 \\ -x_{d}^{-}-u_{d}^{-}\left(t,x^{-}\right)+\psi\left(t,\zeta+\overline{u}^{-}\right)\geq 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

les déplacements et leurs dérivées sont supposés petits, et d'aprés le développement limité de ψ *en* $\overline{u}^{+}=0$ et $\overline{u}^{-}=0$ on obtient

$$\begin{cases} \overline{x}_{d}^{+}+u_{d}^{+}\left(t,x^{+}\right)-\psi\left(t,\zeta\right)-\nabla\psi\left(t,\zeta\right).\overline{u}^{+}\geq 0 \\ -\overline{x}_{d}^{-}-u_{d}^{-}\left(t,x^{-}\right)+\psi\left(t,\zeta\right)+\nabla\psi\left(t,\zeta\right).\overline{u}^{-}\geq 0. \end{cases}$$

En additionnant les deux inégalités et pour $\zeta\in\Xi$ et comme $x_{d}^{+}=\varphi^{+}\left(\zeta\right),\ x_{d}^{-}=\varphi^{-}\left(\zeta\right)$, on trouve

$$\begin{aligned}&0\leq\varphi^{+}\left(\zeta\right)-\varphi^{-}\left(\zeta\right)+u_{d}^{+}\left(t,\zeta,\varphi^{+}\left(\zeta\right)\right)-u_{d}^{-}\left(t,\zeta,\varphi^{-}\left(\zeta\right)\right)\\&-\nabla\psi\left(t,\zeta\right).\overline{u}^{+}\left(t,\zeta,\varphi^{+}\left(\zeta\right)\right)+\nabla\psi\left(t,\zeta\right).\overline{u}^{-}\left(t,\zeta,\varphi^{-}\left(\zeta\right)\right).\end{aligned}$$

Donc, on peut supposer que les gradients suivants sont approximativement identiques. Ces hypothèses désignent que le vecteur normal sortant de Γ_{C}^{α} où $\alpha=+,-$ se change rarement au cours de la déformation qui est:

$$\nabla\varphi^{+}\left(\zeta\right)\simeq\nabla\psi\left(t,\zeta\right)\simeq\nabla\varphi^{-}\left(\zeta\right). \tag{2.4}$$

Il est le cas où il existe un petit écart entre les deux lèvres, mais si l'écart est large, ce modèle n'est pas valide.

En utilisant (2.4) nous obtenons

$$\begin{aligned}&0\leq\varphi^{+}\left(\zeta\right)-\varphi^{-}\left(\zeta\right)+u_{d}^{+}\left(t,\zeta,\varphi^{+}\left(\zeta\right)\right)-u_{d}^{-}\left(t,\zeta,\varphi^{-}\left(\zeta\right)\right)\\&-\nabla\varphi^{+}\left(\zeta\right).\overline{u}^{+}\left(t,\zeta,\varphi^{+}\left(\zeta\right)\right)+\nabla\varphi^{-}\left(\zeta\right).\overline{u}^{-}\left(t,\zeta,\varphi^{-}\left(\zeta\right)\right)\end{aligned}$$

En utilisant la définition de μ^{α} où $\alpha=+,-$, ce qui implique

$$\mu^{+}\left(\zeta\right).u^{+}\left(t,\zeta,\varphi^{+}\left(\zeta\right)\right)+\mu^{-}\left(\zeta\right).u^{-}\left(t,\zeta,\varphi^{-}\left(\zeta\right)\right)\leq\varphi^{+}\left(\zeta\right)-\varphi^{-}\left(\zeta\right),\ \forall\zeta\in\Xi \tag{2.5}$$

qui exprime la condition du contact unilatéral sur l'ensemble de la paramétrisation Ξ.

L'écart entre les deux lèvres de la fissure est donné par $\widetilde{g}(\zeta) = \varphi^{+}(\zeta) - \varphi^{-}(\zeta)$.

Le vecteur sortant de Γ_C^α est noté par $n^\alpha : \Xi \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est défini par

$$n^\alpha = \frac{\mu^\alpha}{\mid \mu^\alpha \mid}, \ \alpha = +, -$$

En utilisant (2.4) et en supposant que

$$[v_N](t,\zeta) = n^{+}(\zeta).v^{+}\left(t,\zeta,\varphi^{+}(\zeta)\right) + n^{-}(\zeta).v^{-}\left(t,\zeta,\varphi^{-}(\zeta)\right), \ \forall v = v(t,\zeta)$$

l'inégalité (2.5) devient :

$$[u_N](t,\zeta) \leq g(\zeta), \ \forall \zeta \in \Xi \text{ où } \ g(\zeta) = \frac{\varphi^{+}(\zeta) - \varphi^{-}(\zeta)}{\sqrt{1+ \mid \nabla \varphi^{+} \mid^2}} \geq 0, \ \forall \zeta \in \Xi. \tag{2.6}$$

Le terme $g \geq 0$ est l'ecart normal entre les deux lèvres de la fissure. Le cas particulier $g = 0$ correspond à une fissure fermée.

Pour tout $\zeta \in \Xi$ nous utilisons les notations suivantes, pour les composantes normal et tangentiele d'un champ de déplacement v^α et d'un vecteur des contrainte $\sigma^\alpha n^\alpha$ sur Γ_C^α avec $\alpha = +, -$

$$\begin{cases} v^\alpha = v^\alpha(t,\zeta) = v(t,\zeta,\varphi^\alpha(\zeta)), v_N^\alpha = v_N^\alpha(t,\zeta) = v^\alpha(t,\zeta,\varphi^\alpha(\zeta)).n^\alpha(\zeta) \\ v_T^\alpha = v_T^\alpha(t,\zeta) = v^\alpha - v_N^\alpha n^\alpha \\ [v_N] = [v_N](t,\zeta) = v_N^{+} + v_N^{-}, [v_T] = [v_T](t,\zeta) = v_T^{+} - v_T^{-} \\ \sigma_N^\alpha = \sigma_N^\alpha(t,\zeta) = \sigma^\alpha n^\alpha.n^\alpha \\ \sigma_T^\alpha = \sigma_T^\alpha(t,\zeta) = \sigma^\alpha n^\alpha - \sigma_N^\alpha n^\alpha. \end{cases} \tag{2.7}$$

Dans la suite, on va s'intéresser à un problème dynamique de contact unilatéral avec frottement non local en viscoélasticité. On va introduire un problème approché(pénalisé).

Comme l'on fait J.U.Kim [28], J.Muňoz-Rivera et R.Racke [36] , M.Cocou et J.M.Ricaud [14] , M.Cocou [11] , et on va montrer qu'une sous-suite de solutions pénalsées converge faiblement vers une solution du problème de contact unlitéral avec frottement non local [16].

2.3 Étude d'un problème viscoélastique de contact d'un milieu fissuré

On présente un problème dynamique de contact en viscoélasticité. On suppose que le matériau est fissuré, et on considère sur la fissure, à la fois une condition de contact unilatéral ainsi qu'une condition de frottement non local. Cette étude est considérée dans [16] .

2.3.1 Formulation classique du problème

Problème $\mathbf{P}_0$: trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, tel que:

$u(0) = u_0,\ \dot{u}(0) = u_1$ dans Ω

$$\rho\ddot{u} - \operatorname{div}\sigma(u,\dot{u}) = f \quad \text{dans }]0,T[\times\Omega \tag{2.8}$$

$$\sigma = \sigma(u,\dot{u}) = \mathcal{A}\varepsilon(u) + \mathcal{B}\varepsilon(\dot{u}) \ \text{ dans }]0,T[\times\Omega \tag{2.9}$$

$$u = 0 \ \text{ sur } \ ]0,T[\times\Gamma_U \tag{2.10}$$

$$\sigma n = F \ \text{ sur } \ ]0,T[\times\Gamma_F \tag{2.11}$$

$$[u_N] \le g,\ \sigma_N^- = \sigma_N^+,\ \sigma_N^-([u_N]-g) = 0 \ \text{ sur } \ ]0,T[\times\Xi \tag{2.12}$$

$$\sigma_T^+ = -\sigma_T^- \ \text{ sur } \ ]0,T[\times\Xi \tag{2.13}$$

$$\left|\sigma_T^+\right| \le \mu\left|(\mathcal{R}\sigma)_N^+\right| \ et \ \begin{array}{l} \left|\sigma_T^+\right| < \mu\left|(\mathcal{R}\sigma)_N^+\right| \Longrightarrow [\dot{u}_T] = 0 \\ \left|\sigma_T^+\right| = \mu\left|(\mathcal{R}\sigma)_N^+\right| \Longrightarrow \exists\lambda \ge 0 \ [\dot{u}_T] = -\lambda\sigma_T^+ \end{array} \tag{2.14}$$

On retrouve dans (2.8) l'équation du mouvement, pour laquelle on considère dans la suite, $\rho = 1$. On trouve ensuite dans (2.9) la loi de comportement du matériau de type Kelvin-Voigt, où $\mathcal{A}$=($\mathcal{A}_{ijkl}$), $\mathcal{B}$=(B_{ijkl}) sont deux tenseurs du quatrième ordre satisfaisant les propriétés de symétrie et d'ellipticité.

$\forall i,j,k,l = 1.....,d,$

$$\begin{gathered} \mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{jikl} = \mathcal{C}_{kl} \ \ \forall\ ij \in W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^d\right) \\ \exists\alpha_0{>}0 \ \ \mathcal{C}_{ijkl}\tau_{ij}\tau_{kl} \ge \alpha_0\tau_{ij}\tau_{kl} \ \ \forall\tau = (\tau_{ij}) \\ \text{tel que } \tau_{ij} = \tau_{ji},\ o\grave{u}\ \mathcal{C} = (\mathcal{C}_{ijkl}) = \mathcal{A},\mathcal{B}. \end{gathered}$$

(2.10) signifie que le corps est encastré par la partie Γ_U, et (2.11) montre qu'il est soumis sous l'effet de la densité des forces surfaciques F sur Γ_F, l'inégalité dans (2.14) prévient l'interpénétration des deux lèvres de la fissure, les relations dans (2.12) et (2.13)complétent les conditions du contact unilatéral (les conditions de Signorini), le terme μ désigne le coefficient de frottement, qui est supposé indépendant du temps. Nous considérons la loi de frottement non locale régularisée en introduisant la régularisation $\mathcal{R}$ qui est definie ultérieurement.

Remarque 2.1

Si $\Gamma_V = \phi$ le problème P_0 est un problème classique de contact unilatéral de deux corps viscoélastiques, et c'est notre interét dans le troisième chapitre.

2.3.2 Formulation variationnelle Primale

Soient $(H, |.|)$ et $(V, \|.\|)$ deux espaces de Hilbert munis des produits scalaires qui sont notés $(.,.)\,,\langle .,.\rangle$ respectivement où

$$\begin{aligned} &H = \left[L^2(\Omega)\right]^d,\ V = \left\{ v \in \left[H^1(\Omega)\right]^d \ ; v = 0 \text{ p.p sur } \Gamma_U \right\}, \\ &K = \{v \in V\ ; [v_N] \leq g \ \ p.p \text{ sur } \Xi\}. \end{aligned}$$

Nous supposons qui $u_0 \in K,\ u_1 \in V,\ F \in W^{1.\infty}\left(0, T; \left[L^2(\Gamma_F)\right]^d\right),\ f \in W^{1.\infty}(0, T; H)$,
$g \in H_{00}^{1/2}(\Xi)$ avec $g \geq 0$ p.p sur Ξ,et $\mu \in L^\infty(\Xi)$ avec $\mu \geq 0$ p.p sur Ξ.

On défini les deux formes bilinéaire continues et symétriques a, b, tels que:

$$\begin{aligned} &a, b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ &a(v, w) = \int_\Omega \mathcal{A}\varepsilon(v) : \varepsilon(w)\, dx, \\ &b(v, w) = \int_\Omega \mathcal{B}\varepsilon(v) : \varepsilon(w)\, dx,\ \forall v, w \in V. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Le théorème de représentation Riesz entraîne l'existence d'un élément L appartient à $W^{1,\infty}(0, T; V)$ tel que:

$$\langle L(t), v\rangle = \int_\Omega f(t, x)\,.v dx + \int_{\Gamma_F} F(t, x)\,.v ds \quad \forall v \in V,\ \forall t \in [0, T] \tag{2.16}$$

Propriétés de l'opérateur de régularisation

On définie $\mathcal{R}\sigma : V \times V \longrightarrow \left[H^1(\Omega)\right]^{d^2}$ comme une régularisation linéaire et continue de $\sigma = \sigma(u, v)\,,\ \forall u, v \in V$. Cette régularisation vérifie la relation suivante:

$$\begin{aligned} &\exists C > 0,\quad \|(\mathcal{R}\sigma)(u, v)\| \leq C(|u| + |v|) \qquad \forall u, v \in V \\ &\text{et on suppose ici } \ (\mathcal{R}\sigma)(u_0, v_1)_N^+ = 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

On utilise la régularisation suivante, donnée une première fois dans [29] et déja employée dans [12] , où $\psi \in C_0^2\left(\mathbb{R}^d\right), \ \psi \geq 0, \ E : \left[H^1(\Omega)\right]^d \to \left[H^1\left(\mathbb{R}^d\right)\right]^d$ est une extention de Ω sur $\mathbb{R}^d$ qui préserve la norme de $\left[H^1\left(\mathbb{R}^d\right)\right]^d$ et $*$ représente le produit de convolution sur $\mathbb{R}^d$. On note alors $(\mathcal{R}\sigma)(u,v)$ le tenseur obtenu qui vérifie:

$$(\mathcal{R}\sigma)(u,v) = (\mathcal{C}\nabla E(u) + \mathcal{B}\nabla E(v)) * \psi$$

Calculons une composante quelconque de $(\mathcal{R}\sigma)(u,v)$.

$$((\mathcal{R}\sigma)(u,v))_{ij}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\mathcal{C}_{ijkl}(y)(Eu)_{k,l}(y) + \mathcal{B}_{ijkl}(y)(Ev)_{k,l}(y)\Big)\psi(x-y)\,dy.$$

On a la relation suivante:

$$\mathcal{C}_{ijkl}(y)(Eu)_{k,l}(y)(x) = (\mathcal{C}_{ijkl}(y)(Eu)_k(y))_{,l} - \mathcal{C}_{ijkl,l}(y)(Eu)_k(y).$$

En utilisant la relation précédente pour le tenseur $\mathcal{C}$ et une relation semblable pour $\mathcal{B}$, on obtient

$$\begin{aligned} ((\mathcal{R}\sigma)(u,v))_{ij}(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big[(\mathcal{C}_{ijkl}(y)(Eu)_k(y) + \mathcal{B}_{ijkl,l}(y)(Ev)_k(y))_{,l} \\ &\quad - (\mathcal{C}_{ijkl,l}(y)(Eu)_k(y) + \mathcal{B}_{ijkl,l}(y)(Ev)_k(y))\Big]\psi(x-y)\,dy. \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{C}_{ijkl}(y)(Eu)_k(y) + \mathcal{B}_{ijkl}(y)(Eu)_k(y))_{,l}\,\psi(x-y) \\ &\quad + (\mathcal{C}_{ijkl,l}(y)(Eu)_k(y) + \mathcal{B}_{ijkl,l}(y)(Ev)_k(y))\,\psi(x-y)\,dy. \end{aligned}$$

On peut remarquer la linéarité de $(\mathcal{R}\sigma)(u,v)$ par rapport à (u,v). De plus, l'estimation (2.17) est vérifiée car la dérivée en espace de $(\mathcal{R}\sigma)(u,v)$ porte sur ψ et non pas sur u,v.

Nous définissons l'application $J : V^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que:

$$J(u,v,w) = \int_{\Xi} \mu \left|(\mathcal{R}\sigma)(u,v)_N^+\right| |[w_T]|\,d\zeta \ \forall u,v,w \in V.$$

Nous supposons encore la condition de compatibilité sur les données unitiales:

$$\exists l \in H \ , \quad (l,v) + a(u_0,v) + b(u_1,v) = \langle L(0), v\rangle, \ \forall v \in V. \tag{2.18}$$

Nous notons $\langle .,. \rangle_{-1/2,1/2}$ le produit dualité entre$\left[H^{-1/2}(\Omega)\right]^d$ et $\left[H^{1/2}(\Omega)\right]^d$.

Pour simplifier des notations, nous négligerons la variable de temps t quand il n'y a aucune ambiguïté. On peut donner alors une formulation variationnelle du Problème P_0.

Théorème 2.1

Si (u, σ) est solution du problème mécanique $\mathbf{P}_0$ alors u est solution du problème suivant.

Problème $\mathbf{P}_1$

Trouver $u \in W^{1,2}(0,T;V) \cap C^1\left([0,T];\left[H^{-1/2}(\Omega)\right]^d\right)$ tel que $u(t) \in K$ pour tout $t \in]0,T[$ et

$$\begin{cases} \langle \dot{u}(T), v(T) - u(T)\rangle_{-1/2,1/2} - (u_1, v(0) - u_0) \\ + \int_0^T \{(-\dot{u}, \dot{v}) + a(u,v) + b(\dot{u}, v) + J(u, \dot{u}, v + \dot{u} - u)\} \, dt \\ \geq \int_0^T \langle L, v - u\rangle \, dt + \int_0^T \left\{-|\dot{u}|^2 + a(u,u) + b(\dot{u}, u) + J(u, \dot{u}, \dot{u})\right\} dt \\ \forall v \in L^\infty(0,T;V) \cap W^{1,2}(0,T;H), v(t) \in K \quad p.p \; t \in]0,T[\end{cases} \tag{2.19}$$

Preuve

On peut prouver que le problème variationnel (2.19) est formellement équivalent au problème P_0 .

D'après le problème P_0, en multipliant la première équation par $v - u$, et on intégre de 0 à T par rapport à t et sur Ω par rapport à x il vient

$$\int_0^T \int_\Omega \ddot{u}.(v-u)\, dxdt - \int_0^T \int_\Omega \operatorname{div} \sigma(u, \dot{u}).(v-u)\, dxdt = \int_0^T \int_\Omega f.(v - u\ )\, dxdt$$

Par intégration par parties du terme d'accélération on a:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \ddot{u}.(v-u)\, dxdt \\ &= \int_\Omega \int_0^T \ddot{u}.(v-u)\, dtdx \\ &= \int_\Omega [\dot{u}.(v-u)]_0^T \, dx - \int_\Omega \int_0^T \dot{u}.(\dot{v} - \dot{u})\, dtdx \\ &= \int_\Omega \dot{u}(T).(v(T) - v(T))\, dx - \int_\Omega \dot{u}(0).(v(0) - v(0))\, dx \; - \int_0^T \int_\Omega \dot{u}.(\dot{v} - \dot{u})\, dtdx \\ &= \langle \dot{u}(T), v(T) - v(T)\rangle_{-1/2,1/2} - (u_1.v(0) - u_0) - \int_0^T (\dot{u}.\dot{v} - \dot{u})\, dt \\ &= \langle \dot{u}(T), v(T) - v(T)\rangle_{-1/2,1/2} - (u_1.v(0) - u_0) - \int_0^T (\dot{u}.\dot{v})\, dt - \int_0^T (\dot{u}, \dot{u})\, dt \\ &= \langle \dot{u}(T), v(T) - v(T)\rangle_{-1/2,1/2} - (u_1.v(0) - u_0) - \int_0^T (\dot{u}.\dot{v})\, dt - \int_0^T |\dot{u}|^2 \, dt \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green on obtient:

$$-\int_0^T \int_\Omega \operatorname{div} \sigma(u, \dot{u}).(v-u)\, dxdt = \int_0^T \int_\Omega \sigma(u, \dot{u}) : \varepsilon(v-u)\, dxdt - \int_0^T \int_\Gamma \sigma(u, \dot{u})\, n.(v-u)\, dsdt$$

Mais

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega \sigma(u,\dot{u}):\varepsilon(v-u)\,dtdx &= \int_0^T\int_\Omega (\mathcal{A}\varepsilon(u)+\mathcal{B}\varepsilon(\dot{u})):\varepsilon(v-u)\,dtdx\\
&= \int_0^T\left(\int_\Omega \mathcal{A}\varepsilon(u):\varepsilon(v-u)\,dx\right)dt\\
&+\int_0^T\left(\int_\Omega \mathcal{B}\varepsilon(\dot{u}):\varepsilon(v-u)\,dx\right)dt\\
&= \int_0^T a(u,v-u)\,dt+\int_0^T b(\dot{u},v-u)\,dt\\
&= \int_0^T a(u,v)-\int_0^T a(u,u)\,dt+\int_0^T b(\dot{u},v)\,dt-\int_0^T b(\dot{u},u)\,dt
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
-\int_0^T\int_\Gamma \sigma n.(v-u)\,dsdt &= -\int_0^T\int_{\Gamma_U}\sigma n.(v-u)\,dsdt-\int_0^T\int_{\Gamma_F}\sigma n.(v-u)\,dsdt\\
&-\int_0^T\int_{\Gamma_C}\sigma n.(v-u)\,dsdt
\end{aligned}$$

et comme $u=0$ dans $]0,T[\times\Gamma_U$ et $v(t)\in K\ \ p.p\ t\in\,]0,T[$ donc $v(t)\in V$ qui signifie $v=0$ sur $]0,T[\times\Gamma_U$ donc

$$-\int_0^T\int_{\Gamma_U}\sigma n.(v-u)\,dsdt=0,\ et-\int_0^T\int_{\Gamma_F}\sigma n.(v-u)\,dsdt=-\int_0^T\int_{\Gamma_F}F.(v-u)\,dsdt.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_{\Gamma_C}\sigma(u,\dot{u})\,n.(v-u)\,dsdt=-\int_0^T\int_{\Gamma_C^+}\sigma(u,\dot{u})\,n.(v-u)\,dsdt-\int_0^T\int_{\Gamma_C^+}\sigma(u,\dot{u})\,n.(v-u)\,d\zeta dt\\
&=-\int_0^T\int_\Xi \sigma\left(u\left(t,\zeta,\varphi^+(\zeta)\right),\dot{u}\left(t,\zeta,\varphi^+(\zeta)\right)\right)n\left(t,\zeta,\varphi^+(\zeta)\right).\left[v\left(t,\zeta,\varphi^+(\zeta)\right)-u\left(t,\zeta,\varphi^+(\zeta)\right)\right]d\zeta dt\\
&-\int_0^T\int_\Xi \sigma\left(u\left(t,\zeta,\varphi^-(\zeta)\right),\dot{u}\left(t,\zeta,\varphi^-(\zeta)\right)\right)n\left(\zeta,\varphi^-(\zeta)\right).\left[v\left(t,\zeta,\varphi^-(\zeta)\right)-u\left(t,\zeta,\varphi^-(\zeta)\right)\right]d\zeta dt\\
&=-\int_0^T\int_\Xi \sigma^+(t,\zeta)\,n^+(\zeta).\left[v^+(t,\zeta)-u^+(t,\zeta)\right]d\zeta dt-\int_0^T\int_\Xi \sigma^-(t,\zeta)\,n^-(\zeta).\left[v^-(t,\zeta)-u^-(t,\zeta)\right]d\zeta dt\\
&=-\int_0^T\int_\Xi \sigma^+n^+.(v^+-u^+)\,d\zeta dt-\int_0^T\int_\Xi \sigma^-n^-.(v^--u^-)\,d\zeta dt
\end{aligned}$$

et comme

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma^+n^+=\sigma_T^++\sigma_N^+n^+\\ \sigma^-n^-=\sigma_T^-+\sigma_N^-n^-\end{array}\right.\quad\text{et}\left\{\begin{array}{l}v^+=v_T^++v_N^+n^+\\ v^-=v_T^-+v_N^-n^-\end{array}\right.$$

donc on a

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_\Xi \sigma^+ n^+ .\left(v^+ - u^+\right) d\zeta dt - \int_0^T\int_\Xi \sigma^- n^- .\left(v^- - u^-\right) d\zeta dt \\
&= -\int_0^T\int_\Xi \left(\sigma_T^+ + \sigma_N^+ n^+\right).\left[\left(v_T^+ + v_N^+ n^+\right) - \left(u_T^+ + u_N^+ n^+\right)\right] d\zeta dt \\
&-\int_0^T\int_\Xi \left(\sigma_T^- + \sigma_N^- n^-\right).\left[\left(v_T^- + v_N^- n^-\right) - \left(u_T^- + u_N^- n^-\right)\right] d\zeta dt
\end{aligned}
$$

et puisque $\sigma_T^+ = -\sigma_T^-$, $\sigma_N^+ = \sigma_N^-$ et $n^+ = -n^-$ alors

$$\sigma_T^- + \sigma_N^- n^- = -\left(\sigma_T^+ + \sigma_N^+ n^+\right),$$

on peut écrire

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_\Xi \left(\sigma_T^+ + \sigma_N^+ n^+\right).\left[\left(v_T^+ + v_N^+ n^+\right) - \left(u_T^+ + u_N^+ n^+\right)\right] d\zeta dt \\
&-\int_0^T\int_\Xi \left(\sigma_T^- + \sigma_N^- n^-\right).\left[\left(v_T^- + v_N^- n^-\right) - \left(u_T^- + u_N^- n^-\right)\right] d\zeta dt \\
&= -\int_0^T\int_\Xi \left(\sigma_T^+ + \sigma_N^+ n^+\right).\left\{\left[\left(v_T^+ + v_N^+ n^+\right) - \left(u_T^+ + u_N^+ n^+\right)\right] - \left[\left(v_T^- + v_N^- .n^-\right) - \left(u_T^- + u_N^- n^-\right)\right]\right\} d\zeta dt \\
&= -\int_0^T\int_\Xi \left(\sigma_T^+ + \sigma_N^+ n^+\right).\left\{\left[\left(v_T^+ + v_N^+ n^+\right) - \left(u_T^+ + u_N^+ n^+\right)\right] - \left[\left(v_T^- - v_N^- n^+\right) - \left(u_T^- - u_N^- n^+\right)\right]\right\} d\zeta dt \\
&= -\int_0^T\int_\Xi \left(\sigma_T^+ + \sigma_N^+ n^+\right).\left\{\left[\left(v_T^+ + v_N^+ n^+\right) - \left(v_T^- - v_N^- n^+\right)\right] - \left[\left(u_T^+ + u_N^+ n^+\right) - \left(u_T^- - u_N^- n^+\right)\right]\right\} d\zeta dt \\
&= -\int_0^T\int_\Xi \left(\sigma_T^+ + \sigma_N^+ n^+\right).\left\{\left[\left(v_T^+ - v_T^-\right) + \left(v_N^+ + v_N^-\right) n^+\right] - \left[\left(u_T^+ - u_T^-\right) + \left(u_N^+ + u_N^-\right) n^+\right]\right\} d\zeta dt \\
&= -\int_0^T\int_\Xi \left(\sigma_T^+ + \sigma_N^+ n^+\right).\left\{\left([v_T] + [v_N] n^+\right) - \left([u_T] + [u_N] n^+\right)\right\} d\zeta dt \\
&= -\int_0^T\int_\Xi \left(\sigma_T^+ + \sigma_N^+ n^+\right).\left\{\left([v_T] - [u_T]\right) + \left([v_N] - [u_N]\right) n^+\right\} d\zeta dt \\
&= -\int_0^T\int_\Xi \sigma_T^+ .\left([v_T] - [u_T]\right) d\zeta dt - \int_0^T\int_\Xi \sigma_T^+ .\left([v_N] - [u_N]\right) n^+ d\zeta dt \\
&-\int_0^T\int_\Xi \sigma_N^+ n^+ .\left([v_T] - [u_T]\right) d\zeta dt - \int_0^T\int_\Xi \sigma_N^+ n^+ .\left([v_N] - [u_N]\right) n^+ d\zeta dt \\
&= -\int_0^T\int_\Xi \sigma_T^+ .\left([v_T] - [u_T]\right) d\zeta dt - \int_0^T\int_\Xi \sigma_N^+ \left([v_N] - [u_N]\right) d\zeta dt \\
&= -\int_0^T\int_\Xi \sigma_T^+ .\left([v_T] - [u_T]\right) d\zeta dt - \int_0^T\int_\Xi \sigma_N^+ \left\{\left([v_N] - g\right) - \left([u_N] - g\right)\right\} d\zeta dt \\
&= -\int_0^T\int_\Xi \sigma_T^+ .\left([v_T] - [u_T]\right) d\zeta dt - \int_0^T\int_\Xi \sigma_N^+ \left([v_N] - g\right) d\zeta dt.
\end{aligned}
$$

Enfin on obtient

$$\begin{aligned}
&\langle \dot{u}(T), v(T) - u(T)\rangle_{-1/2,1/2} - (u_1, v(0) - u_0) - \int_0^T (\dot{u}, \dot{v})\, dt - \int_0^T |\dot{u}|^2\, dt \\
&+ \int_0^T a(u, v) - \int_0^T a(u, u)\, dt + \int_0^T b(\dot{u}, v)\, dt - \int_0^T b(\dot{u}, u)\, dt \\
&- \int_0^T \int_{\Gamma F} F.(v - u)\, dsdt - \int_0^T \int_{\Xi} \sigma_T^+ .([v_T] - [u_T])\, d\zeta dt - \int_0^T \int_{\Xi} \sigma_N^+ ([v_N] - g)\, d\zeta dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} f.(v - u\ )\, dtdx
\end{aligned}$$

et comme $v \in K$ p.p $t \in]0, T[$ on a $[v_N] - g \leq 0$ sur $]0, T[\times \Xi$ et $\sigma_N^+ \leq 0$ sur $]0, T[\times \Xi$,ce que donne

$$\int_0^T \int_{\Xi} \sigma_N^+ ([v_N] - g)\, d\zeta dt \geq 0.$$

On peut écrire encore

$$\begin{cases}
\langle \dot{u}(T), v(T) - u(T)\rangle_{-1/2,1/2} - (u_1, v(0) - u_0) \\
+ \int_0^T - (\dot{u}, \dot{v})\, dt + a(u, u)\, dt + b(\dot{u}, v)\, dt - \int_{\Xi} \sigma_T^+ .([v_T] - [u_T])\, d\zeta dt \\
\geq \int_0^T \langle L, v - u\ \rangle\, dt + \int_0^T \left\{ - |\dot{u}|^2 + a(u, u) + b(\dot{u}, u) \right\} dt
\end{cases} \tag{2.20}$$

pour le terme $-\int_{\Xi} \sigma_T^+ .([v_T] - [u_T])\, d\zeta dt$ dans (2.20) et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned}
-\int_{\Xi} \sigma_T^+ .([v_T] - [u_T])\, d\zeta dt &= \int_{\Xi} \left|\sigma_T^+\right| |[u_T] - [v_T]|\, d\zeta dt \\
&\leq \int_{\Xi} \mu \left|(\mathcal{R}\sigma)_N^+\right| |[u_T] - [v_T]|\, d\zeta dt \\
&\leq \int_{\Xi} \mu \left|(\mathcal{R}\sigma)_N^+\right| \{ - |[\dot{u}_T]| + |[v_T] + [\dot{u}_T] - [u_T]| \}\, d\zeta dt \\
&\leq \int_{\Xi} \mu \left|(\mathcal{R}\sigma)_N^+\right| |[v_T] + [\dot{u}_T] - [u_T]|\, d\zeta dt \\
&- \int_{\Xi} \mu \left|(\mathcal{R}\sigma)_N^+\right| |[\dot{u}_T]|\, d\zeta dt.
\end{aligned}$$

Enfin on écrit

$$-\int_{\Xi} \sigma_T^+ .([v_T] - [u_T])\, d\zeta dt \leq J(u, \dot{u}, v + \dot{u} - u) - J(u, \dot{u}, \dot{u}).$$

Donc nous déduisons

$$\begin{array}{l}\langle \dot{u}(T), v(T) - u(T)\rangle_{-1/2,1/2} - (u_1, v(0) - u_0) \\ + \displaystyle\int_0^T \{-(\dot{u}, \dot{v})\,dt + a(u,v)\,dt + b(\dot{u}, v) + J(u, \dot{u}, v + \dot{u} - u)\}\,dt \\ \geq \displaystyle\int_0^T \langle L, v - u\rangle\,dt + \int_0^T \left\{-|\dot{u}|^2 + a(u,u) + b(\dot{u}, u) + J(u, \dot{u}, \dot{u})\right\}dt \\ \forall v \in L^\infty(0,T;V) \cap W^{1,2}(0,T;H), v(t) \in K \text{ p.p. } t \in]0,T[.\end{array}$$

Réciproquement, en remplacant v dans (2.18) par $u \pm \varphi$ où $\varphi \in [\mathcal{D}(]0,T[;\Omega)]^d$, on retrouve les équations du problème P_0. En supposant que u est suffisament réguilier et en utilisant les formules de Green, on établit que les conditions aux limites du problème P_0 sont vérifées sur Γ_F et Ξ. Ce qui achéve la démonstration de l'equivalence.■

On utilise ensuite la décomposition de Ω entre Ω^+ et Ω^- décrite auparavant. Cette décomposition permet de restreindre l'analyse variationnelle à des domaines plus réguliers que Ω, pour lesquels par exemple, l'inégalité de Korn peut s'appliquer plus facilement. Pour $v \in [L(\Omega)]^d$, on pose $\hat{v} = (v^+, v^-)$ où $\hat{v}$ est la restriction de v sur Ω^α, $\alpha = +, -$.

Avant d'introduire un nouveau problème posé sur $\Omega^+ \times \Omega^-$, on définit plusieurs espaces fonctionnels utilisant la décomposition de Ω avec $\alpha = +, -$.

$$\begin{aligned} H^\alpha &= [L(\Omega^\alpha)]^d,\ V^\alpha = \left\{v \in \left[H^1(\Omega^\alpha)\right]^d; v = 0 \text{ p.p sur } \Gamma_U^\alpha\right\} \\ \hat{\mathbf{H}} &= H^+ \times H^-,\ \hat{\mathbf{V}} = \left\{v = \left(v^+, v^-\right) \in V^+ \times V^-; v^+ = v^- \text{ p.p sur } \Gamma_V\right\}. \end{aligned}$$

L'espace $\hat{\mathbf{H}}$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire noté $(.,.)_{\hat{\mathbf{H}}}$, et de la norme du produit cartésien $|.|_{\hat{H}}$. L'espace $\hat{\mathbf{V}}$,qui est un sous-ensemble fermé de $V^+ \times V^-$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire noté $(.,.)_{\hat{\mathbf{V}}}$ et la norme du produit cartésien $\|.\|_{\hat{\mathbf{V}}}$. Il existe une bijection entre les espaces V et $\hat{\mathbf{V}}$. Nous avons la proposition suivante

Proposition 2.1

L'application $\Psi : V \longrightarrow \hat{\mathbf{V}}$ définie par:

$$\Psi v = \hat{v} = \left(v^+, v^-\right) \tag{2.21}$$

où $v \in V, v^+$et v^- sont les restriction de v sur Ω^+ et Ω^-, est un isomorphisme.

La propriété suivante est satisfaite:

$v \in V$ si et seulement si $v^+ \in V^+$ et $v^- \in V^-$ tel que $v^+ = v^-$ *p.p sur* Γ_V

Preuve

Ψ est bien définie car, pour tout élément $v \in V$, $v^+ = v^-$ $p.p$ sur Γ_V, sinon il ne serait pas dans $\left[H^1(\Omega)\right]^d$, et Ψ est linéaire, continue sur V et $\|\Psi v\|_{\hat{V}} = \|v\|$. Ainsi, Ψ est une isométrie entre V et $\hat{\mathbf{V}}$.

Ayant v^+ et v^-, l'inverse est défini par v tel que $v = v^+$ sur Ω^+ et $v = v^-$ sur Ω^-. Comme $v^+ = v^-$ $p.p$ sur Γ_V, v appartient à $\left[H^1(\Omega)\right]^d$.■

On définit maintenant $\hat{\mathbf{K}} \subset \hat{\mathbf{V}}$ par $\hat{\mathbf{K}} = \Psi(K) = \{\Psi v; v \in V\ ;\ [v_N] \leq g \text{ p.p sur } \Xi\}$. Ainsi, pour tout $\hat{v} \in \hat{\mathbf{V}}$, on définit $[\hat{v}_N] = [v_N]$ et $[\hat{v}_T] = [v_T]$ où $v = \Psi^{-1}\hat{v}$.

Nous introduisons les notations suivantes pour quelques espaces de Sobolev et pour des produits de dualité.

$$\mathbf{H}^s = \left[H^s\left(\Omega^+\right)\right]^d \times \left[H^s\left(\Omega^-\right)\right]^d, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{-s,s} = \left\langle u^+, v^+ \right\rangle_{H^{-s}(\Omega^+)\times H^s(\Omega^-)} + \left\langle u^-, v^- \right\rangle_{H^{-s}(\Omega^+)\times H^s(\Omega^-)} \forall \hat{u} \in \mathbf{H}^{-s}, \forall \hat{v} \in \mathbf{H}^s.$$

On définit ensuite les applications suivantes:

$$\begin{cases} \hat{a}(\hat{u}, \hat{v}) = a(u, v) = a^+(u^+, v^+) + a^-(u^-, v^-) \text{ où} \\ a^\alpha(u^\alpha, v^\alpha) = \displaystyle\int_{\Omega^\alpha} \mathcal{A}\varepsilon(u^\alpha) : \varepsilon(v^\alpha)\, dx, \alpha = +, - \\ \hat{b}(\hat{u}, \hat{v}) = b(u, v) = b^+(u^+, v^+) + b^-(u^-, v^-) \text{ où} \\ b^\alpha(u^\alpha, v^\alpha) = \displaystyle\int_{\Omega^\alpha} \mathcal{B}\varepsilon(u^\alpha) : \varepsilon(v^\alpha)\, dx, \alpha = +, - \\ \hat{J}(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) = \displaystyle\int_{\Xi} \mu \left|((\mathcal{R}\sigma)(u, v))_N^+\right| |[w_T]|\, d\zeta, \\ \left\langle \hat{L}, \hat{v} \right\rangle_{\hat{\mathbf{V}}} = \langle L, v \rangle, \quad \left(\hat{l}, \hat{v}\right) = (l, v) \end{cases} \tag{2.22}$$

pour tout $\hat{u} = (u^+, u^-), \hat{v} = (v^+, v^-), \hat{w} = (w^+, w^-) \in \hat{\mathbf{V}}$ satisfaisant $\Psi u = \hat{u}, \Psi v = \hat{v}, \Psi w = \hat{w}$.

Donc la condition de compatibilité (2.18) peut être réécrite

$$\exists \hat{l} \in \hat{\mathbf{H}} \quad \left(\hat{l}, \hat{v}\right)_{\hat{\mathbf{H}}} + \hat{a}(\hat{u}, \hat{v}) + \hat{b}(\hat{u}, \hat{v}) = \left\langle \hat{L}(0), \hat{v} \right\rangle_{\hat{\mathbf{V}}} \ \forall \hat{v} \in \hat{\mathbf{V}}\ . \tag{2.23}$$

Maintenant, nous considèrons le problème auxiliaire suivant en utilisant la décomposition précédente.

Formulation variationnelle primale avec décomposition

Problème $\hat{\mathbf{P}}_1$:

Trouver $\hat{u} = (u^+, u^-) \in W^{1,2}\left(0, T; \hat{V}\right) \cap C^1\left(0, T; \mathbf{H}^{-1/2}\right)$ tel que $\hat{u}\,(t) \in \hat{\mathbf{K}}$ pour tout $t \in]0, T[$ et

$$\left\{\begin{array}{l} \left\langle \dot{\hat{u}}(T), \dot{\hat{v}}(T) - \dot{\hat{u}}(T) \right\rangle_{-1/2,1/2} - (\hat{u}_1, \hat{v}\,(0) - \hat{u}_0) \\ + \int_0^T \left\{ \left(-\dot{\hat{u}}, \dot{\hat{v}}\right)_{\hat{\mathbf{H}}} + \hat{a}\,(\hat{u}, \hat{v}) + \hat{b}\left(\dot{\hat{u}}, \hat{v}\right) + \hat{J}\left(\hat{u}, \dot{\hat{u}}, \hat{v} + \dot{\hat{u}} - \hat{u}\right) \right\} dt \\ \geq \int_0^T \left\langle \hat{L}, \hat{v} - \hat{u} \right\rangle_{\hat{\mathbf{V}}} dt + \int_0^T \left\{ -\left|\dot{\hat{u}}\right|^2_{\hat{\mathbf{H}}} + \hat{a}\,(\hat{u}, \hat{u}) + \hat{b}\left(\dot{\hat{u}}, \hat{u}\right) + \hat{J}\left(\hat{u}, \dot{\hat{u}}, \dot{\hat{u}}\right) \right\} dt \\ \forall \hat{v} \in L^\infty\left(0, T; \hat{\mathbf{V}}\right) \cap W^{1,2}\left(0, T; \hat{\mathbf{H}}\right), \hat{v}\,(t) \in \hat{\mathbf{K}} \text{ p.p. } t \in]0, T[\end{array}\right. \tag{2.24}$$

Proposition 2.2.

Sous les hypothèses précédentes, les problèmes P_1et $\hat{\mathrm{P}}_1$ sont équivalents au sens suivant:

si u est une solution de P_1, alors $\Psi u = (u^+, u^-)$ est une solution de $\hat{\mathrm{P}}_1$, où u^+ et u^- sont les restrictions de u sur Ω^+et Ω^- .

Réciproquement, si $\hat{u} = (u^+, u^-)$ est une solution de $\hat{\mathrm{P}}_1$, alors $u \in V$, avec $u = u^+$ p.p sur Ω^+ et $u = u^-$ *p.p sur* Ω^- , est une solution de P_1.■

Remarque 2.2.

Une solution u au problème $\mathbf{P}_1$ ne dépend pas du choix de Γ_V et une solution de $\hat{\mathbf{P}}_1$ vérifie

$$\sigma^+ n^+ = -\sigma^- n^- sur \ \ \Gamma_V.$$

Nous alons prouver l'existence d'une solution au problème $\hat{\mathrm{P}}_1$ par une méthode de pénalisation.

2.3.3 Introduction d'un problème pénalisé

On considère un problème du contact penalisé, dont la solution vérifie les mêmes équations dans Ω et les mêmes conditions aux limites sur Γ_U, Γ_F que précédemment. Seules les conditions aux limites de contact sur Γ_C sont différentes. En comparaisant avec le problème de contact unilatéral, une interpénétration des deux lèvres de la fissure est autorisée et un terme de pénalisation apparait. C'est un problème de compliance normale avec un exposant égal à un, du même type que celui considéré par J. T.C.Martins et J.T.Oden [34] .En notant par u_ε une solution pénalisée, les conditions de contact sur Ξ sont les suivantes, pour presque tout $t \in \left]0,T\right[$.

Problème $\mathbf{P}_1^\varepsilon$:

Trouver $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t,x)$ tel que $u_\varepsilon(0) = u_0$, $\dot{u}_\varepsilon(0) = u_1$ dans Ω,

$$
\begin{array}{ll}
\ddot{u}_\varepsilon - \operatorname{div}\sigma(u_\varepsilon,\dot{u}_\varepsilon) = f & \text{dans } \left]0,T\right[\times\Omega \\
\sigma = \sigma(u_\varepsilon,\dot{u}_\varepsilon) = \mathcal{A}\varepsilon(u_\varepsilon) + \mathcal{B}\varepsilon(\dot{u}_\varepsilon) & \text{dans } \left]0,T\right[\times\Omega \\
u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \left]0,T\right[\times\Gamma_U \\
\sigma n = F & \text{sur } \left]0,T\right[\times\Gamma_F \\
\sigma_N^+(u_\varepsilon,\dot{u}_\varepsilon) = \sigma_N^-(u_\varepsilon,\dot{u}_\varepsilon) = -\dfrac{1}{\varepsilon}\left([u_{\varepsilon N}] - g\right)_+ & \text{sur } \left]0,T\right[\times\Xi \\
\left|\sigma_T^+\right| \le \mu\left|(\mathcal{R}\sigma)_N^+\right| \text{ et} & \\
\left|\sigma_T^+\right| < \mu\left|(\mathcal{R}\sigma)_N^+\right| \Longrightarrow [\dot{u}_{\varepsilon T}] = 0 & \text{sur } \left]0,T\right[\times\Xi \\
\left|\sigma_T^+\right| = \mu\left|(\mathcal{R}\sigma)_N^+\right| \Longrightarrow \exists\lambda \ge 0 \ \ [\dot{u}_{\varepsilon T}] = -\lambda\sigma_T^+ &
\end{array}
\tag{2.25}
$$

Pour écrire la formulation variationnelle associée, on définit l'application $\varphi_\varepsilon : V \times V \to \mathbb{R}$

$$\varphi_\varepsilon(v,w) = \frac{1}{\varepsilon}\int_\Xi \left([v_N] - g\right)_+ [w_N]\, ds, \ \forall v,w \in V.$$

Une formulation variationnelle du problème (2.25) est la suivante:

Problème $\mathbf{P}_2^\varepsilon$:

Trouver $u_\varepsilon \in W^{1,2}(0,T;V) \cap W^{2,2}(0,T;H)$ tel que $u_\varepsilon(0) = u_0$, $\dot{u}_\varepsilon(0) = u_1$ et

$$
\left\{
\begin{array}{l}
(\ddot{u}_\varepsilon, w - \dot{u}_\varepsilon) + a(u_\varepsilon, w - \dot{u}_\varepsilon) + b(\dot{u}_\varepsilon, w - \dot{u}_\varepsilon) + \varphi_\varepsilon(u_\varepsilon, w - \dot{u}_\varepsilon) \\
+J(u_\varepsilon,\dot{u}_\varepsilon,w) - J(u_\varepsilon,\dot{u}_\varepsilon,\dot{u}_\varepsilon) \ge \langle L, w - \dot{u}_\varepsilon\rangle \quad \forall w \in V, \quad \text{p.p. } t \in \left]0,T\right[
\end{array}
\right.
\tag{2.26}
$$

On peut prouver que le problème variationnel (2.26) est formellement équivalent au problème (2.25).

On effectue la première équation de (2.25) avec $w - \dot{u}_\varepsilon$, nous obtenons.

$$\ddot{u}(w - \dot{u}_\varepsilon) - \operatorname{div}\sigma(u_\varepsilon,\dot{u}_\varepsilon)(w - \dot{u}_\varepsilon) = f(w - \dot{u}_\varepsilon)$$

en intégrant par rapport à x on a

$$\int_\Omega \ddot{u}.(w - \dot{u}_\varepsilon)\,dx - \int_\Omega \operatorname{div}\sigma(u_\varepsilon,\dot{u}_\varepsilon).(w - \dot{u}_\varepsilon)\,dx = \int_\Omega f.(w - \dot{u}_\varepsilon)\,dx$$

On prend le premièr terme de l'équation précédente, on a

$$\int_\Omega \ddot{u}.(w - \dot{u}_\varepsilon)\,dx = (\ddot{u}, w - \dot{u}_\varepsilon)$$

et quand on prend le second terme, et d'après la formule de Green, on a

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma\left(u_{\varepsilon}, \dot{u}_{\varepsilon}\right).\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) dx=\int_{\Omega} \sigma\left(u_{\varepsilon}, \dot{u}_{\varepsilon}\right): \varepsilon\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) dx-\int_{\Gamma} \sigma\left(u_{\varepsilon}, \dot{u}_{\varepsilon}\right) n.\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) ds$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \sigma\left(u_{\varepsilon}, \dot{u}_{\varepsilon}\right): \varepsilon\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) dx & =\int_{\Omega}(\mathcal{A} \varepsilon(u)+\mathcal{B} \varepsilon(\dot{u})): \varepsilon\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) dx \\
& =\int_{\Omega} \mathcal{A} \varepsilon(u): \varepsilon\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) dx+\int_{\Omega} \mathcal{B} \varepsilon(\dot{u}): \varepsilon\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) dx \\
& =a\left(u, w-\dot{u}_{\varepsilon}\right)+b\left(\dot{u}, w-\dot{u}_{\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
-\int_{\Gamma} \sigma n.\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) ds & =-\int_{\Gamma_U} \sigma n.\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) ds-\int_{\Gamma_F} \sigma n.\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) ds-\int_{\Gamma_C} \sigma n(u, \dot{u}).\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) ds \\
& =-\int_{\Gamma_U} \sigma n.\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) ds-\int_{\Gamma_F} \sigma n.\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) ds-\int_{\Gamma_C} \sigma n.\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) ds
\end{aligned}$$

et comme $u_{\varepsilon}=0$ sur $]0, T[\times \Gamma_U$ donc

$$\dot{u}_{\varepsilon}=0 \text { sur } \Gamma_U \quad \text{et} \quad w(t) \in K \quad \text{p.p } t \in]0, T[$$

donc $w(t) \in V$ qui singifie $w=0$ sur $]0, T[\times \Gamma_U$ donc $-\int_{\Gamma_U} \sigma n.\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) ds=0$ alors

$$-\int_{\Gamma} \sigma n.\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) ds=-\int_{\Gamma_F} F.\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) ds-\int_{\Gamma_C} \sigma n.\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) ds$$

et pour $-\int_{\Gamma_C} \sigma n.\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) ds$ et par une manière similaire dans le problème P_1 on a

$$-\int_{\Gamma_C} \sigma n.\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) ds= =-\int_{\Xi} \sigma_T^{+}.\left(\left[w_T\right]-\left[\dot{u}_{\varepsilon T}\right]\right) d\zeta-\int_{\Xi} \sigma_N^{+}\left(\left[w_N\right]-\left[\dot{u}_{\varepsilon N}\right]\right) d\zeta$$

et comme $\sigma_N^{+}\left(u_{\varepsilon}, \dot{u}_{\varepsilon}\right)=-\dfrac{1}{\varepsilon}\left(\left[u_{\varepsilon N}\right]-g\right)_{+}$, donc on peut écrire

$$\begin{aligned}
-\int_{\Gamma_C} \sigma n.\left(w-\dot{u}_{\varepsilon}\right) ds & =-\int_{\Xi} \sigma_T^{+}.\left(\left[w_T\right]-\left[\dot{u}_{\varepsilon T}\right]\right) d\zeta+\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Xi}\left(\left[u_{\varepsilon N}\right]-g\right)_{+}\left(\left[w_N\right]-\left[\dot{u}_{\varepsilon N}\right]\right) d\zeta \\
& =-\int_{\Xi} \sigma_T^{+}.\left(\left[w_T\right]-\left[\dot{u}_{\varepsilon T}\right]\right) d\zeta+\frac{1}{\varepsilon} \phi_{\varepsilon}\left(u_{\varepsilon}, w-\dot{u}_{\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

pour le terme $-\int_{\Xi} \sigma_T^{+}.\left(\left[w_T\right]-\left[\dot{u}_{\varepsilon T}\right]\right) d\zeta$, et d'aprés l'inéqalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned}
-\int_{\Xi} \sigma_T^{+}.\left(\left[w_T\right]-\left[\dot{u}_{\epsilon T}\right]\right) d\zeta & \leq \int_{\Xi}\left|\sigma_T^{+}\right| .\left|\left[\dot{u}_{\varepsilon T}\right]-\left[w_T\right]\right| d\zeta dt \\
& \leq \int_{\Xi} \mu\left|(\mathcal{R} \sigma)_N^{+}\right| .\left|\left[w_T\right]-\left[\dot{u}_{\varepsilon T}\right]\right| d\zeta dt \\
& \leq \int_{\Xi} \mu\left|(\mathcal{R} \sigma)_N^{+}\right| .\left|\left[w_T\right]\right| d\zeta dt-\int_{\Xi} \mu\left|(\mathcal{R} \sigma)_N^{+}\right| .\left|\left[\dot{u}_{\varepsilon T}\right]\right| d\zeta dt
\end{aligned}$$

donc

$$-\int_{\Xi} \sigma_T^+ . ([w_T] - [\dot{u}_{\varepsilon T}]) \, d\zeta dt \leq J(u, \dot{u}_\varepsilon, w) - J(u, \dot{u}_\varepsilon, \dot{u}_\varepsilon)$$

à la fin on peut écrire

$$\begin{aligned} &(\ddot{u}_\varepsilon, w - \dot{u}_\varepsilon) + a(u_\varepsilon, w - \dot{u}_\varepsilon) + b(\dot{u}_\varepsilon, w - \dot{u}_\varepsilon) + \varphi_\varepsilon(u_\varepsilon, w - \dot{u}_\varepsilon) \\ &+ J(u_\varepsilon, \dot{u}_\varepsilon, w) - J(u_\varepsilon, \dot{u}_\varepsilon, \dot{u}_\varepsilon) \geq \langle L, w - \dot{u}_\varepsilon \rangle \quad \forall w \in V \quad p.p.t \in]0, T[\ \blacksquare \end{aligned}$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème (P_2^ε) peut obtenir en utilisant un problème abstrait suivant par une approche incrémentale et des propriétés de compacité (voir [43]).

2.3.4 Analyse d'une inégalité abstraite d'évolution

Soient $(H, |.|)$ et $(V, \|.\|)$ deux espaces de Hilbert munis des produits scalaires notés par $(.,.)$ et $\langle .,. \rangle$ respectivement, tels que V est dense dans H et l'injection de V sur H est compacte. On introduit aussi l'espace $\mathcal{W}$ et l'ensemble $\mathcal{K}$

$\mathcal{W} = W^{2,2}(0, T; H) \cap W^{1,2}(0, T; V)$, $\mathcal{K} = \{v \in \mathcal{W};\ v(0) = u_0, \dot{v}(0) = u_1\}$, où $u_0, u_1 \in V$.

Soient a et b deux formes bilinéaires, symétriques, continues et coercives définies sur V^2 dans le sens suivant.

$$\begin{aligned} &\exists m_a, m_b > 0, a(u, v) \leq m_a \|u\| \|v\|, b(u, v) \leq m_b \|u\| \|v\| \ \ \forall u, v \in V \\ &\exists A, B > 0, \quad a(v, v) \geq A \|v\|^2, \quad b(v, v) \geq B \|v\|^2 \quad \forall v \in V \end{aligned} \tag{2.27}$$

Soient $\beta : V \to \mathbb{R}$ et $\phi : [0, T] \times V^3 \to \mathbb{R}$ deux applications faiblement continues, elles vérifient:

$$\phi(t, u, v, w_1 + w_2) \leq \phi(t, u, v, w_1) + \phi(t, u, v, w_2), \forall u, v, w, w_{1,2} \in V \tag{2.28}$$

$$\phi(t, u, v, \theta w) = \theta \phi(t, u, v, w) \quad \forall t \in [0, T] \ , \forall u, v, w \in V \ \ , \forall \theta \geq 0 \tag{2.29}$$

$$\text{on suppose aussi } \phi(., 0, 0, .) = 0, \beta(0) = 0 \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned} &\exists \eta_0 > 0 \text{ tel que, } \forall t_{1,2} \in [0, T], \forall u_{1,2}, v_{1,2}, w \in V \\ &|\phi(t_1, u_1, v_1, w) - \phi(t_2, u_2, v_2, w)| \\ &\leq \eta_0 (|t_1 - t_2| + |\beta(u_1) - \beta(u_2)| + |v_1 - v_2|) \|w\| \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
&\exists \eta > 0 \text{ tel que, } \forall t_{1,2} \in [0,T], \forall u_{1,2}, v_{1,2}, w_{1,2} \in V \\
&|\phi(t_1, u_1, v_1, w_1) - \phi(t_2, u_2, v_2, w_2) \\
&+\phi(t_2, u_2, v_2, w_2) - \phi(t_2, u_2, v_2, w_1)| \\
&\leq \eta(|t_1 - t_2| + \|u_1 - u_2\| + |v_1 - v_2|)\|w_1 - w_2\|
\end{aligned} \tag{2.32}$$

On suppose $L \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ et on note par C_L la constante de Lipschitz de L.

On suppose la condition suivante de compatibilité sur les données initiales:

$$\exists l \in H \quad (l,w) + a(u_0,w) + b(u_1,w) + \phi(0,u_0,u_1,w) = \langle L(0), w\rangle \quad \forall w \in V. \tag{2.33}$$

On considère le problème suivant:

Problème$\mathcal{P}$

Trouver $u \in \mathcal{K}$ tel que pour presque tout $t \in]0,T[$

$$\begin{aligned}
&(\ddot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + \phi(t, u(t), \dot{u}(t), v) \\
&-\phi(t, u(t); \dot{u}(t), \dot{u}(t)) \geq \langle L, v - \dot{u}(t)\rangle \qquad \forall v \in V
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Pour prouver qu'une solution du problème $\mathcal{P}$ existe, on utilise une approche incrémentale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $1 \leq j \leq \; n-1$ on suppose

$$\Delta t = \frac{T}{n}, \quad t^j = j\Delta t, \quad L^j = L(t_j).$$

Et nous encore supposons que u^j est l'approximation de u à t^j et d^j et γ^j sont les approximations de la vitesse et l'accélération respectivement.

$$\begin{aligned}
d^j &= \frac{u^{j+1} - u^{j-1}}{2\Delta t}, \; \delta^j = \frac{u^{j+1} - u^j}{\Delta t} \text{où } \; j = \overline{1,(n-1)} \\
\gamma^j &= \frac{\delta^j - \delta^{j-1}}{\Delta t} = \frac{u^{j+1} - 2u^j + u^{j-1}}{\Delta t^2}, \; u^0 = u_0, \; \delta^0 = u_1
\end{aligned}$$

on a alors

$$u^1 = u_0 + \Delta t u_1, \; \gamma^1 = \frac{\delta^1 - \delta^0}{\Delta t} = \frac{\frac{u^2 - u^1}{\Delta t} - u_1}{\Delta t}$$

Nous considérons la suite de problèmes incrémentaux, de $j = 1$ à $n-1$

Probléme $\mathcal{P}_n^{j+1}$

Trouver $u^{j+1} \in V$ pour $\;1 \leq j \leq n-1$ tel que

$$\begin{aligned}
&(\gamma^j, w - d^j) + a(u^{j+1}, w - d^j) + b(d^j, w - d^j) \\
&+\phi(t^j, u^{j+1}, d^j, w) - \phi(t^j, u^{j+1}, d^j, d^j) \geq \langle L^j, w - d^j\rangle \qquad \forall w \in V
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Lemme 2.1

Chaque problème $\mathcal{P}_n^{j+1}$possède une solution unique u^{j+1} si Δt est suffisamment petit.

Preuve:

D'après (2.35) on a

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{u^{j+1}+u^{j-1}-2u^j}{\Delta t^2}, w-\frac{u^{j+1}-u^{j-1}}{2\Delta t}\right)+a\left(u^{j+1}, w-\frac{u^{j+1}-u^{j-1}}{2\Delta t}\right)\\
&+b\left(\frac{u^{j+1}-u^{j-1}}{2\Delta t}, w-\frac{u^{j+1}-u^{j-1}}{2\Delta t}\right)+\phi\left(t^j, u^{j+1}, \frac{u^{j+1}-u^{j-1}}{2\Delta t}, w\right)\\
&-\phi\left(t^j, u^{j+1}, \frac{u^{j+1}-u^{j-1}}{2\Delta t}, \frac{u^{j+1}-u^{j-1}}{2\Delta t}\right)\geq\left\langle L^j, w-\frac{u^{j+1}-u^{j-1}}{2\Delta t}\right\rangle \qquad \forall w\in V
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{u^{j+1}}{\Delta t^2}, w+\frac{u^{j-1}}{2\Delta t}-\frac{u^{j+1}}{2\Delta t}\right)+a\left(u^{j+1}, w+\frac{u^{j-1}}{2\Delta t}-\frac{u^{j+1}}{2\Delta t}\right)+b\left(\frac{u^{j+1}}{2\Delta t^2}, w+\frac{u^{j-1}}{2\Delta t}-\frac{u^{j+1}}{2\Delta t}\right)\\
&+\phi\left(t^j, u^{j+1}, \frac{u^{j+1}-u^{j-1}}{2\Delta t}, w\right)-\phi\left(t^j, u^{j+1}, \frac{u^{j+1}-u^{j-1}}{2\Delta t}, \frac{u^{j+1}-u^{j-1}}{2\Delta t}\right) \qquad \forall w\in V\\
&\geq\left\langle L^j, w+\frac{u^{j-1}}{2\Delta t}-\frac{u^{j+1}}{2\Delta t}\right\rangle+\left(\frac{2u^j-u^{j-1}}{\Delta t^2}, w+\frac{u^{j-1}}{2\Delta t}-\frac{u^{j+1}}{2\Delta t}\right)+b\left(\frac{u^{j-1}}{2\Delta t}, w+\frac{u^{j-1}}{2\Delta t}-\frac{u^{j+1}}{2\Delta t}\right)
\end{aligned}$$

en multilpliant par $2\Delta t$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{u^{j+1}}{\Delta t^2}, 2\Delta tw+u^{j-1}-u^{j+1}\right)+a\left(u^{j+1}, 2\Delta tw+u^{j-1}-u^{j+1}\right)+b\left(\frac{u^{j+1}}{2\Delta t^2}, 2\Delta tw+u^{j-1}-u^{j+1}\right)\\
&+\phi\left(t^j, u^{j+1}, \frac{u^{j+1}-u^{j-1}}{2\Delta t}, 2\Delta tw\right)-\phi\left(t^j, u^{j+1}, \frac{u^{j+1}-u^{j-1}}{2\Delta t}, u^{j+1}-u^{j-1}\right)\\
&\geq\langle L^j, 2\Delta tw+u^{j-1}-u^{j+1}\rangle+\left(\frac{2u^j-u^{j-1}}{\Delta t^2}, 2\Delta tw+u^{j-1}-u^{j+1}\right)\\
&+b\left(\frac{u^{j-1}}{2\Delta t}, 2\Delta tw+u^{j-1}-u^{j+1}\right) \qquad \forall w\in V
\end{aligned}$$

on pose $w'=2\Delta tw+u^{j-1}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{u^{j+1}}{\Delta t^2}, w'-u^{j+1}\right)+a\left(u^{j+1}, w'-u^{j+1}\right)+b\left(\frac{u^{j+1}}{2\Delta t}, w'-u^{j+1}\right)\\
&+\phi\left(t^j, u^{j+1}, \frac{u^{j+1}-u^{j-1}}{2\Delta t}, w'-u^{j-1}\right)-\phi\left(t^j, u^{j+1}, \frac{u^{j+1}-u^{j-1}}{2\Delta t}, u^{j+1}-u^{j-1}\right)\\
&\geq\langle L^j, w'-u^{j+1}\rangle+\left(\frac{2u^j-u^{j-1}}{\Delta t^2}, w'-u^{j+1}\right)+b\left(\frac{u^{j-1}}{2\Delta t}, w'-u^{j+1}\right) \quad \forall w'\in V
\end{aligned}$$

On définit $\tilde{L}^j\in V$ pout tout $j\geq 1$ $\left\langle\tilde{L}^j, w\right\rangle=\langle L^j, w\rangle+\left(\frac{2u^j-u^{j-1}}{\Delta t^2}, w\right)+b\left(\frac{u^{j-1}}{2\Delta t}, w\right)$

et $\tilde{\Phi}_j : V\times V\to\mathbb{R}$, $\tilde{\Phi}_j(v,w)=\phi\left(t^j, v, \frac{v-u^{j-1}}{2\Delta t}, w-u^{j-1}\right)$ $\forall v, w\in V$

donc chaque problème $\mathcal{P}_n^{j+1}$ peut se réécrire de la manière suivante:

Trouver $u^{j+1} \in V$ tel que

$$\begin{array}{l}\left(\dfrac{u^{j+1}}{\Delta t^2}, w - u^{j+1}\right) + a\left(u^{j+1}, w - u^{j+1}\right) + b\left(\dfrac{u^{j+1}}{2\Delta t}, w - u^{j+1}\right) \\ +\tilde{\Phi}_j\left(u^{j+1}, w\right) - \tilde{\Phi}_j\left(u^{j+1}, u^{j+1}\right) \geq \left\langle \tilde{L}^j, w - u^{j+1}\right\rangle \ \forall w \in V\end{array} \tag{2.36}$$

Pour tout $v \in V$, $\tilde{\Phi}_j(v,.)$ est convexe sur V à cause des proprétés de sous-additivité de ϕ (2.28) et (2.29) et $\tilde{\Phi}_j(v,.)$ est continue sur V par (2.30) et (2.32). En fait, par (2.30) et (2.32), on obtient que $\tilde{\Phi}_j$ est Lipschtzienne par rapport à la deuzième variable

$$\begin{array}{l}\left|\tilde{\Phi}_j(v, v_1) - \tilde{\Phi}_j(v, v_2)\right| = \left|\phi\left(t^j, v; \dfrac{v - u^{j-1}}{2\Delta t}, v_1 - u^{j-1}\right) - \phi\left(t^j, v, \dfrac{v - u^{j-1}}{2\Delta t}, v_2 - u^{j-1}\right)\right. \\ \left. +\phi\left(t^j, 0, 0, v_2 - u^{j-1}\right) - \phi\left(t^j, 0, 0, v_1 - u^{j-1}\right)\right| \leq \eta\left(\|v\| + \left|\dfrac{v - u^{j-1}}{2\Delta t}\right|\right)\|v_1 - v_2\|, \ \forall v_{1,2} \in V.\end{array}$$

Nous avons aussi la propriété suivante $\tilde{\Phi}_j$, issue de (2.32)

$$\begin{array}{l}\left|\tilde{\Phi}_j(u_1, v_1) - \tilde{\Phi}_j(u_1, v_2) + \tilde{\Phi}_j(u_2, v_1) - \tilde{\Phi}_j(u_2, v_1)\right| \\ \leq \eta\left(1 + \dfrac{1}{\Delta t}\right)\|u_1 - u_2\|\,\|v_1 - v_2\|, \ \forall u_{1,2}, v_{1,2} \in V\end{array}$$

Comme nous pouvons le voir, l'inéquation (2.36) est une inéquation elliptique implicite. Nous savons qu'une solution unique existe (voir [13, 40]). ■

Maintenant, on démontre la condition de l'unicité, soient u_1, u_2 deux solutions de (2.35).

Pour $w = u_2$, (2.35) devient

$$\begin{array}{l}\left(\dfrac{u_1}{\Delta t^2}, u_2 - u_1\right) + a\left(u_1, u_2 - u_1\right) + b\left(\dfrac{u_1}{2\Delta t}, u_2 - u_1\right) \\ +\tilde{\Phi}_j(u_1, u_2) - \tilde{\Phi}_j(u_1, u_1) \geq \left\langle \tilde{L}^j, u_2 - u_1\right\rangle\end{array}$$

pour $w = u_2$, (2.35) devient

$$\begin{array}{l}\left(\dfrac{u_2}{\Delta t^2}, u_1 - u_2\right) + a\left(u_2, u_1 - u_2\right) + b\left(\dfrac{u_2}{2\Delta t}, u_1 - u_2\right) \\ +\tilde{\Phi}_j(u_2, u_1) - \tilde{\Phi}_j(u_2, u_2) \geq \left\langle \tilde{L}^j, u_1 - u_2\right\rangle\end{array}$$

on multiplie les deux inégalités précédentes à (-1) et en additionnant, nous obtenons

$$\begin{array}{l}\dfrac{1}{\Delta t^2}\left(u_2 - u_1, u_2 - u_1\right) + a\left(u_2 - u_1, u_2 - u_1\right) + \dfrac{1}{2\Delta t} b\left(u_2 - u_1, u_2 - u_1\right) \\ -\tilde{\Phi}_j(u_1, u_2) + \tilde{\Phi}_j(u_1, u_1) - \tilde{\Phi}_j(u_2, u_1) + \tilde{\Phi}_j(u_2, u_2) \leq 0\end{array}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t^2}(u_2-u_1,u_2-u_1)+a(u_2-u_1,u_2-u_1)+\frac{1}{2\Delta t}b(u_2-u_1,u_2-u_1)\\
&\leq \phi\left(t^j,u_2,\frac{u_2-u^{j-1}}{2\Delta t},u_1-u^{j-1}\right)-\phi\left(t^j,u_2,\frac{u_2-u^{j-1}}{2\Delta t},u_2-u^{j-1}\right)\\
&+\phi\left(t^j,u_1,\frac{u_1-u^{j-1}}{2\Delta t},u_2-u^{j-1}\right)-\phi\left(t^j,u_1,\frac{u_1-u^{j-1}}{2\Delta t},u_1-u^{j-1}\right)
\end{aligned}$$

et d'après (2.32) on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t^2}|u_2-u_1|^2+a(u_2-u_1,u_2-u_1)+b\left(\frac{u_2-u_1}{2\Delta t},u_2-u_1\right)\\
&\leq \eta\left(\|u_2-u_1\|+\frac{|u_2-u_1|}{2\Delta t}\right)\|u_2-u_1\|
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Young

$$\begin{aligned}
\frac{\eta|u_2-u_1|\,\|u_2-u_1\|}{2\Delta t} &= \frac{\sqrt{2}\,|u_2-u_1|}{\Delta t}\times\frac{\eta\|u_2-u_1\|}{2\sqrt{2}}\\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}\,|u_2-u_1|}{\Delta t}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\eta\|u_2-u_1\|}{2\sqrt{2}}\right)^2
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\eta|u_2-u_1|\,\|u_2-u_1\|}{2\Delta t}\leq\frac{1}{\Delta t^2}|u_2-u_1|^2+\frac{\eta^2}{16}\|u_2-u_1\|^2$$

en utilisant (2.27) nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t^2}|u_2-u_1|^2+A\|u_2-u_1\|^2+\frac{B}{2\Delta t}\|u_2-u_1\|^2\\
&\leq \eta\|u_2-u_1\|^2+\frac{1}{\Delta t^2}|u_2-u_1|^2+\frac{\eta^2}{16}\|u_2-u_1\|^2
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\left(A+\frac{B}{2\Delta t}-\eta-\frac{\eta^2}{16}\right)\|u_2-u_1\|^2\leq 0$$

ce qui implique que si la condition suivante est vérifiée pour Δt suffisamment petite

$$\frac{B}{2\Delta t}>\eta+\frac{\eta^2}{16}-A \tag{2.37}$$

alors il existe une solution unique de (2.35) .■

Lemme 2.2

Sous la condition de compatibilité (2.33) et si Δt suffisamment petite, le terme γ^1 est borné dans H et le terme $\Delta t\ \gamma^1$ est borné dans V .

Preuve

on remplace w par δ^0 dans (2.35) avec $j = 1$

$$\begin{aligned}&\left(\gamma^1, d^1-\delta^0\right)+a\left(u^2, d^1-\delta^0\right)+b\left(d^1, d^1-\delta^0\right)\\&-\phi\left(t^1, u^2, d^1, \delta^0\right)\ +\phi\left(t^1, u^2, d^1, d^1\right)\ \leq\left\langle L^1, d^1-\delta^0\right\rangle \qquad \forall w\in V\quad,\end{aligned}$$

et on remplace w par $d^1-\delta^0$ dans (2.33) d'où

$$a\left(-u_0, d^1-\delta^0\right)+b\left(-u_1, d^1-\delta^0\right)-\phi\left(0, u_0, u_1, d^1-\delta^0\right)=\left(-L^0, d^1-\delta^0\right)\ +\left(l, d^1-\delta^0\right)$$

On additionnant les deux inégalités précédentes, et comme $u_1=\delta^0$ on a

$$\begin{aligned}&\left(\gamma^1, d^1-\delta^0\right)+a\left(u^2-u_0, d^1-\delta^0\right)+b\left(d^1-\delta^0, d^1-\delta^0\right)\\&-\phi\left(t^1, u^2, d^1, \delta^0\right)\ +\phi\left(t^1, u^2, d^1, d^1\right)-\phi\left(0, u_0, \delta^0, d^1-\delta^0\right)\\&\leq\left\langle L^1-L^0, d^1-\delta^0\right\rangle+\left(l, d^1-\delta^0\right)\end{aligned}$$

On a les relations $d^1-\delta^0=\dfrac{\Delta t}{2}\ \gamma^1$ et $u^2-u_0=2\Delta t\ \delta^0+\Delta t^2\ \gamma^1$ et on écrit

$$\begin{aligned}&\left(\gamma^1, \frac{\Delta t}{2}\gamma^1\right)+a\left(2\Delta t\ \delta^0+\Delta t^2\gamma^1, \frac{\Delta t}{2}\gamma^1\right)+b\left(\frac{\Delta t}{2}\gamma^1, \frac{\Delta t}{2}\gamma^1\right)\\&\leq\phi\left(t^1, u^2, d^1, \delta^0\right)\ -\phi\left(t^1, u^1, d^1, d^1\right)\\&+\phi\left(0, u_0, \delta^0, d^1-\delta^0\right)+\left\langle L^1-L^0, \frac{\Delta t}{2}\gamma^1\right\rangle+\left(l, \frac{\Delta t}{2}\gamma^1\right)\end{aligned}$$

On utilise $\phi\left(0, u_0, \delta^0, d^1-\delta^0\right)=\phi\left(0, u_0, \delta^0, d^1\right)-\phi\left(0, u_0, \delta^0, \delta^0\right)$

on obtient

$$\begin{aligned}&\left(\gamma^1, \frac{\Delta t}{2}\gamma^1\right)+a\left(2\Delta t\ \delta^0+\Delta t^2\gamma^1, \frac{\Delta t}{2}\gamma^1\right)+b\left(\frac{\Delta t}{2}\gamma^1, \frac{\Delta t}{2}\gamma^1\right)\\&\leq\phi\left(t^1, u^2, d^1, \delta^0\right)\ -\phi\left(t^1, u^1, d^1, d^1\right)+\phi\left(0, u_0, \delta^0, d^1\right)\\&-\phi\left(0, u_0, \delta^0, \delta^0\right)+\left\langle L^1-L^0, \frac{\Delta t}{2}\gamma^1\right\rangle+\left(l, \frac{\Delta t}{2}\gamma^1\right)\end{aligned}$$

On multiplie l'inégalité précédente à $\dfrac{2}{\Delta t}$ et on applique (2.32), on trouve

$$\begin{aligned}&\left(\gamma^1, \gamma^1\right)+2\Delta t\ a\left(\delta^0, \gamma^1\right)+\Delta t^2 a\left(\gamma^1, \gamma^1\right)+\frac{\Delta t}{2}b\left(\gamma^1, \gamma^1\right)\\&\leq\frac{2}{\Delta t}\eta\left(\left(t^1-0\right)+\left\|u^2-u_0\right\|+\left|d^1-\delta^0\right|\right)\left\|d^1-\delta^0\right\|\\&+\left\langle L^1-L^0, \gamma^1\right\rangle+\left(l, \gamma^1\right)\end{aligned}$$

D'après (2.27) et comme L est lipischtzienne, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\gamma^1\right|^2 + \Delta t^2 A \left\|\gamma^1\right\|^2 + \frac{\Delta t}{2} B \left\|\gamma^1\right\|^2 \\
&\leq \frac{2}{\Delta t}\eta\left(\Delta t\ + \left\|2\Delta t\ \delta^0 + \Delta t^2\gamma^1\right\| + \left|\frac{\Delta t}{2}\gamma^1\right|\right)\left\|\frac{\Delta t}{2}\gamma^1\right\| \\
&+2\Delta t\ m_a\left\|\delta^0\right\|\left\|\gamma^1\right\| + C_L\left|t^1 - 0\right|\left\|\gamma^1\right\| + |l|\left|\gamma^1\right|
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\left|\gamma^1\right|^2 + \Delta t^2 A \left\|\gamma^1\right\|^2 + \frac{\Delta t}{2} B \left\|\gamma^1\right\|^2 \\
&\leq \eta\left(\Delta t\ + 2\Delta t\left\|\ \delta^0\right\| + \Delta t^2\left\|\gamma^1\right\| + \frac{\Delta t}{2}\left|\gamma^1\right|\right)\left\|\gamma^1\right\| \\
&+2\Delta t\ m_a\left\|\delta^0\right\|\left\|\gamma^1\right\| + C_L\Delta t\left\|\gamma^1\right\| + |l|\left|\gamma^1\right|
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\left|\gamma^1\right|^2 + \frac{\Delta t}{2} B \left\|\gamma^1\right\| + \Delta t^2 A \left\|\gamma^1\right\|^2 \\
&\leq (\eta + C_L)\,\Delta t\left\|\gamma^1\right\| + 2\Delta t\,(\eta + m_a)\left\|\delta^0\right\|\left\|\gamma^1\right\| \\
&+\eta\Delta t^2\left\|\gamma^1\right\|^2 + \frac{\eta}{2}\Delta t\ \left|\gamma^1\right|\left\|\gamma^1\right\| + |l|\left|\gamma^1\right|
\end{aligned} \tag{2.38}$$

On emploie l'inégualité de Young avec les constants $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\eta}{2}\Delta t\ \left|\gamma^1\right|\left\|\gamma^1\right\| &= \left(\sqrt{2c_1}\frac{\eta}{2}\left|\gamma^1\right|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2c_1}}\Delta t\left\|\gamma^1\right\|\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2c_1}\frac{\eta}{2}\left|\gamma^1\right|\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2c_1}}\Delta t\left\|\gamma^1\right\|\right)^2
\end{aligned}$$

il vient

$$\frac{\eta}{2}\Delta t\ \left|\gamma^1\right|\left\|\gamma^1\right\| \quad \leq c_1\frac{\eta^2}{4}\left|\gamma^1\right|^2 + \frac{\Delta t^2}{4c_1}\left\|\gamma^1\right\|^2,$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned}
|l|\left|\gamma^1\right| &= \left(\frac{1}{\sqrt{2c_2}}|l|\right)\left(\sqrt{2c_2}\left|\gamma^1\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2c_2}}|l|\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2c_2}\left|\gamma^1\right|\right)^2
\end{aligned}$$

et encore on a

$$\begin{aligned}
(\eta + C_L)\,\Delta t\left\|\gamma^1\right\| &= \left(\frac{1}{\sqrt{2c_3}}(\eta + C_L)\right)\left(\sqrt{2c_3}\Delta t\left\|\gamma^1\right\|\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2c_3}}(\eta + C_L)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2c_3}\Delta t\left\|\gamma^1\right\|\right)^2
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$(\eta + C_L)\,\Delta t\left\|\gamma^1\right\| \quad \leq \frac{(\eta + C_L)^2}{4c_3} + c_3\Delta t^2\left\|\gamma^1\right\|^2$$

et comme

$$\begin{aligned}
2\Delta t\left(\eta+m_a\right)\left\|\delta^0\right\|\left\|\gamma^1\right\| &= \left(\frac{2}{\sqrt{2c_4}}\left(\eta+m_a\right)\left\|\delta^0\right\|\right)\left(\sqrt{2c_4}\Delta t\left\|\gamma^1\right\|\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2c_4}}\left(\eta+m_a\right)\left\|\delta^0\right\|\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{2c_4}\Delta t\left\|\gamma^1\right\|\right)^2
\end{aligned}$$

par conséquent

$$2\Delta t\left(\eta+m_a\right)\left\|\delta^0\right\|\left\|\gamma^1\right\| \quad \leq \frac{\left(\eta+m_a\right)^2}{c_4}\left\|\delta^0\right\|^2+c_4\Delta t^2\left\|\gamma^1\right\|^2$$

On remplace les etimations précédentes dans (2.38) on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(1-c_1\frac{\eta^2}{4}-c_2\right)\left|\gamma^1\right|^2+\Delta t^2 A\left\|\gamma^1\right\|^2 \\
&+\Delta t\left(\frac{B}{2}-\Delta t\left(c_3+c_4+\eta+\frac{1}{4c_1}\right)\right)\left\|\gamma^1\right\|^2 \\
&\leq \frac{\left(\eta+C_L\right)^2}{4c_3}+\frac{\left(\eta+m_a\right)^2}{c_4}\left\|\delta^0\right\|^2+\frac{|l|^2}{4c_2}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Dans (2.38) nous choisissons Δt satisfait (2.37) et $c_1, c_2, c_2, c_4>0$ tels que

$$1-c_1\frac{\eta^2}{4}-c_2>0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}1-c_1\frac{\eta^2}{4}>0 \\ 1-c_2>0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}0<c_1<\frac{4}{\eta^2} \\ 0<c_2<1\end{array}\right.$$

$$\frac{B}{2}-\Delta t\left(c_3+c_4+\eta+\frac{1}{4c_1}\right)>0 \Longrightarrow \frac{B}{2}-\Delta t\ \eta>0 \Longrightarrow \Delta t<\frac{B}{2\eta}$$

il suit que γ^1 et $\Delta t\ \gamma^1$sont bornés dans H et V indépendamment de Δt, respectivement.

D'autre part on a

$$d^1=\delta^0+\frac{\Delta t}{2}\gamma^1, \text{et } \delta^1=d^1+\frac{\Delta t}{2}\gamma^1$$

et d'après le lemme 2.2, les termes d^1 et δ^1sont bornés dans V indépendamment de Δt si Δt est suffisamment petite.■

Lemme2.3

Si Δt est suffisamment petite, les termes γ^i sont bornés dans H et δ^i sont bornés dans V indépendamment de Δt pour tout $i=2,\ldots n-1$.

Preuve.

On remplace w par d^{j+1}dans (2.35) écrite pour j, on obtient

$$\begin{aligned}&\left(\gamma^{j}, d^{j+1}-d^{j}\right)+a\left(u^{j+1}, d^{j+1}-d^{j}\right)+b\left(d^{j}, d^{j+1}-d^{j}\right)\\&+\phi\left(t^{j}, u^{j+1}, d^{j}, d^{j+1}\right)\ -\phi\left(t^{j}, u^{j+1}, d^{j}, d^{j}\right) \geq\left\langle L^{j}, d^{j+1}-d^{j}\right\rangle .\end{aligned}$$

On remplace w par d^{j} dans (2.35) écrite pour $j+1$, on obtient

$$\begin{aligned}&\left(\gamma^{j+1}, d^{j}-d^{j+1}\right)+a\left(u^{j+2}, d^{j}-d^{j+1}\right)+b\left(d^{j+1}, d^{j}-d^{j+1}\right)\\&+\phi\left(t^{j+1}, u^{j+2}, d^{j+1}, d^{j}\right)\ -\phi\left(t^{j+1}, u^{j+2}, d^{j+1}, d^{j+1}\right) \geq\left\langle L^{j+1}, d^{j}-d^{j+1}\right\rangle\end{aligned}$$

Ainsi, par l'addition et compte tenu que

$$\begin{aligned}d^{j+1}-d^{j} &=\frac{u^{j+2}-u^{j}}{2 \Delta t}-\frac{u^{j+1}-u^{j-1}}{2 \Delta t} \\&=\frac{1}{2}\left(\frac{u^{j+2}-u^{j+1}}{\Delta t}-\frac{u^{j}-u^{j-1}}{\Delta t}\right) \\&=\frac{1}{2}\left(\delta^{i+1}-\delta^{i-1}\right)\end{aligned}$$

nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned}&\left(\gamma^{j+1}-\gamma^{j}, d^{j+1}-d^{j}\right)+\frac{\Delta t}{2} a\left(\delta^{i+1}, \delta^{i+1}-\delta^{i-1}\right)+b\left(d^{j}, d^{j+1}-d^{j}\right)\\&-\phi\left(t^{j}, u^{j+1}, d^{j}, d^{j+1}\right)\ +\phi\left(t^{j}, u^{j+1}, d^{j}, d^{j}\right)-\phi\left(t^{j+1}, u^{j+2}, d^{j+1}, d^{j}\right)\\&+\phi\left(t^{j+1}, u^{j+2}, d^{j+1}, d^{j+1}\right) \leq\left\langle L^{j+1}-L^{j}, d^{j+1}-d^{j}\right\rangle\end{aligned}\tag{2.40}$$

Nous utilisons (2.31) , nous obtenons

$$\begin{aligned}&\phi\left(t^{j}, u^{j+1}, d^{j}, d^{j+1}\right)\ -\phi\left(t^{j}, u^{j+1}, d^{j}, d^{j}\right)+\phi\left(t^{j+1}, u^{j+2}, d^{j+1}, d^{j}\right)-\phi\left(t^{j+1}, u^{j+2}, d^{j+1}, d^{j+1}\right)\\&\leq \eta\left(\left|t^{j}-t^{j+1}\right|+\left\|u^{j+2}-u^{j+1}\right\|+\left|d^{j+1}-d^{j}\right|\right)\left\|d^{j+1}-d^{j}\right\|\end{aligned}$$

D'aprés la relation $d^{j+1}-d^{j}=\dfrac{\Delta t}{2}\left(\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right)$ on a

$$\begin{aligned}&\left|\phi\left(t^{j}, u^{j+1}, d^{j}, d^{j+1}\right)\ -\phi\left(t^{j}, u^{j+1}, d^{j}, d^{j}\right)+\phi\left(t^{j+1}, u^{j+2}, d^{j+1}, d^{j}\right)-\ \phi\left(t^{j+1}, u^{j+2}, d,^{j+1} d^{j+1}\right)\right|\\&\quad \leq \eta\left(\Delta t+\left\|\Delta t\ \delta^{i+1}\right\|+\left|\frac{\Delta t}{2}\left(\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right)\right|\right)\left\|\frac{\Delta t}{2}\left(\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right)\right\| .\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}&\left|\phi\left(t^{j}, u^{j+1}, d^{j}, d^{j+1}\right)\ -\phi\left(t^{j}, u^{j+1}, d^{j}, d^{j}\right)+\phi\left(t^{j+1}, u^{j+2}, d^{j+1}, d^{j}\right)-\ \phi\left(t^{j+1}, u^{j+2}, d^{j+1}, d^{j+1}\right)\right|\\&\leq \frac{\Delta t^{2}}{2} \eta\left(1+\left\|\ \delta^{i+1}\right\|+\frac{\left|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right|}{2}\right)\left\|\left(\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right)\right\|\end{aligned}$$

sachant d'autre part que

$$\left(\gamma^{j+1}-\gamma^{j},d^{j+1}-d^{j}\right)=\frac{\Delta t}{2}\left(\gamma^{j+1}-\gamma^{j},\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right)=\frac{\Delta t}{2}\left(\left|\gamma^{j+1}\right|^{2}-\left|\gamma^{j}\right|^{2}\right) \tag{2.41}$$

comme b est coercive et L est lipshtizienne, nous conduisons en multipliant (2.40) par $\dfrac{2}{\Delta t}$ et on garde à l'esprit (2.41) , on obtient

$$\begin{aligned}&|\gamma^{j+1}|^{2}-|\gamma^{j}|^{2}+a\left(\delta^{i+1},\delta^{i+1}-\delta^{i-1}\right)+\frac{\Delta t}{2}B\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\|^{2}\\&\leq\left(C_{L}+\eta\right)\Delta t\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\|+\eta\Delta t\left\|\ \delta^{i+1}\right\|\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\|+\eta\frac{\Delta t}{2}\left|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right|\left\|(\gamma^{j+1}+\gamma^{j})\right\|.\end{aligned}$$

Nous utilisons les inégalités de Young suivantes avec $k_1, k_2, k_3 > 0$

$$\begin{aligned}\eta\frac{\Delta t}{2}\left|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right|\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\| &= \left(\frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{\Delta t}{2k_1}}\left|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right|\right)\left(\sqrt{2k_1\Delta t}\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\|\right)\\&\leq\frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{\Delta t}{2k_1}}\left|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right|\right)^{2}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{2k_1\Delta t}\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\|\right)^{2}\end{aligned}$$

par conséquent

$$\eta\frac{\Delta t}{2}\left|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right|\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\|\leq\frac{\eta^{2}\Delta t}{16k_1}\left|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right|^{2}+k_1\Delta t\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\|^{2}$$

de même manière, on écrit

$$\begin{aligned}\eta\Delta t\left\|\ \delta^{i+1}\right\|\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\| &= \left(\eta\sqrt{\frac{\Delta t}{2k_2}}\left|\delta^{i+1}\right|\right)\left(\sqrt{2k_2\Delta t}\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\|\right)\\&\leq\frac{1}{2}\left(\eta\sqrt{\frac{\Delta t}{2k_2}}\left|\delta^{i+1}\right|\right)^{2}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{2k_2\Delta t}\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\|\right)^{2}\end{aligned}$$

par conséquent

$$\eta\Delta t\left\|\ \delta^{i+1}\right\|\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\| \leq\frac{\eta^{2}\Delta t}{4k_2}\left|\delta^{i+1}\right|^{2}+k_2\Delta t\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\|^{2}$$

on a

$$\begin{aligned}\left(C_L+\eta\right)\Delta t\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\| &= \left(\left(C_L+\eta\right)\sqrt{\frac{\Delta t}{2k_3}}\right)\left(\sqrt{2k_3\Delta t}\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\|\right)\\&\leq\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\Delta t}{2k_3}}\left(C_L+\eta\right)\right)^{2}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{2k_3\Delta t}\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\|\right)^{2}\end{aligned}$$

on deduit

$$\left(C_L+\eta\right)\Delta t\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\| \leq\frac{\left(C_L+\eta\right)^{2}}{4k_3}\Delta t+k_3\Delta t\left\|\gamma^{j+1}+\gamma^{j}\right\|^{2}$$

par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&|\gamma^{j+1}|^2 - |\gamma^j|^2 + a\left(\delta^{i+1}, \delta^{i+1} - \delta^{i-1}\right) + \Delta t\left(\frac{B}{2} - k_1 - k_2 - k_3\right)\|\gamma^{j+1} + \gamma^j\|^2 \\
&\leq \frac{\Delta t}{4k_3}\left(C_L + \eta\right)^2 + \frac{\eta^2 \Delta t}{4k_2}\left|\delta^{i+1}\right|^2 + \frac{\eta^2 \Delta t}{16k_1}\left|\gamma^{j+1} + \gamma^j\right|^2.
\end{aligned}$$

Nous additionnons de $j = 1$ à $i - 1$ et nous utilisons la relation

$$\sum_{j=1}^{i-1} a\left(\delta^{i+1}, \delta^{i+1} - \delta^{i-1}\right) \geq \frac{1}{2}\left[a\left(\delta^i, \delta^i\right) + a\left(\delta^{i-1}, \delta^{i-1}\right) - a\left(\delta^1, \delta^1\right) - a\left(\delta^0, \delta^0\right)\right],$$

de sorte que par l'ellipticité de a nous obtenons

$$\begin{aligned}
&|\gamma^i|^2 + \frac{A}{2}\left\|\delta^i\right\|^2 + \frac{A}{2}\left\|\delta^{i-1}\right\|^2 + \Delta t\left(\frac{B}{2} - k_1 - k_2 - k_3\right)\sum_{j=1}^{i-1}\|\gamma^j + \gamma^{j+1}\|^2 \\
&\leq \frac{T}{4k_3}\left(C_L + \eta\right)^2 + \frac{\eta^2 \Delta t}{4k_2}\sum_{j=1}^{i-1}\left\|\delta^{j+1}\right\|^2 + \frac{\eta^2 \Delta t}{16k_1}\sum_{j=1}^{i-1}|\gamma^j + \gamma^{j+1}|^2 \\
&+\frac{1}{2}a\left(\delta^0, \delta^0\right) + \frac{1}{2}a\left(\delta^1, \delta^1\right) + |\gamma^1|^2.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité

$$\sum_{j=1}^{i-1}\left|\gamma^j + \gamma^{j+1}\right|^2 \leq 4\sum_{j=2}^{i-1}\left|\gamma^j\right|^2 + 2\left|\gamma^1\right|^2 + 2\left|\gamma^i\right|^2,$$

et nous choisissons $k_1 = k_2 = k_3 = \dfrac{B}{12}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{3\eta^2 \Delta t}{2B}\right)|\gamma^i|^2 + \left(\frac{A}{2} - \frac{3\eta^2 \Delta t}{B}\right)\left\|\delta^i\right\|^2 \leq \frac{3\eta^2 \Delta t}{B}\sum_{j=2}^{i-1}|\gamma^j|^2 + \frac{3\eta^2 \Delta t}{B}\sum_{j=2}^{i-1}\left\|\delta^j\right\|^2 \\
&+\frac{3T}{B}\left(C_L + \eta\right)^2 + \left(1 + \frac{3\eta^2 \Delta t}{2B}\right)|\gamma^1|^2 + \frac{1}{2}a\left(\delta^0, \delta^0\right) + \frac{1}{2}a\left(\delta^1, \delta^1\right)
\end{aligned}$$

On a, d'après le lemme2.3, $|\gamma^1|$ et $\left\|\delta^1\right\|$ sont bornés. Si Δt satisfait (2.37) et $\Delta t < \min\left(\dfrac{2B}{3\eta^2}, \dfrac{AB}{6\eta^2}\right)$,

nous pouvons appliquer le lemme de Gronwal discret (voir [19]) dont assure pour tout $i = 2, ..., n-1$, δ^i sont bornés dans V et γ^i sont bornés dans H, indépendamment de Δt. D'autre part on a $d^i = \dfrac{1}{2}\left(\delta^i + \delta^{i-1}\right)$ qui implique pour tout $i = 2, ..., n-1$, δ^i sont bornés dans V, et $u^{i+1} - u^i = \Delta t\ \delta^i$, par récurrence, on peut demontrer pour tout $i = 2, ..., n-1, d^i$ sont bornés dans V. $\blacksquare$

On note que l'utilisation d'autres constantes dans les inégalités de Young peut améliorer le choix de Δt.

Maintenant nous définissons les suites suivantes des applications, pour $n \geq 2$ et $1 \leq j \leq n-1$,

$$\begin{cases} u_n(t) = u^1 & t \in [0, t^1] \\ \bar{u}_n(t) = \tilde{u}_n(t) = \dfrac{3u^0 - u^1}{2} + t\delta^0 & t \in [0, t^1] \\ u_n(t) = u^{j+1} & t \in [t^j, t^{j+1}] \\ \bar{u}_n(t) = \dfrac{u^{j-1} - u^j}{2} + (t - t^j)\, d^j & t \in [t^j, t^{j+1}] \\ \tilde{u}_n(t) = \dfrac{u^{j-1} - u^j}{2} + (t - t^j)\,\delta^{j-1} + \dfrac{(t - t^j)^2}{2}\gamma^j & t \in [t^j, t^{j+1}] \end{cases}$$

Nous avons clairement

$$u_n \in L^2(0, T; V), \ \bar{u}_n \in W^{1,2}(0, T; V), \ \tilde{u}_n \in W^{2,2}(0, T; H).$$

En effet, les relations suivantes sont vérifiées:

$$\begin{aligned} \bar{u}_n\left(t_j^+\right) &= \bar{u}_n\left(t_j^-\right) = \frac{u^{j-1} - u^j}{2}, \\ \tilde{u}_n\left(t_j^+\right) &= \tilde{u}_n\left(t_j^-\right) = \frac{u^{j-1} - u^j}{2}, \\ \frac{d}{dt}\tilde{u}_n\left(t_j^+\right) &= \frac{d}{dt}\tilde{u}_n\left(t_j^-\right) = \delta^{j-1}. \end{aligned}$$

La suite des problèmes$(\mathcal{P}_n^{j+1})_{j=1,\ldots..n-1}$est équivalente à l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\left(\ddot{\tilde{u}}_n, w - \dot{\bar{u}}_n \right) + a\left(u_n, w - \dot{\bar{u}}_n\right) + b\left(\dot{\bar{u}}_n, w - \dot{u}_n\right) + \phi_n\left(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, w\right) \right. \\ &\left. -\phi_n\left(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right)\right) dt \geq \int_0^T \left\langle L_n, w - \dot{\bar{u}} \right\rangle dt, \quad \forall w \in L^2(0, T; V), \end{aligned} \tag{2.42}$$

où $\phi_n(t, u, v, w) = \phi(t^j, u, v, w)$, $L_n(t) = L^j$ pour tout $t \in]t^j, t^{j+1}]$, $1 \leq j \leq n-1$.

$$\phi_n(t, u, v, w) = \phi(0, u, v, w), \ L_n(t) = L^0 \text{ pour tout } t \in \left[0, t^1\right] \text{ et } u, v, w \in V$$

En utilisant les estimations données dans les lemmes 2.2, 2.3, il existe u, $\bar{u}$ et $\tilde{u}$ qui sont les limites des sous-suites notées encore u_n, $\bar{u}_n$ et $\tilde{u}_n$ où $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(0, T; V)$, et $\bar{u}_n \rightharpoonup \bar{u}$ dans $W^{1,2}(0, T; V)$ et $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ dans $W^{2,2}(0, T; H)$ quand Δt tend vers 0.

Nous démontrons maintenant que ces limites sont égales.

Lemme 2.4

Les résultats suivants sont vérifiés.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|\bar{u}_n - u_n\|_{L^2(0,T;V)} &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} \|\bar{u}_n - \tilde{u}_n\|_{L^2(0,T;V)} &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} \left\|\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n\right\|_{L^2(0,T;H)} &= 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Preuve

Pour tout $\Phi \in L^2(0,T;V)$ nous avons

$$\begin{aligned} \left|\int_0^T (\bar{u}_n - u_n, \Phi)\, dt\right| &= \left|\int_0^{t^1} (\bar{u}_n - u_n, \Phi)\, dt + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{t^i}^{t^{i+1}} (\bar{u}_n - u_n, \Phi)\, dt\right| \\ &= \left|\int_0^{t^1} \left(\left(t - \frac{3\Delta t}{2}\right)\delta^0, \Phi\right) dt + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{t^i}^{t^{i+1}} \left(\frac{u^i + u^{i-1} - 2u^{i+1}}{2} + (t-t^i)\, d^i, \Phi\right) dt\right| \\ &= \left|\int_0^{t^1} \left(\left(t - \frac{3\Delta t}{2}\right)\delta^0, \Phi\right) dt + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{t^i}^{t^{i+1}} \left(-\frac{\Delta t}{2}\delta^i - \Delta t d^i + (t-t^i)\, d^i, \Phi\right) dt\right| \\ &= \left|\int_0^{t^1} \left(\left(t - \frac{3\Delta t}{2}\right)\delta^0, \Phi\right) dt + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{t^i}^{t^{i+1}} \left(-\frac{\Delta t}{2}\delta^i + (t-t^i-\Delta t)\, d^i, \Phi\right) dt\right| \end{aligned}$$

et comme, $t \in [0,t^1]$ et $\Delta t = t^1$, donc $\left|t - \frac{3\Delta t}{2}\right| \leq \frac{3\Delta t}{2}$, et d'autre part $t \in]t^i, t^{i+1}]$, donc $|t - t^i - \Delta t| = |t - t^{i+1}| \leq |t^i - t^{i+1}| = \Delta t$, et nous obtenons

$$\left|\int_0^T (\bar{u}_n - u_n, \Phi)\, dt\right| \leq \left|\int_0^{t^1} \left(\frac{3\Delta t}{2}\delta^0, \Phi\right) dt + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{t^i}^{t^{i+1}} \left(-\frac{\Delta t}{2}\delta^i + \Delta t d^i, \Phi\right) dt\right|$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a

$$\left|\int_0^T (\bar{u}_n - u_n, \Phi)\, dt\right| \leq \frac{3\Delta t}{2}\left\|\delta^0\right\| \int_0^{t^1} \|\Phi(t)\|\, dt + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t \left(\frac{\left\|\delta^i\right\|}{2} + \left\|d^i\right\|\right) \int_{t^i}^{t^{i+1}} \|\Phi(t)\|\, dt$$

En notant par c_1 tel que $\max\left(\left\|\delta^i\right\|\right) \leq c_1$ pour tout $i \leq n-1$ et d'après l'inégalité de Hôlder, on obtient

$$\begin{aligned} \left|\int_0^T (\bar{u}_n - u_n, \Phi)\, dt\right| &\leq \frac{3c_1}{2}\Delta t \int_0^T \|\Phi(t)\|\, dt \\ &\leq \frac{3c_1}{2}\Delta t \left(\int_0^T 1^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\Phi(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{2}c_1\sqrt{T}\, \|\Phi(t)\|_{L^2(0,T;V)}\,. \end{aligned}$$

Donc, nous avons $(\bar{u}_n - u_n, \Phi)_{L^2(0,T;V)} \to 0,\ \forall\ \Phi \in L^2(0,T;V)$, qui implique $(2.43)_1$.

Les relations $(2.43)_{2,3}$ peuvent être prouvées facilement d'une manière similaire.

Pour tout $\Phi \in L^2(0,T;V)$ nous avons

$$\left|\int_0^T (\bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi)\, dt\right| = \left|\int_0^{t^1} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi)\, dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t^i}^{t^{i+1}} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi)\, dt\right|$$

On a

$$\left|\int_{t^i}^{t^{i+1}} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi)\, dt\right| = \left|\int_{t^i}^{t^{i+1}} \left(\left(t - t^i\right)\left(d^i - \delta^{i-1}\right) - \frac{\left(t - t^i\right)^2}{2}\gamma^i, \Phi\right) dt\right|,$$

et comme $d^i - \delta^{i-1} = \dfrac{\delta^i - \delta^{i-1}}{2}$

$$\left|\int_{t^i}^{t^{i+1}} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi)\, dt\right| = \left|\int_{t^i}^{t^{i+1}} \left(\left(t - t^i\right)\frac{\delta^i - \delta^{i-1}}{2} - \frac{\left(t - t^i\right)^2}{2}\gamma^i, \Phi\right) dt\right|$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz et $\Delta t\ \gamma^i = \delta^i - \delta^{i-1}$ et $|t - t^j| \leq \Delta t$ on a

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi)\, dt \leq \frac{\Delta t}{2}\left(\left\|\delta^i - \delta^{i-1}\right\| + \Delta t\left\|\gamma^i\right\|\right)\int_{t^i}^{t^{i+1}} \|\Phi(t)\|\, dt,$$

et comme $\Delta t\ \gamma^i = \delta^i - \delta^{i-1}$, on peut écrire

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi)\, dt \leq \frac{\Delta t}{2}\left(\left\|\delta^i - \delta^{i-1}\right\| + \left\|\delta^i - \delta^{i-1}\right\|\right)\int_{t^i}^{t^{i+1}} \|\Phi(t)\|\, dt,$$

par conséquent, on obtient

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi)\, dt \leq \Delta t\left(\left\|\delta^i\right\| + \left\|\delta^{i-1}\right\|\right)\int_{t^i}^{t^{i+1}} \|\Phi(t)\|\, dt.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^T (\bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi)\, dt\right| &\leq \int_0^{t^1} |(\bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi)|\, dt + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{t^i}^{t^{i+1}} |(\bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi)|\, dt \\
&\leq 2c_1\ \Delta t \int_0^T \|\Phi(t)\|\, dt \\
&\leq 2c_1\sqrt{T}\, \|\Phi(t)\|_{L^2(0,T;V)}
\end{aligned}$$

Donc, nous avons $(\bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi)_{L^2(0,T;V)} \to 0\ \forall\ \Phi \in L^2(0,T;V)$, qui implique $(2.43)_2$

Pour tout $\Phi \in L^2(0,T;H)$ nous avons

$$\left|\int_0^T \left(\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n, \Phi\right) dt\right| = \left|\int_0^{t^1} \left(\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n, \Phi\right) dt + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{t^i}^{t^{i+1}} \left(\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n, \Phi\right) dt\right|$$

On obtient, pour l'intégrale sur $]t^i, t^{i+1}], 1 \leq i \leq n-1$

$$\left| \int_{t^i}^{t^{i+1}} \left(\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n, \Phi \right) dt \right| = \left| \int_{t^i}^{t^{i+1}} \left(d^i - \delta^{i-1} - \left(t - t^i\right) \gamma^i, \Phi \right) dt \right|,$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz et $d^i - \delta^{i-1} = \dfrac{\Delta t}{2} \gamma^i,\ \left|t - t^i\right| \leq \Delta t$

$$\left| \int_0^T \left(\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n, \Phi \right) dt \right| \leq \Delta t \left(\int_{t^i}^{t^{i+1}} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \left|\gamma^i\right| + \left|\gamma^i\right| \right) \left|\Phi(t)\right| dt \right).$$

On obtient, en notant c_1 tel que $\max\left(\left\|\gamma^i\right\|\right) \leq c_2$ pour tout $i \leq n-1$.

$$\left| \int_0^T \left(\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n, \Phi \right) dt \right| \quad \leq \frac{3c_2}{2} \Delta t \int_0^T \left\|\Phi(t)\right\| dt \quad \leq \frac{3c_2}{2} \sqrt{T} \left\|\Phi(t)\right\|_{L^2(0,T;H)}.$$

Donc, nous avons $\left(\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n, \Phi \right)_{L^2(0,T;H)} \to 0$, $\forall\ \Phi \in L^2(0,T;H)$, qui implique $(2.43)_3$

Par conséquence, on a

$$\begin{aligned} \|\bar{u} - u\| &\leq \|\bar{u} - \bar{u}_n\| + \|\bar{u}_n - u_n\| + \|u_n - u\| \\ \|\bar{u} - \tilde{u}\| &\leq \|\bar{u} - \bar{u}_n\| + \|\bar{u}_n - \tilde{u}_n\| + \|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|, \end{aligned}$$

donc les limites u, $\bar{u}$ et $\tilde{u}$ sont égales dans $W^{1,2}(0,T;V) \cap W^{2,2}(0,T;H)$.■

Nous avons $u_n(0) = u_0 + \Delta t u_1$, $\bar{u}_n(0) = \tilde{u}(0) = u_0 - \dfrac{\Delta t}{2} u_1, \dot{\bar{u}}_n(0) = \dot{\tilde{u}}_n(0) = u_1$, qui implique que u satisfait les conditions unitiales .

Comme $\left(\bar{u}_n(t)\right)_n \subset W^{1,2}(0,T;V)$, et $\left(\tilde{u}_n(t)\right)_n \subset \mathcal{W}$, on obtient, par un processus diagonal, semblable à celui considéré dans [14, 43] que à une sous-suite près,

$$\bar{u}_n(t) \rightharpoonup u\ (t) \text{ dans } V,\ \bar{u}_n(t) \rightharpoonup\ u(t) \text{ dans } V\ ,\ \dot{\tilde{u}}_n(t) \rightharpoonup \dot{u}(t) \text{ dans } H,\ \ \forall t \in [0,T]. \quad (2.44)$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\ddot{\tilde{u}}_n(t), \dot{\bar{u}}_n(t) \right) dt &= \int_0^{t^1} \left(\ddot{\tilde{u}}_n(t), \dot{\bar{u}}_n(t) \right) dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t^i}^{t^{i+1}} \left(\ddot{\tilde{u}}_n(t), \dot{\bar{u}}_n(t) \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t^i}^{t^{i+1}} \left(\gamma^i, d^i\right) dt \end{aligned}$$

et puisque $\ddot{\tilde{u}}_n = 0$ sur $[0, t^1]$ et $\ddot{\tilde{u}}_n = \Delta t\ \gamma^i = \delta^i - \delta^{i-1}$ sur $[t^i, t^{i+1}]$ et

$$d^i = \frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t} + \frac{u^i - u^{i-1}}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2} \left(\delta^i + \delta^{i-1}\right)$$

donc on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \left(\ddot{\tilde{u}}_n(t), \dot{\bar{u}}_n(t)\right) dt &= \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t\,(\gamma^i, d^i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\delta^i + \delta^{i-1}, \delta^i - \delta^{i-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left|\delta^i\right|^2 - \left|\delta^{i-1}\right|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left|\delta^{n-1}\right|^2 - \left|\delta^0\right|^2\right),\end{aligned}$$

on obtient alors

$$\int_0^T \left(\ddot{\tilde{u}}_n(t), \dot{\bar{u}}_n(t)\right) dt = \frac{1}{2}\left(\left|\dot{\tilde{u}}_n(T)\right|^2 - \left|\tilde{u}_1\right|^2\right).$$

comme $\left(\dot{\tilde{u}}_n(t)\right)_n$ converge faiblement vers $\dot{u}(t)$ dans H, pour tout $t \in [0, T]$, et par (2.44) on a

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^T \left(\ddot{\tilde{u}}_n(t), \dot{\bar{u}}_n(t)\right) dt \geq \frac{1}{2}\left|\dot{u}(T)\right|^2 - \frac{1}{2}\left|u_1\right|^2 = \int_0^T \left(\ddot{u}(t), \dot{u}(t)\right) dt \tag{2.45}$$

On a la relation suivante pour la forme bilinéaire a

$$\begin{aligned}&\int_0^T a\left(u_n, \dot{\bar{u}}_n\right) dt = \int_0^{t^1} a\left(u_n, \dot{\bar{u}}_n\right) dt + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{t^i}^{t^{i+1}} a\left(u_n, \dot{\bar{u}}_n\right) dt \\ &= \Delta t\ a\left(u^1, \delta^0\right) + \Delta t\sum_{i=1}^{n-1} a\left(u^{i+1}, \frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2\Delta t}\right) dt \\ &= \Delta t\ a\left(u^1, \delta^0\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} a\left(u^{i+1}, u^{i+1} - u^{i-1}\right) dt \\ &\geq \Delta t\ a\left(u^1, \delta^0\right) + \frac{1}{4}a\left(u^n, u^n\right) + \frac{1}{4}a\left(u^{n-1}, u^{n-1}\right) - \frac{1}{4}a\left(u^1, u^1\right) - \frac{1}{4}a\left(u^0, u^0\right),\end{aligned}$$

comme $u^{i-1} = u^i - \Delta t\ \delta^{n-1}$ et $u^1 = u^0 + \Delta t\ \delta^0$,

nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^T a\left(u_n, \dot{\bar{u}}_n\right) dt \geq \frac{1}{2}a\left(u^n, u^n\right) - \frac{1}{2}a\left(u_0, u_0\right) - \frac{\Delta t}{2}\left(a\left(u^n, \delta^{n-1}\right) - a\left(u_0, \delta^0\right)\right) \\ + \frac{\Delta t^2}{4}\left(a\left(\delta^{n-1}, \delta^{n-1}\right) - a\left(\delta^0, \delta^0\right)\right).\end{aligned}$$

D'après (2.44) et comme $u_n(T) = u^n$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\int_0^T a\left(u_n, \dot{\bar{u}}_n\right) dt &\geq \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}a\left(u_n(t), u_n(t)\right) - \frac{1}{2}a\left(u_n(0), u_n(0)\right)\right) \\ &\geq \frac{1}{2}a\left(u(T), u(T)\right) - \frac{1}{2}a\left(u_0, u_0\right) = \int_0^T a\left(u, \dot{u}\right) dt\end{aligned}$$

Enfin on écrit

$$\liminf_{n\to\infty}\int_0^T a\left(u_n, \dot{\bar{u}}_n\right) dt \geq \int_0^T a\left(u, \dot{u}\right) dt \tag{2.46}$$

On peut démontrer que La fonctionnelle $v \longrightarrow \int_0^T b(v,v)\,dt$ est convexe sur $L^2(0,T;V)$.

Nous voulons demontrer pour tout v et w de $L^2(0,T;V)$ et $\alpha \in [0,1]$

$$\int_0^T b(\alpha v + (1-\alpha)w, \alpha v + (1-\alpha)w)\,dt \leq \alpha \int_0^T b(v,v)\,dt + (1-\alpha)\int_0^T b(w,w)\,dt$$

comme b est bilinéaire et symétrique on a

$$\begin{aligned}&\int_0^T b(\alpha v + (1-\alpha)w, \alpha v + (1-\alpha)w)\,dt = \alpha^2 \int_0^T b(v,v)\,dt \\ &\quad + (1-\alpha)^2 \int_0^T b(w,w)\,dt + 2\alpha(1-\alpha)\int_0^T b(v,w)\,dt\end{aligned}$$

nous voulons démontrer

$$\begin{aligned}&\alpha^2 \int_0^T b(v,v)\,dt + (1-\alpha)^2 \int_0^T b(w,w)\,dt + 2\alpha(1-\alpha)\int_0^T b(v,w)\,dt \\ &\leq \alpha \int_0^T b(v,v)\,dt \ + (1-\alpha)\int_0^T b(w,w)\,dt\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}&\alpha^2 \int_0^T b(v,v)\,dt + (1-\alpha)^2 \int_0^T b(w,w)\,dt + 2\alpha(1-\alpha)\int_0^T b(v,w)\,dt \\ &- \alpha \int_0^T b(v,v)\,dt \ - (1-\alpha)\int_0^T b(w,w)\,dt \\ &= \left(\alpha^2 - \alpha\right)\int_0^T b(v,v)\,dt + \left(\alpha^2-\alpha\right)\int_0^T b(w,w)\,dt - 2\left(\alpha^2-\alpha\right)\int_0^T b(v,w)\,dt \\ &= \left(\alpha^2-\alpha\right)\left[\int_0^T \hat{a}(v,v)\,dt + \int_0^T b(w,w)\,dt - 2\int_0^T b(v,w)\,dt\right]\end{aligned}$$

et comme $b(v,w) \leq b(v,v)^{\frac{1}{2}}\, b(w,w)^{\frac{1}{2}}$ et $\alpha^2 - \alpha \leq 0$ on peut écrire l'égalité précédente comme suit

$$\left\{\begin{aligned}&\left(\alpha^2-\alpha\right)\left[\int_0^T b(v,v)\,dt + \int_0^T b(w,w)\,dt - 2\int_0^T b(v,w)\,dt\right] \\ &\leq \left(\alpha^2-\alpha\right)\left[\int_0^T \left(b(v,v) + b(w,w) - 2\left[b(v,v)\right]^{\frac{1}{2}}\left[b(w,w)\right]^{\frac{1}{2}}\right)dt\right] \\ &= \left(\alpha^2-\alpha\right)\int_0^T \left(b(v,v)^{\frac{1}{2}} + b(w,w)^{\frac{1}{2}}\right)^2 dt \leq 0\end{aligned}\right.$$

qui implique que La fonctionnelle $v \longrightarrow \displaystyle\int_0^T b(v,v)\,dt$ est convexe, et encore on démontre que $v \longrightarrow \displaystyle\int_0^T b(v,v)\,dt$ est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement.

D'après (2.43) et (2.44) on resulte que $\dot{\bar{u}}_n(t) \rightharpoonup \dot{u}(t)$ dans V ,

on a
$$\int_0^T b\left(\dot{\bar{u}}_n - \dot{u}(t), \dot{\bar{u}}_n - \dot{u}(t)\right) dt \geq 0,$$
il s'ensuit
$$\int_0^T b\left(\dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right) dt \geq \int_0^T b\left(\dot{u}(t), \dot{\bar{u}}_n\right) dt + \int_0^T b\left(\dot{\bar{u}}_n, \dot{u}(t)\right) dt - \int_0^T b\left(\dot{u}(t), \dot{u}(t)\right) dt\ ,$$
Pour $v \in L^2(0,T;V)$, les applications $v \to \int_0^T b(v, \dot{u}(t))\, dt$, $v \to \int_0^T b(\dot{u}(t), v)\, dt$ sont linéaires et continues sur $L^2(0,T;V)$.

On passe à la limite inférieure dans l'inégalité précédente et comme
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T b\left(\dot{u}(t), \dot{\bar{u}}_n\right) dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T b\left(\dot{\bar{u}}_n, \dot{u}(t)\right) dt = \int_0^T b\left(\dot{u}(t), \dot{u}(t)\right) dt\ .$$
On obtient
$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^T b\left(\dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right) dt \geq \int_0^T b\left(\dot{u}(t), \dot{u}(t)\right) dt. \tag{2.47}$$

Lemme 2.5. L'inégalité suivante est vérifiée.
$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^T \phi_n\left(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right) dt \geq \int_0^T \phi_n\left(t, u, \dot{u}, \dot{u}\right) dt$$

Preuve

On a
$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left|\phi_n\left(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right) - \phi\left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right)\right| dt \\
&= \int_0^{t^1} \left|\phi_n\left(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right) - \phi\left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right)\right| dt \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t^i}^{t^{i+1}} \left|\phi_n\left(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right) - \phi\left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right)\right| dt
\end{aligned}$$
Sur intervalle $]t^i, t^{i+1}]$, $1 \leq i \leq n-1$, on a, comme $\phi(.,.,.,0) = 0$, on applique (2.32)
$$\begin{aligned}
\left|\phi_n\left(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right) - \phi\left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right)\right| &= |\phi\left(t^i, u^{i+1}, d^i, d^i\right) - \phi\left(t^i, u^{i+1}, u^{i+1}, d^i, 0\right) \\
&+\phi\left(t, \frac{u^i + u^{i+1}}{2} + \left(t - t^i\right)\delta^{i-1} + \frac{\left(t-t^i\right)^2}{2}\gamma^i, \delta^{i-1} + \left(t - t^i\right)\gamma^i, 0\right) \\
&-\phi\left(t, \frac{u^i + u^{i+1}}{2} + \left(t - t^i\right)\delta^{i-1} + \frac{\left(t-t^i\right)^2}{2}\gamma^i, \delta^{i-1} + \left(t - t^i\right)\gamma^i, d^i\right)\Bigg| \\
&\leq \eta\left(\left|t - t^i\right| + \left\|\frac{u^{i+1} - u^i}{2} + \frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2} - \left(t - t^i\right)\delta^{i-1} - \frac{\left(t-t^i\right)^2}{2}\gamma^i\right\|\right. \\
&\left. + \left|d^i - \delta^i - \left(t - t^i\right)\gamma^i\right|\right)\|d^i\|\ ,
\end{aligned}$$

on a

$$\frac{\Delta t}{2}\gamma^i = d^i - \delta^{i-1},\ \Delta t\delta^i = u^i - u^{i-1} \text{ et } \Delta t\gamma^i = \delta^i - \delta^{i-1}$$

On peut écrire l'inégalité précédente comme suit

$$\left|\phi_n\left(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right) - \phi\left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right)\right|$$

$$\leq \eta\left(\left|t-t^i\right| + \left\|\frac{\Delta t}{2}\delta^i + \Delta t d^i - \left(t-t^i\right)\delta^{i-1} - \frac{\left(t-t^i\right)^2}{2}\gamma^i\right\| + \left|\left(\tfrac{\Delta t}{2} - \left(t-t^i\right)\right)\gamma^i\right|\right)\left\|d^i\right\|$$

$$\leq \eta\left(\left|t-t^i\right| + \left\|\frac{\Delta t}{2}\ \delta^i + \Delta t d^i - \left(t-t^i\right)\delta^{i-1} - \frac{\left(t-t^i\right)^2}{2\Delta t}\left(\delta^i - \delta^{i-1}\right)\right\| + \left|\left(\frac{\Delta t}{2} - \left(t-t^i\right)\right)\gamma^i\right|\right)\left\|d^i\right\|$$

$$\leq \eta\left(\left|t-t^i\right| + \left\|\left(\frac{\Delta t}{2} - \frac{\left(t-t^i\right)^2}{2\Delta t}\right)\delta^i + \Delta t d^i - \left(t - t^i - \frac{\left(t-t^i\right)^2}{2\Delta t}\right)\delta^{i-1}\right\| + \left|\left(\frac{\Delta t}{2} - \left(t-t^i\right)\right)\gamma^i\right|\right)\left\|d^i\right\|$$

donc on a

$$\begin{aligned}\left|\phi_n\left(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right) - \phi\left(t, u_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right)\right| &\leq \eta\Delta t\left(1 + \frac{3}{2}\left\|\ \delta^i\right\| + \left\|d^i\right\| + \frac{3}{2}\left\|\ \delta^{i-1}\right\| + \frac{3}{2}\left|\gamma^i\right|\right)\left\|d^i\right\| \\ &\leq \eta\Delta t\left(1 + \frac{3}{2}c\ + c + \frac{3}{2}c + \frac{3}{2}\tilde{c}\right)c \\ &\leq c\prime\eta\Delta t\end{aligned}$$

où $c\prime = c\left(1 + 4c + \frac{1}{2}\tilde{c}\right)$ et $\tilde{c}$ est majorant de $\left\{\left|\gamma^i\right|; i = 1, ...n-1\right\}$

Par conséquent, pour $1 \leq i \leq n-1$,

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}}\left|\phi_n\left(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right) - \phi\left(t, u_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right)\right| dt \leq c'\eta\Delta t^2 \tag{2.48}$$

Par (2.31) nous avons sur l'intervalle $[0, t^1]$

$$\left|\phi_n\left(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right) - \phi\left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right)\right| = \left|\phi\left(0, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right) - \phi\left(t, u_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n\right)\right|$$

$$= \phi\left(0, u^1, \delta^0, \delta^0\right) - \phi\left(0, u^1, \delta^0, 0\right) + \phi\left(t, \frac{3u^0 - u^1}{2} + t\ \delta^0, \delta^0, 0\right) - \phi\left(t, \frac{3u^1 - u^1}{2} + t\ \delta^0, \delta^0, \delta^0\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \eta \left(|t| + \left\| u^1 - \frac{3u^0 - u^1}{2} - t\ \delta^0 \right\| + \left| \delta^0 - \delta^0 \right| \right) \left\| \delta^0 \right\| \\
&\leq \eta \left(|t| + \left\| 3 \left(\frac{u^1 - u^0}{2} \right) - t\ \delta^0 \right\| \right) \left\| \delta^0 \right\| \\
&\leq \eta \left(|t| + \left\| \left(\frac{3\Delta t}{2} - t \right)\ \delta^0 \right\| \right) \left\| \delta^0 \right\| \\
&\leq \eta \Delta t\ \left\| \delta^0 \right\| \left(1 + \frac{3}{2} \left\| \delta^0 \right\| \right) \\
&\leq \eta \Delta t\ c \left(1 + \frac{3}{2} c \right) \\
&\leq c'' \eta \Delta t
\end{aligned}
$$

où $c'' = c\left(1 + \frac{3}{2}c\right)$ et c est le majorant de $\left\|\delta^0\right\|$ et par conséquent

$$
\int_0^{t^1} \left| \phi_n \left(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n \right) - \phi \left(t, u_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n \right) \right| dt\ \leq c'' \eta \Delta t^{\ 2} \tag{2.49}
$$

d'où, d'après (2.48) et (2.49) nous obtenons

$$
\int_0^{T} \left| \phi_n \left(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n \right) - \phi \left(t, u_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n \right) \right| dt\ \leq c'' \eta T\ \Delta t.
$$

Comme $\phi\left(t, u, u, .\right)$ est convexe sur V est par (2.29) et (2.31) (avec $u_2 = v_2 = 0$)est continue Lipschitzienne sur V, en utilisant un résultat classique (voir [7]), il s'ensuit que

$\int_0^T \phi\left(t, u, u, .\right) dt$ est séquentiellement faiblement semi-continue sur $L^2\left(0, T; V\right)$.

Et comme $\left(\bar{u}_n\right)_n$ converge faiblement vers u dans $W^{1.2}\left(0, T; V\right)$ et $\left(\dot{\tilde{u}}_n\right)_n$ converge faiblement vers $\dot{u}$ dans $W^{1.2}\left(0, T; H\right)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \int_0^T \phi_n \left(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n \right) dt\ &\geq \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^T \phi_n \left(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n \right) - \phi_n \left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n \right) \right) dt \\
&+ \liminf_{n\to\infty} \int_0^T \phi \left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n \right) dt \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_0^T \phi_n \left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n \right) - \phi \left(t, u, \dot{u}, \dot{\bar{u}}_n \right) \right) dt \\
&+ \liminf_{n\to\infty} \int_0^T \phi \left(t, u, \dot{u}, \dot{\bar{u}}_n \right) dt \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_0^T \phi \left(t, u, \dot{u}, \dot{\bar{u}}_n \right) \\
&\geq \int_0^T \phi \left(t, u, \dot{u}, \dot{u} \right)
\end{aligned}
$$

Lemme 2.6. L'égalité suivante est vérifiée.

$$
\lim_{n\to\infty} \int_0^T \phi_n \left(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, v \right) dt = \int_0^T \phi\left(t, u, \dot{u}, v\right) dt \tag{2.50}
$$

Preuve

On a sur $t \in]t^i, t^{i+1}]$, $0 \le i \le n-1$

$\forall v \in L^2(0,T;V)$

$$\begin{aligned}\left|\phi_n\left(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, v\right) - \phi\left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, v\right)\right| &= \left|\phi\left(t^i, u_n, \dot{\bar{u}}_n, v\right) - \phi\left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, 0\right)\right. \\ &\quad \left. +\phi\left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, 0\right) - \phi\left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, v\right)\right. \\ &\le \eta\left(|t - t^i| + \left\|\tilde{u}_n - \dot{\tilde{u}}_n\right\| + \left|\tilde{u}_n - \dot{\tilde{u}}_n\right|\right)\|v\|,\end{aligned}$$

En integrant sur $[0.T]$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left|\phi_n\left(t, \bar{u}_n, \dot{\bar{u}}_n, v\right) - \phi\left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, v\right)\right| \\ &= \int_0^T \left|\phi\left(t^i, \bar{u}_n, \dot{\bar{u}}_n, v\right) - \phi\left(t^i, \bar{u}_n, \dot{\bar{u}}_n, 0\right) + \phi\left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, 0\right) - \phi\left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, v\right)\right| \\ &\le \eta\Delta t \textstyle\int_0^T \|v\|\, dt + \displaystyle\int_0^T \left(\|\bar{u}_n - \tilde{u}_n\| + \left|\dot{\bar{u}} - \dot{\tilde{u}}_n\right|\right)\|v\|\, dt.\end{aligned}$$

On utilise le lemme 2.4, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left|\phi_n\left(t, \bar{u}_n, \dot{\bar{u}}_n, v\right) - \phi\left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, v\right)\right| = 0 \quad \forall v \in L^2(0,T;V). \tag{2.51}$$

Ensuite, on utilise (2.31)

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left|\phi(t, u, \dot{u}, v)\, dt - \phi\left(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, v\right)\right| dt \\ &\le \eta_0 \int_0^T \left(|\beta(u - \tilde{u}_n)| + \left|\dot{u} - \dot{\tilde{u}}_n\right|\right)\|v\|\, dt \qquad \forall v \in L^2(0,T;V).\end{aligned} \tag{2.52}$$

On applique le théorème 1.13(Simon) avec $\mathcal{F} = \left(\dot{\tilde{u}}_n\right)_n$, $X = V,\ U = H, Y = H,\ p = 2.$ On sait que $\left(\dot{\tilde{u}}_n\right)_n$ est bornée dans $L^2(0,T;V)$ et $\left(\ddot{\tilde{u}}_n\right)_n$ est bornée dans $L^2(0,T;H)$ .On peut extraire une sous-suite notée encore $\left(\dot{\tilde{u}}_n\right)_n$ qui converge fortement vers $\dot{u}$ dans $L^2(0,T;H)$. On a vu aurapavant dans (2.44), que à une sous-suite près, $(\tilde{u}_n(t))_n$ converge faiblement vert $u(t)$ dans V, pour tout $t \in [0,T]$. Comme β faiblement continue sur V, $\beta(0) = 0$ et d'aprés (2.51) et (2.52) , d'où l'égalité (2.50) .

Lemme 2.7. Le problème $\mathcal{P}$ admet au plus une solution.

Preuve

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème $\mathcal{P}$. En remplaçant dans (2.34) la fonction test $v = \dot{u}_2$ puis par $\dot{u}_1$,en additionnant et on utilise (2.32), on a

$$\begin{aligned}
&(\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1, \dot{u}_2 - \dot{u}_1) + a\,(u_2 - u_1, \dot{u}_2 - \dot{u}_1) + b\,(\dot{u}_2 - \dot{u}_1, \dot{u}_2 - \dot{u}_1) \\
&\leq \phi\,(t, u_1, \dot{u}_1, \dot{u}_1) - \phi\,(t, u_1, \dot{u}_1, \dot{u}_2) + \phi\,(t, u_2, \dot{u}_2, \dot{u}_2) - \phi\,(t, u_2, \dot{u}_2, \dot{u}_1) \\
&\leq \eta\,(\|u_2 - u_1\| + |\dot{u}_2 - \dot{u}_1|)\,\|\dot{u}_2 - \dot{u}_1\|\,.
\end{aligned}$$

On intègre entre 0 et t. Comme les solutions $u_1$et u_2 ont les mêmes conditions initiales $u_1\,(0) = u_2\,(0)\,,\ \dot{u}_1\,(0) = \dot{u}_2\,(0)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,|\dot{u}_2 - \dot{u}|^2 + \frac{1}{2} a\,(u_2 - u_1, u_2 - u_1) + \int_0^t b\,(\dot{u}_2 - \dot{u}_1, \dot{u}_2 - \dot{u}_1)\,ds \\
&\leq \eta \int_0^t (\|u_2 - u_1\|\,\|\dot{u}_2 - \dot{u}_1\| + |\dot{u}_2 - \dot{u}_1|\,\|\dot{u}_2 - \dot{u}_1\|)\,ds
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Young avec une constante appropriée et on utilise la coercivité de a et b

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,|\dot{u}_2 - \dot{u}|^2 + \frac{A}{2}\,\|u_2 - u_1\|^2 + \frac{B}{2} \int_0^t \|\dot{u}_2 - \dot{u}_1\|^2\,ds \\
&\leq \frac{\eta^2}{8} \int_0^t \left(\|u_2 - u_1\|^2 + |\dot{u}_2 - \dot{u}_1|^2\right) ds.
\end{aligned}$$

On déduit

$$\frac{1}{2}\,|\dot{u}_2 - \dot{u}|^2 + \frac{A}{2}\,\|u_2 - u_1\|^2 \ \leq \frac{\eta^2}{8} \int_0^t \left(\|u_2 - u_1\|^2 + |\dot{u}_2 - \dot{u}_1|^2\right) ds.$$

On note par $\lambda = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{A}{2}\right)$.

En appliquant le corollaire1.2, pour $\phi\,(t) = \|u_2 - u_1\|^2 + |\dot{u}_2 - \dot{u}_1|^2$, $n\,(t) = \dfrac{2\eta^2}{8\lambda}$, on obtient $a = 0$.

Alors

$$\|u_2 - u_1\|^2 + |\dot{u}_2 - \dot{u}_1|^2 \leq 0.$$

On conclut que $u_1 = u_2$

Théorème 2.1. Sous les hypothèses on $u_0, u_1, L, (2.28) - (2.32)$ et la condition de compatibilité (2.33), il existe une solution unique du problème $\mathcal{P}$.

Preuve

On peut passer à la limite sur les termes linéaires dans (2.42) . En utilisant (2.46) , (2.47) et les lemmes 2.5 et 2.6, on obtient que $u \in \mathcal{K}$ est une solution du problème suivant:

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\ddot{u}, v - \dot{u}) + a(u, v - \dot{u}) + b(\dot{u}, v - \dot{u}) + \phi(t, u; \dot{u}, v) - \phi(t, u; \dot{u}, \dot{u})\, dt \\ &\geq \int_0^T \langle L, v - \dot{u} \rangle\, dt\ ,\ \forall v \in L^2(0, T; V)\,,\ u(0) = u_0,\ \dot{u}(0) = u_1 \end{aligned} \tag{2.53}$$

On peut prouver par le théorème de Lebesgue que, si u est une solution de (2.53) , alors elle est une solution du problème $\mathcal{P}$, donnée dans (2.34) , Réciproquement, si u est une solution du problème $\mathcal{P}$, alors elle est une solution de (2.53) . De plus, le résultat d'unicité vient du lemme 2.7.

2.3.5 Existence et unicité de problème pénalisé

On considére ici un problème auxiliaire pénalisé équivalent au problème P_2^ε correspondant à la décomposition précédante de Ω .

On définit l'application $\hat{\varphi}_\varepsilon : \hat{\mathbf{V}} \times \hat{\mathbf{V}} \longrightarrow \mathbb{R}$ par:

$$\hat{\varphi}_\varepsilon(\hat{u}, \hat{v}) = \varphi_\varepsilon\left(\Psi^{-1}\hat{u}, \Psi^{-1}\hat{v}\right), \forall \hat{u}, \hat{v} \in \hat{\mathbf{V}},$$

tels que v et w satisfont $\Psi v = \hat{v},\ \Psi w = \hat{w}$

Probléme $\hat{\mathbf{P}}_2^\varepsilon$.

Trouver $\hat{u}_\varepsilon = (u_\varepsilon^+, u_\varepsilon^-) \in W^{1,2}\left(0, T; \hat{\mathbf{V}}\right) \cap W^{2,2}\left(0, T; \hat{\mathbf{H}}\right)$ tel que $\hat{u}_\varepsilon(0) = u_0, \dot{\hat{u}}_\varepsilon(0) = u_1$ et

$$\begin{cases} \left(\ddot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{w} - \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right)_{\hat{\mathbf{H}}} + \hat{a}\left(\hat{u}_\varepsilon, \hat{w} - \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right) + \hat{b}\left(\dot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{w} - \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right) + \hat{\varphi}_\varepsilon\left(\hat{u}_\varepsilon, \hat{w} - \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right) \\ + \hat{J}\left(\hat{u}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{w}\right) - \hat{J}\left(\hat{u}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right) \geq \left\langle \hat{L}, \hat{w} - \dot{\hat{u}}_\varepsilon \right\rangle_{\hat{\mathbf{V}}}\ ,\ \forall \hat{w} \in \hat{V} \quad \text{p.p } t \in \left]0, T\right[\,. \end{cases} \tag{2.54}$$

Proposition2.3.

Les problèmes P_2^ε et $\hat{\mathrm{P}}_2^\varepsilon$ sont équivalents dans le sens suivant:

(i) Si u_ε est une solution de P_2^ε, alors $\hat{u}_\varepsilon = (u_\varepsilon^+, u_\varepsilon^-)$ est une solution de $\hat{\mathrm{P}}_2^\varepsilon$, où u_ε^+ et u_ε^- sont les restrictions de u_ε sur Ω^+et Ω^- .

(ii) Réciproquement si $\hat{u}_\varepsilon = (u_\varepsilon^+, u_\varepsilon^-)$ est une solution de $\hat{\mathrm{P}}_2^\varepsilon$, alors $u_\varepsilon \in V$, avec $u_\varepsilon = u_\varepsilon^+$ p.p sur Ω^+et $u_\varepsilon = u_\varepsilon^-$ p.p sur Ω^-, est une solution de P_2^ε.

Théorème2.2.

Sous les mêmes hypothèses de la partie 2.3.4, il existe une solution unique $\hat{u}_\varepsilon \in W^{1,2}\left(0,T;\hat{\mathbf{V}}\right)\cap W^{2,2}\left(0,T;\hat{\mathbf{H}}\right)$ au problème $\hat{\mathrm{P}}_2^\varepsilon$.

Preuve

On applique le théorème 2.1 à $H = \hat{\mathbf{H}}, V = \hat{\mathbf{V}},\ u_0 = \hat{u}_0,\ u_1 = \hat{u}_1,\ a = \hat{a}\ ,\ b = \hat{b},\ L = \hat{L}$, on définit ϕ par

$$\phi\left(\hat{u},\hat{v},\hat{w}\right) = \hat{\varphi}_\varepsilon\left(\hat{u},\hat{w}\right) + \hat{J}\left(\hat{u},\hat{v},\hat{w}\right),\ \forall \hat{u},\hat{v},\hat{w} \in \hat{\mathbf{V}},$$

et $\hat{a},\ \hat{b},\ \hat{L},\ \hat{J}$ sont donnés par (2.22). On applique le théorème 2.1 à $\hat{\mathbf{H}},\ \hat{\mathbf{V}}$, les formes $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont coercives par l'inégalité de Korn, car la frontière de Ω^α est Lipschitzienne et $mes\left(\Gamma_U^\alpha\right) > 0$, pour $\alpha = +,-$.

On a alors:

$$\exists A^\alpha, B^\alpha > 0,\ a^\alpha\left(v,v\right) \geq A^\alpha \left\|v\right\|_{V^\alpha}^2,\ b^\alpha\left(v,v\right) \geq B^\alpha \left\|v\right\|_{V^\alpha}^2,\ \forall v \in V^\alpha,\ \alpha = +,-,$$

et on obtient

$$\begin{cases} \hat{a}\left(\hat{v},\hat{v}\right) \geq \hat{A}\left\|\hat{v}\right\|_{\hat{\mathbf{V}}}^2 & \forall \hat{v} \in \hat{\mathbf{V}} \text{ où } \hat{A} = \min\left(A^+,A^-\right), \\ \hat{b}\left(\hat{v},\hat{v}\right) \geq \hat{B}\left\|\hat{v}\right\|_{\hat{\mathbf{V}}}^2 & \forall \hat{v} \in \hat{\mathbf{V}} \text{ où } \hat{B} = \min\left(B^+,B^-\right) \end{cases} \tag{2.55}$$

Pour tout $\hat{u} \in \hat{\mathbf{V}}$, l'application $\hat{\varphi}_\varepsilon\left(\hat{u},.\right)$ est linéaire sur $\hat{\mathbf{V}}$ et l'application $\hat{J}\left(\hat{u},\hat{v},.\right)$ est une semi-norme sur $\hat{\mathbf{V}}$ ce qui impliquent que ϕ satisfait les conditions (2.28) et (2.29).

Nous supposons que $\beta : \hat{\mathbf{V}} \to \mathbb{R}$

$$\beta\left(\hat{v}\right) = \left\|\left(\left[\hat{v}_N\right] - g\right)_+\right\|_{L^2(\Xi)} + \left|\hat{v}\right|_{\hat{\mathbf{H}}}\ , \forall \hat{v} \in \hat{\mathbf{V}}.$$

L'application β est continue faiblement, puisqu'elle contient un terme de compliance défini sur Ξ et la norme sur $\hat{\mathbf{H}}$. On a aussi la relation suivante pour $\hat{\varphi}_\varepsilon$, comme l'application $s \to (s-g)_+$est Lipschitz continue sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \exists \eta_\varepsilon > 0. \quad & \left|\hat{\varphi}_\varepsilon\left(\hat{u}_1,\hat{w}_1\right) - \hat{\varphi}_\varepsilon\left(\hat{u}_1,\hat{w}_2\right) + \hat{\varphi}_\varepsilon\left(\hat{u}_2,\hat{w}_2\right) - \hat{\varphi}_\varepsilon\left(\hat{u}_2,\hat{w}_1\right)\right| \\ & = \left|\hat{\varphi}_\varepsilon\left(\hat{u}_1,\hat{w}_1 - \hat{w}_2\right) - \hat{\varphi}_\varepsilon\left(\hat{u}_2,\hat{w}_1 - \hat{w}_2\right)\right| \\ & \leq \eta_\varepsilon \left\|\hat{u}_1 - \hat{u}_2\right\|_{\hat{\mathbf{V}}} \left\|\hat{w}_2 - \hat{w}_1\right\|_{\hat{\mathbf{V}}} \quad \forall \hat{u}_{1,2}\ , \hat{w}_{1,2} \in \hat{\mathbf{V}}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

En utilisant la propriété (2.17) on peut établir l'éstimation suivante:

$$\begin{aligned} \exists \eta_1 > 0. \quad & \left|\hat{J}\left(\hat{u}_1,\hat{v}_1,\hat{w}_1\right) - \hat{J}\left(\hat{u}_1,\hat{v}_1,\hat{w}_2\right) + \hat{J}\left(\hat{u}_2,\hat{v}_2,\hat{w}_2\right) - \hat{J}\left(\hat{u}_2,\hat{v}_2,\hat{w}_1\right)\right| \\ & \leq \left(\left|\hat{u}_1 - \hat{u}_2\right|_{\hat{\mathbf{H}}} + \left|\hat{v}_1 - \hat{v}_2\right|_{\hat{\mathbf{H}}}\right)\left\|\hat{w}_2 - \hat{w}_1\right\|_{\hat{\mathbf{V}}} \quad \forall \hat{u}_{1,2}\ , \hat{v}_{1,2}, \hat{w}_{1,2} \in \hat{\mathbf{V}} \end{aligned} \tag{2.57}$$

L'application ϕ satisfait (2.30) et (2.31). Les relations (2.56) et (2.57) de $\hat{\varphi}_\varepsilon$ et $\hat{J}$ permettent de vérifier la propriété (2.32) pour ϕ. La condition de compatibilité (2.18) entraîne (2.33). Ainsi, le problème $\hat{\mathrm{P}}_2^\varepsilon$ possède une solution unique $\hat{u}_\varepsilon \in W^{1,2}\left(0,T;\hat{\mathbf{V}}\right) \cap W^{2,2}\left(0,T;\hat{\mathbf{H}}\right)$.

Le résultat pour le problème P_2^ε est déduit de la proposition 2.3

2.3.6 Existence d'une solution au problème de contact unilatéral

Nous montrons dans ce paragraphe l'existence d'une solution au problème de contact unilatéral. Dans un premier temps, nous avons besoin d'obtenir des estimations sur les solutions pénalisées $\hat{u}_\varepsilon$ du problème $\hat{\mathrm{P}}_2^\varepsilon$.

Théorème2.3. Il existe une solution au problème P_1.

Preuve

On commençe par obtenir des estimations sur les solutions pénalisées.

Estimations sur les solutions pénalisées

On utilise plusieurs estimations sur la solution $\hat{u}_\varepsilon$ de (2.26), pour passer à la limite et obtenir une solution de (2.19)

On remplace $\hat{w}$ par 0 dans (2.54), on obtient

$$\begin{array}{l}\left(\ddot{\hat{u}}_\varepsilon, -\dot{\hat{u}}_\varepsilon\right)_{\hat{\mathbf{H}}} + \hat{a}\left(\hat{u}_\varepsilon, -\dot{\hat{u}}_\varepsilon\right) + \hat{b}\left(\dot{\hat{u}}_\varepsilon, -\dot{\hat{u}}_\varepsilon\right) + \hat{\phi}_\varepsilon\left(\hat{u}_\varepsilon, -\dot{\hat{u}}_\varepsilon\right) \\ +\hat{J}\left(\hat{u}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon, 0\right) - \hat{J}\left(\hat{u}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right) \geq \left\langle \hat{L}, -\dot{\hat{u}}_\varepsilon\right\rangle_{\hat{\mathbf{V}}}.\end{array}$$

Et comme $\hat{J}\left(\hat{u}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right) \geq 0$ et $\hat{J}\left(\hat{u}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon, 0\right) = 0$, nous avons

$$\left(\ddot{\hat{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right)_{\hat{\mathbf{H}}} + \hat{a}\left(\hat{u}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right) + \hat{b}\left(\dot{\hat{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right) + \hat{\phi}_\varepsilon\left(\hat{u}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right) \leq \left\langle \hat{L}, \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right\rangle_{\hat{\mathbf{V}}}.$$

Et en intégrant de 0 à $t \in]0,T[$, nous avons

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^t \left(\ddot{\hat{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right)_{\hat{\mathbf{H}}} ds + \int_0^t \hat{a}\left(\hat{u}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right) ds + \int_0^t \hat{b}\left(\dot{\hat{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right) ds \\ \displaystyle +\int_0^t \hat{\phi}_\varepsilon\left(\hat{u}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right) ds \leq \int_0^t \left\langle \hat{L}, \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right\rangle_{\hat{\mathbf{V}}} ds\end{array}\right.$$

Comme $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont des formes bilinéaires symétriques, g est indépendant du temps et $\hat{u}_0 \in \hat{\mathbf{K}}$, on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left|\dot{\hat{u}}_\varepsilon(t)\right|^2_{\hat{\mathbf{H}}} + \dfrac{1}{2}\hat{a}\left(\hat{u}_\varepsilon(t), \hat{u}_\varepsilon(t)\right) + \displaystyle\int_0^t \hat{b}\left(\dot{\hat{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right) ds + \dfrac{1}{2\varepsilon}\left\|\left([\hat{u}_{\varepsilon N}(t)] - g\right)_+\right\|^2_{L^2(\Xi)} \\ \leq \displaystyle\int_0^t \left\langle \hat{L}, \dot{\hat{u}}_\varepsilon \right\rangle_{\hat{\mathbf{V}}} ds + \dfrac{1}{2}\left|\hat{u}_1\right|^2_{\hat{\mathbf{H}}} + \dfrac{1}{2}a\left(\hat{u}_0, \hat{u}_0\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left|\dot{\hat{u}}_\varepsilon(t)\right|^2_{\hat{\mathbf{H}}} + \dfrac{1}{2}\hat{A}\left\| \hat{u}_\varepsilon(t)\right\|^2_{\hat{\mathbf{V}}} + \hat{B}\displaystyle\int_0^t \left\|\dot{\hat{u}}_\varepsilon(t)\right\|^2_{\hat{\mathbf{V}}} ds + \dfrac{1}{2\varepsilon}\left\|\left([\hat{u}_{\varepsilon N}(t)] - g\right)_+\right\|^2_{L^2(\Xi)} \\ \leq \displaystyle\int_0^t \left\langle \hat{L}, \dot{\hat{u}}_\varepsilon \right\rangle_{\hat{\mathbf{V}}} ds + \dfrac{1}{2}\left|\hat{u}_1\right|^2_{\hat{\mathbf{H}}} + \dfrac{1}{2}a\left(\hat{u}_0, \hat{u}_0\right), \end{cases} \tag{2.58}$$

nous obtenons pour presque tout $t \in \,]0, T[\,$, et d'après l'inégalité du Young on a

$$\int_0^t \left\langle \hat{L}, \dot{\hat{u}}_\varepsilon \right\rangle_{\hat{\mathbf{V}}} ds \leq \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\hat{L}\right\|^2_{\hat{V}} ds + \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\dot{\hat{u}}_\varepsilon\right\|^2_{\hat{V}} ds$$

En utilisant (2.55), il existe une constante positive M indépendante de ε tel que pour presque tout $t \in \,]0, T[\,$, les estimations suivantes sur $\hat{u}_\varepsilon$ vérifient

$$\begin{cases} (1)\ \|\hat{u}_\varepsilon\|_{\hat{V}} \leq M\ ,\ (2)\left|\dot{\hat{u}}_\varepsilon\right|_{\hat{\mathbf{H}}} \leq M \quad \text{p.p. } t \in \,]0, T[\\ (3)\displaystyle\int_0^T \left\|\dot{\hat{u}}_\varepsilon\right\|^2_{\hat{\mathbf{V}}} ds \leq M\ ,(4)\ \left\|\left([\hat{u}_{\varepsilon N}] - g\right)_+\right\|^2_{L^2(\Xi)} \leq M\sqrt{\varepsilon} \text{ p.p. } t \in \,]0, T[\end{cases} \tag{2.59}$$

En utilisant (2.54), on obtient pour tout $\hat{\varphi} = (\varphi^+, \varphi^-) \in L^2\left(0, T; \left[H_0^1(\Omega^+)\right]^d \times \left[H_0^1(\Omega^-)\right]^d\right)$

$$\int_0^T \left(\ddot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{\varphi}\right)_{\hat{\mathbf{H}}} ds + \int_0^T \hat{a}\left(\hat{u}_\varepsilon, \hat{\varphi}\right) ds + \int_0^T \hat{b}\left(\dot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{\varphi}\right) ds \leq \int_0^T \left(\hat{f}, \hat{\varphi}\right)_{\hat{\mathbf{H}}} ds \tag{2.60}$$

On démontre que $\ddot{\hat{u}}_\varepsilon$est borné dans $L^2\left(0, T; \mathbf{H}^{-1}\right)$, d'après (2.60) on a

$$\int_0^T \left(\ddot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{\varphi}\right)_{\hat{\mathbf{H}}} ds \ \leq -\int_0^T \hat{a}\left(\hat{u}_\varepsilon, \hat{\varphi}\right) ds - \int_0^T \hat{b}\left(\dot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{\varphi}\right) ds + \int_0^T \left(\hat{f}, \hat{\varphi}\right)_{\hat{\mathbf{H}}} ds.$$

Comme $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont continues, et en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwartz et Hôlder, on peut écrire

$$\int_0^T \left(\ddot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{\varphi}\right)_{\hat{\mathbf{H}}} ds \ \leq m_a\int_0^T \left\|\hat{u}_\varepsilon\right\| \left\|\hat{\varphi}\right\| ds + m_b\int_0^T \left\|\dot{\hat{u}}_\varepsilon\right\| \left\|\hat{\varphi}\right\| ds + \int_0^T \left\|f\right\| \left\|\hat{\varphi}\right\| ds.$$

$$\leq m_a \left(\int_0^T \|\hat{u}_\varepsilon\|^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_0^T \|\hat{\varphi}\|^2 ds\right)^{1/2}$$
$$+ m_b \left(\int_0^T \left\|\dot{\hat{u}}_\varepsilon\right\|^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_0^T \|\hat{\varphi}\|^2 ds\right)^{1/2} + c\left(\int_0^T \|\hat{\varphi}\|^2 ds\right)^{1/2}$$
$$\leq \left[m_a \left(\int_0^T \|\hat{u}_\varepsilon\|^2 ds\right)^{1/2} + m_b \left(\int_0^T \left\|\dot{\hat{u}}_\varepsilon\right\|^2 ds\right)^{1/2} + \ c \ \right] \left(\int_0^T \|\hat{\varphi}\|^2 ds\right)^{1/2} ,$$

d'après$(2.59)_2$ et $(2.59)_3$, $\hat{u}_\varepsilon$ et $\dot{\hat{u}}_\varepsilon$sont bornés, on obtient

$$\int_0^T \left(\ddot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{\varphi}\right)_{\hat{\mathbf{H}}} ds \ \leq M \ \|\hat{\varphi}\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega^+)\times H_0^1(\Omega^-)\right)} ,$$

qui implique

$$\frac{\int_0^T \left(\ddot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{\varphi}\right)_{\hat{\mathbf{H}}} ds}{\|\hat{\varphi}\|_{L^2\left(0,T;L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega^+)\times H_0^1(\Omega^-)\right)\right)}} \ \leq M \ ,$$

pour $\hat{\varphi} \in L^2\left(0,T;H_0^1\left(\Omega^+\right)\times H_0^1\left(\Omega^-\right)\right)$

$$\sup \frac{\int_0^T \left(\ddot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{\varphi}\right)_{\hat{\mathbf{H}}} ds}{\|\hat{\varphi}\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega^+)\times H_0^1(\Omega^-)\right)}} \ \leq M,$$

donc

$$\left\|\ddot{\hat{u}}_\varepsilon\right\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1})} \leq M \ ,$$

par conséquent le terme $\ddot{\hat{u}}_\varepsilon$est borné dans $L^2\left(0,T;\mathbf{H}^{-1}\right)$ par un constant indépendant de ε.

Pour tout $\hat{v} \in L^\infty\left(0,T;\hat{\mathbf{V}}\right) \cap W^{1,2}\left(0,T;\hat{\mathbf{H}}\right)$ tel que $\hat{v}(t) \in \hat{\mathbf{K}}$ $p.p.$ $t \in]0,T[$, on choisit dans (2.54) $\hat{w} = \ \dot{\hat{u}}_\varepsilon + \hat{v} - \hat{u}_\varepsilon$,ensuite, on intègre par rapport à $t \in]0,T[$, pour obtenir

$$\begin{cases} \int_0^T \left(\ddot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{v} - \hat{u}_\varepsilon\right)_{\hat{\mathbf{H}}} dt + \int_0^T \hat{a}\left(\hat{u}_\varepsilon, \hat{v} - \hat{u}_\varepsilon\right) dt + \int_0^T \hat{b}\left(\dot{\hat{u}}, \hat{v} - \hat{u}_\varepsilon\right) dt \\ + \int_0^T \hat{\phi}_\varepsilon\left(\hat{u}_\varepsilon, \hat{v} - \hat{u}_\varepsilon\right) dt + \int_0^T \hat{J}\left(\hat{u}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon + \hat{v} - \hat{u}_\varepsilon\right) dt - \int_0^T \hat{J}\left(\hat{u}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right) dt \\ \geq \int_0^T \left\langle \hat{L}, \hat{v} - \hat{u}_\varepsilon \right\rangle_{\hat{\mathbf{V}}} dt \ \text{ avec } \ \hat{u}_\varepsilon(0) = \hat{u}_0, \quad \dot{\hat{u}}_\varepsilon = \hat{u}_1. \end{cases} \tag{2.61}$$

Par un argument de monotonie, on obtient

$$\int_0^T \hat{\phi}_\varepsilon\left(\hat{u}_\varepsilon, \hat{v} - \hat{u}_\varepsilon\right) dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \int_\Xi \left([\hat{u}_{\varepsilon N}] - g\right)_+ \left([\hat{v}_N] - g\right) ds dt$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \int_\Xi \left([\hat{u}_{\varepsilon N}] - g\right)_+ \left([\hat{u}_{\varepsilon N}] - g\right) ds dt \leq 0$$

Par l'intégration par partie du terme d'accélération dans (2.61) et en utilisant l'argument de monotonie précédent, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(\dot{\hat{u}}_\varepsilon(T), \hat{v}(T) - \hat{u}_\varepsilon(T)\right)_{\hat{H}} - \left(\hat{u}_1, \hat{v}\,(0) - \hat{u}_0\right) \\
&+\int_0^T \left\{-\left(\dot{\hat{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{v}}\right)_{\hat{H}} + \hat{a}\left(\hat{u}_\varepsilon, \hat{v}\right) + \hat{b}\left(\dot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{v}\right) + \hat{J}\left(\hat{u}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{v} + \dot{\hat{u}}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon\right)\right\} dt \\
&\geq \int_0^T \left\langle \hat{L}, \hat{v} - \hat{u}_\varepsilon \right\rangle dt + \int_0^T \left\{-\left|\dot{\hat{u}}_\varepsilon\right|^2 + \hat{a}\left(\hat{u}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon\right) + \hat{b}\left(\dot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon\right) + \hat{J}\left(\hat{u}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon\right)\right\} dt \\
&\forall \hat{v} \in L^\infty\left(0, T; \hat{\mathbf{V}}\right) \cap W^{1,2}\left(0, T; \hat{\mathbf{H}}\right), \hat{v}\,(t) \in \hat{\mathbf{K}} \;\; p.p\; t \in \left]0, T\right[, \hat{u}_\varepsilon\,(0) = \hat{u}_0,\; \dot{\hat{u}}_\varepsilon\,(0) = \hat{u}_1.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

On effectue ensuite plusieurs passages à la limite.

Passages à la limite

D'après le théorème1.10, et les estimations $(2.59)_1$ et $(2.59)_2$, sachant que $\hat{\mathbf{V}}$ est un sous-espace fermé de $V^+ \times V^-$, il existe $\hat{u}$ où $\hat{u} = (u^+, u^-)$, à une sous-suite près notée encore $\hat{u}_\varepsilon$ tel que

$$\begin{aligned}
&\hat{u}_\varepsilon \rightharpoonup \hat{u} \quad \text{faible } * \text{ dans } L^\infty\left(0, T; \hat{\mathbf{V}}\right) \\
&\dot{\hat{u}}_\varepsilon \rightharpoonup \dot{\hat{u}} \text{ faible } * \text{ dans } L^\infty\left(0, T; \hat{\mathbf{H}}\right).
\end{aligned} \tag{2.63}$$

D'après le théorème1.9, et les estimations $(2.59)_3$ et l'estimation précédente sur l'accélération, on peut extraire une sous-suite notée encore $\hat{u}_\varepsilon$ où $\hat{u} = (u^+, u^-)$ tel que

$$\dot{\hat{u}}_\varepsilon \rightharpoonup \dot{\hat{u}} \text{ faible dans } L^2\left(0, T; \hat{\mathbf{V}}\right) \text{ et } \ddot{\hat{u}}_\varepsilon \rightharpoonup \ddot{\hat{u}} \text{ faible dans } L^2\left(0, T; \mathbf{H}^{-1}\right). \tag{2.64}$$

Par les estimations (2.63) et (2.64) on peut facilement passer à la limite dans (2.62) pour les termes linéaires.

Pour passer à la limite dans les termes nonlinéaires , nous avons besoin de la compacité du fait de théorème 1.13, comme $\partial\,\Omega^\alpha$ est Lipschitz continu, les injections de V^α dans $\mathbf{H}^\alpha$, de V^α dans $\left[H^{1/2}\left(\Omega^\alpha\right)\right]^d$ et de $\mathbf{H}^\alpha$ dans $\left[H^{-1/2}\left(\Omega^\alpha\right)\right]^d$ sont compactes. On peut appliquer le théorème1.13 de J. Simon [46] avec

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F} = \left(\dot{\hat{u}}_\varepsilon\right)_\varepsilon, \; X = \hat{\mathbf{V}},\; U = \hat{\mathbf{H}},\; Y = \mathbf{H}^{-1},\; p = 2\;, \\
&\mathcal{F} = \left(\hat{u}_\varepsilon\right)_\varepsilon, \; X = \hat{\mathbf{V}},\; U = \mathbf{H}^{1/2},\; Y = \hat{\mathbf{H}},\; r = 2 \\
&\mathcal{F} = \left(\dot{\hat{u}}_\varepsilon\right)_\varepsilon, \; X = \hat{\mathbf{H}},\; U = \mathbf{H}^{-1/2}, Y = \mathbf{H}^{-1}, r = 2.
\end{aligned}$$

On obtient à une sous-suite près,

$$\begin{cases} \dot{\hat{u}}_\varepsilon \to \dot{\hat{u}} \text{ sur } L^2\left(0,T;\hat{\mathbf{H}}\right),\ \hat{u}_\varepsilon \to \hat{u} \text{ sur } C\left([0,T];\mathbf{H}^{1/2}\right), \\ \dot{\hat{u}}_\varepsilon \to \dot{\hat{u}} \text{ sur } C\left([0,T];\mathbf{H}^{-1/2}\right). \end{cases} \tag{2.65}$$

Par conséquent en appliquant la proposition 1.5, il vient

$$\left(\dot{\hat{u}}_\varepsilon(T), \hat{v}(T) - \hat{u}_\varepsilon(T)\right)_{\hat{H}} \to \left\langle \dot{\hat{u}}(T), \hat{v}(T) - \hat{u}(T)\right\rangle_{-1/2,1/2}. \tag{2.66}$$

La fonctionnelle $\hat{v} \longrightarrow \int_0^T \hat{a}(\hat{v},\hat{v})\,dt$ est convexe et continue sur $L^2\left(0,T;\hat{\mathbf{V}}\right)$, de même manière utilisée pour $v \longrightarrow \int_0^T b(v,v)\,dt$, on résulte que $\hat{v} \longrightarrow \int_0^T \hat{a}(\hat{v},\hat{v})\,dt$ est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement sur $L^2\left(0,T;\hat{V}\right)$, ce qui entraîne

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \hat{a}(\hat{u}_\varepsilon,\hat{u}_\varepsilon)\,dt \geq \int_0^T \hat{a}(\hat{u},\hat{u})\,dt. \tag{2.67}$$

On a vu auparavant dans (2.63) et (2.64) que

$$\hat{u}_\varepsilon \rightharpoonup \hat{u} \quad \text{faible} * \text{dans } L^\infty\left(0,T;\hat{\mathbf{V}}\right),\ \dot{\hat{u}}_\varepsilon \rightharpoonup \dot{\hat{u}} \text{ faible dans } L^2\left(0,T;\hat{\mathbf{V}}\right),$$

qui impliquent

$$\hat{u}_\varepsilon \rightharpoonup \hat{u} \quad \text{faible dans } L^2\left(0,T;\hat{\mathbf{V}}\right).$$

Comme $W^{1,2}\left(0,T;\hat{\mathbf{V}}\right) \subset C\left(0,T;\hat{\mathbf{V}}\right)$, on en déduit que $(\hat{u}_\varepsilon(t))_\varepsilon$est bornée dans $\hat{\mathbf{V}}$ indépendamment de ε, pour tout $t \in [0,T]$. Soit E un sous-ensemble dénombrable dense dans $[0,T]$. Par un procédé diagonale, on peut extraire une sous-suite, encore notée par $(\hat{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ tel que pour tout $t \in E$, $(\hat{u}_\varepsilon(t))_\varepsilon$ converge faiblement vers $\hat{u}(t)$ et par un argument similaire comme dans [11, 14] on obtient

$$\hat{u}_\varepsilon(t) \rightharpoonup \hat{u}(t) \text{ faible dans } \hat{\mathbf{V}},\ \forall t \in [0,T]. \tag{2.68}$$

Comme $\hat{v} \longrightarrow \hat{b}(\hat{v},\hat{v})$ est convexe et continue sur $\hat{\mathbf{V}}$, il est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement sur $\hat{\mathbf{V}}$, ainsi, comme $\hat{u}_\varepsilon(t) \rightharpoonup \hat{u}(t)$ faible dans $\hat{\mathbf{V}}$, on obtient

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \hat{b}\left(\dot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon\right) dt &= \liminf_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{2}\hat{b}(\hat{u}_\varepsilon(T), \hat{u}_\varepsilon(T)) - \frac{1}{2}\hat{b}(\hat{u}_0,\hat{u}_0)\right) \\ \geq \frac{1}{2}\hat{b}(\hat{u}(T),\hat{u}(T)) - \frac{1}{2}\hat{b}(\hat{u}_0,\hat{u}_0) &= \int_0^T \hat{b}\left(\dot{\hat{u}},,\hat{u}\right) dt. \end{aligned} \tag{2.69}$$

D'après (2.68) , et comme l'operateur de trace de $\hat{\mathbf{V}}$ dans $H^{1/2}(\Xi)$ est compacte, l'application $[.]_N$ définie de $\hat{\mathbf{V}}$ dans $H^{1/2}(\Xi)$ est compacte, ce qui entraîne $[\hat{u}_{\varepsilon N}](t) \to [\hat{u}_N](t)$ dans $L^2(\Xi)$, et comme l'injection de $H^{1/2}(\Xi)$ dans $L^2(\Xi)$ est compacte, on obtient alors à une sous-suite près $[\hat{u}_{\varepsilon N}](t) \to [\hat{u}_N](t)$ dans $L^2(\Xi)$, $\forall\, t \in [0,T]$.

Par l'estimation $(2.59)_4$, on obtient

$$0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\| ([\hat{u}_{\varepsilon N}] - g)_+ \right\|_{L^2(\Xi)} = \left\| ([\hat{u}_N] - g)_+ \right\|_{L^2(\Xi)} \quad \forall t \in [0,T].$$

Par conséquent $[\hat{u}_{\varepsilon N}] \leq g$ p.p sur Ξ et pour tout $t \in [0,T]$, qui implique $\hat{u} \in \hat{K}$ pour tout $t \in [0,T]$.

Pour passer à la limite dans le terme de frottement, on applique le théorème 1.13, aux suite $\mathcal{F} = \left(\dot{\hat{u}}\right)_\varepsilon$, $X = \hat{\mathbf{V}}$, $U = \mathbf{H}^{1-\delta}$ avec $\frac{1}{2} > \delta > 0$, $Y = \mathbf{H}^{-1}$, $p = 2$ de telle sorte que

$$\hat{u}_\varepsilon \to \hat{u} \text{ dans } W^{1,2}\left(0,T;\mathbf{H}^{1-\delta}\right).$$

Comme l'opérateur trace de $\left[H^{1-\delta}(\Omega^\alpha)\right]^d$ dans $\left[L^2(\partial\Omega^\alpha)\right]^d$ est compacte pour $\frac{1}{2} > \delta > 0$, l'application $[.]_T$ définie de $\mathbf{H}^{1-\delta}$ dans $\left[L^2(\Xi)\right]^d$ est compacte, ce qui entraîne

$$[\hat{u}_{\varepsilon T}] \to [\hat{u}_T] \text{ dans } W^{1,2}\left(0,T;\left[L^2(\Xi)\right]^d\right) \tag{2.70}$$

Par les arguments précédents $(2.59)_3$, (2.70) et la propriété (2.17) , on peut passer à lim inf dans (2.62) pour obtenir (2.24). L'utilisation d'une loi de frottement non local facilite le passage à la limite. Ainsi, u défini par $u = u^+$ sur Ω^+ et $u = u^-$ sur Ω^- est une solution de (2.19) .■

L'existence d'une solution au cas purement élastique (i.e avec $\mathcal{B} = 0$) dans un domaine non symétrique demeure un problème ouvert à notre connaissance, même sans frottement.

Dans le cas d'un matériau de Kelvin-Voigt, le terme de viscosité apporte une régularité supplémentaire sur la vitesse qui permet d'utiliser des résultats de compacité classiques. Pour étudier le problème élastique, il manque une estimation sur la vitesse dans $L^2(0,T;V)$. On peut imposer cette condition et tavailler dans un borné. La preuve de l'existence d'une solution dans un ensemble borné n'est pas directe. Elle peut s'inspirer de celle utiliser dans le troixème chapitre.

Physiquement, imposer une borne sur la viresse n'est pas surprenant. Ce qui peut étonner, c'est la présence d'une borne pour l'accélération dans $L^2\left(0,T;\left[H^{-1}(\Omega)\right]^d\right)$. En effet, pour les systèmes discrets, pour un point matériel situé près d'un obsatcle, il peut apparaître un saut de vitesses entre l'instant précédent le contact et celui suivant le contact. L'accélération n'est pas régulière alors. C'est l'intérêt d'utiliser des mesures différentielles.Pour les milieux continus, à notre connaissance, il n'existe pas de traveaux ayant utilisé des mesures différentielles, exepté celui de A. Petrov et M. schatzman [39] , dans les cas unidemensionnel.

Chapitre 3

Résultats d'existence pour un problème de contact dynamique en viscoélasticité

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux résultas d'existence et d'unicité d'un problème dynamique de contact unilatéral avec frottement de Tresca entre deux corps viscoélastiques. La méthode repose sur l'application des résultats d'existence et d'unicité d'une inéquation d'évolution abstraite présentés par Jeam-Marc Ricaud [42].

3.1 Formulation classique et variationnelle

On considère deux corps viscoélastiques suivant une lois de Kelvin-Voigt, qui occupent initialement les domaines bornés Ω^α, $\alpha = 1, 2$ de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2$ où $3)$ avec des frontières Lipschitziennes. Dans cette étude, on suppose les petites hypothéses de déformation.

Soient Γ_D^α , Γ_F^α et Γ_C trois parties disjointes suffisamment régulières de $\Gamma^\alpha = \partial\Omega^\alpha$ telles que $\Gamma^\alpha = \Gamma_D^\alpha \cup \Gamma_F^\alpha \cup \Gamma_C$ et $mes\,(\Gamma_D^\alpha) > 0$.

Nous supposons que les deux solides sont initialement en contact unilatéral avec frottement sur Γ_C qui est supposée être une zone de contact bornée.

Nous notons par $u^\alpha = (u_1^\alpha, ..., u_d^\alpha)$ le champ du déplacement, $\varepsilon^\alpha = (\varepsilon_{ij}(u^\alpha))$ le tenseur des déformations, et par $\sigma^\alpha = \left(\sigma_{ij}^\alpha\right)$ le tenseur des contraintes, et par $f = (f^1, f^2)$ et $F = (F^1, F^2)$ les forces volumiques et les tractions des corps donnés. Les déplacements et les vitesses initiaux des corps sont notés par u_0^α, u_1^α et un déplacement $u^\alpha = 0$ est prescrit sur Γ_D^α, $\alpha = 1,\ 2$.

Nous adoptons les notations suivantes pour les composantes normale et tangentiele du champ de déplacement pour le déplacement correspondent relatif et le champs de contrainte

$$\begin{cases} v_N^\alpha = v^\alpha.n^\alpha,\ v_T^\alpha = v^\alpha - v^\alpha.n^\alpha, \\ [v_N] = v_N^1 + v_N^2,\ [v_T] = v_T^1 - v_T^2, \\ \sigma_N^\alpha = \sigma^\alpha n^\alpha.n^\alpha, \quad \sigma_T^\alpha = \sigma^\alpha n^\alpha - \sigma_N^\alpha n^\alpha \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1.1 Formulation classique

Pour simplifier, nous assumons que la densité des deux corps est égale à 1. Soients $\mathcal{A}$=$(\mathcal{A}_{ijkl})$, $\mathcal{B}$=(B_{ijkl}) deux tenseurs du quatrième ordre, tenseur d'élasticité et tenseur de viscosité respectivement satisfaient les proptiétés de symétrie et d'ellipticité.

$$\mathcal{A}_{ijkl} = \mathcal{A}_{jikl} = \mathcal{A}_{klij}\ ,\quad \mathcal{B}_{ijkl} = \mathcal{B}_{jikl} = \mathcal{B}_{klij}\ ,\quad 1 \le i, j, k, l \le d \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered} \exists\alpha_A{>}0\ \ \mathcal{A}_{ijkl}\tau_{ij}\tau_{kl} \ge \alpha_A\tau_{ij}\tau_{kl}\ \forall\tau = (\tau_{ij})\,,\ \text{telque}\ \ \tau_{ij} = \tau_{ji} \\ \exists\alpha_B{>}0\ \ \mathcal{B}_{ijkl}\tau_{ij}\tau_{kl} \ge \alpha_B\tau_{ij}\tau_{kl}\ \forall\tau = (\tau_{ij})\,,\ \text{telque}\ \ \tau_{ij} = \tau_{ji} \end{gathered} \tag{3.3}$$

Une formulation pour le problème du contact unilatéral avec frottement de Tresca est la suivante.

Problème $\mathbf{P}_0$:

Trouver $u=(u^1,u^2)$ tels que $u(0)=u_0=(u_0^1,u_0^2)$, $\dot{u}(0)=u_1=(u_0^1,u_0^2)$ dans $\Omega^1\times\Omega^2$

$$\ddot{u}^\alpha-\operatorname{div}\sigma^\alpha(u^\alpha,\dot{u}^\alpha)=f^\alpha \qquad \text{dans}\,]0,T[\times\Omega^\alpha \tag{3.4}$$

$$\sigma^\alpha(u^\alpha,\dot{u}^\alpha)=\mathcal{A}^\alpha\varepsilon(u^\alpha)+\mathcal{B}^\alpha\varepsilon(\dot{u}^\alpha) \qquad \text{dans }]0,T[\times\Omega^\alpha \tag{3.5}$$

$$u^\alpha=0 \qquad \text{sur }]0,T[\times\Gamma_D^\alpha \tag{3.6}$$

$$\sigma^\alpha n^\alpha=F^\alpha \quad \alpha=1,\ 2 \qquad \text{sur }]0,T[\times\Gamma_F^\alpha \tag{3.7}$$

$$\sigma^1n^1=-\sigma^2n^2,\ [u_N]\le 0\ ,\ \sigma_N\ \le 0,\ \sigma_N[u_N]=0 \qquad \text{sur }]0,T[\times\Gamma_C \tag{3.8}$$

$$|\sigma_T|\le g \text{ et } \begin{array}{l}|\sigma_T|<g\Longrightarrow[\dot{u}_T]=0\\ |\sigma_T|=g\Longrightarrow\exists\lambda\ge0\ \ [\dot{u}_T]=-\lambda\sigma_T^1\end{array} \qquad \text{sur }]0,T[\times\Gamma_C \tag{3.9}$$

où $\sigma_N=\sigma_N^1$, $\sigma_T=\sigma_T^1$, $\sigma=\sigma^1$ et g représente le seuil de frottement qui est definie ultérieurement.

3.1.2 Formulation variationnelle

Introduisons deux espaces de Hilbert H et V munis respectivement du produits scalaires $(.,.)$ et $\langle .,.\rangle$, l'ensemble K , l'espace de Sobolev $\mathcal{W}$ et l'ensemble $\mathcal{K}$.

$$\begin{array}{l}H=H^1\times H^2,\text{où } H^\alpha=\left[L^2(\Omega^\alpha)\right]^d,\ \mathbf{H}^s=\left[H^s(\Omega^1)\right]^d\times\left[H^s(\Omega^2)\right]^d\quad\forall s\in\mathbb{R}\\ V=V^1\times V^2 \text{ où }\ V^\alpha=\left\{v\in\left[H^1(\Omega^\alpha)\right]^d\ ,\ v=0\text{ p.p sur }\Gamma_D^\alpha\right\},\\ K=\{v\in V;[v_N]\le0\text{ p.p sur }\Gamma_C\},\mathcal{W}=\ W^{1.2}(0,T;V)\cap W^{2.2}(0,T;\mathbf{H}^{-1})\\ \mathcal{K}=\{v\in\mathcal{W},\ v(0)=u_0,\dot{v}(0)=u_1\}.\end{array}$$

On suppose que

$$u_0\in K,\ u_1\in V,\ F^\alpha\in W^{1.2}\left(0,T;\left[L^2(\Gamma_F^\alpha)\right]^d\right),\ f^\alpha\in W^{1.2}(0,T;H^\alpha),\quad \alpha=1,\ 2.$$

On définie deux formes bilinéaire continues et symétriques a,b tels que:

$$\begin{array}{l}a,b:V\times V\longrightarrow\mathbb{R}\\ a(v,w)=a^1(v^1,w^1)+a^2(v^2,w^2),\ b(v,w)=b^1(v^1,w^1)+b^2(v^2,w^2),\ \forall v,w\in V,\\ \text{où } a^\alpha(v^\alpha,w^\alpha)=\displaystyle\int_{\Omega^\alpha}\mathcal{A}^\alpha\varepsilon(v^\alpha):\varepsilon(w^\alpha)\,dx,\ b^\alpha(v^\alpha,w^\alpha)=\int_{\Omega^\alpha}\mathcal{B}^\alpha\varepsilon(v^\alpha):\varepsilon(w^\alpha)\,dx,\end{array}$$

En utilisant les hypothèses précédentes et le théorème de Riesz, on obtient l'existence d'un élément L de $W^{1,2}(0,T;V)$ tel que:

$$\langle L(t), v\rangle = \sum_{\alpha=1,2}\int_{\Omega^\alpha} f^\alpha.v^\alpha dx + \sum_{\alpha=1,2}\int_{\Gamma_F^\alpha} F^\alpha.v^\alpha ds \quad \forall v = \left(v^1, v^2\right) \in V,\ \forall t \in [0,T]. \tag{3.10}$$

Nous supposons que $g : [0,T] \to L^\infty\ (\Gamma_C)$ est une application de Lipschitiz continue et satisfait

$$g(t,.) \geq 0 \ \text{ p.p sur } \Gamma_C \ \ \forall\ t \in [0,T] \ \text{ et } g(0,.) = 0. \tag{3.11}$$

Nous supposons encore la condition de compatibilité sur les données unitiales:

$$\exists l \in H, \quad a(u_0, v) + b(u_1, v) = \langle L(0), v\rangle + \ (l, v), \forall v \in V. \tag{3.12}$$

En utilisant la formule de Green et les conditions aux limites et intiales, on trouve la formulation variationnelle suivante du problème P_0

Problème $\mathbf{P}_1$

Trouver $u \in \ \mathcal{K}$ tel que pour presque tout $t \in \left]0,T\right[$, $u(t) \in K$ et

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T (\ddot{u}, \dot{v} - \dot{u})\, dt + \int_0^T a(u, \dot{v} - \dot{u})\, dt + \int_0^T b(\dot{u}, \dot{v} - \dot{u})\, dt \\ \displaystyle+\int_0^T \int_{\Gamma_C} g(t,s)\, |\dot{v}_T|\, dsdt - \int_0^T \int_{\Gamma_C} g(t,s)\, |\dot{u}_T|\, dsdt \\ \displaystyle\geq \int_0^T \langle L, \dot{v} - \dot{u}\rangle\, dt, \quad \forall v \in \mathcal{W} \text{ et } v(t) \in K. \end{array}\right. \tag{3.13}$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème $(\mathbf{P}_1)$ repose sur l'application des résultats d'existence et d'unicité de l'inéquation d'évolution abstraite suivante.

3.2 Résultats d'existence pour une inéquation d'évolution abstraite [42]

On définit le cadre fonctionnel suivant:

$(H, |.|)$ un espace de Hilbert dont le produit scalaire sera noté par $(.,.)$.

$(V, \|.\|) \subset (H, |.|)$ un espace de Hilbert dont le produit scalaire sera noté par $((.,.))$, V est dense dans H avec injection compacte.

$$\mathcal{W}_0 = W^{1,2}(0,T;V) \cap W^{2,2}(0,T;H),$$
$$\mathcal{K}_0 = \{v \in \mathcal{W}_0; v(0) = u_0, \dot{v}(0) = u_1\} \text{ avec } u_0,\ u_1 \text{ dans } V.$$

Le problème que l'on propose alors de considérer est donné en (3.14).

Étant donné le cadre Hilbertien dans lequel l'étude se place, le terme $f(t)$ est pris dans V et non dans V'.

Problème $\mathbf{Q}_1$

Trouver $u \in \mathcal{K}_0$ tel que:

$$\int_0^T (\ddot{u}(t), \dot{v}(t) - \dot{u}(t)) + \int_0^T a(u(t), \dot{v}(t) - \dot{u}(t)) + \int_0^T b(\dot{u}(t), \dot{v}(t) - \dot{u}(t)) \tag{3.14}$$
$$+\int_0^T \phi(t, u(t), \dot{v}(t)) - \int_0^T \phi(t, u(t), \dot{u}(t))\, dt \geq \int_0^T ((f(t), \dot{v}(t) - \dot{u}(t)))\, dt \quad \forall v \in \mathcal{K}_0.$$

On suppose les propriétés suivantes:

Les formes $a, b : V^2 \to \mathbb{R}$ sont bilinéaires, symétriques, continues et coercives dans le sens suivant:

$$\begin{aligned}
&\exists\ m_A > 0 \text{ tel que pour tout } u, v \text{ dans } V \times V,\ a(u,v) \leq m_A \|u\| \|v\|,\\
&\exists\ m_B > 0 \text{ tel que pour tout } u, v \text{ dans } V \times V,\ b(u,v) \leq m_B \|u\| \|v\|,\\
&\exists\ A > 0,\ \lambda_A \geq 0 \text{ tel que pour tout } u \text{ dans } V,\ a(u,v) \geq A\|u\|^2 - \lambda_A |u|^2\\
&\exists\ B,\ \lambda_B \geq 0 \text{ tel que pour tout } u \text{ dans } V,\ b(u,v) \geq B\|u\|^2 - \lambda_B |u|^2.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

On suppose de plus que l'application $\phi : [0,T] \times V^2 \to \mathbb{R}$ se décompose en une partie ϕ_1 et une partie ϕ_2 telles que pour tout $(t, \bar{u}, \bar{v}) \in [0,T] \times V^2$, $\phi(t, \bar{u}, \bar{v}) = \phi_1(\bar{u}, \bar{v}) + \phi_2(t, \bar{u}, \bar{v})$ avec ϕ_1, $\phi_2(t, ., .)$ sont deux applications faiblement séquentiellement continues pour tout $t \in [0,T]$ et satisfisont les conditions suivantes:

$$\begin{aligned}
&\text{Pour toute suite faiblement convergente } (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ telle que}\\
&u_k \rightharpoonup u \text{ dans } \mathcal{W}_0, \text{ alors}\\
&\liminf_{k\to\infty} \int_0^T \phi(t, u_k(t), \dot{u}_k(t))\, dt \geq \int_0^T \phi(t, u(t), \dot{u}(t))\, dt,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\text{pour tout } \bar{u} \in V,\ \phi_1(\bar{u},\ .) \text{ est linéaire.} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Il existe une application } C^1, \text{ notée par } \Theta : V \to \mathbb{R}, \text{ telle que:}\\
&\forall v \in \mathcal{W}_0,\ \forall t \in [0,T] \ p.p,\ \Theta(v(t)) \geq 0 \text{ et } \frac{d\Theta(v(t))}{dt} = \phi_1(v(t),\ \dot{v}(t))
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}&\phi_2(0,u_0,\ .)=0,\ \phi_2(t,\bar{u},\ .)\ \text{est convexe, positivement homogène,}\\&\text{et de plus vérifie}\ \phi_2(t,\bar{u},-v)=\ \phi_2(t,\bar{u},v)\quad\forall v\in V\end{aligned}\tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}&\forall r>0,\ \exists\eta(r)>0,\ \forall v_1,v_2,w_1,w_2\in V,\ \text{tel que:}\\&\|v_1\|\leq r,\ \|v_2\|\leq r,\ \forall t_1,t_2\in[0,T]\\&|\phi(t_1,v_1,w_1)-\phi(t_1,v_1,w_2)+\phi(t_2,v_2,w_2)-\phi(t_2,v_2,w_1)|\\&\leq(\eta(r)\|v_1-v_2\|+\eta_0|t_1-t_2|)\|w_1-w_2\|,\text{où }\eta_0\text{ est une constante positive}\end{aligned}\tag{3.20}$$

On suppose que le terme f est pris dans $W^{1,2}(0,T;V)$. (3.21)

Nous ajoutons à cette formulation une condition de compatibilité sur les données initiales qui nous la verrons, sera utile pour obtenir des estimations sur le terme d'ordre deux en temps dans un voisinage de l'origine.

Il existe $l\in H$ tel que:

$$a(u_0,v)+b(u_1,v)+\ \phi_1(u_0,v)=((f(0),v))+(l,v),\ \forall v\in V\tag{3.22}$$

Pour simplifier les notations, on ne notera plus la dépendance par rapport à la variable t lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Afin de donner notre premier théorème d'existence, nous formulons tout d'abord un problème annexe (3.23). Pour cela, nous noterons, pour M et $M^{`}$ dans $\mathbb{R}^+$, par $C_{M,M^{`}}$ le sous ensemble borné convexe de $\mathcal{W}_0$:

$C_{M,M^{`}}=\{v\in\mathcal{K}_0;\|\dot{v}(t)\|\leq M,\ |\ddot{v}(t)|\leq M^{`}\ \text{p.p.}\ t\in[0,T]\}.$

On résoudra premièrement le problème formulé dans $C_{M,M^{`}}$ comme suit:

Problème $\mathbf{Q}_2$

Trouver $u\in C_{M,M^{`}}$ tel que:

$$\begin{aligned}&\int_0^T(\ddot{u},\dot{v}-\dot{u})\,dt+\int_0^T a(u,\dot{v}-\dot{u})\,dt+\int_0^T b(\dot{u},\dot{v}-\dot{u})\,dt\\&+\int_0^T\phi(t,u,\dot{v})\,dt-\int_0^T\phi(t,u,\dot{u})\,dt\\&\geq\int_0^T((f,\dot{v}-\dot{u}))\,dt\qquad\forall v\in C_{M,M^{`}}\end{aligned}\tag{3.23}$$

Nous donnons ici le premier résultat d'existence et d'unicité concernant le problème $\mathbf{Q}_2$.

Théorème3.1.

Sous les hypothèses (3.15) − (3.21), le problème $\mathbf{Q}_2$ possède une solution unique dans $C_{M,M'}$.

Pour la demonstration de ce théorème, voir [42] .

Théorème3.2. Sous les hypothèses (3.15) − (3.22) et $B > 0$ dans la dernière relation de (3.15) , le problème Q_1 possède une solution unique dans $\mathcal{K}_0$.

Pour la demonstration de ce théorème, voir [42] .

lemme3.2.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution au problème Q_1 est qu'il existe deux réels positifs notés M et M' tels qu' il existe une solution du problème Q_2 formulé dans $C_{M,M'}$ avec

$$\|\dot{u}(t)\| < M,\ |\ddot{u}(t)| < M' \text{ pour presque tout } t \in [0,T] \tag{3.24}$$

Preuve

On supppose que $u \in \mathcal{K}_0$ solution du problème Q_1. Il suffit de considérer un ensemble convexe $C_{M,M'}$ telle que $\|\dot{u}(t)\| < M,\ |\ddot{u}(t)| < M'$ pour presque tout $t \in [0,T]$ afin de conclure que u est solution du Q_2 et vérifie (3.24)

Inversement, soient M et M' deux constantes positives telles qu'il existe u solution du Q_2 avec $\|\dot{u}(t)\| < M,\ |\ddot{u}(t)| < M'$ pour presque tout $t \in [0,T]$. En utilisant la convexité du $\mathcal{K}_0$, pour tout w de $\mathcal{K}_0$ et pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit nous aboutissons à:

$$v = (1-\varepsilon)\,u + \varepsilon w \in C_{M,M'}. \tag{3.25}$$

En insérant le résultat (3.25) dans (3.23) et en prenant en compte les propriétés de ϕ par rapport au troisième argument, on obtient que u est solution de

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\ddot{u}, \dot{w} - \dot{u})\, dt + \int_0^T a(u, \dot{w} - \dot{u})\, dt + \int_0^T b(\dot{u}, \dot{w} - \dot{u})\, dt \\ &+ \int_0^T \phi(t, u, \dot{w})\, dt - \textstyle\int_0^T \phi(t, u, \dot{u})\, dt \geq \int_0^T ((f(t), \dot{w} - \dot{u}))\, dt \qquad \forall w \in \mathcal{K}_0 \end{aligned}$$

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 3.2. Les différentes estimations obtenues sur $\ddot{u}(t)$ et $\dot{u}(t)$ pour presque tout t respectivement dans H et V, nous permettent de trouver des bornes indépendantes de M et M' et donc de pouvoir choisir ces deux réels tels que la solution soit strictement dans la convexe $C_{M,M'}$. L'emploi du lemme 3.2 nous permet de conclure quant à l'existence d'une solution au problème Q$_1$et l'unicité de cette solution provient de la solution du problème Q$_2$.■

Nous revenons maintenant à notre problème $\mathbf{P}_1$et nous établisons le théorème suivant:

Théorème3.3. Sous les hypothèses $(3.2), (3.3)$ et (3.11) le problème variationnel de contact établi avec frottemnt de Tresca $\mathbf{P}_1$ possède une solution unique dans l'ensemble $\mathcal{K}$.

Preuve.

Il suffit de vérifier que ϕ_1, ϕ_2 définis par:

$\phi_1 (u, v) = 0$

$\phi_2(t, u, v) = \displaystyle\int_{\Gamma_C} g(t, s) |v_T| \, ds, \ \forall t \in [0, T], \ \forall u, v \in V,$

vèrifient les hypothèses $(3.16) - (3.20)$.

Etant donné que ϕ_1 est identiquement nulle dans ce cas, toutes les hypothèses concernant ce terme sont trivialement vérifiées

pour les hypothèses $(3.16), (3.19)$ et (3.20) sur ϕ_2, nons utilisons les hypothèses sur g en

(3.11).

Pour toute suite faiblement convergente $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $u_k \rightharpoonup u$ dans $\mathcal{W}_0$, et comme la norme est continue on obtient

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty} \int_0^T \phi_2 (t, u_k(t), \dot{u}_k(t)) \, dt &= \liminf_{k\to\infty} \int_0^T \textstyle\int_{\Gamma_C} g(t, s) |\dot{u}_{kT}| \, ds, \\
&\geq \liminf_{k\to\infty} \int_0^T \int_{\Gamma_C} g(t, s) |\dot{u}_T| \, ds \\
&= \liminf_{k\to\infty} \int_0^T \phi_2 (t, u(t), \dot{u}(t)) \, dt.
\end{aligned}$$

comme $g(0, .) = 0$ on a

$$\phi_2 (0, u_0, v) = \int_{\Gamma_C} g(0, s) |v_T| \, ds = 0.$$

pour $\alpha \in [0, 1]$ et $\forall v, w \in V$

$$\begin{aligned}
\phi_2 (t, u, \alpha v + (1 - \alpha) w) &= \int_{\Gamma_C} g(t, s) |\alpha v_T + (1 - \alpha) w_T| \, ds \\
&\leq \alpha \int_{\Gamma_C} g(t, s) |v_T| \, ds + (1 - \alpha) \int_{\Gamma_C} g(t, s) |w_T| \, ds \\
&= \alpha \phi_2 (t, u, v) + (1 - \alpha) \phi_2 (t, u, w)
\end{aligned}$$

donc on obtient que $\phi_2(t, u, .)$ est convexe.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall v \in V$

$$\phi_2(t, u, \alpha v) = \int_{\Gamma_C} g(t, x) |\alpha v_T| \, ds = |\alpha| \int_{\Gamma_C} g(t, x) |v_T| \, ds$$

on résulte que $\phi_2(t, u, .)$ est positivement homogène

$$\phi_2(t, u, -v) = \int_{\Gamma_C} g(t, x) |-v_T| \, ds = \int_{\Gamma_C} g(t, x) |v_T| \, ds = \phi_2(t, u, v),$$

donc (3.19) est satisfaite.

Posons:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= |\phi_2(t_1, v_1, w_1) - \phi_2(t_1, v_1, w_2) + \phi_2(t_2, v_2, w_2) - \phi_2(t_2, v_2, w_1)| \\ &= \left| \int_{\Gamma_C} g(t_1, s) |w_{1T}| \, ds - \int_{\Gamma_C} g(t_1, s) |w_{2T}| \, ds + \int_{\Gamma_C} g(t_2, s) |w_{2T}| \, ds - \int_{\Gamma_C} g(t_2, s) |w_{1T}| \, ds \right| \end{aligned}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\leq \int_{\Gamma_C} g(t_1, s) ||w_{1T}| - |w_{2T}|| \, ds - \int_{\Gamma_C} g(t_2, s) ||w_{1T}| - |w_{2T}|| \, ds \\ &\leq \int_{\Gamma_C} g(t_1, s) - g(t_2, s) |w_{2T} - w_{1T}| \, ds \end{aligned}$$

et comme $t \to g(t, .)$ est Lipschitiz continue on peut écrire

$$\mathcal{L} \leq \int_{\Gamma_C} \eta_0 |t_1 - t_2| |w_1 - w_2| \, ds,$$

on sait que l'injection compacte de V dans H est continue, nous déduisons

$$\mathcal{L} \leq \int_{\Gamma_C} \eta_0 |t_1 - t_2| \|w_1 - w_2\| \, ds.$$

Puisque toutes les conditions de théorème 3.1 sont satisfaites, on peut dire que le problème P_1 possède une solution unique dans l'ensemble $\mathcal{K}$.

Bibliographie

[1] R.A.Adams. Sobolev space. Academic Press, London (1975).

[2] L.E. Andersson, Existence results for quasistic contact problem with coulomb friction. App. Math. Optim., 42(2):169-202, 2002

[3] E. Bécache. P. Joly et G. Scarella, A fictitious domain methode for a unilateral contact problem. In Mathematical and Numerical Aspects of wave Propagation, pares 431-436.

[4] P.Boieri, F. Gastaldi, D. Kinderleher, Existence, uniqueness, and regualarity results for the two-body contact problem, Appl. Math. option. 15 (1987), 251-277.

[5] S. Boutechebak, Etude analytique de quelques problèmes en élasticité avec contrainte. Thèse de doctorat. Université Sétif (2007).

[6] A.S. Bretelle, Formulation et résolution des problémes de contact avec frottement et adhérence en grandes déformations.Thèses de doctorat. Université Aix-Marseille II 1999.

[7] H.Brézis, Problèmes unilatéreaux , J. Math. Pures et Appl. 51 (1972), 1-168.

[8] H.Brézis, L. Nirenberg, et G. Stampacchia, A remark on Ky Fan's minimaux principale. Bolletino U.M.I., 6:293-300. (1972).

[9] H.Brézis. Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, Paris (1983).

[10] F. Browder, Nonlinear operators and nonlinear equations of evolutions in banach spaces. In Proc. Sump. Pure Math., 18, II. AMS. (1976).

[11] S.Carl, V.Le et D. Motreanu, Nonsmooth variational problems and their Inequalities, comparison principles and applications, Springer Science+Business Media, LLC. (2007).

[12] M.Cocou, Existence of solutions of a Sgnorini problems Sgnorini with nonlocal friction in viscoelasticity, Z. Angew. Math. Phys. **53** (2002), 1099-1109.

[13] M.Cocou, Existence of solutions of a dynamic problems with friction, Int, J. Engrg. Sci.22 (1984),

[14] M.Cocou, J.M.Ricaud, Analysis of a class of implicit evolution inequalities associated to viscoelastic dynamic contact problems with friction, Int. J. Engrg. Sci.38 (2000), 1535-1552.

[15] M.Cocou, Existence and approximation results for dynamic contact problems in viscoelasticity, Eccomas 1-9, 2004

[16] M.Cocou, G. Scarella, Existence of a solution to a dynamic unilateral contact problem for a cracked viscoelastic body, C.R. Math. Acad. Sci. Paris 338 (4) (2004), 341-346.

[17] R.Dautry et J.L.Lions, Analyse mathématique et calcul numérique, Pour les Sciences et les Techniques, Volume (3), Masson, Paris (1984).

[18] G.Duvant, J.L.Lions, Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris 1972.

[19] R.Glowinski, J. L. Lions, R. Trémolières, Analyse numérique des inéquations variationnelles. Dunod, Paris

[20] P.Hlváček, J.Haslinger, J.Nečas, et J.Lovíšek. Solution of variational inequalities in mechanics. Springer-Verlag, New York, 1988.

[21] I.R. Ionescu and M. Sofonea, Functional and Numerical Methods in viscoplasticity, Oxford University Press, Oxford (1993).

[22] I.R. Ionescu, Viscosity solutions for dynamical problems with slip rate dependent friction, Proceding of fourteenth International Symposium on Mathematical theory of networks and systems, (MTNS 2000), Perpignan, (2000).

[23] J.Jarušek, Dynamic contact problems for bodies with a singular memory.Bolletino, U.M.I.,7(9-A)(1995),581-592

[24] J.Jarušek, Dynamic contact problems with given friction for viscoelstic bodies, Czechoslovak Math. J. 46(121) (1996), 475-487.

[25] M, Jean, et E, Pratt, A system of rigid bodies with dry friction. Int. J.Engng. Sci., 23(1985), 497-513.

[26] R.Jean, Mesure et intégration, les Press de l'Université du Québec, Canada (1975).

[27] N.Kikuchi, J.T.Oden, Contact problems in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods. SIAM, Philadelphia 1988.

[28] J.U.Kim, A boundary thin obstacle problem for a wave equation, Commun. Partial Differentieal

[29] K. I. Kuttler, M. Shillor, Dynamic bilateral contact with discontinuous friction coefficient, Nonlinear Anal. Theory Methods 45 (2001), 309-327.

[30] G. Lebeau, M. Schatzman, A wave problems in half-space with a unilateral constraint at the boundary, J. Differential Equations 53(1984), 309-361

[31] J.L.Lions et E.Magenes, Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Volume (1), Dunod, Paris (1968).

[32] J.L.Lions et E.Magenes, Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Volume (3), Dunod, Paris (1968).

[33] M.D.P.M Marques, Differentiel Inclutions in Nonsmooth Mechanical Problems, Schocks and dry friction, volume 9. Birkhauser, Basel, pnlde edition(1993).

[34] J. T.C Martins, J.T. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws, Nonlinear Anal. Theory Methods 11(3) (1987), 407-428.

[35] J.J. Moreau, Liaisons unilatarales sans frottement et chocs inélastiques. C. R. Acad. Sci. Paris, 296(1983):1473-1476.

[36] J.Muñoz-Rivera, R. Racke, Multidimentional contact problems in thermoelasticity, SIAM, J.Appl. Math.58 **(4)** (1998), 1307-1337.

[37] S.**N**icaice, Analyse numérique et équations aux dérivées partielles, cours et problèmes résolus, Dunod, Paris (2000).

[38] Y.Ouafik, Contrubition à l'étude mathématique et numérique des structures piézoélectriques en contct. Thèse de doctorat. Université de Perpignan, (2007).

[39] A. Petrov, M. Schatzman, One-dimentional viscoelastodynamics with Signorini boundary conditions, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2202), 983-988.

[40] A. Radoslovescu Căpătînă, et M. Cocou. Internal approximation of quasi-variational inequalities. Numer. Math. 59(4): 385-398, 1991.

[41] P.A.Raviart et J.M.**T**homas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, ($2^{éme}$ Tirage), Dunod, Paris (1998).

[42] J.M.Ricaud, Etude d'une classe d'inéquations d'évolution implicite et application à des problèmes dynamiques de contact avec frottement. Thèse de doctorat. Université d'Aix-Marseille I, (1999).

[43] J.M.Ricaud, E. Pratt, Analysis of a time discretisation for an implicit variational inequality modelling dynamic contact problems with friction, Math. Meth. Appl. Sci. 24 (2001), 491-511.

[44] R. Rocca, et M.cocou. Existence and approximation of a solution to quasistatic Signorini problem with local friction. *Internat. J. Engrg. Sci.*, 39(11):1233-1255, 2001

[45] M. Schatzman, A class of nonlinear differential equations of second order in time. Nonlinear Analysis, Theory, Meth. Applic., 2(3)(1978):355-373.

[46] J. Simon, Compact sets in space $L^p(0,T;B)$, Ann. Mat. Pure Applic. 146 (1987),65-96.

[47] M. Sofonea, Problèmes Non linéaires dans la Théorie de l'Élasticité, cours de Magister de Mathématiques Appliquées, Université de Sétif, Algerie (1993).

[48] M. Sofonea et Andaluzia Matei, Variational inequalities with application, A Study of antiplane frictional contact problems. Springer Science+Business Media, LLC .(2009).

[49] M.Thérése et L.Sonrier, Distributions, Espases de Sobolev, Applications, Ellipses, Paris (1998).

[50] R. Trémolières, Inéquations variationnelles: existence, approximation, résolution. Thèse de docrorat d'état, Université de Paris (1972).

[51] C. Tsogka, Modélisation mathématique et numérique de la propagation des ondes élastiques tridimensionnelles dans les milieux fissurés. Théses de doctorat, Université Paris IX, (1999).

[52] K.Vo-Khac, Distrubitions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux dérivées partielles " Tome (2), Vuibert, Paris (1972).