MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURET DE RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF

MEMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du Diplômede

MAGISTER

Option : Mathématiques Appliquées

Par

Melle BENZIANE Laldja

THEME

Etude mathématique de quelques problèmes en mécanique de contact

Soutenule : 01/12/2010

Devant le jury

Président :	Mr.DRABLA Salah	Prof Université Ferhat Abbas SETIF
Encadreur :	Mr.HEMICI Nacerdine	MCAUniversitéFerhatAbbasSETIF
Examinateurs :	Mr.SERRAR Toufik	MCAUniversitéFerhatAbbasSETIF
	Mr.BENSERIDI Hamid	MCAUniversitéFerhatAbbasSETIF

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance au Docteur Hemici Nacerdine, maître de conférence à l'université Ferhat Abbas Sétif qui m'a proposé le sujet de mon mémoire et qui à diriger ce travail. Qu'il trouve ici toute ma gratitude pour ses encouragements, ses conseils tout au long de ce travail, ses suggestions valeureuses, sa patience et sa grande érudition, disponibilité et son sens de la recherche ont été déterminants pour la réalisation de ce travail.

Je remercie très vivement le professeur Drabla Salah qui n'a cessé pas de m'orienter et d'avoir bien voulu examiner ce travail et de m'avoir fait l'honneur de le présider.

J'ai grand plaisir à remercier T.Serrar, H.Benseridi, maîtres de conférence à l'université Ferhat Abbas Sétif, d'avoir bien voulu examiner ce travail et d'avoir accepter d'être membre au jury.

Je remercie vivement tous mes enseignants à l'université Ferhat Abbas Sétif en graduation et en post-graduation.

Merci à tous mes amis et mes collègues qui ont, de par leur serviabilité et leur encouragement, contribué de loin à la concrétisation de ce travail.

Je ne sais comment les remercier, et dire à mes parents à mes frères et à mes sœurs tout le plaisir que m'a fait leur aide précieuse et leur soutient moral et qui ont tant sacrifié pour que je puisse mener à bien ce travail. Je serai bien heureuse si dans cette longue vie que je souhaite, je pouvais leur rendre quelques services. J'espère qu'ils me pardonneront de ne leur avoir pas assez dit.

Laldja Benziane

Table des matières

-

Introduction

La mécanique du contact est un domaine très étendu qui embrasse plusieurs phénomènes de contact entre solides déformables ou entre un corps et une base rigide. Ces phénomènes de contact apparaissent abondamment dans notre vie quotidienne comme dans la mécanique des structures, et plus particulièrement dans le secteur de l'automobile, l'aéronautique (fissurations des composites et des interfaces fibre/matrice), la production de l'énergie (assemblage des structures, fissuration dans les joints soudés) et les systèmes de transmissions. La littérature consterne la modélisation, l'analyse mathématique, ainsi que l'approximation numérique des problèmes.

j'ai étudie dans ce mémoire les problèmes de contact qui basé sur les idées de M.Frémond (15),(16) l'idée est l'introduction d'une variable interne de surface appelée, champ d'adhésion, qui prend ses valeurs entre zéro et un, et qui décrit la densité fractionnaire des liens actifs sur la surface de contact. On peut trouver ces modèles dans un grand nombre de publications récentes, voir par exemple O.Chau et J.R.Fernandez et M.Sofonea (7), N.Hemici (19) L.Jianu, M.Shillors et M.Sofonea (20) et A.Matei (25), qui ont étudié des problèmes de contact avec adhésion et sans frottement.

Le processus d'adhésion est important dans le montage industriel où les parties, usuellement non métalliques, sont collées ensemble. Récemment, les matériaux composites ont atteint une proéminence parce qu'ils sont très solides et légers et, par conséquent, ils ont une importance considérable dans l'aviation, l'exploration spatiale et l'industrie de l'automobile.

Cependant, les matériaux composites peuvent subir une déamination sous l'effet des tensions, où les différentes couches se détachent et bougent réciproquement l'une par rapport à l'autre.

D'autres problèmes plus compliqués de contact unilatéral avec loi de frottement de Coulomb et adhésion ont été étudié par Cocu (10), Z.Lergut (24), N.Chougui (12). Plusieurs expériences ont été faites sur le frottement, ces dernières ont mis en évidence de nouvelles lois de frottement qui complètent les lois classiques de frottement. A titre d'exemple, on peut lire les nons standards de frottement proposées par Stromberg (32).

L'approximation numérique de ces problèmes a été le sujet de plusieurs études récentes telle que Chen, Han, Sofonea (8) et Kendri (21) pour des matériaux viscoplastiques avec variable interne d'état.

Chacun des problèmes est étudié selon le formalisme général suivant : nous commençons par décrire le problème mécanique de départ et après avoir précisé les hypothèses sur les données, nous présentons une formulation variationnelle du problème mécanique pour laquelle nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution.

Les méthodes que nous utilisons relèvent des résultats généraux sur les équations variationnelles, des arguments de point fixe, des techniques d'inégalités de type Gronwall, et des fondements des équations d'évolution avec des opérateurs monotones.

Le but de ce mémoire est de fournir une contribution dans l'étude des problèmes de contact pour les matériaux élastiques et viscoélastiques avec adhésion.

Dans ce mémoire, nous présentons une contribution à l'analyse variationnelle et numérique de quelques problèmes mécaniques de contact. L'étude mathématique des problèmes de contact entre un corps déformable et une fondation déformable ou rigide varie selon les propriétés du matériau ainsi que les conditions aux limites. Les lois de comportement sont considérées non linéaire pour des matériaux élastiques et viscoélastiques, dans des processus quasistatique, obéissant à l'hypothèse des petites déformations. Les conditions de contact sont du type de Signorini, et les lois de frottement envisagées sont des versions de la loi de Coulomb les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité des solutions des problèmes variationnels. Pour l'analyse des estimation d'erreur, on adapté deux types d'approximation variationnelle, l'approximation semi discrète où on ne discrétise que la variable spatiale, l'approximation complète où on discrétise, en plus de la variable spatiale, la variable temporelle.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Le premier chapitre introduit des notations générales de la mécanique ainsi que les notations mathématiques nécessaires à la compréhension de ce travail. On rappelle les différentes équations et conditions aux limites concernant le champ des déplacements et le champ de contraintes. On poursuit avec formulation des différents problèmes mécaniques qui seront traités.

Le deuxième chapitre, nous intéressons à l'étude d'un problème de contact adhésif sans frottement avec compliance normale enter un corps déformable élastique et une base déformable où la loi de comportement est non linéaire. Tout d'abord nous dérivons une formulation variationnelle du problème mécanique pour lequel nous démontrons qu'il existe une solution faible unique en utilisant des techniques de point fixe. De plus, nous donnons deux approximations variationnelles (semi discrète et complète) et une estimation d'erreur de la solution.

Dans le troisième chapitre on s'intéresse à l'étude théorique d'un problème de contact de type Signorini, avec adhésion et frottement entre un corps viscoélastique déformable et une base rigide dans le cas quasistatique dans des processus quasistatiques. L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle ordinaire du premier ordre comme dans le premier chapitre. Nous dérivons une formulation variationnelle au problème mécanique et nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible, en utilisant aussi des résultats sur les inéquations variationnelles d'évolution, suivis d'un argument de point fixe.

Pour terminer ce mémoire on présente sous forme des rappels en analyse fonctionnelle restreints au seul cadre hilbertien. Ainsi, on finit par rappel des principaux résultats de l'approximation variationnelle.

Notations principales

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d\,(d=1,2,3)$, on note par :

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω.
Γ	la frontière de Ω, supposée régulière.
$\Gamma_i\left(i=\overline{1,3}\right)$	une partition de la frontière Γ.
$mes\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue (d-1) dimensionnelle de Γ_1.
ν	la normale unitaire sortante à Γ.
v_ν, v_τ	les composantes normales et tangentielle du champ vectoriel v.
σ_ν, σ_τ	les composantes normales et tangentielle du champ tensoriel σ.
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions réelles sur Ω indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans Ω.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	l'espace des distributions sur Ω.
$\mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiable sur $\overline{\Omega}$.
D	l'espace $\mathcal{D}(\Omega)^d$.
D'	l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)^d$.
$\mathcal{D}$	l'espace $\mathcal{D}(\Omega)_s^{d\times d}$.
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$.
$\mathcal{H}$	l'espace $L^2(\Omega)^{d\times d}$.
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$.
$\mathcal{H}_1$	l'espace $\{\sigma\in\mathcal{H}\ /\ \operatorname{div}\sigma=(\partial_i\sigma_{ij})\in H\}$
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
H_Γ'	l'espace dual de H_Γ.
$\gamma: H_1\to H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.
$z: H_\Gamma\to H_1$	l'inverse à droite de l'application trace γ.
$\overline{\gamma}:\mathcal{H}_1\to H_\Gamma'$	l'application trace pour les fonctions tensorielles.
$\overline{z}: H_\Gamma'\to\mathcal{H}_1$	l'inverse à droite de l'application trace $\overline{\gamma}$.

Si X est un espace de *Hilbert* réel, on a les notations suivantes :

$(.,.)_X$	le produit scalaire de X.
$(.,.)_{X' \times X}$	le produit de dualité entre X' et X.
$\|.\|_X$	la norme de X.
2^X	l'ensemble de toutes les parties de X.
$x_n \rightarrow x$	la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans X.
$x_n \rightarrow x$	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans X.
$\mathcal{L}(X)$	l'espace des applications linéaires continues de X dans X .

Si de plus $[0,T]$ est un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par :

$\mathcal{C}(0,T,H)$	l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ dans H.
$\|.\|_{0,H}$	la normale de $\mathcal{C}(0,T,H)$.
$\mathcal{C}^1(0,T,H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0,T]$ dans H.
$\|.\|_{1,H}$	la normale de $\mathcal{C}^1(0,T,H)$.
$L^p(0,T,H)$	l'espace de Lebesgue.
$\|.\|_{L^p(0,T,H)}$	la normale de $L^p(0,T,H)$.
$W^{k,p}(0,T,H)$	l'espace de Sobolev de paramètre k et p.
$\|.\|_{W^{k,p}(0,T,H)}$	la normale de $W^{k,p}(0,T,H)$.

Pour une fonction f, on note par :

$\dot{f}$, $\ddot{f}$	les dérivées première et seconde de f par rapport au temps.
$\partial_i f$	la dérivée partielle de f par rapport à la i *ème* composante x_i.
∇f	le gradient de f.
$Divf$	la divergence de f.
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de $f = \frac{1}{2}\left(\nabla f + \nabla^T f\right)$.
∂f	le sous différentiel (classique) de f.
$domf$	le domaine de f.

Autre notation :

$\lim\ inf$	la limite inférieur.
S_d	l'espace des tenseurs symétrique du second ordre sur $\mathbb{R}^d$.
I_d	le tenseur identité du second ordre sur $\mathbb{R}^d$.
0_d	le zéro de $\mathbb{R}^d$ et S_d.
C, c	des constates génériques strictement positives.
p, p	presque partout.

Chapitre 1

Formulation mathématique des problèmes aux limites

L'objet de cette première partie est d'établir le modèle mathématique décrivant l'évolution d'un corps déformable ayant une loi élastique (ou viscoélastique) sous l'action des efforts extérieurs. Ceci se traduit mathématiquement par l'établissement d'un système d'équations aux dérivées partielles posées sur un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$. Ce système comprend la loi de comportement du matériau, l'équation du mouvement du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre est consacré aux rappels de quelques notions de base de la mécanique des milieux continus telles que le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations linéarisées et l'introduction des lois de comportement élastiques et viscoélastiques. Il traite aussi les conditions aux limites de contact sans frottement avec adhésion et compliance normale d'un corps déformable avec une base déformable, et de contact avec frottement et adhésion d'un corps déformable avec une base rigide. La suite est réservée à la formulation des différents problèmes aux limites qui vont faire l'objet de ce mémoire.

1.1 Rappels de la mécanique des milieux continus

Dans cette partie, après quelques rappels de mécanique des milieux continus, en partant de la modélisation du problème physique, nous présentons le formalisme des lois de comportement élastiques et viscoélastiques. Ensuite, nous rappelons le système d'équations aux dérivées partielles qui seront l'objet de notre étude. Pour compléter le modèle, on présente quelques considérations physiques sur les conditions aux limites de contact sans frottement avec adhésion et les conditions aux limites de contact avec frottement et adhésion.

1.1.1 Contraintes et Déformations

On considère un corps déformable occupant un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ supposée assez régulière. Nous étudions, dans intervalle de temps $[0, T]$, l'évolution du corps matériel dûe à l'appliquation des forces de volumes et de surfaces. Cette évolution est décrite par l'équation

$$\rho\ddot{u} = Div\sigma + f_0 \text{ dans } \Omega \times [0, T]\,, \tag{1.1.1}$$

où les inconnues du problème sont :

- le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$
- le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \to S_d$

Dans $(1.1.1)$, $S_d = \mathbb{R}_S^{d\times d}$ est l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$, "$\ddot{u}$"(respectivement $\dot{u}$) représesente la dérivée seconde du champ des déplacements par rapport au temps (respectivement première) et $Div\sigma$ est la divergence du champ des contraintes. La fonction qui désigne la densité de masse $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ et la densité des forces volumiques $f_0 : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ sont des données du problème.

Les processus d'évolution modélisée par l'équation (1.1.1) s'appellent *processus dynamique*. Dans certaines situation, l'équation (1.1.1) peut encore se simplifier. Par exemple dans le cas où $\dot{u} = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (*processus statique*), ou bien dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie trés lentement par rapport au temps, c'est -à-dire que le terme $\rho\ddot{u}$ peut être negligé (*processus quasistatique*). Dans ces deux cas l'équation devient :

$$Div\sigma + f_0 = 0 \ \text{ dans } \ \Omega \times [0, T] \,. \tag{1.1.2}$$

Dans la suite, on va considérer des matériaux élastique et viscoélastique dans le cadre des petites tranformations. Dans ce cas, on a besoin du champ des déformations linéarisés.

$\varepsilon : \Omega \times [0, T] \to S_d$ défini par :

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}), \ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \ \text{ dans } \ \Omega \times [0, T] \,, \tag{1.1.3}$$

où ∂_k représente l'opérateur de dérivation par rapport à la variable x_k. On précise en outre qu'on adopte la convention de l'indice muet. Souvent, pour marquer la dépendance du champ des déformations ε par rapport au champ des déplacements u, on va le noter $\varepsilon(u)$. Remarque aussi que dans l'étude des processus statiques le temps n'intervient pas et par conséquent les égalités (1.1.2) et (1.1.3) sont satisfaites en Ω au lieu de $\Omega \times [0, T]$.

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire les mouvements des milieux continus. En effet, il reste à décrire ce qui est au matériau lui même. C'est l'objet des lois de comportement que nous décrivons dans la section suivante :

1.1.2 Lois de comportement

Les lois de comportement caractérisent le comportement de chaque type de milieu continu. Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale et c'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Nous présentons ci-dessous les lois de comportement élastique et viscoélastique traitées dans ce mémoire.

Matériaux élastiques

La loi de comportement est de la forme :

$$\sigma = F(\varepsilon(u)), \tag{1.1.4}$$

où F est une application linéaire ou non linéaire. Cette loi peut modeler quelques propriétés mises en évidence par les expériences de *chargement monotone* : linéairité de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (suivant que F soit linéaire ou non), *durcissement ou adoucissement* de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (suivant que$F$ soit linéaire ou non). Par contre, ni le *fluage*, ni la *relaxation* ne peuvent être décrits par la loi (1.1.4). En effet, si par exemple à l'instant $t = 0$ on a $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et on maintient la déformation constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ $\forall t > 0$ il résulte $\sigma(t) = F(\varepsilon_0)$ $\forall t > 0$. Par conséquent le modèle (1.1.4) ne peut pas décrire le phénomène de relaxation mise en évidence par les essais expérimentaux. De même, pour l'équation (1.1.4) les courbes $charge - décharge$ $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ coincident. Ce modèle ne peut donc pas décrire les déformations résiduelles ce qui justifie l'introduction d'autres lois de comportement capables de modèle ces phénomènes.

En élasticité linéaire σ est une fonction linéaire de ε, c'est à dire

$$\sigma = \mathcal{E}\ \varepsilon \quad (\ \sigma_{ij} = \mathcal{E}_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}), \tag{1.1.5}$$

où $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}\ )$ est un tenseur d'ordre quatre.

Matériaux viscoélastiques

La loi de comportement est de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u), \tag{1.1.6}$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}$ sont des fonctions constitutives non linéaires $\mathcal{A}$ représente l'opérateur de *viscosité* et $\mathcal{G}$ désigne l'opérateur *d'élasticité*.

Et pour un corps élastique lorsque $\mathcal{A} = 0$, la loi se réduit à

$$\sigma = \mathcal{G}\varepsilon(u).$$

Nous rappelons qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})$ est donné par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\left(\dot{u}\right) + g_{ijkl}\varepsilon_{kl}\left(u\right), \tag{1.1.7}$$

$\mathcal{A} = (a_{ijkl})$ est le tenseur de *viscosité* et $\mathcal{G} = (g_{ijkl})$ le tenseur d'*élasticité*, pour $i, j, k, l = 1, ..., d$.

La loi de comportement (1.1.6) est une loi viscoélastique du type $Kelvin - Voigt$.

1.1.3 Condition aux limites de contact avec adhésion

Afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'équilibre d'un matériau, il faut encore préciser les conditions au limites.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ le domaine régulier occupé par le corps, Γ la frontière de Ω et le ν vecteur normal unitaire extérieure à Γ. Soit également $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$, pour $i \neq j$, une partition de Γ.

Définissons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ.

$$u = \xi \text{ sur } \Gamma_1 \times [0, T]. \tag{1.1.8}$$

$$\sigma\nu = f_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times [0, T]. \tag{1.1.9}$$

La condition (1.1.8) est appelée *condition aux limite de déplacement*; sa signification consiste en ce que le champ des déplacements est imposé sur la partie Γ_1 de la frontière Γ, la fonction ξ étant une donnée du problème (par exemple, si $\xi = 0$ le solide est encastré sur la partie $\Gamma_1$de sa frontière dans une structure fixe).

La condition (1.1.9) est appelée *condition aux* limites *de traction*; sa signification consiste en ce que le vecteur des contraintes de *Cauchy* $\sigma\nu$ est imposé sur la partie Γ_2 de la frontière, la fonction f_2 représente la densité des forces appliquées de surface et constituant une donnée du problème.

Si $\Gamma_1 = \varnothing$ le problème aux limites est *un problème de traction pur* et si $\Gamma_2 = \varnothing$ le problème aux limites est *un problème de déplacement pur*. Si les parties Γ_1 et Γ_2 sont toutes les deux de mesure de *Lebesgue* $d-1$ dimensionnelle strictement positive, le problème considéré est un *problème mixte déplacement − traction.*

On note par v_ν et v_τ la composante normale et respectivement tangentielle de tout champ vectoriel $v = v_\nu.\nu + v_\tau$où $v_\nu = v.\nu$. De même, soit σ_ν et σ_τ la composante normale et respectivement tangentielle du tenseur des contraintes de *Cauchy* $\sigma\nu$. Il vient : $\sigma_\nu = (\sigma\nu)_\nu$, $\sigma_\tau = (\sigma\nu)_\tau$

Le contact entre le corps et la fondation est bilatéral si le contact est maintenu pendant le mouvement. Cette propriété se traduit mathématiquement par :

$$u_\nu = 0 \quad \text{sur} \;\; \Gamma_3 \times [0,T]\,. \tag{1.1.10}$$

Ensuite, on va décrire les conditions de contact avec adhésion sur $\Gamma_3 \times [0,T]$ on introduit une variable interne d'état β définie sur $\Gamma_3 \times [0,T]$ qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact telle que $0 \leq \beta \leq 1$.

Quand $\beta = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tout les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tout les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion ; et quand $0 < \beta < 1$, c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la traction des liens.

On suppose que la contrainte normale satisfait la condition *de compliance normale et adhésion*

$$-\sigma_\nu = p_\nu\left(u_\nu\right) - \gamma_\nu \beta^2 \left(-R_\nu\left(u_\nu\right)\right)_+ \quad \text{sur} \;\; \Gamma_3 \times [0,T]\,. \tag{1.1.11}$$

Conditions de contact sans frottement avec adhésion

On suppose que la résistance au mouvement tangentiel est générée par la colle en comparaison à ce que la traction tangentielle soit négligeable. Ainsi elle dépend seulement de l'intensité d'adhésion et du déplacement tangentiel.

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta, u_\tau) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0, T]. \tag{1.1.12}$$

En particulier, on doit considérer le cas :

$$p_\tau(\beta, r) = \begin{cases} q_\tau(\beta)\, r & \text{si} \quad \|r\| < L_0, \\ q_\tau(\beta)\, \frac{r}{\|r\|} L_0 & \text{si} \quad \|r\| > L_0, \end{cases} \tag{1.1.13}$$

où $L_0 > 0$ est la longueur limite liée, et q_τ est une fonction de raideur tangentielle non négative.

Conditions de contact avec frottement et adhésion

On présente dans ce qui suit quelques exemples de loi de frottement intervenant dans ce mémoire.

a) Loi de Coulomb

C'est une des lois les plus répandues et elle est réaliste. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de glissement et peut s'énoncer comme suit :

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu |\sigma_\nu|, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu |\sigma_\nu| \Longrightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu |\sigma_\nu| \Longrightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau, \end{cases} \tag{1.1.14}$$

où μ est le coefficient de frottement. Dans (1.1.14) on rajoute des conditions aux limites de contact bilatéral $(u_\nu = 0)$ ou unilatéral $(u_\nu \leq 0,\ \sigma_\nu \leq 0,\ \sigma_\nu u_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3)$.

La loi de Coulomb est souvent utilisée pour les corps rigides ou élastiques. On remarque également qu'il s'agit d'une loi à seuil, tant que le seuil n'est pas attient, il n'y a pas de glissement. Ce seuil est variable et dépend de la contrainte normale ce qui représente une difficulté majeure pour l'étude mathématique de cette loi de frottement, voir par exemple [10], [14].

b) Loi de coulomb avec seuil de type Stromberg

Cette loi de frottement est une version de la *Loi de Coulomb* proposée récemment dans

Stromberg [32]. On peut supposer que le contact est bilatéral ou unilatéral. On remplace dans la loi précédent le seuil de frottement $p = |\sigma_\nu|$ par le seuil du type $p(|\sigma_\nu|) = |\sigma_\nu|(1 - |\alpha\sigma_\nu|)_+$où α est une constante positive liée à l'usure de la surface en contact. La considération de ce expérimentaux donnent pour α des valeurs trés petites. En résumé, cette loi s'énoncer comme suit :

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu p(|\sigma_\nu|), \\ \|\sigma_\tau\| < \mu p(|\sigma_\nu|) \Longrightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu p(|\sigma_\nu|) \Longrightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau. \end{cases} \tag{1.1.15}$$

c) Loi de coulomb non locale généralisée

On présente la loi de frottement qui fait l'objet de notre étude et qui généralise la loi présédente. Soit l'opérateur R *une régularisante normale*, c'est à dire un opérateur linéaire continu $R : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$. La régularisante R est introduite pour des raisons techniques car la trace du tenseur des contraintes sur la frontière est trés irrégulière. Cette loi s'énoncer comme suit :

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu p(|R\sigma_\nu|), \\ \|\sigma_\tau\| < \mu p(|R\sigma_\nu|) \Longrightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu p(|R\sigma_\nu|) \Longrightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau. \end{cases} \tag{1.1.16}$$

où $p : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est le seuil de frottement vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_\nu = 0 & \text{si } u_\nu < 0, \\ -h < \sigma_\nu < 0 & \text{si } u_\nu = 0, \\ \sigma_\nu = -h & \text{si } u_\nu > 0, \end{cases} \tag{1.1.17}$$

La présence de l'opérateur R dans (1.1.16) nous conduit à appeler (1.1.16) *loi de frottement non locale*. Remarquons que l'hypothèse (1.1.17) est satisfaite pour les deux loi présédentes. Aux conditions (1.1.17) on rajoute des conditions de contact bilatéral ou unilatéral.

D'un autre côté le processus d'adhésion est gouverné par l'équation différentielle

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu (u_\nu)^2 + \gamma_\tau \|R_\tau (u_\tau)\|^2) - \epsilon_a)_+ \text{ sur } \Gamma_3 \times [0,T],$$

où $R_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $R_\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sont des troncatures telles que.

$$\begin{aligned} R_\nu (s) &= \begin{cases} L_0 & \text{si} \quad s \leq -L_0, \\ -s & \text{si} \quad -L_0 \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si} \quad s \geq 0, \end{cases} \\ R_\tau (v) &= \begin{cases} v & \text{si} \quad \| v\| \leq L_0, \\ L_0 \dfrac{v}{\|v\|} & \text{si} \quad \| v\| \geq L_0, \end{cases} \end{aligned}$$

où L_0 est la longueur caractéristique des liens.

Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [20].

De plus, On a utilisé dans le troisième chapitre de ce mémoire de nouvelles lois de contact couplé à l'adhésion pour des problèmes quasistatiques. On peut se référer à [26] ,où Raous, Cangémi et Cocu ont dévloppé un nouveau modèle couplant le contact unilatéral, frottement et adhétion.

Ces lois de contact avec frottement couplé à l'adhésion sont donnés par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} u_\nu \leq 0, \sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu \leq 0, u_\nu \left(\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu\right) = 0, \\ \left|\sigma_\tau + C_\tau \beta^2 u_\tau\right| < \mu p(\left|R(\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu)\right|) \Longrightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ \left|\sigma_\tau + C_\tau \beta^2 u_\tau\right| = \mu p(\left|R(\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu)\right|) \Longrightarrow \exists \lambda \geq 0, \\ \textit{tel que } \dot{u}_\tau = -\lambda \left(\sigma_\tau + C_\tau \beta^2 u_\tau\right). \end{cases}$$

sur la partie Γ_3 de la frontière.

1.1.4 Formulation des problèmes

L'évolution d'un corps déformable sous l'action des efforts extérieurs est modelisée mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles contenant l'équation de mouvement (*ou d'équilibre*) du corps, la loi de comportement du matériau ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis. On considère dans les chapitres $2, 3$ des matériaux ayant des lois de comportement élastiques et viscoélastiques soumis à des conditions aux limites de contact sans frottement avec adhésion et avec frottement et adhésion citées dans le paragraphe précédent, dans le cas quasistatique. Plus précisement, les problèmes mécaniques qu'on va étudier sont les suivants :

Problème élastique de contact sans frottement avec compliance normale et adhésion

Problème 1

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *et le champ des contraintes* $\sigma : \Omega \times [0,T] \longrightarrow S_d$, *et le champ d'adhésion* $\beta : \Gamma_3 \times [0,T] \longrightarrow [0,1]$ *tels que :*

$$
\begin{array}{lll}
\sigma = F\left(\varepsilon\left(u\right)\right) & \text{dans} & \Omega \times [0,T]\,, \\
Div\ \sigma + f_0 = 0 & \text{dans} & \Omega \times [0,T]\,, \\
u = 0 & \text{sur} & \Gamma_1 \times [0,T]\,, \\
\sigma\nu = f_2 & \text{sur} & \Gamma_2 \times [0,T]\,, \\
-\sigma_\nu = p_\nu\left(u_\nu\right) - \gamma_\nu \beta^2 \left(-R_\nu\left(u_\nu\right)\right)_+ & \text{sur} & \Gamma_3 \times [0,T]\,, \\
-\sigma_\tau = p_\tau(\beta, u_\tau) & \text{sur} & \Gamma_3 \times [0,T]\,, \\
\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu\left(u_\nu\right)^2 + \gamma_\tau \left\|R_\tau\left(u_\tau\right)\right\|^2) - \epsilon_a)_+ & \text{sur} & \Gamma_3 \times [0,T]\,, \\
u\left(0\right) = u_0 & \text{dans} & \Omega, \\
\beta\left(0\right) = \beta & \text{sur} & \Gamma_3.
\end{array}
$$

Problème Viscoélastique Couplant l'Adhésion et le Frottement

Problème 2

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, *et le champ des contraintes* $\sigma : \Omega \times [0,T] \longrightarrow S_d$, *et le champ d'adhésion* $\beta : \Gamma_3 \times [0,T] \longrightarrow [0,1]$ *tels que :*

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) \qquad \text{dans} \quad \Omega \times [0,T],$$

$$Div\ \sigma + f_0 = 0 \qquad \text{dans} \quad \Gamma_1 \times [0,T],$$

$$u = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times [0,T],$$

$$\sigma\nu = f_2 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0,T],$$

$$\begin{cases} u_\nu \leq 0, \sigma_\nu + C_\nu\beta^2 u_\nu \leq 0, u_\nu\left(\sigma_\nu + C_\nu\beta^2 u_\nu\right) = 0, \\ \left\|\sigma_\tau + C_\tau\beta^2 u_\tau\right\| < \mu p(\left|R(\sigma_\nu + C_\nu\beta^2 u_\nu)\right|) \Longrightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ \left\|\sigma_\tau + C_\tau\beta^2 u_\tau\right\| = \mu p(\left|R(\sigma_\nu + C_\nu\beta^2 u_\nu)\right|) \Longrightarrow \exists\lambda \geq 0, \\ tel\ que\ \dot{u}_\tau = -\lambda\left(\sigma_\tau + C_\tau\beta^2 u_\tau\right) \end{cases} \qquad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0,T],$$

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu)^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau)\|^2) - \epsilon_a)_+ \qquad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0,T],$$

$$u(0) = u_0 \qquad \text{dans} \quad \Omega,$$

$$\beta(0) = \beta_0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_3.$$

Chapitre 2

Problème élastique de contact sans frottement avec compliance normale et adhésion

Dans ce chapitre, on considère le cas d'une loi de comportement élastique non-linéaire, le contact est supposé sans frottement avec compliance normale et adhésion. Le processus est supposé quasistatique, l'évolution du champ d'adhésion est modélisée par une équation différentielle ordinaire d'ordre un.

Ce chapitre est composé de deux parties. Dans la première partie nous donnons la formulation variationnelle du problème mécanique à l'aide de la formule de Green et les hypothèses considérées. Aprés nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible de ce problème, en utilisant un théorème d'existence et d'unicité sur les équations variationnelles associées à des opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Dans la deuxième partie on étudie l'approximation variationnelle du problème variationnel, ainsi que l'estimation de l'erreur.

2.1 Position du problème et hypothèses

Dans cette section, on décrit le modèle pour le processus quasistatique. Le cadre physique est comme suite :

Soit un corps matériel élastique qui à l'instant t = 0 occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d\,(d = 2, 3)$ de frontière régulière Γ, constituées de trois parties disjointes mesurables $\Gamma\ _1$, Γ_2, Γ_3 tels que $mes\ \Gamma_1 > 0$. Soit ν le vecteur unitaire de la normale sortante à Γ. Le corps est supposé fixé sur la partie Γ_1, on a des forces volumiques et surfaciques de densité f_0, f_2 agissant respectivement dans Ω et sur Γ_2. Le corps est susceptible d'entrer en contact avec une fondation déformable le long de Γ_3 ; le contact est sans frottement avec compliance normale et adhésion. Ainsi le problème mécanique considéré se formule de façon suivante :

Problème P : Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \to S_d$,et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \to [0, 1]$ tels que :

$$\begin{aligned}
\sigma &= F\left(\varepsilon\left(u\right)\right) && \text{dans } \Omega \times [0, T]\,, && (2.1.1)\\
Div\ \sigma + f_0 &= 0 && \text{dans } \Omega \times [0, T]\,, && (2.1.2)\\
u &= 0 && \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T]\,, && (2.1.3)\\
\sigma\nu &= f_2 && \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T]\,, && (2.1.4)\\
-\sigma_\nu &= p_\nu\left(u_\nu\right) - \gamma_\nu \beta^2 \left(-R_\nu\left(u_\nu\right)\right)_+ && \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]\,, && (2.1.5)\\
-\sigma_\tau &= p_\tau(\beta, u_\tau) && \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]\,, && (2.1.6)\\
\dot{\beta} &= -(\beta(\gamma_\nu R_\nu\left(u_\nu\right))^2 + \gamma_\tau \left\|R_\tau\left(u_\tau\right)\right\|^2) - \epsilon_a)_+ && \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]\,, && (2.1.7)\\
u\left(0\right) &= u_0 && \text{dans } \Omega, && (2.1.8)\\
\beta\left(0\right) &= \beta_0 && \text{sur } \Gamma_3. && (2.1.9)
\end{aligned}$$

L'équation (2.1.1) représente la loi de comportement élastique non-linéaire où $\varepsilon(u)$ dénote le champ des déformations linéarisés. (2.1.2) est l'équation d'équilibre où f_0 est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable Ω, tandis que les conditions (2.1.3) ; (2.1.4) sont respectivement des conditions aux limites de déplacement et de traction. Les conditions aux limites (2.1.5) représente le contact avec compliance normale et adhésion. (2.1.6) représentente l'équation de la résistance au mouvement tangentiel qui généré par la colle tel que le contact est sans frottement. L'équation (2.1.7) est un équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion.

$R_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $R_\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sont des troncatures telles que :

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L_0 & \text{si} \quad s \leq -L_0. \\ -s & \text{si} \quad -L_0 \leq s \leq 0. \\ 0 & \text{si} \quad s \geq 0. \end{cases} \tag{2.1.10}$$

$$R_\tau(v) = \begin{cases} v & \text{si} \quad \| v\| \leq L_0. \\ L_0 \dfrac{v}{\|v\|} & \text{si} \quad \| v\| \geq L_0. \end{cases} \tag{2.1.11}$$

où L_0 est la longueur caractéristique des liens.

Finalement, les relations (2.1.8) ; (2.1.9) représentent les conditions initiales.
obtenir la formulation variationnelle du problème mécanique (2.1.1) $-$ (2.1.9) nous considérons le sous-espace fermé V de H_1 définir par.

$$V = \{v \in H_1 / \ v = 0 \ sur \ \Gamma_1\},$$

qui est muni de structure *Hilbertienne* habituelle définie par :

$$\langle u, v\rangle_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \ u, v \in V, \tag{2.1.12}$$

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V \ . \tag{2.1.13}$$

Par l'inégalité de *Korn*, il vient que $\|.\|_{H_1}$et $\|.\|_V$ sont des normes équivalentes sur V, donc $(V, \|.\|_V)$ est un espace de *Hilbert réel*.

En outre, par le théorème de trace de soboleve, il existe une constante $C_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω , Γ_1 , Γ_3 telle que :

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 \|v\|_V \qquad \forall v \in V. \tag{2.1.14}$$

l'étude du problème **P** on considère les hypothèse suivantes :

Nous supposons que le tenseur d'élasticité $F : \Omega \times S_d \to S_d$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (a)\ \ F \text{ est fortement monotone.} \\ \text{il existe } m > 0 \text{ tell que :} \\ \langle F(x, \varepsilon_1) - F(x, \varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rangle \geq m\, |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \ \text{ pour tout } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_d; \\ \ \ p.p.x \in \Omega. \\ (b)\ \ F \text{ est de lipschitz .} \\ \text{il existe } L > 0 \text{ tel que :} \\ |F(x, \varepsilon_1) - F(x, \varepsilon_2)| \leq L\ \ |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \ \text{ pour tout } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_d;\ p.p.x \in \Omega. \\ (d)\ \ x \to F(x, \varepsilon) \ \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in S_d. \\ (c)\ \ x \to F(x, 0_d) \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{2.1.15}$$

De même nous supposons que la fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

satisfait aux :

$$
\begin{cases}
(a) \text{ il existe } \ L_\nu > 0 \text{ tel que :} \\
|p_\nu(x,r_1) - p_\nu(x,r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \ \text{ pour tout } r_1, r_2 \in S_d; \\
p.p.x \in \Gamma_3. \\
(b) \text{ L'application } x \to p_\nu(x,r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}. \\
(c) \text{ L'application } x \to p_\nu(x,r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0.
\end{cases}
\tag{2.1.16}
$$

Et la fonction de contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{\ d}$ satisfait aux :

$$
\begin{cases}
(a) \text{ il existe } L_\tau > 0 \text{ tel que :} \\
\|p_\tau(x,\beta_1,r_1) - p_\tau(x,\beta_2,r_2)\| \leq L_\tau (|\beta_1 - \beta_2| + |r_1 - r_2|) \\
\forall \ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}; \ r_1, r_2 \in \mathbb{R}^d; \ p.p.x \in \Gamma_3 \ . \\
(b) \text{ L'application } x \to p_\tau(x,\beta,r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \\
\forall \beta \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^d. \\
(c) \text{ L'application } x \to p_\tau(x,0,0) \in L^2(\Gamma_3)^d. \\
(d) \ p_\tau(x,\beta,r)\,\nu(x) = 0, \forall r \in \mathbb{R}^d \text{ tel que}, \nu(x) = 0 \ p.p.x \in \Gamma_3.
\end{cases}
\tag{2.1.17}
$$

Les coefficients d'adhésion $\gamma_\tau$et $\gamma_\nu$satisfont aux :

$$
\gamma_\nu \ \in \ L^\infty(\Gamma_3) \quad et \ \ \gamma_\nu \geq 0 \quad p.p.x \in \Gamma_3. \tag{2.1.18}
$$

$$
\gamma_\tau \ \in \ L^\infty(\Gamma_3) \quad et \ \ \gamma_\tau \geq 0 \quad p.p.x \in \Gamma_3. \tag{2.1.19}
$$

Le paramètre matériel ϵ_a satisfait à :

$$
\epsilon_a \in \ L^\infty(\Gamma_3) \quad et \ \ \epsilon_a \geq 0 \quad p.p.x \in \Gamma_3. \tag{2.1.20}
$$

Les conditions initiales satisfont aux :

$$u_0 \in V \tag{2.1.21}$$

$$\beta_0 \in L^{\infty}(\Gamma_3) \text{ et } 0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad p.p.x \in \Gamma_3. \tag{2.1.22}$$

Finalement les forces volumiques et les forces surfaciques respectivement ont la régularité :

$$f_0 \in L^{\infty}(0, T, H), \quad f_2 \in L^{\infty}\left(0, T, L^2(\Gamma_2)^d\right) \tag{2.1.23}$$

On note par v_ν et v_τ les composantes normale et tangentielle du tenseur de v sur la frontière Γ données par :

$$v_\nu = v.\nu, \; v_\tau = v - v_\nu.\nu. \tag{2.1.24}$$

Similairement, on définit les composantes normale et tangentielle du champ des contraintes par :

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu, \; \sigma_\tau = \sigma v - \sigma_\nu.\nu. \tag{2.1.25}$$

Remarque 2.1.1. On trouve de (2.1.10) ; (2.1.11) que :

$$|R_\nu(u_\nu) - R_\nu(v_\nu)| \leq \|u - v\| \qquad \forall \; u, v \in V, \tag{2.1.26}$$

$$|\|R_\tau(u_\tau)\| - \|R_\tau(v_\tau)\|| \leq \|u - v\| \qquad \forall \; u, v \in V. \tag{2.1.27}$$

Maintenant, utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous définissons une fonction $f : [0, T] \to V$ par :

$$\langle f(t), v\rangle_V = \langle f_0(t), v\rangle_H + \langle f_2(t), v\rangle_{L^2(\Gamma_2)^d} \;\; \forall v \in V, \; p.p.t \in [0, T]. \tag{2.1.28}$$

Soit $j : L^{\infty}(\Gamma_3) \times V \times V \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle

$$
\begin{aligned}
j(\beta, u, v) = & \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu \, da - \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 (-R_\nu(u_\nu))_+ v_\nu \, da \\
& + \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta, u_\tau) v_\tau \, da \qquad \forall u, v \in V.
\end{aligned} \tag{2.1.29}
$$

Remarque 2.1.2. on remarque que la définition (2.1.28) joint à (2.1.23) montre que :

$$
f \in L^\infty(0, T, V). \tag{2.1.30}
$$

Et les conditions (2.1.16) ; (2.1.17) entraîne que l'intégrale (2.1.29) est bien dévinie.

Maintenant, on va dériver la formulation variationnelle du problème **P.**

2.2 Formulation variationnelle

Nous supposons dans la suit que $\{u, \sigma, \beta\}$ sont des fonction assez régulières satisfaisant aux $(2.1.1); (2.1.9)$.

soit $v \in V$, soit $t \in [0.T]$, on a de la formule de Green.

$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div(\sigma(t)), v \rangle_H = \langle \sigma\nu, \gamma_\nu \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$,

$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div(\sigma(t)), v \rangle_H = \int_{\Gamma} \sigma\nu(t).vda,$

Alors :

$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div(\sigma(t)), v \rangle_H = \int_{\Gamma_1} \sigma\nu(t).vda + \int_{\Gamma_2} \sigma\nu(t).vda + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu(t).vda,$

pour $v \in V$ on trouve :

$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div(\sigma(t)), v \rangle_H = \int_{\Gamma_2} \sigma\nu(t).vda + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu(t).vda,$

En utilisant $(2.1.4) - (2.1.6)$ il vient :

$$\langle\sigma(t),\varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}}+\langle Div(\sigma(t)),v\rangle_H=\int_{\Gamma_2} f_2(t).v\ da-\int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu)v_\nu\ da+$$

$$+\int_{\Gamma_3}\gamma_\nu\beta^2(-R_\nu(u_\nu))_+v_\nu\ da\ -\int_{\Gamma_3}p_\tau(\beta,u_\tau)v_\tau\ da,$$

pour la relation (2.1.2) on obtient :

$$\langle\sigma(t),\varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}}+\int_{\Gamma_3}p_\nu(u_\nu)v_\nu da-\int_{\Gamma_3}\gamma_\nu\beta^2(-R_\nu(u_\nu))_+v_\nu da$$

$$+\int_{\Gamma_3}p_\tau(\beta,u_\tau)v_\tau da=\langle f_0(t),v\rangle_H+\langle f_2(t),v\rangle_{L^2(\Gamma_2)^d},$$

ce qui joint à (2.1.28) ; (2.1.29) il montre que :

$$\langle\sigma(t),\varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}}+j(\beta(t),u(t),v)=\langle f(t),v\rangle_V\quad\forall v\in V.\qquad(2.2.1)$$

Finalement, nous obtenous à partir de (2.1.1) ; (2.1.7) − (2.1.9) et (2.2.1) on obtient la formulation variationnelle du problème **P**.

Problème $\mathbf{P}_V$: *Trouver un champ des déplacements* $u:[0,T]\to V$*, un champ des contraints* $\sigma:[0,T]\to H$ *et un champ d' adhésion* $\beta:[0,T]\to L^\infty(\Gamma_3)$ *tels que :*

$$\sigma(t)=F(\varepsilon(u(t)))\quad p.p\ \ t\in[0.T],\qquad(2.2.2)$$

$$\langle\sigma(t),\varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}}+j(\beta(t),u(t),v)=\langle f(t),v\rangle_V\quad\forall v\in V,\ \ p.p\ t\in[0.T],\qquad(2.2.3)$$

$$\dot\beta(t)=-(\beta(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2+\gamma_\tau\|R_\tau(u_\tau(t))\|^2)-\epsilon_a)_+\ p.p\ \forall t\in[0.T],\qquad(2.2.4)$$

$$u(0)=u_0,\ \beta(0)=\beta_0,\qquad(2.2.5)$$

2.3 Résultat d'existence et d'unicité

Notre intérêt principal dans ce paragraphe est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnelle $\mathbf{P}_V$.

Théorème 2.3.1. Sous les hypothèses $(2.1.15)-(2.1.23)$, il existe une solution unique $\{u, \beta, \sigma\}$ de problème $\mathbf{P}_V$ ayant la régularité suivante.

$$u \in L^{\infty}(0, T, V), \tag{2.3.1}$$

$$\sigma \in L^{\infty}(0, T, \mathcal{H}_1), \tag{2.3.2}$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T, L^{\infty}(\Gamma_3)), \tag{2.3.3}$$

Remarque 2.3.1. On conclut que sous les hypthèses $(2.1.15)-(2.1.23)$ le problème **P** possède une solution faible unique satisfaisant $(2.3.1)-(2.3.3)$.

Démonstration : La démonstration de cette théorème sera faite en plusieurs étapes. Elle est basée sur les équations variationnelles, les opérateurs fortement monotone et les arguments du point fixe. A cet effet, nous assumons dans la suite que $(2.1.15)-(2.1.23)$ sont satisfaites et c est une constante positive générique qui peut dépendre de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, p_\tau, p_\nu, \gamma_\tau, \gamma_\nu$ et L, dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite de diverses fonctions de $x \in \Omega \cup \Gamma$.

Etape 1

Soit $\eta \in L^{\infty}(0, T, V)$ donné. Dans la premièr étape on considère le problème variationnel suivant :

Problème $\mathbf{P}_V^{\eta}$: *Trouver le champ de déplacement* $u_\eta : [0, T] \to V$ *tel que*

$$\langle F(\varepsilon(u_\eta(t))), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \eta(t), v\rangle_V = \langle f(t), v\rangle_V \quad \forall v \in V \quad p.p.t \in [0, T]. \tag{2.3.4}$$

Nous avons le resultat suivant.

Lemme 2.3.1. Il existe une solution unique du problème $\mathbf{P}_V^{\eta}$, ayant la régularété

$u_\eta \in L^\infty(0,T,V)$.

Démonstration du lemme 2.3.1 : Pour $u_\eta \in V$ fixé, $v \to \langle F(\varepsilon(u_\eta)), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}}$ représente une fonctionnelle linéaire, et continue sur V, en appliquant le Théorème de représentation de *Riesz -Fréchet*, on définit l'opérateur

$B : V \to V$ tel que :

$$\langle Bu_\eta, v\rangle_V = \langle F(\varepsilon(u_\eta)), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} \qquad \forall u_\eta, v \in V.$$

On montre que Bu_η est linéaire continue.

Pour tout $u_\eta, v_1, v_2 \in V$ on a.

$$\langle Bu_\eta, \lambda v_1 + \mu v_2\rangle_V = \langle F(\varepsilon(u_\eta)), \varepsilon(\lambda v_1 + \mu v_2)\rangle_{\mathcal{H}},$$

Et d'aprés la linéairité de ε il vient :

$$\begin{aligned}\langle Bu_\eta, \lambda v_1 + \mu v_2\rangle_V &= \lambda \ \langle F(\varepsilon(u_\eta)), \varepsilon(v_1)\rangle_{\mathcal{H}} + \mu \ \langle F(\varepsilon(u_\eta)), \varepsilon(v_2)\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \lambda \ \langle Bu_\eta, v_1\rangle_V + \mu \ \langle Bu_\eta, v_2\rangle_V .\end{aligned}$$

Alors Bu_η est linéaire.

Pour tout $u_\eta, v \in V$ on a :

$$|Bu_\eta(v)| = |\ \langle F(\varepsilon(u)), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}}| \leq |F\varepsilon(u_\eta)|_{\mathcal{H}} |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}},$$

Et d'aprés (2.1.13) et (2.1.15) (b) on trouve.

$$\begin{aligned}|Bu_\eta(v)| = \left|\ \langle F(\varepsilon(u_\eta)), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}}\right| &\leq |F\varepsilon(u_\eta) - F(0)|_{\mathcal{H}} |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \\ &\leq L\,|\varepsilon(u_\eta)|_{\mathcal{H}}\ |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \\ &\leq L\,|u_\eta|_V\ |v|_V \leq C\,|v|_V,\end{aligned}$$

Alors Bu_η est continue.

On montre que B est fortement monotone, et de *Lipschitz*.

Pour tout $u_{\eta1}, u_{\eta2} \in V$ et (2.1.15) (a) on a :

$$\begin{aligned}\langle Bu_{\eta1} - Bu_{\eta2}, u_{\eta1} - u_{\eta2}\rangle_V &= \langle F(\varepsilon(u_{\eta1}) - \varepsilon(u_{\eta2})), \varepsilon(u_{\eta1}) - \varepsilon(u_{\eta2})\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\geq m\,|\varepsilon(u_{\eta1}) - \varepsilon(u_{\eta2})|_{\mathcal{H}}^2,\end{aligned}$$

Et d'aprés (2.1.13) il vient.

$\langle Bu_{\eta1} - Bu_{\eta2}, u_{\eta1} - u_{\eta2}\rangle_V \geq c\,|u_{\eta1} - u_{\eta2}|_V^2$. d'où B est fortement monotone

De même pour tout $u_{\eta1}$, $u_{\eta2} \in V$ et $v \in V$ on a :

$$\begin{aligned}\left|\langle Bu_{\eta1} - Bu_{\eta2}, v\rangle_V\right| = \langle F(\varepsilon(u_{\eta1}) - \varepsilon(u_{\eta2})), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} &\leq |F(\varepsilon(u_{\eta1}) - \varepsilon(u_{\eta2}))|_{\mathcal{H}}\ |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \\ &\leq L\,|\varepsilon(u_{\eta1}) - \varepsilon(u_{\eta2})|_{\mathcal{H}} |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \\ &\leq L\,|u_{\eta1} - u_{\eta2}|_V\,|v|_V,\end{aligned}$$

Donc

$$|Bu_{\eta 1} - Bu_{\eta 2}|_V \leq L\,|u_{\eta 1} - u_{\eta 2}|_V\,.$$

Donc B est de *Lipschitz.*

Alors B est un opérateur continu, fortement monotone, et de Lipschitz, donc pour le théorème de *Minty Browder*, B est bijection en outre il admet un inverse B^{-1}fortement monotone et de *Lipschitz* et il satisfait:

$$\left|B^{-1}u_{\eta 1} - B^{-1}u_{\eta 2}\right|_V \leq L\,|u_{\eta 1} - u_{\eta 2}|_V\,. \tag{2.3.5}$$

Alors il existe un unique u_η vérifie.

$$\begin{aligned} Bu_\eta(t) &= f\ \ (t)\ \ - \eta(t)\,, \\ u_\eta(t) &= B^{-1}(f\ \ (t)\ \ - \eta(t)). \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Il s'en suit de (2.1.30) que :

$$u_\eta \in\ L^\infty(0,T,V)\,.$$

Pour tout $\eta \in\ L^\infty(0,T,V)$, on note par u_η la solution du problème $\mathbf{P}_V^\eta$ obtenue dans le lemme (2.1.1).

Etape 2

Dans cette étape on résout l'équation différentielle du champ d'adhésion (2.2.4) sous l'hypothèse $u = u_\eta$.

Ainsi, on considère le problème d'évolution suivant.

Problème $\mathbf{P}_\eta^\beta$: *Trouver un champ d'adhésion* $\beta_\eta : [0,T] \to L^\infty(\Gamma_3)$ *tel que :*

$$\dot{\beta}_\eta(t) = -\left(\beta_\eta(t)\left(\gamma_\nu R_\nu\left(u_{\eta\nu}(t)\right)^2 + \gamma_\tau \left\|R_\tau u_{\eta\tau}(t)\right\|^2\right) - \epsilon_a\right)_+ \quad p.p.t \in \ [0.T], \tag{2.3.7}$$
$$\beta_\eta(0) = \beta_0,$$

Lemme 2.3.2. Il existe une unique solution du problème $\mathbf{P}_\eta^\beta$, ayant la régularité (2.3.3) et de plus:

$$0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1 \ \ \forall t \in [0,T] \ \ , \ \ p.p \ sur \ \Gamma_3.$$

Démonstration du lemme 2.3.2 : Soit l'application $F_\eta(t,.) : L^\infty(\Gamma_3) \to L^\infty(\Gamma_3)$ définie par :

$$F_\eta(t,.) = -\left(\beta_\eta(t)\left(\gamma_\nu R_\nu\left(u_{\eta\nu}(t)\right)\right)^2 + \gamma_\tau \left\|R_\tau u_{\eta\tau}(t)\right\|^2\right) - \epsilon_a\right)_+ \quad p.p.t \in [0,T],$$

De (2.1.18)-(2.1.20) et (2.1.26)-(2.1.27), on vérifie que $\forall\ \beta_1, \beta_2 \in L^\infty(\Gamma_3)$, F_η satisfait à :

$$\|\ F_\eta(.,\beta_1) - \ F_\eta(.,\beta_2)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq L_F \ \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \quad p.p.t \in [0,T],$$

$L_F > 0$, et qui est dépend de γ_τ, γ_ν, ϵ_a, L_0 mais ne dépent pas du temps.

Par ailleurs, il existe $p = \infty$ tel que $F_\eta(.,\beta)$ apprtient à $L^\infty(0,T,L^\infty(\Gamma_3))$.$\forall$ $\beta \in L^\infty(\Gamma_3)$ et comme $\beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3)$, on peut appliquer le théorème de *cauchy- lipschitz* (*Annexe théorème A.1.10*) et pour la démonstration voir *Suquet* [33] *page 60*), qui nous donne l'existance et l'unicité d'une fonction $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0,T,L^\infty(\Gamma_3))$ tel que :

$$\dot{\beta}_\eta(t) = -\left(\beta_\eta(t)\left(\gamma_\nu R_\nu\left(u_{\eta\nu}(t)\right)^2 + \gamma_\tau \left\|R_\tau u_{\eta\tau}(t)\right\|^2\right) - \epsilon_a\right)_+ \quad p.p.t \in \ [0.T],$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0.$$

Notons que la restriction $0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1$ est incluse implicitement dans le problème variationnel $\mathbf{P}_V$. En effet (2.3.7) nous garantie que $\beta_\eta(t) \leq \beta_0$ pour tout $t \geq 0$ (parce que β_η est une fonction décroissante pour la variable t) donc l'hépothèse (2.1.22) montre que $\beta_\eta(t) \leq 1$ pour $t \geq 0$, *p.p sur* Γ_3. D'un autre coté, si $\beta_\eta(t_0) = 0$ à $t = t_0$, alors il s'ensuit de (2.3.7) que $\dot{\beta}_\eta(t) = 0$ pour $t \geq t_0$ (car si $t \geq t_0 \Rightarrow \beta_\eta(t) \leq \beta_\eta(t_0)$ donc (2.3.7) nous donne $\dot{\beta}_\eta(t) = 0$ pour $t \geq t_0$) donc $\beta_\eta(t)$ est constante pour tout $t \geq t_0$ d'où $\beta_\eta(t) = \beta_\eta(t_0) = 0$ pour tout $t \geq t_0$. Nous concluons que $0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, *p.p sur* Γ_3.

Ce qui achève la démonstration du **lemme 2.3.2**

Etape 3

On considère $\eta \in L^\infty(0, T, V)$, on note par u_η la solution obtenue dans le **lemme 2.3.1** et β_η la solution obtenue dans le **lemme 2.3.2**. Le théorème de représentation de *Riesz*, nous permet de définir une fonction $\Lambda\eta : L^\infty(0, T, V) \to L^\infty(0, T, V)$.

$$\langle \Lambda\eta(t), v\rangle = j\left(\beta_\eta(t), u_\eta(t), v\right) \quad \forall v \in V,\ t \in [0, T] \tag{2.3.8}$$

Lemme 2.3.3. la fonction $\Lambda\eta \in L^\infty(0, T, V)$ en outre il existe une unique fonction $\eta^* \in L^\infty(0, T, V)$ tel que

$$\Lambda\eta^* = \eta^*$$

Démonstration du lemme 2.3.3 : soient $\eta_1,\ \eta_2 \in L^\infty(0, T, V)$ et soit $t \in [0, T]$ fixé et $v \in V$

Notons, pour $i = 1, 2$ et en utilisant (2.1.29) et (2.3.8) .

$|\langle \Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2, v\rangle| = \left|j\left(\beta_{\eta_1}, u_{\eta_1}, v\right) - j\left(\beta_{\eta_2}, u_{\eta_2}, v\right)\right|$,

d'où on déduit que :

$$
\begin{aligned}
|\langle \Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2, v\rangle| \leq & \int_{\Gamma_3} \left|\left(p_\nu\left(u_{\eta_1\nu}\right) - p_\nu\left(u_{\eta_2\nu}\right)\right) v_\nu\right| da + \\
& + \int_{\Gamma_3} \left|\left(p_\tau(\beta_{\eta_1}, u_{\eta_1\tau}) - p_\tau(\beta_{\eta_2}, u_{\eta_2\tau})\right) v_\tau\right| da \\
& + \int_{\Gamma_3} \left|\left(\gamma_\nu \beta_{\eta_1}^2 \left(-R_\nu\left(u_{\eta_1\nu}\right)\right)_+ - \gamma_\nu \beta_{\eta_2}^2 \left(-R_\nu\left(u_{\eta_2\nu}\right)\right)_+\right) v_\nu\right| da,
\end{aligned}
$$

D'après l'inégalité de *Cauchy -Schwartz* on obtient

$$
\begin{aligned}
|\langle \Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2, v\rangle| \leq & \int_{\Gamma_3} \left|p_\nu\left(u_{\eta_1\nu}\right) - p_\nu\left(u_{\eta_2\nu}\right)\right| |v_\nu| da + \\
& + \int_{\Gamma_3} \left|p_\tau(\beta_{\eta_1}, u_{\eta_1\tau}) - p_\tau(\beta_{\eta_2}, u_{\eta_2\tau})\right| |v_\tau| da \\
& + \int_{\Gamma_3} \left|\gamma_\nu \beta_{\eta_1}^2 \left(-R_\nu\left(u_{\eta_1\nu}\right)\right)_+ - \gamma_\nu \beta_{\eta_2}^2 \left(-R_\nu\left(u_{\eta_2\nu}\right)\right)_+\right| |v_\nu| da,
\end{aligned}
$$

En utilisant (2.1.16)-(2.1.17), (2.1.26)-(2.1.27) on trouve :

$$
\begin{aligned}
|\langle \Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2, v\rangle| \leq & L_\nu \int_{\Gamma_3} \left|u_{\eta_1\nu} - u_{\eta_2\nu}\right| |v_\nu| da + \\
& + L_\tau \int_{\Gamma_3} \left(\left|\beta_{\eta_1} - \beta_{\eta_2}\right| + \left|u_{\eta_1\tau} - u_{\eta_2\tau}\right|\right) |v_\tau| da \\
& + \int_{\Gamma_3} \|\gamma_\nu\| \left|\beta_{\eta_1}^2 \left(-R_\nu\left(u_{\eta_1\nu}\right)\right)_+ - \beta_{\eta_2}^2 \left(R_\nu\left(u_{\eta_2\nu}\right)\right)_+\right| |v_\nu| da,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\langle \Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2, v\rangle| \leq & L_\nu \left\|u_{\eta_1\nu} - u_{\eta_2\nu}\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \|v_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} \\
& + L_\tau \left(\left\|\beta_{\eta_1} - \beta_{\eta_2}\right\|_{L^2(\Gamma_3)} + \left\|u_{\eta_1\tau} - u_{\eta_2\tau}\right\|_{L^2(\Gamma_3)}\right) \|v_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)} \\
& + \|\gamma_\nu\| \left\|\beta_{\eta_1}^2 \left(-R_\nu\left(u_{\eta_1\nu}\right)\right)_+ - \beta_{\eta_2}^2 \left(-R_\nu\left(u_{\eta_2\nu}\right)\right)_+\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \|v_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)}
\end{aligned}
$$

En utilisant (2.1.14) on obtient :

$$
\begin{aligned}
|\langle \Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2, v\rangle| \leq & C_\circ^2 L_\nu \left\|u_{\eta_1\nu} - u_{\eta_2\nu}\right\|_V \|v_\nu\|_V + L_\tau C_\circ \left\|\beta_{\eta_1} - \beta_{\eta_2}\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \|v_\tau\|_V \\
& + C_\circ^2 \left\|u_{\eta_1\tau} - u_{\eta_2\tau}\right\|_V \|v_\tau\|_V + \\
& + C_\circ \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left\|\beta_{\eta_1}^2 \left(-R_\nu\left(u_{\eta_1\nu}\right)\right)_+ - \beta_{\eta_2}^2 \left(-R_\nu\left(u_{\eta_2\nu}\right)\right)_+\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \|v_\nu\|_V
\end{aligned}
$$

On pose $v = \Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2$ on obtient :

$$|\Lambda\eta_1 \; - \Lambda\eta_2| \leq \; C_\circ^2 L_\nu \left\| u_{\eta_1\nu} - u_{\eta_2\nu} \right\|_V + L_\tau C_\circ \left\| \beta_{\eta_1} - \beta_{\eta_2} \right\|_{L^2(\Gamma_3)}$$
$$+ C_\circ \left\| \gamma_\nu \right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left\| \beta_{\eta_1}^2 \left(-R_\nu \left(u_{\eta_1\nu} \right) \right)_+ - \beta_{\eta_2}^2 \left(-R_\nu \left(u_{\eta_2\nu} \right) \right)_+ \right\|_{L^2(\Gamma_3)}$$

gardant à l'esprit les propriétés p_τ, p_ν, R_γ, R_τ on obtient.

$$\left\| \Lambda\eta_1(t) \; - \Lambda\eta_2(t) \right\| \leq m \left\| u_{\eta_1\nu}(t) - u_{\eta_2\nu}(t) \right\|_V + n \left\| \beta_{\eta_1}(t) - \beta_{\eta_2}(t) \right\|_{L^2(\Gamma_3)} \tag{2.3.9}$$

Majorons maitenant le terme $\left\| \beta_{\eta_1}(t) - \beta_{\eta_2}(t) \right\|_{L^2(\Gamma_3)}$,de (2.3.8)-(2.3.9) on trouve :

$$\beta_{\eta i}(t) = \beta_0 - \int_0^t \left(\beta_{\eta i}(s) \left(\gamma_\nu R_\nu \left(u_{\eta i\nu} \right)^2 + \gamma_\tau \left\| R_\tau u_{\eta i\tau}(s) \right\|^2 \right) - \epsilon_a \right)_+ ds \tag{2.3.10}$$

Donc de l'égalité précédente on obtient :

$$\left\| \beta_{\eta_1}(t) - \beta_{\eta_2}(t) \right\|_{L^2(\Gamma_3)} = \left| \int_0^t \beta_{\eta_1}(s) \left(\gamma_\nu R_\nu \left(u_{\eta_1\nu}(s) \right)^2 + \gamma_\tau \left\| R_\tau u_{\eta_1\tau}(s) \right\|^2 \right) ds \right.$$
$$\left. - \int_0^t \beta_{\eta_2}(s) \left(\gamma_\nu R_\nu \left(u_{\eta_2\nu}(s) \right)^2 + \gamma_\tau \left\| R_\tau u_{\eta_2\tau}(s) \right\|^2 \right) ds \right|,$$

$$\left\| \beta_{\eta_1}(t) - \beta_{\eta_2}(t) \right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \; c \int_0^t \left| \beta_{\eta_1}(s) \left(\gamma_\nu R_\nu \left(u_{\eta_1\nu}(s) \right)^2 - \beta_{\eta_2}(s) \left(\gamma_\nu R_\nu \left(u_{\eta_2\nu}(s) \right)^2 \right|_{L^2(\Gamma_3)} ds, \right.$$
$$+ c \int_0^t \left\| \beta_{\eta_1}(s) \gamma_\tau \left\| R_\tau u_{\eta_1\tau}(s) \right\|^2 - \beta_{\eta_2}(s) \gamma_\tau \left\| R_\tau u_{\eta_2\tau}(s) \right\|^2 \right\|_{L^2(\Gamma_3)} ds,$$

En utilisant la définition de $R_\nu$et R_τ et écrivant $\theta_1 = \theta_1 - \theta_2 + \theta_2$, nous arrivons à :

$$\left\| \beta_{\eta_1}(t) - \beta_{\eta_2}(t) \right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \left\| \beta_{\eta_1}(s) - \beta_{\eta_2}(s) \right\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + c \int_0^t \left\| u_{\eta_1}\;(s) - u_{\eta_2}(s) \right\|_{L^2(\Gamma_3)} ds,$$

Moyennant une version des **lemme de Gronwall**, il s'ensuit que :

$$\left\| \beta_{\eta_1}(t) - \beta_{\eta_2}(t) \right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \left\| u_{\eta_1}\;(s) - u_{\eta_2}(s) \right\|_{L^2(\Gamma_3)} ds,$$

En utilisant (2.1.14) on obtient :

$$\left\|\beta_{\eta_1}(t)-\beta_{\eta_2}(t)\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\int_0^t \left\|u_{\eta_1}\ (s)-u_{\eta_2}(s)\right\|_V ds \ \ \forall t\in[0,T]\,, \tag{2.3.11}$$

D'aprés (2.3.9), (2.3.11) on obtient :

$$\left\|\Lambda\eta_1\ -\Lambda\eta_2\right\|_V \leq c\int_0^t \left\|u_{\eta_1}\ (s)-u_{\eta_2}(s)\right\| ds + c\left\|u_{\eta_1}-u_{\eta_2}\right\|_V\,,$$

D'autre part (2.3.6) on trouve :

$$\left\|\Lambda\eta_1\ -\Lambda\eta_2\right\|_V \leq K\left|\eta_1(t)-\eta_2(t)\right| + \int_0^t \left|\eta_1(s)-\eta_2(s)\right| ds, \tag{2.3.12}$$

Introduisons les notation suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{I}_0(t) = \left|\eta_1(t)-\eta_2(t)\right|_V \\ \mathcal{I}_1(t) = \int_0^t \left|\eta_1(s)-\eta_2(s)\right|_V ds \\ \mathcal{I}_h(t) = \int_0^t\int_0^{s_{h-1}} \cdots\cdots\int_0^{s_1} \left|\eta_1(r)-\eta_2(r)\right|_V dr ds_1\cdots\cdots\cdots ds_{h-1} \quad \forall\ \ h\geq 2, \end{cases} \tag{2.3.13}$$

Et par récurrence, en notant par Λ^p la puissance $p^{i\grave{e}me}$ de l'opérateur Λ on obtient :

$$\left|\Lambda^p\eta_1(t)\ -\Lambda^p\eta_2(t)\right|_V \leq C^p\left(\sum_{h=0}^{p} C_p^h\ \ I^{p-h}\left|\eta_1(t)-\eta_2(t)\right|\right),$$

Pour tout $t\in[0,T]$ et $p\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{p-h}(\eta_1-\eta_2) = \int_{(p-h)fois}\cdots\cdots\int \left|\eta_1-\eta_2\right| &\leq \int_0^s\int_0^t\cdots\cdots\int_0^z \left\|\eta_1\ -\eta_2\right\|_{L^\infty(0,T,V)} \\ &\leq \frac{t^{p-h}}{p!}\left\|\eta_1\ -\eta_2\right\|_{L^\infty(0,T,V)} \\ &\leq \frac{T^{p-h}}{p!}\left\|\eta_1\ -\eta_2\right\|_{L^\infty(0,T,V)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\Lambda^p\eta_1(t) - \Lambda^p\eta_2(t)| &\leq C^p\left(\sum_{h=0}^{p} C_k^p \frac{T^{p-h}}{p!}|\eta_1(t)-\eta_2(t)|\right)\\ &\leq C^p\frac{(1+T)^p}{p!}\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{L^\infty(0,T,V)},\end{aligned}$$

Comme $lim\ C^p\dfrac{(1+T)^P}{P!} = 0$, cela implique que pour p assez grand l'opérateur puissance Λ^p de Λ est une contraction dans $L^\infty(0,T,V)$. il existe un unique point fixe de Λ et on a $\Lambda^p\eta^* = \eta^*$ et de plus, η^*et aussi l'unique point fixe de Λ vérifiant :

$$\langle\ \Lambda\eta^*(t), v\rangle_V = j\left(\beta_{\eta^*}(t), u_{\eta^*}(t), v\right) = \langle\eta^*(t), v\rangle_V \quad \forall v \in V,$$

Passons maintenant à la démonstration du **théorème 2.1.1**

Démonstration du théorème 2.1.1 : Nous avans maintenant tout les ingrédients pour prouver le **théorème 2.1.1**

Soit $\eta^* \in L^\infty(0,T,V)$ le point fixe de Λ définit par (2.3.8) et soient u_η, β_η les solutions des problèmes $\mathbf{P}_\eta^\beta$ et $\mathbf{P}_V^\eta$ pour $\eta = \eta^*$, $u = u_{\eta^*}, \beta = \beta_{\eta^*}$.

Nous désignons par σ la fonction donnée par (2.2.2). clairment (2.2.2); (2.2.4) et (2.2.5) sont vérifiées. Puisque $\Lambda\eta^* = \eta^*$ on déduit

$$\langle\ \Lambda\eta^*(t), v\rangle_V = \langle\eta^*(t), v\rangle_V \quad \forall v \in V,\ p.p.\ \ t \in [0,T],$$

Et gardant en tête que $u_\eta\ (t)\ = B^{-1}(f\ (t) - \eta(t))$ et (2.3.8) on déduit que (2.2.3) est satisfaite.

La régularité (2.3.1) s'en suit de (2.1.30), pendant que la régularité (2.3.3) et la propriété $0 \leq \beta(t) \leq 1$ sont des conséquences du **lemme 2.3.2.**

En outre, puisque $u \in L^\infty(0,T,V)$, il s'en suit de (2.1.15) et (2.2.2) que $\sigma \in L^\infty(0,T,\mathcal{H})$ .Choissis maintenant $\omega = \varphi$ oú $\varphi \in D(\Omega)^d$ dans (2.2.3) et utilisant (2.2.2); (2.1.28) .

on trouve

$$0\ = Div\sigma + f_0 \quad p.p.t \in [0,T], \tag{2.3.14}$$

Maintenant (2.1.23) et (2.3.14) impliquent que $Div\sigma \in L^{\infty}(0,T,H)$ lequel à son tour implique $\sigma \in L^{\infty}(0,T,\mathcal{H}_1)$ .On conclut que le triplet $\{u,\sigma,\beta\}$ est la solution du problème (2.2.2)-(2.2.5), et qui satisfait (2.3.1)-(2.3.3).

Unicité : La partie de l'unicité est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ, et de l'unicité des problèmes $\mathbf{P}_{\eta}^{\beta}$ et $\mathbf{P}_{V}^{\eta}$.

cet effet, soit $\{u,\sigma,\beta\}$ la solution du problème (2.2.2)-(2.2.5) ayant la régularité (2.3.1)-(2.3.3) et on considère un élément $\eta \in L^{\infty}(0,T,V)$ défini par :

$$u_{\eta}(t) = B^{-1}(f(t) - \eta(t)), \tag{2.3.15}$$

Il s'en suit de (2.3.4) et (2.3.15)

$$u = u_{\eta}, \tag{2.3.16}$$

Et d'aprés le **lemme 2.3.2**, il existe une unique solution β_{η} du problème $\mathbf{P}_{\beta}^{\eta}$ et qui satisfait (2.3.3) ; (2.2.5) et (2.2.4) impliquent que

$$\beta = \beta_{\eta}, \tag{2.3.17}$$

Nous utilisons maitenant (2.3.8) ; (2.2.2) ; (2.2.3) et (2.3.15) on voit que

$$\langle \Lambda\eta(t), v\rangle_V = \langle \eta(t), v\rangle_V \quad \forall v \in V, p.p. \ \ t \in [0,T], \tag{2.3.18}$$

Ce qui implique que $\Lambda\eta = \eta$. Comme Λ a un point fixe unique, on conclut que

$$\eta = \eta^{*}. \tag{2.3.19}$$

La partie d'unicité du **théorème 2.1.1** est maintenant une conséquence des égalités (2.3.16)-(2.3.19) et de (2.2.2) .

2.4 Approximation variationnelle

L'approximation numérique des problèmes aux limites est un domaine mathématique qui, historiquement a fait l'objet de nombreuses recherches, et continue cependant de rester d'actualité, par le fait qu'elle intéresse particulièrement des disciplines comme la mécanique, la biologie, ect .... Il est essentiel de construire des méthodes numériques, de résolution de ces problèmes qui soient à la fois simples, peu coûteuses et efficaces. Les méthodes modernes sont basées sur une *"discrétisation"* des équations et inéquation dont l'idée est d'approcher la solution. Pour les cas quasistatiques, on distingue deux types de *discrétisation complète et incomplète.* La premièr consiste à discrétiser seulement l'espace ainsi que l'intervalle de temps. En faite, ces approches, dans le cas des inéquation variationnelles ont faite l'objet de plusieurs études tel que [7] dans le cas d'un problème viscoélastique ; Cette section se compose de trois parties.

La première partie est destinée à présenter le problème approché, ensuite donner et estimer L'erreur de discrétisation incomplète du problème approché. Dans la seconde partie on présente un résultat de convergence pour le schéma. Le schéma de discrétisation incomplète est analysé a l'aide de la méthode des éléments finis, voir par exemple [9]. En fait, cette méthode est utilisée pour discrétiser l'espace. La convergence forte de ce cas est établie sous une régularité minimale de la solution. Finalement on donne dans la troisième partie une application brève pour mieux comprendre comment construire les espaces à dimension finie ainsi que les solution approchées.

2.4.1 Approximation semi - discrète

On analyse dans cette section, une aproximation semi - descrète du problème $\mathbf{P}_V$ en discrétisant le domaine spatiale. On considère une position générale des espaces arbitraires de dimension finie $V_h \subset V$, $\mathcal{H}_h \subset \mathcal{H}$ et $L_h^\infty(\Gamma_3) \subset L^\infty(\Gamma_3)$ utilisés pour approcher les espace V, $\mathcal{H}$ et $L^\infty(\Gamma_3)$, h est un paramètre de discrétisation destiné à tendre vers zéro. Partout dans cette section, c dénote une constante positive qui ne dépend que de h dont sa valeur peut changer d'une place à une autre. On considère l'approximation incomplète suivante du problème variationnel $\mathbf{P}_V$.

Problème $\mathbf{P}_V^h$: *Trouver un champ des déplacements* $u_h : [0,T] \to V_h$*, un champ des contraints* $\sigma_h : [0,T] \to H\ _h$*et un champ d' adhésion* $\beta_h : [0,T] \to L_h^\infty(\Gamma_3)$ *tels que :*

$$\sigma_h(t) = F(\varepsilon(u_h(t))), \tag{2.4.1}$$

$$\langle \sigma_h(t), \varepsilon(v_h) \rangle_{\mathcal{H}_h} + j(\beta_h(t), u_h(t), v_h) = \langle f(t), v_h \rangle_{V_h} \ \ \forall v_h \in V_h,\ t \in [0.T], \tag{2.4.2}$$

$$\dot{\beta}_h(t) = -(\beta_h(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_{h\nu}(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_{h\tau}(t))\|^2) - \epsilon_a)_+ \ \forall t \in [0.T], \tag{2.4.3}$$

$$u_h(0) = u_{h0},\ \beta_h(0) = \beta_{h0}, \tag{2.4.4}$$

En utilisant des arguments similaire à ceux utilisés pour la démonstration du **Théorème 2.3.1** on démontre que le problème $\mathbf{P}_V^h$ possède une solution unique. Soit le théorème suivant :

Théorème 2.4.1. Sous les hypothèses (2.1.15)-(2.1.23), il existe une solution unique $\{u_h, \beta_h, \sigma_h\}$de problème $\mathbf{P}_V^h$. De plus, la solution satisfait

$u_h \in L^\infty(0,T,V_h)$, $\sigma_h \in L^\infty(0,T,\mathcal{H}_h)$, $\beta_h \in W^{1,\infty}(0,T,L_h^\infty(\Gamma_3))$.

Notre objectif est de tirer des estimation d'erreur pour les différences $u - u_h$, $\sigma - \sigma_h$ et $\beta - \beta_h$. Pour cela, soit $t \in [0.T]$, en utilisant (2.2.2)-(2.2.5) on obtient :

$$\sigma(t) = F(\varepsilon(u(t))), \tag{2.4.5}$$

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v) = \langle f(t), v \rangle_V \quad \forall v \in V,\ t \in [0.T], \tag{2.4.6}$$

$$\dot{\beta}(t) \;=\; \beta_0 \;-\int_0^t (\beta(s)(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(s)))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau(s))\|^2) - \epsilon_a)_+ \, ds \forall t \in [0.T], \tag{2.4.7}$$

et de (2.4.1)-(2.4.4) on obtient :

$$\sigma_h(t) = F(\varepsilon(u_h(t))), \tag{2.4.8}$$

$$\langle \sigma_h(t), \varepsilon(v_h) \rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta_h(t), u_h(t), v_h) = \langle f(t), v_h \rangle_V \quad \forall v_h \in V\ _h,\ t \in [0.T], \tag{2.4.9}$$

$$\dot{\beta}_h(t) \;=\; \beta_{h0} \;-\int_0^t (\beta_h(s)(\gamma_\nu R_\nu(u_{h\nu}(s)))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_{h\tau}(s))\|^2) - \epsilon_a)_+ \, ds, \tag{2.4.10}$$

En remplaçant (2.4.5) dans (2.4.6) on déduit que :

$$\langle F(\varepsilon(u(t))), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v) = \langle f(t), v \rangle_V \quad \forall v \in V, \forall \;\; t \in [0.T], \tag{2.4.11}$$

en remplaçant (2.4.8) dans (2.4.9) on obtient :

$$\langle F(\varepsilon(u_h(t))), \varepsilon(v_h) \rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta_h(t), u_h(t), v_h) = \langle f(t), v_h \rangle_V \;\; \forall v_h \in V\ _h,\ t \in [0.T], \tag{2.4.12}$$

et de (2.4.11) et pour $v = v_h$ on aura :

$$\langle F(\varepsilon(u(t))), \varepsilon(v_h)\rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v_h) = \langle f(t), v_h\rangle_V \ \ \forall v_h \in V_h, \forall\ t \in [0.T], \quad (2.4.13)$$

En soustrayant (2.4.12) de (2.4.13) on obtient :

$$\langle F\varepsilon(u(t)) - F\varepsilon(u_h(t)), \varepsilon(v_h)\rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v_h) - j(\beta_h(t), u_h(t), v_h) = 0. \quad (2.4.14)$$

l'égalité (2.4.14) on déduit que :

$$\begin{aligned}
&\langle F\varepsilon(u(t)) - F\varepsilon(u_h(t)), \varepsilon(u(t)) - \varepsilon(u_h)\rangle_{\mathcal{H}} = \\
&\langle F\varepsilon(u(t)) - F\varepsilon(u_h(t)), \varepsilon(u(t)) - \varepsilon(v_h)\rangle + j(\beta_h(t), u_h(t), u(t) - u_h(t)) - \\
&-j(\beta(t), u(t), u(t) - u_h(t)) + j(\beta(t), u(t), u(t) - v_h) - \\
&-j(\beta_h(t), u_h(t), u(t) - v_h) - \langle F\varepsilon(u(t)) - F\varepsilon(u_h(t)), \varepsilon(u_h(t))\rangle - \\
&-j(\beta(t), u(t), u_h(t)) + j(\beta_h(t), u_h(t), u_h(t)) \qquad \forall v_h \in V_h,\ \forall t \in [0.T].
\end{aligned}$$

d'apérs quelque manipulation algébriques on trouve :

$$\begin{aligned}
&\langle F\varepsilon(u(t)) - F\varepsilon(u_h(t)), \varepsilon(u(t)) - \varepsilon(u_h(t))\rangle_{\mathcal{H}} \leq \\
&\langle F\varepsilon(u(t)) - F\varepsilon(u_h(t)), \varepsilon(u(t)) - \varepsilon(v_h)\rangle + j(\beta_h(t), u_h(t), u(t) - u_h(t)) \\
&-j(\beta(t), u(t), u(t) - u_h(t)) + j(\beta(t), u(t), u(t) - v_h) \\
&-j(\beta_h(t), u_h(t), u(t) - v_h) \qquad \forall v_h \in V_h,\ \forall t \in [0.T].
\end{aligned} \quad (2.4.15)$$

De (2.1.13) et (2.1.15) (a) on a :

$$\langle F\varepsilon(u(t)) - F\varepsilon(u_h(t)), \varepsilon(u(t)) - \varepsilon(u_h(t))\rangle_{\mathcal{H}} \geq m\|u - u_h\|_V^2. \quad (2.4.16)$$

la fonction j satisfait l'inégalité suivante pour tout β_1, β_2 de $L^\infty(\Gamma_3)$ et $u_1, u_2, u_3 \in V$

$$|j(\beta_1, u_1, u_3) - j(\beta_2, u_2, u_3)| \leq c\left(\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \|u_1 - u_2\|_V\right)\|u_3\|_V.$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&\left|j\left(\beta, u, u-u_h\right)-j\left(\beta_h, u_h, u-u_h\right)\right| \leq \\
&c\left(\left\|\beta-\beta_h\right\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_3\right)}+\left\|u_h-u_h\right\|_V\right)\left\|u-u_h\right\|_V .
\end{aligned} \tag{2.4.17}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\left|j\left(\beta, u, u-v_h\right)-j\left(\beta_h, u_h, u-v_h\right)\right| \leq \\
&c\left(\left\|\beta-\beta_h\right\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_3\right)}+\left\|u-u_h\right\|_V\right)\left\|u-v_h\right\|_V .
\end{aligned} \tag{2.4.18}
$$

Moyennant les propriétés de F, l'inégalité de *Korn* et l'équivalence des normes, il vient :

$$
\left\langle F\varepsilon(u)-F\varepsilon\left(u_h\right), \varepsilon(u)-\varepsilon\left(v_h\right)\right\rangle \leq M\left\|u-u_h\right\|_V\left\|u-v_h\right\|_V . \tag{2.4.19}
$$

D'aprés (2.4.15)-(2.4.19) on obtient :

$$
\begin{aligned}
&m\left\|u-u_h\right\|_V^2 \leq c\left(\left\|\beta-\beta_h\right\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_3\right)}+\left\|u-u_h\right\|_V\right)\left\|u-u_h\right\|_V \\
&+c\left(\left\|\beta-\beta_h\right\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_3\right)}+\left\|u-u_h\right\|_V\right)\left\|u-v_h\right\|_V \\
&+M\left\|u-u_h\right\|\left\|u-v_h\right\|_V ,
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité élémentaire siuvante :

$$
ab \leq \frac{a^2}{2\delta}+\frac{\delta b^2}{2}.
$$

pour obtenir l'inégalité :

$$
\begin{aligned}
&m\left\|u-u_h\right\|_V^2 \leq \frac{c}{2\delta}\left[\left\|\beta-\beta_h\right\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_3\right)}+\left\|u-u_h\right\|_V\right]^2 \\
&+\frac{c\delta}{2}\left\|u-u_h\right\|_V^2+\frac{M}{2\delta}\left\|u-u_h\right\|_V^2+\frac{\delta M}{2}\left\|u-v_h\right\|_V^2+ \\
&+\frac{c}{2\delta}\left[\left\|\beta-\beta_h\right\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_3\right)}+\left\|u-u_h\right\|_V\right]^2+\frac{\delta c}{2}\left\|u-v_h\right\|_V^2 ,
\end{aligned}
$$

mais on sait que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+$ d'où on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{m}\left\|u-u_h\right\|_V \leq \sqrt{\frac{c}{2\delta}}\left[\left\|\beta-\beta_h\right\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_3\right)}+\left\|u-u_h\right\|_V\right]+ \\
&+\sqrt{\frac{c\delta}{2}}\left\|u-u_h\right\|_V+\sqrt{\frac{M}{2\delta}}\left\|u-u_h\right\|_V+\sqrt{\frac{\delta M}{2}}\left\|u-v_h\right\|_V+ \\
&+\sqrt{\frac{c}{2\delta}}\left[\left\|\beta-\beta_h\right\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_3\right)}+\left\|u-u_h\right\|_V\right]+\sqrt{\frac{\delta c}{2}}\left\|u-v_h\right\|_V .
\end{aligned}
$$

on peut écrire l'inégalité précédente sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\left\| u-u_h\right\|_V \leq 2\sqrt{\frac{c}{m2\delta}}\left\|\beta-\beta_h\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \\
&+\left[\sqrt{\frac{c\delta}{m2}}+\sqrt{\frac{M}{m2\delta}+2\sqrt{\frac{c}{m2\delta}}}\right]\left\| u-u_h\right\|_V + \\
&+\left[\sqrt{\frac{\delta M}{m2}}+\sqrt{\frac{\delta c}{m2}}\right]\left\| u-v_h\right\|_V \quad \forall v_h \ \in V_h.
\end{aligned} \tag{2.4.20}$$

De plus d'aprés (2.4.5) et (2.4.8) on a :

$$\sigma\left(t\right)-\sigma_h\left(t\right)=F\left(\varepsilon\left(u\left(t\right)\right)\right)-F\left(\varepsilon\left(u_h\left(t\right)\right)\right). \tag{2.4.21}$$

et d'aprés (2.1.13) ; (2.1.15) (b) et (2.4.21) on obtient :

$$\left\|\sigma-\sigma_h\right\| \leq L_F\left\| u-u_h\right\|_V \tag{2.4.22}$$

Finallement en soustrayant (2.4.10) de (2.4.7) on trouve :

$$\begin{aligned}
&\beta\left(t\right)-\beta_h\left(t\right)=\int_0^t((\beta_h\left(s\right)\left(\gamma_\nu R_\nu\left(u_{h\nu}\left(s\right)\right)\right)^2+\gamma_\tau\left\| R_\tau\left(u_{h\tau}\left(s\right)\right)\right\|^2)- \\
&-(\beta\left(s\right)\left(\gamma_\nu R_\nu\left(u_\nu\left(s\right)\right)\right)^2+\gamma_\tau\left\| R_\tau\left(u_\tau\left(s\right)\right)\right\|^2))ds+\beta_0-\beta_{0h} \\
&\forall t\in\left[0.T\right].
\end{aligned}$$

En utilisant les même techniques utilisées pour obtenir (2.3.11) on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left\|\beta\left(t\right)-\beta_h\left(t\right)\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq c\int_0^t\left\| u-u_h\right\|_V ds \\
&+c\int_0^t\left\|\beta-\beta_h\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)}ds+c\left\|\beta_0-\beta_{0h}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)},
\end{aligned} \tag{2.4.23}$$

Donc, en additionnant (2.4.20) et (2.4.23) on trouve :

$$\begin{aligned}
&\left\| u-u_h\right\|_V+\left\|\beta-\beta_h\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq 2\sqrt{\frac{c}{m2\delta}}\left\|\beta-\beta_h\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)}+ \\
&+\left[\sqrt{\frac{c\delta}{m2}}+\sqrt{\frac{M}{m2\delta}}+2\sqrt{\frac{c}{m2\delta}}\right]\left\| u-u_h\right\|_V+ \\
&+\left[\sqrt{\frac{\delta M}{m2}}+\sqrt{\frac{\delta c}{m2}}\right]\left\| u-v_h\right\|_V \ +c\int_0^t\left\| u-u_h\right\|_V ds+c\int_0^t\left\|\beta-\beta_h\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)}ds \\
&+c\left\|\beta_0-\beta_{0h}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \ \forall v_h \ \in V_h \ , \ \forall t\in\left[0.T\right],
\end{aligned}$$

d'où ilrésulte :

$$\left[1-\sqrt{\frac{c\delta}{m2}}+\sqrt{\frac{M}{m2\delta}}+2\sqrt{\frac{c}{m2\delta}}\right]\|u-u_h\|_V+(1-2\sqrt{\frac{c}{m2\delta}})\,\|\beta-\beta_h\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\leq$$
$$\left[\sqrt{\frac{\delta M}{m2}}+\sqrt{\frac{\delta c}{m2}}\right]\|u-v_h\|_V+c\,\|\beta_0-\beta_{0h}\|_{L^\infty(\Gamma_3)}+$$
$$+c\int_0^t(\|u-u_h\|_V+\|\beta-\beta_h\|_{L^\infty(\Gamma_3)})ds\quad \forall v_h\in V_h\ ,\ \forall t\in[0.T]\,,$$

on prend δ tel que :

$$1-\sqrt{\frac{c\delta}{m2}}+\sqrt{\frac{M}{m2\delta}}+2\sqrt{\frac{c}{m2\delta}}>0 \text{ et } 1-2\sqrt{\frac{c}{m2\delta}}>0,$$

d'où on obtient :

$$\begin{aligned}&\|u-u_h\|_V+\|\beta-\beta_h\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\leq c\,\|\beta_0-\beta_{0h}\|_{L^\infty(\Gamma_3)}+\\&+c\,\|u-v_h\|_V+c\int_0^t(\|u(s)-u_h(s)\|_V+\|\beta(s)-\beta_h(s)\|_{L^\infty(\Gamma_3)})ds\\&\forall v_h\in V_h\ ,\ \forall t\in[0.T]\,,\end{aligned}\tag{2.4.24}$$

Moyennant une version des lemmes de Gronwall, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}&\|u-u_h\|_V+\|\beta-\beta_h\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\leq c\,\|\beta_0-\beta_{0h}\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\\&+c\,\|u-v_h\|_V\qquad \forall v_h\ \in V_h\ ,\ \forall t\in[0.T]\,,\end{aligned}\tag{2.4.25}$$

Par conséquent, on a le résultat suivant :

Théorème 2.4.2. Soit (u,β) la solution du problème $\mathbf{P}_V$ et soit (u_h,β_h) la solution du problème $\mathbf{P}_V^h$. Alors a l'estimation d'erreur suivante :

$$\begin{aligned}&\|u(t)-u_h(t)\|_{L^\infty(0.T.V)}+\|\beta(t)-\beta_h(t)\|_{L^\infty(0.T.L^\infty(\Gamma_3))}\leq\\&c\,\|\beta_0-\beta_{0h}\|_{L^\infty(0.T.L^\infty(\Gamma_3))}+c\inf\|u(t)-v_h\|_{L^\infty(0.T.V)}\\&\forall v_h\ \in V_h\ ,\ \forall t\in[0.T]\,,\end{aligned}\tag{2.4.26}$$

L'estimation (2.4.26) est la base de l'analyse de convergence du schéma *semi - discrèt.* En effet, en argumentant comme dans *Raviard* [27], on déduit le résultat de convergence suivant :

Corollaire 2.4.3. On suppose que les conditions $(2.1.15)-(2.1.23)$ sont satisfaits, et

$$\|\beta_0 - \beta_{0h}\| \to 0 \text{ quand } h \to 0, \tag{2.4.27}$$

Alors moyennant $(2.4.22)\,;(2.4.26)$ et $(2.4.27)$ on obtient :

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^\infty(0.T.V)} + \|\beta(t) - \beta_h(t)\|_{L^\infty(0.T.L^\infty(\Gamma_3))} + \|\sigma - \sigma_h\|_{L^\infty(0.T.\mathcal{H}_1)} \to 0,$$

Danc la méthode converge lorsque $h \to 0$.

2.4.2 Approximation complète

On considère maintenant une approximation complète du problème $\mathbf{P}_V$. Soit $0 = t_0 < t_1 < .... < t_N = T$, une partition de l'intervalle de temps $[0, T]$, et soit $k = T/N$ le pas de discrétisation et $t_n = nk$ les noeuds pour $n = 0, 1, ..., N$. Pour une fonction continue $t \to w(t)$ on utilise la notation $w_n = w(t_n)$ et pour une suite $\{w_n\}_{n=0}^N$ on note $\delta w_n = (w_n - w_{n-1})/k$. Dans cette section, c dénote une constante positive indépendante des paramètre de discrétisation k et h.

La discrétisation complète est basée sur un schéma progressif d'Euler et elle est donnée sous la forme suivante :

Problème $\mathbf{P}_V^{hk}$: Trouver le champ des déplacements $u^{hk} = \left\{u_n^{hk}\right\}_{n=0}^N \subset V_h$, le champ des contraintes $\sigma^{hk} = \left\{\sigma_n^{hk}\right\}_{n=0}^N \subset H_h$ et le champ d'adhésion $\beta^{hk} = \left\{\beta_n^{hk}\right\}_{n=0}^N \subset B_h$ tels que :

$$u^{hk}(0) = u_0^h \ , \ \beta^{hk}(0) = \beta_0^h, \tag{2.4.28}$$

Et pour $n = 1, ..., N$

$$\sigma_n^{hk} = F\varepsilon(u_n^{hk}), \tag{2.4.29}$$

$$\left\langle \sigma_n^{hk}, \varepsilon(v_h) \right\rangle_{\mathcal{H}} + j\left(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, v_h\right) = \langle f_n, v_h \rangle_V \qquad \forall v_h \in V_h \ , \tag{2.4.30}$$

$$\delta\beta_n^{hk} = -(\beta_{(n-1)}^{hk}(\gamma_\nu R_\nu \left(u_{(n-1)\nu}^{hk}\right)^2 + \gamma_\tau \left\| R_\tau \left(u_{(n-1)\tau}^{hk}\right) \right\|^2) - \epsilon_a)_+ \ , \tag{2.4.31}$$

En utilisant les arguments classiques des inégalités variationnelles, on déduit l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème $\mathbf{P}_V^{hk}$. Ce que nous énonçons comme suit :

Théorème 2.4.4. On suppose que les conditions $(2.1.15) - (2.1.23)$ sont vérifiées. Alors, il existe une solution unique $\left(u^{hk}, \sigma^{hk}, \beta^{hk}\right)$ du problème $\mathbf{P}_V^{hk}$.

Notre intérêt est d'estimer les différences $u_n - u_n^{hk}, \sigma_n - \sigma_n^{hk}, \beta_n - \beta_n^{hk}$. Soit $n \in \{1, ..., N\}$ et on définit $u_n = u\left(t_n\right), \sigma_n = \sigma\left(t_n\right), \beta_n = \beta\left(t_n\right)$. En utilisant (2.4.5) pour $t = t_n$ on obtient :

$$\sigma_n = F\varepsilon(u_n), \tag{2.4.32}$$

en suite, en soustrayant (2.4.29) de (2.4.32) on trouve :

$$\sigma_n - \sigma_n^{hk} = F\varepsilon(u_n) - F\varepsilon(u_n^{hk}),$$

mais d'aprés (2.1.15) (b) l'opérateur F est de Lipschitz donc il existe $L > 0$ tel que :

$$\left\| F\varepsilon(u_n) - F\varepsilon(u_n^{hk}) \right\| \leq L \left\| \varepsilon(u_n) - \varepsilon(u_n^{hk}) \right\|_{\mathcal{H}},$$

et d'après (2.1.13) on obtient :

$$\left\| F\varepsilon(u_n) - F\varepsilon(u_n^{hk}) \right\|_{\mathcal{H}} \leq L \left\| u_n - u_n^{hk} \right\|_V,$$

d'où, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\left\| \sigma_n - \sigma_n^{hk} \right\| \leq L \left\| u_n - u_n^{hk} \right\|_V, \tag{2.4.33}$$

En remplaçant (2.4.29) dans (2.4.30), il résulte :

$$\left\langle F\varepsilon(u_n^{hk}),\varepsilon(v_h)\right\rangle_{\mathcal{H}}+j\left(\beta_n^{hk},u_n^{hk},v_h\right)=\langle f_n,v_h\rangle_V \quad \forall v_h\in V_h \tag{2.4.34}$$

En soustrayant (2.4.11) de (2.4.34) pour $t=t_n$ et $v=v_n$ on obtient :

$$\left\langle F\varepsilon\left(u_n\right)-F\varepsilon\left(u_n^{hk}\right),\varepsilon\left(v_h\right)\right\rangle_{\mathcal{H}_h}+j\left(\beta_n,u_n,v_h\right)-j\left(\beta_n^{hk},u_n^{hk},v_h\right)=0,$$

On déduit que :

$$\begin{aligned}&\left\langle F\varepsilon\left(u_n\right)-F\varepsilon\left(u_n^{hk}\right),\varepsilon\left(u_n\right)-\varepsilon\left(u_n^{hk}\right)\right\rangle_{\mathcal{H}}=\\&\left\langle F\varepsilon\left(u_n\right)-F\varepsilon\left(u_n^{hk}\right),\varepsilon\left(u_n\right)-\varepsilon\left(v_h\right)\right\rangle+j\left(\beta_n^{hk},u_n^{hk},u_n-u_n^{hk}\right)-\\&-j\left(\beta_n,u_n,u_n-u_n^{hk}\right)+j\left(\beta_n,u_n,u_n-v_h\right)-\\&-j\left(\beta_n^{hk},u_n^{hk},u_n-v_h\right)-\left\langle F\varepsilon\left(u_n\right)-F\varepsilon\left(u_n^{hk}\right),\varepsilon\left(u_n^{hk}\right)\right\rangle-\\&-j\left(\beta_n,u_n,u_n^{hk}\right)+j\left(\beta_n^{hk},u_n^{hk},u_n^{hk}\right)\qquad\forall v_h\in V_h,\ \forall t\in[0.T],\end{aligned}$$

d'aprés quelque manipulation algéprique on trouve :

$$\begin{aligned}&\left\langle F\varepsilon\left(u_n\right)-F\varepsilon\left(u_n^{hk}\right),\varepsilon\left(u_n\right)-\varepsilon\left(u_n^{hk}\right)\right\rangle_{\mathcal{H}}\leq\ \left\langle F\varepsilon\left(u_n\right)-F\varepsilon\left(u_n^{hk}\right),\varepsilon\left(u_n\right)-\varepsilon\left(v_h\right)\right\rangle\\&+j\left(\beta_n^{hk},u_n^{hk},u_n-u_n^{hk}\right)-j\left(\beta_n,u_n,u_n-u_n^{hk}\right)+j\left(\beta_n,u_n,u_n-v_h\right)\\&-j\left(\beta_n^{hk},u_n^{hk},u_n-v_h\right)\quad\forall v_h\in V_h\ ,\ \forall t\in[0.T],\end{aligned}$$

En utilisant des argument similaire à ceux utilisés pour la démonstration de (2.4.21) on obtient :

$$\begin{aligned}&\left\|u_n-u_n^{hk}\right\|_V\leq 2\sqrt{\frac{c}{m2\delta}}\left\|\beta_n-\beta_n^{hk}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\\&\left[\sqrt{\frac{c\delta}{m2}}+\sqrt{\frac{M}{m2\delta}}+2\sqrt{\frac{c}{m2\delta}}\right]\left\|u_n-u_n^{hk}\right\|_V+\\&+\left[\sqrt{\frac{\delta M}{m2}}+\sqrt{\frac{\delta c}{m2}}\right]\left\|u_n-v_h\right\|_V\qquad\forall v_h\ \in V_h,\end{aligned}\tag{2.4.35}$$

il reste d'estmer $\left\|\beta_n-\beta_n^{hk}\right\|$, pour cela on a de (2.4.31) :

$$\beta_n^{hk}=\beta_0^{hk}-\sum_{j=1}^{n}k(\beta_{(j-1)}^{hk}(\gamma_\nu R_\nu\left(u_{(j-1)\nu}^{hk}\right)^2+\gamma_\tau\left\|R_\tau\left(u_{(j-1)\tau}^{hk}\right)\right\|^2)-\epsilon_a)_+,\tag{2.4.36}$$

et de (2.2.4) on a pour $t = t_n$:

$$\beta_n = \beta_0 - \sum_{j=1}^{n} k(\beta_{(j-1)}(\gamma_\nu R_\nu \left(u_{(j-1)\nu}\right)^2 + \gamma_\tau \left\| R_\tau \left(u_{(j-1)\tau}\right)\right\|^2) - \epsilon_a)_+, \tag{2.4.37}$$

En soustrayant (2.4.36) de (2.4.37) et en effectuant quelques transformations, on truove :

$$\begin{aligned} \left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\|_V &\leq c\sum_{j=1}^{n} k(\left\|\beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \left\|u_{j-1} - u_{j-1}^{hk}\right\|_V) + \\ &\quad + J_n + \left\|\beta_0 - \beta_0^{hk}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)}, \end{aligned} \tag{2.4.38}$$

Où

$$\begin{aligned} J_n &= \left\| \int_0^{t_n} (\beta(s)(\gamma_\nu R_\nu (u_{h\nu}(s)))^2 + \gamma_\tau \left\| R_\tau (u_\tau(s))\right\|^2) - \epsilon_a)_+ \, ds + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{n} k(\beta_{(j-1)}(\gamma_\nu R_\nu \left(u_{(j-1)\nu}\right)^2 + \gamma_\tau \left\| R_\tau \left(u_{(j-1)\tau}\right)\right\|^2) - \epsilon_a)_+ \right\|_{L^\infty(\Gamma_3)}, \end{aligned} \tag{2.4.39}$$

De (2.4.33) ; (2.4.35) et (2.4.38) nous avons :

$$\begin{aligned} &\left\|u_n - u_n^{hk}\right\|_V + \left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \left\|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\right\|_{\mathcal{H}} \leq \\ &2\sqrt{\frac{c}{m2\delta}} \left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \left[\sqrt{\frac{c\delta}{m2}} + \sqrt{\frac{M}{m2\delta} + 2\sqrt{\frac{c}{m2\delta}}}\right] \left\|u_n - u_n^{hk}\right\|_V \\ &+ \left[\sqrt{\frac{\delta M}{m2}} + \sqrt{\frac{\delta c}{m2}}\right] \left\|u_n - v_h\right\|_V \ + L\left\|u_n - u_n^{hk}\right\|_V + c\sum_{j=1}^{n} k(\left\|\beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \\ &+ \left\|u_{j-1} - u_{j-1}^{hk}\right\|_V) + J_n + \left\|\beta_0 - \beta_0^{hk}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \forall v_h \in V_h, \end{aligned}$$

En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés pour la démonstration de (2.4.24) on obtient :

$$\begin{cases} \left\|u_n - u_n^{hk}\right\|_V + \left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \left\|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\right\|_{\mathcal{H}} \leq \\ cJ_n + c\sum\limits_{j=1}^{n}(\left\|\beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \left\|u_{j-1} - u_{j-1}^{hk}\right\|_V) + \\ c\left\|u_n - v_h\right\|_V + c\left\|\beta_0 - \beta_0^{hk}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \quad \forall v \in V_h, \end{cases} \tag{2.4.40}$$

et en utilisant des techniques similaires à celles utilsées dans [7] on obtient :

$$J_n \leq ckt_n \left(\|\dot{u}\|_{L^\infty(0.T.V)} + \left|\dot{\beta}\right|_{L^\infty(0.T.L^\infty(\Gamma_3))} \right),$$

Alors, (2.4.40) devient :

$$\begin{cases} \left\|u_n - u_n^{hk}\right\|_V + \left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \left\|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\right\|_{\mathcal{H}} \leq \\ c\left\|u_n - v_h\right\|_V + c\sum\limits_{j=1}^{n} k(\left\|\beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \left\|u_{j-1} - u_{j-1}^{hk}\right\|_V) + \\ ckt_n \left(\|\dot{u}\|_{L^\infty(0.T.V)} + \left|\dot{\beta}\right|_{L^\infty(0.T.L^\infty(\Gamma_3))} \right) + c\left\|\beta_0 - \beta_0^{hk}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \forall v \in V_h. \end{cases}$$

L'étape suivante consiste à utiliser le lemme suivant :

Lemme 2.4.5. Soient $\{g_n\}_{n=1}^N$ et $\{e_n\}_{n=1}^N$ deux suites de nombres non négatifs satisvont à :

$$e_n \leq cg_n + \sum_{j=1}^{n} k_j e_j, \tag{2.4.41}$$

Alors :

$$e_n \leq c(g_n + \sum_{j=1}^{n} k_j e_j), \tag{2.4.42}$$

Donc :

$$\max_{n \leq N} e_n \leq c \max_{n \leq N} g_n. \tag{2.4.43}$$

Pour la démonstration, on peut consulter [7] et [21].

L'application de ce dernier lemme, nous donne l'estimation de l'erreur suivante :

$$\begin{cases} \max\limits_{n\leq N}\left[\left\|u_n-u_n^{hk}\right\|_V+\left\|\beta_n-\beta_n^{hk}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)}+\left\|\sigma_n-\sigma_n^{hk}\right\|_{\mathcal{H}}\right]\leq \\ c\max\limits_{n\leq N}\left\|u_n-v_h\right\|_V+ckt_n\left(\left\|\dot{u}\right\|_{L^\infty(0.T.V)}+\left|\dot{\beta}\right|_{L^\infty(0.T.L^\infty(\Gamma_3))}\right)+c\left\|\beta_0-\beta_0^{hk}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)}. \end{cases}$$

Cette estimation va être utilisée pour la convergence de la méthode de discrétisation complète .

2.5 Analyse de la convergence

Dans cette section, on analyse la convergance de la discrétisation complète et incomplète des solution du problème **P**. On fait cette analyse sous les conditions de régularité :

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0,T,V), \\ \sigma &\in L^\infty(0,T,\mathcal{H}_1), \\ \beta &\in W^{1,\infty}(0,T,L^\infty(\Gamma_3)), \end{aligned}$$

On considère, tout d'abord les hypothèses suivantes :

Hypothèse 2.5.1.

Il existe un sous espace $V_0\subset V$ dense dans V et une fonction $\alpha(h)\geq 0$ tel que :

$$\lim_{h\to 0^+}\alpha(h)=0 \text{ et } \inf_{v_h\in V_h}\left\|v-v_h\right\|_V\leq\alpha(h)\left\|v\right\|_{V_0} \quad \forall v\in V_0.$$

Hypothèse 2.5.2.

Il existe un sous espace $\mathcal{H}_0\subset\mathcal{H}$ dense dans $\mathcal{H}$ et une fonction $\gamma(h)\geq 0$ tel que :

$$\lim_{h\to 0^+} \gamma(h) = 0 \text{ et } \inf_{z_h\in\mathcal{H}_h} \|z - z_h\|_{\mathcal{H}} \le \gamma(h)\,\|z\|_{\mathcal{H}_0} \quad \forall z \in \mathcal{H}_0.$$

Hypothèse 2.5.3.

Il existe un sous espace $L_0^\infty(\Gamma_3) \subset L^{\infty}(\Gamma_3)$ dense dans $L^\infty(\Gamma_3)$ et une fonction $\theta(h) \ge 0$ tel que :

$$\lim_{h\to 0^+} \theta(h) = 0 \text{ et } \inf_{\eta_h\in L^\infty(\Gamma_3)_h} \|\eta - \eta_h\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \le \gamma(h)\,\|\eta\|_{L^\infty(\Gamma_3)_0} \quad \forall \eta \in L^\infty(\Gamma_3)_0\,.$$

On peut maintenant étudier la convergence de la discrétisation incomplète du problème **P**.

Théorème 2.5.4. Soit $u \in L^\infty(0,T,V)$, $\sigma \in L^\infty(0,T,\mathcal{H}_1)$ et $\beta \in W^{1,\infty}(0,T,L^\infty(\Gamma_3))$ la solution du problème **P** et $u_h \in L^\infty(0,T,V_h)$, $\sigma_h \in L^\infty(0,T,\mathcal{H}_h)$ et $\beta_h \in W^{1,\infty}(0,T,L_h^\infty(\Gamma_3))$ la solution qui correspond à la discrétisation incomplète du problème $\mathbf{P}^h$.

Ainsi, sous les hypothèse (2.5.1) ; (2.5.2) et (2.5.3) on a :

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(0,T,V)} + \|\beta - \beta_h\|_{W^{1,\infty}(0,T,L^\infty(\Gamma_3))} + \|\sigma - \sigma_h\|_{L^\infty(0,T,\mathcal{H})} \to 0,$$

$$\text{quand} \quad h \to 0.$$

Démonstration : D'aprés les hypothèse (2.5.1) ; (2.5.2) et (2.5.3) on a :

$$\|u_0 - u_{0h}\| \to 0, \|\beta_0 - \beta_{0h}\| \to 0, \|\sigma_0 - \sigma_{0h}\| \to 0 \text{ quand } h \to 0, \tag{2.5.1}$$

On a $L^\infty(0,T,V_0)$ dense dans $L^\infty(0,T,V)$ d'où, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tilde{u} \in L^\infty(0,T,V_0)$ tel que :

$$\|u - \tilde{u}\| \le \varepsilon. \tag{2.5.2}$$

donc :

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \leq \|u - \tilde{u}\| + \inf_{v_h \in V_h} \|\tilde{u} - v_h\|_V \leq \varepsilon + \alpha(h) \|\tilde{u}\|_{V_0}. \tag{2.5.3}$$

Alors, la convergence est déduit de $(2.5.1)\,;(2.5.3)$.

Revenons maintenant à l'analyse de la convergence pour la discrétisation complète.

Théorème 2.5.5. Soit $u \in L^\infty(0,T,V)$, $\sigma \in L^\infty(0,T,\mathcal{H})$ et $\beta \in W^{1,\infty}(0,T,L^\infty(\Gamma_3))$ la solution du problème $\mathbf{P}$ $u_n^h \in L^\infty(0,T,V_h)$, $\sigma_n^h \in L^\infty(0,T,\mathcal{H}_h)$ et $\beta_n^h \in W^{1,\infty}(0,T,L_h^\infty(\Gamma_3))$ la solution qui correspond à la discrétisation incomplète du problème $\mathbf{P}^h$ pour $n = 1, N$ la solution qui correspond à la discrétisation complète du problème $\mathbf{P}^h$.

Alors sous les hypothèses $(2.5.1)\,;(2.5.2)$ et $(2.5.3)$ on a :

$$\max_{n \leq N} \left[\left\|u_n - u_n^h\right\| + \left\|\beta_n - \beta_n^h\right\| + \left\|\sigma_n - \sigma_n^h\right\|\right] \to 0, \quad \text{quand } h \to 0. \tag{2.5.4}$$

Démonstration : En suivant les mêmes étapes que précédemment on obtient :

$$\inf_{v_n^h \in V_h} \left\|u_n - v_n^h\right\|_V \leq \|u_n - \tilde{u}\| + \inf_{v_n^h \in V_h} \left\|\tilde{u} - v_n^h\right\|_V \leq \varepsilon + \alpha(h) \|\tilde{u}\|_{V_0} \ . \tag{2.5.5}$$

donc

$$\begin{aligned} \max_{n \leq N} \inf_{v_n^h \in V_h} \left\|u_n - v_n^h\right\|_V &\leq \max_{n \leq N}(\|u_n - \tilde{u}\| + \inf_{v_n^h \in V_h} \left\|\tilde{u} - v_n^h\right\|_V) \\ &\leq \varepsilon + \alpha(h) \|\tilde{u}\|_{V_0} \ . \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Alors, de $(2.5.1)$ et $(2.5.6)$; la relation $(2.5.4)$ est vérifiée, ce qui termine la démonstration.

Chapitre 3

Problème Viscoélastique Couplant l'Adhésion et le Frottement

Nous considérons dans ce chapitre un problème de contact couplant l'adhésion et le frottement entre un corps viscoélastique et une fondation rigide. Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface appelée champ d'adhésion et les conditions de contact sont de type Signorini. Le problème est formulé par un système d'équations aux dérivées partielles contenant l'équation d'équilibre du corps, la loi de comportement du matériau, une équation différentielle modélisant le champ d'adhésion et les conditions initialles et aux limites aux quelles il est soumi . Cette section est divisée en trois parties. Dans le premier partie, nous commençons par formuler le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Ensuite, dans le deuxième partie nous donnons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans le troisième parties, nous énonçons et démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible relatif au problème.

Les techniques employées sont basées sur la théorie des opérateurs monotone, et le théorème de *Cauchy Lipshitz*, suivi par des résultats sur les inéquations variationnelles d'évolution et sur le théorème de point fixe.

3.1 Position du problème - Hypothèses

Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^d$ $(d=2,3)$ avec une surface frontière régulière Γ, partitionnée en trois zones mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telles que $mes\Gamma_1>0$. On note par ν la normale unitaire sortante de Γ, soit $T>0$ et soit $[0,T]$ l'intervalle de temps dans lequel on étudie l'évolution du corps dûe à l'application des forces volumiques de densité f_0 et des tractions surfaciques de densité f_2 varient très lentement par rapport au temps et on impose que les accélérations du système soient négligeables, on se place donc dans le cas quasistatique. Le corps est encastré dans une structure fixe sur Γ_1, et il est soumis à des conditions de contact unilatéral, frottement et adhésion sur la partie Γ_3 de la frontière, avec une fondation rigide. On suppose aussi que le matériau est viscoélastique avec une loi constitutive de la forme.

$$\sigma=\mathcal{A}\varepsilon\left(\dot{u}\right)+\mathcal{G}\varepsilon\left(u\right). \tag{3.1.1}$$

où $\mathcal{A}$ l'opérateur de viscosité et $\mathcal{G}$ l'opérateur de élasticité.

En suite, on a décrire les conditions de contact avec adhésion sur Γ_3 on introduit une variable interne d'état β définie sur Γ_3 qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact telle que $0\leq\beta\leq1$. Quand $\beta=1$ à un point $x\in\Gamma_3$, l'adhésion est complète et tout les liens sont actifs, quand $\beta=0$ tout les liens sont désactivés et il n'ya pas d'adhésion, et quand $0<\beta<1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Le processus est gouverné par l'équation différentielle .

$$\dot{\beta}=-(\beta(\gamma_\nu R_\nu\left(u_\nu\right)^2+\gamma_\tau\left\|R_\tau\left(u_\tau\right)\right\|^2)-\epsilon_a)_+. \tag{3.1.2}$$

Où $R_\nu:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $R_\tau:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ sont des troncatures telles que.

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L_0 & si \quad s \leq -L_0. \\ -s & si \quad -L_0 \leq s \leq 0. \\ 0 & si \quad s \geq 0. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

$$R_\tau(v) = \begin{cases} v & si \quad \|v\| \leq L_0. \\ \dfrac{L_0}{\|v\|}v & si \quad \|v\| \geq L_0. \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Où $L_0 > 0$ est la longueur caractéristique des liens on note par v_ν et v_τ et les composantes normale et tangentielle de v sur la frontière Γ données par :

$$v_\nu = v.\nu, \; v_\tau = v - v_\nu \nu. \tag{3.1.5}$$

On définit les composantes normale et tangentielle du tenseur des contraintes par :

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu, \; \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu. \tag{3.1.6}$$

Le problème mécanique se formule de la manière suivante :

Problème P : Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0,T] \to S_d$ et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) \quad \text{dans} \;\; \Omega \times [0,T], \tag{3.1.7}$$

$$Div\ \sigma + f_0 = 0 \qquad \text{dans} \;\; \Omega \times [0,T], \tag{3.1.8}$$

$$u = 0 \qquad \text{sur} \;\; \Gamma_1 \times [0,T], \tag{3.1.9}$$

$$\sigma\nu = f_2 \qquad \text{sur} \;\; \Gamma_2 \times [0,T], \tag{3.1.10}$$

$$\begin{cases} u_\nu \leq 0, \sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu \leq 0, u_\nu \left(\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu\right) = 0, \\ \left\|\sigma_\tau + C_\tau \beta^2 u_\tau\right\| < \mu p(\left|R(\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu)\right|) \Longrightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ \left\|\sigma_\tau + C_\tau \beta^2 u_\tau\right\| = \mu p(\left|R(\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu)\right|) \Longrightarrow \exists \lambda \geq 0, \\ tel\ que\ \dot{u}_\tau = -\lambda \left(\sigma_\tau + C_\tau \beta^2 u_\tau\right) \end{cases} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0,T], \quad (3.1.11)$$

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu (u_\nu))^2 + \gamma_\tau \left\|R_\tau (u_\tau)\right\|^2) - \epsilon_a)_+ \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0,T], \qquad (3.1.12)$$

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 && \text{dans} \quad \Omega \times [0,T], && (3.1.13) \\ \beta(0) &= \beta_0 && \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0,T], && (3.1.14) \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous fournissons quelques commentaires sur les conditions (3.1.7)-(3.1.14). L'équation (3.1.7) représente la loi de comportement viscoélastique, la relation (3.1.8) représente l'équation d'équilibre où f_0 est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable. Les conditions (3.1.9)-(3.1.10), sont les conditions de déplacement-traction. (3.1.11) est la condition de contact unilatéral, frottement et adhésion, l'équation (3.1.12) est l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion, les conditions (3.1.13)-(3.1.14) sont des conditions initiales, où u_0 et β_0 sont des champs donnés.

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème $\mathbf{P}$, on a besoin de quelques notations supplémentairs.

Soit V le sous-espace de H_1 défini par :

$$V = \{v \in H_1 / \ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}. \qquad (3.1.15)$$

qui est muni de structure Hilbertienne habituelle définie par :

$$\langle u, v\rangle_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u,\, v \in V. \tag{3.1.16}$$

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \qquad \forall v \in V\ . \tag{3.1.17}$$

En outre, par le théorème de trace de soboleve, il existe une constante $C_0 > 0$ dépendant uniquement de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3$ telle que :

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^{\mathbf{d}}} \leq C_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V\ . \tag{3.1.18}$$

Pour le problème de signorini nous utilisons l'ensemble convexe "*déplacements admissibles*" donné par :

$$U_{ad} = \{v \in H_1 / v = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1,\, v_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\}\,. \tag{3.1.19}$$

Pour l'étude du problème mécanique (3.1.7)-(3.1.14),on considère les hypothèses suivantes :

Nous supposons que l'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times S_d \to S_d$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (a) \text{ il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \langle \mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2\rangle \geq m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2 \ \text{ pour tout } \varepsilon_1,\, \varepsilon_2 \in S_d; \\ \ p.p.x \in \Omega \\ (b) \text{ il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \|\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \ \text{ pour tout } \varepsilon_1,\, \varepsilon_2 \in S_d\,;\, p.p.x \in \Omega \\ (c)\ \ x \to \mathcal{A}(x, \varepsilon_1) \ \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in S_d; \\ (d)\ \ \text{L'application } x \to \mathcal{A}(x, 0) \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{3.1.20}$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G}$: $\Omega \times S_d \to S_d$ satisfait :

$$
\begin{cases}
(a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que :} \\
\left\| \mathcal{G}\left(x, \varepsilon_1\right) - \mathcal{G}\left(x, \varepsilon_2\right) \right\| \leq L_{\mathcal{G}} \left\| \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right\| \text{ pour tout } \varepsilon_1, \, \varepsilon_2 \in S_d \\
p.p.x \in \Omega \; . \\
(b) \text{ L'application } x \to \mathcal{G}\left(x, \varepsilon\right) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \forall \varepsilon \in S_d \\
(c) \text{ L'application } x \to \mathcal{G}\left(x, 0\right) \in \mathcal{H}
\end{cases}
\tag{3.1.19}
$$

La fonction de frottement $p : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifie :

$$
\begin{cases}
(a) \text{ il existe } M > 0 \text{ tel que} \\
\left| p\left(x, r_1\right) - p\left(x, r_2\right) \right| \leq M \left| r_1 - r_2 \right| \text{ pour tout } r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+ \\
p.p.x \in \Gamma_3 \\
(b) \text{ L'application } x \to p\left(x, r\right) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}_+ \\
(c) \; p\left(x, 0\right) = 0 \quad p.p.\text{sur } \Gamma_3
\end{cases}
\tag{3.1.22}
$$

On suppose que les forces volumiques et surfaciques satisfont :

$$
(a) \quad f_0 \in W^{1,\infty}\left(0, T, H\right), \; (b) \quad f_2 \in W^{1,\infty}\left(0, T, L^2\left(\Gamma_2\right)^d\right). \tag{3.1.23}
$$

Les coefficients d'adhésion γ_ν, γ_τ et ϵ_a satisfont les conditions :

$$
\gamma_\tau \; , \; \gamma_\nu \in L^\infty\left(\Gamma_3\right), \epsilon_a \in L^\infty\left(\Gamma_3\right), \gamma_\tau, \; \gamma_\nu, \epsilon_a \geq 0, \; p.p.x \in \Gamma_3. \tag{3.1.24}
$$

Tandis que le coefficient de frottement μ satisfait :

$$
\mu \in L^\infty\left(\Gamma_3\right), \mu\left(x\right) \geq 0, \, p.p.x \in \Gamma_3. \tag{3.1.25}
$$

Et les données initiales vérifient :

$$u_0 \in U_{ad},\ \beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3) \quad et \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad p.p.x \in \Gamma_3. \tag{3.1.26}$$

En suite par le Théorème de représentation de Riesz entraine l'existence d'une fonction $f : [0.T] \to V$ tel que :

$$\langle f(t), v \rangle_V = \langle f_0(t), v \rangle_H + \langle f_2(t), v \rangle_{L^2(\Gamma_2)^d} \quad \forall v \in V,\ p.p.t \in [0,T]. \tag{3.1.27}$$

Les conditions (3.1.23) ; (3.1.27) impliquent que :

$$f \in W^{1,\infty}(0,T,V). \tag{3.1.28}$$

Nous déffinissons maintenant la fonctionnelle de frottement $j : L^\infty(\Gamma_3) \times \mathcal{H}_1 \times V \times V \to \mathbb{R}$ par

$$j(\beta, \sigma, u, v) = \int_{\Gamma_3} \mu p\left(\left|R\left(\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu\right)\right|\right) \|v_\tau\|\, da. \tag{3.1.29}$$

Où R représent la régularissante normale, elle est introduite parce que la trace du terme $\left(\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu\right)$ est trés irrégulière sur la frontière.

3.2 Formulation variationnelle

Avant d'établir la formulation variationnelle du problème mécanique, on va donner une forme équivalente de conditions aux limites (3.1.11).

Lemme 3.2.1. Les conditions de contact et de frottement (3.1.11) sont équivalentes aux condition suivante :

$$\begin{cases} u_\nu \leq 0,\ \sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu \leq 0,\ u_\nu\left(\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu\right) = 0, \\ \left\|\sigma_\tau + C_\tau \beta^2 u_\tau\right\| \leq \mu p(\left|R(\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu)\right|), \\ \dot{u}_\tau\left(\sigma_\tau + C_\tau \beta^2 u_\tau\right) + \mu\ \|\dot{u}_\tau\|\ p(\left|R(\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu)\right|) = 0, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Pour la démonstration, on peut s'inspirer de la démonstration du **lemme 2.2.1** du chapitre 2 de *Darabla* (13).

- Soit maintenant le triplet (u, σ, β), une solution régulière du problème **P** et soit $v \in U_{ad}$, $t \in [0, T]$.

Grace à la formule de Green on obtient :

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma(t), v - \dot{u}(t) \rangle_H = \int_\Gamma \sigma\nu(v - \dot{u}(t))\, da \quad \forall v \in U_{ad},$$

On peut écrire l'égalité précédente sous la forme :

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma(t), v - \dot{u}(t) \rangle_H = \int_{\Gamma_1} \sigma\nu(v - \dot{u}(t))\, da +$$
$$+ \int_{\Gamma_2} \sigma\nu(v - \dot{u}(t))\, da + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu(v - \dot{u}(t))\, da \ \forall v \in U_{ad}, t \in [0, T],$$

Sachant que $u \in U_{ad}$, $v \in U_{ad}$ et moyennant (3.1.8)-(3.1.10) on obtient :

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f_0(t), v - \dot{u}(t) \rangle_H + \langle f_2(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{L^2(\Gamma_2)^{\mathbf{d}}} +$$
$$+ \int_{\Gamma_3} \sigma\nu(v - \dot{u}(t))\, da \qquad \forall v \in U_{ad}, t \in [0, T],$$

En utilisant (3.1.27) pour déduire que :

$$\begin{aligned} &\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_V + \\ &+ \int_{\Gamma_3} \sigma\nu(v - \dot{u}(t))\, da \quad \forall v \in U_{ad}, t \in [0, T] \ , \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

D'autre part on a :

$$\sigma\nu(v - \dot{u}(t)) = \sigma_\nu(v_\nu - \dot{u}_\nu(t)) + \sigma_\tau(v_\tau - \dot{u}_\tau(t)),$$

D'où on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma\nu(v - \dot{u}(t)) = \ & (\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu)(v_\nu - \dot{u}_\nu(t)) + (\sigma_\tau + C_\tau \beta^2 u_\tau)(v_\tau - \dot{u}_\tau(t)) \\ & - C_\nu \beta^2 u_\nu (v_\nu - \dot{u}_\nu(t)) - C_\tau \beta^2 u_\tau (v_\tau - \dot{u}_\tau(t)), \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Les égalités (3.2.2)-(3.2.3) nous donnons :

$$
\begin{aligned}
&\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_{\mathcal{H}} - \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau + C_\tau \beta^2 u_\tau)(v_\tau - \dot{u}_\tau(t))\, da + \\
&+ \int_{\Gamma_3} C_\tau \beta^2 u_\tau (v_\tau - \dot{u}_\tau(t))\, da = \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_V + \\
&+ \int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu)(v_\nu - \dot{u}_\nu(t))\, da - \int_{\Gamma_3} C_\nu \beta^2 u_\nu (v_\nu - \dot{u}_\nu(t))\, da \\
&\forall v \in U_{ad}, t \in [0, T],
\end{aligned}
\tag{3.2.4}
$$

On a aussi d'aprés l'inégalité de *Cauchy -Schwarz* :

$$
\left\| (\sigma_\tau + C_\tau \beta^2 u_\tau).v_\tau \right\| \leq \left\| \sigma_\tau + C_\tau \beta^2 u_\tau \right\| . \|v_\tau\|,
$$

d'où on obtient :

$$
(\sigma_\tau + C_\tau \beta^2 u_\tau).v_\tau \geq - \left\| (\sigma_\tau + C_\tau \beta^2 u_\tau \right\| . \|v_\tau\|,
$$

On déduit d'aprés (3.2.1) que :

$$
(\sigma_\tau + C_\tau \beta^2 u_\tau).v_\tau \geq -\mu p(\left| R(\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu) \right|). \|v_\tau\|, \tag{3.2.5}
$$

Soit $v \in U_{ad}$,alors de (3.1.11) on a ($\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu) \leq 0$ d'où $(\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu).v_\nu \geq 0$, on a aussi $\dot{u}_\nu(\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu) = 0$ sur $\Gamma_3 \times [0.T]$ donc (3.2.4) devient.

$$
\begin{aligned}
&\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_{\mathcal{H}} - \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau + C_\tau \beta^2 u_\tau)(v_\tau - \dot{u}_\tau(t))\, da + \\
&\int_{\Gamma_3} C_\tau \beta^2 u_\tau (v_\tau - \dot{u}_\tau(t))\, da + \int_{\Gamma_3} C_\nu \beta^2 u_\nu (v_\nu - \dot{u}_\nu(t))\, da \\
&\geq \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad},\ t \in [0, T],
\end{aligned}
\tag{3.2.6}
$$

Et d'aprés (3.2.5)-(3.2.6) on obtient :

$$\begin{aligned}
&\langle \sigma (t) , \varepsilon (v) - \varepsilon (\dot{u} (t))\rangle_{\mathcal{H}} + \int\limits_{\Gamma_3} \mu p(\left|R(\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu)\right|). \left\|v_\tau\right\| da - \\
&- \int\limits_{\Gamma_3} \mu p(\left|R(\sigma_\nu + C_\nu \beta^2 u_\nu)\right|). \left\|\dot{u}_\tau\right\| da + \int\limits_{\Gamma_3} C_\tau \beta^2 u_\tau \left(v_\tau - \dot{u}_\tau(t)\right) da + \\
&+ \int\limits_{\Gamma_3} C_\nu \beta^2 u_\nu \left(v_\nu - \dot{u}_\nu(t)\right) da \geq \ \langle f (t) , v - \dot{u}(t)\rangle_V \ \ \forall v \in U_{ad}, t \in [0, T] ,
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Moyennant (3.1.29) et (3.2.7) il vient :

$$\begin{aligned}
&\langle \sigma (t) , \varepsilon (v) - \varepsilon (\dot{u} (t))\rangle_{\mathcal{H}} + \ \ j (\beta, \sigma, u, v) - \ j (\beta, \sigma, u, \dot{u}) + \\
&+ C_\tau (\beta, u, v - \dot{u} (t)) + C_\nu (\beta, u, v - \dot{u} (t)) \geq \ \langle f (t) , v - \dot{u}(t)\rangle_V \\
&\forall v \in U_{ad}, \ p.p \ t \in [0, T]
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

tel que :

$$C_\tau (\beta, u, v) = \int\limits_{\Gamma_3} C_\tau \beta^2 u_\tau v_\tau da, \quad C_\nu (\beta, u, v) = \int\limits_{\Gamma_3} C_\nu \beta^2 u_\nu v_\nu da, \tag{3.2.9}$$

où $C_\tau (\beta, u, v) , C_\nu (\beta, u, v)$ sont linéaire par rapport au dernier argument donc :

$$C_\tau (\beta, u, -v) = -C_\tau (\beta, u, v) , \quad C_\nu (\beta, u, -v) = -C_\nu (\beta, u, v) , \tag{3.2.10}$$

Finalemment, d'aprés (3.1.7)-(3.2.8) et (3.1.12)-(3.1.14) on obtient la formulation variationnelle du prblème **P.**

Problème $\mathbf{P}_V$: Trouver le champ des déplacement $u : [0, T] \to V$, le champ des contraintes $\sigma : [0, T] \to \mathcal{H}_1$ et le champ d'adhésion

$\beta : [0, T] \to L^\infty (\Gamma_3)$ tels que :

$$\sigma (t) = \mathcal{A}\varepsilon (\dot{u} (t)) + \mathcal{G}\varepsilon (u (t)) , \tag{3.2.11}$$

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_{\mathcal{H}} + \ j(\beta(t), \sigma(t), u(t), v) - \ j(\beta(t), \sigma(t), u(t), \dot{u}(t)) +$$
$$+ C(\beta(t), u(t), v - \dot{u}(t)) \geq \ \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}, \tag{3.2.12}$$

$$\dot{\beta}(t) = -(\beta(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau(t))\|^2) - \epsilon_a)_+, \tag{3.2.13}$$

$$u(0) = u_0, \ \beta(0) = \beta_0, \tag{3.2.14}$$

$$C(\beta(t), u(t), v) = C_\nu(\beta(t), u(t), v) + C_\tau(\beta(t), u(t), v), \tag{3.2.15}$$

3.3 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette section, on donne le résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnelle $\mathbf{P}_V$.

Théorème 3.3.1. Sous les hépothèses (3.1.20)-(3.1.26) il existe $\mu_0 > 0$ dépendant seulement de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \mathcal{A}$,$\mathcal{G}$ tel que : si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$, le **problème** $\mathbf{P}_V$ admet une solution unique (u, σ, β). De plus, la solution satisfait :

$$u \ \in \ W^{1,\infty}(0, T, V), \tag{3.3.1}$$
$$\sigma \ \in \ W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1), \tag{3.3.2}$$
$$\beta \ \in \ W^{1,\infty}(0, T, L^\infty(\Gamma_3)), \tag{3.3.3}$$

On conclut que, sous les hépothèses (3.1.20)-(3.1.26) le **problème P** a une unique solution faible qui satisfait (3.3.1)-(3.3.3). La démonstration du **Théorème 3.3.1** sera faite en plusieurs étapes, elle est basée sur les résultats des inéquations d'évolution avec les opérateurs monotone et le théorème du point fixe.

Nous supposons dans la suite que (3.1.20)-(3.1.26) sont vérifiées.

Etape 1

Soit $\eta \in W^{1,\infty}(0,T,V)$ donné. Dans cette première étape nous considérons le problème suivant :

Problème $\mathbf{P}_V^{\eta}$: Trouver le champ des déplacements $u_\eta : [0,T] \to V$ tel que :

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon\left(\dot{u}_\eta(t)\right) + \eta(t), \tag{3.3.4}$$

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathcal{A}\varepsilon\left(\dot{u}_\eta(t)\right), \varepsilon(v) - \varepsilon\left(\dot{u}_\eta(t)\right)\right\rangle_{\mathcal{H}} + \quad j\left(\beta_\eta(t), \sigma_\eta(t), u_\eta(t), v\right) - \\
&- \quad j\left(\beta_\eta(t), \sigma_\eta(t), u_\eta(t), \dot{u}_\eta(t)\right) + C\left(\beta_\eta(t), u_\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t)\right) + \\
&+ \left\langle \eta(t), v - \dot{u}_\eta(t)\right\rangle \geq \ \left\langle f(t), v - \dot{u}_\eta(t)\right\rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}, t \in [0,T],
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

$$u_\eta(0) = u_0, \tag{3.3.6}$$

Lemme 3.3.2. Sous les hépothèses (3.1.20)-(3.1.26) le **problème $\mathbf{P}_V^{\eta}$** admet une solution unique $u_\eta \in W^{1,\infty}(0,T,V)$.

Soit $\zeta \in W^{1,\infty}(0,T,V)$, $h \in W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H}_1)$ et $\beta \in W^{1,\infty}(0,T,L^\infty(\Gamma_3))$,donnés. Nous considère le problème suivant :

problème $\mathbf{P}_V^{u_{\eta\beta}^{h\zeta}}$: Trouver le champ des déplacements $u_{\eta\beta}^{\zeta h} : [0,T] \to V$ et le champ de contrainte $\sigma_{\eta\beta}^{\zeta h} : [0,T] \to \mathcal{H}_1$ tel que :

$$\sigma_{\eta\beta}^{\zeta h} = \mathcal{A}\varepsilon\left(w_\eta(t)\right) + \eta(t), \tag{3.3.7}$$

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathcal{A}\varepsilon\left(w_\eta(t)\right), \varepsilon(v) - \varepsilon\left(w_\eta(t)\right)\right\rangle_{\mathcal{H}} + C\left(\beta(t), \zeta(t), v - w_\eta(t)\right) \\
&\ j\left(\beta(t), h(t), \zeta(t), v\right) - \quad j\left(\beta(t), h(t), \zeta(t), w_\eta(t)\right) \\
&\geq \ \left\langle f_\eta(t), v - w_\eta(t)\right\rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}, \ t \in [0,T],
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

$$u_{\eta\beta}^{\zeta h}(0) = u_0, \tag{3.3.9}$$

$$w_\eta = \dot{u}_{\eta\beta}^{\zeta h}, \tag{3.3.10}$$

Lemme 3.3.3. Sous les hypothèses (3.1.20)-(3.1.26) et (3.1.27)-(3.1.28) il existe une unique solution $(u_{\eta\beta}^{\zeta h}\ ,\ \sigma_{\eta\beta}^{\zeta h})$ du **problème** $\mathbf{P}_V^{u_{\eta\beta}^{\mathbf{h}\boldsymbol{\zeta}}}$ qui satisfait $u_{\eta\beta}^{\zeta h} \in W^{1,\infty}(0,T,V)$ et $\sigma_{\eta\beta}^{\zeta h} \in W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H}_1)$

Démonstration : On pose

$$L(v) = \langle \mathcal{A}\varepsilon(w_\eta(t)), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} + C(\beta(t), \zeta(t), v) \quad \forall v \in U_{ad}, \tag{3.3.11}$$

et on pose aussi :

$$f_\eta(t) = f(t) + \eta(t), \forall t \in [0,T], \tag{3.3.12}$$

Nous remarquons que pour w_η donné $L : V \to \mathbb{R}$ est linéaire et continue donc d'aprés le Théorème de représentation de *Riesz*, il existe un unique élément $\varphi(t) \in V$ tel que :

$$\langle \varphi(t), v\rangle_V = L(v) = \langle \mathcal{A}\varepsilon(w_\eta(t)), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} + C(\beta(t), \zeta(t), v) \quad \forall v \in U_{ad},$$

Donc on peut définir l'opérateur $G : V \to V$ par :

$$G(w_\eta(t)) = \varphi(t), \tag{3.3.13}$$

d'où on obtient :

$$\langle\ G(w_\eta(t)), v\rangle_V = L(v) = \langle \mathcal{A}\varepsilon(w_\eta(t)), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} + C(\beta(t), \zeta(t), v) \quad \forall v \in U_{ad}, \tag{3.3.14}$$

- Montrons que l'opérateur G est fortement monotone et de Lipschitz sur V.

* Soit $w_{1\eta}, w_{2\eta} \in V$ alors d'aprés (3.3.14) on obtient :

$$\begin{aligned}&\langle\ G\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right),w_{2\eta}\left(t\right)-w_{1\eta}\left(t\right)\rangle_{V}=\langle\mathcal{A}\varepsilon\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right),\varepsilon\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right)-\varepsilon\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)\rangle_{\mathcal{H}}+\\&+C\left(\beta\left(t\right),\zeta\left(t\right),w_{2\eta}\left(t\right)-w_{1\eta}\left(t\right)\right),\end{aligned}\tag{3.3.15}$$

d'où on obtient :

$$\begin{aligned}&\langle\ G\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right),w_{1\eta}\left(t\right)-w_{2\eta}\left(t\right)\rangle_{V}=\langle\mathcal{A}\varepsilon\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right),\varepsilon\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-\varepsilon\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right)\rangle_{\mathcal{H}}+\\&+C\left(\beta\left(t\right),\zeta\left(t\right),w_{1\eta}\left(t\right)-w_{2\eta}\left(t\right)\right)\ ,\end{aligned}\tag{3.3.16}$$

Par addition de (3.3.15) et (3.3.16) on obtient :

$$\begin{aligned}&\langle\ G\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-G\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right),w_{2\eta}\left(t\right)-w_{1\eta}\left(t\right)\rangle_{V}\\&=\langle\mathcal{A}\varepsilon\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-\mathcal{A}\varepsilon\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right),\varepsilon\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right)-\varepsilon\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)\rangle_{\mathcal{H}}+\\&+C\left(\beta\left(t\right),\zeta\left(t\right),w_{2\eta}\left(t\right)-w_{1\eta}\left(t\right)\right)+C\left(\beta\left(t\right),\zeta\left(t\right),w_{1\eta}\left(t\right)-w_{2\eta}\left(t\right)\right),\end{aligned}$$

Mais la linéairité de C pour le dernier argument sur V entraine que :

$$C\left(\beta\left(t\right),\zeta\left(t\right),w_{2\eta}\left(t\right)-w_{1\eta}\left(t\right)\right)+C\left(\beta\left(t\right),\zeta\left(t\right),w_{1\eta}\left(t\right)-w_{2\eta}\left(t\right)\right)=0,$$

d'où on obtient :

$$\begin{aligned}&\langle\ G\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-G\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right),w_{\eta1}\left(t\right)-w_{2\eta}\left(t\right)\rangle_{V}\\&=\langle\mathcal{A}\varepsilon\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-\mathcal{A}\varepsilon\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right),\varepsilon\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-\varepsilon\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right)\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}\tag{3.3.17}$$

D'aprés l'inégalité de *Cauchy -Schwartz* on obtient :

$$\begin{aligned}&\left|\langle\ G\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-G\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right),w_{1\eta}\left(t\right)-w_{2\eta}\left(t\right)\rangle_{V}\right|\leq\\&\left\|\mathcal{A}\varepsilon\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-\mathcal{A}\varepsilon\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right)\right\|_{\mathcal{H}}\left\|\varepsilon\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-\varepsilon\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right)\right\|_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

et d'aprés (3.1.17) on obtient :

$$\left|\langle\, G\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-G\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right),w_{1\eta}\left(t\right)-w_{2\eta}\left(t\right)\rangle_{V}\right|\leq$$
$$\left\|\mathcal{A}\varepsilon\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-\mathcal{A}\varepsilon\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right)\right\|_{\mathcal{H}}\left\|w_{2\eta}\left(t\right)-w_{1\eta}\left(t\right)\right\|_{V,}$$

On pose : $w_{1\eta}\left(t\right)-w_{2\eta}\left(t\right)=G\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-G\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right)$ dans l'inégalité précédente on obtient :

$$\left\|G\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-G\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right)\right\|\leq\ \left\|\mathcal{A}\varepsilon\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-\mathcal{A}\varepsilon\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right)\right\|_{\mathcal{H}},$$

mais d'aprés $(3.1.20)\,(b)$ et $(3.1.17)$ on a :

$$\begin{aligned}\left\|G\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-G\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right)\right\| &\leq L_{\mathcal{A}}\ \left\|\varepsilon\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-\varepsilon\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right)\right\|_{\mathcal{H}}\\ &\leq L_{\mathcal{A}}\ \left\|w_{1\eta}\left(t\right)-w_{2\eta}\left(t\right)\right\|_{V}\quad,\end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$\left\|G\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-G\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right)\right\|\leq L_{\mathcal{A}}\ \left\|w_{1\eta}\left(t\right)-w_{2\eta}\left(t\right)\right\|_{V}\ ,\tag{3.3.18}$$

Donc G est lipschizien. D'autre part, d'aprés $(3.1.20)\,(a)$ et $(3.1.17)$ on a :

$$\langle\mathcal{A}\varepsilon\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-\mathcal{A}\varepsilon\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right),\varepsilon\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-\varepsilon\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right)\rangle_{\mathcal{H}}\geq m_{\mathcal{A}}\left\|w_{1\eta}\left(t\right)-w_{2\eta}\left(t\right)\right\|_{V}^{2},$$

d'où d'aprés (3.3.17) :

$$\langle\, G\left(w_{1\eta}\left(t\right)\right)-G\left(w_{2\eta}\left(t\right)\right),w_{1\eta}\left(t\right)-w_{2\eta}\left(t\right)\rangle_{V}\geq m_{\mathcal{A}}\left\|w_{1\eta}\left(t\right)-w_{2\eta}\left(t\right)\right\|_{V}^{2}\ ,\tag{3.3.19}$$

Donc G est fortement monotone.

-On démontre maintenent que j est convexe, propre et semi-continue inférieurement.

1) $j\left(\beta\left(t\right),h\left(t\right),\zeta\left(t\right),v\right)<+\infty$ d'aprés $(3.1.22)\,(b)\,;(3.1.25)$,donc j est propre.

2) Soit $u,v\in V$ et $t\in[0,1]$, d'aprés $(3.1.29)$ on a :

$$j\left(\beta,h,\zeta,tv+(1-t)\,u\right)=\int\limits_{\Gamma_3}\mu p\left(\left|R\left(\sigma_\nu+C_\nu\beta^2u_\nu\right)\right|\right)\|tv_\tau+(1-t)\,u_\tau\|\,da,$$

d'où on obtient :

$$\begin{aligned} j\left(\beta,h,\zeta,tv+(1-t)\,u\right)\leq\ & t\int\limits_{\Gamma_3}\mu p\left(\left|R\left(\sigma_\nu+C_\nu\beta^2u_\nu\right)\right|\right)\|v_\tau\|+\\ & +(1-t)\int\limits_{\Gamma_3}\mu p\left(\left|R\left(\sigma_\nu+C_\nu\beta^2u_\nu\right)\right|\right)\|u_\tau\|\,da,\end{aligned}$$

Il résulte d'aprés l'inégalité précédente et (3.1.29) que :

$$j\left(\beta,h,\zeta,tv+(1-t)\,u\right)\leq t\ j\left(\beta,h,\zeta,v\right)+(1-t)\ \ j\left(\beta,h,\zeta,u\right),$$

alors, j est convexe.

3) Soit $v_n\rightarrow v$ sur V et on a :

$$\begin{aligned} &|\ j\left(\beta(t),h(t),\zeta(t),v_n\right)-\ j\left(\beta(t),h(t),\zeta(t),v\right)|=\\ &=\left|\int\limits_{\Gamma_3}\mu p\left(\left|R\left(\sigma_\nu+C_\nu\beta^2u_\nu\right)\right|\right)\|v_{n\tau}\|\,da-\int\limits_{\Gamma_3}\mu p\left(\left|R\left(\sigma_\nu+C_\nu\beta^2u_\nu\right)\right|\right)\|v_\tau\|\,da\right|,\end{aligned}$$

D'apés quelque manipulation algébriques et (3.1.18) , (3.1.25) et (3.1.29) on obtient :

$$|\ j\left(\beta(t),h(t),\zeta(t),v_n\right)-\ j\left(\beta(t),h(t),\zeta(t),v\right)|\leq cc_0M\,\|\mu\|_{L^\infty(\mathbf{\Gamma}_3)}\|v_n-v\|_V\,,$$

et comme $v_n\rightarrow v$ dans V , alors $\|v_n-v\|_V\rightarrow 0$ d'où :

$$lim\ inf\ j\left(\beta(t),h(t),\zeta(t),v_n\right)=\ j\left(\beta(t),h(t),\zeta(t),v\right),$$

Donc j est s.c.i.

Nous concluons de (3.3.19) ; (3.3.18) que l'opérateur G est fortement monotone et de *lipschitz* sur V et on a démonter que la fonctionnelle J est convexe, propre et s.c.i et comme $U_{ad} \subset V$ est un ensemble convexe, fermé et non vide, alors d'aprés un résultat d'éxistence et d'unicité sur les inégalité quasi -variationnelles, il existe un unique élément $w_\eta(t) \in U_{ad}$ qui vérifier.

$$\begin{aligned} &\langle G(w_\eta(t)), v - w_\eta(t)\rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), h(t), \zeta(t), v) - \\ &-j(\beta(t), h(t), \zeta(t), w_\eta(t)) \geq \langle f_\eta(t), v - w_\eta(t)\rangle_V \\ &\forall v \in U_{ad} \ \ p.p.t \in [0.T], \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

En utilisant maintenant (3.3.14) et (3.3.20), il résulte que $w_\eta(t)$ vérifier (3.3.8).

Soit la fonction $u_{\eta\beta}^{\zeta h} : [0.T] \to V$ définit par :

$$u_{\eta\beta}^{\zeta h} = \int_0^t w_\eta(s)\,ds \ + u_0 \quad \forall t \in [0.T], \tag{3.3.21}$$

d'où on déduire que $u_{\eta\beta}^{\zeta h} \in V$ est la solution unique du **problème** $\mathbf{P}_V^{u_{\eta\beta}^{h\zeta}}$.

Prenant maintenant $\sigma_{\eta\beta}^{\zeta h}$ définie par (3.3.8). D'aprés (3.1.27) et (3.1.9) et pour $v = w_\eta(t) + \varphi$ avec $\varphi \in D = \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)^d$ on obtient :

$$\begin{aligned} &\left\langle \sigma_{\eta\beta}^{\zeta h}(t), \varepsilon(\varphi(t))\right\rangle_{\mathcal{H}} + C(\beta(t), \zeta(t), \varphi(t)) \ - \ j(\beta(t), h(t), \zeta(t), w_\eta(t)) + \\ &+ \ j(\beta(t), h(t), \zeta(t), w_\eta(t) + \varphi(t)) \geq \ \langle f_0(t), \varphi(t)\rangle_H + \ \langle f_2(t), \varphi(t)\rangle_{L^2(\Gamma_2)^{\mathbf{d}}} \, \forall \varphi \in D, t \in [0, T], \end{aligned}$$

Mais $\varphi \in D = \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)^d \Rightarrow \gamma(\varphi) = 0$ sur Γ,donc :

$$\begin{aligned} &\langle f_2(t), \varphi(t)\rangle_{L^2(\Gamma_2)^{\mathbf{d}}} = 0, \\ &C(\beta(t), \zeta(t), \varphi(t)) = 0, \\ &j(\beta(t), h(t), \zeta(t), w_\eta(t) + \varphi(t)) = \ j(\beta(t), h(t), \zeta(t), w_\eta(t)), \end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$j\left(\beta\left(t\right),h\left(t\right),\zeta\left(t\right),w_{\eta}\left(t\right)+\varphi\left(t\right)\right)\ -\ j\left(\beta\left(t\right),h\left(t\right),\zeta\left(t\right),w_{\eta}\left(t\right)\right)=0,$$

Par conséquent :

$$\left\langle \sigma_{\eta\beta}^{\zeta h}\left(t\right),\varepsilon\left(\varphi\left(t\right)\right)\right\rangle_{\mathcal{H}}\geq\left\langle f_{0}\left(t\right),\varphi\left(t\right)\right\rangle_{H}\quad\forall\varphi\in D,\ t\in\left[0,T\right], \tag{3.3.22}$$

De la même manière pour $v=w_{\eta}\left(t\right)-\varphi$ on obtient :

$$\left\langle \sigma_{\eta\beta}^{\zeta h}\left(t\right),\varepsilon\left(\varphi\left(t\right)\right)\right\rangle_{\mathcal{H}}\leq\left\langle f_{0}\left(t\right),\varphi\left(t\right)\right\rangle_{H}\quad\forall\varphi\in D,\ t\in\left[0,T\right], \tag{3.3.23}$$

De (3.3.22) et (3.3.23) on a :

$$\left\langle \sigma_{\eta\beta}^{\zeta h}\left(t\right),\varepsilon\left(\varphi\left(t\right)\right)\right\rangle_{\mathcal{H}}=\left\langle f_{0}\left(t\right),\varphi\left(t\right)\right\rangle_{H}\quad\forall\varphi\in D,\ t\in\left[0,T\right],$$

il vient à partir de $(1.1.2)$.

$Div\sigma_{\eta\beta}^{\zeta h}\left(t\right)=-f_{0}\left(t\right)$ et comme $f_{0}\left(t\right)\in H\Rightarrow Div\sigma_{\eta\beta}^{\zeta h}\left(t\right)\in H$ d'où $\sigma_{\eta\beta}^{\zeta h}\left(t\right)\in\mathcal{H}_{1}$.

Nous montrons que $\sigma_{\eta\beta}^{\zeta h}\left(t\right)\in W^{1,\infty}\left(0,T,\mathcal{H}_{1}\right)$, $u_{\eta\beta}^{\zeta h}\left(t\right)\in W^{1,\infty}\left(0,T,V\right)$.

Pour cela, soit $t_{1},t_{2}\in\left[0,T\right]$ nous notons, $w_{\eta}\left(t_{i}\right)=w_{i},\sigma_{\eta\beta}^{\zeta h}\left(t_{i}\right)=\sigma_{i}$.

$\beta\left(t_{i}\right)=\beta_{i}$; $h\left(t_{i}\right)=h_{i}$; $\zeta\left(t_{i}\right)=\zeta_{i}$; $f_{\eta}\left(t_{i}\right)=f_{i}\qquad\forall i=1,2$

En utilisant (3.3.8) puis en faisant la déffirence entre les deux expressions obtenues, et quelque manipulation algébrique on obtient :

$$\begin{aligned}&\left\langle \mathcal{A}\varepsilon\left(w_{1}\left(t\right)\right)-\mathcal{A}\varepsilon\left(w_{2}\left(t\right)\right),\varepsilon\left(w_{1}\left(t\right)\right)-\varepsilon\left(w_{2}\left(t\right)\right)\right\rangle_{\mathcal{H}}\leq\\&C\left(\beta_{1}\left(t\right),\zeta_{1}\left(t\right),w_{2}-w_{1}\right)\ +C\left(\beta_{2}\left(t\right),\zeta_{2}\left(t\right),w_{1}-w_{2}\right)\ +\\&+\ j\left(\beta_{1},h_{1},\zeta_{1},w_{2}\right)-\ \ j\left(\beta_{1},h_{1},\zeta_{1},w_{1}\right)+\ j\left(\beta_{2},h_{2},\zeta_{2},w_{1}\right)-\\&-\ j\left(\beta_{2},h_{2},\zeta_{2},w_{2}\right)+\left\langle f_{1}-f_{2},w_{1}-w_{2}\right\rangle_{V}.\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

On a aussi à partir (3.1.25) et $(3.1.18)$.

$$
\begin{aligned}
& j\left(\beta_1, h_1, \zeta_1, w_2\right)- \quad j\left(\beta_1, h_1, \zeta_1, w_1\right)+\ j\left(\beta_2, h_2, \zeta_2, w_1\right)-\ j\left(\beta_2, h_2, \zeta_2, w_2\right) \leq \\
& c\,\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\left(\left\|\beta_1-\beta_2\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)}+\left\|\zeta_1-\zeta_2\right\|_V+\left\|h_1-h_2\right\|_{\mathcal{H}}\right)\left\|w_1-w_2\right\|_V,
\end{aligned} \tag{3.3.25}
$$

Moyennant (3.2.9) et (3.2.10) :

$$
\begin{aligned}
& C\left(\beta_1(t), \zeta_1(t), w_2-w_1\right)\ +C\left(\beta_2(t), \zeta_2(t), w_1-w_2\right)=C\left(\beta_1(t), \zeta_1(t)-\zeta_2(t), w_1-w_2\right)+ \\
& +\int_{\Gamma_3}\left[C_\tau \zeta_{2\tau}\left(\beta_1^2-\beta_2^2\right)\left(w_{1\tau}-w_{2\tau}\right)+C_\nu \zeta_{2\nu}\left(\beta_1^2-\beta_2^2\right)\left(w_{1\nu}-w_{2\nu}\right)\right],
\end{aligned}
$$

Donc il s'ensuit de la continuité de la forme C que :

$$
\begin{aligned}
& C\left(\beta_1(t), \zeta_1(t), w_2-w_1\right)\ +C\left(\beta_2(t), \zeta_2(t), w_1-w_2\right) \leq \\
& K\left(\left\|\beta_1-\beta_2\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)}+\left\|\zeta_1-\zeta_2\right\|_V\right)\ \left\|w_1-w_2\right\|_V\ ,
\end{aligned} \tag{3.3.26}
$$

et d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve :

$$
\left\langle f_1-f_2, w_1-w_2\right\rangle_V . \leq\left\|f_1-f_2\right\|_V\left\|w_1-w_2\right\|_V, \tag{3.3.27}
$$

et d'aprés $(3.1.20)\,(a)\,,\ (3.3.24)\,,\ (3.3.25)\ et\ \ (3.3.26)\,,(3.3.27)\,.$

$$
\begin{aligned}
& \left\|w_1-w_2\right\|_V \quad \leq \\
& \frac{c.K}{m_{\mathcal{A}}}\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\left(\left\|\beta_1-\beta_2\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)}+\left\|\zeta_1-\zeta_2\right\|_V+\left\|h_1-h_2\right\|_{\mathcal{H}}+\left\|f_1-f_2\right\|_V,\right)
\end{aligned} \tag{3.3.28}
$$

D'autre part,on a d'aprés $(3.3.7)\,;(3.3.27)\,;(3.1.17)\,;(3.1.20)\,(a)$:

$$
\begin{aligned}
& \left\|\sigma_1-\sigma_2\right\|_{\mathcal{H}} \leq \\
& z\,\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\left(\left\|\beta_1-\beta_2\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)}+\left\|\zeta_1-\zeta_2\right\|_V+\left\|h_1-h_2\right\|_{\mathcal{H}}+\left\|f_1-f_2\right\|_V\right),
\end{aligned} \tag{3.3.29}
$$

Et comme $\zeta \in W^{1,\infty}(0,T,V)\,, h \in W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H}_1)\;\; et\; \beta \in W^{1,\infty}(0,T,L^{\infty}(\Gamma_3))$

on déduit que $w_\eta \in W^{1,\infty}(0,T,V)$ et $\sigma_{\eta\beta}^{\zeta h}(t) \in W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H}_1)\,.$

et pour (3.3.21) on déduit que :

$$u_{\eta\beta}^{\zeta h} \in W^{1,\infty}(0,T,V)\;\; et\; \sigma_{\eta\beta}^{\zeta h}(t) \in W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H}_1)\,, \tag{3.3.30}$$

Soit $u_\beta \in W^{1,\infty}(0,T,V)\,,$ la fonction donnée par :

$$u_\beta = \quad u_{\eta\beta}^{\zeta h}, \tag{3.3.31}$$

Etape 2

Dans la deuxième étape, nous utilisons le champ de déplacement u_β et nous considérons le problème suivant.

Problème $\mathbf{Q}_V^{\theta\beta}$: Trouver un champ d'adhésion $\theta_\beta : [0,T] \to L^{\infty}(\Gamma_3)$ tel que :

$$\dot{\theta}_\beta(t) = -\left(\,\theta_\beta(t)\left(\gamma_\nu R_\nu\left(u_{\beta\nu}(t)\right)\right)^2 + \gamma_\tau \left\|R_\tau u_{\beta\tau}(t)\right\|^2\right) - \epsilon_a\Big)_+ \quad p.p.t \in \;\; [0.T]\,, \tag{3.3.32}$$

$$\theta_\beta(0) = \beta_0. \tag{3.3.33}$$

Lemme 3.3.4. Il existe une unique solution du problème $\mathbf{Q}_V^{\theta\beta}$, ayant la régularité (3.3.3) on plus :

$$0 \leq \theta_\beta(t) \leq 1 \;\; \forall t \in [0,T]\,,\; p.p \;\; sur \quad \Gamma_3.$$

Démonstration du lemme 3.3.4 : Nous considérons l'application $F_\beta(t,) : L^{\infty}(\Gamma_3) \to L^{\infty}(\Gamma_3)$ définie par :

$$F_\beta(t,.) = -\left(\,\theta_\beta(t)\left(\gamma_\nu R_\nu\left(u_{\beta\nu}(t)\right)\right)^2 + \gamma_\tau \left\|R_\tau u_{\beta\tau}(t)\right\|^2\right) - \epsilon_a\Big)_+ \qquad p.p.t \in [0,T]\,.$$

Soit $t \in [0,T]$, $\theta \in L^{\infty}(\Gamma_3)$ et d'aprés (3.1.24) et les propriétés des opérateurs de troncation R_τ, R_ν que F_β satisfait à :

$$\| \; F_\beta\,(.,\theta_1) - \; F_\beta\,(.,\theta_2)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq L_F \; \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \qquad p.p.t \in [0,T]\,.$$

$L_F \succ 0$,et qui est dépend de $\gamma_\tau, \gamma_\nu, \epsilon_a, L_0$, mais ne dépent pas du temps.

Par ailleurs, il existe $p = \infty$ tel que $F_\beta\,(,\theta)$ apprtient à $L^\infty\,(0,T,L^\infty\,(\Gamma_3))\,.\forall\; \theta \in L^\infty\,(\Gamma_3)$ et comme $\beta_0 \in L^\infty\,(\Gamma_3)$,on peut appliquer le théorème de cauchy- lipschitz (*Annexe théorème* $A.1.10$) et pour la démonstration voir *Suquet* [33] *page 60*, qui nous donne l'existance et l'unicité d'une fonction $\theta_\beta \in W^{1,\infty}\,(0,T,L^\infty\,(\Gamma_3))$ tel qui résout le **Problème $\mathbf{Q}_V^{\theta\beta}$**.

Notons que la restriction $0 \leq \beta\,(t) \leq 1$ est incluse implicitement dans le problème variationnel $\mathbf{P}_V$. En effet (3.2.12) et $\beta\,(0) = \beta_0$ nous garantie que $\beta\,(t) \leq \beta_0$ pour tout $t \geq 0$ (parce que θ_β est une fonction décroissante pour la variable t) donc l'hépothèse (3.1.26) montre que $\beta\,(t) \leq 1$ pour $t \geq 0$, $p.p$ sur Γ_3 .D'un autre coté, si $\beta\,(t_0) = 0$ à $t = t_0$, alors il s'ensuit de (3.2.12) que $\dot{\beta}\,(t) = 0$ pour $t \geq t_0$ (car si $t \geq t_0 \Rightarrow \beta\,(t) \leq \beta\,(t_0)$ donc (3.2.12) nous donne $\dot{\beta}\,(t) = 0$ pour $t \geq t_0$) donc $\beta\,(t)$ est constante pour tout $t \geq t_0$ d'où $\beta\,(t) = \beta\,(t_0) = 0$ pour tout $t \geq t_0$.Nous concluons que $0 \leq .\beta\,(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0,T]$, $p.p$ sur Γ_3 . Il résulte que $0 \leq \theta_\beta\,(t) \leq 1$.

Ce qui achève la démonstration du **Lemme 3.3.4.**

Etape 3

Pour tout $\eta \in W^{1,\infty}\,(0,T,V)$,on prend $u_{\eta\beta}^{\zeta h}$, la solution unique du **problème $\mathbf{P}_V^{u_{\eta\beta}^{h\zeta}}$**.

Soit $\hat{\Lambda}\eta\,(t)$ l'élément de V donné par :

$$\left\langle \hat{\Lambda}(\eta\,(t)), v \right\rangle_V = \left\langle \mathcal{G}\varepsilon(u_{\eta\beta}^{\zeta h}\,(t)), \varepsilon\,(v) \right\rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V,\; t \in [0,T]\,, \tag{3.3.34}$$

On a le résultat suivant :

Lemme 3.3.5 Pour tout $\eta \in W^{1,\infty}\,(0,T,V)$, la fonction $\hat{\Lambda}\eta : [0,T] \to V$ appartient à $W^{1,\infty}\,(0,T,V)$.En outre, il existe un unique élément $\eta^* \in W^{1,\infty}\,(0,T,V)$ tel que :

$$\hat{\Lambda}\eta^* = \eta^*,$$

Démonstration : Soit $\eta \in L^\infty(0,T,V)$ et $t_1, t_2 \in [0,T]$. En utilisant (3.3.34), on obtient :

$$\left|\left\langle \hat{\Lambda}(\eta(t_1)) - \hat{\Lambda}(\eta(t_2)), v \right\rangle_V\right| = \left|\left\langle \mathcal{G}\varepsilon(u_{\eta\beta}^{\zeta h}(t_1)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_{\eta\beta}^{\zeta h}(t_2)), \varepsilon(v) \right\rangle_{\mathcal{H}}\right|,$$

d'aprés l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* on obtient :

$$\left|\left\langle \hat{\Lambda}(\eta(t_1)) - \hat{\Lambda}(\eta(t_2)), v \right\rangle_V\right| \leq \left\|\mathcal{G}\varepsilon(u_{\eta\beta}^{\zeta h}(t_1)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_{\eta\beta}^{\zeta h}(t_2))\right\|_{\mathcal{H}} \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}},$$

et d'aprés (3.1.17) et (3.1.21) (a) on obtient :

$$\left|\left\langle \hat{\Lambda}(\eta(t_1)) - \hat{\Lambda}(\eta(t_2)), v \right\rangle_V\right| \leq L_{\mathcal{G}} \left\|u_{\eta\beta}^{\zeta h}(t_1)) - u_{\eta\beta}^{\zeta h}(t_2)\right\|_{\mathcal{H}} \|v\|_V \ , \tag{3.3.35}$$

On pose maintenant $v = \hat{\Lambda}\eta(t_1) - \hat{\Lambda}\eta(t_2)$ dans (3.3.35) pour obtenir :

$$\left\|\hat{\Lambda}(\eta(t_1)) - \hat{\Lambda}(\eta(t_2))\right\|_V \leq L_{\mathcal{G}} \left\|u_{\eta\beta}^{\zeta h}(t_1)) - u_{\eta\beta}^{\zeta h}(t_2)\right\|_V, \tag{3.3.36}$$

et comme $u_{\eta\beta}^{\zeta h} \in W^{1,\infty}(0,T,V)$, nous concluons de l'inégalité (3.3.36) que $\hat{\Lambda}\eta \in W^{1,\infty}(0,T,V)$.

Soit maintenant $\eta_1, \eta_2 \in W^{1,\infty}(0,T,V)$ et soit $u_i = u_{\eta_i\beta}^{\zeta h}$ pour $i = 1.2$. Pour tout $t \in [0,T]$, en utilisés pour la preuve de (3.3.36), nous obtenons :

$$\left\|\hat{\Lambda}(\eta_1(t)) - \hat{\Lambda}(\eta_2(t))\right\|_V \leq L_{\mathcal{G}} \|u_1(t)) - u_2(t)\|_V, \tag{3.3.37}$$

mais u_1, u_2 ont la même condition initiale donc :

$$\|u_1(t)) - u_2(t)\|_V = \left\|\int_0^t (\dot{u}_1(s)) - \dot{u}_2(s))\, ds\right\|_V \leq \int_0^t \|\dot{u}_1(s)) - \dot{u}_2(s)\|_V\, ds, \tag{3.3.38}$$

Combinons l'inégalité (3.3.36) avec (3.3.38) on obtient :

$$\left\|\hat{\Lambda}(\eta_1(t)) - \hat{\Lambda}(\eta_2(t))\right\|_V \leq L_{\mathcal{G}} \int_0^t \|\dot{u}_1(s)) - \dot{u}_2(s)\|_V\, ds. \ \ \forall\, t \in [0,T], \tag{3.3.39}$$

Nous notons par $u_1 = u(t_1)$, $v = u_2$, $\eta(t_1) = \eta_1$ et $u_2 = u(t_2)$, $v = u_1$, $\eta(t_2) = \eta_2$.

En utilisant l'inégalité (3.3.8) et quelques manipulation algébrique on obtient :

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2), \varepsilon(\dot{u}_1) - \varepsilon(\dot{u}_2)\rangle_{\mathcal{H}} \leq \\ &C(\beta,\zeta,\dot{u}_2-\dot{u}_1) \quad + \quad j(\beta,h,\zeta,\dot{u}_2-\dot{u}_1) + \quad j(\beta,h,\zeta,\dot{u}_1-\dot{u}_2) + \\ &+C(\beta,\zeta,\dot{u}_1-\dot{u}_2) + \langle \eta_2-\eta_1, \dot{u}_1-\dot{u}_2\rangle_V , \end{aligned} \tag{3.3.40}$$

mais d'aprés :

1) $C(\beta,\zeta,\dot{u}_2-\dot{u}_1) + C(\beta,\zeta,\dot{u}_1-\dot{u}_2) = 0$

2) $j(\beta,h,\zeta,\dot{u}_2-\dot{u}_1) + j(\beta,h,\zeta,\dot{u}_1-\dot{u}_2) = 0$

Donc l'inégalité (3.3.40) devient :

$$\langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2), \varepsilon(\dot{u}_1) - \varepsilon(\dot{u}_2)\rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle \eta_2-\eta_1, \dot{u}_1-\dot{u}_2\rangle_V ,$$

d'où l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* nous donnes :

$$\langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2), \varepsilon(\dot{u}_1) - \varepsilon(\dot{u}_2)\rangle_{\mathcal{H}} \leq \|\eta_1-\eta_2\|_V \|\dot{u}_1-\dot{u}_2\|_V \ , \tag{3.3.41}$$

Et d'aprés $(3.1.17)\,,(3.1.20)\,(b)$ on a

$$\langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2), \varepsilon(\dot{u}_1) - \varepsilon(\dot{u}_2)\rangle_{\mathcal{H}} \geq m_{\mathcal{A}} \|\dot{u}_1-\dot{u}_2\|_V^2 , \tag{3.3.42}$$

Donc d'aprés (3.3.41) et (3.3.42) on obtient :

$$m_{\mathcal{A}} \|\dot{u}_1-\dot{u}_2\|_V^2 \leq \|\eta_1-\eta_2\|_V \|\dot{u}_1-\dot{u}_2\|_V ,$$

Ce qui implique que :

$$\|\dot{u}_1-\dot{u}_2\|_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}}} \|\eta_1(t)-\eta_2(t)\|_V \quad \forall t \in [0,T] , \tag{3.3.43}$$

Combinons maintenant l'inégalité (3.3.39) avec (3.3.43) on obtient :

$$\left\|\hat{\Lambda}(\eta_1(t)) - \hat{\Lambda}(\eta_2(t))\right\|_V \leq \frac{L_{\mathcal{G}}}{m_{\mathcal{A}}} \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V \quad ds \quad \forall t \in [0, T],$$

On fait une itération sur cette dernière inégalité n fois pour trouver :

$$\left\|\hat{\Lambda}^n(\eta_1(t)) - \hat{\Lambda}^n(\eta_2(t))\right\|_V \leq \frac{(\frac{L_{\mathcal{G}}}{m_{\mathcal{A}}})^n T^n}{n!} \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{W^{1,\infty}(0,T,V)}, \tag{3.3.44}$$

Ce qui implique que pour n suffisamment grand l'opérateur $\hat{\Lambda}^n$est une contraction dans l'espace de *Banach* $W^{1,\infty}(0, T, V)$, donc il possède un point fixe unique $\eta^* \in W^{1,\infty}(0, T, V)$, et par conséquent η^* est l'unique point fixe de l'opérateure $\hat{\Lambda}$.■

- On a pour tout $\zeta(t) \in W^{1,\infty}(0, T, V)$, $\exists! u_{\eta\beta}^{\zeta h} \in W^{1,\infty}(0, T, V)$ donc on peut définir l'opérateur $\Lambda : W^{1,\infty}(0, T, V) \to W^{1,\infty}(0, T, V)$ tel que

$$\Lambda\zeta = u_{\eta^*\beta}^{\zeta h}, \tag{3.3.45}$$

Lemme 3.3.6. Pour tout $\zeta(t) \in V$, la fonction $\Lambda\zeta : [0.T] \to V$ appartient à $W^{1,\infty}(0, T, V)$, et il existe un unique élément $\zeta^*(t) \in W^{1,\infty}(0, T, V)$ tel que

$$\Lambda\zeta^* = \zeta^*,$$

Démonstration : Soient $\zeta_1, \zeta_2 \in W^{1,\infty}(0, T, V)$, on pose $u_{\eta^*\beta}^{\zeta_1 h} = u_1$ et $u_{\eta^*\beta}^{\zeta_2 h} = u_2$ d'aprés (3.3.8) et (3.3.34) et quelque manipulation algébriques on obtient :

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2(t)), \varepsilon(\dot{u}_1(t)) - \varepsilon(\dot{u}_2(t))\rangle_{\mathcal{H}} \leq \\
&\langle \mathcal{G}\varepsilon(u_2(t)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_1(t)), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\rangle_{\mathcal{H}} + \\
&C(\beta(t), \zeta_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)) \ - C(\beta(t), \zeta_1(t), \dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)) \\
&+ \ j(\beta(t), h(t), \zeta_1(t), \dot{u}_2(t)) - \ j(\beta(t), h(t), \zeta_1(t), \dot{u}_1(t)) + \\
&+ j(\beta(t), h(t), \zeta_2(t), \dot{u}_1(t)) - \ j(\beta(t), h(t), \zeta_2(t), \dot{u}_2(t)) \ ,
\end{aligned}$$

Maintenant d'aprés $(3.3.25) - (3.3.26)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{A}\varepsilon\left(\dot{u}_1\left(t\right)\right) - \mathcal{A}\varepsilon\left(\dot{u}_2\left(t\right)\right), \varepsilon\left(\dot{u}_1\left(t\right)\right) - \varepsilon\left(\dot{u}_2\left(t\right)\right)\rangle_{\mathcal{H}} \leq \\
&\langle \mathcal{G}\varepsilon(u_2\left(t\right)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_1\left(t\right)), \dot{u}_1\left(t\right) - \dot{u}_2\left(t\right)\rangle_{\mathcal{H}} \ + \\
&+c\left\|\zeta_1\left(t\right) - \zeta_2\left(t\right)\right\|_V . \left\|\dot{u}_1\left(t\right) - \dot{u}_2\left(t\right)\right\|_V + \\
&+c_1\left\|\mu\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} . \left\|\zeta_1\left(t\right) - \zeta_2\left(t\right)\right\|_V . \left\|\dot{u}_1\left(t\right) - \dot{u}_2\left(t\right)\right\|_V ,
\end{aligned} \tag{3.3.46}$$

pour $(3.1.17)\,;(3.1.20)\,(a)$ et $(3.1.21)\,(a)$ on a :

$$\langle \mathcal{A}\varepsilon\left(\dot{u}_1\left(t\right)\right) - \mathcal{A}\varepsilon\left(\dot{u}_2\left(t\right)\right), \varepsilon\left(\dot{u}_1\left(t\right)\right) - \varepsilon\left(\dot{u}_2\left(t\right)\right)\rangle_{\mathcal{H}} \geq m_{\mathcal{A}}\left\|\dot{u}_1\left(t\right) - \dot{u}_2\left(t\right)\right\|_V^2 \tag{3.3.47}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\langle \mathcal{G}\varepsilon(u_2\left(t\right)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_1\left(t\right)), \dot{u}_1\left(t\right) - \dot{u}_2\left(t\right)\rangle_{\mathcal{H}}\right| \leq \\
&L_{\mathcal{G}}\left\|u_1\left(t\right) - u_2\left(t\right)\right\|_V . \left\|\dot{u}_1\left(t\right) - \dot{u}_2\left(t\right)\right\|_V
\end{aligned} \tag{3.3.48}$$

d'où $(3.1.46) - (3.3.47)$ et $(3.3.48)$ nous donne :

$$\left\|\dot{u}_1\left(t\right) - \dot{u}_2\left(t\right)\right\|_V \leq c\left\|u_1\left(t\right) - u_2\left(t\right)\right\|_V + c\left\|\zeta_1\left(t\right) - \zeta_2\left(t\right)\right\|_V ,$$

Par intégration on aura :

$$\int_0^t \left\|\dot{u}_1\left(s\right) - \dot{u}_2\left(s\right)\right\|_V ds \leq c \int_0^t \left\|u_1\left(s\right) - u_2\left(s\right)\right\|_V ds + c \int_0^t \left\|\zeta_1\left(s\right) - \zeta_2\left(s\right)\right\|_V ds,$$

d'où on obtient :

$$\left\|u_1\left(t\right) - u_2\left(t\right)\right\|_V \leq \ c \int_0^t \left\|u_1\left(s\right) - u_2\left(s\right)\right\|_V ds + c \int_0^t \left\|\zeta_1\left(s\right) - \zeta_2\left(s\right)\right\|_V ds,$$

Moyennant une version des *lemme de Gronwall*, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V &\leq c \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_V \, ds, \\ \left\| u_{\eta^*\beta}^{\zeta_1 h}(t) - u_{\eta^*\beta}^{\zeta_2 h}(t) \right\|_V &\leq c \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_V \, ds, \end{aligned} \tag{3.3.49}$$

donc d'aprés (3.3.45) on obtient :

$$\| \Lambda(\zeta_1(t)) - \Lambda(\zeta_2(t))\|_V \leq c \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_V \, ds,$$

On sait que $c \succ 0$ seulement Λ peut n'est pas contraction donc on fait une itération sur cette dernière inégalité n fois pour trouver que :

$$\| \Lambda^n(\zeta_1(t)) - \Lambda^n(\zeta_2(t))\|_V \leq \frac{c^n T^n}{n!} \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{W^{1,\infty}(0,T,V)}, \tag{3.3.50}$$

Ce qui implique que pour n suffisamment grand l'opérateur Λ^n est une contraction dans l'espace de *Banach* $W^{1,\infty}(0,T,V)$, donc il possède un point fixe unique $\zeta^* \in W^{1,\infty}(0,T,V)$, et par conséquent ζ^*est l'unique point fixe de l'opérateur Λ .■

-On considère maintenant l'opérateure $\bar{\Lambda} : W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H}_1) \rightarrow W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H}_1)$ tel que :

$$\bar{\Lambda}h(t) = \mathcal{A}\varepsilon\left(\dot{u}_{\eta^*\beta}^{\zeta h}(t)\right) + \mathcal{G}\varepsilon\left(u_{\eta^*\beta}^{\zeta h}(t)\right) \qquad \forall\ t \in [0.T], \tag{3.3.51}$$

Lemme 3.3.7. Pour tout $h(t) \in \mathcal{H}_1$, la fonction $\bar{\Lambda}h : [0.T] \rightarrow \mathcal{H}_1$, appartient à $W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H}_1)$ et il existe un unique élément $h^* \in W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H}_1)$ tel que

$$\bar{\Lambda}h^* = h^*,$$

Démonstration : Soient $h_1, h_2 \in W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H}_1)$,on pose $u_{\eta^*\beta}^{\zeta h_1} = u_1$ et $u_{\eta^*\beta}^{\zeta h_2} = u_2$d'aprés (3.3.51) on a :

$$\begin{aligned}&\left\| \bar{\Lambda}(h_1(t)) - \bar{\Lambda}(h_2(t))\right\|_V \leq \\ &\|\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2(t))\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{G}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_2(t))\|_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Et d'aprés (3.1.17) ; (3.1.20) (b) et (3.1.21) (a) on obtient :

$$\begin{aligned}&\left\| \bar{\Lambda}(h_1(t)) - \bar{\Lambda}(h_2(t))\right\|_V \leq \\ &L_{\mathcal{A}}\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_V + L_{\mathcal{G}}\|u_1(t) - u_2(t)\|_V,\end{aligned}$$

Nous utilisons des arguments similaires à ceux utilisées pour démontrer (3.3.49) on déduit que :

$$\begin{aligned}&L_{\mathcal{A}}\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_V + L_{\mathcal{G}}\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq \\ &c\|h_1(t) - h_2(t)\|_{\mathcal{H}} + c\int_0^t \|h_1(t) - h_2(t)\|_{\mathcal{H}}\, ds,\end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$\begin{aligned}&\left\| \bar{\Lambda}(h_1(t)) - \bar{\Lambda}(h_2(t))\right\|_V \leq \\ &c\|h_1(t) - h_2(t)\|_{\mathcal{H}} + c\int_0^t \|h_1(t) - h_2(t)\|_{\mathcal{H}}\, ds,\end{aligned}$$

On sait que $c \succ 0$ seulement, $\bar{\Lambda}$ peut n'est pas contraction donc on fait une itération sur cette dernière inégalité n fois pour trouver que :

$$\left\| \bar{\Lambda}^n(h_1(t)) - \bar{\Lambda}^n(h_2(t))\right\|_V \leq \frac{c^n(1+T)^n}{n_!}\|h_1(t) - h_2(t)\|_{\mathcal{H}}, \tag{3.3.52}$$

Ce qui implique que pour n suffisamment grand l'opérateur $\bar{\Lambda}^n$ est une contraction dans l'espace de *Banach* $W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1)$, donc il possède un point fixe unique $h^* \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1)$, et par conséquent h^*est l'unique point fixe de l'opérateur $\bar{\Lambda}$.■

Il s'ensuit du **Lemme 3.3.4,** qui pour tout $\beta \in W^{1,\infty}(0, T, L^\infty(\Gamma_3))$ le problème admet une solution unique $\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0, T, L^\infty(\Gamma_3))$. Donc, on peut considérer l'opérateur

$\check{\Lambda}: W^{1,\infty}(0,T,L^\infty(\Gamma_3)) \to W^{1,\infty}(0,T,L^\infty(\Gamma_3))$ donné par :

$$\check{\Lambda}\beta = \theta_\beta, \tag{3.3.53}$$

Lemme 3.3.8. Il existe un unique élément $\beta^* \in W^{1,\infty}(0,T,L^\infty(\Gamma_3))$ tel que :

$$\check{\Lambda}\beta^* = \beta^*,$$

Démonstration : Soit $\beta_1, \beta_2 \in W^{1,\infty}(0,T,L^\infty(\Gamma_3))$ et soit u_i, θ_i les fonctions obtenues dans le **Lemme 3.3.3** et **Lemme 3.3.4,** pour $\beta = \beta_i, i = 1,2$. Soit $t \in [0,T]$, nous utilisons des arguments similaire à ceux utilisés pour démontrer (3.3.49) on obtient :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq \frac{cM}{m_{\mathcal{A}}} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^\infty(\Gamma_3)}, \tag{3.3.54}$$

D'autre part, il s'ensuit de $(3.3.32) - (3.3.33)$ que :

$$\theta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t \left(\theta_i(s)\left(\gamma_\nu R_\nu(u_{i\nu}(s))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau u_{i\tau}(s)\|^2\right) - \epsilon_a\right)_+ ds,$$

Alors, de l'égalité précédente on obtient :

$$\begin{aligned}\theta_1(t) - \theta_2(t) &= \int_0^t \gamma_\tau(\theta_2(s)\|R_\tau u_{2\tau}(s)\|^2 - \theta_1(s)\|R_\tau u_{1\tau}(s)\|^2)ds \; + \\ &\quad + \int_0^t \gamma_\nu(\theta_2(s) R_\nu u_{2\nu}(s)^2 - \theta_1(s) R_\nu u_{1\nu}(s)^2)ds,\end{aligned}$$

d'où il résulte :

$$\|\theta_1(t)-\theta_2(t)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\int_0^t \left\|(\theta_2(s)\|R_\tau u_{2\tau}(s)\|^2-\theta_1(s)\|R_\tau u_{1\tau}(s)\|^2)\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} ds+$$

$$+\|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\int_0^t \left\|(\theta_2(s)R_\nu u_{2\nu}(s)^2-\theta_1(s)R_\nu u_{1\nu}(s)^2)\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} ds,$$

En utilisant la définition de R_ν et R_τ et écrivant $\theta_1=\theta_1+\theta_2-\theta_2$ nous arrivons à :

$$\|\theta_1(t)-\theta_2(t)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq c\int_0^t \|\theta_1(s)-\theta_2(s)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} ds+c\int_0^t \|u_1(s)-u_2(s)\|_{L^\infty(\Gamma_3)^\mathbf{d}} ds,$$

Moyennant une version des *Lemme de Gronwall*, il s'ensuit que :

$$\|\theta_1(t)-\theta_2(t)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq c\int_0^t \|u_1(s)-u_2(s)\|_{L^\infty(\Gamma_3)^\mathbf{d}}\ ds,$$

et en utilisant (3.1.18) on obtient :

$$\|\theta_1(t)-\theta_2(t)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq c\int_0^t \|u_1(s)-u_2(s)\|_V\ ds, \tag{3.3.55}$$

d'où, d'aprés (3.3.53) – (3.3.55) on obtient :

$$\left\|\check{\Lambda}\beta_1(t)-\check{\Lambda}\beta_2(t)\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq \frac{cM}{m_{\mathcal{A}}}\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\|\beta_1(t)-\beta_2(t)\|_{L^\infty(\Gamma_3)}, \tag{3.3.56}$$

On sait que $c>0$ seulement Λ peut n'est pas contraction donc on fait une itération sur cette dernière inégalité n fois pour trouver que :

$$\left\|\ \check{\Lambda}^n(\beta_1(t))-\ \check{\Lambda}^n(\beta_2(t))\right\|_V \leq \frac{(\frac{cM}{m_{\mathcal{A}}}\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)})^n T^n}{n_!}\|\beta_1(t)-\beta_2(t)\|_{W^{1,\infty}(0,T,L^\infty(\Gamma_3))}, \tag{3.3.57}$$

Ce qui implique que pour n suffisamment grand l'opérateur $\check{\Lambda}^n$ est une contraction dans l'espace de *Banach* $W^{1,\infty}(0,T,L^\infty(\Gamma_3))$, donc il possède un point fixe unique $\beta^* \in W^{1,\infty}(0,T,L^\infty(\Gamma_3))$, et par conséquent β^*est l'unique point fixe de l'opérateur $\check{\Lambda}$.■

Démonstration du théorème 3.3.1

1)Existence : Soit $\beta^* \in W^{1,\infty}(0,T,L^\infty(\Gamma_3))\,, h^* \in W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H}_1)\,, \zeta^* \in W^{1,\infty}(0,T,V)$ les poins fixes, respectivement, des opérateure $\check{\Lambda}, \bar{\Lambda}, \Lambda$, et soit (u,σ) la solution du **problème** $\mathbf{P}_V^{u_{\eta\beta}^{h\zeta}}$ et β la solution du **Problème** $\mathbf{Q}_V^{\theta\beta}$ pour $\beta = \beta^*, \zeta = \zeta^*, h = h^*$.

En utilisant les **Lemme 3.3.6 , 3.3.7 , 3.3.8** on obtient :

$$\begin{aligned} &u = u_{\zeta^* h^*}^{\beta^* \eta^*} = \Lambda\zeta^* = \zeta^*,\ \sigma = \sigma_{\zeta^* h^*}^{\beta^* \eta^*} = \bar{\Lambda} h^* = h^* = \mathcal{A}\varepsilon\left(\dot{u}_{\eta^*\beta^*}^{\zeta^* h^*}(t)\right) + \mathcal{G}\varepsilon\left(u_{\eta^*\beta^*}^{\zeta^* h^*}(t)\right) \\ &et \quad \beta = \check{\Lambda}\beta^* = \theta_\beta^* = \beta^*, \end{aligned} \tag{3.3.58}$$

Donc nous concluons par (3.3.7),(3.3.8),(3.3.9),(3.3.32) et (3.3.33) que (u,σ,β) est une solution du **Problème** $\mathbf{P}_V$ **.**On a d'aprés (3.3.30)

$u_{\eta\beta}^{\zeta h} \in W^{1,\infty}(0,T,V)\,, \sigma_{\eta\beta}^{\zeta h} \in W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H}_1)$ d'où $u = u_{\zeta^* h^*}^{\beta^* \eta^*} \in W^{1,\infty}(0,T,V)\,,\ \sigma = \sigma_{\zeta^* h^*}^{\beta^* \eta^*} \in W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H}_1)\,.\ \beta \in W^{1,\infty}(0,T,L^\infty(\Gamma_3))$ découle du **Lemme 3.3.4.**

2) unicité : L'unicité de la solution est une conséquence de l'uincité des points fixe des opérateurs $\check{\Lambda}, \bar{\Lambda}, \Lambda$ ■

Annexe A

Elements d'analyse non-linéaire dans les espaces de Hilbert.

Afin de faciliter la lecture de cet ouvrage, il nous est paru utile de rappeler, dans cette denière partie de ce mémoire, quelques éléments d'analyse fonctionnelle. Cet annexe est divisé en deux parties.

Nous commençons de rappeler quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert, et sur les opérateurs fortement monotones, et particulièrement des résultats d'existence et d'unicité concernant les inéquations variationnelles elliptiques, et à la présentation du théorème de *Cauchy-Lipschitz*.

La deuxième partie concerne les espaces fonctionnels . On y introduit les espaces de distributions et les espaces de type Sobolev associés à l'opérateur déformation et à l'opérateur divergence, et on présente leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. Enfin, on passe en revue quelques propriétés fondamentales des espaces des fonctions à valeurs vectorielles et quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle.On cite aussi dans cette partie quelques lemmes du type Gronwall qui sont utilisés tout le long de ce travail et quelques théorèmes que nous utilisons dans ce mémoire.

A.1 Analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Cette section comporte des rappels de quelques résultats d'analyse non linéaire utilisés tout au long de ce mémoire. On précise que pour avoir plus du détails sur les rappels figurant dans cette section de consulter par exemple *Brézis* [4], *Yosida* [34] et *Sofonea* [30].

A.1.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

soit H désigne un espace de $Hilbert$ réel muni de son produit scalaire $\langle .,. \rangle_H$ c'est à dire $\langle .,. \rangle_H : H \times H \to \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive. On note par $|.|_H$ l'application de $H \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$|u|_H = \langle u, u \rangle_H^{\frac{1}{2}} .$$

et on rappelle que $|.|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de $Cauchy - Schwartz$

$$\langle u, v \rangle_H \leq |u|_H \, |v|_H \quad \forall u, v \in H.$$

On note aussi par H' l'espace dual de H et par $\langle .,. \rangle_{H' \times H}$ la dualité entre H'et H.

a) Propriétés élémentaires

Théorème A.1.1. *(Théorème de représentation de Riesz - Fréchet).*

Etant donné $\eta \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \eta, v \rangle_{H' \times H} = \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in H.$$

On a de plus

$$|\eta|_{H'} = |f|_H .$$

Ce théorème montre que toute forme linéair continue sur$H$ peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire. L'application $\eta \to f$ est un isomorphisme isométréque qui permet d'identifier H et son dual H'.

On dit que la suite $(u_n) \subset H$ est faiblement convergente $u \subset H$ et on note $u_n \to u$ si

$$\langle v, u_n \rangle_H \to \langle v, u \rangle_H \quad \forall v \in H.$$

Dans ce cas, u s'appelle *limite faible* de la suite (u_n). En utilisant l'inégalité de *Cauchy–Schwartz*, il résulte que si $u_n \to u$ alors $u_n \rightharpoonup u$ dans H. La réciproque n'est pas en général vraie. De plus, puisque tout espace de *Hilbert* est *réflexif*, on a le résultat suivant :

Théorème A.1.2. Soit (u_n) une suite bornée de H. Il existe alors un élément $u \in H$ et une sous-suite de (u_n) encore notée (u_n) telle que $u_n \rightharpoonup u$.

Un élément $u \in H$ qui est la limite faible d'une sous-suite (u_n) s'appelle *point faiblement adhérent* à la siute (u_n). On trouve que :

Théorème A.1.3. Si la suite $(u_n) \subset H$ possède un unique point faiblement adhérent $u \in H$, alors $u_n \rightharpoonup u$.

Autrement dit, le théorème précédent affirme que si toutes les sous-suites faiblement convergentes d'une suite (u_n) ont la même limite faible u alors toute la suite (u_n) converge faiblement vers u.

Théorème A.1.4. Soit $K \subset H$ *un convexe fermé non vide*. Alors pour tout $f \in H$ il existe $u \in K$ unique tel que

$$|f - u|_H = \min_{v \in K} |f - v|_H . \tag{A.1.1}$$

De plus, u est caractérisé par la propriété suivante :

$$u \in K, \ \ \langle u, v - u \rangle_H \geq \langle f, v - u \rangle_H \quad \forall v \in K. \tag{A.1.2}$$

Etant donné $K \subset H$ un convexe fermé non vide, le théorème précédent nous permet d'associer à chaque élément $f \in H$ l'élément u défini par $(A.1.1)$ ou $(A.1.2)$. On note $u = P_K f$ .On a mise en évidence l'opérateur $P_K : H \to K$ qui s'appelle *opérateur projection* de H sur K

b) Théorème du point fixe et Théorème de Lax-Milgram

On va commencer par rappeler un résultat classique est le théorème de point fixe de Banach. Ce résultat intervient dans les démonstrations de bon nombre des résultats d'existence et d'unicité établis dans les chapitres précédents.

Théorème A.1.5. Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $F : X \to X$ une application contractante, c'est- à- dire qu'il existe un réel k vérifiant $0 < k < 1$ tel que

$$d\left(F\left(x_1\right), F\left(x_2\right)\right) \leq kd\left(x_{1,}x_2\right) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

L'application F admet alors un point fixe unique $x \in X \quad i.e. \quad F(x) = x$.

Soit maintenant $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur $H \times H$. La forme a est dite

1) *continue* s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$|a(u,v)| \leq M\,|u|_H\,|v|_H \quad \forall u, v \in H.$$

2) *coercive* s'il existe un réel $m > 0$ tel que

$$a(u,u) \geq m\,|u|_H^2 \qquad \forall u \in H.$$

Remaque A.1.1. Soient $A : H \to H$ un opérateur et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ la forme définie par

$$a(u,u) = \langle Au, v\rangle_H \quad \forall u, v \in H. \tag{A.1.3}$$

On a alors les propriétés suivantes :

1) a est bilinéaire si et seulement si A est linéaire.

2) a est continue si et seulement si A est continu.

3) a est coercive si et seulement si A est défini positif .

Le second rappel de ce paragraphe concerne le fameux théorème de Lax-Miligram :

Théorème A.1.6. Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive.

Alors pour tout $f \in H$, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u,u) = \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in H. \tag{A.1.4}$$

A.1.2 Fonctions convexes - Semi-continuité inférieure

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$. Une telle fonction est dite *propre* si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, c'est -à-dire s'il existe $u_0 \in X$ tel que $\varphi(u_0) < +\infty$. La fonction φ est dite *convexe* si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \quad \forall u, v \in X, t \in]0,1[.$$

La fonction φ est dite *strictement convexe* si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in X$ tels que $u \neq v$.

Pour toute fonction $\varphi : X \to]-\infty, +\infty]$, on définit le domaine et l'épigraphe de φ respectivement par :

$$\begin{aligned} dom\varphi &= \{u \in X \setminus \varphi(u) < +\infty\}. \\ epi\varphi &= \{(u,\alpha) \in X \times \mathbb{R} \setminus \varphi(u) \leq \alpha\}. \end{aligned}$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants :

1) φ est propre si et seulement si $dom\varphi \neq \varnothing$.

2) Le domaine de φ est un ensemble convexe de X si φ est convexe.

3) φ est convexe si et seulement si *epi* φ est un ensemble convexe dans $X \times \mathbb{R}$.

Une fonction $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est dite $semi-continue\ inf\acute{e}rieurement$ $(s.c.i)$ en $u_0 \in H$ si

$$\liminf_{u \to u_0} \varphi(u) \geq \varphi(u_0).$$

Une fonction est dite $s.c.i$ sur $K \subset H$ si elle est $s.c.i$ en tout point de K et elle est dite $s.c.i$ si elle est $s.c.i$ sur tout H.

La propriété de $semi-continue\ inférieure$ peut être caractérisée par :

Lemme A.1.1 : Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et propre. Alors φ est *semi-continue inférieurement* si et seulement si elle est *semi-continue inférieurement* par rapport à la topologie faible de H.

A.1.3 Inéquations variationnelles elliptiques

Soient $A : H \to H$ un opérateur non linéaire, $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre et $f \in H$. Un bon nomre de problèmes aux limites en équations aux dérivées partielles ainsi qu'en mécanique des milieux continus ont un rapport avec des problèmes mathématiques de la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ tel que} \\ u \in H, \ \langle Au, v-u \rangle_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in H. \end{cases} \tag{A.1.5}$$

Le problème $(A.1.5)$ est appelé *inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce* sur H. D'autres problèmes rencontrés en mécanique ont un rapport avec des problèmes mathématiques similaires de la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ tel que} \\ u \in K, \ \langle Au, v-u \rangle_H \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K. \end{cases} \tag{A.1.6}$$

où K est un sous-ensemble non vide de H. Le problème $(A.1.6)$ est appelé *inéquation variationnelle elliptique de première espèce* sur H.

Remarquons que si $\varphi \equiv 0$ $(ou \ \ K = H)$, alors $(A.1.5), (A.1.6)$ est équivalente au problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ tel que} \\ u \in H, \ \langle Au, v-u \rangle_H = \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K. \end{cases} \tag{A.1.7}$$

On obtient ainsi une *équation variationnelle*. On dit que l'opérateur A défini sur un espace de *Hilbert* H est :

1) fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que :

$$\langle A(\varepsilon_1) - A(\varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rangle_H \geq m |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|_H^2 \quad \text{pour tout } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in H.$$

2) de Lipshitz s'il existe $M > 0$ tel que :

$$|Au - Av|_H \leq M |u - v|_H .$$

On peut démontrer (voir *sofonea* [30]) que si A est un opérateur fortement monotone et de Lipshitz alors A est inversible et A^{-1} est fortement monontone et de *Lipshitz*. En ce qui concerne les problèmes $(A.1.5), (A.1.6)$, on a les résultats d'existence et d'unicité suivants :

Théorème A.1.7. Si A est un opérateur fortement monotone et de Lipshitz et φ est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement alors l'inéquation variationnelle elliptique $(A.1.5)$ admet une solution unique.

Théorème A.1.8. Si A est un opérateur fortement monotone et de Lipshitz et K est un convexe et fermé non vide de H alors l'inéquation variationnelle elliptique $(A.1.6)$ admet une solution unique.

A.1.4 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Nous allons rappeler dans ce paragraphe un résultat sur les équations d'évolution.

Théorème A.1.9. Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t,.) : X \to X$ un opérateur défini p.p sur $(0,T)$, qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t,x) - F(t,y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X, \ p.p. \ t \in (0,T). \end{cases} \tag{A.1.8}$$

Il existe $1 \leq p \leq \infty$ tel que $F(.,x) \in L^p(0,T;X) \quad \forall x \in X$.

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0,T;X)$ telle que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t,x(t)) \qquad p.p.\ \ t \in (0,T\ ). \\ \qquad\qquad x(0) = x_0. \end{cases} \tag{A.1.9}$$

A.2 Espaces fonctionels

On introduit dans cette section les espaces de type Sobolev utilisés dans ce mémoire et associés aux opérateurs divergence et déformation.On présente de plus leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On rappelle aussi quelques espaces de fonctions définies sur un intervalle réel et à valeurs dans un espace de Hilbert. Dans la rédaction de cette section [22], [25],[29] et [30].

Pour plus de details sur les espaces de Sobolev et les espaces de distributions, on renvoit par exemple [1], [v.barbu],[4] et [27]

A.2.1 Espaces de distributions

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On note par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles sur Ω, indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans Ω et par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω. Le produit de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ sera noté par $\langle .,. \rangle$ .On précise en outre que le produit scalaire canonique ainsi que la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$ seront respectivement notées par $|.|$. Nous introduisons également les espaces suivants :

$$\begin{aligned}
D &= \left\{\varphi = (\varphi_i) \setminus \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega), i = \overline{1,N}\right\} = \mathcal{D}(\Omega)^N . \\
\mathcal{D} &= \left\{\phi = \left(\phi_{ij}\right) \setminus \phi_{ji} = \phi_{ij} \in \mathcal{D}(\Omega), i,j = \overline{1,N}\right\} = \mathcal{D}(\Omega)_s^{N\times N} . \\
D' &= \left\{u = (u_i) \setminus u_i \in \mathcal{D}'(\Omega), i = \overline{1,N}\right\} = \mathcal{D}'(\Omega)^N . \\
\mathcal{D}' &= \left\{\sigma = (\sigma_{ij}) \setminus \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in \mathcal{D}'(\Omega), i,j = \overline{1,N}\right\} = \mathcal{D}'(\Omega)_s^{N\times N} .
\end{aligned}$$

Les dualités entre les espace $D^{'}$ et D, $\mathcal{D}^{'}$et $\mathcal{D}$ seront notées respectivement par $\langle .,. \rangle_{D' \times D}$ et $\langle .,. \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$. Plus précisément on a :

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi \rangle_{D' \times D} &= \langle u_i, \varphi_i \rangle . \\ \langle \sigma, \phi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} &= \left\langle \sigma_{ij}, \phi_{ij} \right\rangle . \end{aligned}$$

Pour tout $u \in D^{'}$et $\varphi \in D$, $\sigma \in \mathcal{D}^{'}$ et $\phi \in \mathcal{D}$ avec la convention de l'indice muet.

Considérons maintenant l'opérateur défini pour les fonctions et pour les distributions $\partial_i = \partial / \partial x_i$, $i = \overline{1, N}$. On a

$$\langle \partial_i \theta, \psi \rangle = - \langle \theta, \partial_i \psi \rangle \;\; \forall \; \theta \in \mathcal{D}^{'}(\Omega), \psi \in \mathcal{D}(\Omega) . \tag{A.2.1}$$

On introduit également les opérateurs différentiels du premier ordre définis par :

$$\begin{aligned} \varepsilon &: \;\; D \rightarrow \mathcal{D}, \; \varepsilon(\varphi) = (\varepsilon_{ij}(\varphi)), \; \varepsilon_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\partial_j \varphi_i + \partial_i \varphi_j\right) & \text{(A.2.2)} \\ \forall i, j &= \;\; \overline{1, N}, \; \varphi \in D. \\ Div &: \;\; \mathcal{D} \rightarrow D, Div\phi = \left(\partial_j \phi_{ij}\right) \qquad \forall i = \overline{1, N}, \; \phi \in \mathcal{D} . & \text{(A.2.3)} \end{aligned}$$

On va utiliser les mêmes notation pour les opérateurs correspondants définis sur les espaces de distributions :

$$\begin{aligned} \varepsilon &: \;\; D^{'} \rightarrow \mathcal{D}^{'}, \; \varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \; \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \;\; . & \text{(A.2.4)} \\ \forall i, j &= \;\; \overline{1, N}, \; u \in D^{'} \\ Div &: \;\; \mathcal{D}^{'} \rightarrow D^{'}, \; Div\sigma = (\partial_j \sigma_{ij}) \;\; \forall \; i = \overline{1, N}, \; \sigma \in \mathcal{D}^{'}. & \text{(A.2.5)} \end{aligned}$$

En utilisant $(A.2.1)$, on obtient facilement

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon(u), \phi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} &= -\langle u, Div\phi \rangle_{D' \times D} \ \forall u \in D', \ \phi \in \mathcal{D}. && \text{(A.2.6)} \\
\langle Div\sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} &= -\langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} \ \forall \varphi \in D, \ \sigma \in \mathcal{D}'. && \text{(A.2.7)}
\end{aligned}$$

L'opérateur ε défini par $(A.2.2)$ pour les fonctions et par $(A.2.4)$ pour les distibutions s'appelle *opérateur déformation*. L'opérateur Div défini par $(A.2.3)$ pour les fonctions et par $(A.2.5)$ pour les distributions s'appelle *opérateur divergence*.

On va utiliser aussi les notations

$$\begin{aligned}
H &= \left\{ u = (u_i) \setminus u_i \in L^2(\Omega), \ i = \overline{1, N} \right\} = L^2(\Omega)^N. && \text{(A.2.8)} \\
\mathcal{H} &= \left\{ \sigma = (\sigma_{ij}) \setminus \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega), \ i, \ j = \overline{1, N} \right\} = L^2(\Omega)_s^{N \times N}. && \text{(A.2.9)}
\end{aligned}$$

Les espaces H et $\mathcal{H}$ sont des espaces de *Hilbert* réels munis des produits scalaires canoniques

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle_H &= \int_\Omega u_i v_i \, dx \qquad \forall u, v \in H. \\
\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_\Omega \sigma_{ij} \tau_{ij} \, dx \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}.
\end{aligned}$$

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement par $|.|_H$ et $|.|_{\mathcal{H}}$.

Compte tenu de l'identification de $L^2(\Omega)$ à un sous-espace de distributions sur Ω, on peut considérer que $H \subset D'$ et $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$. Par conséquent, les opérateur déformation et divergence peuvent être définis respectivement sur les espaces H et $\mathcal{H}$. Cela nous conduira à l'étude d'autres espaces fonctionnels, dans les sections $(A.2.2)$ et $(A.2.3)$. Pour l'instant, on rappelle la définition de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \setminus \partial_i u \in L^2(\Omega), i = \overline{1, N} \right\}.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de $Hilbert$ réel pour le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \partial_i u, \partial_i v\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

On notera la norme associée par $|.|_{H^1(\Omega)}$. On note de plus par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace fermé de $H^1(\Omega)$.

A.2.2 Espaces liés à l'opérateur déformation

Pour l'opérateur déformation défini par $(A.2.4)$, il est naturel d'introduire l'espace

$$H_1 = \{u \in H \setminus \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}.$$

On considère sur H_1 le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H_1} = \langle u, v\rangle_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in H_1.$$

et on note la norme associée par $|.|_{H_1}$. On obtient ainsi que l'injection $H_1 \subset H$ et l'opérateur déformation $\varepsilon : H_1 \to \mathcal{H}$ sont des opérateur continus. De même, compte tenu de l'indentification de H et $\mathcal{H}$ à des sous - espaces de D' et $\mathcal{D}'$,en utilisant $(A.2.6)$ il résulte

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(u), \phi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} + \langle u, Div\phi\rangle_H &= 0 \quad \forall u \in H,\ \phi \in \mathcal{D}. && \text{(A.2.10)} \\ \langle \varepsilon(u), \phi\rangle_{\mathcal{H}} + \langle u, Div\phi\rangle_H &= 0 \quad \forall u \in H_1,\ \phi \in \mathcal{D}. && \text{(A.2.11)} \end{aligned}$$

Théorème A.2.1. Muni du produit scalaire $\langle ., .\rangle_{H_1}$ l'espace H_1 est un espace de Hilbert réel.

On munit maintenant l'espace produit $H^1(\Omega)^N$ du produit scalaire canonique et de la norme associée qu'on note respectivement par $\langle ., .\rangle_{H^1(\Omega)^N}$ et $|.|_{H^1(\Omega)^N}$. On a alors le résultat suivant :

Théorème A.2.2. On a l'égalité algébrique $H_1 = H^1(\Omega)^N$ et $|.|_{H_1}$, $|.|_{H^1(\Omega)^N}$ sont des normes équivalentes sur H_1.

On suppose maintenant que dans toute la suite, la frontière Γ de Ω est de classe $\mathcal{C}^{1,1}$.

Compte tenu du théorème précédent, toutes les propriétés de l'espace $H^1(\Omega)$ peuvent être transportées sur l'espace H_1 par passage aux espaces produits. Plus précisément, on a les résultats suivants :

* $C^1\left(\overline{\Omega}\right)^N$ est dense dans H_1.

* $H_1 \subset H$ avec injection compacte *(Théorème de Rellich)*.

* Il existe une application linéaire et continue $\gamma : H_1 \to L^2(\Gamma)^N$ vérifiant l'égalité $\gamma u = u\backslash_\Gamma$pour tout $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)^N$.

L'application γ est appelée *application trace*. Elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \to u\backslash_\Gamma$ définie pour tout $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)^N$. L'application trace $\gamma : H_1 \to L^2(\Gamma)^N$ n'est pas surjective. L'image de H_1par cette application est notée par H_Γ, c'est un sous-espace de $L^2(\Gamma)^N$ qui est de Hilbert pour la sructure transportée par γ. On a en outre :

* $H_\Gamma \subset L^2(\Gamma)^N$ avec injection continue.

* Il existe une application linéaire et continue $z : H_\Gamma \to H_1$ vérifiant l'égalité

$$\gamma(z(\xi)) = \xi \quad \forall \xi \in H_\Gamma. \tag{A.2.12}$$

* Le noyau de l'application trace est $H_0^1(\Omega)^N$ *i.e.*

$$H_0^1(\Omega)^N = \{u \in H_1 \setminus \gamma u = 0\}.$$

Soit maintenant $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j \neq \varnothing$ pour $i \neq j$ et V est l'espace défini par

$$V = \{u \in H_1 \setminus \gamma u = 0 \quad p,p \quad \text{sur } \Gamma_1\}. \tag{A.2.13}$$

Théorème A.2.3. L'espace V est un sous-espace fermé de H_1.

Théorème A.2.4. (*Inégalité de Korn*). Soit $mes\Gamma_1 > 0$. Alors il existe une constante $C > 0$ qui dépend de Ω et Γ_1 telle que

$$|\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \geq C\,|u|_{H_1} \quad \forall u \in V. \tag{A.2.14}$$

Théorème A.2.5. Si $mes\ \Gamma_1 > 0$ alors l'inégalité de *Korn* $(A.2.14)$ est vérifiée sur le sous-espace V défini par $(A.2.13)$

En utilisant ce résultat, il vient

Si $mes\ \Gamma_1 > 0$ alors $u \to |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}}$ est une norme sur le sous-espace V défini par $(A.2.13)$, équivalente à la norme canonique $|.|_{H_1}$.

Nous considérons le produit scalaire définie par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \tag{A.2.15}$$

et soit $|.|_V$ la norme associée, i.e

$$|v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \forall v \in V. \tag{A.2.16}$$

Par l'inégalité de *Korn*, il vient que $\|.\|_{H_1}$et $\|.\|_V$ sont des normes équivalentes sur V, donc $(V, \|.\|_V)$ est un espace de Hilbert réel.

En outre, par le théorème de trace de soboleve, il existe une constante $C_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω , Γ_1 , Γ_3 telle que :

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0\,\|v\|_V \qquad \forall v \in V. \tag{A.2.17}$$

A.2.3 Espaces liés à l'opérateur divergence

Comme dans le cas de l'opérateur déformation, il est naturel d'introduire l'espace $\mathcal{H}_1$ lié à l'opérateur divergence et défini par

$$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \backslash Div\sigma \in H\}.$$

sur lequel on considère le produit scalaire

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, Div\tau \rangle_H \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}_1.$$

On note la norme associée par $|.|_{\mathcal{H}_1}$ .On obtient ainsi que l'injection H$_1 \subset \mathcal{H}$ et l'opérateur divergence $Div\sigma : \mathcal{H}_1 \to H$ sont des opérateur continus. De plus, compte tenu de l'identification de H et $\mathcal{H}$ à des sous-espaces de D' et $\mathcal{D}'$, en utilisant $(A.2.11)$, il résulte

$$\begin{aligned} \langle Div\sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} + \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} &= 0 \ \ \forall \sigma \in \mathcal{H}, \ \varphi \in D. && \text{(A.2.21)} \\ \langle Div\sigma, \varphi \rangle_{H} + \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} &= 0 \ \ \forall \sigma \in \mathcal{H}_1, \ \varphi \in D. && \text{(A.2.21)} \end{aligned}$$

Théorème A.2.4. Muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle_{\mathcal{H}_1}$ l'espace $\mathcal{H}_1$ est un espace de *Hilbert* réel

$$\mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)_s^{N\times N} = \left\{\sigma = (\sigma_{ij}) \setminus \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right), i, j = \overline{1, N}\right\}.$$

est dense dans $\mathcal{H}$. De plus, pour tout $\sigma \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)_s^{N\times N}$, on note par $\sigma\nu$ le vecteur de composantes $(\sigma_{ij}\nu_j) \ \ i = \overline{1, N}$. Comme dans le cas de l'espace H_1, on peut définir l'application trace puor l'espace $\mathcal{H}_1$à l'aide du résultat suivant :

Théorème A.2.5. Il existe une application linéaire, continue et surjective

$$\begin{aligned} &\overline{\gamma} : \mathcal{H}_1 \to H_\Gamma' \ \text{ telle que} \\ &\langle \bar{\gamma}\sigma, \xi \rangle_{H_\Gamma' \times H_\Gamma} = \textstyle\int_\Gamma \sigma\nu.\xi \ \ da. \end{aligned} \qquad \text{(A.2.23)}$$

pour tout $\xi \in H_\Gamma$ et $\sigma \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)_s^{N\times N}$. Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, l'image $\bar{\gamma}\sigma \in H_\Gamma'$ est élément de H_Γ' vérifiant l'égalité

$$\langle \bar{\gamma}\sigma, \gamma u\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle Div\sigma, u\rangle_H + \langle \sigma, \varepsilon(u)\rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u \in H_1. \tag{A.2.24}$$

De plus, il existe une application linéaire et continue $\bar{z} : H'_\Gamma \to \mathcal{H}_1$ telle que

$$\bar{\gamma}(\bar{z}(\Sigma)) = \Sigma \qquad \forall \Sigma \in H'_\Gamma. \tag{A.2.25}$$

A.2.4 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Soient $k \in N$, $1 \leq p \leq +\infty$ et $T > 0$. On rappelle que $W^{k,p}(0, T, H)$ est l'espace des distributions vectorielles $u \in \mathcal{D}'(0, T, H)$ telles que $D_j u \in L^p(0, T, H)$ pour $j = \overline{0, k}$, D_j désignant la dérivée d'ordre j au sens des distributions. Si $1 \leq p < +\infty$, $W^{k,p}(0, T, H)$ est un espace de Banach réel pour la norme définie par

$$|u|_{k,p,H} = (\sum_{j=0}^{k} \int_0^T |D_j u(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}} \quad \forall u \in W^{k,p}(0, T, H). \tag{A.2.26}$$

En particulier, $W^{k,2}(0, T, H)$ est un espace de *Hilbert* réel pour le produit scalaire défini par

$$\langle u, v\rangle_{k,2,H} = \sum_{j=0}^{k} \int_0^T \langle D_j u(t), D_j v(t)\rangle_H \, dt \quad \forall u, v \in W^{k,2}(0, T, H). \tag{A.2.27}$$

D'autre part, $W^{k,\infty}(0, T, H)$ est un espace de *Banach* pour la norme définie par

$$|u|_{k,\infty,H} = \sum_{j=0}^{k} \sup_{[0,T]} ess \, |D_j u(t)|_H \quad \forall u \in W^{k,\infty}(0, T, H). \tag{A.2.28}$$

Pour le cas particulier $k = 0$, on remarque que $W^{0,p}(0, T, H) = L^p(0, T, H)$ et on note alors la norme de $L^p(0, T, H)$ par $|\cdot|_{p,H}$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

On rappelle aussi l'un des résultats utilisés dans les chapitres précédents :

Théorème A.2.6. *Soit* $u : [0, T] \longrightarrow H$*. Alors*

1) u appartient à $W^{1,1}(0,T,H)$ si et seulement si u est une fonction absolument continue de $[0,T]$ dans H.

2) u appartient à $W^{1,\infty}(0,T,H)$ si et seulement si u est une fonction de Lipschitz de $[0,T]$ dans H.

Remarque A.2.1. En utilisant la définition de l'espace $W^{k,p}(0,T,H)$, il est facile d'obtenir le résultat suivant :

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert réels et $A : H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur linéaire continu, c'est-à-dire $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Si pour tout $k \in N$, tout $1 \leq p \leq +\infty$ et tout $u \in W^{k,p}(0,T,H_1)$ on considère la fonction $A^{k,p}u$ définie sur $[0,T]$ par

$$(A^{k,p}u)(t) = Au(t) \quad \forall t \in [0,T]. \tag{A.2.29}$$

alors $A^{k,p}u \in W^{k,p}(0,T,H_2)$ et

$$\left| \frac{d^j A^{k,p}u}{dt^j}(t) \right|_{H_2} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} \left| \frac{d^j u}{dt^j}(t) \right|_{H_1} \quad \forall t \in [0,T], j = \overline{0, k-1}. \tag{A.2.30}$$

Par conséquent, l'opérateur $A^{k,p} : W^{k,p}(0,T,H_1) \longrightarrow W^{k,p}(0,T,H_2)$ est linéaire et continu.

On rappelle qu'on note par $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ l'espace des applications linéaires et continues de H_1 dans H_2 et si $H_1 = H_2 = H$ alors on adoptera la notation $\mathcal{L}(H,H) = \mathcal{L}(H)$.

A.2.5 Compléments divers

On présente ici des lemmes classiques du type Gronwall.

Lemme A.2.1. Soient $m, n \in \mathcal{C}(0,T,R)$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in \mathcal{C}(0,T,R)$ est une fonction telle que

(1) *Si*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\,ds + \int_0^t n(s)\phi(s)\,ds \qquad \forall t \in [0,T].$$

alors

$$\phi(t) \;\leq\; \left(a + \int_0^t m(s)\,ds\right) \exp\left(\int_0^t n(s)\,ds\right) \quad \forall t \in [0,T]\,.$$

Pour le cas particulier $m = 0$, ce lemme devient

Corollaire A.2.1. Soient $n \in \mathcal{C}(0,T,R)$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$.

Si $\phi \in \mathcal{C}(0,T,R)$ est une fonction telle que

(2) Si

$$\phi(t) \;\leq\; a + \int_0^t n(s)\phi(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T]\,.$$

alors

$$\phi(t) \;\leq\; a\,\exp\left(\int_0^t n(s)\,ds\right) \quad \forall t \in [0,T].$$

Lemme A.2.2. Soit $m \in W^{1,\infty}(0,T,R)$ une fonction telle que $m(0) = 0$ et $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soient $a \geq 0$ et $b > 0$ deux constantes.

Si $\phi \in L^\infty(0,T,R)$ est une fonction telle que

$$\phi(t) \;\leq\; a + m(t) + b\int_0^t \phi(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T].$$

alors

$$\phi(t) \;\leq\; m(t) + \left(a + b\int_0^t m(s)\,dt\right) e^{b\,t} \quad \forall t \in [0,T].$$

Lemme A.2.3. Soient $m, n \in \mathcal{C}(0,T,R)$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in \mathcal{C}(0,T,R)$ est une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\,\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)\,ds + \int_0^t n(s)\phi^2(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T].$$

alors

$$|\phi(t)| \;\leq\; \left(a + \int_0^t m(s)\,ds\right) \exp\left(\int_0^t n(s)\,ds\right) \quad \forall t \in [0,T].$$

Dans le cas particulier $m = 0$, ce lemme devient :

Corollaire A.2.2. Soient $n \in \mathcal{C}(0,T,R)$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in \mathcal{C}(0,T,R)$ est une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \ \leq \ \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t n(s)\phi^2(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T].$$

alors

$$|\phi(t)| \ \leq \ a\, \exp\left(\int_0^t n(s)\,ds\right) \quad \forall t \in [0,T]\,.$$

A.3 Approximation variationnelle

Soit H l'espace défini précédemment, on se donne un sous-espace H_h de H de dimension finie et dépendant d'un pramètre $h > 0$, soit I la dimension de H, en pratique, H_h représente une approximation de l'espace H de dimension infinie et on aura :

$$\lim_{h\to 0} I\,(h) = +\infty.$$

et soit le problème variationnelle suivant :

Problème P : Trouver $u \in H$ tel que :

$$u \in H,\ \ (Au, v-u)_H + \varphi\,(v) - \varphi\,(u) \geq (f, v-u)_H \quad \forall v \in H\ .$$

où A et φ sont définis dans $(A.1.5)$.

Afin d'obtenir une approximation numérique de la solution u on introduit un problème approché $\mathbf{P}^h$ posé dans un espace de dimension finie. On vérifie, en premier que le probléme $\mathbf{P}^h$ à une solution unique puis on montre que sa solution converge vers la solution u du problème $\mathbf{P}$.

Alors, au sous-espace H_h de H, on associe le problème approché $\mathbf{P}^h$suivant :

Problème $\mathbf{P}^h$: Trouver $u^h \in H_h$ tel que :

$$u^h \in H_h, \ \left(Au^h, v^h - u^h\right)_H + \varphi\left(v^h\right) - \varphi\left(u^h\right) \geq \left(f, v^h - u^h\right)_H \quad \forall v^h \in H.$$

L'intérêt de la méthode d'approximation variationnelle est trouver une estimation d'erreur commise lorsqu'on approche u par u^h, c'est à dire démontrer le théorème suivant :

Théorème A.3.1. Il existe une constante $C > 0$ indépendant de H_h tel que

$$\left\|u - u^h\right\| \leq C \inf_{v^h \in H_h} \left\|u - v^h\right\|.$$

Bibliographie

[1] **R. S. Adams**, *" Sobolev spaces", Academic press, New York* ***(1975).***

[2] **B. Awbi**, *Thèse de Doctorat "Analyse variationnelle de quelques problèmes visco-élastiques et viscoplastiques avec frottement" Université de Perpignan* ***(2001).***

[3] **V. Barbu**, *"Non linear Semigroups and Differential Equations in Banach spaces", Editura Academiei, Bucharest-Noordhoff, Leyden* ***(1976).***

[4] **H. Brézis**, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications. Masson, Paris* ***(1987).***

[5] **H. Brézis**, *Equations et Inéquations non Linéaires dans les Espaces Vectoriels en Dualité, Ann. Inst. Fourrier,* ***18 (1968), p 115-175.***

[6] **L. Cangémi**, *"Frottement et Adhérence : modèle, traitement numérique et application à l'interface fibre/matrice", Ph. D. Thesis, Univ. Méditerranée, Aix-Marseille* ***II (1997).***

[7] **O. Chau, J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea**, *"Variational and Numerical Analysis of a Quasistatic Viscoelastic contact problem with adhesion", J. Comput. Appl. Math,* ***159 (2003), 431–465.***

[8] **J.Chen, W.Han, M.Sofonea,** *"Numerical analysis of a quasistatic problem of a contact problem in Rate-type Viscoplasticity" Num. Func. Anal. Opti.* **22(2001), 505-527.**

[9] ***P.G.Ciarlet***, *"The finite element method for elliptic problems ",North Holland , Amsterdam,* ***1978.***

[10] **M. Cocu**, *"On A Model Coupling Adhesion and Friction : Thermodynamics Basis and Mathematical Analysis", Proceed. of the fifth. Inter. Seminar. On Geometry, Continua and Microstructures, Romania* ***(2001), 37-52.***

[11] **M. Cocu and R. Rocca**, *"Existence Results for Unilateral Quasistatic Contact Problems with Friction and Adhesion", Math. Model. and Numer. Anal.* ***34, (2000), 981-1001.***

[12] ***N.Chougui***, *"Analyse Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact avec Frottement et Adhésion", Mémoire de Magister en Mathématique Appliquées,Univ, Farhat Abbas, Setif* ***(2009)***.

[13] ***S.Drabla***, *" Analyse variationnelle de quelques problèmes aux limites en élasticité et viscoplasticité ", thèse de doctorat, Univercité Farhat, Abbes-Setif* **(1999).**

[14] **G. Duvaut and J. L. Lions**, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique, Dunod, Paris,* ***(1972).***

[15] **M. Frémond,** *" Equilibre des Structures qui Adhèrent à leur support", C. R. Académie des sciences, Paris 295, Série II* ***(1982)***, **913-916.**

[16] **M. Frémond**, *"Adhérence des Solides", Journal. Mécanique Théorique et Appliquée* ***6 (1987), 383-407.***

[17] **R. Glowinski, J. L. Lions and R. Trémolières**, *"Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles",* **tome 1 et 2, Dunod, (1976).**

[18] **N. Hemici, B. Awbi, M. Sofonea**, *"Viscoelastic problem contact with compliance normal and adhésion"Annals of University of Bucarest* ***51 (2002) 131-142.***

[19] **N. Hemici,** *"Analyse variationnelle de quelques problèmes de contact avec adhésion ", Thèse de Doctorat d'Etat, Univ, Ferhat Abbas SETIF,* **(2005).**

[20] **L. Jianu, M. Shillor and M. Sofonea**, *"A viscoelastic bilateral frictionless contact problem with adhesion", Applic. Anal. 80 (2001),* **233–255.**

[21] ***D.Kendri,*** *"Etude Théorique et Numérique de Quelque problèmes de contact", Mémoire de Magister en Mathématique Appliquées, Univ, Farhat Abbas, Setif,* ***2001.***

[22] **O. Kavian**, *"Introduction à la théorie des points critiques et Applications aux équations elliptiques", Springer-Verlag* **(1993).**

[23] **J.L.Lions,** *"Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires". DUNOD GAUTHIER - VILARS, PARIS (* **1969)**

[24] **Z.Lerguet,** *"Analyse Variationnelle et Numérique de Quelques problèmes de Contact en Elasticité et en Viscoplasticité ". Mémoire de Magister en Mathématique Appliquées, Univ, Farhat Abbas, Setif (**2003**).*

[25] **A. Matei**, *"Modélisation Mathématique en Mécanique du Contact", Thèse de Doctorat de l'Université de Perpignan **(2002)**.*

[26] **M. Raous, L. Cangémi et M. Cocu,** *"A Consistent Model Coupling Adhesion, Friction and Unilateral Contact", Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* **177 (1999), 383-399.**

[27] **P. A. Raviart et J. M. Thomas,** *"Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles", Masson, Paris* **(1992).**

[28] **M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea,** *"Quasistatic Viscoelastic Contact with Normal Compliance and Friction", J. Elasticity, **51*** **(1998), 105-126.**

[29] **L. Schwartz,** *"Théorie des Distributions", Hermann, Paris* **(1967).**

[30] **M. Sofonea,** *"Problèmes non Linéaires dans la Théorie de l'Elasticité", Cours de Magister de Mathématiques Appliquées à l'Université de Sétif* **(1993).**

[31] ***M.Sofonea ,*** *"Modélisation Mathématique en Mécanique du Contact " . Annals of University of Craiova , Math .***(2004)**

[32] **N. Strömberg,** *"Continuum Termodynamics of Contac, friction and wear". Thèse de Ph.D, Linköping University, Sweden* **(1995).**

[33] **P. Suquet,** *"Plasticité et Homogénéisation", Thèse de Doctorat d'Etat, Univ, Pierre et Marie Curie, Paris **6 (1982)**.*

[34] **K. Yosida,** *" Functional Analysis", Springer-Verlag, Berlin* **(1971).**