

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS — SETIF
UFAS (ALGERIE)

Mémoire de Magister

présenté au département d'Electrotechnique
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
pour obtenir le diplôme de

Magister en Automatique

Par

KHERKHARE ABDELKRIM

Thème

Commande floue en poursuite et stabilisation des systèmes non linéaires incertains

Soutenu le 14 /12 /2010 devant la commission d'examen composée de :

<i>RAHMANI Lazhar</i>	<i>M.C. A à l'université Ferhat ABBAS de Sétif</i>	<i>Président</i>
<i>KHABER Farid</i>	<i>M.C. A à l'université Ferhat ABBAS de Sétif</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>LAMAMRA Athmane</i>	<i>M.C. A à l'université Ferhat ABBAS de Sétif</i>	<i>Examineur</i>
<i>HARMAS Mohamed Naguib</i>	<i>M.C. A à l'université Ferhat ABBAS de Sétif</i>	<i>Examineur</i>
<i>Hemsas Kamel Eddine</i>	<i>M.C. A à l'université Ferhat ABBAS de Sétif</i>	<i>Examineur</i>

SOMMAIRE

Sommaire

REMERCIEMENTS

DEDICACES

INTRODUCTION GENERALE 1

COMMANDE FLOUE ET STABILITE DES MODELES FLOUS T-S

I.1. INTRODUCTION	5
I.2. MODELES FLOUS	5
I.2.1. Modèle flou de type T-S	5
I.2.2. Construction d'un modèle flou T-S	7
I.2.3. Analyse de stabilité des modèles flous T-S	9
I.3. LOIS DE COMMANDE FLOUE ET CONDITIONS DE STABILISATION DE BASE	10
I.3.1. Introduction aux Outils d'optimisation convexe LMI	10
I.3.1.1. Problème de faisabilité	11
I.3.1.2. Problème de valeur propre (EVP : Eigen-Value Problem)	11
I.3.1.3. Problème de valeurs propres généralisées (General EVP)	11
I.3.2. Techniques d'analyse et transformation matricielles	11
I.3.3. Loi de commande floue	14
I.3.3.1. Loi de commande PDC (Parallel Distributed Compensation)	14
I.3.3.2. Stabilisation des modèles T-S avec une loi de commande du type PDC	15
I.3.4. Stabilité du modèle flou T-S augmenté	18
I.3.4.1. Stabilisation avec observateur flou	19
I.3.4.2. Observateur flou T-S	19
I.3.4.3. Loi de commande PDC avec observateur flou	20
I.4. COMMANDE ROBUSTE FLOUE DES SYSTEMES NON LINEAIRES	21
I.4.1. Modèles T-S incertains	21
I.4.2. Modèles T-S perturbés : atténuation des perturbations	22
I.4.3. Modèles T-S incertains et perturbés	24
I.5. AUTRES APROCHES DE SYNTHESE	26

I.5.1. Structure des Systèmes Flous	26
I.5.2. Commande par Mode Glissant	27
I.5.2.1. Systèmes à structure variable aux régimes glissants	28
I.5.2.2. Conditions d'existence et de convergence du régime glissant	29
I.5.2.2.1. Approche directe	29
I.5.2.2.2. Approche de Lyapunov	29
I.6. CONCLUSION	30

POURSUITE DE TRAJECTOIRE POUR LES MODELES T-S PERTURBES

II.1. INTRODUCTION	31
II.2. PROBLEME DE SUIVI DE TRAJECTOIRE	31
II.2.1. La poursuite de trajectoire pour les modèles T-S	31
II.2.2. Stratégie de commande	33
II.2.2.1. Le modèle physique et le modèle T-S	34
II.2.2.2. L'observateur flou T-S	34
II.2.2.3. Le système de référence	34
II.2.2.3.1. Modèles linéaires	34
II.2.2.3.2. Modèles non linéaires	35
II.2.2.4. Loi de commande	35
II.3. SYNTHÈSE DE COMMANDE AVEC OBSERVATEUR : APPROCHE H_∞	36
II.3.1. Commande basée sur l'approche H_∞	36
II.3.2. Conditions de relaxation	39
II.3.3. Exploitation numérique des résultats	41
II.3.4. Exemple et simulation	45
II.4. CONCLUSION	61

SUIVI DE TRAJECTOIRE DES MODELES T-S PERTURBES ET INCERTAINS AVEC CRITERE H_∞

III.1. INTRODUCTION	62
III.2. SYNTHÈSE DE COMMANDE SANS OBSERVATEUR	62
III.2.1. Synthèse de commande par approche BMI	63

III.2.2. Synthèse de commande par approche LMI	66
III.3. SYNTHÈSE DE COMMANDE AVEC OBSERVATEUR	69
III.3.1. Approche LMI	69
III.3.2. Exemple de simulation	76
III.4. CONCLUSION	82

COMMANDE ROBUSTE FLOUE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

IV.1. INTRODUCTION	83
IV.2. FORMULATION DU PROBLEME	84
IV.3. COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE PAR MODE GLISSANT	86
IV.4. PROCEDURE DE CONCEPTION	92
IV.5. EXEMPLE DE SIMULATION	93
IV.6. CONCLUSION	97
CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES	99
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	102

REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein de Laboratoire de Qualité d'Energie dans les Réseaux Electriques (Q.U.E.R.E) de département d'électrotechnique à l'université Ferhat Abbas de Sétif.

Je tiens à remercier très vivement, Monsieur KHABER Farid, Maitre de conférences à l'université Ferhat ABBAS de Sétif pour m'avoir guidé et conseillé tout au long de ce travail et pour leur soutien scientifique et humain, et la confiance qu'il m'a accordée pour mener ce travail de recherche.

Mes sincères remerciements à Monsieur RAHMANI Lazhar Maitre de conférence à l'université Ferhat ABBAS de Sétif d'avoir accepté d'examiner ce travail et de présider ce jury.

Je tiens également à remercier Messieurs LAMAMRA Athmane Maitre de conférence à l'université Ferhat ABBAS de Sétif, HARMAS Mohmed Naguib Maitre de conférence à l'université Ferhat ABBAS de Sétif et HEMSAS Kamel Eddine Maitre de conférence à l'université Ferhat ABBAS de Sétif, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail, en acceptant de l'examiner.

Je remercie tous les membres de ma famille et en particulier mes parents, pour leurs encouragements et appuis inconditionnels tout au long de ces longues années d'études.

Mes remerciements vont également à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail.

DEDICACES

À ma mère,

Ma source éternelle d'inspiration, de motivation et de bénédiction

À mon père,

Mon maître de passion, de patience et de persévérance

*À mes deux sœurs et mon frère **Slimane***

À mes amis d'enfance et de toute circonstance.

Et plus spécialement à mes amis Abde Essalam Badoud

et Hacen Mellah.

KARIM.

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

La diversité des problèmes rencontrés en automatique, notamment portant sur la théorie de la commande et de la conception, ont connu une évolution considérable ces dernières années. Parmi ces théories, la commande des systèmes non linéaires ne cesse de se perfectionner. Ainsi, le concept des ensembles flous qui est très utile du point de vue de la synthèse de commande. Les travaux sur la théorie des ensembles flous et la logique floue ont été initiés dans les années soixante par Lotfi Zadeh [Zadeh 65] à l'Université de Berkeley. L'intérêt principal de la logique floue est de permettre la représentation et le traitement de connaissances imprécises. Elle est utilisée dans des domaines aussi variés que la gestion de base de données, les systèmes experts, le traitement du signal, la classification de données, la modélisation ainsi que la commande des systèmes automatiques. La première application de la commande floue fut réalisée par [Mamdani 74] sur un moteur à vapeur. La première application industrielle a porté sur le contrôle d'un four à ciment par logique floue.

Afin de s'affranchir de la connaissance parfaite d'un processus à contrôler, le comportement dynamique peut être pris en compte par une modélisation analytique, c'est-à-dire un modèle de connaissance. On obtient alors une représentation mathématique qui doit ressembler le mieux possible à la réalité du processus. Le choix réside alors entre la fidélité du modèle et son adéquation avec une forme mathématiquement exploitable. Dans ce contexte, une première approche pour étudier un système ayant un comportement non linéaire consiste à l'approximer par un modèle linéaire. L'inconvénient d'une telle approche est son aspect local. D'autre part, plusieurs travaux ont été développés afin de démontrer qu'un système flou peut être utilisé comme un approximateur universel [Kosko 94, Zeng 95, Zeng 00, Essounbouli 04]. La capacité de l'approximation universelle d'un modèle flou est la base de recherches théoriques et de leurs applications en commande floue. De nombreux chercheurs se sont donc intéressés à cette notion. Il s'agit alors de donner une justification théorique aux succès rencontrés par les applications de la logique floue. Notamment, sur des systèmes difficilement contrôlables à l'aide de techniques conventionnelles [Buckley 93, Castro 95].

La structure d'un modèle ou d'un régulateur flou, est décrite par un ensemble de règles, dite règles floues, qui sont constituées chacune par une partie prémisse, et une partie conclusion.

De ce point de vue là, on distingue deux classes principales de modèles flous : les modèles inférés par des règles flous de type Mamdani et ceux inférés par des règles flous de type Takagi-Sugeno (T-S) [T-S 85]. Les modèles de type Mamdani utilisent le formalisme flou pour modéliser l'inférence. En revanche, bien que la partie prémisse des règles de type T-S conserve le formalisme flou, l'inférence correspond à une simple interpolation des conclusions. Il en résulte que, pour un modèle flou T-S, les règles sont inférées par des variables décrites dans l'univers du discours flou. En revanche, la description globale du système qu'elles représentent permet, après l'étape de défuzzification, d'aboutir à une fonction non linéaire liant arithmétiquement les entrées et les sorties du système.

L'approche de modélisation T-S permet donc de représenter un système non linéaire par une interconnexion de modèles affines et linéaires autour de différents points de fonctionnement à travers des fonctions de pondération normalisées appelées fonctions d'activation. Ces fonctions peuvent être soit identifiées à partir d'un processus réel [Gasso 00], soit sur la base d'un modèle de connaissance afin d'aboutir à une représentation exacte de celui-ci dans un espace compact de l'espace d'état [Morère 01].

Une approche typique de la commande des systèmes utilisant ce type de modèle est la stabilisation par interpolation de retour d'état appelée commande PDC (Parallele Distributed Compensation) [Wang 95]. La majorité des travaux qui s'inspirent de cette loi de commande ont une démarche basée sur la deuxième méthode de Lyapunov. La formulation de celle-ci aboutit à un ensemble d'inégalités écrites, sous la forme inégalités matricielles linéaires (LMI). Les LMI, s'il s'avère qu'elles admettent une solution, peuvent être résolues à l'aide d'outils issus du domaine de l'optimisation convexe [El Ghaoui 97]. Cependant, si théoriquement il est toujours possible de représenter la dynamique d'un système non linéaire affine en la commande par un système flou, en pratique cette représentation peut aboutir à l'obtention d'un très grand nombre de règles floues. Une manière de réduire le nombre de règles floues est de prendre en compte certaines non linéarités du modèle au sein d'incertitudes inhérentes à la modélisation, on se place alors dans le cas de la modélisation flou T-S de systèmes incertains. L'objectif étant d'obtenir un modèle flou comportant un nombre fini et raisonnable de règles fixé a priori. En revanche, la synthèse de lois de commande pour de tels modèles s'avère plus difficile. Dans ce contexte, plusieurs approches

de relaxation des LMI ont été proposées dans la littérature [Guerra 99, Kim 00, Tuan 01, Liu 03].

La commande type PDC permet de répondre à tous les critères de performance si, en plus des incertitudes, le système est perturbé. C'est pourquoi des travaux traitant de la synthèse de commandes robustes pour la stabilisation de ce type de modèles ont été proposés ces dernières années [Tanaka 96, Lee 01].

Au sein de la littérature on constate que la synthèse de lois de commande est peu traitée dans le cas du poursuite de trajectoire (Tracking) pour les systèmes T-S incertains et perturbés. En effet, le passage d'un problème de stabilité à celui d'un suivi de trajectoire n'est pas nécessairement trivial. Ainsi, le but principal de ce travail est le développement de structures de commande, pour des systèmes continus mis sous forme T-S incertains et perturbés, permettant d'assurer la stabilité et la robustesse dans le cadre du suivi de trajectoire. Deux problématiques peuvent émerger : l'obtention de conditions sous forme de LMI et, la garantie des performances de poursuite.

Le chapitre I, présente une vue d'ensemble bibliographique allant de la définition et mise en œuvre d'un modèle T-S à la synthèse de commande robuste des systèmes flous du type T-S incertains et perturbés. Ainsi, nous présentons d'abord les différentes techniques d'obtention d'un modèle T-S. Ensuite, nous aborderons les concepts de stabilisation de base des modèles T-S. Un intérêt particulier sera consacré aux résultats les plus récents traitant du problème de la stabilité des modèles T-S incertains et perturbés. Ainsi, cette synthèse bibliographique permettra de positionner notre travail dans le domaine et de poser clairement le problème abordé dans ce manuscrit.

Dans le chapitre II, nous aborderons le problème de poursuite de trajectoire des modèles T-S. Une présentation des techniques existantes pour résoudre cette problématique permettra de dresser un bilan synthétique sur les travaux publiés dans la littérature. Dès lors, nous présenterons la stratégie de commande que nous avons abordée dans ce travail. Par la suite, nous traiterons de la synthèse de commande pour les modèles flous T-S soumis à des perturbations externes. La synthèse de commande proposée se base sur la minimisation de l'erreur de poursuite par rapport aux perturbations selon un critère H_∞ . Le résultat principal dans ce chapitre est de fournir des conditions de stabilité au sens de l'optimisation convexe

LMI, en l'occurrence un maximum d'atténuation des perturbations en assurant la poursuite. Des résultats de simulations illustreront les performances obtenues.

L'approche est élaborée dans le cas où tous les états sont disponibles. Deux approches de synthèse différentes seront présentées afin de garantir les performances de poursuite. Il s'agit d'une approche dont les résultats sont écrits sous forme de BMI (Bilinear Matrix Inequality) et d'une approche obtenue directement sous la forme de LMI. Nous montrerons ensuite, à travers des résultats de simulation, que la seconde approche assure de meilleures performances que la première.

Les principaux résultats du chapitre III, traitent essentiellement de la synthèse de commande en poursuite pour des modèles T-S incertains et perturbés. L'approche est élaborée dans le cas où tous les états sont disponibles. Deux approches de synthèse différentes seront présentées afin de garantir les performances de poursuite. Il s'agit d'une approche dont les résultats sont écrits sous forme de BMI (Bilinear Matrix Inequality) et d'une approche obtenue directement sous la forme de LMI. Nous montrerons ensuite leurs performances dans le cadre de la poursuite. Notamment, considérerons également un observateur dans le cas où tous les états ne sont pas disponibles. Les résultats, également exprimés sous forme LMI, seront illustrés à travers un exemple en simulation.

Dans le quatrième chapitre, nous aborderons le problème de synthèse de commande robuste floue dans le cadre de la poursuite de trajectoire pour les systèmes non linéaires. On a proposé un algorithme de commande utilisant de la logique floue et la technique de commande par mode glissant (SMC). La stratégie de commande proposée fournit une bonne performance robuste dans le but d'assurer que le système en boucle fermée soit stable au sens de Lyapunov et poursuite asymptotique de la référence désirée en présence des incertitudes et des perturbations externes.

Les stratégies de commande développées dans les chapitres : II, III et IV sont validées par des exemples de simulation sous l'environnement Matlab.

Enfin, le bilan des travaux réalisés et les perspectives envisagées sont donnés en conclusion.

*COMMANDE FLOUE ET STABILITE
DES
MODELES FLOUS T-S*

I.1. INTRODUCTION

Ce chapitre a pour objet de présenter certains travaux sur la modélisation, la stabilité, et la stabilisation des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S). Dans la première partie, nous présentons les différentes techniques d'obtention d'un modèle T-S et donnerons un exemple d'illustration sur la méthode la plus utilisée pour y aboutir, ainsi que la représentation des notions de stabilité et de stabilisation de ce type de modèles rencontrées dans la littérature. Une loi de commande pour les modèles T-S proposés sera présentée. A partir de là, on s'intéressera aux résultats les plus récents traitant du problème de la synthèse de commande robuste pour les modèles T-S incertains et perturbés, dans le cas de la stabilisation des systèmes non linéaires incertains. Ensuite, la seconde partie est consacrée à utiliser d'autres techniques de synthèse robuste telle que la commande par mode glissant qui permet de répondre au problème de robustesse. Cette robustesse se fera au déterminant des performances. De plus, la surface de glissement définie dans le formalisme réduit l'ordre de système en boucle fermée, ce qui ne permet pas dans certains cas, d'imposer au système un mode de stabilisation. Cette étude permettra de positionner notre travail dans le domaine et de poser clairement le problème abordé dans ce mémoire.

I.2. MODELES FLOUS

I.2.1. Modèle flou de type T-S

Le modèle flou de Takagi-Sugeno (T-S) d'un système dynamique est décrit par un ensemble de règles floues *Si-Alors* représentant des relations locales d'entrées/sorties linéaires en différents points de fonctionnement d'un système, en exprimant chaque conclusion par un système linéaire [T-S 85]. Ces représentations locales appelées «*sous modèles*», permettent d'exprimer la dynamique d'un système autour d'un point de fonctionnement particulier de l'espace d'état.

La particularité de ce type de modèle et que la logique floue est intervenue seulement dans la partie prémisses des règles. La partie conclusion de ces règles utilise des variables numériques plutôt que variables linguistiques [T-S 85].

D'une manière générale la partie conclusion s'exprime sous la forme d'une constante ou d'une fonction ou d'une équation différentielle dépendant des variables d'entrées.

La $I^{\text{ème}}$ règle du modèle flou T-S s'écrit sous la forme:

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } F_i^1 \text{ et } \dots z_p(t) \text{ est } F_i^p \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x} = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

F_i^j est l'ensemble flou et r est le nombre de règles **Si-Alors**, $x(t) \in R^n$ représente le vecteur d'état, $u(t) \in R^m$ est le vecteur des commandes, $y(t) \in R^q$ est le vecteur de sortie du système, $A_i \in R^{n \times n}$ est la matrice d'état, $B_i \in R^{n \times m}$ est la matrice d'entrée du système, $C_i \in R^{q \times n}$ est la matrice de sortie et $z_1(t) \rightarrow z_p(t)$ sont les prémisses fonctions de l'état.

Pour une paire $(y(t), u(t))$ donnée, l'inférence du système flou est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \\ y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{C_i x(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

$$\text{où } z(t) = [z_1(t) z_2(t) \dots z_p(t)], \quad w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_i^j(z_j(t)) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{I.3})$$

$F_i^j(z_j(t))$ est la valeur de la fonction d'appartenance $z_j(t)$ dans l'ensemble flou F_i^j , et $\forall t \geq 0$ on a

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0 \\ w_i(z(t)) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

En posant :

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (\text{I.5})$$

Le modèle flou T-S s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{C_i x(t)\} \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

Les $h_i(z(t)) \geq 0$ possèdent la propriété de somme convexe :

$$\forall t \geq 0 \quad \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \quad (\text{I.7})$$

I.2.2. Construction d'un modèle flou T-S

Pour obtenir un modèle flou T-S, trois méthodes distinctes peuvent être employées :

1. La première dite par identification [Gasso 99], [Gasso 00], permet à partir des données sur les entrées et les sorties, d'identifier les paramètres du modèle local correspondant aux différents points de fonctionnement.
2. La seconde méthode consiste à linéariser le modèle autour d'un ensemble de points de fonctionnement [Tanaka 01], [Ma 98].
3. La troisième approche est adaptée pour les systèmes non linéaires affines en la commande à un modèle flou de T-S. Elle permet d'obtenir une représentation de type T-S d'un modèle non linéaire (Il ne s'agit pas d'une linéarisation autour d'un point de fonctionnement) [Tanaka 98a], [Morère 01].

Dans les deux dernières approches, on suppose disposer d'un modèle mathématique non linéaire. Notons aussi que pour un système donné, l'obtention d'un modèle T-S n'est pas unique. Etant donné que la dernière approche représente le modèle non linéaire d'une façon exacte, nous l'explicitons à travers un exemple illustrant la construction d'un modèle T-S. Pour obtenir à partir de non linéarité des fonctions d'appartenance associée à un modèle flou, on utilise le lemme suivant.

Lemme I.1 [Morère 01]

Si $\forall x \in [-b, a]$, $a, b \in \mathbb{R}^+$, $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borné sur $[-b, a]$ alors il existe deux fonctions $w_1(x)$ et $w_2(x)$ ainsi que deux réels α et β tels que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha \cdot w_1(x) + \beta \cdot w_2(x) \\ w_1(x) + w_2(x) &= 1, \quad w_1(x) \geq 0, \quad w_2(x) \geq 0 \end{aligned}$$

Preuve

Considérons la fonction $f(x)$ bornée tel que $\underline{f} \leq f(x) \leq \bar{f}$, on peut alors toujours écrire:

$$f(x) = \alpha \cdot w_1(x) + \beta \cdot w_2(x) \text{ avec } \alpha = \bar{f}, \beta = \underline{f}, w_1 = \frac{f(x) - \underline{f}}{\bar{f} - \underline{f}} \text{ et } w_2 = \frac{\bar{f} - f(x)}{\bar{f} - \underline{f}}.$$

Remarque I.1

Dans le cas général, si on considère un modèle non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t)) \cdot u(t) \quad (\text{I.8})$$

avec $f(0) = 0$ et sous l'hypothèse que les champs de vecteurs f et g soient bornés sur R^n , alors le modèle T-S représente de façon exacte le modèle non linéaire (I.8). Dans le cas contraire, sous la condition f et g continues, alors l'équivalence n'est vraie que sur un sous-espace compact de R^n [Tanaka 98a], [Morère 01].

Exemple I.1

On considère le modèle non linéaire autonome de dimension 2 suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) = \begin{bmatrix} \sin(x_1(t)) & 0 \\ 0 & x_2^3(t) \end{bmatrix} \quad (\text{I.9})$$

Ce modèle peut être réécrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sin(x_1(t))}{x_1(t)} & 0 \\ 0 & x_2^2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{I.10})$$

L'équation (I.10) présente deux non linéarités qu'on notera $N_1(x_1(t))$ et $N_2(x_2(t))$ respectivement tels que :

$$N_1(x_1(t)) = \frac{\sin(x_1(t))}{x_1(t)}, \quad N_2(x_2(t)) = x_2^2(t) \quad (\text{I.11})$$

Nous remarquons que le terme non linéaire $N_1(x_1(t))$ est borné $\forall x \in R^n$.

$N_1(x_1(t)) \in [\sin(x_{1_0})/x_{1_0}, 1]$, (où $\sin(x_{1_0})/x_{1_0} = \min(\sin(x_1)/x_1) \approx -0.217$) alors que le terme $N_2(x_2(t))$ ne peut l'être que sur un compact défini par $x_2(t) \in [-a, a]$ avec $a > 0$. Ainsi, on peut transformer les termes non linéaires $N_1(x_1(t))$ et $N_2(x_2(t)) \forall x \in R^n \times [-a, a]$, $a > 0$, tel que :

$$N_1(x_1(t)) = F_1^1(x_1(t)) \cdot 1 + F_1^2(x_1(t)) \cdot \frac{\sin(x_{1_0})}{x_{1_0}} \quad (\text{I.12})$$

$$N_2(x_2(t)) = F_2^1(x_2(t)) \cdot a^2 + F_2^2(x_2(t)) \cdot 0 \quad (\text{I.13})$$

avec les ensembles flous donnés par :

$$F_1^1(x_1(t)) = \frac{(\sin(x_1(t))/x_1(t)) - (\sin(x_{1_0})/x_{1_0})}{1 - (\sin(x_{1_0})/x_{1_0})}, \quad F_1^2(x_1(t)) = \frac{1 - (\sin(x_1(t))/x_1(t))}{1 - (\sin(x_{1_0})/x_{1_0})} \quad (\text{I.14})$$

$$F_2^1(x_2(t)) = \frac{x_2(t)^2}{a^2}, \quad F_2^2(x_2(t)) = 1 - \frac{x_2(t)^2}{a^2} \quad (\text{I.15})$$

On aboutit alors au modèle flou T-S correspondant à partir des combinaisons possibles des bornes des termes non linéaires $N_1(x_1(t))$ et $N_2(x_2(t))$ décrits par les matrices f_i suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Si } x_1(t) \text{ est } F_1^1(x_1(t)) \text{ et } x_2(t) \text{ est } F_2^1(x_2(t)) \text{ Alors } \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ \text{Si } x_1(t) \text{ est } F_1^1(x_1(t)) \text{ et } x_2(t) \text{ est } F_2^2(x_2(t)) \text{ Alors } \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ \text{Si } x_1(t) \text{ est } F_1^2(x_1(t)) \text{ et } x_2(t) \text{ est } F_2^1(x_2(t)) \text{ Alors } \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\sin(x_{1_0})}{x_{1_0}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ \text{Si } x_1(t) \text{ est } F_1^2(x_1(t)) \text{ et } x_2(t) \text{ est } F_2^2(x_2(t)) \text{ Alors } \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\sin(x_{1_0})}{x_{1_0}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Cette transformation conduit à un certain nombre de modèles locaux LTI (Linear Time Invariant) dépendant du nombre de non linéarités contenues dans la fonction $f(t)$. En règle générale, si $f(t)$ présente k termes non linéaires alors le modèle T-S est constitué d'au plus 2^k modèles locaux.

A partir de cet exemple, nous avons montré que le nombre de règles d'un modèle T-S exact, augmente en fonction des non linéarités à prendre en compte dans le modèle non linéaire, ce qui provoque plus de conservativité des résultats [Taniguchi 01].

Après cette étape de modélisation, nous abordons dans la suite le problème de stabilisation du modèle T-S, notamment la synthèse de loi de commande. Nous pouvons avoir recours à une théorie de base pour analyser la stabilité des systèmes non linéaires. Un aperçu sur les concepts de stabilité les plus utilisés dans l'étude des modèles T-S est rappelé dans ce qui suit.

I.2.3. Analyse de stabilité des modèles flous T-S

La stabilité des systèmes non linéaires en boucle fermée est l'un des problèmes plus importants de la théorie de la commande. La boucle de retour est la structure qui permet d'obtenir les objectifs de la commande en termes de stabilité et de poursuite (régulation).

L'analyse de la stabilité par la commande floue est un sujet difficile puisque les modèles considérés sont de nature non linéaires. Un certain nombre de travaux qu'ont déjà été en ce sens [Driankov 93], [Ollero 95], [Tanaka 98], [Wang 94]. Il est important de noter que beaucoup de techniques d'analyse de stabilité sont basées sur des méthodes de stabilité locale autour d'un point d'équilibre tel que l'origine.

Dans ce contexte de la stabilité générale, on fait appel à des fonctions de Lyapunov candidates [Borne 93], [Khalil 96].

Nous limiterons dans ce mémoire à l'utilisation de fonction de Lyapunov quadratique de la forme suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t), \quad P > 0 \quad (\text{I.17})$$

I.3. LOIS DE COMMANDE FLOUE ET CONDITIONS DE STABILISATION DE BASE

I.3.1. Introduction aux Outils d'optimisation convexe LMI (Linear Matrix Inequalities)

Les résultats d'analyse et de synthèse dans ce mémoire, se basent essentiellement sous des formulations de problèmes d'optimisation convexes. Celles-ci présentent l'avantage d'avoir un cout de calcul raisonnable et le résultat obtenu correspond à un minimum global unique, ce qui exclu l'existence d'un minimum local de la fonction à optimiser.

La convexité d'un problème d'optimisation a les avantages suivants:

- Le temps de calcul pour trouver une solution est raisonnable.
- Il n'existe pas le minimum local de la fonction cout à optimiser, le résultat obtenu correspond à un minimum global unique.
- La possibilité de formuler de nombreux problèmes d'analyse (stabilité, certains performances, etc.) en termes LMI.
- La capacité de traiter des problèmes à données incertains en commande robuste, qui à joué pour beaucoup dans l'essor de cette approche ces dernières années.

Définition I.1

Etant donnée une famille de matrices symétriques P_0 et P_i , $i = 1, 2, \dots, n$ de $R^{P.P}$ et un vecteur

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$, une inégalité matricielle linéaire (LMI) stricte (resp. non strict) en x est de la forme :

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^n x_i P_i > 0 \quad (\text{resp. } \geq 0) \quad (\text{I.18})$$

La contrainte $F(x) > 0$ est convexe [Boyd 94] et appelée contrainte LMI.

Remarque I.2

Etant donnée plusieurs LMI, elles peuvent être regroupés dans une matrice diagonale constituant une seule contrainte LMI.

On distingue trois types de problèmes d'optimisation convexe rencontrés sous forme de LMI.

I.3.1.1. Problème de faisabilité

Trouver un vecteur x tel que $F(x) > 0$. Ce problème est résolu généralement en cherchant le vecteur x minimisant le scalaire t tel que :

$$-F(x) < t.I \quad (\text{I.19})$$

Si la valeur minimale de t est négative alors le problème est faisable.

I.3.1.2. Problème de valeur propre (EVP : Eigen -Value Problem)

Minimiser la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique sous une contrainte de type LMI :

Minimiser λ

$$\text{Sous les contraintes } \begin{cases} \lambda I - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

I.3.1.3. Problème de valeurs propres généralisées (General EVP)

Minimiser la plus grande valeur propre généralisée d'une paire de matrices par rapport à une contrainte LMI :

Minimiser λ

$$\text{Sous les contraintes } \begin{cases} \lambda B(x) - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ C(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

I.3.2. Techniques d'analyse et transformations matricielles

En général, les conditions sur la stabilité ne sont pas données sous forme de LMI directement. Pour cela, elles nécessitent quelques transformations matricielles. Dans la suite nous

présentons quelques techniques de transformation matricielle utiles pour les résultats établis dans ce mémoire.

a. Congruence : Si $P(x) > 0$ et X est régulière, alors : $X^T P(x) X > 0$.

b. Complément de Schur : [El Ghaoui 97] soient trois matrices $R(x) = R(x)^T$

$Q(x) = Q(x)^T$ et $S(x)$ affines par rapport à la variable x . Les LMI suivantes sont équivalentes

$$1) \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

$$2) R(x) > 0, Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x) > 0$$

c. Complément de Schur généralisé :

$$\begin{cases} Y - XR^{-1}X^T - US^{-1}U^T > 0 \\ R > 0, S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Y & X & U \\ X^T & R & 0 \\ U^T & 0 & S \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{I.22})$$

d. Contrainte quadratique convexe : la contrainte sur la norme $\|Z(x)\| < 1$ où

$Z(x) \in R^{p \times q}$ est affine par rapport à la variable $x \in R^p$ est représentée par

$$\begin{bmatrix} I_p & Z(x) \\ Z(x) & I_q \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{I.23})$$

e. Lemme de S- procédure [Boyd 94] :

C'est une technique qui permet d'approcher un ensemble de contraintes quadratiques par une seule contrainte quadratique.

Lemme I.2 : Soient F_0, \dots, F_p des fonctions quadratiques de la variable $\zeta \in R^m$ avec :

$$F_i(\zeta) = \zeta^T T_i \zeta + 2u_i^T \zeta + v_i \quad (\text{I.24})$$

où $T_i = T_i^T \in R^m$, $i \in \{0, \dots, p\}$.

Alors la proposition (1) implique la proposition (2)

$$(1) \text{ Il existe : } \tau_i \geq 0 \text{ } i \in \{1, \dots, p\} \text{ tels que : } \begin{bmatrix} T_0 & u_0 \\ u_0^T & v_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^p \tau_i \begin{bmatrix} T_i & u_i \\ u_i^T & v_i \end{bmatrix} \geq 0$$

$$(2) F_0(\zeta) \geq 0 \text{ pour tout } \zeta \neq 0 \text{ tel que } F_i(\zeta) \geq 0, i \in \{1, \dots, p\}.$$

f. Le carré matriciel et ses dérivées :

Lemme I.3 [Zhou 88]: Soit deux matrices A et B de dimensions appropriées, on a

$$A^T B + B^T A \leq \gamma A^T A + \gamma^{-1} B^T B \quad (\text{I.25})$$

où γ est une constante positive.

Pour réduire le conservatisme, cette propriété peut être également écrite en fonction d'une matrice définie positive $M > 0$.

$$A^T B + B^T A \leq A^T M A + B^T M^{-1} B \quad (\text{I.26})$$

Les propriétés (I.25) et (I.26) ont l'avantage de pouvoir éliminer les termes anti-diagonaux et les ramener dans les blocs diagonaux, comme l'explique l'exemple I.2.

Exemple I.2 :

On souhaite éliminer les termes anti-diagonaux A et B de la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} Y & W^T + B^T A^T \\ W + AB & Z \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{I.27})$$

(I.27) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} Y & W^T \\ W & Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B^T A^T \\ AB & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{I.28})$$

Or

$$\begin{bmatrix} 0 & B^T A^T \\ AB & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^T \end{bmatrix} \quad (\text{I.29})$$

En utilisant la propriété (I.26), on obtient l'inégalité :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^T \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 0 & A^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.30})$$

La condition (I.27) est satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} Y + B^T Q^{-1} B & W^T \\ W & Z + A Q A^T \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{I.31})$$

g. Lemme d'élimination :

Ce lemme est aussi connu sous le nom de projection, il est très utilisé dans les formulations LMI.

Lemme I.4 [Boyd 94]: Pour des matrices réelles $W = W^T, M, N$ de tailles appropriées, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- Il existe une matrice réelle K telle que :

$$W + M.K.N^T + N.K^T.M^T < 0 \quad (\text{I.32})$$

- Il existe un scalaire réel σ tel que :

$$W < \sigma MM^T \text{ et } W < \sigma NN^T \quad (\text{I.33})$$

- Les compléments orthogonaux M^\perp et N^\perp de M et N , respectivement, vérifient :

$$M^{\perp T}WM^\perp < 0 \text{ et } N^{\perp T}WN^\perp < 0 \quad (\text{I.34})$$

I.3.3. Loi de commande floue

Pour garantir la stabilité d'un modèle de type T-S, nous avons recours à la synthèse d'une commande stabilisante. Pour ce faire, en s'inspirant des résultats d'analyse de stabilité des systèmes dynamiques, on aboutit à des conditions de synthèse de commande par retour d'état [Wang 96]. Les conditions sur les gains de commande ainsi obtenues, ne sont pas nécessairement formulées directement en un problème LMI. En effet, dans certains cas, on obtient des inégalités matricielles non linéaires, se qui nécessitent un ensemble de transformations matricielles pour les rendre linéaires. Dans ce contexte, pour générer un signal de commande stabilisant pour le système (I.6), plusieurs formules de commande floue sont proposées dans la littérature, on ne citera ici que les plus utilisés, c'est la loi de commande basée sur le retour d'état et connue sous le nom de PDC (Parallel Distributed Compensation).

I.3.3.1. Loi de commande PDC (Parallèle Distributed Compensation)

Le concept PDC est utilisé pour élaborer une loi de commande pour les modèles flous de type T-S. l'idée est de calculer une loi de commande linéaire par retour d'état pour chaque sous-ensemble du modèle flou. La détermination d'une loi de commande revient à déterminer pour chaque modèle local (sous-modèle) les gains appropriés. Chaque modèle local est stabilisé localement par une loi de commande linéaire. La loi de commande globale qui en général est non linéaire est obtenue par interpolation des lois de commande linéaires locales. Elle est donnée par la loi de commande suivante [Wang 95], [Wang 96]:

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t) \quad (\text{I.35})$$

où $K_i \in R^{m-p}$ est le gain de retour local relatif à l' $i^{\text{ème}}$ modèle.

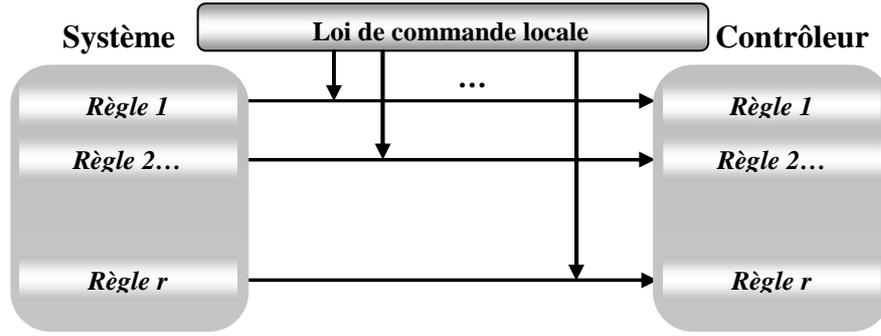


Fig. I.1. Principe de la commande PDC.

Le régulateur flou PDC partage les mêmes ensembles flous que ceux du modèle flou de T-S. Donc l'avantage majeur de cette loi de commande, est de respecter la même structure de découpage des non linéarités que celle utilisée pour l'obtention du modèle T-S. Dans le cas où le modèle T-S est obtenu par découpage exact, cette loi de commande est donc valable quel que soit le point de sous espace compact de l'espace d'état.

Par ailleurs, il existe d'autres lois de commande qui s'inspirent de la commande PDC et qui se basent sur le retour de sortie. Parmi ces lois, on distingue, la commande DPDC (*Dynamique PDC*) qui représente un contrôleur non linéaire [Li 00]. Ensuite la loi de commande OPDC (*Output PDC*) qui est de la forme [Chadli 02] :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i y(t) \quad (\text{I.36})$$

I.3.3.2. Stabilisation des modèles flous T-S avec une loi de commande du type PDC

La commande PDC, notamment la stabilisation quadratique, se base sur la fonction quadratique de Lyapunov pour montrer la convergence du modèle flou en boucle fermée, en l'occurrence déterminer les retours d'états correspondants à chaque modèle LTI composant le modèle T-S. Ainsi, à partir d'une telle fonction, on peut trouver une matrice P commune et strictement définie positive entre tous les modèles locaux en boucle fermée. Pour obtenir le modèle flou en boucle fermée, on applique la commande PDC au modèle T-S (I.6). Ainsi le modèle flou obtenu est le suivant:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) G_{ij} x(t) \quad , \quad \text{avec } G_{ij} = A_i - B_j K_i \quad (\text{I.37})$$

Le premier résultat concernant la stabilisation des modèles T-S par la commande PDC a été donné par [Wang 96]. En posant :

$$Y_{ij} = G_{ij}^T P + P G_{ij} \quad (\text{I.38})$$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème I.1 [Wang 96]

L'équilibre du modèle flou continu (I.37) est asymptotiquement stable, s'il existe une matrice

$P = P^T > 0$ telle que :

$$Y_{ii} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{I.39})$$

$$Y_{ij} + Y_{ji} < 0, \quad i < j \leq r \quad (\text{I.40})$$

$$\text{avec } h_i(z(t)) \times h_j(z(t)) \neq 0, \quad t > 0 \quad (\text{I.41})$$

Elaborer un régulateur flou PDC consiste donc à déterminer les matrices de gains de retour d'état K_i satisfaisant les conditions du théorème I.1 avec l'existence d'une matrice P commune, strictement définie positive. Pour mettre au point ce régulateur, on se ramène donc à un problème de faisabilité des LMI qui peut être résolu à l'aide des outils issus de l'optimisation convexe, et plus particulièrement des LMIs (Linear Matrix Inequalities) [Boyd 94]. Pour cela, on effectue les changements de variables bijectifs usuels suivants [Wang 96]: $N = P^{-1}$ et $K_i = Y_i P^{-1}$, d'où après congruence avec $N = P^{-1}$ des inégalités (I.34) et (I.35), on obtient les expressions LMI suivantes par rapport aux variables N et Y_j .

$$NA_i^T + A_i N - B_i Y_i - Y_i^T B_i^T < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{I.42})$$

$$A_i N + NA_i^T + A_j N + NA_j^T - B_i Y_j - Y_j^T B_i^T - B_j Y_i - Y_i^T B_j^T < 0, \quad i < j \leq r \quad (\text{I.43})$$

Remarque I.3

Notons que le nombre de conditions à vérifier est $r(r+1)/2$, et que ce nombre croît en fonction du nombre de règles r .

Le fait d'utiliser une fonction de Lyapunov quadratique implique la recherche d'une matrice $P = P^T > 0$ unique qui se retrouve dans toutes les $r(r+1)/2$ inégalités. Il est alors clair que le nombre de règles est un facteur essentiel pour réduire le conservatisme des résultats issus des conditions (I.42) et (I.43) du théorème I.1.

Ainsi, disposant d'un modèle T-S, le problème fondamental qui se pose lors de la synthèse de commande du type PDC est celui du conservatisme des conditions sur les gains de retour d'état. Par conséquent, dans le but d'avoir des résultats beaucoup moins conservatifs, des conditions de relaxation LMI ont fait l'objet de plusieurs travaux notamment ceux développés dans [Tanaka 98a], qui se basent sur le nombre maximal de règles actives à chaque instant

pour réduire le conservatisme de conditions de stabilisations. Kim et Lee [Kim 00] s'inspirent de ces travaux, en introduisant des conditions supplémentaires. Dans [Teixeira 03], les auteurs proposent d'utiliser des fonctions de Lyapunov multiples pour rechercher plusieurs matrices définies positives au lieu de chercher qu'une seule commune, comme dans le cas de stabilisation par la fonction de Lyapunov quadratique. Parmi les résultats de relaxation utilisant une fonction de Lyapunov quadratique, nous pouvons citer des conditions de relaxations très pertinentes proposées par [Tuan 01], qui sont donnés dans le théorème suivant.

Théorème I.2 [Tuan 01]

Les conditions (I.39) et (I.40) du théorème I.1 sont vérifiées si l'une des conditions suivantes est vraie :

$$1) Y_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{I.44})$$

$$\frac{1}{r-1} Y_{ii} + \frac{1}{2} (Y_{ij} + Y_{ji}) < 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq r \quad (\text{I.45})$$

2) Il existe des matrices symétriques $Q_{ij} = Q_{ji}$, $i \neq j$ telles que :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r-1} Y_{ii} & Q_{ij} \\ Q_{ij} & \frac{1}{r-1} Y_{jj} \end{bmatrix} < 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (\text{I.46})$$

$$\frac{1}{2} (Y_{ij} + Y_{ji}) < Q_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq r \quad (\text{I.47})$$

3) Il existe des matrices symétriques $Q_{ij} = Q_{ji}$, $i \neq j$ telles que :

$$Y_{ij} + \sum_{j \neq i}^r Q_{ij} < 0, \quad Q_{ij} \geq 0, \quad Q_{ij} \geq \frac{1}{2} (Y_{ij} + Y_{ji}), \quad 1 \leq i \neq j \leq r \quad (\text{I.48})$$

Preuve

En appliquant L'équation (I.38), on peut écrire que :

$$\sum_{i < j}^r \left[\frac{1}{r-1} h_i^2(z(t)) Y_{ii} + \frac{1}{r-1} h_j^2(z(t)) Y_{jj} + h_i(z(t)) h_j(z(t)) (Y_{ii} + Y_{jj}) \right] < 0$$

L'inégalité (I.46) devient alors : $\forall x \neq 0$

$$x^T(t) \left[\frac{1}{r-1} h_i^2(z(t)) Y_{ii} + \frac{1}{r-1} h_j^2(z(t)) Y_{jj} \right] x(t) + h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T(t) (Y_{ii} + Y_{jj}) x(t) \leq 0$$

Il existe des matrices $Q_{ij} \geq 0$ telle que :

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) Y_{ii} + \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) Q_{ij} \leq \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \left(Y_{ii} + \sum_{i \neq j}^r Q_{ij} \right) < 0$$

A partir la condition (I.47) on trouve :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) Y_{ij} \leq \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) Y_{ii} + \sum_{i \neq j}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) Q_{ij}, \text{ Ce qui vérifie (I.44).}$$

La première condition de ce théorème, ne nécessite l'existence d'aucune matrice définie positive supplémentaire, ce qui facilite l'obtention d'une solution au problème LMI, notamment quand il s'agit par exemple d'un système augmenté avec un observateur flou.

Dans le même objectif de ce dernier théorème, un autre résultat complémentaire concernant la relaxation est présenté dans [Liu 03]. Le résultat de ce théorème stipule l'existence de matrices définies positives qui peuvent être libres, ce qui permet de relâcher les LMI trouvées.

Théorème I.3 : [Liu 03]

L'équilibre d'un modèle flou continu décrit par (I.37) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P = P^T > 0$, des matrices Y_{ij} définies en (I.38), $Q_{ij} > 0$ et $Q_{ij} = Q_{ij}^T$ telle que :

$$Y_{ii} + Q_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{I.49})$$

$$Y_{ij} + Y_{ji} + Q_{ij} + Q_{ji} < 0, \quad i \leq j \leq r \quad (\text{I.50})$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & Q_{(r-1)r} \\ Q_{r1} & \cdots & Q_{r(r-1)} & Q_{rr} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{I.51})$$

Remarque I.4

Dans le cadre de la relaxation. On note aussi que ce type est utile que si les Y_{ij} existent et ne sont pas nuls, c-à-d qu'il est nécessaire que les sous modèles croisés existent [Kim 00].

Nous avons montré à partir du modèle T-S, une méthode de synthèse de commande type PDC. Cette loi de commande très utilisée, est basée sur la connaissance de l'état du système. Par conséquence, dans le cas où l'état du système n'est pas totalement disponible, il est nécessaire d'avoir recours à un observateur permettant d'estimer l'état du système. Dans le cas des modèles T-S, on privilégie les observateurs flous T-S se basant généralement sur des

modèles linéaires de type « **Luenberger** ». Ces derniers, ont pour avantage d'avoir la même structure que les modèles T-S.

I.3.4. Stabilité du modèle flou T-S augmenté

Plusieurs travaux concernant la synthèse de commande avec un observateur flou ont été élaborés pour la stabilisation des modèles T-S [Xiao-Jun 98], [Xiadong 02]. Les résultats existant pour ce type d'observateur sont très variés selon la fonction de Lyapunov choisie et selon le type de commande utilisée pour stabiliser le modèle flou. Les principes de base de ce type d'observateurs sont synthétisés dans ce qui suit.

I.3.4.1. Stabilisation avec observateur flou

Un observateur flou est nécessaire lorsqu'une partie de l'état du système n'est pas accessible pour mesurer. Le but étant d'obtenir une convergence asymptotique de l'erreur de prédiction d'état, $x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ où $\hat{x}(t)$ représente le vecteur d'état estimé par l'observateur [Morère 01]. Le modèle flou T-S augmenté est composé d'un modèle flou, d'un régulateur flou et d'un observateur flou, comme montre la figure I.2 suivante;

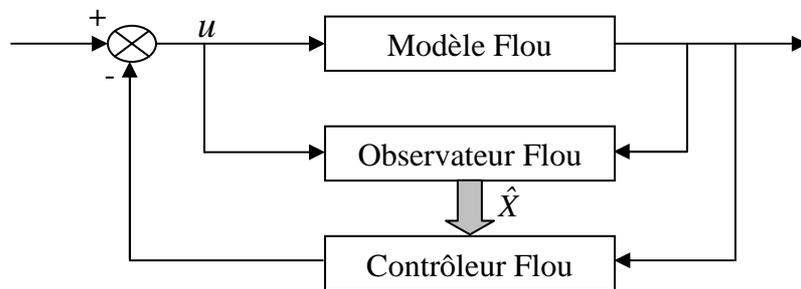


Fig. I.2. Représentation d'un système augmenté.

I.3.4.2. Observateur flou T-S

La structure la plus simple d'un observateur flou T-S est obtenue par interconnexion de plusieurs observateurs locaux de type *Luenberger*. Il s'écrit d'une façon générale comme suit:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) [A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))] \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) [C_i \hat{x}(t)] \end{cases} \quad (\text{I.52})$$

Où $\hat{x}(t)$ et $\hat{z}(t)$ représentent respectivement l'état estimé de l'observateur flou et le vecteur de prémisses reconstruit, et L_i représentent les gains de l'observateur [Tanaka 98a], [Guerra 03].

Hypothèse I.1

Tout au long de ce travail, on supposera que toutes les variables de prémisses sont mesurables c'est-à-dire $\hat{z}(t) = z(t)$ et les fonctions d'activation de l'observateur sont les mêmes que celles caractérisant le modèle T-S (I.37).

Dans le cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée, pour assurer la convergence de l'observateur, le nombre de conditions est augmenté de façon significative par l'apparition des produits $h_i(\hat{z}(t)) \times h_j(z(t))$ [Lauer 03].

Pour évaluer la convergence de l'observateur flou (I.52), on considère l'erreur d'estimation du vecteur d'état donnée par :

$$e_o(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (\text{I.53})$$

Note :

L'indice 'o' indique que l'erreur est liée à l'observateur, un indice 'p' signifie l'erreur de poursuite. On adoptera cette notation tout le long du manuscrit.

Tenant compte du modèle T-S (I.6) et l'observateur (I.52), la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{e}_o(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) [A_i - L_i C_j] e_o(t) \quad (\text{I.54})$$

Ainsi, la synthèse d'un tel observateur consiste en la détermination des gains locaux L_i afin d'assurer la convergence vers zéro de la dynamique de l'erreur d'estimation (I.54). Les conditions de synthèse d'un observateur flou (I.52) sont duales de celles d'un contrôleur flou (I.37) [Ma 98], [Yoneyama 00].

I.3.4.3. Loi de commande PDC avec observateur flou

Dans le cas où tous les états du système ne sont pas mesurables, la commande PDC synthétisée emploie le retour d'état reconstruit et nous pouvons alors écrire.

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i \hat{x}(t) \quad (\text{I.55})$$

Le système augmenté est composé de l'état du système $x(t)$ et l'erreur d'estimation $e_o(t)$, on peut écrire:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}_o(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(t) \\ e_o(t) \end{bmatrix} \quad (\text{I.56})$$

Jusqu'ici les lois de commande développées ne tiennent pas compte des erreurs de modélisation, et/ou de perturbations externes pour les modèles T-S. Par ailleurs, d'autres problèmes récurrents ont fait l'objet de plusieurs travaux. Notamment, la synthèse de commande robuste pour les modèles T-S incertains et/ou soumis à des perturbations externes.

Nous présentons, dans la section suivante de manière synthétique, certaines approches de synthèse de commande robuste pour les systèmes T-S incertains et perturbés.

I.4. COMMANDE ROBUSTE FLOUE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

La commande robuste concerne les systèmes incertains et/ou perturbés. Dans la littérature plusieurs travaux ont été développés concernant la synthèse de commandes robustes pour les modèles flous incertains. Nous pouvons citer les principaux résultats qui traitent de la stabilisation avec une commande sans observateur pour les modèles T-S incertains et/ou perturbés [Tanaka 96], [Zhao 96], [Lee 01], [Tanaka 01].

La commande floue avec observateur et les variables de prémisses mesurables est abordée dans [Yoneyama 00], avec le principe de séparation. En revanche dans le cas où les variables de prémisses ne sont pas mesurables, dans [Lauber 03], l'auteur considère le découpage des variables non mesurables comme des incertitudes de modélisation.

Vu la diversité des résultats existant sur la stabilisation des modèles T-S incertains et/ou perturbés, nous nous restreindrons sur quelques concepts de base que nous avons exploité, dans les chapitres suivants pour la mise en œuvre des approches développées dans le cas de la poursuite de trajectoire.

I.4.1. Modèles T-S incertains

Le modèle T-S avec incertitudes paramétriques s'écrit d'une manière générale comme suit [Tanaka 01]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [(C_i + \Delta C_i(t))x(t)] \end{cases} \quad (\text{I.57})$$

Avec $\Delta A_i = H_a \Delta a_i(t) E a_i$, $\Delta B_i = H_b \Delta b_i(t) E b_i$ et $\Delta C_i = H_c \Delta c_i(t) E c_i$

où $H_a, H_b, H_c, E a_i, E b_i, E c_i$ sont des matrices constantes, et les incertitudes $\Delta a_i(t), \Delta b_i(t)$ et $\Delta c_i(t)$ sont bornées dans le temps de la façon suivante :

$$\Delta a_i^T(t) \Delta a_i(t) \leq I, \Delta b_i^T(t) \Delta b_i(t) \leq I, \Delta c_i^T(t) \Delta c_i(t) \leq I$$

En général, les incertitudes rencontrées dans ce type de modèle sont dues à la modélisation du système qui est effectuée de manière à réduire le nombre de règles [Taniguchi 01], [Lauber 03]. Le principe de synthèse de commande dans ce cas, se base sur l'application de la loi de commande (I.55) au système (I.57) avec l'observateur flou (I.52), en considérant la dynamique de l'erreur d'estimation (I.36). Le problème revient alors à stabiliser le système augmenté suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}_o(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \begin{bmatrix} A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j & (B_i + \Delta B_i) K_j \\ \Delta A_i + L_i \Delta C_j - \Delta B_i K_j & A_i + L_i C_j + \Delta B_i K_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e_o(t) \end{bmatrix} \quad (\text{I.58})$$

Ainsi, en ce qui concerne la commande robuste avec observateur flou pour les modèles T-S incertains et en se plaçant dans le cas où le théorème de séparation [Ma 98], n'est pas applicable, on introduit les non linéarités qui dépendent des variables de prémisses non mesurables dans les matrices contenant les incertitudes. Dans [Lauber 03], une méthode basée sur le couplage des parties commande et observateur est proposée, elle consiste à résoudre le problème d'une façon séquentielle grâce à deux problèmes LMI. Une partie des travaux de [Chen 00] rejoint également cette méthode. De la même manière que pour le cas de stabilisation, l'étude de stabilité, de tels systèmes repose sur la fonction de Lyapunov quadratique de la forme $V(x, e_o) = x^T P x + e_o^T P e_o$. Un résultat récent consiste à résoudre ce problème sous forme de LMI's d'une manière systématique [Lauber 04].

I.4.2. Modèles T-S perturbés : atténuation des perturbations

Les systèmes non linéaires sont également susceptibles d'être soumis à des perturbations externes. Ainsi l'atténuation des perturbations est parmi les spécifications des performances qu'il faut prendre en considération. Un modèle T-S soumis à une perturbation externe s'écrit sous la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_{1i} u(t) + B_{2i} \varphi(t)\} \\ p(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{C_i x(t) + D_{1i} u(t) + D_{2i} \varphi(t)\} \end{cases} \quad (\text{I.59})$$

où $\varphi(t)$ représente la perturbation externe de borne supérieure connue $\varphi_{up}(t) \geq \|\varphi(t)\|$ et $p(t)$ est la sortie à réguler. Pour ce qui suit, une définition de la norme H_∞ est nécessaire.

Définition I.1

on appelle norme H_∞ du transfert $T_{x\varphi}$ entre φ et p [Alazard 99]:

$$\|T_{z\varphi}\|_\infty = \sup_{\varphi(t) \neq 0} \frac{\|p(t)\|_2}{\|\varphi(t)\|_2} \quad (\text{I.60})$$

L'objectif en plus de la stabilisation, est de déterminer une loi de commande qui atténue l'effet des perturbations externes $\varphi(t)$ sur la grandeur à réguler (norme H_∞) en boucle fermée avec un taux d'atténuation donnée η :

$$\|p(t)\|_2 \leq \|\eta(t)\|_2 \quad (\text{I.61})$$

$$\text{Avec } \|p(t)\|_2^2 \text{ définie par } \|p(t)\|_2^2 = \int_0^\infty p^T(t) p(t) dt \quad (\text{I.62})$$

Une faible valeur de cette norme indique un faible effet des perturbations, le but est alors de déterminer des lois de commande qui permettent de minimiser cette norme, en l'occurrence une meilleure atténuation η .

Remarque I.5

Le taux d'atténuation η s'appelle aussi la performance H_∞ quadratique.

Pour assurer la stabilité du système (I.59) ainsi qu'une performance H_∞ quadratique, nous considérons une fonction de Lyapunov de type quadratique. Le théorème suivant donne une condition suffisante assurant cette performance :

Théorème I.4 [Boyd 94]

En considérant le modèle (I.59), la norme H_∞ est assurée pour un taux d'atténuation inférieur à η si et seulement si il existe une fonction quadratique de Lyapunov $V(x) = x^T P x$ telle que :

$$\frac{dV(x)}{dt} + p^T p - \eta^2 \varphi^T \varphi < 0 \quad (\text{I.63})$$

Remarque I.6

La condition (I.63) peut être écrite en ajoutant une matrice de pondération à la variable à réguler [Tseng 01].

$$\frac{dV(x)}{dt} + P^T Q P - \eta^2 \varphi^T \varphi < 0 \quad \text{avec } Q > 0 \quad (\text{I.64})$$

En se plaçant dans le cadre des modèles T-S contenant uniquement des perturbations externes sans matrice d'entrée, le modèle devient [Chiang 01]:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t) + \varphi(t)\} \quad (\text{I.65})$$

Pour synthétiser une commande PDC (I.35) permettant de stabiliser et d'atténuer les perturbations du système (I.64), le critère H_∞ correspondant serait donc défini comme suit :

$$\int_0^{tf} x^T(t) Q x(t) dt \leq \eta^2 \int_0^{tf} \varphi^T(t) \varphi(t) dt \quad (\text{I.66})$$

Le système en boucle fermée est alors donné par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [(A_i - B_i K_j) x(t) + \varphi(t)] \quad (\text{I.67})$$

En considérant les conditions initiales de l'état du système, le critère (I.49) devient :

[Alazard 99], [Chiang 01]

$$\int_0^{tf} x^T(t) Q x(t) dt \leq x(0)^T P x(0) + \eta^2 \int_0^{tf} \varphi^T(t) \varphi(t) dt \quad \text{avec } P = P^T > 0 \quad (\text{I.68})$$

Un premier résultat immédiat s'inspirant de la condition (I.68) montre une condition suffisante assurant la stabilité avec atténuation des perturbations. On considère Y_{ij} définis dans (I.38).

Théorème I.5 [Chiang 01]

Le système en boucle fermée (I.50) est stable, s'il existe une matrice $P = P^T > 0$, une constante positive constante η et des retours d'état K_i montrés dans (I.35) et qui satisfont les conditions suivantes :

$$Y_{ii} + \eta^{-1} P P < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{I.69})$$

$$\frac{Y_{ij} + Y_{ji}}{2} + \eta^{-1} P P < 0, \quad i < j \leq r \quad (\text{I.70})$$

I.4.3. Modèles T-S incertains et perturbés

D'autres résultats en fonction des modèles étudiés sont disponibles. Notamment les résultats concernant les modèles T-S soumis à des perturbations externes et avec incertitudes paramétriques. Parmi les résultats principaux, on peut se référer à [Tanaka 96], [Lee 01]. Dans [Lee 01], les modèles pris en compte peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [(A_i + \Delta A_i) x(t) + (B_{1i} + \Delta B_{1i}) u(t) + (B_{2i} + \Delta B_{2i}) \varphi(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [C_i x(t) + D_{1i} u(t) + D_{2i} \varphi(t)] \end{cases} \quad (\text{I.71})$$

Pour ce type de modèle, [Lee 01] donnent une condition suffisante sur les gains de retour assurant la stabilité et l'atténuation des perturbations sous forme d'un problème LMI. Ce résultat repose sur la structure particulière des incertitudes qui sont de la forme suivante :

$$[\Delta A_i \quad \Delta B_{1i} \quad \Delta B_{2i}] = H F(t) [E_{1i} \quad E_{2i} \quad E_{3i}], \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{I.72})$$

et H, E_{1i}, E_{2i} et E_{3i} sont des matrices constantes, et la matrice incertaine $F(t)$, est bornée dans le temps de la façon suivante :

$$F^T(t) F(t) \leq I, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{I.73})$$

Notons que cette structure nécessite deux matrices communes entre toutes les règles notées H et $F(t)$, ce qui n'est pas le cas dans la structure du modèle (I.57).

En posant :

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} P^{-1} A_i^T + A_i P^{-1} + Y_j^T B_{2i}^T + B_j Y_j^T + 2\alpha Q & (*) & (*) & (*) & (*) \\ \lambda^{-1} H^T & -\lambda^{-1} I & 0 & 0 & 0 \\ B_{1i}^T & 0 & -\eta^2 & (*) & (*) \\ E_{1i} P^{-1} E_{3i} Y_j & 0 & E_{2i} & -\lambda^{-1} I & 0 \\ C_i P^{-1} + D_{2i} Y_j & 0 & D_{2i} & 0 & -I \end{bmatrix} \quad (\text{I.74})$$

Le symbole $(*)$ indique la quantité transposée dans une matrice symétrique. Le résultat principal peut être synthétisé par le théorème suivant :

Théorème I.6 [Lee 01]

Avec le modèle flou (I.71) et les Y_{ij} définis en (1.74), il existe une loi de commande (PDC) robuste stabilisante avec un taux de décroissance α de la fonction de Lyapunov quadratique. La performance H^∞ (I.64) est garantie pour un taux d'atténuation η pour les incertitudes admissibles, s'il existe une matrice $P > 0$, des matrices K_j et un scalaire $\lambda > 0$ tels que les conditions (I.39) et (I.40) sont satisfaites.

Les travaux présentés posent les bases de la synthèse de commande robuste dans le cas des systèmes T-S. Ainsi, on peut trouver également plusieurs méthodes récentes pour traiter le problème de commande robuste pour des systèmes T-S incertains tels que dans le cas de systèmes T-S incertains et perturbés.

I.5. AUTRES APROCHES DE SYNTHÈSE**I.5.1. Structure des Systèmes Flous**

Le système flou contient trois composantes principales voir la figure I.3, le bloc fuzzification, qui va effectuer une transformation des variables d'entrée, définies par des fonctions d'appartenance, en des variables linguistiques qui peuvent être traitées par des opérateurs flous. Le moteur d'inférence qui est le véritable cerveau du système "flou". Il donne la relation qui existe entre les variables d'entrée (exprimées comme variables linguistiques) et les variables de sortie (également exprimées comme variables linguistiques). La base de règles floues consiste en une collection de règles de la forme Si-Alors. Après l'étape d'inférence, on obtient une valeur floue, et puisque les entrées du système à commander sont des valeurs précises, alors il est nécessaire de transformer les valeurs floues en des valeurs numériques bien déterminées, c'est le rôle de la défuzzification.

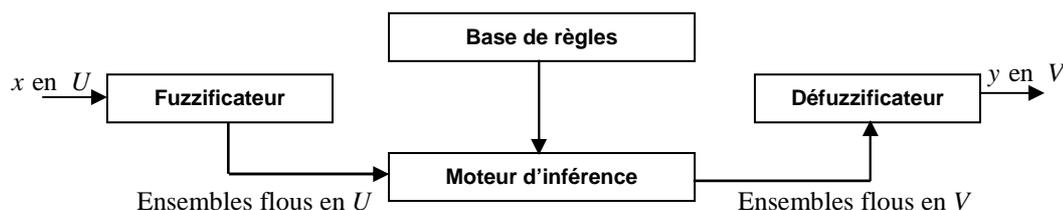


Figure I.3 : Schéma synoptique générale d'un système flou.

La $i^{\text{ème}}$ règle floue écrite sous la forme suivante [Wang 97] :

$$R^{(l)} : \text{Si } x_1 \text{ est } F_1^l \text{ et } \dots \text{ et } x_n \text{ est } F_n^l \text{ Alors } y \text{ est } B^l \quad (\text{I.75})$$

Le système flou effectue une relation de correspondance entre $U = U_1 \times \dots \times U_n \subseteq R$ et l'ensemble R , où $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n$ le vecteur d'entrée et $y \in R$, est la sortie du système.

F_j^i et B^l sont les ensembles de fonctions d'appartenance des entrées et des sorties du système flou, respectivement. $i = 1, 2, \dots, r$ désigne le nombre d'entrée pour le système flou, et $l = 1, 2, \dots, m$ désigne le nombre des règles floues *SI-Alors*.

On voit que les systèmes flous comprennent une classe très riche de configuration de systèmes statique de $U \in R^n$ à R , parce que dans chaque bloc, il y a différents choix et beaucoup de combinaisons de ces choix peuvent aboutir aux sous classes des systèmes flous qui seront utilisées comme des composants de notre contrôleur adaptatif flou.

L'ensemble du système flou avec la fuzzification singleton, la défuzzification par centre de gravité et le produit d'inférence sont tous des fonctions $f : U \in R^n \rightarrow R$ telles que la sortie écrite sous la forme suivante :

$$y(x) = \frac{\sum_{l=1}^m y^l \left(\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i) \right)}{\sum_{l=1}^m \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i)} \quad (\text{I.76})$$

Où $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in U$, y^l est le point auquel l'ensemble des fonctions d'appartenances $\mu_{F_i^l}(x_i)$ prend sa valeur maximale (en général, on assure que $\mu_{G^{(l)}}(y^l) = 1$), et F_i^l et G^l sont les ensembles flous [Wang 97]. Si on fixe $\mu_{F_i^l}(x_i)$ et considère y^l comme des paramètres ajustables, alors l'équation (IV.12) peut être réécrite sous la forme compacte suivante :

$$y(x) = \theta^T \xi(x) = \xi(x)^T \theta \quad (\text{I.77})$$

où $\theta = [y^1, \dots, y^m]^T$ est un vecteur des paramètres, et $\xi(x) = [\xi^1(x), \dots, \xi^m(x)]^T$ est vecteur de régression dont la $l^{\text{ème}}$ composante est donnée par :

$$\xi^l(x) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i)}{\sum_{l=1}^m \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i)} \quad (\text{I.78})$$

L'écriture de la sortie du système flou sous la forme (I.77) permet d'une part d'exploiter les différents algorithmes adaptatifs linéaires et d'autre part, d'introduire directement des informations linguistiques émanant de l'expert humain.

I.5.2. Commande par Mode Glissant

Les processus physiques sont les plus souvent non linéaires. Mal définis et ont des paramètres variables. Par exemple dans le cas des robots, les équations dynamiques sont non linéaires, couplées, et les paramètres intervenant dans leur description dépendant de la charge. D'autre part, un modèle mathématique n'est rien d'autre qu'une représentation approximative de la réalité physique et cependant on ne dispose que de ce modèle pour construire une loi de commande.

La technologie des modes glissants consiste à amener la trajectoire d'état d'un système vers la surface de glissement.

Dans la réalité, il est souvent très difficile de représenter strictement un processus et connaître toutes les variables mise en jeu. Par conséquent, la loi de commande qui lui sera associée doit être robuste afin de atténuer à certains non linéarités ou erreurs d'identification.

La commande par mode glissant permet de répondre à ce problème. Cette robustesse se fera au détriment des performances. En effet, la discontinuité et l'entrée induit des vibrations haute-fréquences indésirables en pratique. De plus, la surface de glissement définie dans ce formalisme réduit l'ordre du système en boucle fermée, ce qui ne permet pas dans certains cas, d'imposer au système un modèle désiré de stabilisation.

I.5.2.1. Systèmes à structure variable aux régimes glissants

Un système à structure variable est un système dont la structure change durant son fonctionnement. La commande de tels systèmes par mode de glissement a en général deux modes de fonctionnement (Fig. I.4.) :

- Le mode non glissant (reaching mode) ou mode d'accès, ou encore mode de convergence (MC).
- Le mode glissant (sliding mode).

Ainsi, la trajectoire de phase, partant d'une condition initiale quelconque, atteint la surface de commutation en un temps fini, (mode non glissant), puis tend asymptotiquement vers le point d'équilibre avec une dynamique définie par le mode glissant.

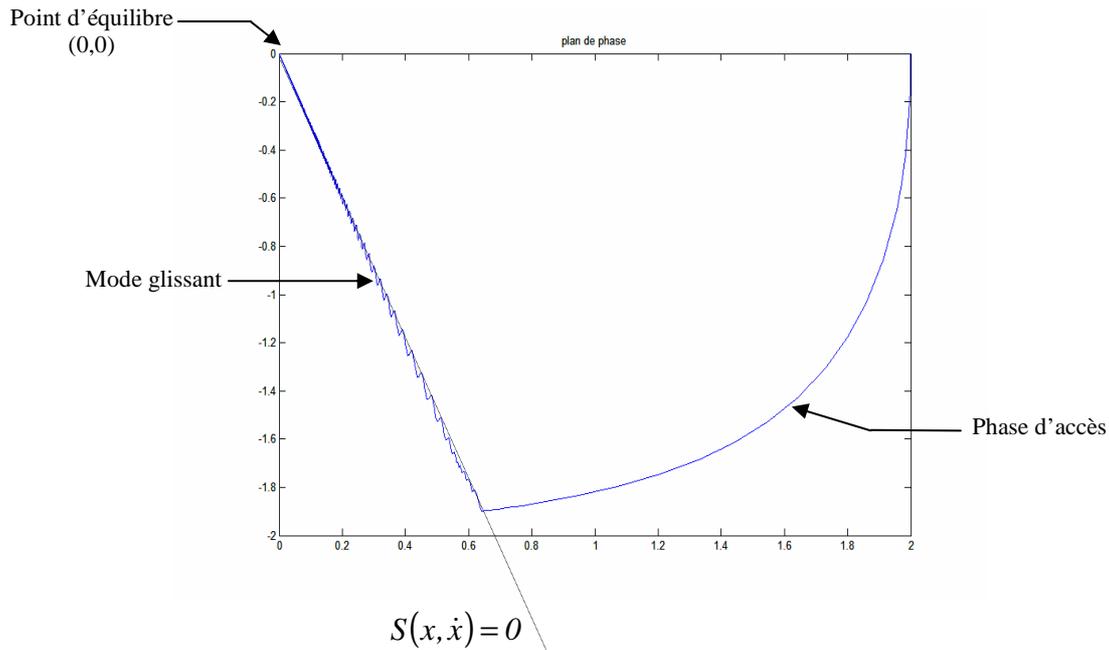


Fig. I.4. Modes de fonctionnement dans le plan de phases.

I.5.2.2. Conditions d'existence et de convergence du régime glissant

Les conditions d'existence et de convergence sont les critères qui permettent aux différentes dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et d'y rester indépendamment de la perturbation. On présente deux approches :

I.5.2.2.1. Approche directe

Cette approche est la plus ancienne, elle est proposée et étudiée par [Utkin 77].

Elle est donnée sous la forme :

$$S(x) \times \dot{S}(x) < 0 \quad (\text{I.79})$$

I.5.2.2.2. Approche de Lyapunov

Il s'agit de choisir une fonction candidate de Lyapunov $V(x) > 0$ (fonction scalaire positive) pour les variables d'état du système et de choisir une loi de commande qui fera décroître cette fonction $\dot{V}(x) < 0$.

En définissant par exemple une fonction candidate de Lyapunov pour le système comme suit :

$$V(x) = \frac{1}{2} S^2(x) \quad (\text{I.80})$$

En dérivant cette dernière, on obtient :

$$\dot{V}(x) = S(x) \times \dot{S}(x) \quad (\text{I.81})$$

Pour que la fonction candidate de Lyapunov puisse décroître, il suffit d'assurer que :

$$S(x) \times \dot{S}(x) < 0 \quad (\text{I.82})$$

Cette dernière approche est utilisée pour garantir les performances de la commande, l'étude de la robustesse et de la stabilité des systèmes non linéaires.

I.6. CONCLUSION

Ce chapitre a été présenté en deux parties essentielles, la première consiste à présenter un aperçu sur la stabilité et la commande flous (T-S). Nous avons détaillé le principe de la commande PDC et la mise en œuvre d'observateur T-S. Ces outils présentés serviront également pour les travaux que nous abordons dans ce qui suit. Par ailleurs, nous avons présenté quelques résultats concernant la relaxation des LMI. Quant aux systèmes T-S, quelques résultats de commande robustes ont été cités, notamment les approches PDC utilisant le critère H_∞ . Les résultats cités dans cette partie ne concernent que le problème de stabilisation des modèles T-S. En revanche, le problème de synthèse robuste et celui de l'exploitation numérique des résultats. En effet, le passage du problème de stabilisation au problème de commande en poursuite n'est pas trivial et l'obtention des résultats en termes de LMI n'est pas systématique. Mais d'un certain point de vue, la méthode d'analyse reste similaire pour traiter le problème de stabilisation et celui de la poursuite de trajectoire.

Dans la deuxième partie, nous avons présenté une approche de synthèse robuste pour les systèmes non linéaires qui est la commande par mode glissant. Un rappel théorique sur le principe de commande avec cette technique pour les systèmes non linéaires à structure variable est détaillé, et ensuite nous avons abordés les conditions d'existence et de convergence du régime glissant. Dans la suite de ce manuscrit on va applique cette technique pour assurer la robustesse et la performance en cas de la poursuite des systèmes non linéaires.

*POURSUITE DE TRAJECTOIRE
POUR LES MODELES T-S
PERTURBES*

II.1. INTRODUCTION

La commande des procédés non linéaires peut être vue sous différentes facettes. En plus de la stabilisation, on distingue aussi les problèmes de régulation, ou de poursuite d'une trajectoire générée par un modèle de référence. Dans ce chapitre, nous considérerons le cas le plus général, celui du suivi d'une trajectoire désirée. Ainsi, le chapitre, est reparti en deux sections principales ; dans la première, nous allons présenter les principales approches élaborées dans le cadre de la synthèse de commande pour assurer la poursuite de trajectoire pour les modèles T-S. Ensuite, dans la seconde partie, nous traiterons de la synthèse de commande pour les modèles flous T-S soumis à des perturbations externes. Cette approche, s'appuie sur l'emploi d'un modèle de référence pour spécifier la trajectoire désirée. La loi de commande ainsi élaborée, est basée sur la minimisation de l'erreur de poursuite par rapport aux perturbations selon un critère H_∞ . Le résultat principal dans ce chapitre est de montrer une condition plus relâchée au sens d'optimisations convexes LMI, en l'occurrence un maximum d'atténuation des perturbations en assurant la poursuite.

II.2. PROBLEME DE SUIVI DE TRAJECTOIRE

Le problème de suivi de trajectoire des systèmes non linéaires notamment les systèmes affines en la commande a été traité avec plusieurs approches classiques depuis plusieurs années, parmi ces méthodes assez développées dans la littérature, on peut distinguer ; la commande adaptative floue [Wang 96, Essounbouli 04], la commande à modes glissants [Utkin 77, Manamanni 98], la commande H_∞ [Alazard 99, Essounbouli 04], la commande PID (proportionnel intégrale dérivé) [Diordiev 03] etc... En revanche, la synthèse de commande pour assurer la poursuite de trajectoire pour les systèmes non linéaires décrits par les modèles flous du type T-S sont très peu ou pas traité dans la littérature, et en particulier, la synthèse de commande robuste et la relaxation des problèmes LMI [Mansouri 09].

II.2.1. La poursuite de trajectoire pour les modèles T-S

En dépit d'une littérature abondante sur le problème de stabilisation des modèles flous T-S, seulement peu de résultats sont disponibles concernant le problème de suivi de trajectoire. Dans [Kung 97], la conception d'un contrôleur flou était proposée en utilisant la technique de linéarisation de retour de sortie. Cette approche ne concerne que les modèles T-S à temps

discret obtenu par identification selon un modèle AR (Auto - Régressif). De la même manière et pour le même type de modèle, une condition nécessaire et suffisante, liée à la notion de stabilité des systèmes à phase non minimale, a été établie dans [Ying 99] pour déterminer analytiquement la stabilité du contrôleur flou.

Les auteurs de [Tseng 01], traitent le problème de suivi de trajectoire pour les modèles T-S, avec des perturbations externes et un bruit de mesure. Cette approche est basée sur un critère H_{∞} minimisant l'erreur de poursuite avec un modèle de référence par rapport à l'ensemble des perturbations, la synthèse de la loi de commande établie ; utilise un observateur flou du type *Luenberger*. Dans [Tseng 01] la même stratégie a été développée pour une classe particulière de systèmes non linéaires interconnectés. Une autre approche au sujet du suivi de trajectoire des modèles T-S [Zheng 02] est basée sur la technique de commande à structure variable (SVC), cette méthode est très restreinte au sens de la robustesse car les incertitudes sur les matrices d'entrée sont considérées négligeables.

Dans le même contexte, [Lam 02] ont conçu un contrôleur à commutation en utilisant un modèle de référence. Cette méthode se caractérise par la complexité de la loi de commande et la difficulté de vérifier une relation entre les matrices d'entrée sortie et le modèle de référence. Dans [Taniguchi 99] une commande floue basée sur la linéarisation de l'erreur de poursuite a été établie en utilisant une méthode similaire à celle du PDC reposant sur un modèle de référence non linéaire. Cette commande n'est pas robuste, et concerne particulièrement le problème de régulation.

Une autre approche, se basant sur une combinaison de la commande à mode glissant et la commande PDC pour les modèles T-S a été proposée dans [Chang 02]. Dans cette méthode, l'analyse de stabilité avec les deux commandes se fait d'une manière indépendante. Une tentative de synthèse de commande pour le suivi de trajectoire avec un modèle de référence a été proposée dans [Tong 02]. Les résultats ainsi trouvés, se basent malheureusement sur une confusion de l'erreur d'observation et celle de poursuite, ce qui donne évidemment des conditions erronées sur les gains de commande et ceux d'observation.

A partir de ce tour d'horizon bibliographique sur le problème de suivi de trajectoire des modèles T-S, on se rend compte que les résultats ne sont pas très abondants, que certaines restrictions sont considérées. En effet, dans la majorité des cas les systèmes ne sont pas perturbés ou sont considérés comme certains. Partant de ce constat, nous avons abordé l'étude de cette problématique en adoptant une stratégie de commande basée sur un modèle de référence. L'approche par modèle de référence n'est pas nouvelle en soit mais les types de

systèmes T-S que nous considérons et les théorèmes établis constituent la majeure partie de notre travail.

Dans ce qui suit, nous présentons la stratégie de commande de manière générale. Les détails seront explicités au fur et à mesure des chapitres selon chaque cas, en fonction, du modèle et de la commande floue utilisée.

II.2.2. Stratégie de commande

Durant tout ce travail, le problème de suivi de trajectoire des modèles T-S sera traité en se basant sur la technique schématisée selon la figure II.1.

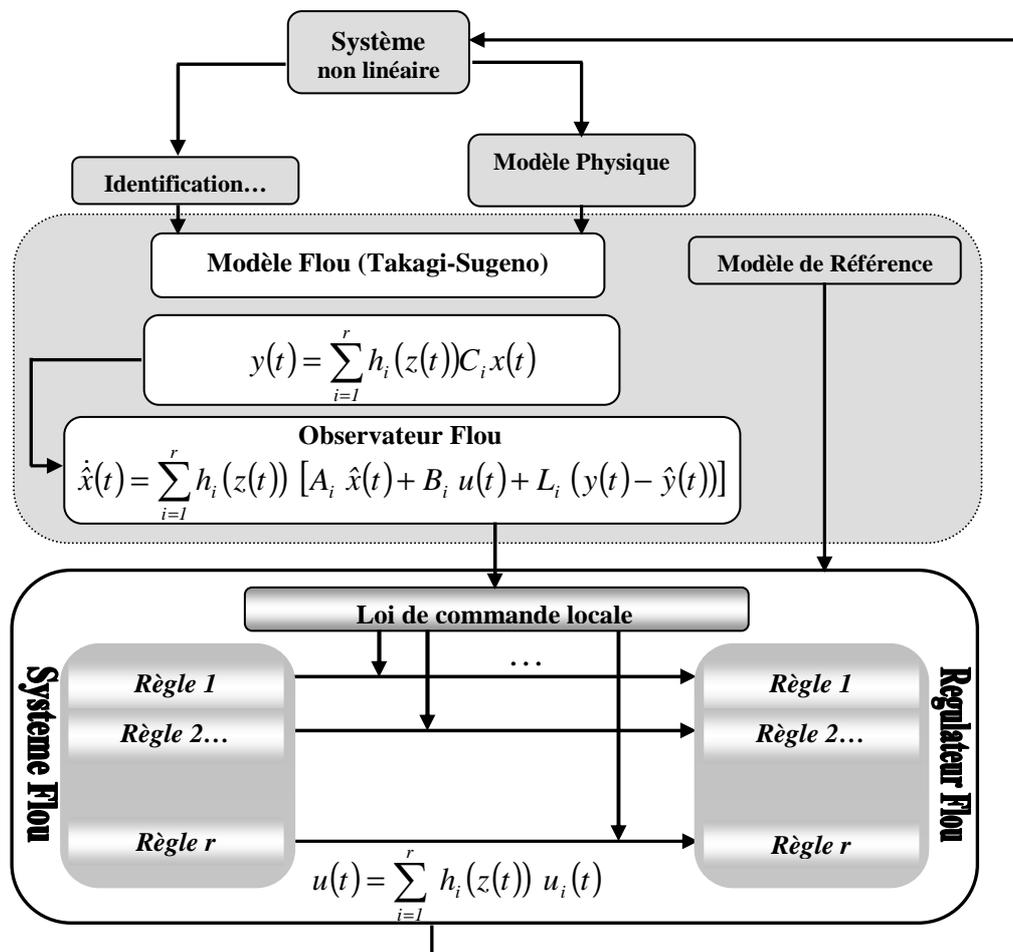


Figure II.1. Schéma de la stratégie de commande adoptée.

Le principe de la stratégie de commande que nous adoptons est de construire un modèle flou T-S appelé modèle augmenté. En effet, il regroupe le modèle du système, celui de l'observateur s'il est nécessaire d'estimer les variables d'état, ainsi que celui du modèle de référence. Ces différentes étapes sont détaillées comme suit :

II.2.2.1. Le modèle physique et le modèle T-S

En considérant le modèle non linéaire affine en la commande, il s'agit d'obtenir un modèle flou T-S en utilisant les méthodes décrites dans le premier chapitre. Par l'intermédiaire des variables de prémisses, le modèle physique fournit les informations sur l'état du système, en l'occurrence l'état du modèle T-S.

II.2.2.2. L'observateur flou T-S

La synthèse d'un observateur flou de type Luenberger (II.1) peut être considérée dans le cas où l'état du système n'est pas disponible.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))] \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

$\hat{x}(t) \in R^n$ est l'état estimé et L_i est le gain d'observation de la $i^{\text{ème}}$ règle floue.

II.2.2.3. Le système de référence

Pour spécifier la trajectoire désirée, on distingue plusieurs types de modèle, à savoir les modèles linéaires et non linéaires.

II.2.2.3.1. Modèles linéaires

Parmi les modèles de références linéaires, les plus utilisés sont de la forme [Tseng 01]:

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + r(t) \quad (\text{II.2})$$

où $x_r(t)$ est la variable de référence pour $t \geq 0$, A_r est une matrice asymptotiquement stable et $r(t)$ est une entrée de consigne bornée dans le temps [Tseng 01].

Le modèle (II.2) peut être muni d'une matrice d'entrée [Pagès 03, Uang 04], qui permet d'avoir un système de référence commandable dont la matrice A_r n'est pas forcément stable, ce qui nécessite un retour d'état de référence dans la loi de commande utilisée pour assurer le suivi de trajectoire. Ce modèle s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r r(t) \\ y_r(t) = C_r x_r(t) \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

où $r(t)$ est une entrée, B_r et C_r sont des matrices de dimensions appropriées.

Un autre type de modèles de référence très adoptés pour les systèmes linéaires est un modèle linéaire autonome, dont la dynamique de la trajectoire désirée, est définie par les pôles de la matrice A_r et les conditions initiales $x_r(0)$. Ce modèle est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) \\ y_r(t) = C_r x_r(t) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Dans ce cas, la matrice A_r n'est pas forcément stable, ce qui peut entraîner des problèmes de faisabilité au niveau des calculs LMI [Wu 00].

II.2.2.3.2. Modèles non linéaires

On peut également adopter un modèle de référence non linéaire de type T-S, obtenu par un découpage des non linéarités dans un espace compact de l'espace d'état. Ce modèle est de la forme suivante [Taniguchi 99] :

$$\dot{x}_r(t) = \sum_{i=1}^l v_i(z_r(t)) D_i x_r(t) \quad (\text{II.5})$$

où l est le nombre de règles, v_i représentent les fonctions d'appartenance et $z_r(t)$ est la variable de prémisse. Dans ce type de modèle, les matrices D_i ne sont pas tous forcements stables.

Dans la suite de ce chapitre nous adoptons le modèle de référence de type linéaire (II.2) puisqu'il possède une plus grande souplesse pour générer la consigne désirée.

II.2.2.4. Loi de commande

La forme de la commande utilisée dans ces approches est similaire à celle d'une commande PDC (I.35), sauf que celle-ci est en fonction de l'état du système, mais aussi de l'état de référence autrement dit en fonction de l'erreur de poursuite. Dans le cas de la disponibilité de l'état du système le signal de commande est donné par :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i [x_r(t) - x(t)] \quad (\text{II.6})$$

Après avoir présenté la stratégie adoptée dans ce chapitre concernant la synthèse de commande pour assurer le suivi de trajectoire, dans la section qui suit, nous traitons un premier problème de poursuite et de relaxation LMI qui concerne les modèles T-S perturbés.

Dans le cas échéant, notre commande serait donc en fonction de l'état estimé du système

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i [x_r(t) - \hat{x}(t)] \quad (\text{II.7})$$

II.3. SYNTHÈSE DE COMMANDE AVEC OBSERVATEUR : APPROCHE H_∞

II.3.1. Commande basée sur l'approche H_∞

Soit le modèle T-S perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t) + \varphi(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) + v(t) \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

$\varphi(t)$ est une perturbation externe inconnue avec une borne supérieure $\varphi_{up} \geq \|\varphi(t)\|$ et $v(t)$ un bruit de mesure de la sortie. Comme tous les états ne sont pas disponibles, on considère l'observateur flou (II.1). Soit $e_o(t)$ l'erreur d'observation donnée par :

$$e_o(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (\text{II.9})$$

A partir des équations (II.1), (II.8) et (II.9), la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) [(A_i - L_i C_j) e_o(t) - L_i v(t)] + \varphi(t) \quad (\text{II.10})$$

Pour spécifier la trajectoire désirée, nous avons considéré le modèle de référence défini par (II.2). L'atténuation de l'effet des perturbations sera faite en considérant la performance H_∞ liée à l'erreur de poursuite $x_r(t) - x(t)$ définie comme suit [Chen 00, Golea 02, Tseng 01]:

$$\frac{\int_0^{t_f} \{ [x_r(t) - x(t)]^T Q [x_r(t) - x(t)] \} dt}{\int_0^{t_f} \{ r(t)^T r(t) + \varphi(t)^T \varphi(t) + v(t)^T v(t) \} dt} \leq \eta^2 \quad (\text{II.11})$$

ou bien

$$\int_0^{t_f} \{ [x_r(t) - x(t)]^T Q [x_r(t) - x(t)] \} dt \leq \eta^2 \int_0^{t_f} \{ r(t)^T r(t) + \varphi(t)^T \varphi(t) + v(t)^T v(t) \} dt \quad (\text{II.12})$$

où t_f représente le temps final, Q est une matrice symétrique définie positive, et η est le taux d'atténuation fixé. Nous considérons la loi de commande :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i [x_r(t) - \hat{x}(t)] \quad (\text{II.13})$$

Par conséquent à partir des dynamiques $e_o(t)$, $x(t)$ et $x_r(t)$ correspondant respectivement à l'erreur d'estimation, l'état du système et la variable de référence, nous pouvons définir le système augmenté suivant :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) [\tilde{G}_{ij} \tilde{x}(t) + \tilde{F}_i \tilde{\varphi}(t)] \quad (\text{II.14})$$

avec

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} e_o(t) \\ x(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - L_i C_j & 0 & 0 \\ -B_i K_j & A_i + B_i K_j & -B_i K_j \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{F}_i = \begin{bmatrix} -L_i & I & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

et $\tilde{\phi}(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \varphi(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$

Ainsi, en tenant compte des conditions initiales, le critère H_∞ relatif à l'erreur de poursuite en (II.12) peut être modifié comme suit :

$$\int_0^{t_f} \left\{ [x_r(t) - x(t)]^T Q [x_r(t) - x(t)] \right\} dt = \int_0^{t_f} \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) \leq \tilde{x}^T(0) P \tilde{x}(0) + \eta^2 \int_0^{t_f} \left\{ r(t)^T r(t) + \varphi(t)^T \varphi(t) + v(t)^T v(t) \right\} dt \quad (\text{II.16})$$

où $\tilde{x}(0)$ représente le vecteur des conditions initiales du système (II.14).

Notons aussi que $r(t)^T r(t) + \varphi(t)^T \varphi(t) + v(t)^T v(t) = \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t)$.

L'objectif maintenant est de déterminer les gains K_i et L_i pour le système augmenté (II.14) en garantissant la performance H_∞ (II.16) pour tout $\tilde{\phi}(t)$. La synthèse de commande consistera d'abord à atténuer au maximum l'effet des perturbations, ensuite à garantir la stabilité quadratique du système en boucle fermée (II.17) c'est-à-dire (II.14) sans $\tilde{\phi}(t)$ [Tseng 01].

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) [\tilde{G}_{ij} \tilde{x}(t)] \quad (\text{II.17})$$

Dans le but de réduire le nombre de conditions et d'avoir un résultat moins conservatif, l'idée est de reformuler le théorème établi dans [Tseng 01] en deux conditions, l'une pour les termes dominants et l'autre pour les termes croisés.

Théorème II.1

Pour $t > 0$ $h_i(z(t)) \times h_j(z(t)) \neq 0$,

S'il existe une matrice symétrique définie positive $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$ et une constante positive γ , tels que les conditions suivantes soient vérifiées.

$$\tilde{G}_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ii} + \gamma^{-1} \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} + \tilde{Q} < 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{II.18})$$

et

$$\left(\tilde{G}_{ij} + \tilde{G}_{ji}\right)^T \tilde{P} + \tilde{P}(\tilde{G}_{ij} + \tilde{G}_{ji}) + \gamma^{-1} \tilde{P}(\tilde{F}_i \tilde{F}_i^T + \tilde{F}_j \tilde{F}_j^T) \tilde{P} + 2\tilde{Q} < 0 \quad \text{pour } i < j \leq r \quad (\text{II.19})$$

Alors, le critère H_∞ (II.16) est garanti pour le système augmenté (II.14) pour une atténuation $\gamma = \eta^2$, et la stabilité quadratique du système en boucle fermée (II.17) est assurée.

Preuve

Considérons la fonction de Lyapunov candidate

$$V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}^T(t) \tilde{P} \tilde{x}(t) \quad \text{avec } \tilde{P} = \tilde{P}^T > 0 \quad (\text{II.20})$$

En dérivant (II.20) on a :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{\tilde{x}}^T(t) \tilde{P} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{P} \dot{\tilde{x}}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[\tilde{x}^T(t) (\tilde{G}_{ij}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ij}) \tilde{x}(t) + \tilde{\phi}^T(t) \tilde{F}_i^T \tilde{P} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{\phi}(t) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

En appliquant le lemme I.3 défini dans le chapitre I, on peut écrire que :

$$\tilde{\phi}^T(t) \tilde{F}_i^T \tilde{P} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{\phi}(t) \leq \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) + \gamma^{-1} \tilde{x}^T(t) \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} \tilde{x}(t)$$

L'inégalité (II.21) devient alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \tilde{x}^T(t) \left[\tilde{G}_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ii} \right] \tilde{x}(t) + \gamma^{-1} \tilde{x}^T(t) \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} \tilde{x}(t) + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \tilde{x}^T(t) \left[\tilde{G}_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ii} + \gamma^{-1} \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} \right] \tilde{x}(t) + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i^2(z(t)) \tilde{x}^T(t) \left[\tilde{G}_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ii} + \gamma^{-1} \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} \right] \tilde{x}(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \tilde{x}^T(t) \left[\begin{aligned} &\left(\tilde{G}_{ij} + \tilde{G}_{ji}\right)^T \tilde{P} + \tilde{P}(\tilde{G}_{ij} + \tilde{G}_{ji})_{ii} \\ &+ \gamma^{-1} \tilde{P}(\tilde{F}_i \tilde{F}_i^T + \tilde{F}_j \tilde{F}_j^T) \tilde{P} \end{aligned} \right] + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

D'après (II.18) et (II.19) du théorème II.1 on a

$$\dot{V}(t) \leq -\tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) \quad (\text{II.23})$$

Dans le cas où $\tilde{\phi}(t) = 0$, (II.23) signifie que $\dot{V}(t) \leq 0$, ce qui veut dire que le système (II.17) est quadratiquement stable. En intégrant (II.23) de $t = 0$ à $t = t_f$:

$$V(t_f) - V(0) \leq -\int_0^{t_f} \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) dt + \eta^2 \int_0^{t_f} \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) dt \quad (\text{II.24})$$

Le système étant stable, on obtient

$$\int_0^{t_f} \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) dt \leq \tilde{x}^T(0) \tilde{P} \tilde{x}(0) + \eta^2 \int_0^{t_f} \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) dt$$

Par conséquent la performance H_∞ (II.16) est assurée pour un niveau d'atténuation $\gamma = \eta^2$.

II.3.2. Conditions de relaxation

Un modèle exact ne l'est que dans un sous espace compact de l'espace d'état. De plus la limite d'un sous espace est liée à celle des grandeurs physiques du système. D'autre part, trouver un modèle exact pour n'importe quel système, n'est pas trivial, alors qu'il est toujours possible d'obtenir un modèle T-S par linéarisation en considérant des points de fonctionnement judicieusement choisis.

La méthode précédente montre que le problème de poursuite de trajectoire se réduit au problème de stabilisation du système flou augmenté (II.14) et consiste à trouver une matrice commune P entre toutes les règles. En effet, si le nombre de règles r est grand, il serait difficile de trouver une matrice P commune qui satisfait les conditions du théorème II.1. Par conséquent, il serait difficile de trouver des gains garantissant la stabilité du système avec une bonne atténuation des perturbations. Pour alléger ce problème, de nouvelles conditions moins conservatives seront données dans ce paragraphe pour assurer la stabilité du système (II.14) [Mansouri 09]. En effet, nous allons utiliser deux propriétés concernant le nombre maximal de règles actives à chaque instant. Ces propriétés sont explicitées dans les corollaires suivants :

Corollaire II.1 : Si s est le nombre maximal de règles actives à chaque instant t , où $1 < s \leq r$, alors [Tanaka 98a]

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \geq \frac{1}{s-1} \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} 2 h_i(z(t)) h_j(z(t)) \quad (\text{II.25})$$

Corollaire II.2 : Si s est le nombre maximal de règles actives à chaque instant t , où $1 < s \leq r$, alors [Tanaka 98a]

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \geq \frac{1}{s} \quad (\text{II.26})$$

Preuve

En employant la propriété suivante,

$$I = \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \right)^2 = \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} 2 h_i(z(t)) h_j(z(t))$$

et celle donnée en (II.25), nous obtenons

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) + (s-1) \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \geq 1 \text{ ce qui vérifie (II.26).}$$

Le résultat principal de cette partie, peut être donné par des conditions relaxées décrites dans le théorème suivant :

Théorème II.2 [Mansouri 05]

Pour $t > 0$ $h_i(z(t)) \times h_j(z(t)) \neq 0$,

S'il existe une matrice symétrique définie positive $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$, $M > 0$ et une constante positive γ , tels que les conditions suivantes soient vérifiées.

$$\tilde{G}_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ii} + \gamma^{-1} \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} + (s-1)M + s \tilde{Q} < 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{II.27})$$

et

$$(\tilde{G}_{ij} + \tilde{G}_{ji})^T \tilde{P} + \tilde{P} (\tilde{G}_{ij} + \tilde{G}_{ji}) + \gamma^{-1} \tilde{P} (\tilde{F}_i \tilde{F}_i^T + \tilde{F}_j \tilde{F}_j^T) \tilde{P} - 2M < 0 \quad \text{pour } i < j \leq r \quad (\text{II.28})$$

Alors, le critère H_∞ (II.16) est garantie pour le système augmenté (II.14) pour une atténuation $\gamma = \eta^2$, et la stabilité quadratique du système en boucle fermée (II.17) est assurée.

Preuve

On considère la même fonction de Lyapunov (II.20). Partant de (II.22) dans le théorème II.1 et en utilisant (II.28) du théorème II.2, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \tilde{x}^T(t) \left[\tilde{G}_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ii} + \gamma^{-1} \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} \right] \tilde{x}(t) \\ & + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \tilde{x}^T(t) [2M] x(t) + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) \end{aligned}$$

En utilisant le corollaire II.1, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \tilde{x}^T(t) \left[\tilde{G}_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ii} + \gamma^{-1} \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} \right] \tilde{x}(t) \\ & + \frac{(s-1)}{2} \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \tilde{x}^T(t) [2M] x(t) + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) \\ = & \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \tilde{x}^T(t) \left[\tilde{G}_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ii} + \gamma^{-1} \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} + (s-1)M \right] \tilde{x}(t) + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) \end{aligned}$$

Ensuite à partir de la condition (II.27) on a

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \tilde{x}^T(t) [s \tilde{Q}] \tilde{x}(t) + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t)$$

et en utilisant maintenant la propriété du corollaire II.2, nous avons

$$\dot{V}(t) \leq -\tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t)$$

De la même façon que le théorème I.2 on peut alors garantir le critère H_∞ (II.16) avec un taux d'atténuation $\gamma = \eta^2$. Par conséquent, la stabilité quadratique du système (II.17) est assurée.

Remarque II.1

Pour une meilleure performance de poursuite, les conditions du théorème II.1 (Resp : théorème II.2) peuvent être formulées comme un problème de minimisation, de telle sorte que le taux d'atténuation du critère H_∞ soit le plus réduit possible.

$$\begin{aligned} & \min_{\tilde{P}} \eta^2 \\ & \text{(Resp: } \tilde{P}, \tilde{M}) \\ & \text{Sous les contraintes } \tilde{P} = \tilde{P}^T > 0, \text{ (II.18) et (II.19),} \\ & \text{(Resp: } \tilde{P} = \tilde{P}^T > 0, \text{ (II.27) et (II.28))} \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

Remarque II.2

Les résultats du théorème II.2 se basent sur le nombre de règles maximales actives à chaque instant. Par conséquent, cette notion trouve son importance en particulier pour les modèles T-S obtenus par linéarisation. En revanche, quand il s'agit de modèles T-S obtenus par découpage des non linéarités, dans un espace compact dans l'espace d'état, hormis quelques points particuliers de l'espace l'ensemble règles sont toujours actives.

II.3.3. Exploitation numérique des résultats

Les conditions montrées dans le théorème II.1 et II.2, présentent des conditions BMI. Dans la suite, nous proposons une méthode qui consiste à résoudre ce problème BMI en deux étapes dont chacune est un problème LMI [Mansouri 09]. Ainsi, ces LMI peuvent être résolues efficacement par les techniques d'optimisations convexes [Gahinet 95]. Dans ce paragraphe, nous nous limiterons à résoudre les conditions du théorème II.2. Celles du théorème II.1 peuvent être résolues d'une manière semblable.

Pour pouvoir exprimer un problème LMI, on considère

$$\tilde{P} = \text{diag} [P_1 \quad P_2 \quad P_3] \quad \text{et} \quad M = \text{diag} [M_1 \quad M_2 \quad M_3] \quad (\text{II.30})$$

En prenant $\gamma = \eta^2$ et en substituant (II.30) dans (II.27) et (II.28), les conditions du théorème.II.2 deviennent respectivement :

$$\begin{bmatrix} TI_{11} & TI_{12} & 0 \\ TI_{21} & TI_{22} & TI_{23} \\ 0 & TI_{32} & TI_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{II.31})$$

et

$$\begin{bmatrix} TJ_{11} & TJ_{12} & 0 \\ TJ_{21} & TJ_{22} & TJ_{23} \\ 0 & TJ_{32} & TJ_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i < j \leq r \quad (\text{II.32})$$

où

$$TI_{11} = (A_i - L_i C_j)^T P_1 + P_1 (A_i - L_i C_j) + \frac{1}{\eta^2} P_1 (L_i L_i^T + I) P_1 + (s-1) M_1$$

$$TI_{12} = TI_{21}^T = -(B_i K_j)^T P_2 + \frac{1}{\eta^2} P_1 P_2$$

$$TI_{22} = (A_i + B_i K_j)^T P_2 + P_2 (A_i + B_i K_j) + \frac{1}{\eta^2} P_2 P_2 + (s-1) M_2 + s Q$$

$$TI_{23} = TI_{32}^T = -P_2 (B_i K_j) - s Q$$

$$TI_{33} = A_r^T P_3 + P_3 A_r + \frac{1}{\eta^2} P_3 P_3 + (s-1) M_3 + s Q$$

et

$$TJ_{11} = (A_i - L_i C_j)^T P_1 + P_1 (A_i - L_i C_j) + (A_j - L_j C_i)^T P_1 + P_1 (A_j - L_j C_i) \\ + \frac{1}{\eta^2} P_1 (L_i L_i^T + L_j L_j^T + 2I) - 2 M_1$$

$$TJ_{12} = TJ_{21}^T = -(B_i K_j)^T P_2 - (B_j K_i)^T P_2 + \frac{2}{\eta^2} P_1 P_2$$

$$TJ_{22} = (A_i + B_i K_j)^T P_2 + P_2 (A_i + B_i K_j) + (A_j + B_j K_i)^T P_2 + P_2 (A_j + B_j K_i) + \frac{2}{\eta^2} P_2 P_2 - 2 M_2$$

$$TJ_{23} = TJ_{32}^T = -P_2 (B_i K_j) - P_2 (B_j K_i)$$

$$TJ_{33} = 2 \left(A_r^T P_3 + P_3 A_r + \frac{1}{\eta^2} P_3 P_3 - M_3 \right)$$

A partir de (II.31) et (II.32), on constate des termes qui sont non LMI, notamment dans les blocs diagonaux. Pour les éliminer, on considère le changement de variable bijectif $Z_i = P_1 L_i$.

En appliquant le complément de Schur, (II.31) et (II.32) deviennent respectivement :

$$\begin{bmatrix} D_{11} & P_1 & Z_i & D_{14} & 0 & 0 \\ P_1 & -\eta^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_i^T & 0 & -\eta^2 I & 0 & 0 & 0 \\ D_{14}^T & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{45}^T & D_{55} & P_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_3 & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i < j \leq r \quad (\text{II.33})$$

et

$$\begin{bmatrix} E_{11} & P_1 & Z_i & Z_j & E_{15} & 0 & 0 \\ P_1 & -\frac{\eta^2}{2} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_i^T & 0 & -\eta^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_j^T & 0 & 0 & -\eta^2 I & 0 & 0 & 0 \\ E_{15}^T & 0 & 0 & 0 & E_{55} & E_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{56}^T & E_{66} & P_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_3 & -\frac{\eta^2}{2} I \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i < j \leq r \quad (\text{II.34})$$

où

$$D_{11} = A_i^T P_1 + P_1 A_i - C_i^T Z_i^T - Z_i C_i + (s-1) M_1$$

$$D_{14} = -(B_i K_i)^T P_2 + \frac{1}{\eta^2} P_1 P_2$$

$$D_{44} = (A_i + B_i K_j)^T P_2 + P_2 (A_i + B_i K_j) + \frac{1}{\eta^2} P_2 P_2 + (s-1) M_2 + s Q$$

$$D_{45} = -(B_i K_j) - s Q$$

$$D_{55} = A_r^T P_3 + P_3 A_r + (s-1) M_3 + s Q$$

et

$$E_{11} = A_i^T P_1 + P_1 A_i - C_j^T Z_i^T - Z_i C_j + A_j^T P_1 + P_1 A_j - C_i^T Z_j^T - Z_j C_i - 2 M_1$$

$$E_{15} = -(B_i K_j)^T P_2 - (B_j K_i)^T P_2 + \frac{2}{\eta^2} P_1 P_2$$

$$E_{55} = (A_i + B_i K_j)^T P_2 + P_2 (A_i + B_i K_j) + (A_j + B_j K_i)^T P_2 + P_2 (A_j + B_j K_i) + \frac{2}{\eta^2} P_2 P_2 - 2 M_2$$

$$E_{56} = -P_2 (B_i K_j) - P_2 (B_j K_i)$$

$$E_{66} = 2(A_r^T P_3 + P_3 A_r - M_3)$$

Pour résoudre les inégalités (II.33) et (II.34), on procédera en deux étapes dont chacune consiste à résoudre une LMI. Tout d'abord, il s'agit de trouver P_2, K_i, M_2 à partir des blocs diagonaux D_{44} et E_{55} ensuite P_1, P_3, M_1, M_3 et L_i à partir des inégalités (II.33) et (II.34) comme expliqué ci dessous :

D'abord, notons que (II.33) et (II.34) impliquent respectivement :

$$D_{44} = (A_i + B_i K_j)^T P_2 + P_2 (A_i + B_i K_j) + \frac{1}{\eta^2} P_2 P_2 + (s-1) M_2 + s Q < 0 \quad \text{pour } i < j \leq r \quad (\text{II.35})$$

et

$$E_{55} = (A_i + B_i K_j)^T P_2 + P_2 (A_i + B_i K_j) + (A_j + B_j K_i)^T P_2 + P_2 (A_j + B_j K_i) + \frac{2}{\eta^2} P_2 P_2 - 2 M_2 \quad \text{pour } i < j \leq r \quad (\text{II.36})$$

En effectuant une congruence de (II.35) et (II.36) avec P_2^{-1} et avec les changements de variables bijectifs $N_2 = P_2^{-1}$, $Y_i = K_i N_2$, et $X_2 = N_2 M_2 N_2$, et le complément de Schur, (II.35) et (II.36) sont respectivement équivalents à :

$$\begin{bmatrix} N_2 A_i^T + A_i N_2 + B_i Y_i + (B_i Y_i)^T + \frac{1}{\eta^2} I + (s-1) X_2 & N_2 \\ N_2 & -Q^{-1}/s \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{II.37})$$

et

$$N_2 A_i^T + A_i N_2 + B_i Y_j + (B_i Y_j)^T + N_2 A_j^T + A_j N_2 + B_j Y_i + (B_j Y_i)^T + \frac{2}{\eta^2} I - 2 X_2 < 0 \quad (\text{II.38})$$

pour $i < j \leq r$

Les variables N_2, Y_i et X_2 , $P_2 = N_2^{-1}$ et $K_i = Y_i N_2^{-1}$, $M_2 = N_2^{-1} X_2 N_2^{-1}$ sont obtenues en résolvant les LMI (II.37) et (II.38).

Dans une seconde étape, on substitue P_2, M_2 et K_i dans (II.33) et (II.34) puis on résoud la nouvelle LMI obtenu en P_1, P_3, M_1, M_3 et L_i ($L_i = P_1^{-1} Z_i$). Alors, s'il existe des matrices définies positives P_1, P_2, P_3, M_1, M_2 et M_3 telles que (II.33) et (II.34) sont vérifiées, le critère H_∞ (II.16) est assuré pour le système augmenté (II.14) pour une atténuation $\gamma = \eta^2$, et la stabilité quadratique du système en boucle fermée (II.17) est garantie.

II.3.4. Exemple et simulation

Pour illustrer les résultats de relaxation obtenue dans (II.27) et (II.28), considérons à titre d'exemple le problème de poursuite d'un bras de Robot à deux degrés de liberté (Figure II.2). [Tseng 01]

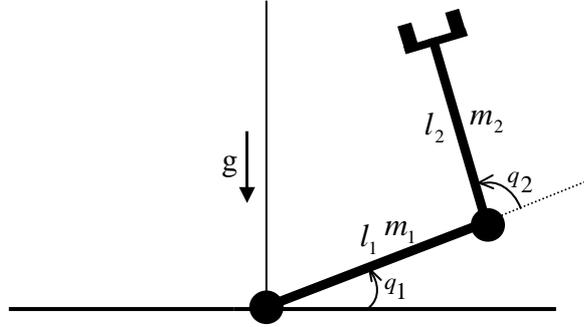


Figure II.2. Bras de robot à deux degré de liberté.

L'équation dynamique de système est donnée par :

$$M(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + G(q) = \tau \quad (\text{II.39})$$

avec :

$$M(q) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2) \\ m_2 l_1 l_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_2 (c_1 s_2 - s_1 c_2) \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_2 \\ -\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, G(q) = \begin{bmatrix} -(m_1 + m_2)l_1 g s_1 \\ -m_2 l_2 g s_2 \end{bmatrix}$$

où $q = [q_1 \quad q_2]^T$, avec q_1, q_2 sont les coordonnées généralisées, $M(q)$ est le moment d'inertie, $C(q, \dot{q})$ comporte les forces centripètes de Coriolis, et $G(q)$ est la force de gravitation. Les autres quantités sont : les masses des deux bras m_1, m_2 (kg), les longueurs des bras l_1, l_2 (m), les positions angulaires q_1, q_2 (rad), le moment de torsion appliqué $\tau = [\tau_1, \tau_2]^T$ (N.m), l'accélération de gravité $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, et la notation :

$$s_1 = \sin(q_1), s_2 = \sin(q_2), c_1 = \cos(q_1), c_2 = \cos(q_2).$$

On prend : $x_1 = q_1, x_2 = \dot{q}_1, x_3 = q_2, x_4 = \dot{q}_2$, donc l'équation dynamique du bras peut s'écrire sous forme d'un système d'équation d'état avec les perturbations externes et les bruits de mesure :

$$\begin{cases}
\dot{x}_1(t) = x_2(t) + \varphi_1(t) \\
\dot{x}_2(t) = f_1(x) + g_{11}(x) \tau_1 + g_{12}(x) \tau_2 + \varphi_2(t) \\
\dot{x}_3(t) = x_4(t) + \varphi_3(t) \\
\dot{x}_4(t) = f_2(x) + g_{21}(x) \tau_1 + g_{22}(x) \tau_2 + \varphi_4(t) \\
y_1(t) = x_1(t) + v_1 \\
y_2(t) = x_3(t) + v_2
\end{cases} \quad (\text{II.40})$$

où $\varphi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \varphi_4(t)]$ est le vecteur des perturbations externes, $v(t) = [v_1(t), v_2(t)]$,

le vecteur de bruits de mesure de la sortie $y(t) = [y_1(t), y_2(t)]$. avec

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{(s_1 c_2 - c_1 s_2)}{l_1 l_2 \left\{ (m_1 + m_2) - m_2 (s_1 c_2 - c_1 s_2)^2 \right\} \times \left\{ m_2 l_1 l_2 (s_1 c_2 + c_1 s_2) x_2^2 - m_2 l_2^2 x_4^2 \right\}} + \\
&\quad \frac{1}{l_1 l_2 \left\{ (m_1 + m_2) - m_2 (s_1 c_2 + c_1 s_2)^2 \right\} \times \left\{ (m_1 + m_2) l_2 g s_1 - m_2 l_2 g s_2 (s_1 c_2 + c_1 s_2) \right\}} \\
f_2(x) &= \frac{(s_1 c_2 - c_1 s_2)}{l_1 l_2 \left\{ (m_1 + m_2) - m_2 (s_1 c_2 - c_1 s_2)^2 \right\} \times \left\{ -(m_1 + m_2) l_1^2 x_2^2 + m_2 l_1 l_2 (s_1 c_2 + c_1 s_2) x_4^2 \right\}} + \\
&\quad \frac{1}{l_1 l_2 \left\{ (m_1 + m_2) - m_2 (s_1 c_2 + c_1 s_2)^2 \right\} \times \left\{ -(m_1 + m_2) l_2 g s_1 (s_1 c_2 + c_1 s_2) + (m_1 + m_2) l_1 g s_2 \right\}} \\
g_{11}(x) &= \frac{m_2 l_2^2}{m_2 l_1^2 l_2^2 \left\{ (m_1 + m_2) - m_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)^2 \right\}}, \quad g_{12}(x) = \frac{-m_2 l_1 l_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)}{m_2 l_1^2 l_2^2 \left\{ (m_1 + m_2) - m_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)^2 \right\}} \\
g_{21}(x) &= \frac{-m_2 l_1 l_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)}{m_2 l_1^2 l_2^2 \left\{ (m_1 + m_2) - m_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)^2 \right\}}, \quad g_{22}(x) = \frac{(m_1 + m_2) l_1^2}{m_2 l_1^2 l_2^2 \left\{ (m_1 + m_2) - m_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)^2 \right\}}
\end{aligned}$$

La commande floue en poursuite sera développée selon les étapes suivantes:

Etape 1

Pour utiliser l'approche par commande floue, on doit avoir un modèle flou qui représente la dynamique du système non linéaire (bras de robot avec deux degrés de liberté). On suppose que x_1 et x_2 sont mesurables. Avec $m_1 = 1(kg)$, $m_2 = 1(kg)$ et $l_1 = 1(m)$, $l_2 = 1(m)$, les positions angulaires $q_1, q_2 \in [-(\pi/2), (\pi/2)]$ et les perturbations externes :

$$\varphi_1(t) = 0.1 \times \sin(2t), \quad \varphi_2(t) = 0.1 \times \cos(2t), \quad \varphi_3(t) = 0.1 \times \cos(2t), \quad \varphi_4(t) = 0.1 \times \sin(2t).$$

Dans le but que nous avons détaillé dans la section (II.3.2) concernant le relâchement des conditions de stabilité pour les systèmes non linéaires, on utilise un nombre de règles réduit pour la modélisation de bras du robot à deux degrés de liberté. Le modèle flou de T-S de système (II.40) est donné par les 9 règles floues suivantes [Tseng 01] :

Règle1 :

$$\text{Si } x_1 \text{ est proche de } -\pi/2 \text{ et } x_3 \text{ est proche de } \pi/2 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t) + \varphi(t) \\ y(t) = C_1 x(t) + v \end{cases}$$

Règle2 :

$$\text{Si } x_1 \text{ est proche de } -\pi/2 \text{ et } x_3 \text{ est proche de } 0 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t) + \varphi(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + v \end{cases}$$

Règle3 :

$$\text{Si } x_1 \text{ est proche de } -\pi/2 \text{ et } x_3 \text{ est proche de } \pi/2 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_3 x(t) + B_3 u(t) + \varphi(t) \\ y(t) = C_3 x(t) + v \end{cases}$$

Règle4 :

$$\text{Si } x_1 \text{ est proche de } 0 \text{ et } x_3 \text{ est proche de } -\pi/2 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_4 x(t) + B_4 u(t) + \varphi(t) \\ y(t) = C_4 x(t) + v \end{cases}$$

Règle5 :

$$\text{Si } x_1 \text{ est proche de } 0 \text{ et } x_3 \text{ est proche de } 0 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_5 x(t) + B_5 u(t) + \varphi(t) \\ y(t) = C_5 x(t) + v \end{cases}$$

Règle6 :

$$\text{Si } x_1 \text{ est proche de } 0 \text{ et } x_3 \text{ est proche de } \pi/2 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_6 x(t) + B_6 u(t) + \varphi(t) \\ y(t) = C_6 x(t) + v \end{cases}$$

Règle7 :

$$\text{Si } x_1 \text{ est proche de } \pi/2 \text{ et } x_3 \text{ est proche de } -\pi/2 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_7 x(t) + B_7 u(t) + \varphi(t) \\ y(t) = C_7 x(t) + v \end{cases}$$

Règle8 :

$$\text{Si } x_1 \text{ est proche de } \pi/2 \text{ et } x_3 \text{ est proche de } 0 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_8 x(t) + B_8 u(t) + \varphi(t) \\ y(t) = C_8 x(t) + v \end{cases}$$

Règle9 :

$$\text{Si } x_1 \text{ est proche de } \pi/2 \text{ et } x_3 \text{ est proche de } \pi/2 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_9 x(t) + B_9 u(t) + \varphi(t) \\ y(t) = C_9 x(t) + v \end{cases}$$

où $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)]^T$, $u(t) = [\tau_1, \tau_2]^T$, $\varphi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \varphi_4(t)]^T$

$v = [v_1, v_2]^T$.

et

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5,927 & -0,001 & -0,315 & -8,4 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6,859 & 0,002 & 3,155 & 6,20 \times 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3,0428 & -0,0011 & 0,1791 & -0,0002 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3,5436 & 0,0313 & 2,5611 & 1,14 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6,2728 & 0,0030 & 0,4339 & -0,0001 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9,1041 & 0,0158 & -1,0574 & -3,2 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6,4535 & 0,0017 & 1,2427 & 0,0002 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3,1873 & -0,0306 & 5,1911 & -1,8 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11,1336 & 0,0 & -1,8145 & 0,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9,0918 & 0,0 & 9,1638 & 0,0 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6,1702 & -0,0010 & 1,6870 & -0,0002 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2,3559 & 0,0314 & 4,5298 & 1,1 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6,1206 & -0,0041 & -0,6205 & 0,0001 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8,8794 & -0,0193 & -1,0119 & 4,4 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3,6421 & 0,0018 & 0,0721 & 0,0002 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2,4290 & -0,0305 & 2,9832 & -1,9 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$A_9 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6,2933 & 0,0009 & -0,2188 & -1,2 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -7,4649 & 0,0024 & 3,2693 & 9,2 \times 10^{-6} \end{bmatrix}.$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ pour } i = 1, \dots, 9.$$

Le modèle de référence (II.2) pour le système robot est donné par :

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \end{bmatrix} \text{ et } r_1(t) = 0, \quad r_2(t) = 8 \times \sin(t), \quad r_3(t) = 0, \quad r_4(t) = 8 \times \cos(t).$$

Les fonctions d'appartenance sont de type triangulaire pour les 9 règles floues [Tseng 01].

Etape 2

Résoudre le problème LMI en utilisant l'outil « *LMI Optimization Toolbox* » de MATLAB.

Dans ce cas la matrice $P = \text{diag} [P_1 \ P_2 \ P_3]$, avec :

$$N_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1,0736 & -1,3128 & 0,2581 & -0,1841 \\ -1,3128 & 2,4307 & -0,3203 & 0,2324 \\ 0,2581 & -0,3203 & 1,5818 & -1,7359 \\ -0,1841 & 0,2324 & -1,7359 & 2,7987 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1,2151 & -0,4594 & 0,1073 & -0,0639 \\ -0,4594 & 0,1751 & -0,0420 & 0,0252 \\ 0,1073 & -0,0420 & 0,2276 & -0,0727 \\ -0,0639 & 0,0252 & -0,0727 & 0,0260 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = N_2^{-1} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0,2790 & 0,1481 & -0,0278 & -0,0112 \\ 0,1481 & 0,1212 & 0,0001 & -0,0003 \\ -0,0278 & 0,0001 & 0,2059 & 0,1259 \\ -0,0112 & -0,0003 & 0,1259 & 0,1131 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 3,3579 & 2,0655 & -0,0000 & -0,0000 \\ 2,0655 & 1,8920 & -0,0000 & 0,0001 \\ -0,0000 & -0,0000 & 3,3578 & 2,0654 \\ -0,0000 & 0,0001 & 2,0654 & 1,8922 \end{bmatrix}.$$

Etape 3

Calculer les gains de contrôleur K_i et d'observateur L_i . $i = 1, 2, \dots, 9$.

$$K_1 = \begin{bmatrix} -26,1347 & -15,1944 & -15,6599 & -10,9409 \\ -8,6288 & -7,1588 & -14,3062 & -9,2781 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -27,1197 & -14,1080 & -4,1746 & -3,5942 \\ -4,2014 & -1,4173 & -11,4314 & -7,0168 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -23,1660 & -12,7592 & -1,2484 & -0,9061 \\ 7,6299 & 6,4425 & -3,1423 & -2,9720 \end{bmatrix},$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -25,5502 & -11,2588 & -12,8669 & -8,6982 \\ 4,1506 & 1,6042 & -15,4755 & -8,5419 \end{bmatrix},$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -33,7409 & -14,7846 & -19,5172 & -11,7034 \\ -11,0662 & -6,7489 & -19,2391 & -9,6598 \end{bmatrix},$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -25,1483 & -10,9097 & -14,1135 & -9,5475 \\ 4,0287 & 1,8883 & -15,2438 & -8,6807 \end{bmatrix},$$

$$K_7 = \begin{bmatrix} -23,4925 & -13,1122 & -1,8856 & -1,2884 \\ 8,1231 & 6,8041 & -2,9108 & -2,8191 \end{bmatrix},$$

$$K_8 = \begin{bmatrix} -27,4941 & -13,7811 & -4,4994 & -3,8663 \\ -3,5724 & -1,5280 & -11,5674 & -6,8683 \end{bmatrix},$$

$$K_9 = \begin{bmatrix} -18,4204 & -8,4454 & -6,1148 & -4,2792 \\ -4,1805 & -3,3803 & -7,4889 & -4,3940 \end{bmatrix}.$$

et

$$\begin{aligned} L_1 &= \begin{bmatrix} 109,2692 & -19,7570 \\ 291,8167 & -62,6435 \\ -19,7570 & 56,1052 \\ -68,9849 & 168,7954 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 109,2692 & -19,7570 \\ 291,8167 & -62,6435 \\ -19,7570 & 56,1052 \\ -68,9849 & 168,7954 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 109,2692 & -19,7570 \\ 291,8167 & -62,6435 \\ -19,7570 & 56,1052 \\ -68,9849 & 168,7954 \end{bmatrix} \\ L_4 &= \begin{bmatrix} 109,2692 & -19,7570 \\ 291,8167 & -62,6435 \\ -19,7570 & 56,1052 \\ -68,9849 & 168,7954 \end{bmatrix}, L_5 = \begin{bmatrix} 109,2692 & -19,7570 \\ 291,8167 & -62,6435 \\ -19,7570 & 56,1052 \\ -68,9849 & 168,7954 \end{bmatrix}, L_6 = \begin{bmatrix} 109,2692 & -19,7570 \\ 291,8167 & -62,6435 \\ -19,7570 & 56,1052 \\ -68,9849 & 168,7954 \end{bmatrix} \\ L_7 &= \begin{bmatrix} 109,2692 & -19,7570 \\ 291,8167 & -62,6435 \\ -19,7570 & 56,1052 \\ -68,9849 & 168,7954 \end{bmatrix}, L_8 = \begin{bmatrix} 109,2692 & -19,7570 \\ 291,8167 & -62,6435 \\ -19,7570 & 56,1052 \\ -68,9849 & 168,7954 \end{bmatrix}, L_9 = \begin{bmatrix} 109,2692 & -19,7570 \\ 291,8167 & -62,6435 \\ -19,7570 & 56,1052 \\ -68,9849 & 168,7954 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0,0717 & -0,0237 & 0,0074 & -0,0032 \\ -0,0237 & 0,0090 & -0,0015 & 0,0013 \\ 0,0074 & -0,0015 & 0,0177 & -0,0025 \\ -0,0032 & 0,0013 & -0,0025 & 0,0018 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0,2013 & 0,1185 & -0,0298 & -0,0159 \\ 0,1185 & 0,0732 & -0,0083 & -0,0013 \\ -0,0298 & -0,0083 & 0,1180 & 0,0809 \\ -0,0032 & -0,0034 & 0,0809 & 0,0575 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0,2261 & 0,1830 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,1830 & 0,1699 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,2262 & 0,1830 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,1830 & 0,1699 \end{bmatrix}.$$

Les résultats des figures (II.3 – II.10) illustrent les simulations effectuées pour une poursuite de trajectoire sinusoïdale d'un bras de robots à deux degrés de liberté sans présence des perturbations externes.

On constate que les performances de poursuite sont assurées ainsi que la convergence de l'observateur. La figure (II.3a) présente la poursuite en position du joint 1 entre 0 et 10 secondes. La figure (II.3b) montre la convergence des états estimés vers les états réels. La figure II.4a présente la poursuite en vitesse du joint 1 entre 0 et 10 secondes. La figure (II.4b) montre la convergence des états estimés vers les états réels. La figure II.5a présente la poursuite en position du joint 2 entre 0 et 10 secondes. La figure (II.5b) montre la convergence des états estimés vers les états réels. La figure (II.6a) présente la poursuite en vitesse du joint 2 entre 0 et 10 secondes. La figure (II.6b) montre la convergence des états estimés vers les états réels.

Nous constatons également que les performances de poursuite sont bien satisfaites. L'approche LMI directe permet ainsi de procurer des gains plus performants.

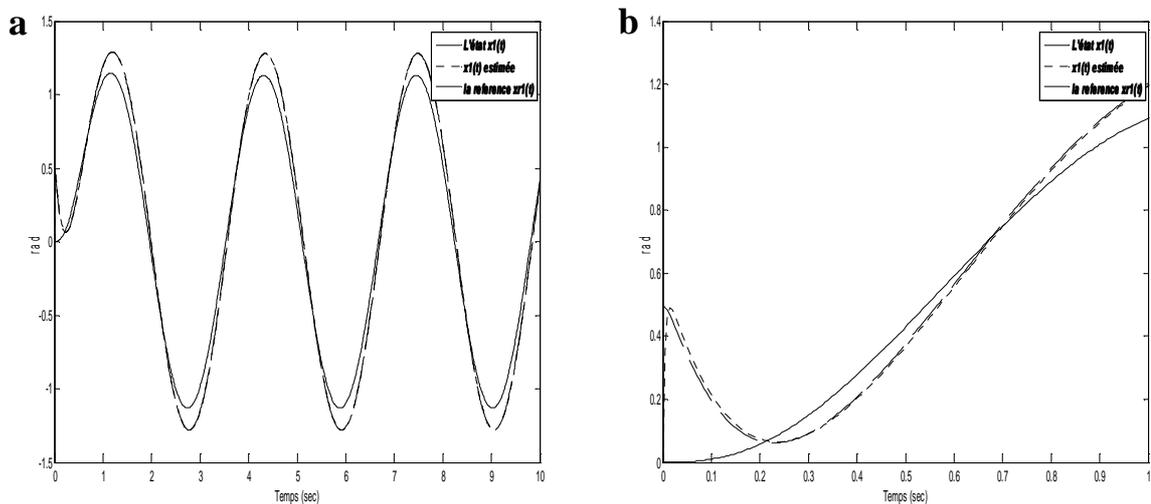


Figure II.3 : Poursuite en position du joint 1 : (a) entre 0 et 10 s, (b) entre 0 et 1 s.

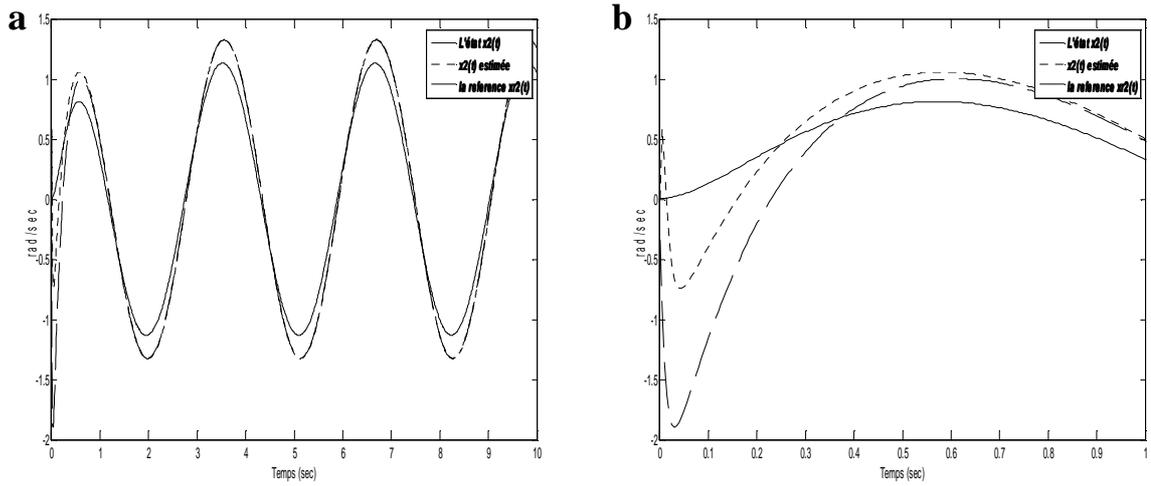


Figure II.4 : Poursuite en vitesse du joint 1 : (a) entre 0 et 10 s, (b) entre 0 et 1 s.

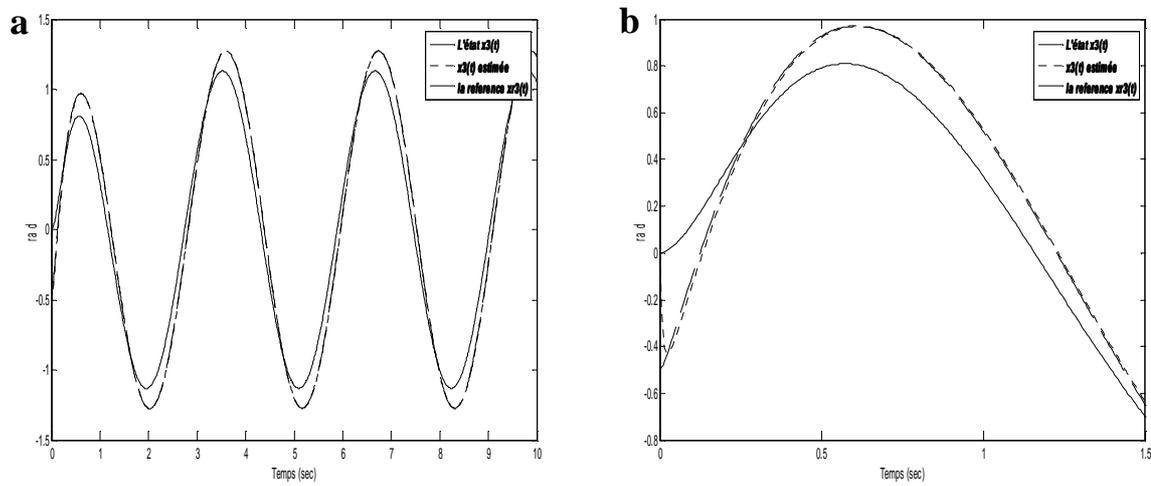


Figure II.5 : Poursuite en position du joint 2 : (a) entre 0 et 10 s, (b) entre 0 et 1,5 s.

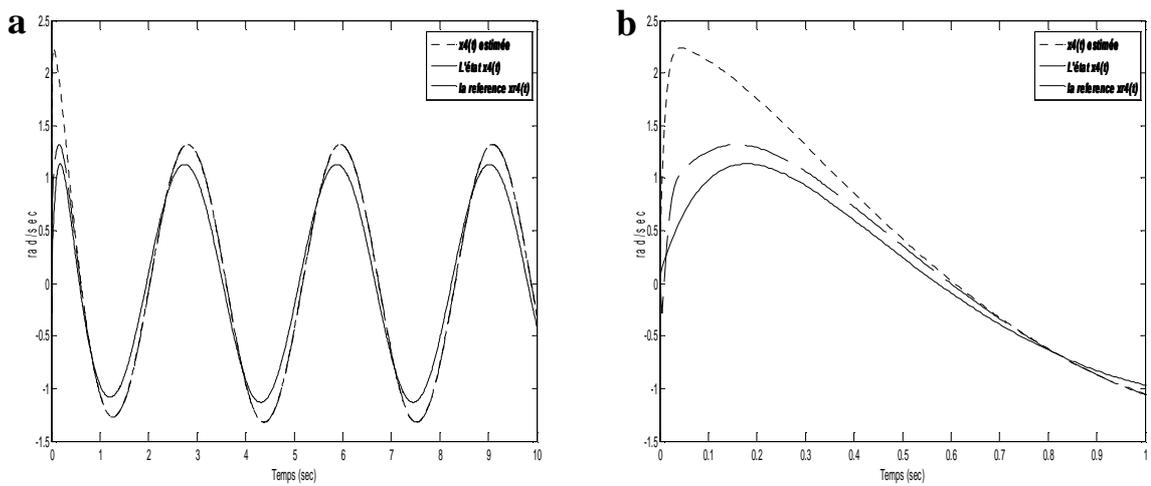


Figure II.6 : Poursuite en vitesse du joint 2 : (a) entre 0 et 10 s, (b) entre 0 et 1 s.

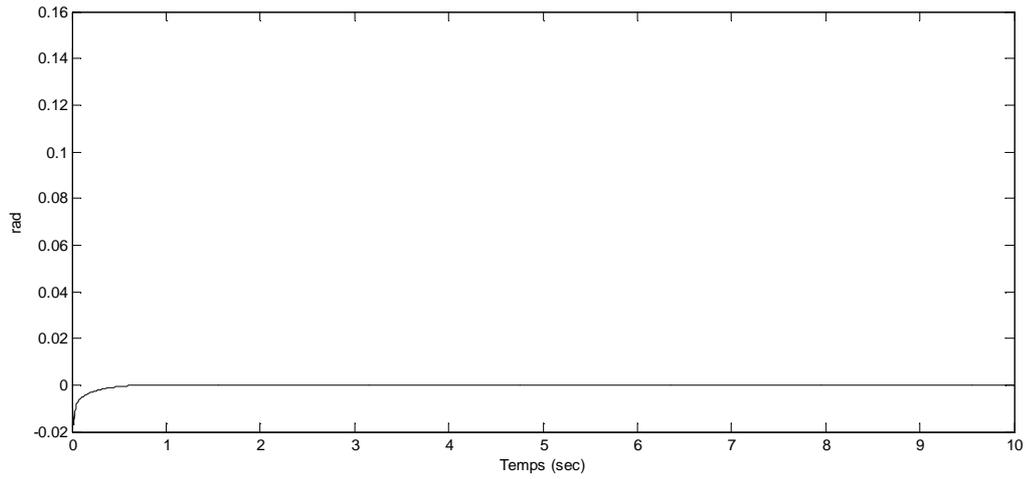


Figure II.7 : Erreur d'estimation de position du joint 1.

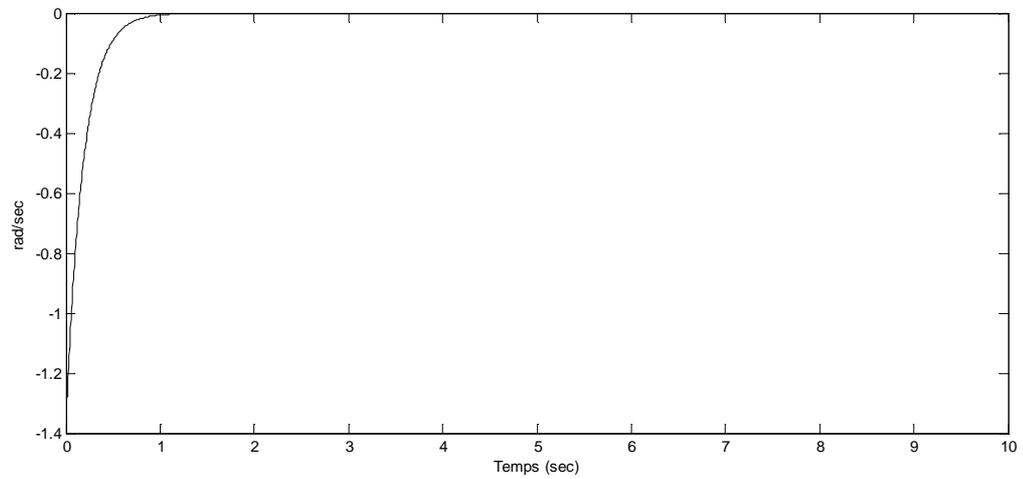


Figure II.8 : Erreur d'estimation de vitesse du joint 1.

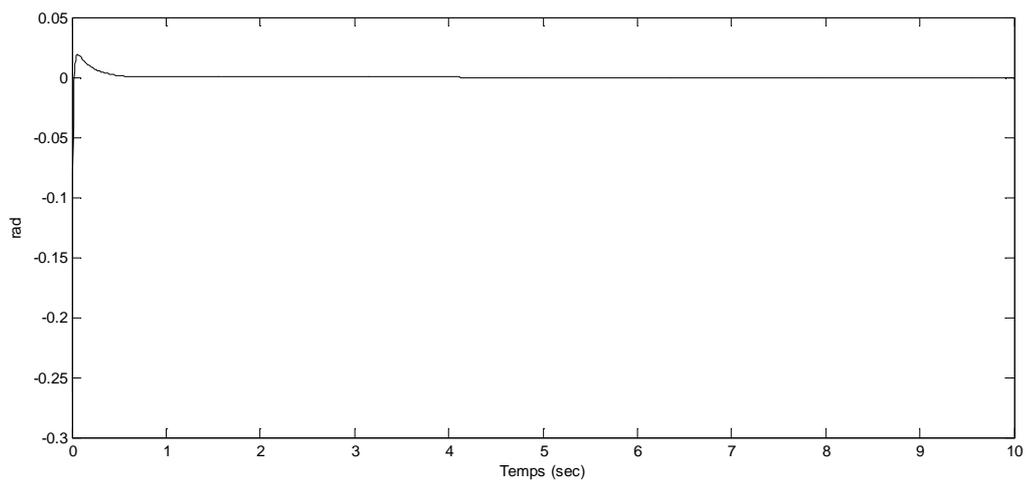


Figure II.9 : Erreur d'estimation de position du joint 2.

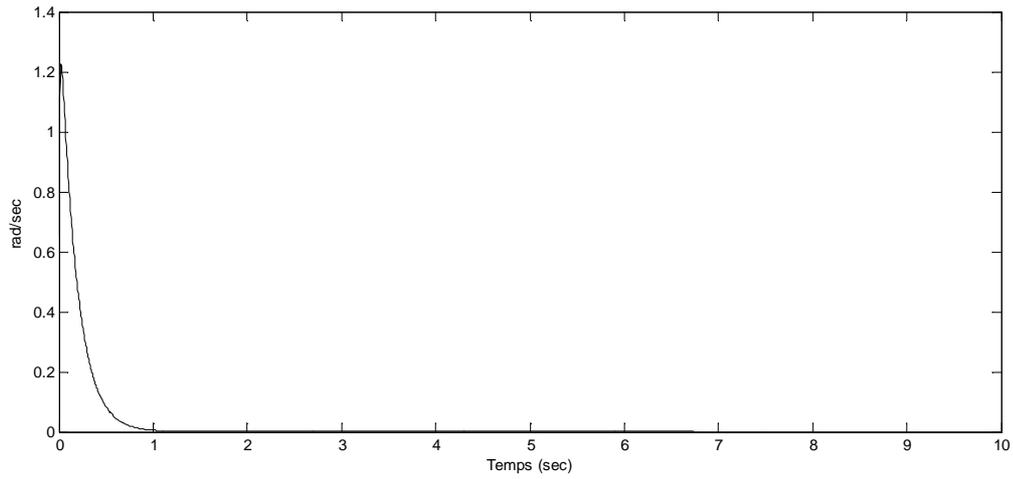


Figure II.10 : Erreur d'estimation de vitesse du joint 2

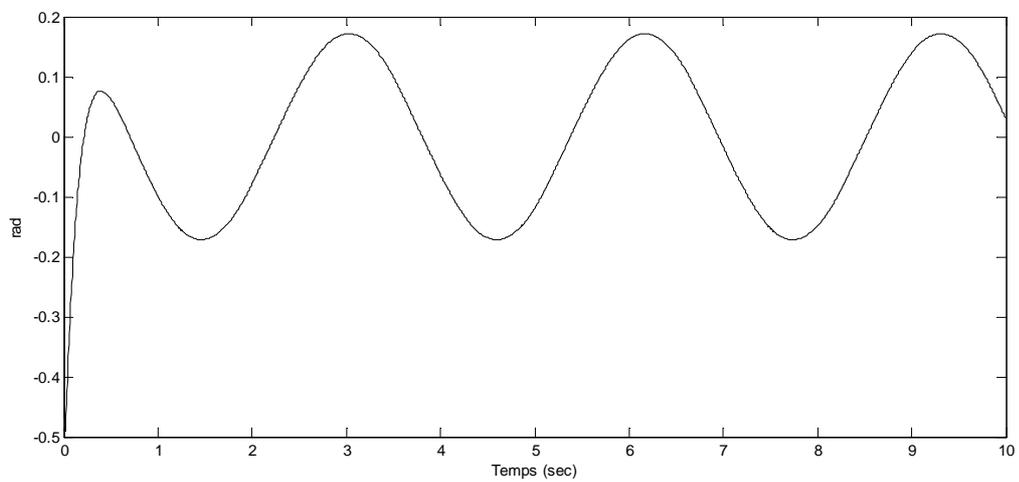


Figure II.11 : Erreur de poursuite en position pour Joint 1.

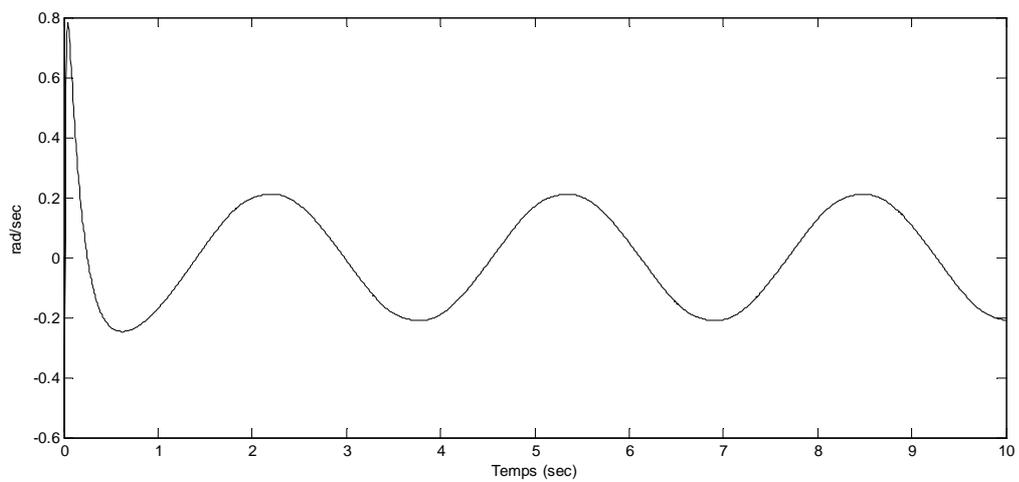


Figure II.12 : Erreur de poursuite en vitesse pour Joint 1.

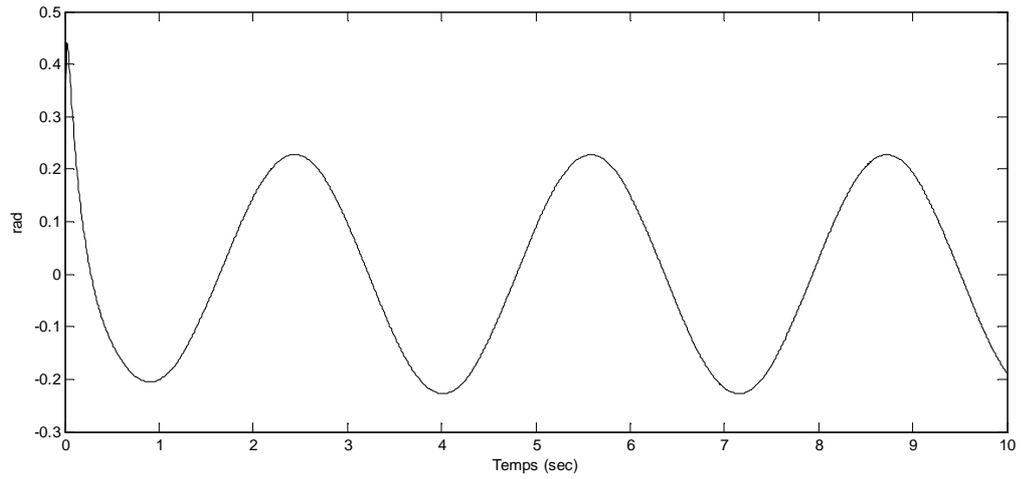


Figure II.13 : Erreur de poursuite en position pour Joint 2.

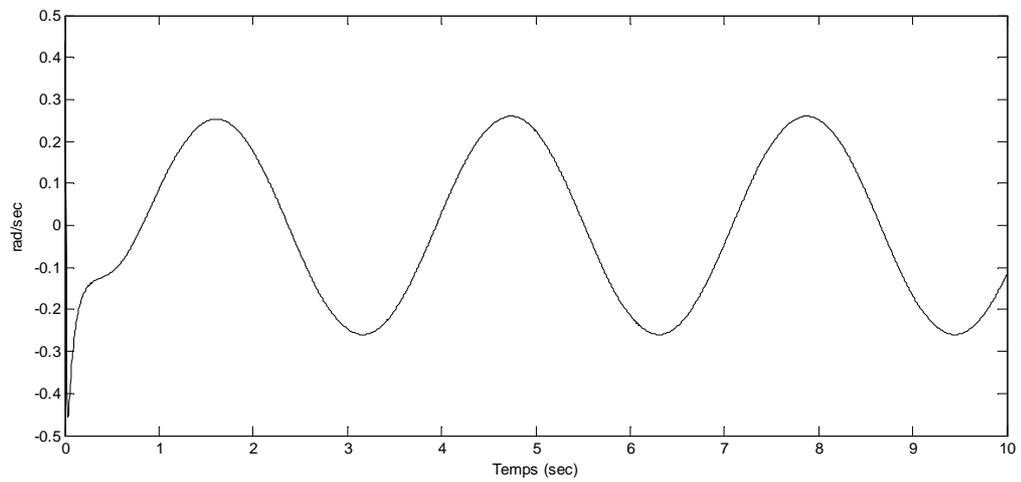


Figure II.14 : Erreur de poursuite en vitesse pour Joint 2.

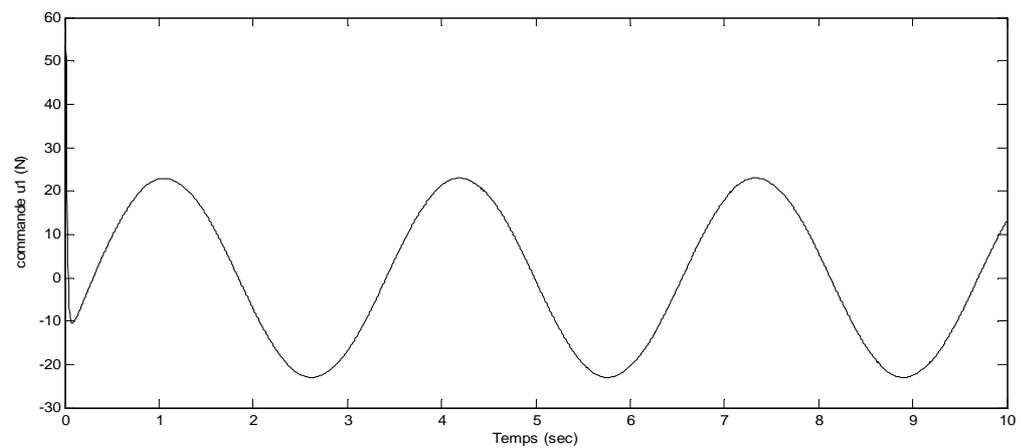


Figure II.15 : Commande appliquée au joint 1.

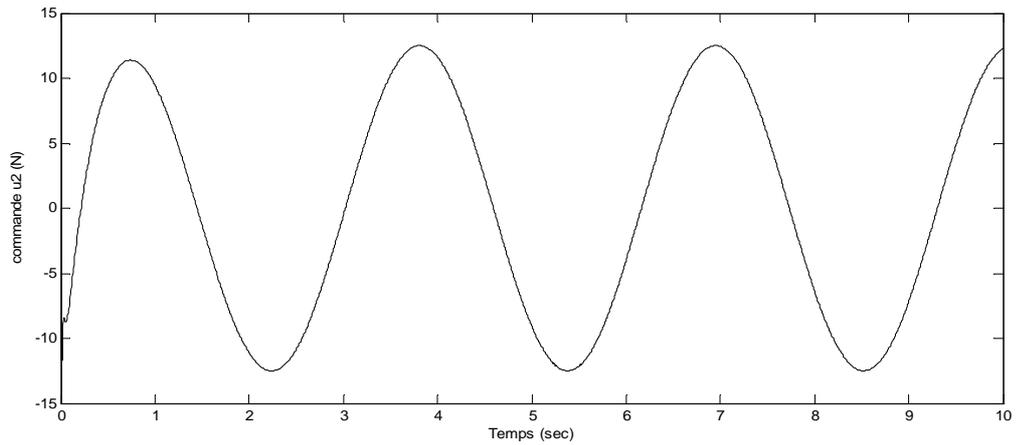


Figure II.16 : Commande appliquée au joint 2.

Les résultats des figures (II.17 – II.30) illustrent les simulations effectuées pour une poursuite de trajectoire sinusoïdale d'un bras de robots à deux degrés de liberté avec une perturbation sinusoïdale donnée par $\varphi(t) = [0,1 \times \sin(2t) \quad 0,1 \times \cos(2t) \quad 0,1 \times \cos(2t) \quad 0,1 \times \sin(2t)]^T$.

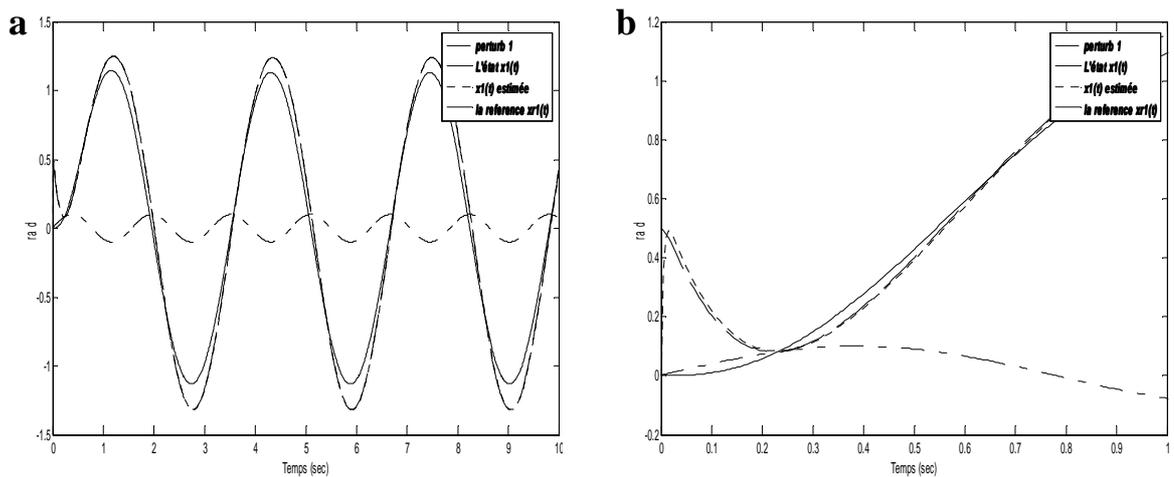


Figure II.17 : Poursuite en position du joint 1 : (a) entre 0 et 10 s, (b) entre 0 et 1 s.

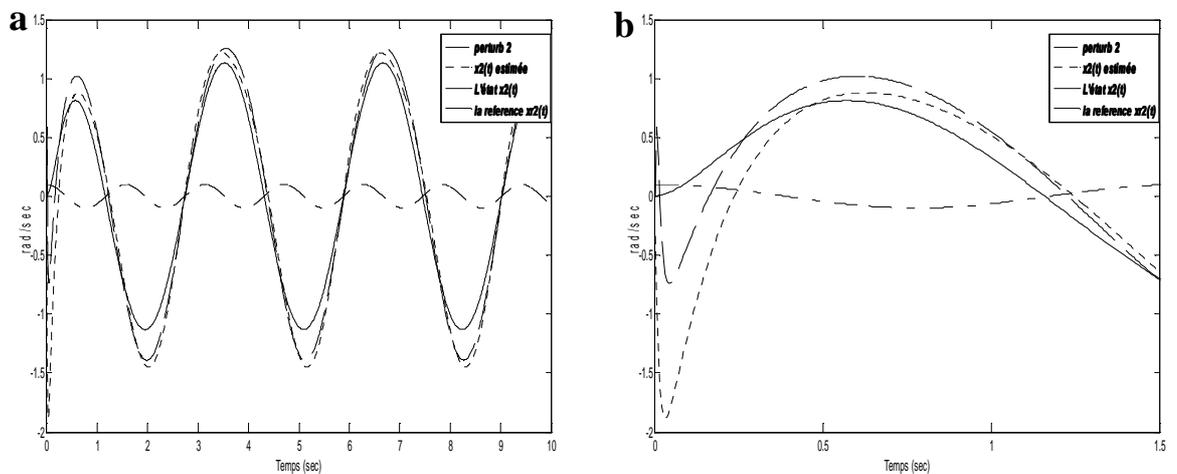


Figure II.18 : Poursuite en vitesse du joint 1 : (a) entre 0 et 10 s, (b) entre 0 et 1,5 s.

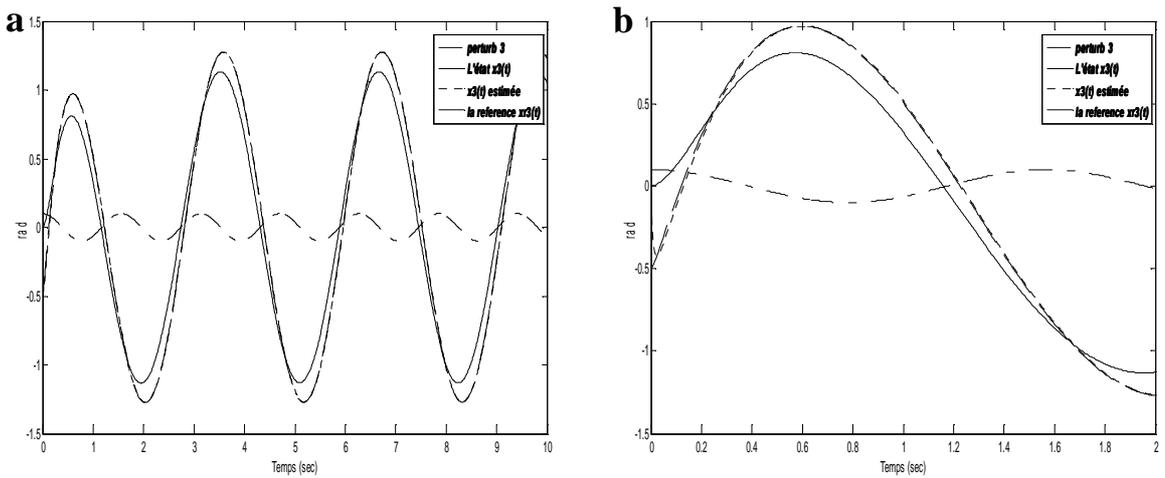


Figure II.19 : Poursuite en position du joint 2 : (a) entre 0 et 10 s, (b) entre 0 et 2 s.

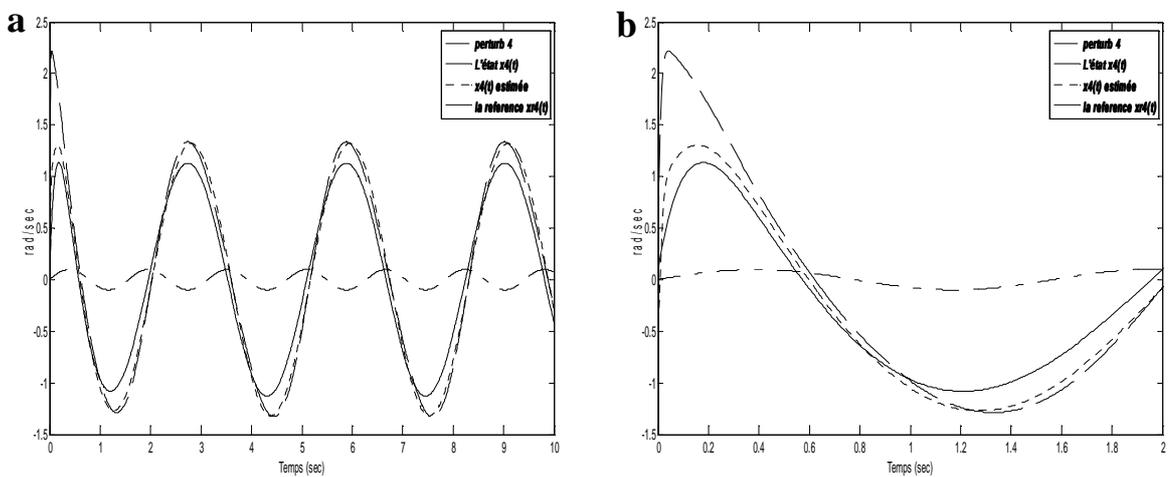


Figure II.20 : Poursuite en vitesse du joint 2 : entre 0 et 10 s, (b) entre 0 et 2 s.

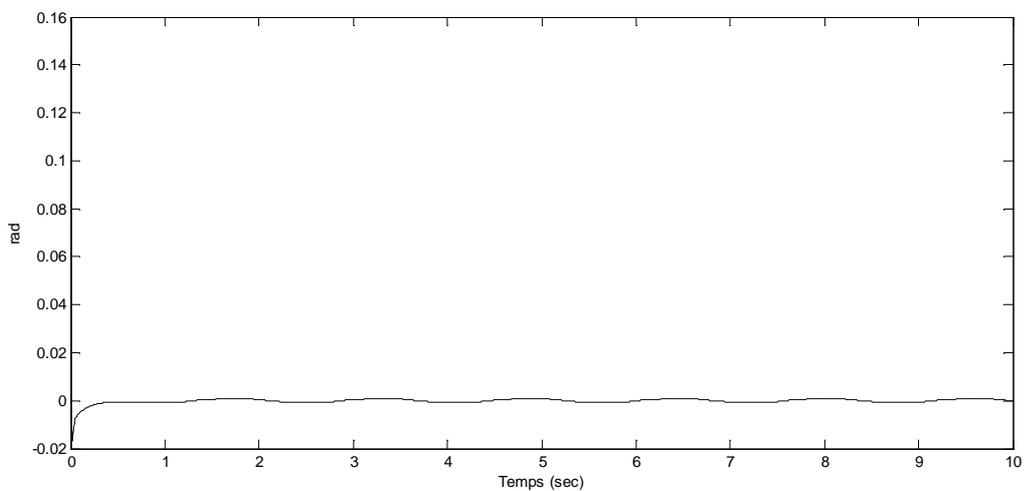


Figure II.21 : Erreur d'estimation de position (joint 1).

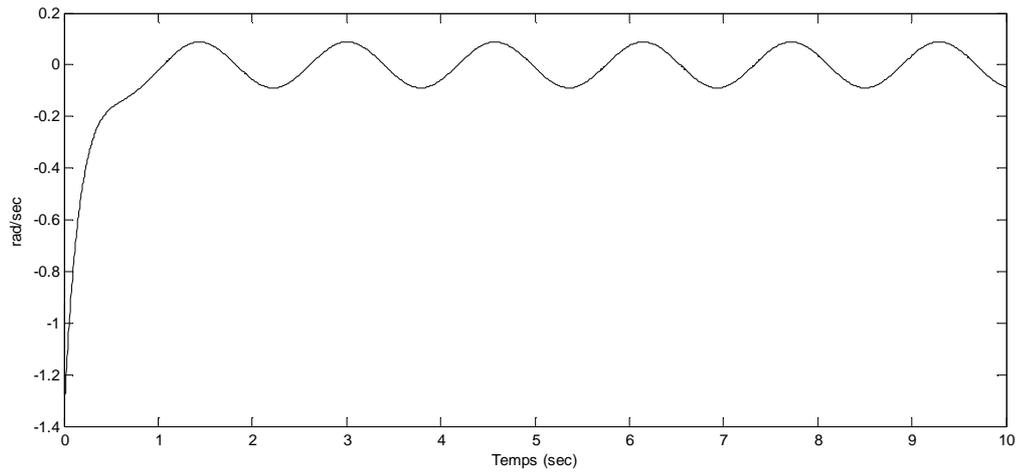


Figure II.22 : Erreur d'estimation de vitesse (joint 1).

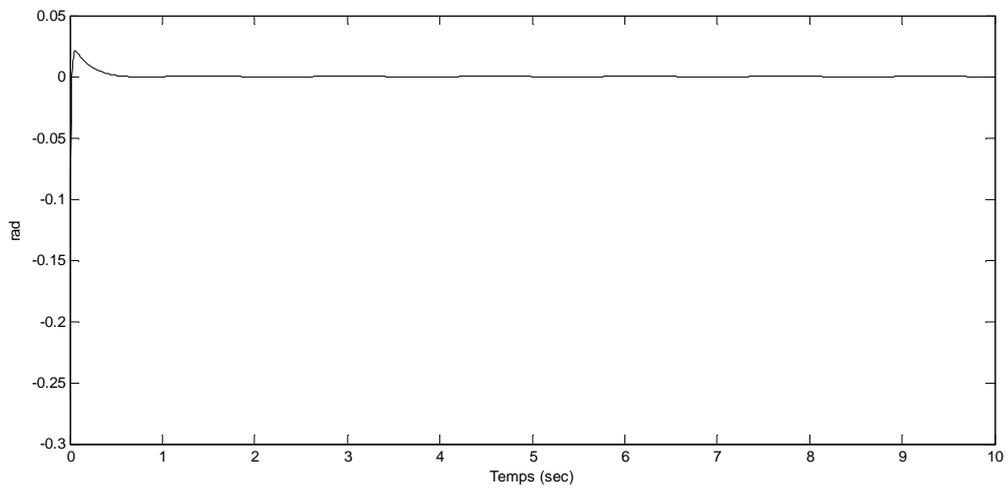


Figure II.23 : Erreur d'estimation de position (joint 2).

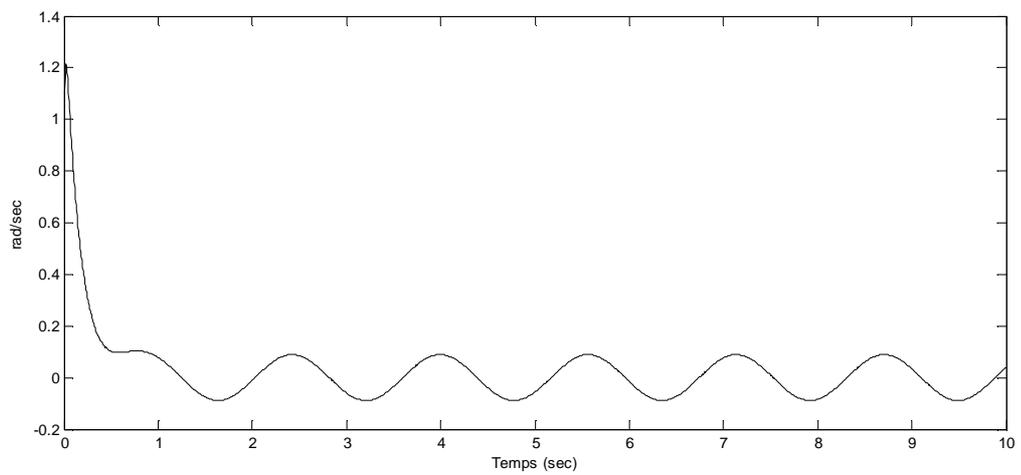


Figure II.24 : Erreur d'estimation de vitesse (joint 2).

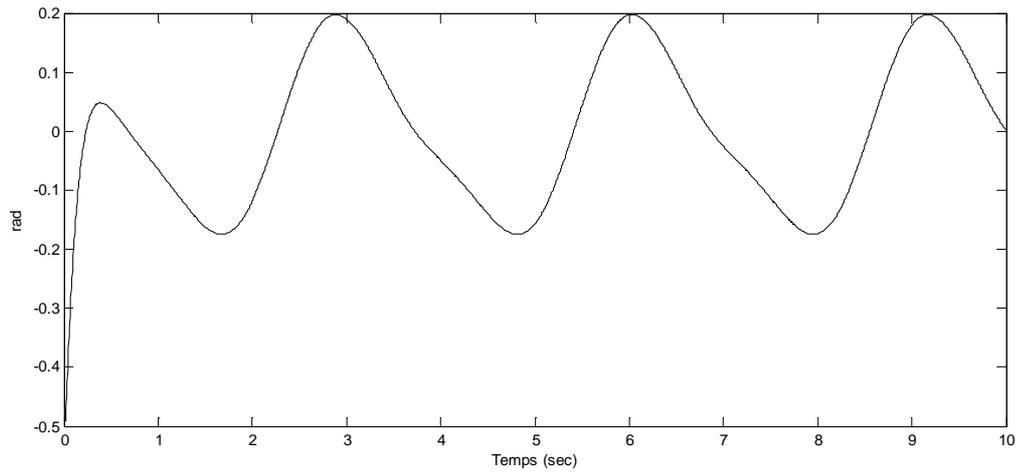


Figure II.25 : Erreur de poursuite en position pour Joint 1.

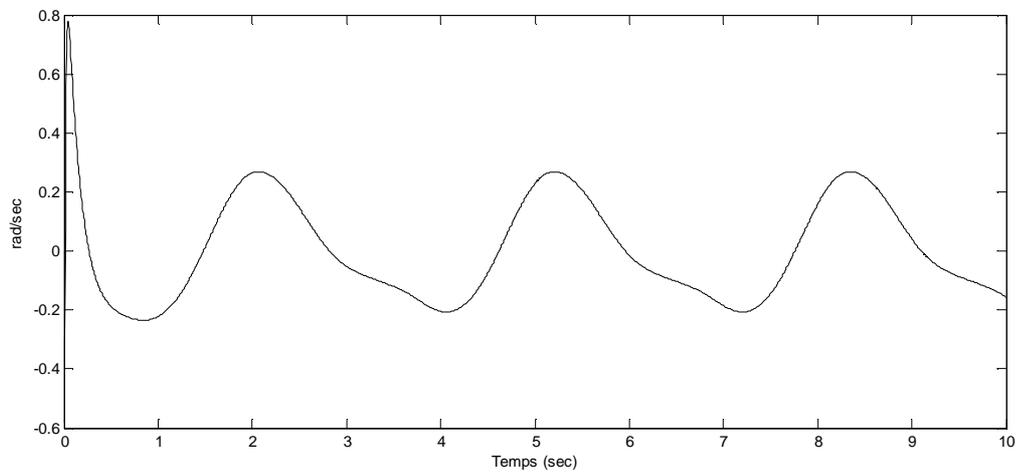


Figure II.26 : Erreur de poursuite en vitesse pour Joint 1.

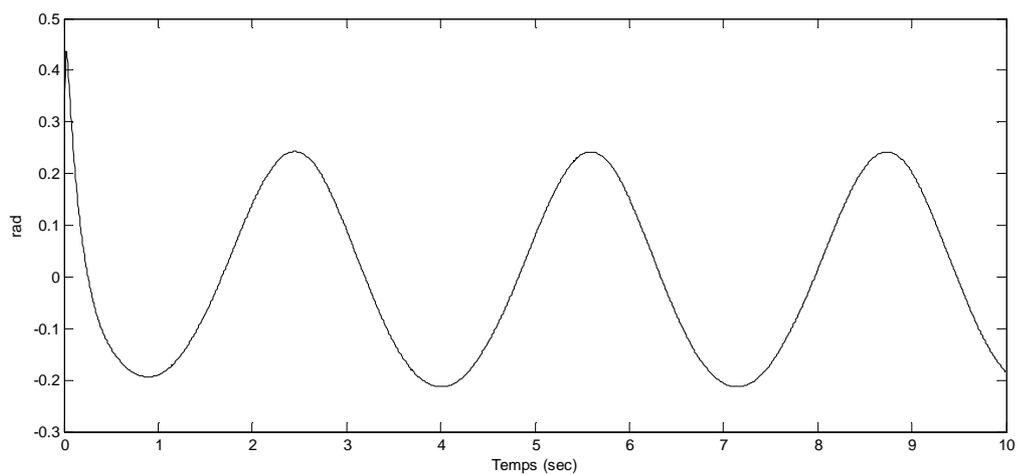


Figure II.27 : Erreur de poursuite en position pour Joint 2.

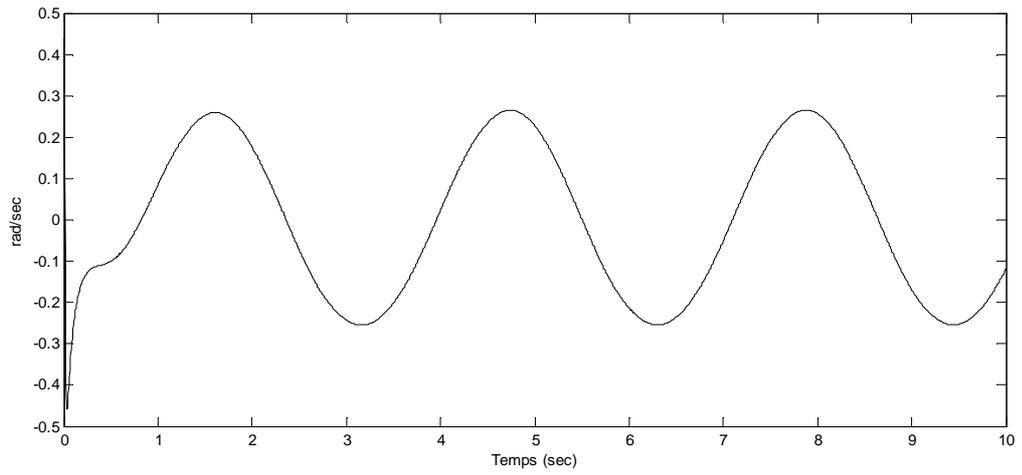


Figure II.28 : Erreur de poursuite en vitesse pour Joint 2.

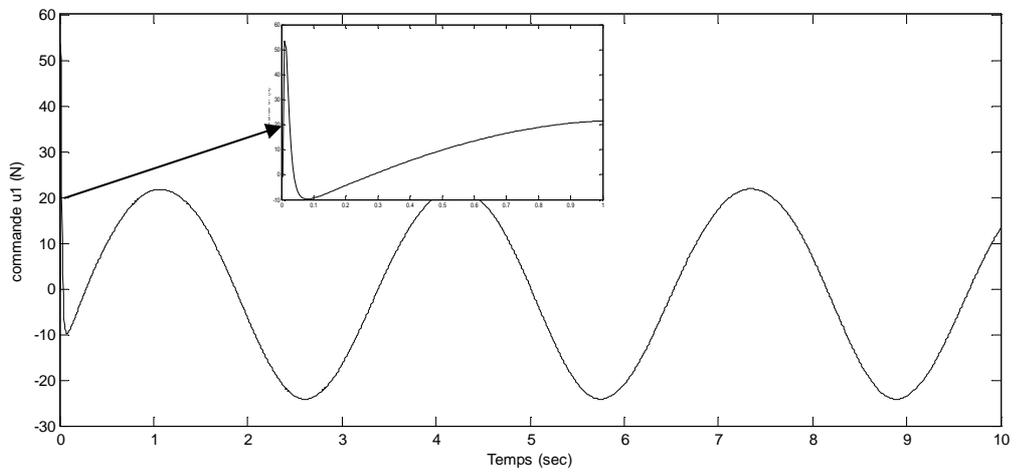


Figure II.29 : Commande appliquée au joint 1.

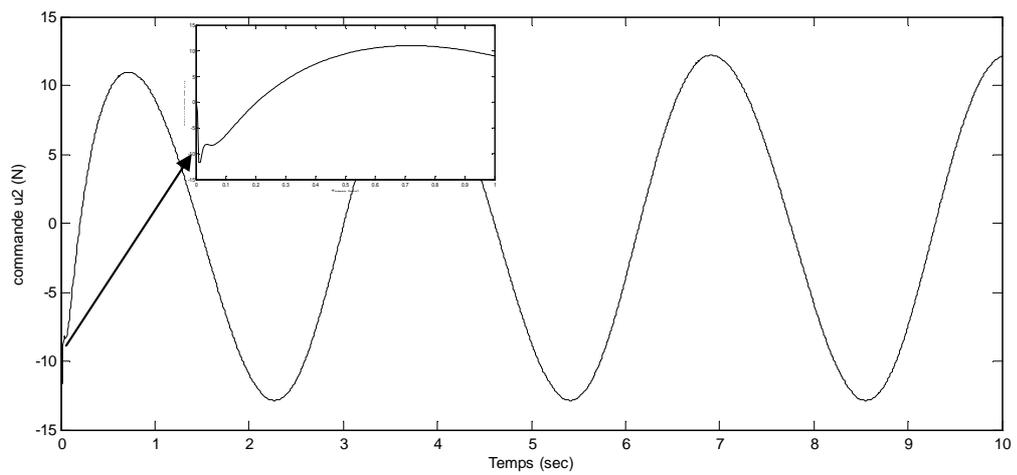


Figure II.30 : Commande appliquée au joint 2.

II.4. CONCLUSION

Durant ce chapitre, nous avons abordé le problème du suivi de trajectoire des modèles T-S en tenant compte aussi bien des performances de poursuite en présence de perturbations externes que de la méthode de résolution. Après un tour d'horizon sur les travaux dans le domaine, nous avons présenté la stratégie de commande adoptée dans ce chapitre. Ensuite, nous avons élaboré la synthèse de commande robuste des modèles T-S perturbés pour assurer le suivi de trajectoire en se basant sur l'approche qui consiste à minimiser l'erreur de poursuite par rapport à l'ensemble des perturbations externes. Le résultat principal de cette approche, réside dans les conditions relâchées au sens de LMI qui se basent sur le nombre maximal de règles actives à chaque instant. Les résultats ainsi développés se présentent sous forme de BMI. Enfin, pour montrer l'intérêt de ces conditions de relaxation, nous avons illustré l'approche à travers un exemple de simulation pour montrer l'intérêt de la méthode au niveau de la faisabilité LMI. Dans les deux cas des figures présentées, les performances de poursuites sont garanties. Cette approche, montre bien ses limites de trois points de vue ; tout d'abord, quand il s'agit des modèles T-S exactes la méthode a peu d'importance, puis, l'exploitation numérique des résultats n'est pas optimale au sens du problème d'optimisation convexe à cause de la méthode de résolution proposée. Enfin l'approche proposée ne concerne que les modèles certains et perturbés. Dans le chapitre qui suit, nous proposons une méthode employant la même approche H^∞ dont les résultats seront présentés sous forme de LMI, et prenant en considérations les modèles T-S incertains.

*POURSUITE DE TRAJECTOIRE
POUR LES MODELES T-S
INCERTAINS ET
PERTURBES AVEC CRITERE H_∞*

III.1. INTRODUCTION

Dans la littérature, la plupart des travaux traitant du problème de la commande robuste pour les modèles T-S incertains ou/et perturbés [Chen 00, Chiang 01, Lauber 03, Tanaka 01, Taniguchi 01, Tseng 01], ne concernent que le problème de stabilisation. Dans ce chapitre, le problème de poursuite de trajectoire pour les modèles T-S incertains et perturbés est abordé avec la même stratégie de commande que celle adoptée dans le chapitre II, à savoir une minimisation de l'erreur de poursuite par rapport aux perturbations externes en utilisant un modèle de référence selon un critère H^∞ . Notre contribution dans ce chapitre concerne la prise en compte des incertitudes dans le modèle T-S, dans le cas de la poursuite d'une trajectoire, la garantie des performances de poursuite et de stabilité du système ainsi que l'obtention de résultats directement sous forme LMI.

Ainsi, ce chapitre sera structuré de la manière suivante. Nous traitons dans un premier temps la poursuite d'une trajectoire dans le cas où tous les états sont disponibles. Dans ce cas, nous présentons deux approches de synthèse différentes permettant de garantir les performances de poursuite. Nous montrerons ensuite, à travers des résultats de simulation, que la seconde approche aboutie directement à des conditions LMI. Ceci permet d'avoir des résultats plus facilement exploitables numériquement et d'assurer de meilleures performances que la première approche qui donne des solutions en deux étapes et de ce fait est plus conservatives. Nous considérons également un observateur dans le cas où tous les états ne sont pas disponibles. Les résultats également exprimés sous forme LMI seront illustrés à travers des simulations dans le cas de la poursuite pour un bras de robots à deux degrés de liberté.

III.2. SYNTHÈSE DE COMMANDE SANS OBSERVATEUR

Soit le modèle flou T-S incertain et perturbé défini comme suit

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left[(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) \right] + \varphi(t) \quad (\text{III.1})$$

Nous supposons dans un premiers temps que l'état est totalement disponible. $\Delta A_i(t)$ et $\Delta B_i(t)$ représentent les incertitudes du modèle qui peuvent être des incertitudes paramétriques ou dus à la modélisation. Ces incertitudes sont exprimées dans notre cas de la manière suivante :

$$\Delta A_i(t) = H_i F_i(t) E_{ai} \quad \text{et} \quad \Delta B_i(t) = H_i F_i(t) E_{bi} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{III.2})$$

avec H_i, E_{ai}, E_{bi} des matrices constantes, et la matrice $F_i(t)$ incertaine bornée de la façon suivante.

$$F_i(t)^T F_i(t) \leq I \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{III.3})$$

Pour spécifier la trajectoire à poursuivre, nous adoptons la stratégie de commande développée dans le chapitre II. Ainsi, le modèle de référence est donné par l'équation (II.2). L'atténuation des perturbations externes doit être garantie par la performance H^∞ liée à l'erreur de poursuite

$x_r(t) - x(t)$ est définie comme suit :

$$\int_0^{t_f} \{ [x_r(t) - x(t)]^T Q [x_r(t) - x(t)] \} dt \leq \eta^2 \int_0^{t_f} \{ r(t)^T r(t) + \varphi(t)^T \varphi(t) \} dt \quad (\text{III.4})$$

La loi de commande adoptée dans ce cas est donnée par :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i [x_r(t) - x(t)] \quad (\text{III.5})$$

A partir de là, nous avons développé deux approches pour garantir la stabilité globale du système et les performances de poursuite. La première approche [Mansouri 09], mène à des conditions BMI et la seconde est systématiquement mise sous forme LMI.

III.2.1. Synthèse de la commande par approche BMI

En considérant les dynamiques respectives de l'état du système $x(t)$ et de la variable de référence $x_r(t)$, on peut établir le système augmenté suivant :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) [\bar{A}_{ij} + \bar{H}_i F_i(t) \bar{E}_{ij}] \bar{x}(t) + \bar{\varphi}(t) \quad (\text{III.6})$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}, \bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_j & -B_i K_j \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, \bar{E}_{ij} = \begin{bmatrix} E_{ai} + E_{bi} K_j & -E_{bi} K_j \end{bmatrix}, \\ \bar{H}_i &= \begin{bmatrix} H_i \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ et } \bar{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Tenant compte de l'état augmenté $\bar{x}(t)$, la performance H^∞ (III.4) peut être modifiée comme suit :

$$\int_0^{t_f} \{ [x_r(t) - x(t)]^T Q [x_r(t) - x(t)] \} dt = \int_0^{t_f} \bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) dt \leq \eta^2 \int_0^{t_f} \bar{\varphi}^T(t) \bar{\varphi}(t) dt \quad (\text{III.8})$$

$$\text{où } \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & -Q \\ -Q & Q \end{bmatrix} \text{ et } \bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t) = r(t)^T r(t) + \varphi(t)^T \varphi(t)$$

Considérons, la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(\bar{x}, t) = \bar{x}^T(t) \bar{P} \bar{x}(t) \quad \text{avec } \bar{P} = \bar{P}^T > 0 \quad (\text{III.9})$$

On peut montrer la stabilité du système augmenté (III.6) à travers le théorème suivant.

Théorème III.1 [Mansouri 05]

$$\text{Pour } t > 0 \text{ et } h_i(z(t)) \times h_j(z(t)) \neq 0,$$

S'il existe une matrice symétrique définie positive $\bar{P} = \bar{P}^T > 0$ et des constantes positives τ et η telles que la condition suivante soit vérifiée.

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{ij}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_{ij} + \bar{Q} & \bar{P} \bar{H}_i & \bar{P} & \bar{E}_{ij}^T \\ \bar{H}_i^T \bar{P} & -\tau I & 0 & 0 \\ \bar{P} & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ \bar{E}_{ij} & 0 & 0 & -\tau^{-1} I \end{bmatrix} \leq 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (\text{III.10})$$

Alors, le système en boucle fermée (III.6) est quadratiquement stable et la performance H^∞ (III.8) est assurée pour un certain taux d'atténuation η .

Preuve

Considérons une nouvelle variable $\bar{q}_{ij}(t)$ telle que :

$$\bar{q}_{ij}(t) = F_i(t) \bar{E}_{ij} \bar{x}(t) \quad (\text{III.11})$$

Le système (III.6) peut alors se réécrire de la manière suivante :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) [\bar{A}_{ij} \bar{x}(t) + \bar{H}_i \bar{q}_{ij}(t) + \bar{\phi}(t)] \quad (\text{III.12})$$

Sachant que les incertitudes sont supposées bornées, en utilisant (III.3) et (III.11), on aboutit à la contrainte :

$$\bar{q}_{ij}(t)^T \bar{q}_{ij}(t) = \bar{x}^T(t) \bar{E}_{ij}^T F_i^T(t) F_i(t) \bar{E}_{ij} \bar{x}(t) \leq \bar{x}^T(t) \bar{E}_{ij}^T \bar{E}_{ij} \bar{x}(t) \quad (\text{III.13})$$

Cette contrainte peut être réécrite sous la forme quadratique suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{q}_{ij}(t) \\ \bar{\phi}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\bar{E}_{ij}^T \bar{E}_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{q}_{ij}(t) \\ \bar{\phi}(t) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.14})$$

Pour garantir un taux d'atténuation η avec la performance H^∞ (III.8) et assurer la stabilité quadratique du système en boucle fermée (III.6), la contrainte suivante doit être réalisée :

$$\frac{dV(\bar{x}, t)}{dt} + \bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) - \eta^2 \bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t) \leq 0 \quad (\text{III.15})$$

En utilisant l'expression (III.9), la contrainte (III.15) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{dV(\bar{x}, t)}{dt} + \bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) - \eta^2 \bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t) \\ &= \dot{\bar{x}}^T(t) \bar{P} \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) \bar{P} \dot{\bar{x}}(t) + \bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) - \eta^2 \bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[\bar{x}^T(t) (\bar{A}_{ij}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_{ij} + \bar{Q}) \bar{x}(t) + \bar{q}_{ij}^T(t) \bar{H}_i^T \bar{P} \bar{x}(t) \right. \\ & \quad \left. + \bar{x}^T(t) \bar{P} \bar{H}_i \bar{q}_{ij}(t) + \bar{\phi}^T(t) \bar{P} \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) \bar{P} \bar{\phi}(t) - \eta^2 \bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t) \right] \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Ainsi, nous devons garantir que :

$$\begin{aligned} & \bar{x}^T(t) (\bar{A}_{ij}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_{ij} + \bar{Q}) \bar{x}(t) + \bar{q}_{ij}^T(t) \bar{H}_i^T \bar{P} \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) \bar{P} \bar{H}_i \bar{q}_{ij}(t) \\ & \quad + \bar{\phi}^T(t) \bar{P} \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) \bar{P} \bar{\phi}(t) - \eta^2 \bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

L'inégalité (III.17), peut être mise sous la forme quadratique suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{q}_{ij}(t) \\ \bar{\phi}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}_{ij}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_{ij} + \bar{Q} & (*) & (*) \\ \bar{H}_i^T \bar{P} & 0 & 0 \\ \bar{P} & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{q}_{ij}(t) \\ \bar{\phi}(t) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.18})$$

Les deux contraintes peuvent être rassemblées en une seule contrainte, sous réserve de l'existence d'une constante positive τ . Ainsi, on aboutit à l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{q}_{ij}(t) \\ \bar{\phi}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}_{ij}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_{ij} + \bar{Q} + \bar{E}_{ij}^T \bar{E}_{ij} & (*) & (*) \\ \bar{H}_i^T \bar{P} & -\tau I & 0 \\ \bar{P} & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{q}_{ij}(t) \\ \bar{\phi}(t) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.19})$$

Enfin, en appliquant un complément de Schur, on retrouve l'inégalité du théorème III.1.

Cette solution formulée sous forme BMI peut être une alternative pour assurer la poursuite. Cependant sa résolution se fera en deux étapes comme celle proposée dans le chapitre II (§ II.3.3). En effet, nous proposons dans la section suivante de formuler les conditions directement sous forme LMI. On montrera que ceci permet d'avoir des solutions moins conservatives et par conséquent une amélioration des performances de poursuite.

III.2.2. Synthèse de commande par approche LMI

Dans cette approche, l'état du système augmenté est construit à partir de la dynamique de l'erreur de poursuite $e_p(t) = x(t) - x_r(t)$ et de la variable de référence $x_r(t)$. Nous considérons la loi de commande (III.5) et le modèle de référence (II.2).

En considérant (III.1), (III.5) et (II.2), la dynamique de l'erreur de poursuite est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{e}_p(t) &= \dot{x}(t) - \dot{x}_r(t) \\ &= (A_i + \Delta A_i) e_p(t) + (B_i + \Delta B_i) K_j e_p(t) + (A_i - A_r + \Delta A_i) x_r(t) + \varphi(t) - r(t) \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

On peut alors exprimer le nouveau système augmenté par :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \bar{A}_{ij} \bar{x}(t) + \bar{S} \bar{\phi}(t) \quad (\text{III.21})$$

où

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ij} &= \begin{bmatrix} A_i + B_i K_j + \Delta A_i + \Delta B_i K_j & (A_i - A_r + \Delta A_i) \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \\ \bar{x}(t) &= \begin{bmatrix} e_p(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}, \phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \text{ et } \bar{S} = \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Dans ce cas, la performance H^∞ (III.4) relative à l'erreur de poursuite par rapport à l'ensemble des perturbations est alors modifiée comme suit :

$$\begin{aligned} \int_0^{tf} \left\{ \begin{bmatrix} x_r(t) - x(t) \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} x_r(t) - x(t) \end{bmatrix} \right\} dt \\ = \int_0^{tf} \bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) dt \leq \eta^2 \int_0^{tf} \bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t) dt \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

où $\bar{Q} = \text{diag} [Q \ 0]$ et $\bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t) = r(t)^T r(t) + \varphi(t)^T \varphi(t)$.

En utilisant la fonction de Lyapunov (III.9), on peut montrer la stabilité du système augmenté (III.21) à travers le théorème suivant.

Théorème III.2 [Mansouri 09]

Pour $t > 0$ et $h_i(z(t)) \times h_j(z(t)) \neq 0$,

S'il existe des matrices symétriques définies positives $N_1 = N_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$ et des constantes positives μ_1, μ_2, μ_3 , et η , telles que la LMI suivante soit vérifiée.

$$\begin{bmatrix} (A_i N_1 + B_i Y_j) + (*) + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1}) H_i H_i^T & N_1 & N_1 E_{ai}^T & Y_j^T E_{bi}^T & (*) & (*) & (*) \\ N_1 & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai} N_1 & 0 & -\mu_2^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi} Y_j & 0 & 0 & -\mu_3^{-1} I & 0 & 0 & 0 \\ (A_i^T - A_r^T) & 0 & 0 & 0 & A_r^T P_2 + P_2 A_r + \mu_2 E_{ai}^T E_{ai} & 0 & (*) \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 & P_2 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0$$

pour $i = 1, 2, \dots, r$ (III.24)

Alors, la stabilité quadratique du système en boucle fermée (III.21) est assurée et la performance H^∞ (III.23) est garantie pour une atténuation η . Avec les changements de variables bijectifs N_1 , et Y_i avec $P_1 = N_1^{-1}$, et $K_i = Y_i N_1^{-1}$.

Preuve

Pour démontrer ce théorème, comme pour le cas précédent, nous devons également vérifier la contrainte suivante :

$$\frac{dV(\bar{x}, t)}{dt} + \bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) - \eta^2 \bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t) \leq 0 \quad (III.25)$$

En dérivant la fonction de Lyapunov (III.9) et d'après (III.25), on aboutit à l'inégalité suivante :

$$\left[\bar{x}^T(t) (\bar{A}_{ij}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_{ij} + \bar{Q}) \bar{x}(t) + \bar{\phi}^T(t) \bar{S}^T \bar{P} \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) \bar{P} \bar{S} \bar{\phi}(t) - \eta^2 \bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t) \right] \leq 0 \quad (III.26)$$

L'inégalité (III.26) peut s'écrire donc sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{\phi}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}_{ij}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_{ij} + \bar{Q} & \bar{P} \bar{S} \\ \bar{S}^T \bar{P} & -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{\phi}(t) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (III.27)$$

En l'occurrence

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{ij}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_{ij} + \bar{Q} & \bar{P} \bar{S} \\ \bar{S}^T \bar{P} & -\eta^2 I \end{bmatrix} \quad (III.28)$$

Pour pouvoir écrire un problème LMI, nous supposons que $\bar{P} = \text{diag} [P_1 \ P_2]$. En remplaçant les matrices augmentées définies en (III.22), on obtient

$$\begin{bmatrix} P_1 (A_i + \Delta A_i + B_i K_j + \Delta B_i K_j) & (*) & (*) & (*) \\ (A_i^T - A_r^T + \Delta A_i^T) P_1 & A_r^T P_2 + P_2 A_r & 0 & (*) \\ P_1 & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ -P_1 & P_2 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (III.29)$$

Afin de pouvoir résoudre cette condition, l'idée dans ce cas, est d'effectuer une séparation des incertitudes du système, l'inégalité (III.29) peut s'écrire sous la forme

$$\bar{P} + \Delta\bar{P} \leq 0 \quad (\text{III.30})$$

avec

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_1(A_i + B_i K_j) + (*) + Q & (*) & (*) & (*) \\ (A_i^T - A_r^T)P_1 & A_r^T P_2 + P_2 A_r & 0 & (*) \\ P_1 & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ -P_1 & P_2 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix}$$

et

$$\Delta\bar{P} = \begin{bmatrix} P_1(\Delta A_i + \Delta B_i K_j) + (*) & (*) & 0 & 0 \\ \Delta A_i^T P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 H_i F_i(t) E_{ai} + P_1 H_i F_i(t) E_{bi} K_j + (*) & (*) & 0 & 0 \\ E_{ai}^T F_i(t) H_i^T P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En procédant à l'élimination de certains éléments de la matrice grâce à la procédure détaillée dans le chapitre I (lemme I.3), nous pouvons de la même manière éliminer les éléments anti-diagonaux de la matrice incertaine $\Delta\bar{P}$. Ainsi, $\Delta\bar{P}$ se retrouve majorée de la façon suivante :

$$\Delta\bar{P} \leq \begin{bmatrix} (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1})P_1 H_i H_i^T P_1 + \mu_2 E_{ai}^T E_{ai} + \mu_3 K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 E_{ai}^T E_{ai} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

avec μ_1, μ_2 , et μ_3 des paramètres constants qui peuvent être fixés ou recherchés.

Posons, $Y_{ij} = P_1(A_i + B_i K_j) + (*) + Q + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1}) P_1 H_i H_i^T P_1 + \mu_2 E_{ai}^T E_{ai} + \mu_3 K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j$

Grâce à (III.31), l'inégalité (III.30) est donc équivalente à :

$$\begin{bmatrix} Y_{ij} & (*) & (*) & (*) \\ (A_i^T - A_r^T) P_1 & A_r^T P_2 + P_2 A_r + \mu_1 E_{ai}^T E_{ai} & 0 & (*) \\ P_1 & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ -P_1 & P_2 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.32})$$

Pour aboutir à une condition LMI, nous effectuons un changement de variable en pré post multipliant (III.32) par $\text{diag}[N_1 \quad I \quad I \quad I]$ avec $N_1 = P_1^{-1}$. En posant

$Y_{ij} = (A_i N_1 + B_i K_j) + (*) + N_1 Q N_1 + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1}) H_i H_i^T + \mu_2 N_1 E_{ai}^T E_{ai} N_1 + \mu_3 Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j$

on obtient :

$$\begin{bmatrix} Y_{ij} & (*) & (*) & (*) \\ (A_i^T - A_r^T) & A_r^T P_2 + P_2 A_r + \mu_1 E_{ai}^T E_{ai} & 0 & (*) \\ I & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ -I & P & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.33})$$

Avec des compléments de Schur effectués sur le bloc Y_{ij} , on retrouve l'inégalité (III.24) du théorème III.2.

L'approche ainsi développée, représente une condition directement sous forme de LMI, qui peut être résolue en une seule étape avec les algorithmes d'optimisation convexe [Boyed 94].

III.3. SYNTHÈSE DE COMMANDE AVEC OBSERVATEUR

III.3.1. Approche LMI

Dans cette section, on s'intéresse à la synthèse de commande avec observateur. Le modèle T-S incertain et perturbé est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [(A_i + \Delta A_i(t)) x(t) + (B_i + \Delta B_i(t)) u(t)] + \varphi(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

Comme nous supposons que les états ne sont pas totalement disponibles, nous considérons l'observateur flou développé dans (II.2). Le modèle de référence utilisé est celui défini dans (II.2). La loi de commande est donnée par :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i [x_r(t) - \hat{x}(t)] \quad (\text{III.35})$$

avec $\hat{x}(t) \in R^n$ représentant l'état estimé du système.

Remarque III.1

Notons que l'approche BMI développée dans III.2.1, peut être également appliquée pour la synthèse de commande avec observateur. En effet, en considérant la variable augmentée (II.15) définie dans le chapitre II et en employant la loi de commande (III.35), nous aboutissons à un résultat similaire à celui du théorème III.1. Pour éviter cette redondance, nous avons préféré détailler dans ce chapitre, l'approche LMI uniquement. En effet, cette dernière présente l'avantage d'être exploitable facilement d'un point de vue numérique et avec moins de conservativité par rapport à la recherche des gains à partir d'une BMI en procédant en deux étapes.

Ainsi, en se basant sur le modèle de référence (III.2) et la loi de commande (III.35), nous définissons une nouvelle variable augmentée $\tilde{x}(t)$ composée de la dynamique de l'erreur d'estimation $e_o(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, de l'erreur de poursuite $e_p(t) = x(t) - x_r(t)$ et enfin, de la variable de référence $x_r(t)$. En appliquant la commande (III.35) au système (III.34), la dynamique est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[- (B_i K_j + \Delta B_i K_j) e_o(t) + (A_i + B_i K_j + \Delta A_i + \Delta B_i K_j) x(t) \right. \\ &\quad \left. - (B_i K_j + \Delta B_i K_j) x_r(t) - (A_i + \Delta A_i) x_r(t) + (A_i + \Delta A_i) x_r(t) \right] + \varphi(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[(B_i K_j + \Delta B_i K_j) e_o(t) + (A_i + B_i K_j + \Delta A_i + \Delta B_i K_j) e_p(t) \right. \\ &\quad \left. + (A_i + \Delta A_i) x_r(t) \right] + \varphi(t) \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

Ainsi, la dynamique de l'erreur d'estimation en fonction de $e_o(t)$, $e_p(t)$ et $x_r(t)$ s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{e}_o(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[(A_i - L_i C_j - \Delta B_i K_j) e_o(t) \right. \\ &\quad \left. + (\Delta A_i + \Delta B_i K_j) e_p(t) + \Delta A_i x_r(t) \right] + \varphi(t) \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

Par conséquent, la dynamique de l'erreur de poursuite en fonction de $e_o(t)$, $e_p(t)$ et $x_r(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{e}_p(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[- (B_i K_j + \Delta B_i K_j) e_o(t) + (A_i + B_i K_j + \Delta A_i + \Delta B_i K_j) e_p(t) \right. \\ &\quad \left. + (A_i - A_r + \Delta A_i) x_r(t) \right] + \varphi(t) - r(t) \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

D'où, le système augmenté relatif aux dynamiques respectives $e_o(t)$, $e_p(t)$ et $x_r(t)$, s'écrit :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \tilde{G}_{ij} \tilde{x}(t) + \tilde{S} \tilde{\varphi}(t) \quad (\text{III.39})$$

avec

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} e_o(t) \\ e_p(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - L_i C_j - \Delta B_i K_j & \Delta A_i + \Delta B_i K_j & \Delta A_i \\ - B_i K_j - \Delta B_i K_j & A_i + B_i K_j + \Delta A_i + \Delta B_i K_j & A_i - A_r + \Delta A_i \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}, \quad (\text{III.40})$$

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ et } \tilde{\phi}(t) = \begin{bmatrix} \phi(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, le critère H^∞ correspondant à la structure du système augmenté (III.39), est décrit comme suit :

$$\int_0^{t_f} \{ [x_r(t) - x(t)]^T Q [x_r(t) - x(t)] \} dt = \int_0^{t_f} \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} x(t) dt \leq \eta^2 \int_0^{t_f} \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) dt \quad (\text{III.41})$$

avec la matrice $\tilde{Q} = \text{diag} [0 \quad Q \quad 0]$.

Avant de présenter le résultat principal, nous considérons la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(\tilde{x}, t) = \tilde{x}^T(t) \tilde{P} \tilde{x}(t) \quad \text{avec } \tilde{P} = \tilde{P}^T > 0 \quad (\text{III.42})$$

Pour obtenir des conditions assurant la poursuite de trajectoire en termes de LMI, nous nous basons essentiellement sur un nouveau lemme III.1 [Guerra 06] qui a l'avantage de séparer les variables dont les termes ne sont pas LMI, avec moins de conservativité par rapport aux autres techniques utilisées dans les transformations matricielles.

Lemme III.1 [Guerra 06]

Soit une matrice définie négative $\Omega < 0$

Quelque soit une matrice X de dimensions appropriées telle que $X^T \Omega X < 0$ alors ; $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha > 0$ et $X^T \Omega X \leq -2\alpha X - \alpha^2 \Omega^{-1}$

Preuve

Ω étant définie négative alors : $X^T \Omega X < 0$

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ tels que : $(X + \alpha \Omega^{-1})^T \Omega (X + \alpha \Omega^{-1}) \leq 0$

$X^T \Omega X + 2\alpha X + \alpha^2 \Omega^{-1} \leq 0$

Enfin $X^T \Omega X \leq -2\alpha X - \alpha^2 \Omega^{-1}$

Le résultat principal concernant la synthèse de commande avec observateur et qui permet d'aboutir directement à des conditions sous forme LMI, se résume dans le théorème suivant.

Théorème III.3 [Mansouri 09]

Pour $t > 0$ et $h_i(z(t)) \times h_j(z(t)) \neq 0$,

S'il existe des matrices symétriques définies positives $P_1 = P_1^T > 0$, $P_3 = P_3^T > 0$, $N_1 = N_1^T$, $M > 0$ et des constantes positives $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8$, et η , tels que la LMI suivante soit vérifiée.

$$\begin{bmatrix} \Gamma & A^T \\ A & \Psi \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{III.43})$$

avec

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2\alpha N_2 & 0 & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (*) \\ E_{bi} Y_j & 0 & -\mu_1^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi} Y_j & 0 & 0 & -\mu_5^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha I & 0 & 0 & 0 & P_1 A_i - Z_i C_j + (*) & (*) & (*) & P_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_i P_1 & -(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1})^{-1} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_i P_1 & 0 & -\mu_4^{-1} I & 0 \\ 0 & \alpha I & 0 & 0 & P_1 & 0 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} A_i N_2 + B_i Y_j + (*) + (\mu_5^{-1} + \mu_6^{-1} + \mu_7^{-1} + \mu_8^{-1}) H_i H_i^T & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 & -I \\ N_2 & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi} Y_j & 0 & -\mu_2^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi} Y_j & 0 & 0 & -\mu_7^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai} N_2 & 0 & 0 & 0 & -\mu_5^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai} N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_4^{-1} I & 0 & 0 & 0 \\ (A_i^T - A_r^T) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_r^T P_3 + P_3 A_r + \mu_4 E_{ai}^T E_{ai} & (*) & P_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{ai} & -\mu_8^{-1} I & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_3 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \Lambda = \begin{bmatrix} -B_i Y_j & N_2 & 0_{1 \times 8} \\ 0_{8 \times 2} & 0_{8 \times 8} & \end{bmatrix}$$

avec les changements de variables bijectifs N_2 , et Y_i avec $P_2 = N_2^{-1}$, $K_i = Y_i N_2^{-1}$ et $Z_i = P_1 L_i$. Alors, la stabilité quadratique du système en boucle fermée (III.39) est assurée et la performance H^∞ (III.41) soit garantie avec une atténuation η^2 .

Preuve

Pour assurer la stabilité quadratique du système en boucle fermée (III.39), tout en garantissant la performance H^∞ (III.41) avec un taux d'atténuation η , l'inégalité suivante doit être vérifiée :

$$\frac{dV(\tilde{x}, t)}{dt} + \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) - \eta^2 \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) \leq 0 \quad (\text{III.44})$$

Ainsi, en utilisant la fonction de Lyapunov (III.42) et le système en boucle fermée (III.39), la condition (III.44) implique :

$$\left[\tilde{x}(t) \left(\tilde{G}_{ij}^T \tilde{P} + \tilde{P} G_{ij}^T + \tilde{Q} \right) \tilde{x}(t) + \tilde{\phi}^T(t) \tilde{S}^T \tilde{P} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{P} \tilde{S} \tilde{\phi}(t) - \eta^2 \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) \right] \leq 0$$

Cette inégalité peut être écrite sous une forme quadratique de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\phi}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_{ij} + \tilde{Q} & \tilde{P} \tilde{S} \\ \tilde{S}^T \tilde{P} & -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\phi}(t) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.45})$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_{ij} + \tilde{Q} & \tilde{P} \tilde{S} \\ \tilde{S}^T \tilde{P} & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.46})$$

En posant $\tilde{P} = \text{diag} [P_1 \ P_2 \ P_3]$, et en remplaçant les matrices augmentées définies en (III.40), l'inégalité (III.46) devient :

$$\begin{bmatrix} P_1 (A_i - L_i C_j) - P_1 \Delta B_i K_j + (*) & (*) & (*) & P_1 & 0 \\ -P_2 B_i - P_2 \Delta B_i K_j + K_j^T \Delta B_i P_1 + \Delta A_i^T P_1 & P_2 (A_i + \Delta A_i + B_i K_j + \Delta B_i K_j) + (*) + Q & (*) & P_2 & -P_2 \\ \Delta A_i^T P_1 & (A_i^T - A_r^T + \Delta A_i^T) P_2 & A_r^T P_3 + P_3 A_r & 0 & P_3 \\ P_1 & P_2 & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ 0 & -P_2 & P_3 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.47})$$

à partir de (III.47) on peut séparer les termes contenant les incertitudes, ce qui permet d'exprimer (III.47) comme suit :

$$\bar{\Pi} + \Delta \bar{\Pi} \leq 0 \quad (\text{III.48})$$

avec

$$\bar{\Pi} = \begin{bmatrix} P_1 (A_i - L_i C_j) + (*) & (*) & 0 & P_1 & 0 \\ -P_2 B_i & P_2 (A_i + B_i K_j) + (*) + Q & (*) & P_2 & -P_2 \\ 0 & (A_i^T - A_r^T) P_2 & A_r^T P_3 + P_3 A_r & 0 & P_3 \\ P_1 & P_2 & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ 0 & -P_2 & P_3 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix}$$

et

$$\Delta \bar{\Pi} = \begin{bmatrix} -P_1 \Delta B_i K_j + (*) & (*) & (*) & 0 & 0 \\ -P_2 \Delta B_i K_j + K_j^T \Delta B_i^T P_1 + \Delta A_i^T P_1 & P_2 (\Delta A_i + \Delta B_i K_j) + (*) + Q & (*) & 0 & 0 \\ \Delta A_i^T P_1 & \Delta A_i^T P_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On utilise l'expression (III.2) relative aux incertitudes du système, la matrice incertaine $\Delta\tilde{T}$ est égale à :

$$\begin{bmatrix} -P_1 H_i F_i(t) E_{bi} K_j + (*) & (*) & (*) & 0 & 0 \\ -P_2 H_i F_i(t) E_{bi} K_j + K_j^T E_{bi}^T F_i^T(t) H_i^T P_1 + E_{ai}^T F_i^T(t) H_i^T P_1 & P_2 H_i F_i(t) E_{ai} + P_2 H_i F_i(t) E_{bi} K_j + (*) + Q & (*) & 0 & 0 \\ E_{ai}^T F_i^T(t) H_i^T P_1 & E_{ai}^T F_i^T(t) H_i^T P_3 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour éliminer les éléments anti-diagonaux nous avons utilisé également le lemme I.3 présentée dans le chapitre I. Par conséquent, la matrice contenant les incertitudes peut être bornée de la manière suivante :

$$\Delta\tilde{T} \leq \text{diag} [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad 0 \quad 0]$$

avec

$$d_1 = (\mu_1 + \mu_5) K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1} + \mu_4^{-1}) P_1 H_i H_i^T P_1$$

$$d_2 = (\mu_2 + \mu_7) K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j + (\mu_5^{-1} + \mu_6^{-1} + \mu_7^{-1} + \mu_8^{-1}) P_1 H_i H_i^T P_1 + (\mu_3 + \mu_6) E_{ai}^T E_{ai}$$

$$d_3 = (\mu_4 + \mu_8) E_{ai}^T E_{ai}$$

Alors, l'inégalité (III.48) implique :

$$\Delta\tilde{T} = \begin{bmatrix} P_1(A_i - L_i C_j) + (*) + d_1 & (*) & 0 & P_1 & 0 \\ -P_2 B_i K_j & P_2(A_i + B_i K_j) + (*) + Q + d_2 & (*) & P_2 & -P_2 \\ 0 & (A_i^T - A_r^T) P_2 & A_r^T P_3 + P_3 A_r + d_3 & 0 & P_3 \\ P_1 & P_2 & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ 0 & -P_2 & P_3 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.49})$$

L'inégalité ainsi trouvée n'est pas encore une LMI. Ainsi, pour remettre la matrice (III.49) sous forme homogène du point de vue des variables inconnues à rechercher, on effectue une congruence par la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{III.50})$$

En faisant permuter les lignes et les colonnes de la matrice (III.49) suivant l'ordre 1, 4, 2, 3 et 5. Ainsi, l'inégalité (III.49) devient :

$$\begin{bmatrix} P_1(A_i - L_i C_j) + (*) + d_1 & P_1 & (*) & 0 & 0 \\ P_1 & -\eta^2 I & P_2 & 0 & 0 \\ -P_2 B_i K_j & P_2 & P_2(A_i + B_i K_j) + (*) + Q + d_2 & (*) & -P_2 \\ 0 & 0 & (A_i^T - A_r^T)P_2 & A_r^T P_3 + P_3 A_r + d_3 & P_3 \\ 0 & 0 & -P_2 & P_3 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.51})$$

Ensuite, nous procédons à un changement de variable en pré post multipliant l'inégalité (III.51) par $\text{diag} [N_2 \quad N_2 \quad N_2 \quad I \quad I]$, avec $N_2 = P_2^{-1}$ et $K_i = Y_i N_2^{-1}$. On obtient :

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} \left[\begin{array}{cc} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{array} \right] \Omega_1 \left[\begin{array}{cc} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} (\mu_1 + \mu_5) Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] & & (*) & 0 & 0 \\ & & (*) & 0 & 0 \\ \hline & -B_i Y_j & X_2 & \Omega_2 & (*) & (*) \\ & 0 & 0 & (A_i^T - A_r^T) & A_r^T P_3 + P_3 A_r + d_3 & (*) \\ & 0 & 0 & -I & P_3 & -\eta^2 I \end{array} \right] \quad (\text{III.52})$$

$$\text{avec } \Omega_1 = \begin{bmatrix} P_1(A_i - L_i C_j) + (*) + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1} + \mu_4^{-1}) P_1 H_i H_i^T P_1 & P_1 \\ P_1 & -\eta^2 I \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 = N_2 A_i + B_i Y_j + (*) + N_2 Q N_2 + (\mu_2 + \mu_7) Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j \\ + (\mu_5^{-1} + \mu_6^{-1} + \mu_7^{-1} + \mu_8^{-1}) H_i H_i^T + (\mu_3 + \mu_6) N_2 E_{ai}^T E_{ai} N_2 \end{aligned}$$

Pour éliminer les termes non LMI, on applique le lemme III.1 sur le premier bloc diagonal de (III.52). On obtient :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{array} \right] \Omega_1 \left[\begin{array}{cc} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} (\mu_1 + \mu_5) Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \leq -2\alpha \left[\begin{array}{cc} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{array} \right] - \alpha^2 \Omega_1^{-1} + \left[\begin{array}{cc} (\mu_1 + \mu_5) Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{III.53}) \\ & = \left[\begin{array}{cc} -2\alpha N_2 + (\mu_1 + \mu_5) Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j & 0 \\ 0 & -2\alpha N_2 \end{array} \right] - \alpha^2 \Omega_1^{-1} \end{aligned}$$

Ensuite, en appliquant un complément de Schur, (III.53) devient :

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} -2\alpha N_2 + (\mu_1 + \mu_5) Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j & 0 & (*) & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha N_2 & 0 & (*) & (*) \\ \alpha I & 0 & P_1(A_i - L_i C_j) + (*) + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1} + \mu_4^{-1}) P_1 H_i H_i^T P_1 & (*) & (*) \\ 0 & \alpha I & P_1 & -\eta^2 I & (*) \end{array} \right] \leq 0 \quad (\text{III.54})$$

Enfin, en injectant la contrainte ci-dessus dans (III.52), on obtient l'inégalité

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} H_{11} & 0 & \alpha I & 0 & (*) & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha N_2 & 0 & \alpha I & (*) & 0 & 0 \\ \alpha I & 0 & H_{33} & P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha I & P_1 & -\eta^2 I & 0 & 0 & 0 \\ \hline -B_i L_j & N_2 & 0 & 0 & H_{55} & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (A_i^T - A_r^T) & H_{66} & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & P_3 & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{III.55})$$

avec

$$H_{11} = -2\alpha N_2 + (\mu_1 + \mu_5) Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j$$

$$H_{33} = P_1 (A_i - L_i C_j) + (*) + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1} + \mu_4^{-1}) P_1 H_i H_i^T P_1$$

$$H_{55} = N_2 A_i + B_i Y_j + (*) + N_2 Q N_2 + (\mu_2 + \mu_7) Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j \\ + (\mu_5^{-1} + \mu_6^{-1} + \mu_7^{-1} + \mu_8^{-1}) + (\mu_3 + \mu_6) + N_2 E_{ai}^T E_{ai} N_2$$

$$H_{66} = A_r^T P_3 + P_3 A_r + d_3$$

Avec des compléments de Schur sur les blocs diagonaux H_{11}, H_{33}, H_{55} et H_{66} , on retrouve la condition (III.43) du théorème III.3.

III.3.2. Exemple de simulation

Pour montrer les performances en poursuite avec l'approche LMI du théorème III.3, on considère une représentation T-S exacte du modèle non linéaire du bras de robot à deux degrés de liberté présenté dans le chapitre II.

L'équation dynamique de système est donnée par :

$$M(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + G(q) = \tau \quad (\text{III.56})$$

Avec :

$$M(q) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) l_1^2 & m_2 l_1 l_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2) \\ m_2 l_1 l_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_2 (c_1 s_2 - s_1 c_2) \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_2 \\ -\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, G(q) = \begin{bmatrix} -(m_1 + m_2) l_1 g s_1 \\ -m_2 l_2 g s_2 \end{bmatrix}$$

où $q = [q_1 \quad q_2]^T$, avec q_1, q_2 sont les coordonnées généralisées, $M(q)$ est le moment d'inertie, $C(q, \dot{q})$ comporte les forces centripètes de Coriolis, et $G(q)$ est la force de

gravitation. Les autres quantités sont : les masses des deux bras m_1, m_2 (kg), les longueurs des bras l_1, l_2 (m), les positions angulaires q_1, q_2 (rad), le moment de torsion appliqué $\tau = [\tau_1, \tau_2]^T$ (N.m), l'accélération de gravité $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, et la notation :

$$s_1 = \sin(q_1), s_2 = \sin(q_2), c_1 = \cos(q_1), c_2 = \cos(q_2).$$

On prend : $x_1 = q_1, x_2 = \dot{q}_1, x_3 = q_2, x_4 = \dot{q}_2$,

Les résultats des figures illustrent les simulations effectuées pour une poursuite de trajectoire sinusoïdale avec une perturbation sinusoïdale donnée par :

$$\varphi_1(t) = 0.1 \times \sin(2t), \varphi_2(t) = 0.1 \times \cos(2t), \varphi_3(t) = 0.1 \times \cos(2t), \varphi_4(t) = 0.1 \times \sin(2t).$$

En procédant les mêmes étapes de simulation effectuée en deuxième chapitre.

On trouve les matrices de Lyapunov :

$$P_1 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 2.7388 & -0.0001 & -0.0005 & 0.0000 \\ -0.0001 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0005 & -0.0000 & 2.7390 & -0.0001 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0001 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.1728 & 0.0774 & 0.0007 & 0.0008 \\ 0.0774 & 0.1423 & 0.0027 & 0.0021 \\ 0.0007 & 0.0027 & 0.1625 & 0.0714 \\ 0.0008 & 0.0021 & 0.0714 & 0.1387 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.2396 & 0.1506 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.1506 & 0.1410 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.2396 & 0.1506 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.1506 & 0.1410 \end{bmatrix}$$

Les gains du contrôleur sont :

$$K_1 = \begin{bmatrix} -20.0606 & -22.4963 & -4.2958 & -4.2247 \\ -3.5923 & -5.2682 & -12.0332 & -18.1148 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -18.6482 & -20.3264 & -0.6417 & -0.8472 \\ -0.4649 & 0.6132 & -12.8153 & -18.8474 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -17.0124 & -18.6102 & 2.7424 & 3.3115 \\ 2.9239 & 5.1595 & -7.4138 & -14.3300 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -23.3396 & -22.4379 & -1.8733 & -1.0435 \\ 1.8835 & 0.4865 & -13.7328 & -18.2639 \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -22.5973 & -23.0881 & -4.8840 & -4.3109 \\ -3.9411 & -5.2108 & -13.7426 & -17.8925 \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -23.2427 & -24.4854 & -0.8315 & 0.1193 \\ 1.6840 & 1.5519 & -13.5065 & -20.9334 \end{bmatrix}$$

$$K_7 = \begin{bmatrix} -14.9301 & -14.9171 & 1.8631 & 2.5985 \\ 2.9131 & 4.4317 & -7.1210 & -12.5562 \end{bmatrix}$$

$$K_8 = \begin{bmatrix} -19.4094 & -16.3668 & -0.0761 & -0.1688 \\ -3.5301 & -0.5500 & -11.1976 & -15.7753 \end{bmatrix}$$

$$K_9 = \begin{bmatrix} -16.4094 & -16.4711 & -3.8779 & -4.3232 \\ -3.5301 & -5.6364 & -9.1479 & -12.8811 \end{bmatrix}$$

Ainsi les gains d'observateur :

$$L_1 = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0.0435 & 0.0000 \\ 1.6583 & 0.0075 \\ 0.0000 & 0.0435 \\ 0.0075 & 1.6664 \end{bmatrix}, \quad L_2 = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0.0436 & 0.0000 \\ 1.2322 & 0.0057 \\ 0.0000 & 0.0436 \\ 0.0057 & 1.2382 \end{bmatrix}, \quad L_3 = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0.0436 & 0.0000 \\ 1.2322 & 0.0057 \\ 0.0000 & 0.0436 \\ 0.0057 & 1.2382 \end{bmatrix}$$

$$L_4 = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0.0436 & 0.0000 \\ 1.2322 & 0.0057 \\ 0.0000 & 0.0436 \\ 0.0057 & 1.2382 \end{bmatrix}, \quad L_5 = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0.0436 & 0.0000 \\ 1.3004 & 0.0060 \\ 0.0000 & 0.0436 \\ 0.0060 & 1.3068 \end{bmatrix}, \quad L_6 = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0.0436 & 0.0000 \\ 1.3004 & 0.0060 \\ 0.0000 & 0.0436 \\ 0.0060 & 1.3086 \end{bmatrix}$$

$$L_7 = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0.0436 & 0.0000 \\ 1.3004 & 0.0060 \\ 0.0000 & 0.0436 \\ 0.0060 & 1.3068 \end{bmatrix}, \quad L_8 = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0.0436 & 0.0000 \\ 1.3004 & 0.0059 \\ 0.0000 & 0.0436 \\ 0.0060 & 1.3068 \end{bmatrix}, \quad L_9 = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0.0436 & 0.0000 \\ 1.3004 & 0.0060 \\ 0.0000 & 0.0436 \\ 0.0060 & 1.3068 \end{bmatrix}.$$

On constate que les performances de poursuite sont assurées. Les figure III.1 et III.2 présente la poursuite en position et en vitesse respectivement du joint 1. Les figures III.3 et III.4 illustrent les mêmes performances pour le joint 2. Les figures III.5, III.6, III.7, III.8 représentent respectivement les erreurs de poursuite en position et en vitesse pour les deux joints. Les signaux de commande appliqués aux joints 1 et 2 sont donnés respectivement sur les figures III.9, III.10.

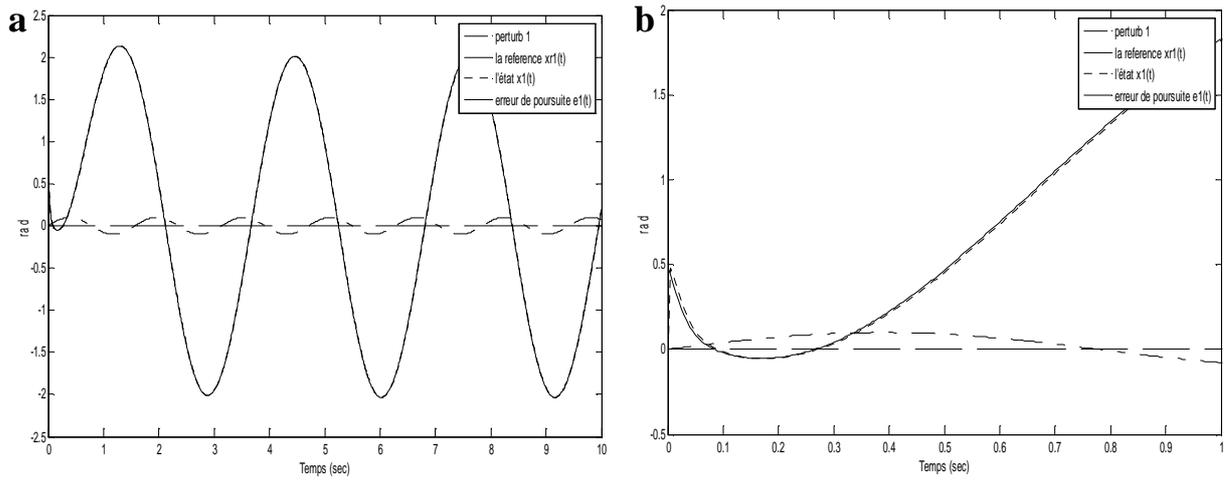


Figure III.1 : Poursuite en position du joint 1 : (a) entre 0 et 10 s, (b) entre 0 et 1 s.

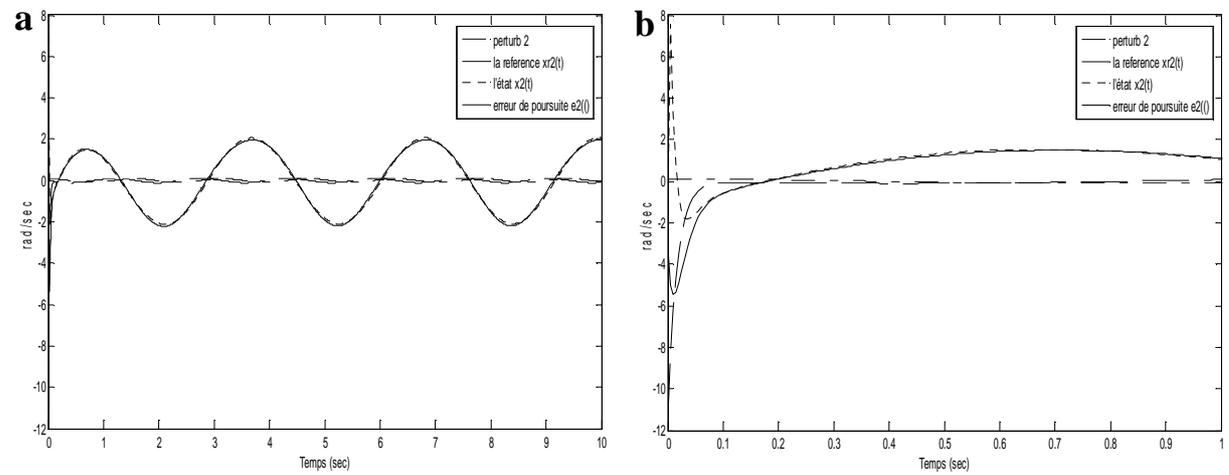


Figure III.2 : Poursuite en vitesse du joint 1 : (a) entre 0 et 10 s, (b) entre 0 et 1 s.

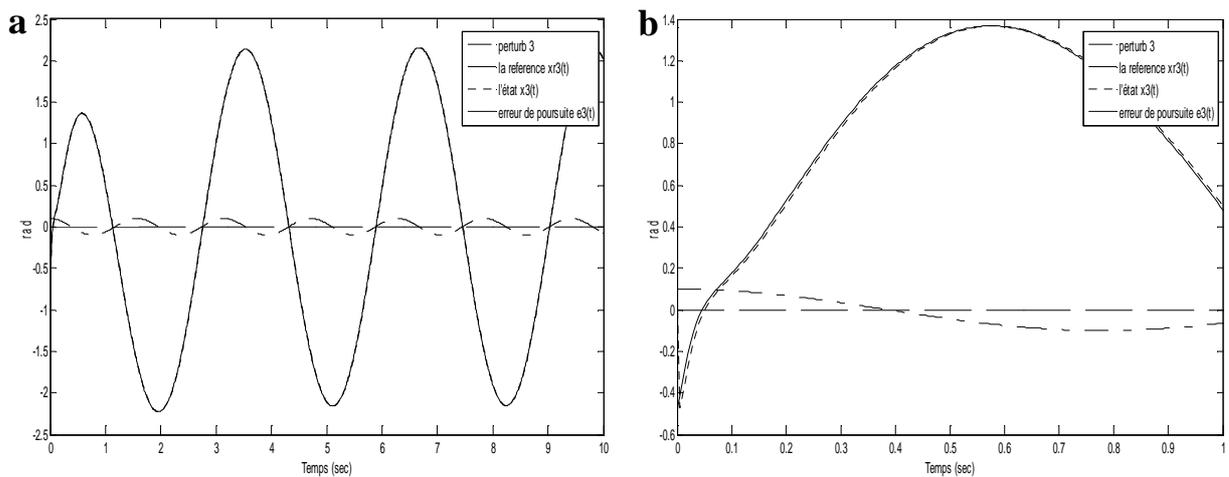


Figure III.3 : Poursuite en position du joint 2 : (a) entre 0 et 10 s, (b) entre 0 et 1 s.

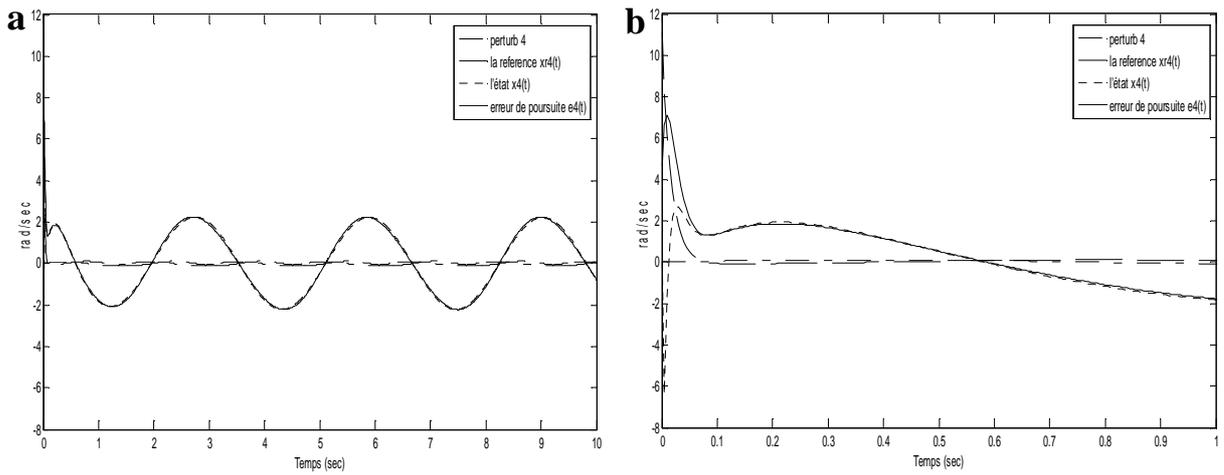


Figure III.4 : Poursuite en vitesse du joint 2 : (a) entre 0 et 10 s, (b) entre 0 et 1 s.

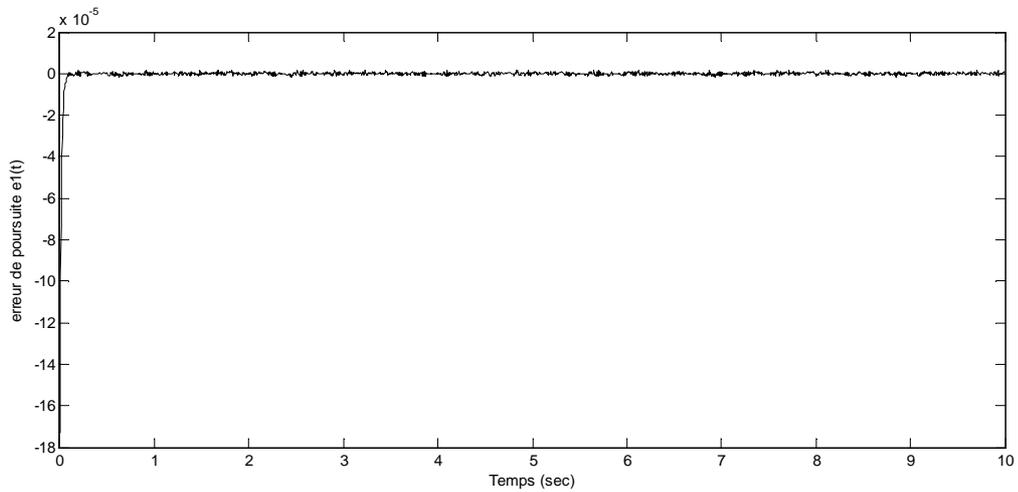


Figure III.5 : Erreur de poursuite en position du joint 1.

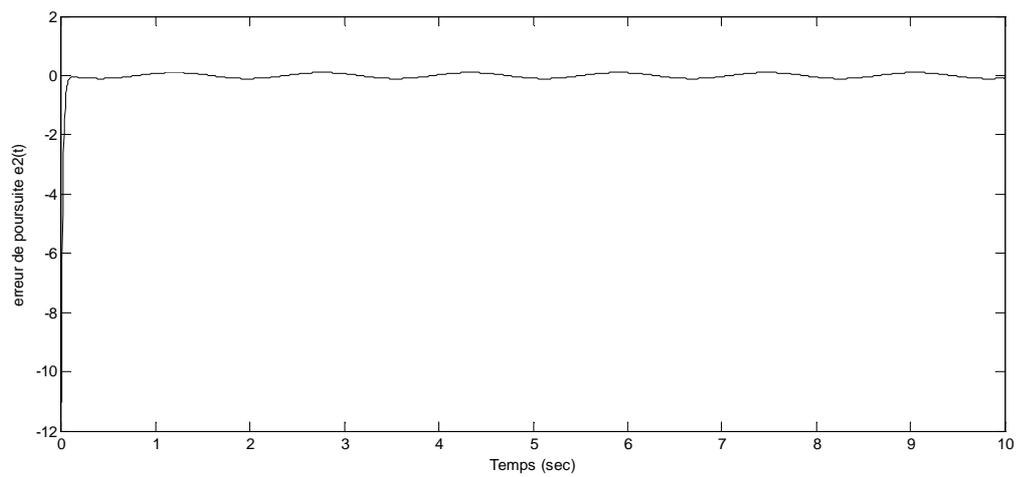


Figure III.6 : Erreur de poursuite en vitesse du joint 1.

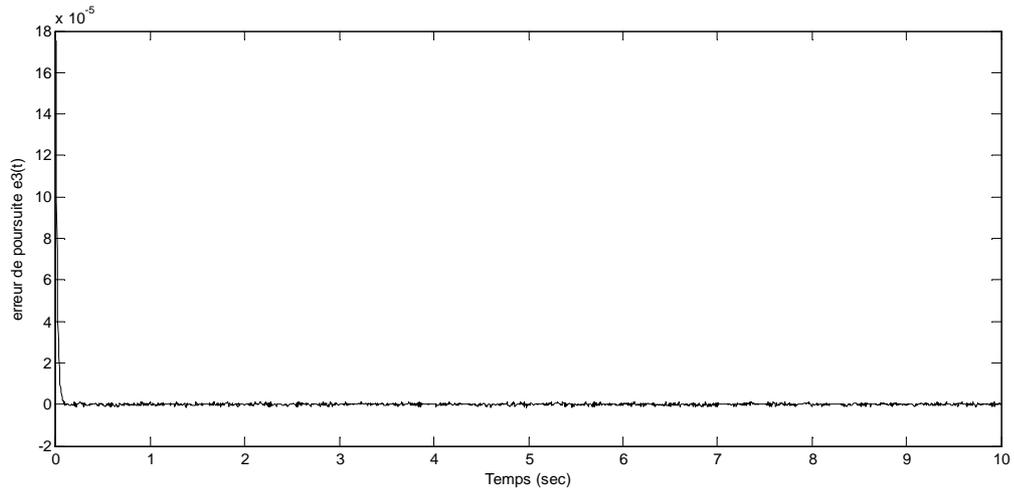


Figure III.7 : Erreur de poursuite en position du joint 2.

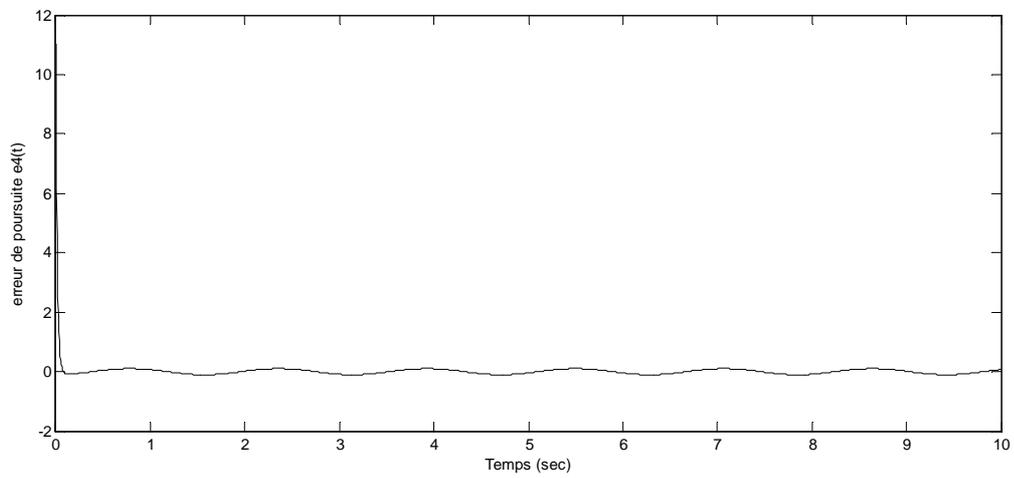


Figure III.8 : Erreur de poursuite en vitesse du joint 2.

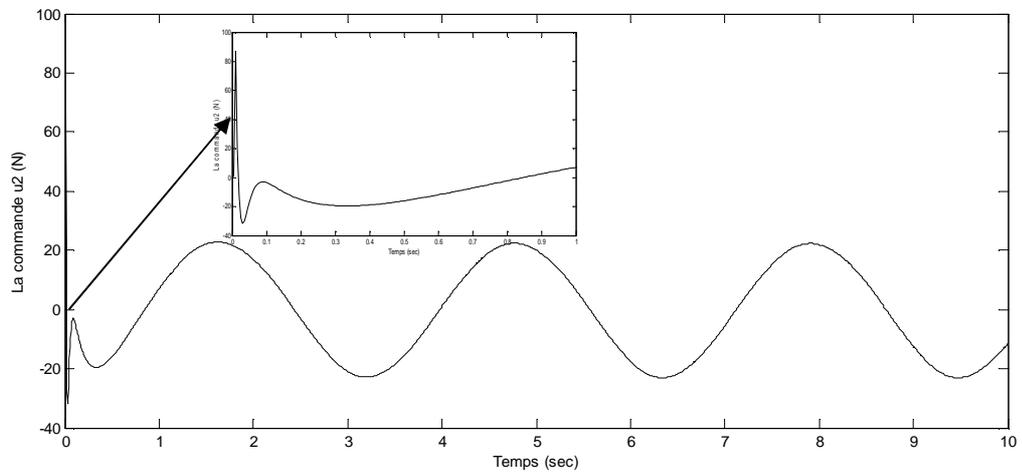


Figure III.9 : Commande appliquée au Joint1.

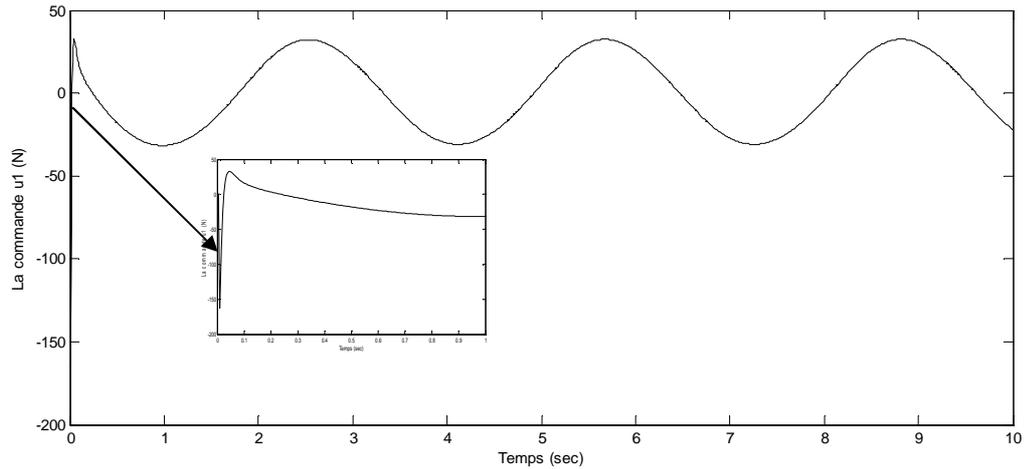


Figure III.10 : Commande appliquée au Joint 2.

III.4. CONCLUSION

Ce troisième chapitre a pour objet de présenter des travaux ayant trait à la commande des modèles T-S incertains et perturbés dans le cas de suivi de trajectoire des systèmes non linéaires. Nous avons développé deux approches pour garantir la stabilité et la performance de poursuite dans ce cas. La première est présentée sous formulée en BMI, la seconde formulée directement en LMI a été élaborée en changeant la structure du système augmenté. Nous avons montré que le résultat obtenu peut être directement résolu avec les algorithmes d'optimisation convexe existants. Des résultats de simulation ont montré la performance de poursuite pour la deuxième approche. La dernière partie du chapitre présente des résultats concernant le suivi de trajectoires des modèles T-S incertains et perturbés. Ces résultats représentent l'avantage d'être formulé également en conditions LMI. Un exemple de simulation a également été présenté à la fin du chapitre concernant l'approche développée.

*COMMANDE ROBUSTE FLOUE DES
SYSTEMES NON LINEAIRES*

IV.1. INTRODUCTION

Un problème essentiel dans la théorie de la commande est d'appliquer une commande à un système non linéaire afin d'avoir un suivi d'une référence désirée. Le concept des ensembles flous est très utile du point de vue de la synthèse de commande. La commande par logique floue est une technique qui permet d'intégrer les connaissances d'experts dans la conception d'un contrôleur. Bien que les contrôleurs flous existants soient capables d'incorporer des informations linguistiques, ils sont de nature heuristique [Wang 97]. Il est clair que toute fonction non linéaire sur un ensemble compact avec une précision arbitraire peut être rapprochée par un système flou. Il y a eu des efforts de recherche importants sur la commande floue adaptative pour les systèmes non linéaires [Wang 93, Xie 99].

La technique de commande par mode glissant dispose d'un contrôleur robuste pour systèmes non linéaires [Slotine 91, Hung 93]. Cependant, il hérite d'une action de contrôle discontinu et donc les phénomènes de supervision aura lieu lorsque le système fonctionne à la proximité de la surface de glissement. Une des solutions communes pour éliminer cet effet est d'introduire une couche limite proche de la surface de glissement [Hung 93, Utkin 77]. Cette méthode menée à un système en boucle fermée stable.

Le contrôleur adaptatif flou est introduit pour assurer la stabilité. La performance de cette commande est un nouveau sujet de la recherche dans la commande floue [Su 94, Wang 01]. En particulier, dans ce chapitre on utilise la théorie de l'approximation floue et la technique SMC dans le but de construire un contrôleur robuste. Un des avantages de cette stratégie de commande est la robustesse par rapport aux incertitudes et aux perturbations.

Beaucoup des techniques de commande par logique floue et par mode glissant (AFSMC) ont été proposés [Kim 95, Berstecher 01] avec l'effet de broutements au niveau du système qui peut être évitée en utilisant les conditions sur la surface de glissement. Toutefois, ces caractéristiques provoquent un nombre augmenté de règles floues, et par conséquence, la complexité d'approximer la surface de glissement.

La loi de commande par mode glissant peut être séparée en deux parties : la commande équivalente et la commande de commutation [Wang 01]. Dans notre cas, le rôle du contrôleur

développé est d'utiliser ces deux types de commande avec des conditions différentes, afin d'améliorer la performance de l'état d'équilibre.

IV.2. FORMULATION DU PROBLEME

Considérons une classe générale des systèmes non linéaires SISO d'ordre n de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(n)} &= f(\underline{x}, t) + g(\underline{x}, t) u + d(t) \\ y &= x \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

où $f(\underline{x}, t)$ et $g(\underline{x}, t)$ sont des fonctions non linéaires continues et inconnues, $\underline{x} = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ est le vecteur d'état du système qui est supposé être disponible pour la mesure, $u \in R$ et $y \in R$, sont l'entrée et la sortie du système respectivement et $d(t)$ représente les perturbations externes supposées inconnues mais bornées avec $d(t) \leq D$. Pour que le système (IV.1) soit contrôlable, on exige que $g(\underline{x}, t) \neq 0$ pour x dans une certaine région de contrôlabilité $U_c \subset R^n$. Puisque $g(\underline{x}, t)$ est continue, sans perte de généralité, on suppose que $g(\underline{x}, t) > 0$ pour $\underline{x} \in U_c$. Dans le domaine de la commande non linéaire, ces systèmes sont dans une forme normale et ont le degré relatif égale à n .

L'objectif est de trouver une commande permettant de forcer l'état \underline{x} du système à suivre une trajectoire de référence \underline{x}_d , tout en assurant que le système bouclé soit stable et robuste avec l'erreur de poursuite donnée :

$$\underline{e} = \underline{x} - \underline{x}_d = [e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)}]^T \in R^n \quad (\text{IV.2})$$

La surface de glissement en fonction de l'erreur de poursuite dans l'espace d'état est donnée par :

$$s(\underline{e}) = c_1 e + c_2 \dot{e} + \dots + c_{n-1} e^{(n-2)} + e^{(n-1)} = \underline{c}^T \underline{e} \quad (\text{IV.3})$$

où $\underline{c} = [c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, 1]^T$ sont les racines du polynôme caractéristique $h(\lambda) = \lambda^{n-1} + c_{n-1} \lambda^{n-2} + \dots + c_1$ qui sont dans le demi-plan gauche, λ l'opérateur de Laplace.

Si la condition initiale de l'erreur est $\underline{e}(0)=0$, le problème de poursuite d'une référence $\underline{x} = \underline{x}_d$, est de maintenir le vecteur de l'erreur d'état d'une façon que la surface de glissement $s(\underline{e})=0$ pour tout $t \geq 0$. Une condition suffisante pour obtenir ce comportement est de choisir une stratégie commande telle que la condition suivante soit satisfaite :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (s^2(\underline{e})) \leq -\eta |s|, \quad \eta \geq 0 \quad (\text{IV.4})$$

Le système est commandé d'une manière que l'état converge toujours vers la surface de glissement. La valeur de commande doit changer de signe à l'intersection entre la trajectoire d'état du système et la surface de glissement.

Considérons le problème de commande des systèmes non linéaires (IV.1), si $f(\underline{x}, t)$ et $g(\underline{x}, t)$ sont connues. Le terme u^* de commande satisfait la condition de glissement (IV.4) telle que :

$$u^* = \frac{1}{g(\underline{x}, t)} \left[-\sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i)} - f(\underline{x}, t) + \dot{x}_d^{(n)} - \eta \operatorname{sgn}(s) \right] \quad (\text{IV.5})$$

où

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} 1 & \text{pour } s > 0 \\ 0 & \text{pour } s = 0 \\ -1 & \text{pour } s < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

Prenant la fonction candidate de Lyapunov définie comme suit :

$$V_1 = \frac{1}{2} s^2(\underline{e}) \quad (\text{IV.7})$$

La dérivée de V_1 par rapport au temps, devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= s \cdot \dot{s} = s \cdot (c_1 \dot{e} + c_2 \ddot{e} + \dots + c_{n-1} e^{(n-1)} + \dot{x}^{(n)} - \dot{x}_d^{(n)}) \\ &= s \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i)} + f(\underline{x}, t) + g(\underline{x}, t) u + d(t) - \dot{x}_d^{(n)} \right) \leq -\eta |s| \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

Ce qui vérifie la condition (IV.4). Il est évident que, pour satisfaire la condition (IV.4), on ajoute un terme de commande appelé terme de commutation u_{sw} , donc la commande devient

$$u^* = u_{eq} - u_{sw}, \text{ où :}$$

$$u_{eq} = \frac{1}{g(\underline{x}, t)} \left[\sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i)} - f(\underline{x}, t) + x_d^{(n)} \right] \quad (\text{IV.9})$$

$$u_{sw} = \frac{1}{g(\underline{x}, t)} \eta \operatorname{sgn}(s) \quad (\text{IV.10})$$

Cependant, si f et g ne sont pas connues, il est difficile d'appliquer la loi de commande (IV.5). En plus, l'ajout du terme de commande de commutation u_{sw} pose le problème de broutement.

Dans ce qui suit, pour résoudre ces problèmes, nous proposons l'algorithme de commande en combinant l'approche floue et la commande par mode glissant avec un contrôleur PI.

L'avantage de l'utilisation du système flou (I.78) réside dans sa forme linéaire par rapport aux paramètres $\underline{\theta}$ qui facilite énormément la conception de notre contrôleur.

Dans ce qui suit, on utilise le système flou (I.77) comme le composant de notre contrôleur.

IV.3. COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE PAR MODE GLISSANT

La loi de commande (IV.5) est réalisable seulement si les fonctions $f(\underline{x}, t)$ et $g(\underline{x}, t)$ sont connues. Mais ce n'est pas le cas, donc la commande (IV.5) ne peut pas être mise en œuvre. Ce qui rend l'approximation de $f(\underline{x}, t)$ et $g(\underline{x}, t)$ nécessaire, pour cela on utilise les systèmes flous $\hat{f}(x/\theta_f)$ et $\hat{g}(x/\theta_g)$ respectivement, lesquels sont de la forme (I.77). Ensuite, nous utilisons le terme de commande de type PI pour éviter le problème des broutements. L'entrée et la sortie du régulateur PI sont représentées sous la forme :

$$u_p = \theta_{p_1} z_1 + \theta_{p_2} z_2 \quad (\text{IV.11})$$

avec $z_1 = s$, $\dot{z}_2 = s$, θ_{p_1} et θ_{p_2} sont des gains de contrôleur PI à construire, et pour ajuster les paramètres du contrôleur nous avons recours à les approximer par le système flou $\hat{p}(s/\underline{\theta}_p)$, par conséquence (IV.11) peut être réécrite :

$$\hat{p}(s/\underline{\theta}_p) = \underline{\theta}_p^T \underline{\psi}(s) \quad (\text{IV.12})$$

où $\underline{\theta}_p = [\theta_{p_1}, \theta_{p_2}]^T \in R^2$ est le vecteur des paramètres ajustables du contrôleur PI, et $\underline{\psi}^T(\underline{z}) = [z_1, z_2] \in R^2$ est un vecteur de régression. Nous utilisons des systèmes flous pour approximer les fonctions inconnues $f(\underline{x}, t)$, $g(\underline{x}, t)$ et un contrôleur PI de terme adaptatif dont l'objet est d'améliorer les performances en régime permanent et atténuer les effets des perturbations externes qui influencent le système. Donc, la loi de commande résultante est comme suit :

$$u = \frac{1}{\hat{g}(\underline{x}/\underline{\theta}_g)} \left[-\hat{f}(\underline{x}/\underline{\theta}_f) - \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^i + x_d^{(n)} - \hat{p}(\underline{z}/\underline{\theta}_p) \right] \quad (\text{IV.13})$$

avec :

$$\hat{f}(\underline{x}/\underline{\theta}_f) = \underline{\theta}_f^T \underline{\xi}(\underline{x}) \quad (\text{IV.14})$$

$$\hat{g}(\underline{x}/\underline{\theta}_g) = \underline{\theta}_g^T \underline{\xi}(\underline{x}) \quad (\text{IV.15})$$

$$\hat{p}(\underline{z}/\underline{\theta}_p) = \underline{\theta}_p^T \underline{\psi}(\underline{z}) \quad (\text{IV.16})$$

Pour éviter le problème de broutement au niveau de la sortie du système, on remplace le terme de commande en commutation u_{sw} avec l'action du PI quand l'état du système est dans une couche limite $|s| < \Phi$. L'action du contrôleur est maintenue à la valeur saturée quand l'état du système est en dehors de la couche limite. Par conséquent, on met $|\hat{p}(\underline{z}/\underline{\theta}_p)| = D + \eta$ quand $|s| \geq \Phi$, où Φ est l'épaisseur de la couche limite.

Après avoir développé une commande adaptative floue robuste, on s'intéresse maintenant à l'analyse des performances de ce contrôleur. Deux aspects importants, le premier concernant

la bornitude des variables d'état (les états du système doivent être à chaque instant bornés) et le deuxième concerne la convergence vers zéro de l'erreur de poursuite.

Théorème IV.1

Considérons le problème de commande des systèmes non linéaires (IV.1). Si la loi de commande (IV.13) est appliquée, \hat{f} , \hat{g} et \hat{p} sont estimées par (IV.14)-(IV.16), le vecteur de paramètres $\underline{\theta}_f$, $\underline{\theta}_g$ et $\underline{\theta}_p$ sont ajustés par les lois d'adaptation (IV.17) - (IV.19).

$$\dot{\underline{\theta}}_f = \gamma_1 \cdot s \cdot \underline{\xi}(\underline{x}) \quad (\text{IV.17})$$

$$\dot{\underline{\theta}}_g = \gamma_2 \cdot s \cdot \underline{\xi}(\underline{x}) \cdot u \quad (\text{IV.18})$$

$$\dot{\underline{\theta}}_p = \gamma_3 \cdot s \cdot \underline{\psi}(\underline{z}) \quad (\text{IV.19})$$

Preuve

On définit le vecteur des paramètres optimaux des systèmes flous :

$$\underline{\theta}_f^* = \arg \min_{\underline{\theta}_f \in \Omega_f} \left(\sup_{\underline{x} \in \Omega_x} \left| \hat{f}(\underline{x}/\underline{\theta}_f) - f(\underline{x}, t) \right| \right) \quad (\text{IV.20})$$

$$\underline{\theta}_g^* = \arg \min_{\underline{\theta}_g \in \Omega_g} \left(\sup_{\underline{x} \in \Omega_x} \left| \hat{g}(\underline{x}/\underline{\theta}_g) - g(\underline{x}, t) \right| \right) \quad (\text{IV.21})$$

$$\underline{\theta}_p^* = \arg \min_{\underline{\theta}_p \in \Omega_p} \left(\sup_{\underline{z} \in R^2} \left| \hat{p}(\underline{z}/\underline{\theta}_p) - u_{sw} \right| \right) \quad (\text{IV.22})$$

où Ω_f , Ω_g , Ω_p et Ω_x sont les ensembles auxquels appartiennent $\underline{\theta}_f$, $\underline{\theta}_g$, $\underline{\theta}_p$ et \underline{x} respectivement. On suppose que $\underline{\theta}_f$, $\underline{\theta}_g$, $\underline{\theta}_p$ et \underline{x} ne dépassent jamais les limites de Ω_f , Ω_g , Ω_p et Ω_x .

L'erreur d'approximation minimale définie comme suit :

$$\omega = f(\underline{x}, t) - \hat{f}(\underline{x}/\underline{\theta}_f^*) + \left(g(\underline{x}, t) - \hat{g}(\underline{x}/\underline{\theta}_g^*) \right) \cdot u \quad (\text{IV.23})$$

Hypothèse IV.1

$$\Omega_f = \{ \underline{\theta}_f \in R^n / |\underline{\theta}_f| \leq M_f \} \quad (\text{IV.24})$$

$$\Omega_g = \{ \underline{\theta}_g \in R^n / 0 < \varepsilon \leq |\underline{\theta}_g| \leq M_g \} \quad (\text{IV.25})$$

$$\text{et } \Omega_p = \{ \underline{\theta}_p \in R^2 / |\underline{\theta}_p| \leq M_p \} \quad (\text{IV.26})$$

où M_f , M_g , ε et M_p sont des constantes positives spécifiées par le concepteur.

Ensuite nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i)} + x^{(n)} - x_d^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i)} + f(x, t) + g(x, t).u + d(t) - x_d^{(n)} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i)} + f(x, t) - \hat{f}(x/\underline{\theta}_f) + (g(x, t) - \hat{g}(x/\underline{\theta}_g)).u - \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i)} + x^{(n)} - \hat{p}(z/\underline{\theta}_p) \\ &\quad + d(t) - x_d^{(n)} \\ &= f(x, t) - \hat{f}(x/\underline{\theta}_p) + (g(x, t) - \hat{g}(x/\underline{\theta}_p)).u - \hat{p}(z/\underline{\theta}_p) + d(t) + \omega \\ &= \hat{f}(x/\underline{\theta}_p^*) - \hat{f}(x/\underline{\theta}_f) + (\hat{g}(x/\underline{\theta}_g^*) - g(x/\underline{\theta}_g)).u - \hat{p}(z/\underline{\theta}_p^*) - \hat{p}(z/\underline{\theta}_p) + d(t) + \omega \\ &= \underline{\phi}_f^T \underline{\xi}(x) + \underline{\phi}_g^T \underline{\xi}(x).u + \underline{\phi}_p^T \underline{\psi}(z) - \hat{p}(z/\underline{\theta}_p^*) + d(t) + \omega \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

avec $\underline{\phi}_f = \underline{\theta}_f^* - \underline{\theta}_f$, $\underline{\phi}_g = \underline{\theta}_g^* - \underline{\theta}_g$, $\underline{\phi}_p = \underline{\theta}_p^* - \underline{\theta}_p$.

Soit la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2\gamma_1} \underline{\phi}_f^T \underline{\phi}_f + \frac{1}{2\gamma_2} \underline{\phi}_g^T \underline{\phi}_g + \frac{1}{2\gamma_3} \underline{\phi}_p^T \underline{\phi}_p \quad (\text{IV.28})$$

où γ_1 , γ_2 , γ_3 sont des constantes d'apprentissage.

La dérivée de la fonction de Lyapunov V est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s.\dot{s} + \frac{1}{\gamma_1} \underline{\phi}_f^T \dot{\underline{\phi}}_f + \frac{1}{\gamma_2} \underline{\phi}_g^T \dot{\underline{\phi}}_g + \frac{1}{\gamma_3} \underline{\phi}_p^T \dot{\underline{\phi}}_p \\ &= s.(\underline{\phi}_f^T \underline{\xi}(x) + \underline{\phi}_g^T \underline{\xi}(x).u + \underline{\phi}_p^T \underline{\psi}(z) - \hat{p}(z/\underline{\theta}_p^*) + \omega + d(t)) + \frac{1}{\gamma_1} \underline{\phi}_f^T \dot{\underline{\phi}}_f + \frac{1}{\gamma_2} \underline{\phi}_g^T \dot{\underline{\phi}}_g + \frac{1}{\gamma_3} \underline{\phi}_p^T \dot{\underline{\phi}}_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s.\underline{\phi}_f^T \underline{\xi}(x) + \frac{1}{\gamma_1} \underline{\phi}_f^T \dot{\underline{\phi}}_f + s.\underline{\phi}_g^T \underline{\xi}(x).u + \frac{1}{\gamma_2} \underline{\phi}_g^T \dot{\underline{\phi}}_g + s.\underline{\phi}_p^T \underline{\psi}(z) + \frac{1}{\gamma_3} \underline{\phi}_p^T \dot{\underline{\phi}}_p - s.\hat{p}(z/\underline{\theta}_p^*) + s.\omega + s.d(t) \\
&= \frac{1}{\gamma_1} \underline{\phi}_f^T (\gamma_1 s.\underline{\xi}(x) + \dot{\underline{\phi}}_f) + \frac{1}{\gamma_2} \underline{\phi}_g^T (\gamma_2 s.\underline{\xi}(x).u + \dot{\underline{\phi}}_g) + \frac{1}{\gamma_3} \underline{\phi}_p^T (s.\underline{\psi}(z) + \dot{\underline{\phi}}_p) - s.\hat{p}(z/\underline{\theta}_p^*) + s.(\omega + d(t)) \\
&\leq \frac{1}{\gamma_1} \underline{\phi}_f^T (\gamma_1 s.\underline{\xi}(x) + \dot{\underline{\phi}}_f) + \frac{1}{\gamma_2} \underline{\phi}_g^T (\gamma_2 s.\underline{\xi}(x).u + \dot{\underline{\phi}}_g) + \frac{1}{\gamma_3} \underline{\phi}_p^T (s.\underline{\psi}(z) + \dot{\underline{\phi}}_p) \\
&\quad - s(D + \eta) \operatorname{sgn}(s) + s.d(t) + s.\omega \\
&< \frac{1}{\gamma_1} \underline{\phi}_f^T (\gamma_1 s.\underline{\xi}(x) + \dot{\underline{\phi}}_f) + \frac{1}{\gamma_2} \underline{\phi}_g^T (\gamma_2 s.\underline{\xi}(x) + \dot{\underline{\phi}}_g) + \frac{1}{\gamma_3} \underline{\phi}_p^T (s.\underline{\psi}(z) + \dot{\underline{\phi}}_p) - \eta |s| + s\omega \quad (\text{IV.29})
\end{aligned}$$

où $\dot{\underline{\phi}}_f = -\dot{\underline{\theta}}_f$, $\dot{\underline{\phi}}_g = -\dot{\underline{\theta}}_g$ et $\dot{\underline{\phi}}_p = -\dot{\underline{\theta}}_p$. Substituant (IV.17) - (IV.19) dans (IV.29), donc :

$$\dot{V} \leq s.\omega - \eta |s| \leq 0 \quad (\text{IV.30})$$

Car ω l'erreur d'approximation minimale dans (IV.30) est la meilleure que nous pouvons obtenir, dont la contrainte que toutes les signaux sont bornés. Pour compléter la preuve et établir la convergence asymptotique de l'erreur de poursuite, nous avons besoin d'assurer que la surface de glissement $s(\underline{e}) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Supposons que $|s(\underline{e})| \leq \eta$, alors l'équation (IV.30) peut être réécrite comme :

$$\dot{V} \leq |s(\underline{e})|.|\omega| - |s(\underline{e})|.\eta \leq \eta_s.|\omega| - |s(\underline{e})|. \eta \quad (\text{IV.31})$$

L'intégrale de (IV.31) devient :

$$\int_0^\tau |s(\underline{e})| d\tau \leq \frac{1}{\eta} (|V(0)| + |V(\tau)|) + \frac{\eta_s}{\eta} \int_0^\tau |\omega| d\tau \quad (\text{IV.32})$$

Nous avons $s(\underline{e}) \in L_1$. A partir (IV.31), la surface s est bornée et chaque terme de (IV.27) est aussi borné [Sastry 89]. Nous avons également $s(\underline{e}) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, donc le système est stable et l'erreur est asymptotiquement converge vers zéro.

Le schéma du contrôleur adaptatif par mode glissant flou proposé est présenté dans la figure IV.1.

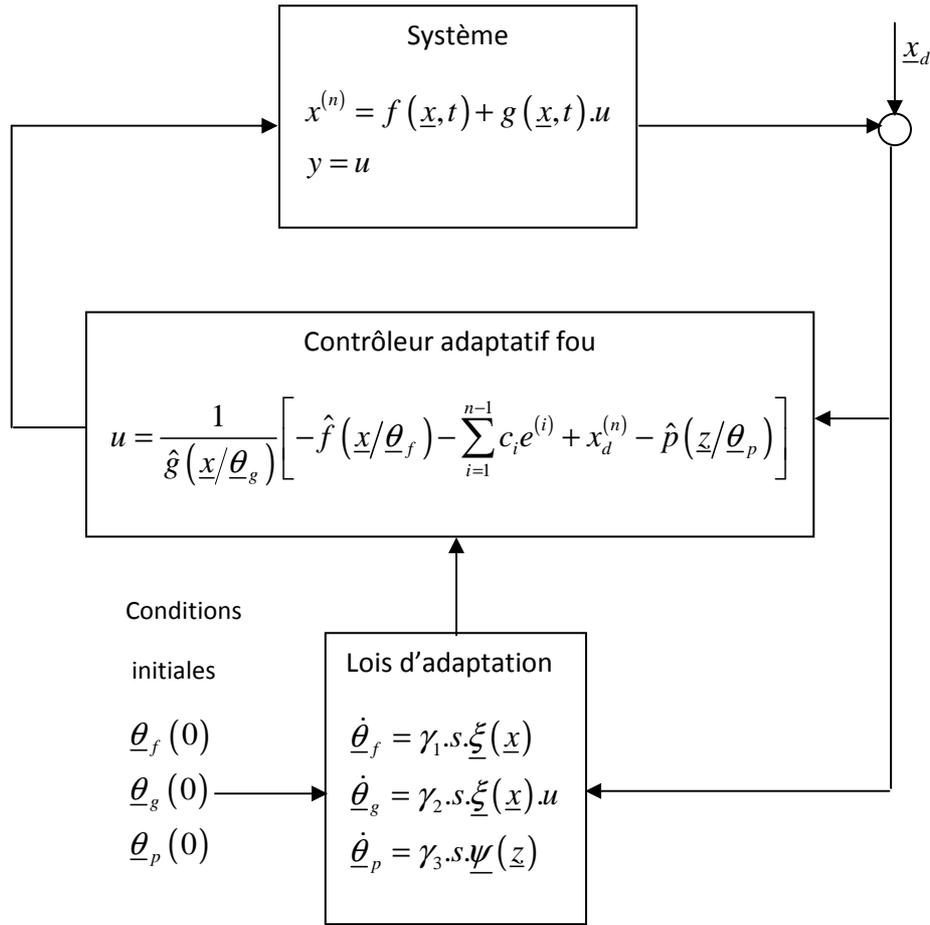


Figure IV.1 : Schéma bloc du contrôleur adaptatif par mode glissant flou proposé.

Remarques

1- Dans [Ho 07], la surface de glissement de type intégrale a été proposée pour les systèmes non linéaires dans le but que le terme de commande en commutation prédéfini u_{sw} peut réduire les broutements, et par conséquent éliminer l'erreur de convergence de l'état vers la trajectoire désirée. En général, le rôle d'un contrôleur PI est de réduire les erreurs dans la phase transitoire de la réponse du système [Ho 09].

2- La loi de commande u dans (IV.13) n'est vraie que dans un espace compact $U_c \in R^n$, avec $g(x, t) \neq 0$.

3- La mise en œuvre de notre contrôleur exige que $\hat{g}(x/\underline{\theta}_g) \neq 0$ doit être vérifiée. Pour cela, nous choisissons le vecteur initial $\underline{\theta}_g(0)$ positif et proche de zéro.

4- Le résultat de synthèse présenté ci-dessus est obtenu en appliquant l'hypothèse IV.1, afin de garantir que les paramètres du système sont bornés. Les lois d'adaptation (IV.17)-(IV.19) peuvent être modifiées en utilisant l'algorithme de projection dans [Wang 93, Wang 97].

IV.4. PROCEDURE DE CONCEPTION DU CONTROLEUR ADAPTATIF

Pour résumer l'analyse ci-dessus, on a suivi la procédure de conception du contrôleur adaptatif flou, qu'est décrite étape par étape comme suit :

- **Etape 1 :** Choisir les conditions initiales pour les paramètres θ_{p_1} et θ_{p_2} du contrôleur PI.
- **Etape 2 :** Indiquer les coefficients désirés c_1, c_2, \dots, c_n dans (IV.3).
- **Etape 3 :** Indiquer les paramètres de conception γ_1, γ_2 et γ_3 en se basant sur les contraintes pratiques.
- **Etape 4 :** Définir les ensembles flous F_i pour les variables linguistiques x_i et les fonctions d'appartenance μ_{F_i} couvrent uniformément l'univers de discours pour $i = 1, \dots, n$.
- **Etape 5 :** Construire les fonctions floues de base pour les systèmes flous $\hat{f}(\underline{x}/\underline{\theta}_f)$, $\hat{g}(\underline{x}/\underline{\theta}_g)$.
- **Etape 6 :** Construire les systèmes flous $\hat{f}(\underline{x}/\underline{\theta}_f) = \underline{\theta}_f^T \underline{\xi}(x)$ et $\hat{g}(\underline{x}/\underline{\theta}_g) = \underline{\theta}_g^T \underline{\xi}(x)$ dans (IV.13).
- **Etape 7 :** Construire la loi de commande (IV.13), avec les lois d'adaptations (IV.17)-(IV.19).
- **Etape 8 :** Appliquer la loi de commande résultante au système, puis calculer les lois adaptatives (IV.33)- (IV.34) pour ajuster le vecteur des paramètres $\underline{\theta}_f$, $\underline{\theta}_g$ et $\underline{\theta}_p$.

IV.5. EXEMPLE DE SIMULATION

Dans cet exemple, on applique l'algorithme proposé pour commander un pendule inversé dans le but de suivre une trajectoire de référence. La figure IV.2 représente le système avec $(x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta})$, dont les équations dynamiques sont [Ho 09] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g \sin(x_1) - \frac{mlx_2^2 \cos(x_1) \sin(x_1)}{m_c + m}}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2(x_1)}{m_c + m} \right)} + \frac{\cos(x_1)}{m_c + m} .u + d(t) \end{cases} \quad (\text{IV.33})$$

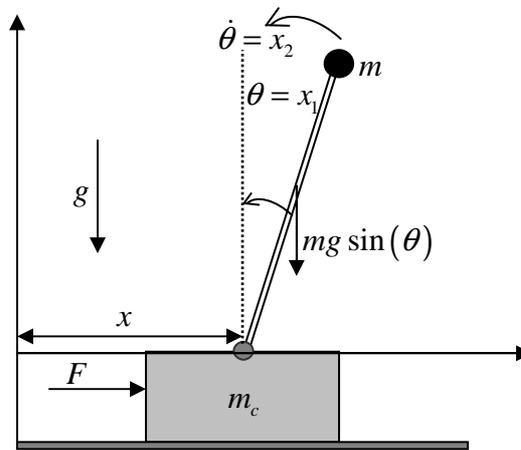


Figure IV.2 : Pendule inversé.

où

g accélération due à la gravité

m_c la masse du chariot

m la masse de la tige

l est la demi-longueur de la tige

u la commande appliquée

avec $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ est la gravité, $m_c = 1 \text{ kg}$, $m = 0.1 \text{ kg}$, $l = 0.5 \text{ m}$ et $d(t)$ est supposé être un signal carré avec une amplitude comprise entre ± 0.5 dans une période de 2π . Choisir la surface de glissement telle que $s(\underline{e}) = c_1 e + \dot{e}$, où $c_1 = 6$. Les valeurs initiales du paramètre ajustable $\underline{\theta}_p$ sont $\theta_{p_1}(0) = 10$ et $\theta_{p_2}(0) = 20$.

Pour $|x_i| \leq \pi/6$, $i=1,2$. On prend les fonctions d'appartenance définies sur l'univers de discours $[-\pi/6, \pi/6]$ comme suit :

$$\mu_{NM}(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i + \pi/6}{\pi/24}\right)^2\right], \quad \mu_{NS}(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i + \pi/12}{\pi/24}\right)^2\right],$$

$$\mu_Z(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i}{\pi/24}\right)^2\right], \quad \mu_{PS}(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i - \pi/12}{\pi/24}\right)^2\right],$$

$$\mu_{PM}(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i - \pi/6}{\pi/24}\right)^2\right]$$

L'objectif de cette commande est de maintenir le système pour suivre une trajectoire de référence donnée par $\underline{x}_d = \underline{\theta}_d = \frac{\pi}{10}(\sin(t) + 0.3\sin(3t))$.

Les fonctions f et g sont approximées avec 25 règles floues respectivement, et par conséquent les paramètres initiaux des règles floues sont choisis arbitrairement dans l'intervalle $[0.5, 2]$, avec $\gamma_1 = 60$, $\gamma_2 = 4$ et $\gamma_3 = 800$ sont les gains d'adaptation pour $\underline{\theta}_f$, $\underline{\theta}_g$ et $\underline{\theta}_p$ respectivement. Choisissons les conditions initiales $x = [-\pi/60, 0]$, en outre, un bruit de mesure injecté à la sortie de type gaussien de moyenne zéro et variance de 0.025.

Les résultats de simulation présentée ci-dessous, montrent la performance robuste de l'approche de commande proposée. Donc on peut constater que la poursuite de la référence désirée est bonne malgré la présence de bruit de mesure au niveau de sortie ainsi que les perturbations externes qui influencent le système.

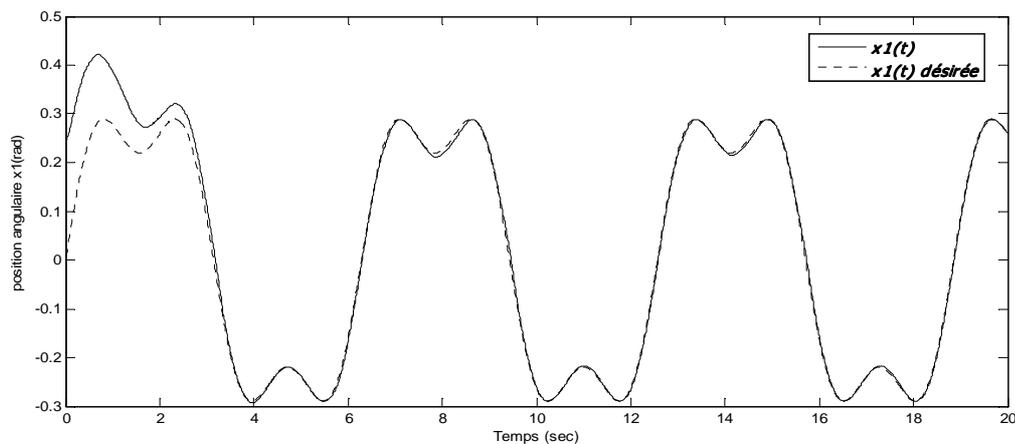


Figure IV.3 : Poursuite en position angulaire.

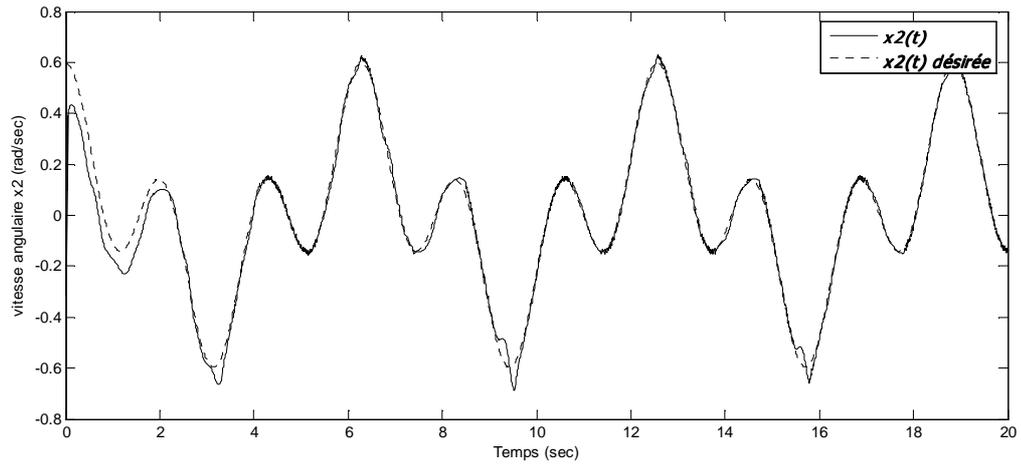


Figure IV.4 : Poursuite en vitesse angulaire.

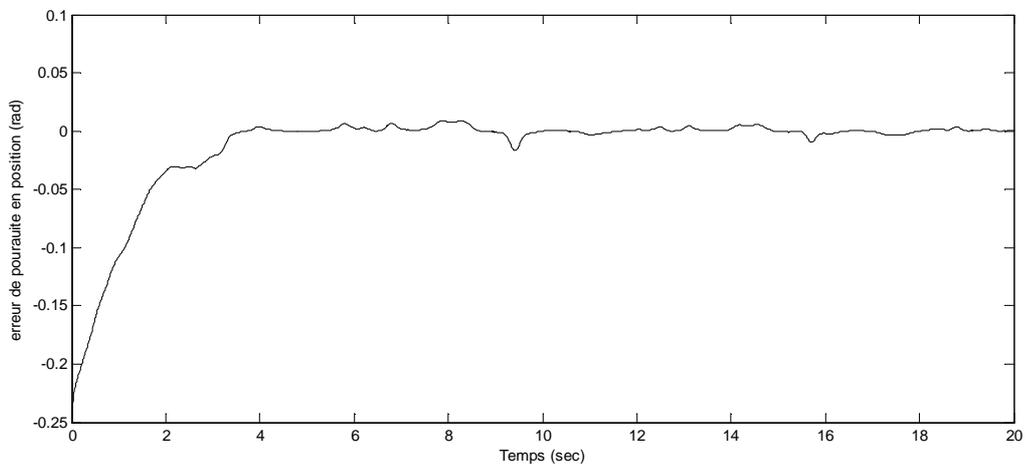


Figure IV.5 : Erreur de poursuite en position.

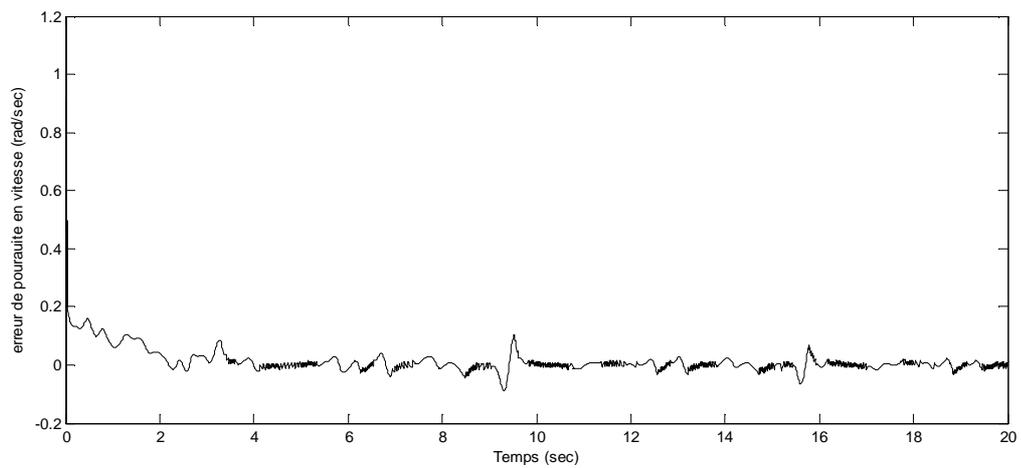


Figure IV.6 : Erreur de poursuite en vitesse.

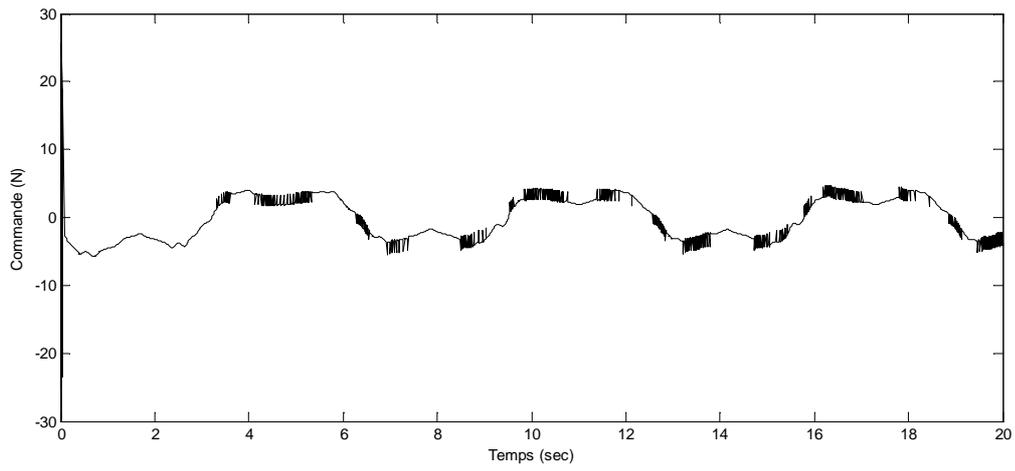


Figure IV.7 : Signal de commande $u(t)$.

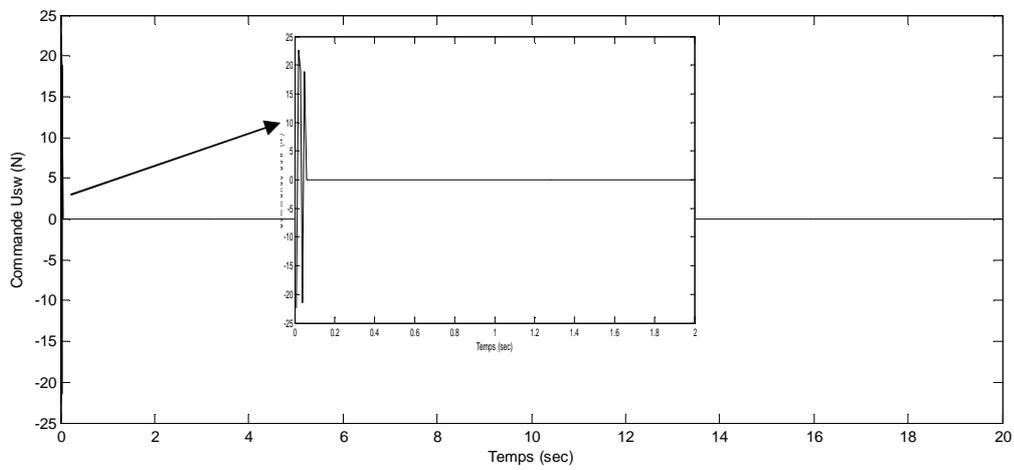


Figure IV.8 : Commande de commutation $u_{sw}(t)$.

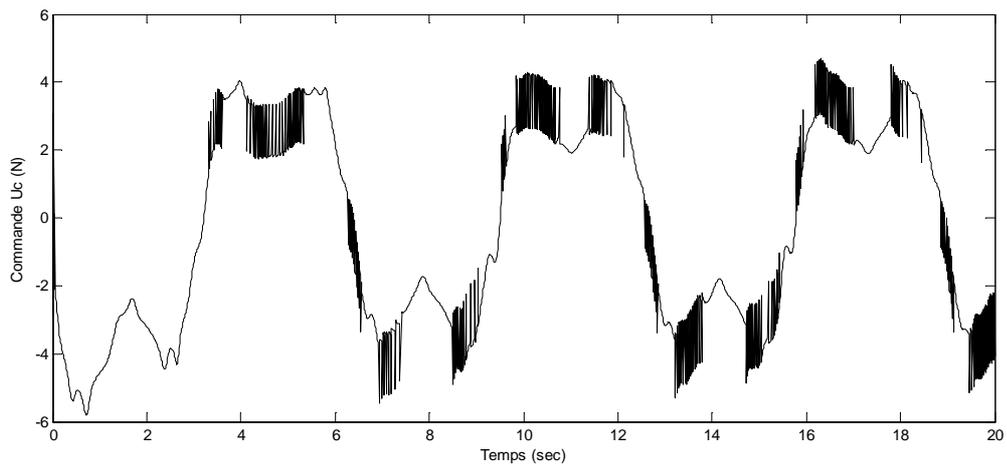


Figure IV.9 : Commande $u_c(t)$.

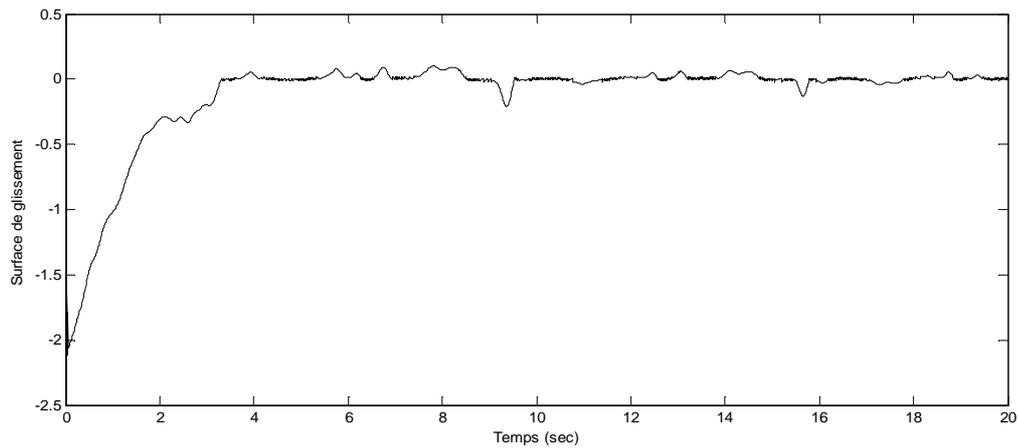
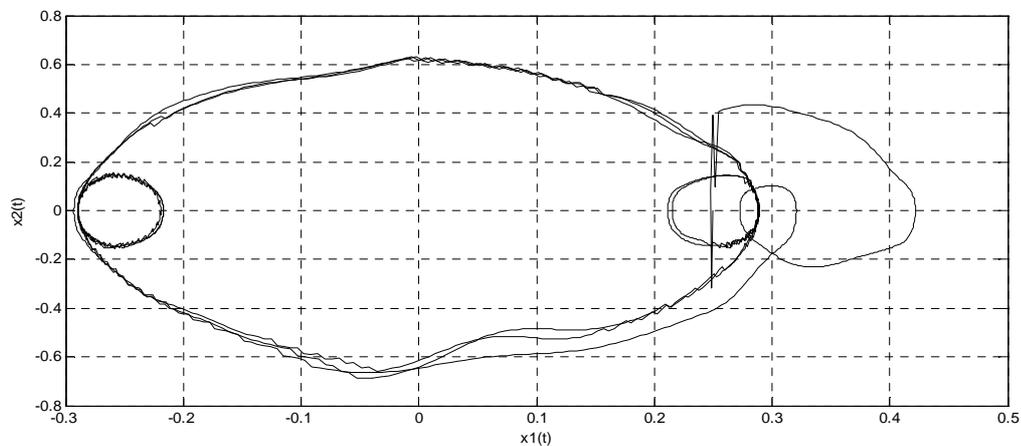
Figure IV.10 : Surface de glissement $s(\underline{e})$.

Figure IV.11 : Plan de phases.

IV.4. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons développé un contrôleur robuste en utilisant l'approche de modélisation floue et la technique de commande robuste par mode glissant intégrale. La synthèse de commande basée sur l'approche de Lyapunov qui n'exige pas de connaître exactement la dynamique du système à commander. La conception de l'algorithme de commande utilise l'inférence floue pour approximer la dynamique du système avec la commande par mode glissant par retour d'état, les paramètres du contrôleur proportionnel intégral (PI) sont approximés par les lois d'adaptation. Le système en boucle fermée est stable au sens de Lyapunov et l'erreur de poursuite converge vers zéro, ainsi que la surface de glissement qui converge rapidement vers l'origine. Enfin la méthode proposée a été appliquée

sur un pendule inversé pour suivre une référence donnée bornée. Les résultats de simulation montrent l'efficacité et les performances souhaitées de l'algorithme de commande proposé.

*CONCLUSION GENERALE ET
PERSPECTIVES*

CONCLUSION GENERALE ET PRESPECTIVES

Dans ce travail, nous avons abordé le problème de commande en poursuite de trajectoires des systèmes non linéaires décrits par les modèles flous de type T-S. Cette étude traite essentiellement de la synthèse de commande robuste pour les systèmes non linéaires incertains et/ou perturbés. Les approches élaborées, se basent sur un critère H_∞ pour atténuer l'effet des perturbations externes. Les résultats ainsi obtenus, sont formulés en termes de LMI pour une meilleure exploitation numérique des résultats.

Dans le chapitre I, nous avons mené une étude bibliographique, partant de la modélisation floue jusqu'à la synthèse de commande robuste, ce qui a permis de présenter un état de l'art sur les principaux résultats de la littérature concernant la stabilisation des modèles T-S. Dans cette partie, nous avons détaillé le principe de la commande PDC avec la mise en œuvre d'observateur flou T-S ainsi que quelques résultats concernant la relaxation des LMI. Quant aux systèmes T-S incertains et/ou perturbés utilisant un critère H_∞ .

Après un positionnement du problème concernant la poursuite de trajectoire des modèles T-S, le chapitre II vise à montrer l'intérêt de l'approche de synthèse de commande proposée dans ce manuscrit. Ainsi, la synthèse de commande robuste des modèles T-S perturbés pour assurer le suivi de trajectoire avec un modèle de référence linéaire est abordée. La loi de commande proposée se base sur l'approche H_∞ qui consiste à minimiser l'erreur de poursuite par rapport à l'ensemble des perturbations. Au cours de cette approche, nous avons montré des conditions relâchées qui tiennent compte du nombre maximal de règles actives à chaque instant. Aussi, les conditions des théorèmes qui se présentent sous forme de BMI (Inégalités Matricielles non linéaires) ont pu être résolues en deux étapes. Des résultats de simulation ont montré les domaines de faisabilité des conditions obtenues.

Pour étendre les approches développées dans le chapitre II, nous nous sommes ensuite intéressés aux modèles T-S incertains dans le troisième chapitre. Les incertitudes structurelles ou paramétriques admissibles et bornées sont généralement dues à la modélisation ou aux paramètres variant dans le temps. Ainsi, nous avons développés deux approches pour garantir la stabilité et les performances de poursuite dans le cadre de ce type de modèles, une approche

BMI et une autre directement sous forme LMI. La seconde est obtenue directement en LMI en changeant la structure du système augmenté. Nous avons ensuite étendue la seconde approche au cas où tous les états ne sont pas disponibles à la mesure en considérant la synthèse d'un observateur flou de type *Luenberger*. Des résultats de simulation ont permis d'illustrer les performances de poursuite et d'observation proposés dans ce chapitre.

Dans le quatrième chapitre, nous avons abordé le problème de synthèse de commande robuste floue dans le cadre de la poursuite de trajectoire pour les systèmes non linéaires. On a proposé un algorithme de commande utilisant de la logique floue et la technique de commande par mode glissant (SMC). La synthèse de commande basée sur l'approche de Lyapunov qui n'exige pas de connaître exactement la dynamique du système à commander. La conception de l'algorithme de commande utilise l'inférence floue pour approximer la dynamique du système avec la commande par mode glissant par retour d'état, les paramètres du contrôleur proportionnel intégral (PI) peuvent être réglés par les lois d'adaptation. La stratégie de commande proposée fournit une bonne performance en stabilité et en robustesse en présence des incertitudes et des perturbations externes.

Par ailleurs, un certain nombre de perspectives sont envisageables dans ce travail. A très court terme, il s'agit d'appliquer les approches développées dans le deuxième et le troisième chapitre sur un système multi entrées multi sorties (MIMO). Nous comptons également aborder la recherche d'un principe de séparation entre la commande et l'observateur développés. Dans le même contexte, il n'y a, à notre connaissance, quasiment pas de résultats établis pour ce type de systèmes lorsque les variables de prémisses $z(t)$ ne sont pas mesurables [Guerra 2006]. Il s'agit d'utiliser des concepts développés pour des systèmes dynamiques hybrides tels que l'utilisation de fonctions de Lyapunov multiples pour l'étude de stabilité. La prise en compte de ces techniques dans le cas de la commande des modèles T-S est très récente, et peu de travaux concernent les modèles incertains et perturbés et, encore moins, les systèmes écrits sous forme descripteurs. En effet, l'utilisation de fonctions de Lyapunov multiples serait une alternative, pour avoir des conditions plus relâchées et réduire le conservatisme d'obtention des gains de commande.

Des perspectives, d'un point de vue expérimental sont également envisageables. En effet, les machines utilisées dans la plupart des applications industrielles, représentent des systèmes robotisés à plusieurs degrés de libertés, pour lesquels les protocoles d'entraînements induisent des trajectoires particulières à effectuer dans une zone compacte de l'espace d'évolution. Dans ce cas, les approches que nous avons détaillées sont parfaitement adéquates pour les besoins et les performances désirées. Il s'agira de considérer les modèles T-S de ces systèmes, les incertitudes pouvant venir de la complexité du modèle ou de la prise en compte de l'interaction homme machine pendant le mouvement. Des lois de commandes robustes seront nécessaires. De plus, pour ce type de système mécanique, une écriture du modèle sous forme descripteur est souvent appropriée.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Alazard 99] Alazard, D., Cumer, C., Apkarian, P., Gauvrit, M., et Ferreres G. Robustesse et Commande Optimale. *Cepaduès*, 1999.
- [Berestecheer 01] Berstecheer, R.G., Palm, R., et Unbehauen, H.D., An adaptive fuzzy sliding-mode controller. *IEEE Trans. Industrial Electron.*, Vol.48, pp.18-31, 2001.
- [Borne 93] Borne, P., Richard, J.P., et Radhy, N.E., Stabilité, stabilisation, régulation: approche par les normes vectorielles, volume 2 de Systèmes non linéaires : Stabilité-stabilisation. *Masson Editeur*, 1993.
- [Boyd 94] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V., Linear Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia, PA: *SIAM*, 1994.
- [Buckley 93] Buckley, J., Sugeno type controllers are universal controllers. *Fuzzy Sets and Systems*. Vol, 53 pp. 299–303, 1993.
- [Castro 95] Castro, J., Fuzzy logic controllers are universal approximator. *IEEE Trans. Syst., Man and Cyber-part C*. Vol.25, pp. 629-635, 1995.
- [Chadli 02] Chadli, M., Stabilité et commande de systèmes décrits par de multimodèles *Thèse de Doctorat de l'INPL*. 2002.
- [Chang 02] Chang, W, Bae Park, J., Joo, Y. H, and Chen, G., Design of robust fuzzy model based controller with sliding mode control for SISO nonlinear systems. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol 125, Issue 1, pp. 1-22, 2002.
- [Chen 00] Chen, B. S., Tseng C. S., and Uang, H. J., Mixed H_2/H_∞ fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems : An LMI approach. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, Vol. 8 No 3, pp. 249-265, 2000.
- [Chiang 01] Chiang, W.L., Chen, T.W., Liu M.Y., et Hsu, C.J., Application and robust H_∞ control of PDC fuzzy controller for nonlinear systems with external disturbance. *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 9, No. 2, pp 84-90, 2001.
- [Diordiev 03] Diordiev, A., Ursaru, O., Lucanu, M., and Tigaeru,L., A hybrid PID fuzzy controller for dc/dc converters. *Inter. Symp. On Signals, Circuits and Systems*, Vol. 1, pp. 97-100, 2003.
- [El Ghaoui 97] El Ghaoui, L., Oustry, F., and Ait Rami, M.A, Cone complementary linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transaction and Automatic Control*, Vol. 42, No. 8, pp. 1171-1176, 1997.
- [Essounbouli 04] Essounbouli N. Commande adaptative floue robuste des systèmes non linéaires incertains. *Thèse de doctorat, CReSTIC*. Université de Reims, 2004.

- [Gahinet 95] Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J., and Chilali, M., LMI Control Toolbox. Natick, MA: *MathWorks*, 1995.
- [Gasso 99] Gasso, K., Mourot, G., Boukhriss, A., et Ragot, J., Optimisation de la structure d'un modèle de Takagi-Sugeno. *Actes des rencontres francophones LFA'99, Valenciennes*, France, pp 233-240, 1999.
- [Gasso 00] Gasso, K., Identification des systèmes dynamiques non-linéaires : approche multi-modèles. *Thèse de doctorat de l'INPL*, Décembre, 2000.
- [Golea 02] Golea, N., Golea, A., and Benmahammed, K., Fuzzy model reference adaptive control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 10, Issue: 4, pp. 436-444, 2002.
- [Guerra 99] Guerra, T.M., Vermeiren, L., Delmotte, F., et Borne, P., Lois de commande pour systèmes flous continus Lois de commande pour systèmes flous continus. *JESA*, Vol. 33, No 4, p. 489-527, 1999.
- [Guerra 03] Guerra, T. M., et Vermeiren, L., Stabilité et stabilisation à partir de modèles flous. *Commande flous 1 : de la stabilisation à la supervision*. Sous la direction de L. Foulloy, S. Galichet et A. Titli. *IC2 Hermes*, pp59-98, 2003.
- [Guerra 06] Guerra, T.M., Kruszewski, A., Vermeiren, L., and Tirmant, H., Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi-Sugeno's form, rapport interne du LAMIH, *Fuzzy set and systems* à paraître en 2006.
- [Ho 07] Ho, H.F, Wong, Y.K., et Rad, A.B., Robust fuzzy tracking control for robotic manipulators. *Elsevier, Simul. Modell. Practice Theory* 15., pp801-816, 2007.
- [Ho 09] Ho, H.F, Wong, Y.K., et Rad, A.B., Adaptive fuzzy sliding mode control with chattering elimination for nonlinear SISO systems. *Elsevier, Simul. Modell. Practice Theory* 17., pp1199-1210, 2009.
- [Hung 93] Hung, J.Y., Gao, W., Hung, J.C., Variable structure control : A survey. *IEEE Trans., Industrial and Electronic.*, Vol. 40, pp 2-22, 1993.
- [Kim 95] Kim, S.W., Lee, J.J., Design of fuzzy controller with fuzzy sliding surface. *Fuzzy Sets Syst.*, pp359-367, 1995.
- [Kim 00] Kim, E., and Lee, H., New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, Vol. 8. No 5, 2000.
- [Khalil 96] Khalil, H., *Nonlinear systems*. Prentice hall, Inc. second edition, USA, 1996.
- [Kosko 94] Kosko, B., Fuzzy systems as universal approximators. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 8-12, pp.1153 – 1162. March 1992
- [Kung 97] Kung, C., and Li, H., Tracking control of non linear systems by fuzzy model-based controller. in *Proc. IEEE Int. Conf.*, Vol. 2, July 1997, pp. 623-628. 1997.

- [Lam 02] Lam, H. K., Frank H. F. Leung, and Peter K. S. Tam., A switching controller for uncertain nonlinear systems. *IEEE Control Systems Magazine LECTURE NOTES*, pp. 7-14, 2002.
- [Lauber 03] Lauber, J., Moteur à allumage commandé avec EGR: modélisation et commande non linéaire. *Thèse de doctorat*, LAMIH, Université de Valenciennes, 2003.
- [Lauber 04] Lauber, J., Guerra, T.M., Perruquetti, W., LMI conditions for continuous uncertain TS models in closed-loop with an observer: application to engine speed control. *IEEE VPP*, Paris October 2004.
- [Lee 01] Lee, K.R., Jeung, E.T., Park, H.B., Robust Fuzzy H^∞ Control for Uncertain Nonlinear Systems via State Feedback: an LMI approach. *Elsevier Fuzzy Sets and Systems*. pp. 123-134, 2001.
- [Li 00] Li, J., Wang, H.O., Newmann, D., and Tanaka, K., Dynamic parallel distributed compensation For Takagi-Sugeno systems: An LMI approach. *Information Sciences*, 2000. non. 123, pp. 201-221.
- [Liu 03] Liu, X., and Zhang, Q., New approaches to H^∞ controller design based on fuzzy observers for fuzzy TS systems via LMI. *Automatica*, Vol 39, Issue 9, pp. 1571-1582, 2003.
- [Ma 98] Ma, X.J., Sun, Z. Q., He., Y.Y., Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6, no. 1, p. 41-50, 1998.
- [Mamdani 74] Mamdani, E.H., Application of fuzzy algorithm for control of simple dynamic plant. *IEE*, Vol 121, pp. 1585-1588, 1974.
- [Manamanni 98] Manamanni, N., commandes et observateurs pour systèmes pneumatiques : Méthodologie pour la locomotion à pattes, *Thèse de doctorat* de l'Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1998.
- [Manamanni 05] Manamanni, N., Mansouri, B., Hamzaoui, A., J. Zaytoon, Relaxed Conditions in Tracking Control Design for T-S Fuzzy Model. Version Corrigée en Relecture au *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*.
- [Mansouri 05] Mansouri, B., Manamanni, N., A. Hamzaoui, Zaytoon., J., Tracking control for uncertain Takagi Sugeno fuzzy systems with external disturbances, *16th IFAC World Congress*. Prague July 2005.
- [Mansouri 09] Mansouri, B., Manamanni, N., Guelton, K., Kruszewski, A., Guerra, T.M., Output feedback LMI tracking control conditions with H^∞ criterion for uncertain and disturbed T-S models. *Elsevier Inform Sciences.*, pp 446-457, 2009.
- [Morère 01] Morère., Y. Mise en oeuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno. *Thèse de doctorat*, LAMIH-SF, del'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2001.
- [Pagès 03] Pagès, O., El Hajjaji, A., Ordonez. R., Hinfinité Tracking for fuzzy systems with an application to four Wheel steering of vehicles. *IEEE; Systems, Man and Cybernetics, International Conference*. Vol.5. pp. 4364 - 4369, 2003.

- [Slotine 91] Slotine, J.E., Li, W.P., Applied nonlinear control. Prentice Hall, 1991.
- [Su 94] Su, C.Y., Stepanenko, Y., Adaptive control of a class of nonlinear system with fuzzy logic. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Vol. 2, pp 285-294, 1994.
- [Sastry 89] Sastry, S., Bodson, M., Adaptive control : Stability, Convergence and Robustness. Prentice Hall, 1989.
- [T-S 85] Takagi, T., and Sugeno, M., Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control". *IEEE Trans. Syst., Man and Cyber*, Vol.1115, pp. 116-132,1985.
- [Tanaka 96] Tanaka, K., Ikeda, T., and Wang, H. O., Robust Stabilization of a Class of Uncertain Nonlinear Systems via Fuzzy Control: Quadratic Stabilizability, H^∞ Control Theory, and Linear Matrix Inequalities. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, Vol. 4 No 1, 1996.
- [Tanaka 98] Tanaka, K., Ikeda, T., and Wang, H. O., Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys*, Vol. 6 No 2, May 1998.
- [Tanaka 98a] Tanaka, K., Nishimura, M., and Wang, H. O. Multi-objective fuzzy control of High Rise/High speed elevators using LMIs. *American Control Conference*, pp. 3450-3454, 1998.
- [Tanaka 01] Tanaka, K., Wang. H.O., Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. *John Wiley & Son Eds, New York, Wiley-Interscience* ISBN 0-471-32324-190000, 2001.
- [Taniguchi 99] Taniguchi, T., Tanaka, K., Yamafuji, K., and Wang, H. O., A new PDC Fuzzy Reference Models. *Proceedings IEEE International Fuzzy Systems Conference* August 1999, Seoul Korea, 1999.
- [Taniguchi 01] Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohtake, H., and Wang., H.O., Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 9, No 4, p. 525-537, 2001.
- [Teixeira 03] Teixeira, M., E Assunção, C. M., and Avellar, R. G., On relaxed LMI-Based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, Vol. 11 No 5, 2003.
- [Tong 02] Tong, S., Wang, T., Li, H.X., Fuzzy robust tracking control for uncertain nonlinear systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 30, pp.73-90, 2002.
- [Tseng 01] Tseng, C., Chen, B., and Uang, H. J., Fuzzy tracking Control Design for nonlinear Dynamic systems via T-S fuzzy model. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, vol. 9 no 3, pp. 381-392, 2001.
- [Tuan 01] Tuan, H.D., Apkarian, P., Narikiyo, T., and Yamamoto, Y., Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, Vol. 9 No 2, pp. 324-332, 2001.

- [Uang 04] Uang, H., and Huang, G.S., A robust fuzzy model following observer-based control design for nonlinear system. *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Control Applications*. Vol. 1, pp. 171-176, 2004.
- [Utkin 77] Utkin, V.I., Variable Structure Systems with Sliding Modes. *IEEE Trans. On Automatic Control*, Vol. 22, pp. 212-222, 1977.
- [Wang 93] Wang, L.X., Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Vol. 1, pp 146-155, 1993.
- [Wang 95] Wang, H. O., K. Tanaka and M. Griffin, "Parallel Distributed Compensation of Nonlinear Systems by Takagi-Sugeno Fuzzy Model" *Proc. Fuzz IEEE/IFES*, pp. 531-538, 1995.
- [Wang 96] Wang, H.O., Tanaka, K., and Griffin, M., An approach to fuzzy control of non linear systems : Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol 4, pp 14-23, 1996.
- [Wang 01] Wang, J., Rad, A.B., and Chan, P.T., Indirect adaptive fuzzy sliding mode control: Part I-Fuzzy Switching. *Fuzzy sets and Systems*, vol. 122, no1, pp.21-30, August, 2001.
- [Wu 00] Wu, S. J., and Lin, C. T., Optimal fuzzy controller design: local concept approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol 8, No. 2. pp 171-185, 2000.
- [Xiadong 02] Xiadong, L. and Zhang, O., H_∞ Controller Based on Fuzzy Observers for T-S Fuzzy Systems via LMI. *Proc of the IEEE, CDC*. Las Vegas, Nevada USA, 2002.
- [Xiao-Jun 98] Xiao-Jun, M., Sun, Z. O., and He, Y. Y., Analysis and Design of Fuzzy Controller and Fuzzy Observer. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, Vol. 6 No 1, 1998.
- [Xie 99] Xie, W.F., Rad, A.B., Fuzzy on line identification of SISO nonlinear systems. *Fuzzy Sets and Systems*, vol.107, no 3, pp. 323-334, Nov, 1999.
- [Ying 99] Ying, H., Analytical analysis and feedback linearization tracking control of the general Takagi-Sugeno fuzzy dynamic systems. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, Vol. 29, pp 290-298, 1999.
- [Yoneyama 00] Yoneyama, J., Nishikawa, M., Katayama, H., and Ichikawa, A., Output stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 111, p. 253-266, 2000.
- [Zadeh 65] Zadeh, L.A. Information and control. *Fuzzy Sets*, No 8. pp. 338-353, 1965.
- [Zeng 95] Zeng; Xiao-Jun., Singh, M.G.; Approximation theory of fuzzy systems-MIMO case. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*.Vol. 3, No. 2., pp. 219 - 235, 1995.
- [Zeng 00] Zeng, K., Zhang, N. Y., and Xu, W. L., A comparative study on sufficient condition for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. Vol. 8, No. 6, pp. 773-780, 2000.

- [Zhao 96] Zhao, J., Gorez, R., and Wertz., V., Fuzzy controllers with guaranteed robustness and performance. *EUFIT'96*, Aachen, pp. 1886-1890, 1996.
- [Zheng 02] Zheng, F., Wang, Q., and Lee, T. H., Output tracking control of MIMO fuzzy nonlinear systems using variable structure control approach. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, Vol. 10 No 6, December 2002.
- [Zhou 88] Zhou, K., and Khargonedkar, P., Robust Stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *Sys. Control Letters.*, 10, pp. 17-20, 1988.

Résumé

Résumé :

Ce mémoire a pour objet de traiter le problème de commande floue en poursuite (Tracking) pour les systèmes non linéaires incertains et perturbés décrits par les modèles flous de type T-S (Takagi Sugeno). Une problématique récurrente dans ce type de problème concerne les transformations matricielles pour l'obtention des conditions en termes de LMI (Linear Matrix Inequality), en l'occurrence, la possibilité de l'exploitation numérique de ces résultats. Dans ce cadre, nous avons synthétisé une loi de commande robuste de type PDC dans le cas des modèles T-S perturbés ensuite incertains et perturbés selon un critère H_∞ . Pour spécifier la trajectoire désirée et par conséquent assurer la poursuite de trajectoire, nous avons utilisé un système de référence. Le cas avec observateur flous de type T-S a été traité. Les résultats obtenus, sont présentés en approche LMI. Cette approche montre l'efficacité de l'exploitation numérique des résultats. Les résultats dans ce cas sont également reformulés directement en LMI.

Mots clés : Commande floue, commande robuste, critère H_∞ , inégalité matricielle linéaire (LMI), mode glissant, modèle de référence, modèle Takagi-Sugeno, observateur flou, poursuite de trajectoire, système flou, système non linéaire, PI.

Abstract:

This work deals with a fuzzy tracking control design for uncertain nonlinear dynamic system with external disturbances and using a T-S (Takagi-Sugeno) fuzzy model description. In this case, a recurring problem is related to the LMI (Linear Matrix Inequality) formulation. In this way, we have synthesized a robust control law for T-S fuzzy perturbed systems an uncertain perturbed systems based on H_∞ performances. To specify the desired trajectory and consequently to ensure the tracking trajectory, we have used a reference model. The case with fuzzy observer is also treated. The obtained results are presented in approach, BMI (Bilinear Matrix Inequality) and LMI (Linear Matrix Inequality) one. This last approach shows the effectiveness of the numerical exploitation of the results. The results in this case are also reformulated directly in LMI's terms.

Keywords: Fuzzy control, robuste control, linear matrix inequality (LMI), tracking, H_∞ robust control, sliding mode, Takagi-Sugeno fuzzy model, fuzzy systems, fuzzy observer, nonlinear systems, model of reference, PI.

المخلص:

هذا العمل يتناول تصميم تتبع لنظام مراقبة غامض غير مؤكد مع الدينامية غير الخطية الاضطرابات الخارجية ، واستخدام واتس (تاكاجي ، Sugeno) وصف نموذج غامض. في هذه الحالة ، يتم المتعلقة مشكلة متكررة في صياغة LMI (مصنوفة عدم المساواة الخطي). وبهذه الطريقة ، وتوليفها لدينا قانون للرقابة قوية غامض بالقلق على أنظمة غير مؤكد بالقلق الأنظمة القائمة على الأداء H_∞ . لتحديد المسار المطلوب ، وبالتالي لضمان مسار تتبع ، فقد استخدمنا نموذج مرجع. كما يتم التعامل مع هذه القضية المراقب غامض. وعرضت النتائج التي تم الحصول عليها في النهج، ومؤشر كتلة الجسم (شبه مصنوفة عدم المساواة خطيه) و (مصنوفة عدم المساواة الخطي) LMI واحدة. هذا النهج الأخير يظهر فعالية استغلال العددية للنتائج. وأيضا إعادة صياغة النتائج في هذه الحالة مباشرة من حيث LMI.

كلمات البحث : ضبابي السيطرة ، وعدم المساواة المصنوفة الخطية (LMI) ، وتتبع وحاء ∞ سيطرة قوية، نموذج تاكاجي-Sugeno ، غامض ، المراقب غامض ، تتبع مسار ، أنظمة غير الخطية ، النموذج المرجعي.