

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF

MEMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences
Département de Physique
Pour l'Obtention du Diplôme de

MAGISTER

Option : Energétique et Mécanique des Fluides

Par

KESSAI ABDELKRIM

THEME

**RESOLUTION D'UN PROBLEME THERMIQUE INVERSE
POUR LA DETERMINATION DES DEFAUTS
A L'INTERIEUR D'UN CORPS SOLIDE**

Soutenu le :
Devant le Jury Composé par :

Président :	Dr K. Kassali	Professeur	Université de Sétif
Rapporteur :	Dr M. Guellal	Maitre de Conférences 'A'	Université de Sétif
Examineur:	Dr M. Chegaar	Professeur	Université de Sétif
Examineur:	Dr S. Nacef	Professeur	Université de Sétif

Table des Matières

Nomenclature

Introduction générale	1
Chapitre I : Etude bibliographique	4
1. Les différentes méthodes de contrôle non destructif dans les corps solides	5
1.1. Les défauts	5
1.1.1. Les défauts de surface	5
1.1.2. Les défauts internes	6
1.2. Principe de la détection d'un défaut	6
1.3. Ressuage	6
1.4. Procédés à flux de fuite magnétique	8
1.5. Courants de Foucault	9
1.6. Radiographie et techniques connexes	10
1.7. Ultrasons	11
1.8. La thermo-détection	12
1.9. La photodétection	14
1.9.1. Méthode modulée	14
1.9.2. Méthode impulsionnelle (méthode flash)	15
1.10. Contrôle thermique non destructif	20
2. Généralités sur les méthodes inverses	22
2.1. Définition	22
2.2. Fonction mal posée au sens d'Hadamard	23
2.2.1. Existence de la solution.....	24
2.2.2. Unicité de la solution	24
2.2.3. Stabilité vis-à-vis des faibles variations	25
2.3. Application de la méthode dans différents domaines	26
2.3.1. Problèmes inverses en sismique	26
2.3.2. Problèmes inverses en hydrogéologie	28
2.3.3. Applications thermiques	29
Chapitre II : Généralités sur les méthodes de résolution des problèmes de conduction	31
1. Introduction	32
2. Méthodes de résolution en régime permanent	32

2.1. Méthodes directes	32
2.2. Méthode de séparations de variables (conduction en milieu limité)	34
2.3. Méthode du coefficient de forme	38
3. Méthodes de résolution en régime variable	40
3.1. Milieu à température uniforme	40
3.2. Méthodes de séparation de variables	41
3.2.1. Cas d'un milieu semi infini avec une température sinusoïdale imposée en surface, régime périodique établi	41
3.2.2. Cas d'une plaque plane soumise à une température constante	42
3.2.3. Cas d'une géométrie cylindrique	44
3.3. Méthode basée sur la transformée de Laplace	48
3.3.1. Cas d'une température constante imposée sur un milieu semi-infini	48
3.3.2. Milieu avec changement d'état	51
3.4. Méthode des quadripôles	54
3.5. Méthodes numériques	55
3.5.1. Méthode des différences finies	56
3.5.2. Méthodes des éléments finis	60
3.6. Méthode analogique	64
3.7. Méthode graphique	64
4. Conclusion	65
Chapitre III : Analyse de la présence de défaut dans un corps solide	66
1. Introduction	67
2. Cas d'un matériau de forme plane	67
2.1. Formulation mathématique	67
2.1.1. Cas d'une plaque plane sans présence de défaut	69
2.1.2. Cas d'une plaque plane en présence d'un défaut	69
2.2. Résolution numérique	70
2.2.1. Cas sans défaut	70
2.2.2. Cas de présence de défaut	71
3. Cas d'un matériau de forme cylindrique	72
3.1. Formulation mathématique	72
3.1.1. Cas sans défaut	73
3.1.2. Cas de présence de défaut	73

3.2. Résolution numérique	74
3.2.1. Cas sans défaut	74
3.2.2. Cas avec défaut	75
4. Cas d'un solide de conductivité thermique non uniforme	76
5. Résultats et discussions	79
5.1. Cas d'un cylindre creux contenant un défaut	79
5.2. Cas d'une plaque plane contenant un défaut	80
5.3. Cas d'un cylindre de conductivité thermique non uniforme	80
6. Conclusion	86
Chapitre IV : Identification par méthode inverse de la conductivité thermique dans un solide hétérogène	87
1. Introduction	88
2. Formulation du problème direct	89
3. Problème inverse et méthode d'optimisation	90
4. Calcul de variation	91
4.1. Définition de la dérivée directionnelle	91
4.2. Problème de sensibilité	92
4.3. Profondeur de descente	92
5. L'équation du problème adjoint et l'équation du gradient du critère	94
5.1. L'équation adjointe	96
5.2. Gradient du critère	97
5.3. Minimisation du critère	97
5.4. Méthode du gradient conjugué	98
6. Formulation d'un problème exacte	99
7. Résolution numérique du problème direct	101
7.1. Résolution numérique du problème direct	101
7.2. Résolution numérique de l'équation adjointe	102
7.3. Résolution numérique de l'équation de sensibilité	103
8. Résultats et discussions	105
9. Conclusion	111
Conclusion générale	112
Référence bibliographiques	115

Liste des Figures

Figure I-1 (a ,b ,c): Principe de la méthode de ressuage par liquide pénétrant pré émulsifié	07
Figure I-2 : Contrôle par magnétoscopie	08
Figure I-3 (a+b): Principe de la détection par courants de Foucault	09
Figure I-4 : les rayons X sont des rayons ionisant à très courte longueur d'onde	10
Figure I-5 : principe du contrôle par radiographie	10
Figure I-6 : principe du contrôle par ultrasons	12
Figure I-7: spectre électromagnétique	13
Figure I-8 : Dispositif à excitation par lampes halogènes	15
Figure I-9 : Dispositif à excitation par lampes flashes	16
Figure I-10 : Principe du diffusivimètre	17
Figure I-11 : Exemple de thermogramme	18
Figure I-12 : Le modèle thermique	18
Figure I-13 : Allure de la réponse en température	19
Figure I-14 : Matériau avec défaut	20
Figure I-15: Variation de différence de température en fonction de temps pour différentes épaisseurs et positions de défaut.	22
Figure I-16 : Problème directe et inverse	23
Figure I-17 : Existence de la solution	24
Figure II-1 : Principe de la méthode de séparation de variables	35
Figure II-2 : Solution du système (α)	37
Figure II-3 : Méthode de coefficients de forme	38
Figure II-4 : Température sinusoïdale imposée en surface, en régime périodique établi	41
Figure II-5 : Plaque plane sou mise à une température constante	42
Figure II-6 : Solution graphique de l'équation transcendante	47
Figure II-7 : Température uniforme imposer sur milieu semi -infinie	50
Figure II-8 : Ecoulement unidirectionnel dans un mur plan	54
Figure II-9 : Résolution exacte et numérique du problème de conduction thermique non stationnaire pour un mur plan.	58
Figure II-10 : Domaine plan discrétisée en 12 éléments relies entre eux par 15 nœuds	61
Figure II-11: Evolution des températures dans un milieu semi infini	65
Figure III-1 : Principe de conservation de flux de chaleur	67

Figure III-2 : Plaque plane en présence de défaut	69
Figure III-3 : Sphère creuse utilisée	73
Figure III-4 : Evolution de la température en fonction du rayon. Cylindre $R_i/R_e=0.66/1$ sans défaut	81
Figure III-5: Evolution de la température en fonction du temps Cylindre $R_i/R_e =0.66/1$ sans défaut	81
Figure III-6 : Evolution de la température en fonction du rayon. Cylindre $R_i/R_e =0.66/1$ avec défaut $R_1/R_2=0.833/0.9$	82
Figure III-7: Evolution de la température en fonction du temps. Cylindre $R_i/R_e =0.66/1$ avec défaut, $R_1/R_2 = 0.833/0.9$	82
Figure III-8 : Evolution de la température en fonction du rayon à $t= 0.0012$.	83
Figure III-9 : Evolution de la température en fonction du temps pour $r= 0.9298$	83
Figure III-10 : Evolution de la température en fonction de la position. Plaque plane sans défaut	84
Figure III-11 : Evolution de la température en fonction de la position. Plaque plane avec défaut , $x_1=0.7$ et $x_2=0.8$	84
Figure III-12 : Evolution de la température en fonction de la position à $t= 0.0042$.	85
Figure III-13 : Variation de la température en fonction du temps pour une conductivité thermique non uniforme	85
Figure IV-1 Le système réel et le modèle numérique dans une approche optimale de type moindre carrée	90
Figure IV-2 : Variation de la température en fonction de la position x au temps $t=0.0909$	105
Figure VI-3 : Conductivité thermique exacte et calculée (problème inverse)	107
Figure IV-4 : Température exacte et calculée (problème inverse)	107
Figure IV-5: Evolution de Err1 en fonction de	109
Figure IV-6 : Evolution de Err2 en fonction de K	110
Figure VI-7: Evolution de cc (Critère) en fonction de K	110

Liste des tableaux

Tableau II-1 : Valeurs des coefficients de forme de conduction	39
Tableau II-2 : Transformation da Laplace inverse	49
Tableau IV-1 : Erreur relative sur la température exacte et la température calculée.	106
Tableau IV-2 : Evolution du critère en fonction de nombre d'itération	108

NOMENCLATURE

a	Diffusivité thermique $\left(a = \frac{\lambda}{\rho c} \right)$	(m ² /s)
B_i	Nombre de Biot $\left(B_i = \frac{hL}{\lambda} \right)$	
c	Capacité calorifique	(J/(K.kg))
D	Diamètre	(m)
e	Epaisseur	(m)
F_0	Nombre de Fourier $\left(F_0 = \frac{at}{l^2} \right)$	
h	Coefficient de transfert de chaleur par convection	((W/(m ² .K))
Er	Erreur absolue entre la température estimé et la température exacte (K)	
Err ₁	Erreur relative sur la température (%)	
Err ₂	Erreur relative sur la conductivité thermique (%)	
F	Coefficient de forme	(m)
$J(\lambda(x))$	Critère	
ℓ	Longueur caractéristique du milieu	(m)
j	Nombre imaginaire	
q,s	Source interne de chaleur	(w/m ³)
K	Nombre d'itérations	
P(x,t)	Variable adjointe	
R	Rayon	(m)
r	Rayon adimensionnel	
R_i	Rayon caractéristique (intérieure –extérieure ...)	(m)
S	Surface	(m ²)
T	Température	(°C)
t	Temps	(s)
V	Volume	(m ³)
x, y, z	Variables d'espace adimensionnelles	
Y	Température adimensionnelle exacte	
$y_n(x)$, $I_n(x)$	Fonction de Bessel d'ordre n	

LETTRES GRECOUES

Δt	Pas de temps	(s)
$\Delta x, \Delta y$	Pas d'espace	(m)
$\nabla J(\lambda)$	Variation du critère	
θ	Température adimensionnée	
$\lambda(x)$	Conductivité thermique	(W/(m.K))
ϕ	flux de chaleur	(W)
τ	Constante adimensionnelle du temps	
ρ	Masse volumique	(kg/m ³)
$\delta T(x, t)$	Variation de la température	(K)
$\delta \lambda(x)$	Variation de la conductivité thermique	(W/(m.K))
$\theta(p)$	Transformée de Laplace de la température T(t)	

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

Aujourd'hui on assiste à une demande très importante et généralisée, provenant de tous les secteurs industriels, de la qualité qui est un facteur vital pour les entreprises confrontées à la concurrence. Devant cette réalité l'assurance qualité s'est implantée dans les entreprises sous la forme d'une organisation visant à repartir et à minimiser les facteurs de non qualité. Les matériaux composés ont un intérêt important pour l'industrie et la connaissance de leurs caractéristiques est plus qu'indispensable. Souvent, une anomalie interne dans leurs structures modifie fortement leurs propriétés physiques. Le calcul thermique est capable de révéler la présence d'un défaut sur et/ou l'intérieur de la paroi de ces matériaux.

Pour détecter un défaut, on a souvent recours aux méthodes de contrôle non destructif, qui consiste à analyser les diverses structures par l'étude de leurs réponses aux excitations thermiques, et établir des relations entre ces réponses et les imperfections qu'elles contiennent.

Les contrôles non destructifs (C.N.D) étant un moyen d'évaluer un aspect de la qualité des matériaux, sont donc plus largement utilisés et voient ainsi leurs performances à l'épreuve d'une grande variété de problème.

En ingénierie, les données expérimentales, à elles seules, ne permettent pas d'accéder dans certains cas, à toutes les informations dont on a besoin. On a alors recours à des méthodes numériques permettant d'exploiter les mesures expérimentales. Ceci constitue un problème inverse qui, de part sa construction, est souvent mal posé : Il est alors nécessaire d'introduire des techniques numériques de résolution. Dans ce travail, on propose d'utiliser une méthode numérique pour simuler les réponses thermiques dans le but d'obtenir les caractéristiques du défaut dans un matériau solide. Les notions de base relatives aux méthodes inverses et leur utilisation font également l'objet de ce travail.

Nous avons divisé ce mémoire en quatre parties distinctes :

Dans le premier chapitre nous présentons les différentes méthodes de contrôle non destructif, utilisées dans différentes applications industrielles.

Le second chapitre traite la résolution de l'équation de la conduction de la chaleur généralisée pour les deux cas stationnaire et variable, par différentes méthodes analytiques et numériques. Les choix de différentes méthodes sont pris en compte dans le but d'avoir des résultats précis et satisfaisants.

Le troisième chapitre concerne une étude numérique du phénomène de la propagation de la chaleur dans différentes géométries (plane, cylindrique) dans le but d'analyser la présence de défaut.

La fin de ce chapitre est consacrée à la mise en place et à la description de l'algorithme de résolution du problème traité visant à localiser la zone défaut en différentes géométries à partir des essais numériques de température, et ce dans le but d'une meilleure compréhension du comportement thermique dans le cas d'un corps hétérogène .

Le quatrième chapitre de ce travail est consacré à la reconstitution spatiale de la fonction de la conduction de chaleur par méthode inverse. Pour atteindre cet objectif, la méthode adjointe a été employée, afin d'exprimer sous forme d'un algorithme, l'équation différentielle en régime variable traduisant le phénomène de transfert de chaleur par conduction. Cette équation est transformée par la méthode numérique de différences finies en un programme numérique. Le système, soumis à des conditions aux limites sous forme d'excitation par densité de flux de chaleur sur les deux parois, est discrétisé dans l'espace et le temps. Des tests numériques ont permis de valider la méthode.

Enfin, nous tirons les principales conclusions qu'occasionne ce travail.

Chapitre I
Etude bibliographique

1. LES DIFFERENTES METHODES DE CONTROLE NON DESTRUCTIF DANS LES CORPS SOLIDES

Le Contrôle Non Destructif (CND) a pour objectif de mettre en évidence les défauts, tout en préservant l'intégrité des produits contrôlés. Il consiste à rechercher les défauts des structures, matériaux, pièces et assemblages.

Les techniques de CND sont utilisées en contrôle de qualité pour s'assurer de la qualité d'une production, puis de garantir la tenue en service des pièces et des ensembles fabriqués.

Elles sont également très appréciées en maintenance. Elles permettent de vérifier la continuité de la matière, et donc de déceler le manque de matière, les fissures et la présence de corps étrangers.

1.1. Les défauts

Détecter un défaut dans une pièce, c'est physiquement, mettre en évidence une hétérogénéité de matière, une variation locale de propriété physique ou chimique préjudiciable au bon emploi de celle-ci. On a l'habitude de classer les défauts en deux grandes catégories liées à leur emplacement : les défauts de surface, et les défauts internes.

1.1.1. Les défauts de surface

Ils sont accessibles à l'observation directe mais pas toujours visibles à l'œil nu, peuvent se classer en deux catégories distinctes : les défauts ponctuels et les défauts d'aspect.

- la première catégorie correspond aux défauts ponctuels, ce sont les plus nocifs sur le plan technologique, puisqu'il s'agit des criques, piqûres, fissures, craquelures, généralement aptes à provoquer à terme la rupture de la pièce, en initiant par exemple des fissures de fatigue. Dans les pièces métalliques, l'épaisseur de ces fissures est souvent infime (quelques μm) et elles peuvent être nocives dès que leur profondeur dépasse quelques dixièmes de millimètre, ce qui implique l'emploi pour leur détection de méthodes non destructives sensibles.

- la seconde catégorie correspond aux défauts d'aspect, c'est-à-dire à des plages dans lesquelles une variation de paramètres géométriques ou physiques (rugosité, surépaisseur, taches diverses) attire le regard et rend le produit inutilisable. Ici, le contrôle visuel est possible, mais on cherche à le remplacer par des contrôles optiques automatiques.

1.1.2. Les défauts internes

Ce sont des hétérogénéités de natures, de formes, de dimensions extrêmement variées, localisées dans le volume du corps à contrôler. Leur nomenclature est très étoffée et spécifique à chaque branche d'activité technologique et industrielle.

Dans les industries des métaux, il s'agit de criques internes, de porosités, de soufflures, d'inclusions diverses susceptibles d'affecter la santé des pièces moulées, forgées, laminées ou soudées.

1.2. Principe de la détection d'un défaut

Le principe de la détection d'un défaut consiste à exciter celui-ci et à recueillir sa réponse, schématiquement, on peut généralement distinguer les étapes suivantes, quelle que soit la méthode employée :

- mise en œuvre d'un processus physique énergétique
- modulation ou altération de ce processus par les défauts
- détection de ces modifications par un capteur approprié
- traitement des signaux et interprétation de l'information délivrée

Différents types d'énergie sont employés en pratique : énergie mécanique (ultrasons, ressuage), électromagnétique (radioscopie, observation dans le visible, flux magnétique...), rayonnement laser ou flux thermique.

Les techniques de CND sont nombreuses. Citons :

- la magnétoscopie
- les courants de Foucault
- les ultrasons
- la radiographie
- la thermo-détection
- la photo-détection

1.3. Ressuage

Le mécanisme de révélation des défauts par ressuage correspond aux trois phases illustrées sur la figure I-1 : application du pénétrant suivie d'un temps d'imprégnation, élimination de l'excès du pénétrant sur la surface de la pièce, ressuage du pénétrant par disposition d'une couche de « révélateur » sur la surface. A la suite de quoi, l'image des défauts apparaîtra à l'observateur dans la mesure où l'étalement du pénétrant sur le révélateur conduit à une nette variation de couleur ou de luminance [1].

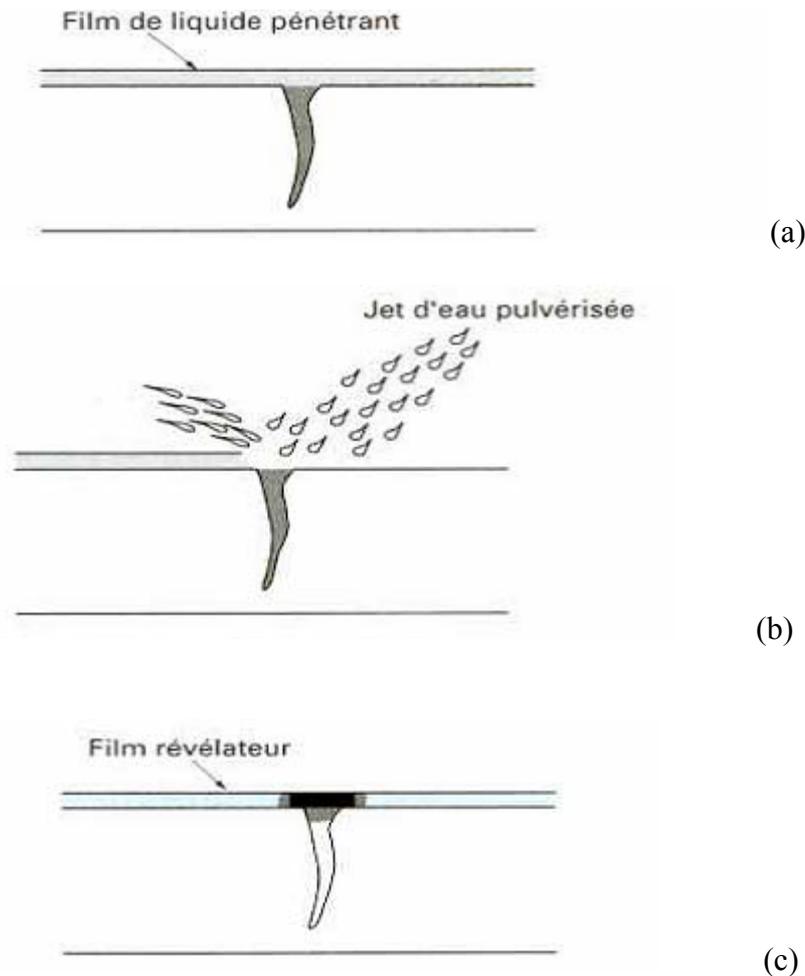


Figure I-1 (a ,b ,c): Principe de la méthode de ressuage par liquide pénétrant pré émulsifié
 a : application et pénétration dans les fissures du liquide pénétrant
 b : enlèvement de l'excédent de pénétrant par lavage
 c : le révélateur extrait le pénétrant retenu par les fissures

Cette technique utilise essentiellement deux techniques de traçage du pénétrant en ressuage: le traçage coloré et le traçage fluorescent ; le premier implique l'utilisation d'un révélateur à fond blanc sur lequel on visualise des empreintes de défauts généralement colorées en rouge ; le second implique un examen fait en lumière noire, dans l'obscurité, au cours duquel les défauts sont révélés par une fluorescence excitée par un projecteur de rayons ultraviolets (UV). Ce deuxième type de procédé conduit presque toujours à de meilleures performances de détection que celles obtenues avec l'utilisation des traceurs colorés, au prix toutefois de conditions d'examen optique plus contraignantes.

Comme conclusion on peut dire que la méthode de ressuage est basée sur l'effet de capillarité, elle détecte les défauts fins débouchant (sur la surface) ; elle est utilisée pour le control manuel des produits à surface accessible, son principal défaut est qu'elle est peu quantitative.

1.4. Procédés à flux de fuite magnétique

La théorie des circuits magnétiques indique que la présence d'un entrefer correspond à un fort accroissement local de la réluctance du circuit et donc de la différence de potentiel magnétique (D.P.M.), constituant ainsi un obstacle au flux magnétique dont les lignes de force doivent alors s'épanouir latéralement selon un flux de fuite comme l'indique la figure I-2. Cet effet de dispersion des lignes de flux s'exerce même pour un entrefer minime, dans la mesure où le rapport des réluctances entre l'entrefer et le circuit est inversement proportionnel à la perméabilité relative de celui-ci, soit un rapport de 500 à 1 000 pour un circuit ferromagnétique en acier excité en deçà de la saturation [2].

Cet effet de dispersion d'un flux magnétique hors d'une pièce ferromagnétique, au droit d'une fissure débouchant ou sous-cutanée (ou toute autre hétérogénéité non ferromagnétique se comportant comme un entrefer), est à la base d'une gamme de procédés magnétiques de détection des défauts de surface dans les aciers dont le plus connu et le plus employé est la magnétoscopie.

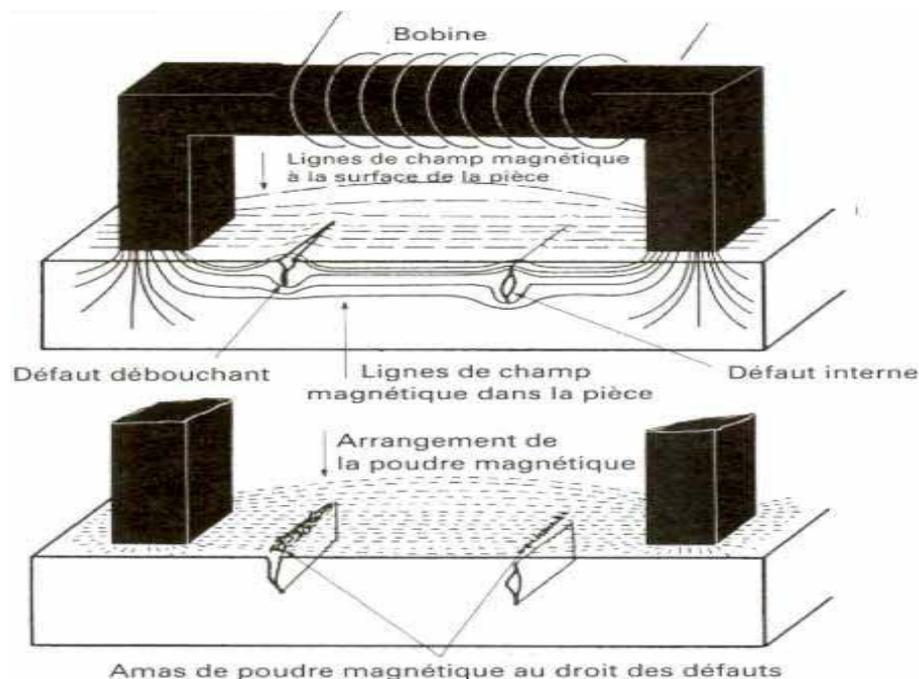


Figure I-2 : Contrôle par magnétoscopie

Ces procédés magnétiques diffèrent entre eux principalement par le mode de mise en évidence du flux de fuite magnétique correspondant à la dispersion de flux décrite ci-dessus. En magnétoscopie, on observe visuellement une accumulation de poudre de fer ou de magnétite colorée et provoquée par le flux de fuite. En Magnétographie, on recueille la trace magnétique du flux de fuite sur un film, une bande ou une pâte d'empreinte magnétisable ; les autres procédés sont regroupés sous le vocable détecteur à flux de fuite

(magnetic leakage flux testing); il s'agit généralement d'appareils de contrôle automatique de barres et de tubes d'acier mettant en œuvre des détecteurs ponctuels de flux électromagnétiques.

1.5. Courants de Foucault

Lorsque l'on place un corps conducteur dans un champ magnétique variable dans le temps ou dans l'espace, des courants induits se développent en circuit fermé à l'intérieur de celui-ci, ce sont les courants de Foucault (Foucault: physicien français 1819-1868) [3]. Ainsi, une bobine parcourue par un courant variable, alternatif par exemple, génère de tels courants induits qui, créant eux-mêmes un flux magnétique s'opposant au flux générateur, modifient par là-même l'impédance de cette bobine. C'est l'analyse de cette variation d'impédance qui fournira les indications exploitables pour un contrôle ; en effet, le trajet, la répartition et l'intensité des courants de Foucault dépendent des caractéristiques physiques et géométriques du corps considéré, ainsi bien entendu que des conditions d'excitation (paramètres électriques et géométriques du bobinage). On conçoit dès lors qu'un défaut, constituant une discontinuité électrique venant perturber la circulation des courants de Foucault, puisse engendrer une variation d'impédance décelable au niveau de la bobine d'excitation (ou de tout autre bobinage situé dans le champ). Cette méthode valable pour les matériaux conducteurs d'électricité a une très grande sensibilité.

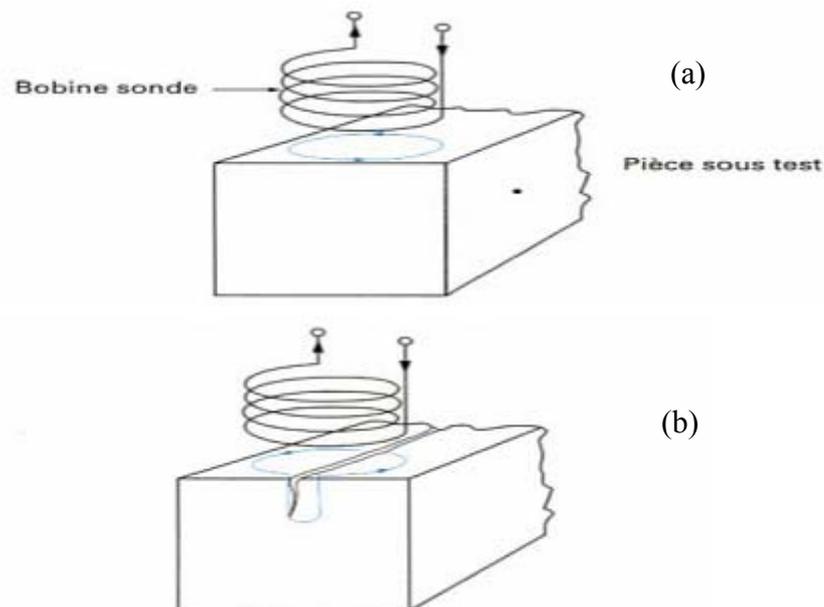


Figure I-3 (a+b) : Principe de la détection par courants de Foucault

a : pièce sans défaut

b : pièce avec défaut : modification du trajet des courants de Foucault

1.6. Radiographie et techniques connexes

L'examen d'un objet par radiographie consiste à le faire traverser par un rayonnement électromagnétique de très courte longueur d'onde (rayons X ou γ) et à recueillir les modulations d'intensité du faisceau sous forme d'une image sur un récepteur approprié, un film dans la plupart des cas, comme l'illustre la Figure I-4. Selon le même principe, on peut obtenir des images en utilisant d'autres particules que les photons et ainsi mettre en œuvre des techniques comme la neutronographie [4].

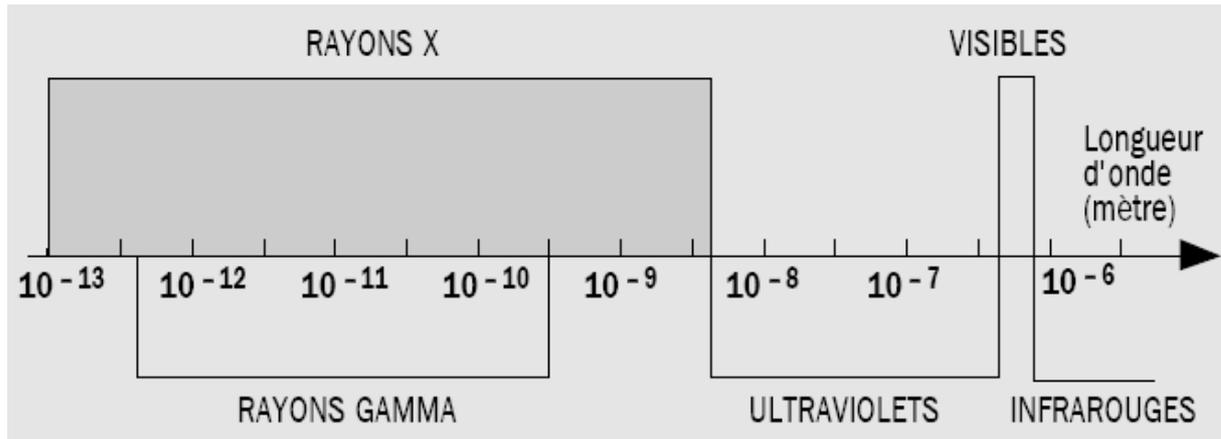


Figure I-4 : Examen par rayons X.

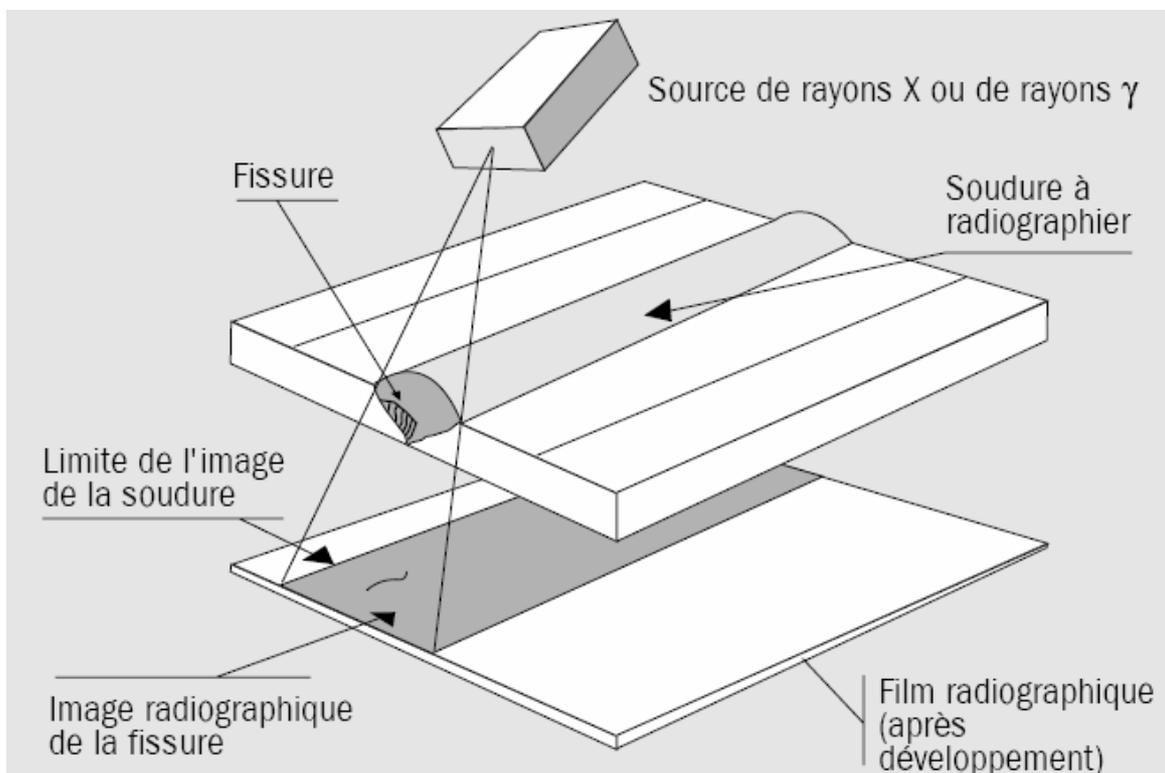


Figure I-5 : Principe du contrôle par radiographie

Les rayonnements de même nature mais d'origine différente, les rayons X et γ sont des ondes électromagnétiques de très courtes longueurs d'ondes (comprises entre environ 0,1 pm et 1 000 pm). On caractérise couramment ces rayonnements par l'énergie unitaire E des photons associés, exprimée en électronvolts (eV). Si l'on exprime E en MeV et la longueur d'onde λ en pm, on tire de la relation du photon : $\varepsilon = h\nu$ la relation pratique : $\varepsilon = \frac{1.24}{\lambda}$

Où h est la constante de Planck, ν la fréquence de l'onde.

Les énergies requises en contrôle non destructif se situent dans une gamme allant de 50 keV à 20 MeV.

Diverses méthodes de rayonnement ionisant peuvent exister : Radiographie X, radiographie γ , radioscopie en temps réel et la tomographie X. Le principe physique est l'atténuation d'un flux dans le but de caractériser les défauts internes appliqués pour le contrôle de structures non métalliques (cas Tomographie X), ce type de caractérisation exige des conditions bien spécifiques.

1.7. Ultrasons

Les ultrasons sont des vibrations mécaniques prenant naissance et se propageant dans tout support matériel (solide, liquide ou gaz) présentant une certaine élasticité.

Contrairement aux techniques précédentes, le contrôle par ultrasons se prête bien au contrôle du cœur de pièces, même très épaisses (jusqu'à plusieurs mètres). Le principe est simple : un transducteur émet une impulsion ultrasonore qui se propage à l'intérieur du matériau à contrôler, puis se réfléchit sur les obstacles présents (défauts, faces de la pièce,...), les échos reviennent ensuite à la surface. Connaissant la vitesse de propagation des ultrasons dans le matériau et le temps aller-retour d'une impulsion ultrasonore envoyée par le transducteur, on en déduit la distance parcourue par cette impulsion puis définir la profondeur du défaut [5].

Les impulsions ultrasonores sont en fait des rafales d'ondes ultrasonores, dont la fréquence est choisie en fonction des caractéristiques du matériau à contrôler (on travaille en général à des fréquences comprises entre 1 et 10 MHz). Les vitesses de propagation des ultrasons sont élevées (par exemple 5940 m/s pour les ondes longitudinales dans l'acier) et les distances parcourues sont relativement petites, l'écart entre les échos est faible, il faut donc disposer d'une électronique assez rapide pour pouvoir réaliser cette discrimination entre les échos. L'objectif du contrôle par ultrasons est d'être certain de recueillir tous les échos dus à des défauts; comme les impulsions arrivant sur un défaut obéissent aux lois de la

réflexion, l'angle de réflexion dépend de l'orientation du défaut. Pour être sûr de ne pas "perdre" des échos, on peut être amené à utiliser plusieurs transducteurs pour la réception (et non plus un seul, qui sert à la fois à l'émission et à la réception). Aux fréquences utilisées, les ultrasons ne se propagent pas dans l'air pour assurer le passage des ultrasons entre le traducteur et la pièce à contrôler, il faut placer entre eux un milieu couplant un liquide (graisse, huile, gels):

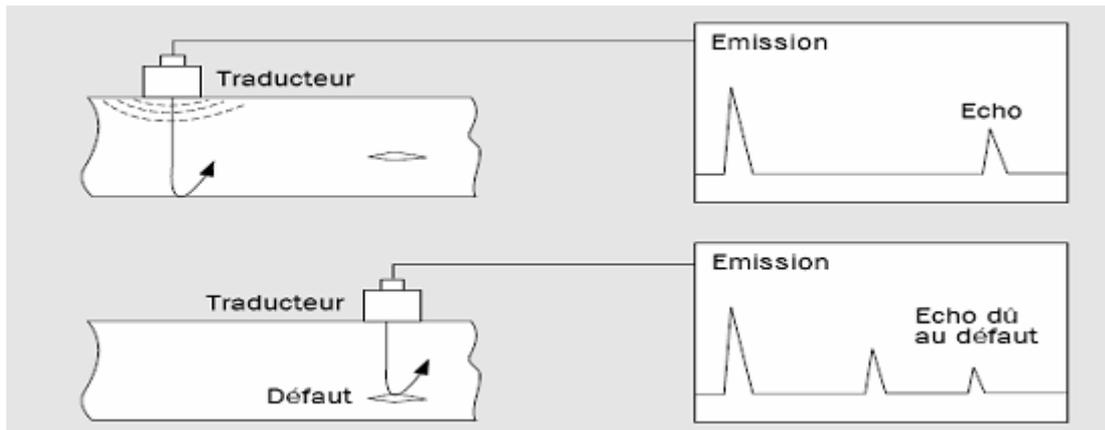


Figure I-6 : Principe du contrôle par ultrasons

Parmi les techniques CND existantes, nous nous intéressons tout particulièrement à la Thermographie infrarouge (thermo-détection) et à la photo-détection qui présentent des intérêts majeurs.

1.8. La Thermo-détection

La thermographie infrarouge est une technique qui permet de visualiser et mesurer l'énergie thermique (chaleur) émise ou transmise par un objet, elle sert principalement à identifier les zones de pertes de chaleur par suite de défauts. Les domaines d'application sont nombreux, par exemple : la détection des défauts d'isolation d'un bâtiment, le repérage des conduites de chauffage et d'eau, la recherche de fuites dans les canalisations encastrées (chauffage par le sol), la détection de zones humides invisibles à l'œil nu, et la détection des ponts thermiques. Cette technique est dite non destructive car le rayonnement IR se détecte à distance, sans avoir besoin de démolir ou de démonter une installation pour établir le diagnostic.

Le principe de la Thermographie infrarouge repose sur le phénomène physique selon lequel chaque corps dont la température est supérieure à zéro (0°K) émet un rayonnement électromagnétique.

Chaque corps émet donc son propre rayonnement, qui dépend directement de sa température et de sa nature (notion d'émissivité des matériaux) [6].

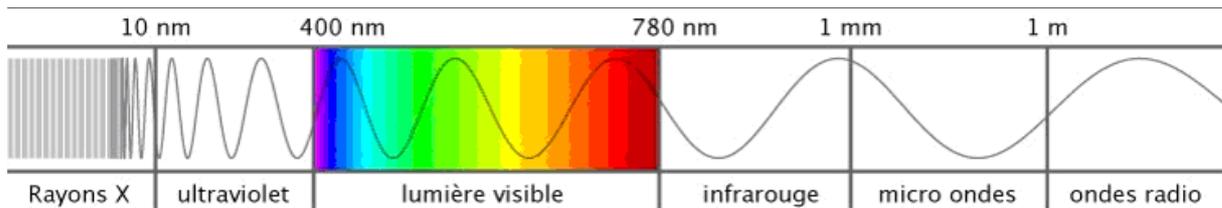


Figure I-7: Spectre électromagnétique

Tout objet, même froid comme la glace émet un rayonnement infrarouge proportionnel à sa température, plus la température de l'objet est élevée, plus l'émission est intense. Les objets très chauds émettent des rayonnements visibles, alors que les objets plus froids n'émettent que des infrarouges, invisibles à l'œil nu, d'où l'intervention de la caméra infrarouge qui remplace l'œil humain. La thermographie infrarouge permet la mesure de température de surface et ses variations temporelles et spatiales, sur les échantillons examinés.

L'utilisation d'une caméra d'imagerie et de mesure infrarouge (IR) pour voir et mesurer l'énergie thermique émise par un corps s'appelle la Thermographie.

La caméra infrarouge a pour fonction de capter les rayonnements infrarouges, d'enregistrer les informations physiques pour les transformer en images visibles. Les caméras sont équipées de capteurs capables de percevoir les rayonnements infrarouges et de les convertir en un signal électrique.

On trouve essentiellement deux types de détecteurs :

- le détecteur thermique (par exemple pyroélectrique) est excité par le flux reçu et s'échauffe. L'une de ses propriétés physiques (résistance) varie avec la température, ce qui provoque une variation du signal électrique issu du capteur.
- le détecteur quantique (photo voltaïque ou photoconducteur) délivre lui, un signal proportionnel au nombre de photons reçus. Il est plus rapide que le détecteur thermique et est utilisé de préférence dans les caméras alors que le détecteur thermique est plutôt réservé aux imageurs (thermographie non quantitative) [7].

La thermodétection s'est imposée comme la méthode de référence pour le contrôle de nombreuses applications telles que le contrôle d'installations électriques ou le contrôle de l'isolation thermique des bâtiments. Dans ce type d'applications, les éléments des scènes thermiques observées sont naturellement émetteurs de chaleur. C'est par l'observation des

variations de flux thermique dans la scène que l'opérateur effectue le diagnostic. En revanche, dans le cas des applications habituellement rencontrées en contrôle non destructif, les éléments à contrôler (pièces, assemblages ...) ne génèrent pas spontanément de la chaleur. L'idée est alors de soumettre la pièce à une excitation thermique extérieure on parle alors de la photodétection.

1.9. La Photodétection

Les méthodes photothermiques de caractérisation se rangent en deux grandes catégories : les méthodes impulsionnelles, ou méthodes « flash » (l'excitation est intense et brève) et les méthodes modulées (l'excitation est périodique)[8]. Chaque famille a ses avantages et ses inconvénients :

- dans la méthode impulsionnelle, une grande quantité d'énergie est déposée dans un laps de temps très court, mais on récupère en contre partie des informations sur une large gamme de fréquences.
- dans la méthode modulée, l'énergie déposée est moindre mais on ne connaît la réponse du matériau qu'à une seule fréquence bien précise.

Les moyens d'excitation qui sont actuellement développés sont présentés sur les Figures I-8 et I-9.

Le choix de la source d'excitation et de ses paramètres (durée, amplitude, fréquence,...) joue un rôle important en fonction du matériau, de la taille, de la profondeur et de la nature du défaut à détecter.

1.9.1. Méthode modulée

Il est préconisé d'utiliser une source d'excitation lumineuse de type halogène modulée en fréquence pour mettre en évidence des délaminages dans les matériaux composites. En revanche, l'estimation d'épaisseurs de revêtements est plutôt réalisée à l'aide de lampes flash dont l'énergie est supérieure à 10kJ sur une durée d'environ 1ms.

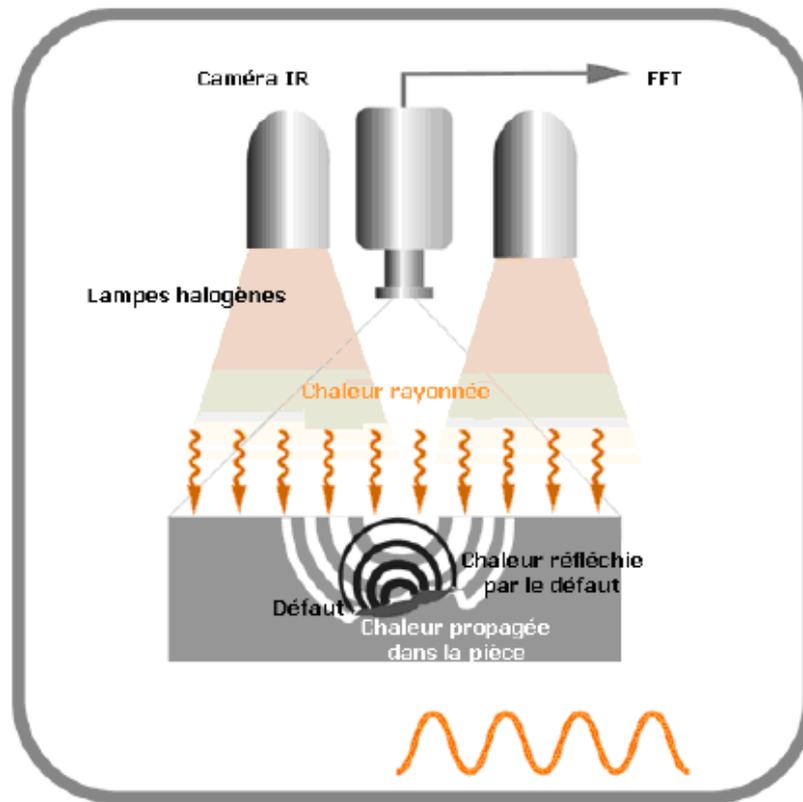


Figure I-8 : Dispositif à excitation par lampes halogènes.

1.9.2. Méthode impulsionnelle (Méthode flash)

C'est en 1961 qu'apparaît le premier article sur la méthode flash [8]. La méthode "flash face arrière" s'applique à des échantillons solides bons conducteurs de la chaleur et de petites dimensions (2 x 2 cm, 1 à 3 mm d'épaisseur). Le système d'acquisition est constitué d'un thermocouple Chromel-Alumel (à contact séparé), d'un amplificateur, d'un oscilloscope et d'un appareil photo polaroïd. L'impulsion thermique est produite par un tube à éclats de 400 Joules [9].

Les améliorations au niveau de l'impulsion sont venues au profit des techniques d'identification (les lasers vont faire leur apparition). Les thermocouples à semi-conducteur vont aussi faire leur apparition (350 $\mu\text{V/K}$ au lieu de 40 $\mu\text{V/K}$), ainsi que des extensions vers les hautes et basses températures.

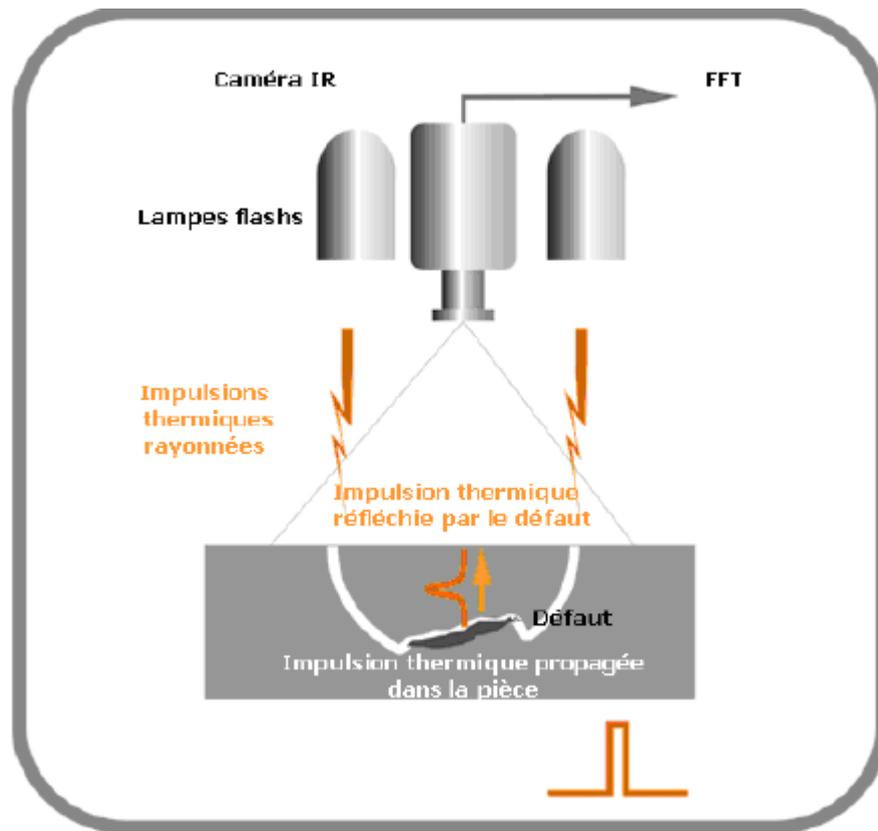


Figure I-9 : Dispositif à excitation par lampes flash

Principe de mesure par la méthode flash :

Cette méthode impulsionnelle consiste à produire une brève impulsion thermique sur la face avant d'une éprouvette cylindrique et à mesurer l'évolution de la température en fonction du temps (thermogramme) sur la face arrière de cette même éprouvette. L'éprouvette est placée dans un four et est maintenue à température constante sous atmosphère neutre (Figure I-9).

L'impulsion de flux (thermique) est générée par un laser impulsionnel dont le diamètre du faisceau est égal à celui de l'éprouvette et dont la durée de l'impulsion ($\delta t < 0,5$ ms) est très faible devant le temps caractéristique de la mesure. Une photodiode permet de déterminer le début et la forme temporelle de l'impulsion. Le thermogramme est mesuré au moyen d'un détecteur quantique de rayonnement.

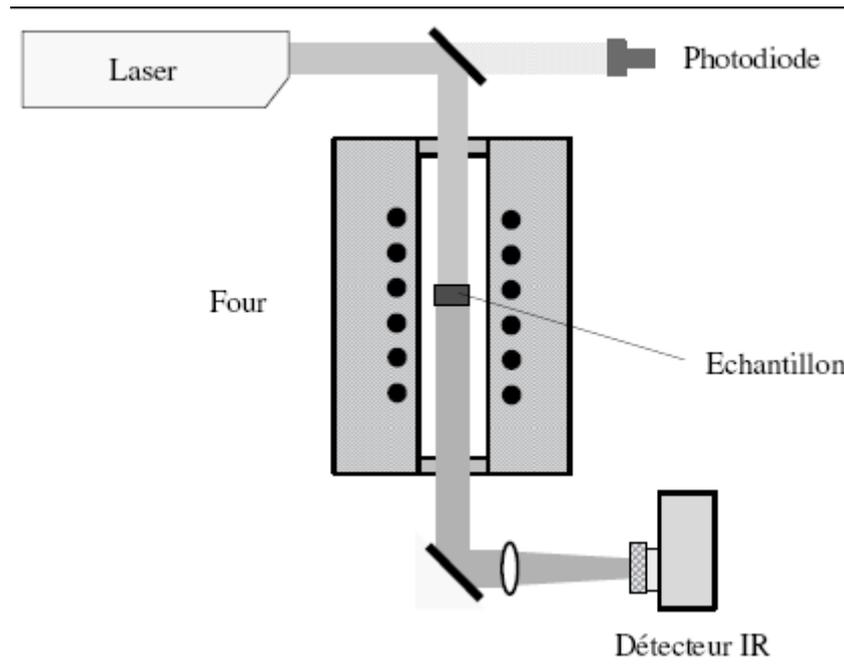


Figure I-10 : principe du diffusivimètre.

On s'intéresse à la caractérisation des propriétés thermophysiques de l'échantillon.

Détermination de paramètre thermophysique à partir de l'image de thermogramme :

La détermination de la diffusivité thermique est réalisée par identification du thermogramme expérimental à un modèle théorique à deux paramètres (diffusivité thermique a et nombre de Biot (Bi) représentant les échanges thermiques entre l'éprouvette et son environnement).

Ce modèle théorique est obtenu en résolvant l'équation de la chaleur dans le cas d'une éprouvette opaque, homogène et isotrope, en supposant que :

- le modèle est linéaire (grandeurs thermophysiques indépendantes de la température).
- les pertes entre l'éprouvette et son environnement sont caractérisées par un coefficient d'échange thermique uniforme et constant dans le temps.
- l'impulsion est une distribution temporelle de Dirac.

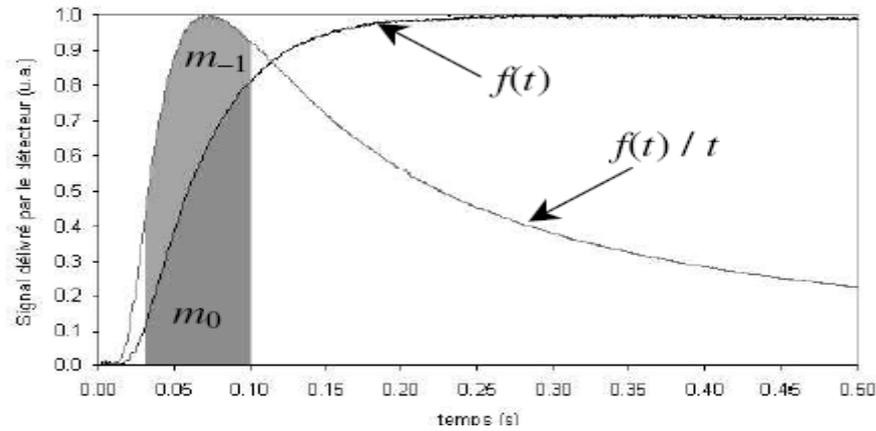


Figure I-11 : Exemple de thermogramme

- Une méthode thermique pour calculer les constantes thermophysiques (la conductivité thermique λ et la diffusivité thermique α) est proposée par B. HAY et al. [10]: Une des faces de l'échantillon à étudier est soumise à un flux thermique (lumineux ou infrarouge) de très courte durée. Un suivi de l'évolution de la température permet alors de calculer la diffusivité.

Le modèle thermique utilisé est constitué d'un mur d'épaisseur L , de conductivité λ , de diffusivité α et de température initiale T_p . la face $x=L$ est maintenue à la température constante T_p tandis que la face $x=0$ est soumise à un flux de chaleur q en créneau de durée t_0 (Figure I-12).

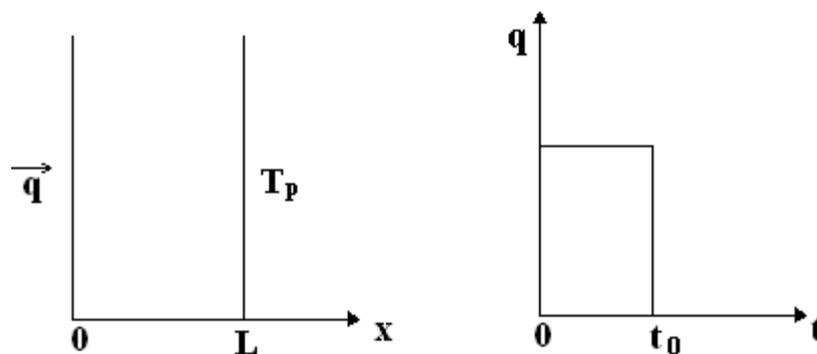


Figure I-12 : Modèle thermique

Quand le flux de chaleur est appliqué, la température en n'importe quel point du mur croît. Au bout d'un certain temps (dépendant de la position) après l'annulation du flux, la température passe par un maximum et décroît (Figure I-13). La mesure du temps t_{\max} où la température atteint son maximum permet de remonter à la diffusivité thermique. (Le calcul

de la solution analytique est effectué en utilisant la méthode de séparation des variables et le principe de superposition des solutions.).

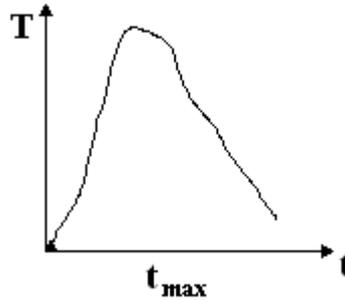


Figure I-13 : Allure de la réponse en température

La méthode flash dans son principe, est une technique impulsionnelle. Outre l'identification de la diffusivité thermique, elle permet d'accéder indirectement à la conductivité thermique lorsque la capacité massique et la masse volumique sont connues. Les méthodes d'estimation de paramètres liées à la méthode flash ont été utilisées en tenant compte des outils liés aux méthodes d'estimation de paramètres (méthodes inverses).

- Des laboratoires de recherche utilisent la méthode d'estimation proposée par Degiovanni [11], fondée sur l'identification de la diffusivité thermique à partir des moments temporels partiels d'ordre 0 et 1 issus du thermogramme expérimental du modèle.

La diffusivité thermique est alors donnée par la relation suivante : $a = \frac{e^2 F(m_{-1})}{m_0}$

e est l'épaisseur de l'éprouvette.

m_0 et m_{-1} sont les moments temporels déterminés à partir du thermogramme expérimental

normé $f(t)$ (Figure I-11) comme suit : $m_0 = \int_{t=0.1}^{t=0.8} f(t) dt$ et $m_{-1} = \int_{t=0.1}^{t=0.8} \frac{f(t)}{t} dt$

où $t = 0.1$ et $t = 0.8$ représentent les temps nécessaires à la face arrière de l'éprouvette pour atteindre respectivement 10 % et 80 % de l'amplitude maximale du thermogramme ; F est la fonction d'identification, qui s'écrit sous la forme d'un polynôme en m_{-1} :

$$F(m_{-1}) = \sum_{i=0}^n b_i (m_{-1})^i$$

où les termes bi sont les coefficients du polynôme ; cette fonction est déterminée à l'aide de couples de moments temporels « théoriques » (m^*_0 et m^*_{-1}). Ces moments sont calculés pour différentes valeurs de Bi en utilisant le modèle thermocinétique. $m^*_0 = F(m^*_{-1})$

Au niveau des applications, on commence à s'intéresser à autre chose que la diffusivité thermique de matériaux homogènes.

1.10. Contrôle Thermique Non Destructif

Le contrôle non destructif est une technique qui permet l'analyse de diverses structures par l'étude de leurs réponses aux excitations thermiques, et l'établissement d'une relation entre cette réponse et les imperfections qu'elles contiennent. [12]

Les propriétés thermo-physiques d'une structure avec défaut diffèrent à celles d'une structure saine, ce qui permet de discerner et de caractériser le défaut en comparant le comportement thermique des deux structures.

Le principe de cette technique peut être décrit à travers l'étude menée par S. Sahnouni [13]; l'auteur considère une plaque plane d'épaisseur l et de largeur L , à la température initiale T_0 . Le défaut à l'intérieur de la structure du matériau est représenté par un changement de la nature du milieu ; c'est une fissure ou faille remplie d'air de dimension et de géométrie simple et régulière, placé à une distance l_1 de la face d'entrée de la plaque ($x=0$). Le matériau est supposé homogène de propriétés thermophysiques différentes à celles de la couche d'anomalie. On applique une densité de flux thermique ϕ_0 à l'entrée du mur. La température de sortie du mur est supposée constante. Les faces $y=0$ et $y=L$ sont isolées et les résistances de contact sont négligées. Pour rester dans les conditions de conduction monodirectionnelle on suppose que le défaut a la même section que la plaque qui le contient.

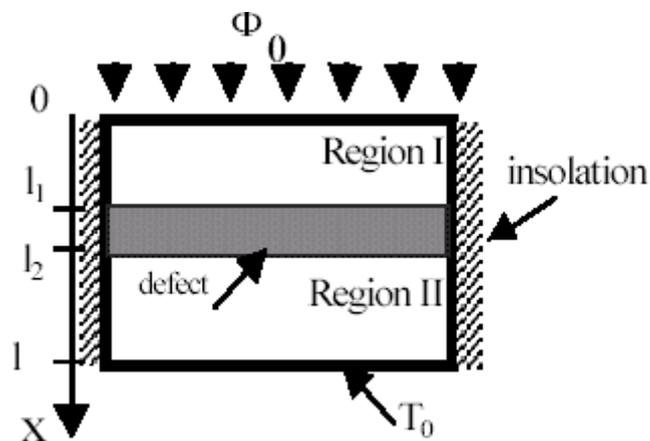


Figure I- 14 : Matériau avec défaut

La structure est décomposée en trois zones. Les zones I et II représentent les parties homogènes, et III de la zone du défaut. Les résistances de contact entre les couches sont supposées négligeables.

Région sans défaut :

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t} = \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T_i(x,t)}{\partial x^2} \right)$$

$$0 \leq x \leq l_1 \text{ pour } i = I \quad l_2 = l_1 + ed \leq x \leq l \text{ pour } i = II \text{ et } 0 \leq t$$

Le principe de la conservation de l'énergie impose des conditions aux limites suivantes:

$$\phi_0 + \lambda_1 \left(\frac{\partial T_I(x,t)}{\partial x} \right) = 0 \quad x = 0 \text{ et } 0 < t$$

$$\phi_l(t) + \lambda_l \left(\frac{\partial T_{II}(x,t)}{\partial x} \right) = 0 \quad x = l \text{ et } 0 < t$$

où $T_I(x, t)$ et $T_{II}(x, t)$ représentent les températures de transition dans la régions $0 < x < l_1$ et $l_2 < x < l$ respectivement .

Région de défaut :

Le transfert de chaleur dans cette région est décrit par:

$$\rho_2 c_2 \frac{\partial T_d(x,t)}{\partial t} = \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 T_d(x,t)}{\partial x^2} \right) \quad l_1 \leq x \leq l_1 + e_d = l_2 \quad \text{et} \quad 0 < t$$

Où $T_d(x, t)$ représente la température de transition de défaut, et λ_2 la conductivité thermique de la zone de défaut.

- le contact étant parfait entre le défaut et les deux zones, on peut donc écrire sur les interfaces de contact les températures suivantes:

$$T_i(x,t) = T_d(x,t) \quad x = l_1 \text{ ou } x = l_2 \text{ et } 0 < t$$

et le flux de chaleur:

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_i}{\partial x} \right) = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_d}{\partial x} \right) \quad x = l_1 \text{ ou } x = l_2 \text{ et } 0 < t$$

Les conditions initiales sont données par:

$$T(x,0) = T_0 \quad \text{à } t = 0$$

Les surfaces $y = 0$ et $y = L$ sont isolées :

$$\phi_l = 0 \quad \text{pour } 0 < t$$

$$T_H(x,t) = T_0 \text{ à } x = l \text{ et } 0 < t$$

La résolution numérique basée sur les différences finies et les volumes de contrôle permet d'obtenir les résultats illustrés en figures I-15 représentant l'évolution de la différence de la température entre une structure saine et une structure contenant un défaut. Une différence positive se traduit par la présence d'un défaut résistif. Une différence négative indique une perturbation capacitive par rapport à la structure à tester. Cette expérience est réalisée en faisant varier la position du défaut ($x = 2\text{mm}$; 3mm ; 6mm) pour trois épaisseurs différentes ($e = 1\text{mm}$, 2mm , 4mm) dans une paroi de 10mm d'épaisseur totale.

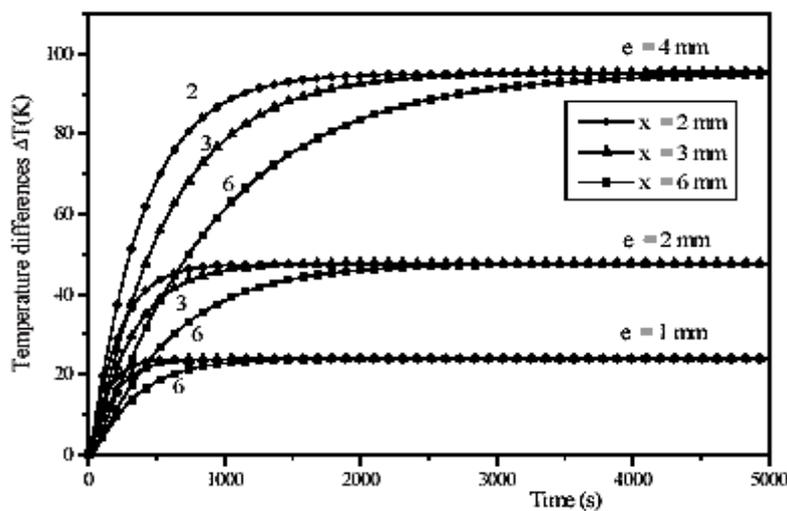


Figure I-15: Variation de la différence de température en fonction de temps pour différentes épaisseurs et positions de défaut.

2. GENERALITES SUR LES METHODES INVERSES

2.1. Définition

Le problème inverse consiste à déterminer des **causes** connaissant des **effets**. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues [14].

Cette seconde définition montre que nous sommes plus habitués à étudier des problèmes « directs ». En effet, depuis Newton la notion de causalité est ancrée dans notre subconscient scientifique, nous avons appris à poser, puis résoudre des problèmes pour lesquels les causes sont données, et l'on cherche les effets. Cette définition montre aussi que les problèmes inverses risquent de poser des difficultés particulières. Il est raisonnable d'exiger que le problème direct soit « bien posé ». Par contre, il est facile d'imaginer, que les mêmes effets puissent provenir de causes différentes. Cette idée contient la principale

difficulté de l'étude des problèmes inverses : ils peuvent avoir plusieurs solutions, et il est nécessaire de disposer d'informations supplémentaires pour discriminer entre elles.

La prédiction de l'état futur d'un système physique, connaissant son état actuel, est l'exemple type du problème direct. On peut envisager divers problèmes inverses : par exemple, reconstituer l'état passé du système connaissant son état actuel (si ce système est irréversible), ou la détermination de paramètres du système, connaissant (une partie de) son évolution. Ce dernier problème est celui de *l'identification de paramètres*, qui sera notre principale préoccupation dans la suite. Une difficulté pratique de l'étude des problèmes inverses est qu'elle demande souvent une bonne connaissance du problème direct, ce qui se traduit par le recours à une grande variété de notions tant physiques que mathématiques. Le succès dans la résolution d'un problème inverse repose en général sur des éléments spécifiques à ce problème. Il existe toutefois quelques techniques qui possèdent un domaine d'applicabilité étendu, on peut citer : la régularisation des problèmes mal posés, la méthode des moindres carrés et la méthode vibrationnelle. La plus importante est la reformulation d'un problème inverse sous la forme de la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur entre les mesures réelles et les « mesures synthétiques » (c'est-à-dire la solution du problème exacte).

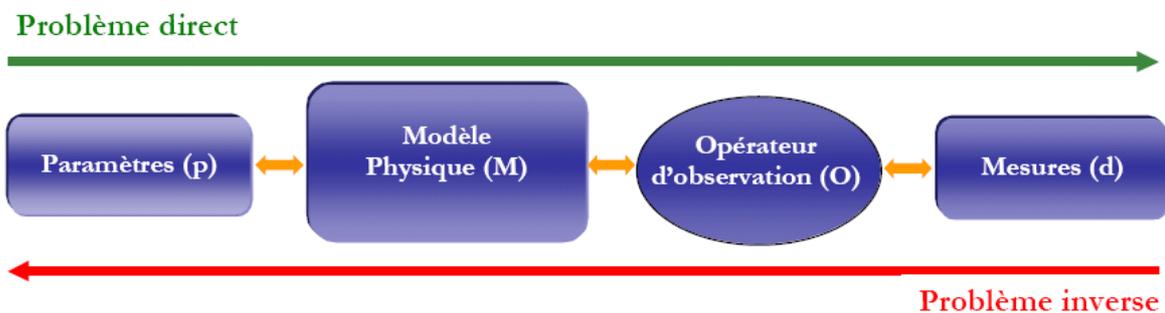


Figure I-16 : Problème directe et inverse

2.2. Fonction mal posée au sens d'Hadarnard

Considérons un modèle mathématique écrit sous la forme générale $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, où \mathbf{A} est un opérateur de type différentiel, matriciel ou intégral. Le problème inverse consiste à estimer \mathbf{x} , connaissant \mathbf{b} . Le problème est bien posé si :

- la solution à ce problème existe.
- cette solution est unique.
- cette solution est stable vis-à-vis des faibles variations des données contenues dans \mathbf{b} , c'est à dire si l'opérateur inverse \mathbf{A}^{-1} est continu.

2.2.1. Existence de la solution

La figure I-18 illustre le problème de l'existence d'une solution au problème inverse. Soit X l'ensemble des vecteurs x des inconnues à identifier. $\text{Im}(X)$ est l'image de cet ensemble appliqué à tous les x de X . Si l'ensemble des réponses instrumentales B est inclus dans $\text{Im}(X)$, alors il existe au moins un vecteur x pour lequel $Ax = b$. En revanche, si on considère un autre ensemble de réponses instrumentales B' non inclu dans $\text{Im}(X)$, il n'existe pas de x tel que $Ax = b'$.

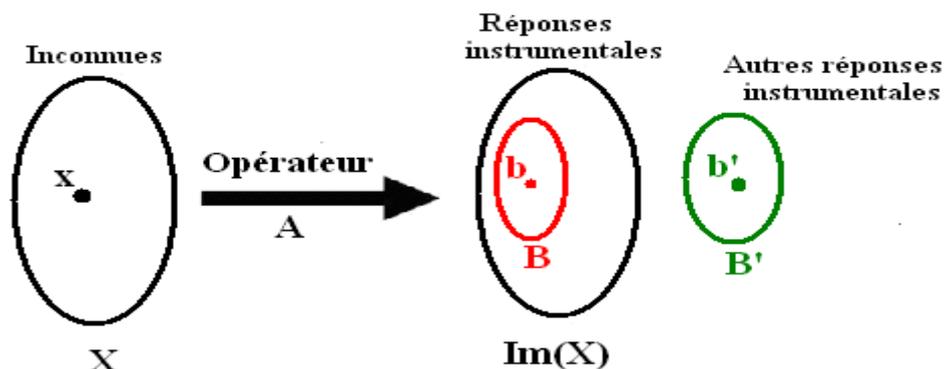


Figure I-17 : Existence de la solution

En clair, il faut que l'opérateur A permette de décrire la situation b mesurée pour la gamme X de valeurs possibles pour les paramètres x recherchés. Ainsi pour réaliser une inversion de mesures, la première étape consiste à s'assurer que le modèle est « complet », c'est à dire qu'il décrit l'ensemble des phénomènes non négligeables susceptibles d'aboutir à la situation décrite par les réponses instrumentales b .

2.2.2. Unicité de la solution

Dire que la solution est unique signifie qu'il n'existe qu'un seul x pour lequel $Ax = b$. Dans le cas où l'opérateur A est matriciel, le déterminant de A doit être non nul. Cette remarque incite à limiter le nombre de paramètres à estimer, pour éviter d'introduire implicitement des relations inutiles. Par exemple, supposons que l'objectif soit d'estimer des sources thermiques dans un problème de conduction thermique. En chercher trois alors qu'il n'y en a que deux revient à donner une équation supplémentaire pour résoudre le problème, mais celle-ci n'étant pas nécessaire, on va se retrouver avec une surabondance de solutions.

Quasi-solutions : Il apparaît que ces deux conditions ne sont pas évidentes à remplir. On pourrait croire que l'existence est simple à obtenir. C'est le cas dans un problème

académique où toutes les données sont maîtrisées. Mais dans la réalité physique, les mesures qui alimentent l'inversion sont entachées d'un bruit de mesure. Il n'est alors plus possible d'obtenir b quels que soient les valeurs de x pour le modèle A choisi. Dans ce cas, on doit se contenter d'une quasi-solution, c'est à dire d'une solution qui minimise la norme quadratique : $\min_{x \in X} \|Ax - b\|^2$

La norme quadratique minimisée est au mieux de l'ordre de grandeur de l'erreur de mesure. Par conséquent une estimation de cette erreur de mesure permet d'évaluer la qualité maximale de l'estimation.

Dès lors qu'on a affaire à une quasi-solution, l'unicité de celle-ci ne peut pas être garantie.

Afin de compenser cette difficulté supplémentaire, on peut employer des techniques dites de régularisation qui a pour effet d'orienter la recherche de la quasi-solution. Il sera commode de distinguer entre les problèmes inverses linéaires et non-linéaires. Dans le cas des problèmes linéaires, on peut obtenir des résultats précis, et des algorithmes efficaces. L'outil fondamental est la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur considéré (la méthode de régularisation) qui consiste à « modifier » légèrement le problème étudié en un autre qui possède de « meilleures » propriétés.

Les problèmes non-linéaires sont plus difficiles, et il existe moins de résultats généraux. Un ingrédient technique essentiel (du point de vue numérique) est le calcul du gradient de la fonctionnelle à minimiser, c'est notre cas, la non linéarité est due à la présence de la variation du coefficient de conduction de la chaleur qui est variable.

2.2.3. *Stabilité vis-à-vis des faibles variations*

L'estimation par méthode inverse s'apparente à un algorithme de minimisation sous contrainte d'une fonctionnelle (nous donnerons plus de détails à ce propos dans le chapitre 04). Les techniques de recherche d'un minimum fonctionnent bien pour une fonctionnelle convexe (existence d'un minimum). Malheureusement dans le cas d'un problème physique non-linéaire à plusieurs variables, la fonctionnelle est rarement convexe, ce qui exclut souvent l'existence d'un minimal global. En général, elle est tout de même convexe au voisinage des minima locaux. L'étendue du voisinage fixe l'importance de l'initialisation : si la fonctionnelle n'est convexe que très près du minimum local, alors une initialisation éloignée de cette solution peut aisément converger vers une autre solution.

Deux solutions sont alors à appliquer pour améliorer la recherche : choisir une initialisation probable en fonction de considérations physiques et régulariser (c'est-à-dire appliquer des contraintes).

Principe de minimisation :

Tout d'abord, le problème posé consiste à minimiser la fonctionnelle $J(x)$ suivante [15]:

$$J(x) = \min_{x \in X} \|Ax - b\|^2$$

Le choix de la méthode de minimisation va bien entendu dépendre des propriétés de la fonctionnelle J . Si J est différentiable, on peut alors utiliser les méthodes du gradient conjugué, du quasi-Newton ou de Marquardt-Levenberg. Ces méthodes consistent à calculer une suite de directions de descente d_n à partir du calcul du gradient $\nabla_x J(x_n)$ de la fonctionnelle puis à optimiser une profondeur de descente pdf suivant chaque direction successive : $\min J(x_n + d_n \times pdf)$

Chacune de ces méthodes diffère par le principe de mise en œuvre de la construction de la suite. Lorsque la fonctionnelle J n'est plus différentiable, on peut utiliser une méthode «probabiliste» ou « bayésienne » dans laquelle on fait une description de l'ensemble des informations a priori (incertitudes expérimentales, informations sur les paramètres inconnus...). L'ensemble de ces informations supplémentaires joue le rôle de régularisation et permet de définir des maxima de vraisemblances. Les algorithmes évolutionnaires ou génétiques peuvent également apporter une solution dans ce cas puisqu'il n'est pas besoin de calculer le gradient

2.3. Application de la méthode dans différents domaines

2.3.1. Problèmes inverses en sismique

La prospection pétrolière par des méthodes sismiques (et la sismologie) donne lieu à un problème inverse qui a été largement étudié en raison de l'intérêt économique qui s'attache à sa solution. Il s'agit en réalité d'une famille de problèmes inverses, dont le but commun est de déterminer les propriétés élastiques du sous-sol (densité, vitesses de propagation des ondes élastiques) à partir de mesures des champs de déplacement, ou de pression, en surface.

Lors d'une campagne sismique, une source (en général une explosion) provoque un ébranlement des roches formant le sous-sol. L'écho est enregistré par une série de capteurs placés en surface.

Cette expérience est répétée pour plusieurs positions de la source (de plusieurs centaines à plusieurs milliers). De cette façon une très grande quantité de données est mesurée (pouvant atteindre des centaines de giga-octets). Le but, est encore une fois, d'estimer les propriétés du milieu étant donné un modèle de propagation. La communauté géophysique a met au point une grande quantité de méthodes spécifiques pour traiter ce problème.

Par ailleurs, il est certain que ces méthodes rencontrent de grandes difficultés quand la géométrie est compliquée ou dans le cas des fonds marins (problème des réflexions multiples).

L'inversion de données sismiques est, a priori, un cas particulier d'estimation de paramètres dans une équation aux dérivées partielles : il s'agit d'estimer la vitesse du milieu en chaque point du sous-sol, ce qui donne ainsi l'image cherchée de ce sous-sol. Mais, à la différence du nombre de problèmes d'estimation de paramètres, dans la pratique, l'inversion sismique n'est pas en général un problème mal posé au sens habituel, car les données sont extrêmement redondantes. En effet, une fois que l'on a fait une hypothèse sur la vitesse avec laquelle les ondes acoustiques se propagent dans le sous-sol, en utilisant un opérateur de migration, les données enregistrées pour chaque tir permettent d'obtenir une image stable du sous-sol, mais limitée à la zone illuminée par le tir considéré. Ces images ne sont acceptables que si elles se superposent bien d'un tir à l'autre, ce qui n'a lieu que si l'hypothèse faite au départ sur la vitesse est correcte. C'est la détermination de cette «vitesse de migration» qui constitue la difficulté principale de l'inversion sismique: il s'agit d'arriver à mettre en cohérence les nombreuses images complexes du sous-sol obtenues à partir d'une campagne sismique pouvant comporter plusieurs centaines de tirs. La formulation standard par moindres carrés est inefficace pour la détermination d'une vitesse de migration satisfaisante car de nombreux minima locaux rendent impossible la détermination du minimum global ; par des méthodes d'optimisation locales le nombre d'inconnues déterminant (la partie lisse de) la vitesse (quelques centaines à quelques milliers) et le coût d'une évaluation du critère (qui nécessite la résolution d'une équation des ondes par tir) limitent beaucoup l'intérêt des algorithmes d'optimisation globale. On est donc conduit à chercher des reformulations du problème susceptibles d'être résolues par des méthodes d'optimisation locale.

Les axes de recherche actuels portent sur l'exploitation des possibilités ouvertes par ces travaux en vue de traiter des données plus complexes (prise en compte des multiples, inversion 3-D du fond de l'eau) [16].

2.3.2. Problèmes inverses en hydrogéologie

L'hydrogéologie, ou l'étude des nappes phréatiques, est une autre source abondante de problèmes inverses. Il est en effet difficile d'accéder aux couches du sous-sol pour mesurer les propriétés aqueuses des roches. Un problème actuellement posé est le contrôle des polluants dans les nappes d'eau souterraines. Un paramètre fondamental de cette étude est la conductivité hydraulique du sous-sol, qui dépend évidemment de la position.

Il existe une grande variété de modèles physiques, incluant diverses approximations. Nous en présentons ci-dessous un exemple de ces modèles [17] :

- un milieu poreux est constitué d'une matrice rocheuse, comprenant des pores qui peuvent laisser passer l'eau. Il est essentiellement impossible de décrire l'écoulement d'un fluide dans un tel milieu hétérogène, dans la mesure où l'on doit prendre en compte des échelles spatiales allant du centimètre (le pore) au kilomètre (le modèle régional), et que la disposition précise des pores n'est de toute façon pas connue. On utilise alors des modèles physiques simplifiés, le plus courant étant la loi de *Darcy*, qui relie la hauteur de l'eau dans le milieu, appelée charge piézométrique et notée $h(x, y, z, t)$, à la vitesse de filtration $q(x, y, z, t)$. Cette loi exprime que la vitesse est proportionnelle à l'opposé du gradient hydraulique :

$$\vec{q} = -K \text{grad} h \quad (\text{I-1})$$

où K est le coefficient de conductivité hydraulique. Ce peut en principe être un tenseur où un scalaire. On exprime également la conservation de la masse (on fait l'hypothèse que le milieu est incompressible):

$$S \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div} \vec{q} = f \quad (\text{I-2})$$

S : e coefficient d'emménagement spécifique, et f est une source (supposée connue).

L'élimination de q donne pour h l'équation parabolique :

$$S \frac{\partial h}{\partial t} - \text{div}(K \text{grad} h) = f \quad (\text{I-3})$$

A laquelle on ajoute des conditions initiales (h donné à $t = 0$) et aux limites (Dirichlet, correspondant à une charge imposée, ou Neumann, correspondant à un flux imposé). Les problèmes de transport de contaminant font intervenir, en plus de l'écoulement, la façon dont évolue la concentration d'une espèce (composé chimique, hydrocarbure, etc..) «portée» par l'écoulement. Ce phénomène met en jeu la convection (imposée par la vitesse de filtration q). La quantité étudiée est la concentration $C(x, y, z, t)$ du polluant, qui obéit à une équation de type convection–diffusion :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\vec{q}C) - \operatorname{div}(D \operatorname{grad}C) = f_c \quad (\text{I-4})$$

où ε est la porosité cinématique (fraction des pores occupés par l'eau en mouvement), D est le tenseur de diffusion (en agrégeant diffusion moléculaire et dispersion cinématique), et f_c est une éventuelle source de polluant. On ajoute une condition initiale (concentration connue à l'instant initial), et des conditions aux limites.

Le problème direct est constitué par les équations (I-3) et (I-4). Ce problème couplé est théoriquement non-linéaire, à cause du terme $\operatorname{div}(\vec{q}\bar{C})$. Cependant, et en pratique, on peut souvent résoudre d'abord l'équation (I-3), puis (I-4), q étant connu. On mesure, par exemple, la concentration en un certain nombre de points de mesure, et à des instants discrets (il n'est pas réaliste ici de supposer que la mesure est continue en temps). On connaît donc $C(x_o, y_o, z_o, t_o)$, $o = 1, \dots, N_o$. Le problème inverse est alors de chercher la conductivité hydraulique (et dans une moindre mesure les autres paramètres du modèle), connaissant ces mesures. Ce problème est sous-déterminé, car il est rare que l'on ait accès à suffisamment de mesures.

2.3.3. Applications thermiques

On peut situer les précurseurs de ces techniques inverses appliquées à la thermique dans les années 70, avec les travaux de Beck et Arnold [18] et ceux de Tikhonov et Arsenin [19]. Ceux-ci portent sur la résolution du Problème Inverse de Conduction de la Chaleur (dit PICC). Pour le résoudre, Beck et Arnold [20] ont proposé la méthode de spécification de fonction, améliorée par la suite mais également reprise et utilisée par d'autres auteurs : citons par exemple Truffart, Jarny et Delaunay [21], Maillet, Batsale et Degiovanni [22]. Cette méthode est toujours l'objet de plusieurs études sur sa précision ou sa stabilité comme celle de Jun Liu [23], et de Sokala et Kruk [24].

On a déjà vu que le caractère mal posé des problèmes d'inversion de mesures imposait l'utilisation de fonctions de régularisation [25]. La méthode de la spécification de fonction inclut une régularisation par l'utilisation des pas de temps futurs. D'autres régularisations classiques ont également été développées : citons la régularisation par pénalisation étudiée par Tikhonov et al [19], la régularisation par troncature de spectre de Hansen [26] ou la régularisation itérative d'Alifanov [27]. On peut également appliquer des méthodes de filtrage sur les données avant la résolution du problème inverse (méthode de mollification Murio [28]) ou à l'aide d'un filtre de Kalman utilisé par Scarpa et Milano [29]. Quelques résumés de ces méthodes ont été établis par Jarny et Bonnet [30] par exemple. L'étude des

problèmes inverses incluant la convection n'a commencé que tardivement mais est aujourd'hui en pleine phase de développement. On trouve par exemple, au cours des cinq dernières années, les travaux de Gejadze et Jarny [31], de Karkri, Mousseau et Jarny [32], de Park et Shin [33], les recherches s'intéressent à la forme du flux ou de la température au front. Huang et Ozisik [34] ont estimé le flux de chaleur dans le cas d'un mur en convection forcé. Li et Yan [35] déterminent le flux de chaleur dans un mur pour un écoulement laminaire dans un canal annulaire, et pour un écoulement turbulent dans une conduite entre deux plaques parallèles.

D'autre part, il y a peu de travail sur le rayonnement dans le cas du problème inverse, Li a publié sur les paramètres thermiques pour un transfert de chaleur couplé conduction-rayonnement, tandis que Park et Yoon [36] ont montré les propriétés radiatives d'une source de chaleur variable en fonction du temps dans l'espace.

Les problèmes inverses en mécanique touchent plus particulièrement la mécanique du solide avec la localisation de fissures par exemple. Concernant le domaine de la rhéologie, les écrits sont peu nombreux à l'heure actuelle. Nous pouvons citer Gavrus et al [37] qui réalisent une estimation de paramètres rhéologiques à partir de tests de torsion et Lebaal et al [38] qui estiment les paramètres d'une loi puissance à partir des mesures de pression aux extrémités d'une filière d'extrusion. Enfin il convient de citer quelques applications de techniques inverses à des phénomènes couplés, par exemple la thèse de Poutot [39] qui étudie la cinétique de cristallisation en cours de refroidissement et les travaux de Favennec [40] sur le chauffage par induction.

Chapitre II

Généralités sur les méthodes de résolution des problèmes de conduction

1. INTRODUCTION

Pour résoudre un problème de conduction, on doit trouver la ou les solutions de l'équation de chaleur. Pour arriver à ce but, on a souvent recours à une méthode analytique, numérique, analogique ou graphique. Le choix de la méthode dépend de plusieurs paramètres : le régime (permanant ou variable), la nature des conditions spatio-temporelles, la nature du solide et de son environnement (forme géométrique....), etc....

Nous décrivons dans ce chapitre un certain nombre de méthodes utilisées selon le cas, pour la résolution de l'équation de la chaleur.

2. METHODES DE RESOLUTION EN REGIME PERMANENT

2.1. Méthodes directes

L'équation aux dérivées partielles de la conduction est établie à partir du principe général de conservation de l'énergie. Elle décrit une classe très large du phénomène de conduction. On peut particulariser certains processus de transfert thermique conductif qui conduisent à plusieurs formes de l'équation générale. Pour déterminer le champ de température dans le corps étudié, il est nécessaire de compléter cette équation par un supplémentaire d'information constituant les conditions d'unicité, il y a plusieurs types de conditions [41] :

- conditions géométriques qui caractérisent la forme et la dimension du corps où la condition a eu lieu; par exemple la surface du corps est plane, cylindrique ou sphérique.
- conditions physiques qui caractérisent les paramètres physiques du matériau; par exemple le corps est homogène ou non, isotrope ou non, la distribution est uniforme ou non, existence de source de chaleur,.....etc.
- conditions initiales qui décrivent le champ de température dans le matériau à l'instant initiale qui marque le début du processus.
- conditions aux limites qui caractérisent l'interaction du corps étudié avec son milieu extérieur.

Etude d'une barre cylindrique à surface isotherme

Ce problème peut illustrer le cas pratique d'un conducteur électrique parcouru par un courant. Considérons donc un barreau cylindrique d'une longueur infinie, fait d'un matériau homogène et isotrope, et ayant une conductivité thermique λ constante.

On suppose que dans la structure du barreau, il y a des sources internes de chaleur caractérisées par leur fonction de puissance s , uniformément distribuées dans le volume, et que la température T_1 de la surface extérieure est uniforme et constante. Dans ces conditions on se propose de déterminer la distribution de température dans ce corps, et le flux thermique transféré vers le milieu ambiant. Si le rayon du barreau est négligeable par rapport à sa longueur, le problème est supposé monodimensionnel et symétrique. La température varie seulement radialement.

Le processus de transfert thermique est gouverné dans ce cas par l'équation de Poisson décrit en coordonnées cylindriques par:

$$\frac{\partial^2 T(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r)}{\partial r} + \frac{s}{\lambda} = 0 \quad (\text{II- 1})$$

Pour résoudre cette équation, on utilise une méthode de substitution, en notant $u = \frac{dT(r)}{dr}$

L'équation (I-1) devient $\frac{du}{dr} + \frac{1}{r}u + \frac{s}{\lambda} = 0$

$$\text{Ou } rdu + udr + \frac{s}{\lambda} r dr = 0$$

$$\text{Ou encore } d(ur) + \frac{s}{\lambda} r dr = 0$$

Par deux intégrales successives on obtient :

$$u + \frac{s}{2\lambda} r = \frac{C_1}{r} \Rightarrow \frac{dT(r)}{dr} + \frac{s}{2\lambda} r = \frac{C_1}{r}$$

$$\text{Et } T(r) = \frac{-s}{4\lambda} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

La détermination des deux constantes d'intégration C_1 et C_2 se fait par l'utilisation des conditions aux limites :

$$T = T_{\max} = T_{\min} \text{ (à cause de la symétrie du corps)} \quad r = 0 ;$$

$$T = T_1 \quad r = R ;$$

Qui conduit aux valeurs : $C_1 = 0$ $C_2 = T_1 + \frac{s}{4\lambda} R^2$

On obtient la forme particulière de la température :

$$T(r) = \frac{s}{4\lambda} (R^2 - r^2) + T_1 \quad (\text{II-2})$$

Cette expression montre que la température a une variation parabolique en fonction du

rayon, elle va donc admettre un extrémum, la deuxième dérivée est : $\frac{\partial^2 T(r)}{\partial r^2} = \frac{-s}{2\lambda}$

Qui permet la formation des conditions suivantes :

$s > 0; \frac{\partial^2 T(r)}{\partial r^2} < 0 \Rightarrow$ la température admet un maximum localisé sur l'axe du barreau

$s < 0; \frac{\partial^2 T(r)}{\partial r^2} > 0 \Rightarrow$ la température admet un minimum localisé sur l'axe du barreau

La valeur extrême de la température est donnée par : $T_{\max, \min} = T_1 + \frac{s}{4\lambda} R^2$

Le flux thermique surfacique est donné par la loi de Fourier et a une direction radiale :

$$\varphi = -\lambda \frac{\partial T(r)}{\partial r} = \frac{s}{2} r \quad (\text{II-3})$$

$$\varphi_{\max} = \frac{s}{2} R$$

Le flux thermique transféré par la surface extérieure du barreau cylindrique rapporté à une

longueur égale à 1 m est : $\phi = \pi R^2 s$

2.2. Méthode de séparations de variables (conduction en milieu limité)

La méthode de séparation des variables est classique. Elle conduit à une solution sous forme de développement en série de fonctions orthogonales. Elle s'applique pour [42]:

- une équation aux dérivées partielles, linéaire et homogène ; dont le type le plus général

$$\text{est : } a(x) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial T}{\partial x} + c(x)T + d(y) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + e(y) \frac{\partial T}{\partial y} + f(y)T = 0$$

- des systèmes limités, de forme géométrique simple, dont les frontières ont pour équation $x = \text{cte}$ ou $y = \text{cte}$;

- des conditions aux frontières linéaires homogènes et uniformes, sauf une qui est linéaire et non homogène.

La méthode de séparation des variables consiste à rechercher des solutions particulières de l'équation aux dérivées partielles de la forme $T(x, y) = f(x)g(y)$ qui satisfasse les seules conditions homogènes. Celles-ci imposent aux paramètres de séparation α de prendre une suite infinie de valeurs discrètes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_k, \dots)$: racines d'une équation transcendante. Ces solutions particulières $T_k = A_k \cdot f_k(x) \cdot g_k(y)$ correspondant à chacune de ces racines forment une suite de fonctions orthogonales dans l'ensemble du domaine. Elles constituent une base pour exprimer la solution du problème qui se présente sous forme d'une Série $T_k = \sum_k A_k \cdot f_k(x) \cdot g_k(y)$. Les coefficients de la série sont calculés de manière à ce que T satisfasse la seule condition non homogène du problème.

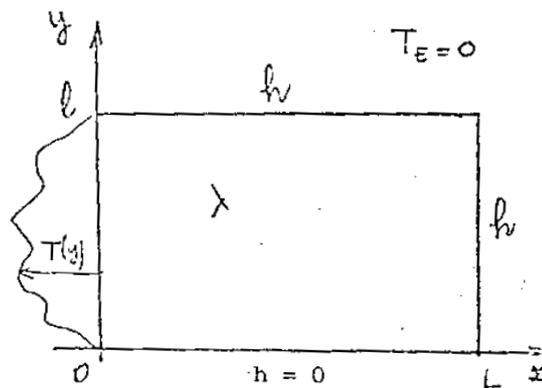


Figure II-1 : Principe de la méthode de séparation de variables

Principe de la méthode sur un exemple simple :

On considère une plaque rectangulaire d'épaisseur e limitée par $x = 0$, $x = L$, $y = 0$, $y = l$. La conductivité thermique de la plaque est supposée constante et il n'y a pas de source volumique de chaleur. La plaque est en contact par ses côtés $x = L$ et $y = l$ avec le milieu extérieur à température uniforme que nous prendrons comme origine des températures ($T_E = 0$); le coefficient superficiel de transfert sur ces 2 côtés est supposé uniforme et égal à h , la face $y = 0$ est isolée. Enfin, sur la face $x=0$, on impose une loi de température $T = T(y)$.

Le système de conduction s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1) \\ x = 0 \Rightarrow T = T(y) \quad (2) \\ x = L \Rightarrow -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_L = hT_L \quad (3) \\ y = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (4) \\ y = 1 \Rightarrow -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_1 = hT_1 \quad (5) \end{array} \right. \quad (\text{II-4})$$

La particularité de ce système linéaire est que seule la condition (II-4-2) est non homogène. Cherchons des solutions particulières de la forme: $T(x, y) = f(x).g(y)$ qui puisse satisfaire simplement les conditions homogènes (II-4-3), (II-4-4) et (II-4-5).

L'équation aux dérivées partielles (II-4-1) conduit à l'égalité :

$$-\frac{1}{f} \cdot \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = Cte. \quad (\text{II-5})$$

Le premier terme ne dépendant que de x , le deuxième que de y , ces deux termes ne peuvent être que constants. Posons cette constante égale à $\varepsilon \alpha^2$ ($\varepsilon = \pm 1$).

L'équation (II-5) se sépare alors en deux équations simplement différentielles :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \varepsilon \alpha^2 f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 g}{dy^2} - \varepsilon \alpha^2 g = 0$$

choisissons $\varepsilon = -1$ (Le signe de la variable de séparation $\varepsilon \alpha^2$ doit être tel qu'on obtienne une suite de fonctions orthogonales sur l'intervalle $[0, l]$ le long duquel doit satisfaire la condition non homogène (II-4-2). Si on avait choisi $\varepsilon = +1$, on n'aurait pu obtenir cette suite).

Les dernières équations admettent pour solution générale :

$$f(x) = A \exp(\alpha x) + B \exp(-\alpha x)$$

$$g(y) = C \cos(\alpha y) + D \sin(-\alpha y)$$

$$T(x, y) = [A \exp(\alpha x) + B \exp(-\alpha x)] [C \cos(\alpha y) + D \sin(-\alpha y)]$$

Les conditions (II-4-3), (II-4-4), (II-4-5) conduisent à :

$$-\lambda \alpha [A \exp(\alpha L) + B \exp(-\alpha L)] = h [A \exp(\alpha L) - B \exp(-\alpha L)]$$

$$A \left(\frac{h}{\lambda} + \alpha \right) + B \left(\frac{h}{\lambda} - \alpha \right) \exp(-2\alpha L) = 0$$

$D = 0$

$\lambda C \alpha \sin(\alpha.l).f(x) = hC \cos(\alpha.l).f(x)$

$\cot g(\alpha y) = \frac{\alpha.l}{Bi} \quad \text{avec } Bi = \frac{hl}{\lambda}$

Bi: Nombre de Biot.

Cette équation est transcendante. Elle a une infinité de racines intersection des courbes

$$\begin{cases} y_1 = \cot g(u) \\ y_2 = \frac{u}{Bi} \end{cases} \quad (\alpha)$$

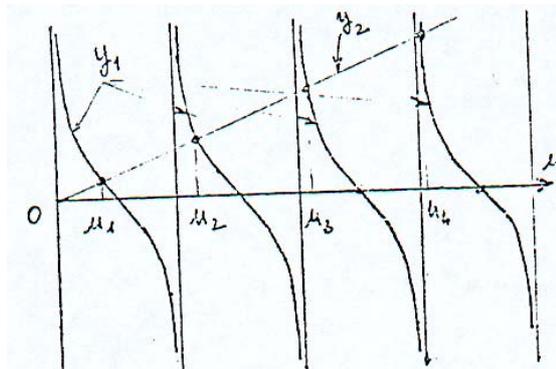


Figure II-2 : Solution du système (α)

Si u_1, u_2, \dots, u_k sont ces racines, $\alpha_1 = u_1 / l, \alpha_2 = u_2 / l, \dots, \alpha_k = u_k / l$

A chaque α_k correspond une solution particulière de (II-4-1) satisfaisant (II-4-3), (II-4-4) et (II-4-5), mais non (II-4-2) :

$T_k = C_k \cos(\alpha_k y) [\exp(\alpha_k x) - F_k \exp(-\alpha_k x)]$ Avec $F_k = \frac{Bi + \alpha_k l}{Bi - \alpha_k l} \exp(2\alpha_k.L)$

Le système (II-4-1), (II-4-3), (II-4-4), (II-4-5) étant linéaire et homogène, toute combinaison linéaire de solutions est également solution, en particulier la série :

$T_k(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(\alpha_k y) [\exp(\alpha_k x) - F_k \exp(-\alpha_k x)]$

On obtient la solution du problème en cherchant les valeurs de C_k pour que θ satisfasse la

Condition (II-4-2) : $T_k(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(\alpha_k y) [1 - F_k] \equiv T(y)$

D'où la solution :

$T_k(x, y) = 2T_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k l}{\left(1 + \frac{\sin 2\alpha_k l}{2\alpha_k l}\right) \alpha_k l} \frac{[\exp(\alpha_k x) - F_k \exp(-\alpha_k x)]}{(1 - F_k)} \cos(\alpha_k y)$ (II-6)

2.3. Méthode du coefficient de forme

Dans les systèmes bi- ou tridimensionnels où n'interviennent que deux températures limites T_1 et T_2 , on montre que le flux de chaleur peut se mettre sous la forme [43] :

$$\varphi = \lambda F (T_1 - T_2)$$

avec : λ Conductivité thermique du milieu séparant les surfaces S_1 et S_2 ($\text{W/m}^\circ\text{C}$)

T_1 : Température de la surface S_1 ($^\circ\text{C}$).

T_2 : Température de la surface S_2 ($^\circ\text{C}$).

F : Coefficient de forme (m).

Le coefficient de forme F ne dépend que de la forme, des dimensions et de la position relative des deux surfaces S_1 et S_2 . Les valeurs de F pour les configurations les plus courantes sont présentées dans le tableau II-1.

Cas particulier : Enceinte tridimensionnelle (four, chambre froide, pièce climatisée).

Méthode : On découpe l'enceinte en différents éléments et on calcule le flux traversant chacun d'eux :

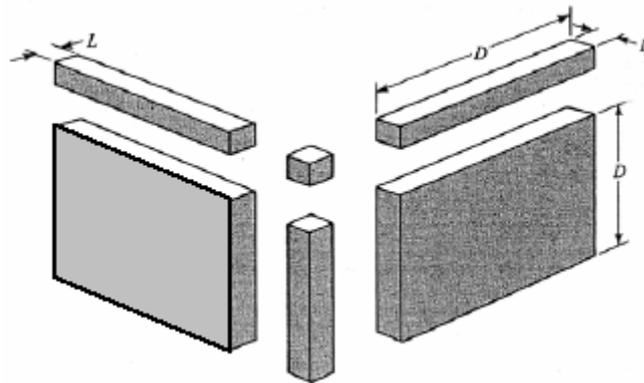


Figure II-3 : Méthode de coefficients de forme

Si les dimensions longitudinales sont grandes devant l'épaisseur e des parois (supposée constante) nous avons les relations :

$$F_{\text{paroi } i} = S_i / D_i$$

$$F_{\text{bord } i} = 0.54 D_i$$

$$F_{\text{coin } i} = 0.15 L_i$$

Avec : S_i : Aire de la paroi i

D_i : Longueur de la paroi ou du bord i

L_i : Epaisseur des parois

Le flux de chaleur traversant l'enceinte s'écrit alors :

$$\varphi = \sum_{i=1}^6 \lambda_i F_{paroi-i} \Delta T_i + \sum_{i=1}^{12} \lambda_i F_{bord-i} \Delta T_i + \sum_{i=1}^8 \lambda_i F_{coin-i} \Delta T_i$$

avec : λ_i Conductivité thermique (équivalente si paroi multicouche) de la paroi i (W/m°C)

ΔT_i : Différence de température entre les faces intérieure et extérieure de la paroi i (°C).

Système	Schéma	Coefficient de forme	Domaine d'application
Cylindre isotherme de rayon r enterré dans un milieu semi-infini à surface isotherme		$\frac{2 \pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D}{r}\right)}$	$L \gg r$
Sphère isotherme de rayon r enterrée dans un milieu infini		$4 \pi r$	
Sphère isotherme enterrée dans un milieu semi-infini à surface isotherme		$\frac{4 \pi r}{1 - \frac{r}{2D}}$	
Conduction entre 2 cylindres isothermes enterrés dans un milieu infini		$\frac{2 \pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 - r_1^2 - r_2^2}{2 r_1 r_2}\right)}$	$L \gg r$ $L \gg D$
Cylindre horizontal au centre dans une plaque infinie		$\frac{2 \pi L}{\ln\left(\frac{4D}{r}\right)}$	
Cylindre isotherme de rayon r placé dans un milieu semi-infini		$\frac{2 \pi L}{\ln\left(\frac{2L}{r}\right)}$	$L \gg 2r$
Parallélépipède rectangle isotherme enterré dans un milieu semi-infini à surface isotherme		$1.685 L \left[\log\left(1 + \frac{b}{a}\right) \right]^{-0.59} \left(\frac{b}{c}\right)^{-0.078}$	
Cylindre au centre d'un parallélépipède de section carrée		$\frac{2 \pi L}{\ln\left(0.54 \frac{h}{r}\right)}$	$L \gg W$
Plaque rectangulaire mince enterrée dans milieu semi-infini à surface isotherme		$4r$ $8r$	$D = 0$ $D \gg 2r$
Sphère creuse		$\frac{4 \pi r_0 r_1}{r_0 - r_1}$	

Tableau II-1 : Valeurs des coefficients de forme de conduction

3. METHODES DE RESOLUTION EN REGIME VARIABLE

Nous décrivons dans cette deuxième partie du chapitre un certain nombre de méthodes utilisées pour la résolution de l'équation de la chaleur en régime variable.

Le problème consiste à trouver le champ de température $T(M,t)$, ainsi que le flux de chaleur transmis. La recherche de $T(M,t)$ s'effectue en résolvant un système d'équation qui comprend l'équation indéfinie de la chaleur, les conditions aux frontières intérieures et extérieures et la condition initiale.

Comme au cas stationnaire le cas non-stationnaire peut être résolu par différentes méthodes.

3.1. Milieu à température uniforme

La température est considérée comme uniforme ce qui est contradictoire avec le principe de propagation de la chaleur. Cette approximation du milieu à température uniforme peut néanmoins être justifiée dans certains cas. Comme par exemple la trempe d'une bille métallique qui consiste à immerger une bille initialement à la température T_i dans un bain à température T_0 maintenue constante. Si l'on suppose que la température à l'intérieur de la bille est petite et sa conductivité thermique est élevée, on peut écrire le bilan thermique de cette bille entre deux instants t et $t+dt$:

$$-h.S(T - T_0) = \rho.c.v \frac{dT}{dt}$$

Soit:

$$\frac{dT}{T - T_0} = \frac{-hSdt}{\rho cv} \text{ d'où } \frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp\left(-\frac{hS}{\rho cv} t\right) \quad (\text{II-7})$$

On remarque que le groupement $\frac{\rho cv}{hS}$ est homogène à un temps t

On appellera τ la constante de temps du système: $\tau = \frac{\rho cv}{hS}$

Cette grandeur est fondamentale dans la mesure où elle donne l'ordre de grandeur de temps du phénomène physique, on a en effet :

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{II-8})$$

Il est toujours intéressant en physique de présenter les résultats sous forme adimensionnelle, on verra que deux nombres adimensionnels sont particulièrement importants en régime variable :

- Le nombre de Biot: $Bi = \frac{l}{\frac{\lambda S}{hS}}$ (Résistance thermique interne/Résistance thermique externe).

l : est la dimension caractéristique du milieu,

$$\text{Soit: } Bi = \frac{hl}{\lambda} \quad (\text{II-9})$$

L'hypothèse d'uniformité de la température est justifiée lorsque $Bi < 0.1$.

- Le nombre de Fourier qui caractérise la pénétration de la chaleur en régime variable :

$$F_0 = \frac{at}{l^2} \quad (\text{II-10})$$

La définition de ces deux nombres permet d'écrire l'expression de la température de la bille sous la forme :

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp(-BiF_0) . \quad (\text{II-11})$$

On considère généralement qu'un système tel que $Bi < 0.1$ peut être considéré comme étant à température uniforme, le critère $Bi < 0.1$ est appelé le critère d'accumulation thermique.

3.2. Méthodes de séparation de variables

Son principe est basé sur la décomposition en produit de fonctions et la recherche d'une solution de même fréquence que l'excitation [43].

3.2.1. Cas d'un milieu semi infini avec une température sinusoïdale imposée en surface, régime périodique établi

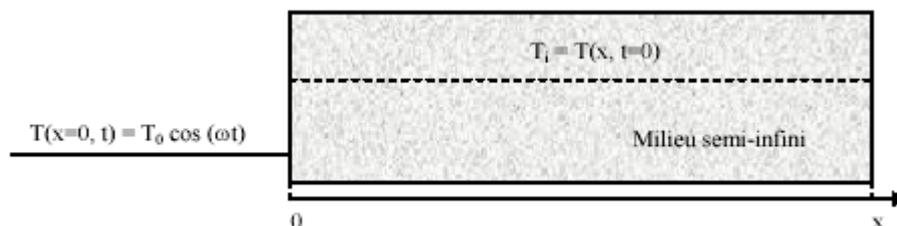


Figure II-4 : température sinusoïdale imposée en surface en régime périodique établi

L'équation de la chaleur s'écrit:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II-12})$$

On effectue une décomposition de la température en un produit de fonction sous la forme :

$$T(x,t) = X(x).Y(t) \quad (\text{II-13})$$

L'équation de la chaleur conduit à la relation suivante : $X''Y = \frac{1}{a}XY'$ ou $a \frac{X''}{X} = \frac{Y'}{Y} = \beta$

L'excitation (température imposée) étant de nature périodique, on recherche une solution périodique de même fréquence que l'excitation en posant: $\beta = j\omega$.

On obtient : $Y(t) = A \exp(j\omega t)$

$$X(x) = B \exp\left(-\sqrt{\frac{\beta}{a}}.x\right) + C \exp\left(\sqrt{\frac{\beta}{a}}.x\right) = B \exp\left(-\sqrt{\frac{\beta}{a}}.x\right)$$

Car $X(x)$ doit tendre vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$

$$\text{or: } \sqrt{\beta} = \sqrt{j\omega} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}(1+j)$$

$$\text{d'où } T(x,t) = \text{Re}[X(x).Y(t)] = \text{Re}\left[AB \exp(j.\omega.t) \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}.(1+j)x\right)\right]$$

$$T(0,t) = T_0 \cos(\omega.t) \Rightarrow AB = T_0$$

$$T(x,t) = T_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}.x\right) \cos\left(\omega.t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}}.x\right) \quad (\text{II-13})$$

3.2.2. Cas d'une plaque plane soumise à une température constante:

L'équation de la chaleur s'écrit

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II-14})$$

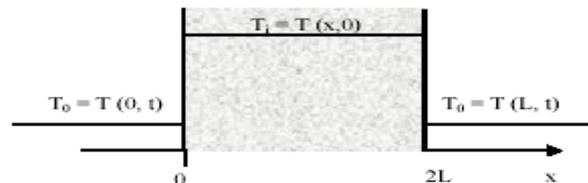


Figure II-5 : plaque plane soumise à une température constante

Les conditions aux limites sont de la forme :

$$\begin{cases} T(x,0) = T_i \\ T(0,t) = T(2L,t) = T_0 \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = T - T_0$

Donc on peut écrire (II-14) comme suit :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \quad (\text{II-15})$$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \bar{T}(x,0) = T_i - T_0 \\ \bar{T}(0,t) = \bar{T}(2L,t) = 0 \end{cases}$$

On effectue une décomposition de température en produit de fonctions sous la forme:

$$\bar{T}(x,t) = X(x)Y(t)$$

L'équation de la chaleur conduit à la relation suivante :

$$X''Y = \frac{1}{a} XY' \quad \text{Ou} : \frac{X''}{X} = \frac{1}{a} \frac{Y'}{Y} = -\omega^2$$

Où ω est une constante car les deux fonctions X et Y sont indépendantes. Nous en déduisons :

$$X'' + \omega^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

$$Y' + a\omega^2 Y = 0 \Rightarrow Y(t) = C \exp(-a\omega^2 t)$$

$$\text{Et : } \bar{T}(x,t) = C \exp(-a\omega^2 t) [A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)]$$

La condition au limite $\bar{T}(0,t) = 0$ s'écrit donc : $C.A=0$, d'où $A=0$ car $C=0$ conduirait à une fonction nulle.

La condition à la limite $\bar{T}(2L,t) = 0$ s'écrit alors :

$$\bar{T}(2L,t) = C \exp(-a\omega^2 * 2L) B \sin(2\omega L) = 0$$

$$\text{D'où } \omega = \frac{n\pi}{2L} \text{ avec } n=0, 1, 2, \dots$$

$$\text{La solution élémentaire prend la forme } \bar{T}_n(x,t) = D_n \sin\left(\frac{n\pi}{2L} x\right) \exp\left[-a\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 t\right]$$

Le théorème de superposition des solutions permet d'écrire la solution générale sous la

$$\text{forme : } \bar{T}_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{2L} x\right) \exp\left[-a\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 t\right]$$

La condition à la limite $\bar{T}(x,0) = T_i - T_0$ peut s'écrire : $\bar{T}_n(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{2L} x\right)$

Une fonction f définie sur [0, l] peut s'écrire sous forme d'une série de Fourier en sinus :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad \text{avec : } b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

Nous pouvons effectuer un développement en série de Fourier f(x)=(T_i-T₀) sur l'intervalle

$$[0, 2L] : T_i - T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{L} \left[\int_0^{2L} (T_i - T_0) \sin\left(\frac{n\pi}{2L} u\right) du \right] \sin\left(\frac{n\pi}{2L} x\right).$$

Par identification, on déduit :

$$D_n = \frac{2}{2L} \int_0^{2L} (T_i - T_0) \sin\left(\frac{n\pi}{2L} u\right) du = \frac{(T_i - T_0)}{L} \int_0^{2L} \sin\left(\frac{n\pi}{2L} u\right) du$$

$$D_n = \frac{2(T_i - T_0)}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)]$$

$$D_n = \frac{4(T_i - T_0)}{n\pi} . \text{avec } n = 1, 3, 5, \dots$$

et l'expression finale de T(x,t) :

$$\frac{T(x,t) - T_0}{T_i - T_0} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2L} x\right) \exp\left[-a\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 t\right] \quad \text{Avec } n = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{II-16})$$

3.2.3. Cas d'une géométrie cylindrique

En conduction de la chaleur, on est souvent amené à résoudre des équations différentielles linéaires du second ordre au cas où les coefficients sont constants et classiques. Pour des coefficients variables nous limitons nos propos à des solutions qui font appel aux fonctions de Bessel [44].

Soit l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad t > 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq R_0$$

Les conditions d'univalence:

$$T = T_0 \quad \text{pour } t = 0, \quad 0 \leq r \leq R_0$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} + a(T_1 - T) = 0 \quad \text{pour } r = R_0$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } r = 0$$

Sont tirées de la condition de symétrie $T_{r=0} \neq \infty$, c'est à dire au centre du cylindre la valeur de la température est finie. Après la substitution des variables (en posant $\theta = T_1 - T$), le système d'équations se ramène à la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) & t > 0 \text{ et } 0 \leq r \leq R_0 \\ \theta = \theta_0 = T_1 - T_0 & \text{pour } t = 0 \\ \lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} + \alpha \theta = 0 & \text{pour } r = R_0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0; \quad \theta \neq \infty & \text{pour } r = 0 \end{cases}$$

Pour la résolution, on a recours à la méthode de séparation des variables, qui conduit à une solution de la forme : $\theta = C \exp(-ak^2 \tau) \cdot \psi(r)$.

Où la fonction $\psi(r)$ dans le problème considéré doit être solution de l'équation de Bessel :

$$\psi''(r) + \frac{1}{r} \psi'(r) + K^2 \cdot \psi(r) = 0 \tag{II-17}$$

Puisque ψ dépend seulement de r , la solution de l'équation précédente est :

$$\psi(r) = Q(r) + \mu(r)$$

La solution générale de toute équation différentielle homogène linéaire du deuxième ordre de la forme: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (II-18)

à la quelle se rapporte également l'équation (II-18), peut s'écrire :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots \text{Où } c_1 \text{ et } c_2 \text{ sont des constantes}$$

y_1 et y_2 sont les solutions indépendantes de (II-18) c'est-à-dire $\frac{y_1}{y_2} \neq cst$

$$\text{Avec: } y_2 = y_1 \int y_1^{-2} \exp\left(-\int p d\xi\right) d\xi$$

La première solution partielle $Q(r)$ se calcule à partir de l'équation:

$$rQ''(r) + Q'(r) + k^2 rQ(r) = 0 \tag{II-19}$$

En remplaçant $r = x/k$, on obtient:

$$xQ'' + kQ' + k^2 xQ = 0 \tag{II-20}$$

La solution de cette équation est cherchée sous la forme d'une série exponentielle :

$$Q = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$Q' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$

$$Q'' = 2.1a_2 + 3.2a_3 x + 4.3a_4 x^2 + \dots$$

En portant ces dernières expressions dans (II-19), on obtient :

$$a_1 + (a_0 + 2^2 a_2)x + (a_1 + 3^2 a_3)x^2 + (a_2 + 4^2 a_4)x^3 + \dots = 0 \quad (\text{II-21})$$

L'expression (II-21) est valable pour: $a_1 = 0$; $a_0 + 2^2 a_2 = 0$; $a_1 + 3^2 a_3 = 0$

Par conséquent, la solution partielle Q(x) est :

$$Q = a_0(1 - x^2/2^2 + x^4/(2^2 \cdot 4^2) - x^6/(2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2) + \dots)$$

Si on pose $a_0 = 1$, l'intégrale de (II-20) est :

$$j(x) = 1 - x^2/2^2 + x^4/(2^2 \cdot 4^2) - x^6/(2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2) + \dots$$

Appelée fonction de Bessel de première espèce d'ordre nul.

Pour trouver la deuxième solution, utilisons la formule :

$$\mu = Q \int Q^2 \exp\left(-\int \frac{1}{x} dx\right) dx \quad (\text{II-22})$$

$$\mu = j_0(x) \ln x - \frac{x}{2^2} - (x^4(2^2 \cdot 4^2)) + (x^6(2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2))(1 + 1/2 + 1/3) \dots$$

Pour la commodité des calculs, au lieu de la fonction μ , portons dans la solution générale

(II-17) la fonction $y_0(x)$ liée à μ par :

$$y_0(x) = \frac{2}{\pi} \mu + \frac{2}{\pi} j_0(x)(c - \ln 2)$$

Où $c = 0.577$ est la constante d'Euler ; $y_0(x)$ la fonction de Bessel de 2^{ème} espèce d'ordre nul.

L'intégrale générale de l'équation (II-17) est :

$$\psi(x) = c_1 j_0(x) + c_2 y_0(x) \quad (\text{II-23})$$

Puisque $x = kr$ on a $\psi(r) = c_1 j_0(kr) + c_2 y_0(kr)$

La température sur l'axe du cylindre ($r = 0$) doit être finie, la solution ne doit pas contenir la fonction y_0 qui tend vers l'infini pour $r \rightarrow 0$; par conséquent, $c_2 = 0$ et la solution devient :

$$\theta = C \exp(-ak^2 \tau) j_0(kr) \quad (\text{II-24})$$

Les constantes k et C se déterminent à partir des conditions aux limites et initiales.

Indiquons en préalable que :

$$j_0'(kr) = \frac{dj_0(kr)}{dr} = -k(kr/2 - (kr)^3/(2^2 \cdot 4) + (kr)^5/(2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2) - \dots) = -kj_1(kr)$$

Ici $j_0(kR)$ est la fonction de Bessel de 1^{ère} espèce de premier ordre. Faisons satisfaire la solution de (II-24) à la condition aux limites :

$$-\lambda k c_1 j_1(kR_0) \exp(-k^2 a \tau) = a c j_0(kR_0) \exp(-k^2 a \tau) \quad (\text{II-25})$$

Réduisons par : $c \exp(-k^2 a \tau)$ pour obtenir :

$$j_0(kR_0) / j_1(kR_0) = k \lambda R_0 / (a R_0) = k R_0 / Bi \quad (\text{II-26})$$

(II-26) est une équation transcendante, qui peut être résolue par la méthode graphique :

$$\begin{cases} y_1 = k R_0 / Bi = n / Bi \\ y_2 = j_0(n) / j_1(n) \end{cases} \quad (\text{II-26-1})$$

La solution générale est la somme de toutes les solutions partielles :

$$\mathcal{G} = \sum c_i j_0(n_i r / R_0) \exp(-n_i^2 \tau / R_0^2)$$

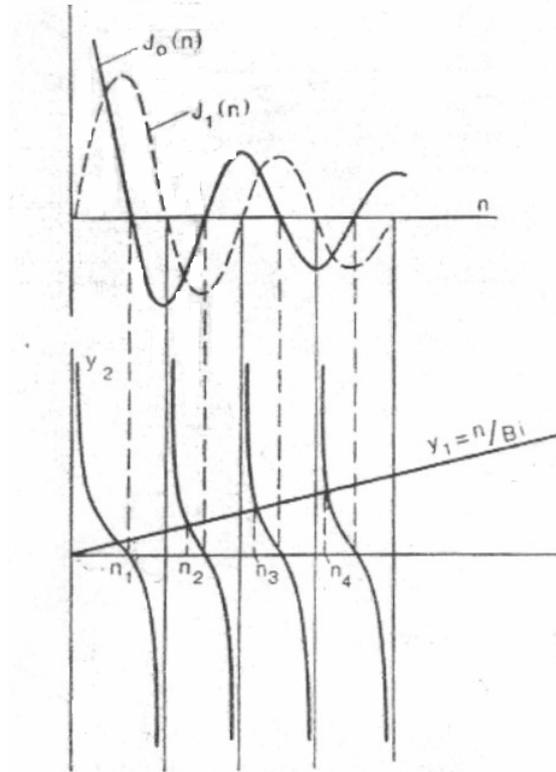


Figure II-6 : Solution graphique de l'équation transcendante

Les constantes c_i se déterminent à partir de la condition initiale $\theta_0 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i j_0(n_i r_i / R_0)$

En introduisant la notation $\mathcal{G} = \theta / \theta_0 = (T_1 - T)(T_1 - T_0)$

$$\text{On a } \theta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 j_1(n_i)}{(j_0^2(n_i) j_1^2(n_i))} j_0(n_i \frac{r}{R_0}) \exp(-n_i^2 F_0). \quad (\text{II-27})$$

3.3. Méthode basée sur la transformée de LAPLACE

C'est une méthode basée sur la transformation intégrale, elle est définie par :

$$L[T(t)] = \theta(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt)T(t)dt$$

Et $L^{-1}[\theta(p)] = T(t)$ transformée inverse

Il n'existe pas de formule générale permettant de calculer $T(t)$ connaissant $\theta(p)$. On connaît cependant l'expression exacte de $T(t)$ pour certaines fonctions particulières $\theta(p)$, on trouvera des exemples au tableau II-2. L'utilisation de ces tables associées aux propriétés particulières de la transformation de Laplace inverse permet de résoudre certain nombre de cas. On essaiera toujours de décomposer une fonction complexe en somme, produit, ou série de fonctions simples facilement inversibles.

Appliquons-la transformée de Laplace à l'équation de la conduction dans un système unidimensionnelle sans source :

$$\frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

Si la distribution de température initiale est uniforme ($T(x, 0) = T_0$), on obtient :

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} - \frac{p}{a} \bar{T} = \frac{T_0}{a}$$

On donne deux exemples pratiques sur cette méthode :

3.3.1. Cas d'une température constante imposée sur un milieu semi-infini

Un milieu semi infini est une paroi d'épaisseur suffisamment grande pour que la perturbation appliquée sur une face ne soit pas ressentie par l'autre face. Un tel système représente l'évolution d'un mur d'épaisseur finie pendant un temps suffisamment court pour que la perturbation créée sur une face n'ait pas atteint l'autre face (vrai tout le temps que la température de l'autre face n'a pas varié).

Le milieu semi-infini est initialement à la température uniforme T_i . On impose brutalement la température T_0 sur sa surface, cette condition limite est appelée condition de Dirichlet.

$$q = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

$\theta(p) = L\{T(t)\}$	T(t)	$\theta(p) = L\{T(t)\}$	T(t)
$\frac{1}{p}$	1	$\frac{\ln(p)}{p}$	$-\ln(t) - \gamma \quad ; \quad \gamma = 0,57721$
1	$\delta(t)$ Dirac	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{p + \beta}$	$e^{-\beta t}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$\text{sh}(\omega t)$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\text{ch}(\omega t)$
$\frac{b}{p(b + \sqrt{p})}$	$1 - \exp(b^2 t) \text{erfc}(b \sqrt{t})$	$\frac{1}{p^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

$\theta(p) = L\{T(t)\}$	T(t)
e^{-qx}	$\frac{x}{2\sqrt{\pi a t^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4 a t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{q}$	$\left(\frac{\alpha}{\pi t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4 a t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p}$	$\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{pq}$	$2\left(\frac{\alpha t}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4 a t}\right) - x \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p^2}$	$\left(t + \frac{x^2}{2\alpha}\right) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - x \left(\frac{t}{\pi\alpha}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4 a t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{q+h}$	$\left(\frac{\alpha}{\pi t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4 a t}\right) - h \alpha \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + h\sqrt{at}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{q(q+h)}$	$\alpha \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + h\sqrt{at}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p(q+h)}$	$\frac{1}{h} \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \frac{1}{h} \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + h\sqrt{at}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p q (q+h)}$	$\frac{2}{h} \left(\frac{\alpha}{\pi t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4 a t}\right) - \frac{1+h x}{h^2} \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + \frac{1}{h^2} \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + h\sqrt{at}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{(q+h)^2}$	$-2 h \left(\frac{\alpha^3 t}{\pi}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2 a t}\right) + \alpha (1+h x + 2 h^2 \alpha t) \exp(h x + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + h\sqrt{at}\right)$

Tableau II-2 : Transformation de Laplace inverse

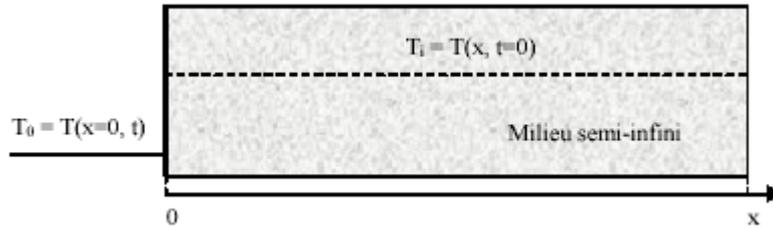


Figure II-7 : Température uniforme imposée sur un milieu semi-infini

L'équation de la chaleur s'écrit: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$

Avec les conditions aux limites :

$$T(x, 0) = T_i$$

$$T(0, t) = T_0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = 0 \quad \text{pour } x \rightarrow \infty$$

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = \frac{T - T_i}{T_0 - T_i}$

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{T}(x, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{T}(0, t) = 1 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{T}(x, t) = 0 \quad \text{pour } x \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (4)$$

(II-28)

La transformée de Laplace de $\bar{T}(x, t)$ par rapport au temps s'écrit :

$$\theta(x, p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) \bar{T}(x, t) dt$$

La transformée Laplace de l'équation (II-28-1) conduit à :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - q^2 \theta = 0 \quad \text{Avec } q^2 = \frac{p}{a}$$

Dont la solution est : $\theta(x, p) = A \exp(-qx) + B \exp(qx)$

La température garde une valeur finie quand x tend vers l'infini donc $B=0$, nous en déduisons que $\theta(x, p) = A \exp(-qx)$

La transformée de Laplace de l'équation (II-28-3) conduit à :

$$\theta(0, p) = A \exp(-qx) \quad d'où \quad A = \frac{1}{p}$$

$$\text{et on a } \theta(x, p) = \frac{1}{p} \exp(-qx)$$

L'utilisation des tables de Laplace inverse conduit à:

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_0 - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

$$\text{Avec : } \operatorname{erfc}(u) = 1 - \operatorname{erf}(u)$$

$$\operatorname{erf} : \text{Fonction erreur} \quad \operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-\varepsilon^2) d\varepsilon$$

3.3.2. Milieu avec changement d'état

a- Température constante imposée à la surface :

Le milieu semi infini est initialement à la température uniforme T_i en phase 2 ($T_2(x, 0) = T_i$). On impose brutalement une température de surface T_0 inférieure à la température de changement de phase 2→1 ($T_1(0, t) = T_0$). Un changement de phase va se produire tout d'abord à la surface puis se propager vers l'intérieur du milieu semi infini. $X(t)$ représente la position du front de changement de phase, point auquel les températures des deux phases sont supposées constante et égales ($T_1(x, t) = T_2(x, t) = T_c$).

L'équation de la chaleur s'écrit dans les deux phases :

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad \text{Phase 1, pour } x > X(t) \quad (\text{II-29})$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad \text{Phase 2, pour } x > X(t) \quad (\text{II-30})$$

Par définition, la quantité de chaleur Q échangée avec l'environnement par un corps pur de masse m qui subit un changement d'état (solidification ou fusion) est :

$$Q = m.L \quad [j] = [\text{Kg}].[j/\text{Kg}]$$

L : est la chaleur latente massique de changement d'état.

Pour l'élément de volume SdX de masse ρSdX , la densité de flux de chaleur échangée au cours du changement d'état pendant le temps dt est $L\rho \frac{dX}{dt}$

S : Surface de l'élément.

ρ : Masse volumique de l'élément.

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} T_2(x, t) = T_i & (1) \\ T_1(x = 0, t) = T_0 & (2) \\ T_1(x, t) = T_2(x, t) = T_c & (3) \\ \lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_x - \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_x = L\rho \frac{dX}{dt} & (4) \end{cases} \quad (\text{II-31})$$

Afin de pouvoir appliquer la méthode de la transformée de Laplace pour la résolution des équations (II-29) et (II-30), on pose :

$$T_1(x, 0) = \text{cte} = A \quad \text{à } t=0$$

$$T_2(x, 0) = \text{cte} = B \quad \text{à } t=0$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions (II-31-3) et (II-31-4).

On effectue les changements de variables suivants $\bar{T}_1 = T_1(x, t) - A$ et $\bar{T}_2 = T_2(x, t) - T_i$,

on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial t} & (1) \\ \bar{T}_1(x, t) = T_1(x, 0) - A = 0 & (2) \\ \bar{T}_1(0, t) = T_0 - A & (3) \end{cases} \quad (\text{II-32})$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial t} & (1) \\ \bar{T}_2(x, t) = T_2(x, 0) - T_i = 0 & (2) \\ \bar{T}_2(0, t) = B - T_i & (3) \end{cases} \quad (\text{II-33})$$

Les transformées de Laplace des équations (II-32-1) et (II-33-1) conduisent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} - q_1^2 \theta_1 = 0 & \text{avec } q_1^2 = \frac{p}{a_1} \\ \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} - q_2^2 \theta_2 = 0 & \text{avec } q_2^2 = \frac{p}{a_2} \end{cases}$$

Dont les solutions sont $\theta_1(x, p) = \beta \exp(-q_1 x)$ et $\theta_2(x, p) = \beta \exp(-q_2 x)$

Les transformées de Laplace des conditions (II-32-3) et (II-33-3) conduisent à :

$$\theta_1(0, p) = \frac{T_0 - A}{p} \quad \text{Et} \quad \theta_2(0, p) = \frac{B - T_i}{p}$$

$$\text{D'où } \alpha = \frac{T_0 - A}{p} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{B - T_i}{p}$$

$$\text{et on a } \theta_1(x, p) = \frac{T_0 - A}{p} \exp(-q_1 x) \quad \text{et} \quad \theta_2(x, p) = \frac{B - T_i}{p} \exp(-q_2 x)$$

Les transformées de Laplace inverses conduisent aux résultats suivants :

$$T_1(x, t) = T_0 + (A - T_0) \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} \right)$$

$$T_2(x, t) = T_i + (B - T_i) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}} \right)$$

L'application de la condition (II-31-3) donne :

$$T_0 + (A - T_0) \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} \right) = T_i + (B - T_i) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}} \right) = T_c$$

Cette relation doit être vérifiée pour toutes les valeurs du temps t, on déduit que $X = k\sqrt{t}$.

Où k est une constante.

En tenant compte de cette forme de X(t), l'équation (II-31-4) permet d'écrire :

$$\frac{\lambda_1 (A - T_0)}{\sqrt{\pi a_1}} \exp \left(-\frac{k^2}{4a_1} \right) + \frac{\lambda_2 (B - T_i)}{\sqrt{\pi a_2}} \exp \left(-\frac{k^2}{4a_2} \right) = L\rho \frac{k}{2}$$

$$\text{Avec } A = T_0 + \frac{(T_c - T_0)}{\operatorname{erf} \left(\frac{k}{2\sqrt{a_1}} \right)} \quad \text{et} \quad B = T_i + \frac{(T_c - T_i)}{\operatorname{erfc} \left(\frac{k}{2\sqrt{a_2}} \right)}$$

La position X (t) du front de changement de phase se calcule finalement par :

$$X(t) = k\sqrt{t}$$

Avec k solution de l'équation :

$$\lambda_1 \frac{(T_c - T_0)}{\sqrt{\pi a_1} \operatorname{erf} \left(\frac{k}{2\sqrt{a_1}} \right)} \exp \left(\frac{k^2}{4a_1} \right) + \lambda_2 \frac{(T_c - T_i)}{\sqrt{\pi a_2} \operatorname{erfc} \left(\frac{k}{2\sqrt{a_2}} \right)} \exp \left(\frac{k^2}{4a_2} \right) = L\rho \frac{k}{2}$$

Et les températures dans chaque phase s'écrivent :

$$T_1(x, t) = T_0 + \frac{(T_c - T_0)}{\operatorname{erf} \left(\frac{k}{2\sqrt{a_1}} \right)} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} \right)$$

$$T_2(x,t) = T_i + \frac{(T_c - T_i)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{a_2}}\right)} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right)$$

b- Fusion par contact avec un milieu semi-infini chaud :

On peut montrer de la même manière que si $X = k\sqrt{t}$ est la position de la surface de séparation liquide/solide alors k est solution de l'équation [43] :

$$\frac{\lambda_0 \sqrt{a_2} (T_0 - T_c) \exp\left(-\frac{k^2}{4a_2}\right)}{\lambda_1 a_0^2 + \lambda_0 a_1 \operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{a_2}}\right)} + \frac{\lambda_1 \sqrt{a_2} (T_i - T_c) \exp\left(-\frac{k^2}{4a_1}\right)}{\lambda_2 \sqrt{a_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{a_1}}\right)} = \frac{kL\sqrt{\pi}}{C_2 \sqrt{a_2}}$$

3.4. Méthode des quadripôles

On considère les variables suivantes :

$\theta(x, p)$: La transformée Laplace de la température $T(x, t)$.

$\phi(x, p)$: La transformée de Laplace du flux de chaleur $\phi(x, t)$.

Comme exemple d'application on traite le cas d'un écoulement unidirectionnel dans un mur plan [43].

La température $T(x, y)$ au sein du mur vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{II-34}$$

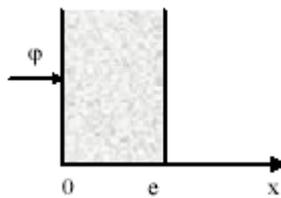


Figure II-8 : Ecoulement unidirectionnel dans un mur plan

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation (II-34) on obtient :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{p}{a} \theta = 0 \quad \text{si } T(x, 0) = 0 \tag{II-35}$$

Où $\theta(x, p)$ est la transformée de Laplace de la température. L'équation (II-35) admet une solution de la forme :

$$\theta(x, p) = k_1(p).ch(qx) + k_2(p).sh(qx) \quad \text{Avec} \quad q^2 = \frac{p}{a} \quad (\text{II-36})$$

La transformée de Laplace du flux $\phi(x, t) = -\lambda S \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$ en un point quelconque du mur s'écrit :

$$\phi(x, t) = -\lambda S \frac{\partial T(x, p)}{\partial x} = -\lambda.S.k_1.q.sh(qx) - \lambda.S.k_2.q.ch(qx) \quad (\text{II-37})$$

Les relations (II-36) et (II-37) peuvent être écrites en $x = 0$ et en $x = e$, on obtient :

$$\begin{aligned} \theta(0, p) &= k_1 & \phi(0, p) &= -\lambda.S.k_2.q \\ \theta(e, p) &= k_1.ch(qe) + k_2.sh(qe) & \phi(e, p) &= -\lambda.S.k_1.q.sh(qe) - \lambda.S.k_2.q.ch(qe) \end{aligned}$$

Il est possible d'éliminer k_1 et k_2 entre ces 4 équations, ce qui permet d'établir la relation

$$\text{suivante : } \begin{bmatrix} \theta(e, p) \\ \phi(e, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch(qe) & -\frac{1}{\lambda S q} \\ -\lambda S q sh(qe) & ch(qe) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(0, p) \\ \phi(0, p) \end{bmatrix}$$

3.5. Méthodes Numériques

Lorsque la géométrie du corps et les conditions aux limites sont trop complexes pour mettre une solution analytique du problème, on a recours aux méthodes numériques. Ces dernières sont des méthodes approximatives basées sur des techniques de discrétisation.

Afin d'appliquer une méthode numérique quelconque à un problème de transfert de chaleur, certaines mesures doivent être prises, le but étant d'approximer des équations différentielles et les conditions aux limites correspondantes, par un groupe d'équations algébriques. Ceci est généralement accompli en subdivisant le domaine continu étudié en une série d'éléments finis (suivant l'espace Δx_i ou bien suivant le temps Δt).

Dans chaque élément, on assume que la température est constante et correspond à celle de son centre. On remplace le système par un réseau de tiges joignant les centres des différents nœuds [43].

Les équations de conservation régissant les phénomènes de transfert thermique sont des équations différentielles aux dérivées partielles qui peuvent être non linéaires. En raison de

leurs complexités, ces équations sont résolues à l'aide des techniques numériques. Plusieurs méthodes numériques sont disponibles dans la littérature. On peut citer à titre d'exemples :

- la méthode des différences finies.
- la méthode des éléments finis.

3.5.1. Méthode des différences finies

Considérons par exemple le problème simple de la conduction thermique non stationnaire, et utilisons les équations aux différences établies suivant ce qu'on appelle les schémas aux différences finies explicite ou implicite.

a- Schéma explicite:

Soit l'équation unidimensionnelle de la conduction thermique $\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

a : diffusivité thermique

Les dérivées qui y figurent sont approximées par les dérivées aux différences finies :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1}^k - T_i^k}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{T_{i+1}^k - T_i^k}{\Delta x} - \frac{T_i^k - T_{i-1}^k}{\Delta x} \right) = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2}$$

L'équation aux différences finies est alors de la forme :

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \quad (\text{II-38})$$

Pour résoudre cette équation, la température se calcule seulement pour des points isolés $i = 1, 2, 3, \dots, n$, reposant sur l'axe des x. On suppose alors qu'à chaque instant la distribution de la température dans l'intervalle entre les points voisins est linéaire. Ces points s'appellent ordinairement nœuds du réseau spatial.

L'expression (II-38) doit être envisagée comme un système d'équations algébriques dont le nombre n est égal à celui des températures inconnues.

Les indices k et k+1 définissent l'instant auquel correspond la valeur de la température.

T^k : la valeur de la température à un certain instant t

T^{k+1} : la valeur de la température à l'instant t + Δt

Chacune des équations aux différences finies contient une seule température inconnue T_i^{k+1} . Cette température apparaît dans le nœud, après l'écoulement du petit intervalle de temps Δt .

On suppose alors que la température initiale en chaque nœud est T_i^k , pour le calcul de la température inconnue T_i^{k+1} , le système composé de n équations algébriques du type (II-38) se résout successivement pour chaque pas dans le temps. L'équation doit être alors résolue autant de fois qu'il y a de pas dans l'intervalle de temps du calcul.

Lorsqu'on effectue le premier pas dans le temps, le système (II-38) est résolu pour la première fois à partir des valeurs des températures initiales qui sont tirées des conditions initiales. Dans les résolutions successives, les valeurs de T_i^k sont prises à partir de la tranche du temps précédent.

Stabilité du système d'équations aux différences finies explicites :

Pour la résolution d'un système d'équations aux différences finies, le choix correct de Δt et Δx est décisif. La figure (II-9) visualise les résultats de la résolution exacte et numérique du problème de conduction thermique non stationnaire pour un mur plan divisé entre quatre intervalles de temps.

La comparaison montre que les calculs avec $a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}$ fournissent des résultats

parfaitement satisfaisants, alors qu'avec $a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} > \frac{1}{2}$ apparaît le phénomène d'instabilité.

En résolvant l'équation (II-38) sous une forme explicite par rapport à la fonction inconnue T_i^{k+1} , on obtient :

$$T_i^{k+1} = AT_{i+1}^k + BT_i^k + CT_{i-1}^k \quad (\text{II-39})$$

Où $A = C = a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ et $B = 1 - 2a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, de plus $A+B+C=1$

Pour simplifier le raisonnement, admettons que $T > 0$. Dans le cas général, parmi les valeurs connues T_{i+1}^k , T_i^k et T_{i-1}^k il existe une valeur maximale et une valeur minimale.

Si on avance l'hypothèse suivant laquelle T_{i+1}^k est la valeur maximale et T_{i-1}^k la valeur minimale, alors en vertu du fait que $T_i^{k+1} = T_{i+1}^k - B(T_{i+1}^k - T_i^k) - C(T_{i+1}^k - T_{i-1}^k)$ et $T_i^k = T_{i-1}^k + A(T_{i+1}^k - T_{i-1}^k) + B(T_i^k - T_{i-1}^k)$ pour des A , B et C positifs la valeur de la

température T_i^{k+1} à calculer par la résolution satisfait l'inégalité $T_{i+1}^k > T_i^{k+1} > T_{i-1}^k$, et par suite est bornée à l'avance, d'après des considérations physiques, A et C ne peuvent être inférieures à zéro ; donc, pour exclure la croissance infinie de T_i^{k+1} au cours de la résolution, il faut, en choisissant Δt , remplir la condition de stabilité suivante au système d'équations aux différences finies :

$$B = 1 - 2a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \geq 0 \quad \text{Ou} \quad a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Delta t_{adm} = 0.5 \frac{(\Delta x)^2}{a}$$

Où Δt_{adm} est la valeur maximale admissible du pas dans le temps

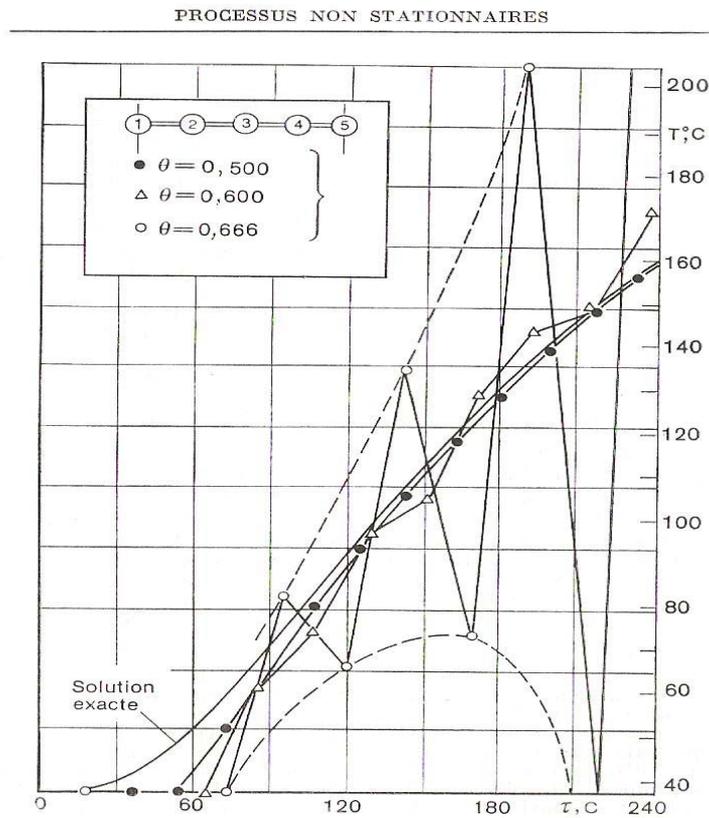


Figure II-9 : Résolution exacte et numérique du problème de conduction thermique non stationnaire pour un mur plan.

b- Schéma implicite

Pour améliorer la précision de la résolution on doit choisir Δx assez petit. L'équation de la chaleur est résolue alors en recourant aux équations aux différences finies implicites de la forme :

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} \tag{II-40}$$

On dit que les systèmes (II-40) utilisent les différences dans le temps respectivement en avant et en arrière (par rapport à l'instant t pour le quel sont composées les différences spatiales).

Les schémas aux différences finies explicite et implicite peuvent être réunis :

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = a \left[\frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} \sigma + (1 - \sigma) \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \right] \quad (\text{II-41})$$

Alors pour $\sigma = 0$ on obtient un système d'équations aux différences finies explicites ; et pour $\sigma = 1$ un système d'équation implicites.

Résolution du système d'équations aux différences finies implicites :

Le système (II-40) est absolument stable; mais la procédure de résolution des équations aux différences implicites se complique par le fait que chacune d'elles (à l'exception des équations décrivant les cas limites) contient trois températures inconnues T_{i+1}^{k+1} , T_i^{k+1} et T_{i-1}^{k+1} . Représentons l'équation aux différences implicites (II-40) sous la forme :

$$-A_i T_{i+1}^{k+1} + B_i T_i^{k+1} - C_i T_{i-1}^{k+1} = D_i \quad (\text{II-42})$$

La dépendance linéaire de T_i^{k+1} par rapport à T_{i+1}^{k+1} peut être exprimée par la relation :

$$T_i^{k+1} = E_i T_{i+1}^{k+1} + F_i \quad (\text{II-43})$$

Où E_i et F_i sont des coefficients pour le moment inconnus.

Par analogie avec la relation (II-43), $T_{i-1}^{k+1} = E_{i-1} T_i^{k+1} + F_{i-1}$

Portons la valeur obtenue de T_{i-1}^{k+1} dans (II-42) et réalisons plusieurs transformations élémentaires pour obtenir finalement :

$$T_i^{k+1} = \frac{A_i}{B_i - C_i E_{i-1}} T_{i+1}^{k+1} + \frac{D_i + C_i F_{i-1}}{B_i - C_i E_{i-1}} \quad (\text{II-44})$$

La comparaison des expressions (II-44) et (II-43) montre que dans la relation (II-43) le rôle des coefficients E_i et F_i est rempli par les grandeurs dépendant de A_i , B_i , C_i et D_i , c'est-à-dire :

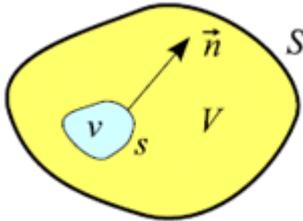
$$E_i = \frac{A_i}{B_i - C_i E_{i-1}}$$

$$F_i = \frac{D_i + C_i F_{i-1}}{B_i - C_i E_{i-1}} \quad (\text{II-45})$$

Par conséquent, la procédure de résolution consiste à calculer successivement les coefficients E_i et F_i à partir de $i = 1$ et en terminant par $i = n$. Les températures inconnues se calculent d'après l'équation (II-45) dans l'ordre inverse.

3.5.2. Méthodes des éléments finis

Soit v une partie quelconque d'un volume V limitée par la surface S .



La puissance thermique stockée dans v est égale à la somme de la puissance thermique générée par les sources volumiques contenues dans v et de la puissance thermique reçue sous forme de flux à travers la surface S [44, 45] :

$$\int_v \rho \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv = \int_v q dv + \int_s -\vec{n} \cdot (-\lambda \text{grad} \vec{T}) ds \quad (\text{II-46})$$

Où \vec{n} : la norme unitaire à s dirigée vers l'extérieure de v .

Transformons la dernière intégrale de la relation (II-46) en intégrale de volume à l'aide du théorème d'Ostogradsky, il vient :

$$\int_v \left(\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\lambda \text{grad} \vec{T}) - q \right) dv = 0$$

Le domaine v étant arbitraire, on en déduit :

$$\rho \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\lambda \text{grad} \vec{T}) - q = 0 \quad (\text{II-47})$$

Forme intégrale faible :

Pour résoudre l'équation (II-47) par la méthode des éléments finis, nous utilisons la méthode des résidus pondérés dans la formulation de Galerkin. On multiplie l'équation (II-47) par une fonction arbitraire et on intègre sur le domaine V :

$$\int_v \hat{T} \left(\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\lambda \text{grad} \vec{T}) - q \right) dv = 0 \quad (\text{II-48})$$

La fonction \hat{T} est appelée fonction de pondération

En utilisant la relation : $\text{div}(f\vec{v}) = f \text{div} \vec{v} + \vec{v} \text{grad} f$

f étant un scalaire, l'équation (II-48) s'écrit :

$$\int_v \hat{T} \rho c p \frac{\partial T}{\partial t} - \int_v \text{div}(\hat{T}(\lambda \text{grad} \bar{T})) dv + \int_v \text{grad} \bar{T}(\lambda \text{grad} \bar{T}) dv - \int_v \hat{T} q dv = 0 \quad (\text{II-49})$$

Transformons la deuxième intégrale de cette équation de surface à l'aide du théorème d'Ostrogradsky :

$$\int_v \text{div}(\hat{T}(\lambda \text{grad} \bar{T})) dv = \int_{s_\varphi} \hat{T} \bar{n}(\lambda \text{grad} \bar{T}) ds + \int_{s_t} \hat{T} \bar{n}(\lambda \text{grad} \bar{T}) ds$$

S_t : surface où la condition aux limites est de type Dirichlet.

S_φ : surface où la condition aux limites est de type Neumann.

De sorte que : $S = S_\varphi \cup S_t$ et $S_\varphi \cap S_t = \emptyset$.

On impose la condition : $\hat{T} = 0$ à S_t ce qui annule la dernière intégrale. En remplaçant dans l'équation (II-49), on obtient la formulation intégrale faible d'un problème thermique :

$$\int_v \hat{T} \rho c p \frac{\partial T}{\partial t} + \int_v \text{grad} \bar{T} \hat{T} \lambda \text{grad} \bar{T} - \int_{s_\varphi} \hat{T} \varphi_s ds - \int_v \hat{T} q ds \quad (\text{II-50})$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T = T_p & \text{sur } S_t \\ T(x, y, z, t_0) = T_0(x, y, z) \end{cases}$$

La fonction \hat{T} est appelée : champs de température virtuelle

La solution analytique de l'équation (II-50) est en général inaccessible, on est donc conduit à rechercher une solution approchée par une méthode numérique: la méthode des éléments finis. Cette méthode est un cas particulier de la méthode de Galerkin: le champ de température et les fonctions test appartiennent au même espace de dimension finie.

Discretisation du domaine (maillage) :

Le domaine V est décomposé en sous-domaines V^e de forme géométrique simple (éléments) reliés entre eux en des points appelés nœuds, cette opération s'appelle maillage.

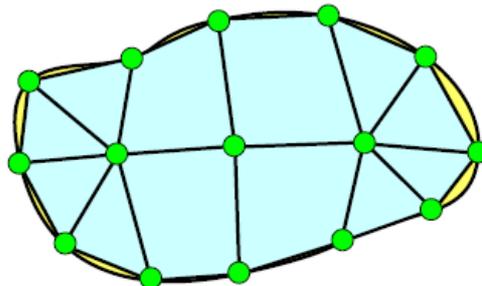


Figure II-10 : Domaine plan discrétisé en 12 éléments reliés entre eux par 15 nœuds

Représentation élémentaire du champ de température

Le champ de température $T^e(x,y,z,t)$ dans l'élément (e) a pour expression [45] :

$$T^e(x,y,z,t) = [N^e_1(x,y,z,t) \dots N^e_i(x,y,z,t) \dots N^e_n(x,y,z,t)] \times \begin{Bmatrix} T_1^e(t) \\ T_i^e(t) \\ T_n^e(t) \end{Bmatrix} = [N^e(x,y,z)] \{T^e(t)\}$$

Où : n_e : nombre de nœuds des éléments.

$N^e_i(x,y,z)$: fonction d'interpolation élémentaire.

$[N^e(x,y,z)]$: la matrice d'interpolation élémentaire .

$\{T^e(t)\}$: regroupe les températures des nœuds de l'élément (e).

Représentation globale du champ de température :

Le champ de température $T(x,y,z,t)$ a pour expression sur l'ensemble du domaine V :

$$T(x,y,z,t) = [N_1(x,y,z,t) \dots N_i(x,y,z,t) \dots N_n(x,y,z,t)] \times \begin{Bmatrix} T_1(t) \\ T_i(t) \\ T_n(t) \end{Bmatrix} = [N(x,y,z)] \{T(t)\}$$

Où : n : nombre de nœuds de maillage.

$N_i(x,y,z)$: fonction d'interpolation (fonction de forme).

$[N(x,y,z)]$: matrice d'interpolation (matrice de forme).

$\{T(t)\}$: vecteur des températures nodales

On note : T_L : température inconnue

T_P : température connue

L'expression du champ de température T sur le domaine :

$$T = [N] \{T\}$$

$$\text{on déduit : } \dot{T} = [N] \{\dot{T}\}$$

$$\text{et } : \text{grad}(T) = [B] \{T\}$$

$$\text{avec } : [B] = [\{B_1\} \dots \{B_i\} \dots \{B_n\}]$$

Où $\{B_i\}$ dépend du problème traité (plan, spatial, antisymétrique ...).

Pour le problème spatial $\{B_i\}$ dans le plan orthonormé $\{x, y, z\}$:

$$\{B_i\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

De même on a : $\hat{T} = [N]\{\hat{T}\} = \{\hat{T}\}^T [N]^T$

D'où : $\{grad \hat{T}\} = [B]\{\hat{T}\}$, $\{grad \hat{T}\}^T = [B]^T \{\hat{T}\}^T$

En portant ces relations dans l'équation (II-50), il vient :

$$\{\hat{T}\}^T ([C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} - \{F\}) = 0 \tag{II-51}$$

Où :

$$[C] = \int_v \rho c p [N]^T [N] dV$$

$$[K] = \int_v [B]^T [\lambda][B] dV$$

$$\{F\} = \int_v [N] q dv + \int_{s\phi} [N]^T (\varphi_s)$$

Avec :

[C] : matrice de capacité thermique (J/K) .

[K] : matrice de conductivité thermique (W/K).

{F} : vecteur des flux nodaux (W).

{T} : vecteur des températures nodales (K).

La forme discrétisée d'un problème thermique s'écrit finalement comme suit :

On cherche $\{T_L(t)\}$ tel que :

$$\{\hat{T}_L\}^T \left(\begin{bmatrix} [C_{LL}] & [C_{LP}] \\ [K_{LL}] & [K_{LP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_L \\ T_P \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{LP}] \\ [K_{LP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix} - \{F_L\} \right) = 0 \quad \forall \hat{T}_L \tag{II-52}$$

Avec $\{T_L(t_0)\} = \{T_{L,0}\}$

Les nodales inconnues $\{T_L(t)\}$ sont donc solutions de l'équation :

$$[C_{LL}]\{\dot{T}_L\} + [K_{LL}]\{T_L\} = \{F_L\} - [C_{LP}]\{\dot{T}_P\} - [K_{LP}]\{T_P\}$$

Avec les conditions initiales :

$$\{T_L(t_0)\} = \{T_{L,0}\}$$

3.6. Méthode analogique

La loi de propagation de la chaleur est identique en forme à celle de la propagation du courant électrique, il est ainsi possible de simuler un problème de transfert de chaleur par l'étude d'un champ électrique, on donne le cas d'un milieu semi infini en régime instationnaire [43].

La loi du transfert de chaleur est dans ce cas : $\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

Avec l'équation fondamentale du champ thermique : $\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Parallèlement, la loi de l'électricité dans un milieu continu est : $i = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial x}$

Où i : est le courant traversant l'unité du conducteur.

r : est la résistance du matériau.

L'équation fondamentale du champ de potentiel est alors $\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{rC} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$

Où C : est la capacité électrique par unité de volume.

Dans l'analogie entre ces deux types de propagation, φ est analogue à i , T à V , $1/\lambda$ à r et ρc à C

pour cela on posera : $T = m \cdot V$

$$\rho c = n \cdot C$$

$$\lambda = p / r$$

$$\varphi = m \cdot p \cdot i$$

Où m , n et p sont des coefficients de similitude. L'équation de Fourier devient donc dans

cette analogie $m \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{p}{nrc} m \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$

3.7. Méthode graphique

La résolution de certains problèmes peut être obtenue graphiquement dans un certain nombre de cas particuliers, soit par exemple, le cas d'un mur semi infini soumis en parois à un échelon de température de T_0 à T_1 . Dans ce cas l'intervalle de temps Δt est

choisi tel que [43] : $\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{2}$.

Dans ces conditions, on a:

$$T_i^{j+1} = \frac{T_{i+1}^j + T_{i-1}^j}{2}$$

C'est -à-dire que la température à l'abscisse x et au temps $(t+\Delta t)$ est égale à la moyenne des températures aux points $(x - \Delta x)$ et $(x + \Delta x)$ au temps t .

Le graphe de la Figure (II-11) permet ainsi d'obtenir la valeur de la température au point (i) pour le temps (j) comme étant le milieu du segment de droite joignant T_{i-1}^{j-1} et T_{i+1}^{j-1} .

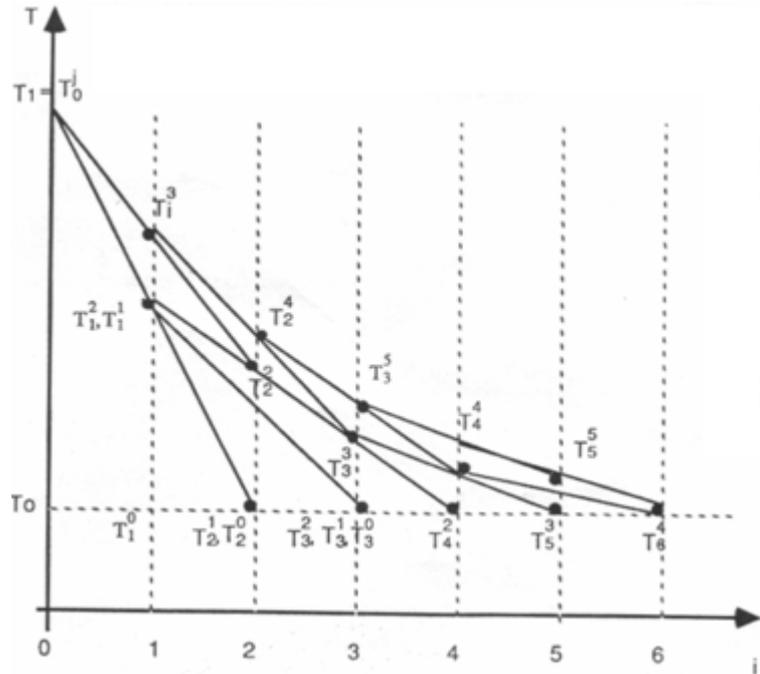


Figure II-11: Evolution des températures dans un milieu semi infini

4. CONCLUSION

L'objectif de ce chapitre est de fournir quelques clés pour aborder la résolution de l'équation de la chaleur. Nous avons présenté quelques grandes méthodes de résolution. Le choix de la méthode à adopter dans chaque application peut être guidé par les observations suivantes :

- la méthode analytique est bien adaptée aux problèmes dont la géométrie et les conditions aux limites sont simples. Elle a l'avantage de fournir une solution exacte.
- la méthode analogique est généralement utilisée pour des géométries complexes, mais dans des conditions de surface simples, en particulier dans le cas de conditions de Dirichlet (température imposée).
- pour une géométrie complexe et pour n'importe qu'elle condition aux limites, qui est le cas souvent rencontré, les méthodes numériques s'imposent, elles permettent à tels problèmes d'être résolus rapidement, en plus l'ingénieur modélisant le problème numériquement peut facilement voir l'effet de changements des paramètres intervenant dans le problème.

Chapitre III

Analyse de la présence de défaut dans un corps solide

1. INTRODUCTION

La pureté d'un matériau est une question purement théorique puisque la réalité prouve une présence systématique des impuretés. Souvent une anomalie interne dans les structures solides modifie fortement leurs propriétés physiques.

Le contrôle thermique non destructif est une technique qui permet l'analyse de la présence des défauts. Elle consiste à analyser les diverses structures par l'étude de leurs réponses aux excitations thermiques et établir des relations entre ces réponses et les imperfections qu'elles contiennent. Les propriétés thermo-physiques d'une structure avec défaut diffèrent à celles d'une structure saine, ce qui permet de discerner et de caractériser le défaut en comparant le comportement thermique des deux structures. [46, 47]

La simulation numérique basée sur la méthode des différences finies est utilisée pour résoudre l'équation de la chaleur dans une conduite cylindrique ou dans une plaque plane fait l'objet de ce troisième chapitre.

2. CAS D'UN MATERIAU DE FORME PLANE

2.1. Formulation mathématique

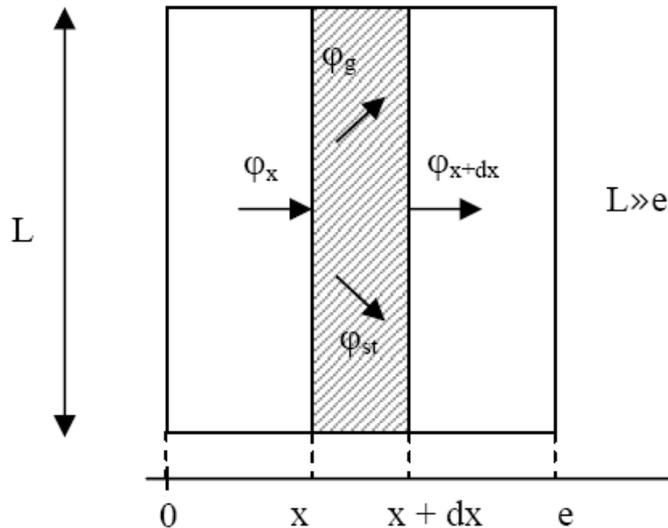


Figure III-1 : Principe de conservation de flux de chaleur

Considérons un système de géométrie plane, d'épaisseur dx dans la direction x et de section S normalement à la direction Ox . Le bilan d'énergie appliqué à ce système s'écrit :

$$\phi_x + \phi_g = \phi_{x+dx} + \phi_{st}$$

avec :

$$\phi_x = -\left(\lambda \times S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x$$

$$\phi_{x+dx} = -\left(\lambda \times S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$$

$$\phi_g = q \times S \times dx : \text{flux généré}$$

$$\phi_{st} = \rho \times c \times S \times dx \frac{\partial T}{\partial t} : \text{flux stocké}$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par dx nous obtenons :

$$\frac{\left(\lambda \times S \times \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\lambda \times S \times \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x}{dx} + q \times S = \rho \times c \times S \times \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{soit : } \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \times S \times \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q \times S = \rho \times c \times S \times \frac{\partial T}{\partial t}$$

dans le cas tridimensionnel :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q = \rho \times c \times \frac{\partial T}{\partial t}$$

Cette équation peut se simplifier suivant les hypothèses suivantes :

- si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$
- s'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $q = 0$
- si λ est constant.

On obtient l'équation de Poisson définie par:

$$a \cdot \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III-1})$$

Où a : représente la diffusivité thermique

2.1.1. Cas d'une plaque plane sans présence de défaut :

Dans ce cas, la fonction de la température varie suivant une équation différentielle dans l'espace et dans le temps, mais pour que le phénomène soit décrit complètement et d'une façon absolue, il faut que la solution trouvée satisfasse aussi aux conditions aux limites suivantes :

- condition initiale : la température à l'instant initiale ($t=0$) est supposée connue $T(x,0)=T_i$
- condition aux frontières: on impose une température constante T_0 à la paroi $x=0$ (gauche) ; cette condition est appelée condition de Dirichlet [48].

2.1.2. Cas d'une plaque plane en présence d'un défaut

Dans ce cas, nous considérons un défaut à l'intérieur de la structure du matériau, il est présent par un changement de la nature du milieu; c'est une fissure ou faille remplie d'air de dimension et de géométrie simple et régulière, comprise entre X_1 et X_2 (Figure III-2). La température est calculée à partir de l'équation (III-1) en utilisant les propriétés thermo-physiques de l'air au lieu du solide; pour cela on peut considérer que la plaque est subdivisée en trois zones: I, II et III. En suivant les mêmes étapes que précédemment (principe de conservation), on obtient l'équation de Poisson :

$$a_{solide} \times \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{zone (I)}$$

$$a_{solide} \times \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{zone (II)}$$

$$a_{air} \times \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{zone (III)}$$

$$\text{Avec : } a_{solide} = \frac{\lambda_{solide}}{\rho_{solide} \times cP_{solide}} \quad ; \quad a_{air} = \frac{\lambda_{air}}{\rho_{air} \times cP_{air}}$$

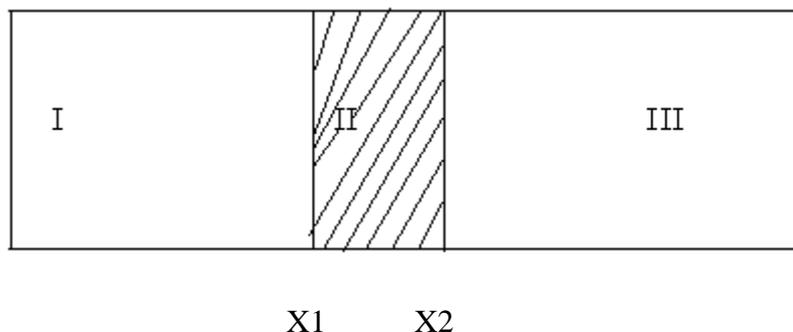


Figure III-2 : plaque plane en présence de défaut

Pour simplifier l'étude on suppose que les contacts entre les trois zones sont parfaits (frontières intérieures), ce qui se traduit par les équations suivantes :

Zones I et II :

$$T_I(X_1) = T_{II}(X_2) \quad (\text{température continue entre les deux zones I et II})$$

$$-\left(\lambda_{solide} \frac{\partial T_I}{\partial x}\right)_{x_1} = -\left(\lambda_{air} \frac{\partial T_{II}}{\partial x}\right)_{x_1} \quad (\text{flux continu entre les deux zones I et II})$$

De même entre les deux zones II et III :

$$T_{II}(X_2) = T_{III}(X_2) ;$$

$$-\left(\lambda_{air} \frac{\partial T_{II}}{\partial x}\right)_{x_2} = -\left(\lambda_{solide} \frac{\partial T_{III}}{\partial x}\right)_{x_2}$$

En plus de ces conditions aux frontières intérieures on a les conditions aux frontières extérieures, qui sont les mêmes conditions aux limites et initiale que celles du cas homogène :

$$T(x,0)=T_1 ;$$

$$T(0,t)=T_0 ;$$

2.2. Résolution numérique

On considère une plaque plane d'épaisseur x et de longueur L infinie (Figure III-1). La méthode numérique utilisée a pour but de transformer l'équation de la chaleur compte tenu des conditions aux limites en un système d'équations aux différences finies (équation algébrique linéaire). Elle est basée essentiellement sur la discrétisation des variables en découpant le domaine étudié par un maillage de forme et de dimension spécifique au problème imposé. Notre espace est compris entre deux axes 0 et x . On décompose le domaine en rectangles identiques de dimension $\Delta x, \Delta t$ [49, 50, 51]

2.2.1. Cas sans défaut

La discrétisation de l'équation (III-1) par la méthode des différences finies donne :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(i+1, j) + T(i-1, j) - 2T(i, j)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(i, j+1) - T(i, j)}{\Delta t}$$

On choisit le schéma explicite, qui transforme l'équation de la chaleur à l'équation discrétisée suivante :

$$T(i,j+1) = T(i+1,j) \left[\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \right] - T(i-1,j) \left[\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \right] + T(i,j) \left[1 - \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2} \right] \quad (\text{III-2})$$

La condition de stabilité nous oblige à prendre : $1 - \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2} = 1 - \frac{2}{M} \geq 0$;

Où $M = \frac{\Delta x^2}{a\Delta t}$

Le coefficient $1 - \frac{2}{M}$ ne peut être négatif puisque cela imposerait que la valeur de la température au temps $t + \Delta t$ soit d'autant plus faible que sa valeur au temps t est grande. Cette situation fait apparaître une instabilité de calcul qui se traduit par des oscillations des valeurs de la température. Pour cela (d'après des expériences) on choisit $M \geq 2q$ où q représente le nombre de variables géométriques, dans notre cas $M \geq 2$

On a alors pour chacun des nœuds internes l'équation :

$$T(i,j+1) = \frac{1}{M} (T(i,j+1) - T(i-1,j)) + (1 - \frac{2}{M}) T(i,j) \quad (\text{III-3})$$

L'avantage du schéma explicite est que chaque équation ne contient qu'une seule inconnue.

2.2.2. Cas de présence de défaut

La condition de continuité entre les deux zones (I) et (II) :

$$-(\lambda_{solide} \frac{\partial T}{\partial x})_{x_1} = -(\lambda_{air} \frac{\partial T}{\partial x})_{x_1}$$

$$\lambda_{solide} \frac{T(i,j) - T(i-1,j)}{2\Delta x_{solide}} = \lambda_{air} \frac{T(i+1,j) - T(i,j)}{2\Delta x_{air}}$$

Δx_{solide} : pas d'espace dans la zone I

Δx_{air} : pas d'espace dans la zone II

$$\Rightarrow T(i,j) \left[\frac{\lambda_{solide}}{\Delta x_{solide}} + \frac{\lambda_{air}}{\Delta x_{air}} \right] = T(i+1,j) \frac{\lambda_{air}}{\Delta x_{air}} + T(i-1,j) \frac{\lambda_{solide}}{\Delta x_{solide}}$$

$$T(i,j) = T(i+1,j) \left[\frac{\lambda_{air} \Delta x_{solide}}{\Delta x_{air} \lambda_{solide} + \Delta x_{solide} \lambda_{air}} \right] + T(i-1,j) \left[\frac{\lambda_{solide} \Delta x_{air}}{\Delta x_{air} \lambda_{solide} + \Delta x_{solide} \lambda_{air}} \right] \quad (\text{III-4})$$

On pose :

$$A_1 = \frac{\lambda_{air} \Delta x_{solide}}{\Delta x_{air} \lambda_{solide} + \Delta x_{solide} \lambda_{air}}$$

$$A_2 = \frac{\lambda_{solide} \Delta x_{air}}{\Delta x_{air} \lambda_{solide} + \Delta x_{solide} \lambda_{air}}$$

$$T(i, j) = A_1 T(i+1, j) + A_2 T(i-1, j)$$

On trouve donc pour $i = N_1$ ($x = X_1$)

$$T(N_1, j) = A_1 T(N_1 + 1, j) + A_2 T(N_1 - 1, j) \quad (\text{III-5})$$

Relation entre les pas d'espace Δx_{solide} et Δx_{air} :

$$\text{Puisque } M = 2 \Rightarrow \frac{\Delta x^2}{a \Delta t} = 2 \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x^2}{2a} = cte \Rightarrow \frac{\Delta x_{air}^2}{2a_{air}} = \frac{\Delta x_{solide}^2}{2a_{solide}}$$

$$\Delta x_{air} = \Delta x_{solide} \sqrt{\frac{a_{air}}{a_{solide}}}$$

De même entre les deux zones (II) et (III) :

$$\lambda_{air} \frac{T(i, j) - T(i-1, j)}{2\Delta x_{air}} = \lambda_{solide} \frac{T(i+1, j) - T(i, j)}{2\Delta x_{solide}}$$

Δx_{solide} : pas d'espace dans la zone III

Δx_{air} : pas d'espace dans la zone II

On suppose que le pas d'espace dans la zone I est le même que dans la zone III.

$$\Rightarrow T(i, j) = A_2 T(i+1, j) + A_1 T(i-1, j)$$

On trouve donc pour $i = N_1 + N_2$ ($x = X_2$)

$$T(N_1 + N_2, j) = A_2 T(N_1 + N_2 + 1, j) + A_1 T(N_1 + N_2 - 1, j)$$

3. CAS D'UN MATERIAU DE FORME CYLINDRIQUE

3.1. Formulation mathématique

On considère un fluide de masse volumique constante qui s'écoule dans une conduite cylindrique de rayon intérieur R_i et extérieur R_e . En régime variable et sans source interne, l'équation de la chaleur suivant le rayon r s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III-6})$$

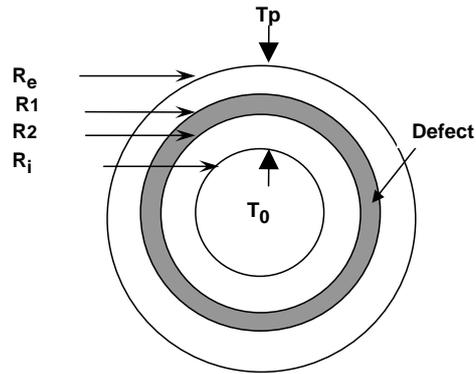


Figure III-3 : Modèle cylindrique utilisé

La solution analytique du problème de conduction de la chaleur s'exprime par une certaine fonction représentant la température en fonction des coordonnées spatio-temporelles qui devra satisfaire l'équation propre au problème. Pour que le phénomène soit décrit complètement et d'une façon absolue il faut que la solution trouvée satisfasse aux conditions aux limites suivantes:

- on suppose que le cylindre est initialement à la température uniforme $T_i(r,0)=T_0$; où r varie de R_i à R_e
- conditions aux frontières extérieures : on impose une température constante $T_P(R_e,t)$ à la paroi extérieure de la conduite .

Les propriétés thermo-physiques du fluide et de la conduite sont supposées constantes.

3.1.1. Cas sans défaut

L'équation de la propagation de la chaleur dans un cylindre suivant l'axe r , est donnée par :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad R_i < r < R_e$$

Avec les conditions aux limites $\begin{cases} T(r,0) = T_0 \\ T(R_e,t) = T_{ext} \end{cases}$

3.1.2. Cas de présence de défaut

Dans le cas de la propagation de la chaleur dans un cylindre creux en présence d'une anomalie (défaut), le cylindre est divisé en trois zones I, II et III où la zone II représente la couche de défaut; l'équation de la propagation de la chaleur est donnée par :

$$\frac{\partial^2 T_I}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_I}{\partial r} = \frac{1}{a_{solide}} \frac{\partial T_I}{\partial t} \quad \text{zone I : } R_i < r < R_1$$

$$\frac{\partial^2 T_{II}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{II}}{\partial r} = \frac{1}{a_{air}} \frac{\partial T_{II}}{\partial t} \quad \text{zone II : } R_1 < r < R_2$$

$$\frac{\partial^2 T_{III}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{III}}{\partial r} = \frac{1}{a_{solide}} \frac{\partial T_{III}}{\partial t} \quad \text{zone III : } R_2 < r < R_e$$

Pour simplifier l'étude on suppose que le contact entre les trois zones est parfait (frontières intérieures), ce qui se traduit par les équations suivantes :

$$T_I(R_1) = T_{II}(R_1) \quad (\text{Continuité de température entre les deux zones})$$

$$-\left(\lambda_{solide} \frac{\partial T_I}{\partial r} \right)_{R_1} = -\left(\lambda_{air} \frac{\partial T_{II}}{\partial r} \right)_{R_1} \quad (\text{Flux continu entre les deux zones})$$

De même entre les deux zones II et III :

$$T_{II}(R_2) = T_{III}(R_2)$$

$$-\left(\lambda_{air} \frac{\partial T_{II}}{\partial r} \right)_{R_2} = -\left(\lambda_{solide} \frac{\partial T_{III}}{\partial r} \right)_{R_2}$$

En plus de ces conditions aux frontières intérieures, on a les conditions aux frontières extérieures, qui sont les mêmes conditions aux limites et initiale que celles du cas homogène :

$$T(r, 0) = T_0 \quad R_i \leq r \leq R_e$$

$$T(R_{ext}, t) = T_P$$

3.2. Résolution numérique

3.2.1. Cas sans défaut

La discrétisation numérique de l'équation (III-6), par la méthode des différences finies donne :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{T(i+1, j) + T(i-1, j) - 2T(i, j)}{\Delta r^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T(i+1, j) - T(i-1, j)}{2\Delta r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(i, j+1) - T(i, j)}{\Delta t}$$

$$\frac{T(i+1, j) + T(i-1, j) - 2T(i, j)}{\Delta r^2} + \frac{1}{i\Delta r} \frac{T(i+1, j) - T(i-1, j)}{2\Delta r} = \frac{1}{a} \frac{T(i, j+1) - T(i, j)}{\Delta t}$$

$$T(i, j+1) = T(i+1, j) \left[\frac{a\Delta t}{\Delta r^2} + \frac{1}{i\Delta r} \frac{a\Delta t}{2\Delta r} \right] + T(i-1, j) \left[\frac{a\Delta t}{\Delta r^2} - \frac{1}{i\Delta r} \frac{a\Delta t}{2\Delta r} \right] + T(i, j) \left[1 - \frac{2a\Delta t}{\Delta r^2} \right]$$

Condition de stabilité du schéma explicite : $1 - \frac{2a\Delta t}{\Delta r^2} \geq 0$

Dans le cas particulier : $\frac{2a\Delta t}{\Delta r^2} = 1$

Nous obtenons : $T(i, j+1) = T(i+1, j) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{i\Delta r} \frac{\Delta r}{4} \right] + T(i-1, j) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{i\Delta r} \frac{\Delta r}{4} \right]$

3.2.2. Cas avec défaut

La condition de continuité entre les deux zones (I) et (II) se traduit par :

$$T_{solide}(R_1, t) = T_{air}(R_1, t)$$

$$-(\lambda_{solide} \frac{\partial T}{\partial r})_{R_1} = -(\lambda_{air} \frac{\partial T}{\partial r})_{R_2}$$

$$\lambda_{solide} \frac{T(i, j) - T(i-1, j)}{2\Delta r_{solide}} = \lambda_{air} \frac{T(i+1, j) - T(i, j)}{2\Delta r_{air}}$$

Δr_{solide} : pas d'espace dans la zone I

Δr_{air} : pas d'espace dans la zone II

$$T(i, j) \left[\frac{\lambda_{solide}}{\Delta r_{solide}} + \frac{\lambda_{air}}{\Delta r_{air}} \right] = T(i+1, j) \frac{\lambda_{air}}{\Delta r_{air}} + T(i-1, j) \frac{\lambda_{solide}}{\Delta r_{solide}}$$

$$T(i, j) = T(i+1, j) \left[\frac{\lambda_{air} \Delta r_{solide}}{\Delta r_{air} \lambda_{solide} + \Delta r_{solide} \lambda_{air}} \right] + T(i-1, j) \left[\frac{\lambda_{solide} \Delta r_{air}}{\Delta r_{air} \lambda_{solide} + \Delta r_{solide} \lambda_{air}} \right]$$

On pose : $A_1 = \frac{\lambda_{air} \Delta r_{solide}}{\Delta r_{air} \lambda_{solide} + \Delta r_{solide} \lambda_{air}}$ et $A_2 = \frac{\lambda_{solide} \Delta r_{air}}{\Delta r_{air} \lambda_{solide} + \Delta r_{solide} \lambda_{air}}$

On trouve :

$$T(i, j) = A_1 T(i+1, j) + A_2 T(i-1, j)$$

Alors :

$$T(N_1, j) = A_1 T(N_1 + 1, j) + A_2 T(N_1 - 1, j) \quad \text{pour } i = N_1 \text{ (} r = R_1 \text{)}$$

L'hypothèse d'un pas de temps unique permet de déterminer la relation entre les pas d'espace Δr_{solide} et Δr_{air} :

$$\frac{\Delta r^2}{a \Delta t} = 2 \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta r^2}{2a} = c^{est} \Rightarrow \frac{\Delta r_{air}^2}{2a_{air}} = \frac{\Delta r_{solide}^2}{2a_{solide}}$$

$$\Rightarrow \Delta r_{air} = \Delta r_{solide} \sqrt{\frac{a_{air}}{a_{solide}}}$$

De même entre les deux zones (II) et (III) :

$$\lambda_{air} \frac{T(i, j) - T(i-1, j)}{2\Delta r_{air}} = \lambda_{solide} \frac{T(i+1, j) - T(i, j)}{2\Delta r_{solide}}$$

Δr_{solide} : pas d'espace dans la zone III

Δr_{air} : pas d'espace dans la zone II

On suppose que le pas d'espace dans la zone I est le même que dans la zone III.

$$T(i, j) = A_2 T(i+1, j) + A_1 T(i-1, j)$$

Alors :

$$T(N_1 + N_2, j) = A_2 T(N_1 + N_2 + 1, j) + A_1 T(N_1 + N_2 - 1, j) \quad \text{pour } i = N_1 + N_2 \text{ (} r = R_2 \text{)}$$

L'équation aux différences finies et les conditions aux frontières extérieures sont les mêmes que celles du cas sans défaut:

$$T(i, j+1) = T(i+1, j) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{i\Delta r} \frac{\Delta r}{4} \right] + T(i-1, j) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{i\Delta r} \frac{\Delta r}{4} \right]$$

$$T(r, 0) = T_0 ; \quad R_i \leq r \leq R_e$$

$$T(R_e, t) = T_p$$

4. CAS D'UN SOLIDE DE CONDUCTIVITE THERMIQUE NON UNIFORME

On considère un cylindre creux de rayon intérieure R_i et extérieure R_e de conductivité thermique non uniforme $\lambda(r)$. Le solide est supposé isolé de l'intérieure mais exposé sur sa face extérieure à un flux de coefficient de convection h et de température T_∞ . L'équation de la propagation de la chaleur s'écrit dans ce cas :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right) = \rho c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} \quad \text{(III-7)}$$

Dans le but d'adimensionner l'équation (III-7), nous utilisons le changement de variable suivant:

$$\theta(x,t) = \frac{T(r,t) - T_0}{T_\infty - T_0} \quad \text{pour la température}$$

$$\tau = a \frac{t}{R_e^2} \quad \text{pour le temps}$$

$$x = \frac{r}{R_e} \quad \text{pour le rayon}$$

L'équation (III-7) devient :

$$\frac{1}{x \operatorname{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\operatorname{Re} x \lambda(x) (T_1 - T_0) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right) = a \cdot \rho c \cdot (T_1 - T_0) \frac{\partial \theta(x,t)}{\operatorname{Re}^2 \partial \tau}$$

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \lambda(x) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right) = a \cdot \rho c \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial \tau}$$

On pose $K(x) = \frac{\lambda(x)}{a \cdot \rho c}$ (variable sans dimension)

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x K(x) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial \tau}$$

$$\frac{1}{x} \left(K(x) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} + x \frac{\partial K(x)}{\partial x} \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} + x K(x) \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial \tau}$$

$$\left(\frac{1}{x} K(x) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial K(x)}{\partial x} \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} + K(x) \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial \tau} \quad \text{(III-8)}$$

Les conditions aux limites s'écrivent:

$$\begin{cases} -\lambda(r) \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} = h(T - T_1) & \text{à} & r = R_e \\ -\lambda(r) \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} = 0 & \text{à} & r = R_i \end{cases}$$

Qui deviennent après adimensionnement :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} = Bi(\theta - 1) \quad \text{à } x = 1 \\ -\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{à } x = R_i / R_e \end{array} \right. \quad (\text{III-9})$$

La discrétisation par différences finies donne :

Pour l'équation de conduction (III-8) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} K(i) \frac{1}{4\Delta r} (\theta_{i+1}^{j+1} + \theta_{i+1}^j - \theta_{i-1}^{j+1} - \theta_{i-1}^j) + \frac{(K_{i+1} - K_{i-1})}{2\Delta r} \frac{1}{4\Delta r} (\theta_{i+1}^{j+1} + \theta_{i+1}^j - \theta_{i-1}^{j+1} - \theta_{i-1}^j) \\ & + K(i) \frac{1}{2\Delta r^2} (\theta_{i+1}^{j+1} + \theta_{i+1}^j + \theta_{i-1}^{j+1} + \theta_{i-1}^j - 2\theta_i^{j+1} - 2\theta_i^j) = \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta \tau} \end{aligned}$$

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{K(i)\Delta \tau}{4r\Delta r} \\ b = \frac{\Delta \tau (K_{i+1} - K_{i-1})}{8\Delta r^2} \\ c = \frac{K(i)\Delta \tau}{2\Delta r^2} \end{array} \right.$$

Après remplacement on trouve :

$$\begin{aligned} & a(\theta_{i+1}^{j+1} + \theta_{i+1}^j - \theta_{i-1}^{j+1} - \theta_{i-1}^j) + b(\theta_{i+1}^{j+1} + \theta_{i+1}^j - \theta_{i-1}^{j+1} - \theta_{i-1}^j) \\ & + c(\theta_{i+1}^{j+1} + \theta_{i+1}^j + \theta_{i-1}^{j+1} + \theta_{i-1}^j - 2\theta_i^{j+1} - 2\theta_i^j) = \theta_i^{j+1} - \theta_i^j \\ & \theta_{i+1}^{j+1}(a+b+c) + \theta_i^{j+1}(-1-2b) + \theta_{i-1}^{j+1}(-a+b-c) \\ & = \theta_{i+1}^j(-a-b-c) + \theta_i^j(-1+2b) + \theta_{i-1}^j(-a-b-c) \end{aligned} \quad (\text{III-10})$$

Pour les conditions aux limites (III-9):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \theta(r,t)}{\partial r} = 0 & \Rightarrow -\frac{\theta_2^{j+1} - \theta_1^{j+1}}{\Delta r} = 0 \\ \theta_1^{j+1} - \theta_2^{j+1} & = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-11})$$

$$-\frac{\partial\theta(r,t)}{\partial r} = Bi(\theta - 1)$$

$$-\frac{\theta_{im}^{j+1} - \theta_{im-1}^{j+1}}{\Delta r} = -Bi + Bi\theta_{im}^{j+1}$$

$$\theta_{im}^{j+1}(-1 - Bi\Delta r) + \theta_{im-1}^{j+1} = -Bi\Delta r \quad (\text{III-12})$$

Le système matricielle à résoudre par l'algorithme de Thomas [52] se récapitule à :

$$\begin{aligned} \theta_{i+1}^{j+1}(a + b + c) + \theta_i^{j+1}(-1 - 2b) + \theta_{i-1}^{j+1}(-a + b - c) \\ = \theta_{i+1}^j(-a - b - c) + \theta_i^j(-1 + 2b) + \theta_{i-1}^j(-a - b - c) \end{aligned}$$

$$\theta_1^{j+1} - \theta_2^{j+1} = 0$$

$$\theta_{im}^{j+1}(-1 - Bi\Delta r) + \theta_{im-1}^{j+1} = -Bi\Delta r$$

5. RESULTATS ET DISCUSSIONS

La confection et l'exécution des programmes informatiques constituent la dernière étape de l'étude. Les résultats obtenus traduisent les phénomènes étudiés et qui concernent les cas suivants :

5.1. Cas d'un cylindre creux contenant un défaut

Dans cette étude les grandeurs sont adimensionnées de telle sorte que la température varie entre 0 et 1. Les figures ci-dessous représentent la réponse en température d'une conduite cylindrique dont la paroi externe est soumise à température imposée constante T_p .

La figure III-4 décrit l'évolution de la température en fonction du rayon d'un cylindre sans défaut pour différents instants du régime variable. On remarque que la température reste presque constante à des positions proches de la paroi interne, puis les variations deviennent importantes et rapides au fur et à mesure qu'on se rapproche de la paroi externe. On remarque également que la perturbation est presque immédiate du côté de la paroi excitée (externe) mais elle n'atteint les positions internes qu'après un certain temps de retard (**Figure III-5**).

Les figures III-6 et III-7 montrent le même phénomène dans le cas d'une structure contenant un défaut de forme et de géométrie uniforme, avec l'apparition d'un creux dans les courbes de la figure III-6, dû au changement d'état (milieu). Le changement de

direction des courbes de la figure III-7 décrivant l'évolution de la température en fonction du temps pour différentes valeurs du rayon de la conduite indique la présence du défaut à l'intérieur de la structure.

Pour étudier l'effet de la présence d'un défaut à l'intérieur de la paroi du cylindre, nous avons tracé l'évolution de la température en fonction du rayon à un temps donné dans les deux cas : avec et sans défaut. La **figure III-8** montre que la présence d'un défaut se traduit par l'apparition d'un creux et par une diminution de la température à partir de la position du changement de milieu solide-Air dans le cas d'une structure avec défaut, traduisant le passage du milieu solide au milieu fluide.

La divergence des deux courbes de la **figure III-9** confirme les observations remarquées dans la **figure III-8**.

5.2. Cas d'une plaque plane contenant un défaut

Les **figures III-10** et **III-11** représentent la variation de la température en fonction de la position d'une plaque plane à différents instants dans les deux cas avec et sans défaut. La **figure III-12** montre l'impact de la couche de défaut sur l'évolution de la température. On remarque que la présence du défaut retarde la propagation de la chaleur.

5.3. Cas d'un cylindre de conductivité thermique non uniforme

Pour ce cas intéressant, la **figure III-13** illustre la variation de la température en fonction du temps pour différentes lois d'évolution de la conductivité thermique : Linéaire, exponentielle et constante. On remarque que la variation fonctionnelle de la conductivité influe énormément sur la valeur de la température.

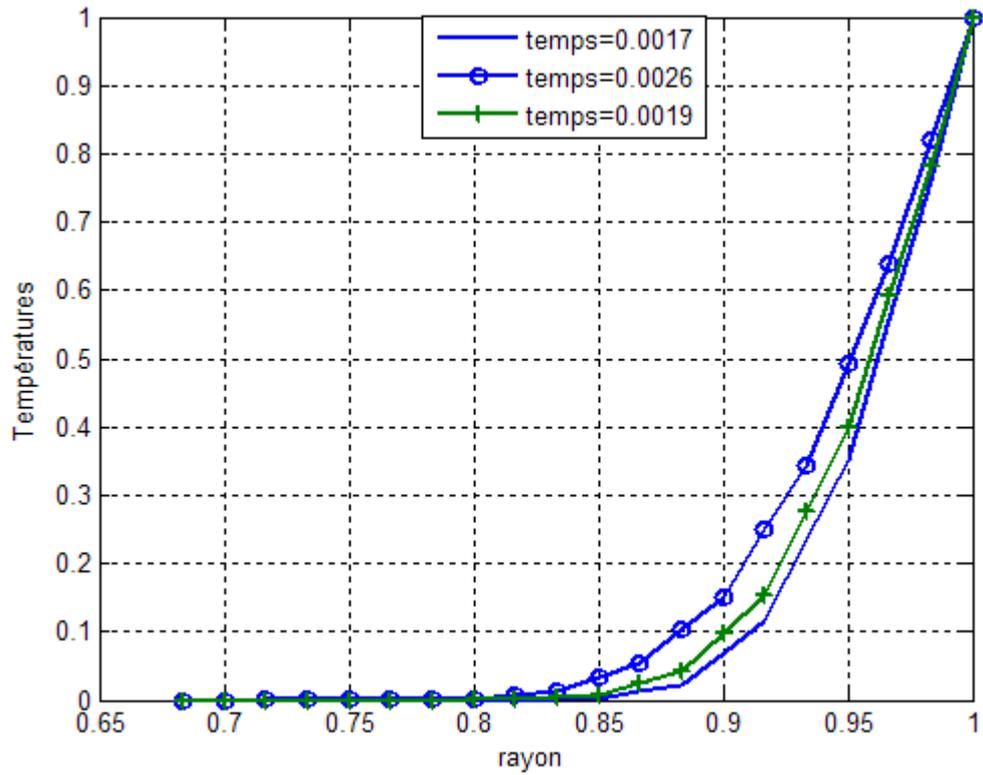


Figure III-4 : Evolution de la température en fonction du rayon.
Cylindre $R_i/R_c=0.66/1$ sans défaut

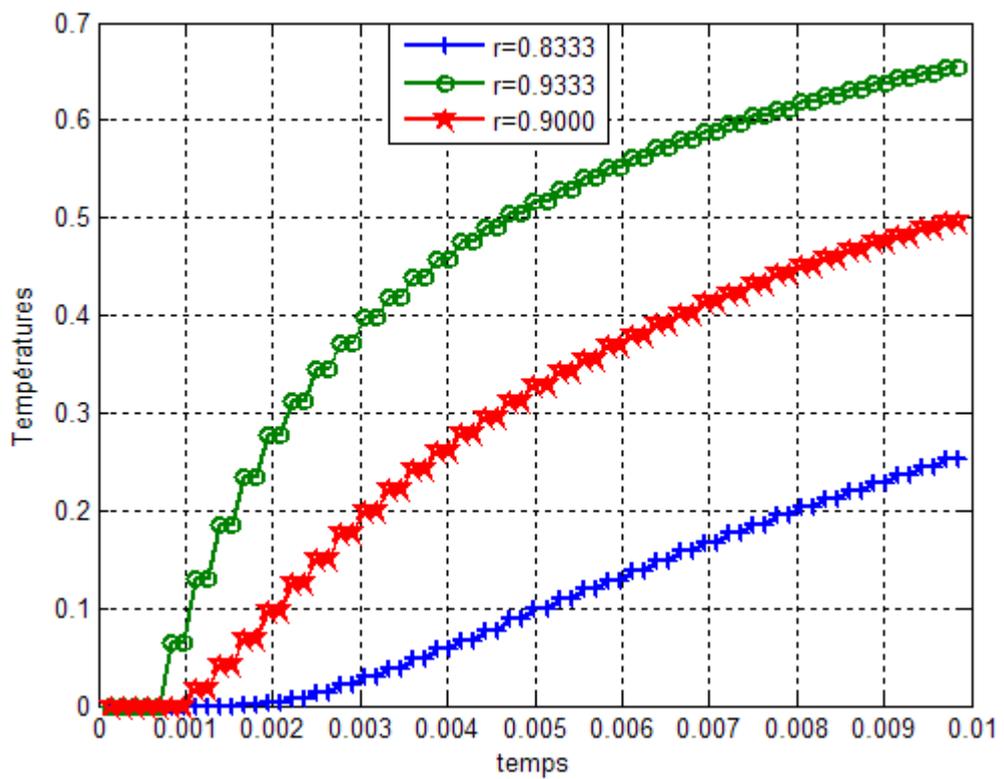


Figure III-5: Evolution de la température en fonction du temps
Cylindre $R_i/R_c =0.66/1$ sans défaut

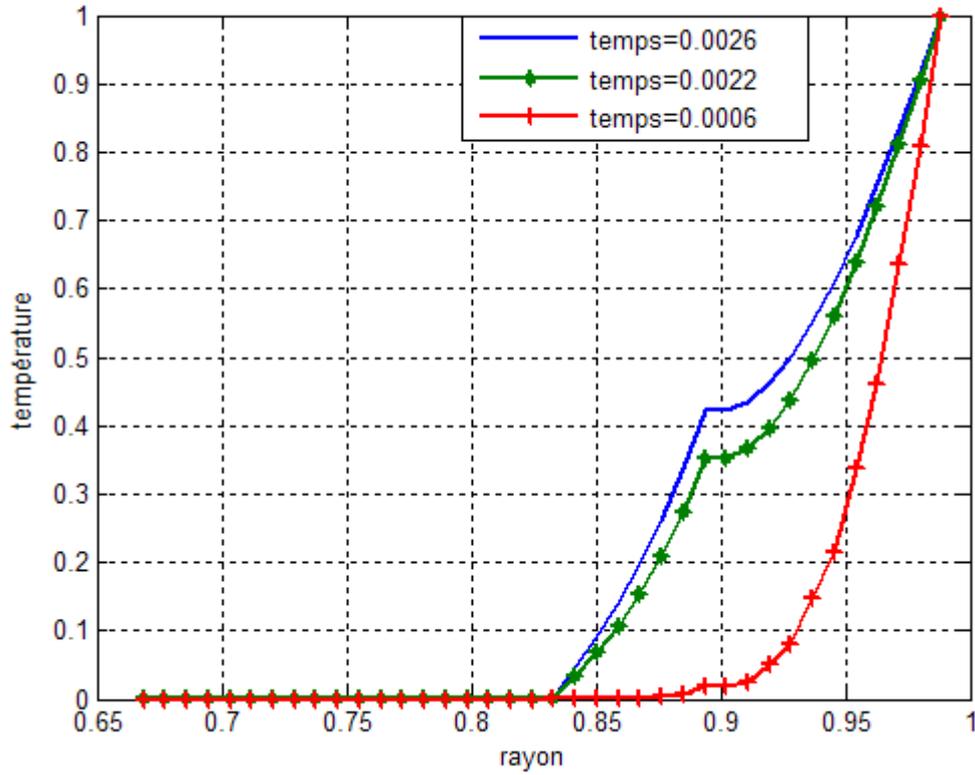


Figure III-6 : Evolution de la température en fonction du rayon.
Cylindre $R_i/R_e = 0.66/1$ avec défaut $R_1/R_2 = 0.833/0.9$

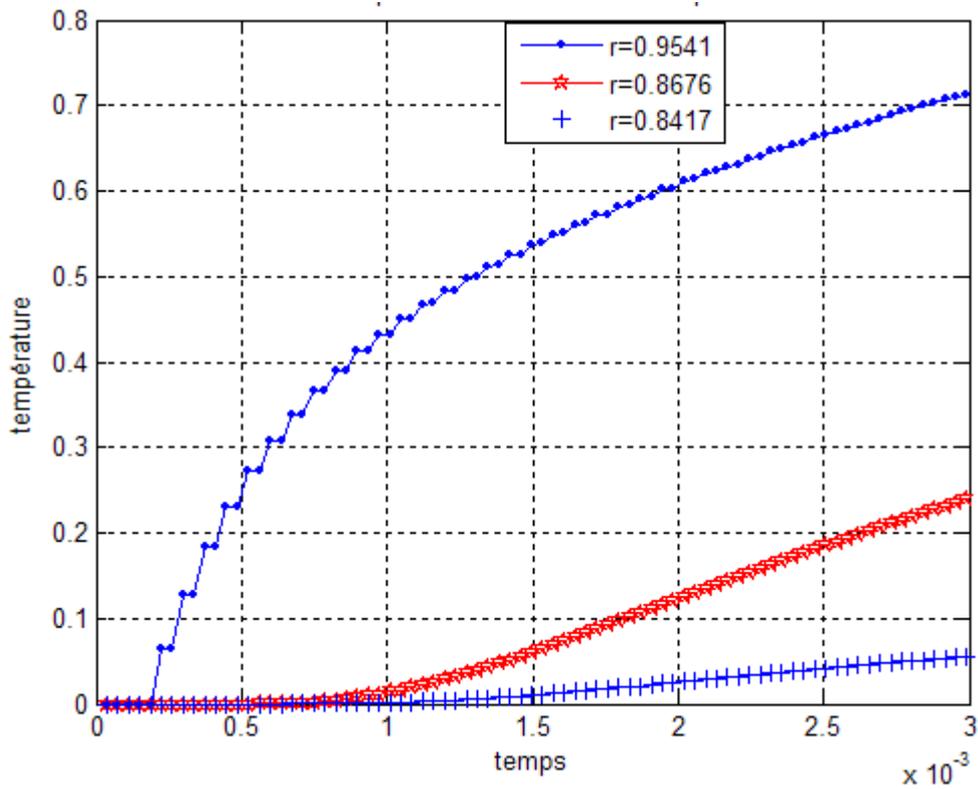


Figure III-7: Evolution de la température en fonction du temps.
Cylindre $R_i/R_e = 0.66/1$ avec défaut, $R_1/R_2 = 0.833/0.9$

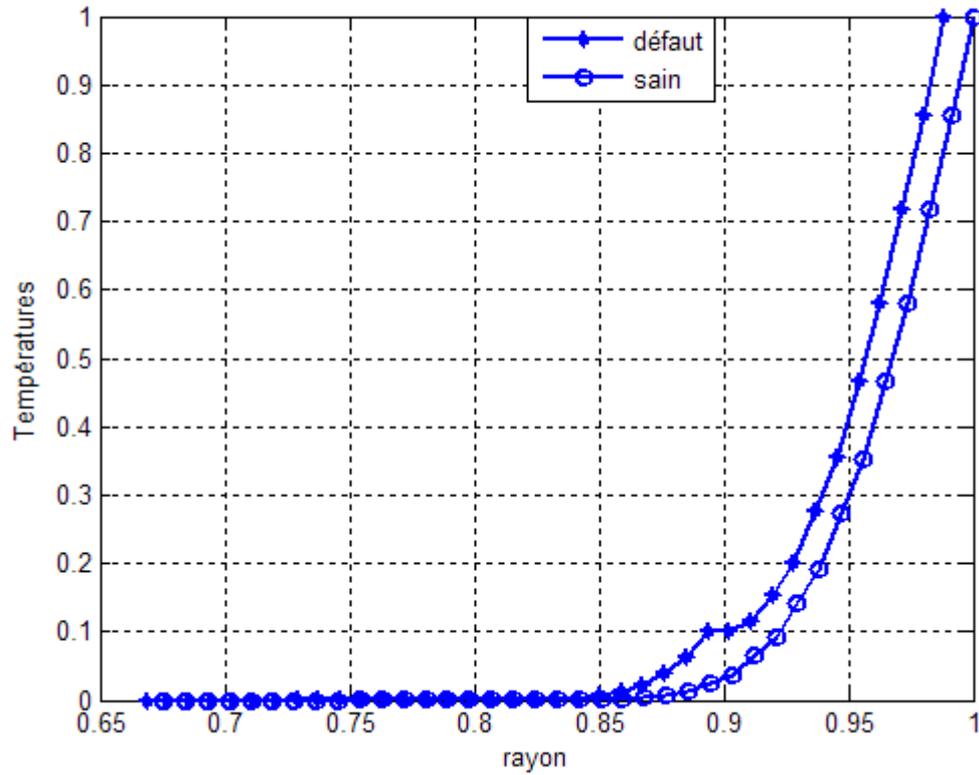


Figure III-8: Evolution de la température en fonction du rayon à $t= 0.0012$.

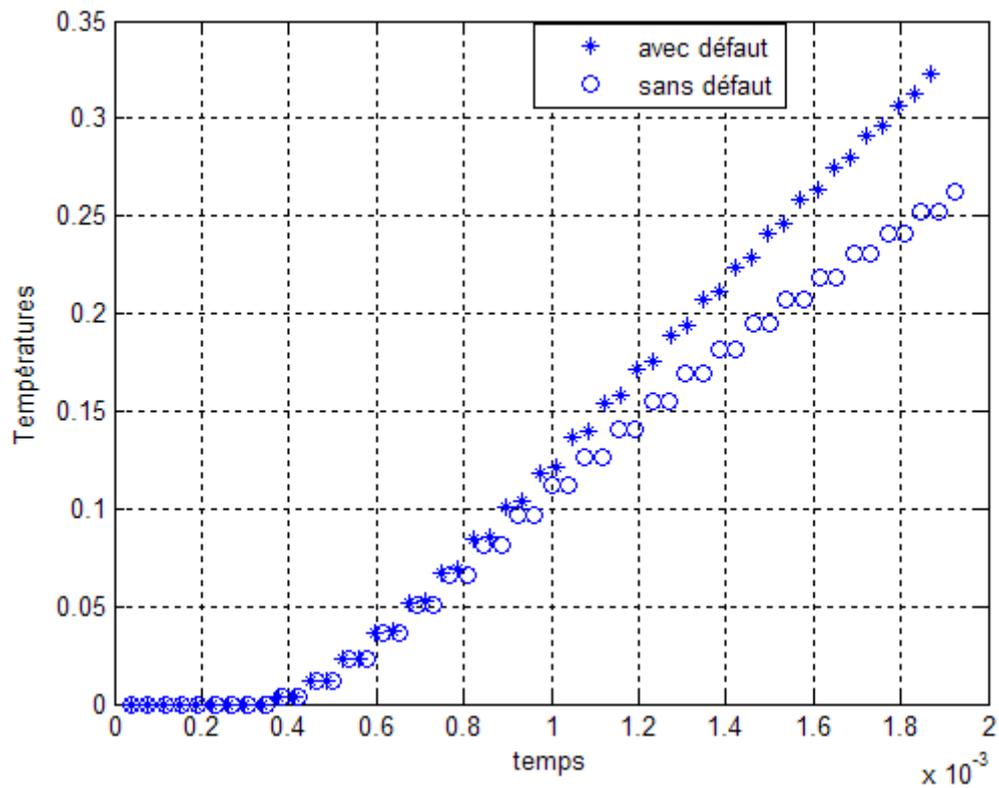


Figure III-9 : Evolution de la température en fonction du temps pour $r= 0.9298$

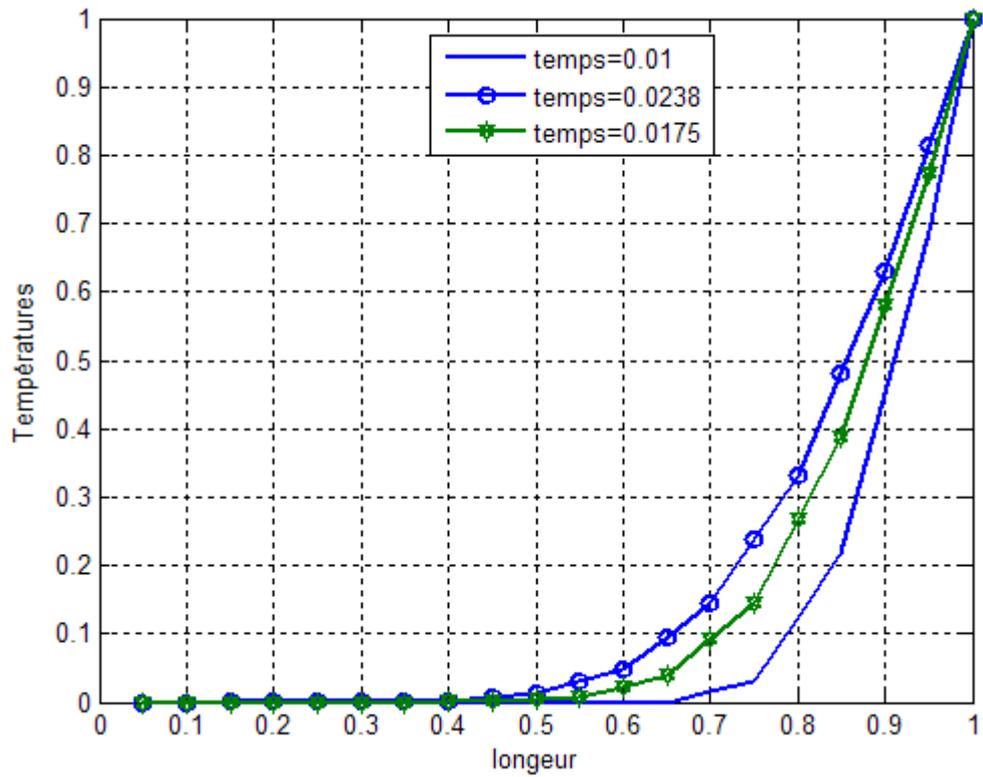


Figure III-10 : Evolution de la température en fonction de la position
Plaque plane sans défaut

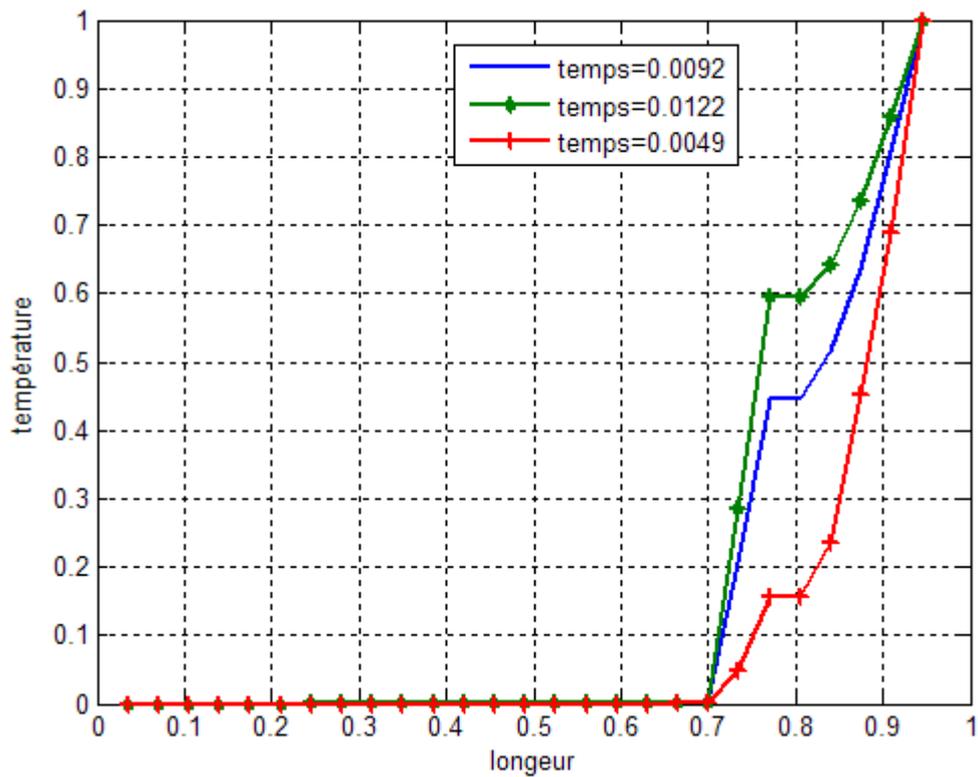


Figure III-11 : Evolution de la température en fonction de la position
Plaque plane avec défaut $x_1=0.7$ et $x_2=0.8$

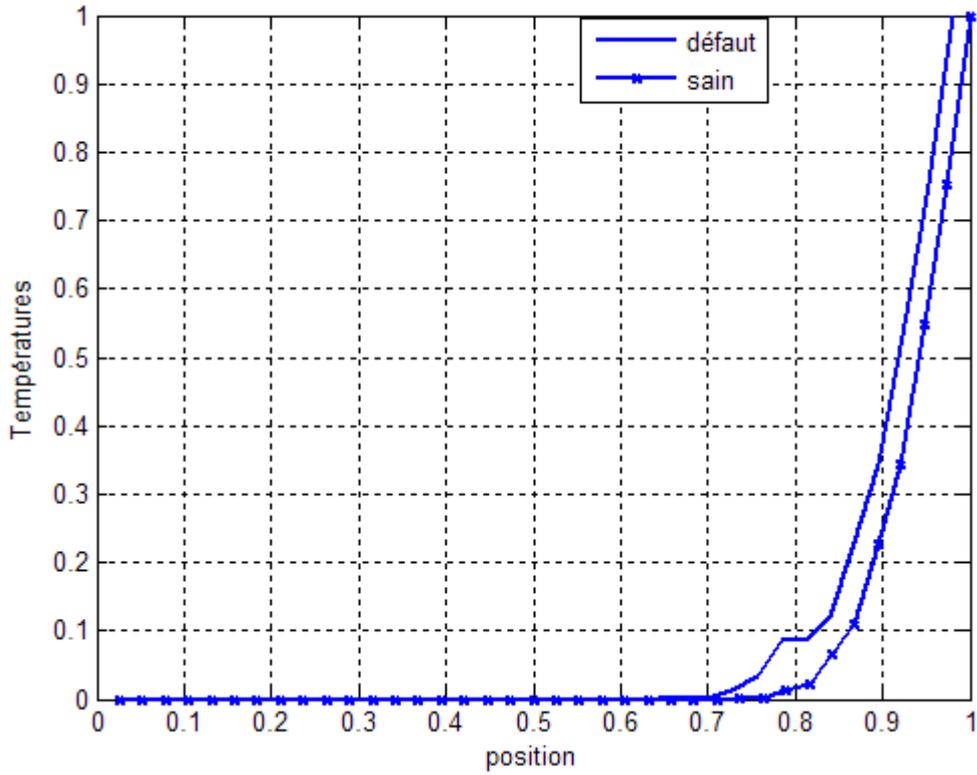


Figure III-12 : Evolution de la température en fonction de la position à $t= 0.0042$.
Cas d'une plaque plane

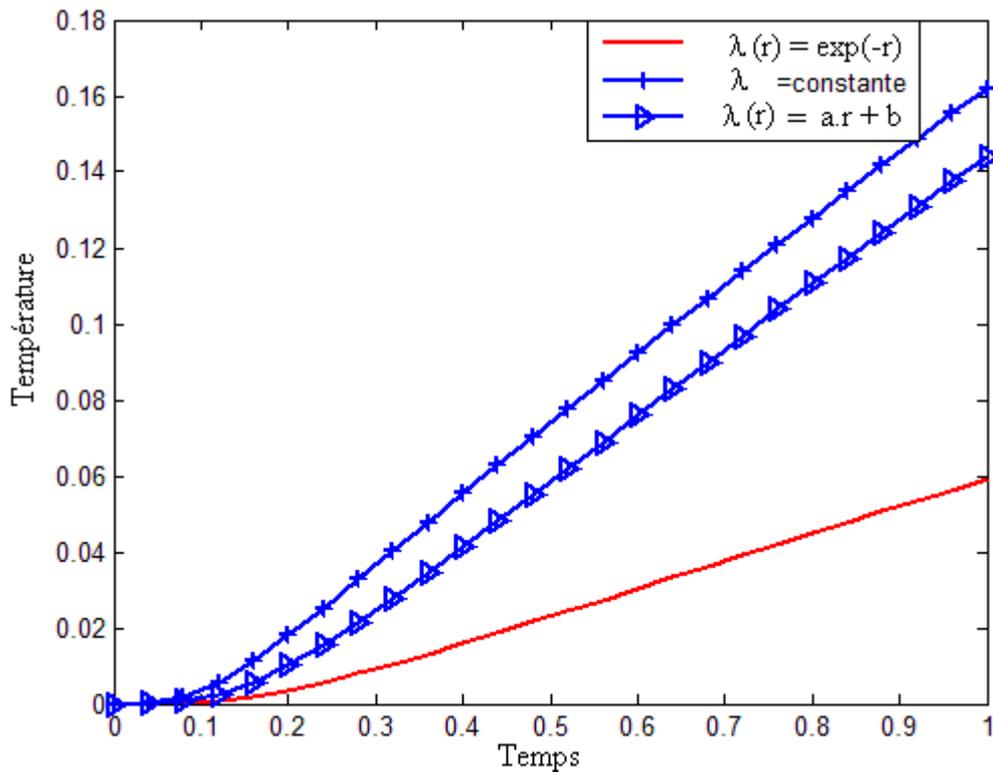


Figure III-13 : Variation de la température en fonction du temps pour une conductivité thermique non uniforme à $r = 0.35$. Cas d'un cylindre plein

6. CONCLUSION

Dans ce troisième chapitre nous avons développé une méthode d'analyse du comportement thermique dans une conduite cylindrique et une plaque plane en régime variable. La technique de détection des défauts proposée s'inscrit dans le contexte de l'utilisation des méthodes basées sur le contrôle non destructif (CND), puisqu'il s'agit de traiter le comportement thermique d'une structure avec défaut après avoir excitée la cible par une variation de température ou une densité de flux.

Nous avons commencé par définir les équations qui définissent la conduction de la chaleur en régime variable pour deux géométries différentes (cylindrique, plaque). Pour résoudre ces équations nous nous appuyons sur la méthode numérique des différences finies, puis nous avons représenté l'évolution de la température à travers les parois des deux géométries cylindrique et plane en fonction du temps et de l'espace. L'étude est réalisée dans un système unidimensionnel.

Pour les deux géométries cylindrique et plane la présence d'un défaut est traduite par des creux qui apparaissent dans les figures de l'évolution de la température, on remarque aussi que la présence du défaut retarde la propagation de la chaleur.

Dans le cas où la conductivité thermique est variable, on illustre une influence importante sur la valeur de la température.

Chapitre IV

**Identification par méthode inverse
de la conductivité thermique
dans un solide hétérogène**

1. INTRODUCTION

Avant d'aborder le problème inverse, nous commençons par une étude préliminaire du problème direct. Au cours de cette étude, nous décrirons le type de transfert considéré dans nos travaux et définirons les paramètres thermophysiques caractérisant les matériaux hétérogènes. Nous introduirons quelques notions essentielles relatives à la conduction de la chaleur dans ce type de solide hétérogène.

Le problème direct traité dans ce chapitre est restreint à la recherche du profil de température en tout point de la surface d'une plaque soumise à des conditions imposées sur ses surfaces. Il s'avère indispensable de décrire clairement les différents mécanismes responsables du phénomène de conduction de chaleur et de préciser les conditions physiques extérieures de température et/ou de flux de chaleur auxquelles un solide peut être soumis.

Dans un solide hétérogène la conduction de la chaleur est le seul mode de transfert de chaleur qui peut être présent. Elle est modélisée par la loi phénoménologique de Fourier. La conservation de l'énergie calorifique est traduite localement en tout point par une équation aux dérivées partielles (EDP) satisfaite en tout point du solide. Cette équation est dite équation de la chaleur. Elle fait intervenir les propriétés intrinsèques du matériau comme la conductivité thermique λ qui est variable et la chaleur volumique ρc considérée comme constante ($\rho c = 1$). Dans le cas unidimensionnel elle se réduit sous certaines conditions à :

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda(x) \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (\text{IV-1})$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda(x) \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (\text{IV-2})$$

Il est indispensable d'adjoindre les conditions aux limites déterminant la valeur de la température et/ou la continuité de flux de chaleur aux frontières du matériau. On suppose aussi connue la répartition de température dans le matériau à l'instant initial $t = 0$. La résolution de l'équation de la chaleur, munie des conditions aux limites et initiale, revient à exprimer $T(x,t)$ en fonction de la variable d'espace x et du temps t : c'est résoudre le problème direct.

Pour résoudre le système d'équations comprenant l'équation de la chaleur et les équations de conditions aux limites et initiale, il existe plusieurs techniques numériques : les différences finies, les volumes finis, les éléments finis, etc. Nous nous intéressons essentiellement à la technique des différences finies et nous montrerons comment

l'équation aux dérivées partielles de la chaleur se réduit à un système matriciel simple à résoudre.

2. FORMULATION DU PROBLEME DIRECT

Description du système physique :

Dans le but de construire $\lambda(x)$ coefficient de conduction de la chaleur, le solide est soumis à une excitation de flux $\phi(x,t)$ sur les deux parois extérieure et intérieure et à une température initiale à la surface.

Le phénomène de conduction de la chaleur dans un solide hétérogène est décrit par la formule mathématique suivante :

$$\rho.c.\left(\frac{\partial\theta(X,t')}{\partial t'}\right) - \frac{\partial}{\partial X}\left(\lambda'(X)\frac{\partial\theta(X,t')}{\partial X}\right) = 0 \quad (\text{IV-3})$$

Les variables θ , x , λ et t sont adimensionnées de la façon suivante :

$$x = \frac{X}{L} \quad ; \quad a = \frac{\lambda_0}{\rho.c}$$

$$t = \frac{t'\lambda_0}{\rho.c.L^2} = \frac{t'.a}{L^2} \quad ; \quad T(x,t) = \frac{\theta(x,t) - \theta_0}{\theta_f - \theta_0}$$

θ_0 : Température initiale

θ_f : Température du milieu extérieur

On remplace dans l'équation :

$$\frac{\partial}{L\partial x}\left[\lambda'(\theta_f - \theta_0)\frac{\partial T(x,t)}{L\partial x}\right] = \rho.c.(\theta_f - \theta_0).\frac{\partial T}{\frac{L^2}{a}.\partial t}$$

Après simplification on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda'\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right] = a.\rho.c.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda'\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right] = \frac{\lambda_0}{\rho.c}.\rho.c.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\lambda'}{\lambda_0} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right] = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

On pose $\lambda(x) = \frac{\lambda'(x)}{\lambda_0}$: conductivité adimensionnelle

L'équation se simplifie à sa forme réduite:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad 0 < t < t_f \quad \text{et} \quad 0 < x < 1 \quad (\text{IV-4})$$

3. PROBLEME INVERSE ET METHODE D'OPTIMISATION

Le problème inverse peut être mis sous forme d'un problème d'optimisation, où les inconnues sont déterminées de telle sorte qu'elles minimisent l'écart entre les mesures issues de l'observation du système physique (dans notre cas elles sont remplacées par un modèle numérique exact) et le modèle direct. Le cas où les deux quantités sont égales, et s'il y a unicité de solution, les paramètres d'entrées du modèle direct sont ceux du système physique.

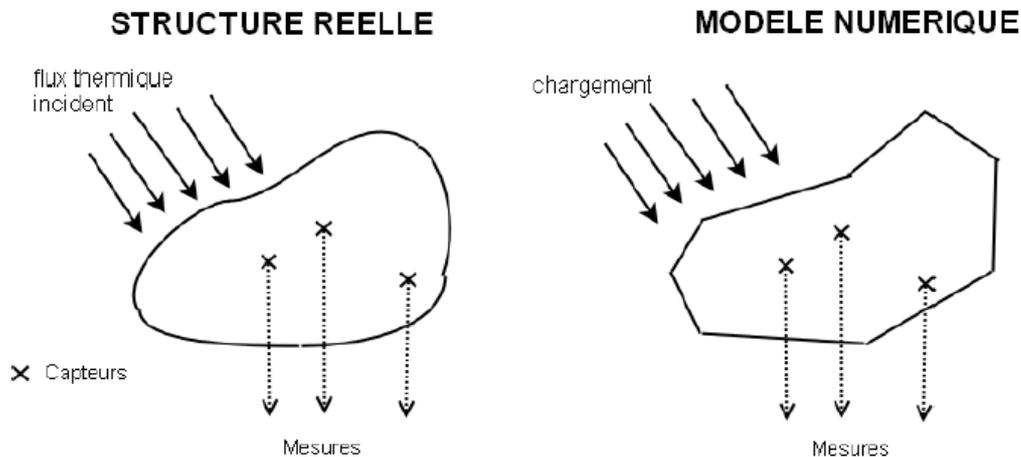


Figure IV-1 : Le système réel et le modèle numérique dans une approche optimale de type moindre carrée

L'objectif d'un problème de contrôle optimisé est de déterminer un certain nombre de fonctions intervenant dans le système de telle sorte que le système soit conduit d'un état connu vers un état souhaité (l'objectif) en une durée de temps limitée.

Dans ce quatrième chapitre, on s'intéresse à la détermination du coefficient de conduction

$\lambda(x)$ dans un solide hétérogène pour un transfert de chaleur par conduction, par la méthode inverse (Inverse Heat Conduction Problem I.H.C.P) en employant la méthode du gradient conjugué.

Un critère $J(\lambda(x))$ de moindre carré est introduit pour minimiser l'écart entre la température calculée $T(x,t)$ (calculée par le modèle direct) et la température mesurée ou bien exacte $T_m(x,t)$ (calculée par le modèle exact).

$$J(\lambda(x)) = \int_0^1 \int_{ii}^{tf} (T(x,t) - T_m(x,t))^2 dt dx \quad (\text{IV-5})$$

4. CALCUL DE VARIATION

L'objectif du calcul est de minimiser le critère le plus petit possible pour qu'il converge à la solution qui nous convient, c'est-à-dire $\lambda(x)$ approxime la valeur réelle (souhaitée) de sorte que :

$$J(\lambda) = \inf J(\lambda)$$

4.1. Définition de la dérivée directionnelle

Dans ce travail la direction de la variation se fait est suivant $\lambda(x)$. La dérivée directionnelle au sens de Gâteaux est de la forme [53]:

$$D_{\delta\lambda} J(\lambda) = \frac{J(\lambda + \delta\varepsilon\lambda) - J(\lambda)}{\varepsilon} \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

si $D_{\delta\lambda} J(x)$ est une forme linéaire continue en $\delta\lambda$

$$D_{\delta\lambda} J(x) = \int_0^1 \int_{ii}^{tf} J'(x,t) \delta\lambda dx dt \quad J' : \text{Gradient du critère J}$$

L'idée de la méthode est comme suit :

Si $F(x)$ est dérivable en un point a , $F(x)$ décroît le plus rapidement dans la direction opposée à celle de gradient de $F(x)$ en a : $-\overrightarrow{\text{grad}F(a)}$

On pose $B = C - \psi \cdot \nabla F(a)$

Si $\psi > 0$ alors $\psi \cdot \nabla F(a) < 0$ alors $B < C$

On remplace avec des variables significatives :

$$x(n+1) = x(n) - \psi_n \nabla F(a)$$

Alors $F(x_0) \geq F(x_1) \geq F(x_2) \geq \dots$

Dans ce qui vient, on va définir chaque terme ($F, x, n, B, C, \psi, \dots$) et les étapes qui les calculent.

4.2. Problème de sensibilité

Le problème de sensibilité est obtenu à partir du problème direct défini par l'équation (IV-4).

Cette équation subit à une variation pour la température $T(x,t)$ et pour le coefficient de conduction de la chaleur $\lambda(x)$ de sorte que ces deux grandeurs s'écrivent :

$$\text{devient : } T_{\varepsilon}(x,t) = T(x,t) + \varepsilon \delta T(x,t)$$

$$\lambda_{\varepsilon}(x,t) = \lambda(x,t) + \varepsilon \delta \lambda(x,t)$$

Ecrire l'équation de sensibilité c'est remplacer dans l'équation du problème direct (IV-4) $T(x,t)$ par $T_{\varepsilon}(x,t)$ et $\lambda(x,t)$ par $\lambda_{\varepsilon}(x,t)$, et on fait une soustraction entre les deux équations en négligeant le second ordre pour le résultat final, on obtient l'équation :

$$\frac{\partial \delta T(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} \frac{\partial \delta T(x,t)}{\partial x} - \lambda(x) \frac{\partial^2 \delta T(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \delta \lambda(x)}{\partial x} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - \delta \lambda(x) \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{IV-6})$$

Avec les conditions aux limites :

$$\delta T(x,0) = 0 \quad (\text{IV-6-1})$$

$$\delta \lambda(0) \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} + \lambda(0) \frac{\partial \delta T(0,t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV-6-2})$$

$$\delta \lambda(1) \frac{\partial T(1,t)}{\partial x} + \lambda(1) \frac{\partial \delta T(1,t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV-6-3})$$

La solution de l'équation de sensibilité est δT qui sert à calculer la profondeur de descente qui est une des clés pour résoudre notre problème.

4.3. Profondeur de descente

D'après le paragraphe (4-1) la méthode itérative du gradient conjugué est basée sur deux paramètres essentiels, dont la profondeur de descente, qui caractérisent cette méthode. La conductivité thermique est donc calculée itérativement par:

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n - \theta^n \times d^n \quad (\text{IV-7})$$

où d est la direction de descente

θ est la profondeur de descente

$$J(\lambda - \theta.d) = \int_0^1 \int_0^1 [T(\lambda - \theta.d) - Y]^2 dxdt \quad (IV-8)$$

Y : représente la température exacte (ou mesurée).

On obtient après linéarisation de la température par le développement de Taylor:

$$T(\lambda - \theta.d) = T(\lambda) - \theta \sum_i \frac{\partial T}{\partial \lambda} d \quad (IV-8-1)$$

$$T(\lambda - \theta.d) = T(\lambda) - \theta.\delta T \quad (IV-8-2)$$

D'où :

$$J(\lambda - \theta.d) = \int_0^1 \int_0^1 [T(\lambda) - \theta.\delta T - Y]^2 dxdt \quad (IV-8-3)$$

$$J(\lambda - \theta.d) = \int_0^1 \int_0^1 ((T(\lambda) - Y) - \theta\delta T)^2 dxdt \quad (IV-8-4)$$

Alors :

$$J(\lambda - \theta.d) = \int_0^1 \int_0^1 [(T(\lambda) - Y)^2 - 2\theta\delta T(T(\lambda) - Y) + (\theta\delta T)^2] dxdt \quad (IV-8-5)$$

La condition d'optimalité s'écrit :

$$\frac{\partial J(\lambda - \theta.d)}{\partial \theta} = 0 \quad (IV-8-6)$$

Ce qui donne :

$$\int_0^1 \int_0^1 (-2.\delta T(T(\lambda) - Y) + 2.\theta(\delta T)^2) dxdt = 0 \quad (IV-8-7)$$

On obtient :

$$\theta = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \delta T(T(\lambda) - Y) dxdt}{\int_0^1 \int_0^1 (\delta T)^2 dxdt} \quad (IV-8-8)$$

5. L'EQUATION DU PROBLEME ADJOINT ET L'EQUATION DU GRADIENT DU CRITERE

L'équation adjointe et le gradient du critère sont obtenus en multipliant l'équation de variation (IV-6) par le multiplicateur de Lagrange (ou bien par des fonctions adjointes) $P(x,t)$, et on ajoutant l'équation du critère (J) définie en (IV-8), le système l'équation devient :

$$\begin{aligned} \Delta J(\lambda) = & \int_{ii}^{tf} \int_0^1 \left[\frac{\partial \delta T(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} \frac{\partial \delta T(x,t)}{\partial x} - \lambda(x) \frac{\partial^2 \delta T(x,t)}{\partial x^2} \right] P(x,t) dx dt \\ & - \int_{ii}^{tf} \int_0^1 \left[\frac{\partial \delta \lambda(x)}{\partial x} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + \delta \lambda(x) \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \right] P(x,t) dx dt \\ & + 2 \int_0^1 \int_0^1 [T(x,t) - Y(x,t)] \delta T dx dt \end{aligned} \quad (IV-9)$$

La répartition de cette équation donne :

$$I_1 = \int_{ii}^{tf} \int_0^1 \frac{\partial \delta T(x,t)}{\partial t} P(x,t) dx dt \quad (IV-9-1)$$

$$I_2 = \int_{ii}^{tf} \int_0^1 \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} \frac{\partial \delta T(x,t)}{\partial x} P(x,t) dx dt \quad (IV-9-2)$$

$$I_3 = \int_{ii}^{tf} \int_0^1 \lambda(x) \frac{\partial^2 \delta T(x,t)}{\partial x^2} P(x,t) dx dt \quad (IV-9-3)$$

$$I_4 = \int_{ii}^{tf} \int_0^1 \frac{\partial \delta \lambda(x)}{\partial x} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} P(x,t) dx dt \quad (IV-9-4)$$

$$I_5 = \int_{ii}^{tf} \int_0^1 \delta \lambda(x) \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} P(x,t) dx dt \quad (IV-9-5)$$

On fait intervenir la technique d'intégration par parties et en posant $t_i=0$:

Calcul de l'intégrale I_1 :

$$I_1 = \int_{ii}^{tf} \int_0^1 \frac{\partial \delta T(x,t)}{\partial t} P(x,t) dx dt = \int_0^1 \delta T(x,t) P(x,t) dx \Big|_0^{tf} - \int_0^1 \int_0^1 \delta T(x,t) \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} dx dt$$

$$I_1 = \int_0^1 \delta T(x,tf) P(x,tf) dx - \int_0^1 \delta T(x,0) P(x,0) dx - \int_0^1 \int_0^1 \delta T(x,t) \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} dx dt$$

Calcul de l'intégrale I_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\lambda(x)P(x,t)] &= \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} P(x,t) + \lambda(x) \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \\ \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} P(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x} [\lambda(x)P(x,t)] - \lambda(x) \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \\ I_2 &= \int_0^{tf} \int_0^1 \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} \frac{\partial \delta T(x,t)}{\partial x} P(x,t) dx dt \\ &= \int_0^{tf} \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x} (\lambda(x)P(x,t)) - \lambda(x) \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \right] \frac{\partial \delta T(x,t)}{\partial x} dx dt \\ I_2 &= \int_0^{tf} \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(x)P(x,t)) \delta T(x,t) \Big|_0^1 dt - \int_0^{tf} \lambda(x) \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \delta T(x,t) \Big|_0^1 dt \\ &\quad - \int_0^{tf} \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\lambda(x)P(x,t)] \delta T(x,t) dx dt + \int_0^{tf} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x) \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \right] \delta T(x,t) dx dt \end{aligned}$$

Calcul de l'intégrale I_3 :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{tf} \int_0^1 \lambda(x) \frac{\partial^2 \delta T(x,t)}{\partial x^2} P(x,t) dx dt \\ &= \int_0^{tf} [\lambda(x)P(x,t)] \frac{\partial \delta T(x,t)}{\partial x} dx \Big|_0^1 dt - \int_0^{tf} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} [\lambda(x)P(x,t)] \frac{\partial \delta T(x,t)}{\partial x} dx dt \\ &= \int_0^{tf} [\lambda(x)P(x,t)] \frac{\partial \delta T(x,t)}{\partial x} dx \Big|_0^1 dt - \int_0^{tf} \frac{\partial}{\partial x} [\lambda(x)P(x,t)] \delta T(x,t) \Big|_0^1 dt + \int_0^{tf} \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\lambda(x)P(x,t)] \delta T(x,t) dx dt \end{aligned}$$

Calcul de l'intégrale I_4 :

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^{tf} \int_0^1 \frac{\partial \delta \lambda(x)}{\partial x} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} P(x,t) dx dt \\ &= \int_0^{tf} \delta \lambda(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} P(x,t) \Big|_0^1 dt - \int_0^{tf} \int_0^1 \delta \lambda(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} P(x,t) \right] dx dt \\ I_4 &= \int_0^{tf} \frac{\partial T(1,t)}{\partial x} P(1,t) \delta \lambda(1) dt - \int_0^{tf} \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} P(0,t) \delta \lambda(0) dt - \int_0^{tf} \int_0^1 \delta \lambda(x) \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} P(x,t) dx dt \\ &\quad - \int_0^{tf} \int_0^1 \delta \lambda(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} dx dt \end{aligned}$$

$$I_5 = \int_0^{tf} \int_0^1 \delta\lambda(x) \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} P(x,t) dx dt$$

La sommation des 5 intégrales donne :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \delta T(x, tf) P(x, tf) dx - \int_0^1 \delta T(x, 0) P(x, 0) dx - \int_0^{tf} \int_0^1 \delta T(x, t) \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} dx dt - \int_0^{tf} \frac{\partial}{\partial x} [\lambda(x) P(x, t)] \delta T(x, t)_0^1 dt \\ & + \int_0^{tf} \lambda(x) \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \delta T(x, t)_0^1 dt + \int_0^{tf} \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\lambda(x) P(x, t)] \delta T(x, t) dx dt - \int_0^{tf} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x) \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right] \delta T(x, t) dx dt \\ & - \int_0^{tf} [\lambda(x) P(x, t)] \frac{\partial \delta T(x, t)}{\partial x}_0^1 dt + \int_0^{tf} \frac{\partial}{\partial x} [\lambda(x) P(x, t)] \delta T(x, t)_0^1 dt - \int_0^{tf} \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\lambda(x) P(x, t)] \delta T(x, t) dx dt \\ & - \int_0^{tf} \frac{\partial T(1, t)}{\partial x} P(1, t) \delta \lambda(1) dt + \int_0^{tf} \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} P(0, t) \delta \lambda(0) dt + \int_0^{tf} \int_0^1 \delta \lambda(x) \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} P(x, t) dx dt \\ & + \int_0^{tf} \int_0^1 \delta \lambda(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} dx dt - \int_0^{tf} \int_0^1 \delta \lambda(x) \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} P(x, t) dx dt + 2 \int_0^{tf} \int_0^1 [T(x, t) - Y(x, t)] \delta T dx dt = 0 \end{aligned}$$

Après simplification entre termes on trouve:

$$\begin{aligned} & - \int_0^{tf} \int_0^1 \left[\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \lambda(x) \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \right] \delta T(x, t) dx dt \\ & + \int_0^{tf} \int_0^1 \left[\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right] \delta \lambda(x) dx dt + \int_0^1 \delta T(x, tf) P(x, tf) dx - \int_0^1 \delta T(x, 0) P(x, 0) dx + \int_0^{tf} \lambda(1) \frac{\partial P(1, t)}{\partial x} \delta T(1, t) dt \\ & - \int_0^{tf} \lambda(0) \frac{\partial P(0, t)}{\partial x} \delta T(0, t) dt - \int_0^{tf} \lambda(1) P(1, t) \frac{\partial \delta T(1, t)}{\partial x} dt + \int_0^{tf} \lambda(0) P(0, t) \frac{\partial \delta T(0, t)}{\partial x} dt \\ & - \int_0^{tf} \frac{\partial T(1, t)}{\partial x} P(1, t) \delta \lambda(1) dt + \int_0^{tf} \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} P(0, t) \delta \lambda(0) dt + \int_0^{tf} \int_0^1 2 [T(x, t) - Y(x, t)] \delta T dx dt = 0 \quad (\text{IV-9-6}) \end{aligned}$$

Des simplifications sont possibles à travers les conditions aux limites est initiale qui sont données par :

$$\delta T(x, 0) = 0 \quad (\text{IV-9-7})$$

$$\delta \lambda(0) \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} + \lambda(0) \frac{\partial \delta T(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV-9-8})$$

$$\delta \lambda(1) \frac{\partial T(1, t)}{\partial x} + \lambda(1) \frac{\partial \delta T(1, t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV-9-9})$$

5.1. L'équation adjointe

En imposant les conditions aux limites de l'équation adjointe, on aboutit à l'équation adjointe et le gradient de critère :

$$-\left[\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \lambda(x) \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} \right] + 2 \sum_{i=1}^{\text{Im}} [T(x,t) - Y(x,t)] \delta(x - x_i) = 0 \quad (\text{IV-10})$$

Les conditions de l'équation adjointe sont issues de la simplification de l'équation (IV-9-6) :

$$P(x, t_f) = 0 \quad (\text{IV-10-1})$$

$$\lambda(0) \frac{\partial P(0,t)}{\partial x} = 2 \times (T(0,t) - Y(0,t)) \quad (\text{IV-10-2})$$

$$\lambda(1) \frac{\partial P(1,t)}{\partial x} = 2 \times (T(1,t) - Y(1,t)) \quad (\text{IV-10-3})$$

5.2. Gradient du Critère

L'équation (IV-9-6) fournit la variation du critère :

$$\nabla J(\lambda) = \int_0^1 \int_0^{t_f} \left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \times \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \right) \delta \lambda(x) dx dt \quad (\text{IV-11})$$

On a aussi par définition [54]:

$$\nabla J(\lambda(x)) = \int_0^1 \int_0^{t_f} J'(x, \lambda) \delta \lambda(x) dx dt \quad (\text{IV-12})$$

Par identification termes à termes on obtient le gradient du critère :

$$J'(x, \lambda) = \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \quad (\text{IV-13})$$

5.3. Minimisation du critère

Le choix de la méthode de minimisation du gradient va bien entendu dépendre des propriétés de la fonctionnelle J . Si J est différentiable, on peut alors utiliser les méthodes classiques du gradient conjugué, du quasi-Newton ou de Marquardt-Levenberg. Ces méthodes consistent à calculer une suite de directions de descente à partir du calcul du gradient de la fonctionnelle $J'(x, \lambda)$ puis optimiser une profondeur de descente suivant chaque direction successive. [55, 56]

5.4. Méthode du gradient conjugué

En analyse numérique, la méthode du gradient conjugué est un algorithme numérique utilisé pour résoudre des systèmes d'équations linéaires et non linéaires dont la matrice est symétrique et définie positive. Cette méthode, imaginée en 1950 simultanément par Cornelius Lanczos et Magnus Hestenes, est une méthode itérative qui converge en fait en un nombre fini d'itérations. Elle a été utilisée pour résoudre le problème inverse de la chaleur par Alifanov & Egerov, puis elle a été reprise plusieurs fois par la suite, présentant différentes applications possibles allant de la détermination de source ou conditions aux limites à la détermination de paramètres (cas traité) [56- 58].

La direction de la descente

Le processus itératif cité au paragraphe 4.3 est basé sur la méthode du gradient conjugué, elle est utilisée pour l'estimation de $\lambda(x)$ en minimisant la fonctionnelle J donnée par l'équation (IV-8) :

$$\lambda^{n+1}(x) = \lambda^n(x) - \theta^n \times d^n(x) \quad \text{pour } n=0, 1, 2, \dots$$

Où θ est la profondeur de descente déjà définie, et $d^n(x)$ est la direction de descente donnée par :

$$d^n(x) = J'^n(x) + (\gamma^n \times d^{n-1}(x))$$

C'est une expression inspirée du gradient conjugué du critère, où $J'^n(x)$ représente le gradient du critère. Dans le cas où $n=0$, la direction de descente devient le gradient du critère.

Le coefficient conjugué est donné par [56] :

$$\gamma^n = \frac{\int_{x=0}^1 \int_{t=0}^{t_f} (J'^n)^2 dt dx}{\int_{x=0}^1 \int_{t=0}^{t_f} (J'^{n-1})^2 dx dt} \quad \text{avec} \quad \gamma^0 = 0 \quad (\text{IV-14})$$

Pour effectuer le calcul itératif de l'équation (IV-7), nous devons résoudre deux équations, l'équation adjointe qui détermine la direction de la descente et l'équation de sensibilité impliquant la détermination de la profondeur de descente.

6. FORMULATION D'UN PROBLEME EXACTE

Pour que l'étude soit crédible il faut avoir des données expérimentales, ou bien une fonction qui traduit les résultats expérimentaux, pour cela on propose une solution analytique puis on la transforme en solution numérique.

Cette équation est inspirée de la fonction de conduction de la chaleur dans le cas d'un solide hétérogène qui est donnée par l'équation :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - \lambda(x) \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad (\text{IV-15})$$

On propose la variation suivante de la température :

$$T(x,t) = -(ax^2 + bx + c) \times \exp(-\alpha t) : \text{fonction devant vérifier l'équation (IV-15)}$$

$$\text{Avec } \lambda(x) = \frac{\alpha}{6} \left(-x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{b^2 - 6a \times c}{2 \times a^2} \right)$$

$$\text{Alors } \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (ax^2 + bx + c) (\exp(-\alpha t)) = -\alpha (ax^2 + bx + c) (\exp(-\alpha t))$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = (2ax + b) \exp(-\alpha t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\alpha}{6} \left(-x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{b^2 - 6ac}{2a^2} \right) \right) (2ax + b) \right] \exp(-\alpha t)$$

$$= \frac{\alpha}{6} \exp(-\alpha t) \left[\left(-2x - \frac{b}{a} \right) (2ax + b) + 2a \left(-x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{b^2 - 6ac}{2a^2} \right) \right]$$

Après calcul, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = -\alpha \exp(-\alpha t) (ax^2 + bx + ac)$$

$$\text{On peut donc vérifier que : } \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

On peut aisément trouver les conditions aux limites et initiale, en choisissant les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \alpha = 0.05 \\ a = -0.45 \\ b = -5 \\ c = 5.5 \end{cases} \quad \begin{cases} T(x,0) = ax^2 + bx + c & \text{à } t=0 \\ -\lambda(0) \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = q_1 & \text{à } x=0 \\ -\lambda(1) \frac{\partial T(1,t)}{\partial x} = q_2 & \text{à } x=1 \end{cases}$$

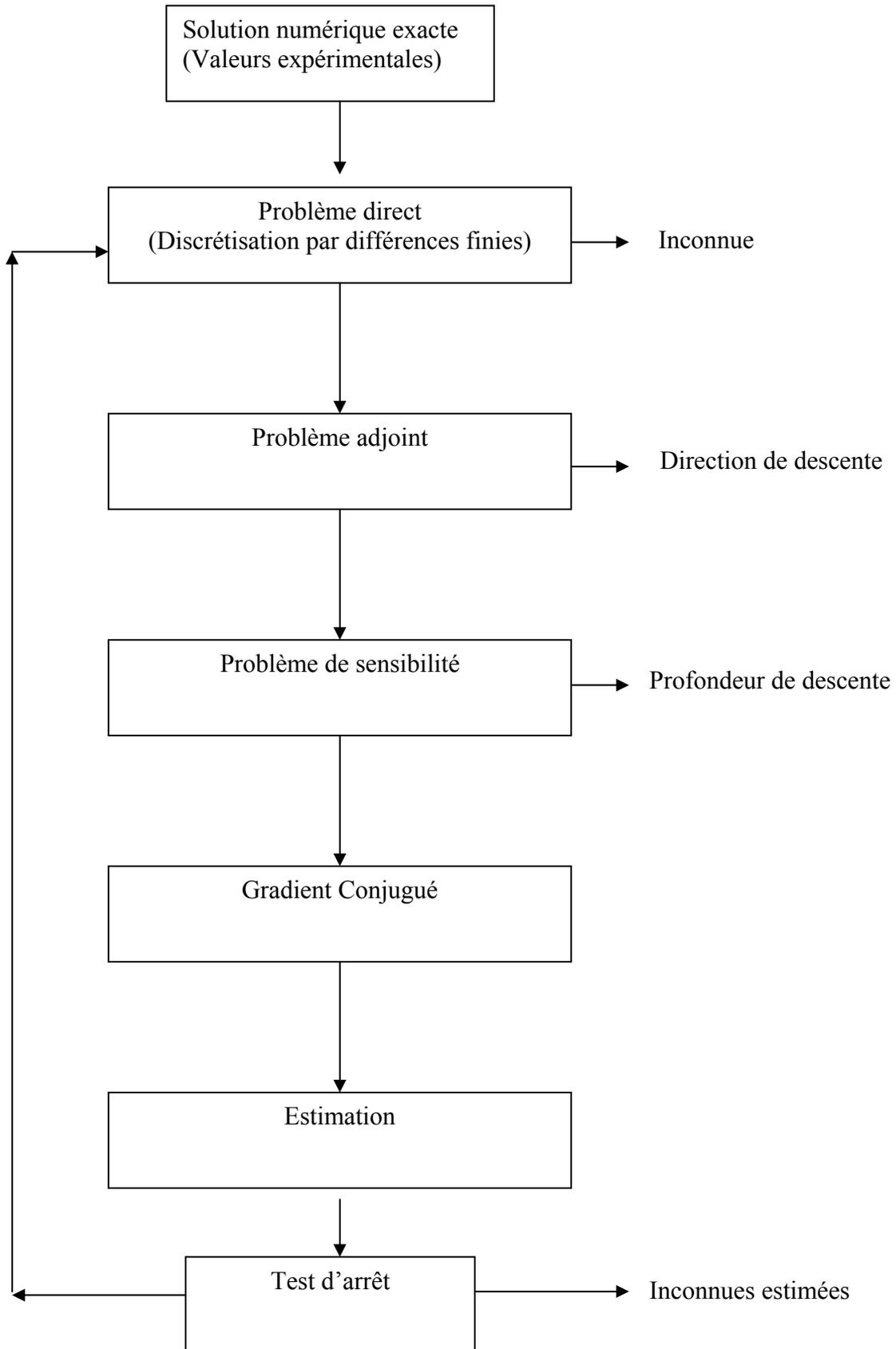


Diagramme du principe de la méthode adjointe

7. RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME DIRECT

7.1. Résolution numérique du problème direct

Pour la résolution numérique, on suit les étapes de l'algorithme présenté dans le schéma de la figure IV-2. La résolution numérique est basée sur une discrétisation suivant le schéma de différences finies. Pour la stabilité de calcul on discrétise le temps suivant le schéma implicite (inconditionnellement stable)

$$\left[\frac{\partial T(x,)}{\partial t} \right]_i^{j+\frac{1}{2}} = \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t}$$

Pour la discrétisation de la température en fonction de l'abscisse x on suit le schéma centré :

$$\left[\frac{\partial T(i, j)}{\partial x} \right]_i^{j+\frac{1}{2}} = \frac{T_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - T_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{2 \times \Delta x}$$

$$\left[\frac{\partial \lambda(i)}{\partial x} \right]_i = \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}}{2 \times \Delta x}$$

$$\left[\frac{\partial^2 T(i, j)}{\partial x^2} \right]_i^{j+\frac{1}{2}} = \frac{T_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - 2 \times T_i^{j+\frac{1}{2}} + T_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}$$

L'équation du problème direct est donnée par :

$$\frac{\partial T(i, j)}{\partial t} - \frac{\partial \lambda(i)}{\partial x} \times \frac{\partial T(i, j)}{\partial x} - \lambda(i) \times \frac{\partial^2 T(i, j)}{\partial x^2} = 0;$$

$$\left(\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} \right) - \left(\frac{\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}}{2 \times \Delta x} \right) \times \left(\frac{T_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - T_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{2 \times \Delta x} \right) - \lambda(i) \times \left(\frac{T_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - 2 \times T_i^{j+\frac{1}{2}} + T_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right) = 0$$

$$\left(\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} \right) - \left(\frac{\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}}{2 \times \Delta x} \right) \times \left(\frac{T_{i+1}^{j+1} + T_{i+1}^j - T_{i-1}^{j+1} - T_{i-1}^j}{4 \times \Delta x} \right) - \lambda(i) \times \left(\frac{(T_{i+1}^{j+1} + T_{i+1}^j) - 2 \times (T_i^{j+1} + T_i^j) + (T_{i-1}^{j+1} + T_{i-1}^j)}{2 \times \Delta x^2} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} & (T_i^{j+1} - T_i^j) - \left(\frac{\Delta t \times (\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1})}{8 \times \Delta x^2} \right) \times (T_{i+1}^{j+1} + T_{i+1}^j - T_{i-1}^{j+1} - T_{i-1}^j) \\ & \left(\frac{\Delta t \times \lambda(i)}{2 \times \Delta x^2} \right) \times \left((T_{i+1}^{j+1} + T_{i+1}^j) - 2 \times (T_i^{j+1} + T_i^j) + (T_{i-1}^{j+1} + T_{i-1}^j) \right) = 0 \end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs, on introduit deux coefficient A et B tel que :

$$A = \left(\frac{\Delta t \times (\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1})}{8 \times \Delta x^2} \right)$$

$$B = \left(\frac{\Delta t \times \lambda(i)}{2 \times \Delta x^2} \right)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} & T_i^{j+1} - T_i^j - A(T_{i+1}^{j+1} + T_{i+1}^j - T_{i-1}^{j+1} - T_{i-1}^j) \\ & - B(T_{i+1}^{j+1} + T_{i+1}^j - 2T_i^{j+1} - 2T_i^j + T_{i-1}^{j+1} + T_{i-1}^j) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & T_{i+1}^{j+1}(-A - B) + T_{i+1}^{j+1}(1 + 2B) + T_{i-1}^{j+1}(A - B) + T_{i+1}^j(-A - B) \\ & + T_i^j(-1 + 2B) + T_{i-1}^j(A - B) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & T_{i+1}^{j+1}(-A_i - B_i) + T_{i+1}^{j+1}(1 + 2 \times B_i) + T_{i-1}^{j+1}(A_i - B_i) = T_{i+1}^j(A_i + B_i) \\ & + T_i^j(-1 - 2 \times B_i) + T_{i-1}^j(-A_i + B_i) \end{aligned}$$

On pose

$$dd(i) = T_{i+1}^j(A_i + B_i) + T_i^j(-1 - 2 \times B_i) + T_{i-1}^j(-A_i + B_i)$$

On aboutit à un système d'équations tridiagonal (TDMA), qui est résolu par l'algorithme de Thomas basé sur l'élimination de Gauss [52].

7.2. Résolution numérique de l'équation adjointe

L'équation adjointe est définie par :

$$-\left[\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \lambda(x) \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} \right] + 2 \sum_{i=1}^{Im} [T(x,t) - Y(x,t)] \delta(x - x_i) = 0$$

Avec $\delta(x - x_i)$: fonction de dirac

On pose $Er = [T(x,t) - Y(x,t)]\delta(x - x_i)$: Erreur entre la température estimée et la température exacte, l'équation devient après discrétisation:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{P_i^{j+1} - P_i^j}{\Delta t} \right) + \left(\frac{\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}}{2\Delta x} \right) \left(\frac{P_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - P_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right) + \lambda(i) \left(\frac{P_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - 2P_i^{j+\frac{1}{2}} + P_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right) \\ & = \sum_1^{im} 2.Er(i) \\ & (P_i^{j+1} - P_i^j) + \left(\frac{\Delta t \times (\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1})}{8 \times \Delta x^2} \right) \times (P_{i+1}^{j+1} + P_{i+1}^j - P_{i-1}^{j+1} - P_{i-1}^j) + \\ & + \left(\frac{\Delta t \times \lambda(i)}{2 \times \Delta x^2} \right) \times (P_{i+1}^{j+1} + P_{i+1}^j - 2 \times (P_i^{j+1} + P_i^j) + P_{i-1}^{j+1} + P_{i-1}^j) = \sum_1^{im} (2 \times Er(i)) \times \Delta t \end{aligned}$$

On introduit les constantes :

$$\begin{cases} A2 = \left(\frac{\Delta t \times (\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1})}{8 \times \Delta x^2} \right) \\ B2 = \left(\frac{\Delta t \times \lambda(i)}{2 \times \Delta x^2} \right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & P_{i+1}^{j+1} (A2 + B2) + P_i^{j+1} (1 - 2 \times B2) + P_{i-1}^{j+1} (-A2 + B2) = \\ & = P_{i+1}^j (-A2 - B2) + P_i^j (1 + 2 \times B2) + P_{i-1}^j (A2 - B2) + \sum_1^{im} (2 \times Er(i)) \times \Delta t \end{aligned}$$

Avec les conditions aux limites :

$$P(x, tf) = 0$$

$$\lambda(0) \frac{\partial P(0,t)}{\partial x} = 2 \times (T(0,t) - Y(0,t))$$

$$\lambda(1) \frac{\partial P(1,t)}{\partial x} = 2 \times (T(1,t) - Y(1,t))$$

7.3. Résolution numérique de l'équation de sensibilité

L'équation de sensibilité est donnée par :

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \delta T}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 \delta T}{\partial x^2} - \frac{\partial \delta \lambda}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - \delta \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

De même que pour l'équation directe, on discrétise l'équation de sensibilité en utilisant le schéma aux différences finies :

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta T_i^{j+1} - \delta T_i^j}{\Delta t} - \left(\frac{\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}}{2\Delta x} \right) \left(\frac{\delta T_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - \delta T_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right) - \lambda(i) \left(\frac{\delta T_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - 2\delta T_i^{j+\frac{1}{2}} + \delta T_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right) \\
& - \left(\frac{\delta \lambda_{i+1} - \delta \lambda_{i-1}}{2\Delta x} \right) \left(\frac{T_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - T_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right) - \delta \lambda(i) \left(\frac{T_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - 2T_i^{j+\frac{1}{2}} + T_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right) = 0 \\
& (\delta T_i^{j+1} - \delta T_i^j) - \left(\frac{\Delta t (\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1})}{8\Delta x^2} \right) (\delta T_{i+1}^{j+1} + \delta T_{i+1}^j - \delta T_{i-1}^{j+1} - \delta T_{i-1}^j) \\
& - \left(\frac{\Delta t \lambda(i)}{2\Delta x^2} \right) (\delta T_{i+1}^{j+1} + \delta T_{i+1}^j - 2\delta T_i^{j+1} - 2\delta T_i^j + \delta T_{i-1}^{j+1} + \delta T_{i-1}^j) \\
& - \left(\frac{\Delta t (\delta \lambda_{i+1} - \delta \lambda_{i-1})}{8\Delta x^2} \right) (T_{i+1}^{j+1} + T_{i+1}^j - T_{i-1}^{j+1} - T_{i-1}^j) - \left(\frac{\Delta t \delta \lambda(i)}{2\Delta x^2} \right) \\
& (T_{i+1}^{j+1} + T_{i+1}^j - 2T_i^{j+1} - 2T_i^j + T_{i-1}^{j+1} + T_{i-1}^j) = 0
\end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs on pose :

$$A1 = \frac{\Delta t \times (\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1})}{8 \times \Delta x^2}$$

$$B1 = \frac{\Delta t \times \lambda(i)}{2 \times \Delta x^2}$$

$$C1 = \frac{\Delta t}{8 \times \Delta x^2} (\delta \lambda_{i+1} - \delta \lambda_{i-1}) (T_{i+1}^{j+1} + T_{i+1}^j - T_{i-1}^{j+1} - T_{i-1}^j)$$

$$D1 = \frac{\Delta t \times \delta \lambda(i)}{2 \times \Delta x^2} [(T_{i+1}^{j+1} + T_{i+1}^j) - 2(T_i^{j+1} + T_i^j) + (T_{i-1}^{j+1} + T_{i-1}^j)]$$

On obtient après remplacement :

$$\begin{aligned}
& \delta T_{i+1}^{j+1} (-A1 - B1) + \delta T_i^{j+1} (1 + 2.B1) + \delta T_{i-1}^{j+1} (A1 - B1) = \delta T_{i+1}^j (A1 + B1) + \delta T_i^j (1 - 2.B1) \\
& + \delta T_{i-1}^j (-A1 + B1) + C1 + D1
\end{aligned}$$

Avec les conditions aux limites :

$$\delta T(x,0) = 0$$

$$\delta \lambda(0) \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} + \lambda(0) \frac{\partial \delta T(0,t)}{\partial x} = 0$$

$$\delta \lambda(1) \frac{\partial T(1,t)}{\partial x} + \lambda(1) \frac{\partial \delta T(1,t)}{\partial x} = 0$$

8. RESULTATS ET DISCUSSIONS

Pour valider notre modèle numérique, nous avons utilisé les données de la solution exacte décrite au paragraphe IV-6 et qui sont :

$$T(x) = -(ax^2 + bx + c) \times \exp(-\alpha \times t)$$

$$\lambda(x) = \frac{\alpha}{6} \left(-x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{b^2 - 6a \times c}{2 \times a^2} \right)$$

Avec : $a = -0.45$ $b = -5$ $c = 5.5$ $\alpha = 0.05$

$$\begin{cases} T(x,0) = ax^2 + bx + c \\ -\lambda(0) \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = q_1 \\ -\lambda(1) \frac{\partial T(1,t)}{\partial x} = q_2 \end{cases}$$

La figure IV-2 représente l'évolution de la température en fonction de la position x dans le solide au temps $t=0.0909$, calculée en utilisant le modèle numérique direct et la solution exacte, on peut montrer que le problème direct basé sur le schéma des différences finies donne toujours des résultats précis. Pour évaluer la précision de cette méthode, on donne au tableau VI-1 l'erreur relative (en comparaison avec la solution analytique exacte) en fonction du temps. L'erreur moyenne est de l'ordre de 0.2%.

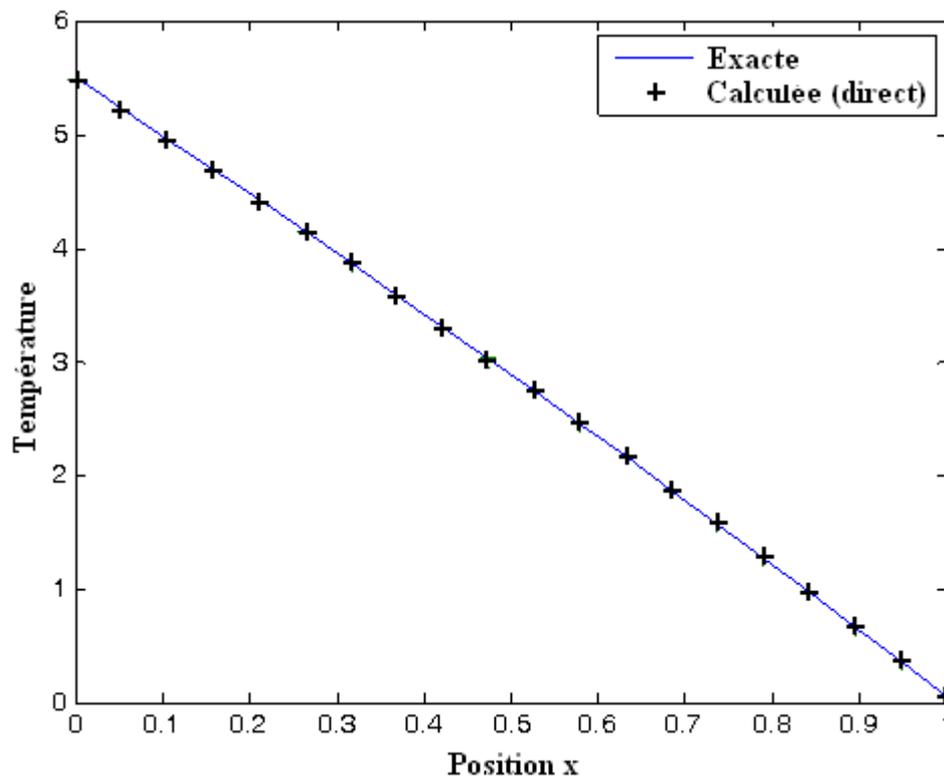


Figure IV-2 : Variation de la température en fonction de la position x au temps $t=0.0909$

Les résultats obtenus avec la méthode inverse pour un schéma de discrétisation de 300 nœuds pour le temps et 20 nœuds pour la position montrent que les valeurs calculées de la conductivité thermique et de la température coïncident parfaitement avec les valeurs exactes correspondantes (Figures VI-3 et VI-4). L'erreur relative est de l'ordre de 2.56 % et 0.652 % respectivement sur la température (Tableau IV-1) et la conductivité thermique, et le critère passe de 547,7 à 3.29 après 50 itérations (Tableau IV-2)

K (nombre d'itération)	Erreur relative %	K (nombre d'itération)	Erreur relative %
1	43.19322098536377	26	2.56479909936085
2	13.68950811823266	27	2.56479629636964
3	5.41564368675358	28	2.56479371638520
4	3.25426677088812	29	2.56479133379104
5	2.72726140952904	30	2.56478912675207
6	2.60286429010566	31	2.56478707652776
7	2.57385462276657	32	2.56478516697168
8	2.56709308093022	33	2.56478338406910
9	2.56549235419578	34	2.56478171561169
10	2.56509194793096	35	2.56478015092106
11	2.56497549696544	36	2.56477868059938
12	2.56492983269599	37	2.56477729634798
13	2.56490435460204	38	2.56477599083114
14	2.56488635681725	39	2.56477475750048
15	2.56487218920226	40	2.56477359053059
16	2.56486050851677	41	2.56477248470342
17	2.56485064917747	42	2.56477143533473
18	2.56484219937590	43	2.56477043820195
19	2.56483487241745	44	2.56476948950149
20	2.56482845694460	45	2.56476858577761
21	2.56482279222507	46	2.56476772392193
22	2.56481775343779	47	2.56476690106895
23	2.56481324205977	48	2.56476611464205
24	2.56480917926073	49	2.56476536226559
25	2.56480550120908	50	2.56479909936085

Tableau IV-1 : Erreur relative sur la température exacte et la température calculée par méthode inverse

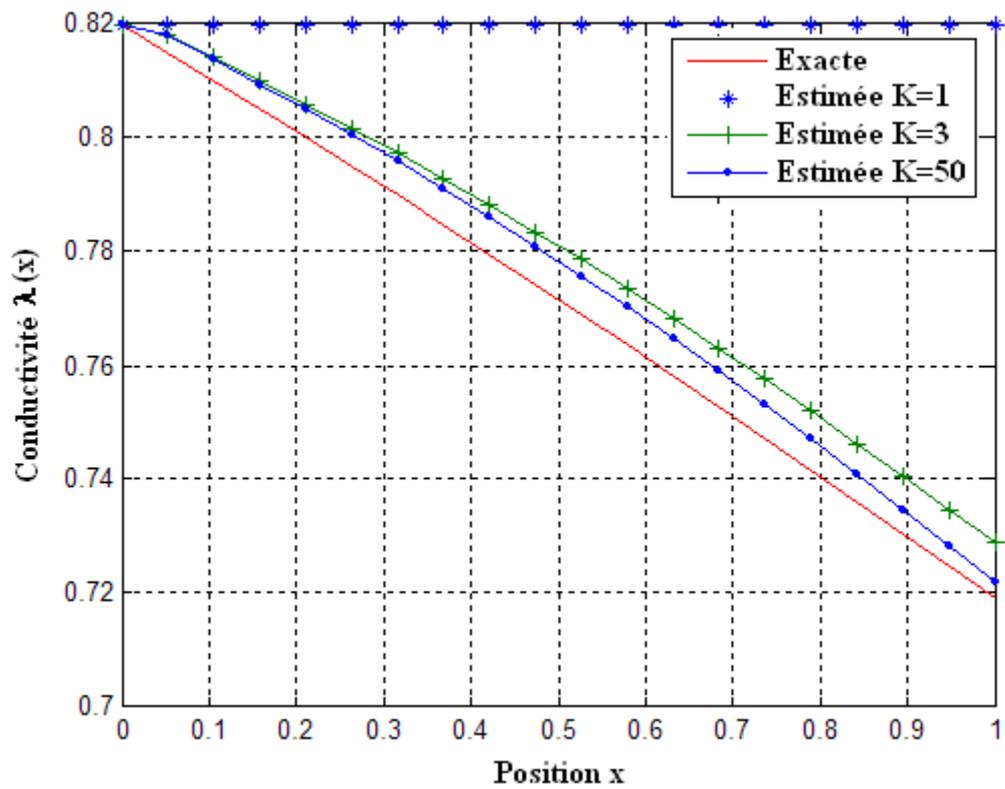


Figure VI-3 : Conductivité thermique exacte et calculée (problème inverse)

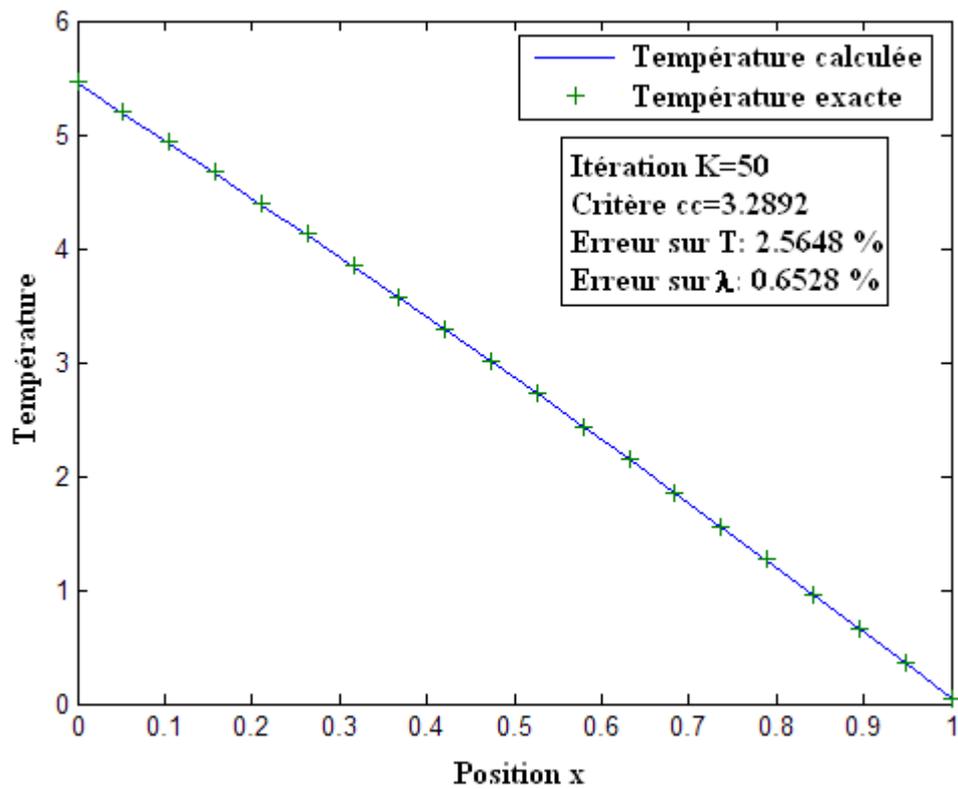


Figure IV-4 : Température exacte et calculée (problème inverse)

K (nombre d'itération)	Cc (critère) $\times 10^2$	K (nombre d'itération)	Cc (critère) $\times 10^2$
1	5.47689901455283	26	0.03289251796758
2	0.57890013834406	27	0.03289246298214
3	0.10674791420168	28	0.03289241255406
4	0.04662675919339	29	0.03289236613848
5	0.03589193998298	30	0.03289232327443
6	0.03358200756837	31	0.03289228356898
7	0.03305574050245	32	0.03289224668499
8	0.03293377419214	33	0.03289221233186
9	0.03290494233235	34	0.03289218025744
10	0.03289773352887	35	0.03289215024204
11	0.03289563735915	36	0.03289212209354
12	0.03289481546692	37	0.03289209564287
13	0.03289435693082	38	0.03289207074070
14	0.03289403303835	39	0.03289204725504
15	0.03289377808638	40	0.03289202506807
16	0.03289356789584	41	0.03289200407498
17	0.03289339048575	42	0.03289198418188
18	0.03289323844337	43	0.03289196530452
19	0.03289310660822	44	0.03289194736687
20	0.03289299117611	45	0.03289193030059
21	0.03289288925408	46	0.03289191404339
22	0.03289279859564	47	0.03289189853947
23	0.03289271742765	48	0.03289188373715
24	0.03289264433144	49	0.03289186959018
25	0.03289257815826	50	0.03289185605578

Tableau IV-2 : Evolution du critère en fonction du nombre d'itération

L'erreur relative sur la température est définie par :

$$Err1(\%) = \sum_{i=1}^{im} \sum_{j=1}^{nm} \left| \frac{T(i, j) - Y(i, j)}{Y(i, j)} \right| \cdot \frac{100}{(i_m \cdot n_m)}$$

Avec :

T_{ij} : Température calculée en utilisant la méthode inverse

Y_{ij} : Température exacte.

im : Nombre total de nœuds selon l'abscisse de la position.

nm : Nombre total de nœuds selon l'abscisse du temps

L'erreur relative sur la conductivité thermique est définie par :

$$Err2(\%) = \sum_{i=1}^{im} \left| \frac{\lambda(i) - \lambda_{ex}(i)}{\lambda_{ex}(i)} \right| \frac{100}{i_m}$$

Avec :

λ_i : Conductivité thermique calculée en utilisant la méthode inverse

λ_{ex_i} : Conductivité thermique exacte.

im : Nombre total de nœuds.

Les figures IV-4, IV-5 et IV-6 décrivent les évolutions de Err1 et Err2 ainsi que du critère en fonction du nombre d'itérations.

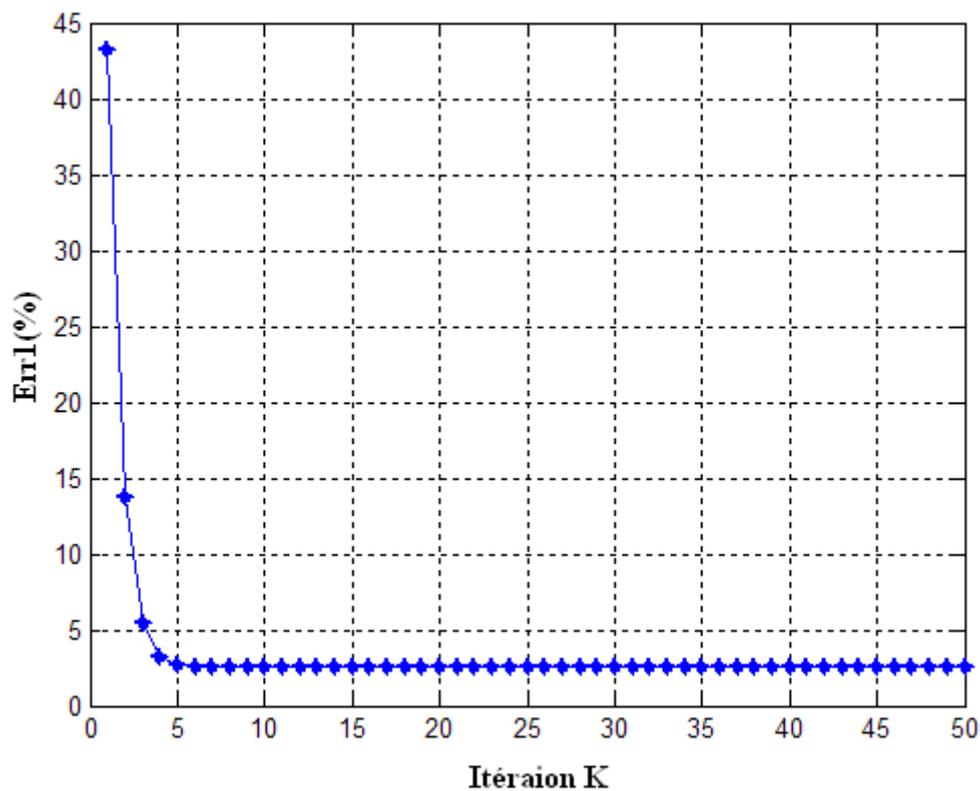


Figure IV-5: Evolution de l'erreur Err1 en fonction de K

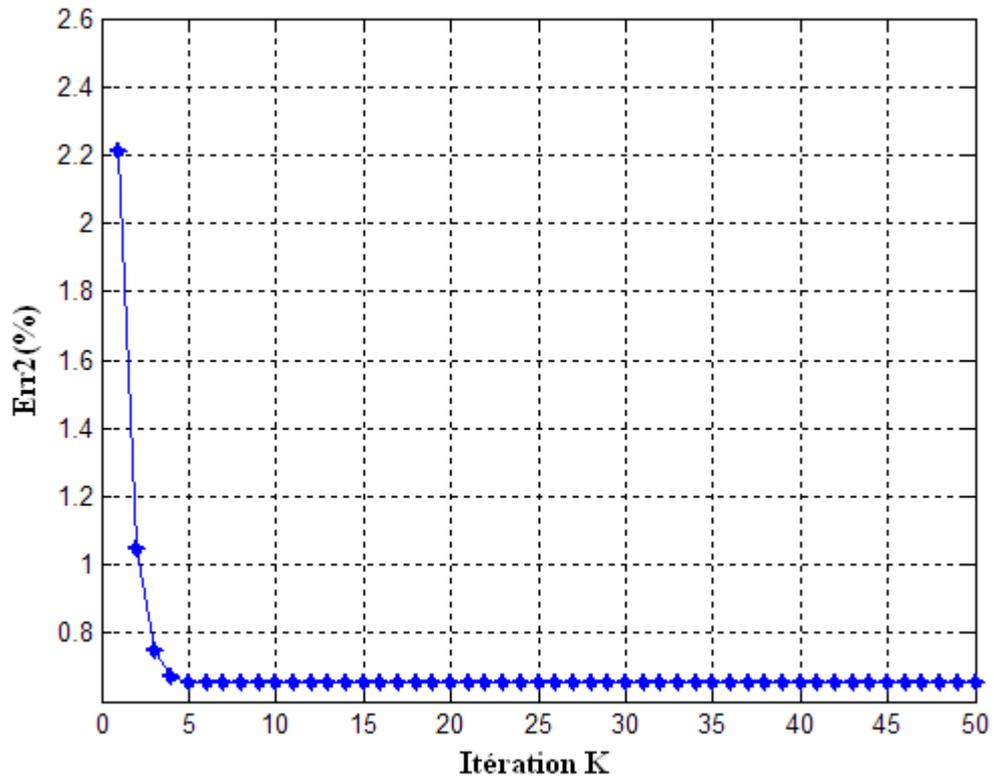


Figure IV-6 : Evolution de l'erreur Err2 en fonction de K

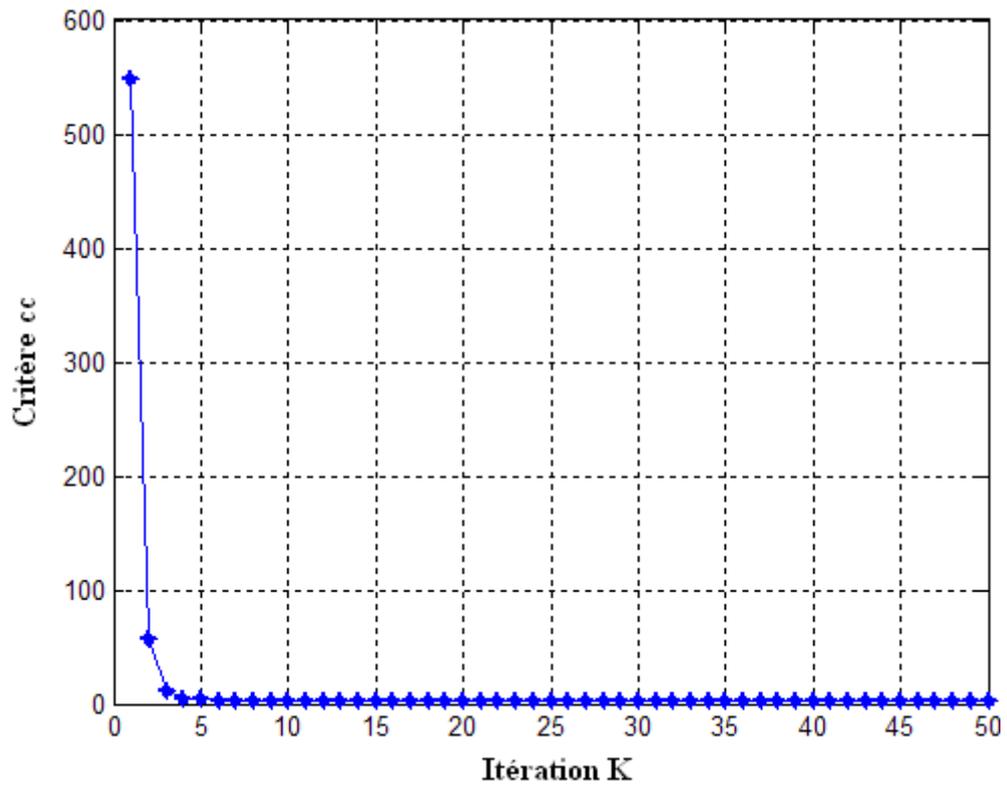


Figure VI-7: Evolution du critère cc en fonction de K

9. CONCLUSION

Les résultats obtenus, validés par la comparaison des profils thermiques exacts (expérimentaux) avec les résultats estimés permettent ainsi de justifier la fiabilité de cette approche très intéressante puisqu'elle permet, par l'intermédiaire d'une technique basée sur le problème inverse, d'estimer un paramètre interne qui est la conductivité thermique.

Pour la mise en forme d'un problème inverse, la notion d'optimisation d'un écart quadratique est alors introduite afin de simplifier le problème. Le caractère mal-posé des problèmes inverses nous a conduit à utiliser la technique des gradients conjugués (MGC), basée sur la résolution de trois problèmes à chaque itération (problèmes direct, adjoint et de sensibilité).

Les équations obtenues sont discrétisées suivant la méthode classique des différences finies et le problème est résolu numériquement.

L'exécution du programme numérique a donné des résultats très intéressants puisqu'on a pu aboutir à la solution exacte avec des erreurs relatives faibles soit pour la température ou pour la conductivité thermique, en plus le critère qui est une référence du calcul numérique décroît rapidement en premier temps puis il prend des valeurs proches l'une des autres en allant dans le sens décroissant.

Conclusion générale

CONCLUSION GENERALE

L'objectif principal que nous nous sommes fixé dans cette étude a été la mise en oeuvre d'une méthode inverse utilisant le gradient conjugué pour la résolution de l'équation de la conduction thermique dans un système unidimensionnel de conductivité thermique non uniforme.

L'étude de la présence de défauts proposée au troisième chapitre s'inscrit dans le contexte de l'utilisation des méthodes basées sur le contrôle non destructif (CND), puisqu'il s'agit de traiter le comportement thermique d'une structure avec défaut après avoir excitée la cible par une variation de température ou une densité de flux, c'est un travail d'analyse. Les résultats que nous avons obtenus sur quelques exemples ont montré qu'une anomalie dans une structure homogène peut être identifiée par l'analyse des profils de température en les comparant à ceux d'une structure saine.

Les conséquences pratiques de cette étude paraissent intéressantes, puisqu'elle permet de prévoir le comportement thermique d'un matériau en régime variable, et par la suite d'analyser et de caractériser les défauts qui peuvent exister sur ou à l'intérieur de ce solide.

En imaginant la situation inverse dans laquelle on veut déterminer les caractéristiques thermo physiques d'un solide hétérogène dans le cas où on ne connaît que les conditions aux frontières, c'est ce qu'a été vérifié dans le quatrième chapitre. Dans ces travaux sur les problèmes inverses en thermique, le problème d'identification de paramètre a été présenté. Nous avons traité l'identification d'une caractéristique qui est la conductivité thermique dans un matériau solide hétérogène.

Afin de réduire l'équation aux dérivées partielles de la conduction de la chaleur à un système différentiel ordinaire, difficilement résolvable numériquement à cause de sa non linéarité, un algorithme de résolution du problème direct en dimension 1 combine la discrétisation spatiale par la technique des différences finies et l'intégration (sommation) temporelle par la même technique.

Pour estimer ce paramètre thermophysique du modèle proposé, une technique inverse basée sur la minimisation du critère a été développée. Elle s'appuie sur l'équation adjointe de la température, qui permet le calcul de la direction de descente. Un calcul de sensibilité permet de déduire la profondeur de descente. Les résultats numériques obtenus, montrent l'efficacité de la méthode, tant au niveau précision qu'au niveau implantation et exécution.

L'exécution du programme numérique a donné des résultats très intéressants puisqu'on a pu aboutir à la solution exacte avec des erreurs relatives faibles soit pour la température ou pour la conductivité thermique, en plus le critère qui est une référence du calcul numérique décroît rapidement en premier temps puis il prend des valeurs proches l'une des autres en allant dans le sens décroissant.

Références Bibliographiques

- [1] Manuel de ressuage. Cahiers du COFREND Fascicule I : Notions sur la perception des images des défauts. Annexe 2, no 7, déc. 1985.
- [2] F. Michalski, Étude visant le perfectionnement du contrôle magnétoscopique. CIT No 3, p. 811-832, Association Technique de la Sidérurgie française (1971).
- [3] M. Perdrix, Principe du contrôle non destructif par courants de Foucault. CAST, INSA de Lyon (Institut National des Sciences Appliquées) Volume 32, Issue 5, September 1994, Pages 367-374.
- [4] D. Boussard D., Les accélérateurs de particules. PUF 2e éd. (1984).
- [5] J.C. Albert et O. CASSIER, Le contrôle non destructif techniques de base, Contrôle en ondes de Lamb de tôles d'acier inoxydable à l'aide d'un générateur de trains d'onde. 6^e Colloque international sur les méthodes de contrôle non destructif, Strasbourg, Oct. 1986.
- [6] L. IBOS, J.L. BODNAR, Contrôle non destructif de l'isolation thermique du bâtiment, Salon Mesurexpo – Porte de Versailles - 27 septembre 2007
- [7] La thermographie infrarouge, Association Française d'agences de Contrôle par Thermographie et Infiltrométrie pour la Maîtrise de l'Energie
- [8] W.J. Parker, R.J. Jenkins, C.P. Butler, G.L. Abbott, Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity, J. Appl. Phys., Vol 32, N° 9, 1961
- [9] Th. Zweschper, A. Dillenz, G. Riegert, D. Scherling, G. Busse, Ultrasound excited thermography using frequency modulated elastic waves, Insight, Vol. 45, No 3, 2003
- [10] B. HAY, J. R. Filtz, J. HAMEURY et L. Rongione, Estimation de l'incertitude de mesure de la diffusivité thermique par méthode flash (LNE), Revue Francaise de métrologie, 14, 2008, 3-11.
- [11] B. Rémy, A. Degiovanni et D. Maillet, Measurement of the In-Plane Thermal Diffusivity of Materials by Infrared Thermography, International Journal of Thermophysics, Vol. 26, n°2, 2005
- [12] A. Obbadi, Le Contrôle Thermique non Destructif (CTND) des matériaux et des

- structures de génie civil par la méthode numérique des volumes finis et des éléments finis, Thèse de Doctorat, Université Chouaib Doukkali El Jadida (Maroc), 2007
- [13] Smail Sahnoun, Sougrati Belattar, Amal Tmiri , finite differences method applied to the analysis of the detection and localisation of plan defect, laboratoire d'énergetique et de traitement du signal departement de physique, maroc
- [14] J. B. Keller. Inverse problems. American Mathematical Monthly, Vol 83, N°02 (1976), pp 107-118.
- [15] A. Nassiopoulos, Identification rapide de la température dans les structure en génie civile ,thèse Doctorat 2008, France.
- [16] N. Bleistein, J. K. Cohen, and J. J.W. Stockwell. Mathematics of Multidimensional Seismic Imaging, Migration and Inversion. Number 13 in Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, 2000.
- [17] P. Siegel. Transfert de masse en milieux poreux complexes : modélisation et estimation de paramètres par éléments finis mixtes hybrides. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur de Strasbourg, 1995.
- [18] J.V. Beck et K.J. Arnold, Parameter estimation in engineering and science, Chichester: Wiley Interscience, 1997, pp 39-57
- [19] A.N. Tikhonov et .V.Y. Arsenin, Solutions of ill-posed Problems, V.H. Winston and Sons, Washington, D.C. 1977
- [20] J.V. Beck, K.J. Arnold, Parameter Estimation in Engineering and Science, Wiley, New York, 1977.
- [21] Y. Jarny, N. Ozisik, J.P. Bardon, A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction, International Journal of Heat and Mass Transfer, 1991, Vol. 34, N°11
- [22] D. Maillet, J.C. Batsale et A. Degiovanni, Inversion de champs de température bidimensionnels par méthode spectrale et régularisation, Journée d'études SFT-GUT, Métrologie Thermique et Techniques Inverses Bidimensionnelles, 10 mai 1995
- [23] J. Liu, A stability Analysis on Beck's Procedure for Inverse Heat Conduction Problems, Journal of Computational Physics, vol 123 , 1996

- [24] M. Sokala, B. Kruk, Beck's procedure – sensitivity of the algorithm to measurement error, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics 2, 2003
- [25] E. Artioukhine, Méthodes d'Optimisation et Problèmes Inverses, Ecole d'Hiver METTI'99 : C2. 1999.
- [26] P.C. Hansen, Rank-Deficient and discrete Ill-posed Problems, SIAM, Philadelphie
- [27] O.M. Alifanov, E. Artyukhin et S.V. Rumyantsev, Extreme methods for solving ill-posed problems with applications to inverse heat transfer, Begell house, New-York, 1995.
- [28] D. Murio, The mollification method and the numerical Solution of ill-posed problems, Wiley Interscience, New York, 254 p., 1993
- [29] F.Scarpa et G. Milano, Kalman filter smoothing technique applied to the inverse heat conduction problem, Numerical Heat Transfer, 1995, Part B, Vol 28
- [30] M. Bonnet et al., Problèmes inverses de l'expérimentation à la modélisation, Editions Tec & Doc, ARAGO 22, 1999
- [31] I. Gejadze, Y. Jarny, An inverse heat transfer problem for restoring the temperature field in a polymer melt flow through a narrow channel, International Journal of Thermal Sciences 41,2002
- [32] M. Karkri, Y. Jarny, P. Mousseau, Estimation of the initial temperature profile in the channel of an experimental extrusion die, Proceeding of 5th international Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice, Cambridge, UK, 2005
- [33] H.M. Park, H.J. Shin, Shape identification for natural convection problems using the adjoint variable method, Journal of computational physics, 2003
- [34] M.N. Özışik and H.R.B. Orlande, Inverse Heat transfer, Taylor & Francis, New York, 2000.
- [35] Li, H.Y. and Yan, W.M., Estimation of Wall Heat Flux in an Inverse Convection Problem, J. Thermophysics, Vol. 13, 1999
- [36] Z.H Jin, An asymptotic solution of temperature field in a strip of a functionally graded material, Department of Civil and environmental Engineering University of Illinois at Urbana-Champaign ,Urbana ,Int . Comm. Heat Mass Transfer, Vol 29, No.7, pp.887-895, 2002.

- [37] Gavrus A., Massoni E., Chenot J.L., An inverse analysis using a finite element model for identification of rheological parameters, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol 60, 1996
- [38] N. Lebaal, S. Puissant, F.M. Schmidt, Rheological parameters identification using in situ experimental data of a flat die extrusion, *Journal of Materials Processing technology*, 2005
- [39] Poutot Géraldine, Etude des transferts thermiques lors de la cristallisation d'un polymère semi-cristallin, Thèse de doctorat, Université de Nantes, Laboratoire de Thermocinétique, décembre 2002
- [40] Y. Favennec, Optimisation and adjoint state, METTI 2005
- [41] A.M. Bianchi, Y. Fautrelle, J. Etay, Transferts thermiques, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne (2004)
- [42] J. L. Battaglia, Transferts thermiques dans les procédés de mise en forme des métaux, Hermes Science Publications, 2007
- [43] Y. Jannot, Transferts thermiques, Ecole des mines de Paris, 2003.
- [44] Y. Debard, Méthode des éléments finis, thermique; Master Modélisation Numérique et Réalité Virtuelle, Université Lemans, France
- [45] A. Léontiev , Théorie des échanges de chaleur et de masse, édition Mir Moscou, 1985
- [46] L. Billmann, R. Isermann, leak detection methods for pipelines. *Automatica*, Vol 23, 1987
- [47] K. Fukushima, R. Maeshima, A. Kinoshita, H. Shiraishib, I. Koshijima, gas pipeline leak detection system using online simulation method, *Computers and Chemical Engineering*, Vol .24, 2000.
- [48] F. Kreith, R. F. Boeh and al, Heat and mass transfer, *Mechanical Engineering handbook.*, Ed. Frank Kreith. Boca Raton: CRC Press LLC, 1999

- [49] O. Kolditz , Computational methods in environmental fluids mechanics, Ed Springer Science Publisher, Berlin, 2002
- [50] H. Lomax, Thomas H. Pulliam, David W. Zing, Fundamentals of computational fluid Dynamics, Ed Springer, 2001
- [51] H. Soualmi, M. Guellal, Charifi M., A. Touabti, Analyse par la méthode des différences finies de la détection des défauts dans une conduite cylindrique, Huitième Séminaire International sur la Physique Energétique SIPE'8, Béchar, 11-12 Novembre 2006
- [52] M. Charifi, Etude des méthodes inverses pour les problèmes de conduction thermiques avec changement de phase, Mémoire de Magistère, Université de Sétif, 2001
- [53] M. Charifi, M. Guellal, R. zegadi , Simulation numérique du processus de solidification d'un matériau "pcm" de forme sphérique, application au stockage d'énergie, Colloque international sur les matériaux émergents "cime'2008", Sétif 2008
- [54] O.M Alifanov , Solution of an inverse problem of heat conduction by iteration methods, J. Eng. Phys, 26 (1972), pp . 471–476.
- [55] G. Koepfler , Optimisation et algorithmique, UFR de mathématiques et informatique, Université Paris Descartes, 2004-2010
- [56] C. Pujos, Estimation de la rhéologie d'un polymère dans une filière d'extrusion- Simulation D'écoulement avec transferts thermiques et Inversion de mesures, Thèse de Doctorat, Université de bordeaux1, 2006
- [57] A. Nassiopoulos, Identification rapide de la température dans les structures du génie civil, Thèse de Doctorat, l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2008
- [58] Z. Lataoui, Contribution à l'étude des transferts thermiques au sein des caloducs rainurés : Identification de la position du front d'assèchement, Thèse Doctorat, Université de Poitiers, 2008
- [59] Cheng-Hung Huang, Sheng-Chien Chin, A two-dimensional inverse problem in imaging the thermal conductivity of a non-homogeneous medium, Int. J. Heat Mass Transfer, 43,pp. 4061-4071, 2000

ملخص

Abstract

The main objective of this study is the implementation of an inverse method using the conjugate gradient for solving the heat conduction equation in a one-dimensional non-homogeneous system, with a variable thermal conductivity. The analysis of the defect presence suggested is also the subject of this work. It is part of the methods based on non-destructive testing (NDT), to address the thermal behavior of a structure with defects, subjected to a temperature or a flux density variation on the wall.

Résumé

L'objectif principal de cette étude est la mise en oeuvre d'une méthode inverse utilisant le gradient conjugué pour la résolution de l'équation de la conduction thermique dans un système unidimensionnel et non homogène de conductivité thermique variable. L'étude de la présence de défauts proposée fait également l'objet de ce travail. Elle s'inscrit dans le cadre des méthodes basées sur le contrôle non destructif (CND), visant à traiter le comportement thermique d'une structure avec défaut soumise à une variation de température ou une densité de flux sur la paroi, c'est un travail d'analyse.