الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ferhat ABBAS – Sétif

UFAS – Algérie

THESE

Présentée à la faculté de Technologie

Département
Electronique

Pour l'obtention du diplôme de
Doctorat es sciences

Par
Mme **Laarem GUESSAS**

Thème

Backstepping Backstepping adaptatif pour le contrôle la poursuite et la synchronisation des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques

Soutenue publiquement le devant un jury composé de :

Mr. Fateh Krim	Prof. à l'Université de Sétif	Président du jury
Mr. Khier Benmahammed	Prof.à l'Université de Sétif	Rapporteur
Mr. Malek Benslama	Prof. à l'Université de Constantine	Examinateur
Mr. A. Fettah Charef	Prof. à l'Université de Constantine	Examinateur
Mr. Mohamed Harmas	MCA. à l'Université de Sétif	Examinateur
Mr. Mohamed Boumahrez	MCA. à l'Université de Biskra	Examinateur

Remerciements

Ce travail de thèse s'achevant vient le moment des remerciements. Mille excuses à ceux où celles que je vais oublier, mais je vais quand même tâcher de faire de mon mieux, Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes celles et ceux qui m'ont apporté leur soutien, leur amitié où leur expérience tout au long de ce travail de thèse.

Tout d'abord je souhaite remercier Monsieur le Professeur Krim Fateh de l'Université de Sétif pour l'honneur qu'il m'a fait de bien vouloir présider ce jury de thèse.

Les Professeurs Malek Benslama, Abedelfateh Charef de l'Université de Constantine, le Professeur Mohammed Harmas de l'Université de Sétif et le docteur Mohamed Boumahrez de l'Université de Biskra ont accepté d'examiner ce travail, je leur adresse mes plus sincères remerciements.

Il ne saurait être question de ne pas parler ici de mon encadreur le professeur Khier Benmahammed directeur du laboratoire des systèmes intelligents et de traitement de signal de l'Université de Sétif, sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour, sa culture scientifique a favorisé le développement de cette thèse.

Un grand merci à mes amis collègues, pour certains déjà docteurs, et permanents de l'université de Sétif, pour leur aide durant mes travaux de thèse.

Merci enfin à ma petite famille, époux et enfants pour m'avoir toujours soutenu, un salut du coeur à ma mère pour ses prières, ses encouragements et son soutien tout au long de ma thèse.

Résumé

Dans ce travail nous avons traité le problème de commande de stabilisation, de commande en poursuite de trajectoire référence et de la synchronisation des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques. Ce travail de recherche est motivé par des défies aussi bien théoriques que pratiques posés pour le chercheur. En effet, ces systèmes ne peuvent pas être stabilisés directement par des commandes lisses invariantes dans le temps, de plus en dépit du nombre de méthodes disponibles pour la commande locale de ces systèmes, peut-on utiliser de nouvelles méthodes telles que le Backstepping et le Backstepping adaptatif dans la formulation du problème de commande et le besoin de faire face aux singularités rencontrées dans quelques systèmes chaotiques ?
Cette thèse s'addresse à certains de ces problèmes, formule et résouds les problèmes de commande, de la poursuite de trajectoire et de la synchronisation des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques.

La théorie du Backstepping est traitée en premier, une procédure qui consiste à trouver une fonction stabilisante qui est une commande virtuelle pour chaque sous-système, basée sur la stabilité de Lyapunov jusqu'à parvenir à déterminer la commande globale au système. Particulièrement, nous montrons que ces systèmes dynamiques non linéaires peuvent se mettre sous le modèle de forme de boucle de retour strict une forme triangulaire, des transformations des variables d'état et des translations vers des points d'équilibres sont introduites pour les représenter sous cette forme, une condition nécessaire pour l'application de la méthode du backstepping. Cependant, nous montrons aussi qu'il est possible d'atteindre la stabilisation asymptotique globale à l'origine en utilisant une telle méthode.

La méthode de Backstepping adaptatif est aussi abordée comme un outil pour la commande des différents systèmes dont certains ou tous ses paramètres sont inconnus, ainsi que la conception et l'application des lois de contrôle, des lois de mise à jour avec un gain approprié sur des systèmes non-linéaires chaotiques, qui sont des systèmes de base pour la modélisation et la validation des algorithmes et des approches, tels que les systèmes non autonomes du second ordre comme les oscillateurs générateurs de chaos de Duffing et de Van der Pool, les systèmes autonomes du troisième ordre comme le système de Lorenz de Chua et de Rössler. Pour quelques systèmes chaotiques la stabilisation et la poursuite se font par un choix arbitraire des constantes

de conception, mais pour d'autres la tâche ne se fait qu'à travers un choix optimisé de ces constantes par les algorithmes génétiques , une amélioration du temps de convergence et une poursuite totale du signal de référence ont été remarqué. Pour voir l'efficacité de la méthode une comparaison basée sur le contrôle actif est utilisée.

La dernière partie est consacré à l'élaboration des lois et des applications sur la synchronisation chaotique basée sur la méthode de Backstepping et Backstepping adaptatif , une des applications la plus utilisée dans la transmission sécurisée des données.Dans certaines applications l'information ne peut parvenir qu'à travers plusieurs systèmes, nous exploitons la procédure ainsi abordée pour résoudre le problème de coordination d'un groupe de systèmes dynamiques non linéaires chaotiques. Ainsi, les dynamiques indépendants des systèmes sont coordonnés de façon à avoir une structure d'ensemble unique.

Un interêt important est porté à la procédure du Backstepping est que les non linéarités peuvent être traitées avec plusieurs façons. Les non linéarités utiles qui agissent pour la stabilisation peuvent être retenus, et le secteur des autres non linéarités peut être traité avec un contrôle linéaire. Retenir les non linéarités au lieu de les éliminer exige des modèles moins précis et aussi un effort de contrôle minimal. Plus loin, les résultats de simulation des lois de contrôle peuvent être quelquefois optimales en ce qui concerne l'indice de performance qui garantit certaines propriétés de robustesse.

Abstract

This thesis addresses two important issues that are applicable to chaotic systems, the control and the synchronization of the non linear dynamic chaotic systems. This work of research is motivated by as well theoretical as pratical challenges put for the researcher. Indeed, these systems cannot be stabilized directly by smooth invariant control in the time, besides in spite of the number of available methods for the control of these systems, one can used of new methods as the Backstepping and the adaptive Backstepping in the formulation of the control problem and the need to face the singular terms met in some chaotic systems. This thesis attacks some of these problems, formulates and solves the problems of the control, the track of a trajectory and the synchronization of the non linear dynamic chaotic systems.

This thesis is broken up into four parts. The first one contains a historic on the chaos and the different types of problems of control of the chaotic systems, leading to a definition that is going to allow to the scientists an understanding and an application more increased of the chaotic systems, one finds fundamental theoretical concepts for the analysis of the behavior and different classic methods of control of these systems.

The second part of the thesis includes the theory of the Backstepping, a procedure that is a step by step design and consists of a recursive procedure, interlacing the choice of a Lyapunov function with the design of a virtual control at each step, at the last step, the final control is obtained. Strong properties of global and asymptotic stability can be achieved. A major advantage of this method is that, it has the flexibility to build the control law by avoiding cancellations of useful nonlinearities, there are not any derivatives in the singular controller, free of all nonlinear or the second order terms.

Especially, we show that these non linear dynamic systems can get back under the model of strict feedback form a triangular form, transformations of the variables of state and transfers toward of equilibrium points are introduced to represent them under this shape, a necessary condition for the application of the method of the backstepping. However, we show that it is possible to reach the global asymptotic stabilization to the origin while using such a method.

The third part is dedicated to the method of adaptive Backstepping, a tool for the control of different systems of which some or all their parameters are unknown, as well as the design and the application of the update control laws with an appropriated gain on the non-linear chaotic

systems that are benchmark systems for the modeling and the validation of the algorithms and approaches, as the non autonomous systems of the second order as the chaotic oscillators of the Duffing and the Van der Pool, the autonomous systems of the third order as the systems of Lorenz , Chua and Rôssler.

The last part of the thesis contains the development of the laws and applications on the chaotic synchronization, one of the applications the more used in the transmission secured of the data based on the method of Backstepping. Knowing that the chaotic systems are characterized by different evolutions for very near initial conditions, to Synchronize two chaotic signals it means that they will be identical asymptotiquement in infinite time. The use of the chaos in the systems of communication can permit to reinforce the transmission security of information and to reduce the probability of interception. In some application information can only arrive through several systems, we exploit the procedure thus to solve the problem of coordination of a group of chaotic non linear dynamic systems. It is possible to drive every system as the control of the group is registered in a desired design. Thus, the independent dynamics of the systems are coordinated in order to have an unique general structure. In this chapter we will consider the problem of formation of two or several systems are synchronized in order to behave like a virtual structure formation.

To keep the non linearities instead of eliminating requires less precise models and also a small control effort. Farther, the results of simulation of the control laws can be sometimes optimal with regard to of performance that guarantees some properties of the hardiness.

Table des matières

Remerciements i
Résumé iii
Abstract v
Table des matières vii
Table des figures xi

Introduction Générale **1**

1 Les systèmes dynamiques non linéaires chaotiques comportement et méthodes de contrôle **9**

1 Introduction 9
2 Comportement chaotique des systèmes dynamiques non linéaires 11
2.1 Concepts mathématiques et définitions 12
2.2 Exposant de Lyapunov 14
2.3 Présentation des attracteurs 15
2.4 La carte de Poincare 20
2.5 Diagramme de Bifurcation 24
3 Problèmes de contrôle des processus chaotiques 28
3.1 Les problèmes de stabilisation 29
3.2 Les problèmes du contrôle d'excitation ou de génération d'oscillations chaotiques 30
3.3 Les problèmes de synchronisation contrôlable 30
4 Méthodes de contrôle des processus chaotiques 31
4.1 La contrôlabilité 32
4.2 Contrôle en boucle ouverte. 32
4.3 Contrôle linéaire et non linéaire 33
4.4 Le contrôle adaptatif 35
4.5 Linéarisation de la carte de Poincaré où la méthode OGY 36
4.6 La contre réaction en retard où méthode de Pyragas 37

4.7 Contrôle Basé sur les Réseaux de neurones 37
4.8 Contrôle basé sur les systèmes flous 41
5 Conclusion 41

2 Backstepping pour la stabilisation et la commande en poursuite de trajectoire référence des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques 43
1 Introduction 43
2 Notion de stabilité au sens de Lyapunov 44
2.1 Différents états d'équilibres 45
2.2 Méthode direct de Lyapunov 47
2.3 Contrôle Basé sur la théorie de Lyapunov 55
3 Théorie du Backstepping 56
3.1 Commande de stabilisation par la méthode du Backstepping 57
3.2 Commande en poursuite de trajectoire référence par la méthode du Backstepping 64
4 Conception des lois de commande basées sur le Backstepping pour quelques systèmes chaotiques 67
4.1 Oscillateur du second ordre Duffing 68
4.2 Oscillateur de Bonhoeffer de Van der pool 75
4.3 Système chaotique de Lorenz 80
4.4 Circuit chaotique de Chua 86
4.5 Système chaotique de Rössler 92
5 Conclusion 99

3 Backstepping Adaptatif pour la commande des systèmes dynamiques chaotiques 101
1 Théorie du Backstepping adaptatif 101
2 Conception de loi de commande adaptative basée sur le Backstepping pour quelques systèmes chaotiques 107
2.1 Oscillateur de Duffing 108
2.2 Oscillateur Bonhoeffer Van der pool 111
2.3 Système chaotique de Lorenz. 114
2.4 Circuit chaotique de Chua. 122
3 Conclusion 125

4 Backstepping et Backstepping Adaptatif pour la Synchronisation Chaotique 127
1 Introduction 127
2 Synchronisation du système chaotique de Lorenz via Backstepping 129
2.1 Conception de la loi de synchronisation 129

2.2 Simulation des lois de synchronisation sous des condditions initiales différentes 132
2.3 Généralisation de la loi de commande pour la synchronisation de plusieurs systèmes 138
3 Synchronisation du système chaotique de Chua via Backstepping 141
4 Synchronisation du système chaotique de Rössler via Backstepping 147
5 Synchronisation du système chaotique de l'oscillateur de Duffing via Backstepping 148
6 Synchronisation du système chaotique de l'oscillateur de Vander Pool via Backstepping 150
7 Backstepping Adaptatif pour la synchronisation du Système chaotique de Lorenz 151
8 Conclusion 157

Conclusion Générale **159**

Bibliographie **163**

Table des figures

1.1 Evolution dans le temps pour deux conditions initiales très proches. 14
1.2 Convection de Rayleigh Bénard des tourbillons convectifs 15
1.3 Attracteur de Lorenz $P_r = 10$, $b = 8/3$ et $Ra = 28$. 16
1.4 Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Lorenz. 16
1.5 Attracteur de Rössler $a = 0.398$, $b = 2$ et $c = 4$. 17
1.6 Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Rössler. 17
1.7 Partie de l'attracteur de Moon. $\epsilon = 0.25$, $a = 0.3$ et $w_0 = 1$. 18
1.8 Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Moon. 19
1.9 Attracteur de Hénon, avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$. 20
1.10 Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Hénon. 20
1.11 Section de Poincaré 22
1.12 Section de Poincaré des attracteurs à intervalle de temps régulier 23
1.13 Diagramme de bifurcation pour l'attracteur de Hénon 26
1.14 Portrait de phase pour le système de Lorenz (état d'équilibre) 26
1.15 Portrait de phase pour le système de Lorenz(état chaotique) 27
1.16 Diagramme illustratif de l'Algorithme Génétique 40

2.1 Le bloc diagramme d'un système de boucle de retour stricte. 58
2.2 Le bloc diagramme du premier sous système 58
2.3 Le bloc diagramme du premier sous système avec une sortie virtuelle z_1 59
2.4 Le bloc diagramme du deuxième sous système 60
2.5 Le bloc diagramme du deuxième sous système avec une sortie virtuelle z_2 . . . 60
2.6 Le bloc diagramme du troisième sous système 61
2.7 Le bloc diagramme du troisième sous système avec une sortie virtuelle z_3 . . . 61
2.8 Le bloc diagramme du $i^{\text{ième}}$ sous système avec une sortie virtuelle z_i 62
2.9 Le bloc diagramme du $n^{\text{ième}}$ sous système avec une sortie virtuelle z_n 63
2.10 Comportement chaotique dans l'espace temporel pour l'oscillateur de Duffing . 70
2.11 Variation de l'état x_2 en fonction de l'état x_1 de l'oscillateur de Duffing 70

2.12 Convergence des états x_1 x_2 vers le point d'équilire $x_{eq} = 0$ pour l'oscillateur de Duffing 72
2.13 Convergence des états x_1 x_2 vers le point d'équilire $x_{eq} = 0$ pour l'oscillateur de Duffing 72
2.14 Variation de la loi de commande en fonction de temps pour l'oscillateur de Duffing 73
2.15 Evolution des états x_1 x_2 en commande en poursuite pour l'oscillateur de Duffing 73
2.16 Variation de la loi de commande de poursuite en fonction de temps pour l'oscillateur de Duffing 74
2.17 Comportement chaotique des états x_1, x_2 pour l'oscillateur de Van der pool . . 76
2.18 Convergence des états x_i z_i vers le point d'équilire $x_{eq} = 0$ pour l'oscillateur de Van der pool 77
2.19 Variation des lois de commande en fonction de temps pour l'oscillateur de Van der pool 78
2.20 Convergence des états x_1 x_2 vers le signal référence pour l'oscillateur de de Van der pool 79
2.21 Variation des trois états en fonction du temps pour le système de Lorenz 81
2.22 Comportement chaotiques dans l'espace d'état pour le système de Lorenz . . . 81
2.23 Variation des états et des fonctions de Lyapunov pour le système de Lorenz . . 84
2.24 Variation des lois de commande pour le système de Lorenz 84
2.25 Variation des états x_1, x_2, x_3 et y_r pour le système de Lorenz 85
2.26 Variation des lois de commande de poursuite pour le système de Lorenz 85
2.27 Circuit de Chua 86
2.28 Caractéristique de Circuit de Chua 86
2.29 Comportement chaotique dans l'espace temporel pour le circuit de Chua 87
2.30 Comportement chaotique pour le circuit de Chua 88
2.31 Convergence des trois états vers le point d'équilire $x_{eq} = 0$ pour le circuit de Chua 90
2.32 Variation des lois de commande de stabilisation pour le circuit de Chua 90
2.33 Variation des états pour la poursuite de référence pour le circuit de Chua 91
2.34 Variation des lois de commande de poursuite pour le circuit de Chua 92
2.35 Variation des états avec des paramètres de conception optimisés pour la poursuite de référence pour le système de Chua 92
2.36 Comportement chaotique dans l'espace temporel pour le système de Rössler . . 93
2.37 Comportement chaotique dans l'espace pour le système de Rössler 94
2.38 Convergence des trois états dans le domaine temporel pour le système de Rössler 95
2.39 Evolution des lois de commande en fonction de temps pour le système de Rössler 96
2.40 Evolution des états en poursuite pour le système de Rössler 97

2.41 Evolution des lois de commande en fonction de temps de poursuite pour le système de Rössler 97
2.42 Evolution des états pour le système de Rössler en présence de PID 98
2.43 Variation des lois de commande en présence du PID pour le système de Rössler 98
2.44 variation des états et les lois de commande avec les c_i optimisées pour le système de Rössler 99

3.1 Convergence des états x_1, x_2 vers le point d'équilire $x_{eq} = 0$ pour l'oscillateur de Duffing. 109
3.2 Variation des paramètres éstimées dans le temps pour système de l'oscillateur de Duffing 109
3.3 Variation de loi de commande adaptative pour l'oscillateur de Duffing. 110
3.4 Convergence des états x_1 x_2 vers le signal de référence $y_r = sin(t)$ pour l'oscillateur de Duffing. 110
3.5 Variation des paramètres éstimés dans le temps pour l'oscillateur de Duffing. . . 111
3.6 Variation de loi de poursuite adaptative pour l'oscillateur Duffing 111
3.7 Convergence des états x_1, x_2 vers le point d'équilire $x_{eq} = 0$ pour l'oscillateur Bonhoeffer Van der pol. 112
3.8 Variation des paramètres éstimées dans le temps pour l'oscillateur Bonhoeffer Van der pol. 113
3.9 Variation de loi de commande adaptative pour l'oscillateur Bonhoeffer Van der pol. 113
3.10 Variation de la fonction stabilisante virtuelle pour l'oscillateur Bonhoeffer Van der pol. 114
3.11 Convergence des états x_1 x_2, x_3 vers le point d'équilire $x_{eq} = 0$ pour système de Lorenz 116
3.12 Variation des paramètres éstimées dans le temps pour le système de Lorenz . . 117
3.13 Variation de loi de commande adaptative pour le système de Lorenz 118
3.14 Schema du controleur PID 118
3.15 Variation des états dans le temps avec un PID pour le système de Lorenz . . . 119
3.16 Variation des lois de contrôle par le PID dans le temps pour le système de Lorenz 120
3.17 Convergence adaptative des états (x_1 x_2, x_3) pour le système de Lorenz 120
3.18 Variation des paramètres éstimées dans le temps pour la poursuite pour le système de Lorenz 121
3.19 Convergence des commandes virtuelles et finale pour la poursuite adaptative pour le système de Lorenz 121

3.20 Convergence des états x_1 x_2, x_3 vers le point d'équilire $x_{eq} = 0$ pour circuit chaotique de Chua. 123
3.21 Variation des paramètres éstimées dans le temps pour circuit chaotique de Chua. 123
3.22 Variation de loi de commande adaptative pour le circuit chaotique de Chua. . . 124

4.1 Synchronisation des états pour le Système de Lorenz 133
4.2 Variation des états erreurs pour le Système de Lorenz 133
4.3 Variation des lois de commande de synchronisation pour le Système de Lorenz 134
4.4 Variation des états dans le temps pour le système de Lorenz 134
4.5 Variation des états erreurs dans le temps pour le système de Lorenz 135
4.6 Variation des lois de commande de synchronisation dans le temps pour le système de Lorenz 135
4.7 Synchronisation des états via le Backstepping pour le système de Lorenz 136
4.8 Variation des états erreurs via Backstepping pour le système de Lorenz 136
4.9 Variation des lois de commande de synchronisation via Backstepping pour le système de Lorenz 137
4.10 Synchronisation des états via le contrôle actif pour le système de Lorenz 138
4.11 Variation des états via le contrôle actif pour le système de lorenz 138
4.12 Synchronisation des états via Backstepping en forme de navire 139
4.13 Variation des erreurs pour le système de Lorenz via le Backstepping en forme de navire 139
4.14 Synchronisation des états des système 2 et 1 via Backstepping en forme d'anneau 140
4.15 Synchronisation des états des système 3 et 2 via Backstepping en forme d'anneau 140
4.16 Synchronisation des états des systèmes 4 et 3 via Backstepping en forme d'anneau 141
4.17 Synchronisation des états des systèmes 5 et 4 via Backstepping en forme d'anneau 141
4.18 Synchronisation des états des systèmes 1 et 5 via Backstepping en forme d'anneau 142
4.19 Synchronisation des états des systèmes via Backstepping en forme d'anneau . . 142
4.20 Variation des états erreurs pour la synchronisation pour le système de Lorenz en forme d'anneau 143
4.21 Variation des lois de commande synchronisation pour le système de Lorenz en forme d'anneau 143
4.22 Synchronisation des états pour le circuit de Chua via Backstepping 146
4.23 Variation des états pour le circuit de Chua via Backstepping 146
4.24 Synchronisation des états pour le circuit de Rösslor via Backstepping 148
4.25 Variation des états pour le circuit de Rösslor via Backstepping 148
4.26 Synchronisation des états pour l'oscillateur de Duffing via Backstepping 149
4.27 Variation des états pour l'oscillateur de Duffing via Backstepping 149

4.28 Synchronisation des états pour l'oscillateur de Vander Pool via Backstepping . 151
4.29 Variation des états pour l'oscillateur de Vander Pool via Backstepping 151
4.30 Convergence adaptative des états récepteur vers les états emetteur du système chaotique de Lorenz 156
4.31 Variation des lois adaptatives de synchronisation pour le système chaotique de Lorenz 157
4.32 Variation des paramètres éstimées θ_1, θ_2 et θ_3 pour la synchronisation dans le temps 157
4.33 Variation des états $e_x, e_y et e_z$ dans le temps 158

Introduction Générale

La théorie du chaos est bien connu comme une des trois révolutions dans les sciences physiques du vingtième siècle selon le philosophe Daniel Parrochia, La relativité a éliminé l'illusion Newtonien d'espace absolu et du temps, la théorie quantique a éliminé les rêves Newtonien d'un processus mesurable et vérifiable et le chaos a éliminé la fantaisie Laplacienne de prévisibilité déterministe [1].

En 1963 le météorologue Edward Lorenz expérimentait une méthode lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques, c'est par pur hasard qu'il observa qu'une modification minime des données initiales pouvait changer de manière considérable ses résultats. Lorenz venait de découvrir le phénomène de sensibilité aux conditions initiales [2]. Les systèmes répondant à cette propriété seront à partir de 1975 dénommés les systèmes chaotiques par Tien-Yien Li et James A Yorke qui ont présenté pour la première fois le terme chaos, ou plus précisément, le chaos déterministe [4], et qui est largement utilisé depuis, c'est donc au cours des années soixante dix que la théorie du chaos a pris son essor. Cependant, les travaux de certains scientifiques [5] cités dans [6] et plus particulièrement le physicien mathématicien belge David Ruelle, le mathématicien hollandais Floris Takens [7], [8] menaient bien avant cette découverte, et vont être très utiles à la compréhension de la dynamique chaotique. En effet, vers la fin du dix-neuvième siècle le mathématicien, physicien et philosophe français Henri Poincaré avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps, ainsi on trouve dans le calcul des Probabilités [9] de Henri Poincaré l'affirmation suivante :

Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est du au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaitre la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois , mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites

différences dans les conditions initiales en engendrent de trés grandes dans les phénomènes finaux , une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les dernières. La prédiction devient alors fortuite.

Cette citation définit parfaitement le chaos en tant que sensibilité aux conditions initiales mais aussi le déterminisme qui réside dans le fait que si une condition initiale est parfaitement déterminée alors l'évolution du système l'est aussi. Le déterminisme traduit l'unicité de la solution pour l'équation différentielle d'un système donné, c'est le théorème de Cauchy.

Toujours au dix-neuvième siècle, le mathématicien russe Alexandre Lyapunov effectuait des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduisait l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines, lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de sensibilité aux conditions initiales. Les travaux de Lyapunov, d'abord tombaient dans l'oubli, seront plus tard très précieux pour étudier certains aspects de la théorie du chaos.

Les travaux des prédécesseurs de Lorenz ont donc été très importants pour la compréhension du chaos déterministe, mais il faut souligner que ce qui va permettre aux scientifiques une compréhension plus accrue des systèmes chaotiques c'est l'ordinateur. En effet, les équations différentielles régissant un système chaotique sont nécessairement non linéaires et, sans ordinateur, leur résolution est en général impossible.

Plusieurs définitions mathématiques du chaos sont connues [11]- [16], mais toutes exprimaient les caractéristiques fermes des systèmes dynamiques non linéaires sensibles aux conditions initiales. Dans un système linéaire la solution asymptotique est indépendante des conditions initiales du système, Par contre, pour un système non linéaire, il existe une grande variété de régimes permanents, tels que le point d'équilibre, la solution périodique, la solution quasi-périodique et le chaos. De plus, le système dynamique est fortement dépendant des conditions initiales de départ. le chemin de transition vers le chaos est différent, cependant il existe un certain nombre de scénarios de transition vers le chaos qui semblent universels, et permettent de décrire l'évolution d'un système, parmi ces scénarios est que si la dynamique étudiée dépende des paramètres de contrôle, lorsque un paramètre varie, le système peut passer d'un état stationnaire à un état périodique, puis au-delà d'un certain seuil, il peut suivre un certain scénario de transition et devenir chaotique, c'est la bifurcation.

Le comportement chaotique a été considéré comme un phénomène exotique qui peut être seulement d'intérêt mathématique et ne serait jamais rencontré dans la pratique. Cependant, plus tard la possibilité de dynamique chaotique a été découverte dans de nombreux systèmes mécaniques, de communication, du laser de la chimie et de la biochimie, de biologie, économie et aussi en médecine.

Le chaos a été largement appliqué à beaucoup de disciplines scientifiques mathématiques, la

programmation, la microbiologie, la biologie, l'informatique, l'économie, l'ingénierie, la finance, la philosophie, la physique, la politique, la dynamique de la population, la psychologie et la robotique [16] et comme première application du chaos :

- Dans l'engineering, le contrôle et la stabilisation du comportement irrégulier dans les circuits, le contrôle des oscillations dans des réactions chimiques, les turbines, les systèmes de puissance et dans la combustion, dans l'accroissement de la puissance d'un laser, le contrôle des petites perturbations intervenant lors de son réglage qui gênent la finesse du faisceau, et dans beaucoup plus de domaines.
- Dans les ordinateurs, on remarque la commutation des paquets dans des réseaux informatiques, le cryptage et le contrôle du chaos dans les systèmes robotiques.
- Dans les communications, on trouve la compression et le stockage d'image, la conception et le management des réseaux d'ordinateurs.
- Dans la médecine et la biologie, on trouve la cardiologie, l'analyse du rythme du coeur (EEG), la prédiction et le contrôle d'activité irrégulière du coeur.
- Dans Le management et la finance, on a les prévisions économiques, l'analyse financière, et la prévision du marché.

Une des plus importantes des applications de l'ingénierie est la communication sécurisée grâce aux propriétés du comportement aléatoire et sensibilité aux conditions initiales des systèmes chaotiques. La sensibilité aux conditions et de l'imprévisibilité rend les systèmes chaotiques très convenable pour construire la cryptographie.

Encore un développement supplémentaire a mis en valeur plusieurs applications où les modes chaotiques peuvent paraître quelquefois comme nuisibles où l'on doit le contrôler où le réduire et des classes entières de problèmes de contrôle qui sont d'importance pratique sont apparus [16], [17], quelquefois comme utiles où on doit le maintenir ou augmenter son degré de chaoticité et l'idée de la synchronisation chaotique a été utilisée pour construire des systèmes de communication pour assurer la sécurité de l'information transmise [**?**], [19].

Le terme "contrôle du chaos" est utilisé principalement pour dénoter la région d'interface d'étude entre la théorie du contrôle et la théorie des systèmes dynamiques étudiant les méthodes de contrôle des systèmes déterministes avec un comportement chaotique non régulier. Le problème de contrôle du chaos a attiré l'attention des chercheurs et des ingénieurs depuis le début des années 1990, son progrès est remarqué essentiellement sur les techniques de conception de commande des classes des processus dynamiques non linéaires. Le concept du contrôle du chaos s'est installé dans le jargon de la physique moderne pour signifier que tout processus ou mécanisme dans un système dynamique qui permet :

- d'améliorer le chaos où le stabiliser quand celui ci est bénéfique.

- De le supprimer complètement quand il est nocif.

La compréhension et l'utilisation d'une telle dynamique est très souhaitable dans la théorie et les applications. Dans quelques applications, le chaos peut être utile pendant que dans d'autres il peut être nuisible. Par exemple pour la commutation dans les systèmes de puissance où les systèmes mécaniques, le chaos est inacceptable. En revanche et spécialement, quand la synchronisation du chaos a été trouvée en 1991, la théorie du chaos devient de plus en plus attirante, le chaos est proposé comme un outil promoteur, il est considéré dans la synchronisation, et la transmission sécurisée de l'information dans les systèmes de communication.

Depuis leurs naissances dans respectivement le travail de Ott, Grebogi et Yorke dans [17], Pecora et Carroll [39], [40], le contrôle du chaos et la synchronisation chaotique ont reçu un intérêt énorme dans les études autant théoriques qu'expérimentales. Les systèmes sous considération dans les deux sujets sont caractérisés par la présence des ensembles limites non standards et essentiellement d'une dynamique non linéaire, comme conséquence naturelle demandent l'application des techniques de contrôle non linéaire, et plusieurs méthodes efficaces ont été proposées et été utilisées durant les deux dernières décennies pour accomplir le contrôle, la stabilisation [18]- [147], [181]- [202] et la synchronisation des systèmes chaotiques [197]- [277], tel que le contrôle linéaire et non linéaire comme la méthode de contrôle combiné qui est appelée la contre réaction ouverte (OPCL) [69], [74] , la Linéarisation de la carte de Poincaré appelée aussi la méthode OGY [95] , le contrôle adaptatif [21], [79], [100] et le contrôle flou [114].

Récemment, tout au long de ces progrès marqués sur le contrôle non linéaire, des efforts ont été centré sur le problème de retour d'état de sortie et ont résulté en une procédure systématique appelé backstepping et backstepping adaptatif applicable aux systèmes non linéaires sous une forme triangulaire appelée boucle de retour stricte. Cette procédure a été introduit et perfectionné dans [40]- [82] et beaucoup appliquée dans [83], [184]. La conception du backstepping offre beaucoup de flexibilité à chaque étape de calcul de la loi de commande, nombreuses propositions des méthodes de contrôle du chaos basées sur cette technique comme une nouvelle structure de contrôle non linéaire, qui est une approche de conception systématique pour construire à la fois les lois de commandes en associant un choix adéquat des fonctions de Lyapunov permettant de garantir la stabilité asymptotique globale du système.

Les avantages inhérents à cette technique sont bien connus en particulier :

– Procure une grande famille de lois de commande globalement asymptotiquement stabilisantes.
– Permet de résoudre divers problèmes de robustesse et de commande adaptative.
– Répond essentiellement à la question de la stabilité asymptotique du système.

Avec le backstepping, les non linéarités du système ne sont pas éliminés dans la loi de commande. Savoir Comment traiter ces non linéarités augmente l'avantage du choix de la procédure. Si un non linéarité agit pour la stabilisation, il est donc en un sens utile, et doit être retenu dans la boucle de retour du système. Cela mène à une robustesse du modèle et un petit effort suffisant pour contrôler le système.

Il a été montré que beaucoup de systèmes chaotiques célèbres comme paradigmes dans la recherche du chaos, incluant l'oscillateur de Duffing, l'oscillateur de van der Pool, le système de Rössler et plusieurs types des circuits de Chua, le système de Lorenz peuvent être transformés dans une classe de système non linéaire en forme de boucle de retour stricte, et le backstepping et le Backstepping adaptatif ont été employés et étendus au contrôle de ces systèmes chaotiques. Cependant, le système de Lorenz, comme indiqué dans [2] [25], ne peut pas être directement contrôlé en utilisant la méthode du backstepping pour son problème de singularité. Comme outil de conception, la méthode du backstepping est moins restrictive que la linéarisation par retour d'entrée ou de sortie, dans quelques situations il peut vaincre ces singularités en associant le changement vers la forme de boucle de retour stricte et une méthode d'optimisation des constantes de la conception.

De façon générale, on peut dire que notre ligne principale de travail s'articule autour du problème de contrôle vers un point d'équilibre stable ou vers un cycle limite stable(stabilisation du système autour du point d'équilibre), de poursuite de trajectoire référence et de la synchronisation des systèmes chaotique basés sur la technique du Backstepping et Backstepping adaptatif.

Le problème de commande non linéaire consiste à concevoir une loi de commande $u(t, x)$ dans la contre réaction pour les systèmes dynamiques non linéaires décrits par des équations différentielles ordinaires de type :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

Avec $x \in \mathfrak{R}^n$ le vecteur d'état d'entré et $y \in \mathfrak{R}^m$ le vecteur d'état de sortie, $x_0 \in \mathfrak{R}^n$ le vecteur des conditions initiales, $m, n \in \mathbf{R}$.

Qui essaye toujours de supprimer les comportements irréguliers et par conséquent, d'éliminer le chaos afin d'éviter la complexité qui peut engendrer beaucoup d'incidents. Ceci s'avère être quelque chose d'impraticable, peu économique, et physiquement très difficile si ce n'est pas impossible.

Le contrôle du comportement chaotique a une autre application importante, à savoir, la synchronisation des systèmes chaotiques. Si on considère deux systèmes chaotiques identiques avec des

conditions initiales différentes, la différence dans l'évolution de ces deux systèmes va se développer exponentiellement en fonction du temps [9], et chacun d'eux va évoluer d'une façon très différente.
L'injection d'une une loi de commande $u(t, x)$ à l'un des deux systèmes permettra t'il à rendre leur évolution harmonique et réduire la différence à zéro et pousser les deux systèmes dans une tubulure synchronisée ?
S'il est possible de réaliser une telle application, il est possible de communiquer à l'aide des signaux chaotiques et de porter un message utile sur un signal chaotique puis le reconstituer à la réception. Ou mieux encore, utiliser le système chaotique lui même comme information, Reste à contrôler la trajectoire chaotique pour une telle procédure.

Notre contribution à travers le travail développé dans cette thèse concerne le développement des lois de commande $u(t, x)$ afin de pouvoir stabiliser, contrôler et conduire la trajectoire des systèmes chaotiques vers des trajectoires bien spécifiques (points d'équilibres, cycles limites stables, des trajectoires références périodiques), De plus, appliquer le contrôle du chaos dans la synchronisation chaotique. Nous avons aussi développé des lois de commande $u(t, x)$ basées sur d'autres méthodes de contrôle pour monter l'efficacité, le temps de convergence et la robustesse de la méthode de travail choisie. Ces méthodes correspondent aux :

- Un contrôleur PID dont les paramètres sont optimisés par La méthode des algorithmes génétiques [203], [204] . Pour parvenir à contrôler plusieurs systèmes chaotiques cités au dessus. Et plus encore, altérer la stabilisation du système d'une orbite périodique instable chaotique à des trajectoires bien spécifiques.
- Le développement d'une technique de contrôle basée sur le contrôle actif [228] pour la synchronisation des systèmes chaotiques.

Le travail est présenté selon le plan suivant :
Au premier chapitre et dans un premier temps, nous rappelons les principales définitions mathématiques relatives aux systèmes chaotiques, notamment des notions préliminaires sur les dynamiques du comportement chaotique, nous présentons quelques exemples des systèmes chaotiques qui sont des systèmes repères pour la modélisation et la validation des techniques et des algorithmes proposés à savoir les systèmes non autonomes du second ordre comme les oscillateurs chaotiques Van der Pol, Duffing, et comme système discret le système de Hénon, les systèmes autonomes du troisièmes ordres comme le système de Lorenz, le système de Chua et le système de Rossler. Ensuite, nous consacrons la deuxième partie aux études des différents types de problèmes de contrôle des processus chaotiques, les problèmes de stabilisation, les problèmes du contrôle d'excitation ou génération d'oscillations chaotiques, les problèmes de synchronisation contrôlable. Nous proposons dans la troisième partie du chapitre les plus

fiables et les plus connues des méthodes de contrôle des processus chaotiques, ces méthodes sont visées à améliorer la suppression du chaos avec la réduction simultanée du niveau d'effort externe exigé et conduire les trajectoires du système à converger vers l'orbite périodique désirée.

Dans le chapitre 2, nous introduisons les techniques de bases du Backstepping, où on donne quelques concepts sur la théorie de Lyapunov, des conditions suffisantes de stabilité des différents états d'équilibres des systèmes dynamiques non linéaires, la classe de système est celle dérivant des modèles de systèmes physiques qui peuvent se présenter par un ensemble des équations différentielles ordinaires. Des méthodes qui permettent de construire une telle fonction de Lyapunov candidate pour un système donné, pour la conception d'une loi de contrôle associée avec une fonction de Lyapunov constitue ce qu'on appelle un contrôle basée sur la théorie de Lyapunov (Cfl), le Backstepping résouds ce problème à travers une méthode récursive pour une classe des systèmes non linéaire, on donne par la suite des idées de base de la conception des lois de commande par le Backstepping Nous examinons l'efficacité de cette méthode de contrôle par application sur des systèmes chaotiques cités au dessus.

Nous consacrons le chapitre 3 à une autre méthode de contrôle basée sur le Backstepping, à savoir le contrôle adaptatif, la procédure de conception pour le contrôle adaptatif non linéaire est présenté lorsque le système chaotique est représenté par un ensemble des équations différentielles ordinaires contenant un nombre fini de paramètres de contrôle inconnues, la procédure de conception est récursive, durant la $i^{\text{ième}}$ étape, le $i^{\text{ièm}}$ sous système est stabilisé sous une fonction de Lyapunov appropriée par la mise au point d'une fonction stabilisante et une fonction de réglage. La loi de mise à jour pour le paramètre estimé, et le contrôle final n'est déterminé qu'en dernière étape, le nombre d'estimation des paramètres est minimal c.à.d. égal au nombre de paramètres inconnus [184]. On montre également comment fournir les outils appropriés pour diriger la trajectoire chaotique vers des trajectoires désirées et converger les paramètres à estimer vers leurs valeurs réelles.

Le chapitre 4 regroupe quelques applications sur la synchronisation chaotique de type identique pour les systèmes chaotiques cités au paravant, une des applications la plus utilisée dans la transmission sécurisée des données basée sur la méthode de Backstepping. Ensuite, pour faire un comparaison de notre méthode, le contrôleur ainsi développé sera comparé avec un contrôleur basé sur la méthode de contrôle actif. Dans certaines applications l'information ne peut parvenir qu'à travers plusieurs systèmes, nous exploitons la procédure ainsi abordée pour résoudre le problème de coordination d'un groupe de systèmes dynamiques non linéaires chaotiques. Et enfin, nous terminons cette thèse par une conclusion générale.

Notre objectif est double le premier est de montrer que beaucoup systèmes chaotiques comme paradigmes dans la recherche du chaos peuvent être transformés dans une classe de systèmes

non linéaires appelés forme de boucle de retour stricte, et la seconde est atteindre la méthode du Backstepping et le Backstepping adaptatif au genre de ces système, et montrer que la procédure peut être naturellement appliquée et généralisée pour contrôler cette classe de systèmes chaotiques, pour ses avantages à savoir qu'elle est applicable à une variété de systèmes chaotiques contenant où pas une excitation externe, et elle n'a besoin seulement que d'un contrôleur pour réaliser la tache demandée, donne une certaine flexibilité pour construire une loi du contrôle qui peut être étendue aux systèmes hyper chaotiques de plus haut degrés et le système de boucle fermé est globalement asymptotiquement stable.

Chapitre 1

Les systèmes dynamiques non linéaires chaotiques comportement et méthodes de contrôle

1 Introduction

La science du $20^{\text{ième}}$ siècle a été marquée par trois découvertes majeures :

- La relativité.
- La mécanique quantique.
- Le chaos.

Selon le philosophe Daniel Parrochia [1], la théorie du chaos constitue une des trois grandes révolutions scientifiques du dix-neuvième siècle et correspond à un changement de paradigme comparable à ceux qu'entraînèrent la théorie de la relativité et la mécanique quantique. Ce siècle a vu s'écrouler l'un après l'autre les murs de certitudes qui entouraient la forteresse de la physique newtonienne. Einstein avec sa théorie de la Relativité, a éliminé en 1905 l'illusion newtonienne d'un espace et d'un temps absolus. Dans les années 1920 à 1930, la mécanique quantique a détruit la certitude de tout pouvoir mesurer aussi précisément que possible. Le chaos, lui a éliminé l'utopie Laplacienne d'une prédictibilité déterministe.

Très succinctement, la théorie du chaos a pour objet l'étude des phénomènes non linéaires régis par des lois simples et déterministes dont le comportement sous certaines conditions, deviennent imprédictibles. En particulier, cette théorie se constitue, depuis les années 1970, à partir d'une triple confrontation :

- La théorie mathématique des systèmes dynamiques.
- L'étude du phénomène non linéaire, le désordre, la turbulence dans la nature et où dans le monde technologique.

– La technologie et le développement de l'ordinateur.

A la fin du dix-neuvième siècle, Henri Poincaré réussit à mettre en évidence la possibilité de comportements irréguliers dans les systèmes déterministes. C'est Edward Lorenz, un météorologue américain qui fut le premier à comprendre et à déterminer un modèle mathématique du chaos, mais comme conclusion de l'histoire de naissance de la théorie du chaos, elle est le résultat d'une confrontation entre l'histoire de longue durée, qui trouve ses racines au dix-neuvième siècle dans les travaux d'Henri Poincaré [9], et une période de reconfiguration, constituée par les travaux séminaires d'Edward Lorenz [2], Stephen Smale [5], David Ruelle et Floris Takens [7], [8].

Dans un système déterministe, des conditions initiales identiques conduisent à des évolutions identiques, Pour un système chaotique qui est un système dynamique déterministe possédant un comportement imprévisible à long terme, cette imprévisibilité est due à la sensibilité aux conditions initiales, particularité des systèmes chaotiques.

Le chaos est un phénomène qui se produit largement dans les systèmes dynamiques. De point de vue pédagogique ce phénomène a été considéré complexe et n'a jamais été donné de l'importance parce qu'il n'y avait aucune analyse simple disponible qui pourrait aider les étudiants et les chercheurs à immerger dans ce phénomène intéressant et obtenir des outils et des expériences. depuis la présence de chaos s'est répandu dans beaucoup de champs, c'est bon d'avoir quelque perspicacité dans ce droit du phénomène du niveau haut.

Le terme chaos, dans l'ancienne philosophie signifiait l'état de désordre dans la matière non formée supposée existée avant l'univers ordonné [11], [13]. Comme pour beaucoup de limites en science, il n'y avait aucune définition standard du chaos. Néanmoins, les dispositifs typiques du chaos incluent :

– La non-linéarité. Si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.
– Le déterminisme. Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes plutôt que probabilistes.
– La sensibilité aux conditions initiales. De très petit changement sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.
– L'imprévisibilité. En raison de la sensibilité aux conditions initiales qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.
– L'irrégularité. Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables.

La possibilité de dynamique chaotique a été découverte dans de nombreux différents systèmes dynamiques et plusieurs applications du chaos dans l'engineering où les modes chaotiques peuvent paraître quelque fois comme nuisibles où l'on doit le contrôler ou le réduire et des classes entières de problèmes de contrôle qui sont d'importance pratique sont apparus, et la combinaison de la théorie et le contrôle du chaos ajoute un sens paradoxal et un intérêt immense au sujet.

Les problèmes du chaos et du contrôle du chaos ont fait l'objet des études intenses durant les deux dernières décennies. Le terme contrôle du chaos est principalement utilisé pour désigner le domaine d'étude :

- incluant la théorie du contrôle et la théorie des systèmes dynamiques,
- étudiant les méthodes de contrôle des systèmes déterministes présentant un comportement chaotique non régulier [16].

2 Comportement chaotique des systèmes dynamiques non linéaires

La section suivante donne des notions préliminaires sur les dynamiques du comportement chaotique, les systèmes chaotiques représentent une classe des modèles indéterministes différents des modèles stochastiques. Alors qu'il suffit de connaître l'état courant du modèle déterministe, les trajectoires futures sont prédictives pour une longue période arbitraire, le modèle stochastique ne peut pas faire une prévision précise, d'une manière générale, et pour une petite période arbitraire, l'erreur de prédiction pour un modèle chaotique croit exponentiellement et par conséquent la prévision ne peut se faire que sur une période limité en temps définie par une erreur de prévision admissible, le processus dans les modèles chaotiques semblait à des oscillations non régulières variant en amplitude et en fréquence.

Avant le $19^{\text{ième}}$ siècle, les équations différentielles linéaires étaient les principales modèles mathématiques pour les oscillations des systèmes mécaniques et électriques et d'autres, à la fin de ce siècle, il est devenu clair que les modèles linéaires ne peuvent pas décrire adéquatement les nouveaux processus et phénomènes physiques, de nouveaux fondements mathématiques ont apparus, tels que la théorie des oscillations non linéaires et plus principalement l'étude du cycle limite stable. Même que les oscillations complexes comme la relaxation, pouvait être décrite par un simple modèle non linéaire dépendant des conditions initiales "systèmes avec plusieurs cycles limites", les modèles des oscillations linéaires et non linéaires satisfaisaient énormément les besoins des chercheurs pour plusieurs décennies. Il a été admis que ces modèles non li-

néaires, pouvaient décrire tout types d'oscillations et cette conviction était supportée par des fondements mathématiques, telle que le théorème de Poincaré -Bendixson qui affirmait que les points d'équilibres et les cycles limites étaient les seules type possible des états limites stables dans les systèmes continus du second ordre, cependant au milieu du siècle dernier, quelques mathématiciens établissaient que se n'était pas le cas pour les systèmes du troisième ordre, qui présentaient des comportements plus complexes comme des oscillations non périodiques limités [16].

En 1963, le physicien E. Lorenz révolutionnait le monde et démontrait la nature qualitative de l'atmosphère turbulent, qui obéissait aux équations différentielles partielles complexes de Navier-Stokes et le représentait par un simple modèle non linéaire du troisième ordre appelé plus tard les équations de Lorenz :

$$\begin{cases} \dot{x} = -d\,(x - y) \\ \dot{y} = -x\,y - r\,x\, - y \\ \dot{z} = x\,y - b\,z \end{cases} \tag{1.1}$$

Avec $x, y, z \in \Re$ sont les variables des états d'entrées et d, r, b sont les paramètres de contrôle du système. Pour des valeur $d = 10, r = 97, b = \frac{2}{3}$. Les solutions du système de Lorenz semblaient à des oscillations non périodiques et les trajectoires dans l'espace de phase approchaient des ensembles limites appelés attracteurs caractérisés par une forme étrange.

L'intention des physiciens et des mathématiciens, et plus tard des ingénieurs, a été attirée pour ce modèle par les travaux de D. Ruelle et F. Takens qui appelaient pour la première fois attracteurs "étrange" et aussi par les travaux de Li et Yorke qui introduisaient le terme chaos pour désigner le phénomène non régulier dans les systèmes déterministes, notant que les fondements mathématiques apparus pour étudier le phénomène chaotique sont mis dés 1960-1970. Durant ce temps, le comportement chaotique a été découvert dans plusieurs systèmes mécaniques, lasers, physiques, chimiques, biologiques et médicales, circuits électroniques et dans beaucoup d'autres.

2.1 Concepts mathématiques et définitions

Les nouvelles méthodes analytiques et numériques développées pour les systèmes, démontraient que le chaos n'est qu'un type exceptionnel de comportement des systèmes non linéaires, grossièrement parler du comportement chaotique survenait toute fois

– que les trajectoires des systèmes sont globalement bornées et localement instables, dans les systèmes chaotiques, une petite divergence initiale et arbitraire des trajectoires ne reste pas insignifiante mais croit exponentiellement.

– Le spectre de fréquence des trajectoires chaotiques est continu.

Dans plusieurs cas tels que les oscillations non régulières et non périodiques représentaient mieux le processus dans les systèmes physiques. Il faut noter qu'en pratique, il est impossible de distinguer à l'oeil le processus chaotique du processus périodique ou quasi périodique. La terminologie dans le domaine des modèles chaotiques n'est pas encore résolu, et il y'a plusieurs différentes définitions des systèmes chaotiques dont on présente la plus simple.

Considérons le système dynamique continu dans le temps suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ y = h(x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Ou : $x = x(t) \in \Re^n$: est le vecteur d'état du système et, $0 \leq t \leq \infty$.

Définition 2.1 *L'ensemble fermé* $\Omega \in \Re^n$ *est appelé un attracteur pour le système (1.6) :*

a- S'il existe un sous ensemble ouvert, $\Omega_0 \subset \Omega$ *tel que toutes les trajectoires* $x(t)$ *du système (4.79), commençant dans* Ω_0 *sont définies pour tout* $t \geq 0$ *et tendent vers* Ω *quand* $t \to \infty$

c.à.d

Si $x_0 \in \Omega_0$ *et* $\| x - y \|$ *représente la distance entre le point x et l'ensemble limite* Ω*, alors* $\| x - y \| \to 0$ *quand* $t \to \infty$

b- Aucun autre sous ensemble de Ω *a cette propriété.*

Autrement dit : On appelle attracteur un ensemble de points vers lequel converge la trajectoire de l'espace des phases.

Pratiquement, à partir de quelques itérations, on considère que l'ensemble des points de l'espace des phases décrit l'attracteur.

Définition 2.2 *Un système dynamique est appelé un système chaotique s'il a au moins un attracteur chaotique.*

L'instabilité de Lyapunov caractérise la propriété principale des oscillations chaotiques appelée super sensitivité où dépendance sensible aux conditions initiales, c.à.d. toutes deux trajectoires fermées arbitraires proches s'éloignent l'une de l'autre nécessairement à une distance finie. Dans un premier temps, les deux systèmes évoluent de la même manière, mais, très vite, leur comportement devient différent pour n'avoir plus grand chose à voir.

Définition 2.3 *Un attracteur est appelé chaotique s'il est borné et toute trajectoire qui commence dedans est une trajectoire instable de Lyapunov.*

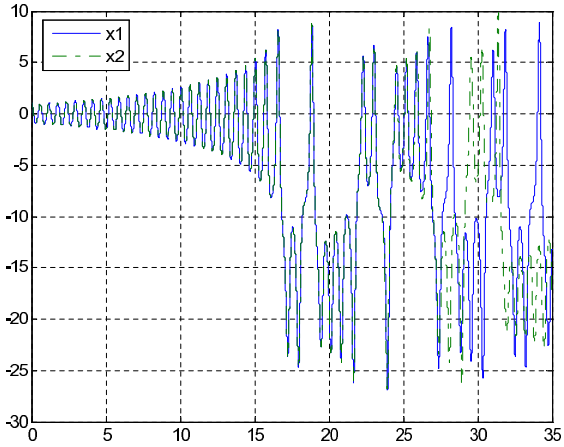


FIG. 1.1 – Evolution dans le temps pour deux conditions initiales très proches.

Il y a d'autres définitions de l'attracteur chaotique et le chaos. Par exemple, la définition de l'attracteur chaotique qui souvent inclut des exigences supplémentaires telles que l'existence des trajectoires ou une famille de trajectoires périodiques. La notion d'attracteur chaotique coïncide souvent avec celui de l'attracteur étrange introduite en 1971 par Ruelle et Takens comme un ensemble accessible et nommé plus tard un ensemble fractal.

La preuve stricte de la chaoticité d'un système est difficile même si la définition la plus simple est utilisée. Pour quelques-uns universellement reconnu comme des systèmes chaotiques tels que le système de Lorenz et les systèmes de Henon pour des valeurs standard des paramètres, les preuves de chaoticité sont maladroites, même si en, bien qu'il y ait des démonstrations numériques et expérimentales de ce fait. Par conséquent, la simulation numérique et l'estimation de plusieurs caractéristiques reste la méthode principale d'étudier les systèmes chaotiques.

2.2 Exposant de Lyapunov

Pour caractériser un système chaotique, il faut faire appel à ce qu'on appelle l'exposant de Lyapunov. Pour estimer l'exposant de Lyapunov, on a recours à une simulation numérique simple. On laisse évoluer le système à partir de deux conditions initiales différentes mais très proches. On obtient ainsi deux évolutions différentes et même très différentes à terme car le système est chaotique (donc, sensible aux conditions initiales). L'exposant de Lyapunov rend compte de l'évolution de la distance euclidienne entre les deux évolutions induites par des conditions initiales différentes.

Définition 2.4 *Un système chaotique est un système dont l'exposant de Lyapunov est strictement positif.*

On considère un système, soient X_0 et Y_0 deux conditions initiales pour ce système. On note X et Y les fonctions du temps telles que $X(t)$ et $Y(t)$ représentent respectivement l'état du système à l'instant t et telles que $X(0) = X_0$ et $Y(0) = Y_0$. On note d la distance euclidienne définie comme suit :

$d : \quad \Re^N \times \Re^N \to \Re, \quad (X, Y) \to \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$

S'il existe un instant t_l, deux constantes réelles l et a tels que, si :

$I = [0, t_l], \forall t \in I \qquad d(X_t l(t), Y_t l(t) \to e^{\lambda l + a}$

Alors, l est appelé exposant de Lyapunov. L'exposant de Lyapunov caractérise la qualité chaotique ou non d'un système car il rend compte de la sensibilité aux conditions initiales. Nous présentons quelques exemples des systèmes chaotiques mentionnés dans ce qui suit.

2.3 Présentation des attracteurs

Attracteur de Lorenz

L'attracteur de Lorenz tient son nom du météorologue Edward Lorenz qui l'a étudié le premier. C'est une simplification à l'extrême d'équations régissant les mouvements atmosphériques. Lorenz les a étudiés afin de mettre en évidence sur un système simple la sensibilité aux conditions initiales qu'il avait observée.

Les équations correspondent aux équations de la convection de Rayleigh-Bénard. Dans cette expérience, il considère un fluide entre deux plaques portées à deux températures légèrement différentes. Les deux plaques sont horizontales et la plaque la plus chaude est située en bas. il observe des tourbillons.

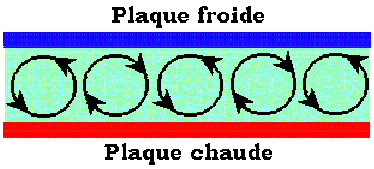


FIG. 1.2 – Convection de Rayleigh Bénard des tourbillons convectifs

Cette expérience a été réalisée pour quelques fluides présentant des propriétés adaptées viscosité, coefficient de dilatation, densité moyenne. Elle donne des résultats illustrant très bien le comportement chaotique.

$$\begin{cases} \dot{v} = -P_r\,(v - T) \\ \dot{T} = (R_a - Z)\,v - T \\ \dot{Z} = v\,T - b\,T \end{cases} \tag{1.3}$$

avec $P_r = \sigma = (n/D)$, nombre de Prandtl, rapport de la viscosité cinématique du fluide sur la diffusivité thermique.

$T = \rho$ est la température rapportée à celle du fluide sans la convection.

$Ra = \beta$ est le nombre de Rayleigh. Il dépend des propriétés du fluide, de la distance entre les plaques et de la différence de température entre les plaques.

Pour $P_r = 10$, $b = 8/3$ et $Ra = 28$. Ces valeurs impliquent un comportement chaotique. n est une composante de vitesse et Z est une variable issue des grandeurs physiques évoquées dans les équations.

Le tracé en échelle logarithmique montre bien que la distance croit de manière exponentielle,

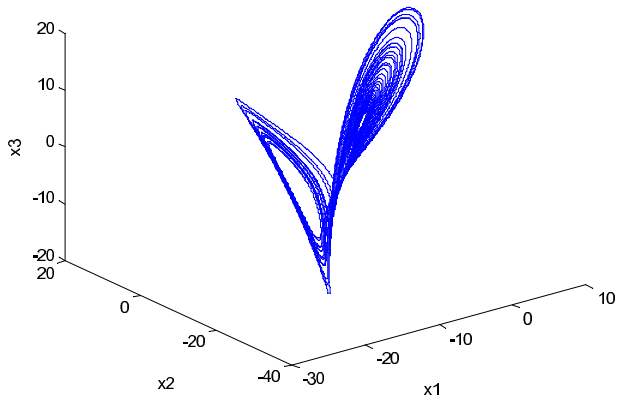


FIG. 1.3 – Attracteur de Lorenz $P_r = 10$, $b = 8/3$ et $Ra = 28$.

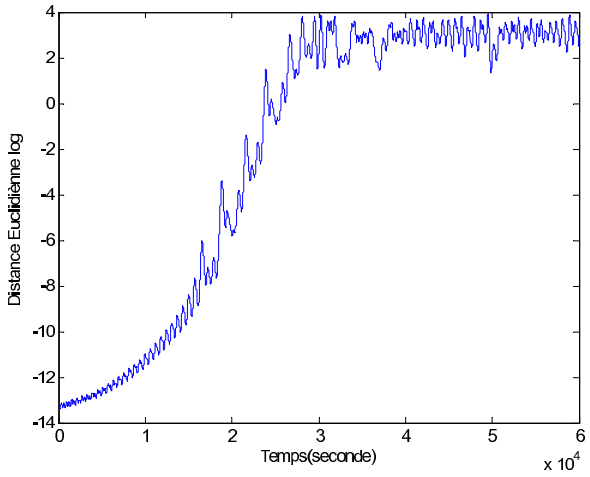


FIG. 1.4 – Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Lorenz.

du fait de la sensibilité aux conditions initiales. On peut lire la valeur de la pente, on estime l'exposant de Lyapunov à 0.8.

Attracteur de Rössler

Proposé par l'Allemand Otto Rossler, ce système est lié à l'étude de la mécanique des fluides, il découle des équations de Navier Stokes. Les équations de ce système ont été découvertes à la suite des travaux en cinétique chimique. Les équations de ce système sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{X} = -(Y + Z) \\ \dot{Y} = X + a\,Y \\ \dot{Z} = b + Z\,(X - c) \end{cases} \tag{1.4}$$

a, b et c sont des constantes réelles. Pour : $a = 0.398$, $b = 2$ et $c = 4$. On est alors en présence d'un système chaotique.

L'exposant de Lyapunov vaut ici 0.09.

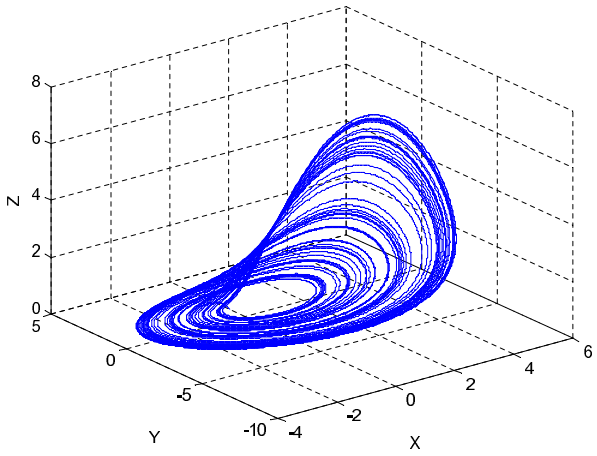


FIG. 1.5 – Attracteur de Rössler $a = 0.398$, $b = 2$ et $c = 4$.

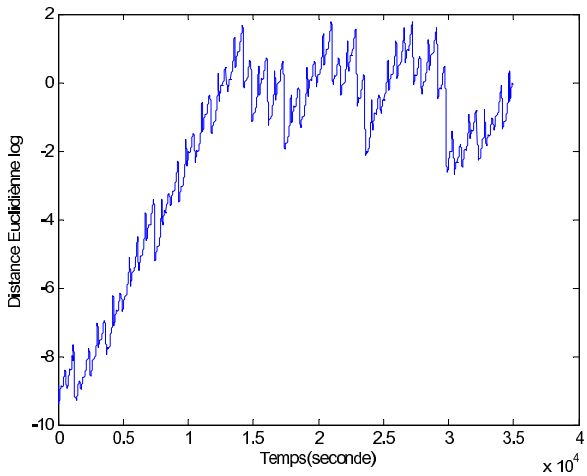


FIG. 1.6 – Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Rössler.

Pendule de Moon

Le pendule de Moon est un système physique. Il est constitué d'un pendule (avec une boule métallique à son extrémité) accroché à une potence légèrement flexible. De plus, le pendule est placé entre deux aimants situés à égale distance de la boule lorsque celle-ci et la potence sont au repos. La potence est ensuite excitée à l'aide d'un mouvement oscillatoire harmonique d'amplitude constante. Stimulé, le pendule se met en mouvement et les forces magnétiques dues aux aimants. Le mouvement est alors chaotique.

Plusieurs oscillations chaotiques peuvent être produites en introduisant dans les oscillateurs non linéaires, un signal harmonique par exemple, en substituant la fonction sinusoïdale $z(t) = a\cos(\omega_0 t)$ à droite

1. De l'équation de Van der Pol $\ddot{y} + \epsilon\,(y^2 - 1)\,\dot{y} + \omega^2\,y = 0.$
2. De Duffing $\ddot{y} + p,\dot{y} - q\,y + q_0\,y^3 = 0.$
3. Et le système auto oscillant avec un relais $\ddot{y} + p\,\dot{y} + q\,y - signe(y) = 0.$

Pour quelques valeurs d'excitation de fréquence et d'amplitude de la fonction sinusoidale $z(t)$, le cycle limite est induit et les oscillations dans les systèmes non linéaires deviennent chaotiques.
y est la position du pendule. ϵ est la masse de la boule métallique, a est l'amplitude de l'excitation et w est la pulsation de cette excitation. Classiquement, on prend $\epsilon = 0.25$, $a = 0.3$ et $w_0 = 1$.

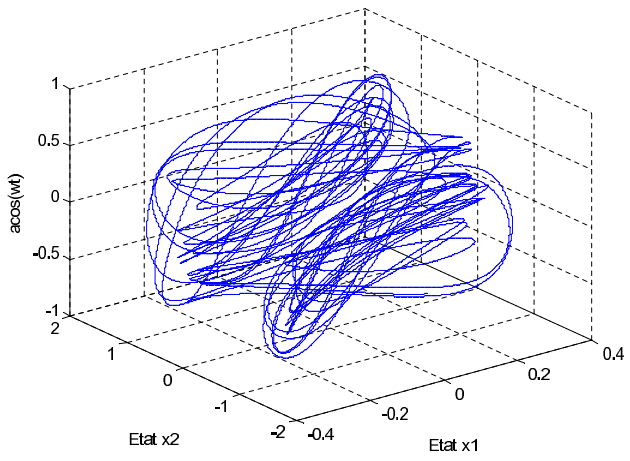


FIG. 1.7 – Partie de l'attracteur de Moon. $\epsilon = 0.25$, $a = 0.3$ et $w_0 = 1$.

L'attracteur de Moon est nettement plus complexe que les autres attracteurs présentés au dessus. On ne représente qu'une partie de cet attracteur car on ne pourrait pas distinguer les

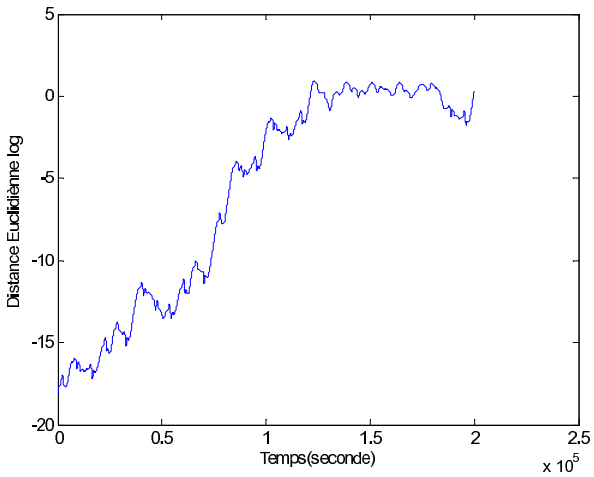


FIG. 1.8 – Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Moon.

trajectoires dans le cas contraire, on verrait une sorte de pelote de laine. Cet attracteur est plus étendu que les autres attracteurs. On trouve un exposant de Lyapunov de 0.32.

Pour le temps discret, les exemples de systèmes chaotiques existent pour tout dimensionnement de l'état du système, même pour n = 1.

Attracteur de Hénon

Le système de Hénon est un modèle proposé en 1976 par le mathématicien Michel Hénon, il est défini par les équations aux différences suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - \alpha\, x_k^2 + y_k \\ y_{k+1} = \beta\, x_k \end{cases} \tag{1.5}$$

Le comportement chaotique de la solution de (1.5) est observé, pour la valeurs des paramètres $\alpha = 1.4, \beta = 0.3$ et on prendra pour conditions initiales $(X_0, Y_0) = (1, 0)$. Ces valeurs furent proposées par Michel Hénon et permettent d'observer un comportement chaotique.
On peut lire la valeur de la pente, ici, on trouve un exposant de Lyapunov d'une valeur de 0.46.

Le tracé en échelle logarithmique de l'exposant de Lyapunov pour les différents attracteurs montre bien que la distance croit de manière exponentielle du fait de la sensibilité aux conditions initiales. On peut facilement lire la valeur de la pente qui donne la valeur de l'exposant de Lyapunov.

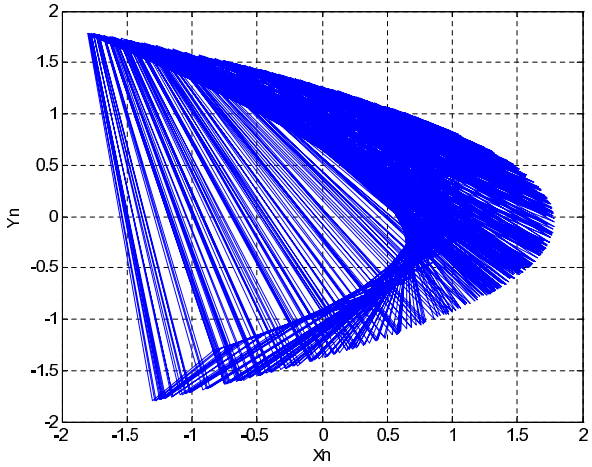


FIG. 1.9 – Attracteur de Hénon, avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

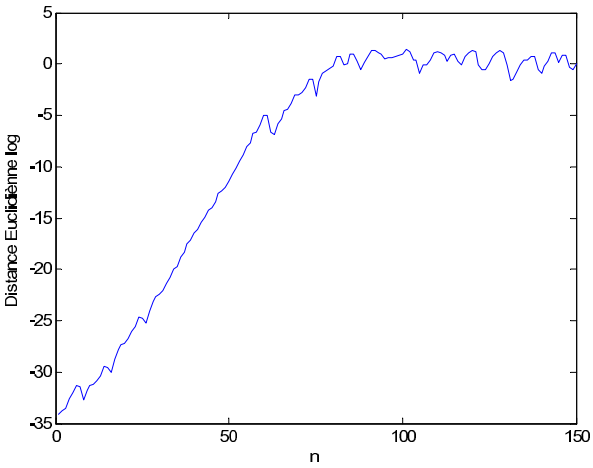


FIG. 1.10 – Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Hénon.

Ainsi, les systèmes chaotiques semblent évoluer de manière aléatoire. En tout cas, on ne peut prévoir facilement quelle sera leur évolution dans le temps. Notons que les systèmes chaotiques obéissent tout de même aux lois de la physique.
De plus la carte de Poincare a trouvé un usage étendu dans les études de processus chaotiques et les solutions des problèmes de leur contrôle.

2.4 La carte de Poincare

Henri Poincaré a apporté une contribution très utile pour l'étude des systèmes chaotiques. Parmi ces contributions on trouve les sections de Poincaré. Faire une section de Poincaré revient à couper la trajectoire dans l'espace des phases, afin d'étudier les intersections de cette trajectoire avec, par exemple en dimension trois, un plan. On passe alors d'un système dynamique à temps continu à un système dynamique à temps discret. Les mathématiciens ont bien sûr démontré que les propriétés du système sont conservées après la réalisation d'une section

de Poincaré judicieusement choisie, en particulier, un cycle limite simple du système continu est remplacé par un point fixe de l'application de Poincaré

La carte de Poincare est introduite sur la supposition de l'existence d'une solution périodique $\bar{x}(t)$ pour le système (4.79), débutant en un point initial x_0, c.à.d. $\bar{x}(t+T) = x(t)$ est satisfaite pour tout $t \geq t_0$ et $x_0(t) = x_0$.
Si M_0 est un point d'une trajectoire périodique, la section de Poincaré Σ est un plan perpendiculaire à la trajectoire passant par M_0. Pour chaque point P de la section Σ assez proche de M_0, la trajectoire issue de P après avoir effectué une révolution rencontrera la section en un nouveau point P_1. On définit ainsi une application

$$T : \Sigma \to \Sigma$$

C'est l'application de premier retour (ou encore application de Poincaré). Pour chaque point P de Σ, $T(P)$ est le point de Σ où la trajectoire issue P revient croiser Σ. L'application T permet de transformer le système continu (qui évolue avec le temps) en un système discret qui correspond aux premiers instants où la trajectoire recoupe le plan Σ.
Autrement dit
Soit Σ une surface transversale lisse de la trajectoire au point M_0 qui obéit à l'équation

$$\sigma(x_0) \equiv 0$$

Ou $\sigma : \quad \mathfrak{R}^N \to \mathfrak{R}^1$, est une fonction scalaire lisse qui croise transversalement la trajectoire au point M_0, c.à.d.

$$\sigma(x_0) = 0 \quad , \quad \nabla\sigma(x_0)^T \, T(M) \equiv 0$$

est satisfaite.
La solution débutant au point $x \in \sigma = \{x : \sigma(x) = 0\}$ au voisinage de x_0 peut croiser la surface $\sigma(x_0) = 0$ au moins une fois.
Soit $\tau = \tau(x)$ est le temps du premier retour, oú $x(\tau) \in \sigma$ le point du premier retour.

Définition 2.5 *La carte $x \to x(\tau)$ est appelée point ou section de Poincaré.*

Une application de Poincaré peut être vue comme un système dynamique discret avec un espace d'état de dimension égale à celle du système dynamique continu original, moins une. Comme ce nouveau système dynamique conserve plusieurs propriétés des orbites périodiques et quasi périodiques du système original et comme le nouveau système comporte un espace d'états de dimension inférieure, il est souvent utile pour l'analyse du système original. Par contre, ceci n'est pas toujours possible en pratique puisqu'il n'existe aucune méthode générale de construction de l'application de Poincaré.
Citons quelques méthodes proposées pour tracer une section de poincaré :

– Une méthode proposée dans [12] est de tracer une trajectoire par exemple $(x; dx/dt)$ non pas en continu mais à intervalle de temps régulier.
– une autre méthode consiste en des coupes faites par un plan passant par le point fixe et parallèle à un axe. Ce choix est arbitraire, et presque n'importe quelle surface ou plus généralement une variété de dimension $n - 1$ permet de déterminer une section de Poincaré. La seule contrainte à respecter est que la trajectoire traverse la surface et n'y soit pas tangente.
– Une autre façon de réaliser une section de Poincaré, toute aussi intéressante, consiste a regarder la suite des maximums de l'une des grandeurs du système (la surface d'équation $\dot{x} = 0$).

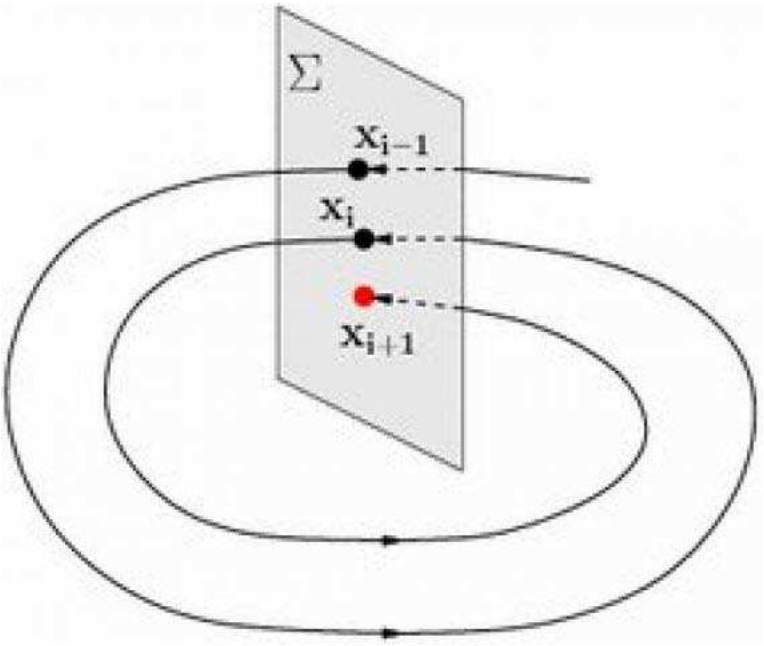
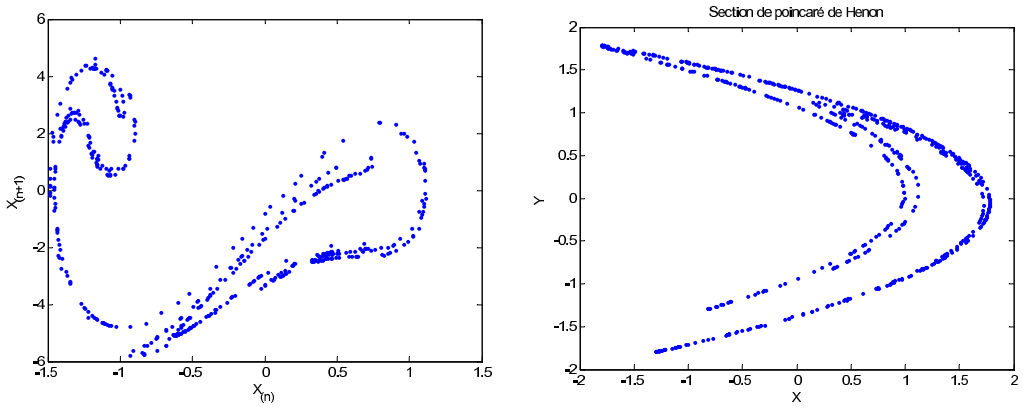


FIG. 1.11 – Section de Poincaré

Cette carte est largement utilisée pour l'étude et le contrôle des processus chaotiques.
En ce qui concerne l'étude du comportement chaotique, La section de Poincaré permet de visualiser s'il y a chaos ou non et les zones de stabilité, d'après Poincaré qui suggérait d'étudier des intersections de trajectoires multiples avec un plan fictif judicieusement placé, si toutes les trajectoires restaient dans un tore, la trajectoire est régulière et prédictible. Si toute la section de Poincaré est percée de trajectoires, celle-ci sera chaotique et très instable dans le temps. Pratiquement, ces zones stables sont liées aux orbites bien réguliers et aux phénomènes de résonance.

Pour le contrôle des processus chaotiques, en considérant un point de la section de Poincaré pour une valeur du paramètre de contrôle, et en supposant que la condition initiale pour le système soit très proche de ce point, lors de son évolution, le système ne se stabilise jamais de lui-même autour du point. Ceci signifie qu'à chaque passage dans la section de Poincaré, le point courant est de plus en plus éloigné du point considéré. Pour contrôler le système, on se propose de lui imposer de rester autour du point, en modifiant légèrement la valeur du paramètre de contrôle. En introduisant des perturbations sur le paramètre, on modifie le comportement du système de façon à ramener les valeurs propres, régissant l'évolution dans la section de Poincaré, dans le cercle unité.
On présente des sections de poincaré pour quelques attracteurs



(a) Section de Poincaré de l'attracteur de Moon

(b) Section de Poincaré de l'attracteur de henon

FIG. 1.12 – Section de Poincaré des attracteurs à intervalle de temps régulier

Les notions (équation non linéaire, représentation dans l'espace des phases, instabilité du système traduisant la sensibilité aux conditions initiales, notion d'attracteur et la notion de la carte de poincaré) vues précédemment permettent de montrer si les phénomènes étudiés sont chaotiques ou non . Ces notions font donc partie du domaine théorique. (elles reposent sur des équations). Expérimentalement, nous ne disposons le plus souvent que d'une seule variable parmi les différentes variables d'état qui caractérisent entièrement le système. La caractérisation du comportement dynamique du système se fait alors par le biais des divers outils classiques suivants :

2.5 Diagramme de Bifurcation

La génération d'un système chaotique n'est pas immédiate. En effet, le système n'évolue pas d'un état inexistant à un état chaotique sans passer par des transitions. Considérons que la dynamique étudiée dépende d'un paramètre de contrôle. En variant ce paramètre, le système peut passer d'un état stationnaire à un état périodique, puis au-delà d'un certain seuil, suivre un scénario de transition et devenir chaotique.
Dans les équations de Lorenz et les autres attracteurs, la résolution du système n'apporte pas toujours le chaos. Ce régime n'apparaît que pour certaines valeurs des paramètres. Pour caractériser le chaos, il peut être intéressant d'étudier l'apparition du chaos, ce qu'on appelle le scénario vers le chaos).
On distingue trois scénarios théoriques d'évolution vers le chaos. Toutes ces évolutions ont permis de classer certains phénomènes expérimentaux comme chaotiques déterministes. On obtient l'apparition du chaos en modifiant la valeur d'un paramètre, que ce soit de manière théorique ou expérimentale.

Le doublement de période

Ce scénario a été découvert en même temps par Mitchell Feigenbaum et par les chercheurs français Pierre Coullet et Charles Tresser. L'augmentation d'un paramètre provoque, pour un système périodique, l'apparition d'un doublement de sa période. La période est ensuite multipliée par $4, 8, 16$. D'un doublement au suivant, l'augmentation du paramètre est de plus en plus faible, et, à partir d'une certaine valeur, le chaos apparaît, lorsque la période devient infinie, les mouvements deviennent chaotiques. L'augmentation du paramètre conduit ensuite à la réapparition de régimes périodiques intercalés dans des zones chaotiques.
Ce scénario peut être observé dans un grand nombre d'expériences comme un robinet qui fuit, l'étude d'oscillateurs forcés, ou encore l'apparition de la turbulence dans les fluides.

L'intermittence

Ce scénario a été décrit par Yves Pomeau. L'intermittence se caractérise plutôt par un mouvement périodique stable entrecoupé par des bouffées chaotiques. Ces perturbations apparaissent de manière irrégulière. L'augmentation d"un paramètre produit l'augmentation de la fréquence des perturbations, puis le chaos domine le comportement du système.
Ce scénario a été observé dans des expériences sur la convection des fluides et dans des réactions chimiques.

La quasi périodicité

Le troisième scénario fait intervenir, pour un système périodique, l'apparition d'une deuxième période dont le rapport avec la première n'est pas rationnel. Ce régime est appelé quasi périodique. Il peut, de lui-même oú avec l'apparition d'une troisième fréquence gigantesque, donner un régime chaotique. Ce scénario intervient quand on considère deux oscillateurs fortement couplés. Les variations du champ magnétique terrestre, le déroulement des séismes pourrait être expliqué par un modèle de ce genre. On le retrouve aussi dans le cas d'un pendule qui serait stimulé verticalement.
Une manière plus rapide et plus visuelle de représenter ces scénarios de transition vers le chaos est le diagramme de bifurcations. Ainsi, on peut observer les changements du comportement dynamique du système, ou bifurcations, en fonction du paramètre dit de bifurcation. Une bifurcation correspond à une sorte de changement d'état du système, plus exactement un changement de stabilité du régime dynamique lorsqu'un des paramètres du système varie.
Pour le système de Hénon le paramètre a revêt une importance particulière. Pour certaines valeurs de ce paramètre, le système est chaotique, pour d'autres, il ne l'est pas. En étudiant l'influence de a sur le caractère chaotique ou non du système, on met en évidence un phénomène caractéristique des systèmes chaotiques, le doublement de période.
Dans le cas général, le doublement de période se traduit par le doublement du nombre de trajectoires observées dans l'espace des phases. Les doublements de période sont ensuite observés de plus en plus fréquemment à mesure que a augmente. Pour $a = 1.4$, on ne distingue plus les cycles, le système présente un caractère chaotique.
Examinons ce qu'une bifurcation semble dans le plan de phase. Pour cela, nous utiliserons le système de Lorenz donné au dessus, pour commencer, utilisons la condition initiale $(-13, -12, 52)$ et fixant $\sigma = 16, \beta = 4$ avec $\rho = 5$ et une gamme du temps de $0 \leq t \leq 40$. En Examinant l'espace de phase en traçant des valeurs x en fonction des valeurs de z, la solution obtenue est un état d'équilibre (point d'équilibre). Maintenant par augmentation $\rho = 15$, on observe un autre état d'équilibre (un cycle limite).

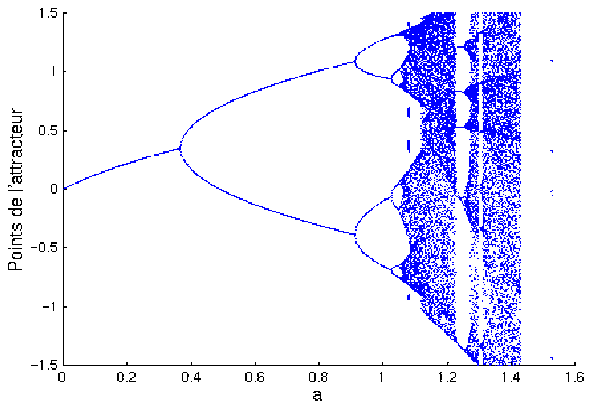
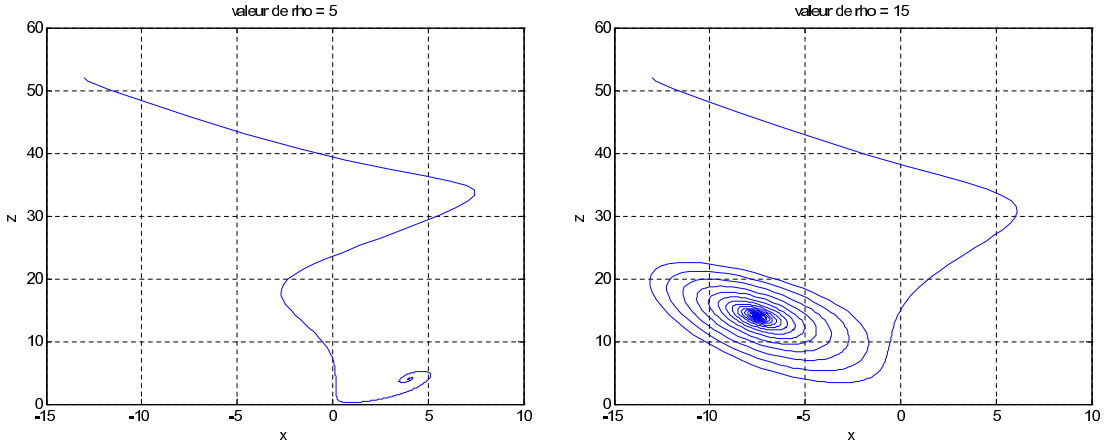


FIG. 1.13 – Diagramme de bifurcation pour l'attracteur de Hénon

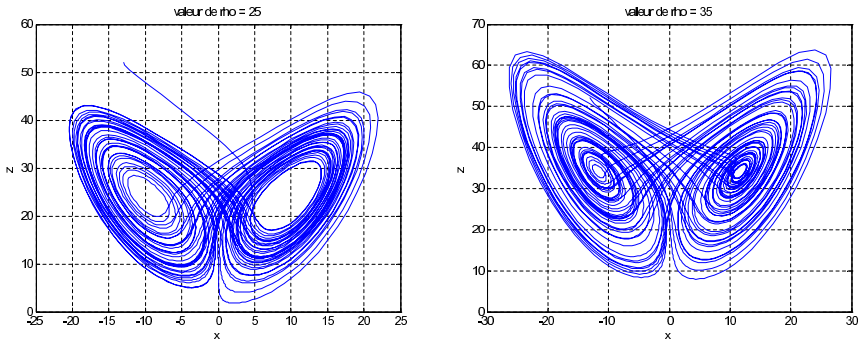


(a) Portrait de phase pour $\rho = 5$

(b) Portrait de phase pour $\rho = 15$

FIG. 1.14 – Portrait de phase pour le système de Lorenz (état d'équilibre)

En augmentant encore $\rho = 25$, puis $\rho = 35$. Une bifurcation a causé la solution de passer d'un point fixe stable à un attracteur chaotique(soit la condition initiale à l'intérieur de l'attracteur ou non). C'est le système célèbre souvent nommé papillon de Lorenz, l'image iconique de la théorie du chaos. Dans cette section on a vu que plusieurs définitions mathématiques du chaos sont connues mais toutes exprimaient la caractéristique ferme des systèmes dynamique concernant la dépendance sensible aux conditions initiales, qui se réfère aux trajectoires commençant à partir de deux conditions initiales distinctes et proches deviennent non corrélées [16]. la simulation numérique et l'estimation de quelques caractéristiques telles que l'exposant de Lyapunov, la carte de Poincaré et le diagramme de bifurcation restent les méthodes principales d'étudier les systèmes chaotiques. La variation de la valeur de certains paramètres de contrôle d'un système dynamique peut changer le comportement dynamique d'un système non linéaire et devenir chaotique, comportement que quelque fois nuisible oú il faut éliminer et stabiliser le système, et par fois utile oú il faut le créer et le garder et un nombre de problèmes de contrôle de processus chaotiques est apparu.



(a) Portrait de phase pour $\rho = 25$ (b) Portrait de phase pour $\rho = 35$

FIG. 1.15 – Portrait de phase pour le système de Lorenz(état chaotique)

3 Problèmes de contrôle des processus chaotiques

Les problèmes du contrôle du chaos attiraient l'attention de plusieurs chercheurs et ingénieurs depuis le début de l'année 1990, et plusieurs centaines de publications avaient apparues durant les deux dernières décennies, étant surpris par la découverte de J.A.Yorke et ses collaborateurs [17] en 1990, concernant la possibilité de variation des caractéristiques du système dynamique pour une petite variation des paramètres du système, en utilisant le modèle discret de M. Hénon, ils démontraient qu'il suffisait une petite variation dans les paramètres du système pouvait transformer les trajectoires chaotiques en une périodique et inversement, ceci a été confirmé expérimentalement par d'autres publications [18] dans une variété de domaine d'application tel que, les lasers, les systèmes de communications, systèmes chimiques, technologiques et médicales.

La conclusion paradoxale que le chaos est imprédictible mais contrôlable a fait l'objet d'un intérêt immense des chercheurs et un avalanche de publications en utilisant toujours des modèles mathématiques, confirmant la possibilité de variation substantielle des caractéristiques pour une variété des systèmes chaotiques naturels et artificiels par une petite variation relative externe dans ses paramètres [19]- [22].

La formulation mathématique des problèmes de contrôles des processus chaotiques les plus célèbres sont précédés par la présentation des modèles de base des systèmes chaotiques qui sont souvent utilisés. Les modèles mathématiques les plus connus rencontrés dans la littérature pour le contrôle de chaos sont représentés par des systèmes des équations différentielles ordinaires ou les équations d'état :

$$\dot{x} = F(x, u) \tag{1.6}$$

Ou $x = x(t)$ Est le vecteur des variables d'état de dimension n, $u = u(t)$ est le vecteur des entrées (les commandes) de dimension m et $F(x, u)$ est le vecteur fonction qui est supposé continu.
Dans la présence de perturbations externes, le modèle non stationnaire est défini par :

$$\dot{x} = F(x, u, t) \tag{1.7}$$

Par conséquent, il est clair que le comportement dynamique d'un système non linéaire peut être changé en changeant certaines valeurs de ces paramètres, à condition que ces dernières soient accessibles pour l'ajustement. De ce fait, le contrôle du chaos implique l'extraction de mouvements périodiques désirés en dehors des zones chaotiques, par l'application de petites perturbations judicieusement choisies. La suppression de la dynamique chaotique dans un système dynamique est le seul but pour un problème de contrôle, Dans beaucoup de cas, un modèle

de contrôle affine simple (1.8) peut être utilisé.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\,u \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \tag{1.8}$$

La sortie mesurée du système est notée par $y(t)$. Elle peut être défini comme une fonction de l'état courant du système. Maintenant, nous procédons à formuler les problèmes de contrôle de processus chaotiques.

3.1 Les problèmes de stabilisation

Les problèmes de stabilisation de la solution périodique instable (orbite) surviennent dans la suppression de bruit ou élimination des harmoniques dans les systèmes de communication, appareils électroniques, et ainsi de suite, Ces problèmes sont distingués pour le fait que le système contrôlé est fortement oscillatoire ,c.à.d. les valeurs propres de la matrice du système linéarisé sont proches de l'axe imaginaire, ces vibrations peuvent être régulières ou quasi régulières ou même chaotique [23], [24], [25], [26] .
Les problèmes de suppression des oscillations chaotiques ou les réduire aux oscillations régulières ou les supprimer complètement, [27], [30] peut être formalisé comme suit :
Si $x_\star(t)$ est une trajectoire oscillatoire périodique du système (1.6) sous la condition initiale $x_\star(0)$ tel que,

$$x_\star(t+T) = x_\star(t) \tag{1.9}$$

Pour stabiliser ce mouvement on doit ramener la solution $x(t)$ du système (1.6) vers $x_\star(t)$ c.à.d. :

$$\lim_{t\to\infty}(x(t) - x_\star(t)) = 0 \tag{1.10}$$

Où conduire la sortie du système $y(t)$ vers une fonction donnée $y_\star(t)$:

$$\lim_{t\to\infty}(y(t) - y_\star(t)) = 0 \tag{1.11}$$

Pour tout solution $x(t)$ de système (1.6) sous l'état initial $x_0 \in \Omega$, où Ω est un ensemble des conditions initiales donné, le problème se réduit à déterminer une fonction de contrôle soit comme :

- une commande en boucle ouverte : $u(t) = U(x_0, t)$.
- Où une commande contre réaction : $u(t) = U(x(t))$.
- Où une commande de sortie en contre réaction $u(t) = U(y(t))$.

qui satisfaisant l'objectif du contrôle.

Cette formulation du problème de stabilisation de solution périodique est similaire au problème de poursuite de la théorique de contrôle conventionnelle. Néanmoins, il existe une distinction fondamentale est que pour contrôler les processus chaotiques, on a besoin d'atteindre

l'objectif avec un niveau de contrôle minimale, la résolution de ce problème n'est pas évidente à cause de l'instabilité des trajectoires chaotique $x_\star(t)$ [17].

La stabilisation d'un point d'équilibre instable est un cas spécial. c.à.d. $F(x_{\star 0}, 0) = 0$ pour $u(t) = 0$, alors le système (1.6) admet un point d'équilibre $x_{\star 0}$ qui doit être stabilisé toujours en choisissant une loi de commande appropriée. Ce problème est caractérisé par une exigence supplémentaire sur le plus petit niveau de contrôle [31].

3.2 Les problèmes du contrôle d'excitation ou de génération d'oscillations chaotiques

La deuxième classe inclut les problèmes du contrôle d'excitation ou de génération d'oscillations chaotiques. Ces problèmes sont aussi appelés la chaotisation ou anti contrôle. Ils surviennent où le mouvement chaotique est le comportement désiré du système.
La forme de l'objectif de contrôle pourrait être représenté comme (1.11), mais ici la trajectoire objectif $x_\star(t)$ n'est plus périodique. De plus, il peut être exigé qu'au lieu du mouvement le long de la trajectoire donné, le processus de contrôle satisfait un certain critère de chaotisation.
Par exemple, étant donnée une fonction objective scalaire $G(x)$, et le but de contrôle peut être formulé comme :

$$\lim_{t\to\infty} G(x(t)) = G_\star \qquad Ou \qquad \lim_{t\to\infty} G(x(t)) \geq G_\star \tag{1.12}$$

Pour les problèmes du chaotisation, le plus grand exposant de Lyapunov, qui est un critère principal mesurant la dispersion des trajectoires initialement proches caractérisant l'instabilité locale , est habituellement pris comme une fonction d'objective . L'énergie totale mécanique ou électrique des oscillations est prise quelquefois aussi comme $G(x)$.

3.3 Les problèmes de synchronisation contrôlable

La troisième classe importante des objectifs de contrôle correspond aux problèmes de synchronisation ou, plus précisément, synchronisation contrôlable. La synchronisation trouve des applications importantes dans la technologie des vibrations (synchronisation d'excitation vibrationnelle), dans la communication (la synchronisation entre le récepteur et l'émetteur des signaux), dans la biologie et la biotechnologie, et ainsi de suite. Nombreuses publications sur la synchronisation contrôlable des processus chaotiques et son application dans les systèmes de la transmission des données sont apparus dans les années 1990, [38], [39], [40].

Dans le cas général, on sous entend par la synchronisation la variation des coordonnées des états de deux ou plusieurs systèmes, ou peut-être la variation de quelques caractéristiques telle que les fréquences des oscillations. Si l'asymptoticité est la seule exigence qui doit être satisfaite, alors la synchronisation est dite asymptotique. Dans le cas ou la synchronisation ne

peut pas être atteinte dans un système sans contrôle (u = 0), alors on peut poser le problème de déterminer une loi du contrôle sous laquelle le système de boucle fermée est synchronisé et par conséquent, la synchronisation peut être utilisée comme le but de contrôle de coïncidence totale ou partielle des vecteurs d'état telle que l'égalité : $x_1 = x_2$.
Qui peut être une expression formelle du mouvement synchrone de deux sous-systèmes avec les vecteurs d'état : $x_1 \in \mathfrak{R}^n$ et $x_2 \in \mathfrak{R}^n$.
L'exigence de synchronisation assymptotique des états x_1 et x_2 des deux systèmes peuvent être représentés aussi comme :

$$\lim_{t\to\infty}(x_1(t) - x_2(t)) = 0 \tag{1.13}$$

Le fait que le comportement désiré n'est pas uniquement fixé et ses caractéristiques sont définies seulement partiellement est commun aux problèmes de contrôle d'excitation et de synchronisation des oscillations. Ces buts de contrôle, souvent peuvent être réarrangés en termes plus commode d'une fonction d'objective correspondante :

$$Q(x) = \| x_1 - x_2 \|^2 \qquad ; \qquad Q(x) = (x - x_\star)^T \Gamma (x - x_\star) \tag{1.14}$$

Ou Γ est une matrice définie positive symétrique. On note ici que le choix d'une fonction d'objective appropriée est une étape importante dans la conception de l'algorithme du contrôle.

Un type important de problèmes de contrôle des processus chaotiques est représenté par la modification des attracteurs, par exemple, transformation des oscillations chaotiques vers des oscillations périodiques ou vice versa. Le développement des approches aux problèmes de ce genre a été stimulé par des nouvelles applications dans la technologies des lasers et chimiques, dans les télécommunications, la biologie, et la médecine [32], [50]- [56].

4 Méthodes de contrôle des processus chaotiques

Le contrôle du chaos fait référence à la manipulation du comportement dynamique du système chaotique, dont l'objectif est la suppression du chaos quand il nuisible ou au contraire le créer et le préserver quand il est bénéfique, plusieurs méthodes et algorithmes ont été proposés et développés pour réaliser le contrôle du chaos dans divers systèmes dynamiques non linéaires. Parmi les nombreux articles, livres, et publications disponibles sur ce thème, nous présentons dans ce qui suit les plus fiables et les plus connues. Il est important de préciser que la littérature dans cette matière est très large et que les méthodologies décrites ici ne sont pas les seules valides. Néanmoins, nous espérons avoir fait un tour d'horizon sur tout ce qui a été fait auparavant dans ce domaine.

4.1 La contrôlabilité

Le problème de caractériser la contrôlabilité locale et globale des systèmes non linéaires est difficile et fait partie des problèmes critiques du domaine de la théorie des systèmes non linéaires. Un concept fondamental sur la contrôlabilité d'un système non-linéaire provient d'un théorème qui énonce que si la linéarisation d'un système non linéaire autour d'un point d'équilibre est contrôlable alors le système non linéaire est lui même localement contrôlable [59], [60].

Définition 4.1 *Le système non-linéaire (1.8) est dit contrôlable, si pour tous points x_0, x_1 dans M, il existe un temps fini $T \leq t_0 \leq 0$ et une commande admissible $u : [t0, T] \rightarrow U$, telle que l'unique solution de (1.8) au temps $t = T$ avec la condition initiale $x_0(t_0) = x_0$ et pour une commande $u(x, t)$ donnée, $x(t)$ satisfait $x(T) = x_1$*

4.2 Contrôle en boucle ouverte.

Le principe de contrôle par perturbation ou par un signal programme, est la génération d'un signal contrôle qui quelque fois une fonction du temps qui néglige les valeurs du processus contrôlé, et est basé sur le comportement variable du système non linéaire sous l'action d'une entrée externe prédéterminé $u(t)$, laquelle peut être une certaine action physique sur le système tel que une force ou un champ ou une variation de quelques paramètres du système contrôlé.

Cette approche est à la demande grâce à sa simplicité et le contrôle se fait sans toutes mesures ou détecteurs, c'est particulièrement important pour le contrôle des processus se produisant très rapidement, par exemple, au niveau moléculaire ou atomique où l'état du système ne peut pas être mesuré au moins en temps réel. La possibilité d'une variation appréciable de la dynamique du système par excitation périodique, comme a été démontré dans la première moitié du dernier siècle est connue depuis longtemps [23].

L'excitation de haute fréquence peut stabiliser un pendule dans un état instable, Dans la théorie du contrôle, les actions de haute fréquence et la modulation paramétrique étaient considéré comme une structure de base du contrôle vibrationnel [62], [63]. Cependant ces travaux ont considéré seulement la stabilisation de l'état d'équilibre du système donné, ou relatif à une fonction d'objectif donnée ou une trajectoire de référence [64], [65], [66].

Les études récentes sont visées à améliorer la suppression du chaos avec la réduction simultanée du niveau d'effort externe exigé et conduire les trajectoires du système à converger vers une orbite périodique ou un cycle limite désiré, quelques études même relient le choix de la fonction d'excitation avec la forme du non linéarité dans le système.
Soit le modèle dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(x) + Bu \tag{1.15}$$

Avec $x \in \Re^n$ et $u \in \Re^m$.
Nous assumons que $m = n$ et $detB \neq 0$. Si $x_\star$ est la trajectoire désirée du mouvement contrôlé, alors le choix d'excitation appelée aussi l'action d'Hubler [68] sera sous la forme :

$$u(t) = B^{-1}(\dot{x_\star}(t) - f(x_\star(t))) \tag{1.16}$$

Cette loi est intuitivement justifié parce que la la fonction $x_\star(t)$ satisfait les équations de mouvement du système éxcité, dans ce cas, l'équation de l'erreur $e = x - x_\star(t)$, et si le système linéarisé

$$A(t) = \frac{\delta f(x_\star(t))}{\delta x}$$

est uniformément stable au sens de

$$(A(t) + A^T(t) \preceq -\lambda I)$$

est satisfait pour un certain λ et tout $t \geq 0$, alors toutes les solutions de (1.15) convergent vers $x_\star(t)$ et le but de contrôle est atteint [16].

4.3 Contrôle linéaire et non linéaire

Les possibilités d'utiliser les approches traditionnelles et les méthodes de contrôle automatiques aux problèmes de contrôle du chaos sont largement discutées. Le but désiré peut être atteint quelquefois même au moyen d'une loi proportionnelle simple de contrôle et d'une boucle de retour. Parmi ces méthodes, on trouve la méthode de contrôle combinée qui est appelé aussi le contrôle par la boucle ouverte plus fermée (OPCL) [69], pour $m = n$ et $detB \neq 0$ est applicable aux systèmes de la forme du modèle dynamique précédent(1.15), La loi du contrôle proposée a été sous la forme :

$$u(t) = B^{-1}(\dot{x_\star}(t) - f(x_\star(t))) - K(x - x_\star(t)) \tag{1.17}$$

Ou K est une matrice carrée de gain.

La théorie de contrôle non linéaire a développé une diversité de méthodes pour résoudre des problèmes plus compliqués sous des conditions de contrôle et de mesure incomplet, parmi ces méthodes les plus élaborées on peut citer :

- La linéarisation par boucle de retour qui a été largement appliqué aux systèmes chaotiques [70], [71], [72],
- Contrôle global Polynomial [73], contrôle non linéaire par une boucle ouverte plus une fermée [74],
- Contrôle par la modulation de l'amplitude et la pulsation proportionnelle [75].

Nombreuse méthodes sont basées sur la variation de la valeur courante d'une certaine fonction d'objective $Q(x(t), t)$ au quelle la valeur peut correspondre à (1.12), ou à (1.14).

La distance entre la position courante du système $x(t)$ à une surface d'objective donneé $h(x) = 0$ telle que $Q(x) = \| h(x) \|^2$ peut être prise comme une fonction d'objective. Pour les systèmes de temps continu, $Q(x)$ n'est pas dépendante directement de la loi de contrôle u, Par conséquent, une nouvelle fonction d'objective paraisse immédiatement comme

$$\dot{Q}(x) = \frac{\delta Q}{\delta x} f(x, u)$$

, le taux de changement de cette fonction peut être diminué au lieu des valeurs de la fonction objective initiale. C'est l'idée principale de la méthode du gradient décliné [76] où la loi de contrôle u change dans la direction de l'anti gradient du taux de $\dot{Q}(x)$ de la fonction d'objective originale.
L'algorithme proportionnel de la méthode du gradient décliné peut être simplifié comme :

$$\dot{u}(t) = -\Gamma \nabla \dot{Q}(x, u) \tag{1.18}$$

Ou Γ est une matrice définie positive.

La méthode du gradient décliné est basée sur la fonction de Lyapunov V qui diminue le long des trajectoires du système en boucle fermée. La forme finale de l'algorithme est obtenu si la fonction objective $V(x) = Q(x)$ est elle même utilisée comme la fonction de Lyapunov. La forme différentielle de l'algorithme correspondant est de choisir :

$$V(x, u) = Q(x) + \frac{1}{2}(u - u_\star)^T \Gamma^- 1(u - u_\star) \tag{1.19}$$

Ou $u_\star$ est la valeur désirée des variables de contrôle.

Autres méthodes de la théorie moderne de contrôle non linéaire [77], telles que la théorie de centre divers [78], des méthodes à conception itérative [79]- [87], avec la procédure du Backstepping dont le nom se reporte au nature récursive de la procédure.
En premier, seulement un petit sous-système est considéré, pour lequel une loi de contrôle virtuelle est construite. Alors, la procédure est étendue en plusieurs étapes jusqu'à ce que une loi du contrôle finale pour tout le système est construite. Au long de construction de la loi de contrôle, une fonction Lyapunov pour le système contrôlé est successivement construite.

Les non linéarités utiles qui agissent pour la stabilisation peuvent être retenues, et le secteur des non linéarités bornées peut être traiter avec un contrôle linéaire, cette méthode sera largement détaillée et appliquée dans cette thèse, des méthode basée sur la passivité [88], la méthode de systèmes de structure variable [89]- [91], la théorie de la stabilité absolue [92], la conception par H_∞ Optimale [93], et la combinaison de la méthode Lyapunov directe et la

linéarisation par la contre réaction [94], [95], toutes ces méthodes ont été utilisé pour résoudre les problèmes de stabilité d'un état donné ou d'un type de problème objectif.

Nous concluons cette section en accentuant encore une fois que les travaux qui utilisent les méthodes bien développées de la théorie de contrôle linéaire et non linéaire moderne souvent ne font pas suffisamment attention aux processus chaotiques qui se manifestent et négligée l'exigence de petit effort de contrôle. En revanche, les publications qui tiennent compte de cette exigence n'utilisent pas à la pleine puissance la théorie de contrôle moderne. De plus, beaucoup de publications considèrent seulement des exemples de systèmes d'ordre bas et font des suppositions irréalistes. Par exemple, quelques publications supposent que le nombre d'actions du contrôle est égal à la dimension du vecteur d'état du système [16].

4.4 Le contrôle adaptatif

Développé dans la seconde moitié du dernier siècle, le champ de contrôle adaptatif est encore intéressant, défiant, et excitant avec une variété d'applications dans les systèmes de contrôle modernes. Beaucoup de publications [96] - [102] considèrent la possibilité d'appliquer les méthodes adaptatives au contrôle de processus chaotiques, n'étant pas surpris parce que dans beaucoup d'applications physiques, les paramètres et l'information au sujet de la structure du modèle du système contrôlé sont inconnus, par exemple la dimension des équations du système ou la forme caractéristiques des non linéarités dans la plupart du temps sont incomplètes, ainsi la majorité de travaux rend usage directement ou indirectement ces méthodes de contrôle paramétrique adaptatif.
Soit le modèle du système paramétré :

$$\dot{x} = F(x, \theta, u) \tag{1.20}$$

Où θ est le vecteur des paramètres inconnus. D'après (**??**), la loi de contrôle est aussi mise sous une forme paramétrique : $u = U(x, \varepsilon)$, ou

$$\dot{\xi} = \phi(\theta) \tag{1.21}$$

C.à.d., le vecteur des paramètres du contrôleur est défini à partir du vecteur des paramètres du système (1.20).
Le processus est obtenu en mesurant les états du système $x(t)$, ou les sorties $y(t) = h(x(t))$ sont utilisées en ligne ou autonome pour établir les valeurs estimées $\hat{\theta}(t)$ des paramètres inconnus $\theta(t)$, ou ajuster directement les paramètres du contrôleur $\xi(t)$.

Une large variété des méthodes d'adaptation existe tel que les méthodes du gradient et le gradient incliné, les moindres carrés, probabilité maximale, et ainsi de suite peuvent être utilisées pour développer des algorithmes de contrôle adaptatif et l'identification paramétrique.

Ces méthodes sont bien connues dans la littérature de la théorie de contrôle [103], leur validation est basé habituellement sur la fonctions de Lyapunov laquelle est choisie sous la forme du second degré ou est réarrangée par une transformation des variables.

4.5 Linéarisation de la carte de Poincaré où la méthode OGY

Cette méthode fut proposée par Ott, Grebogi et Yorke au début des années 90 [17]. La possibilité de transformer le mouvement chaotique en un mouvement périodique par une action externe sur un système a été découvert dès 1980 [104]. Cependant, seulement les années 90 ont vu une augmentation explosive d'intérêt au contrôle de processus chaotiques qui sont en grande partie dû au études publiées où ils ont formulé les deux idées clef suivantes :

1. Concevoir un contrôleur par un modèle discret du système basé sur la linéarisation de la carte de Poincare.
2. utiliser la propriété de récurrence des trajectoires chaotiques et appliquer seulement l'action de contrôle aux instants quand la trajectoire revient à un certain voisinage de l'état désiré où une orbite donnée.

Sa réalisation a besoin du temps réel, un temps pour le calcul des vecteurs propres et des valeurs propres de la matrice Jacobian pour la carte de Poincaré. La Publication de cette méthode qui est maintenant appelée la méthode OGY, a été suivi par de nombreuses extensions et traitements, son concept référant à [51], [52], [105] est comme suit :
Soit le processus contrôlé obéissant aux équations différentielles suivantes :

$$\dot{x} = F(x, u) \tag{1.22}$$

Et la trajectoire objective désirée $x_\star(t)$ est une solution du système (3.2) pour $u(t) = 0$. Cette trajectoire peut être périodique ou chaotique, mais dans les deux cas elle est récurrente. on construit la surface appelée la carte de Poincare :

$$S = \{x : s(x) = 0\} \tag{1.23}$$

Passant par le point donné $x_0 = x_\star(0)$ transversalement au trajectoire $x_\star(t)$ et on associe au point x le point $P(x, u)$.

$$x \to P(x, u). \tag{1.24}$$

ou $P(x, u)$ est le point du premier retour à la surface S de la solution du système (3.2), commençant au point x et est obtenu pour une entrée constante u.
La carte $x \to P(x, u)$ est appelé la carte de Poincare contrôlable. grâce au propriété de récurrence de retour de $x(t)$, cette carte est définie au moins pour un certain voisinage du point x_0.

En considérant une séquence d'une telle carte, nous obtenons un système discret.

$$x_{k+1} = P(x_k, u_k) \tag{1.25}$$

Avec $x_k = x(t_k)$, ou t_k est un l'instant du k^ime intersection à la surface S, et u_k est la valeur de contrôle $u(t)$ sur l'intervalle entre t_k et t_{k+1}.

La prochaine étape consiste à concevoir une loi du contrôle en remplaçant le système original (3.2) par un système discret linéaire :

$$\tilde{x}_{k+1} = A\,\tilde{x}_k + B\,u_k \tag{1.26}$$

Ou : $\tilde{x} = x_k - x_0$, $u_k = C\,\tilde{x}_k$, C est une matrice qui doit être choisie pour avoir une erreur e très minime.

Différents auteurs présentent des résultats numériques qui montrent l'efficacité de cette approche. Néanmoins ils mentionnent souvent que le taux de convergence du processus est bas vis à vis du coût de stabilisation globale des trajectoires du système non linéaire pour un niveau minimal de contrôle.

4.6 La contre réaction en retard où méthode de Pyragas

Les années récentes ont vu une augmentation d'intérêt vis à vis de la méthode de réaction en retard proposée en 1992 par un physicien Lituanien K. Pyragas [106] qui a considéré le problème de stabilisation d'une orbite instable de période τ d'un système non linéaire de la forme (3.2) par une loi simple dans la contre réaction.

$$u(t) = K\,(x(t) - x(t-\tau)) \tag{1.27}$$

Où K est le coefficient de la transmission et τ est le temps de retard. Pour un contrôleur utilisant une loi de contrôle de la forme :

$$u(t) = G(P)\,(y(t) - y(t-\tau)) \tag{1.28}$$

Ou : $G(P)$ avec $(P = d/dt)$ est la fonction de transfert du filtre,(1.28) est appelé un contrôleur de Pyragas généralisé [107] , [108].

4.7 Contrôle Basé sur les Réseaux de neurones

Il y a plusieurs approches utilisant les réseaux neuronaux pour le contrôle de processus chaotiques. Beaucoup d'études comptent sur la capacité universelle des réseaux neuronaux pour le contrôle et la prédiction du comportement des systèmes non linéaire. Du moment que les systèmes chaotiques sont fondamentalement non linéaires, la potentialité de leur contrôle neuronal n'est pas surprenante [109].

D'autre études décrivent l'identification des systèmes contrôlées par les réseaux neuronaux combinés avec une méthode standard de contrôle de systèmes chaotiques tel que la méthode

de OGY [110], contrôleur de la boucle de retour proportionnel [111], cette identification est souvent obtenu grâce à l'apprentissage adaptatif [112], ou par optimisation l'algorithme génétique [113], des paramètres du contrôleur.

L'Algorithme génétique

Le GA est une méthode de la recherche globale stochastique qui imite le processus de l'évolution naturelle. L'algorithme génétique commence sans connaissance a priori de la solution correcte et dépend tout à fait des réponses de son environnement et des opérateurs de l'évolution (c.-à-d. la reproduction, le croisement et la mutation) pour arriver à la meilleure solution. En commençant par plusieurs points aléatoires indépendants et une recherche en parallèle, l'algorithme évite des minimums locaux et converge pour obtenir une des solutions optimales si elles existent.

A Présent les GAs ont reçu beaucoup d'attention et plusieurs recherches ont été faites pour étudier ses applications et principalement dans le domaine de contrôle qui a vu un développement énorme. Dans ce domaine, les AGs ont montré une capacité d'une haute exploration de localiser des régions de grande performance dans les domaines complexes sans éprouver des difficultés associés aux systèmes de grande dimension, comme peut se produire avec les techniques des gradients inclinés oú les méthodes qui comptent sur l'information dérivée.

Utilisant les AGs pour rendre le contrôleur plus performant, l'AG est initialisé typiquement avec une population aléatoire qui consiste entre 20-100 individus. Cette population est représentée habituellement par un nombre estimé ou une chaine binaire appelée un chromosome. La performance de chaque individu est mesurée par une fonction de cout appelée fonction d'objective. La fonction objective assigne à chaque individu un nombre correspondant appelé l'aptitude. L'aptitude de chaque chromosome est répartie et une stratégie de survie du plus haut cout est appliquée. La valeur de l'erreur est habituellement utilisée pour répartir le cout de chaque chromosome.

Les étapes de l'algorithme génétique

Il y a trois étapes principales pour l'algorithme génétique, la reproduction, le croisement et la mutation.

La reproduction Juste comme dans l'évolution naturelle, pendant la phase de la reproduction la valeur de cout de chaque chromosome est assignée, cette valeur est utilisée dans le processus de la sélection pour fournir les individus de plus haut cout, un chromosome de plus haut cout a une plus haute probabilité d'être sélectionné pour la reproduction. Un exemple d'une technique de la méthode de la sélection commune est la Roulette. Une section de la roue

est allouée à chaque individu dans la population, la dimension de la section est proportionnelle au nombre de l'individu. Un compteur est mis en marche et l'individu à qui il est pointé est sélectionné. Cela continue jusqu'à ce que le critère de la sélection est atteint. La probabilité qu'un individuel soit sélectionné est donc en rapport avec son aptitude, en s'assurant que les individus de plus grand cout laissent places aux membres de la nouvelle génération. Des copies multiples de la même chaines peuvent être sélectionnées pour la reproduction et les chaines de plus valeur de cout devraient commencer à dominer.

Croisement Une fois le processus de la sélection est achevée, l'algorithme du croisement est débuté. Les échanges des opérations du croisement certaines parties des deux chaines sélectionnées dans une offre de capturer les bonnes parties des vieux chromosomes et de créer mieux nouveaux. Les opérateurs génétiques manipulent directement les caractères d'un chromosome, en utilisant la supposition que le gène de certain individu codé produirades individus en meilleure santé.
La probabilité du croisement indique tous les combien le croisement est exécuté.La technique du croisement la plus simple est le croisement en un point seul . En utilisant la sélection et le croisement sur une population produira un grand nombre de chaines différentes. Cependant il y a deux problèmes principaux selon la population initiale choisie

- il ne peut pas y avoir assez de diversité dans les chaines initiales pour assurer que le GA explore dans l'espace entier de recherche.
- Le GA peut converger vers une optimisation locale dû à un mauvais choix d'une population initiale.

Ces problèmes peuvent être vaincus par l'introduction d'un opérateur de la mutation dans le GA.

La mutation La mutation est la modification aléatoire occasionnelle d'une valeur d'une place de la chaine. Il est considéré comme un opérateur original dans l'algorithme génétique, la probabilité de mutation est normalement basse parce qu'un haut taux de la mutation détruirait des chaines de la population et dégénérait l'algorithme génétique dans une recherche aléatoire. La probabilité de la mutation s'évalue autour de 0.1 ou 0.01.Une fois une chaine est sélectionnée pour la mutation, un élément est choisi aléatoirement de la chaine est changé ou a subi une mutation.
Le processus de l'algorithme génétique se résume dans le diagramme suivant :
Les étapes suivies pour la création et pour rendre efficace un algorithme génétique sont comme suit :

- Génération d'une population initiale aléatoire d'individus pour une dimension fixe.
- évaluation de la fonction d'objective pour chaque individu de la population.

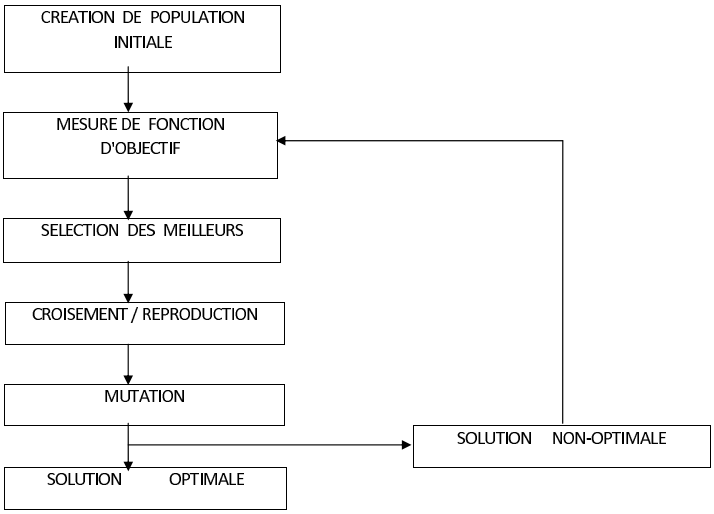


FIG. 1.16 – Diagramme illustratif de l'Algorithme Génétique

- Sélection des membres dont la valeur de la fonction d'objective élevée de la population.
- La reproduction en utilisant une méthode probabiliste par exemple, la roulette.
- Efficacité de l'opération du croisement par un choix probabiliste du point de croisement.
- exécution de l'opération de la mutation avec une probabilité basse.
- répétition des étapes jusqu'à ce qu'un critère de la convergence prédéfini soit atteint.

Le critère de la convergence d'un algorithme génétique est une condition spécifiée par l'utilisateur généralement le nombre maximal de générations ou quand la valeur de la fonction d'objective dépasse un certain seuil.

Les algorithmes génétiques sont substantiellement différents des méthodes de recherche traditionnelle et des techniques d'optimisation en cinq principaux points qui sont :

- Les algorithmes génétiques cherchent une population de points parallèlement et non pas un point seul.
- les algorithmes génétiques n'exigent pas d'information dérivée ou d'autre connaissance auxilliaires seulement une fonction objective et un niveau d'évaluation pour l'influence de la direction de recherche.
- Les algorithmes génétiques utilisent des règles de transition probabilistes et pas deterministes.
- Les algorithmes génétiques travaillent sur un codage d'un ensemble de paramètres, mais pas l'ensemble de paramètres lui même (excepté que les valeurs réelles des individus sont utilisées).
- Les algorithmes génétiques peuvent fournir plusieurs solutions potentielles à un problème donné et le choix d'une solution finale est laissé à utilisateur.

Mais les inconvénients :

- Un usage d'espace mémoire plus grand d'où un temps de plus pour atteindre la meilleure

solution.
- La gamme de chaque paramètre doit être connue par d'autres méthodes, une grande gamme de combinaisons possibles.
- L'optimalité locale est l'inconvénient majeur pour les algorithmes génétiques.
- Le test de simulation pour l'algorithme génétique prouve une difficulté dû au fait que les simulations ne s'exucutent pas en temps réel.
- il a été découvert que l'algorithme génétique peut quelquefois créer des gains d'un contrôleur qui renderait les fonctionnalités totales du système instables et d'autres fonctionnalités sont alors à ajouter.

4.8 Contrôle basé sur les systèmes flous

La description indéterminée du système en termes de modèles flous fournit des versions spécifiques des algorithmes de contrôle. Le système flou appelé Takagi-Sugeno obéissant à l'ensemble de règles floues suivantes :

$$\text{IF } (Z_1(t) \in F_{1i} \text{ AND } \cdots) \text{ AND } (Z_p(t) \in F_{1p}) \text{ THEN } (\dot{x} = A_i\, x + B_i\, u, y = C_i\, x + D_i\, u)$$

Ces règles sont très commodes pour la conception du contrôle. ici, $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ et $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ $y(t) \in \mathfrak{R}^m$:
Sont, respectivement, les vecteurs d'état, entrée, et sortie du système, $Z_i(t)$ sont des variables antécédentes qui sont fonctions des variables d'état du système de la variables entrée $u(t)$ et, probablement de la variable temps avec F_{ij} sont les ensembles flous définissant les fonctions d'appartenances. Les matrices A_i, B_i peuvent être dépendantes des variables $Z_i(t)$ qui permettent de décrire le système non linéaire dans la forme paramétrique. La sortie du système est déterminée au moyen de la défuzzification par la méthode de centre de gravité qui souvent utilisée.

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z)\, C_i\, x \tag{1.29}$$

Ou : $h_i(z) = \frac{w_i(z_i)}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z_i)}$, $w_i(z_i) = \prod F_{ij}(z_i)$, $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$.
Avec cette représentation, les non linéarités sont cachées dans la règle de défuzzification qui permet de construire des modèles flous pour une classe large de dynamique, y compris les systèmes chaotiques [114].

5 Conclusion

Le contrôle du chaos demeure un domaine de recherche intensive. Les domaines des études les plus innovatrices et les puissantes tels que le contrôle en boucle ouverte ou contrôle vibrationnel, la linéarisation de la carte de Poincare et la réaction retardée sont explorés activement.

Néanmoins, ils font face à nombreux problèmes irrésolus s'inquiétant principalement de la justification des méthodes. Les méthodes bien développées de contrôle non linéaire et le contrôle adaptatif devrait être utilisé avec soin à cause du critère du moindre effort. Mépris de ceci, les exigences peuvent produire une impression de simplicité du problème. Du point de vue du critère de moindre effort, les méthodes basées sur la passivité offrent un avantage parce qu'elles nous autorisent à atteindre le but indépendamment du gain.

Ces dernières années, il y a eu un intérêt considérable dans le contrôle du chaos dans les systèmes dynamiques non linéaires. Pour les années passées, beaucoup de techniques différentes ont été proposées pour contrôler le chaos, tel que méthode OGY, approche géométrique différentielle, par retour réaction de l'espace de l'état linéaire, contrôle adaptatif, contrôle flou et la méthode du Backtepping qui fait partie du contrôle non linéaire sera largement détaillée et appliquée dans le prochain chapitre.

Chapitre 2

Backstepping pour la stabilisation et la commande en poursuite de trajectoire référence des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques

1 Introduction

Durant ces dernières années, une grande partie de la communauté scientifique s'est intéressée à la recherche des procédures récursives pour la mise au point des lois de commande pour les systèmes non linéaires, comme par exemple le Backstepping, un certain nombre d'ouvrages traitant de cette nouvelle approche théorique sont apparus [181]- [190]. Des applications à des procédés ont aussi été présentées dans la littérature [191]- [202]. Ces techniques maintenant relativement connues sont essentiellement basées sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov pour ce qui est de l'étude de la stabilité.

La théorie de Lyapunov est un outil important, aussi bien pour les systèmes linéaires que les systèmes non linéaires, malheureusement son utilisation dans le contrôle des systèmes non linéaires est souvent gênée par des difficultés de trouver une fonction de Lyapunov appropriée pour un système donné, si on peut trouver une telle fonction le système est stable, mais la tache de la trouver est malheureusement délaissée pour l'imagination et l'expérience du concepteur [116].

Le Backstepping est une méthode systématique pour la conception de contrôle non linéaire, elle peut être appliquée pour une classe générale de systèmes. Son nom se reporte à la nature récursive de la conception de la procédure. En premier, un petit sous système est

considéré pour lequel une loi de commande virtuelle est conçue, puis la conception est étendue sur plusieurs étapes jusqu'à ce que la loi de commande finale pour le système globale est construite. Durant la conception une fonction de Lyapunov du système contrôlé est successivement construite.

Une chose important dans le Backstepping est que les non linéarités peuvent être traitées en plusieurs moyens, les non linéarités utiles contribuant dans la stabilisation peuvent être retenues, tandis que les non linéarités non utiles peuvent être remplacées par un contrôle linéaire [87]. Contrairement au contrôle par boucle de retour linéaire, ou les non linéarités sont éliminés en utilisant une boucle de retour non linéaire, gardé les non linéarités au lieu de les éliminés exige un modèle moins précis et un petit effort de contrôle et mieux encore, les lois de contrôle résultant peuvent être considérées comme des lois optimales garantissant une certaine propriété de robustesse.

L'origine du Backstepping n'est pas tout a fait clair, ceci est du à l'apparition simultané et souvent implicite dans les articles publiés des 1980. Cependant, il est juste de dire que le Backstepping a reçue beaucoup d'attention, grâce au travaux de professeur V. Kokotovic et ses collaborateurs [79]- [87]. En 1992 Kannellkapoullos et Al présentaient un outil mathématique "toolkits" pour concevoir des lois de contrôle pour une variété des systèmes non linéaires utilisant la méthode du Backstepping [102]- [104]. Durant les années suivantes, des manuels édités sont apparus [105], [106].
Ce chapitre introduit les techniques de bases du Backstepping, ou on donne dans la section 2.2 quelques concepts sur la théorie de Lyapunov, la section 2.3 introduit les idées de base de la conception des lois de commande par le Backstepping, dans la section 2.4 des applications sur quelques systèmes dynamiques non linéaires chaotiques finalement on termine par une conclusion sur les parties formant le chapitre.

2 Notion de stabilité au sens de Lyapunov

La commande par la méthode du Backstepping est basé sur la théorie de Lyapunov [148], [149] , l'objectif de la procédure est de construire une loi de commande qui ramène le système vers un état désiré, qui est généralement un état d'équilibre stable en boucle fermée.
Dans cette section on donne quelques notions de stabilité au sens de Lyapunov, les conditions de stabilité des différents états d'équilibres des systèmes dynamiques non linéaires [150], [151].

La classe des systèmes est celle dérivant des modèles de systèmes physiques qui peuvent se présenter par un ensemble des équations différentielles ordinaires.

– Description (sans une entrée)

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{2.1}$$

– Description (avec une entrée)

$$\dot{x} = f(x, u, t) \tag{2.2}$$

Où $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ est le vecteur des variables d'état,
$u = [u_1, u_2, \cdots, u_m]^T$ est le vecteur des entrées du système.
Le système Autonome :un système est dit autonome si f ne dépend pas du temps, si non le système est dit non autonome.

Considérons le système autonome suivant :

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.3}$$

Ou : $x = x(t) \in \mathfrak{R}^n$.

2.1 Différents états d'équilibres

Point d'équilibre

C'est un point pour lequel $\dot{x} = 0$.
Un point d'équilibre est une valeur de l'état x_{eq} telle que lorsque l'argument x de $f(x)$ est remplacé par x_{eq}, alors $f(x)$ s'annule :$\dot{x} = f(x_{eq}) = 0$.

Cycle limite

Un cycle limite est une trajectoire fermée solution du système.
Un système (2.3) possède un cycle limite C s'il existe un intervalle de temps $[t_0; t_0 + T[$ et un point de départ $x_0 \in C$, tel qu'en désignant par $\phi(t)$ la solution du système avec pour condition initiale $x(t_0) = x_0 = \phi(t_0)$ on ait :

– $\phi(t) \in C \qquad \forall t \in [t_0; t_0 + T[$,
– $\phi(T) = x_0$.

Définition intuitive de la stabilité

Si le système est initialement "légèrement" perturbé de son point d'équilibre le système reste "proche" de ce point d'équilibre.

Notion de distance

Il faut rendre mathématiquement précis ce que l'on entend par "proche" et "légèrement" [151].

Définition 2.1 *Un espace vectoriel ϑ est dit normé lorsqu'il existe une fonction qui associe à tout x la fonction la norme de x : $x \to \|x\|$ de $\vartheta \to \mathfrak{R}$ telle que :*

- $||x|| \geq 0, \quad \forall x \neq 0 \in \vartheta \quad et \quad ||x|| = 0 \qquad seulement\ lorsque \qquad x = 0$
- $||cx|| = c||x||, \qquad \forall c \in \Re \qquad , \forall x \in \vartheta$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \qquad \forall x, y \in \vartheta$

Dans un espace vectoriel $\Re^n$, les normes suivantes sont définies :

- $||x||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_i^2}$
- $||x||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x|_i$
- $||x||_\infty = \max_{i=1}^{n} x_i$

Avec $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, x_i \in \Re, \qquad i = 1, \cdots, n.$ vecteur des variables d'état.

Propriétés de stabilité du point d'équilibre

Dans cette partie, nous rappelons quelques concepts sur la stabilité des systèmes dynamiques. La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour des points d'équilibre. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre.

La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie générale valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée au voisinage d'un point d'équilibre en reste suffisamment proche.
Les propriétés de stabilité du point d'équilibre sont caractérisées par les définitions suivantes [120] :

Définition 2.2 – *Un point d'équilibre x_{eq} est dit stable au sens de Lyapunov, si pour tout réel strictement positif $R \succ 0$, il existe un réel strictement positif $r \succ 0$ tel que pour toute solution du système $x(x_0, t)$ (2.3) on a :*

$$||x_0 - x_{eq}|| \leq r \Rightarrow ||x(x_0, t) - x_{eq}|| \leq R$$

.

$x(x_0, t)$ est une solution sous une condition initiale x_0

- *Il est instable s'il n'est pas stable au sens de Lyapunov.*
- *Un point d'équilibre x_{eq} est dit attractif si pour tout réel strictement positif $\epsilon \succ 0$, il existe un scalaire positif $\delta(t_0) \succ 0$ tel que :*

$$||x_0|| \leq \delta(t_0)) \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t, t_0, x_0) = x_{eq} \qquad \forall t \succ t_0$$

on dit que le point d'équilibre x_{eq} est globalement attractive si : $\delta(t_0) = \infty$.

– *Un point d'équilibre x_{eq} est asymptotiquement stable (AS) s'il est stable et en plus il est attractif, c.a.d. il existe un nombre un réel strictement positif $\eta > 0$ tel que :*

$$\|x_0 - x_{eq}\| \leq \eta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = x_{eq}$$

– *Un point d'équilibre est globalement asymptotiquement stable (GAS) s'il est asymptotiquement stable pour tout état initial tel que :*

$$\lim_{x\to\infty} x(t) = x_{eq} \qquad \forall x_0$$

Définition 2.3 *Un cycle limite C est dit stable si toutes les trajectoires dans un voisinage du cycle tendent vers C .*
Il est instable si toutes les trajectoires divergent de C.
Il est semi-stable si certaines trajectoires convergent vers C.

La stabilité était considérée comme la capacité du cycle limite de se maintenir même après perturbation de celui-ci. Ce type de stabilité sera appelée asymptotique. La présente section donne les nuances entre les types de stabilité ainsi qu'un traitement approfondi du concept, et des résultats relatifs. Elle ne s'occupera que de l'analyse d'un point d"équilibre. Les concepts pourront alors être étendus à la notion de cycle limite sans trop de difficulté.

La stabilité au sens de Lyapunov signifie que la trajectoire d'état peut être gardée arbitrairement prés de x_{eq}, si l'on prend une condition initiale suffisamment proche de x_{eq}.

Montrer qu'un point d'équilibre admet une des propriétés citées ci-dessus en utilisant les définitions précédentes est souvent difficile. Notons que généralement, on ne sait pas résoudre explicitement le système (2.3). Pour cela la théorie de Lyapunov est très utile pour étudier la stabilité et la stabilité asymptotique des systèmes non linéaires [156].
De ce fait, la méthode directe de Lyapunov permet de contourner cet obstacle. Cette méthode consiste à définir une fonction particulière dont l'existence garantit la stabilité.

2.2 Méthode direct de Lyapunov

Le mathématicien et ingénieur A. M. Lyapunov introduisait l'idée de condenser le vecteur d'état $x(t)$ en une fonction scalaire $V(x)$, qui mesurait de combien le système est loin du point d'équilibre x_{eq} et si cette fonction tend vers une valeur minimale, alors le système tend vers son point d'équilibre. Cette approche qui caractérise la stabilité du système est appelée la méthode direct de Lyapunov ou la seconde méthode de Lyapunov. Définissons d'abord quelques concepts utiles :

Définition 2.4 *Une fonction scalaire $V(x)$ est :*

- *Définie positive si :* $V(0) = 0 \quad et \quad V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$
- *Semi définie positive si :* $V(0) = 0 \quad et \quad V(x) \geq 0 \quad \forall x \neq 0$
- *Semi définie négative si :* $-V(x)$ *est Semi définie positive*
- *Radialement non bornée si :* $V(x) \to \infty \quad \|x\| \to \infty$

Maintenant nous pouvons énoncer les théorèmes qui prouvent la stabilité asymptotique globale. Considérons le système (2.3) et $f(0) = 0$

Théorème 2.1 *$V(x)$ est une fonction scalaire semi définie positive, bornée, continue et différentiable dans le temps si :*

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(x) = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x}f(x) \prec 0 \qquad \forall x \neq 0 \tag{2.4}$$

Alors $x = x_eq$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable (GAS).
Une fonction scalaire $V(x)$ qui satisfait la condition $\dot{V}(x) \prec 0$ est alors appelée la fonction de Lyapunov du système.

La définition implique que la fonction V définit des équipotentielles imbriquées. C'est à dire que les courbes $V(x) = cste$, appelées équipotentielles de Lyapunov, définissent des domaines connexes autour de l'origine. De plus en définissant les domaines :

$$D_1 = \{x\ V(x) \leq c_1\} f, D_2 = \{x\ V(x) \leq c_2\}, \text{ alors : } c_1 \leq c_2 \Rightarrow D_1 \subset D_2$$

L'existence de cette fonction implique que le point $x = x_{eq}$ est un point d'équilibre stable, la condition $\dot{V}(x) \prec 0$ garantie la stabilité asymptotique, la condition de radialement bornée garantie que toutes les courbes de niveau de $V(x)$ sont fermées, toutes ces conditions garantissent la stabilité asymptotique globale du système.
Dans quelques cas la stabilité asymptotique globale, peut être montrer quand $\dot{V(x)}$ est seulement semi définie négative [152].

Considérons le système (2.3) et $f(0) = 0$

Théorème 2.2 *$V(x)$ est une fonction scalaire Semi définie positive, bornée, continue et différentiable dans le temps si :*

$$\dot{V}(x) = V(x)\, f(x) \prec 0, \qquad \forall x \neq 0, \qquad S = \{x : \quad \dot{V}(x) = 0\}$$

Et supposant que le système (2.3) admet une solution unique $x(t) = x_{eq}$. Si $x(t)$ reste au voisinage de S, alors $x = x_{eq}$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable (GAS).

Théorème 2.3 *Le point d'équilibre $x = x_{eq}$ du système d'équation (2.3) est dit uniformément Asymptotiquement Stable si toute trajectoire solution du système comprise dans une boule de rayon R de grandeur quelconque et initialisée en x_0 dans une boule de rayon R_0 dépendant de R converge vers le point d'équilibre quand t tend vers ∞.*

$$\forall R \succ 0, \exists r \succ 0 \qquad \text{tel que} \qquad \|x_0\| \prec r \Rightarrow \|x_t\| \prec R$$

Cette définition signifie que, quelle que soit la boule d'exigence de taille R, il est toujours possible de choisir une certaine sous-boule de taille r telle que, pour toutes les conditions initiales comprises dans cette sous-boule, les trajectoires résultantes seront, en tout temps, comprises dans la boule d'exigence de taille R.

Dans la théorie de Lyapunov, un des critères présentés consiste en l'étude d'une fonction notée $V(x)$ liée au système considéré, que l'on appelle fonction de Lyapunov. Si cette fonction remplit certaines conditions, alors le point d'équilibre x_{eq} du système est qualifié de stable [152].
Une des formes du théorème décrivant ce critère passe par l'utilisation des fonctions de classe K et K_∞. Nous en donnons une définition ci-après.

Définition 2.5 *Une fonction continue $g(r)$ où r appartient à l'intervalle $[0; a] \subset \Re$ est dite de classe K si elle est strictement croissante et si $g(0) = 0$. Elle appartient à la classe K_∞ si $a = \infty$ et si $g(r)$ tend vers ∞ quand r tend vers ∞. $g(r) \to \infty \qquad \|r\| \to \infty$*

Le théorème peut alors être énoncé comme suit.

Théorème 2.4 *Supposons qu'une fonction $V(x)$ ait ses dérivées premières continues autour du point d'équilibre $x = x_{eq}$. Alors si on peut trouver des fonctions α, γet β de classe K telles que les conditions suivantes soient vérifiées :*

$$\alpha(\|x\|) \leq V(x) \leq \beta(\|x\|) \tag{2.5}$$

$$\dot{V}(x) \leq \gamma(\|x\|) \tag{2.6}$$

le point d'équilibre $x = x_{eq}$ est uniformément asymptotiquement stable (UAS).
Le corollaire qui suit permet de travailler sur tout l'espace d'état.

corollaire 2.1 *Si de plus,α est de classe K_∞, alors le point d'équilibre $x = x_{eq}$ est Globalement Uniformément Asymptotiquement Stable (GUAS).*

Bien que certains systèmes ont la caractéristique d'avoir une fonction de Lyapunov décroissante, mais pas pour autant strictement décroissante, (c'est-à-dire $\dot{V}(x) \prec 0$) au lieu de $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \neq 0$), ils sont néanmoins asymptotiquement stable. L'objet de cette section est de présenter les conditions supplémentaires sur la fonction V et sa dérivée dans le temps pour garantir la stabilité asymptotique.
De plus, l'outil qui sera présenté permet de traiter également la convergence vers un point d'équilibre ou vers un cycle limite. Nous verrons également que le caractère positif défini de V

peut très bien être relaxé. Le théorème ne donnera pas une preuve de stabilité au sens de Lyapunov, mais un critère de convergence asymptotique, ceci valant autant pour les points d'équilibre que pour les cycles limites.

Pour prouver les propriétés de stabilité d'un système, de nombreuses méthodes sont basées sur le théorème de Lyapunov, pour les systèmes autonomes, il est possible de prouver la stabilité asymptotique quand $\dot{V}(x) \leq 0$ en considérant le théorème d'invariance de LaSalle, alors que pour les systèmes non autonomes le Lemme de Barbalat est employé pour prouver la stabilité asymptotique [152].

Théorème 2.5 *(Théorème de LaSalle) Le point d'équilibre $x = x_{eq}$ de (2.3) est asymptotiquement stable s' il existe une fonction $V(x)$ de $D \to \Re$ continument différentiable ayant les propriétés suivantes :*

- $\dot{V}(x) < 0 \qquad \forall x \neq 0$
- $S = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$

Ou :

- *D est un ensemble ouvert de $\Re^n$ et $x_{eq} \in D$,*
- *$V(x) \leq V(x_{eq}) \qquad \forall x \neq 0$ dans D, ($V(x)$ est minimale en x_{eq}),*
- *$\dot{V}(x) \leq 0 \qquad \forall x \in D$,*
- *L'ensemble $S \subset D$ tel que $\dot{V}(x) = 0$ ne contient pas de trajectoires du système $x(t) = x_{eq}$.*

Alors, pour toute condition initiale $x_0 \in D$, la solution de (2.3) reste dans D, est définie pour tout temps $t > 0$ et converge vers le plus grand sous-ensemble invariant inclus dans S [157], [120], [158]. Le théorème d'invariance de LaSalle, s'applique aussi bien aux points d'équilibres qu'aux cycles limites.

Théorème 2.6 *(Lemme de Barbalat) [20], Soit $\phi : \Re \to \Re$ une fonction uniformément continue sur $[0, \infty[$. Supposons que $lim_{t\to\infty} \int_0^t \phi(\tau)\, d\tau$ existe et est finie, Alors :*
$\phi \to 0$ quand $t \to \infty$

En combinant la méthode directe de Lyapunov et le Lemme de Barbalat, nous obtenons le théorème de LaSalle et Yoshizawa.

Théorème 2.7 *(Théorème de LaSalle et Yoshizawa) [20]- [21], Soit $x = 0$ un point d'équilibre de (1.3)avec f une fonction localement dérivable en x et est uniformément continue en t.*
Soit : $V : \Re^n \times \Re^+ \to \Re^+$ une fonction continument différentiable tels que :

$$\begin{cases} \gamma_1 (\|x\|) \leq V(x,t) \leq \gamma_2 (\|x\|) \\ \dot{V} = \nabla V(x)\, f(x) \leq -W(x) \leq 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

ou γ_1 et γ_2 sont des fonctions de classes K_∞ et W est une fonction continue. Alors, toutes les solutions de (2.3) sont globalement uniformément bornées et satisfont $lim_{t\to\infty} W(x(t)) = 0$
De plus, si $W(x)$ est définie positive, alors le point d'équilibre $x = 0$ est Globalement asymptotiquement uniformément stable (GAUS).

Jusqu' à présent on a défini la stabilité des systèmes à partir de la stabilité de l'état d'équilibre autour d'un point, dans un domaine. Il est également possible de considérer la stabilité entrée/sortie.
Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x,u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Où u est l'éntrée du système alors que y est la sortie. La stabilité entrée/sortie d'un point d'équilibre (u_e, y_e) se définit par :

Théorème 2.8 *Quelque soit $\epsilon > 0$, il existe $\xi > 0$ et il existe un domaine de conditions initiales de l'état du système tels que si $\|u - u_e\| < \xi$ pour tout t et que x_0 appartient au domaine de conditions initiales alors $\|y - y_e\| < \epsilon$ pour tout t.*

Remarque

Ces théorèmes sont une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix de la fonction de Lyapunov, n'indiquent pas toujours comment trouver la fonction de Lyapunov, qui satisfait les conditions de (GAUS). L'étude des méthodes qui permettent de construire une fonction de Lyapunov candidate pour un système donné a motivé une littérature très abondante, les formes quadratiques sont les plus utilisées notamment les fonctions définies positives qui sont des intégrales premières.

Type de fonction de Lyapunov

La recherche des fonctions de Lyapunov, c'est-à-dire des fonctions qui peuvent être assignées à être des fonctions de Lyapunov pour une certaine commande, joue un rôle très important pour la stabilisation des systèmes non linéaires et la robustesse de la stabilité ainsi obtenue. C'est à la fois un outil fondamental d'un point de vue théorique puisque l'on peut réduire la recherche des lois de commande stabilisantes à la recherche des fonctions de Lyapunov, un outil de synthèse des lois de commande, et un outil pour l'étude de leurs robustesses [151].

Quelques exemples de fonctions de Lyapunov

Dans le cas des systèmes non linéaire, il n'existe pas de méthode systématique pour choisir une fonction de Lyapunov convenable, d'ou l'utilisation de l'expérience, de l'intuition et de considérations physiques et de quelques méthodes partielles. Nous proposons quelques fonctions de Lyapunov classiques et nous présentons deux méthodes qui permettent de répondre en partie à ce problème [152].

Fonction de Lyapunov quadratique

Soit n'importe quelle matrice symétrique définie positive P (Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice symétrique P soit définie positive est que ses valeurs propres soient toutes positives), alors

$$V(x) = x^T P x \tag{2.9}$$

est une fonction candidate de Lyapunov. Les équipotentielles de Lyapunov sont des ellipsoïdes avec des demis axes définis par les valeurs propres et vecteurs propres de P [151]. La dérivée au long de la trajectoire de V s'écrit :

$$\dot{V}(x) = x^T P f(x) + f(x)^T P x \tag{2.10}$$

Norme du max

Soit la fonction :

$$V(x) = \max |x_i| \tag{2.11}$$

C'est à dire que l'on prend la valeur absolue maximale des coefficients du vecteur x. Les équipotentielles de Lyapunov sont des hyper cubes de cotés parallèles aux axes de l'espace vectoriel. La dérivée le long des trajectoire s'écrit :

$$V(x) = \max |x_i| = x_i signe(x_i) \tag{2.12}$$

$$\dot{V}(x) = f_i(x) signe(x_i) \tag{2.13}$$

Norme duale du max

Soit la fonction

$$V(x) = \sum |x_i| \tag{2.14}$$

C'est à dire que l'on prend la somme des valeurs absolues des coefficients du vecteur x. Les équipotentielles de Lyapunov sont des hyper cubes de sommets placés sur les axes de l'espace vectoriel. La dérivée le long des trajectoires s'écrit :

$$\dot{V(x)} = \sum f_i(x) signe(x_i) \tag{2.15}$$

Construction des fonctions de Lyapunov

Construction par la méthode de Krasovskii

La méthode de Krasovskii consiste à proposer une fonction candidate de Lyapunov de la forme $V(x) = f^T(x)f(x)$ et de tester si cette fonction est une fonction de Lyapunov.

Théorème 2.9 *Soit le système autonome suivant $\dot{x} = f(x)$ tel que $f(0) = 0$ dont le point d'équilibre étudié est l'origine. Définissons la matrice jacobiéenne du système :*

$$A(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

Si la matrice $F(x)$ définie par $F(x) = A^T(x) + A(x)$ est définie négative dans un voisinage Ω de l'origine :

$$\exists \Omega \subseteq \Re^N, 0 \in \Omega : \qquad F(x) = A^T(x) + A(x) \prec 0, \qquad \forall x \neq 0$$

c. à. d

$$(x^T F(x)x) \prec 0 \qquad \forall x \neq 0, x \in \Omega$$

Alors :

$$V(x) = f^T(x)f(x) \qquad avec \qquad \dot{V} \prec 0$$

$V(x)$ est une fonction de Lyapunov et 0 est un point localement asymptotiquement stable.
Si de plus $\Omega = \Re^N$, et

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} V(x) = +\infty$$

alors le système est globalement asymptotiquement stable.

Remarque :
Ce résultat de Krasovskii trés simple à utiliser est toutefois rarement applicable du fait des problèmes tels que :

- matrice jacobiéenne non définie négative.
- difficulté pour tester la définie négativité de F.

Démonstration :

$$\dot{V} = \dot{x}^T \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)^T f(x) + f(x)^T \frac{\partial f(x)}{\partial x} \dot{x} = f(x)^T \left(A^T(x) + A(x)\right) f(x)$$

Généralisation

Soit $\dot{x} = f(x)$ dont le point d'équilibre étudié est l'origine et $A(x)$ sa matrice jacobienne. S'il existe deux matrices $P = P^T$ et $Q = Q^T$ telles que :

Théorème 2.10

$$\exists \Omega \subseteq \Re^N, \exists P \succ 0 et \exists Q \succ 0$$

$$\forall x \neq 0\, x \in \Omega, \qquad F(x) = A^T(x)P + P\,A(x) + Q \prec 0$$

Alors :

$V(x) = f^T(x)\,P\,f(x)$ *avec* $\dot{V} \prec 0$.

Est une fonction de Lyapunov et l'origine 0 *est localement asymptotiquement stable.*

Si de plus $\Omega \equiv \Re^N$ *, et :*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} V(x) = +\infty$$

Alors $x = 0$ *est globalement asymptotiquement stable.*

Construction par la méthode du gradient variable

Cette méthode constitue une approche formelle permettant de construire des fonctions de Lyapunov. Une fonction scalaire est reliée à son gradient par la relation intégrale :

$$V(x) = \int_0^x \nabla V \mathrm{d}\xi \tag{2.16}$$

Ou :

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\nabla V}{\partial x_1} & \frac{\nabla V}{\partial x_2} & \dots \frac{\nabla V}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T \tag{2.17}$$

Principe de la méthode :

On suppose donnée une forme spécifique pour le gradient ∇V en lieu et place d'une forme spécifique pour la fonction candidate. Généralement, on suppose :

$$\nabla V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

où les a_{ij} sont des coefficients à déterminer.

Lorsque les conditions d'intégrabilité sont satisfaites (la relation entre le gradient et la fonction scalaire est biunivoque) :

$$\frac{\nabla V_i}{\partial x_i} = \frac{\nabla V_j}{\partial x_j}, i \neq j, (i, j = 1, \dots n) \tag{2.18}$$

Procedure :

- ∇V est donnée par la forme précédente
- Résoudre les relations croisées pour aij conditions d'intégrabilité satisfaites.
- Imposer la condition $\dot{V} \prec 0$ implique le choix des $a_{ij}(x_1, x_2, \cdots, x_n); i = 1, 2, \cdots, n$, pour que $\dot{V}$ soit définie négative.
- Calculer V par intégration à partir de ∇V. l'intégration ne dépend pas du chemin :

$$\int_0^{x_1} \nabla V_1(\xi_1, 0, \cdots, 0) d\xi_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1, \xi_2, 0, \cdots, 0) d\xi_2 +, \cdots, +, \cdots, + \int_0^{x_n} \nabla V_n(x_1, x_2, \cdots, \xi_n) d\xi_n \tag{2.19}$$

- En vérifiant toujours la condition $V(x) > 0 \forall x \neq 0$

Remarque

La stabilité au sens de Lyapunov est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire, si l'énergie totale d'un système se dissipe continument (c'est-à-dire décroît avec le temps) alors ce système (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état d'équilibre (il est stable). La méthode directe cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative.

Concept de passivité et fonction de Lyapunov

Un système est passif lorsque la puissance soutirée se fait au détriment du stock interne d'énergie. Ainsi, il ne peut pas y avoir de génération interne de puissance.
L'idée est de considérer des systèmes pour lesquels la dissipation est positive ou nulle. En d'autres termes lorsque la puissance est injectée la puissance en entrée positive elle est soit stockée soit dissipée et lorsque le système restitue de la puissance puissance en entrée négative, elle est fournie par le stock interne. Il n'y a pas de génération interne de puissance [121]- [124], [152]- [124].
Définissons la fonction de Lyapunov pour un système sans entrée :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{V} \leq 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

Tandis que la passivité pour système entrée-sortie est :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ \dot{V} \leq puissance fournie \\ y = h(x) \end{cases} \tag{2.21}$$

La Passivité permet d'obtenir des contrôleurs robustes qui ont une interprétation physique claire en termes d'interconnexions du système avec son environnement. En particulier, l'énergie totale du système en boucle fermée est la différence entre l'énergie du système et l'énergie fournie par le contrôleur .

2.3 Contrôle Basé sur la théorie de Lyapunov

Considérons le système autonome avec entrée suivant :

$$\dot{x} = f(x,u)$$

Où x est le vecteur d'état du système et u est la loi de commande à l'entrée, procédons déferrement, notre objectif est de trouver une loi de commande qui ramène le système au point

d'équilibre $x = 0$, soit $u = k(x)$ tel que $x = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système à boucle de retour fermé $\dot{x} = f(x, k(x))$.

Pour démontrer le critère de stabilité (GAS), on a besoin de construire une fonction de Lyapunov $V(x)$, qui satisfait les conditions des théorèmes précédents, la conception de la loi de contrôle $u = k(x)$ associée avec la fonction de Lyapunov est ce qu'on appelle un contrôle basée sur la théorie de Lyapunov.

Une approche simple de trouver $u = k(x)$ est de prendre une fonction définie positive, bornée $V(x)$, et choisir $k(x)$ telle que $\dot{V(x)} = V(x)\, f(x) \prec 0$, $\forall x \neq 0$.
Pour réussir dans cette approche $V(x)$ doit être soigneusement choisie.

Définition 2.6 *Une fonction définie positive, bornée $V(x)$ est appelée un contrôle basé sur la fonction de Lyapunov (cfl) si :*

$$\inf V(x)\, f(x) \prec 0 \qquad \forall x \neq 0 \tag{2.22}$$

Etant donné un (Cfl) pour un système donné, on peut donc trouver facilement une loi de contrôle assurant une stabilité globale du système, l'existence d'une telle loi est équivalente à l'existence d'un (cfl) [189], c'est-à-dire pour chaque loi de contrôle assurant une stabilité globale, on peut trouver un (Cfl) et inversement ceci est connue par le théorème d'Artstein [160].

Théorème 2.11 (theoreme d'Artstein) *Un système dynamique a une loi de contrôle basée sur la fonction de Lyapunov si et seuleument si il existe une fonction de stabilisation regulière dans la boucle de retour $u(x)$.*

Les méthodes ci-dessus supposent que si un (Clf) est connu, le système peut être contrôlé, alors comment peut-on construire une loi de contrôle correspondant à une fonction de Lyapunov pour avoir une stabilité globale en boucle fermée, le Backstepping [115]- [120] résout ce problème à travers une méthode récursive pour une classe des systèmes non linéaire (2.3), dans la section suivante on donne les conceptes de base de la méthode, laquelle peut être appliqué aux différents systèmes chaotiques cités au dessus.

3 Théorie du Backstepping

La technique du backstepping a été développée au début des années 90. L'arrivée de la commande par le backstepping a donné un nouveau souffle à la commande des systèmes non linéaires, qui malgré les grands progrès réalisés, il manquait des approches générales. Cette technique est une méthode systématique et récurrsive de synthèse de lois de commande non linéaires qui utilise le principe de stabilité de Lyapunov et qui peut s'appliquer à un grand nombre de systèmes non linéaires.

L'idée de base de la commande par le Backstepping est de rendre les systèmes bouclés équivalents à des sous-systèmes d'ordre un en cascade stable au sens de Lyapunov, ce qui leur confère des qualités de robustesse et une stabilité globale asymptotique. En d'autres termes, c'est une méthode multi-étapes. A chaque étape du processus, une commande virtuelle est ainsi générée pour assurer la convergence du système vers son état d'équilibre. Cela peut être atteint à partir des fonctions de Lyapunov qui assurent pas à pas la stabilisation de chaque étape de synthèse.le Backstepping est :

- applicable au système de type triangulaire inférieur ou appelée aussi boucle de retour stricte c .à. d la dérivée de chaque composante du vecteur d'état doit être une fonction des composantes précédentes et dépendre additivement de la composante suivante.
- Commençant avec la première équation différentielle du système $\dot{x}_1$ qui est plus loin de l'entrée de commande u, et n'achève la loi de commande de type d'expression analytique qu'en dernière étape.
- Elle construit une sortie passive et une fonction de stockage qui est utilisée comme une fonction Lyapunov.

La méthode de linéarisation par bouclage de retour élimine toutes les non linéarités du système, la technique du backstepping donne plus de flexibilité au concepteur en exploitant les " bonnes " non linéarités, tandis que les " mauvaises " non linéarités ou les non linéarités déstabilisantes sont dominées en ajoutant des amortissements non linéaires. Ainsi, une robustesse additionnelle est obtenue [161].

3.1 Commande de stabilisation par la méthode du Backstepping

Cette technique met à profit des relations causales successives pour construire de manière itérative et systématique une loi de commande et une fonction de Lyapunov stabilisante. De plus, et contrairement au bouclage linéarisé, le backstepping offre la possibilité de conserver dans le bouclage les non linéarités stabilisantes. Pour qu'elle puisse s'appliquer, le système non linéaire doit être sous la forme paramétrique de boucle de retour stricte.

Considérons le système sous la forme paramétrique du type boucle de retour stricte suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_i} = g_i(x_i, t)x_{i+1} + f_i(x_i, t) \\ (i = 1, \cdots, n-1) \\ \dot{x_n} = g_n(x_n, t)\,u + f_n(x_n, t) \\ y = x_1 \\ x_{t0} = x_0 \end{cases} \tag{2.23}$$

Où $x_i = [x_1, x_2, \cdots, x_i] \in \mathfrak{R}^i, (i = 1, \cdots, n-1), u \in \mathfrak{R}$, $y \in \mathfrak{R}$:

Sont respectivement vecteurs des états d'entrées et de sortie.

$g_i(.) \neq 0, f_i(.), i = 1, \cdots, n-1$ sont des fonctions non linéaires contiues et dérivables.

$g_n(.) \neq 0, f_n(.)$ sont des fonctions non linéaires continues.

Ce système est représenté par le bloc diagramme dans la figure (2.1) suivante : Notre objectif

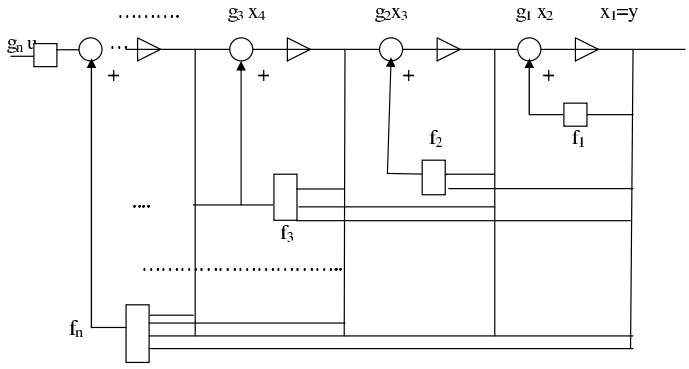


FIG. 2.1 – Le bloc diagramme d'un système de boucle de retour stricte.

est de concevoir un contrôleur dans la contre réaction pour le système (2.23) garantissant une stabilité globale et force le système vers le point d'équilibre c .à .d :

$$y(t) \rightarrow 0 \qquad quand \qquad t \rightarrow \infty \tag{2.24}$$

La conception de la procédure du backstepping contient n étapes, durant la $i^{\text{ième}}$ étape une loi de commande intermédiaire appelée aussi fonction stabilisante ou loi de contrôle virtuelle α_i doit être déterminée en utilisant une fonction de Lyapunov appropriée V_i.

Considérons en premier l'équation du système (2.23) quand $i = 1$, dans la première étape, le premier sous système avec une sortie passive z_1 et une entrée x_2, est rendue passive par une loi de contrôle virtuelle $\alpha_1(x_1)$, le second sous système avec une sortie passive $z_2 = x_2 - \alpha_1$ et une entrée x_3, est rendue passive par une loi de commande virtuelle $\alpha_2(x_1, x_2)$,cette procédure est applicable jusqu'au n^ime sous système avec une sortie $z_n = x_n - \alpha_{n-1}$ et une entrée u. La sortie z_n est rendue passive et GAS par une loi de commande finale u.

A chaque étape une fonction de Lyapunov est construite qui est considérée aussi comme une fonction de stockage de type quadratique et peut être déterminée par les deux méthodes Krasovskii ou le gradient variable.

Première étape

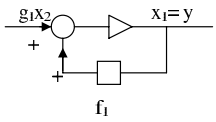


FIG. 2.2 – Le bloc diagramme du premier sous système

Définissons la première variable de la procédure soit z_1 comme sortie virtuelle du premier sous système $z_1 = x_1$. La dérivée dans le temps est :

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 = g_1 z_2 + g_1 \alpha_1 + f_1 \tag{2.25}$$

Et une deuxième variable du Backstepping $z_2 = x_2 - \alpha_1$, avec α_1 une loi de commande virtuelle qui doit être déterminer plus tard. Pour trouver cette loi de commande nous construisons une

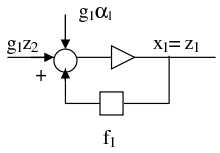


FIG. 2.3 – Le bloc diagramme du premier sous système avec une sortie virtuelle z_1

fonction Lyapunov partielle de type quadratique :

$$V_1(z_1) = \frac{1}{2} z_1^2 \tag{2.26}$$

Sa dérivée par rapport au temps est :

$$\dot{V}_1 \quad = \quad z_1 \dot{z_1} = g_1 z_1 z_2 + z_1 \overbrace{(g_1 \alpha_1 + f_1)}^{=-c_1 z_1} \tag{2.27}$$

La non linéarité est remplacé par un controle linéaire et α_1 est choisie de telle sorte que $\dot{V}_1$ soit négative définie :

$$\alpha_1 = \frac{1}{g_1} (-c_1 z_1 - f_1) \tag{2.28}$$

Où $c_1 \succ 0$ est une constante de conception positive. Notant que α_1 a été choisi de manière à éliminer la non linéarité f_1 et d'avoir $\dot{V}_1 \prec 0$. On substituant α_1 dans V_1 et dans on z_1 trouve :

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + g_1 z_1 z_2 \\ \dot{z}_1 = g_1 z_2 - c_1 z_1 \end{cases} \tag{2.29}$$

Pour une stabilité globale, le dernier terme $g_1 z_1 z_2$ dans $\dot{V}_1$ sera éliminé dans la prochaine étape.

Deuxième étape

Dans cette étape nous utilisons une nouvelle variable $z_3 = x_3 - \alpha_2$ comme une sortie pour le second sous système avec x_3 comme entrée et réecrivant la seconde équation du système(2.23) :

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha_1} = g_2 z_3 + g_2 \alpha_2 + f_2 - \dot{\alpha_1} \tag{2.30}$$

Puisque $\alpha_1(x_1)$ est la fonction stabilisante du sous système 2 alors :

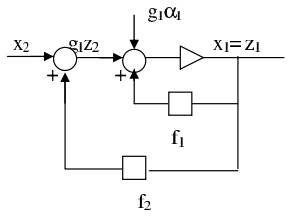


FIG. 2.4 – Le bloc diagramme du deuxième sous système

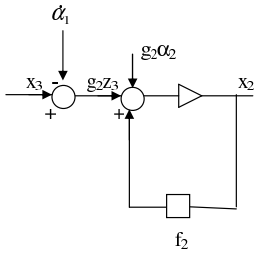


FIG. 2.5 – Le bloc diagramme du deuxième sous système avec une sortie virtuelle z_2

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\dot{x}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(g_1\, x_2 + f_1) \tag{2.31}$$

En substituant $\dot{\alpha}_1$ dans $\dot{z}_2$.

$$\dot{z}_2 = g_2\, z_3 + g_2\, \alpha_2 + f_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(g_1\, x_2 + f_1) \tag{2.32}$$

Maintenant nous procédons à trouver une fonction de Lyapunov V_2 pour le second sous système, Parce que z_2 est une sortie passive, un choix possible de la fonction du stockage :

$$V_2(z_1, z_2) = V_1(z_1) + \frac{1}{2} z_2^2 \tag{2.33}$$

Sa dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + z_2\dot{z}_2 = -c_1\, z_1^2 + g_2\, z_2\, z_3 + z_2 \overbrace{(g_1\, z_1 + g_2\, \alpha_2 + f_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(g_1\, x_2 + f_1))}^{=-c_2\, z_2} \tag{2.34}$$

La propriété clé de cette expression est que tous les termes potentiellement indéfinis paraissaient multiplié par z_2. D'où, notre contrôle virtuelle $x_3 = \alpha_2(x_1, x_2)$ peut être choisi de faire$\dot{V}_2$ négative défini. une conception possible est :

$$\alpha_2 \;=\; \frac{1}{g_2}(-c_2\, z_2 - g_1\, z_1 - f_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(g_1\, x_2 + f_1)) \tag{2.35}$$

Où c_2 est une constante positive de conception. On substituant α_2 dans V_2 et dans on z_2 trouve :

$$\begin{cases} \dot{V}_2 = -c_1\, z_1^2 - c_2\, z_2^2 + g_2\, z_2\, z_3 \\ \dot{z}_2 = g_2\, z_3 - c_2\, z_2 - g_1\, z_1 \end{cases} \tag{2.36}$$

Pour une stabilité globale, le dernier terme $g_2 z_2 z_3$ dans $\dot{V}_2$ sera éliminé dans la prochaine étape.

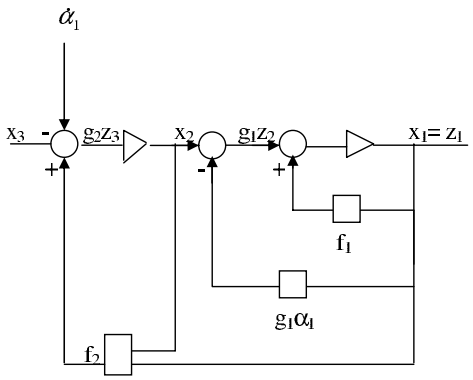


FIG. 2.6 – Le bloc diagramme du troisième sous système

Troisième étape

Commençons par la troisième variable de la procédure soit $z_3 = x_3 - \alpha_2$ comme une sortie pour le troisième sous système avec x_4 comme entrée, définissant une nouvelle variable $z_4 = x_4 - \alpha_3$, α_3 est la fonction stabilisante du troisième sous système et réécrivant la troisième équation du système(2.23) : La dérivée dans le temps est :

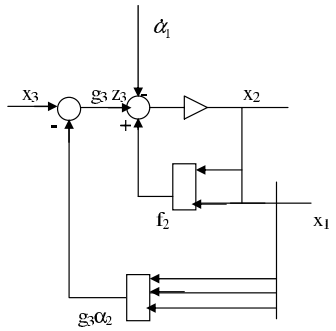


FIG. 2.7 – Le bloc diagramme du troisième sous système avec une sortie virtuelle z_3

$$\dot{z}_3 = \dot{x}_3 - \dot{\alpha}_2 = g_3\, z_4 + g_3\, \alpha_3 + f_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}(g_2\, x_3 + f_2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(g_1\, x_2 + f_1) \tag{2.37}$$

Parce que z_3 est une sortie passive, un choix possible de la fonction du stockage(Lyapunov) :

$$V_3(z_1, z_2, z_3) = V_1 + V_2 + \frac{1}{2} z_3^2 \tag{2.38}$$

Sa dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + z_3 \dot{z}_3 \tag{2.39}$$

$$= -c_1\, z_1^2 - c_2\, z_2^2 + g_3\, z_3\, z_4 + z_3 \overbrace{(g_2\, z_2 + g_3\, \alpha_3 + f_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(g_1\, x_2 + f_1)}^{=-c_3\, z_3}$$
$$-\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}(g_2\, x_3 + f_2)) \tag{2.40}$$

le contrôle virtuelle $x_4 = \alpha_3(x_1, x_2, x_3)$ peut être choisi en rendant $\dot{V}_3$ négative défini. une conception possible est :

$$\alpha_3 = \frac{1}{g_3}(-c_3 z_3 - g_2 z_2 - f_3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(g_1 x_2 + f_1) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}(g_2 x_3 + f_2) \tag{2.41}$$

α_3 est choisie de telle sorte que $\dot{V}_3$ soit définie négative, c_3 est une constante positive de conception. On substituant α_3 dans V_3 et dans on z_3 trouve :

$$\begin{cases} \dot{z_3} = +g_3 z_4 - c_3 z_3 - g_2 z_2 \\ \dot{V}_3 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 + g_3 z_3 z_4 \end{cases} \tag{2.42}$$

Pour une stabilité globale, le dernier terme $g_3 z_3 z_4$ dans $\dot{V}_3$ sera éliminé dans la prochaine étape.

La $i^{\text{ième}}$ *Etape*

Pour $(i = 4, \cdots, n-1)$, Aprés quelques manipulations algébriques la dérivée de la variable de la procédure comme sortie virtuelle $z_i = x_i - \alpha_{i-1}$, peut être exprimée comme :

$$\dot{z}_i = \dot{x}_i - \dot{\alpha}_{i-1} = -c_i z_i + g_i z_{i+1} + f_{ith} \tag{2.43}$$

avec $z_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_i$, où α_i est la loi de commande virtuelle à l'étape i qui doit être déterminée.

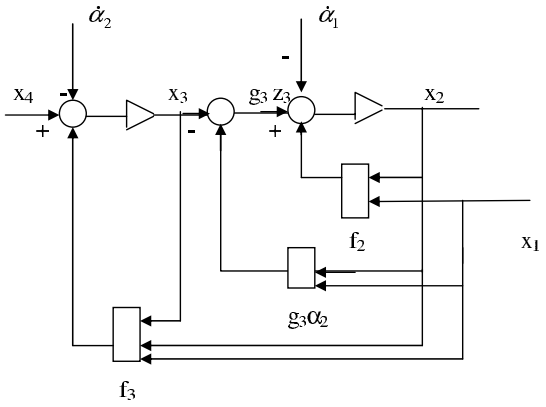


FIG. 2.8 – Le bloc diagramme du $i^{\text{ième}}$ sous système avec une sortie virtuelle z_i

La loi de commande virtuelle est maintenant conçue pour rendre définie négative une fonction de Lyapunov suivant :

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2 \tag{2.44}$$

Sa dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} + z_i \dot{z}_i = -\sum_{k=1}^{i-1}(c_k z_k^2) + z_i \overbrace{(g_{i-1} z_{i-1} + f_{ith} + g_i z_{i+1} + g_i \alpha_i)}^{=-c_i z_i} \tag{2.45}$$

$$\alpha_i = \frac{1}{g_i}(-c_i z_i - g_{i-1} z_{i-1} - f_{ith}) \tag{2.46}$$

Avec :

$$f_{ith} = f_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k}(f_k + g_k\, x_{k+1}) \tag{2.47}$$

On substituant α_i dans $z_i$et $\dot{V}_i$ on trouve :

$$\begin{cases} \dot{z}_i = -g_{i-1}\, z_{i-1} - c_i\, z_i + g_i\, z_{i+1} \\ \dot{V}_i = -\sum_{=1}^{i-1} (c_k\, z_k^2) + g_i\, z_i\, z_{i+1} \end{cases} \tag{2.48}$$

Le terme $g_i\, z_i\, z_{i+1}$ sera éliminé dans la dernière prochaine étape.

La $n^{\text{ième}}$ étape

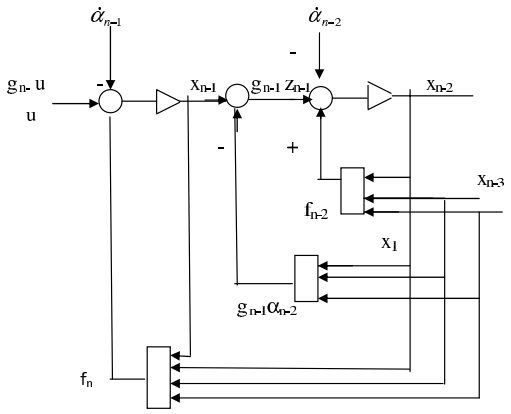


FIG. 2.9 – Le bloc diagramme du $n^{\text{ième}}$ sous système avec une sortie virtuelle z_n

C'est le dernier pas de conception, du moment que le contrôle final u apparaît dans la dérivée de $\dot{z}_n$

$$\dot{z}_n = \dot{x}_n - \dot{\alpha}_{n-1} = g_n\, u + f_{nth} \tag{2.49}$$

Avec :

$$f_{nth} = f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k}(f_k + g_k\, x_{k+1}) \tag{2.50}$$

La loi de contrôle u est conçu pour rendre négative définie la dérivée de la fonction Lyapunov globale :

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2 \tag{2.51}$$

Sa dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_n = \dot{V_{n-1}} + z_n\, \dot{z_n} \tag{2.52}$$

Ce qui conduit à :

$$\dot{V}_n = -\sum_{k=1}^{n-1}(-c_k\, z_k^2) + z_n \overbrace{(g_{n-1}\, z_{n-1} + f_{nth} + g_n\, u)}^{=-c_n\, z_n} \tag{2.53}$$

Le chois du contrôle actuel est :

$$u = \frac{1}{g_n}\,(-c_n\, z_n - g_{n-1}\, z_{n-1} - f_{nth}) \tag{2.54}$$

Nous avons maintenant conçu une loi de commande dans la contre réaction pour la stabilisation du système (2.23) d'ordre n.

u existe et est une fonction de stabilisation regulière dans la boucle de retour , d'après le theoreme d'Artstein le système dynamique (2.23) a une loi de contrôle basée sur la fonction de Lyapunov.

On substituant u dans z_n et $\dot{V}_n$ on trouve :

$$\begin{cases} \dot{z_n} = -c_n\, z_n - g_{n-1}\, z_{n-1} \\ \dot{V}_n = -\sum_{=1}^{n} -c_k\, z_k^2 \end{cases} \tag{2.55}$$

$\dot{V}(z) \prec 0 \quad \forall z \neq 0$, alors Le point d'équilibre $x = x_{eq}$ de (2.23) est asymptotiquement stable car la fonction $V(z)$ est continument différentiable ayant les propriétés citées dans le théorème de Lassale, d'où le système globale dans les coordonnées $(z_1, \cdots, z_n)$:

$$\begin{cases} \dot{z_1} = -c_1\, z_1 - g_1\, z_2 \\ \dot{z_i} = -c_i\, z_i - g_{i-1}\, z_{i-1} + g_i\, z_{i+1}; \quad (i = 2, \cdots, n-1) \\ \dot{z_n} = -c_n\, z_n - g_{n-1}\, z_{n-1} \end{cases} \tag{2.56}$$

est globalement assymptotiquement stable(GAS).

Il est claire que la méthode du backstepping

- peut être appliquée à tout système d'ordre n, en fournissant les équations de l'état du système dans la forme correcte.
- C'est une approche à conception flexible comparée à d'autres méthodes.
- C'est une méthode systématique consiste en n étapes à chaque pas de retour en arrière.

3.2 Commande en poursuite de trajectoire référence par la méthode du Backstepping

Dans ce paragraphe, nous traitons le problème de poursuite de trajectoires.La définition formelle du concept de poursuite peut être établi en conformité avec la définition donnée par :

Définition 3.1 *Quand l'objectif est de forcer la sortie du système $y(t) \in R^m$ pour le suivi d'une sortie désirée $y_r(t) \in R^m$, il sera défini comme un problème de suivi.*

Le problème de commander la sortie d'un système à suivre une référence donnée, peut être traité avec différentes applications. Une des approches est celle du problème de la stabilisation en un point, ou le problème de stationnement, qui consiste à faire diriger un système à un point de configuration fixe, peut importe le comportement du système entre l'état initial et l'état finale. Dans ce cas, le signal de référence y_r est stationnaire. Ce problème est connu sous le nom de problème de régulation [150].

Dans le problème de poursuite du système non linéaire (2.23), l'objectif de commande n'est pas seulement de stabiliser globalement le procédé (2.23), mais aussi de forcer la sortie $y(t) = x_1$ à suivre un signal référence y_r sous les conditions suivantes :

1. $g_n(.) \neq 0$.
2. le signal de référence y_r et ses n dérivées sont connues et bornées et $y_r^{(n)}$ est continue au moins par morceaux.

Les mêmes étapes de conception sont répétées dans ce cas avec des modifications mineures.Les commande virtuelles α_i sont alors déterminées après la dérivée de z_i et de choisir une fonction de Lyapunov appropriée $V_i$et la rendre négative définie soit :

Première étape Pour le premier sous système, la première variable du backstepping est choisie comme l'erreur de poursuite :

$$z_1 = x_1 - y_r \tag{2.57}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{g_1}\left(-c_1 z_1 - f_1 + \dot{y}_r\right) \tag{2.58}$$

Deuxième étape Puisque α_1 est la fonction stabilisante du sous système 2 est$\alpha_1(x_1, y_r, \dot{y}_r)$ alors :

$$\dot{\alpha_1} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r}\dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{y}_r}\ddot{y}_r \tag{2.59}$$

En remplaçant on trouve :

$$\dot{\alpha_1} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(g_1 x_2 + f_1) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r}\dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{y}_r}\ddot{y}_r \tag{2.60}$$

D'ou la fonction stabilisante pour le second sous système du (2.23),

$$\alpha_2 = \frac{1}{g_2}\left(-c_2 z_2 - g_1 z_1 - f_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(g_1 x_2 + f_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r}\dot{y}_r - \ddot{y}_r)\right) \tag{2.61}$$

Troisième étape Sachant que :

$$\dot{\alpha_2} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y_r}\dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \dot{y}_r}\ddot{y}_r + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \ddot{y}_r}y_r^3 \tag{2.62}$$

Une conception possible est :

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \frac{1}{g_3}(-c_3\, z_3 - g_2\, z_2 - f_3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(g_1\, x_2 + f_1) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}(g_2\, x_3 + f_2) \\ &\quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial y_r}\dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \dot{y}_r}\ddot{y}_r + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \ddot{y}_r} y_r^3)\end{aligned} \tag{2.63}$$

La $i^{\text{ième}}$ étape, Pour $(i = 4, \cdots, n-1)$, Après quelques manipulations algébriques la dérivée de la variable de la procédure comme sortie virtuelle $z_i = x_i - \alpha_{i-1}$, qui peut être exprimée comme :

$$\dot{z}_i = \dot{x}_i - \dot{\alpha}_{i-1} = -c_i\, z_i + g_i\, z_{i+1} + f_{ith} \tag{2.64}$$

Où α_{i-1} est la loi de contrôle virtuelle à l'étape i qui doit être déterminée.

$$\alpha_{i-1} = \frac{1}{g_i}(-c_i\, z_i - g_{i-1}\, z_{i-1} - f_{ith}) \tag{2.65}$$

Avec :

$$f_{ith} = f_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k}(f_k + g_k\, x_{k+1}) \tag{2.66}$$

La $n^{\text{ième}}$ étape C'est le dernier pas de conception, du moment que le contrôle actuel u appparaît dans la dérivée de $\dot{z_n}$

$$z_n = x_n - \alpha_{n-1} = g_n\, u + f_{nth} \tag{2.67}$$

Avec :

$$f_{nth} = f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k}(f_k + g_k\, x_{k+1}) \tag{2.68}$$

La loi de contrôle u est conçu pour rendre négative définie la dérivée de la fonction Lyapunov globale :

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2 \tag{2.69}$$

Sa dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_n = \dot{V_{n-1}} + z_n\, \dot{z_n} \tag{2.70}$$

Ce qui conduit à :

$$\dot{V}_n = -\sum_{k=1}^{n-1}(-c_k\, z_k^2) + z_n(g_{n-1}\, z_{n-1} + f_{nth} + g_n\, u) \tag{2.71}$$

Le chois du contrôle actuel est :

$$u = \frac{1}{g_n}(-c_n\, z_n - g_{n-1}\, z_{n-1} - f_{nth}) \tag{2.72}$$

On substituant u dans z_n et $\dot{V}_n$ on trouve :

$$\begin{cases} \dot{z_n} = -c_n\, z_n - g_{n-1}\, z_{n-1} \\ \dot{V}_n = -\sum_{=1}^{n} -c_k\, z_k^2 \end{cases} \tag{2.73}$$

D'où le système globale dans le système des coordonnées $(z_1, \cdots, z_n)$:

$$\begin{cases} \dot{z_1} = -c_1\, z_1 - g_1\, z_2 \\ \dot{z_i} = -c_i\, z_i - g_{i-1}\, z_{i-1} + g_i\, z_{i+1}; (i = 2, \cdots, n-1) \\ \dot{z_n} = -c_n\, z_n - g_{n-1}\, z_{n-1} \end{cases} \tag{2.74}$$

Sachant que :

$$z_i = x_i - x_{ri} - \alpha_{i-1}; \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{2.75}$$

$\dot{V}_n \prec 0$ est négative définie, lorsque $t \to \infty$, $z_i, \quad (i = 1, \cdots, n \to 0)$, alors $x_i \to x_{ri}$ le système d'équation des erreurs en $z_i, (i = 1, \cdots, n)$ correspondant au système final en boucle fermé, le système des lois de mise à jour $\hat{\theta}_i, (i = 1, \cdots, n)$ admet un point d'équilibre $x_{eq} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T = 0$ globalement uniformément asymptotiquent stable.

Puisque le modèle de référence x_{r1} est borné et sachant que $z_1 = x_1 - x_{r1}$ alors ceci garantit que l'état $x(t)$, la loi de contrôle actuelle u,sont globalement bornés et $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$ et donc $\lim_{t\to\infty} |y(t) - y_r(t)| = 0$.

Le système en boucle fermé (2.74) avec le modèle de la référence y_r et le contrôleur (2.72) a un point équilibre globalement uniformément stable au $z = [z_1; z_2; z_3, \cdots; z_n]^T = 0$

4 Conception des lois de commande basées sur le Backstepping pour quelques systèmes chaotiques

Dans l'étude du comportement des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques et leurs commandes, plusieurs systèmes de dimension inférieur sont fréquemment utilisés pour la modélisation des procédés naturels et industriele ainsi que des exemples de base pour la vérification et la validation d'une théorie proposée, méthode, où algorithme. Ces exemples incluent des systèmes non autonomes du second ordre comme l'oscillateur de Duffing [164], l'oscillateur de Van der pool [165] - [167](pendule de Moon), des systèmes autonomes du troisième ordre comme le système de Lorenz [2], [168]- [171], le système de Rössoler [172]- [174] ainsi que le circuit de Chua [13], [175], [180],qui sont des exemples d'attracteur étrange se caracterisant par :

– Les attracteurs étranges sont uniques des autres attracteurs d'espace de phase dans le cas où on ne sait pas exactement où le système sera sur l'attracteur.

– Deux points sur l'attracteur qui sont près à un moment donné l'un de l'autre seront arbitrairement séparés lointainement à temps plus tardifs.La seule restriction est que l'état de système reste sur l'attracteur.
– Les attracteurs étranges sont aussi uniques dans le cas où ils ne se rapprochent jamais entres eux mêmes, le mouvement du système ne se répète jamais c. à. d non périodique.

Le mouvement décrit sur ces attracteurs étranges est ce que nous signifions par un comportement chaotique.

Notons que tous ces systèmes chaotiques mentionnés au-dessus peuvent être réécrits sous la forme de boucle de retour stricte.
Pour examiner l'efficacité de la conception de la procédure proposée, des simulations en Matlab sur ordinateur ont été éttendues pour tous ces systèmes [138], [139].

4.1 Oscillateur du second ordre Duffing

L'oscillateur de Duffing fait partie des systèmes modèles qui permettent d'étudier une dynamique non linéaire. Il correspond à une équation différentielle non linéaire de la forme :

$$\ddot{x} + \sigma\,\dot{x} + (\beta\,x^3 \pm +\omega_0^2\,x) = \lambda\,\cos(\omega\,t + \phi) \tag{2.76}$$

Cette équation diffère formellement de l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique en régime forcé par la présence d'un terme non linéaire en $\beta\,x^3$. Elle fut établie au début du siècle dernier par l'ingénieur George Duffing, dans le but de modéliser les vibrations forcées d'une machine industrielle. Un grand nombre de tels systèmes correspondent à une telle modélisation.

Type d'oscillateur de Duffing

Dépendant des paramètres choisis, l'équation peut se mettre sur plusieurs formes :

– Pour l'oscillateur non forcé de Duffing $\sigma = \lambda = 0$ et en prenant un signe+ , l'équation devient :

$$\ddot{x} + \beta\,x^3 + \omega_0^2\,x = 0 \tag{2.77}$$

Le système décrit par cette équation différentielle manifeste un comportement chaotique Pour les valeurs :

1. $\beta > 0$ Le système représente ce qu'on appelle une source dure.
2. $\beta < 0$ Le système représente une source douce, le portrait de phase comporte des courbes fermées.

– Si on prend pour $\beta = \omega_0 = 1$ et un déphasage initial $\phi = 0$ et un signe−, l'èquation devient :

$$\ddot{x} + \sigma\,\dot{x} + (x^3 - x) = \lambda\,\cos(\omega\,t) \tag{2.78}$$

cette équation peut se mettre sous la forme d'un système d'équations différentielles du second ordre on pose $x = x_1\ \dot{x} = x_2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sigma\,x_2 + x_1 - x_1^3 + \lambda\,\cos(\omega\,t) \end{cases} \tag{2.79}$$

Pour le cas d' un système non forcé :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sigma\,x_2 + x_1 - x_1^3 \end{cases} \tag{2.80}$$

Calcul des points d'équilibres

Les points d'équilibres du système différentielle sont donnés par :
$\dot{x}_1 = x_2 = 0$, $\dot{x}_2 = x_1 - x_1^3 - \sigma\,x_2 = 0$, soit alors les points d'équilibres suivants $(0,0), (\pm 1, 0)$.
L'analyse de stabilité de ces points d'équilibres peut être étudier par la linéarisation du système d'équation au voisinage de ces points d'équilibres.
Au point d'équilibre $(0,0)$, on peut voir que ;

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\sigma \end{bmatrix} \tag{2.81}$$

Qui a pour valeurs propres $\lambda_{1,2} = -\frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\sigma^2 + 4}$, dont une est stable et une autre instable et par conséquent le point d'équilibre $(0,0)$ est instable.
Pour les deux autres points d'équilibres $(\pm 1, 0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\pm 1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -\sigma \end{bmatrix} \tag{2.82}$$

Qui a pour valeurs propres $\lambda_{1,2} = -\frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\sigma^2 - 8}$, dans ce cas les deux valeurs propres ont une partie réelle négative et par conséquent le point d'équilibre $(\pm 1, 0)$ est stable.

Mise en forme paramétrique de boucle de retour stricte

D'une manière générale,par le choix des variables $x = x_1\ \dot{x} = x_2$ l'équation différentielle (2.78) de l'oscillateur de Duffing est mise sous la forme de boucle de retour strict non autonome du deuxième ordre.

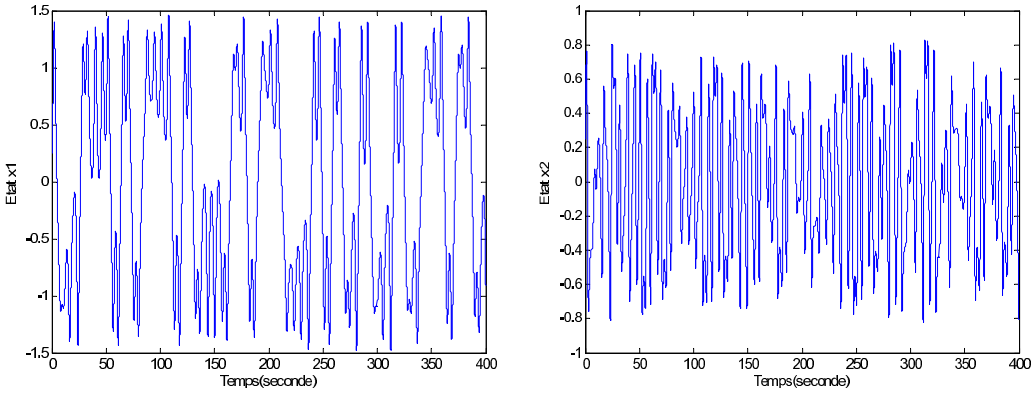
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sigma\,x_2 + (\omega_0^2\,x_1 - \beta\,x_1^3) + \lambda\,\cos(\omega\,t)) + u \end{cases} \tag{2.83}$$

Avec :

$$\begin{cases} g_1(x_1,t) = 1,\ g_2(x_1,x_2,t) = -\sigma \\ f_1(x_1,t) = 0,\ \ f_2(x_1,x_2,t) = (\omega_0^2\, x_1 - \beta\, x_1^3) + \lambda\, \cos(\omega\, t) \end{cases} \tag{2.84}$$

Pour des valeurs des paramètres du système $\sigma = 0.25$, $\lambda = 0.3$, $\omega_0 = \beta = 1$ et des conditions initiales $x_{10} = x_{20} = 0.25$,le système présente un comportement chaotique, les figures suivantes illustrent ce phénomène

Si on observe l'évolution temporelle de $x(t)$ on a une allure chaotique.



(a) Variation de l'état x_1 (b) Variation de l'état x_2

FIG. 2.10 – Comportement chaotique dans l'espace temporel pour l'oscillateur de Duffing

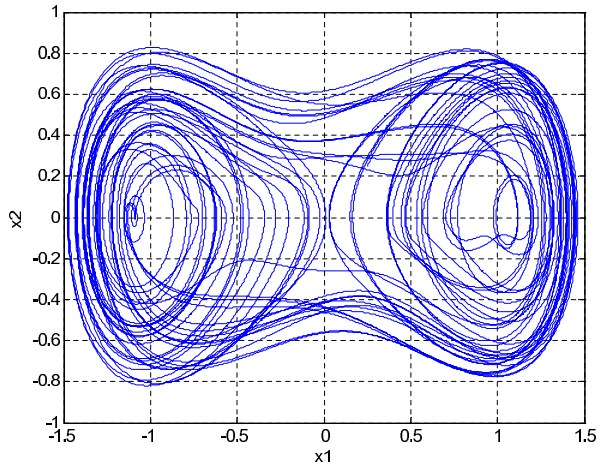


FIG. 2.11 – Variation de l'état x_2 en fonction de l'état x_1 de l'oscillateur de Duffing

Backstepping pour la commande en stabilisation pour l'oscillateur de Duffing

Puisque le système est régit par deux équations différentielles, la recherche de la loi commande par la méthode de Backstepping passe par deux étape :
Pour la première équation du système (2.83), on choisit l'état x_2 comme une entrée virtuelle ou fictive de commande au sous système (2.83). Rappelons que l'objectif de commande est de conduire $x_1 = y \to 0$.
D'ou la première variable du " Backstepping " est choisie comme :$z_1 = x_1$. La commande virtuelle est alors définie comme $z_2 = x_2 - \alpha_1$, α_1 est donnée par

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 \tag{2.85}$$

pour rendre la première fonction de Lyapunov définie négative :

$$V_1 = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 \tag{2.86}$$

Puisque le système original (2.83) est décrit par 2 états seulement, l'entrée de commande u apparaît dans la deuxième étape, alors Le choix de la loi de contrôle finale est donné

$$u = -z_1 + \sigma\,\alpha_1 - \omega_0^2\, x\, + \beta\, x^3 - \lambda\, \cos(\omega\, t) - c_1\, z_1 + c_1\, z_2 \tag{2.87}$$

pour rendre négative définie la fonction de Lyapunov globale du système :

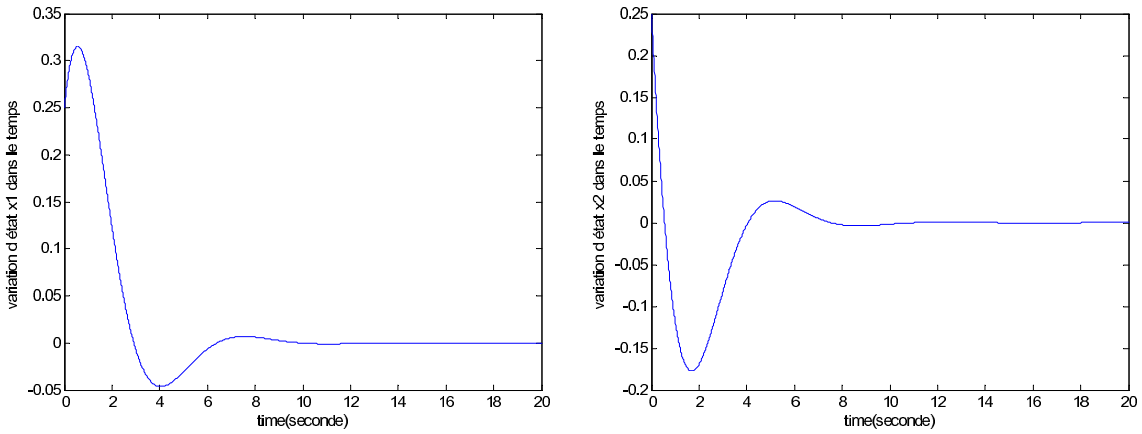
$$V_2 = -c_1\, z_1^2 - \sigma z_2^2 \tag{2.88}$$

Les coordonnées de conception en (z_1, z_2)

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -c_1\, z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_1 - \sigma\, z_2 \end{cases} \tag{2.89}$$

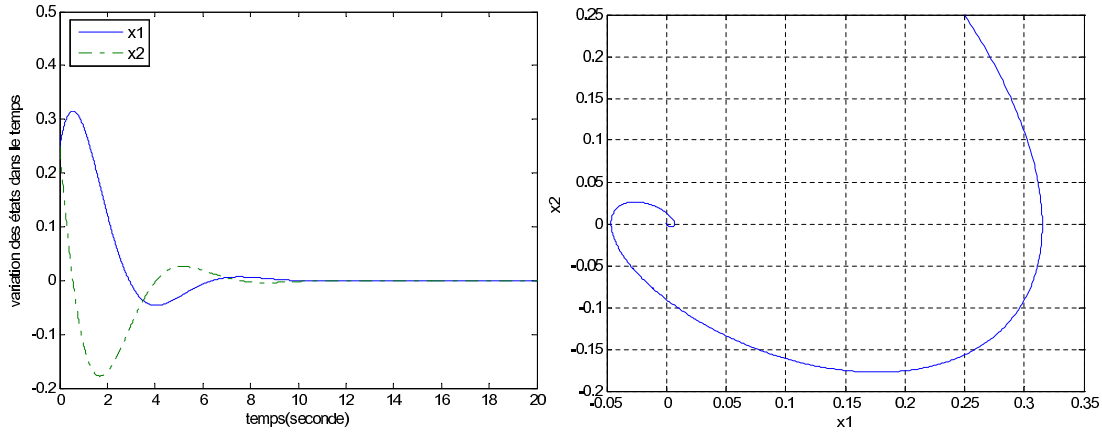
Résultats de simulations

Les graphes de simulations sont donnés pour les valeurs suivantes $\sigma = 0.25$, $\lambda = 0.3$, $\omega_0 = \beta = 1$ et $x_{10} = x_{20} = 0.25$, $c_1 = 1$. Les figures de convergence des états vers le point d'équilibre $x_{eq} = 0$ et la loi de commande pour l'oscillateur de Duffing sont données comme suit :



(a) Varition de l'état x_1 en fonction du temps (b) Variation de l'état x_2 en fonction du temps

FIG. 2.12 – Convergence des états x_1 x_2 vers le point d'équilire $x_{eq} = 0$ pour l'oscillateur de Duffing



(a) Variation des états x_1,x_2 en fonction du temps (b) Variation des états x_2 en fonction x_1

FIG. 2.13 – Convergence des états x_1 x_2 vers le point d'équilire $x_{eq} = 0$ pour l'oscillateur de Duffing

Backstepping pour la commande en poursuite d'un signal référence pour l'oscillateur de Duffing

Pour la poursuite on utilise une trajectoire référence comme un signal sinusoidale d'amplitude 1 et de pulsation $w_r = 1$, la fonction stabilisante α_1 et la loi de commande finale u sont données par : α_1 est donnée par

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 + \dot{y}_r \tag{2.90}$$

La loi de contrôle finale est donné

$$u = -z_1 + \sigma\,\alpha_1 - \omega_0^2\,x\, + \beta\,x^3 - \lambda\,\cos(\omega\,t) - c_1\,z_1 + c_1\,z_2 + \ddot{y}_r \tag{2.91}$$

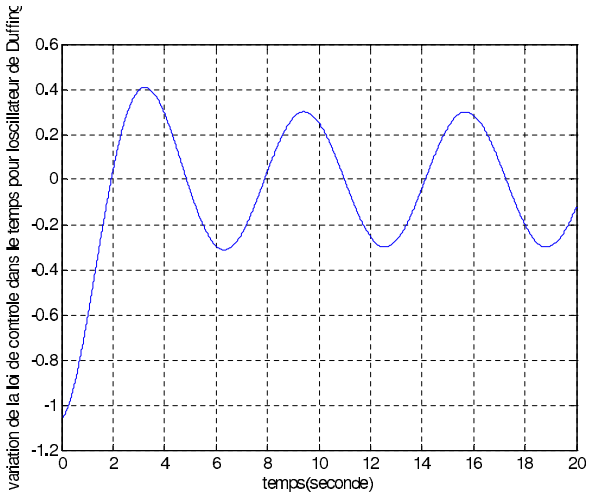
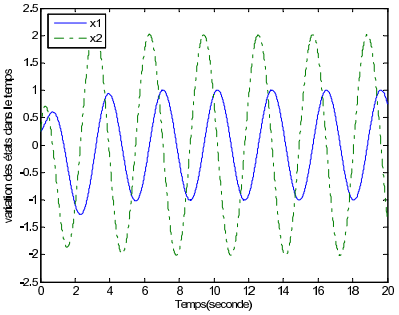


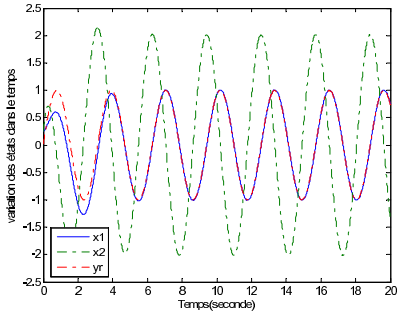
FIG. 2.14 – Variation de la loi de commande en fonction de temps pour l'oscillateur de Duffing

Résultats de simulations

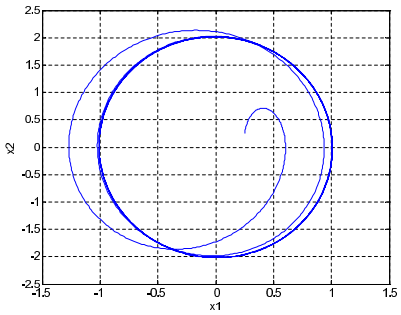
Les figure de poursuite des états vers le signal de référence $y_r = \sin(t)$ et la loi de commande pour l'oscillateur de Duffing sont données comme suit :



(a) Varition des états x_1 x_2 en fonction du temps



(b) Variation des états x_1 x_2 y_r en fonction du temps



(c) Variation des états x_2 en fonction de x_1

FIG. 2.15 – Evolution des états x_1 x_2 en commande en poursuite pour l'oscillateur de Duffing

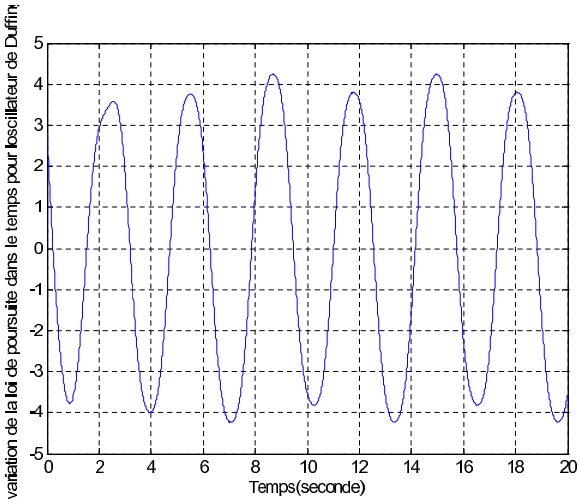


FIG. 2.16 – Variation de la loi de commande de poursuite en fonction de temps pour l'oscillateur de Duffing

On remarque que les états ont convergé assymptotiquement vers l'état d'équilibre et vers la trajectoire de référence après l'application des lois de commande en quelques secondes, le temps de convergence est très petit.

4.2 Oscillateur de Bonhoeffer de Van der pool

L'oscillateur de Van der Pol est un système dynamique différentiable à temps continu et à un degré de liberté, du nom de Balthasar van der Pol. Balthazar van der Pol était ingénieur électrique hollandais qui a initié la dynamique expérimentale moderne dans le laboratoire pendant les années 1920 et 1930. Durant ses investigations sur des circuits électriques qui emploient des tubes électronique, a trouvé qu'ils ont des oscillations stables, qui maintenant appelés des cycles limites. Quand ces circuits sont excités avec un signal de fréquence proche du cycle limite, la réponse périodique résultante change sa fréquence à celle du signal. Cependant la forme d'onde peut être complètement compliqué et contenir une structure riche en fréquences harmoniques et sous harmoniques.

En septembre de 1927 Van der Pol et son collègue van der Mark ont rapporté dans le journal britannique de la nature qu'un bruit irrégulier a été entendu à certaines fréquences propres. En reconstruisant son circuit du tube électronique, nous savons maintenant qu'ils avaient découvert le chaos déterministe, ce système est décrit par une coordonnée $x(t)$ vérifiant une équation différentielle faisant intervenir deux paramètres :

- une pulsation propre ω,
- un coefficient de non linéarité.

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\,\dot{x} + x = 0 \tag{2.92}$$

Pour le cas d'un système non forcé et après une conversion, cette équation peut se mettre sous la forme d'un système d'équations différentielles du second ordre, on pose $x = x_1$ $\dot{x} = x_2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \mu(x_1^2 - 1)\,x_2 \end{cases} \tag{2.93}$$

Calcul des points d'équilibres

De la première équation du système (2.93), $x_2 = 0$ et en la substituant dans la deuxième équation du système (2.100) donne la valeur de $x_1 = 0$. Le seul point d'équilibre $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Au point d'équilibre $(0, 0)$, on peut voir que ;

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix} \tag{2.94}$$

Qui a pour valeurs propres $\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$, on peut voir que si $0 \leq \mu \leq 2$ ou $\mu > 2$ l'équilibre est instable.

Généralisation de l'oscillateur de Van der pool

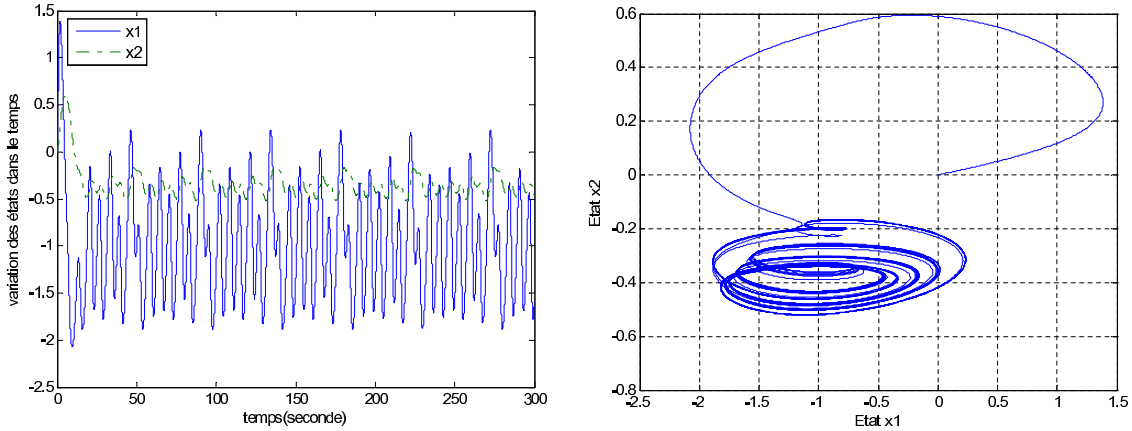
Le système de l'oscillateur de Bonhoeffer de Van der pool est la généralisation de l'oscillateur de Van der pool contenant plusieurs paramètres de contrôle et est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 - \frac{1}{3}\, {x_1}^3 + p_1 + p_2 \cos(\omega\, t) \\ \dot{x}_2 = p_3\,(x_1 + p_4 - p_5\, x_2) + u \end{cases} \tag{2.95}$$

Ou ω est une fréquence constante, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 sont des paramètres constants de l'oscillateur,avec :

$$\begin{cases} g_1(x_1, t) = -1,\ g_2(x_1, x_2, t) = 1 \\ f_1(x_1, t) = x_1 - \frac{1}{3}\, {x_1}^3 + p_1 + p_2 \cos(\omega\, t),\ f_2(x_1, x_2, t) = p_3\,(x_1 + p_4 - p_5\, x_2) \end{cases} \tag{2.96}$$

Pour les valeurs suivantes :
$p_1 = 0$, $p_2 = 0.74$, $p_3 = 0.1$, $p_4 = 0.7$, $p_5 = 0.8$, $\omega = 0$ et $x_{10} = x_{20} = 0$,
l'oscillateur présente un comportement chaotique, les figures suivantes illustrent ce comportement.



(a) Evolution des états x_1, x_2 (b) Variation de l'état x_2 en fonction de x_1

FIG. 2.17 – Comportement chaotique des états x_1, x_2 pour l'oscillateur de Van der pool

Conception de la loi de commande en stabilisation basée sur le Backstepping pour l'oscillateur de Van der pool

En suivant les même démarches que précédemment on trouve la loi de commande virtuelle pour le premier sous système de (2.95)comme :

$$\alpha_1 = c_1 z_1 + x_1 - \frac{1}{3}\, {x_1}^3 + p_1 + p_2\, \cos(\omega\, t) \tag{2.97}$$

pour rendre défine négative la première fonction de Lyapunov :

$$V_1 = -c_1 z_1^2 - z_1 z_2 \tag{2.98}$$

Puisque le système original est décrit par 2 états seulement, l'entrée de commande apparaît dans la deuxième étape, alors Le choix de la loi de contrôle finale est donné :

$$u = -c_2 z_2 + z_1 - p_3(x_1 + p_4 - p_5 x_2) - (c_1 z_1 + z_2(c_1 + (1 - x_1^2)) + p_2 \sin(\omega t)) \tag{2.99}$$

pour rendre la fonction de Lyapunov globale du système définie négative :

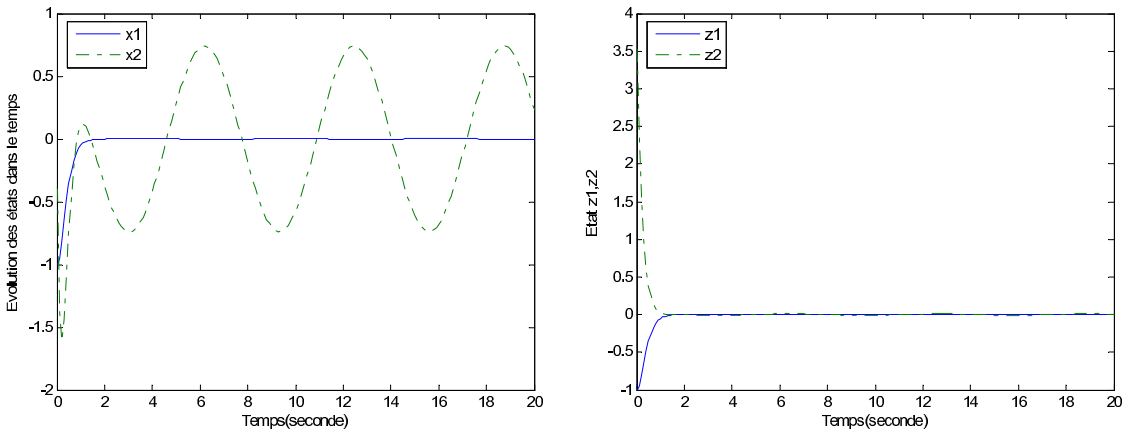
$$V_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \tag{2.100}$$

Les coordonnées de conception en (z_1, z_2) sont :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -c_1 z_1 - z_2 \\ \dot{z}_2 = -c_2 z_2 + z_1 \end{cases} \tag{2.101}$$

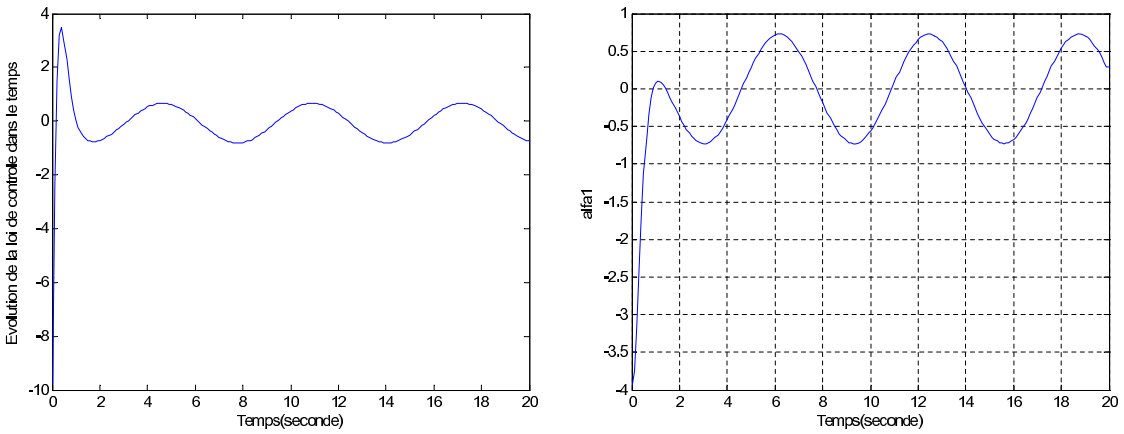
Résultats de simulations

Les figures de convergences des états vers le point d'équilibre $x_{eq} = 0$, la variation de la loi de commande en fonction du temps sont données comme suivant avec le choix des constantes de conception $c_1 = 4$ $c_2 = 3$:



(a) Variation des états x_1, x_2 en fonction du temps (b) Variation des états z_1,z_2 en fonction du temps

FIG. 2.18 – Convergence des états x_i z_i vers le point d'équilire $x_{eq} = 0$ pour l'oscillateur de Van der pool



(a) Variation de la loi de commande U

(b) Variation de la loi virtuelle α_1

FIG. 2.19 – Variation des lois de commande en fonction de temps pour l'oscillateur de Van der pool

Backstepping pour la poursuite d'un signal référence pour l'oscillateur de Van der pool

Pour la poursuite, la fonction stabilisante et la loi de commande finale sont : α_1 est donnée par :

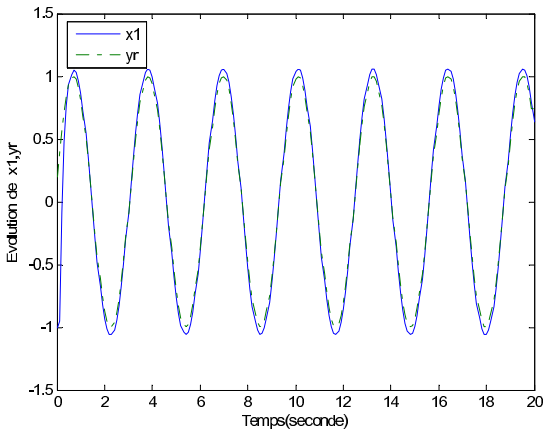
$$\alpha_1 = c_1 z_1 + x_1 - \frac{1}{3} {x_1}^3 + p_1) + p_2 \cos(\omega t) - \dot{y}_r \tag{2.102}$$

La loi de contrôle finale est donné :

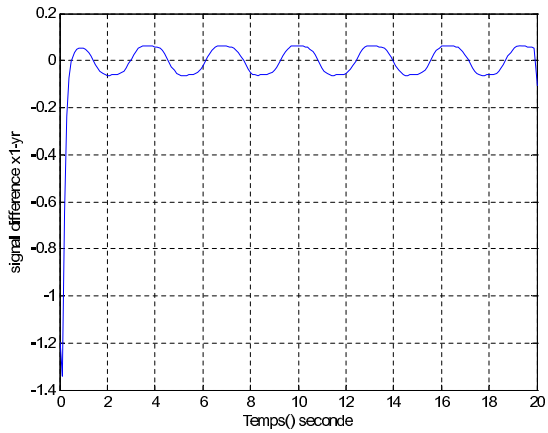
$$u = -c_2 z_2 + z_1 - p_3 (x_1 + p_4 - p_5 x_2) - ((c_1 z_1 + z_2 (c_1 + (1 - x_1^2) - p_2 \omega \sin(\omega t)) - \ddot{y}_r \tag{2.103}$$

Les figure de poursuite des états vers le signal de référence $y_r = \sin(t)$ et les lois de commandes virtuelle et finale pour l'oscillateur de Van der pool sont données comme suit avec les constantes de conception $c_1 = 10$;$c_2 = 5$; :

Résultats de simulations

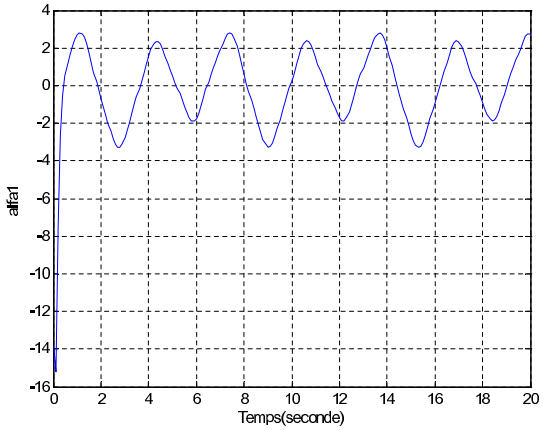


(a) Variation de l'état x_1 et $y_r$en fonction du temps pour l'oscillateur de Vander pools

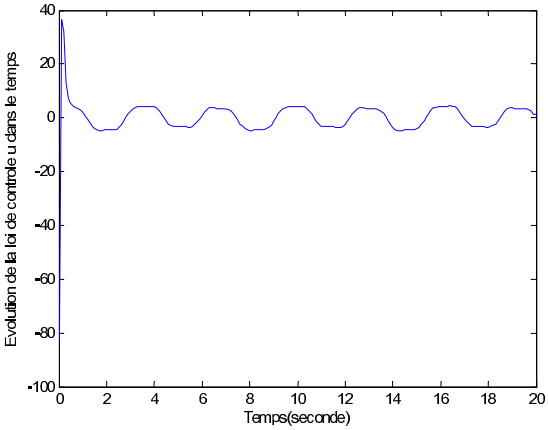


(b) Variation de l'état différence $x_1 - y_r$ en fonction du temps pour l'oscillateur de Vander pools

FIG. 2.20 – Convergence des états x_1 x_2 vers le signal référence pour l'oscillateur de de Van der pool



(a) Variation de la loi virtuelle α_1 en fonction de temps pour l'oscillateur de Vander pool



(b) Variation de la loi de commande de poursuite U en fonction de temps pour l'oscillateur de Vander pool

D'après ces figures, on peut voir l'état x_1 a eventuellement convergé asymptotiquement vers la trajectoire référence y_r et par conséquent l'erreur $x_1 - y_r$ a convergé vers 0 après un trés peu de temps et la poursuite est accomplie.

4.3 Système chaotique de Lorenz

Le modèle de climat d'Edward Lorenz fut le premier modèle manifestant un comportement chaotique,c'est un exemple célébre de système différentiel au comportement chaotique pour certaines valeurs de paramètres. Lorenz a publié ses travaux en 1963. A l'époque, il n'avait pu calculer que 500 iterations. La trajectoire n'avait alors décrit que quelques boucles. Pourtant, il avait déja prévu la structure de boucles imbriquées de l'attracteur.
Lorenz a simplifié quelques équations de la dynamique des fluides appelé aussi les équations de Navier Stokes et fini avec un ensemble de trois équations différentielles non linéaires [2].

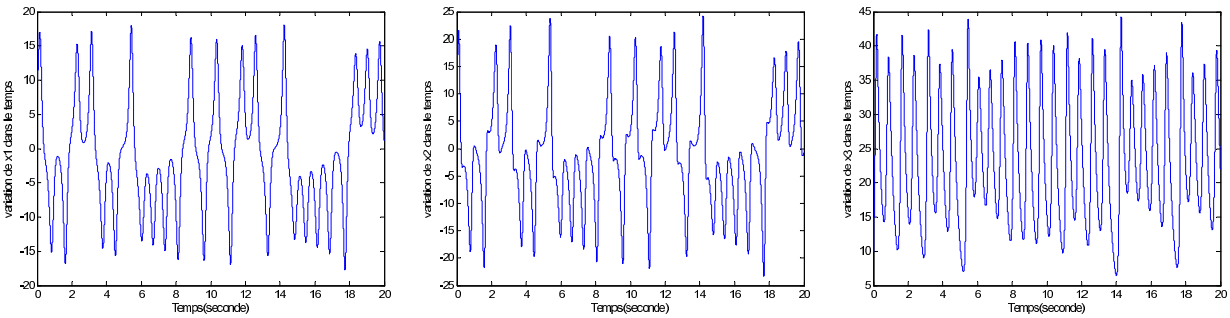
$$\begin{cases} \dot{x_1} = -\sigma\,(x_1 - x_2) \\ \dot{x_2} = -x_1\,x_3 + \rho\,x_1 - x_2 \\ \dot{x_3} = x_1\,x_2 - \beta\,x_3 + u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{2.104}$$

La variable x_1 est proportionnel à l'intensité de mouvement convective, x_2 est proportionnel à la différence de la température entre les courants ascindantd et descendants et la variable x_3 est proportionnel à la distorsion de la linéarité du profil de la température verticale.

On rappele que dans ces équations, σ est le nombre de Prandtl qui represente le quotient entre la viscosité du fluide à sa conductivité thermique, ρ représente la différence de température entre le sommet et le fond du système β est le quotient de la largeur à la hauteur de la boîte joignait le système [2].

Les valeurs que Lorenz a utilisé sont $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 3$.
L'espace des phases est tridimensionnel (x, y, z). L'espace de contrôle est tridimensionnel (σ, ρ, β).
A première vue ces trois équations paraissent simples à résoudre. Cependant, elles représentent un système dynamique extrêmement compliqué. Si on trace les trajectoires dans l'espace d'état à trois dimensions une figure appelée attracteur de Lorenz est obtenu. L'attracteur de Lorenz est un exemple d'attracteur étrange.

Les figures de la variations des différentes états dans le temps,ainsi que dans l'espace à trois dimensions du phénomène chaotique sont comme suit sous des conditions initiales et $(x_{10} = x_{20} = x_{30}) = (1, 1, 1)$.



(a) Variation de l'état x_1 (b) Variation de l'état x_2 (c) variation de l'état x_3

FIG. 2.21 – Variation des trois états en fonction du temps pour le système de Lorenz

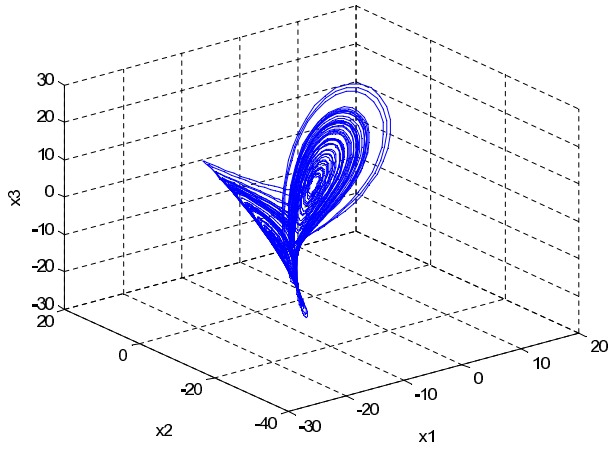


FIG. 2.22 – Comportement chaotiques dans l'espace d'état pour le système de Lorenz

Calcul des points d'équilibres

Le système présente un phénomène chaotique, et admet trois points d'équilibres.
Les points d'équilibres se calculent en faisant $f(x) = 0$.

$$\begin{cases} x_{eq0} = (0,0,\rho-1) = (0,0,0) \\ x_{eq+} = (\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1) = (9,9,27) \\ x_{eq-} = (-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)(-9,-9,27) \end{cases} \tag{2.105}$$

Au point d'équilibre $(0,0,0)$, on peut voir que ;

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0,0) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \tag{2.106}$$

Qui a pour valeurs propres :

$\lambda_1 = -\beta$

$\lambda_{2,3} = \frac{-(1+\sigma) \pm \sqrt{(1+\sigma)^2 + 4(\rho) - 1}}{2}$

dont une positive et deux autres négatives.

Translation de l'origine

Pour obtenir un système du type boucle de retour stricte, on fait une translation de l'origine du système (2.104) vers le point d'équilibre non stable positif [137] avec le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 = x_1 + \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ x_2 = x_2 + \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ x_3 = x_3 + (\rho-1) \end{cases} \tag{2.107}$$

Le système ainsi trouvé avec $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 3$ est sous la forme paramétrique du type boucle de retour strict :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10\,x_2 - 10\,x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_3\,(9 + x_1) + (x_1 - x_2) \\ \dot{x}_3 = 9\,(x_1 + x_2) - 3\,x_3 + x_1\,x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{2.108}$$

Avec :

$$\begin{cases} g_1(x_1,t) = 10,\ g_2(x_1,x_2,t) = -(9+x_1),\ g_3(x_1,x_2,x_3,t) = 1 \\ f_1(x_1,t) = -10\,x_1,\ f_2(x_1,x_2,t) = (x_1 - x_2),\ f_3(x_1,x_2,x_3t) = 9\,(x_1+x_2) - 3\,x_3 + x_1\,x_2 \end{cases} \tag{2.109}$$

Conception de la loi de commande de stabilisation basée sur le Backstepping pour le système de Lorenz

Le but de la commande du système non linéaire (2.108) est d'avoir

$$y(t) = x_1 \to 0 \quad quand \quad t \to \infty$$

L'objectif de la conception est de rendre le point d'équilibre, globalement asymptotiquement stable. Puisque le système original est constitué de trois états ou 3 équations différentielles non linéaires, alors il y aura une méthode de conception récurrsive à 3 étapes [139]. Dans la première étape pour rendre une fonction de Lyapunov appropriée du premier sous système,

$$\dot{V}_1 \;=\; z_1\,\dot{z_1} = z_1\,(10\,z_2 + 10\,\alpha_1 - 10\,x_1) = -10\,z_1^2 + 10\,z_2 z_1 \tag{2.110}$$

la fonction stabilisante $\alpha_1 = 0$ $\dot{V}_1$ est négative définie, le dernier terme sera éliminé dans la prochaine étape.
Donc l'équation en coordonnées (z_1, z_2) et valeur de la fonction de Lyapunov du premier sous système sont :

$$\begin{cases} \dot{z_1} = 10\,z_2 - 10\,z_1 \\ \dot{V}_1 = -10\,z_1^2 + 10\,z_2 z_1 \end{cases} \tag{2.111}$$

Utilisant $z_2 = x_2$, puisque $\alpha_1 = 0$, comme sortie et x_3 entrée du second sous système (2.108), réecrivant :

$\dot{x}_2 = -x_3\,(9 + x_1) + (x_1 - x_2)$,comme $\dot{z}_2 = \dot{x}_2$, Sachant que : $z_3 = x_3 - \alpha_2$, z_3 est la troisième varible de la procedure, α_2 représente la fonction stabilisant ou loi de contrôle virtuelle pour le second sous système. On procede maintenant à trouver la fonction de Lyapunov appropriée $V_2 = V_1 + \frac{1}{2}\,z_2^2$, avec une dérivée dans le temps :

$$\dot{V}_2 \;=\; \dot{V}_1 + z_2\,\dot{z}_2 = -10\,z_1^2 - z_2^2 + z_2\,(10\,z_1 - (9 + z_1)\,\alpha_2 - (9 + z_1)\,z_3) + z_1) \tag{2.112}$$

Pour rendre $\dot{V}_2$ négative définie, α_2 est choisie comme :

$$\alpha_2 = \frac{11\,z_1}{(9 + z_1)} \tag{2.113}$$

Alors :

$$\begin{cases} \dot{z_2} = -z_3\,(9 + z_1) + (9\,z_1 - z_2) \\ \dot{V}_2 = -10\,z_1^2 - z_2^2 - z_3\,z_2\,(9 + z_1) \end{cases} \tag{2.114}$$

Pour une stabilité globale le troisième terme sera éliminé dans la prochaine étape.
Sachant que : $z_3 = x_2 - \alpha_2$,et que u se trouve dans la troisième équation réecrivant :

$$\dot{x_3} \;=\; \dot{z_3} - \dot{\alpha}_2 \tag{2.115}$$

$$\begin{aligned} &= 9\,(z_1 + z_2) - 3\,z_3 - 3\,\alpha_2 + z_1\,z_2 + u) \\ &\quad - \frac{99(10\,z_2 - 10\,z_1)}{(9 + z_1)^2} \end{aligned} \tag{2.116}$$

Pour une fonction de Lyapunov appropriée du sous système : $V_3 = V_2 + \frac{1}{2}\,z_3^2$, avec une dérivée dans le temps :

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \;=\; & \dot{V}_2 + z_3\,\dot{z}_3 = -10\,z_1^2 - z_2^2 - 3\,z_3^2 + z_3\,(-z_2\,(9 + z_1) + 9\,(z_1 + z_2) - 3\,\alpha_2 + z_1\,z_2 + u \\ & - \frac{99(10\,z_2 - 10\,z_1)}{(9 + z_1)^2} \end{aligned} \tag{2.117}$$

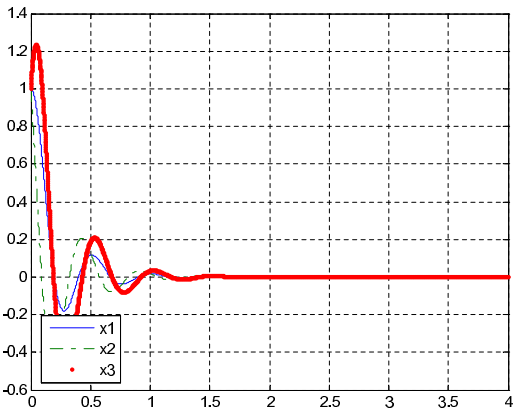
Pour rendre $\dot{V}_3$ définie négative , u est choisie comme :

$$u = -9\,z_1 + 33\,\frac{z_1}{(9 + z_1)} + 99\,\frac{(10\,z_2 - 10\,z_1)}{(9 + z_1)^2} \tag{2.118}$$

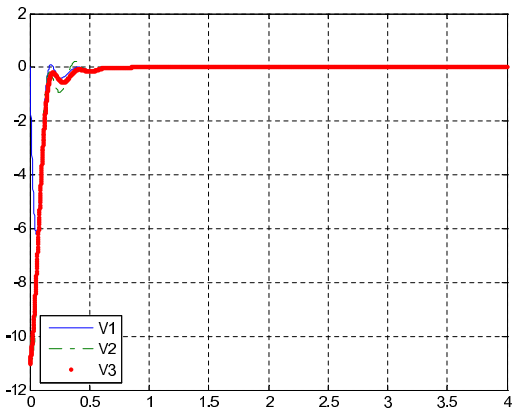
u Représente la loi de commande finale pour la stbilisation du système (4.82) à l'origine et alors le but de la commande est atteint.

Pour voir l'éfficacité des lois de commandes, on a fait l'intégration sur un petit intervale de temps. Les figure de convergence des états vers le point d'équilibre $x_{eq} = 0$ et la variation des la lois de commande virtuelle et finale pour le système chaotique de Lorenz sont données comme suit :

Résultats de simulations

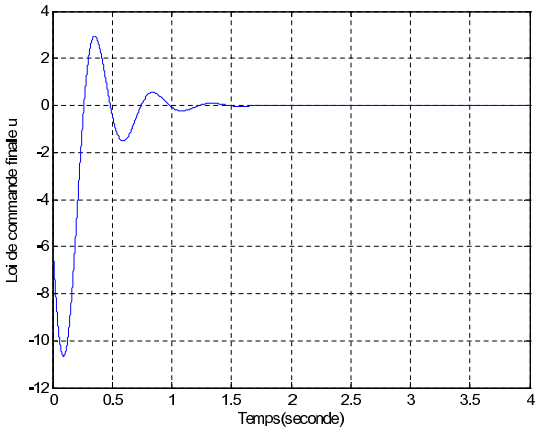


(a) Convergence des trois états vers le point d'équilire $x_{eq} = 0$

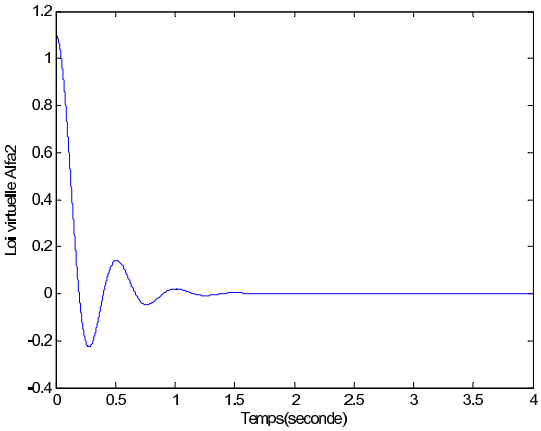


(b) Convergence des fonctions de Lyapunov

FIG. 2.23 – Variation des états et des fonctions de Lyapunov pour le système de Lorenz



(a) Variation de la loi de commande finale u



(b) Variation de la loi de commande virtuelle α_2

FIG. 2.24 – Variation des lois de commande pour le système de Lorenz

Backstepping pour la poursuite d'un signal référence pour le système de Lorenz

Pour la poursuite l'idée de base est de poser :

$$z_2 = x_2 - y_r \tag{2.119}$$

Et alors trouver une loi du contrôle pour l'entrée u tel qu'une sortie scalaire x_1 définie poursuit une trajectoire désirée y_r y compris les cycles limites stables ou instable aussi bien que les trajectoires chaotiques. Nous allons suivre les mêmes étapes qu'auparavant excepté quel'erreur est obtenue entre la sortie du deuxième sous-système et le signal de référence. Le choix de α_2 pour rendre négative définie V_2 après tout le calcul est :

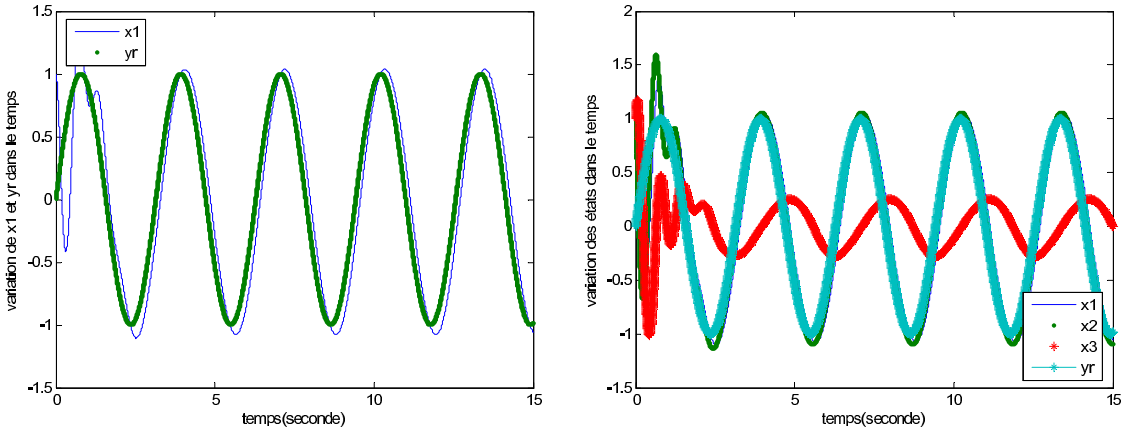
$$\alpha_2 = \frac{x_1 - y_r - \dot{y}_r}{(9 + z_1)} \tag{2.120}$$

Et la loi de la poursuite est :

$$u = \frac{3\,z_1 - 3\,y_r - 2\,\dot{y}_r - \ddot{y}_r}{(9 + z_1)} + \frac{(10\,z_2 - 10\,z_1 - y_r - \dot{y}_r)}{(9 + z_1)^2} - y_r(9 + z_1) - 9\,z_1 \tag{2.121}$$

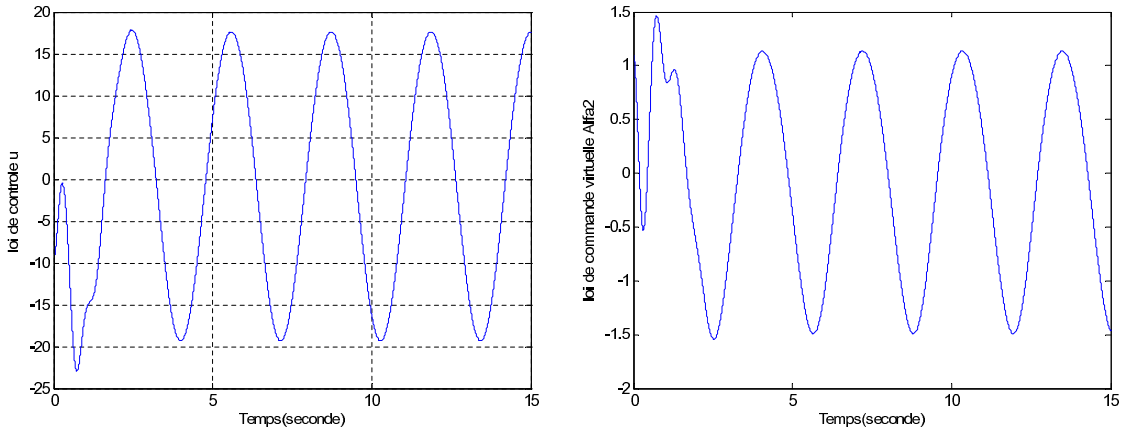
Résultats de simulations

Les figure de poursuite des états vers le signal de référence $y_r = \sin(\omega_r t)$ et la variation de la loi de commande de poursuite pour le système chaotique de Lorenz sont données comme suit :



(a) Convergence de x_1 vers y_r (b) Variation des états dans le temps

FIG. 2.25 – Variation des états x_1, x_2, x_3 et y_r pour le système de Lorenz



(a) Variation de la loi de commande finale u (b) Variation de la loi de commande virtuelle α_2

FIG. 2.26 – Variation des lois de commande de poursuite pour le système de Lorenz

4.4 Circuit chaotique de Chua

Le circuit de Chua est un circuit électrique du troisième ordre autonome, dissipative, il a été investit entièrement et expérimentalement sur le plan numériques et analytiques. Ce circuit, connu pour son répertoire riche de phénomènes dynamiques non linéaire et est devenu un paradigme universel pour le chaos.

Le schéma (**??**) suivant montre le circuit de Chua qui inclut deux condensateurs de capacité c_1, c_2, une résistance $R = \frac{1}{G}$, un inductance L et une résistance non linéaire NR applée aussi la diode de Chua dont la caractéristique est donnée par le schéma (2.28).

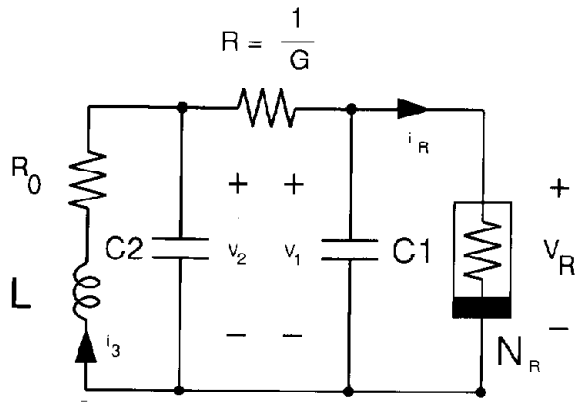


FIG. 2.27 – Circuit de Chua

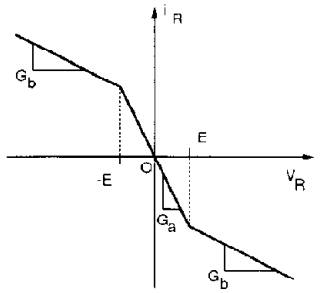


FIG. 2.28 – Caractéristique de Circuit de Chua

On utilisant l'analyse nodale, et on choisissant :

- v_1 la tension aux bornes de la capacité c_1 (et la résistance N_R).
- v_2 la tension aux bornes de la capacité c_2 (et l'inductance L).
- i_3 Le courant traversant l'inductance L.

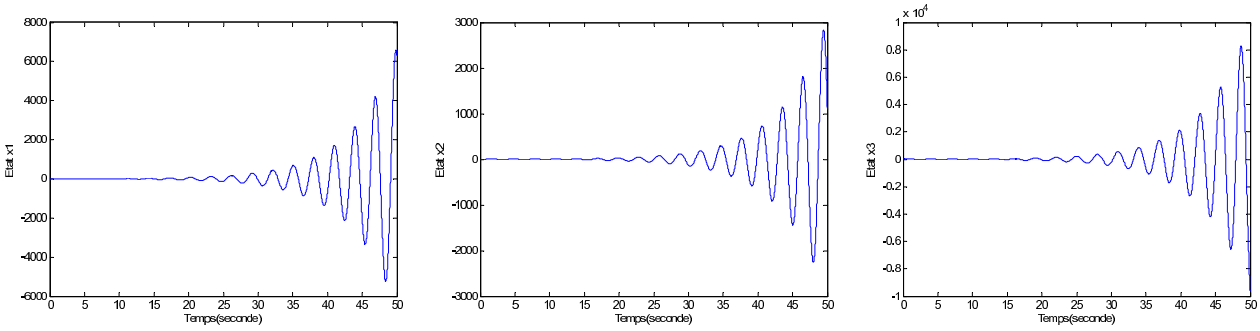
Le circuit du Chua est décrit par trois équations différentielles :

$$\begin{cases} c_1\,\dot{v_1} = \frac{1}{R}\,(v_2 - v_1 - f(v_1) \\ c_2\,\dot{v_2} = \frac{1}{R}\,(v_1 - v_2) + i_3) \\ L\,\dot{i_3} = -v_2 \end{cases} \tag{2.122}$$

avec :$f(v_1) = G_b\,v_1 + \frac{1}{2}\,(G_a - G_b)\,(\|(v_1 + 1)\| - \|(v_1 - 1)\|)),G = \frac{1}{R}$.
D'ou le système différentiel suivant :

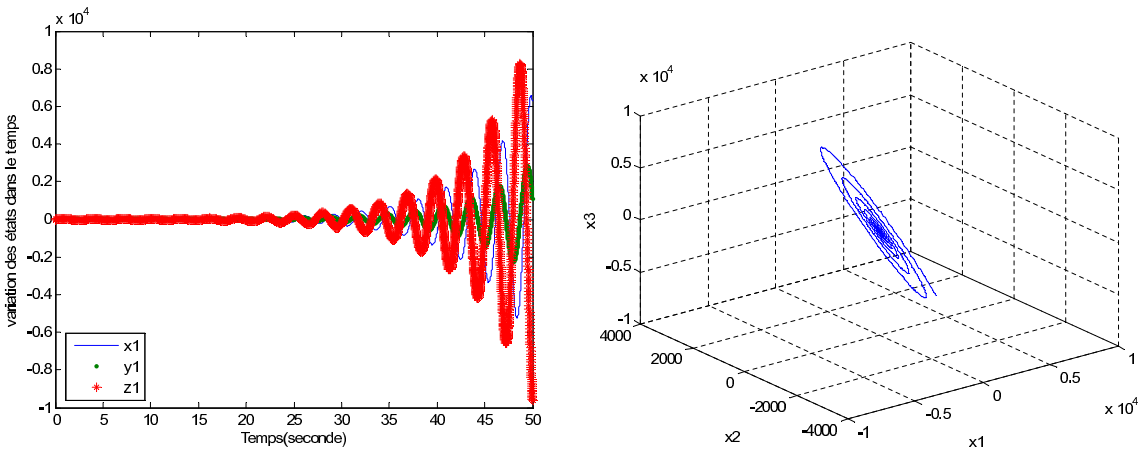
$$\begin{cases} \dot{v_1} = \frac{1}{c_1}\,((G\,(v_2 - v_1) - (G_b\,v_1 + \frac{1}{2}\,(G_a - G_b)\,(\|(v_1 + 1)\| - \|(v_1 - 1)\|))) \\ \dot{v_2} = \frac{1}{c_2}\,(G\,(v_1 - v_2) - i_3) \\ \dot{i_3} = -\frac{1}{L}\,v_2 \end{cases} \tag{2.123}$$

Pour les valeurs suivantes des paramètres du circuit de Chua, le système présente un comportement chaotique [176], $c_1 = \frac{1}{9}, c_1 = 1, G = 0.7, G_a = -0.8, G_b = -0.5, L = \frac{1}{7}$ [176], et comme conditions initiales $x1_(0) = -3.725, x_2(0) = -1.325, x_3(1) = -0.05$.
Les figures suivantes montrent les variations des différentes états du phénomène chaotique dans le temps, ainssi que dans l'espace des états à trois dimensions.



(a) Variation de l'état x_1 dans le temps (b) Variation de l'état x_2 dans le temps (c) Variation de l'état x_3 dans le temps

FIG. 2.29 – Comportement chaotique dans l'espace temporel pour le circuit de Chua



(a) Variation des états dans le temps

(b) Comportement chaotiques dans l'éspace des états

FIG. 2.30 – Comportement chaotique pour le circuit de Chua

Calcul des points d'équilibres

Le système (2.123) présente trois points d'équilibres, dont le point :
$(v_1, v_2, i_3) = (0, 0, 0)$ est un point d'équilibre. Au point d'équilibre $(0, 0, 0)$, et pour une simplification on prend $(v_1 = \pm 1)$ on peut voir que ;

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0,0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c_1}(G + G_b) & \frac{G}{c_1} & 0 \\ \frac{G}{c_2} & -\frac{G}{c_2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.124}$$

Si $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont les valeurs propres,donc elles verifient :

$$\lambda^3 + \lambda^2\left(\frac{G}{c_2} + \frac{G}{c_1} + \frac{G_a}{c_1}\right) + \lambda\left(\frac{G\,G_a}{c_1\,c_2} + \frac{1}{L\,c_2}\right) + \left(\frac{G + G_a}{L\,c_1 c_2}\right) = 0$$

On utilisant les valeurs des paramètres déja cités on a une valeur propre négative et deux autres conjuguées a partie réelle positive.

Circuit de Chua en boucle de retour strict

Pour transformer le système (2.123) en système en boucle de retour stricte, on faint un changement de variables des états suivant :

$$\begin{cases} x_1 = i_3 \\ x_2 = v_2 \\ x_3 = v_1 \end{cases} \tag{2.125}$$

Le système précédent deviendra :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -\frac{x_2}{L} \\ \dot{x_2} = \frac{1}{c_2}\left(G\,(x_3 - x_2) - x_1\right) \\ \dot{x_3} = \frac{1}{c_1}\left(\left(G\,(x_2 - x_3) - \left(G_b\,x_3 + \frac{1}{2}\,(G_a - G_b)\,(\|(x_3 + 1)\| - \|(x_3 - 1)\|\right)\right)\right) \end{cases} \tag{2.126}$$

Le système ainsi trouvé est sous la forme paramétrique du type boucle de retour stricte, où u est une fonction de contrôle à déterminer ultérieurement.

Recherche de la loi commande de stabilisation par la méthode de Backstepping pour le circuit chaotique de Chua

On appliquant les mêmes étapes que précédemment

1. La loi de contrôle virtuelle α_1, V_1, z_1 pour le premier sous système :

$$\begin{cases} \alpha_1 = k_{11}\, z_1 \\ \dot{z}_1 = -\frac{1}{L}\, z_2 - k_1\, z_1 \\ \dot{V}_1 = -k_1 z_1^2 - \frac{1}{L}\, z_1\, z_2 \end{cases} \tag{2.127}$$

   Où k_{11} est une constante de conception avec $k_1 = \frac{k_{11}}{L}$

2. La loi de contrôle virtuelle α_2, V_2, z_2 pour le second sous système :

$$\begin{cases} \alpha_2 = G_1\, z_1 - G_2\, z_2 \\ \dot{z}_2 = \frac{G}{c_2}\, z_3 - k_2 z_2 - \frac{1}{L}\, z_1 \\ \dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 + \frac{G}{c_2}\, z_2\, z_3 \end{cases} \tag{2.128}$$

   $G_1 = \frac{c_2}{G}(\frac{1}{L} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_{11}^2}{L} + c_{11})$
   $G_2 = \frac{c_2}{G}(\frac{1}{L} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_{11}^2}{L} + c_{11})$
   k_2 est une constante de conception appélée aussi gain positive.

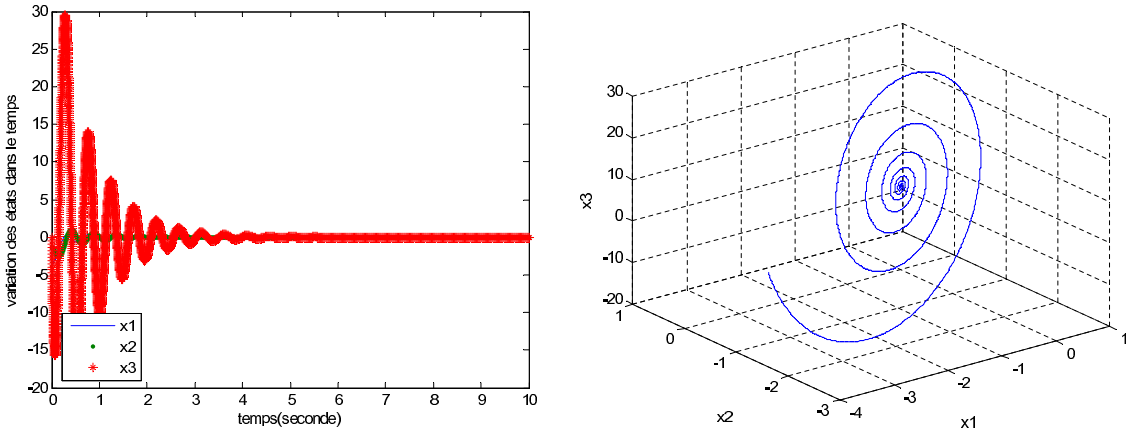
3. La loi de contrôle finale u, V_3, z_3 pour le troisième sous système :

$$\begin{cases} u = -A\, z_3 - B\, z_2 - C\, z_1 - g(x_2, x_3) \\ \dot{z}_3 = -k_3 z_3 - \frac{G}{c_2}\, z_2 \\ \dot{V}_3 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 - k_3 z_3^2 \end{cases} \tag{2.129}$$

Où
k_3 est une constante où gain positive avec :
$A = k_3 + \frac{G G_2}{c_2}$
$B = -\frac{G}{c_2} + k_2\, G_2 + \frac{G_1}{L}$
$C = k_1\, G_1 + \frac{G_2}{L}$
Et $g(x_2, x_3) = \frac{1}{c_1}\,(G\,(x_2 - x_3) - (G_b\, x_3 + \frac{1}{2}\,(G_a - G_b)\,(\|(x_3 + 1)\| - \|(x_3 - 1)\|)))$.

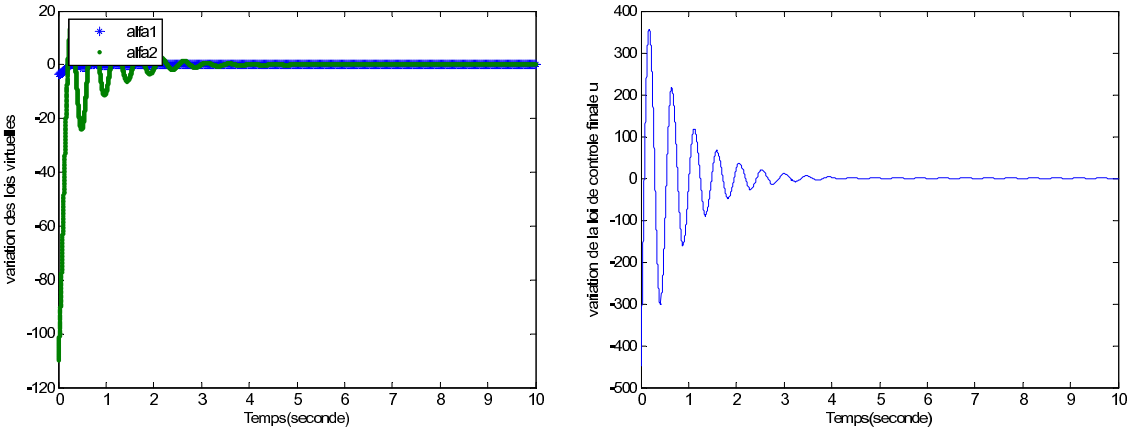
Résultats de simulations

Les figures illustront la convergence des états vers le point d'équilibre et l'évolution des lois de commandes virtuelles et finale avec un choix des constantes de conception $k_{11} = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, sont données par :



(a) Convergence des trois états dans le temps (b) Convergence des trois états dans l'éspace

FIG. 2.31 – Convergence des trois états vers le point d'équilire $x_{eq} = 0$ pour le circuit de Chua



(a) Variation des lois de commande virtuelles α_1, α_2 (b) Variation de la loi de commande finale u

FIG. 2.32 – Variation des lois de commande de stabilisation pour le circuit de Chua

Backstepping pour la poursuite d'un signal de référence pour le circuit de Chua

Pour la poursuite l'idée de base est de poser :

$$z_1 = x_1 - y_r \tag{2.130}$$

Nous allons suivre les mêmes étapes qu'auparavant excepté que l'erreur est obtenue entre la sortie du premier sous système et le signal de référence. Le choix de α_1 pour rendre négative

définie V_1 après tout le calcul est :

$$\alpha_1 = L(k_1\, z_1 - \dot{y}_r) \tag{2.131}$$

Et α_2 pour rendre négative définie V_2 après tout le calcul est :

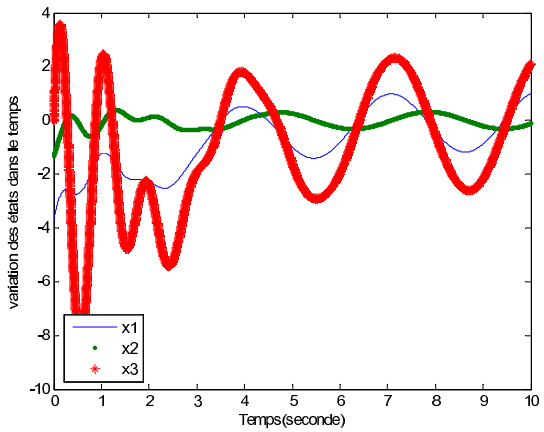
$$\alpha_2 = G_1\, z_1 + G_2\, z_2 + \frac{c_2}{G}\,(-L\,\ddot{y}_r - \frac{G\,L}{c_2}\,\dot{y}_r + \frac{y_r}{c_2}) \tag{2.132}$$

Et la loi de la poursuite est :

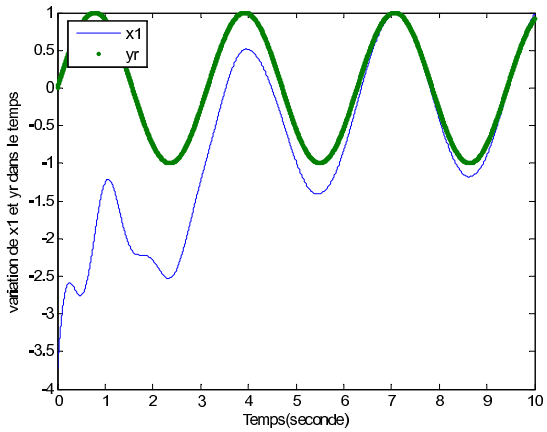
$$\begin{cases} u = -A\, z_3 - B\, z_2 - C\, z_1 - g(x_2, x_3) + \frac{c_2}{G}(-L\, y_r - \frac{G\,L}{c_2}\,\ddot{y}_r + \frac{1}{c_2}\dot{y}_r\,) \\ \dot{z}_3 = -k_3 z_3 - \frac{G}{c_2}\, z_2 \\ \dot{V}_3 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 - k_3 z_3^2 \end{cases} \tag{2.133}$$

Résultats de simulations

Les figures de poursuite des états vers le signal de référence $y_r = \sin(\omega_r t)$ et la variation de la loi de commande de poursuite pour le système chaotique de Chua pour un choix arbitraire de $K_{11} = -1, k_2 = 0.5, K_3 = 0.5$ sont données comme suit :



(a) Variation des états x_1 , x_2, x_3

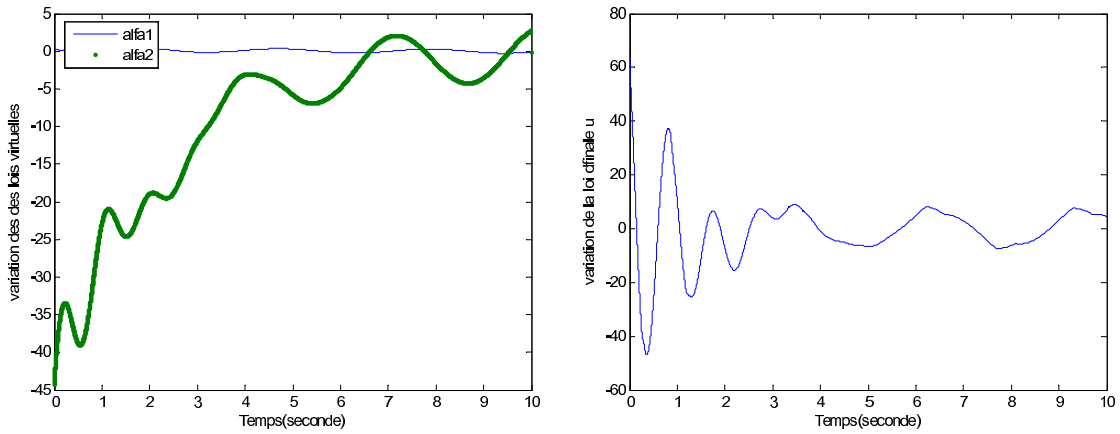


(b) Variation des états x_1 et y_r

FIG. 2.33 – Variation des états pour la poursuite de référence pour le circuit de Chua

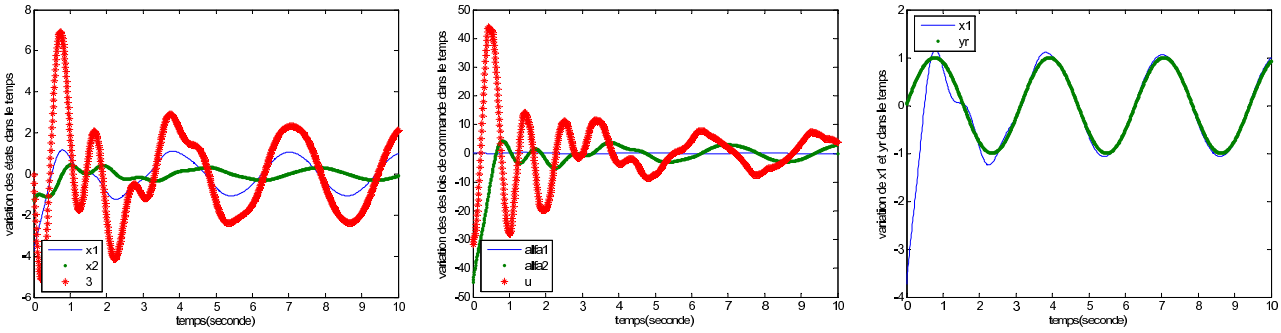
optimisation des paramètres de conception par les AGs

Pour un choix optimisé des paramètres de conception par les algorithmes génétiques ou $k_{11} = -0.8999, k_2 = 0.2093$ et $k_3 = 2.55840$, on aura une amélioration du temps de convergence et une poursuite totale du signal de référence illustré par les figures suivantes .



(a) Variation des lois de commande virtuelles α_1, α_2 (b) Variation de la loi de commande finale u

FIG. 2.34 – Variation des lois de commande de poursuite pour le circuit de Chua



(a) Variation des états x_1, x_2 et x_3 (b) Variation des lois de commande de poursuite (c) Variation des états x_1 et y_r

FIG. 2.35 – Variation des états avec des paramètres de conception optimisés pour la poursuite de référence pour le système de Chua

4.5 Système chaotique de Rössler

Otto Rossler est connu pour avoir publié l'un des deux systèmes les plus utilisés dans le développement de techniques d'analyse des systèmes chaotiques. Pour la plupart, la contribution d'Otto Rössler se limite ainsi à un jeu de trois équations différentielles ordinaires publié en 1976 et produisant un attracteur chaotique très simple, résultant d'un étirement et d'un repliement. Otto Rossler conçut son attracteur en 1976 dans un but purement théorique, mais ces équations s'avérèrent utiles dans la modélisation de l'équilibre dans les réactions chimiques. L'article original de Rössler mentionnait que son système a été conçu pour fonctionner d'une façon similaire au système de Lorenz, mais également pour être plus simple à analyser, il ne présente qu'une seule spirale [35]-[37].

Le fameux système de rösslor est défini par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_2 - y_3 \\ \dot{y}_2 = y_1 + a\, y_2 \\ \dot{y}_3 = b + y_3(y_1 - c) \end{cases} \tag{2.134}$$

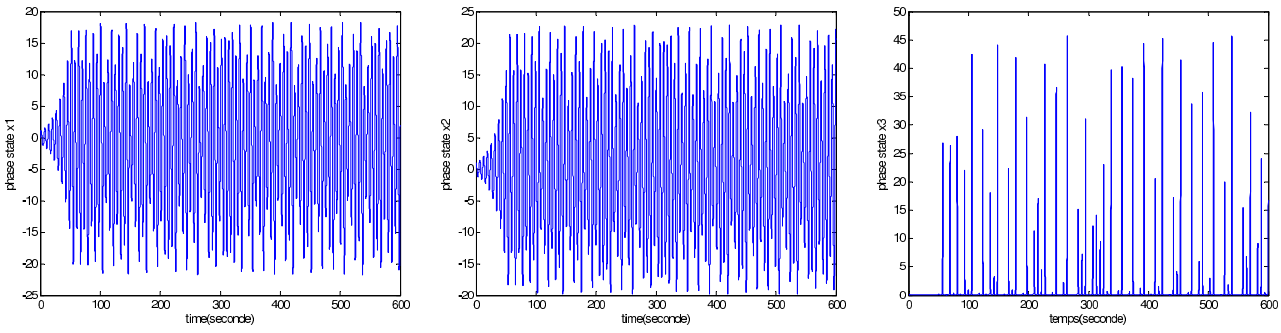
Avec a, b, c, sont des paramètres de controle du système chaotique.

Calcul des points d'équilibres

Pour trouver les points d'équilibres, les trois équations de Rössler sont posées égales à zéro. Le système est alors résolu et donne le résultat suivant :

$$\begin{cases} y_1 = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4\,a\,b}}{2} \\ y_2 = -\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4\,a\,b}}{2\,a} \\ y_3 = -\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4\,a\,b}}{2\,a} \end{cases} \tag{2.135}$$

Ce qui, maintenant, peut être utilisé pour présenter les points d'équilibres pour des valeurs données de paramètres : $\left(\frac{c+\sqrt{c^2-4\,a\,b}}{2}, \frac{-c-\sqrt{c^2-4\,a\,b}}{2\,a}, \frac{-c+\sqrt{c^2-4\,a\,b}}{2\,a}\right)\left(\frac{c-\sqrt{c^2-4\,a\,b}}{2}, \frac{-c+\sqrt{c^2-4\,a\,b}}{2\,a}, \frac{-c-\sqrt{c^2-4\,a\,b}}{2\,a}\right)$
Pour les valeurs suivantes $a = 0,1$, $b = 0.1$, $c = 13$, le système présente un phénomène chaotique. les figures du comportement chaotique, variation dans le temps des états sont données par :



(a) Evolution de l'état x_1 (b) Evolution de l'état x_2 (c) Evolution de l'état x_3

FIG. 2.36 – Comportement chaotique dans l'espace temporel pour le système de Rössler

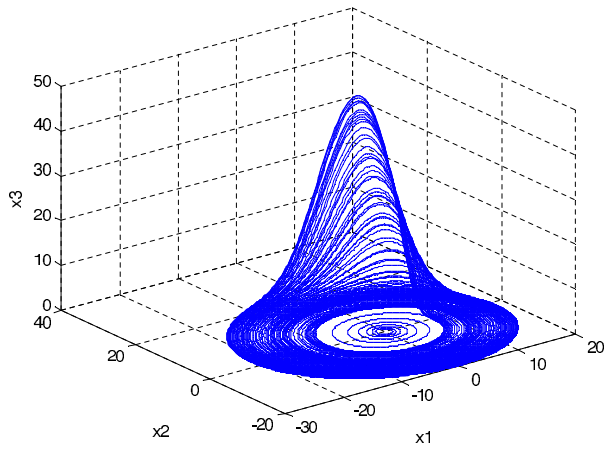


FIG. 2.37 – Comportement chaotique dans l'espace pour le système de Rössler

Transformation du système en forme paramétique stricte Il est claire que le système n'est sous la forme paramétrique de boucle de retour stricte , avec une petite transformation des variables d'état oú on pose :

$$\begin{cases} x_1 = y_2 \\ x_2 = y_1 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \tag{2.136}$$

le système (2.135)devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 - a \\ \dot{x}_2 = -x_3 - x_1 \\ \dot{x}_3 = x_3(x_2 - c) + b + u \end{cases} \tag{2.137}$$

Avec :

$$\begin{cases} g_1(x_1,t) = 1,\ g_2(x_1,x_2,t) = -1,\ g_3(x_1,x_2,,x_3t) = 1 \\ f_1(x_1,t) = -a + x_1,\ f_2(x_1,x_2,t) = -x_1,\ f_2(x_1,x_2,x_3,t) = b + x_3(x_2 - c) \end{cases} \tag{2.138}$$

Conception de la loi de commande basée sur le Backstepping pour le système de Rössler

Puisque le système original est régi par trois états ou 3 équations différentielles non linéaires, alors il y aura une méthode de conception récursive à 3 étapes.

1. La loi de contrôle virtuelle α_1 ;V_1,z_1 pour le premier sous système :

$$\begin{cases} \alpha_1 = -c_{11}z_1 + a - z_1 = -c_1 z_1 + a \\ \dot{z}_1 = z_2 - c_{11}z_1 \\ \dot{V}_1 = -c_{11}z_1^2 + z_1\, z_2 \end{cases} \tag{2.139}$$

   Ou $c_1 = c_{11} + 1$ est une constante de conception positive.

2. La loi de contrôle virtuelle α_2, V_2, z_2 pour le second sous système :

$$\begin{cases} \alpha_2 = -c_1\, c_{11}\, z_1 + c_1 z_2 \\ \dot{z_2} = -z_3 - c_1\, z_2 + c_2\, z_1 \\ \dot{V}_2 = -c_{11}z_1^2 - c_2 z_2^2 - z_2\, z_3 \end{cases} \tag{2.140}$$

   Avec : $c_2 = c_1\, c_{11} - 1$.

3. La loi de contrôle finale u, z_3, V_3 pour le troisième sous système :

$$\begin{cases} u = z_2 - b - x_3(x_2 - c) - c_1\, c_{11}\, (z_2 - c_{11}z_1) - c_1\, (-c_1\, z_2 + c_2\, z_1) \\ \dot{z_3} = -c_3 z_3 + z_2 \\ \dot{V}_3 = -c_{11}z_1^2 - c_1 z_2^2 - c_1\, z_3^2 \end{cases} \tag{2.141}$$

Résultats de simulations

Les figures de la convergences des états vers le point d'équilibre $x_{eq} = 0$, la variation de la loi de commande en fonction du temps sont données comme suivant :

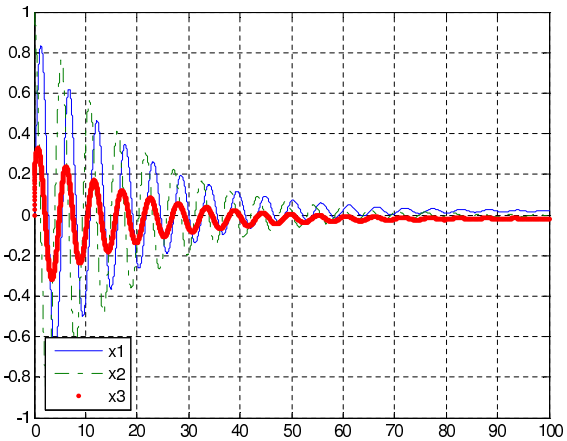
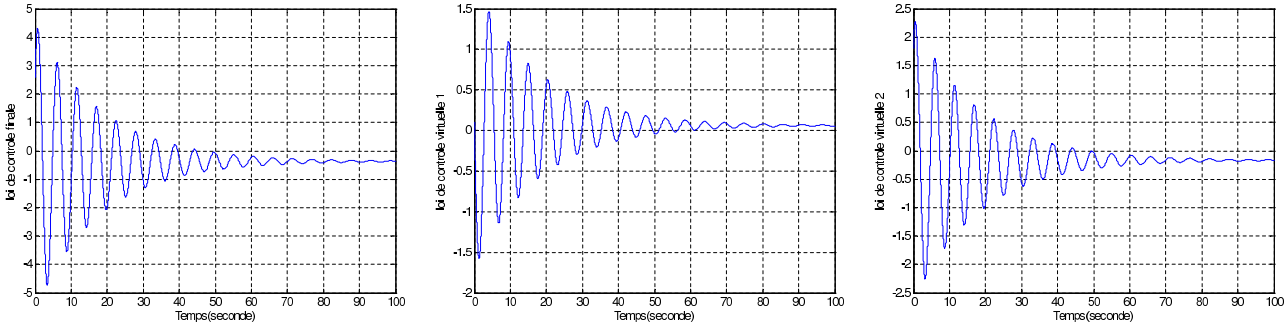


FIG. 2.38 – Convergence des trois états dans le domaine temporel pour le système de Rössler



(a) Evolution de la loi de commande virtuelle α_1

(b) Evolution de la loi de commande virtuelle α_2

(c) Evolution de la loi de commande u

FIG. 2.39 – Evolution des lois de commande en fonction de temps pour le système de Rössler

Calcul de la loi de commande de poursuite basée sur le Backstepping pour le système de Rössler

Pour la poursuite les fonctions stabilisantes et la loi de commande finale por le système de Rösslor sont : α_1 est donnée par

$$\alpha_1 = -c_{11}z_1 + a - z_1 = -c_1 z_1 + a + \dot{y}_r \tag{2.142}$$

avec $c_1 = c_{11} + 1$. α_2 est donnée par

$$\alpha_2 = -c_2\, z_1 + \ddot{y}_r \tag{2.143}$$

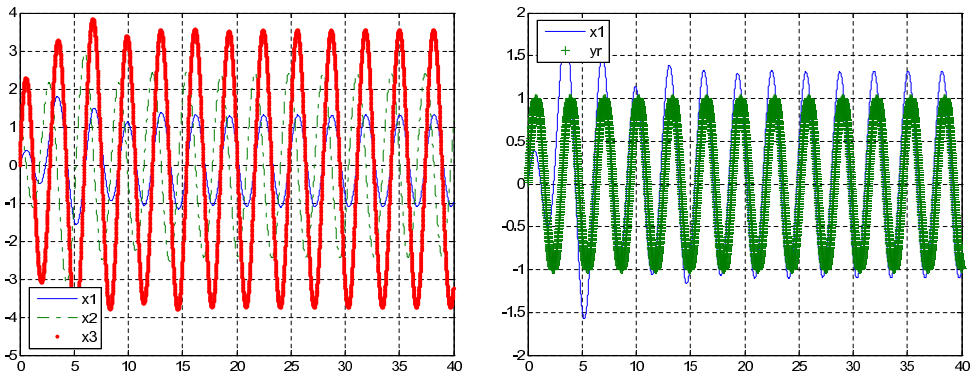
La loi de contrôle finale est donné :

$$u = -c_3 z_3 + z_2 - b - x_3(x_2 - c) - c_2\,(z_2 - c_{11}z_1) + \ddot{y}_r \tag{2.144}$$

Résultats de simulations

Les figures de la poursuite des états vers le signal de référence $y_r = \sin(w_r t)$, la variation des lois de commande virtuelle et la loi de commande finale en fonction du temps sont données comme suivant :

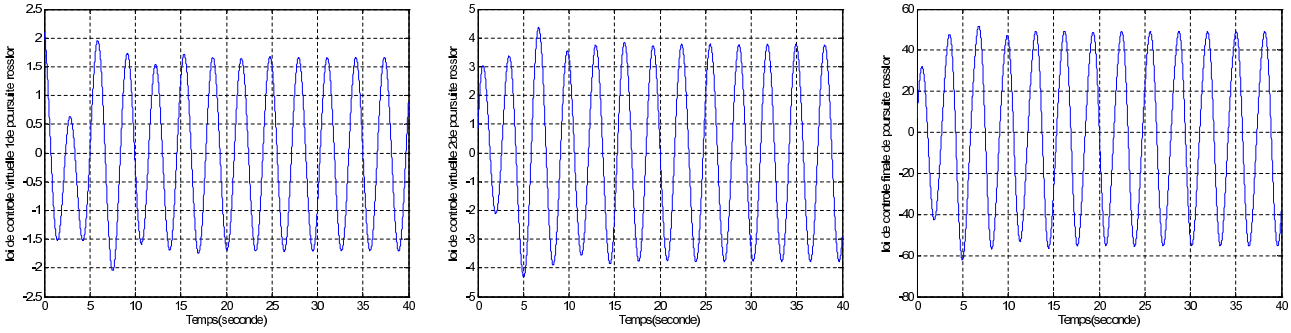
Pour des constantes de conception choisies aléatoirement $c_{11} = 0.1, c_2 = 0.01, c_3 = 0.01$:



(a) Evolution des états x_1, x_2 et x_3 dans le temps

(b) Evolution de x_1 et y_r dans le temps

FIG. 2.40 – Evolution des états en poursuite pour le système de Rössler



(a) Evolution de la loi de commande virtuelle $\alpha_1 depoursuite$

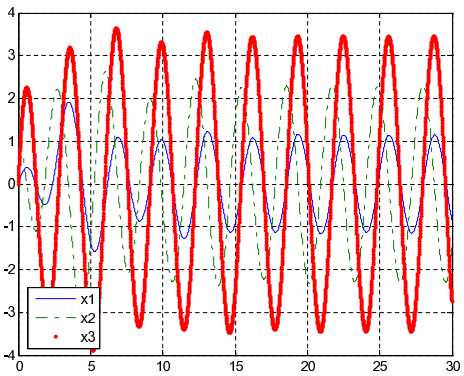
(b) Evolution de la loi de commande virtuelle α_2

(c) Evolution de la loi de commande u

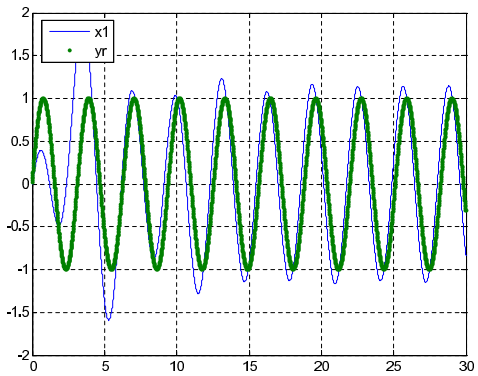
FIG. 2.41 – Evolution des lois de commande en fonction de temps de poursuite pour le système de Rössler

Remarque 1

On remarque que pour la poursuite, il ya un certain décalage dans l'amplitude, donc on peut envisager une correction linéaire par un contrôleur PID dont les gains sont optimisés par la méthode des algorithmes génétiques simulé sur matlab dont les valeurs sont $P = 0.0748, I = -0.0016, D = -0.1505$. Les figures de la poursuite de l'étatx_1 vers le signal de référence y_r, la variation des lois de commande du contrôleur PID en fonction du temps sont données comme suivant :

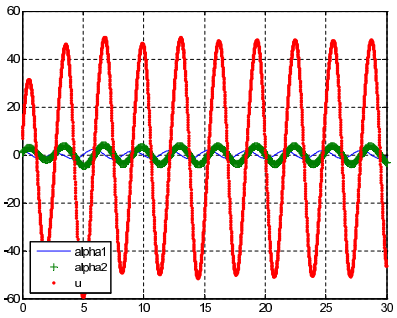


(a) Evolution des états x_1, x_2 et x_3 en fonction de temps

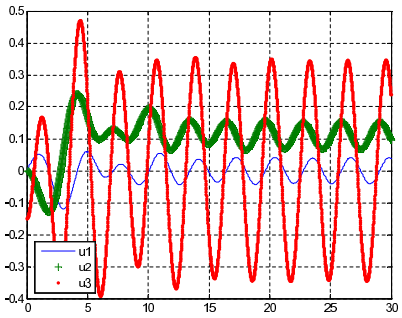


(b) Evolution de x_1 et y_r pour le système de Rossler

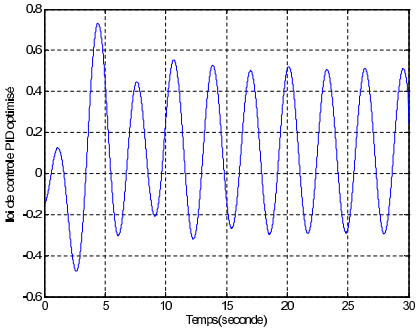
FIG. 2.42 – Evolution des états pour le système de Rössler en présence de PID



(a) Variation des lois de commandes virtuelles et finale de poursuite



(b) Variation des lois de commande des contrôleurs P, I, D

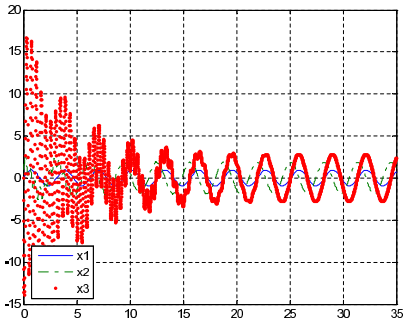


(c) Variation de la loi de commande du contrôleur PID en fonction de temps

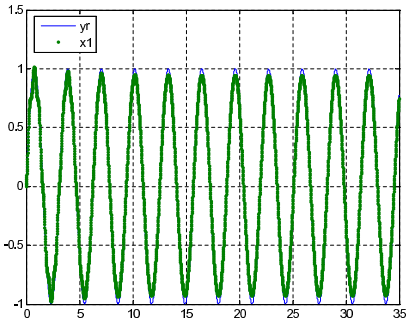
FIG. 2.43 – Variation des lois de commande en présence du PID pour le système de Rössler

Remarque 2

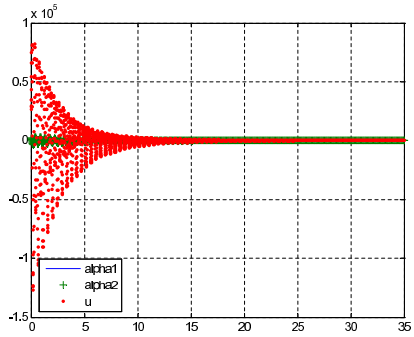
Mais Le décalage persiste toujours car les amplitudes des lois de commandes virtuelles et finales sont plus intenses que celles des lois de commandes de sortie du contrôleur PID, donc le problèmes réside dans le choix des constantes de conception c_{11}, c_2, c_3. Pour une poursuite totale, ces constantes vont être optimisées par la méthode des algorithmes génétiques simulées sur matlab.$c_{11} = 16.5460, c_2 = -9.5061, c_3 = 1.8087$, les figures montrant cette poursuite totale sont données comme suit :



(a) Variation des états x_1, x_2 et x_3 en fonction de temps



(b) variation de x_1 et y_r en fonction du temps



(c) Variation des lois de commandes virtuelles et finale de poursuite

FIG. 2.44 – variation des états et les lois de commande avec les c_i optimisées pour le système de Rössler

5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a établi des lois de commandes virtuelles, des lois de commande finales et des fonction de Lyapunov quadratiques définies négatives pour la commande vers un point d'équilibre stable pour les systèmes chaotiques autonomes du troisième ordre tels que les circuits de Chua et de Rosslor et le système de Lorenz, et vers un cycle limite stable pour les systèmes chaotiques non autonomes du second ordre tels que les oscillateurs de Duffung et de Vander pool, la poursuite de trajectoire référence ou un signal sinusoidale est choisi est aussi appliquée sur ces systèmes. Une stabilisation uniformément globalement exponentielle est obtenue selon le théorème de Lassale et le théorème de LaSalle et Yoshizawa.
Dans un premier temps on a mis ces systèmes sous la forme paramétrique stricte conddition nécessaire pour l'application de la méthode du backstepping, des lois de commande et commande en poursuite ont ensuite été développée en adoptant un formalisme basé sur le backstepping. Les systèmes chaotiques non autonomes du second ordre etaient plus simple à commander et le choi des constantes de conception ne posait pas de problème, mais pour les systèmes chaotiques autonommes du troisième ordre qui représentaient quelques singularités, un algorithme d'optimisation des constantes de conception et même des gains pour les correcteurs PID étaient indispensables pour l'amélioration de la convergence vers le point d'équilibre stable et la poursuite globale pour une trajectoire référence.

Dans le Backstepping, une chose important est que les non linéarités peuvent être traitées en plusieurs moyens, les non linéarités utiles contribuant dans la stabilisation ont été retenues dans la fonction de Lyapunov, tandis que les non linéarités non utiles ont été remplacées par un contrôle linéaire ce qui nécessite alors un effort de contrôle et mieux encore, des lois de commande résultantes optimales garantissant une certaine propriété de robustesse.

Chapitre 3

Backstepping Adaptatif pour la commande des systèmes dynamiques chaotiques

le contrôle adaptatif des systèmes non linéaires, est considéré comme une région de la recherche passionnante impressionnant de sa rapide prospérité grâce au résultats de stabilité globale et de poursuite pour une grande classe des systèmes non linéaires de forme de boucle de retour stricte. Basé sur la théorie de Lyapunov, c.-à-d., la procédure de conception accomplit les objectifs désirés en construisant une fonctions de Lyapunov convenable et rendre sa dérivé définie négative [181]- [192].

1 Théorie du Backstepping adaptatif

La procédure de conception de contrôle adaptatif non linéaire est présenté dans cette section dont lequel le nombre d'estimation des paramètres est minimal c. à. d. égal au nombre de paramètres inconnus. Les systèmes adaptatifs commandés par cette procédure possèdent des propriétés de stabilité robuste.
En plus de l'application du Backstepping adaptatif pour la comande en stabilisation des systèmes chaotiques, la poursuite d'un signal référence est un problème très fréquent. Dans cette section nous étendons la méthode du backstepping adaptatif Pour la poursuite d'un signal référence des système chaotique sous la forme de boucle de retour stricte.
Considérons un système non linéaire transformable dans la forme de boucle de retour paramé-

trique stricte :

$$\begin{cases} \dot{x_i} = g_i(x_i, t)x_{i+1} + f_i(x_i, t) + \theta^T F_i(x_i, t) \\ (i = 1, \cdots, n-1) \\ \dot{x_n} = g_n(x_n, t)\, u + f_n(x_n, t) + \theta^T F_n(x_n, t) \\ y = x_1 \\ x_{t0} = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $x_i = [x_1, x_2, \cdots, x_i]) \in \mathfrak{R}^i, (i = 1, \cdots, n-1), u \in \mathfrak{R}$, $y \in \mathfrak{R}$ sont respectivement le vecteur des états entrées et la sortie.

$\theta \in \mathfrak{R}^p$ est le vecteur des paramètres constantes inconnues à estimer.

$g_i(.) \neq 0, f_i, F_i, i = 1, \cdots, n-1$ sont des fonctions non linéaires continues et dérivables.

$g_n(.) \neq 0, f_n, F_n$, sont des fonctions non linéaires continues.

Et un modèle de référence connu, dérivable et borné comme suit.

$$\begin{cases} \dot{x_{ri}} = f_{ri}(x_{ri}, t) \\ (i = 1, \cdots, m); n \leq m \\ y_r = x_{r1} \end{cases} \tag{3.2}$$

Où $x_r = [x_{r1}, x_{r2}, \quad \cdots, x_{ri}]^T \in \mathfrak{R}^m$, $y_r \in \mathfrak{R}$ sont respectivement le vecteur des états et de sortie du signal référence.

$f_{ri} = (.), \quad i = 1, 2, , \cdots, m$ sont des fonctions non linéaires connues et dérivables.

Notre objectif est de concevoir un contrôleur adaptatif dans la contre réaction pour le système (3.1) qui garantit la stabilité globale, et force la sortie $y = x_1(t)$ du système à suivre asymptotiquement la sortie $y_r = x_{r1}(t)$ du modèle référence, c. à d. :

$$\|y(t) - y_r\| \to 0 \qquad \text{quand} \qquad t \to \infty. \tag{3.3}$$

La procédure de conception est récursive, durant la $i^{\text{ième}}$ étape, le $i^{\text{ièm}}$ sous système est stabilisé sous une fonction de Lyapunov appropriée V_i par la mise au point d'une fonction stabilisante α_i et une fonction de réglage τ_i. La loi de mise à jour pour le paramètre estimé$\hat{\theta}(t)$, et le contrôle actuel u n'est déterminée qu'en dernière étape.

Première étape :

Commençons par le sous-système x_1.Introduisant la première variable du " backstepping " comme l'erreur de poursuite $\xi_1 = x_1 - x_{r1}$ et et l'erreur des paramètres inconnus $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$

Ou : θ est la valeur du paramètre adaptatif courent

$\hat{\theta}$ est la valeur du paramètre adaptatif estimé,

$\tilde{\theta}$ est la valeur de l'erreur sur paramètre adaptatif.

Et comme deuxième variable, $\xi_2 = x_2 - x_{r2} - \alpha_1$

Où :$\xi_1$et ξ_2 sont des variables virtuelles de la procédure et α_1 est utilisé comme une loi de contrôle pour stabiliser la première équation du système qui sera défini plus tard. Réécrivant le premier sous système comme :

$\dot{\xi_1} = \dot{x_1} - \dot{x_{r1}}$,

$$\dot{\xi_1} = g_1\,(x_2 - x_{r2}) + f_1 + \hat{\theta}^T\,F_1 - \tilde{\theta}^T\,F_1 - f_{r1} + g_1 x_{r2}$$

Pour une uniformité et une simplification de notation pour toutes les étapes on pose :

$F_{1tp} = F_1$

$f_{1tp} = f_1 - f_{r1} + g_1 x_{r2}$.

$$\dot{\xi_1} = g_1\,\xi_2 + g_1\,\alpha_1 + f_{1stp} + \hat{\theta}^T\,F_{1tp} - \tilde{\theta}^T\,F_{1tp} \tag{3.4}$$

Pour trouver cette loi de contrôle nous construisons une fonction Lyapunov partielle de type quadratique :

$$V_1(\xi_1) = \frac{1}{2}\,\xi_1^2 + \frac{1}{2}\,\tilde{\theta}^T\,\Gamma^{-1}\,\tilde{\theta} \tag{3.5}$$

Sa dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_1 = \xi_1\dot{\xi}_1 + \tilde{\theta}^T\,\Gamma^{-1}\,\dot{\hat{\theta}} \tag{3.6}$$

$\dot{V}_1 = \xi_1(g_1\,\xi_2 + g_1\,\alpha_1 + f_{1stp} + \hat{\theta}^T\,F_{1st} - \tilde{\theta}^T\,F_{1stp})\tilde{\theta}^T\,\Gamma^{-1}\,\dot{\hat{\theta}}\,\dot{V}_1 = \xi_1(g_1\,\xi_2 + g_1\,\alpha_1 + f_{1stp} + \hat{\theta}^T\,F_{1stp}) + \tilde{\theta}^T\,\Gamma^{-1}\,(\dot{\hat{\theta}} - \xi_1\,F_{1stp})$ Si x_2 était notre loi de contrôle actuelle, alors $\xi_2 \cong 0$ sera nulle c. à. d $x_2 = \alpha_1$. Donc, nous en éliminerons $\tilde{\theta}$ de $\dot{V}_1$ avec une loi de mise à jour loi $dot\hat{\theta} = \tau_1$, où

$$\tau_1 = \xi_1\,F_{1stp}$$

Est la fonction de réglage. Pour rendre $\dot{V}_1 = -c_1\,\xi_1^2$, définie négative on choisit α_1 comme :

$$\alpha_1 = \frac{1}{g_1}\,(-c_1\,\xi_1 - f_{1stp} - \hat{\theta}^T\,F_{1stp}) \tag{3.7}$$

Où $c_1 \succ 0$ est une constante de conception positive .

$\Gamma = \Gamma^T$ est la matrice de gain d'adaptation.

Du moment que x_2 n'est pas notre loi de contrôle actuelle, alors $\xi_2 \not\cong 0$,$dot\hat{\theta} = tau_1$ n'est pas utilisée comme une loi de mise à jour. Cependant, nous pouvons retenir τ_1, comme notre première fonction de réglage et α_1 comme notre première fonction stabilisante. Donc on remet approximativement la décision sur $\dot{\hat{\theta}}$ et on tolère la présence de $\tilde{\theta}$ dans$\dot{V}_1$.

$$\dot{V}_1 = -c_1\,\xi_1^2 + g_1\,\xi_2\,\xi_1 + \tilde{\theta}^T\,\Gamma^{-1}\,(\dot{\hat{\theta}} - \tau_1) \tag{3.8}$$

Pour une stabilité globale, le dernier terme $g_1\xi_1\xi_2$ sera éliminé dans la prochaine étape.

L'équation en boucle fermée est :

$$\dot{\xi_1} = -c_1\,\xi_1 + g_1\,\xi_2 + \tilde{\theta}^T\,\Gamma^{-1}\,(\dot{\hat{\theta}} - \tau_1) \tag{3.9}$$

Deuxième étape

Réécrivant la deuxième équation du système comme :

$\dot{\xi_2} = \dot{x_2} - \dot{x_{r2}} - \dot{\alpha_1}$

Sachant que :

$$\dot{\alpha_1} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\,\dot{x_1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_{r1}}\,\dot{x_{r1}} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}^T}\,\dot{\hat{\theta}^T}$$

$$\dot{\alpha_1} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\,(g_1\,x_2 + f_1 + \hat{\theta}^T\,F_1 - \tilde{\theta}^T\,F_1) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_{r1}}\,(f_{r1}) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}^T}\,\Gamma\,\xi_1\,F_{1stp}$$

Et introduisant la troisième variable de la procédure

$$\xi_3 = x_3 - x_{r3} - \alpha_2$$

Avec α_2 est utilisé comme une loi de contrôle pour stabiliser la seconde équation du système

$$\dot{\xi_2} = g_2\,(\xi_3+\alpha_2)+f_2+\hat{\theta}^T\,F_2-\tilde{\theta}^T\,F_2-f_{r2}+g_2 x_{r3}-(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\,(g_1\,x_2+f_1+\hat{\theta}^T\,F_1-\tilde{\theta}^T\,F_1)+\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_{r1}}\,(f_{r1})+\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}^T}\,\dot{\hat{\theta}^T})$$

Pour une uniformité et une simplification de notation pour toutes les étapes on pose :

$F_{2tp} = F_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\,F_1$

$f_{2tp} = f_2 - f_{r2} + g_2 x_{r3} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\,(g_1\,x_2 + f_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_{r1}}\,(f_{r1}) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}^T}\,\Gamma\,\xi_1\,F_{1stp}$

Donc :

$$\dot{\xi_1} = g_2\,\xi_3 + g_2\,\alpha_2 + f_{2tp} + \hat{\theta}^T\,F_{2tp} - \tilde{\theta}^T\,F_{2stp} \tag{3.10}$$

Pour trouver cette loi de contrôle nous construisons une fonction Lyapunov partielle de type quadratique :

$$V_2(\xi_1,\xi_2) = V_1 + \frac{1}{2}\,\xi_2^2 + \frac{1}{2}\,\tilde{\theta}^T\,\Gamma^{-1}\,\tilde{\theta} \tag{3.11}$$

Sa dérivée dans le temps est :

$$\dot{V_2} = \dot{V_1} + \xi_2\dot{\xi_2} + \tilde{\theta}^T\,\Gamma^{-1}\,\dot{\hat{\theta}} \tag{3.12}$$

$\dot{V_2} = -c_1\,\xi_1^2 + g_1\,\xi_1\,\xi_2 + \tilde{\theta}^T\,\Gamma^{-1}\,(dot\hat{\theta} - \Gamma\,F_{1stp}) + \xi_2(g_2\,\xi_3 + g_2\,\alpha_2 + f_{2stp} + \hat{\theta}^T\,F_{2st} - \tilde{\theta}^T\,F_{1stp})\tilde{\theta}^T\,\Gamma^{-1}\,\dot{\hat{\theta}}$

$\dot{V_2} = -c_1\,\xi_1^2 + g_2\,\xi_2\,\xi_3 + \xi_2(g_1\,\xi_1 + g_2\,\alpha_2 + f_{2stp} + \hat{\theta}^T\,F_{2st})) - \tilde{\theta}^T\,\Gamma^{-1}\,(\dot{\hat{\theta}} - \Gamma\,\xi_1\,F_{1stp} - \Gamma\,\xi_2\,F_{2stp})$

Si x_3 était notre loi de contrôle actuelle, alors $\xi_3 \approxeq 0$ sera nulle c. à. d $x_3 = \alpha_2$. Donc, nous en éliminerons $\tilde{\theta}$ de $\dot{V_2}$ avec une loi de mise à jour loi $\dot{\hat{\theta}} = \tau_2$, où

$$\tau_2 = \tau_1 + \xi_2\,F_{2stp}$$

Est la fonction de réglage.

Pour rendre $\dot{V_1} = -c_1\,\xi_1^2 - c_2\,\xi_2^2$, négative definie on choisis α_2 comme :

$$\alpha_2 = \frac{1}{g_2}\,(-c_2\,\xi_2 - g_1\,\xi_1 - f_{2tp} - \hat{\theta}^T\,F_{2tp}) \tag{3.13}$$

Ou $c_2 \succ 0$ est une constante de conception positive .
$\Gamma = \Gamma^T$ est la matrice de gain d'adaptation.
Du moment que x_3 n'est pas notre loi de contrôle actuelle, alors $\xi_3 \not\equiv 0$,$\dot{\hat{\theta}} = \tau_2$ n'est pas utilisée comme une loi de mise à jour. Cependant, nous pouvons retenir τ_2 comme notre deuxième fonction de réglage et α_2 comme notre deuxième fonction stabilisante. Donc on remet approximativement la décision sur $\dot{\hat{\theta}}$ et on tolère la présence de $\tilde{\theta}$ dans$\dot{V}_2$.

$$\dot{V}_2 = -c_1\,\xi_1^2 - c_2\,\xi_2^2 + g_2\,\xi_2\,\xi_3 + \tilde{\theta}^T\,\Gamma^{-1}\,(\dot{\hat{\theta}} - \tau_2) \tag{3.14}$$

Pour une stabilité globale, le dernier terme $g_2\xi_2\xi_3$ sera éliminé dans la prochaine étape.
L'équation en boucle fermée est :

$$\dot{\xi}_2 = -c_2\,\xi_2 + g_2\,\xi_3 + \tilde{\theta}^T\,\Gamma^{-1}\,(\dot{\hat{\theta}} - \tau_2) \tag{3.15}$$

La $i^{\text{ième}}$ $_{Etape,}$**,** $(i = 3, \cdots, n-1)$

Après quelques manipulations algébriques la $i^{\text{ième}}$ variable de la procédure
$\xi_i = x_i - x_{ri} - \alpha_{i-1}$
Sa dérivée dans le temps est :
$\dot{\xi}_i = g_i\,\xi_{i+1} + f_{istp} + \theta^T\,F_{istp}$
Avec :
$F_{itp} = F_i - \sum_{k=1}^{i} -1\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_k}\,F_k$
$f_{itp} = f_i - f_{ri} + g_i x_{r(i+1)} - \sum_{k=1}^{i} -1\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_k}\,(g_k\,x_{k+1} + f_k) - \sum_{k=1}^{i} -1\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_{rk}}\,(f_{rk}) - \sum_{k=1}^{i} -1\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\theta}^T}\,\Gamma\,\xi_k\,F_{kstep}$
La fonction stabilisante α_i et la loi de mise à jour $\dot{\hat{\theta}}$ sont conçu maintenant pour rendre la fonction de Lyapunov $\dot{V}_i$ suivante :

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}\,\xi_i^2 + \tilde{\theta}^T\,\Gamma^{-1}\,\tilde{\theta} \tag{3.16}$$

Sa dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_i = \dot{V_{i-1}} + \xi_i\dot{\xi}_i + \tilde{\theta}^T\,\Gamma^{-1}\,\dot{\hat{\theta}} \tag{3.17}$$

$\dot{V}_i = \xi_i(g_{i-1}\,\xi_{i-1} + g_i\,\xi_{i+1} + g_i\,\alpha_i + f_{istp} + \hat{\theta}^T\,F_{istp} - \sum_{k=1}^{i} -1c_k\,\xi_k + \tilde{\theta}^T\,\Gamma^{-1}\,\dot{\hat{\theta}_{ith}}$
Négative définie.
Pour le paramètre inconnu θ, nous employons un nouveau paramètre à estimer $\hat{\theta}$ dans l'expression de α_i comme :

$$\alpha_i = \frac{1}{g_i}\,(-c_i\,\xi_i - g_{i-1}\,\xi_{i-1} - f_{istp} - \hat{\theta}^T\,F_{istp}) \tag{3.18}$$

En substituant α_i dans$\dot{V}_i$ et $\dot{\xi}_i$ on trouve :
$\dot{V}_i = -\sum_{k=1}^{i-1}(c_k\,\xi_k^2) + g_i\,\xi_i\,\xi_{i+1} + f_{itp} + \tilde{\theta}^T\,\Gamma^{-1}\,(\dot{\hat{\theta}}_{ith} - \Gamma\,\xi_i\,F_{itp})$
le terme de l'erreur sur le paramètre à estimer $\tilde{\theta}^T$ peut être éliminé par la loi de mise à jour :
$\dot{\hat{\theta}_{ith}} = \Gamma\,\xi_i\,F_{istp})$, Pour une stabilité globale, le dernier terme $g_i\xi_i\xi_{i+1}$ sera éliminé dans la prochaine étape.

La $n^{\text{ième}}$ *Etape*

C'est la dernière étape de conception, du moment que le contrôle actuelle u apparaît dans la dernière équation $\dot{\xi}_n$

$$\xi_n = x_n - x_{rn} - \alpha_{n-1} = g_n\, u + f_{nstp} + \theta^T\, F_{nstp} \tag{3.19}$$

Avec : $F_{ntp} = F_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} F_k$
$f_{ntp} = f_n - f_{rn} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} (g_k\, x_{k+1} + f_k) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_{rk}} (f_{rk}) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}^T} \Gamma\, \xi_k\, F_{kstp}$
La loi de contrôle u est conçu pour rendre la dérivé de la fonction Lyapunov globale définie négative :

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2}\, \xi_n^2 + \tilde{\theta}^T\, \Gamma^{-1}\, \tilde{\theta} \tag{3.20}$$

$\dot{V}_n = -\sum_{k=1}^{n-1} c_k\, \xi_k^2 + \xi_n(g_{n-1}\, \xi_{n-1} + g_n u + f_{ntp} + \hat{\theta}^T\, F_{ntp}) + \tilde{\theta}^T\, \Gamma^{-1}\, \dot{\hat{\theta}}_{nth}$
Le choix du contrôle actuelle est :

$$u = \frac{1}{g_n} (-c_n\, \xi_n - g_{n-1}\, \xi_{n-1} - f_{ntp} - \hat{\theta}^T\, F_{ntp}) \tag{3.21}$$

On substituant u dans $\xi_n$et $\dot{V}_n$ on trouve :

$$\dot{\xi}_n = -c_n\, \xi_n - g_{n-1}\, \xi_{n-1} + \tilde{\theta}^T\, F_{nstp} \tag{3.22}$$

$$\dot{V}_n = -\sum_{k=1}^{n} (c_k\, z_k^2 + \tilde{\theta}^T\, \Gamma^{-1}\, (\dot{\hat{\theta}}_{nth} - \Gamma\, \xi_n\, F_{nstp}) \tag{3.23}$$

Le terme de l'erreur $\tilde{\theta}$ dans $\dot{V}_n$ sera éliminé par loi de mise à jour finale :
$\dot{\hat{\theta}}_{nth} = \Gamma\, \xi_n\, F_{nstp}$ Ce qui conduit à :

$$\dot{V}_n = -\sum_{k=1}^{n} (c_k\, \xi_k^2) \tag{3.24}$$

D'où le système globale dans les coordonnées $\xi_1, \cdots, \xi_n$:

$$\dot{\xi}_1 = -c_1\, \xi_1 - g_1\, \xi_2 + \tilde{\theta}^T\, F_1 \tag{3.25}$$

$$\dot{\xi}_i = -c_i\, \xi_i - g_{i-1}\, \xi_{i-1} + g_i\, \xi_{i+1} + \tilde{\theta}^T\, F_{ist}; (i = 2, \cdots, n-1) \tag{3.26}$$

$$\dot{\xi}_n = -c_n\, \xi_n - g_{n-1}\, \xi_{n-1} + \tilde{\theta}^T\, F_{nstp} \tag{3.27}$$

$$\xi_i = x_i - x_{ri} - \alpha_{i-1}; \qquad (i = 1, \cdots, n); \alpha_0 = 0 \tag{3.28}$$

La loi de mise à jour :

$$\dot{\hat{\theta}}_{ith} = \Gamma\, \xi_i\, F_{istp}; (i = 1, \cdots, n) \tag{3.29}$$

Lorsque $t \to \infty\ \tilde{\theta} \to 0$, alors $\dot{V}_n \prec 0$ est négative définie,le système d'équation des erreurs en $\xi_i, (i = 1, \cdots, n)$ correspondant au système final en boucle fermé, le système des lois de mise à jour $\hat{\theta}_i, (i = 1, \cdots, n)$ admet un point d'équilibre $\xi_{eq} = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]^T = 0$ globalement

uniformément asymptotiquement stable.

Puisque le modèle de référence x_{r1} est borné et sachant que$\xi_1 = x_1 - x_{r1}$ ce ci garantit que l'état $x(t)$, la loi de contrôle actuelle u, le vecteur des paramètres estimées $\hat{\theta}_t$ sont globalement bornés et $\lim_{t\to\infty} \xi(t) = 0$ et donc $\lim_{t\to\infty} |y(t) - y_r(t)| = 0$.

Théorème 1.1 *Le système adaptatif de boucle fermé (3.1, le modèle de la référence (3.2, le contrôleur (3.21 et la loi de mise à jour des paramètres (3.22 a un point équilibre globalement uniformément stable au* $\xi = [\xi_1, \xi_2; \xi_3, \cdots, \xi_n]^T = 0$.

Preuve

Les équations de l'erreur (3.25 correspondant au système adaptatif en boucle fermé pour le modèle du système (3.1, le modèle de la référence (3.2, le contrôleur (3.21 et la loi de mise à jour du paramètre ((3.22. Le dérivé de la fonction de Lyapunov le long des équations de l'erreur prouvent que $z_{eq} = 0$ est globalement uniformément stable.

Remarque

Les systèmes en boucle de retour stricte sont seulement des cas ou les paramètres sont incertaines. Les non linéarités du système sont assumées d'être connues et d'une dépendance linéaire de ces paramètres inconnus. Pour le cas d'une dépendance non linéaire présentes dans le système, le contrôle adaptatif robuste peut garantir la robustesse en ce qui concerne les incertitudes bornées. Mais en général ils ne peuvent pas accomplir la convergence de l'erreur de la poursuite sans un gain haut [81]- [84].

2 Conception de loi de commande adaptative basée sur le Backstepping pour quelques systèmes chaotiques

Nombreuses application de la procédure de la commande adaptative basée sur la méthode du Backstepping citées dans la littérature [195]- [200], mais notre travail consiste en l'application de cette procédure sur des systèmes non linéaires chaotiques souvent connus et utilisés dans la validation des algorithmes et procédures proposées soit pour la simplicité soit pour une comparaison avec d'autre méthodes appliquées sur ces même systèmes [202].

2.1 Oscillateur de Duffing

L'équation générale l'oscillateur forcé de Duffing est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\theta_1 x_2 - \theta_2 x_1 - \theta_3 x_1^3 + \theta_4 \cos(\omega t) + u \end{cases} \tag{3.30}$$

Backstepping adaptative pour la commande en stabilisation

Recherchons la loi de commande adaptative en stabilisation du système au voisinage du point d'équilibre par la méthode de Backstepping, du moment que le système ne contenant que deux équations différentielles alors la procédure ne prend que deux étapes [201].
Ce qui donne : Dans le nouveau repère ξ_1, ξ_2Le système de boucle fermée total est réécrit comme :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 - c_1\xi_1 \\ \dot{\xi}_2 = -c_2\xi_2 - \xi_1 + \tilde{\theta}_1^T (x_2 - c_1 (z_2 - z_1 c_1)) + \tilde{\theta}_2^T x_1 + \tilde{\theta}_3^T x_1^3 - \tilde{\theta}_4^T \cos(\omega t) \end{cases} \tag{3.31}$$

Et les règles de mise à jour finales sont :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1^T = \tau_1 = -\Gamma\xi_2 x_2 \\ \dot{\hat{\theta}}_2^T = \tau_2 = -\Gamma\xi_2 x_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_3^T = \tau_3 = -\Gamma\xi_2 x_1^3 \\ \dot{\hat{\theta}}_4^T = \tau_4 = \Gamma\xi_2 \cos(\omega t) \end{cases} \tag{3.32}$$

Les fonctions stabilisantes des sous systèmes et la loi de commande sont :

$$\begin{cases} \alpha_1 = -c_1\xi_1 \\ u = -c_2\xi_2 - \xi_1 + \hat{\theta}_1^T\xi_2 - \hat{\theta}_1^T\alpha_1 + \hat{\theta}_2^T x_1 + \hat{\theta}_3^T x_1^3 - \hat{\theta}_4^T \cos(\omega t) - c_1 (\xi_2 - c_1\xi_1) \end{cases} \tag{3.33}$$

$$\begin{cases} \tau_1 = \Gamma\xi_1 (\xi_2 - \xi_1 (1 + c_{11})) \\ \tau_2 = \Gamma\xi_1 (\xi_2 - \xi_1 (1 + c_{11})) + \Gamma\xi_2 (\xi_1 + c_{11} (\xi_2 - \xi_1 (1 + c_{11}))) \\ \tau_3 = \Gamma\xi_1 (\xi_2 - \xi_1 (1 + c_{11})) + \xi_2 (x_1 + c_{11} (\xi_2 - \xi_1 (1 + c_{11}))) - \Gamma\xi_3 x_3 \\ \dot{\hat{\theta}}_4^T = \tau_4 = \Gamma\xi_2 \cos(\omega t) \end{cases} \tag{3.34}$$

Les fonctions de Lyapunov des trois sous systèmes sont :

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = c_1\xi_1^2 + \xi_1\xi_2 \\ \dot{V}_2 = -c_1\xi_1^2 - c_2\xi_2^2 + \tilde{\theta}_1^T \left(\Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}_1 - \tau_1\right) + \tilde{\theta}_2^T \left(\Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}_2 - \tau_2\right) + \tilde{\theta}_3^T \left(\Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}_3 - \tau_3\right) + \tilde{\theta}_4^T \left(\Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}_4 - \tau_4\right) \end{cases} \tag{3.35}$$

Les figures suivantes illustrent la convergence des états vers le point d'équilibre $x_{eq} = 0$ et les paramètres θ_i vers leurs valeures éstimées.

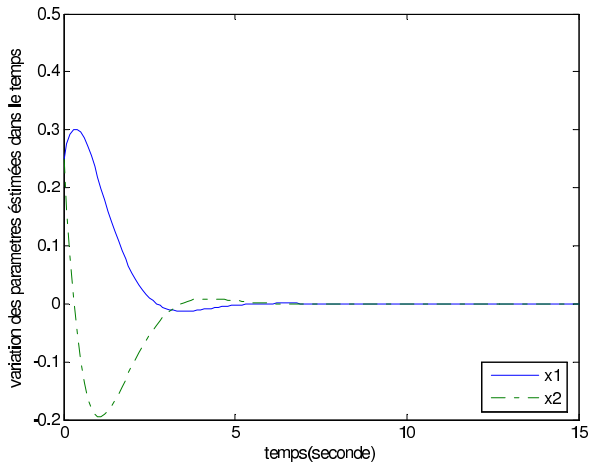


FIG. 3.1 – Convergence des états x_1, x_2 vers le point d'équilire $x_{eq} = 0$ pour l'oscillateur de Duffing.

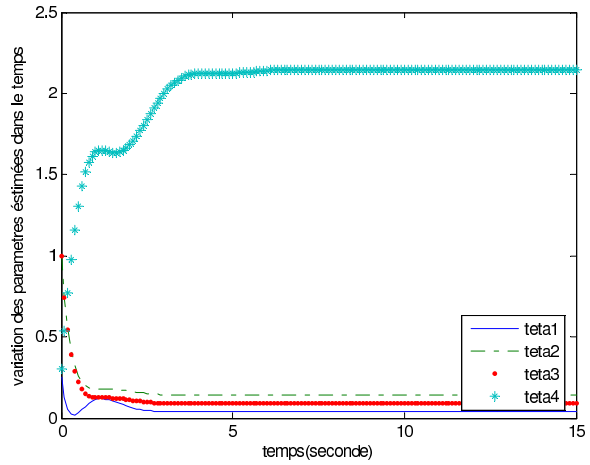


FIG. 3.2 – Variation des paramètres éstimées dans le temps pour système de l'oscillateur de Duffing

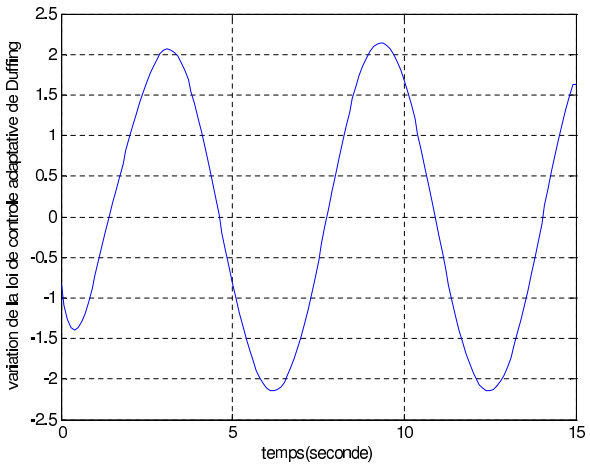


FIG. 3.3 – Variation de loi de commande adaptative pour l'oscillateur de Duffing.

Commande adaptative en poursuite pour l'oscillateur de Duffing

Donc pour le premier sous système :

$$\alpha_1 = -c_1\xi_1 - \dot{y}_r \tag{3.36}$$

Puisque le système original est décrit par 2 états seulement, l'entrée de commande u apparaît dans la deuxième étape,

$$u = -c_2\xi_2 - z_1 + \hat{\theta}_1^T\xi_2 - \hat{\theta}_1^T\alpha_1 + \hat{\theta}_2^T x_1 + \hat{\theta}_3^T x_1^3 - \hat{\theta}_4^T \cos(\omega t) - c_1(\xi_2 - c_1\xi_1) - \ddot{y}_r \tag{3.37}$$

Les figures suivantes illustrent la convergence des états vers le signal de référence $y_r = \sin(t)$ et les paramètres θ_i vers leurs valeures éstimées.

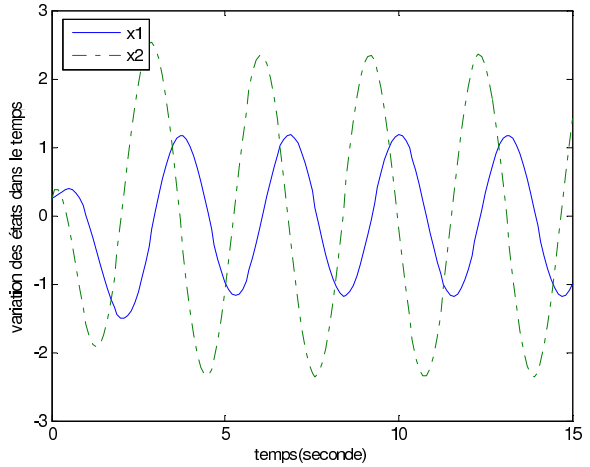


FIG. 3.4 – Convergence des états x_1 x_2 vers le signal de référence $y_r = sin(t)$ pour l'oscillateur de Duffing.

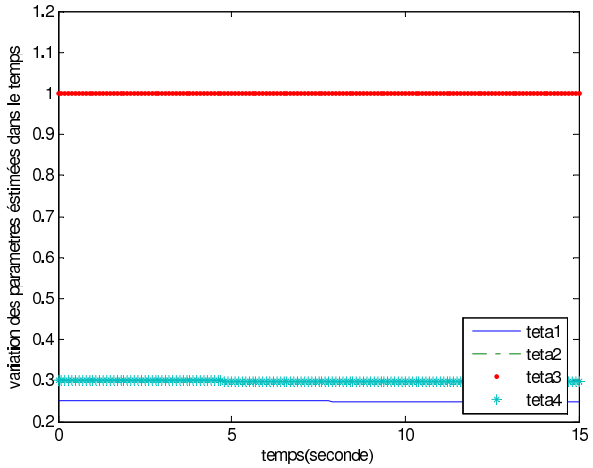


FIG. 3.5 – Variation des paramètres éstimés dans le temps pour l'oscillateur de Duffing.

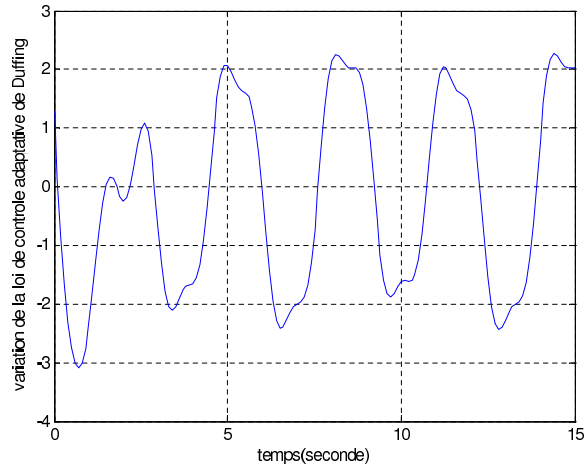


FIG. 3.6 – Variation de loi de poursuite adaptative pour l'oscillateur Duffing .

2.2 Oscillateur Bonhoeffer Van der pool

Le système de l'oscillateur de Bonhoeffer Van der pol est la généralisation de van der Pol oscillateur et, est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 - x_2 + p_1 + p_2 \cos(wt) \\ \dot{x}_2 = p_3 (x_1 + p_4 - p_5 x_2) + u \end{cases} \tag{3.38}$$

w est la fréquence constante,p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 sont des paramètres de l'oscillateur constantes.
En posant : $p_1 = \theta_1, p_2 = \gamma, p_3 = \theta_2, p_3 p_4 = \theta_3, p_3 p_5 = \theta_4$, ω est une fréquence constante.
Le système précédent devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 - x_2 + \theta_1 + \theta_2 \cos(wt) \\ \dot{x}_2 = \theta_3 x_1 + \theta_4 - \theta_5 x_2 + u \end{cases} \tag{3.39}$$

Backstepping adaptative pour la commande en stabilisation

Pour le sous système 1 :

$$\begin{cases} \alpha_1(x_1) = c_1\xi_1 + x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 + \hat{\theta}_1^T + \hat{\theta}_2^T \cos(wt) \\ \dot{\hat{\theta}}_1^T = \Gamma z_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_2^T = \Gamma z_1 \cos(wt) \\ \dot{V}_1 = -c_1\xi_1^2 - \xi_1\xi_2 \\ \dot{\xi}_1 = -c_1\xi_1 - \xi_2 - \tilde{\theta}_1^T - \tilde{\theta}_2^T \cos(wt) \end{cases} \tag{3.40}$$

Maintenant, on passe au sous système 2. Le choix de la loi de contrôle finale est donné de telle sorte à avoir $\dot{V}_2$ négative définie :

Et les lois de mise à jour suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_3^T = \tau_2 = \Gamma\xi_2 x_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_4^T = \tau_3 = \Gamma\xi_2 \\ \dot{\hat{\theta}}_5^T = \tau_4 = -\Gamma\xi_2 x_2 \\ \dot{\xi}_2 = -c_2\xi_2 + \xi_1 - \tilde{\theta}_3^T x_1 - \tilde{\theta}_4^T + \tilde{\theta}_5^T x_2 \\ \dot{V}_2 = -c_1\xi_1^2 - c_2\xi_2^2 \end{cases} \tag{3.41}$$

Les figures suivantes illustrent la convergences des états vers le point d'équilibre $x_{eq} = 0$ et les paramètres θ_i vers leurs valeures éstimées.

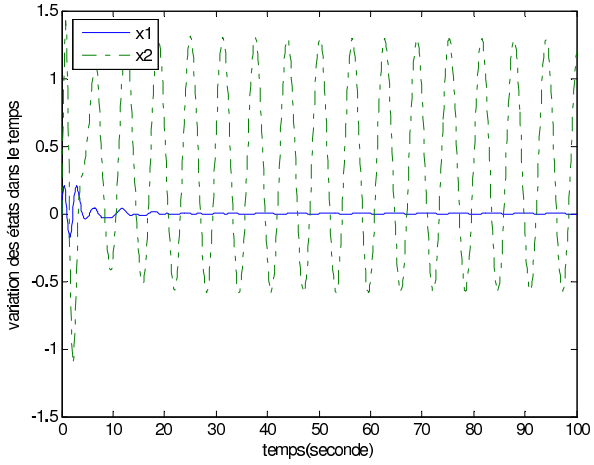


FIG. 3.7 – Convergence des états x_1, x_2 vers le point d'équilire $x_{eq} = 0$ pour l'oscillateur Bonhoeffer Van der pol.

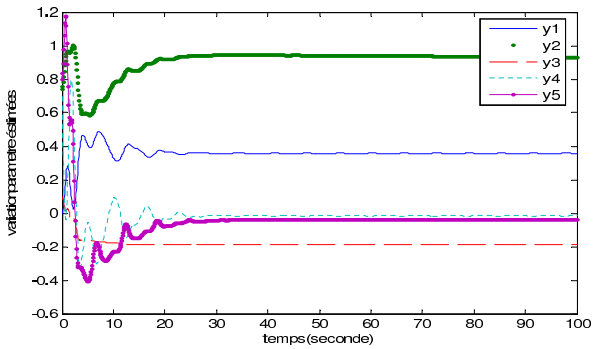


FIG. 3.8 – Variation des paramètres éstimées dans le temps pour l'oscillateur Bonhoeffer Van der pol.

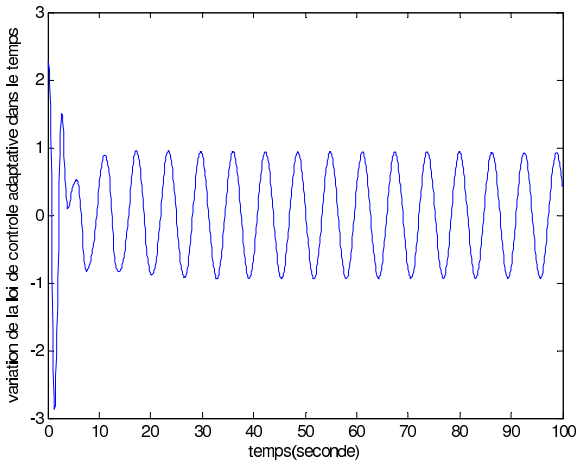


FIG. 3.9 – Variation de loi de commande adaptative pour l'oscillateur Bonhoeffer Van der pol.

Commande adaptative en poursuite pour le circuit l'oscillateur de Van der pool.

En appliquant la procédure pour le premier sous système 2.72 avec et sachant 2.72 nous retrouvons la fonction stabilisante les lois de mise à jour pour la première étapes comme :

$$\begin{cases} \alpha_1(x_1) = c_1 z_1 + x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 + \hat{\theta}_1^T + \hat{\theta}_2^T \cos(wt) \\ \dot{\hat{\theta}}_1^T = \Gamma z_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_2^T = \Gamma z_1 \cos(wt) \\ \dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 - z_1 z_2 \end{cases} \tag{3.42}$$

La loi de poursuite et les lois de mise àjour pour le second sous sytème de la duxième étape sont :

$$u = -c_2 z_2 + z_1 - \hat{\theta}_3^T x_1 - \hat{\theta}_4^T + \hat{\theta}_5^T x_2 + \left(\left(-c_1 z_1 - z_2 - \tilde{\theta}_1^T\right)\left(c_1 + 1 - x_1^2\right) + \dot{\hat{\theta}}_1^T + \dot{\hat{\theta}}_2^T \cos(wt) - \hat{\theta}_2^T w \sin(wt) + \ddot{y}_r\right) \tag{3.43}$$

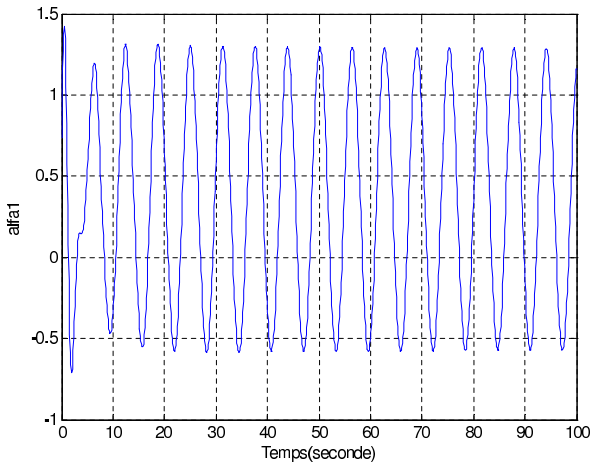


FIG. 3.10 – Variation de la fonction stabilisante virtuelle pour l'oscillateur Bonhoeffer Van der pol.

Et :

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 - z_1 z_2 \\ \dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \end{cases} \tag{3.44}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1^T = \Gamma z_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_2^T = \Gamma z_1 \cos(wt) \\ \dot{\hat{\theta}}_3^T = \tau_2 = \Gamma z_2 x_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_4^T = \tau_3 = \Gamma z_2 \\ \dot{\hat{\theta}}_5^T = \tau_4 = -\Gamma z_2 x_2 \end{cases} \tag{3.45}$$

Les coordonnées de conception en (z_1, z_2) :

$$\begin{cases} \dot{z}_2 = -c_2 z_2 + z_1 - \tilde{\theta}_3^T x_1 - \tilde{\theta}_4^T + \tilde{\theta}_5^T x_2 \\ \dot{z}_1 = -c_1 z_1 - z_2 - \tilde{\theta}_1^T - \tilde{\theta}_2^T \cos(wt) \end{cases} \tag{3.46}$$

2.3 Système chaotique de Lorenz.

Prenons le système de Lorenz sous sa forme paramétrique avec des paramètres adaptatives inconnues.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\theta_1 (x_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_3 + \theta_2 x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_3 - \theta_3 x_3 + u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{3.47}$$

$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$

Ou : θ est la valeur du paramètre adaptatif courent

$\hat{\theta}$ est la valeur du paramètre adaptatif estimé,

$\tilde{\theta}$ est la valeur de l'erreur sur paramètre adaptatif.

Commençons par le sous-système x_1 et on introduisant les variables du backstepping pour les différents sous systèmes :

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 \\ \xi_2 = x_2 - \alpha_1 \\ \xi_3 = x_3 - \alpha_2 \end{cases} \tag{3.48}$$

Backstepping adaptative pour la commande en stabilisation

Et on appliquant les différentes étapes citées aux dessus on trouves les résultats suivants [202] :

On pose $c_1 = c_{11}\,\hat{\theta}_1$ avec $c_{11} \succ 0$ et $\hat{\theta}_1 \succ 0$ donc $c_1 \succ 0$.

¨Dans le nouveau repère ξ_1, ξ_2, ξ_3 le système de boucle fermée total est réécrit comme :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \hat{\theta}_1^T \xi_2 - c_1\xi_1 - \tilde{\theta}_1^T\left(\xi_2 - \xi_1\left(1 + c_{11}\right)\right) \\ \dot{\xi}_2 = -x_1\xi_3 - x_1\hat{\theta}_1^T - \xi_2\left(1 - c_{11}\hat{\theta}_1^T\right) - \tilde{\theta}_1^T c_{11}\left(\xi_2 - \xi_1\left(1 + c_{11}\right)\right) - \tilde{\theta}_2^T x_1 \\ \dot{\xi}_3 = -c_3\xi_3 + \xi_2 x_1 + \tilde{\theta}_3^T x_3 = -c_3\xi_3 + \xi_2 x_1 - \tilde{\theta}^T w_3 \end{cases} \tag{3.49}$$

Les fonctions stabilisantes des sous systèmes et la loi de commande finale sont :

$$\begin{cases} \alpha_1 = -c_{11}\xi_1 \\ \alpha_2 = \hat{\theta}_1^T + \hat{\theta}_2^T - c_{11}\hat{\theta}_1^T + c_{11}\left(1 - c_{11}\hat{\theta}_1^T\right) = \hat{\theta}_1^T\left(1 - c_{11}^2\right) + \hat{\theta}_2^T + c_{11} \\ u = -c_3\xi_3 + \xi_2 x_1 - x_1 x_2 + \hat{\theta}_3^T x_3 - \left(1 - c_{11}^2\right)\dot{\hat{\theta}}_1^T - \dot{\hat{\theta}}_2^T \end{cases} \tag{3.50}$$

Et les règles de mise à jour finales sont :

$$\begin{cases} \tau_1 = \Gamma\xi_1\left(\xi_2 - \xi_1\left(1 + c_{11}\right)\right) = \Gamma\xi_1 w_1 \\ \tau_2 = \Gamma\xi_1\left(\xi_2 - \xi_1\left(1 + c_{11}\right)\right) + \Gamma\xi_2\left(\xi_1 + c_{11}\left(\xi_2 - \xi_1\left(1 + c_{11}\right)\right)\right) \\ \tau_3 = \Gamma\xi_1\left(\xi_2 - \xi_1\left(1 + c_{11}\right)\right) + \xi_2\left(x_1 + c_{11}\left(\xi_2 - \xi_1\left(1 + c_{11}\right)\right)\right) - \Gamma\xi_3 x_3 \\ \quad = \tau_2 + \Gamma\xi_3 x_3 \end{cases} \tag{3.51}$$

Les fonctions de Lyapunov des trois sous systèmes sont :

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = -c_1\xi_1^2 + \hat{\theta}_1^T\xi_1\xi_2 \\ \dot{V}_2 = -c_1\xi_1^2 - c_2\xi_2^2 - \xi_2\xi_3 x_1 \\ \dot{V}_3 = \left(-c_1\xi_1^2 - c_2\xi_2^2 - c_3\xi_3^2\right) \end{cases} \tag{3.52}$$

Les figures suivantes illustrent la convergence des états vers le point d'équilibre $x_{eq} = 0$ et les paramètres θ_i vers leurs paramètres éstimées $\hat{\theta}_i$ pour le système de Lorenz.

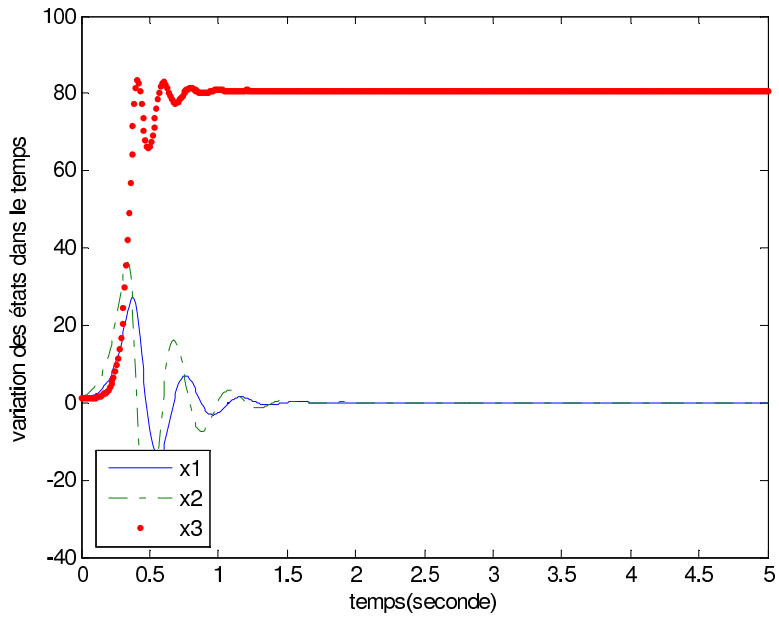


FIG. 3.11 – Convergence des états x_1 x_2, x_3 vers le point d'équilire $x_{eq} = 0$ pour système de Lorenz

Pour Pour voir l'éfficacité de la méthode du Backstepping faisant une comparaison du temps de convergence et le niveau de la commande avec une autre méthode et comme exemple utilisé un contrôleur en contre réaction PId dont les gains sont optimisés par les algorithmes génétiques.

Contrôleur PID basé sur les Algorithmes Génétiques.

[202] Le contrôle des systèmes non linéaire est difficile dans l'absence d'une procédure systématique comme celle disponible pour les systèmes linéaires. Beaucoup de techniques sont limitées dans leur application pour des classes spéciales des systèmes. Encore, les méthodes disponibles sont plus communément heuristiques dans leur nature, la technique des algorithmes Génétique peut réduire dans une grande mesure la conception arbitraire d'un contrôleur. Les contrôleurs mieux connus utilisés dans les processus du contrôle industriels sont des PID (proportionnel, intégrateur et ou dérivé de l'erreur), grâce à leur structure simple et leur performance robuste dans une grande gamme des conditions opérationnelles.

Dans les décennies passées, la théorie du contrôle a traversé des développements majeurs,et des algorithmes du contrôle intelligents ont été développés. Cependant, le type de contrôleur PID reste le plus populaire dans l'industrie, les études indiquent même qu'approximativement 90 pourcent de tous les contrôleurs industriels sont du Type PID. Les raisons pour cela sont la simplicité de la loi de contrôle et le nombre minimal de paramètres de réglage. Des centaines d'outils, de méthodes et de théories sont disponibles pour ce but. Cependant, trouver des paramètres appropriés pour le contrôleur PID est encore une tâche difficile, donc dans le contrôle

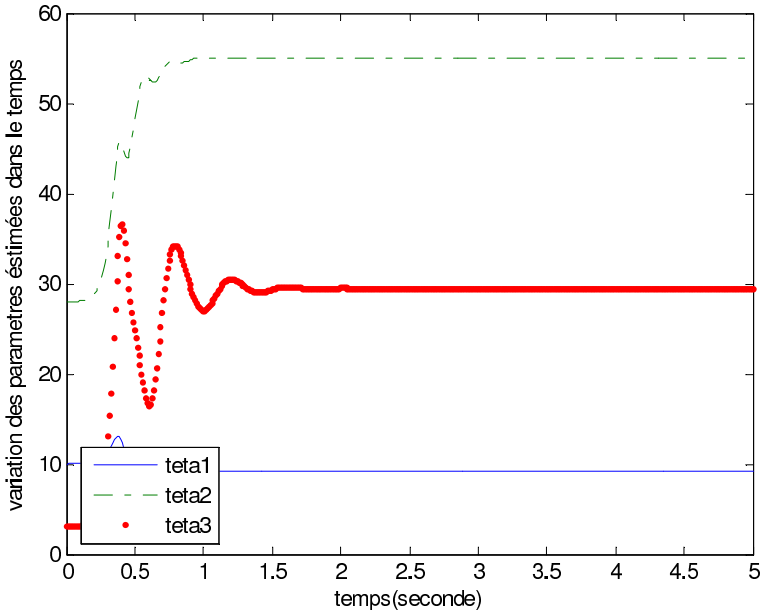


FIG. 3.12 – Variation des paramètres éstimées dans le temps pour le système de Lorenz

réel souvent les erreurs sont utilise pour le réglage du processus.

Le contrôle PID consiste en trois types de contrôle, le contrôle proportionnel, l'intégrateur et la dérivée de l'erreur entre la sortie courante et une référence. L'algorithme du contrôleur PID peut être rendu effectif dans beaucoup de formes, mais il est utilisé principalement dans la boucle de la contre réaction.

On donne au-dessous un diagramme simple qui illustre le schéma du contrôleur PID.

$$u(t) = k_p\, e(t) + k_I \int_0^t e(\tau)\, d\tau - k_D \frac{\partial e(t)}{\partial t} \tag{3.53}$$

Avec KP, KI, KD sont des les gains respectivement pour les controleurs proportionnel, l'intégrateur et dérivateur.

La sortie du contrôleur proportionnel utilise une proportion de l'erreur du système pour contrôler le système. Cependant, cela introduit une compensation statique de l' erreur dans le système.

La sortie du contrôleur intégrateur est proportionnelle a la sommation croissante dans le temps des erreurs présentes dans le système. L'action intégrante enlève la compensation introduite par le Contrôleur proportionnel mais introduit un décalage de phase dans le système.

La sortie du contrôleur dérivateur est proportionnelle au taux de changement de l'erreur. Le contrôleur dérivateur est utilisé pour réduire ou éliminer le dépassement et introduit une action principale angulaire qui enlève le décalage de phase introduit par l'action intégrante.

La conception d'une fonction d'objective est la partie la plus difficile pour créer un algorithme génétique. Une fonction d'objective pourrait être créée pour trouver un contrôleur qui donne le plus petit décalage, un temps de montée le plus rapide ou temps du chute le plus rapide

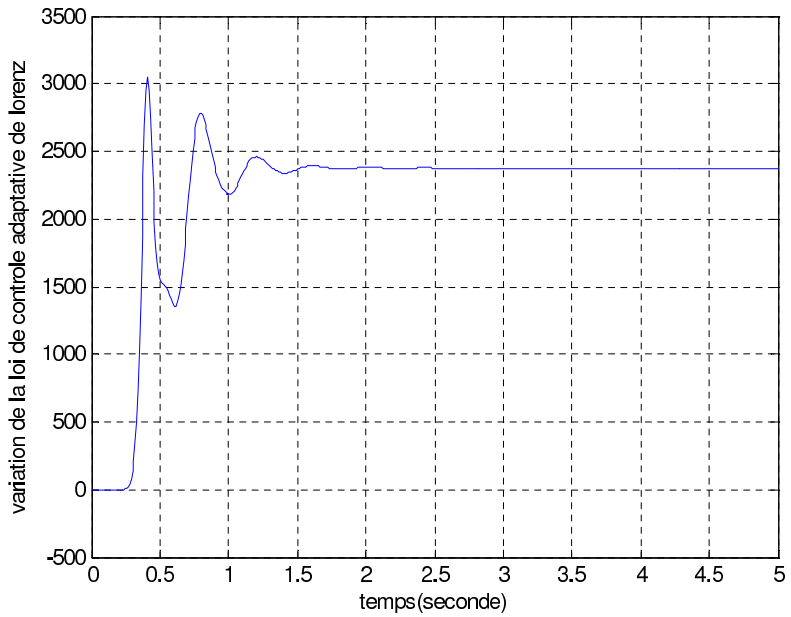


FIG. 3.13 – Variation de loi de commande adaptative pour le système de Lorenz

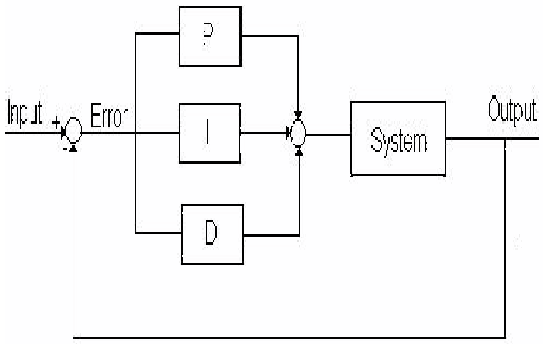


FIG. 3.14 – Schema du controleur PID

mais pour combiner tous ces objectifs une fonction d'objective qui minimisera l'erreur du système contrôlé est choisie. Chaque chromosome de la population est est évalué à la fois dans la fonction objective, Le chromosome évalué de plus grand nombre est le meilleur. L'algorithme génétique utilise la valeur de l'aptitude du chromosome pour créer une nouvelle population qui consiste en les membres de plus grand cout.

Dans cette section on s'intéresse à l'optimisation les gains d'un contrôleur PID efficace en utilisant les algorithmes génétiques [203], [204],pour cela on va avoir besoin de trois chaines assignées à chaque membre de la population, ces membres seront comprises d'un P, et une chaine D qui serons évaluées partout ou cours du GA, vrai (point flottant) les nombres seront utilisés pour chiffrer la population. Les trois termes sont introduits dans l'algorithme génétique par la déclaration d'une trois ligne. entre -100 et 100, le système contrôlé est donné une entrée du pas et l'erreur est répartie utiliser un critère de la performance de l'erreur approprié c.-à-d.

Une valeur de l'aptitude totale d'après la magnitude de l'erreur est assignée au chromosome, le plus petit l'erreur le plus grand la valeur de l'aptitude.

Les paramètres de l'algorithme génétiques sont

- Variable bornée entre [-100,100]. Chaque membre de la population est initialisé avec randomly des valeurs sélectionné entre -100 et 100.
- La taille de la population 80.
- Nombre maximalede générations = 100.
- Fonction de la sélection de type stochastique uniforme.
- Taux de croisement = 0.8,
- Fonction de la mutation estla Gaussian.
- Critères d'arret est le critère de performance de l'erreur

Pour évaluer les valeurs du controleur PID choisi par l'Algorithme Génétique, une fonction d'objective est écrite basé sur la somme du critère de la performance de l'erreur l'erreur absolue, pratiquement ce genre de critère de performance de l'erreur est bon pour la simulation.

les valeurs PID du gain du contrôleur : $KP = 0.9501 KI = 0.0579 KD = 0.8381$ ce qui donne comme trajectoire pour le système de Lorenz. Bien qu'on a une convergence des états mais

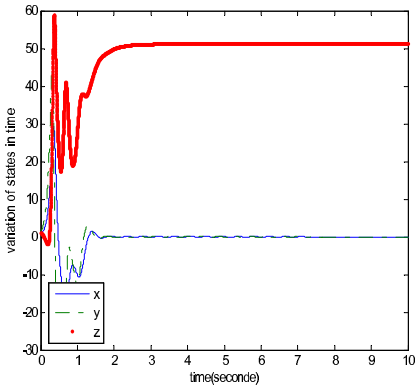


FIG. 3.15 – Variation des états dans le temps avec un PID pour le système de Lorenz

cette méthode présente quelques incovinients.

1. Grand éspace mémoire pour le codage des chaines.
2. Temps de convergence trés long.
3. Optimisation locale.

Donc, d'un point de vue pratique, il est souvent désiré de convertir et de contrôler convenablement la dynamique du système avec un effort minime afin que toutes les fois que le mouvement chaotique est physiquement nuisible qui peut être conduit vers à un etat stable ou un etatdésiré.

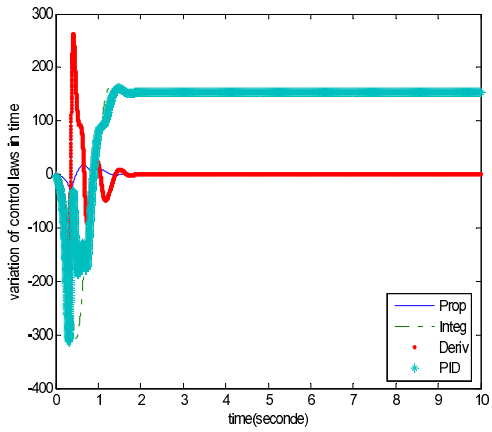


FIG. 3.16 – Variation des lois de contrôle par le PID dans le temps pour le système de Lorenz

Command adaptative en poursuite d'un signal référence pour le système de Lorenz

On suivant les même étapes de la procédure adaptative du Backstepping, et on utilisant un signal référence $y_r = sin(w_r t)$,et on démarant par les variables virtuelles

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 \\ \xi_2 = x_2 - \alpha_1 - y_r \\ \xi_3 = x_3 - \alpha_2 \end{cases} \tag{3.54}$$

On trouve les lois de commandes virtuelles et finales suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_1 = -c_{11}\xi_1 + x_1 - y_r \\ \alpha_2 = \frac{\xi_2\left(c_2 - \left(1 - c_{11}\hat{\theta}_1^T\right) - y_r - \dot{y}_r\right)}{x_1} + \hat{\theta}_2^T + \left(\hat{\theta}_1^T - \left(1 - c_{11}\left(1 - c_{11}\hat{\theta}_1^T\right)\right)\right) \\ u = -c_3\xi_3 + \xi_2 x_1 - x_1 x_2 + \hat{\theta}_3^T x_3 - \left(1 - c_{11}^2\right)\dot{\hat{\theta}}_1^T - \dot{\hat{\theta}}_2^T + \dot{y}_r + \ddot{y}_r \end{cases} \tag{3.55}$$

La fonction de Lyapunov finale est négative définie.

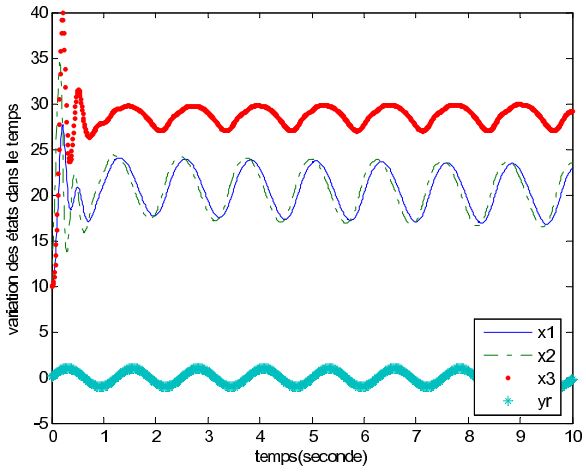


FIG. 3.17 – Convergence adaptative des états (x_1 x_2, x_3) pour le système de Lorenz

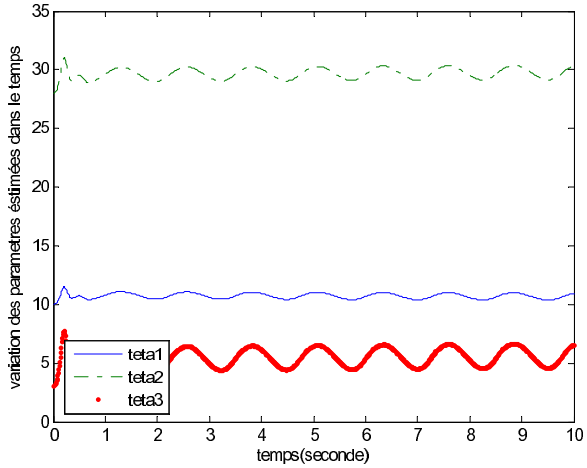
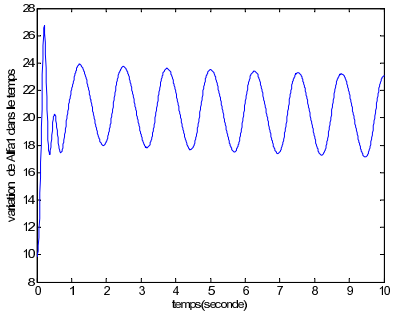
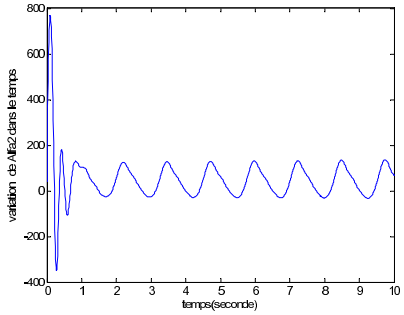


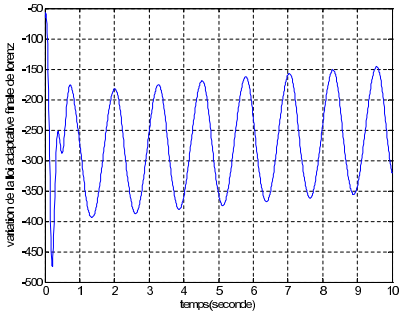
FIG. 3.18 – Variation des paramètres éstimées dans le temps pour la poursuite pour le système de Lorenz



(a) variation de la commande virtuelle α_1 dans le temps



(b) variation de la commande virtuelle α_2 dans le temps



(c) variation de la commande finale U dans le temps

FIG. 3.19 – Convergence des commandes virtuelles et finale pour la poursuite adaptative pour le système de Lorenz

Remarque

On remarque que pour la poursuite adaptative d'un signal référence pour le système de Lorenz n'est pas totale, on a un décalage de la sortie x_1, on signale aussi que meme la présence d'un PID ou optimisation des constantes de conception par l'algoritme génétique ne donnent qu'un résultat locale, c.a.d une convergence des états vers le point d'quilibre stable $x_{eq} = 0$ une autre méthode est conseillée.

2.4 Circuit chaotique de Chua.

Le circuit de Chua est régit par le système d'équations différentilles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{x_2}{L} \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{c_2}\left[G\left(x_3 - x_2\right) - x_1\right] \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{c_1}\left[G\left(x_2 - x_3\right) - \left(G_b x_3 + \frac{1}{2}\left(G_a - G_b\right)\left(|x_3 + 1| - |x_3 - 1|\right)\right)\right] + u \end{cases} \tag{3.56}$$

En posant :

$$\frac{1}{L} = \gamma_1, \frac{G}{c_2} = \gamma_2, \frac{1}{c_1} = \theta_1, \frac{\left(1 + \frac{Gb}{G}\right)}{c_1} = \theta_2, \frac{1}{2c_1}\left(G_a - G_b\right) = \theta_3$$

Le système précédent deviendra :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{x_2}{L} = -\gamma_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{c_2}\left[G\left(x_3 - x_2\right) - x_1\right] = \gamma_2\left(x_3 - x_2\right) - x_1 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{c_1}\left[G\left(x_2 - x_3\right) - \left(G_b x_3 + \frac{1}{2}\left(G_a - G_b\right)\left(|x_3 + 1| - |x_3 - 1|\right)\right)\right] + u \\ \quad = \frac{1}{c_1} G x_2 - x_3 G\left(\frac{1 + \frac{Gb}{G}}{c_1}\right) - \frac{\left(G_a - G_b\right)}{2c_1}\left(|x_3 + 1| - |x_3 - 1|\right) + u \\ \quad = \theta_1 G x_2 - \theta_2 G x_3 - \theta_3\left(|x_3 + 1| - |x_3 - 1|\right) + u \end{cases} \tag{3.57}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\gamma_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = \gamma_2\left(x_3 - x_2\right) - x_1 \\ \dot{x}_3 = \theta_1 G x_2 - \theta_2 G x_3 - \theta_3\left(|x_3 + 1| - |x_3 - 1|\right) + u \end{cases} \tag{3.58}$$

Pour le système de Chua, nous aurons :

Conception de la loi de commande basée sur le Backstepping Adaptatif en stabilisation

Les lois de stabilisation et de contrôle adaptatives sont :

$$\begin{cases} \alpha_1\left(x_1\right) = c_{11}\xi_1 \\ \alpha_2 = \frac{-\left(c_2 - \gamma_2 + c_{11}\gamma_1\right)\xi_2 + \xi_1\left(\gamma_1 + \gamma_2 c_{11} - c_{11}c_1\right)}{\gamma_2} \\ \quad = G_1\xi_1 + G_2\xi_2 \\ u = -c_3\xi_3 - \gamma_2\xi_2 - \hat{\theta}_1 G x_2 + \hat{\theta}_2 G x_3 + \hat{\theta}_3\left(|x_3 + 1| - |x_3 - 1|\right) + \left(-G_1 c_1\xi_1 + \xi_2\left(-\gamma_1 G_1 + c_2 G_2\right) - G_2\gamma_2\xi_3\right) \end{cases} \tag{3.59}$$

$$\begin{cases} G_1 = \frac{\left(\gamma_1 + \gamma_2 c_{11} - c_{11}c_1\right)}{\gamma_2} \\ G_2 = \frac{-\left(c_2 - \gamma_2 + c_{11}\gamma_1\right)}{\gamma_2} \end{cases} \tag{3.60}$$

Le système final en boucle fermé en (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -\gamma_1\xi_2 - c_1\xi_1 \\ \dot{\xi}_2 = \gamma_2\xi_3 - c_2\xi_2 \\ \dot{\xi}_3 = -c_3\xi_3 - \gamma_2\xi_2 - \tilde{\theta}_1 x_2 + \tilde{\theta}_2 x_3 + \tilde{\theta}_3\left(|x_3 + 1| - |x_3 - 1|\right) \end{cases} \tag{3.61}$$

Les fonctions de Lyapunov appropriée pour le système :

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = -c_1\xi_1^2 - \gamma\xi_1\xi_2 \\ \dot{V}_2 = -c_2\xi_2^2 - c_1\xi_1^2 + \gamma_2\xi_2\xi_3 \\ \dot{V}_3 = -c_1\xi_1^2 - c_2\xi_2^2 - c_3\xi_3^2 + \tilde{\theta}_1^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}}_1^T - \tau_1\right) + \tilde{\theta}_2^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}}_2^T - \tau_2\right) + \tilde{\theta}_3^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}}_3^T - \tau_3\right) \end{cases} \tag{3.62}$$

Les figures suivantes illustrent la convergences des états vers le point d'équilibre $x_{eq} = 0$ et les paramètres θ_i vers leurs valeures éstimées.

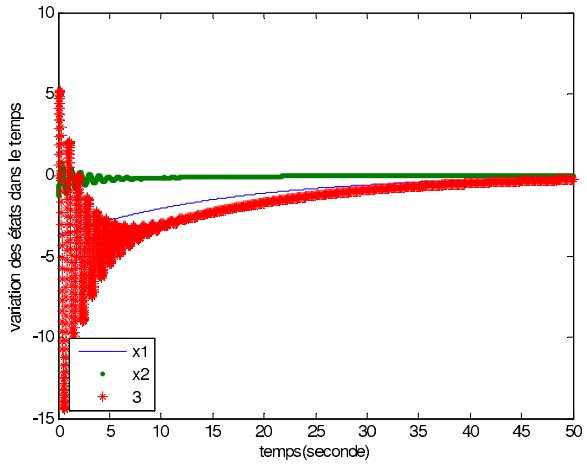


FIG. 3.20 – Convergence des états x_1 x_2, x_3 vers le point d'équilire $x_{eq} = 0$ pour circuit chaotique de Chua.

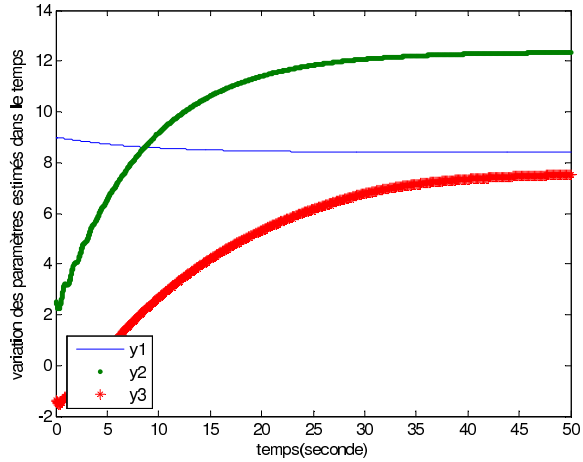


FIG. 3.21 – Variation des paramètres éstimées dans le temps pour circuit chaotique de Chua.

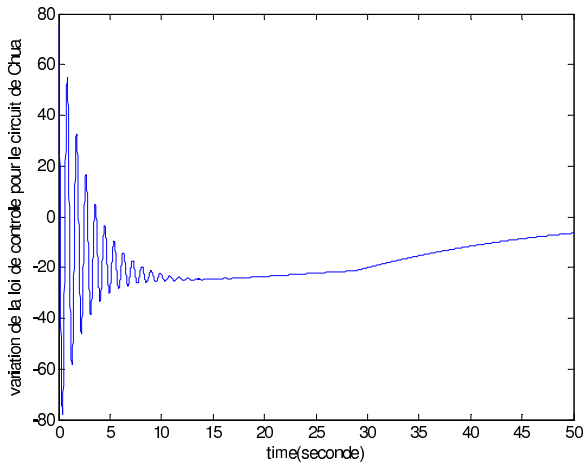


FIG. 3.22 – Variation de loi de commande adaptative pour le circuit chaotique de Chua.

Commande adaptative en Poursuite pour le circuit chaotique de Chua

Les lois de stabilisation et de contrôle adaptatives.

$$\begin{cases} \alpha_1(x_1) = c_{11}\xi_1 + \frac{\dot{y}_r}{\gamma} \\ \alpha_2 = \frac{-(c_2-\gamma_2+c_{11}\gamma_1)\xi_2+\xi_1(\gamma_1+\gamma_2 c_{11}-c_{11}c_1)}{\gamma_2} + \frac{\ddot{y}_r}{\gamma} \\ \quad = G_1\xi_1 + G_2\xi_2 \\ u = -c_3\xi_3 - \gamma_2\xi_2 - \hat{\theta}_1 G x_2 + \hat{\theta}_2 G x_3 + \hat{\theta}_3(|x_3+1| - |x_3-1|) + \left(-G_1 c_1\xi_1 + \xi_2(-\gamma_1 G_1 + c_2 G_2) - G_2\gamma_2\xi_3 + \frac{\dddot{y}_r}{\gamma}\right) \end{cases}$$

$$G_1 = \frac{(\gamma_1+\gamma_2 c_{11}-c_{11}c_1)}{\gamma_2}$$
$$G_2 = \frac{-(c_2-\gamma_2+c_{11}\gamma_1)}{\gamma_2}$$

Le système final en boucle fermé en (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -\gamma_1\xi_2 - c_1\xi_1 \\ \dot{\xi}_2 = \gamma_2\xi_3 - c_2\xi_2 \\ \dot{\xi}_3 = -c_3\xi_3 - \gamma_2\xi_2 - \tilde{\theta}_1 x_2 + \tilde{\theta}_2 x_3 + \tilde{\theta}_3(|x_3+1| - |x_3-1|) \end{cases}$$

Les fonctions de Lyapunov appropriée pour le système :

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = -c_1\xi_1^2 - \gamma\xi_1\xi_2 \\ \dot{V}_2 = -c_2\xi_2^2 - c_1\xi_1^2 + \gamma_2\xi_2\xi_3 \\ \dot{V}_3 = -c_1\xi_1^2 - c_2\xi_2^2 - c_3\xi_3^2 + \tilde{\theta}_1^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}}_1^T - \tau_1\right) + \tilde{\theta}_2^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}}_2^T - \tau_2\right) + \tilde{\theta}_3^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}}_3^T - \tau_3\right) \end{cases}$$

Les figures suivantes ullistrent la convergences des états vers le signal référence $y_r = 2\sin(\omega t)$ et les paramètres θ_i vers leurs paramètres éstimées.

3 Conclusion

Dans ce chapitre, on a établi des lois de commandes adaptatives virtuelles, des lois de commande adaptatives finales et des fonction de Lyapunov quadratiques définies négatives, des règles de mise a jour pour les paramètres a éstimer pour la commande pour les systèmes chaotiques autonomes du troisième ordre tels que les circuits de Chua et le système de Lorenz, pour les systèmes chaotiques non autonomes du second ordre tels que les oscillateurs de Duffung et de Vander pool vers un point d'équilibre stable ou vers un cycle limite stable, la poursuite de trajectoire référence ou un signal sinusoidale est choisi est aussi appliquée sur ces systèmes. Une stabilisation uniformément globalement exponentielle est obtenue selon le théorème de Lassale et le théorème de LaSalle et Yoshizawa.

Une comparaison pour la commande adaptative utilisant un PID dont les gains sont optimisés par les algorthmes génétiques est aussi traitée, mais on remarque que le temps de convergence et trés long par rapport a la méthode de Backstepping.

Chapitre 4

Backstepping et Backstepping Adaptatif pour la Synchronisation Chaotique

1 Introduction

La synchronisation des systèmes dynamiques au comportement complexe tels que les oscillateurs et les systèmes chaotiques a suscité un intérêt croissant de par l'existence de nombreux champs d'applications ou d'investigations potentiels (exemples en télécommunication, neurosciences, informatique, ...) [205]- [228].

Les radiocommunications constituent actuellement un domaine en plein essor, depuis quelques années, de nombreux chercheurs étudient la possibilité d'utiliser des signaux chaotiques pour transmettre des données. Dans les systèmes de communication, la synchronisation est fondamentale pour une transmission réussie.

Depuis au moins vingt ans la synchronisation des systèmes chaotiques fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Une des applications de cette synchronisation est la transmission sécurisée des données (analogiques où numériques). De nombreux schémas de transmission ont été proposés par le passé : méthode par additions, par inclusion, par commutation, mais toutes souffrent de défaut de robustesse. En effet la méthode par addition est sensible à une attaque en fréquence et les autres méthodes à une attaque à texte claire connue. Pour remédier à cet inconvénient majeur,de nombreuses études ont été réalisées concernant plusieurs systèmes de transmission, ces études ont montré que le chaos apparaissait comme une solution prometteuse pour augmenter la performance des systèmes de transmission actuels.
L'emploi du chaos dans les systèmes de communication peut permettre de renforcer la sécurité de transmission de l'information et de réduire la probabilité d'interception.

Dans les systèmes de communication, la synchronisation est une clé très importante pour une transmission réussie. La synchronisation classique employée dans les systèmes de télé-

communication cherche à reproduire juste le signal périodique de la porteuse. Par contre, la synchronisation chaotique au niveau du récepteur cherche à dupliquer le signal chaotique envoyé de l'émetteur. Cela veut dire que deux signaux chaotiques seront dit synchronisés s'ils sont asymptotiquement identiques lorsque le temps t tend vers l'infini.

Les travaux sur la synchronisation chaotique ont débuté avec Yamada et Fujisaka [229] qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Les travaux d'Afraimovich ont mené au développement de concepts importants liés à la synchronisation. Par la suite, Pecora et Caroll [197], [230], [231] ont défini la synchronisation chaotique ou synchronisation identique. Ces travaux ont ouvert la voie à plusieurs systèmes de transmission chaotique basés sur ce principe de synchronisation.

Finalement, cette nouvelle technique de synchronisation chaotique a commencé à s'imposer pour les systèmes de transmission par chaos [232]. Plusieurs notions de synchronisation ont été proposées pour les systèmes chaotiques, la plus forte et a plus large utilisation est la synchronisation identique où l'état du système récepteur converge asymptotiquement à celui du système transmetteur pour toute combinaison des états initiaux [206]- [277]. Plus récemment, deux notions plus faibles de synchronisation, appelé synchronisation généralisée [206]- [208], ou l'état du système récepteur converge asymptotiquement à une transformation du système transmetteur où les propriétés de la transformation sont indépendantes des conditions initiales. La synchronisation de phase [209], [210] de deux systèmes associés se produit si la différence entre les phases des deux systèmes est borné par une constante, où la phase est convenablement choisie comme une fonction croissante monotone de temps. La méthode de masquage chaotique a été une des premières applications des signaux chaotiques aux communications. Elle est basée sur le principe de synchronisation par couplage ou synchronisation identique entre deux générateurs chaotiques.

Récemment la synchronisation chaotique [233]- [277] basée sur la méthode de Backstepping est largement utilisée car, une des avantages de la méthode est qu'elle est applicable à une variété de systèmes chaotiques contenant ou pas une excitation externe, et elle a besoin seulement d'un contrôleur pour réaliser la synchronisation entre des systèmes chaotiques et même des systèmes hyper chaotiques. Finalement il n'y a pas de dérives dans le contrôleur, singulier, libre de tout termes non linéaires ou du second degré, donne une certaine flexibilité pour construire une loi du contrôle qui peut être étendue aux systèmes hyper chaotiques de plus haut degrés et le système en boucle fermée est globalement stable. Dans ce chapitre nous allons utiliser la méthode de Backstepping et backstepping adaptatif pour développer des lois de synchronisation pour des systèmes chaotiques qui sont des repères pour la validation des concepts et des approches tels qu'ils sont utilisés aux chapitres précédents.

2 Synchronisation du système chaotique de Lorenz via Backstepping

2.1 Conception de la loi de synchronisation

Considérons le système chaotique de Lorenz sous la forme paramétrique triangulaire suivant comme système maitre(émetteur) :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -10\,(x_1 - y_1) \\ \dot{y_1} = (x_1 - y_1) - z_1\,(9 + x_1) \\ \dot{z_1} = 9\,(x_1 + y_1) - 3\,z_1 + x_1\,y_1 \end{cases} \tag{4.1}$$

Et considérons un deuxième circuit chaotique de Lorenz avec les mêmes paramètres de contrôle, sous d'autres conditions initiales comme système esclave (récepteur).

$$\begin{cases} \dot{x_2} = -10\,(x_2 - y_2) \\ \dot{y_2} = (x_2 - y_2) - z_2\,(9 + x_2) \\ \dot{z_2} = 9\,(x_2 + y_2) - 3\,z_2 + x_2\,y_2 + U \end{cases} \tag{4.2}$$

Où U est une fonction de contrôle à déterminer ultérieurement. Définissons les états erreurs pour chaque variable d'état :

$$\begin{cases} e_x = x_2 - x_1 \\ e_y = y_2 - y_1 \\ e_z = z_2 - z_1 \end{cases} \tag{4.3}$$

Le problème de synchronisation est par conséquent transformé en un problème de stabilisation du modèle d'erreur autour de zéro.

On dérivant dans le temps les états erreurs puis on substituant (4.1), et (4.2) dans (4.3) on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e_x} = -10\,e_x + 10\,e_y \\ \dot{e_y} = e_x - e_y - 9\,e_z - x_2\,e_z - z_1\,e_x \\ \dot{e_z} = 9\,e_x + 9\,e_y - 3\,e_z + y_2\,e_x + x_1 e_y + U \end{cases} \tag{4.4}$$

En cas d'absence de tout contrôle U, le système précédent admet un point d'équilibre $(0, 0, 0)$ et si U est choisie de telle sorte que le point d'équilibre $(0, 0, 0)$ reste inchangé alors le problème de synchronisation de la réponse du système maitre sera réduit à l'étude de la stabilité asymptotique du système précédent (4.4).

Mais le but de la synchronisation est de trouver une loi de commande totale U telle que le système (4.4) est stabilisé à l'origine, c.a.d le but de la commande du système non linéaire (4.4) est d'avoir :

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 0$$

L'objectif alors de la conception est de rendre le point d'équilibre globalement asymptotiquement (GAS), puisque le système est constitué de trois états où de 3 équations différentielles non linéaires, alors il y aura une méthode de conception récursive à 3 étapes. On traite le système comme 3 sous systèmes en cascade chacun avec une seule entrée et une seule sortie. On commence la conception avec le sous système 1 de la première équation différentielle non linéaire et on continue jusqu'au dernier sous système. Durant le processus de conception un changement de coordonnées $w_i = \phi(x, y, z)$ comme variable virtuelle est effectué.

Première étape :

Considérons la stabilité du premier sous système suivant :

$$\dot{e}_x = -10\, e_x + 10\, e_y \tag{4.5}$$

Pour le sous système 1, on choisit l'état e_y comme une entrée virtuelle ou fictive de commande au sous système 1, rappelons que l'objectif de la commande est de conduire$(e_x, e_y, e_z) = (0, 0, 0)$ c.a.d $(x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1, z_1)$.
Définissons la première variable virtuelle du " backstepping " w_1 et la commande virtuelle α_1 comme :

$$\begin{cases} w_1 = e_x \\ w_2 = e_y - \alpha_1 \end{cases} \tag{4.6}$$

Où α_1 est la fonction linéarisante du sous système 1, w_2 est une nouvelle variable, cette dernière ne sera pas utilisée dans la première étape, mais sa présence est nécessaire puisqu'on a besoin de w_2 pour lier le nouveau sous système 1 en w_1 au prochain sous système ou sous système en w_2 qui sera considéré dans la seconde étape. D'où, le sous système 1 devient :

$$\dot{w}_1 = \dot{e}_x = -10\, w_1 + 10\, w_2 + 10\, \alpha_1 \tag{4.7}$$

Pour trouver la fonction stabilisante α_1, choisissons une fonction de Lyapunov appropriée pour le sous système (4.7)comme :

$$V_1(w_1) = \frac{1}{2} w_1^2 \tag{4.8}$$

La dérivée dans le temps est

$$\dot{V}_1(w_1) = w_1\, \dot{w}_1 = -10\, w_1^2 + 10\, w_1\, w_2 + 10\, w_1\, \alpha_1 \tag{4.9}$$

pour rendre $\dot{V}_1(w_1)$ négative définie, on choisi la fonction stabilisante $\alpha_1 = 0$,le second terme dans $\dot{V}_1(w_1)$ sera éliminé dans la prochaine étape. Alors l'équation du premier sous système devient :

$$\dot{w}_1 = 10\, w_2 - 10\, w_1 \tag{4.10}$$

Les coordonnées de conception ont changées de (e_x, e_y) vers (w_1, w_2).

Seconde étape :

Considérons la stabilité du deuxième sous système, ses dynamiques sont calculés en prenant :

$$\dot{e}_y = e_x\,(1 - z_1) - e_y - e_z\,(9 + x_2) \tag{4.11}$$

Donc les dynamiques du deuxième sous système en (w_1, w_2) sont :

$$\dot{w}_2 = \dot{e}_y - \dot{\alpha}_1 = e_x\,(1 - z_1) - e_y - e_z\,(9 + x_2) = w_1\,(1 - z_1) - w_2 - e_z\,(9 + x_2) \tag{4.12}$$

La nouvelle loi de contrôle virtuelle est choisie de telle façon à avoir :

$$w_3 = e_z - \alpha_2 \tag{4.13}$$

α_2 est la fonction stabilisante pour le deuxième sous système et w_3 est une nouvelle variable d'état.

$$\dot{w}_2 = w_1\,(1 - z_1) - w_2 - w_3\,(9 + x_2) - \alpha_2(9 + x_2) \tag{4.14}$$

Et une fonction de Lyapunov appropriée au second sous système (4.14)comme :

$$V_2(w_1, w_2) = V_1(w_1) + \frac{1}{2}w_2^2 \tag{4.15}$$

La dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_2(w_1, w_2) = -10\,w_1^2 - w_2^2 + w_2\,(w_1\,(11 - z_1) - w_3\,(9 + x_2) - \alpha_2(9 + x_2)) \tag{4.16}$$

pour rendre $\dot{V}_2(w_1, w_2)$ négative définie, on choisi la loi de commande virtuelle α_2 comme :

$$\alpha_2 = \frac{(11 - z_1)\,w_1}{(9 + x_2)} \tag{4.17}$$

Alors $\dot{V}_2(w_1, w_2)$ devient :

$$\dot{V}_2(w_1, w_2) = -10\,w_1^2 - w_2^2 - w_2\,w_3\,(9 + x_2) \tag{4.18}$$

Le troisième terme dans $\dot{V}_2(w_1, w_2)$ sera éliminé dans la prochaine étape. Alors l'équation du second sous système devient :

$$\dot{w}_2 = -10\,w_1 - w_2 - w_3\,(9 + x_2) \tag{4.19}$$

Troisième étape :

Sachant l'équation (4.13), l'équation du troisième sous système devient :

$$\dot{w}_3 = \dot{e}_z - \dot{\alpha}_2 \tag{4.20}$$

Avec :

$$\dot{e}_z = w_1\,(9 + y_2) + w_2\,(9 + x_1) - 3\,w_3 - 3\,\alpha_2 + U \tag{4.21}$$

Et :

$$\dot{\alpha}_2 \;=\; \frac{110\,w_2(9 + x_2) - 110\,w_1(9 + y_2)}{(9 + x_2)^2} \tag{4.22}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\dot{w}_3 = {} & w_1\,(9 + y_2) + w_2\,(9 + x_1) - 3\,w_3 - 3\,\alpha_2 + U \\ & - \frac{110\,w_2(9 + x_2) - 110\,w_1(9 + y_2)}{(9 + x_2)^2}\end{aligned} \tag{4.23}$$

Et une fonction de Lyapunov appropriée au sous système (4.23)comme :

$$V_3(w_1, w_2, w_3) = V_1(w_1) + V_2(w_1, w_2) + \frac{1}{2}w_3^2 \tag{4.24}$$

La dérivée dans le temps est :

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 = {} & -10\,w_1^2 - w_2^2 - 3w_3^2 + w_3\Big(- w_2\,(9 + x_2) + w_1\,(9 + y_2) + w_2(9 + x_1) \\ & - 3\frac{11\,w_1}{(9 + \ x_2)} + U - \frac{110\,w_2(9 + x_2) - 110\,w_1(9 + y_2)}{(9 + x_2)^2}\Big)\end{aligned} \tag{4.25}$$

Pour rendre $\dot{V}_3(w_1, w_2)$ négative définie, on choisi la loi de commande U comme :

$$U = w_2\,(9+x_2) - w_1\,(9+y_2) - w_2\,(9+x_1) + 3\,\frac{11\,w_1}{(9 + \ x_2)} + \frac{110\,w_2(9 + x_2) - 110\,w_1(9 + y_2)}{(9 + x_2)^2} \tag{4.26}$$

Alors la dérivée de la fonction de Lyapunov globale du système est :

$$\dot{V}_3(w_1, w_2, w_3) = -10\,w_1^2 - w_2^2 - 3\,w_3^2 \tag{4.27}$$

Le système final en (e_x, e_y, e_z) est :

$$\begin{cases} \dot{e_x} = \dot{w_1} = 10\,w_2 - 10\,w_1 \\ \dot{e_y} = \dot{w_2} = -10\,w_1 \ - w_2 - w_3\,(9 + x_2) \\ \dot{e_z} = -3\,w_3 + w_2\,(9 + x_2) \end{cases} \tag{4.28}$$

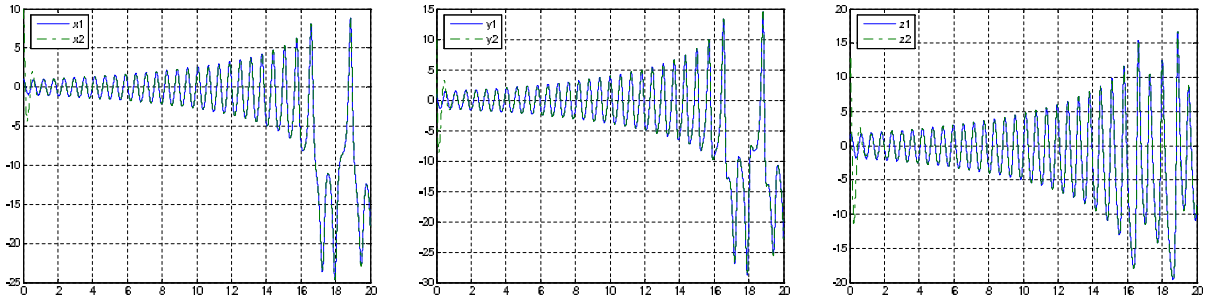
D'après le théorème de LaSalle, V_3 est une fonction continument différentiable ayant la propriété positive définie, sa dérivée dans le temps est négative définie, gràce à l'existance de U, alors le point d'équilibre $(e_x, e_y, e_z) = (0, 0, 0)$ est asymptotiquement globalement stable.

2.2 Simulation des lois de synchronisation sous des condditions initiales différentes

Nous allons changé les conditions initiales de plus en plus éloignées afin de diversifier le champ d'applications de la loi de commande de synchronisation pour le système chaotique de Lorenz via le Backstepping. Ainsi nous considérons les conditions initiales suivantes :

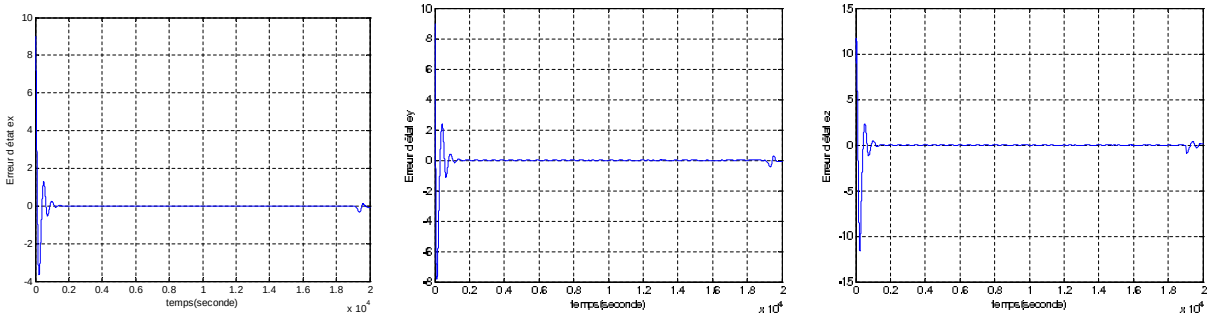
Avec les conditions initiales suivantes

(x_{10}, y_{10}, z_{10})=(1, 1, 1), (x_{20}, y_{20}, z_{20})=(10, 10, 10).



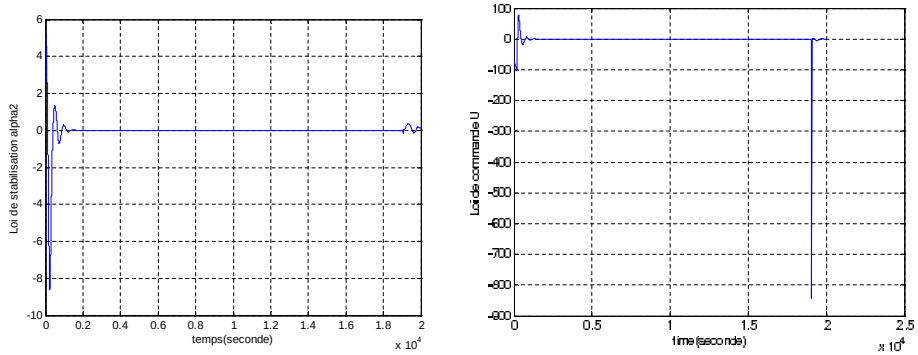
(a) Variation des états x_1 et x_2 (b) Variation des états y_1 et y_2 (c) Variation des états z_1 et z_2

FIG. 4.1 – Synchronisation des états pour le Système de Lorenz



(a) Variation de l'erreur e_x dans le temps (b) Variation de l'erreur e_y dans le temps (c) Variation de l'erreur e_z dans le temps

FIG. 4.2 – Variation des états erreurs pour le Système de Lorenz



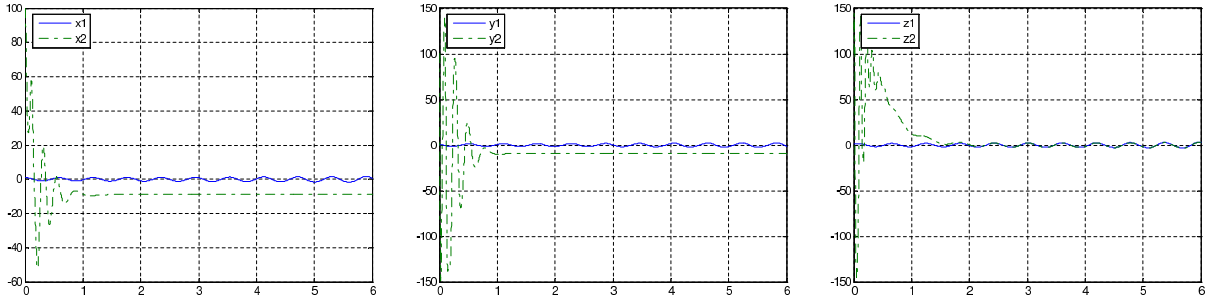
(a) Variation de la loi de stabilisation α_2 dans le temps

(b) Variation de la loi de commande finale U dans le temps

FIG. 4.3 – Variation des lois de commande de synchronisation pour le Système de Lorenz

Avec les conditions initiales suivantes

(x_{10}, y_{10}, z_{10})=(1, 1, 1), (x_{20}, y_{20}, z_{20})=(100, 100, 100).

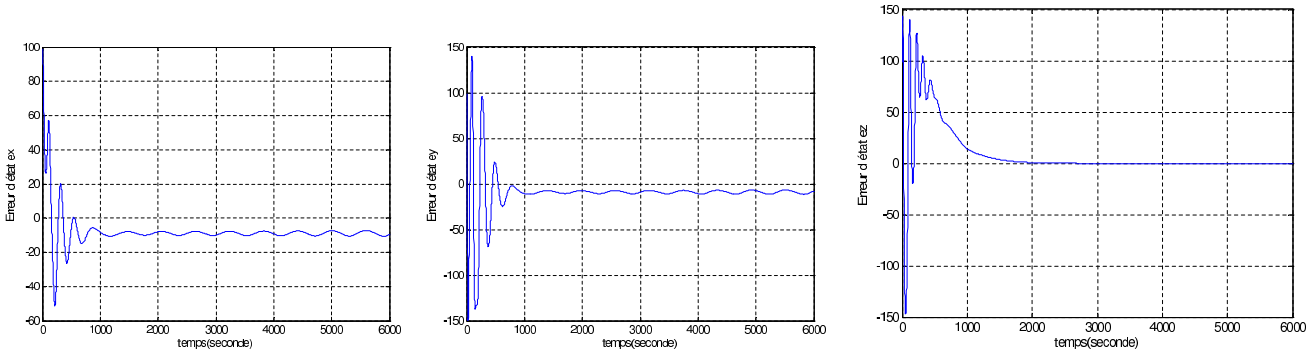


(a) Variation des états x_1 et x_2

(b) Variation des états y_1 et y_2

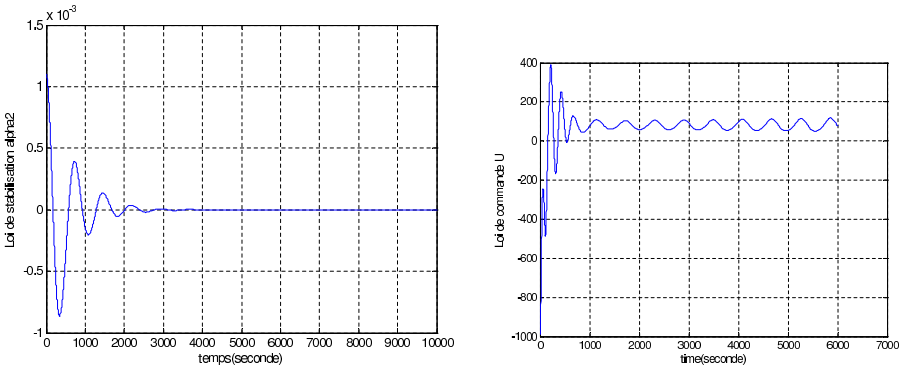
(c) Variation des états z_1 et z_2

FIG. 4.4 – Variation des états dans le temps pour le système de Lorenz



(a) Variation de l'erreur e_x (b) Variation de l'erreur e_y (c) Variation de l'erreur e_z

FIG. 4.5 – Variation des états erreurs dans le temps pour le système de Lorenz



(a) Variation de la loi de stabilisation α_2 (b) Variation de la loi de commande finale U

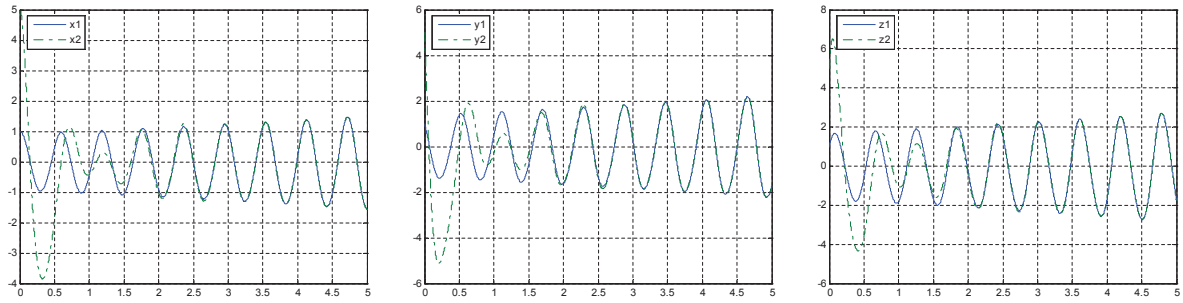
FIG. 4.6 – Variation des lois de commande de synchronisation dans le temps pour le système de Lorenz

Avec les conditions initiales suivantes

$(x_{10}, y_{10}, z_{10})=(1, 1, 1)$, $(x_{20}, y_{20}, z_{20})=(5, 5, 5)$.

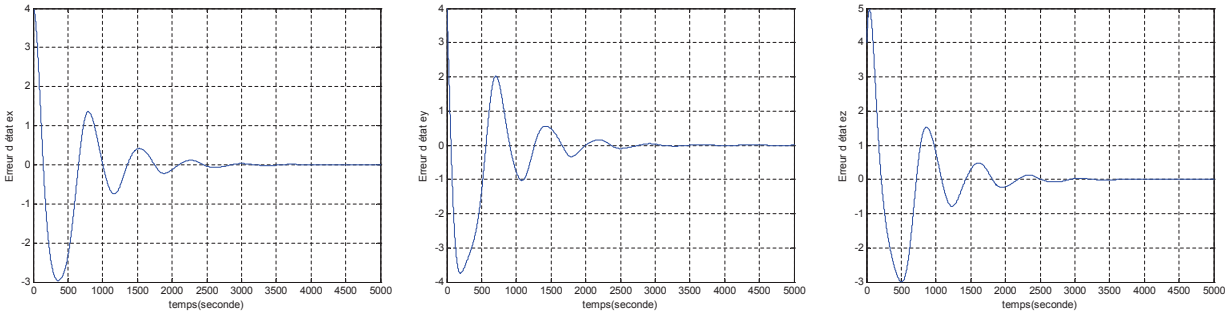
Dans ce qui suit , nous donnons pour ces même conditions une autre méthode pour faire une comparaison avec la procédure du Backstepping nous utilisons la méthode de contrôl actif.

Méthode du Backstepping



(a) Variation des états x_1 et x_2 (b) Variation des états y_1 et y_2 (c) Variation des états z_1 et z_2

FIG. 4.7 – Synchronisation des états via le Backstepping pour le système de Lorenz



(a) Variation de l'erreur e_x (b) variation de l'erreur e_y (c) Variation de l'erreur e_z

FIG. 4.8 – Variation des états erreurs via Backstepping pour le système de Lorenz

Méthode du contrôle actif Soit le sytème esclave :

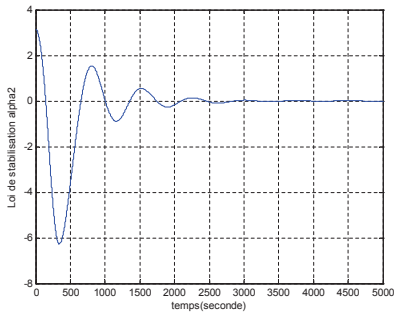
$$\begin{cases} \dot{x_2} = -10\,(x_2 - y_2) + u_1 \\ \dot{y_2} = (x_2 - y_2) - z_2\,(9 + x_2) + u_2 \\ \dot{z_2} = 9\,(x_2 + y_2) - 3\,z_2 + x_2\,y_2 + u_3 \end{cases} \tag{4.29}$$

Ou$u_i, i = 1 \ldots 3$ sont les fonctions du control actifs qui seront déterminées ultérièrement.Définissons les états erreurs pour chaque variable d'état :

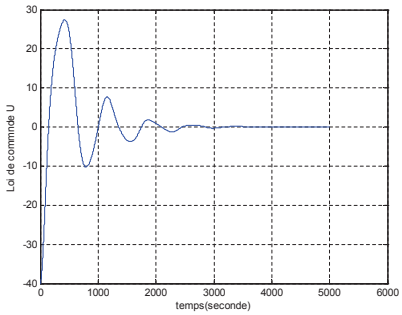
$$\begin{cases} e_x = x_2 - x_1 \\ e_y = y_2 - y_1 \\ e_z = z_2 - z_1 \end{cases} \tag{4.30}$$

Et suivons les étapes de la procédure du contrôle actif, par soustraction des équations du systèmes(4.1) de ceux des équations du systèmes(4.30) on utilisant la définition du système (4.29), on obtient les dynamiques du système erreur suivant.

$$\begin{cases} \dot{e_x} = -10\,e_x + 10\,e_y + u_1 \\ \dot{e_y} = e_x - e_y - 9\,e_z - z_2\,x_2 + z_1\,x_1 + u_2 \\ \dot{e_z} = 9\,e_x + 9\,e_y - 3\,e_z + x_2\,y_2 - x_1 y_1 + u_3 \end{cases} \tag{4.31}$$



(a) Variation de la loi de stabilisation α_2



(b) Variation de la loi de commande finale U

FIG. 4.9 – Variation des lois de commande de synchronisation via Backstepping pour le système de Lorenz

Redéfinissons les fonctions de contrôle actifs comme :

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 + z_2\, x_2 - z_1\, x_1 \\ u_3 = v_3 - x_2\, y_2 + x_1 y_1 \end{cases} \tag{4.32}$$

Les dynimiques du système erreur devient :

$$\begin{cases} \dot{e_x} = -10\, e_x + 10\, e_y + v_1 \\ \dot{e_y} = e_x - e_y - 9\, e_z + v_2 \\ \dot{e_z} = 9\, e_x + 9\, e_y - 3\, e_z + v_3 \end{cases} \tag{4.33}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e_x} & \dot{e_y} & \dot{e_z} \end{bmatrix}^T = B \begin{bmatrix} e_x & e_y & e_z \end{bmatrix}^T \tag{4.34}$$

Dans la méthode du control actif, on choisit une matrice constante$A$ qui controle les dynamiques de l'erreur () telle que

$$[v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T = A \begin{bmatrix} e_x & e_y & e_z \end{bmatrix}^T \tag{4.35}$$

Plusieurs choix de la matrice A pouront satisfaire les dynamiques de l'erreur, mais on pourrai utiliser la matrice A qui satisfait le critère de Routh-Hurwitz pour la stabilite du modèle d'erreur autour de zéro.

Les valeurs propres calculées pour $\det(\nabla B - \lambda I)$, avec ∇ = Le jacobian.

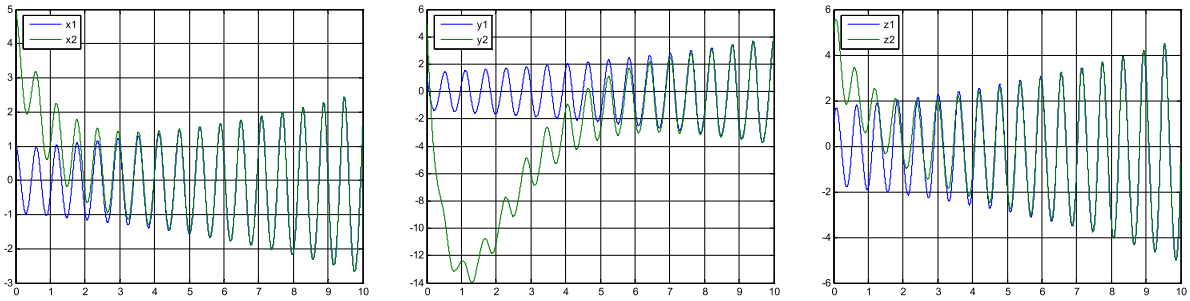
$$\nabla B = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 9 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

Avec : $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -11$. Le choix de A alors sera comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 10 + \lambda & -10 & 0 \\ -1 & 1 + \lambda & 9 \\ 9 & 9 & -3 - \lambda \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

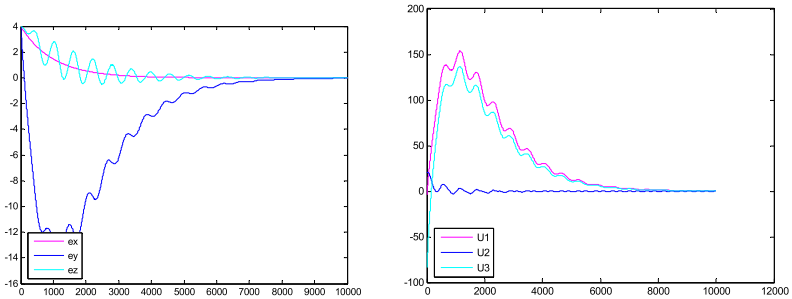
Pour le choix de $\lambda = -1$, les fonctions de contrôle actif sont :

$$\begin{cases} u_1 = v_1 = (10+\lambda)\, e_x - 10\, e_y \\ u_2 = -e_x + (1+\lambda)\, e_y + 9\, e_z + z_2\, x_2 - z_1\, x_1 \\ u_3 = -9\, e_x - 9\, e_y + (3+\lambda)\, e_z - x_2\, y_2 + x_1 y_1 \end{cases} \tag{4.38}$$



(a) Variation de l'état x_1 et x_2 (b) Variation de l'état y_1 et y_2 (c) Variation de l'état z_1 et z_2

FIG. 4.10 – Synchronisation des états via le contrôle actif pour le système de Lorenz



(a) Variation des différentes états d'erreurs e_x, e_y, e_z (b) Variation des différentes lois de contrôle actifs U

FIG. 4.11 – Variation des états via le contrôle actif pour le système de lorenz

2.3 Généralisation de la loi de commande pour la synchronisation de plusieurs systèmes

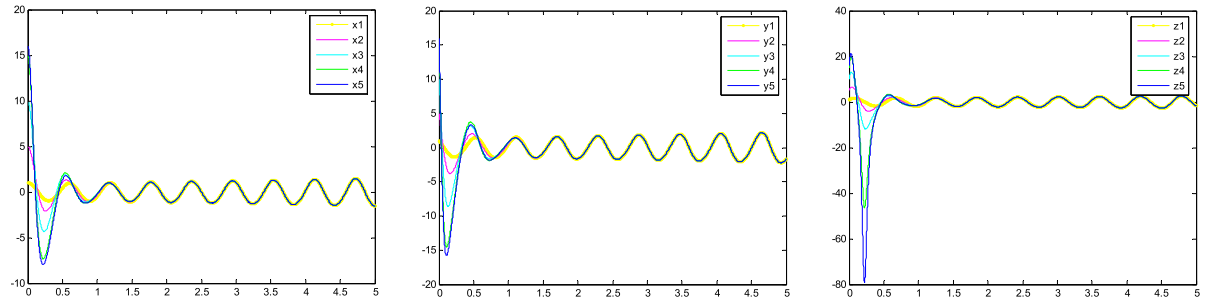
Dans ce paragraphe, nous traitons le problème du contrôle de formation pour la coordination en communication de plusieurs systèmes. L'objectif de la commande de chaque système estque la structure entière de la formation doit suivre les dynamique d'un système chaotique donné. L'idée de la coordination d'un ensemble de systèmes pour la sysnchronisation, a pris naissance dans les applications militaires. En effet, cette coordination est utilisée dans des applications aériennes, aquatiques et terrestres, pour synchroniser des engins en position et en vitesse, l'échange de l'information doit se faire au biai de la communication. Différents types de structures pour la coordination, sont utilisées, la formation en forme de V appelée aussi forme de

navire, en forme d'anneau.
Nous présentons, ainsi, deux types de synchronisation en coordination, en forme de navire et en forme d'anneau.

synchronisation en coordinationen en forme de navire

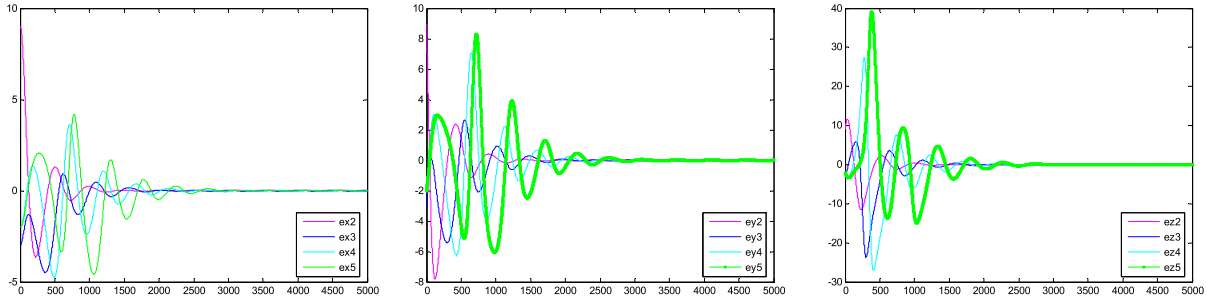
La loi de commande $u(i)$ est conçue pour chaque système esclave, afin de suivre les dynamiques du système maître, une commande centralisée possédant un superviseur. L'objectif de la commande est d'avoir :
$lim_{t\to+\infty}(x_i, y_i, z_i)_{i=1...n} = (x_1, y_1, z_1)$.

Sous des conditions initiales différentes respectivement $(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0})_{i=2...5} = (3, 5, 7, 10)$ et en forme de navire, ces systèmes vont poursuivre un système maitre sous la condition $(x_{10}, y_{10}, z_{10}) = (1)$.



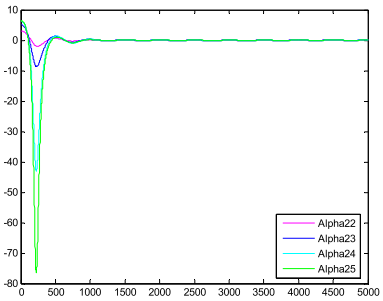
(a) Synchronisation des états x_i (b) Synchronisation des états y_i (c) Synchronisation des états z_i

FIG. 4.12 – Synchronisation des états via Backstepping en forme de navire

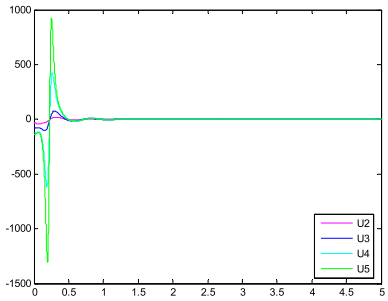


(a) Variation de l'erreur e_{xi} (b) Variation de l'erreur e_{yi} (c) Variation de l'erreur e_{zi}

FIG. 4.13 – Variation des erreurs pour le système de Lorenz via le Backstepping en forme de navire



(a) variation de la loi de stabilisation α_i dans le temps

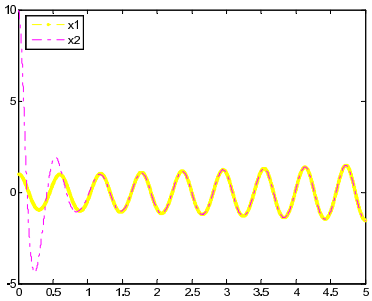


(b) variation de la loi de commande finale U_i dans le temps

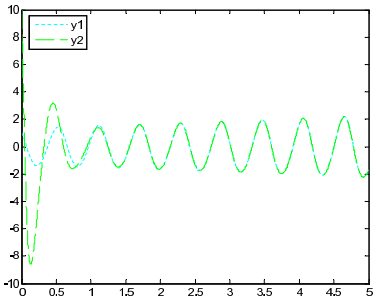
synchronisation en coordination en forme d'anneau

La loi de commande $u(i)$ est conçue pour chaque système esclave (x_i, y_i, z_i) , afin de suivre les dynamiques du système maître $(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$, c'est une commande décentralisée . L'objectif de la commande est d'avoir : $lim_{t\to+\infty}(x_i, y_i, z_i)_{i=1...n} = (x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})_{i=1...n,1}$.

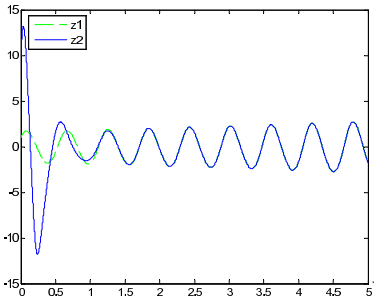
Sous des conditions initiales différentes $(1, 3, 5, 7, 10)$ et en forme d'anneau, chaque système va poursuivre son système maitre jusqu'à fermer l'anneau.



(a) Synchronisation des états x_2, x_1



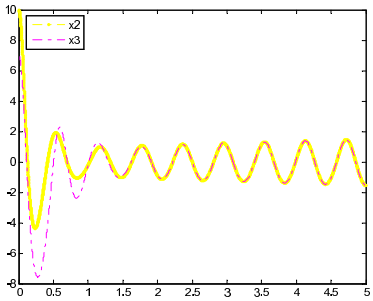
(b) Synchronisation des états y_2, y_1



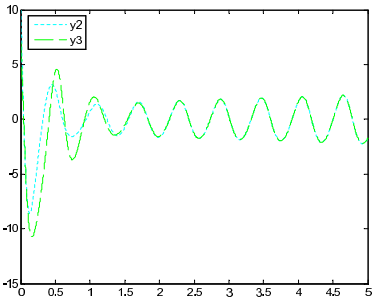
(c) Synchronisation des états z_2, z_1

variation de l'erreur

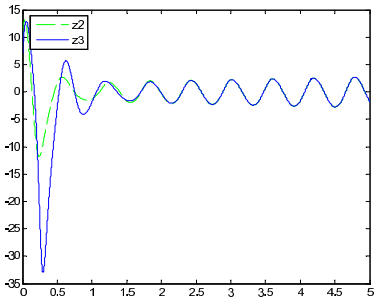
FIG. 4.14 – Synchronisation des états des système 2 et 1 via Backstepping en forme d'anneau



(a) Synchronisation des états x_3, x_2

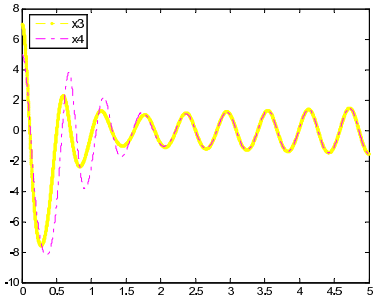


(b) Synchronisation des états y_3, y_2

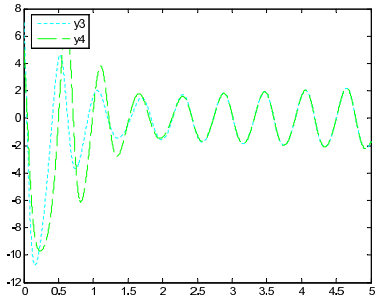


(c) Synchronisation des états z_3, z_2

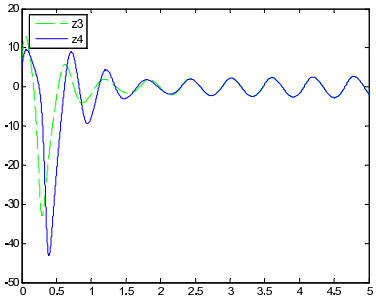
FIG. 4.15 – Synchronisation des états des système 3 et 2 via Backstepping en forme d'anneau



(a) Synchronisation des états x_4, x_3

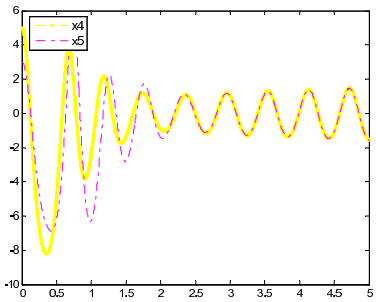


(b) Synchronisation des états y_4, y_3

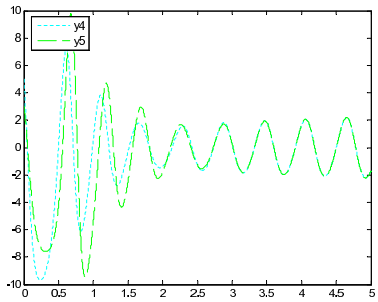


(c) Synchronisation des états z_4, z_3

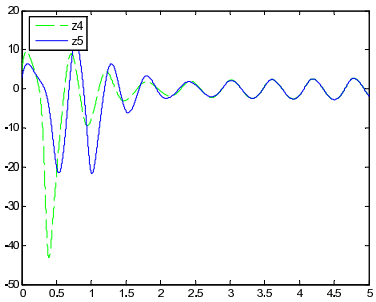
FIG. 4.16 – Synchronisation des états des systèmes 4 et 3 via Backstepping en forme d'anneau



(a) Synchronisation des états x_5, x_4



(b) Synchronisation des états y_5, y_4



(c) Synchronisation des états z_5, z_4

FIG. 4.17 – Synchronisation des états des systèmes 5 et 4 via Backstepping en forme d'anneau

3 Synchronisation du système chaotique de Chua via Backstepping

Considérons le système chaotique de Chua sous sa forme paramétrique stricte suivant.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -p_1\, y_1 \\ \dot{y}_1 = p_2\,((z_1 - y_1) + p_3\, x_1) \\ \dot{z}_1 = p_{41}\,(y_1 - z_1) - p_{42}\, z_1 - p_{43}\,(\|(z_1 + 1)\| - \|(z_1 - 1)\|) \end{cases} \tag{4.39}$$

On pose :

$f(z_1) = -p_{43}\,(\|(z_1 + 1)\| - \|(z_1 - 1)\|)$

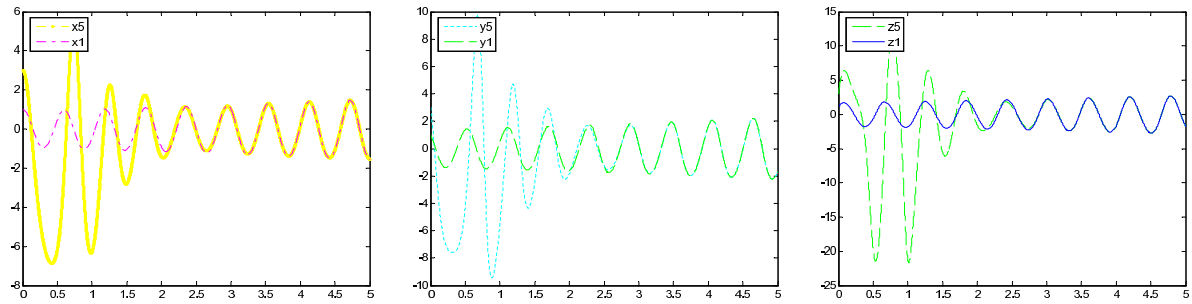
Et $p_1 = \frac{1}{L}$, $p_2 = \frac{(G}{c_2}$, $p_3 = \frac{1}{c_2}$,$p_{41} = \frac{G}{c_1}$, $p_{42} = \frac{G_b}{c_1}$; $p_{43} = \frac{(G_a - G_b)}{c_1}$,

On considére un deuxième circuit chaotique de Chua sous d'autres conditions initiales comme un système esclave.

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -p_1\, y_2 \\ \dot{y}_2 = p_2\,((z_2 - y_2) + p_3\, x_2) \\ \dot{z}_2 = p_{41}\,(y_2 - z_2) - p_{42}\, z_2 - p_{43}\,(\|(z_2 + 1)\| - \|(z_2 - 1)\|) + U \end{cases} \tag{4.40}$$

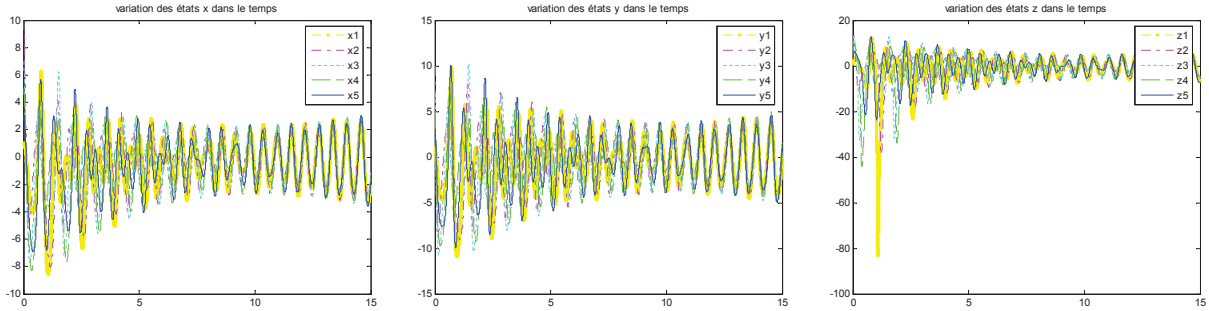
On pose :

$f(z_2) = -p_{43}\,(\|(z_2 + 1)\| - \|(z_2 - 1)\|)$



(a) Synchronisation des états x_1, x_5 (b) Synchronisation des états y_1, y_5 (c) Synchronisation des états z_1, z_5

FIG. 4.18 – Synchronisation des états des systèmes 1 et 5 via Backstepping en forme d'anneau



(a) variation des états x_i dans le temps (b) variation des états y_i dans le temps (c) variation des états z_i dans le temps

FIG. 4.19 – Synchronisation des états des systèmes via Backstepping en forme d'anneau

U est une fonction de contrôle à déterminer ultérieurement.
Définissons les états erreurs pour chaque variable d'état :

$$\begin{cases} e_x = x_2 - x_1 \\ e_y = y_2 - y_1 \\ e_z = z_2 - z_1 \end{cases} \tag{4.41}$$

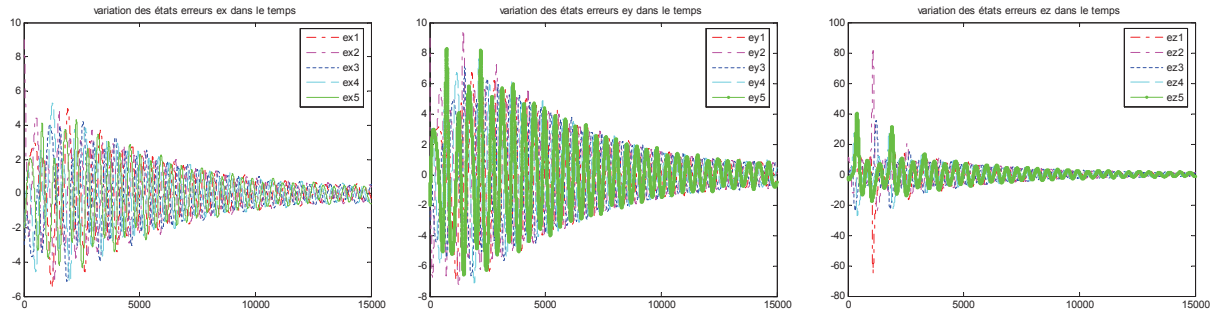
On dérivant dans le temps les états erreurs (4.41) puis on substituant (4.40) et (4.39), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_x = -p_1\, e_y \\ \dot{e}_y = p_2\, e_z - p_2\, e_y + p_3\, e_x \\ \dot{e}_z = p_{41}\, e_y - (p_{41} + p_{42}) e_z + U + f(z_1, z_2)) \end{cases} \tag{4.42}$$

Avec :

$$f(z_1, z_2) = -p_{43}\,(\|(z_2 + 1)\| - \|(z_2 - 1)\|) + p_{43}\,(\|(z_1 + 1)\| - \|(z_1 - 1)\|) \tag{4.43}$$

La structure triangulaire du modèle dynamique précédent, nous permet de concevoir la loi de commande en trois étapes.

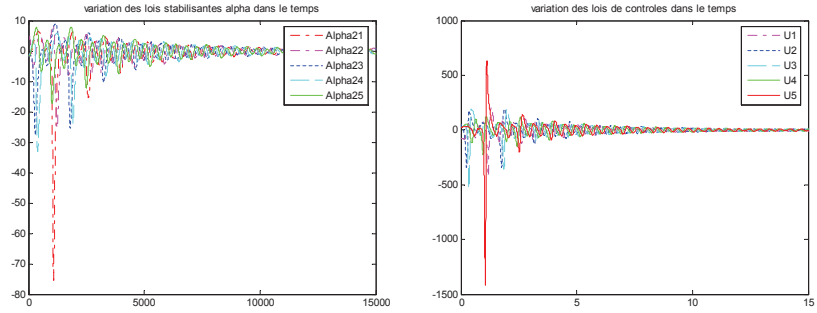


(a) variation de l'erreur e_{xi} dans le temps

(b) variation de l'erreur e_{yi} dans le temps

(c) variation de l'erreur e_{zi} dans le temps

FIG. 4.20 – Variation des états erreurs pour la synchronisation pour le système de Lorenz en forme d'anneau



(a) Variation de la loi de stabilisation α_i dans le temps

(b) Variation de la loi de commande finale U_i dans le temps

FIG. 4.21 – Variation des lois de commande synchronisation pour le système de Lorenz en forme d'anneau

Première étape

Dans la première étape, nous déterminons une loi de commande virtuelle qui permet de stabiliser le premier sous système. D'ou, le sous système 1 devient :

$$\dot{w_1} = \dot{e_x} = -p_1\, e_y = -p_1\, w_2 - p_1\, \alpha_1 \tag{4.44}$$

Pour trouver la fonction stabilisante α_1, choisissons une fonction de Lyapunov appropriée pour le premier sous système comme :

$$V_1(w_1) = \frac{1}{2} w_1^2 \tag{4.45}$$

La dérivée dans le temps est

$$\dot{V}_1(w_1) = w_1\, \dot{w}_1 = w_1\, (-p_1\, w_2 - p_1\, \alpha_1) \tag{4.46}$$

pour rendre $\dot{V}_1(w_1)$ négative définie, on choisi la fonction stabilisante $\alpha_1 = w_1$

$$\dot{V}_1(w_1) = -p_1\, w_1^2 - p_1\, w_1\, w_2 \tag{4.47}$$

le second terme dans $\dot{V}_1(w_1)$ sera éliminé dans la prochaine étape.Alors l'équation du premier sous système devient :

$$\dot{w_1} = -p_1\, w_1 - p_1\, w_2 \tag{4.48}$$

Les coordonnées de conception ont changées de (e_x, e_y) vers (w_1, w_2).

Seconde étape :

Considérons la stabilité du deuxième sous système, ses dynamiques sont calculés en prenant :

$$\dot{w_2} = \dot{e_y} - \dot{\alpha_1} = p_2\, e_z - p_2\, e_y + p_3\, e_x + p_1\, e_y \tag{4.49}$$

Soit :

$$\dot{w_2} = p_2\, w_3 + p_2\, \alpha_2 - p_2\, w_2 - p_2\, \alpha_1 + p_3\, e_x + p_1\, e_y \tag{4.50}$$

Et une fonction de Lyapunov appropriéeau second sous système comme :

$$V_2(w_1, w_2) = V_1(w_1) + \frac{1}{2} w_2^2 \tag{4.51}$$

La dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_2(w_1, w_2) = \dot{V}_1(w_1) + w_2\, \dot{w_2} \tag{4.52}$$

$$\dot{V}_2(w_1, w_2) = -p_1\, w_1^2 - p_2\, w_2^2 + p_2\, w_2\, w_3 + w_2\, (-p_1\, w_1 + p_2\, \alpha_2 - p_2\, \alpha_1 + p_3\, e_x + p_1\, e_y) \tag{4.53}$$

pour rendre $\dot{V}_2(w_1, w_2)$ négative définie on choisi la loi de commande virtuelle comme α_2 comme

$$\alpha_2 = \frac{1}{p_2}(p_1\, w_1 + p_2\, \alpha_1 - p_3\, e_x - p_1\, e_y) \tag{4.54}$$

D'ou

$$\dot{V}_2(w_1, w_2) = -p_1\, w_1^2 - p_2\, w_2^2 + p_2\, w_2\, w_3 \tag{4.55}$$

Le troisième terme dans $\dot{V}_2(w_1, w_2)$ sera éliminé dans la prochaine étape.
Alors l'équation du second sous système devient :

$$\dot{w_2} = p_2\, w_3 - p_2\, w_2 + p_1\, w_1 \tag{4.56}$$

Troisième étape :

Sachant que : L'équation du troisième sous système devient :

$$\dot{w_3} = p_{41}\, e_y - (p_{41} + p_{42}) e_z + U + f(z_1, z_2)) - \dot{\alpha_2} \tag{4.57}$$

Et une fonction de Lyapunov appropriée comme :

$$V_3(w_1, w_2, w_3) = V_1(w_1) + V_2(w_1, w_2) + \frac{1}{2}w_3^2 \tag{4.58}$$

La dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_3 = -p_1\, w_1^2 - p_2\, w_2^2 - (p_{41}+p_{42})w_3^2 + + w_3\,(p_2\, w_2 + p_{41}\, e_y - (p_{41}+p_{42})\alpha_2 + U + f(z_1, z_2) - \dot{\alpha_2}) \tag{4.59}$$

pour rendre $\dot{V}_3(w_1, w_2, w_3)$ négative définie, on choisi la loi de commande U comme :

$$U = p_2\, w_2 - p_{41}\, e_y + (p_{41} + p_{42})\alpha_2 - f(z_1, z_2)) + \dot{\alpha_2} \tag{4.60}$$

Alors :

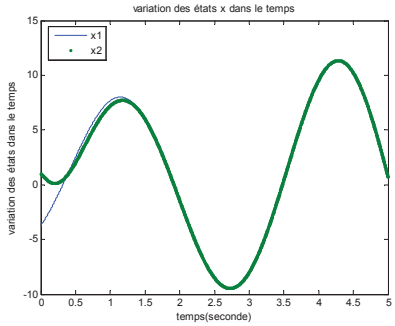
$$\dot{V}_3(w_1, w_2, w_3) = -p_1\, w_1^2 - p_2\, w_2^2 - (p_{41} + p_{42})w_3^2 \tag{4.61}$$

Le système final en (e_x, e_y, e_z) est :

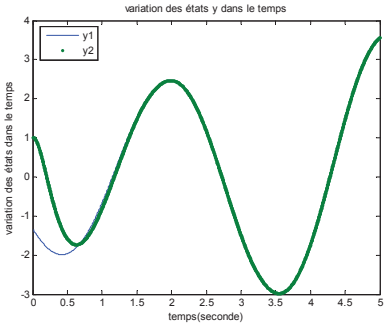
$$\dot{w_3} = -(p_{41} + p_{42})w_3 + p_2\, w_2 \tag{4.62}$$

$$\begin{cases} \dot{w_1} = -p_1\, w_1 - p_1\, w_2 \\ \dot{w_2} = p_2\, w_3 - p_2\, w_2 + p_1\, w_1 \\ \dot{w_3} = -(p_{41} + p_{42})w_3 + p_2\, w_2 \end{cases} \tag{4.63}$$

Afin d'illustrer notre loi de synchronisation pour le circuit de Chua via Backstepping, nous testons notre loi de commande avec $p_1 = 7$, $p_2 = 0.7000$, $p_3 = 1$,$p_{41} = 6.3$, $p_{42} = -4.5$; $p_{43} = -1.35$, et des conditions initiales pour chaque système comme (x_1, y_1, z_1)=(-3.725, -1.325, -0.05), (x_2, y_2, z_2)=(1, 1, 1).

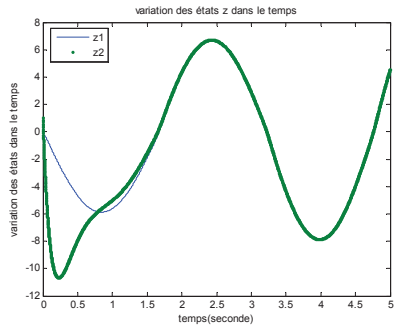


(a) Synchronisation des états x_1 et x_2

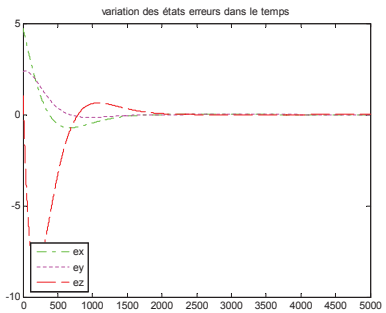


(b) Synchronisation des états y_1 et y_2

FIG. 4.22 – Synchronisation des états pour le circuit de Chua via Backstepping



(a) Variation des états d'erreurs e_x, e_y, e_z dans le temps



(b) Variation des différentes lois virtuelles et finale de contrôle dans le temps

FIG. 4.23 – Variation des états pour le circuit de Chua via Backstepping

4 Synchronisation du système chaotique de Rössler via Backstepping

Considérons le système chaotique de Rössler sous sa forme paramétrique stricte.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = y_1 + a\, x_1 \\ \dot{y_1} = -x_1 - z_1 \\ \dot{z_1} = b\ + z_1(y_1 - c) \end{cases} \tag{4.64}$$

Et on considére un deuxième circuit chaotique de Rössleor sous d'autres conditions initiales comme un système esclave.

$$\begin{cases} \dot{x_2} = y_2 + a\, x_2 \\ \dot{y_2} = -x_2 - z_2 \\ \dot{z_2} = b\ + z_2(y_2 - c) + U \end{cases} \tag{4.65}$$

U est une fonction de contrôle à déterminer ultérieurement. Le système de dérivé de l'erreur est :

$$\begin{cases} \dot{e_x} = e_y + a\, e_x \\ \dot{e_y} = -e_z -\ e_x \\ \dot{e_z} = -c\, e_z + y_2, z_2 - y_1, z_1 + U \end{cases} \tag{4.66}$$

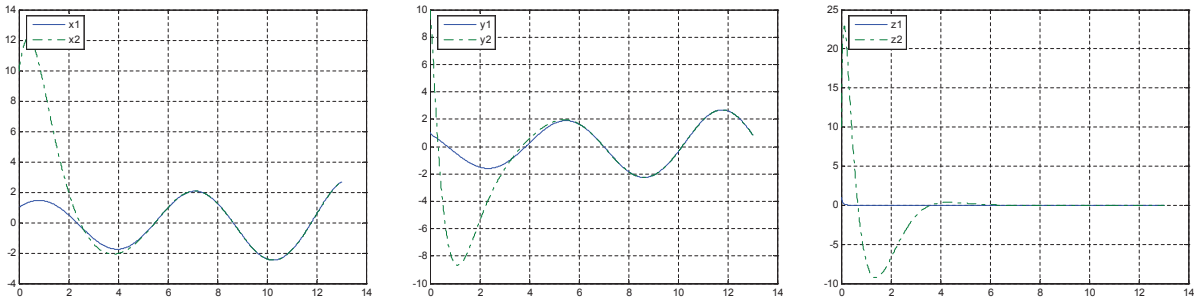
Alors les lois de commande virtuelles et finale sont données par :

$$\begin{cases} \alpha_1 = -(a + c_1)\, w_1 \\ \alpha_2 = c_2\, w_2 - \dot{\alpha_1} \\ U = w_2 + c\, \alpha_2 - y_2, z_2 + y_1, z_1 + \dot{\alpha_2} \end{cases} \tag{4.67}$$

Le système final en (e_x, e_y, e_z) est :

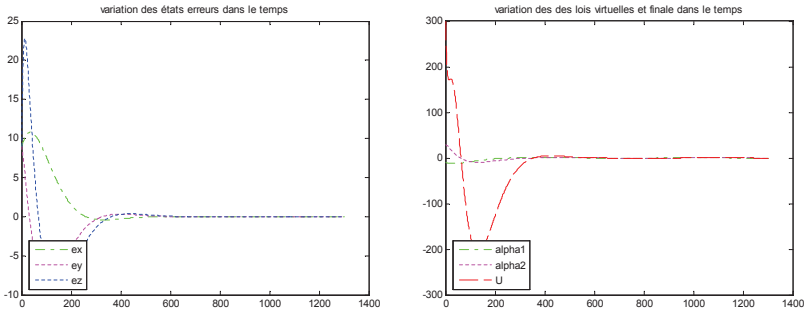
$$\begin{cases} \dot{w_1} = -p_1\, w_1 - p_1\, w_2 \\ \dot{w_2} = p_2\, w_3 - p_2\, w_2 + p_1\, w_1 \\ \dot{w_3} = -(p_{41} + p_{42})w_3 + p_2\, w_2 \end{cases} \tag{4.68}$$

Les figures de simulation des lois pour le circuit de Rösslor via Backstepping sont données par :



(a) Variation de l'état x_1 et x_2 (b) Variation de l'état y_1 et y_2 (c) Variation des états z_1 et z_2

FIG. 4.24 – Synchronisation des états pour le circuit de Rösslor via Backstepping



(a) variation des états d'erreurs e_x, e_y, e_z (b) variation des différentes lois virtuelles et finale de contrôle

FIG. 4.25 – Variation des états pour le circuit de Rösslor via Backstepping

5 Synchronisation du système chaotique de l'oscillateur de Duffing via Backstepping

Considérons un oscillteur de Duffing sous la forme paramétrique du type boucle de retour stricte comme système (maitre) driver :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = y_1 \\ \dot{y_1} = -\delta\, y_1 + x_1 - x_1^3 + \gamma\, \cos(\omega\, t) \end{cases} \tag{4.69}$$

Et un autre un oscillteur de Duffing sous d'autres condditions initiales comme esclave.

$$\begin{cases} \dot{x_2} = y_2 \\ \dot{y_2} = -\delta\, y_2 + x_2 - x_2^3 + \gamma\, \cos(\omega\, t) + U \end{cases} \tag{4.70}$$

Le système dérivé de l'erreur est :

$$\begin{cases} \dot{e_x} = y_2 - y_1 \\ \dot{e_y} = -\delta\,(y_2 - y_1) + (x_2 - x_1) - (x_2^3 - x_1^3) + U \end{cases} \tag{4.71}$$

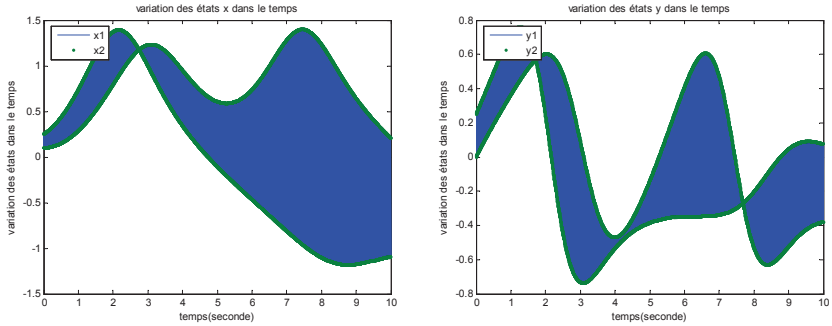
La loi de commande virtuelle et finale sont données par :

$$\begin{cases} \alpha_1 = -w_1 \\ U = -w_2 - (1 - \delta)\, w_1 + (x_2^3 - x_1^3) \end{cases} \tag{4.72}$$

Le système final en w_1, w_2 :

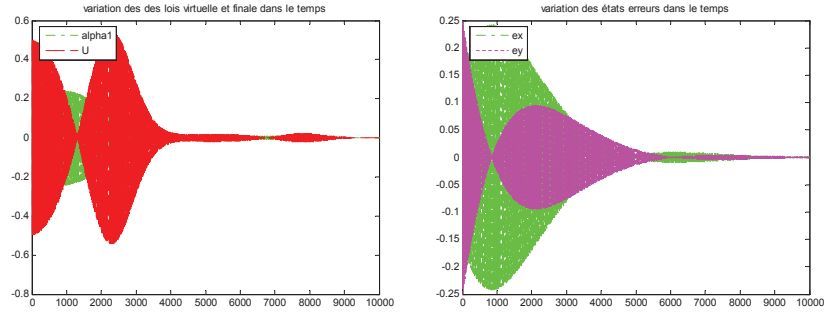
$$\begin{cases} \dot{w_1} = w_2 - w_1 \\ \dot{w_2} = -\delta\, w_2 - w_1 \end{cases} \tag{4.73}$$

Les figures sont données l'oscillateur de Duffing via Backstepping par :



(a) Synchronisation des états x_1 et x_2 (b) Synchronisation des états y_1 et y_2

FIG. 4.26 – Synchronisation des états pour l'oscillateur de Duffing via Backstepping



(a) Variation des etats d'erreurs e_x, e_y, e_z (b) variation des différentes lois virtuelles et finale de contrôle

FIG. 4.27 – Variation des états pour l'oscillateur de Duffing via Backstepping

6 Synchronisation du système chaotique de l'oscillateur de Vander Pool via Backstepping

Considérons un oscillteur de Vander pool sous la forme paramétrique du type boucle de retour stricte comme système (maitre) driver :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - \frac{1}{3}\,{x_1}^3 - y_1 + p_1 + p_2\cos(\omega\,t) \\ \dot{y}_1 = p_3\,(x_1 + p_4 - p_5\,y_1) \end{cases} \tag{4.74}$$

Et un autre un oscillteur de Vander Pool sous d'autres condditions initiales comme esclave.

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = x_2 - \frac{1}{3}\,{x_2}^3 - y_2 + p_1 + p_2\cos(\omega\,t) \\ \dot{y}_2 = p_3\,(x_2 + p_4 - p_5\,y_2) + u \end{cases} \tag{4.75}$$

Le système dérivé de l'erreur est :

$$\begin{cases} \dot{e_x} = e_x - \frac{1}{3}\,{x_2}^3 + \frac{1}{3}\,{x_1}^3 - e_y \\ \dot{e_y} = p_3\,e_x - p_3\,p_5\,e_y + U \end{cases} \tag{4.76}$$

Les lois de commande virtuelle et finale sont données par :

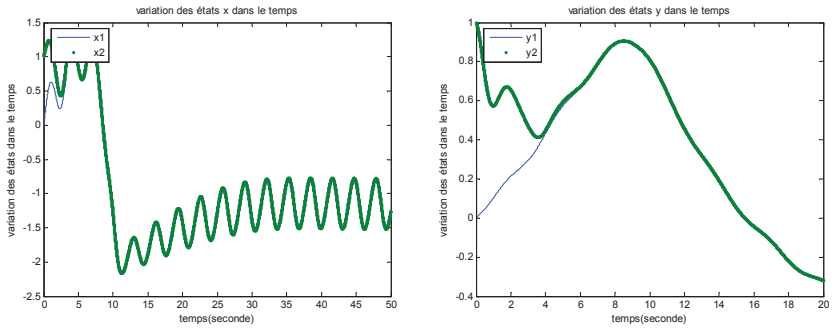
$$\begin{cases} \alpha_1 = k_1\,w_1 + w_1 - \frac{1}{3}\,({x_2}^3 - {x_1}^3)) \\ U = w_1 - p_3\,w_1 + p_3\,p_5\,\alpha_1 + \dot{\alpha_1} \end{cases} \tag{4.77}$$

Le système final en w_1, w_2 :

$$\begin{cases} \dot{w_1} = -w_2 - k_1\,w_1 \\ \dot{w_2} = -p_3\,p_5\,w_2 + w_1 \end{cases} \tag{4.78}$$

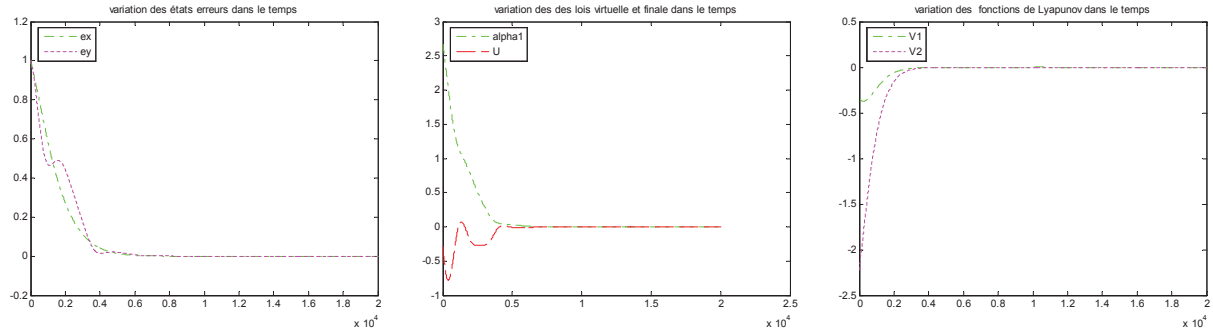
t0=0 ; x1(1)=0 ;y1(1)=0 ; x2(1)=1 ;y2(1)=1 ;

Pour les valeur des paramètres de contrôle : $p_1 = 0$, $p_2 = 0.74$, $p_3 = 0.1$, $p_4 = 0.7$, $p_5 = 0.8$, $w_s = 2$, des conditions initiales $x_{10} = x_{20} = 0.25$, $x_{10} = y_{10} = 0$, $x_{20} = y_{20} = 1$,et des paramètres de conception $k_1 = 2$, $k_2 = 10$, les figures de simulation des lois de synchronisation pour l'oscillateur de Vander Pool via Backstepping sont données par :



(a) Synchronisation des états x_1 et x_2 (b) Synchronisation des états y_1 et y_2

FIG. 4.28 – Synchronisation des états pour l'oscillateur de Vander Pool via Backstepping



(a) variation des états d'erreurs e_x, e_y (b) Variation des différentes lois virtuelles et finale de contrôle (c) Variation des différentes fonctions de Lyuapunov

FIG. 4.29 – Variation des états pour l'oscillateur de Vander Pool via Backstepping

7 Backstepping Adaptatif pour la synchronisation du Système chaotique de Lorenz

Considérons le système chaotique de Lorenz sous la forme paramétrique suivante :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \sigma\,(y_1 - x_1) \\ \dot{y_1} = -x_1\,z_1 + \rho\,x_1 - y_1 \\ \dot{z_1} = x_1 y_1 - \beta\,z_1 \end{cases} \tag{4.79}$$

Pour les valeur des paramètres de contrôle $d = 10; r = 28; b = 3$. Le système présente un phénomène chaotique Et on considére un deuxième circuit chaotique de Lorenz sous d'autres conditions initiales et avec les valeur des paramètres de contrôle inconnues comme système esclave.

$$\begin{cases} \dot{x_2} = \theta_1\,(y_2 - x_2) \\ \dot{y_2} = -x_2\,z_2 + \theta_2\,x_2 - y_2 \\ \dot{z_2} = x_2 y_2 - \theta_3\,z_2 + U \end{cases} \tag{4.80}$$

ou U est une fonction de contrôle à déterminer ultérieurement.

Définissons les états erreurs pour chaque variable d'état :

$$\begin{cases} e_x = x_2 - x_1 \\ e_y = y_2 - y_1 \\ e_z = z_2 - z_1 \end{cases} \tag{4.81}$$

Le problème de synchronisation est par conséquent transformé en un problème de stabilisation du modèle d'erreur autour de zéro.
On dérivant dans le temps les états erreurs puis substituant (4.79) et(4.80) dans (4.81) et on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e_x} = \theta_1 (y_2 - x_2) - \sigma (y_1 - x_1) \\ \dot{e_y} = -x_2 z_2 + \theta_2 x_2 - y_2 + x_1 z_1 - \rho x_1 + y_1 \\ \dot{e_z} = x_2 y_2 - \theta_3 z_2 + U - x_1 y_1 + b z_1 \end{cases} \tag{4.82}$$

On traite le système comme 3 sous systèmes en cascade chacun avec une seule entrée et une seule sortie. On commence la conception avec le première équation du système (4.82) et on continue jusqu'au dernier sous système. Durant le processus de conception un changement de coordonnées $w = \phi(x, y, z)$ est effectué.

Première étape :

Considérons la stabilité du premier sous système suivant :

$$\begin{cases} \dot{e_x} = \theta_1 (y_2 - x_2) - \sigma (y_1 - x_1) \\ = \theta_1 (y_2 - y_1) + \theta_1 y_1 - \theta_1 (x_2 - x_1) - \theta_1 x_1 - \sigma (y_1 - x_1) \\ = \theta_1 (e_y - e_x + y_1 - x_1) - \sigma (y_1 - x_1) \end{cases} \tag{4.83}$$

Sachant que θ est la valeur du paramètre adaptatif courrent
$\hat{\theta}$ est la valeur du paramètre adaptatif éstimé,
$\tilde{\theta}$ est la valeur de l'erreur sur paramètre adaptatif.
$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$
Et on pose $f_1(x_1, y_1) = -\sigma (y_1 - x_1)$

$$\begin{cases} \dot{e_x} = \theta_1 (e_y - e_x + y_1 - x_1) + f_1(x_1, y_1) \\ = \hat{\theta}_1 (e_y - e_x + y_1 - x_1) - \tilde{\theta}_1 (e_y - e_x + y_1 - x_1) + f_1(x_1, y_1) \end{cases} \tag{4.84}$$

Pour le sous système 1, on choisit l'état e_y comme une entrée virtuelle ou fictive de commande au sous système 1,Rappelons que l'objectif de commande est de conduire $(e_x, e_y, e_z) = (0, 0, 0)$ c.a.d
$(x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1, z_1)$
Définissons la première variable virtuelle du " backstepping " comme :
w_1 et La commande virtuelle α_1 comme :

$$\begin{cases} w_1 = e_x \\ w_2 = e_y - \alpha_1 \end{cases} \tag{4.85}$$

où α_1 est la fonction linéarisante du sous système 1, w_2 est une nouvelle variable, cette dernière ne sera pas utilisée dans la première étape, mais sa présence est nécessaire puisqu'on a besoin de w_2 pour lier le nouveau sous système 1 en w_1 au prochain sous système ou sous système en w_2 qui sera considéré dans la seconde étape. D'ou, le sous système 1 devient :

$$\dot{w_1} = \dot{e_x} = \hat{\theta}_1 (w_2 + \alpha_1 - w_1 + y_1 - x_1) - \tilde{\theta}_1 (w_2 + \alpha_1 - w_1 + y_1 - x_1) + f_1(x_1, y_1) \tag{4.86}$$

Pour trouver la fonction stabilisante α_1, choisissons une fonction de Lyapunov appropriée pour le sous système ()comme

$$V_1(w_1, \theta_1) = \frac{1}{2} w_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_1^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_1 \tag{4.87}$$

La dérivée dans le temps est

$$\dot{V}_1(w_1, \theta_1) = w_1 \dot{w}_1 + \tilde{\theta}_1^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}_1 \tag{4.88}$$

$$= w_1 ((\hat{\theta}_1 (w_2 + \alpha_1 - w_1 + y_1 - x_1) - \tilde{\theta}_1 (w_2 + \alpha_1 - w_1 + y_1 - x_1) + f_1(x_1, y_1)) + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}_1 \tag{4.89}$$

$$= \hat{\theta}_1 w_1^2 + \hat{\theta}_1 w_1 w_2 + w_1 (\hat{\theta}_1 (\alpha_1 + y_1 - x_1) + f_1(x_1, y_1)) + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}} - \Gamma w_1 (w_2 + \alpha_1 - w_1 + y_1 - x_1)) \tag{4.90}$$

pour rendre $\dot{V}_1(w_1)$ négative définie, on choisi la fonction stabilisante

$$\alpha_1 = -y_1 + x_1 - \frac{f_1(x_1, y_1)}{\hat{\theta}_1} \tag{4.91}$$

$$\tag{4.92}$$

Et avec la loi de mise à jour loi $\dot{\hat{\theta}}_1 = \tau_1$, où

$$\tau_1 = \Gamma w_1 (w_2 + \alpha_1 - w_1 + y_1 - x_1)) \tag{4.93}$$

Est la fonction de réglage du premièr paramètre à éstimer.

Alors $\dot{V}_1$ devient :

$$\dot{V}_1 = -\hat{\theta}_1 w_1^2 + \hat{\theta}_1 w_1 w_2 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}} - \tau_1) \tag{4.94}$$

Le second terme dans $\dot{V}_1(w_1)$ sera éliminé dans la prochaine étape.

L'équation du premier sous système devient :

$$\dot{w_1} = \hat{\theta}_1 (-w_1 + (w_2) + \tilde{\theta}_1 (w_1 - (w_2 + \alpha_1) + (x_1 - y_1) \tag{4.95}$$

Les coordonnées de conception ont changées de (e_x, e_y) vers (w_1, w_2).

Seconde étape :

Considérons la stabilité du deuxième sous système, ses dynamiques sont calculés en prenant :

$$\dot{e_y} = -x_2 e_z - e_y - z_1 e_x + \hat{\theta}_2 x_2 - \tilde{\theta}_2 x_2 - \rho x_1 \tag{4.96}$$

Donc les dynamiques du deuxième sous système en (w_1, w_2) sont :

Introduisant La nouvelle variable virtuelle du backstepping w_3.

$$w_3 = e_z - \alpha_2 \tag{4.97}$$

α_2 est la fonction stabilisante pour le deuxième sous système.

$$\dot{w_2} = -x_2 w_3 - x_2 \alpha_2 - w_2 - \alpha_1 - z_1 w_1 + \hat{\theta}_2 x_2 - \tilde{\theta}_2 x_2 - \rho x_1 - \dot{\alpha_1} \tag{4.98}$$

$$\tag{4.99}$$

On pose $f_2() = -\rho x_1 - \dot{\alpha_1}$

Et une fonction de Lyapunov appropriée au second sous système comme :

$$V_2(w_1, w_2, \theta_1, \theta_2) = V_1(w_1) + \frac{1}{2} w_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_2^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_2 \tag{4.100}$$

La dérivée dans le temps est

$$\dot{V}_2(w_1, w_2) = \dot{V}_1(w_1) + w_2 \dot{w_2} + \tilde{\theta}_2^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}_2 \tag{4.101}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -\hat{\theta}_1 w_1^2 - w_2^2 - x_2 w_2 w_3 \\ & + w_2 (\hat{\theta}_1 w_1 - x_2 \alpha_2 - \alpha_1 - z_1 w_1 \\ & + \hat{\theta}_2 x_2 + f_2()) + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}} - \tau_1) + \tilde{\theta}_2^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}}_2^T - \Gamma w_2 x_2) \end{aligned} \tag{4.102}$$

pour rendre $\dot{V}_2$ négative définie on choisi la loi de commande virtuelle comme α_2 comme:

$$\alpha_2 = \frac{\hat{\theta}_1 w_1 - \alpha_1 - z_1 w_1 + \hat{\theta}_2 x_2 + f_2()}{x_2} \tag{4.103}$$

Avec la loi de mise à jour loi $\dot{\hat{\theta}}_2 = \tau_2$, où

$$\tau_2 = \Gamma w_2 x_2 \tag{4.104}$$

τ_2 Est la fonction de réglage pour le second paramètre de controle.
Alors $\dot{V}_2$ devient :

$$\dot{V}_2 = -\hat{\theta}_1 w_1^2 - w_2^2 - x_2 w_2 w_3 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}}_1 - \tau_1) + \tilde{\theta}_2^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}}_2 - \tau_2) \tag{4.105}$$

Le troisième terme dans $\dot{V}_2$ sera éliminé dans la prochaine étape.
L'équation du deuxième sous système devient en coordonnées de (w_1, w_2).

$$\dot{w_2} = -x_2 w_3 - w_2 - \hat{\theta}_1 w_1 - \tilde{\theta}_2 x_2 \tag{4.106}$$

Troisième étape : Sachant que

$$w_3 = e_z - \alpha_2 \tag{4.107}$$

L'équation du troisième sous système devient :

$$\dot{w_3} = \dot{e_z} - \dot{\alpha_2} \tag{4.108}$$

Avec

$$\dot{e_z} = x_2 y_2 - \theta_3 z_2 + U - x_1 y_1 + b z_1 \tag{4.109}$$

Donc :

$$\dot{w_3} = -\hat{\theta}_3 z_2 - \tilde{\theta}_3 z_2 + U + f_3() \tag{4.110}$$

On pose $f_3() = x_2 y_2 + b z_1 - x_1 y_1 - \dot{\alpha_2}$.
Et une fonction de Lyapunov appropriée comme:

$$V_3(w_i, \theta_i) = V_1 + V_2 + \frac{1}{2} w_3^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_3^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_3 \tag{4.111}$$

La dérivée dans le temps est:

$$\dot{V}_3(w_1, w_2, w_3) = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + w_3 \dot{w_3} + \tilde{\theta}_3^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}_3 \tag{4.112}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = &-\hat{\theta}_1 w_1^2 - w_2^2 - \hat{\theta}_3 w_3^2 + w_3 \overbrace{(-\hat{\theta}_3 z_2 + U + f_3())}^{-c w_3} \\ &+ \tilde{\theta}_1^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}}_1 - \tau_1) + \tilde{\theta}_2^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}}_2 - \tau_2) + \tilde{\theta}_3^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}}_3 - \Gamma w_3 z_2) \end{aligned} \tag{4.113}$$

pour rendre $\dot{V}_2(w_1, w_2)$ négative définie, on choisi la loi de commande U comme :

$$U = \hat{\theta}_3 \, z_2 - f_3() \tag{4.114}$$

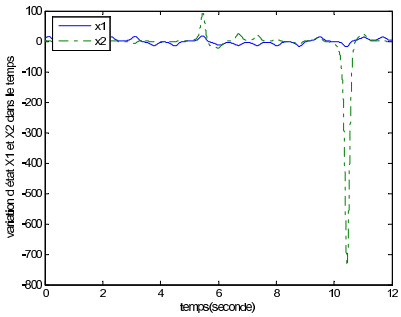
Avec la loi de mise à jour loi $\dot{\hat{\theta}}_3 = \tau_3$, où

$$\tau_3 = \Gamma \, w_3 \, z_2 \tag{4.115}$$

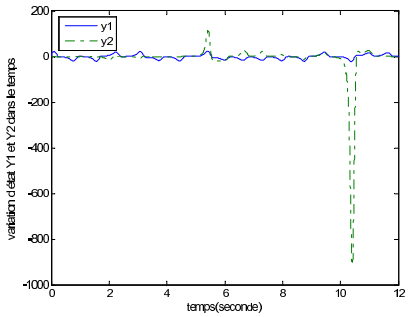
τ_3 Est la fonction de réglage pour le troisième paramètre de contrôle.
Alors $\dot{V}_3$ devient :

$$\dot{V}_3 = -\hat{\theta}_1 \, w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 + \tilde{\theta}_1^T \, \Gamma^{-1} \, (\dot{\hat{\theta}}_1 - \tau_1) + \tilde{\theta}_2^T \Gamma^{-1} \, (\dot{\hat{\theta}}_2 - \tau_2) + \tilde{\theta}_3^T \, \Gamma^{-1} \, (\dot{\hat{\theta}}_3 - \tau_3) \tag{4.116}$$

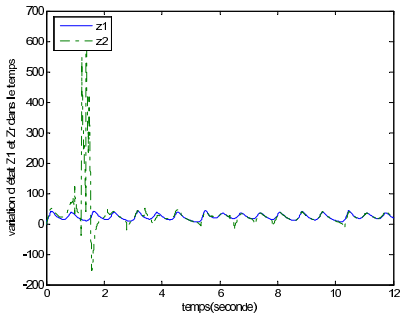
Supposant qu'un système recepteur sous des conditions initiales des états$x_2 = 10$,$y_2 = 10$,$z_2 = 10$, avec ses paramètres de controle $\theta_1 = 16$, $\theta_2 = 25$, $\theta_3 = 4$, va se synchroniser avec un système transmeteur sous des conditions initiales des états $x_1 = 1$,$y_1 = 1$,$z_1 = 1$, avec ses paramètres de contrôle $\theta_1 = 10$, $\theta_2 = 28$, $\theta_3 = 3$. Par un choix des paramètres de conception$c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 10$, et la matrice de gain $\Gamma = [0.0000010.0000010.000001]^T$, les figures de simulation suivantes montrent une convergence des états et des paramètres de contrôle du recepteur au bout de quelques secondes aprés application de la loi de contrôle de synchronisation.



(a) Synchronisation des états x_1 et x_2

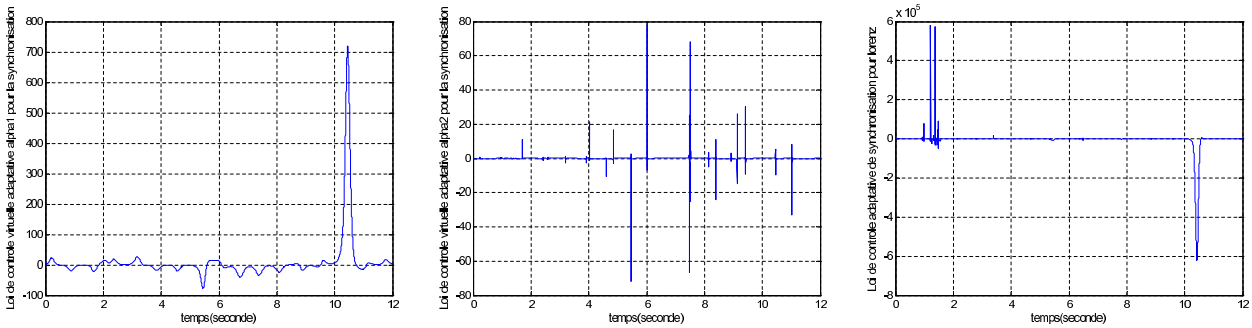


(b) Synchronisation des états y_1 et y_2



(c) Synchronisation des états z_1 et z_2

Fig. 4.30 – Convergence adaptative des états récepteur vers les états emetteur du système chaotique de Lorenz



(a) Variation de la loi adaptative virtuelle α_1 dans le temps

(b) Variation de la loi adaptative virtuelle α_2 dans le temps

(c) Variation de la loi de commande adaptative finale U dans le temps

FIG. 4.31 – Variation des lois adaptatives de synchronisation pour le système chaotique de Lorenz

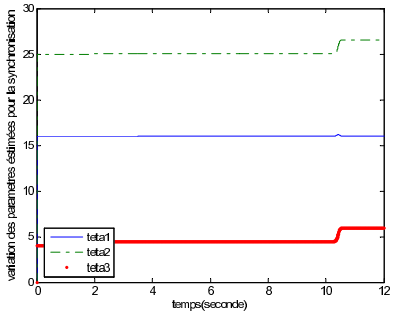


FIG. 4.32 – Variation des paramètres éstimées θ_1, θ_2 et θ_3 pour la synchronisation dans le temps

8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une commande non linéaire basée sur le backstepping pour la synchronisation des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques, par définitions des états erreurs le problème de synchronisation est transformé en un problème de stabilisation du modèle d'erreur autour de zéro.

La synchronisation entre deux systèmes chaotiques de Lorenz identiques est accomplie. Des simulations ont été effectuées afin de montrer l'efficacité du contrôleur, nous avons utilisé des conditions initiales de plus en plus éloignées. Ensuite, le contrôleur que nous avons développé a été comparé avec un contrôleur basé sur la méthode de contrôle actif, le premier présentait un temps de convergence inférieur et un effort de contrôle minime. De même, nous avons développé aussi des commandes non linéaires basées sur le backstepping pour la synchronisation pour la coordination en communication de plusieurs systèmes chaotiques en forme de navire (commande centralisée) et en forme d'anneau (commande décentralisée) ce type de communication est très utilisé en application militaire. Une des avantages de la méthode du backstepping

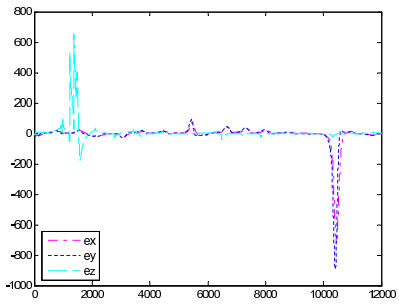


FIG. 4.33 – Variation des états $e_x, e_y et e_z$ dans le temps

est qu'elle est applicable à une variété de systèmes chaotiques contenant oú pas une excitation externe, des lois de commandes ont été conçues pour plusieurs autres types de systèmes chaotiques tels que le circuit de Chua, le circuit de Rösslor et les oscillateurs de Duffing et de Vander pool.

Dans certains cas, le système maître est inconnu dans ses paramètres de contrôle et ses conditions initiales, pour faire la synchronisation la loi de commande est développée par le biai du backstepping adaptatif, ce problème aussi a été traité dans ce chapitre, des pics sur des états ont été remarqués, pour les éliminer un algorithme d'optimisation des constantes de conception est recommandé.

Un des avantages de l'utilisation de la synchronisation chaotique dans les systèmes de transmission basé sur le chaos est que les signaux chaotiques sont non périodiques, ils sont générés à partir de systèmes dynamiques non linéaires , ils présentent en plus tous des difficultés d'interception grace à la sensibilité aux conditions initiales et aux paramètres.

Conclusion Générale

Le travail développe dans le cadre de cette thèse, a eu pour objectif la conception des lois de contrôles basées sur la méthode du backstepping et le backstepping adaptatif pour le contrôle, la poursuite d'une trajectoire référence et la synchronisation des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques non autonomes du deuxième ordre et autonomes du troisième ordre.

Les systèmes sous considération dans les deux sujets sont caractérisés par la présence des ensembles limites non standards et essentiellement d'une dynamique non linéaire, comme conséquence naturelle le contrôle de dynamique chaotique et la synchronisation chaotique demandent l'application des techniques de contrôle non linéaire, le contrôle du chaos fait référence à la manipulation du comportement dynamique du système chaotique, dont l'objectif est la suppression du chaos quand il nuisible ou au contraire le créer et le préserver quand il est bénéfique, la synchronisation chaotique en revanche fait référence à la tâche de permettre la synchronie dynamique de plusieurs systèmes chaotiques connectés au moyen de techniques de contrôle ou à travers des configurations couplées spécialement conçues.

Nous avons abordé dans la première partie, les principales définitions mathématiques relatives aux systèmes chaotiques, notamment des notions préliminaires pour l'analyse du comportement chaotique, Les Problèmes de contrôle des processus chaotiques, La formulation mathématique des problèmes célèbres de contrôles des processus chaotiques qui sont précédés par la présentation des modèles de base des systèmes chaotiques qui sont souvent utilisés, comme les oscillateurs chaotiques de Van der Pol, de Duffing, et comme systèmes autonomes du troisièmes ordres , le système de Lorenz, le système de Chua et le système de Rösslor. Nous avons aussi proposé dans cette partie les plus fiables et les plus connues des méthodes de contrôle des processus chaotiques, ces méthodes sont visées à améliorer la suppression du chaos avec la réduction simultanée du niveau d'effort externe exigé et conduire les trajectoires du système à converger vers l'orbite périodique désirée. La suppression de la dynamique chaotique dans un système dynamique est le seul objectif pour un problème de contrôle. Par conséquent, il est clair que le comportement dynamique d'un système non linéaire peut être changé en changeant certaines valeurs de ces paramètres où les valeurs de ses variables d'état , à condition que ces dernières soient accessibles pour l'ajustement. De ce fait, le contrôle du chaos implique l'extraction de mouvements périodiques désirés en dehors des zones chaotiques, par l'application

de petites perturbations judicieusement choisies.

Dans la seconde partie du travail, nous avons introduit les techniques de bases du Backstepping, où on a donné quelques concepts sur la théorie de Lyapunov, des conditions suffisantes de stabilité des différents états d'équilibres des systèmes dynamiques non linéaires, la classe de système est celle dérivant des modèles de systèmes physiques qui peuvent se présenter par un ensemble des équations différentielles ordinaires. Des méthodes qui permettent de construire une telle fonction de Lyapunov candidate pour un système donné, pour la conception d'une loi de contrôle associée avec une fonction de Lyapunov constitue ce qu'on appelle un contrôle basée sur la théorie de Lyapunov (Cfl), le Backstepping résout ce problème à travers une méthode récursive pour une classe des systèmes non linéaire, on a donné par la suite des idées de base de la conception des lois de commande par le Backstepping et l'application sur des systèmes chaotiques cités au dessus, .

Pour la technique du backstepping addaptatif, la conception des lois pour le contrôle adaptatif non linéaire est présenté lorsque le système chaotique est représenté par un ensemble des équations différentielles ordinaires contenant un nombre fini de paramètres de contrôle inconnues, son objectif est de concevoir en plus d'un contrôleur adaptatif dans la contre réaction pour le système qui garantit la stabilité globale, et force la sortie du système à converger soit vers le point d'equilibre ou une orbite périodique dans le cas de la stabilisation, ou à suivre asymptotiquement la sortie du modèle référence dans le cas de la poursuite. En passant par l'élaboration des fonction de mise à jour afin que chaque paramètre adaptatif courrent de controle puisse atteindre sa valeur adaptatif éstimé.

La dernière partie du travail regroupe quelques applications sur la synchronisation chaotique de type identique pour les systèmes chaotiques cités au paravant, une des applications la plus utilisée dans la transmission sécurisée des données basée sur la méthode de Backstepping. Ensuite, pour faire un comparaison de notre méthode, le contrôleur ainsi développé a été comparé avec un contrôleur basé sur la méthode de contrôle actif, le premier présentait un temps de convergence inférieur et un effort de contrôle minime. Dans certaines applications l'information ne peut parvenir qu'à travers plusieurs systèmes, nous avons exploité la procédure ainsi abordée pour résoudre le problème de coordination d'un groupe de systèmes dynamiques non linéaires chaotiques, où une seule loi est conçue à la fois pour synchroniser deux systèmes jusqu'à parvenir à synchroniser tout le groupe de systèmes.

En effet, les méthodes que nous avons appliqués présentent les caracteristiques suivantes :

- La méthode utilisée est considéré comme une région de la recherche passionnante impressionnant de sa rapide prospérété grâce au résultats de stabilité globale et de poursuite pour une grande classe des systèmes non linéaires de forme de boucle de retour stricte.
- La procédure de conception est récursive, durant chaque étape, le sous systèmes est sta-

bilisé sous une fonction de Lyapunov appropriée par la mise au point d'une fonction stabilisate et une fonction de réglage ou de mise à jour pour le paramètre estimé, le controle final n'est déterminé qu'en dernière étape.

- Les modèles mathématiques les plus connus rencontrés dans la littérature sur contrôle de chaos sont représentés par les systèmes d'équations differentiel ordinaires ou équations d'état seulement.
- Les méthode de linéarisations par boucle de retour élimine toutes les non linéarités du système, la technique du " backstepping " donne plus de flexibilité au concepteur en exploitant les " bonnes " non linéarités.
- Retenir les non linéaritées au lieu de les éliminées exigent des modèles moins précis et aussi un effort de contrôle petit.
- Tandis que les " mauvaises " non linéarités ou les non linéarités déstabilisantes sont dominées en ajoutant des amortissements non linéaires. Ainsi, une robustesse additionnelle est obtenue.
- les résultats des les lois de contrôle peuvent être quelquefois optimales en ce qui concerne l'indice de performance qui garantit certaines propriétés de la robustesse.

Les differents problemes mentionnes ci-dessus sont actuellement au stade de l'étude pour le contrôle et la poursuite d'un signal référence surtout en domaine de médecine et pour la synchronisation en domaine de communication sécurisée.

Bibliographie

[1] Daniel Parrochia, *Les Grandes Révolutions scientifiques du XXe siècle*, Paris, Presses Universitaires de France, 1997.

[2] Edward N.Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, Journal of the Atmospheric Sciences,vol. 20, no. 2, pp. 130-141. Journal,1963.

[3] *systèmesChaotiques.pdf fulltext01.pdf*,

[4] Li T.Y., Jorke J.A. *Period three implies chaos*, American Mathematical Monthly, 82, pp. 481-485,1975.

[5] Stephen Smale, *Differentiable Dynamical Systems, Bulletin of the American Mathematical Society*,vol. 73, pp. 1-82, 1967.

[6] *systèmesChaotiques.pdf fulltext01.pdf*,

[7] David Ruelle, F. Takens, *On the nature of turbulence*, Communications in Mathematical Physics, volume 20, no. 2, pp. 167-192, 1971.

[8] David Ruelle, *Hasard et chaos*, Paris, Éditions du Seuil, Collection Points-Odile Jacob 1993.

[9] Poincaré, H. *Science et méthode*, Edition Ernest Flammarion,Paris 1908, pp. 66.

[10] Poincaré, H. *Calcul des probabilités*, 2nd revised and expanded eddition, Paris,Gauthier-Villars.

[11] Devaney, R.L, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, New York, 1987.

[12] Marc Lefranc, *L'analyse topologique du chaos, Caractérisation topologique et contrôle du chaos* Lille, exposé du 28 mars 2002.

[13] Thomas S. Parker and Leo O Chua, *Chaos : A tutorial for engineers*, proceeding of the IEEE vol.75, No.8,august 1987, pp. 982- 1000.

[14] T. S. Parker and L. O. Chua, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. New York : Springer-Verlag, 1989.

[15] R. N. Madan, Ed., *Chua's Circuit : A Paradigm for Chaos*. Singapore : World Scientific, 1993.

[16] B. R. Andrievskii and A. L. Fradkov, *Control of Chaos : Methods and Applications.*, Automation and Remote Control Volume 64, No. 5, 2003, pp. 673-713.

[17] Ott E, Grebogi C, Yorke JA, *Controlling chaos*, Phys Rev Lett, vol 64,pp 1196-1199, 1990.

[18] Ditto W.L., Rauseo S.N., and Spano M.L., *Experimental Control of Chaos*, Phys. Rev. Lett., 1990, vol. 65, pp. 3211-3214.

[19] Fradkov A.L. and Evans R.J., *Control of Chaos : Some Open Problems*, Proceeding. 40th IEEE Confecence, Control , Orlando, 2001, pp. 698-703.

[20] Fradkov A.L. and Evans R.J., *Control of Chaos : Survey 1997-2000*, Preprints of 15Th Triennial World Congress IFAC, Plenary Papers, Survey Papers, Milestones, Barcelona, 2002, pp. 143-154.

[21] Fradkov A.L. and Guzenko P.Yu., *Adaptive Control of Oscillatory and Chaotic Systems Based on Linearization of Poincaré Map*, Proceeding 4th European Control Conference, Brussels, 1997.

[22] Fradkov A.L. and Pogromsky, A.Yu., *Speed Gradient Control of Chaotic Continuous-time Systems*, IEEE Transactions Circuit Systems I , 1996, volume 43, pp. 907-913.

[23] Fradkov A.L. and Pogromsky A.Yu., *Introduction to Control of Oscillations and Chaos*, Singapore World Scientific, 1998.

[24] Freeman W.J., Chang H.J., Burke B.C., et al., *Taming Chaos : Stabilization of Aperiodic Attractors by Noise*, IEEE Transactions Circuit Systems I , 1997, volume 44, pp. 989-996.

[25] Fronzoni L., Giocondo M., and Pettini M., *Experimental Evidence of Suppression of Chaos by Resonant Parametric Perturbations*, Physics Review A, 1991, volume 43, pp. 6483-6487.

[26] Funke M., Herrmann M., and Der R., *Controlling Low-dimensional Chaos : Determination and Stabilization of Unstable Periodic Orbits by Kohonen Neural Nets*, International Journal of Adaptive Control Signal Processing, 1997, volume 11, pp. 489-499.

[27] Loskutov A.Yu., *Problems of Nonlinear Dynamics. II. Suppression of Chaos and Control of Dynamic Systems*, Vestn. MGU , 2001, no. 2, pp. 3-21.

[28] Loskutov A.Yu., Rybalko S.D., and Akinshin L.G., *Control of Dynamic Systems and Suppression of Chaos*, Di. Uravn., 1998, no. 8, pp. 1143-1144.

[29] Magnitskii N.A., *On Stabilization of Unstable Cycles of Chaotic Maps*, Dokl. Ross. Akad. Nauk, 1997,volume 355, no. 6, pp. 747-749.

[30] Magnitskii N.A. and Sidorov S.V., *Control of Chaos in Nonlinear Dynamic Systems*, Diff. Uravn.,1998, no. 11, pp. 1501-1509.

[31] Magnitskii N.A.,*On Stabilization of Fixed Points of Chaotic Maps*, Dokl. Ross. Akad. Nauk, 1996,volume 351, no. 2, pp. 175-177.

[32] Garfinkel A., Spano M., Ditto W., et al., *Controlling Cardiac Chaos*, Science, 1992, volume. 257, pp. 1230-1235.

[33] Genesio R. and Tesi A., *Harmonic Balance Methods for the Analysis of Chaotic Dynamics in Nonlinear Systems*, Automatica, 1992, volume 28, no. 3, pp. 531-548.

[34] Giona M., *Functional Reconstruction of Oscillating Reaction : Prediction and Control of Chaotic Kinetics*, Chemical Engr. Science, 1992, volume 47, pp. 2469-2474.

[35] Giovanardi L., Basso M., Genesio R., et al., *Lower Bounds for the Stability Degree of Periodic Solutions in Forced Nonlinear Systems*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 2000, volume 10, pp. 639-653.

[36] Glorieux P., *Control of Chaos in Lasers by Feedback and Nonfeedback Methods*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 1998, volume 8, pp. 1749-1758.

[37] Gora P. and Boyarsky A., *A New Approach to Controlling Chaotic Systems*, Physica D, 1998, volume 111, no. 1-4, pp. 1-15.

[38] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Synchronization in chaotic systems*, Physics Review Letter, 1990, volume 64, no 8, pp 821-824.

[39] Carroll, T. L. ,Pecora, L. M. *Synchronizing chaotic circuits*, IEEE Trans. Circuits Syst vol 38,453-456,1991.

[40] T. L. Carroll and L. M. Pecora *Synchronizing nonautonomous chaotic circuits*, IEEE Trans Circuits Syst 2, Special Issue on Chaos in Nonlinear Electronic Circuits Part C : Applications, vol. 40, pp 646-650, Oct 1993.

[41] Hunt, E. R, *Stabilizing high-period orbits in a chaotic system : The diode resonator*, Physical Review Letters 67,1991, pp. 1953-1955.

[42] Chen G, Dong X, *On feedback control of chaotic continuous time systems*, Ieee Trans Circ Syst vol 1 1993,pp 591-601.

[43] M.Lakshmanan and K.Murali,Eds, *Chaos in non linear oscillators :controlling and synchronization*, Singapore, World Scientific conférence, 1995.

[44] T.Kapitaniak,*controlling Chaos* , New yorke,Academic,1996.

[45] L.Fradkov and A.Yu pogromsky, *Introduction to control of oscillations and chaos*, Singapore, World Scientific conférence, 1997.

[46] K. Judd, A. Mees, K.L. Teo and T.L. Vincent, Eds, *Con trol and chaos* , Boston, Birkhauser, 1997.

[47] Chen G, Dong X, *From chaos to order : methodologies, perspectives and applications*, Singapore, World Scientific conférence, 1998.

[48] Guanrong Chen , Yu X, *On time-delayed feedback control of chaotic systems*, Ieee Trans Circ Syst vol 1, 1999,pp 767-772.

[49] G Chen, Eds, *Controlling chaos and bifurcation in ingineering systems*, Boca Raton : CRC press, 2000.

[50] G. H. Li, S. P. Zhou, K. Yang, *Controlling chaos in Colpitts oscillator*, The 2003 IEEE International Symposium on circuits and systems, Bangkok, Thailand. ieeexplore. ieee.org/iel15/8570/27140/0125756.pdf.

[51] Grebogi C., Lai Y.C., and Hayes S., *Control and Applications of Chaos*, Int. J. Bifurcat. Chaos, 1997, volume 7, pp. 2175-2197.

[52] Grebogi C., Lai Y.C., and Hayes, S., *Control and Applications of Chaos*, J. Franklin Inst., 1997, volume 334B, pp. 1115-1146.

[53] Mackey M.C. and Glass L., *Oscillation and Chaos in Physiological Control Systems*, Science, 1977, volume 197, pp. 287-280.

[54] Naumenko A.V., Loiko N.A., Turovets S.I., et al., *Bias Current Impulsive Feedback Control of Nonlinear Dynamics in External Cavity Laser Diodes*, Electron. Lett., 1998, volume 34, pp. 181-182.

[55] Naumenko A.V., Loiko N.A., Turovets S.I., et al., *Chaos Control in External Cavity Laser Diodes Using Electronic Impulsive Delayed Feedback*, Int. J. Bifurcat. Chaos, 1998, volume 8, pp. 1791-1799.

[56] Matsumoto K. and Tsyda I., *Noise-induced Order*, J. Stat. Phys., 1983, volume 31, pp. 87-106.

[57] Lee, E. B. et Markus., L. (1976). Foundation of Optimal Control. John Wiley., New York, USA.

[58] Lee E. B., Markus. L., *Foundation of Optimal Control*,1976, John Wiley, New York, USA.

[59] Chen, G., *On Some Controllability Conditions for Chaotic Dynamics Control, Chaos*, Solutions, Fractals, 1997, volume 8, pp. 1461-1470.

[60] Nijmeijer, H., van der Schaft, A. J., *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag. New York, USA, 1990.

[61] Lions J.L., *On the Controllability of Distributed Systems*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1997, volume 94, no. 10, pp. 4828-4835.

[62] Meerkov, S.M., *Principle of Vibrational Control : Theory and Applications, IEEE Trans. Automat. Control* , 1980, vol. AC-25, pp. 755-762.

[63] Bellman, R., Bentsman, J., and Meerkov, S., *Vibrational Control of Nonlinear Systems*, IEEE Trans. Aut. Control , 1986, vol. AC-31, no. 8, pp. 710-724.

[64] Kapitsa, P.L., *Dynamic Stability of Pendulum with Oscillating Suspension Point*, Zh. Teor. Fiz., 1951,volume 21, no. 5.

[65] Stephenson A.,*On a New Type of Dynamical Stability*, Mem. Proc. Manch. Lit. Phil. Soc. 52, 1-10 ;On Onduced Stability, Phil. Mag., 1908, no. 15, pp. 233-236.

[66] Mirus, K.A. and Sprott, J.C.,*Controlling Chaos in a High Dimensional System with Periodic Parametric Perturbations*, Phys. Lett. A, 1999, volume 254, pp. 275-278.

[67] Fronzoni L. and Giocondo M., *Controlling Chaos with Parametric Perturbations* International Journal of Bifurcation and Chaos, 1998, volume 8, pp. 1693-1698.

[68] Hubler, A. and Lusher, E., *Resonant Stimulation and Control of Nonlinear Oscillators*, Naturwissenschaft, 1989, vol. 76, pp. 67-72.

[69] Jackson E.A. and Grosu I., *An OPCL Control of Complex Dynamic Systems*, Physica D, 1995, volume 85, pp. 1-9.

[70] Chen, L.Q. and Liu, Y.Z., *A Modified Exact Linearization Control for Chaotic Oscillators*, Nonlin. Dynam., 1999, volume 20, pp. 309-317.

[71] Alvarez-Gallegos J., *Nonlinear Regulation of a Lorenz System by Feedback Linearization Technique*, J. Dynam. Control , 1994, no. 4, pp. 277-298.

[72] Yu, X.H., *Controlling Chaos Using Input-Output Linearization Approach*, Int. J. Bifurcat. Chaos 1997, volume 7, pp. 1659-1664.

[73] Wang, J. and Wang, X.H., *A Global Control of Polynomial Chaotic Systems*, Int. J. Control , 1999, volume 72, no. 10, pp. 911-918.

[74] Tian, Y.C., Tade, M.O., and Tang, J.Y., *Nonlinear Open-Plus-Closed-Loop (NOPCL) Control of Dynamic Systems, Chaos*, Solutions, Fractals, 2000, volume 11, pp. 1029-1035.

[75] Zhao, H., Wang, Y.H., and Zhang, Z.B., *Extended Pole Placement Technique and its Applications for Targeting Unstable Periodic Orbit*, Phys. Rev. E, 1998, vol. 57, pp. 5358-5365.

[76] Fradkov, A.L., *Scheme of Speed Gradient and Its Application to Adaptive Control*, Avtom. Telemekh.,1979, no. 9, pp. 90-101.

[77] Isodori A, *nonlinear control system*, second edition, New york, Springer Verlag, 1989, 479Pages.

[78] Friedel, H., Grauer, R., and Marliani, C., *Center Manifold Approach to Controlling Chaos*, Phys. Lett. A, 1997, vol. 236, pp. 45-52.

[79] Krstic, M., Kanellakopoulos, I., and Kokotovich, P., *Nonlinear and Adaptive Control Design*, New York : Wiley, 1995.

[80] Krstic, M., Kanellakopoulos, I., and P. Kokotovich, *Nonlinear and Adaptive Control Design*,Book Reviews, ieee transactions on automatic control, vol. 41, no. 12, december 1996 1849-1853.

[81] M. Krstic,P.V. Kokotovic, *Nonlinear backstepping designs and applications, Adaptive, Robust, and Optimal*. Tutorial Workshop, September 25, ASCC, Singapore, 2002.

[82] Krstic, M., Kanellakopoulos , and P. Kokotovich, *Control Lyapunov functions for adaptive nonlinear stabilization*,Systems and Control Letters , vol. 26, no. 12, 1995 17-23.

[83] Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, www.control.lth.se/people/personal/rjdir/RiceUniversity/, *Backstepping.pdf, Backstepping-based Techniques.*

[84] M. Krstic, I. Kanellakopoulos and P.V. Kokotovic *Adaptive nonlinear control without overparametrization*, Systems and Control Letters 19 ,1992 177-185.

[85] Miroslav Krstic,Ioannis Kanellakopoulos,and Petar V. Kokotovic, *Nonlinear Design of Adaptive Controllers for Linear Systems*, ieee transactions on automatic control, vol. 39, no. 4, april 1994.

[86] Sepulchre, R., M. Jankovic and P. Kokotovic 1997. *Constructive nonlinear control*. Springer-Verlag.

[87] Miroslav Krstic, *Nonlinear Backstepping Designs and Applications : Adaptive, Robust, and Optimal*, September 25, 2002 ASCC, Singapore http ://www.ece.nus.edu.sg/ascc2002/workshops.html

[88] Pogromsky, A.Yu.,*Passivity Based Design of Synchronizing Systems*, Int. J. Bifurcat. Chaos, 1998, volme 8, no. 2, pp. 295-320.

[89] Keiji K, Michio H, Hideki K, *Sliding mode control for a class of chaotic systems*, Phys Lett A 1998, pp 511-517.

[90] Jang M, *Sliding mode control of chaos in the cubic Chua's circuit system*, Int J Bifurcation Chaos 2002, volume 12,pp 1437-1449.

[91] Yu, X.H., *Variable Structure Control Approach for Controlling Chaos, Chaos*, Solutions, Fractals, 1997, vol. 8, pp. 1577-1586.

[92] Curran, P.F., Suykens, J.A.K., and Chua, L.O.,*Absolute Stability Theory and Master-Slave Synchronization*, Int. J. Bifurcat. Chaos, 1997, volume 7, pp. 2891-2900.

[93] Suykens, J.A.K., Vandewalle, J., Chua, L.O., *Nonlinear H-infinity Synchronization of Chaotic Lur'e Systems*, Int. J. Bifurcat. Chaos, 1997, volume 7, pp. 1323-1335.

[94] Loria, A., Panteley, E., and Nijmeijer, H., *Control of the Chaotic Duffing Equation with Uncertainty in All Parameters*, IEEE Trans. Circ. Syst. I , 1998, volume 45, pp. 1252-1255.

[95] Obradovic, D. and Lenz, H., *When Is OGY Control More Than Just Pole Placement*, Int. J. Bifurcat. Chaos, 1997, volume 7, pp. 691-699.

[96] Astrom, K. J., Wittenmark, B. 1995, *Adaptive control*, 2nd edition, Reading, MA : Addison-Wesley,1995.

[97] Goodwin, G. C., Sin, K. S, *Adaptive filtering prediction and control*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1984.

[98] Narendra, K. S., Annaswamy, A. M, *Stable adaptive systems*, Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall,1989.

[99] Sastry, S., Bodson, M., *Adaptive control : Stability, convergence,and robustness*, Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall,1989.

[100] Zeng, Y.M. and Singh, S.N., *Adaptive Control of Chaos in Lorenz System*, Dynam. Control , 1997, vol. 7, pp. 143-154.

[101] Femat, R., Alvarez-Ramirez, J., and Fernandez-Anaya, G., *Adaptive Synchronization of High order Chaotic Systems : A Feedback with Low-order Parametrization*, Physica D, 2000, volume 139, pp. 231-246.

[102] Petar Kokotovic Murat Arcak, *Nonlinear and Adaptive Control : An Abbreviated Status Report*, The 9th Mediterranean Conference on Control and Automation Dubrovnik, Croatia, June 2001.

[103] A. Bacciotti, L. Rosier *Lyapunov functions and stability in control theory*, second ed., Springer, Berlin, 2005.

[104] Alekseev V.V. and Loskutov A.Yu., *Controlling a System with a Strange Attractor by Periodic Parametric Action*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1987, volume 293, no. 6, pp. 1346-1348.

[105] Boccaletti S., Grebogi C., Lai Y.C., et al., *The Control of Chaos : Theory and Applications*, Phys. Reports, 2000, volume 329, pp. 103-197.

[106] Pyragas K., *Continuous Control of Chaos by Self-controlling Feedback*, Phys. Lett. A, 1992, volume 170. pp. 421-428.

[107] Guan X, Chen C, Fan Z, Peng H, *Time-delay feedback control of time-delay chaotic systems*, Int Journ of Bifurcat Chaos 2003, pp 193-206.

[108] Basso M., Genesio R. and Tesi A., *Stabilizing Periodic Orbits of Forced Systems via Generalized Pyragas Controllers*, IEEE Trans. Circ. Syst. I , 1997, volume 44, pp. 1023-1027.

[109] Hirasawa K., Murata J., Hu J.L., et al., *Chaos Control on Universal Learning Networks*, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. C-Appl. Rev., 2000, vol. 30, pp. 95-104.

[110] Funke M., Herrmann M., and Der R., *Controlling Low-dimensional Chaos : Determination and Stabilization of Unstable Periodic Orbits by Kohonen Neural Nets*, Int. J. Adaptive Control Signal Proc., 1997, volume 11, pp. 489-499.

[111] Kiss I.Z. and Gaspar V., *Controlling Chaos with Artificial Neural Network : Numerical Studies and Experiments*, J. Phys. Chem. A, 2000, volume 104, pp. 8033-8037.

[112] Greenwood D.P.A. and Carrasco, R.A., *Neural Networks for the Adaptive Control of Disruptive Nonlinear Network Trafic*, IEE Proc. Commun., 2000, vol. 147, pp. 285-291.

[113] Lin C.T. and Jou C.P.,*Controlling Chaos by GA-Based Reinforcement Learning Neural Network, IEEE Trans. Neural Netw*, 1999, vol. 10, pp. 846-859.

[114] Tanaka K., Ikeda T., Wang H.O.,*A Unified Approach to Controlling Chaos via Arm LMI-based Fuzzy Control System Design*, IEEE Trans. Circ. Syst. I , 1998, volume 45, pp. 1021-1040.

[115] I. Kanellakopoulos, P.V. Kokotovic, and A. S. Morse. *A Toolkit for Nonlinear Feedback Design*. Technical report no. CCEC-91-0119, 1991. Note : Published in Systems Control Letters, Feb. 1992 volume 18,pp. 83-92.

[116] R. A. Freeman and P.V. Kokotovic. *A New Lyapunov Function for the Backstepping Design of 'Softer' Robust Nonlinear Control Laws*. Technical report no. CCEC-92-0520, 1992

[117] R. Freeman and P.V. Kokotovic. *Optimality of Robust Nonlinear Feedback Controls*. Technical report no.CCEC-93-1103, 1993.

[118] Freeman, R. and P. Kokotovic , *Robust nonlinear control design*. Birkhjuser,Reprint of the 1996 Edition, Boston , Basel, Berlin, 1996.

[119] Ezal, K., Z. Pan and P.V. Kokotovic, *Locally optimal and robust backstepping design*, Ieee Transactions on Automatic Control vol 45,2000, 260-271.

[120] R. Sepulchre, M. Jankovic and P.V. Kokotovic *Constructive Nonlinear Control* Springer,Santa Barabra, California, August 1996.

[121] H. Sussmann, V. Jurdjevic, *Controllability of nonlinear systems*, Journal of Differentiel Equations,volume 12 , p. 95-116,1972.

[122] J.-L. Lions, *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*,J. von Neumann lecture, Boston 1986, SIAM review, 30 (1988), p. 1-68.

[123] Ph. Martin et P. Rouchon, *Systèmes plats : planification et suivi de trajectoires*,

[124] Jean-Michel Coron, *Quelques résultats sur la commandabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires*, 1999X-UPS.pdf

[125] Hua Deng, Miroslav Krstic *Stochastic nonlinear stabilization, A backstepping design 1*,Systems and Control Letters, volume 32, 1997,pp 143-150.

[126] Hua Deng, Miroslav Krstic, *Stochastic nonlinear stabilization, Inverse optimality 2*,Systems and Control Letters vol 32, 1997,pp 151-159.

[127] Cao, Y.J., *A Nonlinear Adaptive Approach to Controlling Chaotic Oscillators*, Phys. Lett. A, 2000, volume 270, pp. 171-176.

[128] Liao, T.L. and Lin, S.H., *Adaptive Control and Synchronization of Lorenz Systems*, J. Franklin Inst. Eng. Appl. Math., 1999, volume 336, pp. 925-937.

[129] A.M. Harb and M.A. Zohdy, *Using non linear chaos and bifurcation control recursive controller*, Nonlinear Analysis Modeling and Control, vol. 7 no.2, 2002, 37-43.

[130] O. Harkegard and S. T. Glad, *A backstepping design for flight path angle control*, In Proc. of the 39th Conference on Decision and Control, pages 3570-3575, Sydney, Australia, Dec. 2000.

[131] *Controlling chaotic dynamics using backstepping design with application to the lorenz system and chua's circuit* International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 9, 7, 1999 pp.1425-1434

[132] J. Lu , J. Lu, *Controlling uncertain Lu system using linear feedback*, Chaos, Solitons and Fractals, volume 17, 1,pp. 127-133, 2003.

[133] Fayçal Ikhouane and Miroslav Krstic *Robustness of the Tuning Functions Adaptive Backstepping Design for Linear Systems*, ieee transactions on automatic control, vol. 43, no. 3, march 1998 431-437.

[134] Miroslav Krstic And Petar V. Kokotovic, *Modular Approach to Adaptive Nonlinear Stabilization*,Automatica, Vol. 32, No. 4, pp. 625-629, 1996.

[135] KE Hai-sen, YE Xu-dong *Robust adaptive controller design for a class of nonlinear systems with unknown high frequency gains*, Ke et al. / j zhejiang univ science a 2006 vol.7 no.3 :315-320.

[136] Dejan M. Bos kovic, Miroslav Krstic *Nonlinear stabilization of a thermal convection loop by state feedback*, Automatica vol 37 2001, pp 2033-2040.

[137] S. Mascolo, *Backstepping design for controlling lorenz chaos*, proc 36th ieee conf on decision and control, san diégo, ca, usa, 1997, pp 1500-1501.

[138] Laarem Guessas, Khier Benmahammed, *Backstepping In Control And Track of Chaotic Sys- tems G*, Abstract Submitted for the DPP08 Meeting of The American Physical Society,Texas 2008.

[139] L. Guessas, K. Benmahammed, *Control law based on backstepping for controlling lorenz chaotic system*, Control and Intelligent Systems, Vol. 37, No. 1,p.p 10-14, 2009

[140] Zigang Pan, Kenan Ezal, Arthur J. Krener, and Petar V. Kokotovic *Backstepping Design with Local Optimality Matching*,Ieee Transactions On Automatic Control, VOL. 46, NO. 7, JULY 2001,pp 1014-1027.

[141] Abder Rezak. Benaskeur,. Andre Desbiens, *Backstepping-Based Adaptive. PID*, IEEE Proc-Control. Theory. Appl. Vol. 149, No. 1, 2002,pp 54-59.

[142] Frédéric Mazenc, and Pierre Alexandre Bliman, *Backstepping Design for Time-Delay Nonlinear Systems*, Ieee Transactions On Automatic Control,vol 51, no 7, pp 1200-1207, July, 2006.

[143] O. E. Rössler, *An Equation for Continuous Chaos* ,Physics Letters, vol. 57A, no 5, 1976,pp. 397-398, 1976.

[144] Mascolo, S. and G. Grassi , *Controlling chaotic systems with disturbance using backstepping design and nonlinear damping*. In : Proc. IEEE Int. Conf. on Control of Oscillation and chaos. St. Petersburg, Russia, 2000.

[145] A.M. Harb and B.A. Harb, *Chaos control of third-order phaselocked loops using backstepping nonlinear controller*, Chaos, Solitons, Fractals, 204, 719-723, 2004.

[146] Raymond Kristiansen, Per J. Nicklasson, *Satellite Attitude Control by Quaternion-Based Backstepping*, American Control Conference,Portland, OR, USA, June 8-10, 2005.

[147] Tao Wang, Shaocheng Tong and Yongming Li,*Robust adaptive fuzzy control for nonlinear system with dynamic uncertainties based on backstepping* , International Journal of Innovative Computing, Information and Control ICIC International, Volume 5, Number 9, September 2009 pp. 2675-2688.

[148] A. M. Lyapunov, *The General Problem of the Stability of Motion*. Taylor and Francis, 1992. English translation of the original publication in Russian from 1892.

[149] A. M. Lyapunov, *Problème général de la stabilité du mouvement*, E. Davaux, Trans. Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, volume 2,no 9, pp. 203-469 , repr. Princeton : Princeton University Press, Annals of Mathematics Studies 17, 1947.

[150] Khalil, H. *Nonlinear systems* 2nd ed.1996. Prentice-Hall. New-York.

[151] Dr Philippe Mullhaupt *Systèmes Multivariable II*, les systèmes non linéaires,notes de cours basé sur le livre : Nonlinear Systems, H.K. Khalil, Third Edition, Prentice Hall 2002, ME C2 391,NotesDeCoursSMII.pdf.

[152] D. Arzelier, D. Peaucelle, *Systèmes et asservissements non linéaires*, Notes de cours Version 4 ;SNLv4.pdf.

[153] J. Bokor, G. Szederkényi, K.M. Hangos *Analysis and Control of Nonlinear Process Systems*, Springer, TLFeBook, Advanced Textbooks in Control and Signal Processing Springer,London, Berlin, Heidelberg, New York, Hong Kong, Milan ; Paris, Tokyo TLFeBook,2004,HANGOS.pdf

[154] Sastry, S. *Nonlinear Systems : Analysis, Stability and Control*. Springer, Verlag,1999. New York, USA.

[155] E. D. Sontag, *An universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization*. Systems and Control Letters, 13 :117-123, 1989.

[156] Jean-Jacques Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Contol*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, January 1991. bibitem116g Dr Philippe Mullhaupt *Introduction à l'Analyse et à la Commande des Systèmes Non Linéaires*, 2 mai 2006, PolycopieRelie.pdf bibitem116h0 H. Sussmann et V. Jurdjevic, *Controllability of nonlinear systems*, J. Differentiel Equations, 12 (1972), p. 95-116.

[157] J. P. LaSalle, *Stability theory for ordinary differential equations, Journal of Differential Equations* 4, pp. 57-65, 1968.

[158] Nicolas Petit Pierre Rouchon,*Automatique Dynamique et contrôle des systèmes* , Centre Automatique et Systèmes, École des Mines de Paris,poly08.pdf.

[159] T. Yoshizawa, *Stability Theoty by Lyapunov's Second Method*, The Mathematical Society of Japan, 1966.

[160] Z. Artstein, *Stabilization with relaxed controls. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*,volume 7no.11, pp1163-1173, 1983.

[161] Miroslav KrstiC and Petar V. KokotoviC *Adaptive Nonlinear Output-Feedback Schemes with Marino-Tomei Controller*, Ieee Transactions on Automatic Control, VOL. 41, NO. 2, February 1996, pp274-280.

[162] Lorenz, E. N. ,*Maximum Simplification of the Dynamic Equations*. Tellus 12, 243-254,1960.

[163] , *The Statistical Prediction of Solutions of Dynamic Equations*,In International Symposium on Numerical Weather Prediction Tokyo, 1960,Proceedings, Sigekata Syôno, Ed., pp. 629-635. Tokyo, Meteorological Society of Japan,1962.

[164] G. Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei veranderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung* Vieweg, Braunschweig, 1918.

[165] B. van der Pol, ,*Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance reception with reactive triode*, Philosophical Magazine, 7, pp. 65-80, 1927.

[166] Balth. van der Pol, J van der Mark, *The Heartbeat considered as a Relaxation oscillation, and an Electrical Model of the Heart*, Philosophical Magazine Supplement volume 6,1928,pp.763-775.

[167] Shawnee L. Mc Murran, James J. Tattersall, *Cartwright and Littlewood on van der Pol's equation, Harmonic analysis and nonlinear differential equations* ,Riverside, CA, 1995, Contemporary Mathematics 208, American Mathematical Society Providence, RI, 1997,pp. 265-276.

[168] Lorenz, E. N. ,*The Problem of Deducing the Climate from the Governing Equations*. Tellus 16,pp. 1-11,1964.

[169] Sparrow, C. *The Lorenz Equations : Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Springer-Verlag, NY,1982.

[170] Lorenz, E. N. ,*The Essence of Chaos*. Seattle, University of Washington Press, 1993.

[171] Celikovsky, S., Chen, G.,*On a generalized Lorenz canonical form of chaotic systems*, International Journal Bifurcation and Chaos, in press, 2002.

[172] O. E. Rossler, *An equation for continuous chaos*, Physics Letters ,Volume 57A, number 5 , 397-398, 12 July 1976.

[173] O. E. Rossler, *An equation for hyperchaos*, Physics Letters A, 71, 155-157, 1979.

[174] O. E. Rossler, *Chaotic behavior in simple reaction systems*, Zeitschrift fur Naturforschung A, 31, 259-264,1976.

[175] Shuxian Wu ,*Chua's circuit family*, proceeding of IEEE, august 1987,volume 75,No.8.

[176] L. O. Chua,Gui Nian Lin,*Canonical realisation of Chua's circuitfamily*, IEEE Transaction and Circuits Systems, volume 37,No.7,July, 1990, pp. 885-902.

[177] M. P. Kennedy, *Three steps to chaos part II : A Chua's circuit primer*,IEEE Transaction and Circuits Systems I, Special Issue on Chaos in Nonlinear Electronic Circuits Part A : Tutorial and Reviews, volume 40, October, 1993, pp. 657-674.

[178] L. O. Chua, M. Komuro and T. Matsumoto, *The double scroll family parts I and II*, IEEE Transaction and Circuits systems Part volume133, no11, pp. 1073-1118, 1996.

[179] Mahesh Mulukutla, Cherif Aissi *Implementation of the Chua's circuit and its applications*Proceedings of the 2002 ASEE Gulf-Southwest Annual Conference, The University of Louisiana at Lafayette, March 20-22, 2002, american Society for Engineering Education

[180] Leon.O Chua, Chai Wah Wu, Anshan Haung, Guo Qu Zhong *A Univeasal circuits for studying and generating Chaos part 1, routes to chaos*, IEEE transcations on circuits and systems,fundamentals theory and applications, vol 24, No 10, october 1993.

[181] Kanellakopoulos I., P.V. Kokotovic and A.S. Morse, *Adaptive feedback linearization of nonlinear systems. In : Foundations of Adaptive Control* P.V. Kokotovic, Edition . pp. 311-346,1991, Springer Verlag. Berlin.

[182] Kanellakopoulos, I., P.V. Kokotovic and A.S. Morse, *Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems*. IEEE Transactions on Automatic Control,volume 36,1991, 1241-1253.

[183] Kanellakopoulos, I., P.V. Kokotovic and R. Marino, *An extended direct scheme for robust adaptive nonlinear control*. Automatica, volume 27, pp 247-255.

[184] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P.V. Kokotovic. *Adaptive Nonlinear Control without Overparametrization*. Technical report no. CCEC-91-1005, 1991. Note : Published in Systems and Control Letters, 19 :177-185, Sept. 1992.

[185] Miroslav Krstic, Petar V. Kokotovic, *Transient-performance improvement with a new class of adaptive controllers* Systems and Control Letters vol. 21, 1993,pp 451-461.

[186] Miroslav KrstiC, Ioannis Kanellakopoulos, Petar V. KokotoviC, *Nonlinear Design of Adaptive Controllers for Linear Systems*, IEEE transactions on automatic control, VOL. 39, NO. 4, APRIL 1994, IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 39, NO. 4, APRIL 1994, pp 738-752.

[187] Miroslav krstic, Ioannis kanellakopoulo, Petar v. kokotovic, *Passivity and Parametric Robustness of a New Class of Adaptive Systems*, Automatica, Vol. 30, No. 11, pp. 1703-1716, 1994.

[188] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P.V. Kokotovic. *Nonlinear Design of Adaptive Controllers for Linear Systems.* Technical report no. CCEC-92-0526, 1992. Note : Published in IEEE Trans. Automatic Control, 39 :738-752, April 1994.

[189] Miroslav Krstic, Petar V. Kokotovic, *Control Lyapunov functions for adaptive nonlinear stabilization*, Systems and Control Letters, volume 26, 1995,pp 17-23.

[190] Miroslav Krstic and Petar V. Kokotovic *Adaptive Nonlinear Output-Feedback Schemes with Marino-Tomei Controller*,ieee transactions on automatic control, vol. 41, no. 2, february 1996.

[191] Zhong-Hua Li , Miroslav Krstic, *Optimal Design of Adaptive Tracking Non-linear Systems*,Automatica, Vol. 33, No. 8. pp. 1459-1473, 1997.

[192] Riccardo Marino *Adaptive control of nonlinear systems : basic results and applications*, Automatic Review Control, Volume 21, pp. 55-66, 1997.

[193] Bader Aloliwi and Hassan K. Khalil, *Adaptive Output Feedback Regulation of a Class of Nonlinear Systems : Convergence and Robustness*, IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 42, NO. 12, DECEMBER 1997,pp.1714-1716.

[194] Shuzhi Sam Ge and J. Wang, *Robust Adaptive Tracking for Time-Varying Uncertain Nonlinear Systems With Unknown Control Coefficients*, ieee transactions on automatic control, vol. 48, no. 8, august 2003.

[195] I. K. Bousserhane, A. Hazzab, M. Rahli, B. Mazariet M. Kamli, *Mover Position Control of Linear Induction Motor Drive Using Adaptive Backstepping Controller with Integral Action* Tamkang Journal of Science and Engineering, Vol. 12, No. 1, pp. 17-28 ,2009.

[196] J.-H. Li, P.-M. Lee, *Design of an adaptive nonlinear controller for depth control of an autonomous underwater vehicle*,www.elsevier.com/locate/oceaneng

[197] Changchun Hua, Xinping Guan, *Adaptive control for chaotic systems* Chaos, Solitons and Fractals, volume 22,2004,pp. 55-60, www.elsevier.com/locate/chaos.

[198] KE Hai-sen, YE Xu-dong, *Robust adaptive controller design for a class of nonlinear systems with unknown high frequency gains*, Ke et al., Journal of Zhejiang University SCIENCE A, 2006,volume 7, no.3, pp 315-320.

[199] U.E. Vincent , *Controlling directed transport in inertia ratchets via adaptive backstepping control*, acta physica polonica, Volume 38, No 8, pp. 2459-2469, 2007.

[200] M. French, *An Analytical Comparison Between the Nonsingular Quadratic Performance of Robust and Adaptive Backstepping Designs*, IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOLume 47, NO. 4,pp.670,675, APRIL 2002.

[201] L. Guessas, K. Benmahammed, *Adaptive Backstepping In Control and Track of Duffing oscillator*, accèpté en cinquième Saaudien congrès scientifique, College of Applied Sciences. Umm Al-Qura University. Makkah, April 16-18, 2012.

[202] Laarem Guessas, Khier Benmahammed, *Adaptive Backstepping and PID optimized by Genetic Algorithm In Control of Chaotic Systems*, International Journal of Innovative Computing, Information and Control IJICIC International, Volume 7, Number 9, Septembre 2011, pp.5299-5312.

[203] Goldberg, David E, *Genetic Algorithms in Search, Optimzation and Machine Learning*, Addison-Wesley,1989.

[204] Q.Wang, P.Spronck and R.Tracht, *An Overview Of Genetic Algorithms Applied To Control Engineering Problems*, Proceedings of the Second, Conference on Machine Learning and Cybernetics, 2003.

[205] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Driving systems with chaotic signals*,Physics Review A, volume 44, no. 4, pp. 2374-2383, 1991.

[206] N. F. Rulkov, M. systemsM. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D. Abarbanel, *Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems*, Physics Review Electronics, vol 51, no 2, pp 980-994, Feb 1995.

[207] L. Kocarev, U. Parlitz, and T. Stojanovski, *Generalized synchronization of chaotic signals*, Proc. NOLTA'95, Las Vegas, NV, December 10-14, 1995, pp. 953-956.

[208] L. Kocarev and U. Parlitz, *Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionaly coupled dynamical systems*, Physics Review Letter, volume 76, no. 11, pp. 1816-1819, March 1996.

[209] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, *Phase synchronization of chaotic oscillators*, Physics Review Letter, volume 76, no. 11, pp. 1804-1807, Mars 11, 1996.

[210] U. Parlitz, L. Junge, W. Lauterborn, and L. Kocarev, *Experimental observation of phase synchronization*, Physics Review E, volume 54, no. 2, pp. 2115-2117, August 1996.

[211] R. He and P. G. Vaidya, *Analysis and synthesis of synchronous periodic and chaotic systems*, Physics Review A, volume 46, no. 12, pp. 7387-7392, December 1992.

[212] C. W. Wu and L. O. Chua, *A unified framework for synchronization and control of dynamical systems*, International Journalof Bifurcation and Chaos, volume 4, no. 4, pp. 979-998, 1994.

[213] J. Schweizer, M. P. Kennedy, M. Hasler, and H. Dedieu, *Synchronization theorem for a chaotic system*, International Journalof Bifurcation and Chaos, volume 5, no. 1, pp. 297-302, Febrery 1995.

[214] Yang, T. ,Chua, L. O. *Impulsive control and synchronization of nonlinear dynamical systems and application to secure communication*, Int. J. Bifurcation and Chaos vol. 7 num. 3, 645-664, 1997.

[215] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization : A universal concept in nonlinear science* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[216] H.K. Chen : *Synchronization of two different chaotic systems : a new system and each of the dynamical systems Lorenz, Chen and Lu*, Chaos Soliton & Fractals. 25, 1049-1056, 2005.

[217] J. Zhang, C. Li, H. Zhang, J. Yu, *Chaos synchronization using variable feedback based on backstepping method* Chaos, Solitons & Fractals 21 1183-1193,2004.

[218] Mohammad Haeri , Behzad Khademian *Comparison between different synchronization methods of identical chaotic systems*,Chaos, Sollitons and Fractals 29, 2006, pp 100-1022.

[219] J.H. Park, Chaos, *Synchronization of Genesio chaotic system via backstepping approach*,Solitons & Fractals, 27, pp. 1369-1375, 2006.

[220] S. S. Ge and C. Wang *Synchronization of Uncertain Chaotic Systems via Backstepping Design*,proceedings of the third asian control conference, july 4-7,2000,Shanghai.

[221] Ali Reza Sahab, Mohammad Reza Modabbernia and Amir Gholami Pastaki *Synchronization Chaos using OGBM with Genetic Algorithm*,IInternational journal of mathematics and computers in simulation,Issue 2, Volume 5, 2011.

[222] E.W. Bai, K. E. Lonngren, *Synchronization of two Lorenz systems using active control*, Chaos, Solitons & Fractals, 8, pp. 51-58, 1997.

[223] U. E. Vincent *Chaos Synchronization Using Active Control and Backstepping Control : A Comparative Analysis*, Nonlinear Analysis, Modelling and Control, 2008, Vol. 13, No. 2, 253-61.

[224] Yang, T. ,Chua, L. O. *Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems : Theory and application to secure communication*, IEEE Trans. Circuits Syst. I : Fundamental Theor. Appl. vol. 44 num.10, 976-988,1997.

[225] Yang, T., Suykens, J. A. K. ,Chua, L. O. *Impulsive control of nonautonomous chaotic systems using practical stabilization*, Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 8 num. 7, 1557-1564,1998.

[226] Yang, T. ,C7hua, L. O. *Channel-independent chaotic secure communication*, Int. J. Bifurcation and Chaos vol.6 num.12B, 2653-2660,1996.

[227] Yang, T.,Wu, C. W. ,Chua, L. O. *Cryptography based on chaotic* , IEEE Trans. Circuits Syst. I. Fundamental Theory and application, vol. 44 num.5, 469-472,1997.

[228] U. E. Vincent Chaos Synchronization Using Active Control and Backstepping Control : A Comparative Analysis

[229] H. Fujisaka and T. Yamada, *Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator systems*, Progress of Theortical Physics, vol 69, pp 32-47,1983.

[230] Carroll, T. L. ,Pecora, L. M. *Synchronizing chaotic circuits*, IEEE Trans. Circuits Syst vol 38,453-456,1991.

[231] T. L. Carroll and L. M. Pecora *Synchronizing nonautonomous chaotic circuits*, IEEE Trans Circuits Syst 2, Special Issue on Chaos in Nonlinear Electronic Circuits Part C : Applications, vol. 40, pp 646-650, Oct 1993.

[232] Géza Kolumban, Michael Peter Kennedy, Leon O. Chua *The Role of Synchronization in Digital,Communications Using Chaos Part 2 : Chaotic Modulation and Chaotic Synchronization*, ieee transactions on Circuits System I : Fundamental Theory and Application, vol. 45 no.11, pp.1129-1140,November 1998.

[233] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization : A universal concept in nonlinear science* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[234] Baptista, M.S., Macau, E.E., Grebogi, C., et al., *Integrated Chaotic Communication Scheme*, Phys. Revol. E, 2000, vol. 64, no. 4, pp. 4835-4845.

[235] Feki, M., *An Adaptive Chaos Synchronization Scheme Applied to Secure Communication*, Chaos, Solitons, Fractals, 2003, vol. 18, pp. 141-148.

[236] Andrievsky, B. and Fradkov, A., *Information Transmission by Adaptive Synchronization with Chaotic Carrier and Noisy Channel*, Proc. 39th IEEE Conf. Dec. Contr., Sydney, 2000.

[237] Pai, M.-C. , *Adaptive sliding mode observer-based synchronization for uncertain chaotic systems*. Asian Journal of Control,2010.

[238] Qingkai Han Lina Hao Hao Zhang Bangchun Wen. *Achievement of chaotic synchronization trajectories of master-slave manipulators with feedback control strategy*, Acta Mechanica Sinica, Vol.26 num.3,pp 433-439,2010.

[239] Hengdong Wei and Liping Li, *Estimating parameters by anticipating chaotic synchronization*, Chaos,2010.

[240] Zhongkui Sun, and Xiaoli Yang *Parameters Identification and Synchronization of Chaotic Delayed Systems* Containing Uncertainties and Time-Varying Delay 2010,

[241] B.A. Idowu, U.E. Vincent, A.N. Njah *Generalized Adaptive Backstepping Synchronization for Non identical Parametrically Excited Systems*,Nonlinear Analysis, Modelling and Control, 2009, Vol. 14, No. 2,pp.165-176.

[242] C. Cruz Hernandez *Synchronization of Time-Delay Chua Oscillator with Application to Secure Communication*, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, vol.4,No. 1, 2004 pp.1-13.

[243] José M. Sausedo-Solorio *Chaos and Synchronization Through the Study of Two Coupled Chua's Circuits*, Eighth LACCEI Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology ACCEI'2010, Innovation and Development for the Americas, June vol.1, No. 4, 2010, Arequipa, Peru.

[244] Chen, H.-K., *Chaos and Chaos Synchronization of a Symmetric Gyro with Linear-Plus-Cubic Damping* J. Sound Vibr., 2002, vol. 255, no. 4, pp. 719-740.

[245] J.F. Heagy, T.L. Carroll and L.M. Pecora , *Synchronous chaos in coupled oscillator systems*, Physical Review E, vol.50, no.3, 1994.

[246] Géza Kolumban, Michael Peter Kennedy, Leon O. Chua *The Role of Synchronization in Digital,Communications Using Chaos Part 2 : Chaotic Modulation and Chaotic Synchronization*, IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS I : FUNDAMENTAL THEORY AND APPLICATIONS, VOL. 45, NO. 11, NOVEMBER 1998, 1129-1140.

[247] M. P. Kennedy, *Three steps to chaos part 1 : Evolution*,IEEE Trans. Circuits Syst. 1, Special issue on Chaos in Nonlinear Electronic Circuits Part A : Tutorial and Reviews, vol. 40, pp. 640-656, OctOBER 1993.

[248] H. Fujisaka and T. Yamada, *Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator systems*, Progress of Theortical Physics, vol 69, pp 32-47,1983.

[249] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D. Abarbanel, *Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems*, Physics Review Electronics, vol 51, no 2, pp 980-994, Feb 1995.

[250] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization : A universal concept in nonlinear science* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[251] H. Fujisaka and T. Yamada, *Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator systems*, Progress of Theortical Physics, vol 69, pp 32-47,1983.

[252] Yang, T. ,Chua, L. O. *Impulsive control and synchronization of nonlinear dynamical systems and application to secure communication*, Int. J. Bifurcation and Chaos vol. 7 num. 3, 645-664,1997.

[253] Baptista, M.S., Macau, E.E., Grebogi, C., et al., *Integrated Chaotic Communication Scheme*, Phys. Revol. E, 2000, vol. 64, no. 4, pp. 4835-4845.

[254] Andrievsky, B. and Fradkov, A., *Information Transmission by Adaptive Synchronization with Chaotic Carrier and Noisy Channel*, Proc. 39th IEEE Conf. Dec. Contr., Sydney, 2000.

[255] Feki, M., *An Adaptive Chaos Synchronization Scheme Applied to Secure Communication*, Chaos, Solitons, Fractals, 2003, vol. 18, pp. 141-148.

[256] H.K. Chen : *Synchronization of two different chaotic systems : a new system and each of the dynamical systems Lorenz, Chen and L¨u*, Chaos Soliton and Fractals. 25, 1049-1056 (2005)

[257] Chen, H.-K., *Chaos and Chaos Synchronization of a Symmetric Gyro with Linear-Plus-Cubic Damping* J. Sound Vibr., 2002, vol. 255, no. 4, pp. 719-740.

[258] Géza Kolumban, Michael Peter Kennedy, Leon O. Chua *The Role of Synchronization in Digital,Communications Using Chaos Part 2 : Chaotic Modulation and Chaotic Synchronization*, ieee transactions on Circuits System I : Fundamental Theor. Appl. vol. 45 num.11, 1129-1140,November 1998.

[259] N. F. Rulkov, M. systemsM. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D. Abarbanel, *Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems*, Physics Review Electronics, vol 51, no 2, pp 980-994, Feb 1995.

[260] Pai, M.-C. , *Adaptive sliding mode observer-based synchronization for uncertain chaotic systems*. Asian Journal of Control,2010.

[261] J. Zhang, C. Li, H. Zhang, J. Yu : *Chaos synchronization using variable feedback based on backstepping method* Chaos, Solitons and Fractals 21 1183-1193 (2004)

[262] S. S. Ge and C. Wang *Synchronization of Uncertain Chaotic Systems via Backstepping Design*,procceding of the 3rd Asian Control Conference, pp594-598.

[263] H. Fujisaka and T. Yamada, *Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator systems*, Progress of Theortical Physics, vol 69, pp 32-47,1983.

[264] Yang, T. ,Chua, L. O. *Impulsive control and synchronization of nonlinear dynamical systems and application to secure communication*, Int. J. Bifurcation and Chaos vol. 7 num. 3, 645-664,1997.

[265] Baptista, M.S., Macau, E.E., Grebogi, C., et al., *Integrated Chaotic Communication Scheme*, Phys. Revol. E, 2000, vol. 64, no. 4, pp. 4835-4845.

[266] Andrievsky, B. and Fradkov, A., *Information Transmission by Adaptive Synchronization with Chaotic Carrier and Noisy Channel*, Proc. 39th IEEE Conf. Dec. Contr., Sydney, 2000.

[267] Feki, M., *An Adaptive Chaos Synchronization Scheme Applied to Secure Communication*, Chaos, Solitons, Fractals, 2003, vol. 18, pp. 141-148.

[268] H.K. Chen : *Synchronization of two different chaotic systems : a new system and each of the dynamical systems Lorenz, Chen and Lu*, Chaos Soliton and Fractals. 25, 1049-1056 (2005)

[269] Chen, H.-K., *Chaos and Chaos Synchronization of a Symmetric Gyro with Linear-Plus-Cubic Damping* J. Sound Vibr., 2002, vol. 255, no. 4, pp. 719-740.

[270] Géza Kolumban, Michael Peter Kennedy, Leon O. Chua *The Role of Synchronization in Digital,Communications Using Chaos Part 2 : Chaotic Modulation and Chaotic Synchronization*, ieee transactions on Circuits System I : Fundamental Theor. Appl. vol. 45 num.11, 1129-1140,November 1998.

[271] N. F. Rulkov, M. systemsM. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D. Abarbanel, *Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems*, Physics Review Electronics, vol 51, no 2, pp 980-994, Feb 1995.

[272] Pai, M.-C. , *Adaptive sliding mode observer-based synchronization for uncertain chaotic systems*. Asian Journal of Control,2010.

[273] Qingkai Han Lina Hao Hao Zhang Bangchun Wen. *Achievement of chaotic synchronization trajectories of master-slave manipulators with feedback control strategy*, Acta Mechanica Sinica, Vol.26 num.3,pp 433-439,2010.

[274] Hengdong Wei and Liping Li, *Estimating parameters by anticipating chaotic synchronization*, Chaos, 2010.

[275] Zhongkui Sun, Xiaoli Yang *Parameters Identification and Synchronization of Chaotic Delayed Systems* Containing Uncertainties and Time-Varying Delay, 2010.

[276] J. Zhang, C. Li, H. Zhang, J. Yu : *Chaos synchronization using variable feedback based on backstepping method* Chaos, Solitons and Fractals 21 1183-1193 (2004)

[277] S. S. Ge and C. Wang *Synchronization of Uncertain Chaotic Systems via Backstepping Design*,procceding of the 3rd Asian Control Conference, pp594-598.

Abstract

Since the early 1990s, the problems of control of chaos attract attention of the researchers and engineers. Numerous publications have appeared over the recent decade. The chaotic systems represent a class of indeterminacy models differing from the stochastic models, which is used widely since then. Various mathematical definitions of chaos are known, but all of them express close characteristics of the dynamic systems that are concerned with super sensitivity to the initial conditions.

the robust control scheme based on the Backstepping the adaptive Backstepping design is used to control, the track and the synchronization of the chaotic systems arising from the autonomous second order strict feedback form such as the Duffing and Van der pool oscillators, to the autonomous third order strict feedback form such as the Lorenz, Chua and Rosslor Chaotic systems.

The design procedure is recursive at the i^{th} step, the i^{th} subsystem is stabilized with respect to a Lyapunov function V_i by the design of a stabilizing function α_i for the Backstepping and the tuning function τ_i, and the update law θ_i for the unknowns' adaptive parameters estimates, the feedback control u is designed at the final step. This procedure possesses strong properties of global stability and tracking which are built into the nonlinear system in a number of steps, which is never higher than the system order, without any growth restrictions on nonlinearities.

An important feature of backstepping is that nonlinearities can be dealt with in several ways: useful nonlinearities, which act stabilizing, can be retained, and sector bounded nonlinearities may be dealt with using linear control, retaining nonlinearities instead of canceling them requires less precise models and may also require less control effort. Further, the resulting control laws can sometimes be shown to be optimal with respect to a meaningful performance index, which guarantees certain robustness properties. Some simulation results for the chaotic system cited above are shown to illustrate the parameter convergence with backstepping and the adaptive backstepping design for the control, the track and the synchronization of chaotic systems.

Keywords: Chaotic systems, Backstepping Adaptive backstepping design, Adaptive parameters estimates, Lyapunov, Stabilizing and tuning functions, Up date and control laws.

منذ s1990 في وقت مبكر ، ومشاكل السيطرة على الفوضى جذب انتباه الباحثين والمهندسين. وقد ظهرت العديد من المنشورات على مدى العقد الأخير. نظم الفوضى تمثل فئة من عدم التعيين نماذج مختلفة من النماذج العشوائية ، والذي يستخدم على نطاق واسع منذ ذلك الحين. ومن المعروف التعاريف الرياضية المختلفة من الفوضى ، ولكن كل منهم التعبير عن خصائصهم قريبة من الأنظمة الديناميكية التي تهتم حساسية فائقة للشروط الأولية.

. مخطط السيطرة القوية على أساس Backstepping يستخدم تصميم Backstepping التكيفية للسيطرة، والمسار وتزامن نظم الفوضى الناشئة عن الحكم الذاتي من أجل تشكيل ردود الفعل الصارمة الثانية من نوعها حيث Duffing والتذبذب فان دير بركة، والأمر الثالث الحكم الذاتي ردود فعل صارمة شكل مثل تشوا، ونظم لورينز Rosslor الفوضى.

الإجراء العودية في التصميم هو الخطوة إيث، هو استقرار النظام الفرعي إيث فيما يتعلق الدالة Lyapunov السادس من تصميم αi ظيفة استقرار لBackstepping وضبط τi وظيفة ، وقانون θi التحديث لمعلمات المجهولة للتكيف والتأقلم التقديرات ، صمم ش السيطرة على ردود الفعل الخطوة النهائية. هذا الإجراء تمتلك خصائص قوية للاستقرار العالمي والتتبع التي يتم بناؤها في نظام غير الخطية في عدد من الخطوات التي يتم أبدا أعلى من أجل النظام ، من دون أي قيود على نمو nonlinearities

سمة هامة من سمات backstepping هو أنه يمكن التعامل مع nonlinearities بعدة طرق : يمكن الاحتفاظ nonlinearities مفيدة ، والتي تعمل استقرار، ويمكن التعامل مع القطاع nonlinearities يحدها باستخدام التحكم الخطية ، بدلا من الاحتفاظ nonlinearities إلغائها يتطلب نماذج وأقل دقة كما قد تتطلب جهد أقل السيطرة. كذلك يمكن، في بعض الأحيان نتيجة لقوانين مكافحة سيظهر وكأنه الحل الأمثل بالنسبة لمؤشر أداء ذات مغزى، والتي تضمن المتانة خصائص معينة. واستشهد بعض نتائج المحاكاة لنظام الفوضى وترد أعلاه لتوضيح التقارب مع المعلمة backstepping وتصميم على التكيف backstepping لمراقبة وتعقب وتزامن نظم الفوضى.

الكلمات الرئيسية : نظم الفوضى، Backstepping التكيفية تصميم backstepping، التكيفية المعلمات التقديرات ، Lyapunov، وتحقيق الاستقرار وضبط وظائف، وحتى تاريخ وقوانين الرقابة.