

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS SETIF1
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES.



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Mathématiques
Option : Équations aux Dérivées Partielles

Quelques Problèmes de Transmission d'Ondes et d'Equations d'Ondes Visco-élastiques avec Retard et un Problème d'Evolution

Présentée par

AISSA BENSEGHIR

Directeur de Thèse : Belkacem Said-Houari Dr(HDR) Alhosn University, UAE
Co-Directeur de thèse : Mircea Sofonea Prof Université de Perpignan France

6 Avril 2017

Jury

M. Salah DRABLA	Président	Prof	UFA Setif1
M. Hamid BENSERIDI	Examineur	Prof	UFA Setif1
M. Seddik DJABI	Examineur	Prof	UFA Setif1
M. Azeddine RAHMOUNE	Examineur	MCA	UBB Bordj
M. Abdelbaki MEROUANI	Invité	Prof	UBB Bordj
M. Abdelkrim MERZOUGUI	Invité	MCA	UMB M'sila

Remerciements

Je voudrais remercier mon directeur de thèse, Dr. Belkacem Said-Houari, qui m'a ouvert la porte pour pénétrer ce champs de recherche en m'acceptant comme candidat au doctorat, en me proposant un sujet très riche en termes de problèmes ouverts permettant de réaliser plusieurs travaux. En m'aidant, il a fait de très grand effort pour publier mon premier article.

Je voudrais remercier mon co-directeur de thèse Prof. Mircea Sofonea qui m'a accepté dans son laboratoire à l'université de Perpignan pour une période de dix-sept mois, il m'a aidé à publier deux articles en très peu de temps en proposant des sujets complémentaires. Il a motivé chaque étape de mon travail avec des commentaires pertinents, il n'a jamais cessé de m'aider à progresser dans mes recherches. Il m'a également donné l'occasion de participer, avec une présentation orale, au colloque international (ETAMM) qui s'est déroulé du 30 mai au 3 juin 2016 à l'université de Perpignan.

Sans l'aide et les conseils de ces deux personnes, ce travail n'aurait pas été possible.

Je remercie profondément le président du jury, Prof. Salah Drabla et les examinateurs : Prof. Seddik Djabi, Prof. Abdelhamid Benseridi, Prof. Abdelbaki Merouani, Dr. Abdelkrim Merzougui, et Dr. Azeddine Rahmoune pour avoir accepté d'évaluer cette thèse et pour leurs précieux commentaires et suggestions. Je suis très reconnaissant pour la lecture attentive du manuscrit qui s'est améliorée de manière significative et ce dans une courte période.

Mes vœux pour mes parents une heureuse et longue vie.

Enfin mes remerciements sensibles vont à ma femme pour ses honorables soutiens dans les moments les plus difficiles me poussant et m'encourageant à aller au-delà de mes capacités.

Abstract

Cette thèse est consacrée à l'étude de, la stabilité et du taux de décroissance de la solution, de certains problèmes de transmission d'ondes et d'équation des ondes visco-élastique avec retard. Dans certains cas le retard est considéré comme une fonction de temps. Ainsi que l'étude d'existence et d'unicité de la solution faible d'un problème aux limites non-linéaire dépendant d'un problème variationnel aux limites.

La première partie de cette thèse se compose de trois chapitres. Dans le chapitre 2, on considère un système de transmission avec retard. Nous montrons qu'il est bien posé et puis nous prouvons la stabilité exponentielle de la solution en fonction du poids d'amortissement linéaire et le poids de la durée du retard.

Dans le chapitre 3, le résultat du chapitre est étendu à un système d'équations d'ondes visco-élastiques avec retard où un résultat concernant l'existence et la stabilité des solutions a été obtenu.

Dans le chapitre 4, nous prouvons la stabilité d'un problème de transmission avec retard et un terme de mémoire, mais dans ce cas le retard est considéré comme une fonction de temps.

La deuxième partie est consacrée à l'étude d'un modèle mathématique de contact. Dans le chapitre 5, on introduit un modèle mathématique qui décrit l'évolution d'une plaque visco-élastique en contact de friction avec la fondation, nous dérivons l'inégalité variationnelle pour le champs de déplacement, puis nous démontrons l'existence de la solution faible.

Table des matières

Introduction	i
1 Préliminaires d'analyse fonctionnelle	16
1.1 Introduction	16
1.2 Définitions et propriétés élémentaires.	16
1.2.1 Définitions	16
1.2.2 Résultats utiles	17
1.3 Le Théorème de Stampacchia et Lax-Milgram	19
1.4 Éléments d'analyse non linéaire	20
1.4.1 Opérateurs Monotones	20
1.4.2 Sous-différentiel	22
1.5 Inéquations variationnelles elliptiques	24
1.6 Inéquations Variationnelles à Terme de Mémoire	25
1.6.1 Espaces des fonctions vectorielles	25
1.6.2 Inégalités quasi-variationnelles à terme de mémoire	27
1.7 Semi-groupes d'opérateurs linéaires	33
1.7.1 Définition	33
1.7.2 Générateur infinitésimal	34
1.7.3 Le théorème de Hille-Yosida et Lumer-Philips	34
1.8 Le théorème de Hille-Yosida	35
1.8.1 Définition et propriétés élémentaires	35
1.8.2 Le théorème de Hille-Yosida dans les espaces de Banach	36

I	Problèmes de Transmission	38
2	Décroissance des équations des ondes de transmission avec retard	39
2.1	Introduction	39
2.2	Existence et unicité de la solution	42
2.2.1	Première méthode : Méthode de Galerkin	42
2.2.2	Deuxième méthode : La théorie des semi-groupes	48
2.3	Décroissance exponentielle de la solution	52
3	Existence et unicité de la solution d'un problème de transmission à terme visco-élastique avec retard	59
3.1	Introduction	59
3.2	Existence et unicité de la solution du problème posé	62
3.3	Décroissance de la solution	69
4	Décroissance pour un problème de transmission avec mémoire et terme de retard en fonction de temps	72
4.1	Introduction	72
4.2	Préliminaires et principaux résultats	75
4.3	Décroissance générale de la solution	78
II	Problèmes aux limites	86
5	Un Problème aux limites d'évolution	87
5.1	Introduction	87
5.2	Variational formulation	91
5.3	Existence et unicité	104
5.4	Un résultat de dépendance continue	106
5.5	Formulation variationnelle duale	108
	Bibliography	115

Introduction

Plusieurs auteurs ont étudié les problèmes de transmission des équations des ondes, et d'ondes visco-élastiques ainsi que des problèmes contenant des équations thermoélectriques. Des différents résultats avaient été établis. Les auteurs dans [28] ont étudié un problème de transmission en thermo-élasticité où ils ont prouvé un comportement asymptotique d'un corps unidimensionnels composés de deux types différents de matériaux, l'un d'eux est de type thermo-élastique, l'autre n'a pas d'effet thermique. Ils ont montré que la dissipation localisée due de l'effet thermique est suffisamment forte pour produire une décroissance exponentielle de l'énergie totale du système vers zéro, à condition que le noyau $g(t)$ soit positif et décroisse exponentiellement vers zéro. C'est-à-dire, il satisfait

$$g'(t) \leq -cg(t),$$

pour tout $t \geq 0$.

Des premiers résultats dans ce sens ont été établis par Dautray et Lions dans [34]. Dans leur travail, les auteurs ont discuté le problème de transmission linéaire pour les équations hyperboliques, et ils ont démontré l'existence et la régularité de la solution en utilisant des méthodes classiques telles que, série de Fourier et formulations variationnelles.

En général, la stabilité de l'équation des ondes dissipative est un domaine de recherche actif et de nombreuses publications intéressantes ont été publiées au cours des trois dernières décennies. On peut citer, par exemple, le travail de Zuazua [107] où une vitesse de décroissance uniforme de la solution a été obtenue pour une grande classe des équations d'ondes non linéaires avec amortissement par friction agissant dans l'ensemble du domaine.

Zuazua et Freistas dans [109] ont considéré le système

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\epsilon a(x)u_t = u_{xx}, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x); u_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad (0.0.1)$$

tels que ϵ est un paramètre positif, $a \in L^\infty(0, 1)$, et la condition initiale (φ, ψ) est prise dans l'espace d'énergie $X = H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ considéré muni du produit scalaire usuel défini par

$$\langle (f, g), (u, v) \rangle = \int_0^1 (f'\bar{u}' + g\bar{v})dx. \quad (0.0.2)$$

Les auteurs ont donné des conditions suffisantes pour la solution de (0.0.1) pour être globalement stable asymptotiquement dans l'espace X pour les petites valeurs de ϵ , c'est-à-dire $(u(\cdot, t), u_t(\cdot, T))$ converge fortement vers zéro dans la topologie de l'espace X , quand t tend vers l'infini.

Des résultats de stabilité similaires ont été obtenus, par exemple, dans [65], où la stabilité est prouvée pour le problème linéaire suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + h(x)u_t + k(x)u = 0, & \text{in } (0, +\infty) \times \Omega, \\ u(t, x) = 0, & \text{in } (0, +\infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x) & x \in \Omega, \end{cases} \quad (0.0.3)$$

où $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ peut avoir des valeurs négatives, mais dans un ensemble qui est petit par rapport à l'ensemble où il est positif. Dans cette direction, les auteurs ont généralisé les résultats précédents dans le cas 1-dimensionnel obtenus par Freista-Zuazua [109].

Une fois obtenue la stabilité des équations des ondes, la question naturelle qui se pose est celle du taux de décroissance de la solution (vitesse de la convergence de la solution à l'état stationnaire). C'était le but de certaines recherches comme dans [72], où les auteurs se sont intéressés par l'existence et aux taux de décroissance uniforme des solutions d'une équation d'ondes avec un terme source et soumise à un amortissement

non-linéaire sur la frontière. Ils ont considéré le système

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = |u|^\rho u, & \text{in } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0, & \text{on } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(u_t) = 0, & \text{on } \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), & \text{on } \Omega, \end{cases} \quad (0.0.4)$$

où Ω est un domaine étoilé borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, avec $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \neq \emptyset$; Γ_0 et Γ_1 sont fermés et disjoints et ν représente le vecteur unitaire normal vers l'extérieur sur Γ . Les auteurs, dans leur travail, ont obtenu une estimation explicite de l'énergie dépendant du terme d'amortissement $\beta(u_t)$ et de la taille des données initiales. Pour obtenir ces résultats, des hypothèses de croissance de la fonction β près de l'origine ont été supposées. L'équation des ondes linéaire soumise à un feedback sur la frontières non linéaires a été largement étudiée. Par exemple dans (0.0.4) quand $\beta(s) = s^p$, pour quelques $p \geq 1$, et en l'absence du terme source $|u|^\rho u$ Zuazua dans [108] a prouvé que l'énergie décroît exponentiellement si $p = 1$ et polynômialement si $p > 1$. Dans le dernier cas, il a prouvé que l'énergie

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

décroît avec le taux suivant :

$$E(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{\frac{2}{p-1}}}, \quad \forall t \geq 0,$$

pour quelques constantes positives C . Lorsqu'aucune hypothèse de croissance à l'origine n'est imposée à la fonction β , Lasiecka et Tataru dans [62] ont étudié l'équation d'ondes non linéaire soumise à un feedback non linéaire agissant sur Γ_1 . En considérant leur travail, ils étaient les premiers qui ont prouvé que l'énergie décroît vers zéro aussi vite que la solution de quelque ODE associées et sans supposer que le feedback a une croissance polynomiale en zéro. Plus précisément, ils ont montré que l'énergie de la solution $y(t)$ associée à leur problème défini, pour des fonctions non linéaires f_i , par

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} (|\nabla y(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + |y(t)|_{L_2(\Omega)}^2) + \int_{\Gamma_1} F_1(y) d\Gamma_1 + \int_{\Omega} F_0(y) d\Omega,$$

avec

$$F_i(s) = \int_0^s f_i(t) dt, \quad i = 0, 1,$$

satisfait

$$\mathcal{E}(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right) \mathcal{E}(0), \quad \forall t \geq T_0 > 0,$$

où $S(t)$ est la solution de EDO suivante :

$$S'(t) + q(S(t)) = 0,$$

et q est une fonction strictement croissante qui dépend du feedback β . Voir aussi [71] pour un travail en liaison. Messaoudi et Mustafa in [81] ont considéré le système

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha(t)g(u_t) = 0, & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (0.0.5)$$

où α, g sont des fonctions spécifiques. Les auteurs ont examiné (0.0.5), dans lequel l'amortissement considéré est modélisé par un coefficient dépendant du temps $\alpha(t)$, ils ont établi un résultat général de décroissance explicite, dépendant de g et α .

Il se produit fréquemment dans des applications où le domaine est occupé par plusieurs matériaux dont les propriétés élastiques sont différentes, réunis sur toute la surface comme dans le travail [8] où les auteurs ont considéré la propagation d'onde sur un domaine constitué de deux types différents de matériaux dans un problème de transmission (ou diffraction). Du point de vue mathématique, le problème de transmission pour la propagation des ondes consiste en une équation hyperbolique pour laquelle l'opérateur elliptique correspondant a des coefficients discontinus.

L'existence et la régularité ainsi que le contrôle exact du problème de transmission pour l'équation d'ondes pure ont également été étudiées dans [66].

Par la suite Datko et al. dans [32], ont traité le problème unidimensionnel suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + 2au_t(x, t) + a^2u(x, t) = 0 & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = 0 & t > 0, \\ u_x(1, t) = -ku_t(1, t - \tau) & t > 0, \end{cases} \quad (0.0.6)$$

qui modélise la vibration d'une corde attachée dans une extrémité et libre dans l'autre, telle que $u(x, t)$ est le déplacement de la corde et a et k sont des constantes positives et $\tau > 0$ est le temps retard. Ici la corde est contrôlée par une force avec un retard à l'extrémité libre. Ils ont montré que, si les constantes positives a et k vérifient

$$k \frac{e^{2a} + 1}{e^{2a} - 1} < 1, \quad (0.0.7)$$

le système de contre-réaction retardée (0.0.6 est stable pour un retard suffisamment petit. D'autre part si

$$k \frac{e^{2a} + 1}{e^{2a} - 1} > 1, \quad (0.0.8)$$

alors il existe a et un ensemble D de $(0, +\infty)$ tels que pour tout $\tau \in D$, le système (0.0.6) admet des solutions exponentiellement instables.

Le problème de transmission des ondes visco-élastiques a été étudié par Muñoz Rivera et Oquendo [82] où ils ont démontré la décroissance exponentielle de la solution en utilisant la régularité résultant des équations intégrales de Volterra et des propriétés régularisantes de la viscosité.

Marzocchi, Rivera et Naso dans [75] ont considéré le système

$$\begin{cases} u_{tt} - au_{xx} + m\theta_x + f(u) & = h_1, \quad \in \Omega \times]0, +\infty[, \\ \theta_t - k\theta_{xx} + mu_{xt} & = h_2, \quad \in \Omega \times]0, +\infty[, \\ v_{tt} - bv_{xx} & = h_3, \quad \in]L_1, L_2[\times]0, \infty[, \end{cases} \quad (0.0.9)$$

tel que a, b, k et m sont des constantes positives, $h_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, 2)$ et $h_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction non linéaire avec quelques propriétés spécifiques. Le système est soumis aux conditions de limite suivantes :

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(L_3, t) = \theta(0, t) = \theta(L_3, t), \\ u(L_i, t) &= v(L_i, t), \quad au_x(L_i, t) - m\theta(L_i, t) = bv_x(L_i, t), \quad (i = 1, 2), \\ \theta_x(L_i, t) &= 0, \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (0.0.10)$$

et les conditions initiales

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x) \quad x \in \Omega, \\ v(x, 0) &= v_0(x), \quad v_t(x, \tilde{A}) = v_1(x, 0), \quad x \in]L_1, L_2[, \end{aligned} \quad (0.0.11)$$

et f satisfait $sf(s) \geq 0 \forall s \in \mathbb{R}$. Les auteurs ont prouvé que dans le cas linéaire homogène ($f \equiv 0, h_i \equiv 0, i = 1, 2$), la solution du système précédent tend vers zéro avec un taux d'exponentiel, quand le temps tend vers l'infini. Dans le cas non linéaire, cette propriété est remplacée par l'existence d'un ensemble absorbant dans l'espace de solutions qui fournit que, μ est suffisamment petit, où f est supposée de Lipschitz et μ est sa constante de Lipschitz.

Récemment, la stabilité des solutions dans des équations d'ondes et des ondes visco-élastiques avec retard est devenue un domaine de recherche actif. Nicaise et Pignoti dans [84] ont étudié l'effet du retard temporel sur la frontière ou sur la stabilisation internes de l'équation d'onde dans des domaines de \mathbb{R}^n . Ils ont donné quelques résultats de stabilité sous la condition que le poids du terme d'amortissement sans retard est supérieur au poids de l'amortissement avec retard. D'autre part, ils ont montré que si cette dernière condition n'est pas satisfaite, il existe quelques retards pour lesquels le système n'est pas stable. Dans un certain sens, leur condition suffisante est également nécessaire pour avoir un résultat général de stabilité. Plus précisément, ils ont considéré le problème

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & \text{in } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = 0, & \text{on } \Gamma_D \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = -\mu_1 u_t(x, t) - \mu_2 u_t(x, t - \tau), & \text{on } \Gamma_N \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \text{and} \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{in } \Omega, \\ u_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), & \text{in } \Gamma_N \times (0, \tau), \end{cases} \quad (0.0.12)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert borné de frontière Γ qui est de classe C^2 et $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ avec $\Gamma = \overline{\Gamma_D} \cap \overline{\Gamma_N} = \emptyset$ et $\Gamma_D \neq \emptyset$. De plus, $\tau > 0$ est le temps retard, μ_1 et μ_2 sont des constantes positives. Sous l'hypothèse $\mu_2 < \mu_1$ ils ont obtenu un résultat de stabilité dans une dimension spatiale générale en utilisant des estimations de type énergétique appropriées. Pour les autres cas, si $\mu_2 \geq \mu_1$ ils ont montré qu'il existe une séquence de petits retards arbitraires pour que des instabilités puissent se produire.

Le comportement asymptotique d'un système couplé d'équations des ondes a été étudié par Rapposo et Bastos [8] par la même méthode utilisée dans [66]. Les auteurs ont considéré, pour k_1, k_2 et α soient des constantes positives nombre et $0 < L_0 < L$, le système

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - k_1 u_{xx}(x, t) + \alpha u_t(x, t) = 0, & x \in (0, L_0), t > 0, \\ v_{tt}(x, t) - k_2 v_{xx}(x, t) = 0, & x \in (L_0, L), t > 0, \end{cases} \quad (0.0.13)$$

satisfaisant les conditions aux limites

$$u(0, t) = v(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (0.0.14)$$

et les conditions de transmission suivantes

$$u(L_0, t) = v(L_0, t), \quad k_1 u_x(L_0, t) = k_2 v_x(L_0, t), \quad t > 0, \quad (0.0.15)$$

et les conditions initiales

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u^0(x), & u_t(x, 0) &= u^1, & x &\in (0, L_0), \\ v(x, 0) &= v^0(x), & v_t(x, 0) &= v^1, & x &\in (L_0, L). \end{aligned} \quad (0.0.16)$$

Ils ont examiné les propriétés asymptotiques du système ci-dessus. Le résultat principal de leur travail était un théorème dans lequel ils ont montré que, la solution du problème de transmission étudié, décroît exponentiellement vers zéro quand le temps tend vers l'infini, quelque soit la taille de la différence $L - L_0$. L'approche utilisée consistait à choisir des multiplicateurs appropriés pour construire un fonctionnel de Lyapunov pour le système. Ils ont associés aux équations (0.0.13)-(0.0.16) les énergies

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t)$$

avec

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} [|u_t|^2 + k_1 |u_x|^2] dx,$$

et

$$E_2(t) = \frac{1}{2} \int_{L_0}^L [|v_t|^2 + k_2 |v_x|^2] dx.$$

Ils ont prouvé qu'il existe deux constantes positives C et c telles que :

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) \leq CE(0)e^{-ct}.$$

Suite à leur travail [84], Nicaise et Pignoti [85] ont étudié l'équation des ondes soumise à des conditions aux limites de Dirichlet sur une partie de la frontière du domaine Ω , et des conditions aux limites dissipatives avec retard sur le reste du bord. C'est-à-dire ils ont considéré le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{in } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0, & \text{on } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(t) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) u_t(t-s) ds + \mu_0 u_t = 0, & \text{on } \Gamma_1 \times (0, = \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \text{and} \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{in } \Omega, \\ u_t(x, -t) = f_0(x, -t), & \text{on } \Gamma_1 \times (0, \tau_2), \end{array} \right. \quad (0.0.17)$$

tel que $\nu(x)$ dénote le vecteur normal au point unitaire $x \in \Gamma$ et $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ est la dérivée normale. De plus, τ_1 et τ_2 sont des constantes positives avec $0 \leq \tau_1 < \tau_2$, μ_0 est une

constante positive, $\mu : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}$ est une L^∞ fonction, $\mu \geq 0$ presque partout, et les données initiales (u_0, u_1, f_0) appartiennent à des espace convenables. Le problème ci-dessus peut être considéré comme un problème à mémoire agissant seulement sur l'intervalle de temps (τ_1, τ_2) .

Si $\mu \equiv 0$, c'est-à-dire en l'absence de retard, l'énergie du problème (0.0.17) décroît exponentiellement vers zéro. Voir aussi certains travaux en relation tels que [33, 106]. Sous l'hypothèse

$$\mu_0 > \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) ds, \quad (0.0.18)$$

les auteurs dans [85] ont prouvé une stabilité exponentielle pour le problème (??).

Nig et Yan [110] ont étudié la stabilisation de l'équation d'onde avec des coefficients variables et un retard dans le feedback de la frontière dissipative. En vertu des méthodes de la géométrie de Riemann et de l'approche perturbée par l'énergie et des techniques multiplicatrices de l'énergie.

Cavalcanti et al. [26] ont considéré l'équation d'onde visco-élastique de la forme

$$u_{tt} - \Delta u + \Delta \int_0^t g(t-s) \Delta u(x, s) ds + h(u_t) = f(u), \quad (0.0.19)$$

dans $\Omega \times (0, \infty)$, soumis à des conditions initiales et des conditions aux limites de type de Dirichlet, Dans le cas où $f = 0$ et $h(u_t) = a(x)u_t$. C'est-à-dire de la forme

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s) \Delta u(x, s) ds + a(x)u_t = 0, \quad (0.0.20)$$

sur $\Omega \times (0, \infty)$, où $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction, qui peut être nulle sur une partie du domaine Ω et en supposant $a(x) \geq a_0$ sur $\omega \subset \Omega$ et

$$-\zeta_1 g(t) \leq g'(t) \leq -\zeta_2 g(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (0.0.21)$$

les auteurs ont montré un résultat de décroissance exponentielle sous certaines restrictions géométriques sur le sous ensemble $w \subset \Omega$. Le résultat dans [26] avait été prouvé par Berrimi et Messaoudi [16], dans des conditions plus faibles sur les deux données a et g .

Cavalcanti et al.[23] ont examiné le problème suivant

$$|u_t|^\rho u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-s) \Delta u(x, s) ds - \gamma \Delta u_t = 0, \quad t > 0, \quad (0.0.22)$$

sur $\Omega \times (0, \infty)$. Pour $\gamma \geq 0$, ils ont montré un résultat d'existence global. En outre, ils ont obtenu un résultat de décroissance exponentielle pour $\gamma > 0$ à condition que la fonction g décroît exponentiellement.

Fabrizio et Poldoro [37] ont traité le problème (0.0.21) avec $a(x) = a_0$ et ont montré que la solution du (0.0.21) décroît exponentiellement seulement si le noyau de relaxation g le fait. C'est-à-dire que la présence du terme mémoire peut empêcher la décroissance exponentielle. Cette décroissance a lieu toujours pour $g = 0$ due au terme d'amortissement par friction linéaire. Messaoudi dans [78] a considéré un problème proche de (0.0.19) pour lequel il a prouvé un résultat de décroissance. En effet, son résultat, admet une grande classe de fonctions de relaxation et améliore un résultat antérieur dans lequel seuls les taux exponentiels et polynomiaux ont été établis.

Cavalcanti et Oquendo [24] ont montré quelques résultats de stabilité pour des problèmes plus générales que ceux considérés dans [26]. Plus précisément, ils examinaient le problème suivant.

$$u_{tt} - k_0 \Delta u + \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(x,s)]ds + b(x)h(u_t) + f(u) = 0, \quad (0.0.23)$$

et ils ont prouvé que, sous les mêmes conditions sur la fonction g et pour $a(x) + b(x) \geq \rho > 0$, un résultat de stabilité exponentielle est établi si, g décroît exponentiellement et h est linéaire, et un résultat de stabilité polynomiale quand g décroît polynomialement, c'est-à-dire

$$g'(s) \leq -c[g(s)]^p, \quad p > 1,$$

et h est non linéaire.

Récemment, Messaoudi et Tatar [77] ont étudié (0.0.22) avec ($\gamma = 0$) et ont montré que le terme vico-élastique d'amortissement est suffisamment long pour stabiliser le système.

Cavalcanti et al. dans l'article [21] ont traité un problème similaire à (0.0.19) avec un feedback non linéaire agissant sur la frontière du domaine Ω , ils ont prouvé des taux de décroissance uniforme de l'énergie sans imposition d'aucune restriction sur les hypothèses de décroissance concernant le terme d'amortissement.

L'équation des ondes viscoélastique avec retard a été d'abord abordée par Kirane et Said-Houari dans [58] ils ont étudié l'existence et le comportement asymptotique de la stabilité d'une équation d'ondes visco-élastique avec retard, ils ont considéré le

problème d'équation d'ondes linéaire visco-élastique avec un amortissement linéaire et un terme de retard

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x, s)ds \\ + \mu_1 u_t(x, t) + \mu_2 u_t(x, t - \tau) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1, & x \in \Omega, \\ u_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), & \in \Omega, t \in (0, \tau), \end{array} \right. \quad (0.0.24)$$

tels que $u = u(x, t), t \geq 0, x \in \Omega, \Delta$ dénote le Laplacien avec respect de t et de x, Ω est un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^N, (N \geq 1), \mu_1, \mu_2$ des constantes positives, $\tau < 0$ est le temps retard, u_0, u_1, f_0 des fonctions dans des espaces convenables. Le but de leur travail est d'étudier l'existence et la stabilité asymptotique du problème (3.1.1). En introduisant le terme de retard $\mu_2 u_t(x, t - \tau)$, ils ont fait du problème un problème différent de ceux considérés auparavant. Premièrement, les auteurs utilisaient la méthode d'approximation de Faedo-Galerkin avec quelques estimations d'énergie, sous quelques restrictions sur les paramètres μ_1, μ_2 , pour rendre le problème (3.1.1) bien posé. Deuxièmement, sous l'hypothèse $\mu_1 < \mu_2$ entre le poids du terme de retard dans le feedback et, le poids du terme sans retard, ils ont prouvé une décroissance générale de l'énergie totale du problème (3.1.1).

Gerbi et Said-Houari dans [42] ont traité le problème ci-dessus concernant l'étude d'équation d'ondes à amortissement avec des conditions aux limites à terme de retard sur la frontière

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u - \alpha \Delta u_t = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) = 0, & x \in \Gamma_0, t > 0, \\ u_{tt} = - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + \mu_1 u_t(x, t) + \mu_2 u_t(x, t - \tau) \right), & x \in \Gamma_1, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), & x \in \Gamma_1, t \in (0, \tau), \end{array} \right. \quad (0.0.25)$$

tels que $u = u(x, t), t \geq 0, x \in \Omega, \Delta$ dénote le Laplacien avec respect de t et la variable x, Ω est un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^N, (N \geq 1), \partial\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, mes(\Gamma_0) > 0, \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$ et $\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu}$ dénote la dérivée du vecteur unitaire normal, α, μ_1 et μ_2 sont des

constantes positives ; De plus, $\tau > 0$ représente le retard dans le temps et u_0, u_1, f_0 sont des fonctions données appartiennent à des espaces convenables. Ce type de problèmes parait (par exemple) en cas de modélisation de vibrations longitudinales sur une barre homogène où intervient des effets visqueux ; Le terme Δu_t , indique que la tension est proportionnelle non seulement sur la souche, mais aussi sur la vitesse de déformation, voir [20]. D'un point de vue mathématiques, ces problèmes font termes d'accélération à ne pas négliger sur la frontière. De telles type de conditions aux bord sont appelées *conditions dynamiques au bord* ; Ils ne sont pas importants uniquement en théorie ,mais aussi sur le plan d'application en physique. Dans un espace unidimensionnel le problème (0.0.25) peut donner une modélisation d'évolution à viscosité d'une barre fixée d'une extrémité et, munie d'une masse sur l'extrémité libre, se référer à [19, 5, 29] pour plus de détails. Dans un espace à deux dimensions, comme dans [96] et dans les références de ce domaine, ces conditions aux bord apparaissent quand on considère un mouvement transversal d'une membrane flexible Ω dont la frontière est peut être affectée par des vibrations uniquement sur une région. Aussi quelques conditions dynamiques au bord comme dans le problème (0.0.25) appariassent quand nous supposons que Ω est un domaine extérieur de \mathbb{R}^3 dans lequel le fluide homogène est exceptionnellement dans le reste des ondes sonores. Tout point de la frontière est affecté d'un petit déplacement normal dans l'obstacle (voir [10] pour plus de détails), ce type de condition au bord sont connus sous le nom de conditions au bord acoustiques. Dans [42] les auteurs donnaient des réponses positives pour ces deux questions ;

- Est-il possible que le terme d'amortissement $-\Delta u_t$ stabilise le système (0.0.25) quand le poids du retard est plus grand que le poids de l'amortissement sur la frontière (i.e. quand $\mu_2 \geq \mu_1$) ?
- Est-ce que la structure particulière du problème garde le résultat d'instabilité obtenu pour le problème étudié en [31] ?

Les auteurs construisaient un fonctionnel de Lyapunov approprié qui donne le résultat de stabilité.

Alabau, Nicaise, and Pignoti dans [2] ont considéré le problème

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) - \int_0^\infty \mu(s) \Delta u(x, t - s) ds + k u_t(x, t - \tau) = 0, & \text{in } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = u_0(x, t) & \text{in } \Omega \times (-\infty, 0], \end{cases} \quad (0.0.26)$$

tels que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert à frontière lisses, avec la donnée initiale u_0 apparte-

nant à un espace convenable, la constante $\tau > 0$ représente le retard dans le temps, k est un nombre réel et le noyau de mémoire $\mu : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est une fonction localement absolument continue satisfaisant

- i) $\mu(0) = \mu_0 > 0$,
- ii) $\int_0^{+\infty} \mu(t)dt = \tilde{\mu} < 1$,
- iii) $\mu'(t) \leq -\alpha\mu(t)$, for some $\alpha > 0$.

Le problème ci-dessus est exponentiellement stable pour $k = 0$ voir [43]. Ils ont montré qu'un résultat de stabilité est réalisé si le paramètre de retard est petit avec respect du noyau de mémoire . Ils ont remarqué aussi que si $\tau = 0$ et $k > 0$ le modèle (0.0.26) représente un amortissement visco-élastique et amortissement dissipatif. Donc, dans le cas, sous des hypothèses sur le noyau μ , le modèle est exponentiellement stable, une stabilité exponentielle aussi se présente si $k < 0$, sous des hypothèses de petitesse sur $|k|$. Ils ont noté que le terme $ku_t(t)$ avec $k < 0$ est appelé anti-amortissant, il est aussi nommé amortissement avec signe opposé avec respect de la dissipation standard, et alors cela donne instabilité. Effectivement, en l'absence de l'amortissement visco-élastique, i.e. pour $\mu \equiv 0$, la solution du problème ci-dessus, avec $\tau = 0$ et $k < 0$, croît exponentiellement vers l'infini.

Le problème de stabilisation du modèle (0.0.26) a été étudié par Guesmia dans [48] en utilisant une approche différente basée sur la construction d'un fonctionnel de Lyapunov convenable.

Dans cette thèse nous étudions la stabilité de quelques problèmes de transmission d'ondes et d'équation des ondes et des ondes viscoélastiques avec retard. La modélisation des phénomènes physiques nécessite un ensemble de techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système étudié. Dans le même sens, on peut dire que la modélisation théorique exige une connaissance précise des phénomènes intervenant dans le système et une aptitude à les représenter par des équations mathématiques. Et par suite elle conditionne les méthodes qui seront utilisées par la suite, pour analyser ses propriétés. Le problème de la stabilité consiste à trouver des conditions qui portent sur les systèmes pour qu'ils soient stables globalement, exponentiellement ou polynômialement, et ceci pour que la modélisation ait un sens. Du point de vue pratique, plus particulièrement en science de l'ingénieur, on constate que les phénomènes de retard apparaissent naturellement dans les processus physiques. On cite les temps de transmissions des informations les temps de transferts des matières

ou encore les temps de mesures. Alors dans le but de se rapprocher du processus réel, une meilleure modélisation consiste à concevoir les systèmes à retard. L'objectif de ce travail consiste donc à étudier la stabilité d'un problème de transmission où un terme de retard intervient en présence d'un terme d'amortissement sans terme viscoélastique, et l'étude d'un problème similaire au premier avec un terme viscoélastique, et un problème similaire au deuxième en considérant le retard comme une fonction de temps.

A l'issue de cette introduction cette thèse est organisée comme suit :

Chapitre 1. Dans ce premier chapitre on va donner des rappelles et des préliminaires de base sur l'analyse fonctionnelle qui vont être utilisés dans les chapitres suivants de ce mémoire.

Chapter 2. Dans ce chapitre, nous avons considéré le système

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - au_{xx}(x, t) + \mu_1 u_t(x, t) + \mu_2 u_t(x, t - \tau) = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ v_{tt}(x, t) - bv_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (L_1, L_2) \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (0.0.27)$$

tel que $0 < L_1 < L_2 < L_3$, $\Omega =]0, L_1[\cup]L_2, L_3[$, a, b, μ_1 et μ_2 sont des constantes positives et $\tau > 0$ est le retard, $\mu_1 u_t(x, t)$ est le terme d'amortissement, et $\mu_2 u_t(x, t - \tau)$ est le terme retard. En utilisant l'approximation de Faedo-Galerkin et l'approche de semi-groupe, nous avons prouvé l'existence et l'unicité de la solution de notre problème. En outre, nous avons établi une décroissance exponentielle de l'énergie définie par

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) + \frac{\zeta}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 y^2(x, \rho, t) d\rho dx,$$

où

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx + \frac{a}{2} \int_{\Omega} u_x^2(x, t) dx,$$

et

$$E_2(t) = \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} v_t^2(x, t) dx + \frac{b}{2} \int_{L_1}^{L_2} v_x^2(x, t) dx,$$

tels que $\tau\mu_2 \leq \zeta \leq \tau(2\mu_1 - \mu_2)$. La décroissance a été prouvée pourvu que le poids du retard soit inférieur au poids de l'amortissement (c'est-à-dire $\mu_2 \leq \mu_1$). Pour atteindre l'estimation de la décroissance, nous avons introduit un fonctionnel de Lyapunov qui

conduit au résultat souhaité.

Chapter 3. Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité et la stabilité des solutions d'un problème de transmission. Dans ce problème nous avons considéré le système

$$\begin{cases} u_{tt} - au_{xx} + \int_0^{+\infty} g(s)u_{xx}(x, t - s)ds + \mu_1 u_t(x, t) + |\mu_2| u_t(x, t - \tau) = 0, & (x, t) \in \Omega \times]0, +\infty[, \\ v_{tt} - bv_{xx} = 0, & (x, t) \in]L_1, L_2[\times]0, +\infty[, \end{cases} \quad (0.0.28)$$

où $0 < L_1 < L_2 < L_3$, $\Omega =]0, L_1[\times]L_2, L_3[$, $\mu_1 \in \mathbb{R}_*^+$, et $\mu_2 \in \mathbb{R}$. La fonction g représente la mémoire, $\mu_1 u_t(x, t)$ est le terme d'amortissement, et $|\mu_2| u_t(x, t - \tau)$ est le terme retard. La constante μ_2 est un nombre réel quelconque non nécessairement positif. En utilisant la théorie des semi-groupes nous prouvons la bonne position du problème qui est fournie avec le fait que le poids du retard est moins que le poids de l'amortissement (i.e. $|\mu_2| \leq \mu_1$). Ainsi, un résultat de stabilité est obtenu.

Chapter 4. Le but de ce chapitre est d'étudier la décroissance d'un système de transmission avec un terme de mémoire et un terme de retard qui est une fonction de temps. Nous avons considéré le système

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - au_{xx}(x, t) + \int_0^t g(t - s)u_{xx}(x, s)ds + \mu_1 u_t(x, t) \\ + |\mu_2| u_t(x, t - \tau(t)) = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ v_{tt}(x, t) - bv_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (L_1, L_2) \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (0.0.29)$$

où $0 < L_1 < L_2 < L_3$, $\Omega =]0, L_1[\cup]L_2, L_3[$, a, b, μ_1 , sont des constantes positives, la constante μ_2 est un nombre réel quelconque non nécessairement positif, $\tau(t) > 0$ est la fonction retard. Le terme mémoire et le terme de retard sont dans le premier côté de la première équation du système. Nous avons prouvé la décroissance de l'énergie en introduisant un fonctionnel de Lyapunov sous les hypothèses $|\mu_2| \leq \mu_1$ où μ_1 est un nombre positif μ_2 est un réel.

Ici, l'énergie est définie par

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) + \frac{\zeta}{2} \int_{\Omega} \int_{t-\tau(t)}^t u_t^2(x, s) ds dx,$$

avec

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx + \frac{\beta(t)}{2} \int_{\Omega} u_x^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g \square u_x) dx,$$

et

$$E_2(t) = \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} v_t^2(x, t) dx + \frac{b}{2} \int_{L_1}^{L_2} v_x^2(x, t) dx$$

où ζ est une constante positive définie par

$$\frac{|\mu_2|}{\sqrt{1-d}} \leq \zeta \leq 2\mu_1 - \frac{|\mu_2|}{\sqrt{1-d}}, \quad 0 < d < 1,$$

et la fonction β est définie au Lemme 4.2.1 .

Chapter 5. Dans ce chapitre nous considérons un problème aux limites non linéaire dans un rectangle à deux dimensions. Nous dérivons la formulation variationnelle pour ce problème qui sera sous la forme d'une inégalité variationnelle d'évolution sur un espace de Hilbert. Puis, on établit l'existence et l'unicité de la solution faible du problème et on prouve la dépendance continue de la solution avec respect de quelques paramètres. Finalement, on considère une seconde formulation variationnelle pour ce problème, dite formulation variationnelle duale, qui est sous la forme d'une inégalité à terme de mémoire associée à un ensemble convexe dépendant de temps. Nous étudierons le lien entre les deux formulations variationnelles et prouvons un résultat d'existence, unicité et équivalence.

Préliminaires d'analyse fonctionnelle

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous rappelons quelques éléments d'analyse fonctionnel qui vont être utilisés dans les différents chapitres de cette thèse [17, 34, 50, 68, 52, 54, 91]. Quelques résultats sont donnés sans démonstrations, car ils sont standard et connues chez les lecteurs comme elles peuvent être trouvées dans beaucoup de références de mathématiques. Néanmoins, nous allons réserver une attention particulière pour les résultats utilisés dans le chapitre suivant.

Elles se basent sur le Lemme de la projection et la représentation de Riez. Tout les espaces linéaires considérés dans cette thèse sont supposés des espaces linéaires réels.

1.2 Définitions et propriétés élémentaires.

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1. : Soit X un espace vectoriel. Un *produit scalaire* (u, v) est une forme bilinéaire définie sur $X \times X$ à valeurs dans \mathbb{R} (i.e, une forme de $X \times X$ dans \mathbb{R} qui est linéaires pour les deux variables telles que

$$\begin{aligned} (u, v) &= (v, u), & \forall u, v \in X & \quad (\textit{symétrie}), \\ (u, v) &\geq 0, & \forall u \in X & \quad (\textit{positive}), \\ (u, u) &\neq 0, & \forall u \neq 0 & \quad (\textit{définie}). \end{aligned}$$

Rappelons que le produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}}(v, v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in X.$$

Dans la suite nous utilisons la notation $(|\cdot|$ (ou $\|\cdot\|$)) pour la norme associée au produit scalaire.

Définition 1.2.2. Un espace vectoriel $(X, |\cdot|)$ est *de Hilbert* si sa norme provient d'un produit scalaire et s'il est complet.

Dans ce qui suit, X représente un espace de Hilbert.

1.2.2 Résultats utiles

Dans ce qui suit nous introduisons quelques résultats utiles qui sont valables dans les espaces de Hilbert. L'opérateur de la projection, quelques propriétés d'orthogonalité et le Théorème de la représentation de Riez, le Théorème de Lax-Milgram et leurs conséquences feront l'objet.

Le théorème de projection

L'opérateur de projection représente une classe importante des opérateurs non linéaires définis sur un Hilbert, pour les introduire nous avons besoin du résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 1.2.3. (*Lemme de projection*) Soit K un sous ensemble non vide fermé de l'espace de Hilbert X . Alors, pour tout $f \in X$ il existe un élément unique $u \in K$ tel que

$$\|u - f\|_X = \min_{v \in K} \|v - f\|_X. \quad (1.2.1)$$

Définition 1.2.4. Soit K un sous ensemble non vide fermé de l'espace de Hilbert X . Alors, pour tout $f \in X$ l'élément u qui satisfait (1.2.1) est nommé projection de f sur K et il est souvent noté $\mathcal{P}_K f$. De plus, l'opérateur $\mathcal{P}_K : X \rightarrow K$ est nommé opérateur de projection sur K .

Ainsi, nous présentons les caractérisations de la projection si-dessous.

Proposition 1.2.5. Soit K un sous ensemble non vide fermé de l'espace de Hilbert X et soit $f \in X$. Alors $u = \mathcal{P}_K f$ si et seulement si

$$u \in K, \quad (u, v - u)_X \geq (f, v - u)_X, \quad \forall v \in K. \quad (1.2.2)$$

Notons que, à coté des caractérisations de la projection sous forme d'inégalités, la Proposition 2.5 fournit, implicitement, l'existence et l'unique solution de l'inégalité (1.2.1). De plus, en utilisant cette inégalité il est facile de prouver les résultats suivants.

Proposition 1.2.6. *Soit K un sous ensemble non vide fermé de l'espace de Hilbert X . Alors l'opérateur de projection \mathcal{P}_K satisfait les inégalités suivantes :*

$$(\mathcal{P}_K u - \mathcal{P}_K v, v - u)_X \geq 0, \quad \forall u, v \in K, \quad (1.2.3)$$

$$\|\mathcal{P}_K u - \mathcal{P}_K v\|_X \leq \|v - u\|_X, \quad \forall u, v \in K. \quad (1.2.4)$$

Proposition 1.2.7. *Soit K un sous ensemble non vide fermé de l'espace de Hilbert X et soit $G_K : X \rightarrow X$ un opérateur défini par*

$$G_K u = u - \mathcal{P}_K u \quad \forall u \in X. \quad (1.2.5)$$

Alors, les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$(G_K u - G_K v, v - u)_X \geq 0, \quad \forall u, v \in K, \quad (1.2.6)$$

$$\|G_K u - G_K v\|_X \leq 2\|v - u\|_X, \quad \forall u, v \in K, \quad (1.2.7)$$

$$(G_K u, u - v)_X \leq 0, \quad \forall u \in X, v \in K, \quad (1.2.8)$$

$$G_K u = 0_X \quad \text{iff} \quad u \in K. \quad (1.2.9)$$

Dualité et convergence faible

Il est facile, dans espace de Hilbert, de donner une représentation pour les fonctionnels linéaires continus. Choisissons un $f \in X$, alors le correspondance $u \mapsto (f, u)$ est une fonction linéaire continue sur X . Il est à remarquer le fait que tout fonctionnel linéaire continu sur X est obtenu sous cette forme :

Théorème 1.2.8. *(Le Théorème représentation de Riesz) Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace de Hilbert et soit $l \in X'$. Alors il existe un unique $u \in X$ tel que*

$$l(v) = (u, v)_X \quad \forall v \in X. \quad (1.2.10)$$

De plus,

$$\|l\|_{X'} = \|u\|_X. \quad (1.2.11)$$

Le Théorème de représentation de Riesz permet également d'identifier un espace de Hilbert à son dual et, avec son bidual qui, grosso modo, montre que tout espace de Hilbert est réflexive. En se basant sur cela nous avons la plus importante propriété suivante qui représente un cas particulier du théorème connu d'Eberlein-Smulyan.

Théorème 1.2.9. *Si X est un espace de Hilbert, alors toute suite bornée dans X admet une suite faiblement convergente.*

Théorème 1.2.10. *Soit X un espace de Hilbert et soit $\{u_n\}$ une sous suite d'éléments de X telle que toute sous suite faiblement convergente de $\{u_n\}$ converge faiblement vers la même limite $u \in X$. Alors $u_n \rightharpoonup u$ dans X .*

1.3 Le Théorème de Stampacchia et Lax-Milgram

Définition 1.3.1. Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite

(i) *continue* s'il existe une constante C telle que

$$|a(u, v)| \leq C|u||v| \quad \forall u, v \in X,$$

(ii) *coercive* s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq \alpha|v| \quad \forall v \in X.$$

Théorème 1.3.2. (*Stampacchia*). *Soit $a(u, v)$ une forme linéaire et continue et coercive sur X . Soit $K \subset X$ un convexe fermé non vide. Étant donné $\varphi \in X^*$, il existe $u \in K$ tel que*

$$a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle, \quad \forall v \in K. \tag{1.3.1}$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$\boxed{u \in K \quad \text{and} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.} \tag{1.3.2}$$

Théorème 1.3.3. (*Théorème de point fixe de Banach - Méthode des approximations successive de Picard*) *Soi K un espace métrique complet, et soit $S : K \rightarrow K$ une application telle que*

$$d(Sv_1, Sv_2) \leq kd((v_1, v_2)) \quad \forall v_1, v_2 \in K \quad \text{with} \quad k < 0. \tag{1.3.3}$$

Alors K admet un point fixe unique, $u = Su$.

Théorème 1.3.4. (Lax-Milgram) Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur X . alors, pour tout $\varphi \in X^*$, il existe un élément unique $u \in X$ tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in X. \quad (1.3.4)$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in X \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in X} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}. \quad (1.3.5)$$

1.4 Éléments d'analyse non linéaire

Dans cette étude nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espace de Hilbert et quelques résultats concernant les inéquations variationnelles elliptiques et les inéquations variationnelles d'évolution qui interviennent dans l'étude des problème de ce mémoire. §

1.4.1 Opérateurs Monotones

L'opérateur de projection sur un sous ensemble convexe K d'un espace de Hilbert est, en générale, un opérateur non linéaire X . Ses propriétés (2.3) and (2.4) peuvent êtres écrites comme suit.

Définition 1.4.1. Soit X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme $\|\cdot\|$ et soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire. Alors l'opérateur A est dit monotone si :

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X.$$

L'opérateur A est strictement monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X > 0 \quad \forall u, v \in X, u \neq v.$$

fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m\|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X. \quad (1.4.1)$$

L'opérateur A est nonexpensive si

$$\|Au - Av\|_X \leq \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

et continu de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq M\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (1.4.2)$$

Finalement, l'opérateur A est hemicontinu si la fonction réelle

$$\theta \longmapsto (A(u + \theta v), w)_X \quad \text{est continue sur } \mathbb{R}, \quad \forall u, v \in X.$$

et A est continu si

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{in } X \Rightarrow Au_n \longrightarrow Au \quad \text{in } X.$$

Il s'ensuit de la définition précédente que tout opérateur fortement monotone est strictement monotone et, un opérateur nonexpensive est de Lipschitz et continu de constant de Lipschitz $M = 1$. Aussi, il est facile de vérifier qu'un opérateur de Lipschitz continu est continu et qu'un opérateur continu est hemi-continu. De plus, il s'ensuit de la proposition (1.2.6) que les opérateurs de projection sont monotones et nonexpensives.

Dans beaucoup d'applications il n'est pas nécessaire de définir l'opérateur non linéaire sur tout l'espace X . Effectivement, dans l'étude des inégalités variationnelles qui seront présentées dans les chapitres 3 et 4 nous considérerons des opérateurs fortement monotones de Lipschitz continus signifiés sur le sous ensemble $K \subset X$. Pour cette raison nous complétons la définition (1.4.1) avec ce qui suit.

Définition 1.4.2. Soit X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme $\|\cdot\|_X$ et soit $K \subset X$. Un opérateur $A : K \longrightarrow X$ est dit fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m\|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in K.$$

L'opérateur A est de Lipschitz continu s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq M\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Le résultat ci-dessous impliquant l'opérateur monotone sera utilisé dans les chapitres 3 et 4 de ce mémoire, en étudiant l'analyse des inégalités variationnelles.

Proposition 1.4.3. *Soit un espace $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ muni d'un produit scalaire et soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur hemi-continu monotone. Soit u_n une suite d'éléments de X convergeant faiblement vers l'élément $u \in X$, i.e.*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } X \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

De plus, Soit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - u)_X \leq 0.$$

Alors, pour tout $v \in X$ l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - u)_X \geq (Au, u - v)_X.$$

On va présenter le résultat suivant qui concerne l'étude des équations non linéaires impliquant les opérateurs monotone.

Théorème 1.4.4. *Soit X un espace de Hilbert et soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur continu de Lipschitz fortement monotone. Alors, pour tout $f \in X$ il existe un élément unique $u \in X$ tel que $Au = f$.*

Le théorème (1.4.4) montre que $A : X \rightarrow X$ est un opérateur continu de Lipschitz fortement monotone défini sur un espace de Hilbert X , alors A il est inversible. Les propriétés de son inverse, noté A^{-1} , sont données par le résultat suivant.

Proposition 1.4.5. *Soit X un espace de Hilbert et soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur continu de Lipschitz fortement monotone. Alors, $A^{-1} : X \rightarrow X$ un opérateur continu de Lipschitz fortement monotone.*

1.4.2 Sous-différentiel

Ici, nous présentons quelques notions afférentes au sous-différentiel au sens de l'analyse convexe.

Définition 1.4.6. Soit X un espace vectoriel et K un sous-ensemble convexe non vide de X . La fonction $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si

$$\varphi((1-t)u + tv) \leq (1-t)\varphi(u) + t\varphi(v), \tag{1.4.3}$$

pour tout $u, v \in K$ et $t \in [0, 1]$. La fonction φ est fortement convexe si l'inégalité (1.4.3) est stricte pour $u \neq v$ et $t \in (0, 1)$.

Nous indiquons que si $\varphi, \psi : K \longrightarrow \mathbb{R}$ sont convexes et $\lambda \geq 0$, alors les fonctions $\varphi + \psi$ et $\lambda\varphi$ sont convexes.

Définition 1.4.7. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé, K un sous-ensemble convexe fermé non vide de X . La fonction $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement si pour tout $u \in K$ si

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n) \geq \varphi(u), \tag{1.4.4}$$

pour tout $u_n \subset K$ convergente vers u dans X . La fonction φ est semi-continue inférieurement, si elle est semi-continue inférieurement en tout point $u \in K$. Si l'inégalité (1.4.4) est vérifiée pour toute suite $u_n \subset K$ faiblement convergente vers u , la fonction φ est dite faiblement semi-continue inférieurement en u . La fonction φ est semi-continue inférieurement si elle est semi-continue inférieurement en tout point $u \in K$.

Notons que si $\varphi, \psi : K \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions semi-continue inférieurement et $\lambda \geq 0$, la fonction $\varphi + \psi$ et $\lambda\varphi$ sont aussi semi-continue inférieurement. De plus, si $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors elle est aussi semi-continue inférieurement. L'inverse n'est pas vrai, une fonction semi-continue inférieurement peut être discontinue. Comme la convergence forte dans X implique la convergence faible, il s'ensuit qu'une fonction faiblement semi-continue inférieurement est semi-continue inférieurement. De plus, on a le résultat suivant.

Proposition 1.4.8. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach, K un sous-ensemble convexe fermé non vide de X et $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors φ est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est faiblement semi-continue inférieurement.

Proposition 1.4.9. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace normé, K un sous-ensemble convexe fermé non vide de X et $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors φ est inférieurement bornée par une fonction affine, i.e. il existe $l \in X'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $\varphi(v) \geq l(v) + \alpha$ pour tout $v \in K$.

Exemple.1 La fonction norme $v \longmapsto \|v\|_X$ est faiblement semi-continue inférieurement.

Le second exemple d'une fonction semi-continue inférieurement est donné ci-dessous.

Proposition 1.4.10. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace normé et soit $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique positive. Alors la fonction $v \longmapsto a(v, v)$ est strictement convexe et semi-continue inférieurement.

En particulier, il est clair d'après la Proposition (1.4.10) que, si $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ est un espace muni d'un produit scalaire alors la fonction $v \mapsto \|v\|_X^2$ est strictement convexe et semi-continue inférieurement. Rappelons maintenant la définition d'une fonction Gâteaux-différentiable.

Définition 1.4.11. Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace muni d'un produit scalaire, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $u \in X$. Alors φ est Gâteaux-différentiable en u s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in X$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = (\nabla\varphi(u), v)_X \quad \forall v \in X. \quad (1.4.5)$$

L'élément $\nabla\varphi(u)$ vérifiant (1.4.5) est unique et il est appelé gradient de φ en u . La fonction $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite Gâteaux-différentiable si elle est Gâteaux-différentiable en tout points de X . Dans ce cas l'opérateur $\nabla\varphi : X \rightarrow X$ qui transforme tout élément $u \in X$ en un élément $\nabla\varphi(u)$ est dit l'opérateur du gradient φ . La convexité d'une fonction Gâteaux-différentiable peut être caractérisée comme suit.

Proposition 1.4.12. Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace muni d'un produit scalaire et soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentiable. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) φ est une fonction convexe
- (ii) φ vérifie l'inégalité

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (\nabla\varphi(u), v - u) \quad \forall u, v \in X. \quad (1.4.6)$$

(iii) Le gradient de φ est un opérateur monotone, c'est-à-dire

$$(\nabla\varphi(u) - \nabla\varphi(v), u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X. \quad (1.4.7)$$

Des Propositions précédentes en tire le résultat suivant.

Corollaire 1.4.12.1. Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace muni d'un produit scalaire et soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe Gâteaux-différentiable. Alors, φ semi-continue inférieurement.

1.5 Inéquations variationnelles elliptiques

Dans cette section nous allons donner un résultat d'existence et d'unicité dans le Théorème (1.4.4). Étant donné un espace de Hilbert X , un opérateur $A : X \rightarrow X$,

un sous-ensemble $K \subset X$ et un élément $f \in X$, considérons le problème de trouver un élément u tel que

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (1.5.1)$$

Une inégalité de la forme (1.5.1) est appelée *inéquation variationnelle elliptique de premier espèce*. Le premier résultat qu'on va présenter en étudiant les inéquations variationnelles (1.5.1) est le suivant.

Théorème 1.5.1. *Soit X un espace de Hilbert et soit $K \subset X$ un sous-ensemble convexe fermé non vide. Supposons que $A : K \rightarrow X$ est un opérateur continu fortement monotone et de Lipschitz. Alors, pour tout $f \in X$ l'inégalité variationnelle (1.5.1) admet une unique solution.*

La preuve du Théorème (1.5.1) peut être trouvée dans [102].

1.6 Inéquations Variationnelles à Terme de Mémoire

Dans cette section on va étendre l'étude de l'existence et d'unicité dans le Théorème (1.5.1) pour une classe spéciale des inéquations variationnelles à terme de mémoire dans le temps. Pour ce but nous avons besoin d'introduire quelques espace de base dont les éléments sont des fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans espace de Hilbert abstrait.

1.6.1 Espaces des fonctions vectorielles

Soit $T > 0$ et soit X un espace de Hilbert. Dénoteons par $C([0, T]; X)$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0, T]$ à valeurs dans X . Il est connu que $C([0, T]; X)$ est un espace de Banach avec la norme

$$\|v\|_{C([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_X.$$

On rappelle aussi que la fonction $v : [0, T] \rightarrow X$ est dite *différentiable* at $t_0 \in [0, T]$ s'il existe un élément de X , noté $\dot{v}(t_0)$ et nommé *dérivée* de v en t_0 , tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h}(v(t_0 + h) - v(t_0)) - \dot{v}(t_0) \right\|_X,$$

dont la limite est prise avec respect de h avec $t_0 + h \in [0, T]$. La fonction v est dite *différentiable* sur $[0, T]$ si elle est différentiable en tout $t_0 \in [0, T]$. Dans ce cas la fonction $\dot{v} : [0, T] \rightarrow X$ est appelée la *dérivée* de v . La fonction v est dite *continûment différentiable* sur $[0, T]$ si elle est différentiable et sa dérivée est continue. Dénotons par $C^1([0, T]; X)$ l'espace des fonctions différentiables sur $[0, T]$ à valeurs dans x et on rappelle que c'est un espace de Banach avec la norme

$$\|v\|_{C^1([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \|\dot{v}(t)\|_X.$$

En utilisant les propriétés de l'intégrale il est facile de voir que si $f \in C([0, T]; X)$ alors la fonction $g : [0, T] \rightarrow X$ donnée par

$$g(t) = \int_0^t f(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

appartient à $C^1([0, T]; X)$ et de plus, $\dot{g} = f$. De plus, rappelons que pour une fonction $v \in C^1([0, T]; X)$ l'égalité si-dessous est vérifiée :

$$v(t) = \int_0^t \dot{v}(s) ds \quad \forall t \in [0, T]. \tag{1.6.1}$$

Finalement, pour un sous-ensemble $K \subset X$ nous utilisons encore la notation $C([0, T]; K)$ et $C^1([0, T]; K)$ pour les fonctions continues et continûment différentiables définies sur $[0, T]$ à valeurs dans K , respectivement.

Nous présentons maintenant un résultat du point fixe qui sera utile pour la preuve de la solvabilité des équations non linéaires et les inéquations variationnelles avec des opérateurs à terme de mémoire.

Proposition 1.6.1. *Soit $\Lambda : C([0, T]; X) \rightarrow C([0, T]; X)$ un opérateur vérifiant les propriétés suivante ; il existe $k \in [0, 1)$ et $c \geq 0$ telles que*

$$\begin{aligned} \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X &\leq \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_X + c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_X ds \\ \forall \eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; X), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Alors, il existe un unique élément $\eta^ \in C([0, T]; X)$ tel que $\Lambda\eta^* = \eta^*$.*

Une preuve de la Proposition (1.6.1) peut être trouvée dans [102]. Nous utilisons dans ce qui suit la notation $C([0, T])$ pour les espaces des fonctions réelles continues définies sur le compact $[0, T] \subset \mathbb{R}$. L'inégalité ci-dessous est utile pour obtenir le résultat d'unicité dans l'étude des équations non linéaires et les inéquations variationnelles des opérateurs à terme de mémoire.

Lemme 1.6.2. (*L'inégalité de Gronwall*) Soit $f, g \in C([0, T])$ et supposons qu'il existe $c > 0$ tel que

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t f(s) ds \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.6.3)$$

Alors

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t g(s) e^{c(t-s)} ds \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.6.4)$$

De plus, si g est non décroissante, alors

$$f(t) \leq g(t) e^{ct} \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.6.5)$$

Une démonstration du Lemme (1.6.2) peut être trouvée dans [102].

1.6.2 Inégalités quasi-variationnelles à terme de mémoire

Dans le reste de cette section nous continuons [101] et [102] d'introduire le concept des quasi-variationnelles inégalités avec terme de mémoire pour lesquelles nous fournissons une existence et unicité.

Soit X un espace de Hilbert réel muni du produit $(\cdot, \cdot)_X$ et la norme associée $\|\cdot\|_X$; Soit K un sous-ensemble de X considérons l'opérateur $A : X \rightarrow X$, et $\mathcal{S} : C([0, T]; X) \rightarrow C([0, T]; X)$ et soit $f : [0, T] \rightarrow X$. Nous sommes intéressés au problème de trouver une fonction $u \in C([0, T]; X)$ telle que, pour tout $t \in [0, T]$, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\begin{aligned} u(t) \in K, \quad (Au(t), v - u(t))_X + (\mathcal{S}u(t), v - u(t))_X \\ \geq (f(t), v - u(t))_X \quad \forall v \in K. \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Pour éviter toute confusion on adopte ici et en bas la notation $Au(t)$ et $\mathcal{S}u(t)$ sont des notations abrégés pour $A(u(t))$ et $(\mathcal{S}u)(t)$, pour tout $t \in [0, T]$. Pour l'étude de (1.6.6) supposons que

$$K \text{ est un sous-ensemble convexe fermé non vide de } X, \quad (1.6.7)$$

et A est un opérateur continu fortement monotone et de Lipschitz, i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ \quad (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m \|u_1 - u_2\|_X^2 \\ \quad \forall u_1, u_2 \in X, \\ \text{(b) Il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|Au_1 - Au_2\|_X \leq M \|u_1 - u_2\|_X \quad \forall u_1, u_2 \in X. \end{array} \right. \quad (1.6.8)$$

De plus, nous supposons que l'opérateur \mathcal{S} satisfait les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } L_S > 0 \text{ tel que} \\ \| \mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t) \|_X \leq L_S \int_0^t \| u_1(s) - u_2(s) \|_X ds \\ \forall u_1, u_2 \in C([0, T]; X), \forall t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (1.6.9)$$

Finalement, nous supposons que

$$f \in C([0, T]; X). \quad (1.6.10)$$

Notons que la condition (1.6.9) est satisfaite pour l'opérateur $\mathcal{S} : C([0, T]; X) \rightarrow C([0, T]; X)$ donné par

$$\mathcal{S}v(t) = R \left(\int_0^t v(s) ds + v_0 \right) \quad \forall v \in C([0, T]; X), \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.6.11)$$

tel que $R : X \rightarrow X$ est un opérateur continu et de Lipschitz et $v_0 \in X$. elle est aussi satisfaite pour l'opérateur de Volterra $\mathcal{S} : C([0, T]; X) \rightarrow C([0, T]; X)$ donné par

$$\mathcal{S}v(t) = \int_0^t R(t-s)v(s) ds \quad \forall v \in C([0, T]; X), \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.6.12)$$

telle que $R \in C([0, T]; \mathcal{L}(X))$. En effet, dans le cas de l'opérateur(1.6.11), l'inégalité (1.6.9) est vérifiée pour L_S , qui devient la constante de Lipschitz pour l'opérateur R , et pour le cas de l'opérateur(1.6.12) elle est vérifiée pour

$$L_S = \|R\|_{C([0, T]; \mathcal{L}(X))} = \max_{t \in [0, T]} \|R(t)\|_{\mathcal{L}(X)}. \quad (1.6.13)$$

Il est claire que, dans le cas des opérateurs (1.6.11, et (1.6.12) la valeur actuelle $\mathcal{S}v(t)$ dans le moment t dépend des valeurs de v dans le moment $0 \leq t$ et, par conséquent, nous nous référons aux opérateurs de la forme (1.6.11) ou (1.6.12) comme *des opérateurs à terme de mémoire*. Nous prolongeons cette définition pour tous les opérateurs $\mathcal{S} : C([0, T]; X) \rightarrow C([0, T]; X)$ satisfaisant la condition (1.6.9) et pou cette raison, nous disons que les inégalité quasi-variationnelles de la forme (1.6.6) sont *inégalité quasi-variationnelles à terme de mémoire*.

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 1.6.3. *Soit X un espace de Hilbert et supposons que (1.6.7)-(1.6.10) sont vérifiées. Alors, l'inéquation variationnelle(1.6.6) admet une solution unique $u \in C([0, T], K)$.*

Le Théorème (1.6.3) représente un cas particulier de beaucoup obtenus dans les ouvrages [102, 101]. Cependant, pour la convenance du lecteur on décide de fournir ci-dessous une preuve complète de ce théorème. La preuve sera basée sur l'argument du point fixe et, sera donnée en plusieurs étapes. Nous supposons dans ce qui suit que (1.6.7)-(1.6.10) sont satisfaites. Dans la première étape, étant donné $\eta \in C([0, T], X)$, notons par $y_{\eta(t)} \in C([0, T], X)$ la fonction

$$y_{\eta(t)} = \mathcal{S}\eta(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.6.14)$$

Considérons le problème de trouver une fonction $u_{\eta} : [0, T] \rightarrow X$ tel que pour tout $t \in [0, T]$, l'inégalité suivante est vraie :

$$\begin{aligned} u_{\eta}(t) \in K \quad & (Au_{\eta}(t), v - u_{\eta}(t))_X + (y_{\eta}(t), v - u_{\eta}(t))_X \\ & \geq (f(t), v - u_{\eta}(t)) \quad \forall v \in K. \end{aligned} \quad (1.6.15)$$

Nous avons le suivant résultat d'existence et d'unicité.

Lemme 1.6.4. *Il existe une unique solution $u_{\eta} \in C([0, T], K)$ du problème (1.6.15).*

Démonstration. En utilisant les assertions (1.6.9), (1.6.8) il s'ensuit du théorème (1.5.1) qu'il existe un unique élément $u_{\eta(t)}$ résolvant (1.6.15), pour tout $t \in [0, T]$. Montrons que $u_{\eta} : [0, T] \rightarrow K$ est continue, pour cela, considérons $t_1, t_2 \in [0, T]$. Pour des raisons de simplicité notons $u_{\eta}(t_i) = u_i, \eta(t_i) = \eta_i, y_{\eta}(t_i) = y_i, f(t_i) = f_i$ for $i = 1, 2$. Utilisant (1.6.15) on obtient

$$\begin{aligned} u_1 \in K, \quad & (Au_1, v - u_1)_X + (y_1, v)_X - (y_1, u_1)_X \\ & \geq (f_1, v - u_1)_X \quad \forall v \in K, \end{aligned} \quad (1.6.16)$$

$$\begin{aligned} u_2 \in K, \quad & (Au_2, v - u_2)_X + (y_2, v)_X - (y_2, u_2)_X \\ & \geq (f_2, v - u_2)_X \quad \forall v \in K, \end{aligned} \quad (1.6.17)$$

We take $v = v_2$ in (1.6.16) et $v = v_1$ in (1.6.17), puis on rassemble les inégalités qui en résultent pour en déduire que

$$\begin{aligned} (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X & \leq (y_1, u_2)_X - (y_1, u_1)_X + (y_2, u_1)_X \\ & \quad - (y_2, u_2)_X + (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_X. \end{aligned}$$

Puis, nous utilisons les assertions (1.6.8)(a) l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous obtenons

$$m\|u_1 - u_2\|_X \leq \|y_1 - y_2\|_X + \|f_1 - f_2\|_X. \quad (1.6.18)$$

Nous déduisons de (1.6.18) que $t \mapsto u_\eta(t) : [0, T] \rightarrow K$ est une fonction continue, ce qui conclut la preuve. \square

Dans l'étape suivante nous utilisons le (1.6.4) pour considérer l'opérateur

$$\Lambda : C([0, T], X) \longrightarrow C([0, T], K) \subset C([0, T], X) \quad (1.6.19)$$

défini par l'égalité

$$\Lambda(\eta) = u_\eta \quad \forall \eta \in C([0, T], X) \quad (1.6.20)$$

Nous avons le résultat du point fixe suivant.

Lemme 1.6.5. *L'opérateur Λ admet un unique point fixe $\eta^* \in C([0, T], K)$.*

Démonstration. Soit $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T], X)$ et soit y_i une fonction définie par (1.6.14) pour $\eta = \eta_i$, i.e. $y_i = y_{\eta_i}$, pour $i = 1, 2$. Nous notons aussi par u_i la solution de l'inégalité variationnelle (1.6.15) for $\eta = \eta_i$, i.e. $u_i = u_{\eta_i}$, $i = 1, 2$. Let $t \in [0, T]$. De la définition (1.6.20) nous avons

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X = \|u_1(t) - u_2(t)\|_X. \quad (1.6.21)$$

De plus, un argument similaire pour cela dans la preuve de (1.6.18) montre que

$$m\|u_1(t) - u_2(t)\|_X \leq \|y_1(t) - y_2(t)\|_X. \quad (1.6.22)$$

Puis, nous utilisons (1.6.14) et la propriété (1.6.9) de l'opérateur \mathcal{S} pour voir que

$$\|y_1(t) - y_2(t)\|_X = \|\mathcal{S}\eta_1(t) - \mathcal{S}\eta_2(t)\|_X \leq L_S \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_X ds. \quad (1.6.23)$$

et, utilisant cette inégalité dans (1.6.22) on a

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_X \leq \frac{L_S}{m} \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_X ds. \quad (1.6.24)$$

Combinons maintenant (1.6.21) and (1.6.24) pour voir que

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X \leq \frac{L_S}{m} \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_X ds. \quad (1.6.25)$$

Finalement, utilisons (1.6.25) et la Proposition (1.6.1) on obtient que l'opérateur Λ admet un unique point fixe $\eta^* \in C([0, T], X)$,

Puisque Λ admet ses valeurs sur $C([0, T], K)$, on déduit que $\eta^* \in C([0, T], K)$, ce qui conclut la preuve. \square

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour démontrer le Théorème (1.6.3).

Démonstration. Existence. Soit $\eta^* \in C([0, T], K)$ un point fixe de l'opérateur Λ , i.e. $\Lambda\eta^* = \eta^*$. Il résulte de (1.6.14) et de (1.6.20) que, pour tout $t \in [0, T]$, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$y_{\eta^*} = \mathcal{S}\eta^*(t), \quad u_{\eta^*} = \eta^*(t) \quad (1.6.26)$$

Nous écrivons l'égalité (1.6.15) pour $\eta = \eta^*$ et, puis utilisons les égalités (1.6.26) pour conclure que la fonction $\eta^* \in C([0, T], K)$ est solution de l'inégalité quasi-variationnelle (1.6.6).

Unicité. L'unicité est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ qui peut être prouvé comme suit. Notons par $\eta^* \in C([0, T], K)$ la solution de l'inégalité quasi-variationnelle (1.6.6) obtenue en haut, et soit $\eta \in C([0, T], K)$ une solution de cette inégalité. aussi, considérons la fonction $y_\eta \in C([0, T], X)$ définie par (1.6.14). alors, il s'ensuit de (1.6.6) que η est une solution de l'inégalité quasi-variationnelle (1.6.15) et, puisque d'après le Lemme (1.6.4) cette inégalité admet une unique solution, notée u_η , nous concluons

$$\eta = u_\eta \quad (1.6.27)$$

L'égalité (1.6.27) montre que $\Lambda\eta = \eta$ où Λ est l'opérateur défini par (1.6.20) il s'ensuit que $\eta = \eta^*$, qui conclut la première partie de la preuve de l'unicité.

Une directe preuve de la partie de l'unicité peut être obtenue en utilisant le Lemme de Gronwall comme ci-après. Supposons que u_1, u_2 sont deux solutions de l'inégalité variationnelle (1.6.6) avec la régularité $C([0, T], K)$ et soit $t \in [0, T]$. Utilisons (1.6.6) pour voir que

$$\begin{aligned} & (Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t))_X \\ & \leq (\mathcal{S}u_1(t), u_2(t))_X - (\mathcal{S}u_1(t), u_1(t))_X \\ & \quad + (\mathcal{S}u_2(t), u_1(t))_X - (\mathcal{S}u_1(t), u_2(t))_X \\ & = (\mathcal{S}u_2(t) - \mathcal{S}u_1(t), u_1(t) - u_2(t))_X \end{aligned}$$

alors, en utilisant les assertions (1.6.8) on a

$$m\|u_1(t) - u_2(t)\|_X^2 \leq \|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\|_X \|u_1(t) - u_2(t)\|_X.$$

Nous appliquons cette inégalité et assertion (1.6.9) sur l'opérateur \mathcal{S} on trouve

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_X \leq \frac{L_S}{m} \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds.$$

On utilise le Lemme (1.6.2) on voit que $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t \in [0, T]$, ce qui donne la conclusion de la deuxième partie de l'unicité du théorème. \square

Nous terminons cette section avec les conséquences suivantes du Théorème (1.6.3).

Corollaire 1.6.5.1. *Soit X un espace de Hilbert et supposons que (1.6.8)-(1.6.10) est vérifiée. Alors il existe une unique fonction $u \in C([0, T], X)$ telle que*

$$(Au(t), v)_X + (\mathcal{S}u(t), v)_X = (f(t), v)_X \quad \forall v \in [0, T]. \quad (1.6.28)$$

Démonstration. Considérons le problème de trouver une fonction $u \in C([0, T], X)$ telle que

$$\begin{aligned} (Au(t), w - u(t))_X + (\mathcal{S}u(t), w - u(t))_X \\ \geq (f(t), w - u(t))_X \quad \forall w \in X, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (1.6.29)$$

Supposons que (1.6.29) est vraie et soit $v \in X$ et $t \in [0, T]$. On prend successivement $w = u(t) \mp v$ dans (1.6.29) on obtient

$$\begin{aligned} (Au(t), v)_X + (\mathcal{S}u(t), v)_X &\geq (f(t), v)_X \\ (Au(t), v)_X + (\mathcal{S}u(t), v)_X &\leq (f(t), v)_X \end{aligned}$$

qui montre que (1.6.28) est vérifiée, aussi. Contrairement, supposons (1.6.28) est vraie et soient $w \in X$ et $t \in [0, T]$. On pose $v = w - u(t)$ dans (1.6.28) on obtient (1.6.29). Nous concluons de ce qui précède que l'égalité variationnelle (1.6.28) est équivalente à l'inégalité variationnelle du Théorème (1.6.3) qui garantit l'unique solvabilité de l'inégalité variationnelle (1.6.29). \square

1.7 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

1.7.1 Définition

Définition 1.7.1. Soit X un espace de Banach et soit $(S(t))_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires continus sur X . $S(t)$ est un C_0 -semigroupe si

- 1) $S(0) = Id$
- 2) pour tout $t, s \geq 0$, $S(t+s) = S(t)S(s)$
- 3) pour tout $x \in X$, $t \mapsto S(t)x$ est une forme continue \mathbb{R}_+ dans X . On dit que $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est un C_0 -semi-groupe si ces propriétés sont vérifiées pour tout t et s négatifs. On parle de semi-groupe de contraction si $S(t)$ est une contraction pour tout $t \geq 0$ et de semi-groupe compact si $S(t)$ est compact pour tout $t > 0$. On dit que le semi-groupe est uniformément continu si $S(t)$ tend vers I sur $\mathcal{L}(X)$ quand $t \rightarrow 0$.

La définition donne les propriétés caractéristiques d'un semi-groupe, directement.

Proposition 1.7.2. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe, il existe $M > 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \geq 0, \quad \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\lambda t}. \quad (1.7.1)$$

Démonstration. Pour tout $x \in X$, $(S(t)x)_{t \in [0,1]}$ est borné dans X . Du Théorème de Banch-Stanhaus, la famille $(S(t)x)_{t \in [0,1]}$ est bornée dans $\mathcal{L}(X)$ par $M \geq 1$. Pour tout $t \geq 0$, soit $n = [t]$ nous avons

$$\|S(1)S(1)S(1)\dots S(1)S(t-n)\| \leq MM^t = Me^{t \ln M}. \quad (1.7.2)$$

□

Exemple : Matrice Exponentielle

Soit A un opérateur linéaire, continu sur X ; On peut définir

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S(t) = e^{At} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k. \quad (1.7.3)$$

Les propriétés de l'exponentiel montrent que $S(t)$ est semi-groupe uniformément continu. De plus, $S(t)$ est différentiable et

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax. \quad (1.7.4)$$

Autrement dit, $S(t)$ est le flo correspondant à l'équation différentielle $u'(t) = Au(t)$.

1.7.2 Générateur infinitésimal

On s'inspire de l'exemple ci-dessus pour écrire tout semi-groupe, sous la forme d'un exponentiel d'un opérateur.

Définition 1.7.3. Un opérateur linéaire A défini par

$$Av = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)v - v}{t}, \quad (1.7.5)$$

dont le domaine de définition est donné par

$$D(A) = \left\{ x \in X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)v - v}{t} \text{ existe dans } X \right\}, \quad (1.7.6)$$

est appelé opérateur infinitésimal de la famille de semi-groupes $(S(t))_{t \geq 0}$.

Proposition 1.7.4. Soit $S(t)$ un C_0 -semi-groupe généré par A , alors

1) $u_0 \in X, \int_0^t S(s)u_0 \in D(A)$, et

$$A \left(\int_0^t S(\tau)u_0 d\tau \right) = S(t)u_0 - u_0. \quad (1.7.7)$$

2) Si $u_0 \in D(A)$, alors $S(t)u_0 \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$, $S(t)u_0$ est de classe C^1 et

$$\frac{d}{dt} S(t)u_0 = AS(t)u_0 = S(t)Au_0. \quad (1.7.8)$$

1.7.3 Le théorème de Hille-Yosida et Lumer-Philips

Théorème 1.7.5. (Hille Yosida) Un opérateur linéaire A est un générateur infinitésimal du semi-groupe $S(t)$ sur X satisfaisant $\|S(t)\| \leq e^{wt}$ avec $w \in \mathbb{R}$ si et seulement si

- 1) A est fermé de domaine $D(A)$ dense
- 2) $\rho(A) \supset]w, +\infty[$, où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A et

$$\forall \lambda \in]w, +\infty[, \quad \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - w}.$$

Opérateur dissipative et le théorème de Lumer-Phillips Soit X un espace Banach (réel ou complexe) et soit X^* son dual. Du Théorème Hahn-Banach, pour tout $x \in X$ il existe $x^* \in X^*$ satisfaisant

$$\langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2.$$

Alors l'ensemble de dualité

$$\mathcal{J} = \{x^* \in X^*; \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

est non vide pour tout $x \in X$.

Définition 1.7.6. On dit que l'opérateur $(A, D(A))$ est dissipative si pour tout $x \in D(A)$ il y a $x^* \in \mathcal{J}$ tel que

$$\mathcal{R}\langle x^*, Ax \rangle \leq 0. \quad (1.7.9)$$

Si X est un espace réel, alors la partie réelle dans la définition ci-dessus peut être ignorée.

Théorème 1.7.7. *Un opérateur linéaire A est dissipative si et seulement si pour tout $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$,*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|. \quad (1.7.10)$$

Théorème 1.7.8. *(Lumer-Phillips) soit A un opérateur linéaire à domaine dense $D(A)$ dans X .*

- 1) *Si A est dissipative et il existe λ_0 tel que $\lambda_0 I - A$ est surjective, alors A est un générateur infinitésimal de C_0 -semi-groupe de contractions dans X .*
- 2) *Si A est le générateur du C_0 -semi-groupe de contractions sur X , alors $\lambda I - A$ est surjective pour tout $\lambda > 0$ et il est dissipative. De plus, pour tout $x \in D(A)$ et tout $x^* \in \mathcal{J}$ nous avons $\mathcal{R}\langle x^*, Ax \rangle \leq 0$.*

1.8 Le théorème de Hille-Yosida

1.8.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 1.8.1. Un opérateur non borné $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ est dit monotone ou acréatif ou, $(-A)$ est dissipative, si

$$(Av, v) \geq 0 \quad \forall v \in D(A).$$

A est dit maximal monotone si de plus, $R(I + A) = X$, i.e.,

$$\forall f \in X \quad \exists u \in D(A) \text{ such that } u + Au = f.$$

Proposition 1.8.2. *Soit A un opérateur maximal monotone. Alors*

- (a) $D(A)$ est dense dans X ,
- (b) A est un opérateur fermé,
- (c) pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ est bijective de $D(A)$ sur X , $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur borné, et $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$.

Remarque 1.8.3. Soit A un opérateur maximal monotone alors λA est aussi maximal monotone pour tout $\lambda > 0$. Toutefois, si A et B sont deux opérateurs maximaux monotones, alors $A + B$, défini sur $D(A) \cap D(B)$, n'est pas nécessairement maximal monotone.

Définition 1.8.4. Soit A un opérateur maximal monotone. on pose pour tout $\lambda > 0$

$$\boxed{J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \quad \text{and} \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)} \quad (1.8.1)$$

J_λ est la résolvante de A , et A_λ est la régularisée de Yosida de A . On retiendra que $\|J_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$.

Proposition 1.8.5. *Soit A un opérateur maximal monotone. Alors*

- (a₁) $A_\lambda v = A(J_\lambda v) \quad \forall v \in X \text{ and } \forall \lambda > 0,$
- (a₂) $A_\lambda v = J_\lambda(Av) \quad \forall v \in D(A) \text{ and } \forall \lambda > 0,$
- (b) $|A_\lambda v| = |Av| \quad \forall v \in D(A) \text{ and } \forall \lambda > 0,$
- (c) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda v = v \quad \forall v \in X,$
- (d) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A_\lambda v = Av \quad \forall v \in D(A),$
- (e) $(A_\lambda v, v) \geq 0 \quad \forall v \in X \text{ and } \forall \lambda > 0,$
- (f) $|A_\lambda v| \geq 0 \quad \forall v \in X \text{ and } \forall \lambda > 0.$

Remarque 1.8.6. La proposition (1.8.5) implique que $(A_\lambda)_\lambda$ est une famille d'opérateurs bornés qui "approchent" l'opérateur *non borné* A quand $\lambda \rightarrow 0$. Cette approximations sera beaucoup utilisée; Bien entendu, $\|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)}$ "explose" quand $\lambda \rightarrow 0$.

1.8.2 Le théorème de Hille-Yosida dans les espaces de Banach

Le théorème de Hille-Yosida s'étend aux espaces de Banach sous la forme suivante. Soit E un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur non borné. On dit que A est *m-acréatif* si $\overline{D(A)} = E$ et si pour tout $\lambda > 0$, $I + \lambda A$ est bijectif $D(A)$ sur E avec $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$.

Théorème 1.8.7. (Hille-Yosida). *Soit A m -accrétif. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction*

$$u \in C^1([0, +\infty); E) \cap C([0, +\infty); D(A))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0 & \text{sur } [0, +\infty), \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (1.8.2)$$

De plus,

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \quad \text{and} \quad \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\| \quad \forall t \geq 0.$$

La démonstration peut être trouvée dans [17]. L'application $u_0 \mapsto u(t)$ prolongée par continuité sur E tout entier est notée $S_A(t)$. c'est un semi-groupe continu de contractions sur E . Réciproquement, étant donné un semi-groupe continu de contractions $S(t)$, il existe un opérateur m -accrétif A tel que $S(t) = S_A(t) \quad \forall t \geq 0$. La démonstration peut être trouvée dans P. Lax, A. Pazy,

Première partie

Problèmes de Transmission

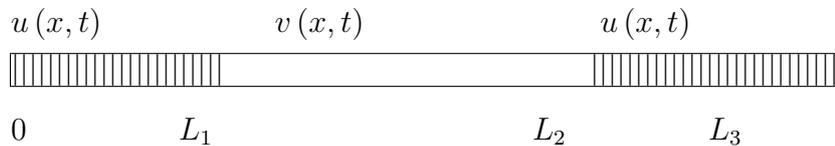
Décroissance des équations des ondes de transmission avec retard

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons un problème de transmission avec un terme de retard sous la forme

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - au_{xx}(x, t) + \mu_1 u_t(x, t) + \mu_2 u_t(x, t - \tau) = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ v_{tt}(x, t) - bv_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (L_1, L_2) \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (2.1.1)$$

tels que $0 < L_1 < L_2 < L_3$, $\Omega =]0, L_1[\cup]L_2, L_3[$, a, b, μ_1 et μ_2 sont des constantes positives et $\tau > 0$ est le retard.



Le système (2.1.1) est soumis aux conditions de limites et de transmission suivantes :

$$\begin{cases} u(0, t) = u(L_3, t) = 0, \\ u(L_i, t) = v(L_i, t), & i = 1, 2 \\ au_x(L_i, t) = bv_x(L_i, t), & i = 1, 2 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Et aux condition initiales :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), & & x \in \Omega, t \in [0, \tau], \\ v(x, 0) = v_0(x), & v_t(x, 0) = v_1(x), & x \in]L_1, L_2[. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Pour $\mu_2 = 0$, le système (2.1.1)-(2.1.3) a été examiné dans [8], pour $\Omega = [0, L_1]$ les auteurs ont montré l'existence et la stabilité exponentielle de l'énergie totale. Muñoz Rivera et Oquendo [82] ont étudié les propagations d'onde sur une substance comprenant une partie élastique et une autre partie visco-élastique, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - \alpha_1 u_{xx} = 0, & x \in]0, L_0[, t > 0, \\ \rho_2 v_{tt} - \alpha_2 v_{xx} + \int_0^t g(t-s) v_{xx}(s) ds = 0, & x \in]L_0, L[, t > 0, \end{cases} \quad (2.1.4)$$

avec les conditions aux limites et initiales suivantes

$$\begin{cases} u(0, t) = v(L, t) = 0, & u(L_0, t) = v(L_0, t), & t > 0, \\ \alpha_1 u_x(L_0, t) = \alpha_2 v_x(L_0, t) - \int_0^t g(t-s) v_x(s) ds, & & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in [0, L_0], \\ v(x, 0) = v_0(x), & v_t(x, 0) = v_1(x), & x \in [L_0, L], \end{cases} \quad (2.1.5)$$

tels que ρ_1 et ρ_2 sont les densités des matériels et α_1, α_2 sont les coefficients élastiques et g est une fonction positive décroissant exponentiellement. Ils ont montré que la dissipation produite par la partie visco-élastique est suffisante pour générer une décroissance exponentielle pour la solution, quelque soit la petitesse de sa valeur. Ma et Oquendo [70] ont considéré un transmission de transmission problem impliquant deux équations d' Euler–Bernoulli modélisant la vibration d'une poutre composée. En utilisant, uniquement, l'amortissement d'un seul terme au bord, ils ont montré l'existence globale et la propriété de décroissance de la solution. Marzocchi et al. [73] ont examiné un problème de transmission uni-dimensionnel semi-linéaire de thermos-élasticité classique pour lequel ils ont montré que la combinaison de la première, et la troisième énergies de la solution décroît exponentiellement vers zéro quelque soit la petitesse de l'amortissement. Un même résultat a été montré par Messaoudi et Said-Houari [79], où un problème de transmission thermos-élastique de type III a été examiné. Voir aussi Marzocchi et al. [74] pour un problème de transmission thermos-élastique multidimensionnel linéaire.

Pour $\mu_2 > 0$, le problème (2.1.1) contient un terme de retard avec feedback interne. Ce terme de retard peut générer une déstabilisation du système (2.1.1)-(2.1.3) qui est exponentiellement décroissant en l'absence de retards [8]. L'effet du retard sur la stabilité des systèmes hyperboliques avait été examiné par plusieurs chercheurs. Voir par exemple [31, 32]. Dans [84] les auteurs ont examiné un système d'équation d'ondes avec un terme d'amortissement au bord avec retard :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) = 0, & x \in \Gamma_0, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = \mu_1 u_t(x, t) + \mu_2 u_t(x, t - \tau), & x \in \Gamma_1, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x, t - \tau) = g_0(x, t - \tau), & x \in \Omega, \tau \in (0, 1), \end{array} \right. \quad (2.1.6)$$

et ils ont prouvé, sous les hypothèses

$$\mu_2 < \mu_1 \quad (2.1.7)$$

que la solution est exponentiellement stable. Par contre, si (2.1.7) n'est pas vérifiée, ils ont trouvé qu'une série de retards pour les quelles la solution qui correspond au (2.1.6) sera instable. Nous rappelons aussi obtenu par Xu *et al.* [106], dans lequel les auteurs ont prouvé le même résultat comme en [84] pour un espace d'une seule dimension en adoptant l'approche de l'analyse spectrale.

Le but de ce chapitre de cette partie de ce travail est d'étudier et prouver l'existence de la solution et, la stabilité asymptotique du système (2.1.1)-(2.1.3) en envisageant que (2.1.7) est satisfaite. Le chapitre est organisé comme suit. L'existence de la solution est analysée dans la section 2.2 par deux méthodes. On utilise dans la première la méthode d'approximation de Galarkin, dans la deuxième méthode on utilise la théorie des semi-groupes. Dans la Section 2.3, nous prouvons la décroissance exponentielle quand le temps tend vers l'infini.

2.2 Existence et unicité de la solution

2.2.1 Première méthode : Méthode de Galerkin

L'existence de la solution

Nous commençons tout d'abord par la recherche de formulation variationnelle du problème. Soit $\varphi \in H^1(\Omega)$ et $\psi \in H^1(L_1, L_2)$. Multiplions la première équation de (2.1.1) par φ et la deuxième équation par ψ , puis intégrons la première équation obtenue sur Ω et la deuxième équation sur $]L_1, L_2[$, on obtient

$$\int_{\Omega} u_{tt}(x, t) \varphi dx - a \int_{\Omega} u_{xx}(x, t) \varphi dx + \mu_1 \int_{\Omega} u_t(x, t) \varphi dx + \mu_2 \int_{\Omega} u_t(x, t - \tau) \varphi dx = 0,$$

and

$$\int_{L_1}^{L_2} v_{tt}(x, t) \psi dx - b \int_{L_1}^{L_2} v_{xx}(x, t) \psi dx = 0.$$

Utilisons une intégration par parties avec l'application de la formule de Green, il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_{tt}(x, t) \varphi dx + a \int_{\Omega} u_x(x, t) \varphi_x dx - a [u_x(L_1, t) \varphi(L_1) - u_x(L_2, t) \varphi(L_2)] \\ & + \mu_1 \int_{\Omega} u_t(x, t) \varphi dx + \mu_2 \int_{\Omega} u_t(x, t - \tau) \varphi dx = 0, \\ & \int_{L_1}^{L_2} v_{tt}(x, t) \psi dx + b \int_{L_1}^{L_2} v_x(x, t) \psi_x dx - b [v_x(L_2, t) \psi(L_2) - v_x(L_1, t) \psi(L_1)] = 0. \end{aligned}$$

Considérons maintenant la fonction $\omega \in H_0^1(0, L_3)$ définie par $\omega = \begin{cases} u \text{ sur } \Omega, \\ v \text{ sur }]L_1, L_2[. \end{cases}$

Choisissons les fonctions test φ, ψ telles que $\begin{cases} \varphi(L_1) = \psi(L_1), \\ \varphi(L_2) = \psi(L_2). \end{cases}$

En faisant la somme des deux équations et en utilisant ces notations, le système précédent devient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \omega_{tt}(x, t) \varphi dx + a \int_{\Omega} \omega_x(x, t) \varphi_x dx + \mu_1 \int_{\Omega} \omega_t(x, t) \varphi dx \\ & \mu_2 \int_{\Omega} \omega_t(x, t - \tau) \varphi dx + \int_{L_1}^{L_2} \omega_{tt}(x, t) \psi dx + b \int_{L_1}^{L_2} \omega_x(x, t) \psi_x dx = 0. \end{aligned}$$

Donc la formulation variationnelle s'écrit

$$\int_{\Omega} \omega_{tt}(x, t) \varphi dx + a \int_{\Omega} \omega_x(x, t) \varphi_x dx + \mu_1 \int_{\Omega} \omega_t(x, t) \varphi dx$$

$$\mu_2 \int_{\Omega} \omega_t(x, t - \tau) \varphi dx + \int_{L_1}^{L_2} \omega_{tt}(x, t) \psi dx + b \int_{L_1}^{L_2} \omega_x(x, t) \psi_x dx = 0,$$

Avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega \\ u(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), & x \in \Omega, t \in [0, \tau] \\ v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), & x \in]L_1, L_2[\end{cases}$$

Résolution du problème variationnel

Soit $(e_j)_{j \geq 1}$ une base spéciale de $H_0^1(0, L_3)$, il existe une suite $(g_j)_{j \geq 1}$ telle que $\omega = \sum_{j=1}^{+\infty} g_j(t) e_{j(x)}$.

On approche w par la suite $(\omega_n)_{n \geq 1}$ définie par $\omega_n = \sum_{j=1}^n g_j e_j$ pour tout $n \geq 1$ et vérifiant l'équation variationnelle suivante

$$\int_{\Omega} (\omega_n)_{tt}(x, t) \varphi dx + a \int_{\Omega} (\omega_n)_x(x, t) \varphi_x dx + \mu_1 \int_{\Omega} (\omega_n)_t(x, t) \varphi dx$$

$$\mu_2 \int_{\Omega} (\omega_n)_t(x, t - \tau) \varphi dx + \int_{L_1}^{L_2} (\omega_n)_{tt}(x, t) \psi dx + b \int_{L_1}^{L_2} (\omega_n)_x(x, t) \psi_x dx = 0,$$

(2.2.1)

avec

$$\begin{cases} (u_n)(x, 0) = u_{n0}(x) \longrightarrow u_0(x), (u_n)_t(x, 0) = u_{n1}(x) \longrightarrow u_1(x), & x \in \Omega, \\ (u_n)(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), & x \in \Omega, t \in [0, \tau], \\ (v_n)(x, 0) = v_{n0}(x) \longrightarrow v_0(x), (v_n)_t(x, 0) = v_{n1}(x) \longrightarrow v_1(x), & x \in]L_1, L_2[. \end{cases}$$

(2.2.2)

Le système (2.2.1)-(2.2.2) est un système d'équations différentielles ordinaires qui possède, d'après la théorie classique des EDO, une solution locale sur $[0, t_n]$. pour quelques $t_n > 0$.

2.2. EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION

Multiplions l'équation (2.2.1) par $\frac{dg_j}{dt}$ et sommions sur $j = 1, \dots, n$. Alors, prenons $\varphi = \omega_t$ et $\psi = \omega_t$ et intégrons sur l'intervalle $(0, t)$, tel que $t \leq T \leq +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |(\omega_n)_t(x, t)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |(\omega_n)_t(x, 0)|^2 dx + \frac{a}{2} \int_{\Omega} |(\omega_n)_x(x, t)|^2 dx \\ & - \frac{a}{2} \int_{\Omega} |(\omega_n)_x(x, 0)|^2 dx + \mu_1 \int_0^t \int_{\Omega} |(\omega_n)_t(x, s)|^2 dx ds \\ & + \mu_2 \int_0^t \int_{\Omega} (\omega_n)_t(x, s - \tau) (\omega_n)_t(x, s) dx ds + \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} |(\omega_n)_t(x, t)|^2 dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} |(\omega_n)_t(x, 0)|^2 dx + \frac{b}{2} \int_{L_1}^{L_2} |(\omega_n)_x(x, t)|^2 dx \\ & - \frac{b}{2} \int_{L_1}^{L_2} |(\omega_n)_x(x, 0)|^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Alors, en utilisant l'inégalité de Poincaré suivante

Inégalité de Poincaré. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné. Il existe une constante positive C_{Ω} telle que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|\nabla u\|_{L(\Omega)^2}, \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|(\omega_n)_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|u_{n1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_0}{2} \|(\omega_n)_t(t)\|_{H_0^1(0, L_3)}^2 - \frac{a}{2} \int_{\Omega} |(\omega_n)_x(x, 0)|^2 dx \\ & + \mu_1 \int_0^t \|(\omega_n)_t(x, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \mu_2 \int_0^t \int_{\Omega} (\omega_n)_t(x, s - \tau) (\omega_n)_t(x, s) dx ds \\ & + \frac{1}{2} \|(\omega_n)_t(t)\|_{L^2(L_1, L_2)}^2 - \frac{1}{2} \|u_{n1}\|_{L^2(L_1, L_2)}^2 - \frac{b}{2} \int_{L_1}^{L_2} |(\omega_n)_x(x, 0)|^2 dx \leq 0, \end{aligned}$$

où $C_0 = \min(a, b)$

Par conséquent, on déduit

$$\begin{aligned}
 & \|(\omega_n)_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_0 \|(\omega_n)(t)\|_{H_0^1(0,L_3)}^2 + \|(v_n)_t(t)\|_{L^2(L_1,L_2)}^2 + 2\mu_1 \int_0^t \|(u_n)_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
 & \leq \|u_{n1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_{n1}\|_{L^2(L_1,L_2)}^2 + \|u_{n0}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\
 & + \|v_{n0}\|_{H^1(L_1,L_2)}^2 - 2\mu_2 \int_0^t \int_{\Omega} (\omega_n)_t(x, s - \tau) (\omega_n)_t(x, s) dx ds.
 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \int_{\Omega} (\omega_n)_t(x, s - \tau) (\omega_n)_t(x, s) dx ds &= \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (u_n)_t(x, s - \tau) (u_n)_t(x, s) dx ds \\
 &+ \int_{\tau}^t \int_{\Omega} (u_n)_t(x, s - \tau) (u_n)_t(x, s) dx ds \\
 &= \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (f_0)_t(x, s - \tau) (u_n)_t(x, s) dx ds \\
 &+ \int_{\tau}^t \int_{\Omega} (u_n)_t(x, s - \tau) (u_n)_t(x, s) dx ds.
 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Faisons dans la première intégrale du deuxième membre de l'équation (2.2.4) le changement de variable $\alpha = s - \tau$ on aura :

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \int_{\Omega} (\omega_n)_t(x, s - \tau) (\omega_n)_t(x, s) dx ds &= \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (u_n)_t(x, s - \tau) (u_n)_t(x, s) dx ds \\
 &+ \int_{\tau}^t \int_{\Omega} (u_n)_t(x, s - \tau) (u_n)_t(x, s) dx ds \\
 &= \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (f_0)_t(x, s - \tau) (u_n)_t(x, s) dx ds + \int_0^{t-\tau} \int_{\Omega} u_t(x, \alpha) (u_n)_t(x, \alpha + \tau) dx d\alpha \\
 &\leq \int_0^{\tau} \|(f_0)_t(s - \tau)\|_{L^2(\Omega)} \|(u_n)_t(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\
 &+ \int_0^{t-\tau} \|(u_n)_t(\alpha)\|_{L^2(\Omega)} \|(u_n)_t(\alpha + \tau)\|_{L^2(\Omega)} d\alpha
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\tau \|(f_0)_t(s - \tau)\|_{L^2(\Omega)} \|(u_n)_t(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\
 & \quad + \int_0^{t-\tau} \|(u_n)_t(\alpha)\|_{L^2(\Omega)} \|(u_n)_t(\alpha + \tau)\|_{L^2(\Omega)} d\alpha \\
 & \leq \left(\|(f_0)_t(s - \tau)\|_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\tau \|(u_n)_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad + \int_0^t \|(u_n)_t(\alpha)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\alpha
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder une deuxième fois nous avons

$$\begin{aligned}
 & \left(\|(f_0)_t(s - \tau)\|_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\tau \|(u_n)_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t \|(u_n)_t(\alpha)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\alpha \\
 & \leq \left(\|(f_0)_t(s - \tau)\|_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\tau \|(u_n)_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad + \left(\int_0^t d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|(u_n)_t(\alpha)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young on déduit

$$\begin{aligned}
 & \left(\|(f_0)_t(s - \tau)\|_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\tau \|(u_n)_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad + \left(\int_0^t d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|(u_n)_t(\alpha)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq c \|(f_0)_t\|_{L^2(\Omega \times [0, \tau])} + c \int_0^\tau \|(u_n)_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + c. \tag{2.2.5}
 \end{aligned}$$

Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites

$$\begin{cases} u_1 \in L^2(\Omega), \\ v_1 \in L^2(L_1, L_2), \\ u_0 \in H^1(\Omega), \\ v_0 \in H^1(L_1, L_2), \\ (f_0)_t \in L^2(\Omega \times [0, \tau]). \end{cases} \tag{2.2.6}$$

De (2.2.1), (2.2.5) et (2.2.6), on déduit

$$\begin{aligned} \|(u_n)_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_0 \|(\omega_n)(t)\|_{H_0^1(0,L_3)}^2 + \|(v_n)_t(t)\|_{L^2(L_1,L_2)}^2 + 2\mu_1 \int_0^t \|(u_n)_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ \leq c + c \int_0^t \|(u_n)_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

En particulier,

$$\|(u_n)_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c + c \int_0^t \|(u_n)_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

L'utilisation du lemme de Gronwall donne

$$\|(u_n)_t(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq c. \quad (2.2.8)$$

Donc, de (2.2.7) et (2.2.8), on obtient pour tout $t \leq t_n$

$$\begin{aligned} (u_n) &\in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \\ (u_n)_t &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ (v_n) &\in L^\infty(0, T; H^1(L_1, L_2)), \\ (v_n)_t &\in L^\infty(0, T; L^2(L_1, L_2)). \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

La solution peut être prolongeable à l'intervalle $[0, T]$ où $0 \leq t \leq t_n \leq T \leq +\infty$.

D'après (2.2.9) on peut extraire une sous-suite encore notée (u_n) de sorte que :

$$\begin{aligned} (u_n) &\longrightarrow u \quad \text{sur } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) && \text{faible étoile,} \\ (u_n)_t &\longrightarrow u_t \quad \text{sur } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) && \text{faible étoile,} \\ (v_n) &\longrightarrow v \quad \text{sur } L^\infty(0, T; H^1(L_1, L_2)) && \text{faible étoile,} \\ (v_n)_t &\longrightarrow v_t \quad \text{sur } L^\infty(0, T; L^2(L_1, L_2)) && \text{faible étoile.} \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de déduire l'existence d'une solution (u, v) pour le système (2.1.1)-(2.1.3) ayant la régularité

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \\ u_t &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ v &\in L^\infty(0, T; H^1(L_1, L_2)), \\ v_t &\in L^\infty(0, T; L^2(L_1, L_2)). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

2.2.2 Deuxième méthode : La théorie des semi-groupes

Dans cette section, nous prouvons l'existence locale et l'unicité de la solution du système (2.1.1)-(2.1.3) en utilisant la théorie des semi-groupes. On introduit une nouvelle variable définie comme suit : [84]

$$y(x, \rho, t) = u_t(x, t - \tau\rho). \quad (2.2.11)$$

On en tire

$$\tau y_t(x, \rho, t) + y_\rho(x, \rho, t) = 0, \quad \text{in } \Omega \times (0, 1) \times (0, +\infty). \quad (2.2.12)$$

Alors, le problème (2.1.1) devient équivalent à

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - au_{xx}(x, t) + \mu_1 u_t(x, t) + \mu_2 y(x, 1, t) = 0, & (x, t) \in \Omega \times]0, +\infty[, \\ v_{tt}(x, t) - bv_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in]L_1, L_2[\times]0, +\infty[, \\ \tau y_t(x, \rho, t) + y_\rho(x, \rho, t) = 0, & \text{in } \Omega \times (0, 1) \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (2.2.13)$$

qui, avec (2.1.3) peut être écrits sous la forme :

$$\begin{cases} U' = \mathcal{A}U, \\ U(0) = (u_0, v_0, u_1, v_1, f_0(\cdot, -\cdot\tau))^T, \end{cases} \quad (2.2.14)$$

tels que l'opérateur \mathcal{A} est défini par

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \\ \psi \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ au_{xx} - \mu_1 \varphi - \mu_2 y(\cdot, 1) \\ bv_{xx} \\ -\frac{1}{\tau} y_\rho \end{pmatrix}, \quad (2.2.15)$$

avec le domaine

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ (u, v, \varphi, \psi, y)^T \in \mathcal{H}; \quad y(\cdot, 0) = \varphi \text{ on } \Omega \right\},$$

tels que

$$\mathcal{H} = \left\{ (H^2(\Omega) \times H^2(L_1, L_2)) \cap X_* \right\} \times H^1(\Omega) \times H^1(L_1, L_2) \times L^2(0, 1, H^1(\Omega)).$$

L'espace X_* est donné par :

$$X_* = \left\{ \begin{array}{l} (u, v) \in H^1(\Omega) \cap H^1(L_1, L_2) | u(0, t) = u(L_3, t) = 0, \\ u(L_i, t) = v(L_i, t), au_x(L_i, t) = bv_x(L_i, t), i = 1, 2 \end{array} \right\}$$

On définit l'espace énergie par :

$$\mathcal{H} = X_* \times L^2(\Omega) \times L^2(L_1, L_2) \times L^2((\Omega) \times (0, 1)).$$

Soit

$$U = (u, v, \varphi, \psi, y)^T, \quad \bar{U} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{y})^T.$$

Alors, pour une constante positive ζ satisfaisant

$$\tau\mu_2 \leq \zeta \leq \tau(2\mu_1 - \mu_2), \quad (2.2.16)$$

définissons le produit scalaire sur \mathcal{H} comme suit :

$$(U, \bar{U})_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \{\varphi\bar{\varphi} + au_x\bar{u}_x\}dx + \int_{L_1}^{L_2} \{\psi\bar{\psi} + bv_x\bar{v}_x\}dx + \zeta \int_{\Omega} \int_0^1 y(x, \rho)\bar{y}(x, \rho)d\rho dx$$

Le résultat de l'existence et de l'unicité est donné par ce qui suit ;

Théorème 2.2.1. *Pour tout $U_0 \in \mathcal{H}$ il existe une solution unique $U \in C([0, +\infty[, \mathcal{H})$ pour le problème (2.2.14). De plus, si $U_0 \in D(\mathcal{A})$, alors*

$$U \in C([0, +\infty[, D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, +\infty[, \mathcal{H}).$$

Démonstration. Pour arriver à prouver le résultat cité dans le Théorème 2.2.1, nous utilisons la théorie des semi-groupes, c'est-à-dire, nous montrons que l'opérateur \mathcal{A} génère un C_0 -semi-groupe sur \mathcal{H} . Dans cette étape, nous nous préoccupons de prouver que l'opérateur \mathcal{A} est dissipative. Effectivement, pour $U = (u, \varphi, v, \psi, y)^T \in D(\mathcal{A})$, tels que $\varphi(L_2) = \psi(L_2)$ et ζ est une constante positive, nous avons

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} &= a \int_{\Omega} u_{xx}\varphi dx + b \int_{L_1}^{L_2} v_{xx}\psi dx - \mu_1 \int_{\Omega} \varphi^2 dx \\ &\quad - \mu_2 \int_{\Omega} y(\cdot, 1)\varphi dx - \frac{\zeta}{\tau} \int_{\Omega} \int_0^1 y(x, \rho)y_{\rho}(x, \rho)d\rho dx \\ &\quad + a \int_{\Omega} u_x\varphi_x dx + b \int_{L_1}^{L_2} v_x\psi_x dx \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Regardons maintenant le dernier terme de la partie droite de (2.2.17), nous avons

$$\begin{aligned} \zeta \int_{\Omega} \int_0^1 y(x, \rho) y_{\rho}(x, \rho) d\rho dx &= \zeta \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} y^2(x, \rho) d\rho dx \\ &= \frac{\zeta}{2} \int_{\Omega} (y^2(x, 1) - y^2(x, 0)) dx. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Effectuons une intégration par partie dans (2.2.17), tenons en compte le fait que $y(x, 0, t) = \varphi(x, t)$ et en utilisant (2.2.18), alors de (2.2.17) nous avons

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{X}} &= a[u_x \varphi]_{\partial \Omega} + b[v_x \psi]_{L^1}^2 \\ &\quad - \left(\mu_1 - \frac{\zeta}{2\tau} \right) \int_{\Omega} \varphi^2 dx - \mu_2 \int_{\Omega} y(\cdot, 1) \varphi dx - \frac{\zeta}{2\tau} \int_{\Omega} y^2(x, 1) dx. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

En utilisant l'inégalité de Young et, (2.1.2) et l'égalité $\varphi(L_2) = \psi(L_2)$, on obtient de (2.2.19), que

$$(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{X}} \leq - \left(\mu_1 - \frac{\zeta}{2\tau} - \frac{\mu_2}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi^2 dx - \left(\frac{\zeta}{2\tau} - \frac{\mu_2}{2} \right) \int_{\Omega} y^2(x, 1) dx. \quad (2.2.20)$$

Par conséquent, en utilisant (2.2.16), on déduit que $(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{X}} \leq 0$. D'où, l'opérateur \mathcal{A} est dissipative.

Maintenant, pour montrer que l'opérateur \mathcal{A} est maximal monotone, il est suffisant de montrer que l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjective pour un $\lambda > 0$ fixé. En effet, soit $(f_1, f_2, g_1, g_2, h)^T \in \mathcal{X}$, nous cherchons $U = (u, v, \varphi, \psi, y)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de

$$\begin{pmatrix} \lambda u - \varphi \\ \lambda v - \psi \\ \lambda \varphi - a u_{xx} + \mu_1 y(\cdot, 0) + \mu_2 y(\cdot, 1) \\ \lambda \psi - b v_{xx} \\ \lambda y + \frac{1}{\tau} y_{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \\ f_2 \\ g_2 \\ h \end{pmatrix} \quad (2.2.21)$$

supposons qu'on a trouvé (u, v) avec une régularité convenable, alors

$$\begin{aligned} \varphi &= \lambda u - f_1 \\ \psi &= \lambda v - g_1. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Il est clair que $\varphi \in H^1(\Omega)$ et $\psi \in H^1(L_1, L_2)$, en outre, de (2.2.21), on peut trouver y tel que $y(x, 0) = \varphi(x)$, $x \in \Omega$, utilisons l'approche utilisée par Nicaise & Pignotti [84], en utilisant l'équation de (2.2.21), on obtient

$$y(x, \rho) = \varphi(x) e^{-\lambda \rho \tau} + \tau e^{-\lambda \rho \tau} \int_0^{\rho} h(x, \sigma) e^{\lambda \sigma \tau} d\sigma$$

De (2.2.22), on obtient

$$y(x, \rho) = \lambda u(x)e^{-\lambda\rho\tau} - f_1(x)e^{-\lambda\rho\tau} + \tau e^{-\lambda\rho\tau} \int_0^\rho h(x, \sigma)e^{\lambda\sigma\tau} d\sigma$$

En utilisant (2.2.21) et (2.2.22), les fonctions u, v satisfait les equations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda^2 u - au_{xx} + \mu_1 y(\cdot, 0) + \mu_2 y(\cdot, 1) &= f_2 + \lambda f_1 \\ \lambda^2 v - bv_{xx} &= g_2 + \lambda g_1 \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Puisque

$$\begin{aligned} y(x, 1) &= \varphi(x)e^{-\lambda\tau} + \tau e^{-\lambda\tau} \int_0^1 h(x, \sigma)e^{\lambda\sigma\tau} d\sigma \\ &= \lambda u e^{-\lambda\tau} + y_0(x), \end{aligned}$$

for $x \in \Omega$, nous avons

$$y_0(x) = -f_1(x) + \tau e^{-\lambda\tau} \int_0^1 h(x, \sigma)e^{\lambda\sigma\tau} d\sigma \quad (2.14)$$

Le problème (2.2.23) peut être reformulé comme suit

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (\lambda^2 u - au_{xx} + \mu_1 \lambda u + \mu_2 \lambda u e^{-\lambda\tau}) \omega_1 dx \\ &= \int_{\Omega} (f_2 + \lambda f_1 - \mu_2 \lambda y_0(x)) \omega_1 dx, \\ &\int_{L_1}^{L_2} (\lambda^2 v - bv_{xx}) \omega_2 dx \\ &= \int_{L_1}^{L_2} (g_2 + \lambda g_1) \omega_2 dx, \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

for any $(\omega_1, \omega_2) \in X_*$.

Intégrons la première équation de (2.2.24) par partie, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (\lambda^2 u - au_{xx} + \mu_1 u + \mu_2 \lambda u e^{-\lambda\tau}) \omega_1 dx \\ &= \int_{\Omega} \lambda^2 u \omega_1 dx - a \int_{\Omega} u_{xx} \omega_1 dx + \mu_1 \int_{\Omega} \lambda u dx + \mu_2 \int_{\Omega} \lambda u e^{-\lambda\tau} \omega_1 dx \\ &= \int_{\Omega} \lambda^2 u \omega_1 dx + a \int_{\Omega} u_x (\omega_1)_x dx - [au_x \omega_1]_{\partial\Omega} + \mu_1 \int_{\Omega} \lambda u dx + \mu_2 \int_{\Omega} \lambda u e^{-\lambda\tau} \omega_1 dx \\ &= \int_{\Omega} (\lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_2 \lambda e^{-\lambda\tau}) u \omega_1 dx + a \int_{\Omega} u_x (\omega_1)_x dx - [au_x \omega_1]_{\partial\Omega} \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Intégrons la deuxième équation de (2.2.24) par partie, on obtient

$$\int_{L_1}^{L_2} (\lambda^2 v - bv_{xx}) \omega_2 dx = \int_{L_1}^{L_2} \lambda^2 v \omega_2 dx + b \int_{L_1}^{L_2} v_x (\omega_2)_x dx - [bv_x \omega_2]_{L_1}^{L_2}. \quad (2.2.26)$$

En utilisant (2.2.25) et (2.2.26), le problème (2.2.24) est équivalent au problème

$$\Phi((u, v), (\omega_1, \omega_2)) = l(\omega_1, \omega_2) \quad (2.2.27)$$

tels que la forme bilinéaire $\Phi : (X_* \times X_*) \rightarrow \mathbb{R}$ et la forme linéaire $l : X_* \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par

$$\begin{aligned} \Phi((u, v), (\omega_1, \omega_2)) &= \int_{\Omega} (\lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_2 \lambda e^{-\lambda \tau}) u \omega_1 dx + a \int_{\Omega} u_x (\omega_1)_x dx - [a u_x \omega_1]_{\partial \Omega} \\ &\quad + \int_{L_1}^{L_2} \lambda^2 v \omega_2 dx + b \int_{L_1}^{L_2} v_x (\omega_2)_x dx - [b v_x \omega_2]_{L_1}^{L_2} \end{aligned}$$

et

$$l(\omega_1, \omega_2) = \int_{\Omega} (f_2 + \lambda f_1 - \mu_2 \lambda y_0(x)) \omega_1 dx + \int_{L_1}^{L_2} (g_2 + \lambda g_1) \omega_2 dx$$

En utilisant les propriétés de X_* , il est clair que Φ est continue et coercive, et l est continue. Alors en appliquant le Théorème de Lax-Milgram, on déduit que pour tout $(\omega_1, \omega_2) \in X_*$, le problème (2.2.27) admet une unique solution $(u, v) \in X_*$. Il s'ensuit de (2.2.25) et (2.2.26) que $(u, v) \in \left\{ (H^2(\Omega) \times H^2(L_1, L_2)) \cap X_* \right\}$. Donc, l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est dissipative pour tout $\lambda > 0$. Alors, le résultat cité dans le Théorème 2.2.1 est donné par le Théorème de Hille-Yoshida. \square

2.3 Décroissance exponentielle de la solution

Dans cette section on va étudier le comportement asymptotique de la solution du système (2.1.1)-(2.1.3). Pour toute solution régulière de (2.1.1)-(2.1.3), on définit l'énergie comme suit :

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx + \frac{a}{2} \int_{\Omega} u_x^2(x, t) dx \quad (2.3.1)$$

et

$$E_2(t) = \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} v_t^2(x, t) dx + \frac{b}{2} \int_{L_1}^{L_2} v_x^2(x, t) dx. \quad (2.3.2)$$

L'énergie totale est définie par :

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) + \frac{\zeta}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 y^2(x, \rho, t) d\rho dx \quad (2.3.3)$$

tels que ζ est une constante positive définie dans (2.2.16).

notre résultat de décroissance est étudié comme suit :

Théorème 2.3.1. *Soit (u, v) une solution de (2.1.1)-(2.1.3). Supposons que $\mu_2 < \mu_1$ et*

$$\frac{a}{b} < \frac{L_3 + L_1 - L_2}{2(L_2 - L_1)}. \quad (2.3.4)$$

Alors il existe deux constantes positives C et d telles que

$$E(t) \leq Ce^{-dt}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.3.5)$$

Remarque 2.3.2. L'hypothèse (2.3.4) donne la relation entre les régions limitrophes et la transmission autorisée. Il peut également être considérée comme une restriction sur les vitesses d'onde des deux équations et la partie amortie du domaine. Il est connu que pour les systèmes de Timoshenko [105] et les systèmes de Bresse [1] que les vitesses d'ondes contrôlent toujours la décroissance du taux de la solution. Est une question ouverte intéressante pour d'étudier le comportement de la solution si (2.3.4) n'est pas satisfaite.

La démonstration du Théorème 2.3.1 sera donnée via quelques lemmes ;

Lemme 2.3.3. *Soit (u, v, y) la solution de (2.2.13), (2.1.3). Supposons que $\mu_1 \geq \mu_2$. Alors on a l'inégalité suivante*

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq \left(-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\zeta}{2\tau}\right) \int_{\Omega} y^2(x, 0, t) dx + \left(\frac{\mu_2}{2} - \frac{\zeta}{2\tau}\right) \int_{\Omega} y^2(x, 1, t) dx. \quad (2.3.6)$$

Démonstration. Nous avons à partir de (2.3.3) que

$$\frac{dE_1(t)}{dt} = \int_{\Omega} u_{tt}(x, t)u_t(x, t) dx + a \int_{\Omega} u_{xt}(x, t)u_x(x, t) dx \quad (2.3.7)$$

Using system (2.2.13), and integrating by parts, we obtain

$$\frac{dE_1(t)}{dt} = a[u_x u_t]_{\partial\Omega} - \mu_1 \int_{\Omega} u_t^2(x, t) - \mu_2 \int_{\Omega} u_t(x, t)y(x, 1, t) dx \quad (2.3.8)$$

D'autre part, nous avons

$$\frac{dE_2(t)}{dt} = b[v_x v_t]_{L_1}^{L_2}. \quad (2.3.9)$$

Utilisons le fait que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\zeta}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 y^2(x, \rho, t) d\rho dx &= \zeta \int_{\Omega} \int_0^1 y(x, \rho, t) y_t(x, \rho, t) d\rho dx \\ &= -\frac{\zeta}{\tau} \int_{\Omega} \int_0^1 y_{\rho}(x, \rho, t) y(x, \rho, t) d\rho dx \\ &= -\frac{\zeta}{2\tau} \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{d}{d\rho} y^2(x, \rho, t) d\rho dx \\ &= -\frac{\zeta}{2\tau} \int_{\Omega} (y^2(x, 1, t) - y^2(x, 0, t)) dx \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

2.3. DÉCROISSANCE EXPONENTIELLE DE LA SOLUTION

Collectons (2.3.8), (2.3.9), (2.3.10), on utilise (2.1.2) et en appliquant l'inégalité de Young, alors (2.3.6) est vraie. Ainsi, la démonstration du lemme 2.3.3 est achevée. \square

Suite à [4], nous définissons le fonctionnel

$$I(t) = \int_{\Omega} \int_{t-\tau}^t e^{s-t} u_t^2(x, s) ds dx$$

nous avons le lemme suivant.

Lemme 2.3.4. *Soit (u, v) une solution de (2.1.1)-(2.1.3). Alors nous avons*

$$\frac{dI(t)}{dt} \leq \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx - e^{-\tau} \int_{\Omega} u_t^2(x, t - \tau) dx - e^{-\tau} \int_{\Omega} \int_{t-\tau}^t u_t^2(x, s) ds dx. \quad (2.3.11)$$

La démonstration du lemme 2.3.4 est simple, nous omettons les détails.

Maintenant, nous définissons le fonctionnel $\mathcal{D}(t)$ comme suit :

$$\mathcal{D}(t) = \int_{\Omega} uu_t dx + \frac{\mu_1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} vv_t dx. \quad (2.3.12)$$

Ainsi, nous avons les estimations suivantes.

Lemme 2.3.5. *Le fonctionnel $\mathcal{D}(t)$ satisfait les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{D}(t) &\leq -(a - \epsilon_0 c_0^2) \int_{\Omega} u_x^2 dx - b \int_{L_1}^{L_2} v_x^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx + C(\epsilon_0) \int_{\Omega} y^2(x, 1, t) dx \end{aligned}$$

Démonstration. En prenant la dérivée de $\mathcal{D}(t)$ avec respect de t et en exploitant (2.1.1), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{D}(t) &= \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx - a \int_{\Omega} u_x^2 dx - b \int_{L_1}^{L_2} v_x^2 dx \\ &\quad - \mu_2 \int_{\Omega} u(x, t) y(x, 1, t) dx + [au_x u]_{\partial\Omega} + [bv_x v]_{L_1}^{L_2}. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

En appliquant l'inégalité de Young et en utilisant les conditions aux limites (2.1.2), nous avons

$$\begin{aligned} [au_x u]_{\partial\Omega} + [bv_x v]_{L_1}^{L_2} &= au_x(L_1, t)u(L_1, t) - au_x(L_2, t)u(L_2, t) \\ &\quad + bv_x(L_2, t)v(L_2, t) - bv_x(L_1, t)v(L_1, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

D'autre part, en appliquant l'inégalité de Poincaré et l'inégalité de Young, on obtient

$$\mu_2 \int_{\Omega} u(x, t)y(x, 1, t)dx \leq \epsilon_0 c_0^2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + C(\epsilon_0) \int_{\Omega} y^2(x, 1, t)dx \quad (2.3.15)$$

tels que ϵ_0 est une constante positive et c_0 est la constante de Poincaré. Par conséquent, insérons les estimations précédentes dans (2.3.13), on trouve (2.3.13). \square

Maintenant, s'inspirant de [73], nous introduisons le fonctionnel

$$q(x) = \begin{cases} x - \frac{L_1}{2}, & x \in [0, L_1], \\ x - \frac{L_2 + L_3}{2}, & x \in [L_2, L_3], \\ \frac{L_2 - L_3 - L_1}{2(L_2 - L_1)}(x - L_1) + \frac{L_1}{2}, & x \in [L_1, L_2] \end{cases} \quad (2.3.16)$$

Puis, nous définissons les fonctionnes suivants :

$$\mathcal{F}_1(t) = - \int_{\Omega} q(x)u_x u_t dx$$

et

$$\mathcal{F}_2(t) = - \int_{L_1}^{L_2} q(x)v_x v_t dx.$$

Alors, nous avons les estimations suivantes :

Lemme 2.3.6. *Pour tout $\epsilon_2 > 0$, nous avons les estimations :*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_1(t) &\leq C(\epsilon_2) \int_{\Omega} u_t^2 dx + \left(\frac{a}{2} + \epsilon_2\right) \int_{\Omega} u_x^2 dx + C(\epsilon_2) \int_{\Omega} y^2(x, 1, t) dx \\ &\quad - \frac{a}{4} \left[(L_3 - L_2)u_x^2(L_2, t) + L_1 u_x^2(L_1, t) \right] \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_2(t) &\leq \frac{L_2 - L_3 - L_1}{4(L_2 - L_1)} \left(\int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} b v_x^2 dx \right) \\ &\quad + \frac{b}{4} \left((L_3 - L_2)v_x^2(L_2, t) + L_1 v_x^2(L_1, t) \right). \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Démonstration. En prenant la dérivée de $\mathcal{F}_1(t)$ avec respect de t et en utilisant l'équation (2.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_1(t) &= - \int_{\Omega} q(x)u_{tx} u_t dx - \int_{\Omega} q(x)u_x u_{tt} dx \\ &= - \int_{\Omega} q(x)u_{tx} u_t dx - \int_{\Omega} q(x)u_x (a u_{xx}(x, t) - \mu_1 u_t(x, t) - \mu_2 y(x, 1, t)) dx. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Utilisons une intégration par partie, on trouve

$$\int_{\Omega} q(x)u_{tx}u_t dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} q'(x)u_t^2 dx + \frac{1}{2} [q(x)u_t^2]_{\partial\Omega}. \quad (2.3.20)$$

D'autre part, nous avons

$$\int_{\Omega} aq(x)u_{xx}u_x dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} aq'(x)u_x^2 dx + \frac{1}{2} [aq(x)u_x^2]_{\partial\Omega}. \quad (2.3.21)$$

Insérons (2.3.20) et (2.3.21) dans (2.3.19), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_1(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} q'(x)u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} aq'(x)u_x^2 dx - \frac{1}{2} [q(x)u_t^2]_{\partial\Omega} - \frac{1}{2} [aq(x)u_x^2]_{\partial\Omega} \\ &\quad + \int_{\Omega} q(x)u_x (\mu_1 u_t(x, t) + \mu_2 y(x, 1, t)) dx. \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Exploitions l'inégalité de Young et utilisons (3.3.6), then (2.3.22) becomes (2.3.19), nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_1(t) &\leq C(\epsilon_2) \int_{\Omega} u_t^2 dx + \left(\frac{a}{2} + \epsilon_2\right) \int_{\Omega} u_x^2 dx - \frac{1}{2} [q(x)u_t^2]_{\partial\Omega} - \frac{a}{2} [q(x)u_x^2]_{\partial\Omega} \\ &\quad + C(\epsilon_2) \int_{\Omega} y^2(x, 1, t) dx. \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

pour tout $\epsilon_2 > 0$. Puisque $q(L_1) > 0$ et $q(L_2) < 0$, et, en utilisant les conditions aux limites (2.1.2), on obtient

$$\frac{1}{2} [q(x)u_t^2]_{\partial\Omega} \geq 0. \quad (2.3.24)$$

Aussi, nous avons

$$-\frac{a}{2} [q(x)u_x^2]_{\partial\Omega} = -\frac{aL_1}{4} [u_x^2(L_1, t) + u_x^2(0, t)] - \frac{a(L_3 - L_2)}{4} [u_x^2(L_3, t) + u_x^2(L_2, t)]. \quad (2.3.25)$$

En prenant en considération (2.3.24) et (2.3.25), alors (2.3.23) donne (2.3.17).

Avec la même méthode, en prenant la dérivée de $\mathcal{F}_2(t)$ avec respect de t , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_2(t) &= - \int_{L_1}^{L_2} q(x)v_{tx}v_t dx - \int_{L_1}^{L_2} q(x)v_x v_{tt} \\ &= \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} q'(x)v_t^2 dx - \frac{1}{2} [q(x)v_t^2]_{L_1}^{L_2} + \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} bq'(x)v_x^2 dx - \frac{b}{2} [q(x)v_x^2]_{L_1}^{L_2} \\ &\leq \frac{L_2 - L_3 - L_1}{4(L_2 - L_1)} \left(\int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} bv_x^2 dx \right) \\ &\quad + \frac{b}{4} \left((L_3 - L_2)v_x^2(L_2, t) + L_1 v_x^2(L_1, t) \right) \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

qui est exactement (2.3.18). \square

2.3. DÉCROISSANCE EXPONENTIELLE DE LA SOLUTION

Démonstration du Théorème 2.3.1. Nous définissons le fonctionnel de Lyapunov $\mathcal{L}(t)$ comme suit

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + I(t) + \gamma_2 \mathcal{D}(t) + \gamma_3 \mathcal{F}_1(t) + \gamma_4 \mathcal{F}_2(t) \quad (2.3.27)$$

tels que N, γ_2, γ_3 et γ_4 sont des constantes positives que nous fixerons après.

Maintenant, il est clair que des conditions aux limites (2.1.2), que

$$a^2 u_x^2(L_i, t) = b^2 v_x^2(L_i, t), \quad i = 1, 2. \quad (2.3.28)$$

Dérivons (2.3.27) avec respect de t et utilisons (2.3.6), (2.3.11), (2.3.13), (2.3.17), et on prend en considération (2.3.28), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq \left\{ N \left(-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\zeta}{2\tau} \right) + 1 + \gamma_2 + \gamma_3 C(\epsilon_2) \right\} \int_{\Omega} u_t^2 dx \\ &+ \left\{ N \left(\frac{\mu_2}{2} - \frac{\zeta}{2\tau} \right) - e^{-\tau} + \gamma_2 C(\epsilon_0) + C(\epsilon_2) \gamma_3 \right\} \int_{\Omega} y^2(x, 1, t) dx \\ &+ \left\{ \gamma_2(-a + \epsilon_0 c_0^2) + \gamma_3 \epsilon_2 + \frac{\gamma_3 a}{2} \right\} \int_{\Omega} u_x^2 dx \\ &+ \left\{ b \frac{L_2 - L_3 - L_1}{4(L_2 - L_1)} \gamma_4 - \gamma_2 b \right\} \int_{L_1}^{L_2} v_x^2 dx \\ &+ \left\{ \frac{L_2 - L_3 - L_1}{4(L_2 - L_1)} \gamma_4 + \gamma_2 \right\} \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx - e^{-\tau} \int_{\Omega} \int_{t-\tau}^t u_t^2(x, s) ds dx \\ &- \left(\gamma_3 - \frac{a}{b} \gamma_4 \right) \frac{a(L_3 - L_2)}{4} u_x^2(L_2, t) - \left(\gamma_3 - \frac{a}{b} \gamma_4 \right) \frac{aL_1}{4} u_x^2(L_1, t). \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

Maintenant, nous choisissons nos constantes dans (2.3.29), doucement, telles que les coefficients dans (2.3.29) seront négatifs. De plus, sous les hypothèses (2.3.4), on peut d'habitude trouver γ_2, γ_3 et γ_4 telles que

$$\frac{L_2 - L_3 - L_1}{4(L_2 - L_1)} \gamma_4 + \gamma_2 < 0, \quad \gamma_3 > \frac{a}{b} \gamma_4, \quad \gamma_2 > \frac{\gamma_3}{2}. \quad (2.3.30)$$

Une fois les constantes ci-dessus sont fixés, on peut choisir ϵ_2 et ϵ_0 suffisamment petits telles que

$$\epsilon_0 c_0^2 + \gamma_3 \epsilon_2 < a(\gamma_2 - \gamma_3/2).$$

Finalement, nous gardons que (2.2.16) et choisissons N suffisamment large telle que les premier et le deuxième coefficients dans (2.3.29) sont négatifs.

Par conséquent, de ce qui précède, nous déduisons qu'il existe une constante positive η_1 , telle que (2.3.29) devient

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}(t)}{dt} \leq & -\eta_1 \int_{\Omega} (u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t - \tau)) dx \\ & -\eta_1 \int_{L_1}^{L_2} (v_t^2(x, t) + v_x^2(x, t)) dx - \eta_1 \int_{\Omega} \int_{t-\tau}^t u_t^2(x, s) ds dx, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

Par conséquent, rappelons (2.3.3), alors, nous déduisons qu'il existe, auusi, $\eta_2 > 0$, telle que

$$\frac{d\mathcal{L}(t)}{dt} \leq -\eta_2 E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.3.32)$$

D'autre part, il n'est pas difficile de voir de (2.3.27) et for N suffisamment large, il existe deux constantes positives β_1 et β_2 telles que

$$\beta_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta_2 E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.3.33)$$

Combinons (2.3.32) et (2.3.33), nous déduisons qu'il existe $\Lambda > 0$ pour lequel l'estimation

$$\frac{d\mathcal{L}(t)}{dt} \leq -\Lambda \mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (2.3.34)$$

est vérifiée. Intégrons (2.3.34) sur $(0, t)$ et utilisons (2.3.32) une autre fois, alors (2.3.5) est vérifiée. Alors, la démonstration du Théorème 2.3.1 est achevée. \square

Existence et unicité de la solution d'un problème de transmission à terme visco-élastique avec retard

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère un problème de transmission sur un domaine borné à terme visco-élastique avec retard. Sous des hypothèses convenables sur la fonction de relaxation et, la relation entre le poids d'amortissement et le poids du retard, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution en utilisant la théorie des semi-groupes. La preuve du résultat de la décroissance générale de la solution sera donnée. dans le chapitre suivant nous l'étudierons pour un problème similaire. L'équation des ondes visco-élastique avec retard a été d'abord abordée, pour la première fois, par Kirane et Said-Houari dans [58] où ils ont étudié l'existence et le comportement asymptotique de la stabilité d'une équation d'ondes visco-élastique avec retard, ils ont considéré le problème d'équation d'ondes linéaire visco-élastique avec un amortissement linéaire et un terme de retard

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x, s)ds \\ + \mu_1 u_t(x, t) + \mu_2 u_t(x, t - \tau) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1, & x \in \Omega, \\ u_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), & \in \Omega, t \in (0, \tau), \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

tels que $u = u(x, t), t \geq 0, x \in \Omega$, Δ dénote le Laplacien avec respect de t et de x , Ω est un domaine régulier borné de \mathbb{R}^N , ($N \geq 1$), μ_1, μ_2 des constantes positives, $\tau < 0$ est le temps retard, u_0, u_1, f_0 des fonctions dans des espaces convenables. Le but de leur travail est d'étudier l'existence et la stabilité asymptotique du problème (3.1.1). En introduisant le terme de retard $\mu_2 u_t(x, t - \tau)$, ils ont fait du problème un problème différent de ceux considérés auparavant. Premièrement, les auteurs utilisaient la méthode d'approximation de Faedo- Galerkin avec quelques estimations d'énergie, sous quelques restrictions sur les paramètres μ_1, μ_2 , pour rendre le problème (3.1.1) bien posé. Deuxièmement, sous l'hypothèse $\mu_1 < \mu_2$ entre le poids du terme de retard dans le feedback et, le poids du terme sans retard, ils ont prouvé une décroissance générale de l'énergie totale du problème (3.1.1). Alabau et al dans [2] ont traité un modèle en combinant l'amortissement visco-elastique et l'amortissement dans le temps du retard, ils ont considéré le problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u(x, t) - \int_0^\infty g(s) \Delta u(x, t - s) ds + k u_t(x, t - \tau) = 0, & \text{in } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = u_0(x, t), u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{in } \Omega \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (3.1.2)$$

tels que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert borné à frontière lisse, la valeur initiale u_0 appartienne à un espace convenable, la constante $\tau > 0$ est le temps retard, k est un nombre réel, et le noyau mémoire $\mu : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est une fonction absolument continue localement et satisfaisant :

- i) $g(0) = \mu_0 > 0$;
- ii) $\int_0^{+\infty} g(t) dt = \tilde{\mu} < 1$;
- iii) $g'(t) \leq -\alpha g$, pour quelques $\alpha > 0$.

Pour $k = 0$ le système précédent est exponentiellement stable voir [43]. Les auteurs ont montré qu'un résultat de stabilité exponentielle est réalisé si le paramètre de retard k est suffisamment petit avec respect du noyau de mémoire C'est-à-dire pour l'énergie $F(t)$ du problème (3.1.2), il existe une constante positive k_0 telle que pour $|k| < k_0$ il y a $\sigma > 0$ telle que

$$F(t) \leq F(0) e^{1-\sigma t}, \quad t \geq 0,$$

pour toute solution du problème (3.1.2). La constante k_0 dépend uniquement du noyau $g(\cdot)$ du terme mémoire, du temps retard τ et du domaine Ω .

Ils ont observé que pour $\tau = 0$ and $k > 0$ le modèle (3.1.2) présente les deux standard amortissements visco-élastique et dissipatifs standards. Par conséquent, dans le cas, sous les hypothèses précédentes sur le noyau μ , le modèle est stable exponentiellement. Ils ont remarqué qu'une stabilité exponentielle se produit aussi pour $k < 0$, sous une hypothèse de petitesse convenable sur $|k|$. Ils ont noté que le terme $ku_t(t)$ avec $k < 0$ est soi-disant anti-amortissement [38] nommé amortissement avec signe opposé avec respect de l'amortissement dissipatif standard, donc il induit une instabilité. De plus, en l'absence de l'amortissement visco-élastique, i.e pour $\mu = 0$, la solution de problème précédent, avec $\tau = 0$ et $k < 0$, tende exponentiellement vers l'infini.

La stabilisation des problème du modèle (3.1.2) ont été étudiés par Guesmia dans [48] en utilisant différentes approches basées sur la construction d'un fonctionnel de Lyapunov convenable.

Considérons le problème

$$\begin{cases} u_{tt} - au_{xx} + \int_0^{+\infty} g(s)u_{xx}(x, t - s)ds \\ + \mu_1 u_t(x, t) + |\mu_2| u_t(x, t - \tau) = 0, & (x, t) \in \Omega \times]0, +\infty[, \\ v_{tt} - bv_{xx} = 0, & (x, t) \in]L_1, L_2[\times]0, +\infty[, \end{cases} \quad (3.1.3)$$

tels que $0 < L_1 < L_2 < L_3$ et $\Omega =]0, L_1[\times]L_2, L_3[$, $\mu_1 \in \mathbb{R}_*^+$, et $\mu_2 \in \mathbb{R}$.

Le système (3.1.3) est muni des conditions aux limites, et de conditions de transmission suivantes :

$$\begin{cases} u(0, t) = u(L_3, t) = 0, \\ u(L_i, t) = v(L_i, t), & i = 1, 2 \\ au_x(L_i, t) - \int_0^{+\infty} g(s)u_{xx}(x, t - s)ds = bv_x(L_i, t), & i = 1, 2 \end{cases} \quad (3.1.4)$$

et les conditions initiales sont données par :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), & x \in \Omega, t \in [0, \tau], \\ v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), & x \in]L_1, L_2[. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Pour la fonction de relaxation g , nous avons les hypothèses suivantes :

(B1) $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est C^1 fonction satisfaisant

$$g(0) > 0, \quad a - \int_0^{+\infty} g(t)dt = a - \tilde{\mu} = l > 0.$$

(B2) il existe une fonction différentiable non croissante $\xi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ telle que

$$g'(t) \leq -\xi(t)g(t), \quad \forall t \geq 0 \quad \text{and} \quad \int_0^{+\infty} \xi(t)dt = +\infty. \quad (3.1.6)$$

Les problèmes de transmission liés au problème (3.1.3)-(3.1.5) ont été étudiés de manière approfondie. Bastos et Raposo dans [8] ils ont étudié le problème de transmission avec amortissement dû du frottement et ont montré l'existence et l'unicité des solutions et la stabilité exponentielle de l'énergie totale. Munos et al dans [82] ont considéré le problème de transmission visco-élastique des ondes, ils prouvé que la dissipation produite par la partie visco-élastique peut produire une décroissance de la solution, Quelle que soit sa taille.

Motivé par les résultats précédents notamment dans [2], nous avons l'intention d'étudier dans ce chapitre l'existence et l'unicité de la solution et le résultat de décroissance pour le problème (3.1.3)-(3.1.5), dans lequel le terme de mémoire infinie $\int_0^{+\infty} g(s)u_{xx}(x, t-s)ds$ est impliqué. Pour atteindre notre objectif, nous utilisons la théorie des semi-groupes pour prouver l'existence et l'unicité des solutions, et introduisons un fonctionnel de Lyapunov appropriée pour établir le résultat de décroissance.

3.2 Existence et unicité de la solution du problème posé

Dans cette section, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du système (3.1.3)-(3.1.5) en utilisant le théorie des semi-groupes. Introduisons la nouvelle variable suivante [84]

$$y(x, \rho, t) = u_t(x, t - \tau\rho), \quad x \in \Omega, \quad \rho \in (0, 1), \quad t > 0, \quad (3.2.1)$$

et nous introduisons une autre nouvelle variable [30]

$$\eta^t(x, s) = u(x, t) - u(x, t - s) \quad (x, t, s) \in \Omega \times]0, +\infty[\times]0, +\infty[. \quad (3.2.2)$$

Alors nous avons

$$\tau y_t(x, \rho, t) + y_\rho(x, \rho, t) = 0 \quad x \in \Omega, \quad \rho \in (0, 1), \quad t > 0, \quad (3.2.3)$$

et

$$\eta_t^t(x, s) = -\eta_s^t(x, s) + u_t(x, t) \quad (x, t, s) \in \Omega \times]0, +\infty[\times]0, +\infty[. \quad (3.2.4)$$

En utilisant (3.2.1) and (3.2.2) on peut réécrire (3.1.3)-(3.1.5) comme suit

$$\begin{cases} u_{tt} = lu_{xx} + \int_0^{+\infty} g(s)\eta_{xx}^t(x, t-s)ds \\ -\mu_1 u_t(x, t) - |\mu_2| y(x, 1, t), & (x, t) \in \Omega \times]0, +\infty[, \\ v_{tt} - bv_{xx} = 0, & (x, t) \in]L_1, L_2[\times]0, +\infty[, \\ \eta_t^t(x, s) = -\eta_s^t(x, s) + u_t(x, t), & (x, t, s) \in \Omega \times]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \\ \tau y_t(x, \rho, t) + y_\rho(x, \rho, t) = 0, & x \in \Omega, \rho \in (0, 1), t > 0, \end{cases} \quad (3.2.5)$$

les conditions aux limites et de transmission (3.1.4) deviennent

$$\begin{cases} u(0, t) = u(L_3, t) = 0, \\ u(L_i, t) = v(L_i, t), & i = 1, 2, t \in (0, +\infty), \\ lu_x(L_i, t) + \int_0^{+\infty} g(s)\eta_x^t(L_i, s) = bv_x(L_i, t), & i = 1, 2, t \in (0, +\infty), \end{cases} \quad (3.2.6)$$

et les conditions initiales (3.1.5) deviennent

$$\begin{cases} u(\cdot, -t) = u_0(x, t), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ y(x, 0, t) = u_t(x, t), \quad y(x, 1, t) = f_0(x, t, -\tau), & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), & x \in]L_1, L_2[. \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Il est clair que

$$\begin{cases} \eta^t(x, 0) = 0, & \text{for all } x \in \Omega, \\ \eta^t(0, s) = \eta^t(L_3, s) = 0, & \text{for all } s > 0, \\ \eta^0(x, s) = \eta_0(s), & \text{for all } s > 0. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Nous notons $U = (u, \varphi, v, \psi, w, y)^T$. Alors on peut réécrire le problème (3.2.5) avec (3.1.5) sous la forme

$$\begin{cases} U' = A(U) \\ U(0) = (u_0, u_1, v_0, v_1, \eta_0, f_0(\cdot, -\tau))^T \end{cases} \quad (3.2.9)$$

tels que $\eta_0 = \eta^0(x, s)$ dans $\partial\Omega \times]0, +\infty[$. Et l'opérateur A est défini par

$$A \begin{pmatrix} u \\ \varphi \\ v \\ \psi \\ w \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ lu_{xx} + \int_0^{+\infty} g(s)w_{xx}(s)ds - \mu_1 u_t - |\mu_2| y(\cdot, 1) \\ \psi \\ bv_{xx} \\ -w_s + \varphi \\ -\frac{1}{\tau} y_\rho \end{pmatrix} \quad (3.2.10)$$

avec le domaine

$$D(A) = \{(u, \varphi, v, \psi, \eta, y)^T \in H; y(\cdot, 0) = \varphi \text{ on } \Omega\}$$

tels que

$$H = \left\{ \begin{array}{l} (H^2(\Omega) \times H^2(L_1, L_2)) \cap X_* \times H^1(\Omega) \\ \times H^1(L_1, L_2) \times L_g^2((0, +\infty); H_0^1(\Omega)) \times L^2(0, 1, H^1(\Omega)) \end{array} \right\}$$

L'espace X_* est défini par

$$X_* = \left\{ \begin{array}{l} (u, v) \in H^1(\Omega) \cap H^1(L_1, L_2) | u(0, t) = u(L_3, t) = 0, \\ u(L_i, t) = v(L_i, t), au_x(L_i, t) = bv_x(L_i, t), i = 1, 2 \end{array} \right\}$$

L'espace de l'énergie est défini par

$$K = X_* \times L^2(\Omega) \times L^2(L_1, L_2) \times L_g^2((0, +\infty); H_0^1(\Omega)) \times L^2((\Omega) \times (0, 1)).$$

tels que $L_g^2((0, +\infty); H_0^1(\Omega))$ est un espace de Hilbert dont ses éléments sont des fonctions à valeurs dans H^1 définies sur $(0, +\infty)$ cet espace est muni du produit scalaire

$$\langle \phi, \chi \rangle_{L_g^2((0, +\infty); H_0^1(\Omega))} = \int_{\Omega} \left(\int_0^{+\infty} g(s) \phi_x(x, s) \chi_x(x, s) ds \right) dx$$

Soit

$$U = (u, \varphi, v, \psi, w, y)^T, \text{ and } \tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{v}, \tilde{\psi}, \tilde{w}, \tilde{y})^T$$

Alors, pour une constante positive ζ satisfaisant

$$\tau |\mu_2| \leq \zeta \leq \tau(2\mu_1 - |\mu_2|) \tag{3.2.11}$$

On définit le produit scalaire sur K comme suit

$$\begin{aligned} \langle U, \tilde{U} \rangle_K &= a \int_{\Omega} [\varphi \tilde{\varphi} dx + lu_x \tilde{u}_x] dx + l \int_{L_1}^{L_2} [\psi \tilde{\psi} + bv_x \tilde{v}_x] dx \\ &\quad + a \int_{\Omega} \int_0^{+\infty} g(s) w_x(s) \tilde{w}_x(x, s) ds dx \\ &\quad + a\zeta \int_{\Omega} \int_0^1 y(x, \rho) \tilde{y}(x, \rho) d\rho dx \end{aligned}$$

Le résultat d'existence et d'unicité est traité comme suit ;

Théorème 3.2.1. *Pour tout $U_0 \in K$ il existe une unique solution $U \in C([0, +\infty[, K)$ pur le problème (3.2.9). De plus, si $U_0 \in D(A)$, alors*

$$U \in C([0, +\infty[, D(A)) \cap C^1([0, +\infty[, K).$$

Démonstration. Pour prouver le résultat cité dans le Théorème (3.2.1), nous utilisons la théorie des semi-groupes, c'est-à-dire, nous montrons que l'opérateur A génère un C_0 -groupe sur K . Dans cette phase, nous nous restreindrons de prouver que l'opérateur A est dissipatif. Effectivement, pour $U = (u, \varphi, v, \psi, w, y)^T \in D(A)$ et une constante positive ζ , nous avons

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle_K &= al \int_{\Omega} u_{xx} \varphi dx + bl \int_{L_1}^{L_2} v_{xx} \psi dx - a\mu_1 \int_{\Omega} \varphi^2 dx \\ &\quad - a|\mu_2| \int_{\Omega} y(\cdot, 1) \varphi dx + a \int_{\Omega} \left(\varphi \int_0^{+\infty} g(s) w_{xx}(s) ds \right) dx \\ &\quad - \frac{a\zeta}{\tau} \int_{\Omega} \int_0^1 y(x, \rho) y_{\rho}(x, \rho) d\rho dx \\ &\quad + a \int_{\Omega} \int_0^{+\infty} g(s) (-w_{sx}(x, s) + \varphi_x) w_x(x, s) ds dx \\ &\quad + al \int_{\Omega} u_x \varphi_x dx + bl \int_{L_1}^{L_2} v_x \psi_x dx. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_0^1 y(x, \rho) y_{\rho}(x, \rho) d\rho dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} y^2(x, \rho) d\rho dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y^2(x, 1) - y^2(x, 0)) dx, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

en effectuant une intégration par partie dans (3.2.12) et, en utilisant la troisième équation de (3.1.4), on obtient

$$\begin{aligned} &al \int_{\Omega} u_{xx} \varphi dx + bl \int_{L_1}^{L_2} v_{xx} \psi dx + al \int_{\Omega} u_x \varphi_x dx + bl \int_{L_1}^{L_2} v_x \psi_x dx \\ &= [al u_x \varphi]_{\partial \Omega} + [bl v_x \psi]_{L_1}^{L_2} - al \int_{\Omega} u_x \varphi_x dx \\ &\quad - bl \int_{L_1}^{L_2} v_x \psi_x dx + al \int_{\Omega} u_x \varphi_x dx + bl \int_{L_1}^{L_2} v_x \psi_x dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par une intégration par partie, et utilisation le fait que $w(x, 0) = 0$, nous avons

$$- \int_{\Omega} \int_0^{+\infty} g(s) w_{sx}(x, s) w_x(x, s) ds dx = \int_{\Omega} \int_0^{+\infty} g'(s) |w_x(x, s)|^2 ds dx. \quad (3.2.14)$$

D'après [41], et en regardant à la définition de $D(A)$ et, en utilisant le fait que $y(x, 0, t) = \varphi(x, t)$, nous déduisons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle AU, U \rangle_K &= -a(\mu_1 - \frac{\zeta}{2\tau}) \int_{\Omega} \varphi^2 dx - a|\mu_2| \int_{\Omega} y(\cdot, 1)\varphi dx - \frac{a\zeta}{2\tau} \int_{\Omega} y^2(x, 1) dx \\ &\quad + \frac{a}{2} \int_{\Omega} \int_0^{+\infty} g'(s) |w_x(x, s)|^2 ds dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle AU, U \rangle_K &\leq -a(\mu_1 - \frac{|\mu_2|}{2} - \frac{\zeta}{2\tau}) \int_{\Omega} \varphi^2 dx - a(\frac{\zeta}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2}) \int_{\Omega} y^2(x, 1) dx \\ &\quad + \frac{a}{2} \int_{\Omega} \int_0^{+\infty} g'(s) |w_x(x, s)|^2 ds dx. \end{aligned}$$

Alors, en gardant à l'esprit le fait que $g'(s) \leq -\xi(s)g(s)$, et $g(s) > 0$, on obtient

$$\langle AU, U \rangle_K \leq 0.$$

L'opérateur A est dissipatif.

Maintenant on montre que l'opérateur A est surjectif. Soient $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in H$, nous montrons qu'il existe $V = (u, \varphi, v, \psi, w, y)^T \in D(A)$ tels que

$$(\lambda I - A)V = F, \tag{3.2.15}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda u - \varphi = f_1, \\ \lambda \varphi - (lu_{xx} + \int_0^{+\infty} g(s)w_{xx}(s)ds - \mu_1 u_t - \mu_2 y(\cdot, 1)) = f_2, \\ \lambda v - \psi = f_3, \\ \lambda \psi - bv_{xx} = f_4, \\ \lambda w + w_s - \varphi = f_5, \\ \lambda y + \frac{1}{\tau} y_p = f_6. \end{cases} \tag{3.2.16}$$

Supposons qu'on a trouvé u and v avec la régularité appropriée. Donc, la première est la troisième équations de (3.2.16) donnent

$$\begin{cases} \varphi = \lambda u - f_1, \\ \psi = \lambda v - f_3. \end{cases} \tag{3.2.17}$$

Il est claire que $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et $\psi \in H_0^1(L_1, L_2)$. En outre, en utilisant la sixième équation de (3.2.16) nous trouvons y telles que

$$y(x, 0) = \varphi(x), \quad \text{pour } x \in \Omega, \tag{3.2.18}$$

utilisons la même approche comme dans Nicaise et Pignotti [84], en utilisant la sixième équation de (3.2.16) on trouve

$$y(x, 1) = \varphi(x)e^{-\lambda\tau} + \tau e^{-\lambda\tau} \int_0^1 f_6(x, \sigma)e^{\lambda\tau} d\sigma$$

De (3.2.17), on obtient

$$\begin{aligned} y(x, 1) &= \lambda u(x)e^{-\lambda\tau} - f_1(x)e^{-\lambda\tau} + \tau e^{-\lambda\tau} \int_0^1 f_6(x, \sigma)e^{\lambda\tau} d\sigma \\ &= \lambda u(x)e^{-\lambda\tau} + y_0(x), \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

avec

$$y_0(x) = -f_1(x)e^{-\lambda\tau} + \tau e^{-\lambda\tau} \int_0^1 f_6(x, \sigma)e^{\lambda\tau} d\sigma. \quad (3.2.20)$$

Nous notons que la cinquième équation de (3.2.16) avec $w(x, 0) = 0$ admet une solution unique

$$\begin{aligned} w(x, s) &= \left(\int_0^s e^{\lambda z} (f_5(x, z) + \varphi(x)) dz \right) e^{-\lambda s} \\ &= \left(\int_0^s e^{\lambda z} (f_5(x, z) + \lambda u(x) - f_1(x)) dz \right) e^{-\lambda s}. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

En utilisant (3.2.16), (3.2.17) et (3.2.18) les fonctions u et v satisfont le système suivant

$$\begin{cases} \lambda^2 u - (lu_{xx} + \int_0^{+\infty} g(s)w_{xx}(s)ds - \mu_1 y(\cdot, 0) - |\mu_2| y(\cdot, 1)) = f_2 + \lambda f_1, \\ \lambda^2 v - bv_{xx} = f_4 + \lambda f_3, \end{cases} \quad (3.2.22)$$

soit

$$\tilde{l} = l + \lambda \int_0^{+\infty} g(s)e^{-\lambda s} \left(\int_0^s e^{\lambda z} dz \right) ds$$

,et

$$\tilde{f} = - \int_0^{+\infty} g(s)e^{-\lambda s} \left(\int_0^s e^{\lambda z} ((f_5(x, z) - f_1(x))_{xx} dz) \right) ds,$$

alors le système (3.2.22) devient

$$\begin{cases} \lambda^2 u - \tilde{l}u_{xx} + \tilde{f} + \mu_1 y(\cdot, 0) + |\mu_2| y(\cdot, 1) = f_2 + \lambda f_1 \\ \lambda^2 v - bv_{xx} = f_4 + \lambda f_3. \end{cases} \quad (3.2.23)$$

Utilisons (3.2.18) on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\lambda^2 u - \tilde{l}u_{xx} + \mu_1 \lambda u + |\mu_2| \lambda u e^{-\lambda\tau}) g_1 dx & (3.2.24) \\ = & \int_{\Omega} (f_2 + \lambda f_1 - \tilde{f} - |\mu_2| \lambda y_0(x)) g_1 dx, & \forall g_1 \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{L_1}^{L_2} (\lambda^2 v - b v_{xx}) g_2 dx \\ = & \int_{L_1}^{L_2} (f_4 + \lambda f_3) g_2 dx, & \forall g_2 \in H_0^1(L_1, L_2). \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Nous devons maintenant prouver que (3.2.23) admet une solution $(u, v) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H^2(L_1, L_2) \cap H_0^1(L_1, L_2)$ et en la remplaçant dans (3.2.17), (3.2.18) avec (3.2.20) pour obtenir $V = (u, \varphi, v, \psi, w, y)^T \in D(A)$ satisfaisant (3.2.14).

Pour résoudre le système (3.2.23) nous considérons

$$\Phi((u, v), (g_1, g_2)) = \Psi(g_1, g_2), \quad (3.2.26)$$

tels que la forme bilinéaire $\Phi : (H_0^1(\Omega))^2 \times (H_0^1(L_1, L_2))^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

et la forme linéaire $\Psi : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(L_1, L_2) \longrightarrow \mathbb{R}$

sont définies par

$$\begin{aligned} \Phi((u, v), (g_1, g_2)) &= \int_{\Omega} (\lambda^2 u - \tilde{l}u_{xx} + \mu_1 \lambda u + |\mu_2| \lambda u e^{-\lambda\tau}) g_1 dx \\ &+ \int_{L_1}^{L_2} (\lambda^2 v - b v_{xx}) g_2 dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Psi(g_1, g_2) &= \int_{\Omega} (f_2 + \lambda f_1 - \tilde{f} - |\mu_2| \lambda y_0(x)) g_1 dx \\ &+ \int_{L_1}^{L_2} (f_4 + \lambda f_3) g_2 dx. \end{aligned}$$

Il est clair que Φ est continue et coercive, et Ψ est continue. Alors en appliquant le Théorème de Lax-Migran (1.3.4), on déduit que pour tout $(g_1, g_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(L_1, L_2)$, le problème (3.2.26) admet une solution unique $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(L_1, L_2)$. En appliquant la régularité elliptique classique, il s'ensuit de (3.2.25) que $(u, v) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H^2(L_1, L_2) \cap H_0^1(L_1, L_2)$. Donc l'opérateur $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. Alors le résultat cité dans le Théorème 2.1 est vérifié d'après le Théorème de Hill-Yosida (??). \square

Remarque. Dans la section suivante nous allons donner seulement le théorème qui donne la décroissance de la solution et les lemmes nécessaires à sa preuve, parce que

ce résultat a été étudié par les auteurs Gang et al dans [40].

Pour une solution u du problème (3.1.3)-(3.1.5) on définit l'énergie par

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u_t^2(x, t) + lu_x^2(x, t)] dx + \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} [v_t^2(x, t) + bv_x^2(x, t)] dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx + \frac{\zeta}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx, \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

où ζ est une constante positive vérifiant (3.2.11).

3.3 Décroissance de la solution

Le résultat de décroissance est donné par le théorème suivant

Théorème 3.3.1. *Soit (u, v) une solution de (3.1.3)-(3.1.5). Supposons que (B1), (B2) soient vrais, que $|\mu_2| \leq \mu_1$, et que pour $m_0 \geq 0$,*

$$\int_{\Omega} u_{0x}^2(x, s) dx \leq m_0, \quad \forall s > 0 \quad (3.3.1)$$

et que

$$a > \frac{8(L_2 - L_1)}{L_1 + L_3 - L_2} l, \quad b > \frac{8(L_2 - L_1)}{L_1 + L_3 - L_2} l \quad (3.3.2)$$

soit vérifiée, alors il existent des constantes $d_0, d_2 > 0$ telles que, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $d_1 \in (0, d_0)$,

$$E(t) \leq d_2 \left(1 + \int_0^t (g(s))^{1-d_1} ds \right) e^{-d_1 \int_0^t \xi(s) ds} + d_2 \int_t^{+\infty} g(s) ds. \quad (3.3.3)$$

Pour la preuve du Théorème 3.3.1, nous avons besoin de quelques lemmes.

Lemme 3.3.2. *Soit (u, v, z) une solution de (3.2.5)-(3.2.7). Supposons que $|\mu_2| < \mu_1$. Alors nous avons l'inégalité*

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} \leq & -c_1 \left[\int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx + \int_{\Omega} y^2(x, 1, t) dx \right] \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g'(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Maintenant on définit le fonctionnel

$$\mathcal{D}(t) = \int_{\Omega} uu_t dx + \frac{\mu_1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} vv_t dx.$$

Alors nous avons l'estimation suivante

Lemme 3.3.3. *Le fonctionnel $\mathcal{D}(t)$ satisfait*

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{D}(t)}{dt} &\leq \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx + (L^2\varepsilon + \varepsilon - l) \int_{\Omega} u_x^2 dx - \int_{L_1}^{L_2} bv_x^2 dx \\ &\quad + \frac{g_0}{4\varepsilon} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx + \frac{\mu_2^2}{4\varepsilon} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

où $L = \max(L_1, L_3 - L_2)$, et $\varepsilon > 0$.

Maintenant, s'inspirant de [73], on introduit le fonctionnel

$$q(x) = \begin{cases} x - \frac{L_1}{2}, & x \in [0, L_1], \\ x - \frac{L_2 + L_3}{2}, & x \in [L_2, L_3], \\ \frac{L_2 - L_3 - L_1}{2(L_2 - L_1)}(x - L_1) + \frac{L_1}{2}, & x \in [L_1, L_2] \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Ils est facile de voir que $q(x)$ est bornée : $|q(x)| \leq M$, telle que $M = \max\{\frac{L_1}{2}, \frac{L_3 - L_2}{2}\}$.

On définit les fonctionnelles

$$\mathcal{F}_1(t) = - \int_{\Omega} q(x) u_t \left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right) dx, \quad \mathcal{F}_2(t) = - \int_{L_1}^{L_2} q(x) v_x v_t dx.$$

Alors nous avons les résultats suivants

Lemme 3.3.4. *Les fonctionnels $\mathcal{F}_1(t)$ et $\mathcal{F}_2(t)$ vérifient*

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathcal{F}_1(t)}{dt} \\ &\leq \left(\frac{l + g_0}{2} + \frac{M^2 \mu_1^2}{4\varepsilon_1} + \varepsilon_1 M^2 \right) \int_{\Omega} u_t^2 dx + (l^2 + 2l^2 \varepsilon_1) \int_{\Omega} u_x^2 dx \\ &\quad + \frac{M^2 \mu_2^2}{4\varepsilon_1} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx + (g_0 + 2g_0 \varepsilon_1) \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx \\ &\quad - \frac{g(0)}{4\varepsilon_1} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g'(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx - \left[\frac{l + g_0}{2} q(x) u_t^2 \right]_{\partial\Omega} \\ &\quad - \left[\frac{q(x)}{2} \left(l u_x(x, t) + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right)^2 \right]_{\partial\Omega} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}_2(t)}{dt} &\leq - \frac{L_1 + L_3 - L_2}{4(L_2 - L_1)} \left(\int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} bv_x^2 dx \right) + \frac{L_1}{4} v_t^2(L_1) \\ &\quad + \frac{L_3 - L_2}{4} v_t^2(L_2) + \frac{b}{4} \left((L_3 - L_2) v_x^2(L_2, t) + L_1 v_x^2(L_1, t) \right). \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

En ce qui suit [4], on définit le fonctionnel

$$I(t) = \tau \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-\tau\rho} y^2(x, \rho, t) d\rho dx,$$

alors nous avons le lemme suivant.

Lemme 3.3.5. *Le fonctionnel $I(t)$ satisfait*

$$\frac{dI(t)}{dt} \leq -c_2 \left(\int_{\Omega} y^2(x, 1, t) dx + \tau \int_{\Omega} \int_0^1 y^2(x, \rho, t) d\rho dx \right) + \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx.$$

Finalement, pour la preuve du Théorème 3.1.1 les auteurs dans [40] ont considéré le fonctionnel de Lyapunov suivant

$$L(t) = N_1 E(t) + N_2 \mathcal{D}(t) + \mathcal{F}_1(t) + N_4 \mathcal{F}_2(t) + I(t), \quad (3.3.9)$$

tel que N_1, N_2, N_4 sont des constantes positives. Ils ont prouvé l'équivalence entre $L(t)$ et $E(t)$. Puis par le choix des constantes une par une, ils ont prouvé l'existence de $d_0, d_2 > 0$ telles que pour tout $d_1 \in (d_0, d_2)$ (3.3.3) est vérifiée.

Décroissance pour un problème de transmission avec mémoire et terme de retard en fonction de temps

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons un problème de transmission avec mémoire et un terme de retard en fonction de temps,

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - au_{xx}(x, t) + \int_0^t g(t-s)u_{xx}(x, s)ds + \mu_1 u_t(x, t) \\ + |\mu_2| u_t(x, t - \tau(t)) = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ v_{tt}(x, t) - bv_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (L_1, L_2) \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (4.1.1)$$

tels que $0 < L_1 < L_2 < L_3$, $\Omega =]0, L_1[\cup]L_2, L_3[$, a, b, μ_1 , sont des constantes positives, et μ_2 est un nombre réel $\tau(t) > 0$ est la fonction retard.

Le système (4.1.1) est muni des conditions aux limites et conditions de transmission comme suit :

$$\begin{cases} u(0, t) = u(L_3, t) = 0, \\ u(L_i, t) = v(L_i, t), & i = 1, 2, \\ \left(a - \int_0^t g(s)ds \right) u_x(L_i, t) = bv_x(L_i, t), & i = 1, 2, \end{cases} \quad (4.1.2)$$

et des conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t - \tau(t)) = f_0(x, t - \tau(t)), & x \in \Omega, t \in [0, \bar{\tau}], \\ v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), & x \in]L_1, L_2[. \end{cases} \quad (4.1.3)$$

Supposons qu'il existe des constantes positives $\tau_0, \bar{\tau}$ telles que

$$0 < \tau_0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau} \quad (4.1.4)$$

De plus, supposons que

$$\tau \in W^{2,\infty}([0, T]), \quad \forall T > 0. \quad (4.1.5)$$

et

$$\tau'(t) \leq d < 1, \quad \forall t > 0, \quad (4.1.6)$$

Les problèmes (4.1.1)-(4.1.3) liés à la propagation d'ondes sur un corps composé de deux matériels élastiques différents sont appelés problèmes de transmission, dont le corps est constitué par une partie élastique et une partie visco-élastique. Durant les dernières années, plusieurs auteurs ont étudié les équations d'ondes avec amortissement visco-élastique et ont montré que la dissipation produite par la partie visco-élastique peut produire la décroissance de la solution voir par exemple [14, 15, 26] est les références dans le domaine.

Calvalcanti et al. dans [26] ont étudié l'équation ci-dessous,

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t - \tau) \Delta u(\tau) d\tau + a(x)u_t + |u|^\gamma u = 0, \text{ in } \Omega \times (0, \infty)$$

tels que $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $a(x) \geq a_0 > 0$ sur $w \subset \Omega$, avec w satisfaisant des restrictions géométriques, et

$$-\zeta_1 g(t) \leq g'(t) \leq -\zeta_2 g(t), \quad t \geq 0, \quad (4.1.7)$$

les auteurs ont montré la décroissance exponentielle en utilisant la méthode de perturbation de l'énergie. Berrimi et Messaoudi [14] ont obtenu le même résultat avec moins d'exigences sur, a et g tout les deux.

Kirane et Said-houari [58] ont considéré l'équation visco-élastique avec retard

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t - s) \Delta u(x - s) ds + \mu_1 u_t(x, t) + \mu_2 u_t(x, t - \tau) = 0, \text{ sur } \Omega \times (0, \infty)$$

tels que μ_1 , et μ_2 sont des constantes positives. Ils ont établi un résultat générale de décroissance de l'énergie sous les conditions $0 \leq \mu_2 \leq \mu_1$. Récemment, Liu, [69] a confirmé ce résultat en considérant l'équation avec un terme de fonction retard, telle que le coefficient μ_2 du retard n'est pas nécessairement positif. Pour $\mu_2 = 0$, le système (4.1.1)-(4.1.3) a été étudié par [8]; pour $\Omega = [0, L_1]$, les auteurs ont montré l'existence et l'unicité de la solution, et stabilité exponentielle de l'énergie totale. Muñoz Rivera et Oquendo [82] ont étudié les propagation d'ondes sur un corps constitué d'une partie élastique et une composante visco-élastique comme suit, ils ont considéré le problème de transmission

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - \alpha_1 u_{xx} = 0, & x \in]0, L_0[, t > 0, \\ \rho_2 v_{tt} - \alpha_2 v_{xx} + \int_0^t g(t-s)v_{xx}(s)ds = 0, & x \in]L_0, L[, t > 0, \end{cases} \quad (4.1.8)$$

avec les conditions de limites et les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} u(0, t) = v(L, t), & u(L_0, t) = v(L_0, t), & t > 0, \\ \alpha_1 u_x(L_0, t) = \alpha_2 v_x(L_0, t) - \int_0^t g(t-s)v_x(s)ds, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in [0, L_0], \\ v(x, 0) = v_0(x), & v_t(x, 0) = v_1(x), & x \in [L_0, L]. \end{cases} \quad (4.1.9)$$

Ici ρ_1 et ρ_2 sont les densités des matériels et α_1, α_2 sont les coefficients élastiques et g est une fonction positive exponentiellement décroissante. Ils ont montré que la dissipation produite par la partie visco-élastique est suffisante pour générer une décroissance exponentielle pour la solution, quelque soit la petitesse de sa valeur. Ma et Oquendo [70] ont considéré un problème de transmission impliquant deux équations d' Euler–Bernoulli modélisant la vibration d'une poutre composée. En utilisant uniquement l'amortissement d'un seul terme au bord, ils ont montré l'existence globale et la propriété de décroissance de la solution. Marzocchi et al [73] ont examiné un problème de transmission uni-dimensionnel semi-linéaire de thermos-élasticité classique pour lequel ils ont montré que la combinaison de la première et la troisième énergies de la solution décroît exponentiellement vers zéro, quelque soit la petitesse de l'amortissement. Un même résultat a été montré par Messaoudi et Said-Houari [79], où un problème de transmission thermos-élastique de type III a été examiné. Voir aussi Marzocchi et al. [74] pour un problème de transmission thermos-élastique multidimensionnel linéaire.

Pour $\mu_2 > 0$, le problème (4.1.1) contient un terme retard dans le feedback interne. Ce term de retard peut déstabiliser le système (4.1.1)-(4.1.3) qui est exponentiellement stable en l'absence de retards [8]. L'effet du retard sur la stabilité des systèmes hyperboliques a été étudié par plusieurs auteurs. Voir par exemple [31, 32].

Dans [84] les auteurs ont examiné un système d'équations d'ondes avec amortissement linéaire au bord avec retard

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) = 0, & x \in \Gamma_0, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = \mu_1 u_t(x, t) + \mu_2 u_t(x, t - \tau), & x \in \Gamma_1, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x, t - \tau) = g_0(x, t - \tau), & x \in \Omega, \tau \in (0, 1), \end{cases} \quad (4.1.10)$$

sous les hypothèses

$$\mu_2 < \mu_1, \quad (4.1.11)$$

ils ont prouvé que la solution est exponentiellement stable. Par contre, si (4.1.11) n'est pas vérifié, ils ont trouvé une suite de retards pour laquelle la solution correspondante de (4.1.10) sera instable. Nous rappelons le résultat trouvé par Xu et al [106], où les auteurs ont prouvé le même résultat comme dans [84] pour un espace uni-dimensionnel en adoptant l'approche spectrale analytique.

Motivé par les résultats ci-dessus, nous avons l'intention de considérer la bonne position et la décroissance de la solution du problème (4.1.1)-(4.1.3). La difficulté qui peut être rencontrée ici est l'apparence de terme visco-élastique et le retard en même temps. Le but de ce chapitre est l'étude de la stabilité asymptotique du système (4.1.1)-(4.1.3) tels que la condition $|\mu_2| < \mu_1$. Le chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous donnons quelques outils nécessaires par notre travail et exposons notre résultat. Le résultat de la décroissance générale est donné dans la section 3.

4.2 Préliminaires et principaux résultats

Dans cette section, nous présentons quelques notions et outils qui vont être utilisés pour montrer nos résultats.

Tout d'abord nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} (g * h)(t) &:= \int_0^t g(s-t)h(s)ds \\ (g \diamond h)(t) &:= \int_0^t g(s-t)|h(t) - h(s)|ds, \\ (g \square h)(t) &:= \int_0^t g(t-s)|h(t) - h(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Notons que le signe de $(g \square h)(t)$ dépend du signe de g . Nous pouvons facilement voir que l'opérateur défini en haut satisfait

$$(g * h)(t) := \left(\int_0^t g(s) \right) h(t) ds - (g \diamond h)(t),$$

$$|(g \diamond h)(t)|^2 \leq \left(\int_0^t |g(s)| ds \right) (|g \square h)(t).$$

Lemme 4.2.1. *Pour tout $g, h \in C^1(\mathbb{R})$, l'identité suivante est vérifiée*

$$2[g * h]h' = g' \square h - g(t)|h|^2 - \frac{d}{dt} \left\{ g \square h - \left(\int_0^t g(s) ds \right) |h|^2 \right\}$$

Pour la fonction de relaxation g , nous supposons

(G1) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une C^1 fonction satisfaisant

$$g(0) > 0, 0 < \beta(t) := a - \int_0^t g(s) ds \quad \text{and} \quad 0 < \beta_0 := a - \int_0^\infty g(s) ds.$$

(G2) Il existe une fonction différentiable $\xi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$g'(t) \leq -\xi(t)g(t), \forall t \geq 0 \quad \text{and} \quad \int_0^\infty \xi(t) = +\infty.$$

Ces hypothèses impliquent

$$\beta_0 \leq \beta(t) \leq a. \tag{4.2.1}$$

Nous introduisons une nouvelle variable comme suit [84]

$$y(x, \rho, t) = u_t(x, t - \tau(t)\rho), x \in \Omega, \rho \in (0, 1), t > 0. \tag{4.2.2}$$

D'où, on obtient

$$\tau(t)y_t(x, \rho, t) + (1 - \tau'(t)\rho)y_\rho(x, \rho, t) = 0, \quad \text{in } \Omega \times (0, 1) \times (0, +\infty). \tag{4.2.3}$$

Alors, le problème (4.1.1) est équivalent au système

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - au_{xx}(x, t) + g * u_{xx} + \mu_1 u_t(x, t) + |\mu_2|y(x, 1, t) = 0, & (x, t) \in \Omega \times]0, +\infty[, \\ v_{tt}(x, t) - bv_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in]L_1, L_2[\times]0, +\infty[, \\ \tau(t)y_t(x, \rho, t) + (1 - \tau'(t)\rho)y_\rho(x, \rho, t) = 0, & \text{in } \Omega \times (0, 1) \times (0, +\infty), \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Les conditions aux limites et de transmission prennent la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(0, t) = u(L_3, t) = 0, & (x, t) \in \Omega \times [0, +\infty), \\ u(L_i, t) = v(L_i, t), & i = 1, 2, \quad t \in (0, +\infty), \\ \left(a - \int_0^t g(s) ds \right) u_x(L_i, t) = b v_x(L_i, t), & i = 1, 2, \quad t \in (0, +\infty), \\ y(x, 0, t) = u_t(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty) \\ y(x, \rho, t) = f_0(x, t - \tau(t)), & (x, t) \in \Omega \times (0, \bar{\tau}). \end{array} \right. \quad (4.2.5)$$

Similaire à [95, 11], nous notons l'espace de Hilbert X_* défini par

$$X_* = \left\{ (u, v) \in H^1(\Omega) \cap H^1(L_1, L_2) : u(0, t) = u(L_3, t) = 0, \right. \\ \left. u(L_i, t) = v(L_i, t), \left(a - \int_0^t g(s) ds \right) u_x(L_i, t) = b v_x(L_i, t), i = 1, 2 \right\}.$$

et

$$\mathcal{L}^2 = L^2(\Omega) \times L^2(L_1, L_2).$$

Nous traitons le problème sans étudier l'existence et l'unicité. Cette dernière peut être obtenue par combinaison de [[58], [39]].

Lemme 4.2.2. *Supposons que $|\mu_2| \leq \mu_1$, (G1) et (G2) sont vérifiés. Etant donné $(u_0, v_0) \in X_*$, $(u_1, v_1) \in \mathcal{L}^2$ et $f_0 \in L^2((0, 1), H^1(\Omega))$, il existe une solution faible (u, v, y) pour le problème (4.2.4)- (4.2.5) telle que*

$$\begin{aligned} (u, v) &\in C(\mathbb{R}_+; X_*) \cap C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}^2), \\ y &\in C(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1), H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Pour toute solution régulière de (4.1.1)-(4.1.3), on définit les énergies suivantes

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx + \frac{\beta(t)}{2} \int_{\Omega} u_x^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g \square u_x) dx \quad (4.2.6)$$

$$E_2(t) = \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} v_t^2(x, t) dx + \frac{b}{2} \int_{L_1}^{L_2} v_x^2(x, t) dx. \quad (4.2.7)$$

L'énergie totale est définie par

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) + \frac{\zeta}{2} \int_{\Omega} \int_{t-\tau(t)}^t u_x^2(x, s) ds dx \quad (4.2.8)$$

telle que ζ est une constante positive définie par

$$\frac{|\mu_2|}{\sqrt{1-d}} \leq \zeta \leq 2\mu_1 - \frac{|\mu_2|}{\sqrt{1-d}} \quad (4.2.9)$$

Notre résultat de décroissance est donné comme suit :

Théorème 4.2.3. *Soit (u, v) la solution de (4.1.1)-(4.1.3). Supposons que $|\mu_2| < \mu_1$ and*

$$b > \frac{4(L_2 - L_1)}{L_1 + L_3 - L_2} \beta_0, \quad a > \frac{4(L_2 - L_1)}{L_1 + L_3 - L_2} \beta_0 \quad (4.2.10)$$

Alors il existe deux constantes positives C et d_0 , telles que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $d_1 \in (0, d_0)$

$$E(t) \leq C e^{-d_1 \int_0^t \xi(s) ds}. \quad (4.2.11)$$

4.3 Décroissance générale de la solution

Dans cette section nous étudions le comportement asymptotique du système (4.1.1)-(4.1.3). We use the following lemmas.

Lemme 4.3.1. *Soit (u, v, y) la solution du problème ((4.1.1)-(4.1.3)). Supposons que $|\mu_2| < \mu_1$. Alors nous avons*

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &\leq -\left(\mu_1 - \frac{|\mu_2|\sqrt{1-d}}{2} - \frac{\zeta}{2}\right) \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx \\ &\quad - \left(\frac{\zeta(1-d)}{2} - \frac{|\mu_2|}{2\sqrt{1-d}}\right) \int_{\Omega} u_t^2(x, t - \tau(t)) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g' \square u_x)(t) dx \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Démonstration. Multiplions la première équation du système (4.2.4) par u_t , et intégrons par partie, et avec (4.2.5), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} [u_t^2(x, t) + a u_x^2(x, t)] dx \right\} \\ &= -\mu_1 \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx - |\mu_2| \int_{\Omega} u_t(x, t) u_t(x, t - \tau(t)) dx + \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} u_x(s) u_{xt}(t) ds dx. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Du lemme 2.1, le dernier terme du coté droit de (4.3.2) peut être écrit comme suit

$$\begin{aligned} & \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} u_x(s) u_{xt}(t) ds dx + \frac{1}{2} g(t) \int_{\Omega} u_x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^t g(s) \int_{\Omega} u_x^2(x, t) - \int_{\Omega} (g \square u_x)(t) dx \right\} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g' \square u_x)(t) dx. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Alors (4.3.2) devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} [u_t^2(x, t) + \beta(t) u_x^2(x, t)] dx \right\} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g \square u_x)(t) dx \\ &= -\mu_1 \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx - |\mu_2| \int_{\Omega} u_t(x, t) u_t(x, t - \tau(t)) dx \\ & \quad - \frac{1}{2} g(t) \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g' \square u_x)(t) dx \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

D'autre part, nous avons

$$\frac{dE_2(t)}{dt} = b[v_x v_t]_{L_1}^{L_2}. \quad (4.3.5)$$

Utilisons le fait que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_{t-\tau(t)}^t u_t^2(x, s) ds dx = \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx - (1 - \tau'(t)) \int_{\Omega} u_t^2(x, t - \tau(t)) dx \quad (4.3.6)$$

et collectons (4.3.2), (4.3.3), (4.3.4) (4.3.5), et utilisons (4.1.2) en appliquant l'inégalité de Young, nous montrons que (4.3.1) est vérifiée. La preuve est complétée. \square

Notons par

$$c_0 = \min \left\{ \mu_1 - \frac{|\mu_2| \sqrt{1-d}}{2} - \frac{\zeta}{2}, \frac{\zeta(1-d)}{2} - \frac{|\mu_2|}{2\sqrt{1-d}} \right\} \quad (4.3.7)$$

Alors (4.3.1) devient

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq -c_0 \left[\int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx + \int_{\Omega} u_t^2(x, t - \tau(t)) dx \right] + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g' \square u_x)(t) dx \quad (4.3.8)$$

En suite [4], nous définissons le fonctionnel

$$I(t) = \int_{\Omega} \int_{t-\tau(t)}^t e^{s-t} u_t^2(x, s) ds dx,$$

Nous formulons le lemme suivant

Lemme 4.3.2. *Let (u, v) be the solution of (4.1.1)-(4.1.3). Alors*

$$\frac{dI(t)}{dt} \leq \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx - (1-d)e^{-\bar{\tau}} \int_{\Omega} u_t^2(x, t - \tau(t)) dx - e^{-\bar{\tau}} \int_{\Omega} \int_{t-\tau(t)}^t u_t^2(x, s) ds dx. \quad (4.3.9)$$

Démonstration. By differentiating $I(t)$ and using (4.1.4)-(4.1.6), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx - \int_{\Omega} e^{-\tau(t)} u_t^2(x, t - \tau(t)) (1 - \tau'(t)) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \int_{t-\tau(t)}^t e^{s-t} u_t^2(x, s) ds dx. \\ &\leq \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx - (1-d)e^{-\bar{\tau}} \int_{\Omega} u_t^2(x, t - \tau(t)) dx \\ &\quad - e^{-\bar{\tau}} \int_{\Omega} \int_{t-\tau(t)}^t u_t^2(x, s) ds dx \end{aligned}$$

□

Notons

$$c_1 = \min \left\{ (1-d)e^{-\bar{\tau}}, e^{-\bar{\tau}} \right\} \quad (4.3.10)$$

Alors (4.3.9) devient

$$\frac{dI(t)}{dt} \leq \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx - c_1 \left\{ \int_{\Omega} u_t^2(x, t - \tau(t)) dx + \int_{\Omega} \int_{t-\tau(t)}^t u_t^2(x, s) ds dx \right\}. \quad (4.3.11)$$

Maintenant, nous définissons le fonctionnel $\mathcal{D}(t)$ comme suit

$$\mathcal{D}(t) = \int_{\Omega} uu_t dx + \frac{\mu_1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} vv_t dx. \quad (4.3.12)$$

Alors, nous avons l'estimation suivante.

Lemme 4.3.3. *Le fonctionnel $\mathcal{D}(t)$ satisfait*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{D}(t) &\leq (c^* \epsilon + \epsilon - \beta(t)) \int_{\Omega} u_x^2 dx - b \int_{L_1}^{L_2} v_x^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{4\epsilon} (a - \beta(t)) \int_{\Omega} (g \square u_x) dx + \frac{\mu_2^2}{4\epsilon} \int_{\Omega} u_t^2(x, t - \tau(t)) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Démonstration. Calculons la dérivée de $\mathcal{D}(t)$ avec respect de t et en utilisant (4.2.4) , nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\mathcal{D}(t) &= \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx - \int_{\Omega} (au_x - g \star u_x)u_x, dx - b \int_{L_1}^{L_2} v_x^2 dx \\
 &\quad - |\mu_2| \int_{\Omega} u(x, t)u_t(x, t - \tau(t))dx \\
 &= \int_{\Omega} u_t^2 - \beta(t) \int_{\Omega} u_x^2 - \int_{\Omega} (g \diamond u_x)u_x dx \\
 &\quad - |\mu_2| \int_{\Omega} u(x, t)u_t(x, t - \tau(t))dx.
 \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

D'autre part, nous avons de l'inégalité de Poincaré et de l'inégalité de Young,

$$|\mu_2| \int_{\Omega} u(x, t)u_t(x, t - \tau(t)) dx \leq \frac{\mu_2^2}{4\epsilon} \int_{\Omega} u_t(x, t - \tau(t))dx + c^* \epsilon \int_{\Omega} u_x^2 dx \tag{4.3.15}$$

où $\epsilon > 0$.

L'inégalité de Young et (G1) donnent

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (g \diamond u_x)u_x dx &\leq \epsilon \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} \int_{\Omega} (g \diamond u_x)^2 dx \\
 &\leq \epsilon \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} (a - \beta(t)) \int_{\Omega} (g \square u_x) dx
 \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Insérons l'estimation (4.3.15, et (4.3.16) dans (4.3.14), alors (4.3.13) est réalisée. La preuve est complétée. \square

Maintenant, s'inspirant de [73], nous introduisons la fonction

$$q(x) = \begin{cases} x - \frac{L_1}{2}, & x \in [0, L_1], \\ x - \frac{L_2 + L_3}{2}, & x \in [L_2, L_3], \\ \frac{L_2 - L_3 - L_1}{2(L_2 - L_1)}(x - L_1) + \frac{L_1}{2}, & x \in [L_1, L_2] \end{cases} \tag{4.3.17}$$

Il est facile de voir que $q(x)$ est bornée, c'est c'est-à-dire $|q(x)| \leq M$, tels que $M = \max(\frac{L_1}{2}, \frac{L_3 - L_2}{2})$ est une constante positive.

Ensuite, nous définissons les fonctionnelles

$$\mathcal{F}_1(t) = - \int_{\Omega} q(x)u_t(au_x - g \star u_x) dx, \quad \mathcal{F}_2(t) = - \int_{L_1}^{L_2} q(x)v_x v_t dx.$$

Alors, nous obtenons les estimations.

Lemme 4.3.4. *Pour tout $\epsilon_1 > 0$, nous avons l'estimation :*

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{F}_1(t) &\leq \left[-\frac{q(x)}{2} (au_x - g \star u_x)^2 \right]_{\partial\Omega} - \left[\frac{a}{2} q(x) u_t^2 \right]_{\partial\Omega} + \left[\frac{a}{2} + \frac{\mu_1^2}{2\epsilon_1} + \frac{M^2}{4\epsilon_1} \right] \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
 &+ \left[\epsilon_1 M^2 a^2 + \beta^2(t) + 2M^2 \epsilon_1 (a - \beta(t))^2 + c^2 \epsilon_1 \right] \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{\mu_2^2}{2\epsilon_1} \int_{\Omega} u_t^2(x, t - \tau(t)) dx \\
 &+ \left(1 + 2M^2 \epsilon_1 \right) (a - \beta(t)) \int_{\Omega} (g \square u_x) dx + (a - \beta(t)) \epsilon_1 \int_{\Omega} (g' \square u_x) dx.
 \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{F}_2(t) &\leq \frac{L_2 - L_3 - L_1}{4(2 - L_1)} \left(\int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} b v_x^2 dx \right) \\
 &+ \frac{b}{4} \left((L_3 - L_2) v_x^2(L_2, t) + L_1 v_x^2(L_1, t) \right).
 \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

Démonstration. Prenons la dérivée de $\mathcal{F}_1(t)$ avec respect de t et utilisons (4.1.1), on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{F}_1(t) &= - \int_{\Omega} q(x) u_{tt} (au_x - g \star u_x) dt dx - \int_{\Omega} q(x) u_t (au_{xt} - g(t) u_x(t) + (g' \diamond u_x)(t)) dx \\
 &= \left[\frac{q(x)}{2} (au_x - g \star u_x)^2 \right]_{\partial\Omega} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q'(x) (au_x - u_x)^2 dx - \left[\frac{a}{2} q(x) u_t^2 \right]_{\partial\Omega} dx \\
 &+ \frac{a}{2} \int_{\Omega} q'(x) u_t^2 dx - \int_{\Omega} q(x) (\mu_1 u_t(x, t) + |\mu_2| u_t(x, t - \tau(t))) (g \star u_x) dx \\
 &+ \int_{\Omega} q(x) a u_x (\mu_1 u_t(x, t) + |\mu_2| u_t(x, t - \tau(t))) dx \\
 &- \int_{\Omega} q(x) u_t [(g' \diamond u_x)(t) - g(t) u_x] dx.
 \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

Notons que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_{\Omega} q'(x) (au_x - g \star u_x)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(a - \int_0^t g(s) ds \right) u_x + g \diamond u_x \right]^2 dx \\
 &\leq \int_{\Omega} |\beta(t)|^2 u_x^2 dx + \int_{\Omega} |g \diamond u_x|^2 dx \\
 &\leq \int_{\Omega} |\beta(t)|^2 u_x^2 dx + (a - \beta(t)) \int_{\Omega} (g \square u_x) dx
 \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

L'inégalité de Young donne pour tout $\epsilon_1 > 0$

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} q(x) a u_x (\mu_1 u_t(x, t) + |\mu_2| u_t(x, t - \tau(t))) dx \\
 &\leq \epsilon_1 M^2 a^2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{\mu_1^2}{4\epsilon_1} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{\mu_2^2}{4\epsilon_1} \int_{\Omega} u_t^2(x, t - \tau(t)) dx
 \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} q(x)u_x(\mu_1 u_t(x, t) + |\mu_2|u_t(x, t - \tau(t))(g \star u_x))dx \\
 & \leq \epsilon_1 M^2 \int_{\Omega} (g \star u_x)^2 dx + \frac{\mu_1^2}{4\epsilon_1} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{\mu_2^2}{4\epsilon_1} \int_{\Omega} u_t^2(x, t - \tau(t))dx \\
 & \leq 2\epsilon_1 M^2 (a - \beta(t))^2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + 2\epsilon_1 M^2 (a - \beta(t)) \int_{\Omega} (g \square u_x) dx + \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
 & \quad + \frac{\mu_2^2}{4\epsilon_1} \int_{\Omega} u_t^2(x, t - \tau(t))dx
 \end{aligned} \tag{4.3.23}$$

en outre

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} q(x)u_t[(g' \diamond u_x)(t) - g(t)u_x]dx \\
 & \leq \frac{M^2}{4\epsilon_1} \int_{\Omega} u_t^2 dx + c^2 \epsilon_1 \int_{\Omega} u_x^2 dx + (a - \beta(t))\epsilon_1 \int_{\Omega} (g' \square u_x) dx.
 \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

Insérons (4.3.21)-(4.3.24), dans (4.3.20) on obtient (4.3.18).

Par la même méthode, dérivons $\mathcal{F}_2(t)$ avec respect de t , on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{F}_2(t) &= - \int_{L_1}^{L_2} q(x)v_{tx}v_t dx - \int_{L_1}^{L_2} q(x)v_xv_{tt} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} q'(x)v_t^2 dx - \frac{1}{2} [q(x)v_t^2]_{L_1}^{L_2} + \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} bq'(x)v_x^2 dx - \frac{b}{2} [q(x)v_x^2]_{L_1}^{L_2} \\
 &\leq \frac{L_2 - L_3 - L_1}{4(L_2 - L_1)} \left(\int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} bv_x^2 dx \right) \\
 &\quad + \frac{b}{4} \left((L_3 - L_2)v_x^2(L_2, t) + L_1 v_x^2(L_1, t) \right).
 \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

qui et exactement (4.3.19). □

Dénotons par

$$c_2 = |a - \beta(t)| \quad c_3 = \max((1 + M^2 \epsilon_1)c_2, \frac{1}{4\epsilon} c_2) \tag{4.3.26}$$

Démonstration du Théorème 2.3

Nous définissons le fonctionnel de Lyapunov

$$\mathcal{L}(t) = \gamma_1 E(t) + I(t) + \gamma_2 \mathcal{D}(t) + \gamma_3 \mathcal{F}_1(t) + \gamma_4 \mathcal{F}_2(t), \tag{4.3.27}$$

tels que $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et γ_4 sont des constantes positives qui vont être fixés plus tard.

Dérivons (4.3.27) avec respect de t et utilisons les lemmes ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq & \left\{ -\gamma_1 c_0 + 1 + \gamma_2 + \gamma_3 \left(\frac{a}{2} + \frac{\mu_1^2}{2\epsilon_1} + \frac{M^2}{4\epsilon_1} \right) \right\} \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
 & + \left\{ -\gamma_1 c_0 - c_1 + \frac{\mu_2^2 \gamma_2}{4\epsilon} + \frac{\mu_2^2 \gamma_3}{2\epsilon_1} \right\} \int_{\Omega} u_t^2(x, t - \tau(t)) dx \\
 & + \left\{ -\gamma_2((\beta(t) - \epsilon)(c^* + 1)) \right. \\
 & \quad \left. + \gamma_3(\epsilon_1 M^2 a^2 + \beta^2(t) + 2M^2 \epsilon_1 (a - \beta(t))^2 + c^2 \epsilon_1) \right\} \int_{\Omega} u_x^2 dx \\
 & + \left\{ b \frac{L_2 - L_3 - L_1}{4(L_2 - L_1)} \gamma_4 - \gamma_2 b \right\} \int_{L_1}^{L_2} v_x^2 dx \\
 & + \left\{ \frac{L_2 - L_3 - L_1}{4(L_2 - L_1)} \gamma_4 + \gamma_2 \right\} \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx \\
 & + (-\gamma_4 - a\gamma_3) \left[\frac{L_4}{4} v_x^2(L_1, t) + \frac{L_3 - L_2}{4} v_x^2(L_2, t) \right] \\
 & + c_3(\gamma_4 + \gamma_3) \int_{\Omega} (g \square u_x) dx + \left(\frac{\gamma_1}{2} - c_2 \gamma_3 \right) \int_{\Omega} (g' \square u_x) dx.
 \end{aligned} \tag{4.3.28}$$

Jusqu'à ce point, nous choisissons nos constantes dans (4.3.28), doucement, tels que tous les coefficients dans (4.3.28) soient négatives sauf les deux derniers.

Effectivement, sous les hypothèses (4.2.10), nous pouvons toujours trouver γ_2, γ_3 et γ_4 tels que

$$\gamma_2 < \frac{L_1 + L_3 - L_2}{4(L_2 - L_1)} \gamma_4, \quad \gamma_4 > a\gamma_3, \quad \gamma_2 > \gamma_3 \beta_0. \tag{4.3.29}$$

Une fois les constantes sont fixés, on peut choisir ϵ et ϵ_1 suffisamment petits

$$\gamma_2 \epsilon (c^* + 1) + \gamma_3 (\epsilon_1 M^2 a^2 + 2M^2 \epsilon_1 (a - \beta(t))^2 + c^2 \epsilon_1) < \gamma_2 - \gamma_3 \beta(t).$$

Nous choisissons γ_1 suffisamment large tels que les deux premiers coefficients des deux premiers termes dans (4.3.28) soient négatives et le dernier coefficient est positive. Alors nous déduisons qu'il existe deux constantes positives α_1 et α_2 tels que (4.3.28) devient

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\alpha_1 E(t) + \alpha_2 \int_{\Omega} (g \square u_x) dx. \tag{4.3.30}$$

D'autre part, d'après la définition des fonctionnels $\mathcal{D}(t), \mathcal{F}_1(t), \mathcal{F}_2(t), I(t)$, et $E(t)$, pour γ_1 suffisamment large, il existe une constante positive α_3 satisfaisant

$$|\gamma_1 \mathcal{D}(t) + \gamma_3 \mathcal{F}_1(t) + \gamma_4 \mathcal{F}_2(t) + I(t)| \leq \alpha_3 E(t). \tag{4.3.31}$$

qui implique

$$(\gamma_1 - \alpha_3)E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (\gamma_1 + \alpha_3)E(t) \quad (4.3.32)$$

D'autre part, en utilisant (G1) et (4.3.1), nous avons

$$\xi(t) \int_{\Omega} (g \square u_x) dx \leq \int_{\Omega} ((\xi g) \square u_x) dx \leq - \int_{\Omega} (g' \square u_x) dx \leq -2 \frac{d}{dt} E(t) \quad (4.3.33)$$

Nous définissons le fonctionnel $L(t)$ par

$$L(t) = \xi(t) \mathcal{L}(t) + 2\alpha_2 E(t).$$

Le fait que \mathcal{L} et $E(t)$ sont équivalents et (G2) impliquent, pour quelques constantes positives η_1 , et η_2 ,

$$\eta_1 E(t) \leq L(t) \leq \eta_2 E(t) \quad (4.3.34)$$

Utilisons (4.3.33), (4.3.34) et avec (G2), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(t) &= \xi'(t) \mathcal{L}(t) + \xi(t) \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) + 2\alpha_2 \frac{d}{dt} E(t) \\ &\leq \xi(t) \left(-\alpha_1 E(t) + \alpha_2 \int_{\Omega} (g \square u_x) dx \right) + 2\alpha_2 \frac{d}{dt} E(t) \\ &\leq -\alpha_1 \xi(t) E(t) \\ &\leq -d_0 \xi(t) L(t) \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

tels que $d_0 = \frac{\alpha_1}{\eta_2}$ nous concluons cela, pour tout $d_1 \in (0, d_0)$,

$$\frac{d}{dt} L(t) \leq -d_1 \xi(t) L(t). \quad (4.3.36)$$

Intégrons (4.3.36) sur $(0, t)$ on obtient

$$L(t) \leq L(0) e^{-d_1 \int_0^t \xi(s) ds}, \forall t \geq 0. \quad (4.3.37)$$

Alors (4.2.11) est vérifiée. Alors la preuve du théorème 2.3 est complète.

Deuxième partie

Problèmes aux limites

Un Problème aux limites d'évolution

5.1 Introduction

La théorie des inégalités variationnelles en ces dernières années, a connu un développement très vite, ayant comme modèle, la théorie variationnelle de problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles. La théorie des inégalités variationnelles représente une généralisation de la théorie des problèmes aux limites et nous permet de considérer de nouveaux problèmes découlant de beaucoup de domaines de mathématiques appliquées, comme la physique, la mécanique, la théorie de contrôle, et la science de l'ingénieur.

Alors que si la théorie variationnelle de problèmes aux limites a connu, son point de départ, d'après la méthode de projection orthogonale, la théorie des inégalités variationnelles a son point de départ d'après la projection sur un ensemble convexe. Le premier théorème d'existence pour les inégalités variationnelles a été prouvé en connexion avec la théorie des équations du second ordre à coefficients discontinus afin de les rassembler, comme elle étaient au début, théorie potentielle et théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques.

Par exemple, de résultats générales sur l'analyse des équations variationnelles, comprenant des résultats d'existence et unicité, peuvent être trouvés dans [7, 18, 44, 45, 49, 57, 68].

La théorie des inégalités variationnelles joue aussi, un rôle important dans l'étude des problèmes aux limites non linéaires qui apparaissent en mécanique, en physique et

les sciences d'ingénieur.

Le phénomène de contact entre des corps déformables ou entre des corps déformables et autre corps rigides est en abondance dans l'industrie chaque jour. Le contact de plaquettes de frein avec les disques de roues, pneus avec les roues, pistons avec les chemises, sont des exemples simples. Procédés industriels courants tels que le formage des métaux, pour l'extrusion par exemple en métal, impliquent des évolutions de contact. En raison de leur complexité inhérente, les phénomènes de contact conduisent à des modèles mathématiques exprimés en termes de problèmes non linéaires elliptiques ou problèmes d'évolution aux limites. Pour cette raison, des progrès considérables ont été accomplis récemment dans la modélisation de l'analyse mathématique. Pour cette finalité, il utilisent divers concepts mathématiques qui comprennent à la fois les inégalités variationnelles et demi-variationnelles et inclusions multivaluées. Des excellentes références sur l'analyse des problèmes de contact impliquant des matières élastiques avec ou sans friction sont [7, 18, 44, 45, 49, 57, 68]. L'analyse variationnelle de différents problèmes de contact peuvent être trouvée dans [102]. Les résultats de l'existence, d'unicité et de régularité dans l'étude de beaucoup de nouvelles classes des inégalités variationnelles sont prouvés dans [35, 50, 52, 49, 56, 86, 88, 97, 102].

Nous utiliserons une méthode appelée pénalisation. Nous tenons à souligner que cette méthode, souvent utilisée pour démontrer la régularité des solutions, peut parfois être utilisée pour obtenir cette existence lorsque les hypothèses des théorèmes généraux ne sont pas applicables. La méthode de pénalisation consiste de changer l'inégalité variationnelle par une famille de problèmes non linéaires aux limites et, de démontrer que leurs solutions convergent vers la solution de l'inégalité variationnelle d'origine. La difficulté principale est de pouvoir trouver une estimation convenable a priori. Nous soulignons qu'il existe différents choix de pénalisation. Des travaux récents en théorie d'optimisation avaient montré quelques relations entre les conditions d'optimalité, la notion de fonction écart, et la solution des inégalités variationnelles. Le résultat établi dans [6, 104] fait une référence explicite de relation entre la fonction d'écart en théorie d'optimisation et une vue variationnelle. Résoudre des problèmes d'optimisation avec contraintes c'est approximer le problème avec une fonction contenant un terme de pénalité, voir [9, 83]. En d'autres termes, dans le cas où la formulation de l'inégalité variationnelle des conditions d'équilibre déterminant un problème spécifique est caractérisée par une fonction à Jacobien symétrique, alors la solution avec les conditions d'équilibre et la solution du problème d'optimisation particulier sont les mêmes.

L'étude de la dualité des problèmes élastiques avec contraintes normales et loi de

Colomb faisaient le sujet d'étude de plusieurs travaux dont, la dualité peut être utilisée pour la dérivation des critères du problème donné indirectement en considérant, l'une des formulations alternative. Aussi, un problème donné peut être souvent résolu par la méthode de dualité, voir [102] pages 155-161. Le but de la deuxième partie de cette thèse, est d'introduire le lecteur dans la théorie mathématique des problèmes de contact des corps déformables. Ce qui concerne la modélisation mathématique et l'analyse variationnelle des modèles, comprenant l'existence, l'unicité et les résultats de convergence. Le contact est de friction et modélisé par de multiples conditions, y compris la compliance normale et le terme de mémoire.

Le but de ce chapitre est de donner une étude d'un système d'analyse variationnelle traitant un problème aux limites en utilisant les arguments des inégalités variationnelles d'évolution et des opérateurs de mémoire. Le problème qui nous intéresse dans ce chapitre conduit à partir d'une formulation variationnelle primaire à une inégalité variationnelle d'évolution. En revanche, sa formulation variationnelle duale est sous la forme d'une inégalité variationnelle avec un opérateur de mémoire. Pour introduire ce problème, soit L , h et T des constantes positive donnés, on note $\Omega = (0, L) \times (-h, h)$. Partout ci-dessous, nous utilisons la notation (x, y) pour un point de Ω et les indices x et y représenteront les dérivées partielles avec respect de la variable. Le problème considéré est le suivant.

Soit $\Omega = (0, L) \times (-h, h)$ tel que $L > 0$ et $h > 0$. Soit $T > 0$. Nous considérons le problème aux limites suivant.

Problème \mathcal{P} . *Trouver les fonctions $u = u(x, y, t) : [0, L] \times [-h, h] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et $w = w(x, t) : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que*

$$\lambda \dot{u}_{xx} + E u_{xx} + \mu \dot{u}_{yy} + G u_{yy} + q_B = 0 \quad (5.1.1)$$

$$\text{pour tout } (x, y) \in \Omega, t \in [0, T],$$

$$\mu \dot{w}_{xx} + G w_{xx} + (\lambda - \mu) \dot{u}_{xy} + (E - G) u_{xy} + f_B = 0 \quad (5.1.2)$$

$$\text{pour tout } (x, y) \in \Omega, t \in [0, T],$$

$$u(0, y, t) = w(0, t) = 0 \quad \text{pour tout } y \in [-h, h], t \in [0, T], \quad (5.1.3)$$

$$\lambda \dot{u}_x(L, y, t) + E u_x(L, y, t) = 0 \quad (5.1.4)$$

$$\text{pour tout } y \in [-h, h], \quad t \in [0, T],$$

$$\mu(\dot{u}_y(L, y, t) + \dot{w}_x(L, y, t)) + G(u_y(L, y, t) + w_x(L, y, t)) = 0 \quad (5.1.5)$$

$$\text{pour tout } y \in [-h, h], \quad t \in [0, T].$$

$$\mu(\dot{u}_y(x, h, t) + \dot{w}_x(x, t)) + G(u_y(x, h, t) + w_x(x, t)) = q_N(x, t) \quad (5.1.6)$$

$$\text{pour tout } x \in [0, L], \quad t \in [0, T],$$

$$(\lambda - 2\mu)\dot{u}_x(x, h, t) + (E - 2G)u_x(x, h, t) = f_N(x, t) \quad (5.1.7)$$

$$\text{pour tout } x \in [0, L], \quad t \in [0, T].$$

$$|(\lambda - 2\mu)(\dot{u}_x(x, -h, t) + (E - 2G)u_x(x, -h, t))| \leq g, \quad (5.1.8)$$

$$-(\lambda - 2\mu)(\dot{u}_x(x, -h, t) - (E - 2G)u_x(x, -h, t)) = g \frac{\dot{w}(x, t)}{|\dot{w}(x, t)|}$$

$$\text{if } \dot{w}(x, t) \neq 0, \quad \text{pour tout } x \in [0, L], \quad t \in [0, T],$$

$$\mu(\dot{u}(x, -h, t) + \dot{w}(x, t)) + G(u_y(x, -h, t) + w_x(x, t)) = 0 \quad (5.1.9)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad w(x, 0) = w_0(x), \quad (5.1.10)$$

$$\text{pour tout } x \in [0, L], \quad y \in [-h, h].$$

Problème \mathcal{P} décrit l'équilibre d'une plaque visco-élastique soumis à l'action des forces du corps et des tractions et à des contraintes unilatérales sur la frontière. Ici Ω représente la section transversale de la plaque, u est le déplacement horizontal et w est le déplacement vertical. λ et μ sont les coefficients positives de viscosité et E et G sont des constantes positives élastiques.

On donne, dans ce qui suit, une brève description des équations et conditions aux limites du problème \mathcal{P} , y compris leur signification mécanique.

Premièrement, les équations (5.1.1) et (5.1.2) représentent les équations d'équilibre pour lesquelles les fonctions $q_B = q_B(x, y, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_B = f_B(x, y, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sont les composantes verticales et horizontale des forces du corps.

La condition (5.1.3) montre que la plaque est fixée sur la frontière $x = 0$ et les conditions (5.1.4), (5.1.5) montre que la frontière $x = L$ est libre de tractions. Ensuite, les conditions (5.1.6), (5.1.7) représentent la condition de traction. ici, les fonctions

$q_N = q_N(x, t) : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_N = f_N(x, t) : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ dénotent les composantes horizontale et verticale de la force de traction forces qui actent sur le sommet $y = h$ de la plate.

La condition (5.1.8) représente la condition de contact bilatérale contact condition sur le dessous $x = -h$ et la condition (5.1.9) représente la loi de frottement, pour la quelle la fonction $g \geq 0$ est donnée.

Finalement, (5.1.10) représente la condition initiale pour laquelle les fonctions u et w sont les déplacements initiales horizontal et vertical, respectivement.

Le reste du Chapitre est structuré comme suit. Dans la Section 5.2 nous listons les hypothèses sur les données et dérivons la formulation variationnelle du problème \mathcal{P} . Dans la Section 5.3 nous énonçons et prouvons notre résultat, Théorème 5.3.1, qui énonce l'unique faible du problème. La démonstration est basée sur les arguments des inégalités variationnelles d'évolution.

Dans la Section 5.4 nous énonçons et démontrons le résultat de convergence, Théorème 5.4.1. Il énonce la dépendance continue de la solution avec les donnés. Finalement, dans la Section 5.5 nous introduisons la formulation variationnelle duale du problème \mathcal{P} pour laquelle nous prouvons une existence, unicité et résultat d'équivalence, Théorème 5.5.2.

5.2 Variational formulation

Nous commençons par des notations et des notions préliminaires. Alors, pour tout espace de Hilbert Y notons par $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ produit scalaire $\| \cdot \|_Y$ la norme associée, i.e. $\|y\|_Y^2 = \langle u, u \rangle_Y$ pour tout $y \in Y$. Pour un espace normé Y nous notons par $C([0, T]; Y)$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0, T]$ à valeurs dans Y , équipé de la norme canonique. En outre, $\| \cdot \|_{\mathcal{L}(Y, Z)}$ dénote la norme pour l'espace des opérateurs linéaires continus sur Y à valeur dans l'espace normé Z .

Partout ci-dessous, nous utilisons la notation standard pour les espaces de Lebesgue et de Sobolev. En plus, rappelons que $\Omega = (0, L) \times (-h, h)$, nous introduisons les espaces

$$V = \{u \in H^1(\Omega) : u(0, \cdot) = 0\}, \quad W = \{w \in H^1(0, L) : w(0) = 0\}. \quad (5.2.1)$$

On notera que les égalités $u(0, \cdot) = 0$ et $w(0) = 0$ dans les définitions des espaces V et W sont comprises dans le sens des traces. Les espaces V et W sont des espaces de

Hilbert munis du produit scalaire canonique défini par

$$\langle u, \psi \rangle_V = \iint_{\Omega} (u\psi + u_x\psi_x + u_y\psi_y) dx dy \quad \forall u, \psi \in V, \quad (5.2.2)$$

$$\langle w, \varphi \rangle_W = \int_0^L (w\varphi + w_x\varphi_x) dx \quad \forall w, \varphi \in W. \quad (5.2.3)$$

Nous considérons aussi le produit d'espaces $X = V \times W$ équipé munis du produit scalaire canonique défini par

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_X = \langle u, \psi \rangle_V + \langle w, \varphi \rangle_W \quad \forall \mathbf{u} = (u, w), \mathbf{v} = (\psi, \varphi) \in X, \quad (5.2.4)$$

Nous considérons l'espace de Hilbert $U = L^2(0, L)$ muni de son produit scalaire canonique.

Sur les données du Problème \mathcal{P} nous faisons les hypothèses suivantes.

$$\lambda > 0, \quad E > 0, \quad \mu > 0, \quad G > 0. \quad (5.2.5)$$

$$f_B \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_B \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (5.2.6)$$

$$f_N \in L^2(0, T; U), \quad q_N \in L^2(0, T; U). \quad (5.2.7)$$

$$g \geq 0. \quad (5.2.8)$$

$$u_0 \in V, \quad w_0 \in W. \quad (5.2.9)$$

Sous ces hypothèses nous définissons les opérateurs $A, B : X \rightarrow X$ le fonctionnel $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ et la fonction $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow X$ par les égalités

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_X = \lambda \iint_{\Omega} u_x\psi_x dx dy + \mu \iint_{\Omega} (u_y + w_x)(\psi_y + \varphi_x) dx dy, \quad (5.2.10)$$

$$\langle B\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_X = E \iint_{\Omega} u_x\psi_x dx dy + G \iint_{\Omega} (u_y + w_x)(\psi_y + \varphi_x) dx dy, \quad (5.2.11)$$

$$j(\mathbf{v}) = g \int_0^L |\varphi| dx, \quad (5.2.12)$$

$$\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle_X \quad (5.2.13)$$

$$= \iint_{\Omega} q_B(t)\psi dx dy + \iint_{\Omega} f_B(t)\varphi dx dy + \int_0^L q_N(t)\psi dx + \int_0^L f_N(t)\varphi dx$$

$$\forall \mathbf{u} = (u, w), \mathbf{v} = (\psi, \varphi), \mathbf{v} = (\psi, \varphi) \in X, t \in [0, T]$$

Nous considérons aussi les conditions initiales $\mathbf{u}_0 \in X$ données par

$$\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0). \quad (5.2.14)$$

Nous notons que les définitions ci-dessus ne spécifient pas la dépendances des diverses fonctions aux variables x et y .

Avec ces préliminaires nous sommes dans la position d'extraire la formulation variationnelle du Problème \mathcal{P} . Nous procédons formellement. Nous supposons dans la suite que $\mathbf{u} = (u(x, y, t), w(x, t))$ représentent la solution du Problème \mathcal{P} et soit $\mathbf{v} = (\psi(x, y), \varphi(x)) \in \mathbf{X}, t \in [0, T]$ fixé. Multiplions (5.1.1) par $\psi - \dot{u}$ et intégrons sur Ω , on obtient

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \lambda \dot{u}_{xx}(x, y, t)(\psi(x, y) - \dot{u}(x, y, t)) \, dx dy \\ & + \iint_{\Omega} E u_{xx}(x, y, t)(\psi(x, y) - \dot{u}(x, y, t)) \, dx dy \\ & + \iint_{\Omega} \mu \dot{u}_{yy}(x, y, t)(\psi(x, y) - \dot{u}(x, y, t)) \, dx dy \\ & + \iint_{\Omega} G u_{yy}(x, y, t)(\psi(x, y) - \dot{u}(x, y, t)) \, dx dy + \iint_{\Omega} q_B \, dx dy = 0. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Utilisons la formule de Green nous avons,

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} E u_{xx}(x, y, t)(\psi(x, y) - \dot{u}(x, y, t)) \, dx dy \\ & = E \int_{-h}^h u_x(L, y, t)(\psi(L, y) - \dot{u}(L, y, t)) \, dy \\ & \quad - E \int_{-h}^h u_x(0, y, t)(\psi(0, y) - \dot{u}(0, y, t)) \, dy \\ & \quad - E \iint_{\Omega} u_x(x, y, t)(\psi_x(x, y) - \dot{u}_x(x, y, t)) \, dx dy. \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

Avec des arguments similaires nous avons

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} G u_{yy}(x, y, t)(\psi(x, y) - \dot{u}(x, y, t)) \, dx dy \\ & = -G \int_0^L u_y(x, -h, t)(\psi(x, -h) - \dot{u}(x, -h, t)) \, dx \\ & \quad + G \int_0^L u_y(x, h, t)(\psi(x, h) - \dot{u}(x, h, t)) \, dx \\ & \quad - G \iint_{\Omega} u_y(x, y, t)(\psi_y(x, y) - \dot{u}_y(x, y, t)) \, dx dy. \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega} \lambda \dot{u}_{xx}(x, y, t)(\psi(x, y) - \dot{u}(x, y, t)) \, dx dy & (5.2.18) \\
 &= \lambda \int_{-h}^h \dot{u}_x(L, y, t)(\psi(L, y) - \dot{u}(L, y, t)) \, dy \\
 & \quad - \lambda \int_{-h}^h \dot{u}_x(0, y, t)(\psi(0, y) - \dot{u}(0, y, t)) \, dy \\
 & \quad - \lambda \iint_{\Omega} \dot{u}_x(x, y, t)(\psi_x(x, y) - \dot{u}_x(x, y, t)) \, dx dy.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega} \mu \dot{u}_{yy}(x, y, t)(\psi(x, y) - \dot{u}(x, y, t)) \, dx dy & (5.2.19) \\
 &= -\mu \int_0^L \dot{u}_y(x, -h, t)(\psi(x, -h) - \dot{u}(x, -h, t)) \, dx \\
 & \quad + \mu \int_0^L \dot{u}_y(x, h, t)(\psi(x, h) - \dot{u}(x, h, t)) \, dx \\
 & \quad - \mu \iint_{\Omega} \dot{u}_y(x, y, t)(\psi_y(x, y) - \dot{u}_y(x, y, t)) \, dx dy.
 \end{aligned}$$

Maintenant on additionne les égalités (5.2.16)–(5.2.19), et puis on utilise les conditions aux limites (5.1.3), (5.1.4) et la définition (5.2.1) de l'espace V pour déduire que

$$\begin{aligned}
 & E \iint_{\Omega} u_x(x, y, t)(\psi_x(x, y) - \dot{u}_x(x, y, t)) \, dx dy \\
 & + G \iint_{\Omega} u_y(x, y, t)(\psi_y(x, y) - \dot{u}_y(x, y, t)) \, dx dy \\
 & \quad + \lambda \iint_{\Omega} \dot{u}_x(x, y, t)(\psi_x(x, y) - \dot{u}_x(x, y, t)) \, dx dy. \\
 & \quad + \mu \iint_{\Omega} \dot{u}_y(x, y, t)(\psi_y(x, y) - \dot{u}_y(x, y, t)) \, dx dy. \\
 & = \int_0^L (Gu_y(x, h, t) + \mu \dot{u}_y(x, h, t))(\psi(x, h) - \dot{u}(x, h, t)) \, dy \\
 & \quad - \int_0^L (Gu_y(x, -h, t) + \mu \dot{u}_y(x, -h, t))(\psi(x, -h) - \dot{u}(x, -h, t)) \, dx \\
 & \quad + \iint_{\Omega} q_B(t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, y, t)) \, dx dy & (5.2.20)
 \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $x \in [0, L]$ est fixé. Nous intégrons l'équation (5.1.2) avec respect de y sur $[-h, h]$ on déduit que

$$\begin{aligned}
 & 2h\mu \dot{w}_{xx}(x, t) + 2hGw_{xx}(x, t) \\
 & + (\lambda - \mu) \int_{-h}^h \dot{u}_{xy}(x, y, t) \, dy + (E - G) \int_{-h}^h u_{xy}(x, y, t) \, dy + \int_{-h}^h f_B(t) \, dy = 0. & (5.2.21)
 \end{aligned}$$

Alors, on écrit

$$\int_{-h}^h u_{xy}(x, y, t) \, dy = u_x(x, h, t) - u_x(x, -h, t)$$

et

$$\int_{-h}^h \dot{u}_{xy}(x, y, t) dy = \dot{u}_x(x, h, t) - \dot{u}_x(x, -h, t)$$

Pour faciliter le calcul on pose

$$\sigma = (\lambda - 2\mu)\dot{u}_x(x, -h, t) + (E - 2G)u_x(x, -h, t)$$

Utilisons (5.1.7) et (5.1.8) on obtient

$$\begin{aligned} & (\lambda - \mu) \int_{-h}^h \dot{u}_{xy}(x, y, t) dy + (E - G) \int_{-h}^h u_{xy}(x, y, t) dy & (5.2.22) \\ & = (\lambda - \mu)(\dot{u}_x(x, h, t) - \dot{u}_x(x, -h, t)) \\ & \quad + (E - G)(u_x(x, h, t) - u_x(x, -h, t)) \\ & = (\lambda - 2\mu)(\dot{u}_x(x, h, t) - \dot{u}_x(x, -h, t)) \\ & \quad + (E - 2G)(u_x(x, h, t) - u_x(x, -h, t)) \\ & \quad + \mu(\dot{u}_x(x, h, t) - \dot{u}_x(x, -h, t)) + G(u_x(x, h, t) - u_x(x, -h, t)) \\ & = -\sigma + (\lambda - 2\mu)\dot{u}_x(x, h, t) + (E - 2G)u_x(x, h, t) \\ & \quad + \mu(\dot{u}_x(x, h, t) - \dot{u}_x(x, -h, t)) + G(u_x(x, h, t) - u_x(x, -h, t)) \\ & = f_N(x, t) - \sigma + \mu(\dot{u}_x(x, h, t) - \dot{u}_x(x, -h, t)) \\ & \quad + G(u_x(x, h, t) - u_x(x, -h, t)) \end{aligned}$$

Ensuite, nous soustrairions les égalités (5.2.22) et (5.2.21) on déduit

$$\begin{aligned} & -2hGw_{xx}(x, t) - 2h\mu\dot{w}_{xx}(x, t) & (5.2.23) \\ & = f_N(x, t) - \sigma + \mu(\dot{u}_x(x, h, t) - \dot{u}_x(x, -h, t)) \\ & \quad + G(u_x(x, h, t) - u_x(x, -h, t)) + \int_{-h}^h f_B(t) dy. \end{aligned}$$

Considérons maintenant un élément $\xi = \xi(x) \in W$. Nous multiplions l'égalité (5.2.23) par ξ , et puis nous intégrons le résultat sur $[0, L]$ pour trouver que

$$\begin{aligned} & -2hG \int_0^L w_{xx}(x, t)\xi(x) dx - 2h\mu \int_0^L \dot{w}_{xx}(x, t)\xi(x) dx & (5.2.24) \\ & = \int_0^L -\sigma\xi(x) dx + \mu \int_0^L (\dot{u}_x(x, h, t) - \dot{u}_x(x, -h, t))\xi(x) dx \\ & \quad + G \int_0^L (u_x(x, h, t) - u_x(x, -h, t))\xi(x) dx \\ & \quad + \int_0^L f_N\xi(x) dx + \iint_{\Omega} f_B(t)\xi(x) dx dy \end{aligned}$$

Ensuite, nous faisons une intégration par partie et utilisons l'égalité $\xi(0) = 0$ pour voir que

$$\begin{aligned}
 & -2hG \int_0^L w_{xx}(x, t)\xi(x) dx & (5.2.25) \\
 & = -2hGw_x(L, t)\xi(L) + 2hG \int_0^L w_x(x, t)\xi_x(x) dx, \\
 & -2h\mu \int_0^L \dot{w}_{xx}(x, t)\xi(x) dx \\
 & = -2h\mu\dot{w}_x(L, t)\xi(L) + 2h\mu \int_0^L \dot{w}_x(x, t)\xi_x(x) dx,
 \end{aligned}$$

Insérons (5.2.25) dans (5.2.24) pour obtenir,

$$\begin{aligned}
 & 2hG \int_0^L w_x(x, t)\xi_x(x) dx + 2h\mu \int_0^L \dot{w}_x(x, t)\xi_x(x) dx & (5.2.26) \\
 & = \int_0^L -\sigma\xi(x)dx + \mu \int_0^L (\dot{u}_x(x, h, t) - \dot{u}_x(x, -h, t))\xi(x) \\
 & \quad + G \int_0^L (u_x(x, h, t) - u_x(x, -h, t))\xi(x)dx \\
 & \quad + 2hGw_x(L, t)\xi(L) + 2h\mu\dot{w}_x(L, t)\xi(L) \\
 & \quad + \int_0^L f_N\xi(x)dx + \iint_{\Omega} f_B\xi(x)dxdy
 \end{aligned}$$

D'autre part nous avons l'identité

$$2hG \int_0^L w_x(x, t)\xi_x(x)dx = G \iint_{\Omega} w_x(x, t)\xi_x(x)dxdy \quad (5.2.27)$$

Alors (5.2.26) devient

$$\begin{aligned}
 & G \iint_{\Omega} w_x(x, t)\xi_x(x) dxdy + \mu \iint_{\Omega} \dot{w}_x(x, t)\xi_x(x) dxdy, & (5.2.28) \\
 & = \int_0^L -\sigma\xi(x)dx + \mu \int_0^L (\dot{u}_x(x, h, t) - \dot{u}_x(x, -h, t))\xi(x) \\
 & \quad + G \int_0^L (u_x(x, h, t) - u_x(x, -h, t))\xi(x)dx \\
 & \quad + 2hGw_x(L, t)\xi(L) + 2h\mu\dot{w}_x(L, t)\xi(L) \\
 & \quad + \int_0^L f_N\xi(x)dx + \iint_{\Omega} f_B\xi(x)dxdy
 \end{aligned}$$

Maintenant, nous additionnons les égalités (5.2.20) et (5.2.28) en prenant en considération $\xi = \varphi - \dot{w}$ on obtient

$$\begin{aligned}
 & E \iint_{\Omega} u_x(x, y, t)(\psi_x(x, y) - \dot{u}_x(x, y, t)) dx dy & (5.2.29) \\
 & + G \iint_{\Omega} u_y(x, y, t)(\psi_y(x, y) - \dot{u}_y(x, y, t)) dx dy \\
 & \quad + \lambda \iint_{\Omega} \dot{u}_x(x, y, t)(\psi_x(x, y) - \dot{u}_x(x, y, t)) dx dy. \\
 & \quad + \mu \iint_{\Omega} \dot{u}_y(x, y, t)(\psi_y(x, y) - \dot{u}_y(x, y, t)) dx dy. \\
 & \quad + G \iint_{\Omega} w_x(x, t)(\varphi_x(x) - \dot{w}_x(x, t)) dx dy \\
 & \quad + \mu \iint_{\Omega} \dot{w}_x(x, t)(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t)) dx dy, \\
 \\
 & = \iint_{\Omega} q_B(t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, y, t)) dx dy \\
 & \quad + \int_0^L f_N(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t)) dx \\
 & \quad + \iint_{\Omega} f_B(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t)) dx dy \\
 & \quad \quad - \int_0^L \sigma(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t)) dx \\
 & \quad + \mu \int_0^L \dot{u}_x(x, h, t)(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t)) dx \\
 & \quad \quad + G \int_0^L u_x(x, h, t)(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t)) dx \\
 & \quad + G \int_0^L u_y(x, h, t)(\psi(x, h) - \dot{u}(x, h, t)) \\
 & \quad \quad + \mu \int_0^L \dot{u}_y(x, h, t)(\psi(x, h) - \dot{u}(x, h, t)) dx \\
 & \quad \quad - \mu \int_0^L \dot{u}_x(x, -h, t)(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t)) dx \\
 & \quad \quad - G \int_0^L u_x(x, -h, t)(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t)) dx \\
 & \quad \quad - G \int_0^L u_y(x, -h, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, -h, t)) \\
 & \quad \quad - \mu \int_0^L \dot{u}_y(x, -h, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, -h, t)) dx \\
 & \quad \quad + 2hGw_x(L, t)\xi(L) + 2h\mu\dot{w}_x(L, t)\xi(L)
 \end{aligned}$$

d'autre part nous avons

$$\begin{aligned}
 & \mu \int_0^L \dot{u}_x(x, h, t)(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t))dx & (5.2.30) \\
 & = \mu \dot{u}(L, h, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t)) - \mu \int_0^L \dot{u}(x, h, t)(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t))dx. \\
 & G \int_0^L u_x(x, h, t)(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t))dx \\
 & = Gu(L, h, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t)) - G \int_0^L u(x, h, t)(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t))dx. \\
 & -\mu \int_0^L \dot{u}_x(x, -h, t)(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t))dx \\
 & = -\mu \dot{u}(L, -h, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t)) - \mu \int_0^L \dot{u}(x, -h, t)(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t))dx. \\
 & -G \int_0^L u_x(x, h, t)(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t))dx \\
 & = -Gu(L, -h, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t)) - G \int_0^L u(x, -h, t)(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t))dx. \\
 & 2h\mu \dot{w}_x(L, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t)) = \mu \int_{-h}^h \dot{w}_x(L, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t))dy \\
 & 2hGw_x(L, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t)) = G \int_{-h}^h w_x(L, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t))dy
 \end{aligned}$$

Additionnons ces six égalités, on obtient

$$\begin{aligned}
 \Sigma & = \mu \int_0^L \dot{u}_x(x, h, t)(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t))dx + G \int_0^L u_x(x, h, t)(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t))dx \\
 & -\mu \int_0^L \dot{u}_x(x, -h, t)(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t))dx - G \int_0^L u_x(x, h, t)(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t))dx \\
 & +2h\mu \dot{w}_x(L, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t)) + 2hGw_x(L, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t)) \\
 & = \mu(\dot{u}_x(L, h, t) - \dot{u}_x(L, -h, t))(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t))dx \\
 & +G(u_x(L, h, t) - u_x(L, -h, t))(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t))dx \\
 & -\mu \int_0^L \dot{u}(x, h, t) - \dot{u}(x, -h, t)(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t))dx \\
 & -G \int_0^L u(x, h, t) - u(x, -h, t)(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t))dx \\
 & +\mu \int_{-h}^h \dot{w}_x(L, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t))dy \\
 & +G \int_{-h}^h w_x(L, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t))dy
 \end{aligned}$$

D'autre part on a aussi

$$\begin{aligned}
 & G(u(L, h, t) - u(L, -h, t))(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t)) \\
 &= G \int_{-h}^h u_y(L, y, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t))dy \\
 & \mu(\dot{u}(L, h, t) - \dot{u}(L, -h, t))(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t))dx \\
 &= \mu \int_{-h}^h \dot{u}_y(L, y, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t))dy \\
 & -\mu \int_0^L (\dot{u}(x, h, t) - \dot{u}(x, -h, t))(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t))dx \\
 &= -\mu \int_0^L \int_{-h}^h \dot{u}_y(x, y, t)(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t))dxdy. \\
 & -G \int_0^L (u(x, h, t) - u(x, -h, t))(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t))dx \\
 &= -G \int_0^L \int_{-h}^h u_y(x, y, t)(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t))dxdy.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= \mu \int_{-h}^h \dot{u}_y(L, y, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t))dy + G \int_{-h}^h u_y(L, y, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t))dy \\
 & -\mu \int_0^L \int_{-h}^h \dot{u}_y(x, y, t)(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t))dxdy. \\
 & -G \int_0^L \int_{-h}^h u_y(x, y, t)(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t))dxdy. \\
 & +\mu \int_{-h}^h \dot{w}_x(L, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t))dy \\
 & +G \int_{-h}^h w_x(L, t)(\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t))dy \\
 &= \int_{-h}^h [\mu(\dot{u}_y(L, y, t) + \dot{w}_x(L, t)) + G(u_y(L, y, t) + w_x(L, t))] (\varphi(L, t) - \dot{w}(L, t))dy \\
 & -\mu \iint_{\Omega} \dot{u}_y(x, y, t)(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t))dxdy - G \int_0^L u_y(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t))dxdy
 \end{aligned}$$

Utilisons (5.1.5) on obtient

$$\Sigma = -\mu \iint_{\Omega} \dot{u}_y(x, y, t)(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t))dxdy - G \int_0^L u_y(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t))dxdy \quad (5.2.31)$$

Insérons (5.2.31) dans (5.2.29) on obtient

$$\begin{aligned}
 & E \iint_{\Omega} u_x(x, y, t)(\psi_x(x, y) - \dot{u}_x(x, y, t)) \, dx dy & (5.2.32) \\
 & + G \iint_{\Omega} u_y(x, y, t)(\psi_y(x, y) - \dot{u}_y(x, y, t)) \, dx dy \\
 & \quad + \lambda \iint_{\Omega} \dot{u}_x(x, y, t)(\psi_x(x, y) - \dot{u}_x(x, y, t)) \, dx dy. \\
 & \quad + \mu \iint_{\Omega} \dot{u}_y(x, y, t)(\psi_y(x, y) - \dot{u}_y(x, y, t)) \, dx dy. \\
 & \quad + G \iint_{\Omega} w_x(x, t)(\varphi_x(x) - \dot{w}_x(x, t)) \, dx dy \\
 & \quad + \mu \iint_{\Omega} \dot{w}_x(x, t)(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t)) \, dx dy,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + G \iint_{\Omega} w_x(x, t)(\varphi_x(x) - \dot{w}_x(x, t)) \, dx dy \\
 & \quad + \mu \iint_{\Omega} \dot{w}_x(x, t)(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t)) \, dx dy, \\
 & = \iint_{\Omega} q_B(t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, y, t)) \, dx dy \\
 & \quad + \int_0^L f_N(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t)) \, dx \\
 & \quad + \iint_{\Omega} f_B(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t)) \, dx dy \\
 & \quad \quad - \int_0^L \sigma(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t)) \, dx \\
 & \quad \quad + \mu \int_0^L \dot{u}_y(x, h, t)(\psi(x, h) - \dot{u}(x, h, t)) \, dx \\
 & \quad \quad + G \int_0^L u_y(x, h, t)(\psi(x, h) - \dot{u}(x, h, t)) \\
 & \quad \quad \quad - \mu \int_0^L \dot{u}_y(x, -h, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, -h, t)) \, dx \\
 & \quad \quad \quad - G \int_0^L u_y(x, -h, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, -h, t))
 \end{aligned}$$

De (5.1.6) nous tirons

$$\mu \dot{u}_y(x, h, t) + G u_y(x, h, t) = q_N(x, t) - \mu \dot{w}_x(x, t) - G w_x(x, h, t)$$

Alors

$$\begin{aligned}
 & \mu \int_0^L \dot{u}_y(x, h, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, h, t)) dx \\
 & + G \int_0^L u_y(x, h, t)(\psi(x, h) - \dot{u}(x, h, t)) \\
 & = \int_0^L q_N(x, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, h, t)) dx - \mu \int_0^L \dot{w}_x(x, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, h, t)) dx \\
 & \quad - G \int_0^L w_x(x, h, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, h, t)) dx
 \end{aligned} \tag{5.2.33}$$

De (5.1.9) nous obtenons

$$-\mu \dot{u}_y(x, -h, t) - G u_y(x, -h, t) = \mu \dot{w}_x(x, t) + G w_x(x, h, t)$$

Alors

$$\begin{aligned}
 & -\mu \int_0^L \dot{u}_y(x, -h, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, -h, t)) dx \\
 & - G \int_0^L u_y(x, -h, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, h, t)) \\
 & = \mu \int_0^L \dot{w}_x(x, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, -h, t)) dx \\
 & \quad + G \int_0^L w_x(x, -h, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, -h, t)) dx
 \end{aligned} \tag{5.2.34}$$

On combine (5.2.32), (5.2.33), et (5.2.34) on obtient

$$\begin{aligned}
 & E \iint_{\Omega} u_x(x, y, t)(\psi_x(x, y) - \dot{u}_x(x, y, t)) dx dy \\
 & + G \iint_{\Omega} u_y(x, y, t)(\psi_y(x, y) - \dot{u}_y(x, y, t)) dx dy \\
 & \quad + \lambda \iint_{\Omega} \dot{u}_x(x, y, t)(\psi_x(x, y) - \dot{u}_x(x, y, t)) dx dy. \\
 & \quad + \mu \iint_{\Omega} \dot{u}_y(x, y, t)(\psi_y(x, y) - \dot{u}_y(x, y, t)) dx dy. \\
 & \quad + G \iint_{\Omega} w_x(x, t)(\varphi_x(x) - \dot{w}_x(x, t)) dx dy \\
 & \quad + \mu \iint_{\Omega} \dot{w}_x(x, t)(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t)) dx dy, \\
 & \quad + G \iint_{\Omega} w_x(x, t)(\varphi_x(x) - \dot{w}_x(x, t)) dx dy \\
 & \quad + \mu \iint_{\Omega} \dot{w}_x(x, t)(\varphi_x(x, t) - \dot{w}_x(x, t)) dx dy,
 \end{aligned} \tag{5.2.35}$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{\Omega} q_B(t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, y, t))dxdy \\
 &+ \int_0^L f_N(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t))dx \\
 &+ \iint_{\Omega} f_B(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t))dxdy \\
 &- \int_0^L \sigma(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t))dx \\
 &+ \int_0^L q_N(x, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, h, t))dx \\
 &- \mu \int_0^L \dot{w}_x(x, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, h, t))dx \\
 &- G \int_0^L w_x(x, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, h, t))dx \\
 &+ \mu \int_0^L \dot{w}_x(x, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, -h, t))dx \\
 &+ G \int_0^L w_x(x, -h, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, -h, t))dx
 \end{aligned}$$

D'autre part nous avons

$$\begin{aligned}
 (\vec{f}, \vec{v}) &= \iint_{\Omega} q_B(t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, y, t))dxdy \\
 &+ \int_0^L f_N(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t))dx \\
 &+ \iint_{\Omega} f_B(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t))dxdy \\
 &+ \int_0^L q_N(x, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, h, t))dx \\
 \forall \vec{v} &= (\psi, \varphi) \in X
 \end{aligned} \tag{5.2.36}$$

Nous avons encore

$$\begin{aligned}
 &- \mu \int_0^L \dot{w}_x(x, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, h, t))dx \\
 &+ \mu \int_0^L \dot{w}_x(x, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, -h, t))dx \\
 &= -\mu \int_0^L \dot{w}_x(x, t)((\psi(x, t) - \dot{u}(x, h, t)) - (\psi(x, t) - \dot{u}(x, -h, t)))dx \\
 &= -\mu \int_0^L \int_{-h}^h \dot{w}_x(x, t)(\psi_y(x, t) - \dot{u}_y(x, y, t))dxdy \\
 &= -\mu \iint_{\Omega} \dot{w}_x(x, t)(\psi_y(x, t) - \dot{u}_y(x, y, t))dxdy
 \end{aligned} \tag{5.2.37}$$

et

$$\begin{aligned}
 & -G \int_0^L w_x(x, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, h, t))dx \\
 & +G \int_0^L w_x(x, t)(\psi(x, t) - \dot{u}(x, -h, t))dx \\
 & = -G \int_0^L w(x, t)((\psi(x, t) - \dot{u}(x, h, t) - (\psi(x, t) - \dot{u}(x, -h, t)))dx \\
 & = -G \int_0^L \int_{-h}^h w_x(x, t)(\psi_y(x, t) - \dot{u}_y(x, y, t))dxdy \\
 & = -G \iint_{\Omega} w_x(x, t)(\psi_y(x, t) - \dot{u}_y(x, y, t))dxdy
 \end{aligned} \tag{5.2.38}$$

Insérons (5.2.36), (5.2.37), et (5.2.38) dans (5.2.35) avec $v = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)$ on obtient

$$\begin{aligned}
 & \langle A\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X + \langle B\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X + \int_0^L \sigma(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t))dx \\
 & = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X \quad \text{for all } \mathbf{v} \in X, \quad t \in [0, T].
 \end{aligned} \tag{5.2.39}$$

D'autre part nous avons

$$\int_0^L \sigma(\varphi(x, t) - \dot{w}(x, t))dx \leq \int_0^L g|\varphi| - g|\dot{w}| = j(\mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}) \tag{5.2.40}$$

Maintenant on combine l'égalité (5.2.39) avec l'égalité (5.2.40) et on utilise les conditions initiales (5.1.10) et la notation (5.2.14). nous obtenons comme résultat la formulation variationnelle du Problème \mathcal{P} .

Problème \mathcal{P}_V . *Trouver une fonction $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow X$ telle que*

$$\begin{aligned}
 & \langle A\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X + \langle B\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X + j(\mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t)) \\
 & \geq \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X \quad \text{for all } \mathbf{v} \in X, \quad t \in [0, T],
 \end{aligned} \tag{5.2.41}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \tag{5.2.42}$$

On note que le Problème \mathcal{P}_V représente une inégalité variationnelle d'évolution. Sa solvabilité sera présentée à travers la prochaine section. Ici, nous nous limitons à mentionner que la solution de cette inégalité sera appelé *solution faible* du Problème \mathcal{P} . Nous mentionnons aussi dans la Section 5.5 que nous donnons une deuxième formulation variationnelle du Problème \mathcal{P} , appelée la formulation variationnelle duale, qui est en effet, équivalente avec le Problème \mathcal{P}_V .

5.3 Existence et unicité

Notre résultat d'existence et d'unicité pour l'étude du Problème \mathcal{P}_V est comme suit.

Théorème 5.3.1. *Supposons (5.2.5)–(5.2.9). Alors le Problème \mathcal{P}_V admet une solution unique avec la régularité $\mathbf{u} \in C^1([0, T]; X)$.*

La preuve est réalisée en plusieurs étapes. La première consiste à étudier les propriétés des opérateurs A et B et, avec cette préoccupation, nous avons les résultats suivants.

Lemme 5.3.2. *Supposons que (5.2.5) est vérifiée. Alors l'opérateur A est linéaire, symétrique continu et coercif, i.e. il satisfait*

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_X \geq m_A \|\mathbf{v}\|_X^2 \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in X, \quad \text{avec } m_A > 0. \quad (5.3.1)$$

Lemme 5.3.3. *Supposons que (5.2.5) est vérifiée. Alors l'opérateur B est linéaire, symétrique continu et coercif, i.e. il satisfait*

$$\langle B\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_X \geq m_B \|\mathbf{u}\|_X^2 \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in X, \quad \text{avec } m_B > 0. \quad (5.3.2)$$

Les démonstrations des lemmes 5.3.2 et 5.3.3 sont identiques et sont basées sur des arguments standards. Néanmoins, pour la commodité du lecteur, nous présentons, par exemple, la preuve du Lemme 5.3.2.

Démonstration. La linéarité et la symétrie de l'opérateur A sont évidentes. De plus, un calcul élémentaire montre que

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_X \leq (\lambda + 2\mu) \|\mathbf{u}\|_X \|\mathbf{v}\|_X \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X. \quad (5.3.3)$$

ce qui implique que A est continu. L'inégalité (5.3.1) est conséquence directe de deux versions de l'inégalité de Korn. Effectivement, on considère un élément arbitraire $\mathbf{v} = (\psi(x, y), \varphi(x)) \in X$. Alors, le petit tenseur de déformation associée au champ de déplacement à deux dimensions \mathbf{v} est donné par

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \psi_x & \frac{1}{2}(\psi_y + \varphi_x) \\ \frac{1}{2}(\psi_y + \varphi_x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|^2 = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \psi_x^2 + \frac{1}{2}(\psi_y + \varphi_x)^2 \quad \text{a.e. on } \Omega. \quad (5.3.4)$$

Notons aussi que la fonction \mathbf{v} disparaît sur la frontière $x = 0$ du rectangle Ω qui est, de toute évidence, de mesure positive et, en plus, puisque X peut être identifié comme sous espace de $H^1(\Omega)^2$, nous avons $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2$. Par conséquent, utilisons l'inégalité de Korn on obtient qu'il une constante $c_K > 0$ dépendant de h telle que

$$\iint_{\Omega} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|^2 dx dy \geq c_K \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^2}^2. \quad (5.3.5)$$

Nous combinons maintenant (5.3.4) et (5.3.5) pour déduire que

$$\iint_{\Omega} \left(\psi_x^2 + \frac{1}{2}(\psi_y + \varphi_x)^2 \right) dx dy \geq c_K \iint_{\Omega} \left(\psi^2 + \psi_x^2 + \psi_y^2 + \varphi^2 + \varphi_x^2 \right) dx dy$$

et alors, en utilisant (5.2.2)–(5.2.4), on obtient que

$$\iint_{\Omega} \left(\psi_x^2 + \frac{1}{2}(\psi_y + \varphi_x)^2 \right) dx dy \geq \tilde{c}_K \|\mathbf{v}\|_X^2. \quad (5.3.6)$$

où \tilde{c}_K dépend de c_K et de L . D'autre part, en utilisant la définition (5.2.10) de l'opérateur A et l'inégalité (5.3.6) on déduit que

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_X \geq \min(\lambda, 2\mu) \iint_{\Omega} \left(\psi_x^2 + \frac{1}{2}(\psi_y + \varphi_x)^2 \right) dx dy. \quad (5.3.7)$$

On combine maintenant (5.3.6), (5.3.7) et l'hypothèse (5.2.5) pour voir que l'inégalité (5.3.1) est vérifiée avec $m_A = \tilde{c}_K \min(\lambda, 2\mu) > 0$, ce qui conclue la preuve. \square

Nous sommes maintenant en mesure de fournir la preuve du Théorème 5.3.1.

Démonstration. En utilisant l'hypothèse (5.2.8) il est facile de voir que la fonction j est une semi-norme continue sur l'espace X . Par conséquent, il s'ensuit de là que j est une fonction convexe semi-continue inférieurement sur X . Donc, les hypothèses (5.2.6), (5.2.7) et la définition (5.2.13) implique que $\mathbf{f} \in C([0, T]; X)$. De plus, l'hypothèse (5.2.9) montre que la condition initiale satisfait $\mathbf{u}_0 \in V$. Finalement, Lemme 5.3.2 montre que $A : X \rightarrow X$ est un opérateur monotone continu de de Lipschitz et Lemme 5.3.3 implique que $B : X \rightarrow X$ est un opérateur continu de Lipschitz. Théorème 5.3.1 est une conséquence directe du Théorème 11.3 in [51]. \square

5.4 Un résultat de dépendance continue

Dans cette section nous étudions dépendance de la solution section avec respect des constantes E , G and g . À cette fin nous supposons que (5.2.5)–(5.2.9) sont vérifiées et considérons quelques constantes positives E_ρ , G_ρ et g_ρ qui représentent une perturbation de E , G et g , respectivement. Ici ρ dénotes un paramètre positif qui convergera vers zéro. Nous définissons l'opérateur B_ρ et la fonction j_ρ par les égalités

$$\langle B_\rho \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_X = E_\rho \iint_\Omega u_x \psi_x dx dy + G_\rho \iint_\Omega (u_y + w_x)(\psi_y + \varphi_x) dx dy, \quad (5.4.1)$$

$$j_\rho(\mathbf{v}) = g_\rho \int_0^L |\varphi(x)| dx \quad (5.4.2)$$

pour tout $\mathbf{u} = (u, w)$, $\mathbf{v} = (\psi, \varphi) \in X$. Alors, on considère le problème variationnel suivant.

Problème \mathcal{P}_V^ρ . *Trouver une fonction $\mathbf{u}_\rho : [0, T] \rightarrow X$ telle que*

$$\begin{aligned} \langle A\dot{\mathbf{u}}_\rho(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\rho(t) \rangle_X + \langle (B_\rho \mathbf{u}_\rho)(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\rho(t) \rangle_X \\ + j_\rho(\mathbf{v}) - j_\rho(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) \geq \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\rho(t) \rangle_X \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in X, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

$$\mathbf{u}_\rho(0) = \mathbf{u}_0. \quad (5.4.4)$$

En utilisant le Théorème 5.3.1 il s'ensuit que le Problème \mathcal{P}_V admet une solution unique $\mathbf{u} \in C^1(0, T; X)$ et, en plus, Problème \mathcal{P}_V^ρ admet une solution unique $\mathbf{u}_\rho \in C^1([0, T]; X)$. Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 5.4.1. *Supposons (5.2.5)–(5.2.9) et, de plus, supposons que*

$$E_\rho \rightarrow E, \quad G_\rho \rightarrow G, \quad g_\rho \rightarrow g \quad \text{as } \rho \rightarrow 0. \quad (5.4.5)$$

Alors la solution solution \mathbf{u}_ρ du Problème \mathcal{P}_V^ρ converge vers la solution \mathbf{u} du Problème \mathcal{P}_V i.e

$$\mathbf{u}_\rho \longrightarrow \mathbf{u} \quad \text{in } C^1([0, T]; X) \quad \text{as } \rho \rightarrow 0. \quad (5.4.6)$$

Démonstration. Étant donné $\rho > 0$ et soit $t \in [0, T]$. On utilise les inégalités (5.2.41) et (5.4.3), pour déduire que

$$\begin{aligned} \langle A\dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}_\rho(t) - \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X + \langle B\mathbf{u}(t), \mathbf{u}_\rho(t) - \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X \\ + j(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) - j(\dot{\mathbf{u}}(t)) \geq \langle \mathbf{f}(t), \dot{\mathbf{u}}_\rho(t) - \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle A\dot{\mathbf{u}}_\rho(t), \dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}_\rho(t) \rangle_X + \langle B_\rho \mathbf{u}_\rho(t), \dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}_\rho(t) \rangle_X \\ + j_\rho(\dot{\mathbf{u}}(t)) - j_\rho(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) \geq \langle \mathbf{f}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}_\rho(t) \rangle_X. \end{aligned}$$

Nous additionnons ces inégalités et utilisons la propriété (5.3.1) de l'opérateur A pour obtenir

$$m_A \|\dot{\mathbf{u}}_\rho(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)\|_X^2 \leq \langle B_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - B\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}_\rho(t) \rangle_X \quad (5.4.7)$$

$$+ j_\rho(\dot{\mathbf{u}}(t)) - j_\rho(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) + j(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) - j(\dot{\mathbf{u}}(t)).$$

Ensuite, on utilise les définitions (5.4.2) et (5.2.12), pour voir que

$$j_\rho(\dot{\mathbf{u}}(t)) - j_\rho(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) + j(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) - j(\dot{\mathbf{u}}(t)) \quad (5.4.8)$$

$$\leq c |g_\rho - g| \|\dot{\mathbf{u}}_\rho(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)\|_X$$

où, ici et ci-dessous, c représente une constante qui ne dépend pas de ρ et ses valeurs peuvent changer de ligne en ligne. Maintenant on combine les inégalités (5.4.7) et (5.4.8) on obtient

$$m_A \|\dot{\mathbf{u}}_\rho(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)\|_X \leq \|B_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - B\mathbf{u}(t)\|_X + c |g_\rho - g| \quad (5.4.9)$$

D'autre part, en utilisant les définitions (5.2.11) et (5.4.1) il sera facile de voir que

$$\|B_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - B\mathbf{u}(t)\|_X \leq (E_\rho + G_\rho) \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_X \quad (5.4.10)$$

$$+ (|E_\rho - E| + |G_\rho - G|) \|\mathbf{u}(t)\|_X.$$

Il s'ensuit de l'hypothèse (5.4.5) que $E_\rho + G_\rho \leq c$ et, par conséquent, les inégalités (5.4.9), (5.4.10) impliquent

$$\|\dot{\mathbf{u}}_\rho(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)\|_X \leq c \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_X \quad (5.4.11)$$

$$+ (|E_\rho - E| + |G_\rho - G|) \max_{r \in [0, T]} \|\mathbf{u}(r)\|_X + c |g_\rho - g|.$$

Ensuite, on utilise les conditions initiales (5.2.42) et (5.4.3), pour voir que

$$\|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_X \leq \int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}_\rho(s) - \dot{\mathbf{u}}(s)\|_X ds, \quad (5.4.12)$$

puis on remplace cette inégalité dans (5.4.11) et utilisons le Lemme de Gronwall on obtient

$$\|\dot{\mathbf{u}}_\rho(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)\|_X \quad (5.4.13)$$

$$\leq c (|E_\rho - E| + |G_\rho - G|) \max_{r \in [0, T]} \|\mathbf{u}(r)\|_X + |g_\rho - g|.$$

La convergence (5.4.6) vient alors des inégalités (5.4.12) et (5.4.13), et de l'hypothèse (5.4.5). \square

5.5 Formulation variationnelle duale

Dans cette section nous introduisons et étudions une deuxième formulation variationnelle du Problème \mathcal{P} , dite *formulation variationnelle duale*. Elle est obtenue par le changement de la variable $\boldsymbol{\sigma} = A\dot{\mathbf{u}} + B\mathbf{u}$ dans le Problème \mathcal{P}_V . La formulation variationnelle duale de problèmes aux limites est originaire de la mécanique de contact, comme elle est expliquée dans [51, 97, 100]. Notre idée est d'introduire une nouvelle formulation variationnelle exprimée en terme de champ de contrainte, équivalente à la première formulation variationnelle qui, à son tour, exprimée en terme de déplacement.

Dans la suite on suppose que (5.2.5)–(5.2.9) restent vraies et on note par A^{-1} l'inverse de l'opérateur A , dont l'existence est garantie par Lemme 5.3.2. On note aussi que les Lemmes 5.3.2 et 5.3.3 impliquent que A^{-1} et B sont des opérateurs linéaires continus, nous allons utiliser ces résultats dans diverse situations dans la suite. Nous commençons par le résultat suivant.

Lemme 5.5.1. *Alors il existe un opérateur $\mathcal{R} : C([0, T]; X) \longrightarrow C([0, T], X)$ tels que, pour toutes fonctions $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; X)$ et $\mathbf{u} \in C^1([0, T]; X)$ avec $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, l'équivalence suivante est vraie :*

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = A\dot{\mathbf{u}}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad (5.5.1)$$

si et seulement si

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = A^{-1}\boldsymbol{\sigma}(t) + \mathcal{R}\boldsymbol{\sigma}(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.5.2)$$

On notera que (5.5.2) nous utilisons la notation abrégée $\mathcal{R}\boldsymbol{\sigma}(t)$ au lieu de $(\mathcal{R}\boldsymbol{\sigma})(t)$. Nous allons utiliser cette notation dans de nombreux endroits, si aucune confusion ne se pose.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; X)$ et on définit l'opérateur $\Lambda_\sigma : C([0, T]; X) \longrightarrow C([0, T]; X)$ par l'égalité

$$\begin{aligned} (\Lambda_\sigma\boldsymbol{\theta})(t) &= -A^{-1}B\left(\int_0^t (\boldsymbol{\theta}(s) + A^{-1}\boldsymbol{\sigma}(s))ds + \mathbf{u}_0\right) \\ &\forall \boldsymbol{\theta} \in C([0, T], X), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

Nous allons montrer que Λ_σ admet un point fixe unique, noté $\mathcal{R}\boldsymbol{\sigma}$. Pour ce but on considère deux fonctions $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \in C([0, T]; X)$ et soit $t \in [0, T]$. Alors, en utilisant les propriétés de l'opérateur A et B il est facile de voir que

$$\|(\Lambda_\sigma\boldsymbol{\theta}_1)(t) - (\Lambda_\sigma\boldsymbol{\theta}_2)(t)\|_X \leq c \int_0^t \|\boldsymbol{\theta}_1(s) - \boldsymbol{\theta}_2(s)\|_X ds,$$

tels que c dénote une constante positive dépendant de A et B . Cette inégalité montre que l'opérateur Λ_σ est un opérateur de mémoire et, en utilisant le Théorème 3.1 de [102] nous déduisons que qu'il existe un seul élément $\mathcal{R}\sigma \in C([0, T]; X)$ tels que

$$\mathcal{R}\sigma(t) = \Lambda_\sigma(\mathcal{R}\sigma)(t). \quad (5.5.4)$$

Nous comparons les deux égalités (5.5.3) and (5.5.4) on déduit que

$$(\mathcal{R}\sigma)(t) = -A^{-1}B \left(\int_0^t (\mathcal{R}\sigma(s) + A^{-1}\sigma(s)) ds + \mathbf{u}_0 \right).$$

Supposons maintenant que (5.5.1) est vérifiée. Alors il est facile de voir que

$$\dot{\mathbf{u}}(t) - A^{-1}\sigma(t) = -A^{-1}B\mathbf{u}(t)$$

et, puisque $\mathbf{u}(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{u}}(s) ds + \mathbf{u}_0$, nous déduisons que

$$\dot{\mathbf{u}}(t) - A^{-1}\sigma(t) = -A^{-1}B \left(\int_0^t \dot{\mathbf{u}}(s) ds + \mathbf{u}_0 \right)$$

qui montre que

$$\dot{\mathbf{u}}(t) - A^{-1}\sigma(t) = -A^{-1}B \left(\int_0^t (\dot{\mathbf{u}}(s) - A^{-1}\sigma(s) + A^{-1}\sigma(s)) ds + \mathbf{u}_0 \right). \quad (5.5.5)$$

Nous combinons maintenant (5.5.3) et (5.5.5) pour voir que $\dot{\mathbf{u}} - A^{-1}\sigma$ est un point fixe de l'opérateur Λ_σ . D'autre part, on rappelle que cet opérateur admet un point fixe unique, dénoté $\mathcal{R}\sigma$. Par conséquent $\dot{\mathbf{u}}(t) - A^{-1}\sigma(t) = \mathcal{R}\sigma(t)$, qui montre que (5.5.2) est vérifiée.

Inversement, supposons que (5.5.2) est vraie. Alors, puisque $\mathcal{R}\sigma$ est l'unique point fixe de l'opérateur Λ_σ , nous avons les égalités

$$\dot{\mathbf{u}}(t) - A^{-1}\sigma(t) = \mathcal{R}\sigma(t) = \Lambda_\sigma(\mathcal{R}\sigma)(t) = \Lambda_\sigma(\dot{\mathbf{u}}(t) - A^{-1}\sigma(t)).$$

Nous utilisons maintenant la définition (5.5.3) pour déduire que (5.5.5) est vérifiée. Ensuite, puisque

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{u}}(s) ds + \mathbf{u}_0,$$

l'égalité (5.5.5) implique que

$$\dot{\mathbf{u}}(t) - A^{-1}\sigma(t) = -A^{-1}B\mathbf{u}(t).$$

Ceci montre que l'égalité (5.5.1) est vraie, ce qui conclut la démonstration. \square

Ensuite, pour tout $t \in [0, T]$ on définit l'ensemble $\Sigma(t) \subset V$ par l'égalité

$$\Sigma(t) = \{ \boldsymbol{\tau} \in V : \langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{v} \rangle_X + j(\mathbf{v}) \geq \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle_X \quad \forall \mathbf{v} \in V \}. \quad (5.5.6)$$

Alors, nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème \mathcal{P}_V^D . *Trouver une fonction $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow X$ tels que*

$$\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(t), \quad \langle A^{-1}\boldsymbol{\sigma}(t) + \mathcal{R}\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t) \rangle_X \geq 0 \quad \text{for all } \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(t), t \in [0, T]. \quad (5.5.7)$$

Nous nous référons dans ce qui suit au problème \mathcal{P}_V^D comme étant la formulation variationnelle du Problème \mathcal{P}_V . Le lien entre les problèmes variationnels \mathcal{P}_V et \mathcal{P}_V^D est donné par le résultat suivant.

Théorème 5.5.2. *Supposons que (5.2.5)–(5.2.9) soit vraie est soit $\mathbf{u} \in C^1([0, T]; X)$, $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; X)$. Considérons les énoncés suivants :*

- (a) \mathbf{u} est solution du problème \mathcal{P}_V .
- (b) $\boldsymbol{\sigma}$ est solution du problème \mathcal{P}_V^D .
- (c) $\boldsymbol{\sigma} = A\dot{\mathbf{u}} + B\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$.

Alors, si deux des énoncés précédents soient vraies, l'autre sera vrai aussi.

Démonstration. La preuve est basée sur les implications (a) et (c) \implies (b), (a) et (b) \implies (c), (b) et (c) \implies (a) qui vont être prouvés dans les trois étapes suivantes ci-dessous.

1) (a) et (c) \implies (b). On suppose dans ce qui suit que \mathbf{u} solution de \mathcal{P}_V , $\boldsymbol{\sigma} = A\dot{\mathbf{u}} + B\mathbf{u}$, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ et soit $t \in [0, T]$ donné. Alors, Lemme 5.5.1 implique que $\dot{\mathbf{u}}(t) = A^{-1}\boldsymbol{\sigma}(t) + \mathcal{R}\boldsymbol{\sigma}(t)$ et, on remplace cette équation dans (5.2.41) nous avons

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X + j(\mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t)) \geq \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X. \quad (5.5.8)$$

Ensuite, nous testons (5.5.8) avec $\mathbf{v} = 2\dot{\mathbf{u}}(t)$ et $\mathbf{v} = \mathbf{0}_X$ on obtient successivement

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X + j(\dot{\mathbf{u}}(t)) &\geq \langle \mathbf{f}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X, \\ \langle \boldsymbol{\sigma}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X + j(\dot{\mathbf{u}}(t)) &\leq \langle \mathbf{f}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X \end{aligned}$$

qui implique que

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X + j(\dot{\mathbf{u}}(t)) = \langle \mathbf{f}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X. \quad (5.5.9)$$

On utilise (5.5.8), (5.5.9) et la définition (5.5.6), pour voir que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma(t). \quad (5.5.10)$$

De plus, on note que (5.5.6) et (5.5.9) donne

$$\langle \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X = \langle \boldsymbol{\tau}, \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X + j(\dot{\mathbf{u}}(t)) - \langle \mathbf{f}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(t)$$

et, utilisons l'égalité $\dot{\mathbf{u}}(t) = A^{-1}\boldsymbol{\sigma}(t) + \mathcal{R}\boldsymbol{\sigma}(t)$ on obtient que

$$\langle \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t), A^{-1}\boldsymbol{\sigma}(t) + \mathcal{R}\boldsymbol{\sigma}(t) \rangle_X \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(t). \quad (5.5.11)$$

Nous rassemblons (5.5.10) et (5.5.11) pour voir que $\boldsymbol{\sigma}$ est solution du Problème \mathcal{P}_V^D , i.e. (b) est vraie.

2) (a) et (b) \implies (c). Nous supposons dans ce qui suit que \mathbf{u} est solution de \mathcal{P}_V et $\boldsymbol{\sigma}$ est solution de \mathcal{P}_V^D . Dénotons

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = A\dot{\mathbf{u}} + B\mathbf{u} \quad (5.5.12)$$

et soit $t \in [0, T]$. Alors en utilisant l'implication (a) et (c) \implies (b), il s'ensuit que $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ est solution de \mathcal{P}_V^D . Puisque les deux $\boldsymbol{\sigma}$ et $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ sont solutions du Problème \mathcal{P}_V^D nous avons

$$\langle A^{-1}\boldsymbol{\sigma}(t) + \mathcal{R}\boldsymbol{\sigma}(t), \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) - \boldsymbol{\sigma}(t) \rangle_X \geq 0,$$

$$\langle A^{-1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \mathcal{R}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t), \boldsymbol{\sigma}(t) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) \rangle_X \geq 0$$

et additionnons ces deux inégalités, on obtient que

$$\langle A^{-1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) - A^{-1}\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\sigma}(t) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) \rangle_X \leq \langle \mathcal{R}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) - \mathcal{R}\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\sigma}(t) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) \rangle_X.$$

Cette inégalité combinée avec les propriétés de A^{-1} donnent

$$\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)\|_X \leq c \|\mathcal{R}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) - \mathcal{R}\boldsymbol{\sigma}(t)\|_X \quad (5.5.13)$$

tels que, ici et dans ce qui suit, c dénote une constante positive donnée dont la valeur change de ligne en ligne. D'autre part, d'après la définition de l'opérateur \mathcal{R} nous avons

$$\mathcal{R}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) = -A^{-1}B \left(\int_0^t (\mathcal{R}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(s) + A^{-1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(s)) ds + \mathbf{u}_0 \right),$$

$$\mathcal{R}\boldsymbol{\sigma}(t) = -A^{-1}B \left(\int_0^t (\mathcal{R}\boldsymbol{\sigma}(s) + A^{-1}\boldsymbol{\sigma}(s)) ds + \mathbf{u}_0 \right).$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{R}\tilde{\sigma}(t) - \mathcal{R}\sigma(t)\|_X \\ & \leq c \left(\int_0^t \|\tilde{\sigma}(s) - \sigma(s)\|_X ds + \int_0^t \|\mathcal{R}\tilde{\sigma}(s) - \mathcal{R}\sigma(s)\|_X ds \right) \end{aligned}$$

et, en appliquant le lemme de Gronwall on obtient

$$\|\mathcal{R}\tilde{\sigma}(t) - \mathcal{R}\sigma(t)\|_X \leq c \int_0^t \|\tilde{\sigma}(s) - \sigma(s)\|_X ds. \quad (5.5.14)$$

Nous combinons les inégalités (5.5.13) et (5.5.14) alors en appliquant le lemme de Gronwal, une deuxième fois, on déduit que

$$\tilde{\sigma}(t) = \sigma(t). \quad (5.5.15)$$

Il s'ensuit de (5.5.12) et (5.5.15) que $\sigma = A\dot{\mathbf{u}} + B\mathbf{u}$ et, par conséquent (c) est vraie.

3) (b) et (c) \implies (a). Supposons que σ une solution du problème \mathcal{P}_V^D et, en plus, $\sigma = A\dot{\mathbf{u}} + B\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$. Soit $t \in [0, T]$. Alors, Lemme 5.5.1 implique que $\dot{\mathbf{u}}(t) = A^{-1}\sigma(t) + \mathcal{R}\sigma(t)$. Nous remplaçons cette égalité dans (5.5.7) on obtient

$$\langle \tau - \sigma(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma(t) \quad (5.5.16)$$

Soit $\mathbf{d}(t) \in X$ une sous-différentielle de j en ce point $\dot{\mathbf{u}}(t)$. Alors

$$j(\mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t)) \geq \langle \mathbf{d}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X \quad \forall \mathbf{v} \in X \quad (5.5.17)$$

en prenant successivement $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}(t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ dans cette inéquation on obtientque

$$\langle \mathbf{d}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X = j(\dot{\mathbf{u}}(t)). \quad (5.5.18)$$

Nous combinons maintenant (5.5.17) and (5.5.18) pour voire que

$$j(\mathbf{v}) \geq \langle \mathbf{d}(t), \mathbf{v} \rangle_X \quad \forall \mathbf{v} \in X. \quad (5.5.19)$$

Cette inégalité montre que $\mathbf{f}(t) - \mathbf{d}(t) \in \Sigma(t)$ et, par conséquent, nous sommes permis de tester dans (5.5.16) avec $\tau = \mathbf{f}(t) - \mathbf{d}(t)$. On obtient comme résultat

$$\langle \mathbf{f}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X \geq \langle \sigma(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X + \langle \mathbf{d}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X. \quad (5.5.20)$$

et, utilisons (5.5.18) on obtient

$$\langle \mathbf{f}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X \geq \langle \sigma(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X + j(\dot{\mathbf{u}}(t)). \quad (5.5.21)$$

Notons que l'inégalité inverse est vraie aussi, puisque $\boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma(t)$. P, nous concluons de ce qui précède que

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X + j(\dot{\mathbf{u}}(t)) = \langle \mathbf{f}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X. \quad (5.5.22)$$

Maintenant, puisque $\boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma(t)$ nous avons

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{v} \rangle_X + j(\mathbf{v}) \geq \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle_X \quad \forall \mathbf{v} \in X \quad (5.5.23)$$

et, utilisons (5.5.21) on déduit que

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X + j(\mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t)) \geq \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle_X \quad \forall \mathbf{v} \in X.$$

Finalement, en utilisant les égalités $\boldsymbol{\sigma}(t) = A\dot{\mathbf{u}}(t) + B\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ on déduit que \mathbf{u} est une solution du Problème \mathcal{P}_V , ce qui conclut la preuve. \square

Un examen attentif des Problèmes \mathcal{P}_V et \mathcal{P}_V^D conduit à la conclusion que ces deux problèmes ont des sens différents. Premièrement, Problème \mathcal{P}_V est une inégalité variationnelle d'évolution, puisque la dérivée de l'inconnu \mathbf{u} apparaît dans son énoncé. Par conséquent, une condition initiale, (5.2.42), est obligatoire. De plus, elle ne nécessite aucune contrainte sur la solution. Par contre, Problème \mathcal{P}_V^D est une inégalité à terme de mémoire avec contraintes. Effectivement, cette inégalité est gouvernée par l'opérateur \mathcal{R} qui satisfait l'inégalité (5.5.14) et, par conséquent, est un opérateur de mémoire. De plus, l'inégalité est gouvernée par l'ensemble de contraintes $\Sigma(t)$, qui est un ensemble convexe dépendant du temps. Néanmoins, malgré ces différentes caractéristiques, Problèmes \mathcal{P}_V et \mathcal{P}_V^D sont équivalents, comme a été énoncé dans Théorème 5.5.2. De plus, combinons Théorème 5.5.2 avec Théorème 5.3.1 on déduit l'unique solvabilité du Problème \mathcal{P}_V^D , sous les hypothèses (5.2.5)–(5.2.9).

Conclusion

Dans cette thèse nous avons étudié la stabilité de quelques problèmes de transmission avec retard, notre attention s'est portée sur les équations des ondes.

Tout d'abord nous avons considéré un problème de transmission d'équations des ondes où un terme d'amortissement et un terme de retard apparaissent dans la première équation du système sur un domaine unidimensionnel sur le quel on a imposé des conditions aux points d'extrémité et des conditions de transmission à l'intérieur du domaine, nous avons prouvé l'existence et l'unicité de la solution puis, en utilisant la méthode de Lyapunov, nous avons prouvé la décroissance exponentielle de l'énergie en supposant que le poids de l'amortissement est plus grand que le poids du retard. Une fonctionnelle de Lyapunov a été construite. Dans le second axe nous avons ajouté au premier système un terme viscoélastique, en la présence de ce terme nous avons prouvé aussi la décroissance de l'énergie de la solution sous la même hypothèse c'est-à-dire le poids de l'amortissement est plus grand que le poids du terme retard. Dans le troisième axe nous avons considéré le même système précédent mais ici le retard est une fonction dans le temps. Sous quelques hypothèses sur la fonction retard et sur les l'hypothèse entre les poids cité ci-dessus.

La dernier axe de notre étude porte sur un problème d'équations aux dérivées partielles d'évolution modélisant un phénomène mécanique, après avoir dérivé une formulation variationnelle sous la forme d'une inégalité variationnelle du problème, nous avons prouvé l'existence et l'unicité de la solution faible de ce dernier. Une formulation équivalente a été obtenue telle que sa solution convergeait vers la solution du problème initial.

Une perspective de recherche portait sur l'étude de la stabilité de l'équation des ondes dans un domaine de \mathbb{R}^n avec un terme de retard.

Bibliographie

- [1] F. Alabau Boussouira, J. E. Muñoz Rivera, and D. S. Almeida Júnior. Stability to weak dissipative Bresse system. J. Math. Anal. Appl., 374(2) :481–498, 2011.
- [2] F. Alabau-Boussouira, S. Nicaise and C. Pignotti. Exponential stability of the wave equation with memory and time delay. preprint arXiv, Math. AP 1 :1404–4456, 2014.
- [3] Alabau-Boussouira, F., Cannarsa, P., Sforza, D. Decay estimates for second order evolution equations with memory. J. Funct. Anal. 24(5) :1342–1372, 2008.
- [4] K. Ammari, S. Nicaise, and C. Pignotti. Feedback boundary stabilization of wave equations with interior delay. Systems. Cont. Letters, 59 :623–628, 2010.
- [5] K.T. Andrews, K.L. Kuttler, M. Shillor. Second order evolution equations with dynamic boundary conditions. Math.Anal.App. 197(3) :781–795, 1996.
- [6] A. Auslender. Optimisation : Méthodes Numériques. Masson, Paris 1976.
- [7] C. Baiocchi and A. Capelo, Variational and Quasivariational Inequalities : Applications to Free-Boundary Problems. John Wiley, Chichester, 1984.
- [8] W. D. Bastos and C. A. Raposo. Transmission problem for waves with frictional damping. Electron. J. Differential Equations, pages No. 60, 10, 2007.
- [9] M. S. Bazaraa, H. D. Ssherali, C. M. Shetty. Nonlinear Programming : Theory and Algorithmes. second ed., Wiley, New York 1993.
- [10] J.T. Beale. Spectral properties of an acoustic boundary condition. Indianz Univ. Math.J 25(9) :895–917, 1976.
- [11] A. Benseghir. Existence and Exponential Decay of Solutions For Transmission Problems with delay. Electronic J. Diff. Equ., Vol. 2014(2014), No. 212, pp.1-11.

- [12] A. Benseghir. Decay of a Transmission Problem with Memory and Time-Varying Delay. J. Part. Diff. Eq., Vol. 29, No. 3, pp. 161-174.
- [13] A. Bensegir, M. Sofonea. An Evolutionary Boundary Value Problem. Mediterr. J. Math. 13(2016), 4463-4480.
- [14] S. Berrimi and S. A. Messaoudi. Exponential decay of solutions to a viscoelastic equation with nonlinear localized damping. Electronic . J. Differential Equations 2004, No. 88, 10 pp.
- [15] S. Berrimi and S. A. Messaoudi. Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with nonlinear source. Anal. 64(2006), no. 10, 2313-2331.
- [16] Berrimi, S., Messaoudi, S.A. Existence and decay of solution of a viscoelastic equation with a nonlinear viscoelastic source. Nonl. Anal. 64 :2314–2331, 2006.
- [17] H., Brezis. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Math. Sci., Springer. 2010.
- [18] H. Brézis, Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier **18** (1968), 115–175.
- [19] B.M. Budak, A.A. Samarskii, A.N. Tikhonov. A Collection of Problems on Mathematical Physics (Translated by A.R.M. Robus). The Macmillan Co., New York 1964.
- [20] R.W. Carroll, R.E Showalter. Singular and degenerate Cauchy problems. Academic Press, New York, 1972.
- [21] Cavalcanti, M.M. Domengos Cavalcanti, V.N., Martinez, P. Existence and decay rate estimates for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term. J. Differ. Equ. 203(1) :119–158, 2004.
- [22] Cavalcanti, M.M. Domengos Cavalcanti, V.N., Soriano, J.A. Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping . J. Differ. 44 :1–14, 2002.
- [23] Cavalcanti, M.M. Domengos Cavalcanti, V.N., Ferreira, J. existence and uniform decay for nonlinear viscoelastic equation with strong damping. Math. Meth. Appl. Sci. 24 :1043–1053, 2001.
- [24] Cavalcanti, M.M., Oquendo, H.P. Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation . SIAM J.Control. Optim 42(4) :1310–1324, 2003.
- [25] Cavalcanti, M.M., Oquendo, H.P. Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation . SIAM J.Control. Optim 42(4) :1310–1324, 2003.

- [26] M. M. Cavalcanti V. N. Domingos Cavalcanti and J. A. Sariano. Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping. Electron ; J. Differential Equations 2002, No.44, 14 pp.
- [27] G. Chen. Control and Stabilization for the wave equation in a bounded domain. PART I, SIAM J. Control Optim., 17 :66–81, 1979.
- [28] G. Chen. Control and Stabilization for the wave equation in a bounded domain. PART II, SIAM J. Control Optim., 19 :114–122, 1981.
- [29] F. Conrad, O. Morgul. Stabilization of a flexible beam with a tip mass. SIAM J. Control Optim. 36(6) :1962–1986, 1986.
- [30] C. M. Dafermos. Asymptotic stability in viscoelasticity. Arch. Rational Mech. Anal. 37 :297–308, 1970.
- [31] R. Datko. Two questions concerning the boundary control of certain elastic systems. J. Differential Equations, 92(1) :27–44, 1991.
- [32] R. Datko, J. Lagnese, and M. P. Polis. An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations. SIAM J. Control Optim., 24(1) :152–156, 1986.
- [33] R. Datko, J. Lagnese, and M.P. Polis. An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations. SIAM J. Control OPTIM., 24 :152–156, 1986.
- [34] R. Dautray, J. L. Lions Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol. 1 Masson, 1984.
- [35] G. Duvaut and J.-L. Lions, Inequalities in Mechanics and Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [36] G. Fragnelli, and , D., Mugnai. Stability of Solutions for Nonlinear Wave Equations with a Positive-Negative Damping. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S, 4(2011), 615–622.
- [37] Fabrizio, M., Polidoro, S. Asymptotic decay for some differential systems with fading memory. App. Anal. 81(6) :1245–1264, 2002.
- [38] P. Freitas and E. Zuazua. Stability results for the wave equation with infinite damping. J. Differential Equations, 132 :338–352, 1996.
- [39] E. Fridman, S. Nicaise and J. Valein. Stabilization of second order evolution equations with unbounded feedback with time-dependent delay. SIAM J. Control Optim., 48(8) (2010), 5028-5052.

- [40] Gang Li, Danhua wang, Biqing Zhu. Well-posedness and decay of solutions for a transmission problem with history and delay. Electronoc Journal of Differential Equations Vol. 2016 (2016), No. 23, pp. 1-21.
- [41] S. Gerbi, B. Said-Houari. Asymptotic stability and blow up for a semilinear damped wave equation with dynamic boundary conditions. Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 74 :7137–7150, 2011.
- [42] S. Gerbi, B. Said-Houari. Existence and exponential stability of a damped wave equation with dynamic boundary conditions and a delay term. Applied Mathematics and Computation 218 :11900–11910, 2012.
- [43] C. Giorgi, J. E. Mnoz Rivera and V. Pata.. Global Attractors for a semilinear Hyperbolic Equation in Viscoelasticity. J. Math. Anal. Appl. 260 :83–99, 2001.
- [44] R. Glowinski, Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [45] R. Glowinski, J.-L. Lions and R. Trémolières, Numerical Analysis of Variational Inequalities. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [46] M. Grobbelaar-van Dalsen. On the solvability of the boundary-value problem for the elastic beam with attached load,. Math., Models Appl. Sci.(M3AS) 4(1) :89–105, 1994.
- [47] M. Grobbelaar-van Dalsen, A. Van Der Merwe. Boundary stabilization for the extensible beam attached load,. Math. Models Appl. Sci. 9(3) :379–394, 1999.
- [48] A. Guesmia. Well-posedness and exponential stability of an abstract evolution equation with infinite memory and time delay. IMA J. Math. Control Inform., 30 :507–526.2013.
- [49] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Necăs and J. Lovíšek, Solution of Variational Inequalities in Mechanics. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [50] W. Han and B.D. Reddy, Plasticity : Mathematical Theory and Numerical Analysis Springer-Verlag, New York/, 1999.
- [51] W. Han and M. Sofonea, Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity Studies in Advanced Mathematics , American Mathematical Society, Providence, RI, International Press, Somerville, MA, 30,(2002).
- [52] W. Han, S. Migórski & M. Sofonea Eds., Advances in Variational and Hemivariational Inequalities. Advances in Mechanics and Mathematics, Springer, New York,33, 2015, 384 pages.

- [53] Q. Hu, and H. Zhang Blowup and Asymptotic Stability of Weak Solution to Wave Equations with Nolinear Degenerate Damping and ource Terms Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007(2007), Ni. 76, pp. 1-10.
- [54] Lions, J. L. and Magenes, E., Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications Springer,(3 volumes), 1972.
- [55] K. Kamran, M. Barboteu, W. Han and M. Sofonea, Numerical analysis of history-dependent quasivariational inequalities with applications in contact mechanics. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, M2AN,48,(2014), 919–942.
- [56] N. Kikuchi and J.T. Oden, Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. SIAM, Philadelphia, 1988.
- [57] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, An Introduction to Variational Inequalities and their Applications. Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 31, 2000.
- [58] Kirane, M. ; Said-Houari, B. Existence and asymptotic stability of a viscoelastic wave equation with a delay. Z. Angew. Math. Phys. 62 :1065–1082, 2011.
- [59] V. Komornok and E. Zuaua. A direct method for the boundary stabilization of the wave equation. J. Math. Pures Appl., 69 :33–54, 1990.
- [60] J. Lagenese. Note on boundary stabilization of wave equations. SIAM J.Control Optim.,26 :1250–1256, 1988.
- [61] J. Lagenese. Decay of solutions of the wave equations in a bounded region with boundary dissipation. J. Differential equations.,50 :114–122, 1983.
- [62] I. Lasiecka, D. Tataru, Uniformboundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping, Differential Integral Equations, 6 (3) (1993) 507–533.
- [63] I. Lasiecka and R. Tiggiani. Uniform exponential decay in a bounded region with $L_2(O, T; L_2(\Sigma))$ -feedback control in a Dirichlet bounded coefficient. J. Diff. Equations., 66 :340–390, 1987.
- [64] I. Lasiecka and R. Tiggiani, and P. F. Yao. Inverse/observability estimates for second-order hyperbolic equations with variable coefficients. J. Math. Appl., 235 :13–57, 1999.
- [65] K. Liu, B. Rao and X. Zhang. Stabilization of the wave equations with potential and indefinite damping. J. Math. Anal. Appl. 269 (2002), no. 2, 747–769.

- [66] J. L. Lions. Contrôlabilité Exacte Perturbations et Stabilisation de systèmes Distribués. Collection RMA, Tome1, Masson , Paris., 1998.
- [67] J. L. Lions. Quelques methodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire. Second Edition, Dunod , Paris., 2002.
- [68] J.-L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Gauthiers-Villars, Paris, 1969.
- [69] W. J. Liu, General decay of the solution for a viscoelastic wave equation with time-varying delay in the internal feedback. J. Math. Phys. 54(2013), no. 4. 043504, 9 pp.
- [70] T. F. Ma and H. P. Oquendo. A transmission problem for beams on nonlinear supports. Bound. Value Probl., pages Art. ID 75107, 14, 2006.
- [71] P. Martinez, A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems, ESAIN. Contril, Optimization Calc. Var, 4(1999), 419-444.
- [72] Marcelo M. Cavalcanti,a, Valéria N. Domingos Cavalcanti, and Patrick Martinez, Existence and decay rate estimates for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term, J. Differential Equations., 203 (2004) 119–158
- [73] A. Marzocchi, J. E. Muñoz Rivera, and M. G. Naso. Asymptotic behavior and exponential stability for a transmission problem in thermoelasticity. Math. Meth. Appl. Sci., 25 :955–980, 2002.
- [74] A. Marzocchi, J. E. Muñoz Rivera, and M. G. Naso. Transmission problem in thermoelasticity with symmetry. IMA Journal of Appl. Math., 63(1) :23–46, 2002.
- [75] A. Marzocchi, E. Rivera, M. Nazo. Asymptotic behavior and exponential stability for a transmissio problem in thermoelasticity . Mathematical methods in the applied sciences. 25 :955–980, 2001.
- [76] S. A. Messaoudi and B. Said-Houari. Uniform decay in a Timoshenko-type system with past history. J. Math. Anal. Appl., 360(2) :459–475, 2009.
- [77] Messaoudi, S.A.,Tatar, N.-E. Exponential and polynomial decay for a quasilinear viscoelastic equation. Math. Meth. Appl. Sci. Res.J. 7(4) :136–149, 2003.
- [78] Messaoudi,S. A. Gneneral decay of solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source. Nonl. Anal. 69 :2589–2598, 2008.
- [79] S. A. Messaoudi and B. Said-Houari. Energy decay in a transmission problem in thermoelasticity of type iii. IMA. J. Appl. Math, 74 :344–360, 2009.

- [80] S. Migórski, M. Shillor & M. Sofonea, Nonlinear Analysis Series B : Real World Applications. special issue on Contact Mechanics, 22 :(2015), 435–679.
- [81] Mohammadi I. Mustafa ; Salim A. Messaoudi. General energy decay rates for weakly wave equation. Communication in Mathematical Analysis., Vol. 9, No. 2, pp. 67-76 (2010).
- [82] J. E. Muñoz Rivera and H. P. Oquendo. The transmission problem of viscoelastic waves. Acta Appl. Math., 62(1) :1–21, 2000.
- [83] C. Nahak Application of the penalty method to generalized convex programs. Appl. Math. Lett 20(5)(2007) 479-483.
- [84] S. Nicaise and C. Pignotti. Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks. SIAM J. Control Optim., 45(5) :1561–1585, 2006.
- [85] S. Nicaise and C. Pignotti. Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay. Differential and Integral., 21(9-10) :935–985, 2008.
- [86] J. Nečas and I. Hlaváček, Mathematical Theory of Elastic and Elastico-Plastic Bodies : An Introduction. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1981.
- [87] M. ömer, An Exponential Stability result for the wave equation Automatica 38 (2002), 731-735.
- [88] P.D. Panagiotopoulos, Inequality Problems in Mechanics and Applications Birkhäuser, Boston, ,1985.
- [89] M. Pellicer . Large time dynamics of a nonlinear spring-mass-damper model. Nonlinear Anal. 69(1) :3110–3127, 2008.
- [90] M. Pellicer, J. Solá-Morales. Analysis of a viscoelastic spring-mass model. J. Math.Anal. Appl. 294(2) :687–698, 2004.
- [91] Peter, D. Lax. Functional Analysis. Pure and Applied Mathematics (New York). 2002.
- [92] C. Pignoti. , A note on stabilization of locally damped wave equations with time delay. Systems and Control Lett 61 :92-97, 2012.
- [93] Radu, P., Todorova, G., Yordanov, B., Decay estimates for wave equations with linear damping and variable coefficients. to appear in Trans. Math. Soc.

- [94] Radu, P., Todorova, G., Yordanov, B., Higher order energy decay rates for damped wave equations with variable coefficients. Discrete and Continuous Dynamic Systems Series S. Vol 2., Number 3., September 2009.
- [95] C. A. Raposo, The transmission problem for Timoshenko's system of memory type. Int. J. Mod. Math.3(20018), no. 3, 271-293.
- [96] G. Ruiz Goldstein. Derivation and physical interpretation of general boundary conditions. Adv. Differ. Equat 11(4) :457–480, 2008.
- [97] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, Models and Analysis of Quasistatic Contact. Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin,655, 2004.
- [98] M. Sofonea and K. Bartosz, A dynamic contact model for viscoelastic plates, submitted for publication in Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 2015.
- [99] M. Sofonea, A. Bensegir A Nonlinear History-Dependent Boundary Value Problem. Quarterly Of Applied Mathematics. Vol. LXXV. No. 1, March(2017), 181-199.
- [100] M. Sofonea and A. Matei, Variational Inequalities with Applications. A Study of Antiplane Frictional Contact Problems, Advances in Mechanics and Mathematics , 18, Springer, New York, 2009.
- [101] M. Sofonea and A. Matei, History-dependent quasivariational inequalities arising in Contact Mechanics, European Journal of Applied Mathematics, 22, (2011), 471–491.
- [102] M. Sofonea and A. Matei, Mathematical Models in Contact Mechanics. London Mathematical Society Lecture Note Series Cambridge University Press,398 , Cambridge, 2012.
- [103] M. Sofonea and Y. Xiao, Fully history-dependent quasivariational inequalities in contact mechanics. Applicable Analysis, DOI 10.1080/00036811.2015.1093623, published on line : October 7, 2015.
- [104] M. Soliemani-damaneh. The gap function for optimization problems in Banach spaces. Nonlinear Anal. in press.
- [105] A. Soufyane. Stabilisation de la poutre de Timoshenko. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 328(8) :731–734, 1999.

- [106] C. Q. Xu, S. P. Yung, and L. K. Li. Stabilization of the wave system with input delay in the boundary control. ESAIM : Control Optim. Calc. Var., 12 :770–785, 2006.
- [107] E. Zuazua, Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems. Asymptotic Analysis.,1 :161–185, 1988.
- [108] E. Zuazua, Uniform Stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback, SIAM, J. Control Optm .,28(1990) 466-478.
- [109] E. Zuazua, and P. Freistas, Stability Results of wave equation with Indefinite Damping, Journal of Differential Equations.,132 : 338-335, 1996.
- [110] Zhen-Hu. Ning, Qing-Xu. Yan. Stabilization of the wave equation with variable coefficients and a delay in dissipative boundary feedback. Math. Anal. Appl. 367 :167–173, 2010.