

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE FERHAT ABBAS - SETIF

MÉMOIRE

**Présenté à la faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de**

MAGISTER

Option: Mathématiques Appliquées

Par

Mr: Chadi Khelifa

THEME

**Etude Mathématique de quelques problèmes aux limites en
viscoélasticité avec mémoire longue**

soutenu le: / / 2012

devant le jury:

Président	A.Kadem	Pr	Université de Sétif
Encadreur	M. Selmani	M.C.A	Université de Sétif
Examineur	A.Merouani	M.C.A	C. Universitaire de B.B.A

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements les plus profonds à Monsieur Selmani Mohamed, docteur à l'université Ferhat Abbas Sétif, pour m'avoir proposé ce passionnant sujet, m'avoir aiguillé dans ma recherche, pour sa patience, son encouragement et sa disponibilité ainsi que le soutien très précieux tout au long de cette thèse.

Comme je tiens à remercier vivement, Monsieur Kadem Abdelouahab, professeur à l'université Ferhat Abbas Sétif pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à Monsieur Merouani Abdelbaki, docteur au centre universitaire de B.B.A, d'avoir accepter de juger mon travail.

Je tiens aussi à manifester toute ma gratitude envers tous les membres du conseil scientifique.

Enfin, mes remerciements aussi à toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

Introduction	3
Notation	3
1 Formulation des problèmes aux limites et rappels d'analyse	6
1.1 PROBLEMES AUX LIMITES POUR LES MATERIAUX VISCOELASTIQUES	7
1.1.1 Lois de comportement	7
1.2 Conditions aux limites de contact	8
1.2.1 Condition de contact sans frottement avec réponse normale instantanée	8
1.2.2 Condition de contact sans frottement avec compliance normale . . .	9
1.2.3 Condition de compliance normale avec adhésion	9
1.2.4 Formulation mathématique des problèmes	10
1.3 RAPPELS D'ANALYSE	12
1.3.1 Espaces fonctionnels	12
1.3.2 Espaces de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation	13
1.3.3 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles	15
1.3.4 Fonctions convexes	17
1.3.5 Inéquations variationnelles	20
1.3.6 Compléments divers	21
1.3.7 Lemmes de Gronwall	21
1.3.8 Enoncés de certains théorèmes	22

2	Problème de contact avec réponse normale instantanée.	24
2.1	Formulation mécanique du problème	24
2.2	Formulation variationnelle du problème	28
2.3	Existence et unicité de la solution	28
3	Problème de contact avec compliance normale	34
3.1	Formulation mécanique du problème	34
3.2	Formulation variationnelle du problème	35
3.3	Existence et unicité de la solution	35
3.4	Résultats de dépendance continue	37
4	Problème de compliance normale avec adhésion	42
4.1	Formulation mécanique et variasonnelle du problème	42
4.2	Existence et l'unicité de la solution	47
	Bibliographie	54

Introduction

Les problèmes de contact avec ou sans frottement faisant inter-agir des corps déformables ou non interviennent de multiples façons aussi bien dans le domaine industriel que dans la vie de tous les jours. Compte tenu de l'importance et de la multitude de ces phénomènes, de vastes études ont été entreprises, aussi la littérature concernant la Mécanique du contact est vaste et aborde autant de sujets différents que sont la modélisation, l'analyse mathématique ou l'approximation numérique des problèmes de contact. Il existe ainsi de multiples références, citons ici quelques classiques. Une des première référence portant sur l'étude des problèmes de contact avec frottement via les inéquations variationnelles est sûrement [9]. En ce qui concerne l'analyse appliquée, le lecteur est invité à se reporter aux ouvrages [16,24,25]. Pour de plus amples détails sur l'analyse mathématiques des équations aux dérivées partielles, il conviendra de consulter les ouvrages [4,5,20].

Un phénomène très important en ingénierie sera considéré dans ce mémoire, il s'agit du phénomène de contact avec adhésion entre corps déformables ou entre une surface rigide et un corps déformable, ceci a lieu quand la colle est ajoutée pour réduire ou ralentir le mouvement des surfaces. Ce phénomène a reçu récemment une très grande attention dans la littérature mathématique. L'analyse des modèles de contact avec adhésion peut être trouvée dans [1,2,6,7,8,11,15,19,33]. La nouveauté dans tous ces articles est l'introduction d'une variable interne de surface, le champ d'adhésion noté par β décrivant l'intensité d'adhésion sur la surface de contact. Suivant [12,13] le champ d'adhésion satisfait la restriction $0 \leq \beta \leq 1$, quand $\beta = 1$ au point de la surface de contact, l'adhésion est complète, quand $\beta = 0$ il n'y pas d'adhésion. Quand $0 < \beta < 1$ l'adhésion est partielle. On renvoie le lecteur à une bibliographie abondante sur le sujet dans [26,30,32,35].

L'objet de ce mémoire est l'étude de trois problèmes viscoélastiques avec mémoire longue. On considère deux lois de comportement: viscoélastique avec mémoire longue dans le cas non linéaire et viscoélastique avec mémoire longue dans le cas linéaire. Les conditions aux limites sont des conditions de contact avec réponse normale instantanée, les conditions de compliance normale et les conditions de compliance normale avec adhésion.

La première loi constitutive considérée dans ce mémoire est la loi de comportement viscoélastique non linéaire avec mémoire longue donnée par

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u(s))ds,$$

la seconde loi de comportement est la loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire avec mémoire longue donnée par

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u(s))ds,$$

où σ désigne le tenseur des contraintes, u représente le champ de déplacement, $\varepsilon(u)$ désigne le tenseur des déformations linéarisées, $\mathcal{A}$ représente un tenseur viscoélastique, $\mathcal{G}$ représente un tenseur élastique et B désigne un tenseur de relaxation d'ordre quatre. Cette loi de comportement a été utilisée récemment dans beaucoup d'articles par exemple dans [28,29,34].

Ce mémoire se compose de quatre chapitres. Afin d'en faciliter la lecture, nous les avons rendus indépendants en rappelant brièvement les outils nécessaires à leur compréhension.

Le premier chapitre introduit des notions générales pour une bonne compréhension des problèmes traités dans la suite. Nous commençons par la description des lois de comportement, des conditions aux limites utilisés tout au long de ce mémoire et la formulation mathématique des différents problèmes. Nous rappelons ensuite les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées. Ensuite nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse concernant les équations variationnelles. En complément, nous rappelons les lemmes de Gronwall et le théorème de point fixe de Banach ainsi que le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Dans le second chapitre, on étudie un problème de contact avec réponse normale instantanée dans un processus dynamique. La loi de comportement est viscoélastique non linéaire avec terme intégral. On établit des résultats d'existence et d'unicité de la solution, les démonstrations sont basées sur des arguments d'équations variationnelles et des arguments de point fixe.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'un problème de contact avec compliance normale dans un processus dynamique. On établit des résultats d'existence et d'unicité de la solution, les démonstrations sont basées sur des arguments d'équations variationnelles et

des arguments de point fixe. Un résultat de dépendance continue par rapport à la fonction de contact des deux problèmes précédents a été considéré.

Au quatrième chapitre on considère un problème de compliance normale avec adhésion dans un processus quasi-statique. Pour ce problème, l'adhésion est donnée par une variable de surface appelée champ d'adhésion dont l'évolution est décrite par une équation différentielle ordinaire d'ordre un. On établit des résultats d'existence et d'unicité de la solution, les démonstrations sont basées sur des arguments d'équations variationnelles et des arguments de point fixe.

Notations

Si Ω est un domaine de $IR^d (d = 1, 2, 3)$, on note par.

$\bar{\Omega}$	l'adhérence de Ω
Γ	la frontière de Ω supposée régulière.
$\Gamma_i \ (i = 1, 2, 3)$	une partie mesurable de la frontière Γ
$mes \ \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue ($d = 1$) dimensionnelle de Γ_1
ν	la normale unitaire sortante à Γ
v_ν, v_τ	les composantes normal et angentielle du champ vectoriel v défini sur $\bar{\Omega}$
$C(\bar{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continument différentiables sur $\bar{\Omega}$
$D(\bar{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$
H_1	l'espace $H_1(\Omega)^d$
$\mathcal{H}$	l'espace $L^2(\Omega)^{d \times d}$
	l'espace $\{\tau \in L^2(\Omega)\}$
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$
H'_Γ	l'espace dual de H_Γ
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles

si H est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes

H^d	l'espace $\{x - (x_i) / x_i \in H\}$
$H^{d \times d}$	l'espace $\{x_i = (x_{ij}) / x_{ij} \in H\}$
$(\cdot, \cdot)_H$	le produits calaire de H
$\ \cdot\ _H$	la norme de H
H'	l'espace dual de H
$(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$	le produit dualité entre $H' \times H$
ψ_K	la fonction indicatrice de $k \subset H$
2^K	l'ensemble de toutes les parties de k
$x_n \rightarrow x$	la convergentefortedelasuite (x_n) versl'élément x dans H
$x_n \rightharpoonup x$	la convergente faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H
$\mathcal{L}(H)$	l'espace des applications linéaires et continues de H dans H
Si de plus $[0; T]$ est un intervalle de temps $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$ on note par:	
$C([0; T], H)$	l'espace des fonctions continues de $[0; T]$ dans H
$\ \cdot\ _{0,H}$	la norme de $C([0; T], H)$
$C^1([0; T], H)$	l'espace des fonctions continument dérivable de $[0; T]$ dans H .
$\ \cdot\ _{1,H}$	la norme de $C^1([0; T], H)$
$L^p(0, T, H)$	l'espace des fonctions mesurables de $[0; T]$ dans H
$\ \cdot\ _{0,p,H}$	la norme de $L^p(0, T, H)$, telles que $\int_0^T f(t) _H^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$
$W^{k,p}(0, T, H)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p .
$\ \cdot\ _{k,p,H}$	la norme de $W^{k,p}(0, T, H)$
Pour une fonctions f , on note	
$dom f$	le domaine de f .
$\text{supp } f$	le support de f .
$\dot{f}, \ddot{f}$	les dérivés primaire et seconde de f par rapport au temps.
$\partial_i f$	la dérivée partielle de f par rapport à la i ème composante x_i .
∇f	le gradient de f .
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de f qui vaut $\frac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$
$\text{Div } f$	la divergence de f
∂f	le sousdifférentiel (classique) de f .

Si H^1 et H^2 sont deux espaces de Hilbert réels, on note par

$\mathcal{L}(H^1, H^2)$ l'espace des applications linéaires et continues de H^1 dans H^2 .

$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H^1, H^2)}$ la norme de $\mathcal{L}(H^1, H^2)$.

Chapitre 1

Formulation des problèmes aux limites et rappels d'analyse

Ce chapitre a pour but l'introduction et la formulation des problèmes mécaniques qui sont traités dans la suite, ainsi qu'un rappel de notions principales de la mécanique des milieux continus et d'analyse fonctionnelle nécessaire pour la compréhension de ce mémoire.

Ce chapitre est constitué de deux parties. La première partie est consacrée à la formulation mécanique des différents problèmes pour la loi viscoélastique avec terme intégral. La seconde partie est consacrée à quelques rappels d'analyse.

1.1 PROBLEMES AUX LIMITES POUR LES MATERIAUX VISCOELASTIQUES

Dans cette partie on commence par décrire la loi de comportement viscoélastique linéaire avec terme intégral de Volterra, puis on s'intéresse aux différentes conditions aux limites concernant les problèmes viscoélastiques. Au début, on considère la loi de contact avec réponse normale instantanée, ensuite on introduit la loi de contact de compliance normale et la loi de compliance normale avec adhésion. On donne la formulation mathématique des problèmes qui seront étudiés au second et au troisième chapitre de ce mémoire.

1.1.1 Lois de comportement

L'objet de la mécanique des milieux continus est l'étude du mouvement des corps si les distances relatives entre ses points sont variables.

Le principe fondamentale de la mécanique est

$$Div \sigma + f = \rho \ddot{u}.$$

Cette équation s'appelle équation du mouvement, où ρ représente la densité de masse et $\ddot{u}$ représente l'accélération. Les processus d'évolution définis par l'équation ci-dessus s'appellent processus dynamiques. Si u varie lentement avec le temps alors $\rho \ddot{u}$ sera négligeable ce qui nous conduit à l'équilibre

$$Div \sigma + f = 0,$$

où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ représente la densité des forces volumiques sur Ω et $Div \sigma$ est la divergence du tenseur σ . Les processus d'évolution définis par cette équation s'appellent processus quasi-statiques. L'équation équivaut à d relations scalaires, mathématiquement cette équation ne suffit pas à modéliser le problème d'équilibre du corps car, par exemple les d composantes u_i du champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation. Du point de vue physique, il faut remarquer que l'équation exprime une loi universelle valable pour tous les matériaux. Si donc cette équation suffisait à déterminer tous les paramètres, cela signifierait que,

soumis à des conditions identiques, les divers milieux continus auraient des comportements identiques. Ceci est naturellement absurde. L'équation est donc insuffisante, à elle seule, à décrire l'équilibre des corps matériels, elle doit être complétée par d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de matériau et que l'on désigne sous le vocable général la loi de comportement qui est une relation reliant le tenseur de contrainte σ , le tenseur de déformation ε et leur dérivées. On présente dans ce mémoire, la loi de comportement d'un matériau viscoélastique avec mémoire longue.

La loi de comportement d'un matériau viscoélastique avec mémoire longue est donnée par:

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u(s))ds, \quad (\text{I.1.1})$$

où $\mathcal{A}$ est le tenseur de viscosité non linéaire, $\mathcal{G}$ est le tenseur d'élasticité et B est un tenseur de relaxation d'ordre quatre. Lorsque $B = 0$ la loi constitutive (I.1.1) devient la loi constitutive du type Kelvin-Voigt suivante:

$$\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u})) + \mathcal{G}(\varepsilon(u)). \quad (\text{I.1.2})$$

Les problèmes de contact pour des matériaux de la forme (I.1.1) et (I.1.2) sont le sujet de nombreux articles, par exemple [17, 18, 21, 22, 23, 27, 28, 29, 31, 32] et dans la monographie [10].

1.2 Conditions aux limites de contact

1.2.1 Condition de contact sans frottement avec réponse normale instantanée

La réponse normale instantanée est donnée par

$$\sigma_\nu = -p_\nu(\dot{u}_\nu), \quad (\text{I.1.3})$$

où $\dot{u}_\nu$ est la vitesse normale, σ_ν désigne la contrainte normale et p_ν est une fonction donnée telle que $p_\nu(r) = 0$ pour $r \leq 0$. (I.1.1) traduit une dépendance générale de la contrainte

normale par rapport à la vitesse normale, elle peut représenter le comportement d'une couche de lubrifiant sur la surface de contact. Dans e cas où

$$p_\nu(r) = kr \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad (\text{I.1.4})$$

avec $k \geq 0$ la résistance de la fondation à la pénétration est proportionnelle à la vitesse normale. De tels exemple de contact à réponse normale instantanée peuvent être trouvés dans [11].

1.2.2 Condition de contact sans frottement avec compliance normale

La condition de compliance normale est donnée par:

$$\sigma_\nu = -p_\nu(u_\nu), \quad (\text{I.1.5})$$

où u_ν représente le déplacement normale et p_ν est une fonction positive donnée. Cette condition a été utilisée dans [11]. Un exemple de la fonction de compliance normale p_ν est

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+ \quad (\text{I.1.6})$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$.

1.2.3 Condition de compliance normale avec adhésion

La condition de compliance normale avec adhésion est donnée par:

$$\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2(-R(u_\nu))_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (\text{I.1.7})$$

$$\sigma_\iota = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (\text{I.1.8})$$

$$\dot{\beta} = -[\beta[\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\iota |R_\tau(u_\tau)|^2 - \varepsilon_a]_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (\text{I.2.1})$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (\text{I.1.10})$$

Les relations (I.1.7) et (I.1.8) représentent les conditions de compliance normale avec adhésion où p_ν désigne la fonction de compliance normale. La relation (I.1.9) représente une

équation différentielle ordinaire qui décrit l'évolution du champ d'adhésion, où γ_ν, γ_ι et ε_a désignent des coefficients d'adhésion et R_ν, R_ι sont des opérateurs de troncature définis par

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{is } s \leq -L \\ -s & \text{is } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{is } s \succ -L \end{cases}, \quad (\text{I.1.11})$$

,

$$R_\tau(v) = \begin{cases} v & \text{is } \|v\| \leq L \\ L \frac{v}{\|v\|} & \text{is } \|v\| \succ L \end{cases}. \quad (\text{I.1.12})$$

Quand le champ d'adhésion est nul, (I.1.7) devient

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (\text{I.1.13})$$

1.2.4 Formulation mathématique des problèmes

Nous considérons un corps viscoélastique qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) avec une surface frontière régulière et de Lipschitz Γ partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telles que $\text{mes } \Gamma_1 > 0$. Soit $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Nous étudions dans l'intervalle de temps $[0, T]$ l'évolution du corps matériel due à l'application des forces volumiques et des tractions surfaciques.

Nous notons par $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ le champ de déplacements, $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S^d$ le champ des contraintes et $\varepsilon(u)$ représente le tenseur des déformations linéarisées.

Le corps est fixé sur $\Gamma_1 \times (0, T)$, le champ des déplacements y est par conséquent nul. Une traction surfacique de densité f_2 agit sur $\Gamma_2 \times (0, T)$. Le corps est éventuellement en contact avec une fondation sur $\Gamma_3 \times (0, T)$. Les conditions sur la surface potentielle de contact Γ_3 peuvent être très diverses et donner lieu à une variété de modèles de contact sans frottement.

Notre objectif est l'étude mathématique de trois problèmes de contact pour des matériaux viscoélastiques. Le premier est un problème de contact sans frottement avec réponse normale instantanée dans un processus dynamique, le second est un problème de contact sans frottement avec compliance normale dans un processus dynamique et le troisième est

un problème de compliance normale avec adhésion dans un processus quasistatique. Un résultat de dépendance continue fera l'objet du quatrième chapitre. L'étude variationnelle de ces problèmes se fera dans le cadre physique défini ci dessus. Sous ces hypothèses, en notant par u_0 le déplacement initial, v_0 la vitesse initiale pour les deux premiers problèmes et β_0 pour le troisième problème désigne le champ d'adhésion initial, nous arrivons à formuler les différents problèmes de la manière suivante.

Problème P_1 : (Matériau viscoélastique, réponse normale instantanée)

Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S^d$ tels que.

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u(s))ds && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \rho\ddot{u} &= \text{div}\sigma + f_0 && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u &= 0 && \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \sigma\nu &= f_2 && \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \\ -\sigma_\nu &= p(\dot{u}_\nu) && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \\ \sigma_\tau &= 0 && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \\ u(0) &= u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0 && \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

Problème P_2 : (Matériau viscoélastique, compliance normale)

Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S^d$ tels que.

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u(s))ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad \text{II.2.1}$$

$$\rho\ddot{u} = \text{div}\sigma + f_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad \text{II.2.2}$$

$$u = 0 \quad \text{dans } \Gamma_1 \times (0, T) \quad \text{II.2.3}$$

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{dans } \Gamma_2 \times (0, T) \quad \text{II.2.4}$$

$$\sigma_\nu = p(u_\nu) \quad \text{dans } \Gamma_3 \times (0, T) \quad \text{II.2.5}$$

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{dans } \Gamma_3 \times (0, T) \quad \text{II.2.6}$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{II.2.7}$$

Problème P_3 : (Matériau viscoélastique, compliance normale avec adhésion)

Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S^d$ et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$ tels que pour tous $t \in [0, T]$ tels que.

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \mathcal{A}\varepsilon(u) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u(s))ds && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 \operatorname{Div} \sigma + f_0 &= 0 && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 u &= 0 && \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\
 \sigma \nu &= f_2 && \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\
 -\sigma_\nu &= p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2(-R(u_\nu)) && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
 \sigma_\tau &= 0 && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
 \dot{\beta} &= -[\beta[\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\tau |R_\tau(u_\tau)|^2 - \varepsilon_a]_+ && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
 \beta(0) &= \beta_0 && \text{sur } \Gamma_3.
 \end{aligned}$$

Les problèmes que nous avons formulés ci-dessus seront étudiés au deuxième et troisième chapitre de ce mémoire. Nous utilisons des méthodes différentes. Pour le problème P_1 nous utilisons des arguments d'équations non linéaires dépendant du temps, des arguments de point fixe. Pour les problèmes P_2 et P_3 nous utilisons des arguments d'équations non linéaires dépendant du temps, arguments de point fixe et opérateurs monotones.

1.3 RAPPELS D'ANALYSE

1.3.1 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section des espaces du type Sobolev utilisés en mécanique du contact, à savoir les espaces de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation, ainsi que les espaces de fonctions à valeurs vectorielles. On présente en plus leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On adopte ici la convention de l'indice muet et on précise aussi que toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans mémoire sont introduits dans cette section. En outre, dans la rédaction de cette section nous avons utilisé [36].[37] Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev et les espaces de distributions, on renvoie par exemple à [4], [5],[24], [25].

1.3.2 Espaces de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation

Nous désignons par S_d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur IR^d ($d = 2, 3$), "." et $|\cdot|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur IR^d et S^d . Ainsi,

$$\begin{aligned} u.v &= u_i v_i, & |v| &= (v.v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d \\ \sigma.\tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & |\sigma| &= (\sigma.\sigma)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma, \tau \in S^d \end{aligned}$$

Dans toute la suite, $\Omega \subset IR^d$ est un domaine borné avec une surface frontière régulière de Lipschitz notée Γ .

Nous utilisons les espaces suivants.

$$\begin{aligned} H &= \{ u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega) \setminus i = \overline{1, d} \} = L^2(\Omega)^d \\ \mathcal{H} &= \{ \sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \setminus i, j = \overline{1, d} \} = L^2(\Omega)^{d \times d} \\ H_1 &= \{ u \in H \mid \varepsilon(u) \in \mathcal{H} \} = \{ u = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega) \setminus i = \overline{1, d} \} = H^1(\Omega)^d \\ \mathcal{H}_1 &= \{ \sigma \in \mathcal{H} \mid \sigma_{ij} \in H \} \end{aligned}$$

où $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$ et $Div : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$ sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad Div \sigma = (\sigma_{i,j}) \quad 1 \leq i, j \leq d$$

où la virgule représente la dérivée par rapport à la variable spatiale, c'est à dire que

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Ces espaces respectifs sont des espaces de Hilbert réels munis de leurs produits scalaires suivants:

$$\begin{aligned}
 (u, v)_H &= \int_{\Omega} u_i v_i dx \quad \forall u, v \in H \\
 (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H} \\
 (u, v)_{H_1} &= (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in H_1 \\
 (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} &= (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, Div \tau)_H \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}_1
 \end{aligned}$$

Les normes sur les espaces H , $\mathcal{H}$, H_1 et $\mathcal{H}_1$ sont notées respectivement par $|\cdot|_H$, $|\cdot|_{\mathcal{H}}$, $|\cdot|_{H_1}$ et $|\cdot|_{\mathcal{H}_1}$. Comme la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $u \in H_1$ nous utilisons la notation u pour désigner la trace γ_u de u sur Γ et nous notons par u_{ν} et u_{τ} les composantes normale et tangentielle de u sur la frontière données par

$$u_{\nu} = u \cdot \nu, \quad u_{\tau} = u - u_{\nu} \nu \quad (\text{I.2.1})$$

Pour le champ des contraintes σ nous notons par σ_{ν} et σ_{τ} les composantes normale et tangentielle à la frontière, à savoir :

$$\sigma_{\nu} = (\sigma \nu) \cdot \nu, \quad \sigma_{\tau} = \sigma \nu - \sigma_{\nu} \nu \quad (\text{I.2.2})$$

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par H_{Γ} , ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H'_{Γ} le dual de H_{Γ} , et $(\cdot, \cdot)_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}}$ le produit de dualité entre H'_{Γ} et H_{Γ} .

Pour tout $\sigma \in H_1$, il existe un élément noté $\sigma \nu \in H'_{\Gamma}$ tel que

$$(\sigma \nu, \gamma v)_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}} = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, v)_H \quad \forall v \in H_1$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\sigma \nu, \gamma v) = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1$$

donc, si σ est assez régulier nous avons la formule suivante (Formule de Green) :

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1(\Omega) \quad (\text{I.2.3})$$

Nous introduisons à présent un sous espace fermé de H_1 , dont la définition est donnée ci-après

$$V = \left\{ v \in H_1(\Omega)^d \mid v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \right\}$$

puisque $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V : il existe une constante $C_k > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq C_k |v|_{H_1(\Omega)^d} \quad \forall v \in V$$

une preuve de cette inégalité peut être trouvée dans [25, p.79].

Sur V nous considérons le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V \quad (\text{I.2.4})$$

et soit $|\cdot|_V$ la norme associée, c'est à dire

$$|v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V.$$

Par l'inégalité de korn, il vient que $|\cdot|_{H_1}$ et $|\cdot|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, |\cdot|_V)$ est un espace de Hilbert.

En outre, par le théoème de trace de Sobolev, il existe constante $C_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_2 telle que

$$|v|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 |v|_V \quad \forall v \in V \quad (\text{I.2.5})$$

1.3.3 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Soit H un espace de Hilbert. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$ et $T > 0$. On rappelle que $W^{k,p}(0, T; H)$ est l'espace des distributions vectorielles $u \in D'(0, T; H)$ telles que $D_j u \in L^p(0, T; H)$ pour $j = \overline{0, k}$, D_j désignant la dérivée d'ordre j au sens des distributions.

Si $1 \leq p < +\infty$, $W^{k,p}(0, T; H)$ est un espace de Banach réel pour la norme définie par

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;H)} = \left(\sum_{j=0}^k \int_0^T \|D_j u(x)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\forall u \in W^{k,p}(0, T; H).$$

En particulier, $W^{k,2}(0, T; H)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire défini par

$$(u, v)_{W^{k,2}(0,T;H)} = \sum_{j=0}^k \int_0^T (D_j u(t), D_j v(t))_H dt$$

$$\forall u, v \in W^{k,2}(0, T; H)$$

D'autre part, $W^{k,\infty}(0, T; H)$ est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(0,T;H)} = \sum_{j=0}^k \sup_{[0,T]} \|D_j(u(t))\|_H$$

$$\forall u \in W^{k,\infty}(0, T; H)$$

Pour le cas particulier $k = 0$, on remarque que

$$W^{0,p}(0, T; H) = L^p(0, T; H)$$

et on note alors la norme $L^p(0, T; H)$ par $\|\cdot\|_{L^p(0,T;H)}$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. On définit aussi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'espace $C^k(0, T; H)$ des fonctions $u : [0, T] \rightarrow H$ telles que pour tout $j = \overline{0, k}$ les dérivées $\frac{d^j u}{dt^j}$ existent et sont continues sur $[0, T]$. On note, en particulier, $C^0(0, T; H)$ par $C(0, T; H)$. L'espace $C^k(0, T; H)$ est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\|u\|_{C^k(0,T;H)} = \sum_{j=0}^k \max_{t \in [0,T]} \left\| \frac{d^j u}{dt^j}(t) \right\|_H$$

$$\forall u \in C^k(0, T, H).$$

En particulier, les normes sur les espaces $C(0, T; H)$ et $C^1(0, T; H)$ sont données par

$$\|u\|_{C(0,T;H)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_H \quad \forall u \in C(0, T, H)$$

$$\|u\|_{C^1(0,T;H)} = \|u\|_{C(0,T;H)} + \|\dot{u}\|_{C(0,T;H)}$$

$$\forall u \in C^1(0,T;H)$$

On précise que le point au dessus d'une expression désigne la dérivée de cette expression par rapport au temps, représentée par la variable $t \in [0, T]$.

1.3.4 Fonctions convexes

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et à valeurs dans $] -\infty, +\infty]$. Une telle fonction est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, c'est à dire s'il existe $u_0 \in X$ tel que $\varphi(u_0) < +\infty$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \quad \forall u, v \in X, t \in]0, 1[$$

.La fonction φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in X$ tels que $u \neq v$. Pour toute fonction $\varphi : X \rightarrow] -\infty, +\infty]$, on définit le domaine et l'épigraphe de φ respectivement par

$$\text{dom}(\varphi) = \{u \in X \mid \varphi(u) < +\infty\}$$

$$\text{epi } \varphi = \{(u, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(u) \leq \alpha\}.$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants

- 1) φ est propre si et seulement $\text{dom}(\varphi) \neq \emptyset$.
- 2) Le domaine de φ est un ensemble convexe de X si φ est convexe.
- 3) φ est convexe si et seulement si $\text{epi } \varphi$ est un ensemble convexe dans $X \times \mathbb{R}$.

Soit maintenant H un espace de Hilbert. Une fonction $\varphi : H \rightarrow] -\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) en $u_0 \in H$ si

$$\liminf_{u \rightarrow u_0} \varphi(u) \geq \varphi(u_0)$$

Une fonction est s.c.i. sur $K \subset H$ si elle est s.c.i. en tout point de K et elle est dite s.c.i. si elle est s.c.i. sur tout H .

La propriété de semi-continuité peut être caractérisée de la façon suivante:

Lemme. Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes

- 1) φ est semi-continue inférieurement.
- 2) L'épigraphe de φ est fermé dans $H \times IR$.

Puisque dans un espace vectoriel normé tout ensemble convexe est simultanément fermé pour la topologie forte et la topologie faible, le lemme précédent conduit au résultat suivant:

Théorème. Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et propre. Alors φ est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie faible de H .

Soit maintenant K un sous-ensemble de H . On appelle fonction indicatrice de K , la fonction $\Psi_K : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ définie par

$$\Psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant cette définition, on peut facilement prouver le résultat suivant:

Lemme. K est un ensemble convexe, fermé et non vide de H si et seulement si la fonction indicatrice Ψ_K est convexe, semi-continue inférieurement et propre.

On note à présent par 2^H l'ensemble de toutes les parties de H . Une fonction $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite Gâteaux-différentiable au point $u \in H$ s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in H$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = (\nabla\varphi(u), v)_H$$

$\forall v \in H$. L'élément $\nabla\varphi(u)$ s'appelle la différentielle au sens de Gâteaux de φ en u .

La fonction φ est dite Gâteaux-différentiable si elle est Gâteaux-différentiable en tout point de H . Dans ce cas l'opérateur $u \in H \mapsto \nabla\varphi(u) \in H$ s'appelle le gradient de φ .

La convexité des fonctions Gâteaux-différentiables peut être caractérisée de la façon suivante:

Lemme. Soit $\varphi : H \rightarrow IR$ une fonction Gâteaux-différentiable. Alors φ est une fonction convexe si et seulement si

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (\nabla\varphi(u), v - u)_H \quad \forall u, v \in H.$$

L'inégalité précédente suggère une généralisation de la notion de gradient aux fonctions convexes. On dit que la fonction $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est sous-différentiable en un point $u \in H$ s'il existe $f \in H$ tel que

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_H \quad \forall v \in H.$$

L'élément f est alors appelé un sous-gradient de φ en u et l'ensemble des sous-gradients de φ en u est appelé le sous-différentiel de φ en u et est noté $\partial\varphi(u)$:

$$\partial\varphi(u) = \{f \in H / \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_H \quad \forall v \in H\}$$

On note par $dom(\partial\varphi)$ l'ensemble défini par

$$dom(\partial\varphi) = \{u \in H / \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}$$

En utilisant définis l'ensembles $\partial\varphi(u)$ et $dom(\partial\varphi)$ ainsi que la définition du domaine d'une fonction, il résulte

$$dom(\partial\varphi) \subset dom \varphi.$$

L'opérateur multivoque $u \mapsto \partial\varphi(u) : H \rightarrow 2^H$ s'appelle le sous-différentiel de φ . La fonction φ est dite sous-différentiable si elle est sous-différentiable en tout point de H , c'est à dire si $dom(\partial\varphi) = H$.

En utilisant l'inégalité, on obtient:

Lemme. Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction sous-différentiable. Alors φ est convexe, propre et semi-continue inférieurement.

Lemme. Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement. Alors φ est sous-différentiable en tout point intérieur de son domaine $\text{dom } \varphi$.

Dans le cas d'une fonction convexe, le lien entre l'opérateur gradient et le sous-différentiel est donné par

Lemme. Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. Alors φ est sous-différentiable et $\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\}$ pour tout $u \in H$.

1.3.5 Inéquations variationnelles

Soient $A : H \rightarrow H$ un opérateur non linéaire, $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre et $f \in H$. Un bon nombre de problèmes aux limites en équations aux dérivées partielles ainsi qu'en mécanique des milieux continus ont un rapport avec des problèmes mathématiques de la forme suivante:

Trouver u tel que $u \in H$,

$$(Au, v - u)_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_H \quad \forall v \in H. \quad (\text{I.2.6})$$

Le problème (I.2.6) est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur H .

On dit que l'opérateur A est:

1) fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - v, u - v)_H \geq m \|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in H, \quad (\text{I.2.7})$$

2) monotone si

$$(Au - Av, u - v)_H \geq 0 \quad \forall u, v \in H, \quad (\text{I.2.8})$$

3) de Lipschitz s'il existe $L > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_H \leq L \|u - v\| \quad \forall u, v \in H, \quad (\text{I.2.9})$$

4) hémicontinu si

$$\forall u, v \in H, \text{ l'application } t \rightarrow A(u + tv) : \mathbb{R} \rightarrow H' \text{ est continue.} \quad (I.2.10)$$

On peut démontrer que si A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz alors A est inversible et A^{-1} est fortement monotone et de Lipschitz.

En ce qui concerne le problème (I.2.6), on a le résultat d'existence et d'unicité suivant:

Théorème. Si A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et φ est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement alors l'inéquation variationnelle elliptique (I.2.6) admet une solution unique.

Le théorème précédent représente un résultat d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles de seconde espèce. La démonstration de ce théorème peut être trouvée par exemple dans [5]. Ce théorème sera utilisé au troisième chapitre.

1.3.6 Compléments divers

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Nous citons certains théorèmes utilisés dans ce mémoire. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette section, nous proposons par exemple [37].

1.3.7 Lemmes de Gronwall

Lemme. Soient $m, n \in C(0, T; IR)$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\varphi \in C(0, T; IR)$ est une fonction telle que

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\varphi(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$\varphi(t) \leq (a + \int_0^t m(s)ds) \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T]$$

Pour le cas particulier $m = 0$, ce lemme devient:

Corollaire. Soit $n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\varphi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\varphi(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$\varphi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T]$$

Lemme. Soient $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\varphi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\varphi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\varphi(s)ds + \int_0^t n(s)\varphi^2(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$|\varphi(t)| \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds\right) \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T]$$

1.3.8 Enoncés de certains théorèmes

Nous considérons maintenant quelques théorèmes importants qui sont utilisés le long de cette mémoire. La version suivante du théorème de Cauchy-Lipschitz peut être trouvée dans [38].

Théorème I.2.1. soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. soit $A : V \longrightarrow V'$ un opérateur monotone et hemicontinu qui satisfait

1.

$$(Av, v)_{V' \times V} \geq \omega \|v\|_V^2 + \lambda \quad \forall v \in V, \quad (\text{I.2.11})$$

$$\|Av\| \leq C(\|v\|_V + 1) \quad \forall v \in V, \quad \text{I.2.12}$$

pour des constantes, $\omega \succ 0, C \succ 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Etant donné $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V')$, il existe une fonction unique u qui satisfaisant.

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \dot{u} \in L^2(0, T; V'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

$$u(0) = u_0.$$

La démonstration de ce théorème peut être trouvée par exemple dans [4, page48].

Théorème I.2.2. (point fixe):

Soit E un espace de Banach et soit $G : E \longrightarrow E'$ une application contractante : c'est à dire qu'il existe une constante $k < 1$ strictement positives telle que :

$$\|Gu_1 - Gu_2\|_{E'} \leq k \|u_1 - u_2\|_E \quad \forall u_1, u_2 \in E$$

Alors G admet un point fixe unique tel que :

$$Gu = u$$

Théorème I.2.3. (Cauchy- Lipschitz):

Soit X un espace de Banach et soit $F : [0, T] \times X \longrightarrow X$ une application continue et telle que:

$$\begin{aligned} \|F(t, x_1) - F(t, x_2)\|_X &\leq L \|x_1 - x_2\| \\ \forall x_1, x_2 \in X \text{ et } \forall t \in [0, T] \quad L &\geq 0 \end{aligned}$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe $x \in C^1(0, T; X)$ unique tel que :

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad \forall t \in [0, T].$$

La démonstration de ce théorème peut être trouvée par exemple dans [34, page48]. Ce théorème sera utilisé au troisième chapitre.

Chapitre 2

Problème de contact avec réponse normale instantanée.

Dans ce chapitre, on considère un problème de contact entre un corps viscoélastique et une base déformable dans un processus dynamique. Le contact est modélisé par une réponse normale instantanée, la loi de comportement est viscoélastique avec mémoire longue. On présente la formulation mécanique et variationnelle du problème et on établit l'existence et l'unicité de la solution. La démonstration est basée sur la théorie des équations variationnelles et des arguments de point fixe. Un résultat de dépendance continue de la solution par rapport aux données a été considéré voir [31].

2.1 Formulation mécanique du problème

Problème P_1 . Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S^d$ tels que.

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u(s))ds & \text{dans } \Omega \times (0, T) & \text{II.1.1} \\
 \rho\ddot{u} &= \text{Div}\sigma + f_0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) & \text{II.1.2} \\
 u &= 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) & \text{II.1.3} \\
 \sigma\nu &= f_2 & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) & \text{II.1.4} \\
 -\sigma_\nu &= p(\dot{u}_\nu) & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) & \text{II.1.5} \\
 \sigma_\tau &= 0 & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) & \text{II.1.6} \\
 u(0) &= u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0 & \text{dans } \Omega & \text{II.1.7}
 \end{aligned}$$

Ici, la relation (II.1.1) représente la loi de comportement d'un matériau viscoélastique avec mémoire longue, la relation (II.1.2) représente l'équation d'équilibre et les relations (II.1.3)-(II.1.4) sont les conditions de déplacement-traction. Les relations (II.1.5)-(II.1.6) représentent les conditions de contact avec réponse normale instantanée et (II.1.7) représente les conditions initiales du champ de déplacement u_0 et du champ de vitesse v_0 .

Les hypothèses portant sur les diverses fonctions intervenant dans le problème mécanique seront données ci-après puis quelques notations seront introduites avant d'énoncer la formulation variationnelle d'un tel problème mécanique. On considère l'espace des déplacements admissibles suivant

$$V = \{v \in H^1(\Omega)^d / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Korn est satisfaite, il existe $C_k > 0$ qui dépend de Ω et de Γ_1 tel que

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq C_k |v|_{H_1} \quad \forall v \in V. \quad (\text{II.1.8})$$

Sur l'espace V , on considère le produit scalaire défini par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \quad (\text{II.1.9})$$

On note par $|\cdot|_V$ la norme associée,

$$|v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V. \quad (\text{II.1.10})$$

Il vient de l'inégalité de Korn que $|\cdot|_{H^1(\Omega)^d}$ et $|\cdot|_V$ sont des normes équivalentes sur V . Par conséquent $(V, |\cdot|_V)$ est un espace de Hilbert réel. En se référant de plus à l'inégalité de

Korn et au théorème de trace de Sobolev, il existe une constante C_0 strictement positive ne dépendant que du domaine Ω et des parties Γ_1 et Γ_3 telle que

$$v|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 |v|_V \quad \forall v \in V. \quad (\text{II.1.11})$$

Pour l'étude du problème mécanique (II.1.1)-(II.1.7), on considère les hypothèses suivantes

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times S^d \rightarrow S^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ | \mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2) | \leq L_{\mathcal{A}} | \varepsilon_1 - \varepsilon_2 | \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \text{ Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} | \varepsilon_1 - \varepsilon_2 |^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (c) x \rightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ (d) \text{ L'application } x \rightarrow \mathcal{A}(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (\text{II.1.12})$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G} : \Omega \times S^d \times \mathbb{R} \rightarrow S^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\ | \mathcal{G}(x, \varepsilon_1, \alpha_1) - \mathcal{G}(x, \varepsilon_2, \alpha_2) | \leq L_{\mathcal{G}} (| \varepsilon_1 - \varepsilon_2 | + | \alpha_1 - \alpha_2 |) \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \text{ Pour tout } \varepsilon \in S^d \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, x \rightarrow \mathcal{G}(x, \varepsilon, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ (c) \text{ L'application } x \rightarrow \mathcal{G}(x, 0, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (\text{II.1.13})$$

La fonction de contact $P : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait:

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_p \text{ tel que} \\ |p(x, r_1) - p(x, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Gamma_3 \\ b) (p(x, r_1) - p(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Gamma_3 \\ c) \text{ L'application } x \rightarrow p(x, r) \text{ est mesurable } \forall r \in \mathbb{R} \\ d) p(x, r) = 0 \quad \forall r \leq 0 \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (\text{II.1.14})$$

L'opérateur B relaxation satisfait

$$B \in C(0, T; \mathcal{H}_{\infty}) \quad (\text{II.1.15})$$

où $\mathcal{H}_\infty$ est l'espace du champ tensorielle de quatrième ordre donné par

$$\mathcal{H}_\infty = \langle E = (E_{ijkl}) / E_{ijkl} = E_{klij} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j, k, l \leq d \rangle \quad (\text{II.1.16})$$

qui est espace de Banach réel avec la norme

$$|E|_{\mathcal{H}_\infty} = \max_{1 \leq i, j, k, l \leq d} |E_{ijkl}|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (\text{II.1.17})$$

Aussi nous supposons que la densité de masse satisfait

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ il existe } \rho^* \succ 0 \text{ telle que } \rho(x) \geq \rho^* \text{ et } x \in \Omega \quad (\text{II.1.18})$$

La force volumique et la traction surfacique sont supposées satisfaire:

$$f_0 \in C(0, T; H), \quad f_2 \in C\left(0, T; L^2(\Gamma_2)^d\right) \quad (\text{II.1.19})$$

et les données initiales satisfont aux conditions suivantes

$$u_0 \in V, v_0 \in L^2(\Omega)^d. \quad (\text{II.1.20})$$

Nous passons maintenant à la formulation variationnelle du problèmes p_1 . Nous utilisons un produit modifié intérieure sur $H = L^2(\Omega)^d$ donné par

$$(u, v)_H = (\rho u, v)_H \quad \forall u, v \in H \quad (\text{II.1.21})$$

et la norme associée,

$$\|v\|_H = (\rho v, v)_H^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in H. \quad (\text{II.1.22})$$

Il résulte des hypothèses (II.1.21)-(II.1.22) que $\|\cdot\|_H$ et $|\cdot|_H$ sont des normes équivalentes sur H et la l'inclusion $(V, |\cdot|_V)$ dans $(V, \|\cdot\|_H)$ est dense et continu. On note par V' le dual de V . De L'identification de H avec son propre dual, on peut écrire le triplet de Gelfand $V \subset H \subset V'$. Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ pour représenter la dualité entre V' et V nous avons

$$(u, v)_{V' \times V} = (u, v)_H \quad \forall u \in H, \forall v \in V \quad (\text{II.1.23})$$

Ensuite, on note par $f : [0, T] \rightarrow V$ la fonction définie par

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v \, da \quad \forall v \in V, t \in [0, T], \quad (\text{II.1.24})$$

puis, la fonctionnelle $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) v_\nu \, da, \quad \forall u, v \in V. \quad (\text{II.1.25})$$

On note que la condition (II.1.24) implique

$$f \in L^2(0, T; V'). \quad (\text{II.1.26})$$

2.2 Formulation variationnelle du problème

En utilisant des arguments standards basés sur la formule de Green (I.2.3), on obtient la formulation variationnelle du problème (II.1.1)-(II.1.7).

Problème P_1V : Trouver le champ de déplacement $u : [0, T] \rightarrow V$ et le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ tels que:

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u(s)) \, ds \quad (\text{II.1.27})$$

$$(\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \quad (\text{II.2.28})$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0 \quad (\text{II.1.29})$$

2.3 Existence et unicité de la solution

Le principal résultat dans cette section est le suivant:

Théorème II.1.1. Sous les hypothèses (II.1.12)-(II.1.20), le problème PV_1 admet une solution unique (u, σ) ayant la régularité suivante

$$u \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V'), \quad (\text{II.1.30})$$

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \text{Div} \sigma \in L^2(0, T; V'). \quad (\text{II.1.31})$$

Démonstration. La démonstration du théorème **II.1.1** se fait en plusieurs étapes. Nous supposons que les hypothèses du théorème **II.1.1** sont vérifiées et que C est une constante positive qui dépend de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \mathcal{A}, \mathcal{G}, B, p$ et T dont la valeur change d'un endroit à un autre. Soit $\eta \in L^2(0, T; V')$. Dans la première étape, on considère le problème variationnel suivant.

Problème $P_1 V_\eta$. Trouver le champ de déplacement $u_\eta : [0, T] \longrightarrow V$ tel que:

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}_\eta(t), v)_{V' \times V} + (\mathcal{A} \varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\eta(t), v)_{V' \times V} + j(\dot{u}_\eta(t), v) \\ & = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (\text{II.1.32})$$

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \dot{u}_\eta(0) = v_0. \quad (\text{II.1.33})$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme II.1.1. Le problème $P_1 V_\eta$ admet une solution unique qui satisfait la régularité (II.1.30). Cependant, si u_i représente la solution du problème $PV_{1\eta_i}$, pour $\eta = \eta_i \in L^2(0, T; V')$, $i=1,2$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\int_0^t |\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)|_V^2 ds \leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds \quad \forall t \in [0, T] \quad (\text{II.1.34})$$

Preuve: Nous définissons l'opérateur $A : V \longrightarrow V'$ par

$$(Au, v)_{V' \times V} = (\mathcal{A} \varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u, v) \quad \forall u, v \in V. \quad (\text{II.1.35})$$

En posant $\dot{u}_\eta = v_\eta$ le problème $P_1 V_\eta$ devient:

Trouver le champ de déplacement $v_\eta : [0, T] \longrightarrow V$ tel que:

$$\dot{v}_\eta(t) + Av_\eta(t) + \eta(t) = f(t), \quad (\text{II.1.36})$$

$$v_\eta(0) = v_0. \quad (\text{II.1.37})$$

Il rsulte de (II.1.10) , (II.1.11) , (II.1.12) (a) , (II.1.14) (a) , (II.1.25) et (II.1.35) que

$$|Au - Av|_{V'} \leq (L_{\mathcal{A}} + L_p C_0^2) |u - v|_V \quad \forall u, v \in V, \quad (\text{II.1.38})$$

ce qui implique que $A : V \longrightarrow V'$ est un opérateur de Lipschitz donc continu. D'où l'application $t \rightarrow A(u + tv)$ est continue et alors de la définition **I.2.10**, nous concluons que A est un opérateur hémicontinu. Maintenant , de (II.1.35) , (II.1.12) (c) et (II.1.14) (b) nous trouvons

$$(Au - Av, u - v)_{V' \times V} \geq m_A |v_1 - v_2|_V^2 \quad \forall u, v \in V \quad (\text{II.1.39})$$

donc que A est un opérateur monotone. Nous choisissons $v = 0_V$ dans (II.1.39) et en utilisant l'inégalité $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned} (Au, u)_{V' \times V} &\geq m_{\mathcal{A}} |u|_V^2 - |A0_V|_{V'} |u|_V \\ &\geq \frac{1}{2} m_{\mathcal{A}} |u|_V^2 - \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} |A0_V|_{V'}^2 \quad \forall u \in V, \end{aligned}$$

donc

$$(Au, u)_{V' \times V} \geq \lambda |u|_V^2 + \alpha \quad \forall u \in V, \quad \text{avec } \lambda = \frac{1}{2} m_{\mathcal{A}} \text{ et } \alpha = -\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} |A0_V|_{V'}^2.$$

Alors la condition (I.2.9) du théorème **I.2.1** est vérifiée. Ensuite, en choisissant $v = 0_V$ dans (II.1.38) nous trouvons

$$|Au|_{V'} \leq c(|u|_V + 1) \quad \forall u \in V.$$

Alors la condition (I.2.10) du théorème **I.2.1** est satisfaite. Enfin, nous rappelons que par (II.1.20) et (II.1.26) nous avons $f - \eta \in L^2(0, T; V')$ et $v_0 \in H$. Il résulte alors du théorème **I.2.1** qu'il existe une fonction inique v_η qui satisfait

$$v_\eta \in L^2(0, T; V') \cap C(0, T; H), \dot{v}_\eta \in L^2(0, T; V') \quad (\text{II.1.40})$$

$$\dot{v}_\eta(t) + Av_\eta(t) + \eta(t) = f(t) \quad p.p. t \in [0, T] \quad (\text{II.1.41})$$

$$v_\eta(0) = v_0 \quad (\text{II.1.42})$$

Soit $u_\eta : [0, T] \longrightarrow V$ la fonction définie par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (\text{II.1.43})$$

Il vient de (II.1.35) et (II.1.40)-(II.1.43) que u_η est une solution du problème variationnel PV_η et satisfait la régularité (II.1.30). Ce qui conclut la partie existence du lemme **II.1.1**. L'unicité de la solution vient de l'unicité de la solution du problème (II.1.40)-(II.1.43), garantie par le théorème **I.2.1**. Considérons maintenant $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V')$ et notons, $u_i = u_{\eta_i}, v_i = v_{\eta_i} = \dot{u}_{\eta_i}$ pour $i = 1, 2$. De (II.1.32) nous obtenons que

$$(\dot{v}_1 - \dot{v}_2, v_1 - v_2)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), (\varepsilon)v_1 - \varepsilon(v_2))_{\mathcal{H}} = -(\eta_1 - \eta_2, v_1 - v_2)_{V' \times V}.$$

Par integration par rapport à t de l'égalité ci-dessus et par utilisation des conditions initiales $v_1(0) = v_2(0) = v_0$ et les propriétés de l'opérateur A on trouve que

$$m_A \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq - \int_0^t (\eta_1(s) - \eta_2(s), v_1(s) - v_2(s))_{V' \times V} ds$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité $(\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2})$ on déduit que

$$\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds.$$

d'où (II.1.34). Maintenant pour $\eta \in L^2(0, T; V')$ on considère l'opérateur

$\Lambda : L^2(0, T; V') \longrightarrow L^2(0, T; V')$ défini par

$$(\Lambda\eta(t), v)_{V' \times V} = (\mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \left(\int_0^t B(t-s) \varepsilon(u_\eta(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{H}}$$

$$\forall v \in V, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{II.1.44})$$

Lemme II.1.2 Pour $\eta \in L^2(0, T; V')$, l'opérateur Λ est continu et il existe un élément unique $\eta^* \in L^2(0, T; V')$ tels que $\Lambda\eta^* = \eta^*$

Preuve. Soit $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V')$ et $t \in [0, T]$. On note $u_i = u_{\eta_i}$ pour $i = 1, 2$. En utilisant (II.1.44), (II.1.11), (II.1.15)(a), (II.1.16), (II.1.17) on trouve que

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{V'} \leq C(|u_1(t) - u_2(t)|_V + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V ds). \quad (\text{II.1.45})$$

D'autre part de $u_1(0) = u_2(0) = u_0$ nous avons

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V \leq \int_0^t |\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)|_V ds. \quad (\text{II.1.46})$$

Par suite, utilisant (II.1.45) pour déduire que

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V ds \leq C \int_0^t |\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)|_V ds. \quad (\text{II.1.47})$$

Il résulte de (II.1.47) que

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{V'} \leq C \int_0^t |\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)|_V ds$$

ce qui implique que

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{V'}^2 \leq C \int_0^t |\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)|_V^2 ds. \quad (\text{II.1.48})$$

Maintenant de (II.1.34) et (II.1.48), il vient que

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{V'}^2 \leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds \quad \forall t \in [0, T].$$

En réitérant cette inégalité m fois on obtient:

$$|\Lambda^m \eta_1 - \Lambda^m \eta_2|_{L^2(0,T;V')}^2 \leq \frac{C^m T^m}{m!} |\eta_1 - \eta_2|_{L^2(0,T;V')}^2.$$

Ainsi, pour m suffisant grand, Λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T; V')$, et donc Λ^m a un point fixe unique. Par conséquent, Λ admet un point fixe unique η^* tel que $\Lambda\eta^* = \eta^*$. Maintenant nous avons tous les ingrédients pour démontrer le théorème **II.1.1**.

Preuve.

Soit η^* le point fixe de Λ défini par (II.1.44) et notons

$$u^* = u_{\eta^*} \quad (\text{II.1.49})$$

et

$$\sigma^* = \sigma_{\eta^*} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}^*) + \mathcal{G}\varepsilon(u^*) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u^*(s))ds. \quad (\text{II.1.50})$$

Puisque

$$\begin{aligned} (\eta^*(t), v)_{V' \times V} &= (\mathcal{G}\varepsilon(u^*), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ &+ \left(\int_0^t B(t-s)\varepsilon(u^*(s))ds, \varepsilon(v)_{\mathcal{H}} + j(u^*, v) \right), \end{aligned}$$

on va prouver que le couple (u^*, σ^*) satisfait (II.1.27)-(II.1.29). En effet, nous écrivons (II.1.32) pour $\eta = \eta^*$ et on utilise (II.1.49)-(II.1.50) pour voir que (II.1.28) est satisfaite, (II.1.27) découle de (II.1.50) et (II.1.29) est une conséquence de (II.1.33).

La régularité de u^* vient du lemme **II.1.1**. et la régularité de $\sigma^* \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ vient du lemme **II.1.1**, (II.1.12), (II.1.13), (II.1.15) et la relation (II.1.50). Enfin (II.1.28) implique que

$$\rho \ddot{u}^*(t) = \text{Div} \sigma^* + f_0(t) \text{ sur } V' \quad \text{p.p. } t \in [0, T]$$

et donc par (II.1.18)-(II.1.19), nous constatons que $\text{Div} \sigma^* \in L^2(0, T; V')$. Nous en déduisons que la régularité (II.1.31) est vérifiée ce qui conclut la partie d'existence du théorème **II.1**. L'unicité est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (II.1.44).

Chapitre 3

Problème de contact avec compliance normale

Dans ce chapitre, on considère un problème de contact entre un corps viscoélastique et une base déformable dans un processus dynamique. Le contact est modélisé par une compliance normale, la loi de comportement est viscoélastique avec mémoire longue. On présente la formulation mécanique et variationnelle du problème ainsi qu'un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La démonstration est basée sur la théorie des équations variationnelles et des arguments de point fixe.

3.1 Formulation mécanique du problème

Problème P_2 . Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S^d$ tels que.

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u(s))ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad \text{II.2.1}$$

$$\rho\ddot{u} = \operatorname{div}\sigma + f_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad \text{II.2.2}$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \quad \text{II.2.3}$$

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \quad \text{II.2.4}$$

$$\sigma_\nu = p(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad \text{II.2.5}$$

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad \text{II.2.6}$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{II.2.7}$$

Ici, la relation (II.2.1) représente la loi de comportement d'un matériau viscoélastique avec mémoire longue, la relation (II.2.2) représente l'équation d'équilibre et les relations (II.2.3)-(II.2.4) sont les conditions de déplacement-traction. Les relations (II.2.5)-(II.2.6) représentent les conditions de contact avec compliance normale et (II.2.7) représente les conditions initiales du champ de déplacement u_0 et du champ de vitesse v_0 .

Les hypothèses portant sur les diverses fonctions intervenant dans le problème mécanique sont les mêmes données pour le problème P_1 .

3.2 Formulation variationnelle du problème

En utilisant des arguments standards basés sur la formule de Green (I.2.3), on obtient la formulation variationnelle du problème (II.2.1)-(II.2.7).

Problème P_2V : Trouver le champ de déplacement $u : [0, T] \longrightarrow V$ et le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ tels que:

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u(s))ds \quad (\text{II.2.8})$$

$$(\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in [0, T], \quad (\text{II.2.9})$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0. \quad (\text{II.2.10})$$

3.3 Existence et unicité de la solution

Ici le principal résultat est le suivant:

Théorème II.2.1. Sous les hypothèses (II.1.12)-(II.1.20), le problème P_2V admet une solution unique (u, σ) ayant la régularité (II.1.30)-(II.1.31). Les fonctions Nous concluons par des théorèmes II.2.1 et II.2.2 que sous les hypothèses (II.1.9) – (II.1.17), la dynamique des problèmes de contact p_1 et p_1 ont une solution unique faible avec une régularité (II.1.28) – (II.1.29).

La démonstration du théorème **II.2.1** est similaire à celle du théorème **II.1.1** et est réalisée en plusieurs étapes. Des modifications sont simples à apporter et nous omettons les détails.

Démonstration. Les étapes sont les suivantes .

(i). Pour chaque $\eta \in L^2(0, T; V')$ nous montrons qu'il existe une fonction unique u_η ayant la régularité (II.1.30) de telle sorte que

$$\begin{aligned} (\ddot{u}_\eta(t), v)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u_\eta(t), v) + (\eta(t), v)_{V' \times V} \\ = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \end{aligned} \quad (\text{II.2.11})$$

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \dot{u}_\eta(0) = v_0. \quad (\text{II.2.12})$$

Nous définissons l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ par

$$(Au, v)_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \quad (\text{II.2.13})$$

Nous prouvons que A satisfait les conditions (I.2.9) et (II.2.10) du théorème **I.2.1** et nous procédons comme dans la démonstration du lemme **II.1.1**. Par ailleurs, nous avons recours à des estimations semblables à celles dans la preuve du lemme **II.1.1** pour voir que, si u_i représente la solution du problème (II.2.11)-(II.2.12) pour $\eta_i \in L^2(0, T; V')$, $i = 1, 2$, il existe $C \succ 0$ telle que (II.1.34) est satisfaite.

(ii). Nous introduisons maintenant l'opérateur $\Lambda : L^2(0, T; V') \rightarrow L^2(0, T; V')$ défini par

$$\begin{aligned} (\Lambda\eta(t), v)_{V' \times V} = (\mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \left(\int_0^t B(t-s) \varepsilon(u_\eta(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{H}} \\ + j(u_\eta(t), v) \quad \forall v \in V, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (\text{II.2.14})$$

Ici, pour chaque $\eta \in L^2(0, T; V')$, u_η représente le champ de déplacement obtenu étape (i). Nous utilisons des estimations semblables à ceux utilisés dans le lemme **II.1.2** pour prouver que l'opérateur Λ satisfait (II.1.48). Il s'ensuit maintenant de (II.1.34) et du théorème du point fixe que l'opérateur Λ a un point fixe unique $\eta^* \in L^2(0, T; V')$.

(iii). Soit $\eta^* \in L^2(0, T; V')$ le point fixe de l'opérateur Λ défini par (II.2.24) et notons

$$u^* = u_{\eta^*}, \sigma^* = \sigma_{\eta^*} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}^*) + \mathcal{G}\varepsilon(u^*) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u^*(s))ds. \quad (\text{II.2.15})$$

Nous utilisons l'égalité $\Lambda\eta^* = \eta^*$, (II.2.15) et la définition (II.2.14) de l'opérateur Λ pour prouver que le couple (u^*, σ^*) est une solution de problème PV_2 et satisfait la régularité (II.1.30)-(II.1.31). Ceci conclut partie de l'existence du théorème **II.1.2**. L'unicité résulte de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (II.2.14) obtenu à l'étape (ii).

3.4 Résultats de dépendance continue

Dans cette section, nous étudions la dépendance de la solution des problèmes PV_1 et PV_2 par rapport à une perturbation de la fonction de contact p définie en (II.1.14). Nous nous limitons à l'étude du problème PV_1 car on a de mêmes résultats pour le problème PV_2 . On suppose dans ce qui suit que (II.1.8) – (II.1.17) sont vérifiées et notons (u, σ) la solution du problème PV_1 obtenue d'après le théorème **II.1.1**. Soit $\alpha > 0$, on note par p^α la perturbation de la fonction de contact p telle que $p^\alpha : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Il existe une constante } L_p^\alpha > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p^\alpha(x, r_1) - p^\alpha(x, r_2)| \leq L_p^\alpha |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{b) } (p^\alpha(x, r_1) - p^\alpha(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{c) L'application } x \rightarrow p^\alpha(x, d) \text{ est mesurable } \forall r \in \mathbb{R} \\ \text{d) } p^\alpha(x, r) = 0 \quad \forall r < 0 \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right.$$

Soit $j^\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle définie par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} p^\alpha(u_\nu) v_\nu da, \quad \forall u, v \in V.$$

On considère le problème:

Problème PV_1^α . Trouver le champ de déplacement $u^\alpha : [0, T] \mapsto V$ et le champ des contraintes $\sigma^\alpha : [0, T] \mapsto \mathcal{H}$ tel que

$$\sigma^\alpha = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}^\alpha(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u^\alpha(t)) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u^\alpha(s))ds, \quad (\text{II.3.1})$$

$$(\ddot{u}^\alpha(t), v)_{V' \times V} + (\sigma^\alpha(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j^\alpha(\dot{u}^\alpha(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \cdot \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in [0, T] \quad (\text{II.3.2})$$

$$u^\alpha(0) = u_0, \dot{u}^\alpha(0) = v_0. \quad (\text{II.3.3})$$

Nous déduisons du théorème **II.1.1** que pour tout $\alpha \succ 0$, le problème PV_1^α admet une solution unique $(u^\alpha, \sigma^\alpha)$ qui satisfait (II.1.30) – (II.1.31).

Supposons que la fonction de contact p^α satisfait les hypothèses suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } \beta \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \theta :]0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[\text{ tel que} \\ (a) |p^\alpha(\mathbf{x}, r) - p(\mathbf{x}, r)| \leq \theta(\alpha)(|r| + \beta) \quad \forall \alpha > 0, r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ (b) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \theta(\alpha) = 0. \\ (c) \text{ Il existe } L_0 > 0 \quad \text{tel que } L_p^\alpha \leq L_0 \text{ pour tout } \alpha > 0. \end{array} \right. \quad (\text{II.3.4})$$

Sous ces hypothèses, nous avons le résultat de convergence suivant:

Théorème III.1.1

La solution $(u^\alpha, \sigma^\alpha)$ du problème PV_1^α converge vers la solution (u, σ) du problème PV_1 lorsque $\alpha \longrightarrow 0$, i.e

$$u^\alpha \longrightarrow u \text{ dans } W^{1,2}(0, T; V) \quad \text{quand } \alpha \longrightarrow 0. \quad (\text{II.3.5})$$

$$\sigma^\alpha \longrightarrow \sigma \text{ dans } L^2(0, T; V') \quad \text{quand } \alpha \longrightarrow 0. \quad (\text{II.3.6})$$

Ce résultat de convergence est important du point de vue mécanique car il montre que de petites perturbations sur les conditions de contact peuvent conduire à de petites perturbations de la solution faible du problème P_1 .

Démonstration. Soit $\alpha \succ 0$. Parout dans ce qui suit, C désigne une constante générique positive. En utilisant (II.1.28) et (II.3.2) on obtient

$$\begin{aligned}
 & (\ddot{u}^\alpha(t) - \ddot{u}(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t))_{V' \times V} + (\sigma^\alpha(t) - \sigma(t), \varepsilon(\dot{u}^\alpha(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} \\
 & + j^\alpha(\dot{u}^\alpha(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t) - j(\dot{u}(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t))) = 0 \quad p.p.t \in (0, T).
 \end{aligned} \tag{II.3.7}$$

Nous introduisons (II.1.27) et (II.3.1) dans (II.3.7) pour obtenir

$$\begin{aligned}
 & (\ddot{u}^\alpha(t) - \ddot{u}(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t))_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}^\alpha(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} \\
 & = -(\mathcal{G}\varepsilon(u^\alpha(t)) - \mathcal{G}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} \\
 & - \left(\int_0^t B(t-s) \varepsilon(u^\alpha(s) - u(s)) ds, \varepsilon(\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)) \right)_{\mathcal{H}} \\
 & + j(\dot{u}(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)) - j^\alpha(\dot{u}^\alpha(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)) \quad p.p.t \in (0, T).
 \end{aligned} \tag{II.3.8}$$

Il résulte de (II.1.12) que pour p.p.t $\in (0, T)$.

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}^\alpha(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} \geq m_{\mathcal{A}} |\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)|_V^2. \tag{II.3.9}$$

Nous utilisons maintenant (II.1.13) et (II.1.15) pour obtenir

$$\begin{aligned}
 & -(\mathcal{G}\varepsilon(u^\alpha(t)) - \mathcal{G}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} \\
 & - \left(\int_0^t B(t-s) \varepsilon(u^\alpha(s) - u(s)) ds, \varepsilon(\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)) \right)_{\mathcal{H}} \\
 & \leq C \left(|\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)|_V + \int_0^t |u^\alpha(s) - u(s)|_V ds \right) |\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)|_V \quad p.p.t \in (0, T) ..
 \end{aligned} \tag{II.1.10}$$

Des définitions des fonctionnelles j et j^α on déduit que

$$\begin{aligned}
 & j(\dot{u}(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)) - j^\alpha(\dot{u}^\alpha(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)) \\
 & = \int_{\Gamma_3} (p(\dot{u}_\nu(t)) - p^\alpha(\dot{u}_\nu^\alpha(t))) (\dot{u}_\nu^\alpha(t) - \dot{u}_\nu(t)) da
 \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Gamma_3} (p^\alpha(\dot{u}_\nu(t)) - p^\alpha(\dot{u}_\nu^\alpha(t))) (\dot{u}_\nu^\alpha(t) - \dot{u}_\nu(t)) da \quad \text{p.p. } t \in (0, T).$$

En utilisons (II.3.4), (II.3.5), (I.2.11) et le fait que p^α satisfait (II.1.14) avec L_p^α à la place de L_p on déduit que

$$j(\dot{u}(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)) - j^\alpha(\dot{u}^\alpha(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t))$$

$$\leq C (\theta(\alpha) + |u^\alpha(t) - u(t)|_V) |\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)|_V \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (II.3.11)$$

Nous remplaçons (II.3.9), (II.3.10) et (II.3.11) dans (II.3.8) pour obtenir pour p.p. $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}^\alpha(t) - \ddot{u}(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t))_{V', \times V} + m_{\mathcal{A}} |\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)|_V^2 \\ & \leq C \left(\theta(\alpha) + |u^\alpha(t) - u(t)|_V + \int_0^t |u^\alpha(s) - u(s)|_V ds \right) |\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)|_V, \quad (II.3.12) \end{aligned}$$

Et, en utilisant l'inégalité

$$ab \leq \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} a^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} b^2,$$

Après quelques calculs, nous trouvons

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}^\alpha(t) - \ddot{u}(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t))_{V', \times V} + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} |\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)|_V^2 \\ & \leq C \left(\theta^2(\alpha) + |u^\alpha(t) - u(t)|_V^2 + \int_0^t |u^\alpha(s) - u(s)|_V^2 ds \right) \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Nous integrons l'inégalité précédente sur $[0, s]$ et on utilise de la condition initiale $\dot{u}^\alpha(0) = \dot{u}(0) = v_0$ pour trouver

$$\frac{m_{\mathcal{A}}}{2} \int_0^s |u^\alpha(t) - u(t)|_V^2 dt \leq C \left(\theta^2(\alpha) + \int_0^s |u^\alpha(t) - u(t)|_V^2 dt \right) \quad \forall s \in [0, T]. \quad (II.3.13)$$

Nous utilisons maintenant (II.1.29) et (II.3.3) pour voir que

$$|u^\alpha(s) - u(s)|_V^2 \leq C \int_0^s |\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)|_V^2 dt \quad \forall s \in [0, T]. \quad (\text{II.3.14})$$

Nous remplaçons maintenant (II.3.13) dans (II.3.14) et on utilise à nouveau l'inégalité de Gronwall pour voir que

$$|u^\alpha(t) - u(t)|_V^2 \leq C \theta^2(\alpha) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{II.3.15})$$

De (II.3.13) et (II.3.15) on trouve

$$\int_0^s |\dot{u}^\alpha(s) - \dot{u}(s)|_V^2 dt \leq C \theta^2(\alpha) \quad \forall s \in [0, T]. \quad (\text{II.3.16})$$

Nous combinons maintenant (II.3.15), (II.3.16) et l'hypothèse (II.3.4) (b) pour voir que

$$u^\alpha \longrightarrow u \text{ dans } W^{1,2}(0, T; V), \quad \alpha \longrightarrow 0 \quad (\text{II.3.17})$$

Nous utilisons (II.1.27), (II.3.1), (II.1.12), (II.1.13) et (II.1.15) pour obtenir

$$\begin{aligned} & |\sigma^\alpha(t) - \sigma(t)|_{\mathcal{H}}^2 \\ & \leq C \left(|\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)|_V^2 + |u^\alpha(t) - u(t)|_V^2 + \int_0^t |u^\alpha(s) - u(s)|_V^2 ds \right). \end{aligned}$$

Nous utilisons (II.3.15) et l'inégalité précédente pour voir que

$$|\sigma^\alpha(t) - \sigma(t)|_{\mathcal{H}}^2 \leq C (\theta^2(\alpha) + |\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)|_V^2).$$

Maintenant, nous intégrons l'inégalité précédente sur $[0, s]$ et on utilise (II.3.16) pour déduire que

$$\int_0^t |\sigma^\alpha(t) - \sigma(t)|_{\mathcal{H}}^2 dt \leq C \theta^2(\alpha) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{II.3.18})$$

Nous combinons maintenant (II.3.18) et l'hypothèse (II.3.4) (b) pour voir que

$$\sigma^\alpha \longrightarrow \sigma \text{ dans } L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \alpha \longrightarrow 0. \quad (\text{II.3.19})$$

Le théorème **III.1.1** est alors maintenant une conséquence de (II.3.17) et (II.3.19).

Chapitre 4

Problème de compliance normale avec adhésion

Nous considérons ici un problème de contact sans frottement entre un corps viscoélastique et une base déformable dans un processus quasistatique. Le contact est modélisé par une compliuanace normale avec adhésion, la loi de comportement est viscoélastique avec mémoire longue. On présente la formulation mécanique et variationnelle du problème ainsi qu'un résultat d'existence et d'unicité de la solution. Le problème se formule comme un système formé par une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une équation différentielle d'ordre un par rapport au champ d'adhésion. Des résultats d'existence et d'unicité de la solution ont été considérés en utilisant la théorie des équations variationnelles et des arguments de point fixe.

4.1 Formulation mécanique et variasonnelle du problème

On utilise le même cadre physique que pour les problèmes P_1 et P_2 .

Problème P_3 . Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_d$ et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$. pour tous $t \in [0, T]$ tels que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u(s))ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (\text{III.1.1})$$

$$\text{Div}\sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (\text{III.1.2})$$

$$u(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \quad (\text{III.1.3})$$

$$\sigma\nu(t) = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \quad (\text{III.1.4})$$

$$-\sigma_\nu(t) = p_\nu(u_\nu(t)) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (\text{III.1.5})$$

$$-\sigma_\tau(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (\text{III.1.6})$$

$$\dot{\beta}(t) = -(\beta(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau R_\tau(u_\tau(t))) - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (\text{III.1.7})$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (\text{III.1.8})$$

La relation (III.1.1) représente la loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire, (III.1.2) représente l'équation d'équilibre, (III.1.3) et (III.1.4) sont les conditions de déplacement-traction, (III.1.5) et (III.1.6) représentent les conditions de contact de compliance normale avec adhésion. La relation (III.1.7) représente une équation différentielle ordinaire qui décrit l'évolution du champ d'adhésion, où γ_ν, γ_τ et ϵ_a désignent des coefficients d'adhésion, R_ν et R_τ sont des opérateurs de troncature définis par (I.1.11) et (I.1.12). Quand le champ d'adhésion est nul, (III.1.5) devient

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T].$$

Enfin, (III.1.8) représente l'adhésion initiale dans lequel β_0 est donné. On s'intéresse à la formulation variationnelle du problème mécanique P_3 . Pour cela, on garde les mêmes hypothèses données pour les problèmes P_1 et P_2 et on rajoute les hypothèses suivantes:

$$Z = \{ \beta \in L^\infty(\Gamma_3) / 0 \leq \beta \leq 1 \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \}. \quad (\text{III.1.11})$$

On définit le sous espace fermé de H_1 donné par

$$V = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

Puisque $mes(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Korn est satisfaite, donc il existe une constante $C_k > 0$ qui dépend de Ω et de Γ_1 et qui vérifie (II.1.8). Sur V on considère le produit scalaire et la norme associée donnés par les relations (II.1.9)-(II.1.10).

Il vient de l'inégalité de Korn que $|\cdot|_{\mathcal{H}_1}$ et $|\cdot|_V$ sont des normes équivalentes sur V et par suite $(V, |\cdot|_V)$ est un espace de Hilbert réel. Cependant le théorème de trace de Sobolev implique qu'il existe une constante C_0 , dépendant uniquement de Ω , Γ_1 et de Γ_3 vérifiant (II.1.11).

Maintenant on va énoncer les hypothèses sur les données du problème. Supposons que le tenseur d'élasticité $\mathcal{A}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ \mathcal{A} = (A_{ijkl}) : \Omega \times S_d \rightarrow S_d, \\ (b) \ A_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j, k, l \leq d, \\ (c) \ \mathcal{A}\sigma \cdot \tau = \sigma \cdot \mathcal{A}\tau \quad \forall \sigma, \tau \in S_d, \text{ p.p. dans } \Omega, \\ (d) \text{ il existe } \alpha_0 > 0 \text{ tel que} \\ \mathcal{A}\tau \cdot \tau \geq \alpha_0 |\tau|^2 \quad \forall \tau \in S_d, \text{ p.p. dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (\text{III.1.12})$$

On suppose aussi que la densité des forces volumiques et celle des forces surfaciques vérifient

$$f_0 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^d), \quad f_2 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_2)^d). \quad (\text{III.1.13})$$

Les coefficients d'adhésion satisfont

$$\gamma_\nu, \gamma_\iota, \varepsilon_a \in L^\infty(\Gamma_3), \gamma_\nu, \gamma_\iota, \varepsilon_a \geq 0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (\text{III.1.14})$$

Le tenseur de relaxation B vérifie

$$B \in C(0, T; \mathcal{L}(V)), \quad (\text{III.1.15})$$

où $\mathcal{L}(V)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires et continus de V dans V . Finalement le champ d'adhésion initial satisfait

$$\beta_0 \in Z. \quad (\text{III.1.16})$$

On considère la fonction $f : [0, T] \rightarrow V$ définie par

$$(f(t), v)_V = \int_\Omega f_0(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v \, da \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (\text{III.1.17})$$

la régularité donnée par (III.1.13) implique

$$f \in W^{1,\infty}(0, T; V). \quad (\text{III.1.18})$$

On considère aussi les hypothèses suivantes:

La fonction de compliance normale $P_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Il existe une constante } L_\nu \text{ tel que} \\ |P_\nu(x, r_1) - P_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} \quad \text{p.p } x \in \Gamma_3 \\ \text{b) } (P_\nu(x, r_1) - P_\nu(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3 \\ \text{c) L'application } x \longrightarrow P_\nu(x, r) \text{ est mesurable } \quad \forall r \in \mathbb{R} \\ \text{d) } P_\nu(x, r) = 0 \quad \forall r < 0 \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (\text{III.1.19})$$

La fonction de compliance normale p_ν satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Il existe } L_\tau > 0 \text{ tel que } |p_\tau(x, \beta_1) - p_\tau(x, \beta_2)| \leq L_\tau |\beta_1 - \beta_2| \\ \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3 \\ \text{(c) Il existe } M_\tau > 0 \text{ tel que } |p_\tau(x, \beta)| \leq M_\tau \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(d) L'application } x \rightarrow p_\tau(x, \beta) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \forall \beta \in \mathbb{R}. \\ \text{(e) L'application } x \rightarrow p_\tau(x, \beta) \in L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (\text{III.1.20})$$

Nous définissons la fonctionnelle d'adhésion $j_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{ad}(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \nu_\nu + p_\tau(\beta) R_\tau(u_\tau) \cdot v_\tau) da, \quad (\text{III.1.21})$$

et la fonctionnelle de compliance normale $j_{nc} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{nc}(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu da. \quad (\text{III.1.22})$$

Les conditions (III.1.19) et (III.1.20) entraînent que les intégrales (III.1.21) et (III.1.22) sont bien définies. En utilisant des arguments standards basés sur la formule de Green, on montre que le problème variationnel se formule de la manière suivante.

Problème P_3V . Trouver le champ de déplacement $u : [0, T] \rightarrow V$, le champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tel que

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \left(\int_0^t B(t-s)\varepsilon(u(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), u(t), v) \\ + j_{nc}(u(t), v) = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (\text{III.1.23})$$

$$\dot{\beta} = -[\beta[\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\iota |R_\tau(u_\tau)|^2 - \varepsilon_a]_+ \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (\text{III.1.24})$$

$$\beta(0) = \beta_0. \quad (\text{III.1.25})$$

Le problème variationnel P_3V est formulé en fonction du déplacement et du coefficient d'adhésion, puisque le champ des contraintes a été éliminé. Cependant si la solution (u, β) du problème variationnel est connue, alors le champ des contraintes correspondant σ peut être facilement obtenu en utilisant la loi constitutive viscoélastique linéaire (III.1.1).

Remarque III.1.1. De l'équation (III.1.7) on obtient que $\beta(x, t) \leq \beta_0(x)$, puisque $\beta_0(x) \in Z$ alors $\beta(x, t) \leq 1$ pour tout $t \geq 0$, p.p. sur Γ_3 . Si $\beta(x, t_0) = 0$ pour $t = t_0$ alors il vient de (III.1.7) que $\dot{\beta}(x, t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$, cependant $\beta(x, t) = 0$ pour $t \geq t_0$. On conclut que $0 \leq \beta(x, t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, T]$ p.p. $x \in \Gamma_3$. Par ailleurs C représente une constante générique positive qui dépend de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \gamma_\nu, L$ et qui change d'une place à l'autre.

D'abord, nous remarquons que j_{ad} et j_{nc} sont linéaires par rapport au deuxième argument, donc

$$j_{ad}(\alpha, u, -\mathbf{v}) = -j_{ad}(\alpha, u, v), \quad (\text{III.1.26})$$

$$j_{nc}(u, -\mathbf{v}) = -j_{nc}(u, \mathbf{v}). \quad (\text{III.1.27})$$

En utilisant (III.1.20), (III.1.26) avec les inégalités $|R_\nu(u_\nu)| \leq L, |R_\tau(u_\tau)| \leq L, |\beta_1| \leq 1$, et $|\beta_2| \leq 1$, nous déduisons que

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_2 - u_1) \leq C \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| |u_1 - u_2| da, \quad (\text{III.1.28})$$

en combinant cette inégalité avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz et (I.2.5) on obtient

$$j_{ad}(\alpha_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\alpha_2, u_2, u_2 - u_1) \leq C |\beta_1 - \beta_2|_{L^2(\Gamma_3)} |u_1 - u_2|_V. \quad (\text{III.1.29})$$

Puis, nous choisissons $\beta = \beta_1 = \beta_2$ dans (III.1.29) pour trouver

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_2 - u_1) \leq 0. \quad (\text{III.1.30})$$

Par des manipulations semblables, basées sur les propriétés des opérateurs R_ν, R_τ et p_τ on montre que

$$|j_{ad}(\beta, u_1, v) - j_{ad}(\beta, u_2, v)| \leq C |u_1 - u_2|_V |v|_V. \quad (\text{III.1.31})$$

En prenant $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans (III.1.31) et nous employons les égalités $R_\nu(0) = 0$ et $R_\tau(0) = 0$ pour obtenir

$$j_{ad}(\beta, v, v) \geq 0. \quad (\text{III.1.32})$$

En outre, nous utilisons (III.1.22) on obtient

$$|j_{nc}(u_1, v) - j_{nc}(u_2, v)| \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})| |v_\nu| da, \quad (\text{III.1.33})$$

et d'après (III.1.19), (III.1.20) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a

$$|j_{nc}(u_1, v) - j_{nc}(u_2, v)| \leq C |u_1 - u_2|_V |v|_V. \quad (\text{III.1.34})$$

En utilisant (III.1.23) on obtient

$$j_{nc}(u_1, u_2 - u_1) + j_{nc}(u_2, u_1 - u_2) \leq \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu}))(u_{2\nu} - u_{1\nu}) da, \quad (\text{III.1.35})$$

et d'après (III.1.20) on a

$$j_{nc}(u_1, u_2 - u_1) + j_{nc}(u_2, u_1 - u_2) \leq 0. \quad (\text{III.1.36})$$

Finalement, en choisissant $u_1 = v$ et $u_2=0$ dans (III.1.36) et en utilisant (III.1.19)(d), (III.1.27) nous obtenons

$$j_{nc}(v, v) \geq 0. \quad (\text{III.1.37})$$

4.2 Existence et l'unicité de la solution

Théorème III.2.1. Nous supposons que les hypothèses (III.1.12)-(III.1.16) et (III.1.19) sont satisfaites. Alors, il existe une solution unique (u, σ, β) du problème P_3V . De plus, la solution satisfait

$$u \in W^{1,\infty}(0, T ; V) , \quad (\text{III.2.1})$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T ; L^\infty(\Gamma_3)) \quad (\text{III.2.2})$$

$$\sigma \in C(0, T ; \mathcal{H}_1) . \quad (\text{III.2.3})$$

Le triplet (u, σ, β) vérifiant (III.1.1) et (III.1.23)-(III.1.25) est appelé solution faible du problème de compliance normale avec adhésion où σ vérifie (III.2.3). La démonstration du théorème III.2.1 se fait en plusieurs étapes.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que les hypothèses du théorème III.2.1 sont satisfaites et nous considérons que C est une constante positive qui dépend de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \mathcal{A}, B, \gamma_\nu, \gamma_\tau, L$ et T dont la valeur peut changer d'une place à l'autre. Soit $\mathcal{Z}$ le sous-ensemble fermé de l'espace $C([0, T] ; L^2(\Gamma_3))$ défini par

$$\mathcal{Z} = \{ \theta : [0, T] \longrightarrow L^2(\Gamma_3) : 0 \leq \theta(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{p.p sur } \Gamma_3 \} \quad (\text{III.2.4})$$

et soit $\eta \in C(0, T ; V)$, on note par f_η la fonctionnelle définie sur V par

$$(f_\eta(t), v)_V = (f(t), v)_V - (\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}.$$

Considérons le problème intermédiaire suivant.

Problème P_3V_η . Trouver $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$, trouver $\beta_\eta : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tels que

$$(\mathcal{A}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta_\eta(t), u_\eta(t), v) + j_{nc}(u_\eta(t), v) = (f_\eta(t), v)_V \quad (\text{III.2.5})$$

$$\forall v \in V, \forall t \in [0, T],$$

$$\dot{\beta}_\eta = -[\beta_\eta[\gamma_\nu(R_\nu(u_{\eta\nu}))^2 + \gamma_\tau |R_\tau(u_{\eta\tau})|^2 - \varepsilon_a]_+ \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (\text{III.2.6})$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0 . \quad (\text{III.2.7})$$

Lemme III.2.1. *Le problème P_3V_η admet une solution unique (u_η, β_η) qui satisfait (III.2.1)-(III.2.2).*

Soit β appartenant à $\mathcal{Z}$ fixé. On considère le problème auxiliaire suivant.

Problème $P_3V_{\eta\beta}$. Trouver $u_{\eta\beta} : [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(u_{\eta\beta}(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), u_{\eta\beta}(t), v) + j_{nc}(u_{\eta\beta}(t), v) \\ & = (f_{\eta}(t), v)_V \quad \forall v \in V, \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (\text{III.2.8})$$

Lemme III.2.2. *Il existe une solution unique au problème $P_3V_{\eta\beta}$ qui satisfait*

$$u_{\eta\beta} \in C([0, T]; V).$$

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$ et on considère l'opérateur $A_t : V \rightarrow V$ défini par

$$(A_t u, v)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), u, v) + j_{nc}(u, v) \quad \forall u, v \in V.$$

Le problème $P_3V_{\eta\beta}$ devient

$$(A_t u_{\eta\beta}(t), v)_V = (f_{\eta}(t), v)_V \quad \forall v \in V, \forall t \in [0, T].$$

En utilisant (III.1.12), (III.1.19), (III.1.31), (III.1.34) on montre que A_t est fortement monotone de Lipschitz sur V . Par conséquent A_t est inversible et son inverse A_t^{-1} est aussi un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur V . On déduit qu'il existe $u_{\eta\beta}(t)$ solution unique du problème $P_3V_{\eta\beta}$ donnée par

$$u_{\eta\beta}(t) = A_t^{-1} f_{\eta}(t).$$

La forte monotonie et la lipschitzianité de A_t^{-1} et la régularité de f_{η} montrent alors que $u_{\eta\beta} \in C(0, T; V)$. Dans la prochaine étape on considère le champ de déplacement $u_{\eta\beta}$ obtenu dans le Lemme III.2.2 et on résoud le problème suivant.

Problème $Q_{\eta\beta}$. *Trouver le champ d'adhésion $\theta_{\eta\beta} : [0, T] \rightarrow L^{\infty}(\Gamma_3)$ tel que*

$$\dot{\theta}_{\eta\beta}(t) = -[\theta_{\eta\beta}[\gamma_{\nu}(R_{\nu}(u_{\eta\beta}))^2 + \gamma_{\iota}|R_{\tau}(u_{\eta\beta})|^2 - \varepsilon_a]_+ \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (\text{III.2.9})$$

$$\theta_{\eta\beta}(0) = \beta_0. \quad (\text{III.2.10})$$

On a le résultat suivant:

Lemme III.2.3. *Il existe un unique $\theta_{\eta\beta} \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$ solution du problème $Q_{\eta\beta}$. De plus, on a $\theta_{\eta\beta}(t) \in Z$ pour tout $t \in [0, T]$.*

Démonstration. On considère l'application $F_{\eta\beta} : [0, T] \times L^\infty(\Gamma_3) \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ définie par

$$F_{\eta\beta}(t, \theta_\eta) = -[\theta_{\eta\beta}[\gamma_\nu(R_\nu(u_{\eta\beta}))^2 + \gamma_\iota |R_\tau(u_{\eta\beta})|^2 - \varepsilon_a]_+$$

$$\forall t \in [0, T] \text{ et } \theta_\eta \in L^\infty(\Gamma_3).$$

On a d'après les propriétés des opérateurs R_ν et R_ι donnés par (I.1.10), (I.1.11), $F_{\eta\beta}$ est de Lipschitz par rapport à θ_η , uniformément dans le temps. Cependant pour tout $\theta \in L^\infty(\Gamma_3)$ l'application $t \rightarrow F_{\eta\beta}(t, \theta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$. Donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz énoncé à la troisième section du chapitre I (Théorème I.2.2), il existe $\theta_{\eta\beta} \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$ solution unique du problème $Q_{\eta\beta}$. En utilisant des arguments similaires à la Remarque III.1.1 de la section III, il vient que $0 \leq \theta_{\eta\beta}(t) \leq 1 \forall t \in [0, T]$ p.p. sur Γ_3 et donc $\theta_{\eta\beta} \in Z$. Il vient du Lemme III.2.3 que $\forall \beta \in \mathcal{Z}$ la solution $\theta_{\eta\beta}$ du problème $Q_{\eta\beta}$ appartient à $\mathcal{Z}$. Cependant on peut considérer l'application $\Lambda : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ définie par

$$\Lambda\beta = \theta_{\eta\beta}. \tag{III.2.11}$$

Lemme III.2.4. *Il existe un élément unique $\beta^* \in \mathcal{Z}$ tel que $\Lambda\beta^* = \beta^*$.*

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$. En notant $\beta = \beta_i$, $u_{\eta\beta_i}(t) = u_i$ pour $i=1,2$, il vient de (III.2.5) que:

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(u_1(t) - u_2(t)), \varepsilon(u_1(t) - u_2(t)))_{\mathcal{H}} = \\ & j_{ad}(\beta_1(t), u_1(t), u_2(t) - u_1(t)) + j_{ad}(\beta_2(t), u_2(t), u_1(t) - u_2(t)) \\ & + j_{nc}(u_1(t), u_2(t) - u_1(t)) + j_{nc}(u_2(t), u_1(t) - u_2(t)) \end{aligned}$$

$$\forall t \in [0, T]$$

En utilisant (III.1.31) et (III.1.36), on obtient

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V \leq C |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \quad (\text{III.2.12})$$

et par suite

$$\int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V \, ds \leq C \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)} \, ds. \quad (\text{III.2.13})$$

D'autre part en notant $\beta = \beta_i$, $\theta_{\eta\beta_i} = \theta_i$ et $u_{\eta\beta_i} = u_i$, pour $i = 1, 2$, il vient d'après (III.2.9) et (III.2.10) que

$$\theta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t [\gamma_\nu \theta_i(s) [(-R(u_i(s)_\nu))_+]^2 - \varepsilon_a]_+ \, ds$$

et par suite

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t |\theta_1(s) [(-R(u_{1\mu}(s)))_+]^2 - \theta_2(s) [(-R(u_{2\nu}(s)))_+]^2|_{L^2(\Gamma_3)} \, ds.$$

En utilisant les définitions des opérateurs de troncation R_ν et R_ι donnés par (I.1.10), (I.1.11) et en écrivant $\theta_1 = \theta_1 - \theta_2 + \theta_2$, on trouve

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)} \, ds + C \int_0^t |u_{1\nu}(s) - u_{2\nu}(s)|_{L^2(\Gamma_3)} \, ds.$$

En utilisant le lemme de Gronwall, il vient que

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t |u_{1\nu}(s) - u_{2\nu}(s)|_{L^2(\Gamma_3)} \, ds$$

et en utilisant (II.1.11) on obtient

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V \, ds. \quad (\text{III.2.14})$$

De (III.2.11) et (III.2.12), on trouve

$$|\Lambda\beta_1(t) - \Lambda\beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V \, ds. \quad (\text{III.2.15})$$

Maintenant, en combinant (III.2.13) et (III.2.15) on voit que

$$|\Lambda\beta_1(t) - \Lambda\beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)} \, ds$$

et en réitérant cette inégalité m fois on arrive à

$$|\Lambda^m \beta_1 - \Lambda^m \beta_2|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))} \leq \frac{C^m T^m}{m!} |\beta_1 - \beta_2|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))}. \quad (\text{III.2.16})$$

On voit que pour m assez grand Λ^m est une contraction sur $\mathcal{Z}$ car $\frac{C^m T^m}{m!} \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$. Comme $\mathcal{Z}$ est un sous ensemble non vide et fermé dans $C(0,T;L^2(\Gamma_3))$ donc c'est un Banach. D'après le théorème du point fixe de Banach énoncé à la troisième section du chapitre I (Théorème I.2.2), il vient que Λ admet un point fixe unique $\beta^* \in \mathcal{Z}$. Maintenant nous avons tous les ingrédients pour prouver le Lemme III.2.1.

Démonstration. Sous les hypothèses (I.2.5), (III.1.19), (III.1.13)-(III.1.15) le problème $P_3 V_{\eta\beta}$ admet une solution unique (u_η, β) qui vérifie (III.2.1)-(III.2.2). En effet, pour l'existence soit $\beta^* \in \mathcal{Z}$ le point fixe de Λ et u_η^* la solution du problème $P_3 V_{\eta\beta}$ obtenue pour $\beta = \beta^*$ c'est à dire $u_\eta^* = u_{\eta\beta^*}$. En utilisant les mêmes arguments de la démonstration de (III.2.12), on a la relation

$$|u_\eta^*(t_1) - u_\eta^*(t_2)|_V \leq C |\beta^*(t_1) - \beta^*(t_2)|_{L^2(\Gamma_3)}, \forall t_1, t_2 \in [0, T]. \quad (\text{III.2.17})$$

Puisque $\Lambda\beta^* = \theta_{\eta\beta^*} = \beta^*$ donc le Lemme III.2.4 implique que $\beta^* \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$ et par suite (III.2.15) implique que $u_\eta^* \in W^{1,\infty}(0, T; V)$.

On conclut par (III.2.8), (III.2.9) et (III.2.10) que (u_η^*, β^*) est la solution de $P_3 V_{\eta\beta}$ qui satisfait (III.2.1) et (III.2.2). Pour l'unicité, soit (u_η, β) une solution de $P_3 V_{\eta\beta}$ qui satisfait (III.2.1) et (III.2.2). En utilisant la remarque 1.1 du chapitre I, on déduit que $\beta \in \mathcal{Z}$. Il vient de (III.2.8) que u_η est solution du problème $P_3 V_{\eta\beta}$. Or d'après le Lemme III.2.2 il existe une solution unique $u_{\eta\beta}$ au problème $P_3 V_{\eta\beta}$, donc

$$u_\eta = u_{\eta\beta} \quad (\text{III.2.18})$$

d'où l'unicité de u_η .

En posant $u_\eta = u_{\eta\beta}$ dans (III.1.24) et (III.1.25) il vient que

$$\dot{\beta} = -[\beta[\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\iota |R_\tau(u_\tau)|^2 - \varepsilon_a]_+ \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

$$\beta(0) = \beta_0,$$

on voit alors que β est solution de $Q_{\eta\beta}$. Puisque le Lemme III.2.3 implique que le problème $Q_{\eta\beta}$ admet une solution unique $\theta_{\eta\beta}$, il vient que $\beta = \theta_{\eta\beta}$. Or de (III.2.11) on a $\Lambda\beta = \theta_{\eta\beta}$,

on déduit donc que $\Lambda\beta = \beta$ et le Lemme III.2.4 implique que $\beta = \beta^*$. Ainsi (u_η, β) est la solution unique du problème $P_3V_{\eta\beta}$ qui vérifie

$$u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V),$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3)).$$

Dans la prochaine étape on considère l'opérateur $S : C(0, T; \mathcal{H}) \rightarrow C(0, T; \mathcal{H})$ défini par

$$S\eta(t) = \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u_\eta(s)) \, ds. \quad (\text{III.2.19})$$

Lemme III.2.5. *L'opérateur S admet un point fixe unique $\eta^* \in C(0, T; \mathcal{H})$ tel que $S\eta^* = \eta^*$.*

Démonstration. Soit $\eta_1, \eta_2 \in C(0, T; \mathcal{H})$. On a

$$|S\eta_1(t) - S\eta_2(t)|_{\mathcal{H}} \leq C \int_0^t |u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)|_V \, ds$$

d'autre part d'après (III.2.5) on a

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)), \varepsilon(u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)))_{\mathcal{H}} = \\ & j_{ad}(\beta_1(t), u_{\eta_1}(t), u_{\eta_2}(t) - u_{\eta_1}(t)) + j_{ad}(\beta_2(t), u_{\eta_2}(t), u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)) \\ & + j_{nc}(u_{\eta_1}(t), u_{\eta_2}(t) - u_{\eta_1}(t)) + j_{nc}(u_{\eta_2}(t), u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)) \\ & + (\eta_2(t) - \eta_1(t), \varepsilon(u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)))_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments comme dans le Lemme III.2.4 on obtient

$$|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)|_V \leq C(|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} + |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{\mathcal{H}}). \quad (\text{III.2.20})$$

D'autre part de (III.2.6) et (III.2.7) on a pour $i = 1, 2$

$$\dot{\beta}_i = -[\beta_i[\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\nu |R_\tau(u_\tau)|^2 - \varepsilon_a]_+ \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

$$\beta_i(0) = \beta_0,$$

d'où

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)} \, ds + C \int_0^t |u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)|_V \, ds.$$

Le lemme de Gronwall implique que

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t |u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)|_V ds. \quad (\text{III.2.21})$$

En combinant (III.2.20) et (III.2.21) on voit que

$$|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)|_V \leq C \left(\int_0^t |u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)|_V ds + |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{\mathcal{H}} \right). \quad (\text{III.2.22})$$

On applique de nouveau le lemme de Gronwall à l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\int_0^t |u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)|_V ds \leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{\mathcal{H}} ds,$$

d'où

$$|S\eta_1(t) - S\eta_2(t)|_{\mathcal{H}} \leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{\mathcal{H}} ds.$$

En réitérant cette inégalité m fois, on arrive à

$$|S^m \eta_1 - S^m \eta_2|_{C([0,T];\mathcal{H})} \leq \frac{C^m T^m}{m!} |\eta_1 - \eta_2|_{C(0,T;\mathcal{H})}. \quad (\text{III.2.23})$$

On voit que pour m assez grand S^m est une contraction sur $C(0, T; \mathcal{H})$ car $\frac{(CT)^m}{m!} \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$. D'après le théorème du point fixe de Banach (Théorème I.2.2), il vient que S admet un point fixe unique $\eta^* \in C(0, T; \mathcal{H})$. Maintenant nous avons tous les ingrédients pour prouver le Théorème III.2.1.

Démonstration. Soit $\eta^* \in C(0, T; \mathcal{H})$ le point fixe de S et $(u_{\eta^*}^*, \beta^*)$ la solution du problème $P_3 V_{\eta\beta}$ obtenue pour $\eta = \eta^*$. Il est clair que $(u_{\eta^*}^*, \beta^*)$ est la solution unique du problème $P_3 V$ avec la régularité

$$u_{\eta^*}^* \in W^{1,\infty}(0, T; V),$$

Bibliographie

- [1] K. T. Andrews, L. Chapman, J. R. Fernandez, M. Fisackerly, M. Shillor, L. Vanerian, and T. VanHouten, A membrane in adhesive contact, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 64 (2003), no. 1, 152–169.
- [2] K. T. Andrews and M. Shillor, Dynamic adhesive contact of a membrane, *Advances in Mathematical Sciences and Applications* 13 (2003), no. 1, 343–356.
- [3] Y. Ayyad and M. Sofonea, Analysis of two Dynami Frictionless Contact Problem for Elastic-visco-plastic Matrials, *Electron. J. Diff. Eqns*, Vol. 2007 (2007), No.55, 1.17
- [4] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Editura Academiei, Bucharest-Noordhof, Leyden, 1976 ..
- [5] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson (1987).
- [6] O. Chau, J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, Variational and Numerical Analysis of A Quasistatic Viscoelastic Contact Problem with Adhesion, *J. Comput.Appl. Math.* 159 (2003), 431-465.
- [7] O. Chau, M. Shillor, and M. Sofonea, Dynamic frictionless contact with adhesion, *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* 55 (2004), no. 1, 32–47.
- [8] M. Cocu and R. Rocca, Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 34 (2000), no. 5, 981–1001.

-
- [9] G. Duvaut and J.L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Springer-Verlag, Berlin (1976).
- [10] C. Eck, J. Jarusek and M. Krbeč, *Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems*, Pure and Applied Mathematics 270, Chapman / CRC Press, New York, 2005..
- [11] J. R. Fernandez, M. Shillor, and M. Sofonea, Analysis and numerical simulations of a dynamic contact problem with adhesion, *Mathematical and Computer Modelling* 37 (2003), no. 12-13, 1317–1333.
- [12] M. Frémond, Equilibre de structures qui adhèrent à leur support, *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Série II* 295 (1982), no. 11, 913–916.
- [13] ———, Adhérence des solides, *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée* 6 (1987), no. 3, 383–407.
- [14] ———, *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin, 2002.
- [15] W. Han, K.L. Kuttler, M. Shillor and M. Sofonea, Elastic Beam in Adhesive Contact, *Int. J. Solids Structures* 39 (2002), 1145-1164.
- [16] I. Hlavaček, J. Haslinger, J. Nečas and Lovisek, *Solutions of Variational Inequalities in Mechanics*, Springer-Verlag (1988), New York
- [17] J. Jarušek, Dynamic Contact Problems with given Friction for viscoelastic Bodies, *Czechoslovak Mathematical Journal* 46 (1996), 475-487.
- [18] J. Jarušek and C. Eck, Dynamic Contact Problems with Small Coulomb Friction for viscoelastic Bodies. Existence of solutions, *Mathematical Models and Methods in Applied* 9 (1999), 11-34
- [19] L. Jianu, M. Shillor and M. Sofonea, A Viscoelastic Bilateral Frictionless Contact Problem with Adhesion, *Appl. Anal.* **80** (2001), 233-255.
- [20] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution Des Problèmes Aux Limites Non Linéaires*, Dunod et Gauthier-Villars (1969).

-
- [21] K.L. Kuttler, Dynamic friction Contact Problems with General Normal and Friction Laws, *Nonlinear Analysis* 28 (1997), 559-575.
 - [22] K.L. Kuttler and M. Shillor, Set-valued Pseudomonotone maps and Degenerate Evolution inclusions, *Communications in Contemporary Mathematics* 1 (1999), 87-123
 - [23] S. Migórski and A. Ochal, A Unified Approach to Dynamic Contact Problems in viscoplasticity, *Journal of Elasticity* 83 (2006), 247-275
 - [24] J. Nečas, *Les méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris (1967).
 - [25] J. Nečas and I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : [1] An Introduction*, Elsevier, Amsterdam (1981).
 - [26] M. Raous, L. Cangémi, and M. Cocu, A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 177 (1999), no. 3-4, 383-399.
 - [27] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, A Quasistatic viscoelastic Contact Problems with Normal Compliance and Friction, *Journal of Elasticity* 51 (1998), 105-126.
 - [28] A. D. Rodríguez-Aros, M. Sofonea and J. J. Viano, A Signorini, Frictionless Contact Problem for Viscoelastic Materials with Longterm Memory, *Numerical Mathematics and Advanced Application-ENUMATH 2001*, Eds. F. Brezzi, A. Buffo, S. Corsaro and A. Murli, Springer, Milano, (2003), 327-336.
 - [29] A. Rodríguez-Aros, M. Sofonea and J.M. Viano, A class of Evolutionary Variational Inequalities with Volterra-type integral term. *Math. Methods Appl. Sci.*, 14, 557-577, 2004
 - [30] J. Rojek and J. J. Telega, Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics. I: general developments, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 39 (2001), no. 3, 655-677.

-
- [31] M. Selmani, these doctorat en sciences, Etude Mathématique de quelques problèmes aux limites en mécanique du contact.
 - [32] M. Selmani, dynamic frictionless contact problems in viscoelasticity with long-term memory. *Analele Universității Oradea Fasc. Matematica*, Ton XVI (2009), 75-92
 - [33] M. Selmani, M. Sofonea, viscoelastic frictionless contact problems with adhesion. Hindawi Publishing Corporation *Journal of Inequalities and Applications* Volume 2006, Pages 1-22
 - [34] L. Selmani, M. Selmani, Analysis of A Viscoelastic Contact Problem with Normal Damped Reponse and Damage, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society- Simon Stevin*.
 - [35] M. Shillor, M. Sofonea, and J. J. Telega, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*, Lect. Notes Phys. 655, Springer, Berlin Heidelberg, (2004).
 - [36] M. Sofonea and A. Matei, Elastic Antiplane Contact Problem with Adhesion, *J. of Appl. Math. Phys. (ZAMP)* **53** (2002), 962-972
 - [37] M. Sofonea, A. D. Rodriguez-Aros and J. M. Viano, A Class of Integro-Differential Variational Inequalities with Applications to Viscoelastic Contact, preprint.
 - [38] M. Sofonea, W. Han, and M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), vol. 276, Chapman & Hall/CRC Press, Florida, 2006.
 - [39] M. Sofonea, *Problèmes Mathématiques en Elasticité et Viscoplasticité*, Cours de DEA de Mathématiques Appliquées, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand (1991).
 - [40] M. Sofonea, *Problèmes Non Linéaires dans la Théorie de L'élasticité*, Cours de Magister de Mathématiques Appliquées, Université de Sétif, Algérie (1993).
 - [41] P. Suquet, *Plasticité et Homogénéisation*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6 (1982).

- [42] C. Talon and A. Curnier, A model of adhesion added to contact with friction, Contact Mechanics (Praia da Consolação, 2001) (J. A. C.Martins and M. D. P.MonteiroMarques, eds.), SolidMech. Appl., vol. 103, Kluwer Academic, Dordrecht, 2002, pp. 161–168.