REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF

THESE

Présentée à la Faculté des sciences
Département de Physique
Pour l'Obtention du Diplôme de

DOCTORAT

Option : Physique théorique

Par

MR. CHAABI NADIR

THEME

Champ électromagnétique dans un milieu dépendant du temps : Phase et angle géométriques

Soutenue le : 27/01/2013

Devant le Jury

Président :	Pr. A. BOUCENNA	Université Ferhat Abbas Sétif.
Rapporteur :	Pr. M. MAAMACHE	Université Ferhat Abbas Sétif.
Examinateur :	Pr. P-A. HERVIEUX	Université de Strasbourg, France.
Examinateur :	Pr. S. HOUAMER	Université Ferhat Abbas Sétif.
Examinateur :	Pr. J-P. PROVOST	Université de Nice, France.
Examinateur :	Pr. K. H. YEON	Université nationale de Chungbuk, Corée du Sud.
Invité :	Pr. H. HACHEMI	Université Ferhat Abbas Sétif.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier monsieur le professeur Mustapha MAAMACHE pour m'avoir encadré, conseillé et soutenu pendant toute la durée de ce travail.

Je remercie monsieur. A. Boucenna qui me fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie également messieurs P-A. Hervieux, S. Houamer, J-P. Provost, K. H. Yeon et H. Hachemi, d'avoir accepté de participer à ce jury.

Je tiens enfin à remercier mon ami, Yahia SAADI.

DEDICACES

Je dédie ce travail à ma grande famille ainsi qu'à ma petite famille, à tous mes proches et à la mémoire de mes deux frères Mustapha et Abdelkarim,

Nadir

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

La quantification des équations de Maxwell dans le vide où chaque mode du champ de rayonnement est associé à un oscillateur harmonique simple quantifié représente la base de la théorie quantique du rayonnement, due principalement à Dirac [1]. Suite à la quantification initiale du champ électromagnétique dans le vide, il était naturel d'étendre la procédure de quantification du champ électromagnétique dans un milieu diélectrique. L'électrodynamique quantique dans l'espace vide et en présence des diélectriques a été développée depuis longtemps ainsi que les différents concepts liés à leurs effets quantiques fondamentaux [2].

Il existe des approches acceptables pour la quantification du champ de lumière en optique quantique [3, 4]. La quantification se fait pour des champs confinés dans une boite et des champs se propageant sous des conditions aux limites périodiques. Les champs sont développés en un ensemble de modes quantifiés. L'expansion peut être cependant simplifiée à un seul mode quantifié, lorsque cela n'affecte pas l'ensemble du traitement. Dans la limite $L \gg$, où L est le coté d'une cavité, la quantification d'un mode continu est obtenu.

Récemment, il s'est avéré en optique quantique que la quantification rigoureuse peut être élaborée même pour la lumière se propageant dans un milieu linéaire conducteur [5]. Cela a déclenché un regain d'intérêt dans le schéma de la quantification de la lumière dissipative [6-9]. Les idées fondamentales mentionnées ci-dessus peuvent être étendues d'une manière satisfaisante à un cas plus compliqué, que l'on appelle la quantification de la lumière dans un milieu linéaire dépendant du temps [10-12]. Lorsque les paramètres du matériau, tels que la permittivité électrique, perméabilité magnétique et la conductivité dépendent explicitement du temps, le matériau est classé comme un milieu dépendant du temps.

Une telle théorie est décrite par un Hamiltonien dépendant du temps dérivé à partir les équations fondamentales de Maxwell [11-17]. Même si les paramètres ne dépendent pas du temps le champ électromagnétique est décrit par un Hamiltonien dépendant du temps, tant que le milieu se caractérise par une conductivité non triviale, [5, 18-21]. Les lignes de retardement magnéto-élastiques [22], la modulation de la puissance micro-ondes [23] et la propagation des ondes dans les plasmas ionisés [24] sont parmi les différents champs possibles liés au milieu dépendant du temps en optique.

L'acquisition d'une phase géométrique dans une évolution adiabatique n'est pas confinée aux phénomènes quantiques. L'analogue classique existe et est parfois appelé l'angle de Hannay [28]. L'angle de Hannay ou angle géométrique a été étudié depuis longtemps pour l'oscillateur harmonique généralisé [29-31]. Dans un autre article intéressant [33], Berry a établi une relation semi-classique entre la phase géométrique classique et quantique dans une évolution adiabatique. L'information quantique représente l'une des applications les plus importantes de la phase géométrique en technologie moderne de la phase géométrique. Le concept du calcul quantique a été développée sur la base de la théorie de l'information quantique et maintenant est devenu indispensable pour la physique et les mathématiques. Le calcul quantique adiabatique géométrique à permet l'évolution de la résonance magnétique nucléaire [34], l'installation de la cavité en électrodynamique quantique, les ions piégés [35] et les nano circuits supraconducteurs.

En général, la méthode des opérateurs invariants est très utile lorsqu'on étudie les propriétés quantiques des systèmes Hamiltoniens dépendants du temps [5, 11, 12, 36-44]. L'importance de la nature physique du champ de rayonnement dans une cavité a été notée pour la première fois par Planck [45], qui a simulé les propriétés physiques des champs de rayonnement en utilisant un ensemble fini des oscillateurs harmoniques qui ont éventuellement donné lieu à la découverte de l'énergie dite de point zéro des champs de rayonnement. Plus tard, l'existence de la fluctuation de point zéro a conduit à une théorie qui a fourni une description alternative des nombreux effets des propriétés du champ de vide traditionnellement gérés par l'électrodynamique quantique [46]. Selon la théorie quantique des champs, la fameuse constante cosmologique lié à l'énergie noir attribut le champ du point zéro aux effets virtuels quantique d'un champ électromagnétique déjà présent. Peu avant les découvertes de l'énergie noire, Sidhath avait construit un modèle cosmologique sur la base des fluctuations du champ de point zéro [47-49], ce qui est conforme aux observations astrophysiques et prévoit un univers d'extension accéléré. Un modèle quantique soluble de création des photons produits par un diélectrique dépendant du temps a été étudié par Cirone *et al.* [50, 51]. Les fluctuations des champs de point zéro est la source du bruit quantique et donnent lieu à l'émission spontanée dans les lasers, les atténuateurs, amplificateurs paramétriques, et autres exemples [52].

Stimulé par les travaux récents [5-7, 10, 11] sur la quantification du champ de rayonnement dans un milieu linéaire conducteur dépendant du temps, on va examiner dans le présent travail le caractère géométrique du champ électromagnétique quantifié dans un milieu linéaire dépendant du temps.

Ce travail comprend trois parties :

La première partie rappelle la résolution des systèmes classiques dans le cas d'une évolution adiabatique et les dérives géométriques qui s'y ajoutent : angle de Hannay.

Les équations de Maxwells dans le vide sont aussi étudiées.

La deuxième partie est dévouée à la résolution des équations de Maxwell dans un milieu conducteur linéaire homogène dont les paramètres dépendent lentement du temps. Le théorème adiabatique classique conduit à montrer que le potentiel vecteur et par conséquent le champ électromagnétique acquiert une dérive supplémentaire de nature géométrique ou angle de Hannay. La quantification du champ électromagnétique obtenue dans l'approximation adiabatique conduit à relier l'angle géométrique classique de Hannay à la phase géométrique quantique de Berry qui sera brièvement rappelée. Cependant cette relation entre angle géométrique classique et la phase géométrique quantique de Berry soulève une question importante : la mise en évidence expérimentale de la phase géométrique en optique guidée [53] qui décrit la rotation du plan de polarisation du champ électromagnétique lors de sa propagation dans une fibre optique. Ce résultat expérimental ne concerne-t-il pas plutôt la mise en évidence expérimentale de l'angle de Hannay ? C'est-à-dire l'effet quantique n'est-il pas une conséquence de l'effet classique ?

Enfin la dernière partie est consacrée à l'étude des fluctuations de point zéro d'un champ électromagnétique dans un milieu conducteur linéaire et homogène dépendants du temps en utilisant la méthode des opérateurs invariants.

CH I – ANGLE DE HANNAY

I. Angle de Hannay :

Nous allons ici d'écrire de façon élémentaire la notion d'angle géométrique ou de Hannay. En mécanique classique le théorème adiabatique applicable aux systèmes Hamiltoniens intégrables est bien connu. Il stipule qu'au cours d'un changement adiabatique des paramètres d'un Hamiltonien les variables d'action I_i restent constantes (en toute rigueur il convient d'écarter, en dimension $d > 1$, les situations de résonances). Hannay [28] a montré que les variables angulaires conjuguées θ_i évoluent avec des vitesses $\dot{\theta}_i(t)$ égales aux fréquences instantanées associées à l'Hamiltonien au même instant et une contribution géométrique qui ne dépend que du circuit suivi dans l'espace des paramètres et à laquelle est associée une 2-forme sur cet espace.

Considérons le cas des transformations canoniques dépendant du temps [33, 54, 55] et supposons que $d = 1$. Soit I et θ les variables action-angle associées à un Hamiltonien $H(q, p, \vec{X}) = \mathcal{H}(I, \vec{X})$. Ces variables permettent un paramétrage $q(I, \theta, \vec{X})$, $p(I, \theta, \vec{X})$ de l'espace des phases. $2\pi I$ représente l'aire d'une trajectoire et θ est la variable conjuguée mesurée sur chaque trajectoire (ce qui implique un choix d'origine sur les trajectoires). Soit $S(q, I, \vec{X})$ une fonction génératrice de la transformation canonique $(q, p) \rightarrow (I, \theta)(p = \frac{\partial S}{\partial q}; \theta = \frac{\partial S}{\partial I})$. On sait que la dynamique des variables I et θ est régie par le nouveau Hamiltonien

$$K\left(I, \theta, \vec{X}(t)\right) = \mathcal{H}\left(I, \vec{X}(t)\right) + \dot{\vec{X}}(t)\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{X}} /_{q \text{ et } I\ cste}\right)(I, \theta, \vec{X}(t)) \qquad \text{(I-1)}$$

L'hypothèse adiabatique consiste à remplacer les membres de droite des deux équations de Hamilton

$$\dot{I} = -\frac{\partial K}{\partial \theta}, \qquad \dot{\theta} = \frac{\partial K}{\partial I} \qquad \text{(I-2)}$$

par leurs moyennes sur la trajectoire d'action I de l'Hamiltonien $H(q, p, \vec{X})$. La moyenne d'une grandeur $f(q, p, \vec{X})$ étant définie par

$$\langle f \rangle(I, \vec{X}) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} f(q(I, \theta, \vec{X}), p(I, \theta, \vec{X}), \vec{X}) \qquad \text{(I-3)}$$

La première équation donne le théorème adiabatique standard $\dot{I} = 0$. La seconde donne la vitesse angulaire :

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_D + \dot{\theta}_H \tag{I-4}$$

somme d'une partie dynamique (ou fréquence instantanée),

$$\dot{\theta}_D = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \omega(I, \vec{X}) \tag{I-5}$$

et d'une partie géométrique,

$$\dot{\theta}_H = \dot{\vec{X}} \frac{\partial}{\partial I} \langle \frac{\partial S}{\partial \vec{X}} /_{q \text{ et } I\ cste} \rangle (I, \vec{X}) \tag{I-6}$$

II. L'oscillateur harmonique généralisé :

Il est important de bien illustrer la notion d'angle de Hannay à travers l'exemple de l'oscillateur harmonique généralisé

$$H\big(q, p, \vec{X})\big) = \frac{1}{2}\{Xq^2 + 2Yqp + Zp^2\} = I\omega \tag{I-7}$$

où la fréquence instantanée à paramètres fixes est donnée par

$$\omega = \dot{\theta} = (XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}} \tag{I-8}$$

Le changement de paramétrage des variables de l'espace de phase

$$q(I, \theta, t) = (\frac{2ZI}{\omega})^{\frac{1}{2}} \cos\theta \tag{I-9}$$

$$p(I, \theta, t) = -(\frac{2ZI}{\omega})^{\frac{1}{2}}[\frac{Y}{Z}\cos\theta + \frac{\omega}{Z}\sin\theta] \tag{I-10}$$

$$K(I, \theta, t) = H(p(I, \theta, t), q(I, \theta, t), t) + \frac{\partial}{\partial t} S(q(I, \theta, t), I, t) \tag{I-11}$$

permet de calculer la fonction génératrice de la transformation canonique. En effet, d'après (I-10)

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{Y}{Z} q - \frac{\omega}{Z} (\frac{2ZI}{\omega})^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \frac{\omega}{2ZI} q^2} \tag{I-12}$$

et d'après (I-9)

$$\theta = \frac{\partial S}{\partial I} = \cos^{-1}((\frac{\omega}{2ZI})^{\frac{1}{2}} q) \tag{I-13}$$

Commençons par intégrer $\frac{\partial S}{\partial q}$ par rapport à q

$$S(q, I, t) = -\frac{Y}{Z}\frac{q^2}{2} - \frac{\omega}{Z}(\frac{2ZI}{\omega})^{\frac{1}{2}} \int dq \sqrt{1 - \frac{\omega}{2ZI} q^2} \tag{I-14}$$

Le changement de variables d'intégration $(\frac{\omega}{2ZI})^{\frac{1}{2}}q = \cos\theta$ donne

$$S(q,I,t) = -\frac{Y}{Z}\frac{q^2}{2} - \frac{\omega}{Z}(\frac{2ZI}{\omega})^{\frac{1}{2}}\int(-)sin^2\theta(\frac{2ZI}{\omega})^{\frac{1}{2}}d\theta \quad \text{(I-15)}$$

ou encore

$$S(q,I,t) = -\frac{Y}{Z}\frac{q^2}{2} + 2I\int sin^2\theta d\theta = -\frac{Y}{Z}\frac{q^2}{2} + I\int(1-\cos 2\theta)\,d\theta \quad \text{(I-16)}$$

qui s'écrit en fonction des variables (q, I)

$$S(q,I,t) = -\frac{Y}{Z}\frac{q^2}{2} + I\left[\cos^{-1}\left(\left(\frac{\omega}{2ZI}\right)^{\frac{1}{2}}q\right) - \left(\frac{\omega}{2ZI}\right)^{\frac{1}{2}}q\sqrt{1-\frac{\omega}{2ZI}q^2}\right] + f(I) \quad \text{(I-17)}$$

Pour déterminer $f(I)$ on utilise

$$\frac{\partial S}{\partial I} = \cos^{-1}((\frac{\omega}{2ZI})^{\frac{1}{2}}q) \quad \text{(I-18)}$$

$$\cos^{-1}((\frac{\omega}{2ZI})^{\frac{1}{2}}q) = \cos^{-1}((\frac{\omega}{2ZI})^{\frac{1}{2}}q) - \left(\frac{\omega}{2ZI}\right)^{\frac{1}{2}}q\sqrt{1-\frac{\omega}{2ZI}q^2} + I\left[\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{\omega}{2ZI}q^2}}\left(\frac{\omega}{2ZI}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)I - \right.$$

$$\left.\left(\frac{\omega}{2ZI}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)I^{-\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{\omega}{2ZI}q^2} - \left(\frac{\omega}{2ZI}\right)^{\frac{1}{2}}q\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\omega}{2ZI}q^2}}\left(-\frac{\omega}{2Z}\right)q^2(-1)I^{-2}\right] + f'(I) \quad \text{(I-19)}$$

ce qui implique que

$$f'(I) = \cos\theta\sin\theta - \frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\frac{1}{\sin\theta}\cos^2\theta = \frac{1}{2}\left[\cos\theta\sin\theta + \right.$$

$$\left.\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(\cos^2\theta - 1)\right] = \frac{1}{2\sin\theta}[\cos\theta\sin^2\theta + \cos(\cos^2\theta - 1)] = 0 \quad \text{(I-20)}$$

Finalement la fonction génératrice de la transformation canonique dépendante du temps exprimée en fonction des variables (q, I) est

$$S(q,I,t) = -\frac{Y}{Z}\frac{q^2}{2} + I\left[\cos^{-1}\left(\left(\frac{\omega}{2ZI}\right)^{\frac{1}{2}}q\right) - \left(\frac{\omega}{2ZI}\right)^{\frac{1}{2}}q\sqrt{1-\frac{\omega}{2ZI}q^2}\right] + cste \quad \text{(I-21)}$$

Pour calculer l'angle de Hannay, on dérive la fonction génératrice obtenue par rapport au temps

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{I}{2\omega}[-\dot{X}Z\sin\theta\cos\theta + \dot{Y}(2Y\sin\theta\cos\theta - 2\omega\cos^2\theta) + \dot{Z}(\frac{Y}{Z}2\omega\cos^2\theta + (\frac{2\omega^2}{Z} -$$

$$X)\cos\theta\sin\theta)] \quad \text{(I-22)}$$

qui s'écrit encore

$$\frac{\partial S}{\partial \vec{X}} = \frac{\partial}{\partial \vec{X}}\left(\frac{-Y}{\omega}\right) I\cos^2\theta + \left(\frac{2ZI}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{Y}{Z}\cos\theta + \frac{\omega}{Z}\sin\theta\right)\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial \vec{X}}\left(\left(\frac{2ZI}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{I-23}$$

L’angle de Hannay définie par $\Delta\theta_H = \oint d\vec{X}\,\frac{\partial}{\partial I}\oint \frac{d\theta}{2\pi}\frac{\partial S}{\partial \vec{X}}$ donne

$$\Delta\theta_H = \frac{1}{2}\oint \frac{XdZ - ZdY}{Z(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{I-24}$$

L’angle de Hannay est de nature géométrique, il n’est pas étonnant qu’on le retrouve lors d’évolutions autres qu’adiabatique. Par exemple, on peut à son sujet reprendre une version classique de l’approche d’Aharonov et Anandan [56] ou de la théorie des invariants [57]. Une illustration simple de cette dernière approche est donnée dans le cas de l’oscillateur harmonique généralisé dans la suite.

III. Angle de Hannay : cas non adiabatique :

Il existe des contextes différents de l’hypothèse adiabatique où apparaissent ces angles. En particulier l’angle de Hannay a été aussi généralisé pour le cas non adiabatique en utilisant la théorie des invariants [57]. Un invariant $I\ (q,p,t)$ est une constante du mouvement tel que $\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\partial I(t)}{\partial t} + \{I(t), H(t)\} = 0$ ({ } indique le crochet de Poisson).

Reprenons ici l’approche de la théorie des invariants, développée dans [57], avec une démarche légèrement différente. Soit I et θ les variables invariant-angle associées à un Hamiltonien $\mathcal{H}(\theta, I, t) = H(q(\theta, I, t), p(I, \theta, t), t)$. Les trajectoires d’action (ou d’invariant) constante sont paramétrées par l'angle $\theta(q,p,t)$ à l’instant t. Durant l’évolution cyclique $I(q,p,0) = I(q,p,T)$ d’une trajectoire initiale durant une période T, la variable angulaire conjuguée θ mesurée sur chaque trajectoire se trouve déphasée à $t = T$ d’un angle $\Delta\theta$ à partir de sa valeur à l'instant $t = 0$. Ce déphasage qui comprend deux termes l’un dynamique et l’autre géométrique peut être calculé comme suit. Soit $S(q, I, \vec{X})$ une fonction génératrice de la transformation canonique $(q,p) \rightarrow (I,\theta)$, $(p = \frac{\partial S}{\partial q}; \theta = \frac{\partial S}{\partial I})$. On sait que le nouveau Hamiltonien ne dépend pas de la variable θ

$$K(I,t) = \mathcal{H}(\theta, I, t) + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)(I, \theta, t), \tag{I-25}$$

et que la dynamique des variables I et θ est régie par les deux équations de Hamilton

$$\dot{I} = -\frac{\partial K}{\partial \theta} = 0, \tag{I-26}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}(\theta, I, t)}{\partial I} + \frac{\partial}{\partial I}\frac{\partial S}{\partial t}(I, \theta, t) \quad \text{(I-27)}$$

Remarquons que la dynamique de la variable angulaire θ régie par (I-27) ne dépend pas de la variable θ, par contre chaque terme pris séparément en dépend. Sans perdre de généralité on peut remplacer les membres de droite de l'équation (I-27) par leurs moyennes sur la trajectoire d'action I de l'Hamiltonien $H(q, p, t)$. La moyenne d'une grandeur étant définie par (I-3).

Ainsi on obtient la vitesse angulaire

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_D + \dot{\theta}_g \quad \text{(I-28)}$$

somme d'une partie dynamique,

$$\dot{\theta}_D = \langle \frac{\partial \mathcal{H}(\theta, I, t)}{\partial I} \rangle \quad \text{(I-29)}$$

et d'une partie géométrique ou angle de Hannay non-adiabatique,

$$\dot{\theta}_g = \langle \frac{\partial}{\partial I}\frac{\partial S}{\partial t}(I, \theta, t) \rangle \quad \text{(I-30)}$$

IV. L'oscillateur harmonique généralisé : cas non adiabatique :

L'oscillateur harmonique généralisé est l'archétype des exemples pour calculer l'angle de Hannay

$$H(q, p) = \frac{1}{2}\{X(t)q^2 + 2Y(t)qp + Z(t)p^2\} \quad \text{(I-31)}$$

où $X, Y, et\ Z$ sont des paramètres dépendant du temps.

Cet Hamiltonien admet un invariant [7-12] de la forme

$$I = \frac{1}{2}\{\alpha(t)q^2 + 2\beta(t)qp + \gamma(t)p^2\}, \quad \text{(I-32)}$$

où les paramétrés α, β et γ sont donnés par

$$\alpha = \frac{1}{\rho^2}\left\{1 + \left[\frac{\rho^2 Y - \rho\dot{\rho}}{Z}\right]^2\right\} \quad \text{(I-33)}$$

$$\beta = \left[\frac{\rho^2 Y - \rho\dot{\rho}}{Z}\right] \quad \text{(I-34)}$$

$$\gamma = \rho^2 \quad \text{(I-35)}$$

et ρ satisfait l'équation non linéaire

$$\ddot{\rho} - \frac{\dot{Z}}{Z}\dot{\rho} + \left[XZ - Y^2 + \frac{(Y\dot{Z} - \dot{Y}Z)}{Z}\right]\rho = \frac{Z^2}{\rho^3}, \tag{I-36}$$

Remarquons ici que l'invariant a la même forme et joue le même rôle que l'Hamiltonien dans le cas adiabatique, par conséquent la fonction génératrice de la transformation canonique dépendante du temps exprimée en fonction des variables (q, I) et l'angle de Hannay seront obtenue exactement comme dans le cas adiabatique en remplaçant les paramètres de H par ceux de I, c'est-à-dire, $X \rightarrow \alpha,\ Y \rightarrow \beta\ et\ Z \rightarrow \gamma$

$$S(q, I, t) = -\frac{\beta}{\gamma}\frac{q^2}{2} + I\left[\cos^{-1}\left(\left(\frac{1}{2\gamma I}\right)^{\frac{1}{2}} q\right) - \left(\frac{1}{2\gamma I}\right)^{\frac{1}{2}} q\sqrt{1 - \frac{1}{2\gamma I}q^2}\right] + cste \tag{I-38}$$

$$\Delta\theta_g(C) = \oint d\rho[\frac{1}{Z}(Y\rho - \dot{\rho})]. \tag{I-39}$$

L'équation (I-39) correspond à l'angle géométrique pour une évolution cyclique sur un circuit C dans l'espace des paramètres, indépendamment du fait que l'évolution est adiabatique ou non.

L'angle total sera donné par

$$\Delta\theta = \int_0^T \frac{Z}{\rho^2} dt \tag{I-40}$$

1) La limite adiabatique :

On peut vérifier que dans la limite adiabatique on retrouve L'angle de Hannay. L'approximation adiabatique consiste à introduire un temps "lent"

$$\tau = \varepsilon t, \varepsilon \ll 1 \tag{I-41}$$

et réécrire l'équation auxiliaire (I-36) en fonction des puissances en ε

$$(XZ - Y^2)\rho - \frac{Z^2}{\rho^3} = \varepsilon\frac{(\dot{Y}Z - Y\dot{Z})}{Z}\rho - \varepsilon^2\left[\ddot{\rho} - \frac{\dot{Z}}{Z}\dot{\rho}\right] \tag{I-42}$$

On suppose ensuite que la fonction auxiliaire $\rho(\tau)$ est développable en puissance de ε,

$$\rho(\tau) = \rho_0(\tau) + \varepsilon\rho_1(\tau) + \varepsilon^2\rho_2(\tau) + \cdots \tag{I-43}$$

On identifie les termes de chaque ordre de (I-42) à ceux du développement (I-43) ce qui permet de déterminer facilement

$$\rho_0 = \pm[\frac{Z^2}{XZ - Y^2}]^{\frac{1}{4}} \tag{I-44}$$

$$\rho_1 = \frac{\dot{Y}Z - Y\dot{Z}}{4Z(XZ - Y^2)}\rho_0 \tag{I-45}$$

$$\rho_2 = \frac{(\dot{Y}Z - Y\dot{Z})^2}{16Z^2(\dot{Y}Z - Y\dot{Z})^2}\rho_0\left(\frac{3}{2}\rho_0 + 1\right) - \frac{[\ddot{\rho}_0 - \frac{\dot{Z}}{Z}\dot{\rho}_0]}{4(XZ - Y^2)} \tag{I-46}$$

Enfin, on détermine l'angle de Hannay en réinjectant (I-44), (I-45) et (I-46) dans (I-39)

$$\Delta\theta_g = \int d\rho_0 \frac{Y\rho_0}{Z} - \varepsilon\left[\int d\,\rho_0 \frac{1}{Z}(\dot{\rho_0} - Y\rho_1) - \int d\,\rho_1 \frac{Y\rho_0}{Z}\right] + \cdots \tag{I-47}$$

Si on ne garde que le premier terme à droite de cette équation, on reconnait la forme de l'angle de Hannay

$$\Delta\theta_g \approx \frac{1}{2}\oint \frac{XdZ - ZdY}{Z(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{I-48}$$

CH II – LES EQUATIONS DE MAXWELL

Ce chapitre introductif sur les équations de Maxwell a pour objectif de présenter les méthodes de résolution des équations de Maxwell dans le vide.

I. Les équations de Maxwell dans le vide :

Maxwell n'utilise que quatre lois qui forment un ensemble cohérent, dont on peut déduire toutes les lois connues à l'époque et dont la vérification expérimentale servira à valider la théorie, ce qui est la démarche normale de la physique. Il s'agit

- La loi du flux magnétique conservatif,
- La loi de Faraday sur l'induction,
- Le théorème de Gauss supposé encore valable en dehors de l'électrostatique,
- Le théorème d'Ampère modifié.

L'analyse moderne est beaucoup plus efficace en gérant ces lois de façon locale en termes de relations entre fonctions du point et du temps.

Outre l'expression de la force de Lorentz, les lois de l'électromagnétisme sont contenues dans les quatre équations qui suivent

$$div\,\vec{B} = 0 \qquad \text{(II-1)}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\,\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(II-2)}$$

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(II-3)}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}) \qquad \text{(II-4)}$$

Les deux premiers sont des propriétés intrinsèques du champ électromagnétique de composantes $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$ et les deux dernières le lien entre celui-ci et les charges et courants qui le crées, par l'intermédiaire des densités $\rho(\vec{r},t)$ et $\vec{J}(\vec{r},t)$.

Remarque 1 : ε_0 et μ_0 sont des constantes qui sont liées au choix des unités. Dans le système international, le choix de l'ampère comme unité d'intensité revient à choisir $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$. On verra un tout petit peu loin que la vitesse c de la lumière est liée à ε_0 et μ_0 par la relation

$\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$; comme $c \approx 3 \cdot 10^{-8}$ à un pour mille prés, on en tire la valeur de ε_0, cela dit c'est surtout $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9$.

Remarque 2 : Des équations de Maxwell, on tire

$$\rho = \varepsilon_0 div\,\vec{E} \qquad \text{(II-5)}$$

et

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{rot}\vec{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(II-6)}$$

Formons la combinaison $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec{j}$; comme les opérateurs div et $\frac{\partial}{\partial t}$ commutent et que la divergence d'un rotationnel est nulle, on trouve 0, c'est-à-dire que les équations de Maxwell sont compatibles avec la conservation de la charge. En fait, sous une forme adaptée aux calculs de l'époque, c'est un autre des arguments qui ont poussé Maxwell à ajouter le terme $\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ à la quatrième équation pour assurer cette compatibilité. Historiquement, le terme $\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ homogène à une densité de courant a été appelé courant de déplacement.

La relation qui exprime la conservation locale de la charge électrique se déduite à partir les équations de Maxwell ci-dessus.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0 \qquad \text{(II-7)}$$

En l'absence de charge électrique et de courant électrique, ces équations prennent la forme suivante

$$div\,\vec{B} = 0 \qquad \text{(II-8)}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\,\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(II-9)}$$

$$div\,\vec{E} = 0 \qquad \text{(II-10)}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(II-11)}$$

II. <u>Ondes électromagnétiques dans le vide :</u>

Les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday sont des équations aux dérivées partielles du premier ordre qui couple le champ $\vec{E}$ électrique et le champ magnétique $\vec{B}$. L'élimination de l'un des champs conduit à obtenir pour le second une équation du second ordre :

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{II-12}$$

$$\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{II-13}$$

Ces équations sont des équations de D'Alembert, le champ électromagnétique se propage dans le vide à la célérité

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \tag{II-14}$$

III. Les potentiels :

1) Existence des potentiels :

Dans de nombreuses situations, les problèmes d'électromagnétismes sont grandement simplifiés par l'utilisation de champs supplémentaires : Les potentiels scalaire $V(\vec{r},t)$ et vecteur $\vec{A}(\vec{r},t)$. L'existence de deux champs auxiliaires est une conséquence des équations de Maxwell flux et Maxwell-Faraday. Ces deux équations ne font pas intervenir la matière (contrairement aux deux autres). Elles peuvent être comprises comme deux contraintes imposées à la structure des champs électrique et magnétique.

Grâce à l'analyse vectorielle, nous savons que, puisque la divergence du champ magnétique est nulle, celui-ci est le rotationnel d'un autre champ vectoriel. On note donc

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} \tag{II-15}$$

et l'on appelle $\vec{A}$ potentiel vecteur. On en déduit

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial(\overrightarrow{rot}\vec{A})}{\partial t} = -\overrightarrow{rot}(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) \tag{II-16}$$

donc

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \tag{II-17}$$

Un champ de rotationnel nul est le gradient d'un champ scalaire ; l'usage est de le noter négativement, soit

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}V \tag{II-18}$$

où V s'appelle potentiel scalaire.

Retenons qu'il existe deux potentiels V et $\vec{A}$ tel que

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} \tag{II-19}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{II-20}$$

On fera bien attention au terme $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ qui s'ajoute à $-\overrightarrow{grad}V$ en dehors de l'électrostatique.

Remarque: de la même façon que le champ électrique et le champ magnétique sont les deux composantes indissociables du champ électromagnétique, le potentiel (scalaire) électrique et le potentiel vecteur (magnétique) sont les deux composantes indissociables du potentiel électromagnétique.

2) Les potentiels en électrostatique et magnétostatique :

Lorsque les distributions ρ de charge et de courant $\vec{j}$ ne dépendent pas du temps, le champ électrique et le champ magnétique ne sont pas couplés.

a) Le potentiel scalaire :

Il prend un sens particulier. Puisque le champ magnétique est indépendant du temps, le rotationnel du champ électrique est nul

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0} \tag{II-21}$$

Autrement dit le champ $\vec{E}$est consevatif. Il est le gradient du potentiel scalaire V

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \tag{II-22}$$

V prend alors un sens énergétique. L'énergie potentielle électrique E_p d'une charge électrique placée dans le champ électrique est alors

$$E_p = qV \tag{II-23}$$

Si l'on reporte l'équation qui définit le potentiel scalaire V dans l'équation de Maxwell-Gauss on obtient une relation directe entre ce potentiel et la distribution de charge

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{II-24}$$

Il s'agit de l'équation de Poisson dont une solution s'écrit sous forme intégrale

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_v \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1-\vec{r}|} d^3\vec{r}_1 \qquad \text{(II-25)}$$

b) Le potentiel vecteur :

Il vérifie lui aussi une équation de poisson

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{J} \qquad \text{(II-26)}$$

dont une solution est

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_v \frac{\vec{J}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}_1-\vec{r}|} d^3\vec{r}_1 \qquad \text{(II-27)}$$

3) Les transformations de jauge :

Les potentiels scalaire V et vecteur $\vec{A}$ sont définit comme étant solution des deux équations (II-19) et (II-20). Les équations de Maxwell-flux et Maxwell-Faraday assurent que ces équations ont une solution. Celle-ci n'est pas unique. Toute une famille de couple $(\vec{A},V)$ vérifient ces équations et conduisent aux même champs électrique et magnétique.

Le passage d'un couple $(\vec{A}_0,V_0)$ solution de ces équations à un autre couple solution $(\vec{A},V)$ est appelé transformation de jauge. Il s'écrit de manière simple en faisant intervenir un champ scalaire φ appelé jauge.

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \overrightarrow{grad}\varphi \qquad \text{(II-28)}$$

$$V = V_0 - \frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad \text{(II-29)}$$

Pour l'étude de certains problèmes, il peut être utile de choisir parmi tous les potentiels possibles ceux qui sont le plus adapté, que ce soit pour des raisons techniques ou des raisons plus physiques comme la covariance en relativité. Ce choix se fait en imposant une condition supplémentaire au potentiel appelée condition de jauge. Cette condition porte en général sur la divergence du potentiel vecteur. Deux jauges sont plus particulièrement utilisées :

a) La jauge de Lorentz :

$$div\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad \text{(II-30)}$$

b) La jauge de Coulomb :

$$div\vec{A} = 0 \qquad \text{(II-31)}$$

IV. Propagation des potentiels dans le vide :

Déterminons les équations d'évolution des potentiels en reportant l'expression du champ électrique et de champ magnétique en fonction de ces grandeurs dans les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère.

Commençons par Maxwell-Gauss :

$$div\left(-\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(II-32)}$$

soit

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t}\, div\vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(II-33)}$$

Poursuivons avec Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) = \mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \qquad \text{(II-34)}$$

ou encore

$$\overrightarrow{grad}\left(div\vec{A}\right) - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \qquad \text{(II-35)}$$

soit

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} + div\vec{A}\right) = \mu_0\vec{J} \qquad \text{(II-36)}$$

Les équations que nous obtenons ne sont pas particulièrement simples. Nous avons toutefois le loisir d'imposer un choix de jauge qui simplifiera ces équations.

Si nous choisirons de travailler en jauge de Lorentz et d'imposer

$$div\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad \text{(II-37)}$$

avec ce choix de jauge, les potentiels vérifient les équations suivantes

$$\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(II-38)}$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} \qquad \text{(II-39)}$$

En l'absence de charge et de courant, il s'agit d'équations de D'Alembert. Tout comme le champ électrique et magnétique, les potentiels sont des champs libres qui se propageant à la célérité de la lumière. Rappelons que les deux potentiels ne sont pas indépendants car ils sont reliés par la jauge de Lorentz.

Si nous choisirons de travailler en jauge de Coulomb

$$div\vec{A} = 0 \tag{II-40}$$

avec ce choix de jauge, les potentiels vérifient les équations suivantes

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \tag{II-41}$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = \mu_0\vec{J} \tag{II-42}$$

V. <u>Les équations de Maxwell dans les milieux :</u>

Considérons un milieu réel. Certaines charges sont libres de se déplacer tandis que d'autres sont liées entre elles pour former les atomes et les molécules. On peut donc distinguer deux contributions dans la densité volumique de la charge. Une contribution due aux charges libres $(\rho_l, \vec{j}_l)$ que l'on traite comme usuellement et une contribution des charges liées $(\rho_P, \vec{j}_P)$ que l'on va décrire en terme de distribution volumique de dipôles.

$$\rho = \rho_l + \rho_P = \rho_l - \vec{\nabla}\cdot\vec{P} \tag{II-43}$$

$$\vec{j} = \vec{j}_l + \vec{j}_P = \vec{j}_l + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} \tag{II-44}$$

Reportons ces deux équations dans les deux équations de Maxwell où intervienne la densité de charge de courant. Il s'agit de l'équation Maxwell-Gauss

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_l - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}\right) \tag{II-45}$$

et de l'équation Maxwell-Ampère

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j}_l + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{II-46}$$

que l'on peut finalement réécrire

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_l \tag{II-47}$$

et

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}_l + \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) \tag{II-48}$$

On introduit donc le vecteur $\vec{D}$ appelé déplacement électrique

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \tag{II-49}$$

on peut procéder la même manière avec le champ électrique et introduire un vecteur induction magnétique $\vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \qquad \text{(II-50)}$$

Nous allons maintenant utiliser les expressions précédentes des charges liés pour réécrire les quatre équations de Maxwell en faisant intervenir les vecteurs $\vec{D}$ et $\vec{H}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l \qquad \text{(II-51)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{(II-52)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(II-53)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \text{(II-54)}$$

Nous avons obtenu quatre équations de Maxwell qui ne font apparaitre que les densités de charges et de courant libres, qui sont sous contrôle de l'expérimentateur. La difficulté est bien sûr que ces équations sont écrites en fonctions de quatre champs : les champs électriques et magnétiques traditionnels, le déplacement électrique et l'induction magnétique. Ce n'est qu'en précisant les relations entre les densités de polarisation et les champs que nous pourrons exprimer les deux nouveaux champs en fonction des champs électriques et magnétiques

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad \text{(II-55)}$$

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{M} \qquad \text{(II-56)}$$

et obtenir un ensemble de quatre équations ne portant que sur deux champs de vecteurs, qu'il devrait être possible de résoudre ensuite.

Nous terminerons ce chapitre par quelques brèves remarques sur les équations de Maxwell dans un milieu conducteur linéaire homogène et isotrope. Ce milieu est caractérisé par la permittivité électrique relative ε_r, la perméabilité magnétique relative μ_r et la conductivité électrique σ. Nous supposerons le milieu homogène et ces quantités indépendantes de la position. Nous supposerons que le courant macroscopique ne résulte que de la conductivité du matériau et du champ électrique.

Les équations de Maxwell dans un milieu linéaire homogène conducteur en absence de source de charge restent inchangées

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \tag{II-57}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{II-58}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{II-59}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{II-60}$$

Les champs et la densité de courant satisfirent les équations suivantes

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{II-61}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{II-62}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{II-63}$$

où ε, μ et σ sont, respectivement, la permittivité électrique absolue, la perméabilité magnétique absolue et la conductivité électrique. La liberté de jauge nous permet de fixer une condition sur le potentiel vecteur. La jauge la plus adaptée est la jauge de Coulomb dans laquelle on impose $div\vec{A} = 0$. Dans l'espace de Fourier, cette relation se traduit par $i\vec{k}\,.\vec{A} = 0$, ce qui implique que la transformée de Fourier du potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ est orthogonale au vecteur $\vec{k}$. En absence de source de charges on a $\Delta V = 0$. Si l'on impose par ailleurs au potentiel de s'annuler à l'infini, alors d'après l'unicité des solutions de l'équation de Poisson, on a $V = 0$, autrement dit dans cette jauge et dans un milieu linéaire homogène conducteur, le champ électromagnétique n'est caractérisé que par un potentiel vecteur $\vec{A}$ transverse

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{II-64}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{II-65}$$

Dans le prochain chapitre, nous introduirons la dépendance en temps des paramètres ε, μ et σ.

CH III - QUANTIFICATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS LE VIDE

L'objet du présent chapitre est de rappeler les résultats de base de l'électrodynamique classique sous une forme qui permettra un passage aisé à la description quantique du champ. Il est intéressant d'écrire les équations de Maxwell pour les composantes de Fourier spatiales des champs (série ou intégrale de Fourier). Les équations prennent une forme particulièrement simple qui permet de séparer aisément la partie « rayonnée » du champ (partie « transverse ») et sa partie « électrostatique », attachée aux charges (partie « longitudinale »). Cette méthode est plus qu'un outil mathématique commode pour la résolution des équations. Elle permet d'introduire naturellement le concept de mode du champ électromagnétique, qui joue un rôle fondamental en électrodynamique.

I. Equivalence de champ de rayonnement classique dans une cavité pour un ensemble infini d'oscillateurs :

Dans cette section, on examine brièvement la théorie classique du rayonnement dans une cavité de source libre. On exprime la théorie sous une forme canonique et on montre l'équivalence du champ avec un ensemble infini d'oscillateurs harmoniques. Dans la prochaine section, on quantifie le champ dans une cavité en quantifiant l'oscillateur harmonique.

Comme nous l'avons mentionné au précédent chapitre, l'état du champ électromagnétique est complètement caractérisé en jauge de Coulomb dans laquelle $div\vec{A} = 0$ et $V = 0$ par la donnée de son potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Nous avons déterminés l'équation d'évolution du potentiel vecteur $\vec{A}$ en reportant l'expression du champ électrique $\vec{E}$ et de champ magnétique $\vec{B}$ en fonction de cette grandeur dans l'équation de Maxwell-Ampère. L'équation d'évolution pour $\vec{A}(\vec{r}, t)$ en l'absence de charge et de courant s'écrit

$$\vec{\nabla}^2\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t^2} \qquad \text{(III-1)}$$

Dans l'étude du champ électromagnétique, on ne se préoccupe généralement pas de l'environnement qui interagit avec le rayonnement. On suppose implicitement que le rayonnement évolue dans l'espace libre, et qu'il n'y a pas de parois susceptibles de renvoyer le champ rayonné. Lorsque le champ électromagnétique ne se propage pas dans l'espace libre, mais est confiné à l'intérieur d'une cavité cubique de volume V et de côté L aux parois parfaitement conductrices. À cause des conditions aux limites imposées par la cavité, le champ à l'intérieur de celle-ci ne peut exister que dans une superposition de modes propres avec des amplitudes décrivant le champ dans la cavité.

L'équation (III-1) étant linéaire, la méthode de séparation des variables nous suggère la solution sous la forme

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \sum_l q_l\,(t)\vec{u}_l(\vec{r}) \tag{III-2}$$

où $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}$ est une constante de normalisation. En substituant (III-2) dans l'équation d'onde (III-1), on obtient, pour chaque valeur de l, les équations

$$\vec{\nabla}^2\vec{u}_l(\vec{r}) + \frac{\omega_l^2}{c^2}\vec{u}_l(\vec{r}) = 0 \tag{III-3}$$

$$\frac{d^2q_l}{dt^2} + \omega_l^2 q_l = 0 \tag{III-4}$$

où ω_l est une constante de séparation pour chaque valeur de l, le potentiel vecteur $\vec{A}$ étant réel entraine que les fonctions $\vec{u}_l(\vec{r})$ et $q_l(t)$ sont réelles. Les amplitudes $q_l(t)$ obéissent à l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique.

Les solutions de l'équation spatiale vérifient des conditions aux limites. Deux types de conditions aux limites peuvent être utilisés et conduisent au même résultat pour les ondes. Les conditions d'annulation de la fonction d'onde sur les parois d'une enceinte, c'est-à-dire, que la composante tangentielle de $\vec{E}$ et la composante normale de $\vec{B}$ s'annulent permet d'obtenir des solutions stationnaires, ainsi on a

$$\vec{u}_l|_{tan} = 0 \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{u}_l|_{norm} = 0 \qquad \text{(sur les parois)} \tag{III-5}$$

et

$$div\vec{u}_l(\vec{r}) = 0 \tag{III-6}$$

partout dans la cavité.

Les solutions de (III-3) satisfaisant (III-5) donnent un ensemble discret de modes normaux orthogonaux et normalisés à l'unité

$$\int_{cavité} \vec{u}_l(\vec{r}) \cdot \vec{u}_m(\vec{r}) dV = \delta_{lm}. \quad \text{(III-7)}$$

Nous allons voir que cette décomposition est également fructueuse lorsqu'on s'intéresse à l'énergie et à l'impulsion du rayonnement. L'énergie H du champ de rayonnement, ou champ transverse, est l'intégrale sur tout le volume V de la cavité de la densité d'énergie du champ transverse. Elle s'écrit

$$H = \frac{1}{2}\int (\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2) dV = \frac{1}{2}\int [\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)^2] dV \quad \text{(III-8)}$$

Elle prend une forme particulièrement intéressante lorsqu'on l'exprime en fonction des modes normaux

$$H = \frac{1}{2}\sum_{l,m} \dot{q}_l \dot{q}_m \int_{cavité} \vec{u}_l \cdot \vec{u}_m dV + \frac{c^2}{2}\sum_{l,m} q_l q_m \int_{cavité} \vec{\nabla} \times \vec{u}_l \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u}_m dV \quad \text{(III-9)}$$

En tenant compte de l'existence des conditions d'annulation de la fonction d'onde sur les parois on met l'énergie transverse sous la forme

$$H = \frac{1}{2}\sum_l (\dot{q}_l^2 + \omega_l^2 q_l^2) \equiv \sum_l H_l \quad \text{(III-10)}$$

où H_l est l'énergie d'un oscillateur harmonique de fréquence ω_l. L'énergie du champ est équivalente à un ensemble infini des oscillateurs de rayonnement découplés. Par conséquent, chaque mode du champ peut être associé à un oscillateur de fréquence ω_l, les évolutions des divers modes sont ainsi découplées, l'énergie contenue dans le champ total est simplement l'énergie d'un ensemble infini d'oscillateurs découplés.

L'impulsion $\vec{G}$ du champ transverse est proportionnelle à l'intégrale sur le volume V du vecteur de Poynting $\vec{E} \times \vec{H}$. On peut l'écrire plus précisément

$$\vec{G} = \frac{1}{c^2}\int \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) dV = -\varepsilon_0 \left(\int \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)\right) dV \quad \text{(III-11)}$$

En utilisant une démarche similaire à ci-dessus, on peut exprimer $\vec{G}$ en fonction des modes normaux et monter que l'impulsion totale du rayonnement est donc la somme d'impulsions associées à chaque mode. L'impulsion d'un mode est dirigée selon le vecteur d'onde $\vec{K}_l$ de ce mode.

Les équations d'Hamilton obtenues à partir de l'Hamiltonien H_l

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial H_l}{\partial q_l} = -\omega_l^2 q_l \quad \text{(III-12)}$$

$$\dot{q}_l = \frac{\partial \mathrm{H}_l}{\partial p_l} = p_l \tag{III-13}$$

prouvent que q_l et p_l sont bien deux variables position et impulsion conjuguées canoniquement.

La variable normale

$$a_l = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_l}}(\omega_l q_l + ip_l) \tag{III-14}$$

et la variable complexe conjuguée

$$a_l^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_l}}(\omega_l q_l - ip_l) \tag{III-15}$$

« diagonalisent » le système d'équations d'évolution (III-12) et (III-13). On a en effet

$$\frac{da_l(t)}{dt} = -i\omega_l a_l(t) \tag{III-16}$$

et

$$\frac{da_l^+(t)}{dt} = i\omega_l a_l^+(t) \tag{III-17}$$

On en tire directement la solution

$$a_l(t) = a_l e^{-i\omega_l t} \tag{III-18}$$

$$a_l^+(t) = a_l^+ e^{i\omega_l t} \tag{III-19}$$

Dans cet exemple, la réalité de q_l et p_l permet d'inverser directement l'équation (III-14) et la complexe conjuguée pour obtenir

$$q_l = \sqrt{\frac{1}{2\omega_l}}(a_l^+ + a_l) \tag{III-20}$$

$$p_l = i\sqrt{\frac{\omega_l}{2}}(a_l^+ - a_l) \tag{III-21}$$

L'Hamiltonien total , (III-10), s'écrit alors

$$H = \frac{1}{2}\sum_l \hbar\omega_l(a_l^+ a_l + a_l a_l^+) \tag{III-22}$$

En résumé, les champs exprimés en fonction des ondes stationnaires son données par

$$\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\sum_l q_l\,(t)\vec{u}_l(\vec{r}) \tag{III-23}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\sum_l p_l\,(t)\vec{u}_l(\vec{r}) \tag{III-24}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0\sqrt{\varepsilon_0}}\sum_l q_l\,(t)\vec{\nabla} \times \vec{u}_l(\vec{r}) \tag{III-25}$$

Dans la suite, nous décomposerons le potentiel vecteur dans l'espace de Fourier, ce qui revient à décomposer les champs en ondes planes, ce qui nous permet d'écrire

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_l \sum_{v=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l\varepsilon_0 V}}\,\hat{\vec{\epsilon}}_{lv}\left\{a_{lv}\exp\left[i\left(\vec{K}_l\cdot\vec{r} - \omega_l t\right)\right] + a_{lv}^{+}\exp\left[-i\left(\vec{K}_l\cdot\vec{r} - \omega_l t\right)\right]\right\} \tag{III-26}$$

L'équation de propagation dans le vide impose alors la relation de dispersion

$$K_l^2 = \frac{\omega_l^2}{c^2} \tag{III-27}$$

Les conditions aux limites périodiques pour les ondes planes imposent que les champs prennent les même valeurs en $x = 0\ et\ x = L$, $y = 0$ et $y = L$, $z = 0$ et $z = L$

$$\vec{A}\left((x+L)\hat{\vec{\imath}} + (y+L)\hat{\vec{\jmath}} + (z+L)\hat{\vec{k}}, t\right) = \vec{A}\left(x\hat{\vec{\imath}} + y\hat{\vec{\jmath}} + z\hat{\vec{k}}, t\right) \tag{III-28}$$

Ceci revient à quantifier les vecteurs d'ondes $\vec{K}_l = K_{lx}\hat{\vec{\imath}} + K_{ly}\hat{\vec{\jmath}} + K_{lz}\hat{\vec{k}}$ dans l'espace de Fourier qui peuvent prendre les valeurs

$$\vec{K}_l = \frac{2\pi}{L}(l_1\hat{\vec{\imath}} + l_2\hat{\vec{\jmath}} + l_3\hat{\vec{k}}) \tag{III-29}$$

où $l_1, l_2,$ et l_3 sont des entiers quelconques et $\hat{\vec{\imath}}, \hat{\vec{\jmath}}$ et $\hat{\vec{k}}$ trois vecteurs unitaires le long des bords du cube. On peut donc associer chaque état $\vec{K}_l$ à une maille cubique de volume $(2\pi/L)^3$. La donnée d'un vecteur $\vec{K}_l$ ne caractérise pas complètement une onde électromagnétique. Les équations de Maxwell imposent juste que les champs électrique et magnétique soient orthogonaux entre eux et orthogonaux à $\vec{K}_l$. Les vecteurs unitaires $\hat{\vec{\epsilon}}_{l1}$ et $\hat{\vec{\epsilon}}_{l2}$ indépendants l'un de l'autre représentent les deux polarisations possibles pour une onde de vecteur d'onde $\vec{K}_l$. Ainsi un mode propre est-il défini par un vecteur d'onde unitaire $\hat{\vec{K}}_l = \frac{\vec{K}_l}{|\vec{K}_l|}$ et un état de polarisation tels que

$$\hat{\vec{\epsilon}}_{lv}\cdot\hat{\vec{\epsilon}}_{lv'} = \delta_{vv'} \quad v, v' = 1,2 \qquad \hat{\vec{K}}_l\cdot\hat{\vec{\epsilon}}_{lv} = 0 \tag{III-30}$$

L'intérêt de cette approche est de permettre de réaliser un dénombrement des modes.

Le changement l par $-l$ c'est dire que $(l_1, l_2, l_3) \to (-l_1, -l_2, -l_3)$ induit

$$\vec{K}_{-l} = -\vec{K}_l \tag{III-31}$$

et

$$\omega_{-l} = \omega_l \tag{III-32}$$

Par conséquent, les deux ondes correspondantes se propagent dans des directions opposées ainsi il existe deux modes de déplacement (un pour chaque polarisation υ).

L'ensemble $(l_1, l_2, l_3, \upsilon)$ donne un mode d'une polarisation donnée et la somme $\sum_l$ est une notation abrégée

$$\sum_l \equiv \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \sum_{l_3=-\infty}^{\infty}. \tag{III-33}$$

Le champ électrique $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_l \sum_{\upsilon=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}}\, \hat{\vec{\epsilon}}_{l\upsilon}. \left[a_{l\upsilon}(t) \exp\left(\mathrm{i}\vec{K}_l \cdot \vec{r}\right) - a_{l\upsilon}^{+}(\mathrm{t})\exp(-\mathrm{i}\vec{K}_l \cdot \vec{r})\right] \tag{III-34}$$

avec

$$\begin{cases} a_{l\upsilon}(t) = a_{l\upsilon} e^{-i\omega t} \\ a_{l\upsilon}^{+}(t) = a_{l\upsilon}^{+} e^{i\omega t} \end{cases} \tag{III-35}$$

Tandis que le champ magnétique

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{III-36}$$

est donné par

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{-i}{c\mu_0} \sum_l \sum_{\upsilon=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}}\ (\hat{\vec{\epsilon}}_{l\upsilon} \times \hat{\vec{K}}_l)\left[a_{l\upsilon}(t) \exp\left(\mathrm{i}\vec{K}_l \cdot \vec{r}\right) - a_{l\upsilon}^{+}(\mathrm{t})\exp(-\mathrm{i}\vec{K}_l \cdot \vec{r})\right] \tag{III-37}$$

où on a utilisé le fait que

$$\vec{\nabla} \times \left[\hat{\vec{\epsilon}}_{l\upsilon} \exp\left(\pm i\vec{K}_l \cdot \vec{r}\right)\right] = \mp i\left(\hat{\vec{\epsilon}}_{l\upsilon} \times \vec{K}_l\right) \exp\left(\pm i\vec{K}_l \cdot \vec{r}\right) = \mp i \frac{\omega_l}{c}\left(\hat{\vec{\epsilon}}_{l\upsilon} \times \hat{\vec{K}}_l\right) e^{(\pm i\vec{K}_l \cdot \vec{r})} \tag{III-38}$$

et aussi

$$\left|\vec{K}_l\right| = \frac{\omega_l}{c} \tag{III-39}$$

Nous avons signalé à plusieurs reprises l'analogie qui existe entre un mode du champ électromagnétique classique et un oscillateur harmonique matériel. Cette analogie va nous guider pour la quantification du champ.

II. <u>Quantification du champ électromagnétique dans le vide :</u>

L'approche simpliste pour quantifier le champ consiste à remplacer les variables normales $a_{l\upsilon}$ et $a_{l\upsilon}^{+}$ par des opérateurs d'annihilation $a_{l\upsilon}$ et de creation $a_{l\upsilon}^{+}$ vérifiant les relations de commutation

$$[a_{lv}, a^{+}_{l'v'}] = \delta_{lv}\delta_{l'v'} \qquad \text{(III-40)}$$

$$[a_{lv}\ , a_{l'v'}] = [a^{+}_{lv}\ , a^{+}_{l'v'}] = 0 \qquad \text{(III-41)}$$

L'Hamiltonien quantique du rayonnement transverse s'obtient simplement en remplaçant dans (III-22) les variables normales par les opérateurs correspondant obéissant aux règles de commutation (III-40) et (III-41) et on trouve

$$H = \sum_{l,v} \hbar\omega_l \left(a^{+}_{lv}a_{lv} + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{(III-42)}$$

En utilisant la même procédure que pour l'énergie, l'opérateur quantique associé l'impulsion du champ (III-11) s'écrit alors

$$\vec{G} = \sum_{l,v} \vec{K}_l \hbar\omega_l \left(a^{+}_{lv}a_{lv} + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{(III-43)}$$

Les termes relatifs à $\vec{K}_l$ et $\vec{K}_{-l} = -\vec{K}_l$ se compensent dans la somme $\sum_l \hbar\vec{K}_l = \vec{0}$ qui est nulle. L'opérateur impulsion du rayonnement a finalement une expression extrêmement simple

$$\vec{G} = \sum_{l,v} \vec{K}_l \hbar\omega_l\, a^{+}_{lv}a_{lv} \qquad \text{(III-44)}$$

L'Hamiltonien H apparaît comme une combinaison linéaire d'opérateur définis par l'opérateur nombre de photons $N_{lv} = a^{+}_{lv}a_{lv}$ associé au mode l, v. Les valeurs propres de N_{lv} sont $n_{lv} = 0, 1, 2, \dots, \infty$. L'énergie du photon dans l'état $|n_{lv}\rangle$ est $\hbar\omega_l$ et son impulsion est $\hbar\vec{K}_l$. Le photon possède donc des propriétés similaires à celles des particules et se propage à la vitesse c.

Il est alors facile de voir que les états propres de H (III-42) sont les produits tensoriels pour tous les modes l, v possibles des états $|n_{lv}\rangle$ que nous noterons pour simplifier

$$|n_1\rangle|n_2\rangle \dots |n_\infty\rangle = |n_1, n_2, \dots, n_\infty\rangle \qquad \text{(III-45)}$$

où chaque indice $1,2, \dots$.désigne l'ensemble des entiers (l_1, l_2, l_3, v). L'état fondamental du champ correspond à tous les entiers n_{lv} pris égaux à 0. Il sera noté

$$|0\rangle = |n_1 = 0, n_2 = 0, \dots, n_\infty = 0\rangle$$

pour simplifier. Son énergie, qui est l'énergie minimale du champ électromagnétique quantifié, vaut : $\frac{1}{2}\sum_{l,v} \hbar\omega_l$.

Tout état propre peut se déduire de l'état fondamental $|0\rangle$ par l'application d'un produit d'opérateurs a^{+}_{lv}.

L'action des opérateurs a_{lv} et a_{lv}^{+} sur le vecteur d'état (III-45) est résumée comme suit

$$\begin{cases} a_{lv}^{+}|\ldots,n_{lv},\ldots\rangle = \sqrt{n_{lv}+1}|\ldots,n_{lv}+1,\ldots\rangle \\ a_{lv}|\ldots,n_{lv},\ldots\rangle = \sqrt{n_{lv}}|\ldots,n_{lv}-1,\ldots\rangle \\ a_{lv}|\ldots,0,\ldots\rangle = 0 \\ N_{lv}|\ldots,n_{lv},\ldots\rangle = n_{lv}|\ldots,n_{lv},\ldots\rangle \end{cases} \tag{III-46}$$

Ces vecteurs d'état normalisés à l'unité vérifient aussi les relations de fermetures et d'orthogonalités

$$\sum_{n_1,n_2,\ldots,n_\infty}|n_1,n_1,\ldots,n_\infty\rangle\langle n_1,n_2,\ldots,n_\infty| = I \tag{III-47}$$

$$\langle n_1,n_2,\ldots,n_\infty|n'_1,n'_2,\ldots,n'_\infty\rangle = \delta_{n_1,n'_1}\delta_{n_2,n'_2} \tag{III-48}$$

Jusqu'ici nous avons travaillés en représentation de Schrödinger. Nous pouvons aussi travailler en représentation de Heisenberg ou la représentation d'interaction. Par exemple, les équations du mouvement des opérateurs $a_{lv}(t)$ en représentation de Heisenberg sont données

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}a_{lv}(t)}{\mathrm{dt}} = [a_{lv}(t),H_H] = -i\omega_l a_{lv}(t) \tag{III-49}$$

où l'indice H indique la représentation de Heisenberg.

Nous pouvons maintenant donner les expressions des opérateurs ou observables associés aux différentes grandeurs physiques du problème. On les déduit des expressions (III-26) (III-34) et (III-37) du paragraphe précédent en remplaçant les variables normales classiques par les opérateurs quantiques associés. On obtient

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_l\sum_{v=1}^{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l\varepsilon_0 V}}\,\hat{\vec{\epsilon}}_{lv}\{a_{lv}\exp[i(\vec{K}_l\cdot\vec{r}-\omega_l t)] + a_{lv}^{+}\exp[-i(\vec{K}_l\cdot\vec{r}-\omega_l t)]\} \tag{III-50}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = i\sum_l\sum_{v=1}^{2}\sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}}\,\hat{\vec{\epsilon}}_{lv}.\left[a_{lv}(t)\exp(\mathrm{i}\vec{K}_l\cdot\vec{r}) - a_{lv}^{+}(\mathrm{t})\exp(-\mathrm{i}\vec{K}_l\cdot\vec{r})\right] \tag{III-51}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{-i}{c\mu_0}\sum_l\sum_{v=1}^{2}\sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}}\,(\hat{\vec{\epsilon}}_{lv}\times\hat{\vec{K}}_l)\left[a_{lv}(t)\exp(\mathrm{i}\vec{K}_l\cdot\vec{r}) - a_{lv}^{+}(\mathrm{t})\exp(-\mathrm{i}\vec{K}_l\cdot\vec{r})\right] \tag{III-52}$$

Il est souvent commode de séparer dans les expressions des champs ci-dessus la contribution des opérateurs de création et d'annihilation. Par exemple, le champ électrique se décompose en

$$\vec{E}(\vec{r},t) \equiv \vec{E}^{(+)}(\vec{r},t) + \vec{E}^{(-)}(\vec{r},t) \tag{III-53}$$

où $\vec{E}^{(+)}(\vec{r},t)$, appelé « partie du champ de fréquence positive », est donné par l'expression

$$\vec{E}^{(+)}(\vec{r},t) = \ i\sum_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}}\, a_l e^{-i\omega_l t} e^{i\vec{k}_l\cdot\vec{r}}\widehat{\vec{e}_l} = \left[\vec{E}^{(-)}(\vec{r},t)\right]^+ \qquad \text{(III-54)}$$

$\vec{E}^{(-)}(\vec{r},t)$ étant l'opérateur conjugué hermétique de $\vec{E}^{(+)}(\vec{r},t)$.

Pour tout mode (l,υ), les relations (III-46) nous permettent d'établir, à partir des expressions (III-50), (III-51) et (III-52) que

$$\langle 0|\vec{E}(\vec{r},t)|0\rangle = \langle 0|\vec{B}(\vec{r},t)|0\rangle = \langle 0|\vec{A}(\vec{r},t)|0\rangle = \vec{0} \qquad \text{(III-55)}$$

dans le vide, comme on pouvait s'y attendre, les valeurs moyennes des champs électrique et magnétique et du potentiel vecteur sont nulles. Par contre un calcul simple montre que les variances de ces grandeurs dans le vide n'est pas nulle. La théorie quantique nous montre ainsi que même dans son état fondamental, le champ de rayonnement est le siège de fluctuations non nulles, appelées fluctuations du vide. L'existence de telles fluctuations permet de comprendre intuitivement pourquoi les propriétés d'un atome sont modifiées par le couplage avec le vide.

III. Relations de commutation pour les champs dans le vide à temps égaux :

Les relations de commutation entre les observables sont étroitement associés au problème de la mesure de ces observables. Nous allons calculés le commutateur à temps égal des opérateurs

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \end{cases} \qquad \text{(III-56)}$$

1) Relation de commutation de $\vec{\mathbf{D}}$ et $\vec{\mathbf{A}}$ à temps égaux :

Rappelons que les opérateurs potentiel-vecteur et déplacement électrique en représentation de Schrödinger sont donnés

$$\vec{A}_s(\vec{r},0) = \sum_l \sum_{\upsilon=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l \varepsilon_0 V}}\,\hat{\vec{\epsilon}}_{l\upsilon}.\left[a_{l\upsilon}\exp\left(\mathrm{i}\vec{K}_l\cdot\vec{r}\right) - a_{l\upsilon}^{+}\exp(-\mathrm{i}\vec{K}_l\cdot\vec{r})\right] \qquad \text{(III-57)}$$

$$\vec{D}_s(\vec{r},0) = i\sum_l \sum_{\upsilon=1}^{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0\hbar\omega_l}{2V}}\,\hat{\vec{\epsilon}}_{l\upsilon}.\left[a_{l\upsilon}\exp\left(\mathrm{i}\vec{K}_l\cdot\vec{r}\right) - a_{l\upsilon}^{+}\exp(-\mathrm{i}\vec{K}_l\cdot\vec{r})\right] \qquad \text{(III-58)}$$

où $a_{l\upsilon} = a_{l\upsilon}(\mathrm{t}=0)$.

Calculons la relation de commutation de la i^{eme}composante $A_i(\vec{r})$ de $\vec{A}_s(\vec{r},0)$ et la j^{eme} composante $D_j(\vec{r})$ de $\vec{D}_s(\vec{r},0)$

$$\left[A_i(\vec{r}), D_j\left(\vec{r'}\right)\right] = -\frac{i\hbar}{V}\sum_{l,\upsilon}(\hat{\vec{\epsilon}}_{l\upsilon})_i(\hat{\vec{\epsilon}}_{l\upsilon})_j\left[\exp\left(\mathrm{i}\vec{K}_l\cdot\vec{\rho}\right) + \exp(-\mathrm{i}\vec{K}_l\cdot\vec{\rho})\right] \qquad \text{(III-59)}$$

où

$$\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r'} \qquad \text{(III-60)}$$

On peut maintenant effectuer la somme sur l'indice de polarisation υ. $(\hat{\vec{\epsilon}}_{l1})_i$ est la i^{eme} composante du vecteur $\hat{\vec{\epsilon}}_{l1}$selon l'axe cartésien x_i et n'est rien d'autre que le cosinus directeur de l'angle entre $\hat{\vec{\epsilon}}_{l1}$ et l'axe x_i. De même $(\hat{\vec{\epsilon}}_{l2})_j$est le cosinus directeur de l'angle entre $\hat{\vec{\epsilon}}_{l2}$ et l'axe x_j, et $(\hat{\vec{K}}_l)_i$ est le cosinus directeur de l'angle entre $\hat{\vec{K}}_l$ l'axe x_i. Alors, nous avons

$$\left(\hat{\vec{\epsilon}}_{l1}\right)_i(\hat{\vec{\epsilon}}_{l1})_j + \left(\hat{\vec{\epsilon}}_{l2}\right)_i(\hat{\vec{\epsilon}}_{l2})_j + \left(\hat{\vec{K}}_l\right)_i(\hat{\vec{K}}_l)_j = \delta_{ij} \qquad \text{(III-61)}$$

ou

$$\sum_{\upsilon=1}^{2}\left(\hat{\vec{\epsilon}}_{l\upsilon}\right)_i(\hat{\vec{\epsilon}}_{l\upsilon})_j = \delta_{ij} - \left(\hat{\vec{K}}_l\right)_i(\hat{\vec{K}}_l)_j \equiv \delta_{ij} - \frac{(\vec{K}_l)_i(\vec{K}_l)_j}{\vec{K}_l^{\,2}} \qquad \text{(III-62)}$$

En combinant $\exp\left(\mathrm{i}\vec{K}_l\cdot\vec{\rho}\right)$ et $\exp\left(-\mathrm{i}\vec{K}_l\cdot\vec{\rho}\right)$ puisque $\vec{K}_{-l} = -\vec{K}_l$ et sachant que la somme sur l porte su tous les entiers positifs et négatifs, alors la substitution de (III-62) dans (III-59) donne

$$\left[\vec{A}_i(\vec{r}), \vec{D}_j\left(\vec{r'}\right)\right] = -\frac{i\hbar}{V}\sum_l\left[\delta_{ij} - \left(\hat{\vec{K}}_l\right)_i(\hat{\vec{K}}_l)_j\right]\exp\left(\mathrm{i}\vec{K}_l\cdot\vec{\rho}\right) \qquad \text{(III-63)}$$

Pour l'espace libre, Lorsque le volume de la cavité devient infiniment grand « espace libre » ($L^3 = V \to \infty$), on peut remplacer dans les formules (III-63) la somme sur l par une intégrale

$$\frac{1}{L^3}\sum_l(\quad)\xrightarrow{donne}_{L\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} dK_x dK_y dK_z\,(\quad).$$

Ainsi, on obtient :

$$\left[A_i(\vec{r}), D_j(\vec{r}')\right] = -i\hbar\delta_{ij}^T(\vec{\mathrm{r}} - \vec{\mathrm{r}}') \qquad \text{(III-64)}$$

où δ_{ij}^T est la fonction δ-transverse donnée par

$$\delta_{ij}^T(\vec{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} d\vec{K}\ \exp\left(\mathrm{i}\vec{K}_l\cdot\vec{\rho}\right)(\delta_{ij} - \hat{K}_i\hat{K}_j) \qquad \text{(III-65)}$$

$d\vec{K} = dK_x dK_y dK_z$ est un élément de volume dans l'espace des $\vec{K}$, $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}'$, et

$$\delta(\vec{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\vec{K} \exp\left(\mathrm{i}\vec{K_l} \cdot \vec{\rho}\right) = \delta(\rho_x)\delta(\rho_y)\delta(\rho_z) \qquad \text{(III-66)}$$

la fonction δ de Dirac ordinaire.

La fonction δ^T transverse vérifie la propriété utile suivante

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \delta_{ij}^T(\vec{\rho})}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{(III-67)}$$

La divergence de (III-64) donne un résultat nul

$$\left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i(\vec{r})}{\partial x_i}, D_j(\vec{r}')\right] = -i\hbar \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \delta_{ij}^T(\vec{\rho})}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{(III-68)}$$

ce qui implique que $div\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i(\vec{r})}{\partial x_i} = 0$ puisque $D_j(\vec{r}') \neq 0$. Cela montre la nécessité d'utiliser la jauge de Coulomb, de sorte que la relation de commutation (III-64) est valable dans cette jauge.

On va utiliser le fait que les relations de commutation sont identiques dans les deux représentations de Heisenberg et Schrödinger pour écrire, à partir de (III-64)

$$\left[A_i^H(\vec{r}, t), D_j^H(\vec{r}', t)\right] = -i\hbar\delta_{ij}^T(\vec{r} - \vec{r}') \qquad \text{(III-69)}$$

où t est le même temps dans A_i et D_j.

Nous pouvons dans la suite montrer que

$$\left[A_i(\vec{r}, t), A_j(\vec{r}', t)\right] = 0 \qquad \text{(III-70)}$$

En effet en utilisant l'expression de $A_i(\vec{r})$ et la propriété (III-62) pour effectuer la somme sur υ , (III-70) donne:

$$\left[A_i(\vec{r}), A_j(\vec{r}')\right] = i\hbar \sum_l \frac{1}{\omega_l \varepsilon_0 V} [\,\delta_{ij} - \left(\hat{\vec{K}}_l\right)_i (\hat{\vec{K}}_l)_j] \sin(\vec{K}_l \cdot \vec{\rho}) \qquad \text{(III-71)}$$

Puisque $\omega_l = c\left|\vec{K}_l\right|$ et $\vec{K}_{-l} = -\vec{K}_l$, on voit que le terme $\omega_l^{-1}[\delta_{ij} - \left(\hat{\vec{K}}_l\right)_i (\hat{\vec{K}}_l)_j]$ est pair en remplaçant $-\,l$ par l tandis que le $\sin(\vec{K}_l \cdot \vec{\rho})$ est impair, ce qui implique que la somme s'annule.

En procédant de la même manière et en utilisant

$$\sum_\upsilon (\hat{\vec{\epsilon}}_{l\upsilon} \times \hat{\vec{K}}_l)_i \,(\hat{\vec{\epsilon}}_{l\upsilon} \times \hat{\vec{K}}_l)_j = \sum_\upsilon (\hat{\vec{\epsilon}}_{l\upsilon})_i (\hat{\vec{\epsilon}}_{l\upsilon})_j \qquad \text{(III-72)}$$

$$\begin{cases} \hat{\vec{\epsilon}}_{l\nu} \cdot \hat{\vec{K}}_l = 0 \\ \hat{\vec{\epsilon}}_{l1} \times \hat{\vec{\epsilon}}_{l2} = \hat{\vec{K}}_l \\ \hat{\vec{\epsilon}}_{l1} \times \hat{\vec{K}}_l = -\hat{\vec{\epsilon}}_{l2} \\ \hat{\vec{\epsilon}}_{l2} \times \hat{\vec{K}}_l = \hat{\vec{\epsilon}}_{l1} \end{cases} \tag{III-73}$$

on montre que :

$$\left[D_i(\vec{r},t), D_j(\vec{r}\,',t)\right] = 0 \tag{III-74}$$

$$\left[B_i(\vec{r},t), B_j(\vec{r}\,',t)\right] = 0, \tag{III-75}$$

$$\left[D_i(\vec{r},t), B_j(\vec{r}\,',t)\right] = \begin{cases} 0 \; pour \;\; i = j = \; 1, 2, 3 \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} \delta(\vec{\rho}) \\ +i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} \delta(\vec{\rho}), \end{cases} \tag{III-76}$$

On utilise la deuxième équation du système (III-76) si i, j et k forment une permutation cyclique de 1, 2 et 3, et on utilise la troisième équation de (III-76) si i, j et k forment une permutation cyclique de 1, 3 et 2.

Nous pouvons, aussi, montrer que les observables champs que nous venons d'introduire obéissent bien aux équations de Maxwell, il suffit par exemple de commencer par les équations portant sur les divergences de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ puis à celles portant sur leurs dérivées par rapport au temps. Le résultat fourni peut paraitre décevant : quel intérêt y a-t-il à développer un formalisme quantique si, à la fin, on retrouve les équations de Maxwell ? Si l'on veut observer des effets réellement quantiques, il faut plutôt s'intéresser aux fluctuations, comme nous le verrons au dernier chapitre.

CH IV - CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS UN MILIEU CONDUCTEUR LINEAIRE ET HOMOGENE : ANGLE GEOMETRIQUE

Il est important d'aborder dans ce chapitre la résolution des équations de Maxwell d'un milieu conducteur linéaire homogène dépendant du temps c'est-à-dire que la permittivité électrique $\varepsilon(t)$, la perméabilité magnétique $\mu(t)$ et la conductivité électrique $\sigma(t)$ sont des fonctions du temps. Nous verrons que lors de son évolution le champ électromagnétique acquiert un angle supplémentaire de nature géométrique. En se basant sur les notions et le formalisme introduits aux chapitres précédents, nous décrirons la quantification élémentaire du champ électromagnétique ainsi que la relation phases et angles géométriques. Enfin, on considérera l'effet des fluctuations de point zéro du champ et l'énergie qui y est associée.

Les résultats des chapitres précédents permettent de présenter de manière rapide les calculs de l'article [58] et d'en commenter davantage les résultats

I. Solution de l'équation d'onde pour le vecteur potentiel $\vec{A}$:

Rappelons que, l'état du champ électromagnétique est complètement caractérisé en jauge de Coulomb dans laquelle $div\vec{A} = 0$ et $V = 0$ par la donnée de son potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$ qui est purement transversal [2]. Nous avons déterminés l'équation d'évolution du potentiel vecteur $\vec{A}$ en reportant l'expression du champ électrique $\vec{E}$ et de champ magnétique $\vec{B}$ en fonction de cette grandeur dans l'équation de Maxwell-Ampère. Le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$ obéit à l'équation d'ondes amortie

$$\nabla^2\vec{A} - \mu(\dot{\varepsilon} + \sigma)\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad \text{(IV-1)}$$

dont la solution $\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_l \vec{u}_l(\vec{r}) e^{-\int_0^t \Lambda(\acute{t})d\acute{t}} q_l(t)$ en termes des modes $\vec{u}_l(\vec{r})$ et d'amplitudes $e^{-\int_0^t \Lambda(\acute{t})d\acute{t}} q_l(t)$ s'écrit

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V}} e^{-\int_0^t \Lambda(\acute{t})d\acute{t}} \times \sum_l \sum_{\nu=0}^{2} \frac{\widehat{\overrightarrow{\epsilon_{l,\nu}}}}{\sqrt{\varpi}} \left[a_{l,\nu}(0) e^{i[\overrightarrow{K_l}.\vec{r} - \varphi_l(t)]} + a_{l,\nu}{}^{+}(0) e^{-i[\overrightarrow{K_l}.\vec{r} - \varphi_l(t)]}\right] \qquad \text{(IV-2)}$$

où $\Lambda(t) = \frac{\sigma(t)}{2\varepsilon(t)}$. $\vec{u}_l(\vec{r})$ et $q_l(t)$ obéissent aux équations d'évolution

$$\nabla^2 \vec{u}_l(\vec{r}) + \frac{\omega_l^2}{c_0^2} \vec{u}_l(\vec{r}) = 0 \qquad \text{(IV-3)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} q_l(t) + \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t} q_l(t) + \left[\Omega_l^2 - \Lambda^2 + \frac{\dot{\sigma}}{2\varepsilon}\right] q_l(t) = 0 \qquad \text{(IV-4)}$$

où c_0 est la vitesse de la lumière à $t = 0$, ω_l la constante de séparation et $\Omega_l(t) = c(t)\omega_l / c_0$ est la fréquence dépendante du temps et $c(t) = [\mu(t)\varepsilon(t)]^{-\frac{1}{2}}$.

Les équations du mouvement des amplitudes $q_l(t)$ peuvent être directement déduites de l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique généralisé (cf. Chapitre I)

$$H_l(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{p_l^2}{\varepsilon} + 2\Lambda p_l q_l + \varepsilon \Omega_l^2 q_l^2\right] \qquad \text{(IV-5)}$$

p_l étant les variables canoniques conjuguées à q_l.

La phase $\varphi_l(t)$ est donnée par

1) Cas adiabatique

$$\dot{\varphi}_l(t) = \overline{\omega}_l - \dot{\sigma}/4\varepsilon\,\overline{\omega}_l \qquad \text{(IV-6)}$$

qui est la somme de deux contributions, l'une dynamique $\int_0^t \overline{\omega}_l(t')dt' = \int_0^t \sqrt{\Omega_l^2 - \Lambda^2}\,dt'$, et l'autre de nature géométrique ou angle de Hannay

$$\dot{\varphi}_l^H = -\,\dot{\sigma}/4\varepsilon\overline{\omega}_l \qquad \text{(IV-7)}$$

dont la valeur dépend du chemin suivit dans l'espace des paramètres $\varepsilon, \mu, et\ \sigma$.

2) Cas non-adiabatique

$$\dot{\varphi}_l(t) = \frac{1}{\varepsilon\rho^2} \qquad \text{(IV-8)}$$

et dont la partie géométrique est

$$\dot{\varphi}_l^G = \dot{\rho}[\varepsilon(\Lambda\rho - \dot{\rho})] \qquad \text{(IV-9)}$$

En résumé, les champs exprimés en fonction des ondes planes sont données dans le cas adiabatique ou non-adiabatique par

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V}}\, e^{-\int_0^t \Lambda(\acute{t})d\acute{t}} \times \sum_l \sum_{\nu=0}^{2} \frac{\widehat{\overrightarrow{\epsilon_{l,\nu}}}}{\sqrt{\varpi}}\left[a_{l,\nu}(0)e^{i[\overrightarrow{K_l}.\vec{r}-\varphi_l(t)]} + a_{l,\nu}{}^{+}(0)e^{-i[\overrightarrow{K_l}.\vec{r}-\varphi_l(t)]}\right] \text{(IV-10)}$$

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V}}\, e^{-\int_0^t \Lambda(\acute{t})d\acute{t}} \sum_l \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\widehat{\overrightarrow{\epsilon_{l,\nu}}}}{\sqrt{\varpi}}\Big[(\Lambda(t) + i\,\varpi_l)a_{l,\nu}(0)e^{i[\overrightarrow{K_l}.\vec{r}-\varphi_l(t)]} + (\Lambda(t) -$$

$$i\,\varpi_l)a_{l,\nu}{}^{+}(0)e^{-i[\overrightarrow{K_l}.\vec{r}-\varphi_l(t)]}\Big] \qquad \text{(IV-11)}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V}}e^{-\int_0^t \Lambda(\acute{t})d\acute{t}} \sum_l \sum_{\nu=0}^{2} \frac{\overrightarrow{K_l}\wedge\widehat{\overrightarrow{\epsilon_{l,\nu}}}}{\sqrt{\varpi}}[a_{l,\nu}(0)e^{i[\overrightarrow{K_l}.\vec{r}-\varphi_l(t)]} + a_{l,\nu}{}^{+}(0)e^{-i[\overrightarrow{K_l}.\vec{r}-\varphi_l(t)]} \quad \text{(IV-12)}$$

Les propriétés du milieu deviennent manifestes par le facteur $\varpi_l{}^{-1/2}e^{-\int_0^t \Lambda(\acute{t})d\acute{t}}$ et son caractère géométrique par le facteur de phase $e^{-i\int_0^t(\dot{\varphi}_l^G)d\acute{t}}$. La présence du terme exponentielle $e^{-\int_0^t \Lambda(\acute{t})d\acute{t}}$ montre que les amplitudes des champs électriques et magnétiques diminuent dans le temps en fonction de la conductivité.

II. Quantification du champ électromagnétique :

l'approche simpliste pour quantifier le champ électromagnétique consiste à remplacer simplement les variables normales $a_{l,\nu}(0)$ et $a_{l,\nu}{}^{+}(0)$ par des opérateurs d'annihilation $\hat{a}_{l,\nu}(0)$ et de création $\hat{a}_{l,\nu}{}^{+}(0)$.

Le champ électromagnétique sera décrit dans la suite par le potentiel vecteur, que l'on peut écrire

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V}}e^{-\int_0^t \Lambda(\acute{t})d\acute{t}} \times \sum_l \sum_{\nu=0}^{2} \frac{\widehat{\overrightarrow{\epsilon_{l,\nu}}}}{\sqrt{\varpi}}[\hat{a}_{l,\nu}(0)e^{i[\overrightarrow{K_l}.\vec{r}-\varphi_l(t)]} + \hat{a}_{l,\nu}{}^{+}(0)e^{-i[\overrightarrow{K_l}.\vec{r}-\varphi_l(t)]} \quad \text{(IV-13)}$$

ce qui donne pour les champs $\vec{D}$ et $\vec{B}$

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V}}e^{-\int_0^t \Lambda(\acute{t})d\acute{t}} \sum_l \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\widehat{\overrightarrow{\epsilon_{l,\nu}}}}{\sqrt{\varpi}}\Big[(\Lambda(t) + i\,\varpi_l)\hat{a}_{l,\nu}(0)e^{i[\overrightarrow{K_l}.\vec{r}-\varphi_l(t)]} + (\Lambda(t) - i\,\varpi_l)\hat{a}_{l,\nu}{}^{+}(0)e^{-i[\overrightarrow{K_l}.\vec{r}-\varphi_l(t]}\Big], \quad \text{(IV-14)}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V}}e^{-\int_0^t \Lambda(\acute{t})d\acute{t}} \sum_l \sum_{\nu=0}^{2} \frac{\overrightarrow{K_l}\wedge\widehat{\overrightarrow{\epsilon_{l,\nu}}}}{\sqrt{\varpi}}[\hat{a}_{l,\nu}(0)e^{i[\overrightarrow{K_l}.\vec{r}-\varphi_l(t)]} + \hat{a}_{l,\nu}{}^{+}(0)e^{-i[\overrightarrow{K_l}.\vec{r}-\varphi_l(t)]} \quad \text{(IV-15)}$$

La quantification du champ électromagnétique obtenue dans l'approximation adiabatique ou non adiabatique conduit à relier l'angle géométrique classique de Hannay à la phase géométrique quantique de Berry. Cependant cette relation entre angle géométrique classique et la phase géométrique quantique de Berry soulève une question importante : la mise en évidence expérimentale de la phase géométrique en optique guidée [53] qui décrit la rotation du plan de polarisation du champ électromagnétique lors de sa propagation dans une fibre optique. Ce résultat expérimental concerne plutôt la mise en évidence expérimentale de l'angle de Hannay, c'est-à-dire l'effet quantique est une conséquence de l'effet classique

$$\varphi_l^B(t) = -\varphi_l^H(t) \quad \text{(IV-16)}$$

Nous venons d'établir la relation entre l'angle géométrique classique (angle de Hannay) et la phase géométrique quantique (phase de Berry), cette dernière nécessite un bref rappel.

III. Phase de Berry :

La phase de Berry est une phase quantique qui se manifeste dans l'étude de systèmes quantiques en évolution adiabatique qui dépendent d'un certain nombre de paramètres classiques. Cette phase est reliée à de nombreux phénomènes physiques comme l'effet Aharonov-Bohm [61] par exemple. Depuis, elle a été mise en évidence de nombreuses fois, notamment dans des expériences de physique nucléaire. L'approche utilisée sera légèrement différente de l'originale proposée pas M.V. Berry [25] qui introduit l'hypothèse adiabatique dès le départ. Ici elle est introduite à la fin des calculs afin de voir la signification physique du mot adiabatique [59].

Soit un Hamiltonien $H(\vec{X})$ qui dépend de n paramètres classiques $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X)$. Supposons que ces paramètres dépendent adiabatiquement du temps t. Il s'agit en quelque sorte d'une famille d'Hamiltoniens. L'équation de Schrödinger s'écrit dans ce cas

$$H\left(\vec{X}(t)\right)|\varphi(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\varphi(t)\rangle \tag{IV-17}$$

Les états propres (choisis orthonormés) de $H\left(\vec{X}(t)\right)$ sont des états propres instantanés au sens où ils ne sont états propres qu'en un temps t donné

$$H\left(\vec{X}(t)\right)|m,\vec{X}(t)\rangle = E_n\left(\vec{X}(t)\right)|m,\vec{X}(t)\rangle \tag{IV-18}$$

La solution de l'équation de Schrödinger (IV-17) peut être écrite dans la base de ces états propres car ils constituent une base de l'espace de Hilbert à chaque instant

$$|\varphi(t)\rangle = \sum_m a_m(t) e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' E_m\left(\vec{X}(t')\right)}|m,\vec{X}(t)\rangle \tag{IV-19}$$

où $E_m\left(\vec{X}(t')\right)$ est la phase dynamique habituelle (celle qui est présente lorsque l'Hamiltonien ne dépend pas du temps). Le tout est de trouver les coefficients $a_m(t)$. Pour cela, on injecte (IV-19) dans l'équation (IV-17) en utilisant (IV-18), on projette l'équation obtenue sur l'état propre $\langle n, \vec{X}(t)|$ on obtient ainsi une équation différentielle pour $a_n(t)$

$$\dot{a}_n(t) = -a_n(t)\langle n,\vec{X}(t)|\frac{\partial}{\partial t}|n,\vec{X}(t)\rangle -$$

$$\sum_{m\neq n} a_m(t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'[E_m(t')-E_n(t')]}\frac{\langle n,\vec{X}(t)|\frac{\partial}{\partial t}H\left(\vec{X}(t)\right)|m,\vec{X}(t)\rangle}{E_m\left(\vec{X}(t)\right)-E_n\left(\vec{X}(t)\right)} \tag{IV-20}$$

L'hypothèse adiabatique consiste à poser

$$A_{nm}\left(\vec{X}(t)\right) \equiv \langle n, \vec{X}(t)| \frac{\partial}{\partial t} |m,\vec{X}(t)\rangle = 0, \;\; m \neq n \qquad \text{(IV-21)}$$

donc le deuxième terme dans l'équation (IV-20) disparait et la solution s'écrit

$$a_n(t) = e^{i\gamma_n(t)} \qquad \text{(IV-22)}$$

où

$$\gamma_n(t) = i\int_0^t dt'\, A_n(\vec{X}(t') \qquad \text{(IV-23)}$$

avec

$$A_{nn} \equiv A_n = \langle n, \vec{X}(t)| \frac{d}{dt} |n,\vec{X}(t)\rangle \qquad \text{(IV-24)}$$

Physiquement, l'hypothèse adiabatique signifie que le taux (la vitesse) de transition entre états propres est petit par rapport à la fréquence de Bohr $f_{mn} = (E_m - E_n)/2\pi\hbar$ pour la transition $n \longrightarrow m$. Autrement dit, les transitions entre états propres différents sont donc infiniment lentes et n'ont en fait pas lieu. Si le système se trouve initialement dans le $n^{\text{ème}}$ état propre, il y restera toujours. On a implicitement supposé que le spectre était non-dégénéré en tout temps.

Géométriquement, cela signifie que l'état propre $|n,\vec{X}(t)\rangle$ subit un transport parallèle dans l'espace des paramètres : lorsque les paramètres $\vec{X}$ varient au cours du temps, l'état du système change mais n'acquiert jamais de composante suivant les états de valeur propre$E_{m\neq n}(\vec{X}(t))$.

Malgré le fait que $\vec{X}(T) = \vec{X}(0)$, la phase de Berry n'est pas obligatoirement nulle, sa valeur dépend du chemin C fermé parcouru dans l'espace des paramètres. Ceci marque le caractère non-intégrable de la phase de Berry et va conduire à son interprétation en termes d'holonomie.

$$\gamma_n(C) = i\int_{\vec{X}(0)}^{\vec{X}(T)} \langle n, \vec{X}(t)|\vec{\nabla}_{\vec{X}}|n,\vec{X}(t)\rangle \cdot d\vec{X} \qquad \text{(IV-25)}$$

C'est en ce sens que la phase de Berry $\gamma_n(C)$ est d'origine purement géométrique par opposition à la phase dynamique $\delta_n(T)$

$$|\varphi(C)\rangle = \exp\left(i\gamma_n(C) + i\delta_n(T)\right) |n,\vec{X}(T)\rangle = \exp(i\gamma_n(C) + i\delta_n(T))|n,\vec{X}(0)\rangle \qquad \text{(IV-26)}$$

où on a utilisé le fait que l'état propre $|n,\vec{X}\rangle$ est une fonction monovaluée de $\vec{X}$.

La phase de Berry peut être interprétée comme un flux magnétique dans l'espace des paramètres. Pour le voir, il faut exprimer la phase de Berry comme une intégrale sur une surface S de la courbure au lieu d'une intégrale curviligne sur C de la connexion

$$\gamma_n(C) = i \oint_C \vec{A}_n(\vec{X}) \cdot d\vec{X} \tag{IV-27}$$

ceci se fait au moyen du théorème de Stokes.

IV. <u>Les relations de commutations entre champs :</u>

Les relations de commutation entre les deux ensembles des opérateurs de champs (IV-13), (IV-14) et (IV-15) ont été calculées dans [62] en utilisant la méthode des invariants. En outre, les équations du mouvement de Heisenberg pour opérateurs de champs du mouvement conduisent aux équations de Maxwell [62]. Dans le cas adiabatique, il est intéressant d'utiliser les relations de commutation entre les opérateurs de création et les opérateurs d'annihilation,

$$\left[\widehat{a_l}(t), \widehat{a_{l'}}^{+}(t)\right] = \delta_{ll'} \tag{IV-28}$$

pour trouver les relations de commutation à temps égaux pour les observables physiques $\vec{D}$ et $\vec{H}$. Commençons par calculer le commutateur,

$$\left[D_i(\vec{r}_1,t), A_j(\vec{r}_2,t)\right] = \frac{i\hbar e^{-2\int_0^t \Lambda(\acute{t})d\acute{t}}}{2\varepsilon(t)V} \sum_l \sum_{\nu=1}^{2} \left(\widehat{\overrightarrow{\epsilon_{l,\nu}}}\right)_i \cdot \left(\widehat{\overrightarrow{\epsilon_{l,\nu}}}\right)_j \left(e^{i\left[\overrightarrow{K_l}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right]} + e^{-i\left[\overrightarrow{K_l}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right]}\right) \tag{IV-29}$$

Si $V \rightarrow \infty$, les sommes dans l'équation (IV-29) peuvent être remplacées par les intégrales

$$\frac{1}{V}\sum_l \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k \tag{IV-30}$$

En utilisant les propriétés des cosinus directeurs

$$\sum_{\upsilon=1}^{2}\left(\widehat{\overrightarrow{\epsilon_{l,\nu}}}\right)_i \cdot \left(\widehat{\overrightarrow{\epsilon_{l,\nu}}}\right)_j + \frac{(\overrightarrow{K_l})_i(\overrightarrow{K_l})_j}{K_l^2} = \delta_{ij} \tag{IV-31}$$

et des deux identités suivantes [62]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(k)(sin\left[\vec{k}\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1) - \left(\varphi(k,t_2)-\varphi(k,t_1)\right)\right]d^3k =$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(k)e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}\sin(\varphi(k,t_2)-\varphi(k,t_1))d^3k \tag{IV-32}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(k)(cos[\vec{k}\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)-(\varphi(k,t_2)-\varphi(k,t_1))]d^3k =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(k)e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}\cos(\varphi(k,t_2)-\varphi(k,t_1))d^3k \qquad \text{(IV-33)}$$

on obtient

$$[D_i(\vec{r}_1,t),A_j(\vec{r}_2,t)] = \frac{i\hbar}{\varepsilon(t)(2\pi)^3}e^{-2\int_0^t \Lambda(\acute{t})d\acute{t}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}d^3\,k =$$
$$\frac{i\hbar}{\varepsilon(t)}e^{-2\int_0^t \Lambda(\acute{t})d\acute{t}}\delta_{ij}^T(\vec{r}_2-\vec{r}_1) \qquad \text{(IV-34)}$$

où $\delta_{ij}^T(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$ est la fonction δ–transversale. Tenant compte de la relation

$$(\widehat{\overrightarrow{\epsilon_{l,\nu}}})_i\cdot(\overrightarrow{k_l}\times\widehat{\overrightarrow{\epsilon_{l,\nu}}})_j = \varepsilon_{jrs}(\overrightarrow{k_l})_s(\widehat{\overrightarrow{\epsilon_{l,\nu}}})_i(\widehat{\overrightarrow{\epsilon_{l,\nu}}})_s \qquad \text{(IV-35)}$$

et de (IV-31), il n'est pas difficile de vérifier que la relation de commutation entre $D_i(\vec{r}_1,t)\ et\ B_j(\vec{r}_2,t)$ donne

$$[D_i(\vec{r}_1,t),B_j(\vec{r}_2,t)] = \frac{i\hbar}{\varepsilon(t)}e^{-2\int_0^t \Lambda(\acute{t})d\acute{t}}\varepsilon_{ijr}\left(\vec{\partial}_2\right)_r\delta(\vec{r}_2-\vec{r}_1) \qquad \text{(IV-36)}$$

avec ε_{ijr} le tenseur antisymétrique de Levi-Civita[1]. Il est également facile à montrer que les autres relations de commutations entre les différents opérateurs de champs à temps égaux sont nulles.

V. Renormalisation des champs :

Comme les champs s'amortissent au cours du temps, les équations de commutation (IV-34) et (IV-36) tendent vers zéro, ce qui implique que le principe d'incertitude n'est pas conservé. Le principe d'incertitude est toujours satisfait si on redéfinit les champs tels que

$$\vec{D}(\vec{r},t)\rightarrow\vec{D}(\vec{r},t)e^{2\int_0^t \Lambda(\acute{t})d\acute{t}} \qquad \text{(IV-37)}$$

Ce qui élimine ces difficultés. Il est facile de vérifier les équations du mouvement de Heisenberg pour les opérateurs champs « renormalisés » permettent d'obtenir les équations de Maxwell.

[1]Ici on a adopté la convention de sommation sur les indices répétés des composantes des vecteurs.

CH V - FLUCTUATION DU POINT ZERO

I. Introduction :

Une propriété remarquable des systèmes quantiques est leur énergie de point zéro. Cette dernière est l'énergie d'un système lorsque celui-ci se trouve dans son état fondamental, c'est-à-dire l'énergie la plus basse qu'il peut atteindre. Comme nous allons le voir les fluctuations de point zéro pour les champs électromagnétiques conduisent à des effets observables. Le vide correspond donc désormais à un état bien défini dans lequel le champ électromagnétique se trouve dans son état fondamental. Il faut alors prendre en compte l'effet de ces fluctuations de point zéro du champ et l'énergie qui y est associée.

Ce chapitre présente de manière rapide les calculs de l'article [60].

L'amplitude temporelle $Q_l(t)$ peut être aussi dérivée d'un Hamiltonien associé à un oscillateur amorti [42, 63, 64]

$$\widehat{H}_l\big(\widehat{P}_l,\widehat{Q_l},t\big) = e^{-\Lambda(t)}\frac{\widehat{P}_l^2}{2\varepsilon(0)} + \frac{1}{2}e^{\Lambda(t)}\varepsilon(0)\omega_l^2(t)\widehat{Q_l}^2 \qquad \text{(V-1)}$$

avec $\Lambda(t) = \int_0^t \frac{\sigma(s)+\dot{\epsilon}(s)}{\epsilon(s)}ds$, unitairement équivalent à l'Hamiltonien de l'oscillateur généralisé.

On suppose dans ce cas

$$Q_l(t) = M_l(t)\big[C_+\exp\big(i\gamma_l(t)\big) + C_-\exp\big(-i\gamma_l(t)\big)\big] \qquad \text{(V-2)}$$

où C_+ et C_- sont des constantes et $M_l(t)$ et $\gamma_l(t)$ des fonctions réelles du temps.

Ce système admet un opérateur invariant [11]

$$\widehat{I}_l\big(\widehat{P}_l,\widehat{Q_l},t\big) = \hbar\Omega_l\big(\,\widehat{a}_l^{\,+}\widehat{a}_l + \tfrac{1}{2}\big) \qquad \text{(V-3)}$$

où les Ω_l sont données par

$$\Omega_l = \frac{M_l^2(t)}{M_l^2(0)}e^{\Lambda(t)}\dot{\gamma}_l(t) \qquad \text{(V-4)}$$

L'opérateur d'annihilation $\widehat{a}_l(t)$ est donné par

$$\widehat{a}_l(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\widehat{X}_l + i\widehat{Y}_l\big) \qquad \text{(V-5)}$$

où

$$\widehat{X_l} = \sqrt{\frac{\varepsilon(0)\dot{\gamma}_l(t)}{\hbar}}\, e^{\frac{\Lambda(t)}{2}} \widehat{Q_l} \qquad \text{(V-6)}$$

$$\widehat{Y_l} = \frac{1}{\sqrt{\hbar\varepsilon(0)\dot{\gamma}_l(t)}}\left[e^{-\frac{\Lambda(t)}{2}}\widehat{P_l} - \varepsilon(0)\frac{\dot{M}_l(t)}{M_l(t)} e^{\frac{\Lambda(t)}{2}}\widehat{Q_l}\right] \qquad \text{(V-7)}$$

et l'opérateur de création est donné

$$\hat{a}_l^{+}(\mathrm{t}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{X_l} - i\widehat{Y_l}\right) \qquad \text{(V-8)}$$

On note que ces opérateurs satisfont les relations conventionnelles de commutation

$$\left[\hat{a}_l(t), \hat{a}_{l'}^{+}(\mathrm{t})\right] = \delta_{ll'} \qquad \text{(V-9)}$$

l'état propre de l'opérateur invariant est $|\ldots, n_{l\nu}, \ldots\rangle$.

II. Fluctuation des champs au point zéro :

L'existence des fluctuations irréductibles de champ au point zéro est l'une des prédictions importantes de la théorie quantique. Parmi les conséquences observables de ces fluctuations, on peut citer l'effet de Casimir, qui est maintenant mesuré avec une bonne précision dans le vide. Dans la suite, on va étudier les fluctuations du champ (complet) qui peuvent être obtenus par la sommation non seulement sur tous les modes possibles, mais également sur les deux polarisations possibles pour chaque mode. Bien qu'on ait négligé les polarisations des champs jusqu'à présent, il peut être nécessaire de les considérer afin de discuter les fluctuations du champ à ce stade. On dénote les deux vecteurs d'unité dans les directions de la polarisation par $\hat{\vec{\varepsilon}}_{l\nu}$ $(\nu = 1{,}2)$.puis, les relations de commutation de boson deviennent

$$\left[\hat{a}_{l\nu}(t), \hat{a}_{l'\nu'}^{+}(\mathrm{t})\right] = \delta_{ll'}\delta_{\nu\nu'} \qquad \text{(V-10)}$$

la $j^{\text{ème}}$ composante du champ électromagnétique est donnée par [12, 65]

$$E_j(\vec{r}, t) = E_j^{(+)}(\vec{r}, t) + E_j^{(-)}(\vec{r}, t) \qquad \text{(V-11)}$$

tel que

$$E_j^{(+)}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon(0)V}}\, e^{-\Lambda(t)/2} \sum_l \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\left(\hat{\vec{\varepsilon}}_{l\nu}\right)_j}{\sqrt{\dot{\gamma}_l}}\left(i\dot{\gamma}_l - \frac{\dot{M}_l}{M_l}\right)\hat{a}_{l\nu}(\mathrm{t})\exp\left(i\vec{k_l}.\vec{r}\right) \qquad \text{(V-12)}$$

et

$$E_j^{(-)}(\vec{r}, t) = \left[E_j^{(+)}(\vec{r}, t)\right]^{+} \qquad \text{(V-13)}$$

De la même manière le champ magnétique peut s'écrire

$$B_j(\vec{r},t) = B_j^{(+)}(\vec{r},t) + B_j^{(-)}(\vec{r},t) \tag{V-14}$$

tel que

$$B_j^{(+)}(\vec{r},t) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon(0)V}}\, e^{-\Lambda(t)/2} \sum_l \sum_{\nu=1}^{2} \left(\overrightarrow{k_l} \times \hat{\vec{\varepsilon}}_{l\nu}\right)_j \hat{a}_{l\nu}(t) \exp\left(i\overrightarrow{k_l}.\vec{r}\right) \tag{V-15}$$

et

$$B_j^{(-)}(\vec{r},t) = \left[B_j^{(+)}(\vec{r},t)\right]^{+} \tag{V-16}$$

La valeur moyenne du champ électrique dans un état $|\ldots, n_{l\nu}, \ldots\rangle$ tel que

$$\hat{a}_{l\nu}|\ldots, n_{l\nu}, \ldots\rangle = \sqrt{n_{l\nu}}|\ldots, n_{l\nu} - 1, \ldots\rangle$$

est nulle

$$\langle E_j \rangle = 0 \tag{V-17}$$

De même, la valeur moyenne du champ magnétique est aussi nulle

$$\langle B_j \rangle = 0 \tag{V-18}$$

Maintenant, recalculons la valeur moyenne des champs au carré

$$E_j^2 = E_j^{(+)^2} + E_j^{(-)^2} + E_j^{(+)}E_j^{(-)} + E_j^{(-)}E_j^{(+)} \tag{V-19}$$

$$B_j^2 = B_j^{(+)^2} + B_j^{(-)^2} + B_j^{(+)}E_j^{(-)} + B_j^{(-)}B_j^{(+)} \tag{V-20}$$

dans l'état $|\ldots, n_{l\nu}, \ldots\rangle$ on obtient

$$\langle E_j^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{\hbar}{2\varepsilon(0)V} e^{-\Lambda(t)} \times \sum_l \sum_{\nu=1}^{2} \frac{1}{\dot{\gamma}_l}\left(\hat{\vec{\varepsilon}}_{l\nu}\right)_j^2 \left(\dot{\gamma}_l{}^2 + \frac{\dot{M}_l^2}{M_l^2}\right)(2n_{l\nu} + 1) \tag{V-21}$$

$$\langle B_j^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{\hbar}{2\varepsilon(0)V} e^{-\Lambda(t)} \times \sum_l \sum_{\nu=1}^{2} \frac{k_l^2}{\dot{\gamma}_l}\left(\hat{\vec{\varepsilon}}_{l\nu}\right)_j^2 (2n_{l\nu} + 1) \tag{V-22}$$

Il est clair que les moyennes des champs totaux $\vec{E}^2 = \sum_{j=1}^{3} E_j^2$et $\vec{B}^2 = \sum_{j=1}^{3} B_j^2$ sont données par

$$\langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\varepsilon(0)V} e^{-\Lambda(t)} \times \sum_l \sum_{\nu=1}^{2} \frac{1}{\dot{\gamma}_l}\left(\dot{\gamma}_l{}^2 + \frac{\dot{M}_l^2}{M_l^2}\right)(2n_{l\nu} + 1) \tag{V-23}$$

$$\langle \vec{B}^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\varepsilon(0)V} e^{-\Lambda(t)} \times \sum_l \sum_{\nu=1}^{2} \frac{k_l^2}{\dot{\gamma}_l}(2n_{l\nu} + 1) \tag{V-24}$$

où on a utilisé $\sum_{j=1}^{3}\left(\hat{\vec{\varepsilon}}_{l\nu}\right)_j^2 = 1$.

La valeur $n_{l\nu} = 0$ correspond au vide, les champs dans le vide sont tels que

$$\langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\varepsilon(0)V} e^{-\Lambda(t)} \times \sum_l \sum_{\nu=1}^{2} \frac{1}{\dot{\gamma}_l}\left(\dot{\gamma}_l{}^2 + \frac{\dot{M}_l^2}{M_l^2}\right) \tag{V-25}$$

$$\langle \vec{B}^2 \rangle = \frac{\varepsilon(t)\mu(t)\hbar}{2\varepsilon(0)V} e^{-\Lambda(t)} \times \sum_l \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\omega_l^2}{\dot{\gamma}_l} \tag{V-26}$$

Comme il y a une infinité de modes à l'intérieur d'une cavité, la fluctuation du champ de point zéro est infinie. Puisqu'on n'indique pas la manière de mesurer le champ électromagnétique, cette divergence peut ne pas être essentielle. D'un point de vue ingénierie, la largeur de la bande est finie de sorte qu'on ne puisse pas détecter la divergence de la fluctuation de point zéro [52]. On considère un électron qui interagit avec les fluctuations du point zéro comme un moyen de détection. Dans ce cas l'électron peut occuper un petit espace ΔV, et la mesure de celui-ci nécessite un petit intervalle de temps Δt. Ainsi, on doit calculer la valeur moyenne spatiotemporelle suivante de manière à acquérir un résultat physiquement significatif [52]

$$\overline{E}_j(\Delta V, \Delta t) \equiv \frac{1}{\Delta V \Delta t}\int_{\Delta V} dV \int_{\Delta t} dt E_j(\vec{r}, t) \tag{V-27}$$

La valeur moyenne de E_j^2 dans l'état du vide est

$$\left\langle 0 \middle| \left[\overline{E}_j(\Delta V, \Delta t)\right]^2 \middle| 0 \right\rangle = \frac{1}{(\Delta V)^2(\Delta t)^2}\int_{\Delta V} dV dV' \int_{\Delta t} dt dt' \times \left\langle 0 \middle| E_j(\vec{r}, t) E_j(\vec{r}', t') \middle| 0 \right\rangle \tag{V-28}$$

Rappelons que le vide est dépendant du temps. Remarquons que

$$\left\langle 0 \middle| E_j(\vec{r}, t) E_j(\vec{r}', t') \middle| 0 \right\rangle = \frac{\hbar e^{-\Lambda(t)}}{2\varepsilon(0)V} \sum_l \sum_{\nu=1}^{2} \frac{(\hat{\vec{\varepsilon}}_{l\nu})_j^2}{\dot{\gamma}_l}\left(\dot{\gamma}_l{}^2 + \frac{\dot{M}_l^2}{M_l^2}\right) exp\left[i\overrightarrow{k_l}.(\vec{r} - \vec{r}')\right]\left\langle 0 \middle| \hat{a}_{l\nu}(t)\hat{a}^{+}_{l'\nu'}(t') \middle| 0 \right\rangle \tag{V-29}$$

En sommant sur j, on obtient le champ total

$$\left\langle 0 \middle| \sum_j \left[\overline{E}_j(\Delta V, \Delta t)\right]^2 \middle| 0 \right\rangle = \frac{\hbar}{2(\Delta V)^2(\Delta t)^2\varepsilon(0)}\int_{\Delta V}\int_{\Delta t} dV dV' \, dt dt' e^{-[\Lambda(t)+\Lambda(t')]/2} \sum_l \frac{\left(\dot{\gamma}_l{}^2 + \frac{\dot{M}_l^2}{M_l^2}\right)}{V\dot{\gamma}_l} exp\left\{i\overrightarrow{k_l}.(\vec{r} - \vec{r}') - i[\gamma_l(t) - \gamma_l(t')]\right\} \tag{V-30}$$

où on a utilisé

$$\left\langle 0 \middle| \hat{a}_{l\nu}(t), \hat{a}^{+}_{l'\nu'}(t) \middle| 0 \right\rangle = e^{-i[\gamma_l(t) - \gamma_l(t')]} \tag{V-31}$$

Dans le cas d'un oscillateur harmonique caractérisé par : $\dot{\sigma}(t) = 0, \dot{\varepsilon}\,(t) = 0$ et $\dot{\mu}(t) = 0$ on aura

$$\gamma_l = \sqrt{\omega_l^2 - \frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2}}\, t \qquad \text{(V-32)}$$

$$M_l = \exp(-\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon} t) \qquad \text{(V-33)}$$

Ainsi, l'équation. (V-30) devient

$$\left\langle 0 \middle| \sum_j \left[\bar{E}_j(\Delta V, \Delta t)\right]^2 \middle| 0 \right\rangle = \frac{\hbar}{2(\Delta V)^2(\Delta t)^2\varepsilon} \int_{\Delta V}\int_{\Delta t} dV dV'\, dt dt' exp\left[-\frac{\sigma}{2\varepsilon}(t + t')\right] \sum_l \frac{\omega_l^2}{V\sqrt{\omega_l^2 - \sigma^2/(4\varepsilon^2)}} exp\left\{i\overrightarrow{k_l}.(\vec{r} - \vec{r}\,') - i\sqrt{\omega_l^2 - \sigma^2/(4\varepsilon^2)}\,(t - t')\right\} \qquad \text{(V-34)}$$

En intégrant maintenant par rapport à dt et dt' et changeant la somme sur l par l'intégral sur k on obtient

$$\left\langle 0 \middle| \sum_j \left[\bar{E}_j(\Delta V, \Delta t)\right]^2 \middle| 0 \right\rangle = \frac{\hbar}{8\Pi^3(\Delta V)^2(\Delta t)^2\varepsilon} \int_{\Delta V} dV dV' \times \int dk \frac{1}{\left[k^2c^2 - \sigma^2/_{(4\varepsilon^2)}\right]^{1/2}} exp\left[i\overrightarrow{k_l}.(\vec{r} - \vec{r}\,')\right] \times \left\{\cosh\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon}\Delta t\right) - cos\left[\sqrt{k^2c^2 - \sigma^2/(4\varepsilon^2)}\,\Delta t\right]\right\} exp\left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon}\Delta t\right) \qquad \text{(V-35)}$$

Dans ce calcul, on a utilisé

$$\frac{1}{V}\sum_l \xrightarrow{yields} \frac{1}{(2\Pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} dk = \frac{1}{(2\Pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dk_x\, dk_y dk_z \qquad \text{(V-36)}$$

De même les moyennes spatiotemporelles des champs magnétiques sont

$$\bar{B}_j(\Delta V, \Delta t) \equiv \frac{1}{\Delta V \Delta t}\int_{\Delta V} dV \int_{\Delta t} dt B_j(\vec{r}, t) \qquad \text{(V-37)}$$

La valeur de B_j^2 dans l'état du vide est

$$\left\langle 0 \middle| \left[\bar{B}_j(\Delta V, \Delta t)\right]^2 \middle| 0 \right\rangle = \frac{1}{(\Delta V)^2(\Delta t)^2}\int_{\Delta V} dV dV' \int_{\Delta t} dt dt' \times \left\langle 0 \middle| B_j(\vec{r}, t) B_j(\vec{r}\,', t') \middle| 0 \right\rangle \qquad \text{(V-38)}$$

avec

$$\left\langle 0 \middle| B_j(\vec{r}, t) B_j(\vec{r}\,', t') \middle| 0 \right\rangle = \frac{\hbar}{2\varepsilon(0)V} e^{-\Lambda(t)} \times \sum_l \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\left(\hat{\vec{\varepsilon}}_{l\nu}\right)_j^2}{\dot{\gamma}_l} k_l^2 \times exp\left[i\overrightarrow{k_l}.(\vec{r} - \vec{r}\,')\right] \left\langle 0 \middle| \hat{a}_{l\nu}(t), \hat{a}^{+}_{l'\nu'}(t') \middle| 0 \right\rangle \qquad \text{(V-39)}$$

En sommant sur j, l'équation (V-38) devient

$$\left\langle 0\left| \sum_j [\overline{B_j}(\Delta V,\Delta t)]^2 \right|0\right\rangle =$$

$$\frac{\hbar}{2(\Delta V)^2(\Delta t)^2\varepsilon(0)}\int_{\Delta V}\int_{\Delta t} dVdV'\,dtdt'e^{-[\Lambda(t)+\Lambda(t')]/2}\sum_l \frac{k_l^2}{V\dot{\gamma}_l} exp\{i\overrightarrow{k_l}.(\vec{r}-\vec{r}')-i[\gamma_l(t)-\gamma_l(t')]\}$$

(V-40)

Dans la limite d'un oscillateur harmonique caractérisé par $\dot{\sigma}(t)=0, \dot{\varepsilon}\,(t)=0$ et $\dot{\mu}(t)=0$, cette formule peut être réécrite comme

$$\left\langle 0\left|[\overline{B_j}(\Delta V,\Delta t)]^2\right|0\right\rangle = \frac{\hbar}{2(\Delta V)^2(\Delta t)^2\varepsilon}\int_{\Delta V}\int_{\Delta t} dVdV'\,exp\left[-\frac{\sigma}{2\varepsilon}(t+t')\right]\sum_l \frac{k_l^2}{V\sqrt{\omega_l^2-\sigma^2/(4\varepsilon^2)}} exp\left\{i\overrightarrow{k_l}.(\vec{r}-\vec{r}')-i\sqrt{\omega_l^2-\sigma^2/(4\varepsilon^2)}\,(t-t')\right\} \quad \text{(V-41)}$$

En effectuant les intégrales sur dt et dt', et en changeant la somme sur $l$par l'intégrale sur k,on obtient :

$$\left\langle 0\left|[\overline{B_j}(\Delta V,\Delta t)]^2\right|0\right\rangle = \frac{\hbar}{8\Pi^3(\Delta V)^2(\Delta t)^2\varepsilon c^2}\int_{\Delta V} dVdV' \times \int dk \frac{1}{\left[k^2c^2-\sigma^2/_{(4\varepsilon^2)}\right]^{1/2}} exp[i\overrightarrow{k_l}.(\vec{r}-\vec{r}')]\left\{\cosh\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon}\Delta t\right)-cos\left[\sqrt{\omega_l^2-\sigma^2/(4\varepsilon^2)}\,\Delta t\right]\right\} exp\left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon}\Delta t\right) \quad \text{(V-42)}$$

Si on compare les (V-35) et (V-42), on trouve une relation simple entre les fluctuations des champs électrique et magnétique

$$\left\langle 0\left| \sum_j [\overline{E_j}(\Delta V,\Delta t)]^2 \right|0\right\rangle = c^2\left\langle 0\left| \sum_j [\overline{B_j}(\Delta V,\Delta t)]^2 \right|0\right\rangle \quad \text{(V-43)}$$

pour ΔV et Δt finis. Cependant ils deviennent infinis quand ΔV et Δt approchent le zéro.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. O. Scully and M. S. Zubairy, Quantum Optics (Cambridge University Press, New York) 1997.

[2] D. F. Walls and G. J. Milburn, Quantum Optics (Springer, Berlin) 1995.

[3] P. Meystre and M. Sargent, Elements of Quantum Optics (Springer-Verlag, Berlin) 1991.

[4] L. Mandel and E. Wolf, Optical Coherence and Quantum Optics (Cambridge University Press, Cambridge) 1995.

[5] J. R. Choi, Chin. J. Phys. **41**, 257 (2003).

[6] A. L. De Lima, A. Rosas and I. A. Pedrosa, J. Phys. B **41**, 115503 (2008).

[7] J. R. Choi, J. Opt. B **5**, 409 (2003).

[8] J. R. Choi, Int. J. Theor. Phys. **43**, 2113 (2004).

[9] J. R. Choi, Int. J. Mod. Phys. B **18**, 317 (2004).

[10] I. A. Pedrosa and A. Rosas, Phys. Rev. Lett. **103**, 010402 (2009).

[11] J. R. Choi, J. Phys. B **39**, 669 (2006).

[12] J. R. Choi and K. H. Yeon, Int. J. Mod. Phys. B **19**, 2213 (2005).

[13] R. Matloob, R. Loudon, M. Artoni, S. M. Barnett and J. Jeffers, Phys. Rev. A **55**, 1623 (1997).

[14] Y. Zhang and B.-Q. Gao, Chinese Phys. Lett. **22**, 446 (2005).

[15] L. B. Felsen and G. M. Whitman, IEEE Trans. Ant. Propag. **18**, 242 (1970).

[16] V. V. Dodonov and A. V. Dodonov, J. Phys.: Conf. Ser. **99**, 012006 (2008).

[17] V. V. Dodonov and A. V. Dodonov, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **39**, S749 (2006).

[18] S. Kozaki, Electron. Lett. **14**, 826 (1978).

[19] M. Crocce, D. A. R. Dalvit, F. C. Lombardo and F. D. Mazzitelli, Phys. Rev. A **70**, 033811 (2004).

[20] A. L. de Lima, A. Rosas and I. A. Pedrosa, J. Mod. Optic. **56**, 41 (2009).

[21] V. V. Dodonov and A. V. Dodonov, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 6271 (2006).

[22] S. M. Rezende and F. R. Morgenthaler, J. Appl. Phys. **40**, 524 (1969).

[23] F. R. Morgenthaler, IRE Trans. Microwave Theory Tech. **6**, 167 (1958).

[24] S. Kozaki, Electron. Lett. **14**, 826 (1978).

[25] M. V. Berry, Proc. R. Soc. London, Ser. A **392**, 45 (1984).

[28] J. H. Hannay, J. Phys. A **18**, 221 (1985).

[29] G. Ghosh and B. Dutta-Roy, Phys. Rev. D **37**, 1709 (1988).

[30] O. V. Usatenko, J-P. Provost and G. Vallée, J. Phys. A **29**, 2607 (1996).

[31] M. Maamache, J-P. Provost and G. Vallée, Phys. Rev. A **59**, 1777 (1999).

[33] M. V. Berry, J. Phys. A **18**, 15 (1985).
[34] J. A. Jones, V. Vedral, A. Ekert and G. Castagnoli, Nature (London) **403**, 869 (2000).
[35] L. M. Duan, J. I. Cirac and P. Zoller, Science **292**, 94 (1999).
[36] H. R. Lewis, Jr., Phys. Rev. Lett. **18**, 510 (1967).
[37] H. R. Lewis, Jr. and W. B. R. Riesenfeld, J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).
[38] V. V. Dodonov, I. A. Malkin and V. I. Man'ko, Physica **59**, 241 (1972).
[39] D. A. Trifonov, J. Opt. Soc. Am. A **17**, 2486 (2000).
[40] M. Maamache, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 2833 (1996).
[41] J. R. Choi, Int. J. Mod. Phys. D **16**, 1119 (2007).
[42] I. A. Pedrosa and A. Rosas, Phys. Rev. Lett. **103**, 010402 (2009).
[43] A. L. De Lima, A. Rosas and I. A. Pedrosa, J. Mod. Opt. **56**, 59 (2009).
[44] A. L. De Lima, A. Rosas and I. A. Pedrosa, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **41**, 115503 (2008).
[45] M. Planck, Vorlesungen ¨uber die Theorie der W¨armestrahlung, 5. Aufl. (J. A. Barth, Leipzig, 1923), p. 136.
[46] P. W. Milonni, The Quantum Vacuum-An Introduction to Quantum Electrodynamics (Academic Press, Boston, 1994).
[47] B. G. Sidharth In: S. C. Lim, R. Abd-Shukor and K. H. Kwek, Editors, Frontiers of Quantum Physics (Springer Verlag, Singapore, 1998).
[48] B. G. Sidharth, Int. J. Theor. Phys. **37**, 1307 (1998).
[49] B. G. Sidharth, Chaos, Solitons, & Fractals **16**, 613 (2003).
[50] M. Cirone, K. Rzazewski and J. Mostowski, Phys. Rev. A **55**, 62 (1997).
[51] M. A. Cirone and K. Rz¸a˙zewski, Phys. Rev. A **60**, 886 (1999).
[52] W. H. Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation (John Wiley & Sons, New York, 1973), Chap. 4.
[53] A. Tomita et R. Y. Chiao, Phys. Rev. Lett. **57**, 936 (1986).
[54] M. Maamache, Phase de Berry, angle de Hannay et états cohérents action-angle, thèse de doctorat d'état présentée le 20/03/1994 à l'université de Sétif, Algérie.
[55] H. Goldstein – Classical Mechanics – Addison-Wesley (1980).
[56] M. V. Berry and J. H. Hannay, J. Phys. A. **21**, L325 (1988).
[57] A. Bhattacharjee and T. Sen, Phys. Rev. A **38**, 4389 (1988).
[58] M. Maamache *et al.* EPL **89**, 40009 (2010).
[59] W. Dittrich et M. Reuter, Classical and Quantum Dynamics. From classical Paths to Paths Integrals, Springer Verlag.
[60] J. R. Choi *et al*. J. Kor. Phys. Soc. **56** (3), 775-781 (2010).
[61] Y. Aharonov, and D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 4859 (1959).
[62] J. R. Choi and J-Y. Oh, Int. J. Mod. Phys. B **22**, 267 (2008).
[63] J. R. Choi and M. Maamache, PIERS Online **6**, 113 (2010).
[64] J. R. Choi, Chinese Phys. B **19**, 010306 (2010).
[65] J. R. Choi and J-Y. Oh, Int. J. Mod. Phys. B **22**, 267 (2008).

A LETTERS JOURNAL EXPLORING
THE FRONTIERS OF PHYSICS

February 2010

EPL, **89** (2010) 40009
doi: 10.1209/0295-5075/89/40009

www.epljournal.org

Geometric phase of quantized electromagnetic field in time-dependent linear media

M. MAAMACHE[1], N. CHAABI[1] and J. R. CHOI[2(a)]

[1] *Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques, Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas de Sétif - Sétif 19000, Algeria*
[2] *School of Electrical Engineering Computer Science, Kyungpook National University Daegu 702-701, Republic of Korea*

received 30 August 2009; accepted in final form 4 February 2010
published online 5 March 2010

PACS 03.65.Vf – Phases: geometric; dynamic or topological
PACS 41.20.Jb – Electromagnetic wave propagation; radiowave propagation
PACS 42.25.Dd – Wave propagation in random media

Abstract – In the Coulomb gauge, the solution to the Maxwell equations for slowly time-varying homogeneous nondispersive conducting linear media without charge source is obtained. We show that the electromagnetic field acquires the extra geometrical Hannay angle associated to the time-dependent generalized harmonic oscillator. The quantization scheme for the electromagnetic field provides a connection between the classical Hannay angle and the quantum adiabatic Berry phase shifts. We confirm that the interference pattern in the optical system is more or less altered by the existence of the geometric phase.

The foundation of the quantum theory of radiation, due principally to Dirac, is the quantization of Maxwell's equations in a vacuum wherein each mode of the radiation field is associated with a quantized simple harmonic oscillator [1]. Following the initial quantization of the electromagnetic field in a vacuum, it was natural to extend the quantization procedure to the electromagnetic field in a dielectric. The quantum electrodynamics in empty space and in the presence of dielectrics have long been developed and various concepts connected to their fundamental quantum effects are reported [2].

There exist accepted approaches to the quantization of the light field in quantum optics [3,4]. The quantization is done for the field confined in a box and the field propagating under periodic boundary conditions. The fields are expanded into complete quantized modes. The expansion however may be simplified to a single quantized mode, when it does not affect the whole treatment. In the large-L limit where L is the side of a sector, the quantization of a continuum mode is obtained. Genuine modes then go beyond such quantized modes and, as a consequence, all successive frequency modes can be allowed.

Recently, it has turned out in quantum optics that the rigorous quantization can be achieved even for the light propagating in conducting linear media [5]. This triggered a renewed interest in the quantization scheme for dissipative light [6–9]. The behavior of black-body radiation that suffers dissipation in the presence of nontrivial conductivity in media is investigated by making use of the density operator [9].

Thanks to the technical development of the quantization procedure, the underlying ideas mentioned above may be satisfactorily extended to a more complicated case, the so-called quantization of light in time-dependent linear media [10–12]. When the parameters of the materials, such as electric permittivity, magnetic permeability, and conductivity vary explicitly with time, the materials are classified as the time-dependent media of light. Magnetoelastic delay lines [13], modulation of microwave power [14], and wave propagation in ionized plasmas [15] are among various possible fields tied to time dependent media in optics. Pedrosa and Rosas [10] studied the properties of the quantized radiation field in time-dependent conducting linear media and showed that the time dependence of permittivity gives rise to an attenuation of the electromagnetic fields.

Since Berry's seminal paper [16] on the extra quantum geometric phase associated with the adiabatic evolution

(a) E-mail: choiardor@hanmail.net (corresponding author)

of a physical system, there has been a flurry of research activities on the calibration of this phase and its related topics [17]. Indeed, the rich and elegant formalism of holonomy and connection lends itself naturally to the mathematical formulation of the phenomenon [18]. It was observed that when the dynamical phase is removed, the evolution of the system is simply a parallel transport of the phase. The acquisition of a geometric phase in an adiabatic evolution is not confined to quantum phenomena. The classical analog exists and is sometimes referred to as the Hannay angle [19]. Hannay's angle or geometric phase has long been studied for the generalized harmonic oscillator [20–22]. This oscillator provides an ideal system for the study of the dynamics of Gaussian wave packets which has been applied to many problems in atomic and molecular physics as well as in quantum optics [23]. In another interesting paper [24], Berry established a semiclassical relation between the quantum and the classical geometric phases in an adiabatic evolution. A most important application of the geometric-phase in modern technology is quantum computation that can be fulfilled by geometric phase gates. A series of accurately controllable quantum gates in quantum computer executes quantum computation by means of geometric operations. The concept of quantum computation was developed on the basis of quantum information theory and now has become fruitful for both physics and mathematics. Several competitive schemes for adiabatic geometric quantum computation are nuclear magnetic resonance [25], cavity quantum electrodynamical setup [26], trapped ions [27], and superconducting nanocircuits [28]. A merit of geometric operations of quantum gates, based on adiabatic passages, is that it is fault tolerant since it depends only on the global feature of the path executed [28].

Stimulated by the recent works [5–7,10,11] on the quantized radiation field in time-dependent conducting linear media, we examine in the present letter the geometric character of the quantized electromagnetic field in time-dependent linear media. To begin with, let us recall the Maxwell's equations for the electromagnetic field in homogeneous conducting linear media with time-dependent parameters in the absence of charge sources:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D}=0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}=\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}+\mathbf{J}. \tag{2}$$

The fields and current density in time-dependent linear media satisfy $\mathbf{D}=\varepsilon(t)\mathbf{E}$, $\mathbf{B}=\mu(t)\mathbf{H}$, and $\mathbf{J}=\sigma(t)\mathbf{E}$, where $\varepsilon(t)$, $\mu(t)$, and $\sigma(t)$ are heuristically introduced as a slowly time-varying electric permittivity, magnetic permeability, and conductivity, respectively. Though the electric permittivity and the magnetic permeability are complex in general, our discussion in this letter will be restricted to real parameters. In the Coulomb gauge, both the electric field $\mathbf{E}$ and the magnetic field $\mathbf{B}$ are determined from the vector potential $\mathbf{A}$ as

$$\mathbf{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}. \tag{3}$$

It is worth mentioning that in the Coulomb gauge, the vector potential is purely transverse [2]. Therefore, it is easy to verify that it obeys the damped wave equation

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A}-\mu(\dot{\varepsilon}+\sigma)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}=0. \tag{4}$$

Using the well-known technique of separation of variables, we write the vector potential in terms of the mode $\mathbf{u}_l(\mathbf{r})$ and amplitude $e^{-\int_0^t\Lambda(t')\,\mathrm{d}t'}\ q_l(t)$ functions of each mode as [11]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\sum_l\mathbf{u}_l(\mathbf{r})e^{-\int_0^t\Lambda(t')\,\mathrm{d}t'}q_l(t), \tag{5}$$

where $\Lambda(t)=\frac{\sigma(t)}{2\varepsilon(t)}$.

Note that the transformation $q_l(t)\to e^{-\int_0^t\Lambda(t')\,\mathrm{d}t'}q_l(t)$ is canonical since it gives a bridge between the generalized harmonic oscillator and the damped harmonic one [21,22]. The substitution of eq. (5) into the damped wave equation (4) leads to

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u}_l(\mathbf{r})+\frac{\omega_l^2}{c_0^2}\mathbf{u}_l(\mathbf{r})=0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}q_l(t)+\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}q_l(t)+\left[\Omega_l^2(t)-\Lambda^2-\frac{\dot{\sigma}}{2\varepsilon}\right]q_l(t)=0, \tag{7}$$

where c_0 is the velocity of light at $t=0$, ω_l is a separation constant, and $\Omega_l(t)$ is the time-dependent natural frequency. Note that the velocity and the natural frequency of light are given by $c(t)=[\mu(t)\varepsilon(t)]^{-1/2}$ and $\Omega_l(t)=c(t)\omega_l/c_0$, respectively. In addition, one can easily see that $\Omega_l(0)=\omega_l$. The equations of motion for the amplitudes $q_l(t)$ can be directly obtained from the classical generalized harmonic-oscillator Hamiltonian

$$H_l(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{p_l^2}{\varepsilon}+2\Lambda p_l q_l+\varepsilon\Omega_l^2q_l^2\right], \tag{8}$$

where q_l and p_l are canonical conjugate variables. The time-dependent electric permittivity plays the role of the time-dependent mass for a mechanical oscillator. For dielectric materials ($\sigma(t)=0$), the Hamiltonian (8) becomes that of the harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency [29]. For this case, a nonadiabatic Berry phase can be found in ref. [30]. The total Hamiltonian of the electromagnetic field is a sum of individual Hamiltonians corresponding to each mode, that is, $H=\sum_l H_l$. From eqs. (3), (5), and (8), we readily have the electric field such that

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\sum_l\mathbf{u}_l(\mathbf{r})\mathbf{e}^{-\int_0^t\Lambda(t')\,\mathrm{d}t'}p_l(t). \tag{9}$$

In what follows, we will use the equation of motion for the mode functions, eq. (4), and the Hamiltonians, eq. (8), to obtain a quantum description of the electromagnetic field. Let us first focus on eq. (4). The position function in eq. (6) is entirely dependent on particular boundary conditions. For the fields confined in a rectangular cube with side L, the polarization mode for the x-direction is given by $\mathbf{u}_{l,l'}(\mathbf{r}) = (2/L^{3/2})\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_x \sin(l\pi y/L)\sin(l'\pi z/L)$, where $l, l' = 1, 2, 3, \ldots$, and $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_x$ is the unit vector in the x-direction. On the other hand, for the field propagating under a periodic boundary condition, it yields $\mathbf{u}_{l\nu}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{l\nu} e^{\pm i\mathbf{k}_l\cdot\mathbf{r}}$, where V is the volume of a sector, $\mathbf{k}_l = \omega_l\hat{\mathbf{n}}/c_0$ is the wave vector, and $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{l\nu}$ are unit vectors that stand for the direction of the polarization of light.

Now we turn our attention to the canonical variable $q_l(t)$ in order to obtain the vector potential. For this purpose, we solve the classical equation associated with the Hamiltonian $H_l(t)$ when the parameters are fixed, so that one can easily verify that the solution of the Hamilton equation for the generalized harmonic oscillator reads

$$q_l(t) = R_l\cos\theta_l,\ p_l = -\varepsilon R_l\left[\Lambda\cos\theta_l + \varpi_l\sin\theta_l\right], \quad (10)$$
$$\varpi_l = \sqrt{\Omega_l^2 - \Lambda^2}.$$

Here, the angle variable is given by $\theta_l = \sqrt{\Omega_l^2 - \Lambda^2}\,t + \beta_l$, where β_l is an arbitrary constant and R_l is a constant depending on the Hamiltonian of the system $H_l = \varepsilon\varpi_l^2 R_l^2/2$. As far as the parameters vary adiabatically, the solution can always be represented as in eq. (10). However, at this stage, $R_l(t)$ and $\theta_l(t)$ are unknown functions of time and $\dot{R}_l$ and $\dot{\theta}_l - \sqrt{\Omega_l^2 - \Lambda^2}$, instead of being equal to zero, become averaged values proportional to the time derivative of the parameters. The natural procedure to obtain these quantities is to apply the averaging method [21]. Starting from the exact equations (10), one can solve them to obtain $\dot{\theta}_l$ and $\dot{R}_l$ at first and then average the obtained expressions with respect to the previous variable θ_l. A straightforward calculation leads to the relations

$$2\frac{\dot{R}_l}{R_l} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} + \frac{\dot{\varpi}_l}{\varpi_l} = 0, \quad (11)$$

$$\dot{\theta}_l = \varpi_l - \frac{\dot{\sigma}}{2\varepsilon\varpi_l}. \quad (12)$$

Equation (11) yields the adiabatic invariant $I_l = \varepsilon\varpi_l R_l^2/2$ which is the action variable (related to the instantaneous Hamiltonian by $H_l = I_l\varpi_l$). Equation (12) shows that the angle variable is not equal to the dynamical contribution $\int^t \varpi_l(t')\,\mathrm{d}t'$, but acquires an additional contribution $\dot{\theta}_l^H = -\dot{\sigma}/2\varepsilon\varpi_l$ (the Hannay's angle) the value of which depends on the path followed by the parameters ε, μ and σ in the parameters space. For a cyclic evolution one immediately recovers the result obtained in refs. [20–22]. Equation (5) shows that the amplitude of the vector potential admits, despite of the fact that it is a dissipative system, an adiabatic invariant:

$$J_l = \varepsilon\varpi_l R_l^2 e^{\int_0^t \Lambda(t')\,\mathrm{d}t'}. \quad (13)$$

This invariant generalizes the quantity $\varepsilon\varpi_l^{-1}[\varpi_l^2 q_l^2 + (\dot{q}_l + \Lambda q_l)^2]e^{\Lambda t}$ which is an integral of motion for fixed parameters. It also coincides with the action variable I_l in the absence of damping. In the presence of a constant or a slowly time-varying friction coefficient, the exponential term appears as a renormalization factor for the "shrinking" trajectory and J_l still represents the area of the (closed) "renormalized" trajectory in the space $(q_l;\ \varepsilon\dot{q}_l)$.

The essence of the quantum theory of light in linear media is that each mode of the radiation field behaves like a quantized simple harmonic oscillator. Now we describe quantum electromagnetic fields propagating under a periodic boundary condition. To do this it is necessary to define non-Hermitian annihilation and creation operators associated to the Hamiltonian operator theory.

By replacing the classical variables $(q_l,\ p_l)$ with the operators $(\hat{q}_l,\ \hat{p}_l = -i\hbar\partial/\partial q_l)$, respectively, and through the introduction of the annihilation (and the corresponding creation) operator

$$\hat{a}_l = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\varepsilon\varpi_l}}\,\{\varepsilon[\varpi_l + i\Lambda]\hat{q}_l + i\hat{p}_l\}, \quad (14)$$

which satisfies the commutation relation $[\hat{a}_l(t), \hat{a}_l^\dagger(t)] = 1$, the Hamiltonian is rearranged into the standard quadratic Hermitian form as

$$\hat{H}_l(t) = \hbar\varpi_l\left(\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_l + \frac{1}{2}\right), \quad (15)$$

and the evolution of the system under adiabatic assumption may be unravelled through the coupled Heisenberg equations of motion

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{a}_l}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial\hat{a}_l}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}_l(t), \hat{H}_l] = -i\left[\varpi_l - \frac{\dot{\sigma}}{4\varepsilon\varpi_l}\right]\hat{a}_l \\ &\quad + i\frac{1}{2\varepsilon\varpi_l}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\Lambda - i\varpi_l)\varepsilon]\hat{a}_l^\dagger. \end{aligned} \quad (16)$$

The term representing the coupling between the creation and the annihilation operators contributing as they do to second order in adiabaticity may be disregarded to obtain

$$\hat{a}_l(t) = \hat{a}_l(0)e^{-i\varphi_l(t)} = \hat{a}_l(0)e^{-i\int_0^t \mathrm{d}t'[\varpi_l - \frac{\dot{\sigma}}{4\varepsilon\varpi_l}]}, \quad (17)$$

where the two exponents represent, respectively, the dynamical and the geometric phases, and the latter term $[\varphi_l^B(t) = \frac{1}{2}\theta_l^H(t)]$ which is of utmost interest in the present context is precisely independent of $\hbar$ and equal to one-half of the Hannay angle.

So, for each canonical operator $\hat{q}_l = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon\varpi_l}}(\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger)$ the electromagnetic field is completely determined since $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ field operators can be derived by inserting the operator

A given by eq. (5) into eq. (3). We are now ready to find the electric field propagating under a periodic boundary condition and analyze some of its quantum properties. First of all, the operator of the vector potential can be written as

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V}}e^{-\int_0^t \Lambda(t')\,\mathrm{d}t'} \times\sum_l\sum_{\nu=1}^{2}\frac{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{l\nu}}{\sqrt{\varpi_l}}\left[\hat{a}_{l\nu}(0)e^{i[\mathbf{k}_l\cdot\mathbf{r}-\varphi_l(t)]}+\hat{a}^{\dagger}_{l\nu}(0)e^{-i[\mathbf{k}_l\cdot\mathbf{r}-\varphi_l(t)]}\right], \tag{18}$$

where V is the volume of a sector. Considering this, the electric **E** and the magnetic **B** field operators are given by

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V}}e^{-\int_0^t \Lambda(t')\,\mathrm{d}t'}\\ &\times\sum_l\sum_{\nu=1}^{2}\frac{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{l\nu}}{\sqrt{\varpi_l}}\Big[(\Lambda(t)+i\varpi_l)\,\hat{a}_{l\nu}(0)e^{i[\mathbf{k}_l\cdot\mathbf{r}-\varphi_l(t)]}\\ &+(\Lambda(t)-i\varpi_l)\,\hat{a}^{\dagger}_{l\nu}(0)e^{-i[\mathbf{k}_l\cdot\mathbf{r}-\varphi_l(t)]}\Big],\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= i\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V}}e^{-\int_0^t \Lambda(t')\,\mathrm{d}t'}\\ &\times\sum_l\sum_{\nu=1}^{2}\frac{\mathbf{k}_l\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{l\nu}}{\sqrt{\varpi_l}}\Big[\hat{a}_{l\nu}(0)e^{i[\mathbf{k}_l\cdot\mathbf{r}-\varphi_l(t)]}\\ &-\hat{a}^{\dagger}_{l\nu}(0)e^{-i[\mathbf{k}_l\cdot\mathbf{r}-\varphi_l(t)]}\Big].\end{aligned} \tag{20}$$

The properties of the medium become manifest through the factor $\varpi_l^{-1/2}\ e^{-\int_0^t\Lambda(t')\,\mathrm{d}t'}$ in (19) and (20), and their geometric character through the phase factor $e^{-i\int_0^t \mathrm{d}t'[\varpi_l-\frac{\dot{\sigma}}{4\varepsilon\varpi_l}]}$. The presence of the exponential term $e^{-\int_0^t\Lambda(t')\,\mathrm{d}t'}$ shows that the amplitude of both the electric and the magnetic fields decrease with time, depending on the value of conductivity σ. This property is very much the same as the dissipation of the classical radiation field in the media that have nontrivial conductivity.

Since the time-dependent phase of l-th mode, $\varphi_l(t)$, involves the geometrical phase as well as the familiar dynamical phase, the time behavior of the quantized electromagnetic field depends apparently on the geometrical phase. We can thus confirm that, in addition to the dynamical phase, the geometric phase is also an important factor that determines the character of the propagating light. As is well known, the interference pattern in the optical system reflects immediately the phase change between different paths. Therefore, when two or more different modes of coherent light sources come across, the interference fringe would be altered by the existence of the geometric phase. If we consider the geometrical-phase change, the theoretical prediction of the interference phenomenon in the Fabry-Perot and/or Mach-Zehnder interferometers may be more accurate.

The commutation relations between any two sets of the field operators presented in eqs. (18)–(20) are evaluated in ref. [31] using the representation of field operators obtained from the Lewis-Riesenfeld invariant operator method and, consequently, it is shown in the same paper that the quantum electrodynamics within this regime in connection with the electromagnetic-field quantization is self-consistent. Further, the field operators also satisfy the Heisenberg equations of motion, allowing to obtain Maxwell's equations [31]. For our case, it is of interest to use the commutation relations between the creation and the annihilation operators, $[\hat{a}_l(t),\hat{a}^{\dagger}_{l'}(t)]=\delta_{ll'}$, to find the commutation relations at equal times for the physical observables E and H. Then we see that

$$[E_i(\mathbf{r}_1,t)\,,A_j(\mathbf{r}_2,t)]=\frac{i\hbar}{2\varepsilon(t)\,V}e^{-2\int_0^t\Lambda(t')\,\mathrm{d}t'} \times\sum_l\sum_{v=1}^{2}(\hat{\epsilon}_{lv})_i\cdot(\hat{\epsilon}_{lv})_j\left(e^{i[\mathbf{k}_l.(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)]}+e^{-i[\mathbf{k}_l.(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)]}\right). \tag{21}$$

By the well-known properties of direction cosines, we have

$$\sum_{v=1}^{2}(\hat{\epsilon}_{lv})_i\,.\,(\hat{\epsilon}_{lv})_j+\frac{(\mathbf{k}_l)_i\,(\mathbf{k}_l)_j}{k_l^2}=\delta_{ij}. \tag{22}$$

which is useful for further development. If we let $V\to\infty$, the sums in eq. (21) can be replaced by integrals, $\frac{1}{V}\sum_l\to\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k$. Then, from the use of the following two identities [31],

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(k)\\ &\times(\sin[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)-(\varphi(k,t_2)-\varphi(k,t_1))])\,\mathrm{d}^3k=\\ &-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(k)\,e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}\\ &\times\sin(\varphi(k,t_2)-\varphi(k,t_1))\,\mathrm{d}^3k,\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(k)\\ &\times(\cos[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)-(\varphi(k,t_2)-\varphi(k,t_1))])\,\mathrm{d}^3k=\\ &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(k)\,e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}\\ &\times\cos(\varphi(k,t_2)-\varphi(k,t_1))\,\mathrm{d}^3k,\end{aligned} \tag{24}$$

we obtain

$$\begin{aligned}[E_i(\mathbf{r}_1,t_1)\,,A_j(\mathbf{r}_2,t_1)]&=\frac{i\hbar}{\varepsilon(t)\,(2\pi)^3}\,e^{-2\int_0^t\Lambda(t')\,\mathrm{d}t'}\\ &\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}\,\mathrm{d}^3k\\ &=\frac{i\hbar}{\varepsilon(t)}e^{-2\int_0^t\Lambda(t')\,\mathrm{d}t'}\delta^T_{ij}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,.\end{aligned} \tag{25}$$

Here $\delta^T_{ij}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)$ is called the transverse δ-function. By considering the relation

$$(\hat{\epsilon}_{lv})_i\cdot(\mathbf{k}_l\times\hat{\epsilon}_{lv})_j=\varepsilon_{jrs}(\mathbf{k}_l)_r\,(\hat{\epsilon}_{lv})_i\,(\hat{\epsilon}_{lv})_s\,, \tag{26}$$

and eqs. (23) and (24), it is not difficult to verify that the commutation relation between $E_i(\mathbf{r}_1,t)$ and $B_j(\mathbf{r}_2,t_1)$ yields

$$[E_i(\mathbf{r}_1,t)\,,B_j(\mathbf{r}_2,t)]=\frac{i\hbar}{\varepsilon\,(t)}e^{-2\int_0^t\Lambda(t')\,\mathrm{d}t'}\varepsilon_{ijr}\,(\partial_2)_r\,\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1), \tag{27}$$

with ε_{ijr} being the (anti-symmetric) Levi-Civita tensor (here we adopted the convention of summation over repeated vector-component indices). It may also be easy to show that the other equal time commutation relations between the different fields operators vanish.

Since the fields decay in time, the commutators eqs. (25) and (27) approach zero. This result violates a fundamental principal of quantum mechanics, which implies that the uncertainty principle is not preserved. The uncertainty principle is always satisfied through a redefinition of the fields $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\rightarrow\mathbf{E}(\mathbf{r},t)e^{2\int_0^t\Lambda(t')\,\mathrm{d}t'}$ which eliminates these difficulties. It is easy to check the Heisenberg equation of motions for the field operators, using the redefined ("renormalized") fields mentioned above, to obtain the Maxwell equations. This can be done by the use of the Hamiltonian given in ref. [31].

Let us remember that the Hamiltonian (15) which is represented in terms of the creation and annihilation operators belongs to the class of Hamiltonians which generate coherent states that are the eigenstates, $\hat{a}_l|\alpha_l\rangle=\alpha_l|\alpha_l\rangle$, of the generalized annihilation operator (14). Now, an interesting observation can be made: if one calculates the expectation value of the field operators in the coherent states of the generalized harmonic oscillator, one obtains, in the classical limit (*i.e.*, for $|\alpha|^2\sim\hbar^{-1}\gg1$ [32,33]), the evolution of a classical field.

In this paper, we have investigated the problem of quantizing light propagating through time-dependent homogeneous conducting linear media with no charge density. We have used the Coulomb gauge and considered the field propagating under periodic boundary conditions as well as the electromagnetic field confined in a cubical volume filled with a conductive medium. We have reduced this problem to that of a time-dependent generalized harmonic oscillator. As a consequence, the quantization scheme for the electromagnetic field provides a connection between the classical Hannay angle and the quantum adiabatic Berry phase shifts.

Finally, as a particular case, let us see the fields whose spectrum of frequency intervals between adjacent modes is continuous, *i.e.*, $\Delta\omega(\equiv\omega_{l+1}-\omega_l)=\frac{2\pi c_0}{L}\rightarrow0$. This situation can be obtained when L goes to infinity, where L is the side of the cubical sector. For simplicity, we only consider the fields of one polarized mode, propagating along the x-direction. In this case, we need to convert the expression of the annihilation operator $\hat{a}_l(t)$ to $\sqrt{2\pi/L}\;\hat{a}(\omega/c_0,t)$, and the creation operator $\hat{a}_l^\dagger(t)$ to $\sqrt{2\pi/L}\;\hat{a}^\dagger(\omega/c_0,t)$. Moreover, for this mode the commutation relation between annihilation and creation operators is given by $[\hat{a}(\omega,t),\hat{a}^\dagger(\omega',t)]=\delta(\omega-\omega')$. Then, through the replacement of summation into an integral form in eq. (18), the vector potential becomes

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(x,t)\;&=\;\sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\varepsilon c_0^2\;S}}e^{-\int_0^t\Lambda(t')\,\mathrm{d}t'}\\&\times\int_0^\infty\mathrm{d}\omega\frac{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\omega)}{\sqrt{\varpi}}\Big[\hat{a}(\omega/c_0,0)e^{i[(\omega/c_0)x-\varphi(t)]}\\&+\hat{a}^\dagger(\omega/c_0,0)e^{-i[(\omega/c_0)x-\varphi(t)]}\Big],\end{aligned} \tag{28}$$

where S is the cross-section in the (y, z)-plane. From the fundamental relations of eq. (3), the electric and magnetic fields in the continuous frequency mode are therefore given by

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(x,t)=\sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\varepsilon c_0^2\;S}}e^{-\int_0^t\Lambda(t')\,\mathrm{d}t'}\\&\times\int_0^\infty\mathrm{d}\omega\,\frac{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\omega)}{\sqrt{\varpi}}\Big[\,(\Lambda(t)+i\varpi)\,\hat{a}(\omega/c_0,0)e^{i[(\omega/c_0)x-\varphi(t)]}\\&+(\Lambda(t)-i\varpi)\,\hat{a}^\dagger(\omega/c_0,0)e^{-i[(\omega/c_0)x-\varphi(t)]}\Big],\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{B}(x,t)=i\sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\varepsilon c_0^4\;S}}e^{-\int_0^t\Lambda(t')\,\mathrm{d}t'}\\&\times\int_0^\infty\mathrm{d}\omega\,\hat{\boldsymbol{e}}_x\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\omega)\frac{\omega}{\sqrt{\varpi}}\Big[\hat{a}(\omega/c_0,0)e^{i[(\omega/c_0)x-\varphi(t)]}\\&-\hat{a}^\dagger(\omega/c_0,0)e^{-i[(\omega/c_0)x-\varphi(t)]}\Big].\end{aligned} \tag{30}$$

The property and structure of the radiation field that has a continuous frequency mode were studied in ref. [34] focusing on the high frequency limit. Very recently Maamache and Saadi [35,36] used Weyl eigendifferentials, which in some sense "technically discretize" the continuous spectrum to lay the basis for transferring all the concepts known for discrete spectra to the continuous case, in the context of the adiabatic theorem, to formulate the "generalized Berry phase" of the continuous case.

The geometric phase occurs when the medium becomes a conducting one with a slowly time-dependent conductivity $\sigma(t)$. The electric permittivity also affects the size of the geometric phase. On the other hand, for dielectric materials ($\sigma(t)=0$), the geometric phase vanishes. It also vanishes when σ is constant. One can therefore conclude that the geometric characters of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ fields are essentially determined from the nature of the medium. The change of the geometric phase is important not only in interferometers but also in quantum computation achieved physically by means of geometric operations using a series of accurately controlled phase gates.

***

One of the authors (MM) thanks Prof. J. P. Munch, the Dean of U.F.R Physique et Ingénierie, UDStrasbourg, France, for his hospitality during the preparation of this work and C. Demangeat for useful discussions.

REFERENCES

[1] Scully M. O. and Zubairy M. S., *Quantum Optics* (Cambridge University Press, New York) 1997.
[2] Walls D. F. and Milburn G. J., *Quantum Optics* (Springer, Berlin) 1995.
[3] Meystre P. and Sargent M., *Elements of Quantum Optics* (Springer-Verlag, Berlin) 1991.
[4] Mandel L. and Wolf E., *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge) 1995.
[5] Choi J. R., *Chin. J. Phys.*, **41** (2003) 257.
[6] de Lima A. L., Rosas A. and Pedrosa I. A., *J. Phys. B*, **41** (2008) 115503.
[7] Choi J. R., *J. Opt. B*, **5** (2003) 409.
[8] Choi J. R., *Int. J. Theor. Phys.*, **43** (2004) 2113.
[9] Choi J. R., *Int. J. Mod. Phys. B*, **18** (2004) 317.
[10] Pedrosa I. A. and Rosas A., *Phys. Rev. Lett.*, **103** (2009) 010402.
[11] Choi J. R., *J. Phys. B*, **39** (2006) 669.
[12] Choi J. R. and Yeon K. H., *Int. J. Mod. Phys. B*, **19** (2005) 2213.
[13] Rezende S. M. and Morgenthaler F. R., *J. Appl. Phys.*, **40** (1969) 524.
[14] Morgenthaler F. R., *IRE Trans. Microwave Theory Tech.*, **6** (1958) 167.
[15] Kozaki S., *Electron. Lett.*, **14** (1978) 826.
[16] Berry M. V., *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **392** (1984) 45.
[17] Shapere A. and Wilczek F. (Editors), *Geometric Phases in Physics* (World Scientific, Singapore) 1989.
[18] Simon B., *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1983) 2167.
[19] Hannay J. H., *J. Phys. A*, **18** (1985) 221.
[20] Ghosh G. and Dutta-Roy B., *Phys. Rev. D*, **37** (1988) 1709.
[21] Usatenko O. V., Provost J. P. and Vallée G., *J. Phys. A*, **29** (1996) 2607.
[22] Maamache M., Provost J. P. and Vallée G., *Phys. Rev. A*, **59** (1999) 1777.
[23] Ge Y. C. and Child M. S., *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 2507.
[24] Berry M. V., *J. Phys. A*, **18** (1985) 15.
[25] Jones J. A., Vedral V., Ekert A. and Castagnoli G., *Nature (London)*, **403** (2000) 869.
[26] Pellizzari T., Gardiner S. S., Cirac J. I. and Zoller P., *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995) 3788.
[27] Duan L. M., Cirac J. I. and Zoller P., *Science*, **292** (1999) 94.
[28] Falci G., Fazio R., Palma G. M., Siewert J. and Vedral V., *Nature (London)*, **407** (2000) 355.
[29] Pedrosa I. A., *Phys. Rev. A*, **55** (1997) 3219.
[30] Ji J.-Y. and Kim J. K., *Phys. Rev. A*, **52** (1995) 3352.
[31] Choi J. R. and Oh J.-Y., *Int. J. Mod. Phys. B*, **22** (2008) 267.
[32] Maamache M., Provost J. P. and Vallée G., *J. Phys. A*, **23** (1990) 5765.
[33] Maamache M., Provost J. P. and Vallée G., *Eur. J. Phys.*, **15** (1994) 121.
[34] Nigavekar A. S. and Bergwall S., *Phys. Lett. A*, **28** (1968) 232.
[35] Maamache M. and Saadi Y., *Phys. Rev. Lett.*, **101** (2008) 150407.
[36] Maamache M. and Saadi Y., *Phys. Rev. A*, **78** (2008) 052109.

A LETTERS JOURNAL EXPLORING THE FRONTIERS OF PHYSICS

June 2010

EPL, **90** (2010) 59901 www.epljournal.org
doi: 10.1209/0295-5075/90/59901

Erratum

Geometric phase of quantized electromagnetic field in time-dependent linear media

M. MAAMACHE[1], N. CHAABI[1] and J. R. CHOI[2(a)]

[1] *Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques, Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas de Sétif - Sétif 19000, Algeria*
[2] *School of Electrical Engineering Computer Science, Kyungpook National University Daegu 702-701, Republic of Korea*

Original article: *Europhysics Letters (EPL)*, **89** (2010) 40009.

PACS 99.10.Cd – Errata

After the publication of this paper, the authors realized the occurrence of several errors in their original presentation. They are listed below.

i) Equation (9) on page 2 should read correctly

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = -\sum_l \mathbf{u}_l(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\int_0^t \Lambda(t')\mathrm{d}t'} p_l(t). \tag{9}$$

In all subsequent equations where $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ appears in any form, it must be replaced by $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$. The results and conclusions drawn in the paper are not affected by these replacements which are mere typos.

ii) In eq. (12) on page 3, the numerical coefficient appearing in the denominator of the second term of the angle should be 4 instead of 2. Thus, Hannay's angle $\dot{\theta}_l^H$, throughout the manuscript, should read

$$\dot{\theta}_l^H = -\dot{\sigma}/4\varepsilon\varpi_l.$$

Consequently, the relation between Berry's phase and Hannay's angle appearing in the paragraph after eq. (17) on page 3 should be

$$\varphi_l^B(t) = -\theta_l^H(t).$$

(a) E-mail: choiardor@hanmail.net (corresponding author)

Journal of the Korean Physical Society, Vol. 56, No. 3, March 2010, pp. 775∼781

Zero-point Fluctuations of Quantized Electromagnetic Fields in Time-varying Linear Media

Jeong Ryeol Choi
School of Electrical Engineering and Computer Science, Kyungpook National University, Daegu 702-701

Dukhyeon Kim*
Division of Cultural Studies, Hanbat National University, Daejeon 305-719

Nadir Chaabi, Mustapha Maamache and Salah Menouar
Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques, Département de Physique, Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas de Sétif, Sétif 19000, Algeria

If the precise nonclassical behavior of radiation fields is to be investigated, it is crucial to quantize the electromagnetic fields. The traditional quantization procedure is extended to that of light described by time-dependent Hamiltonians by means of the Lewis-Riesenfeld invariant operator method. The quantization problem of light fields is presented in time-varying linear media by using the invariant operator theory of Lewis-Riesenfeld. The zero-point fluctuation of the electromagnetic fields in time-varying linear media is investigated. Since there are infinite modes inside a cavity, the fluctuation of the zero-point field is also infinite. However, in view of electrical engineering, the width of the band is finite enough that the infinite zero-point fluctuation can not be detected. As a means of detection for the zero-point fluctuation, an electron that interacts with the fluctuation of the field is considered. When there is conductivity in the media, the measured total fields decrease with time due to dissipation.

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.25.Dd, 42.50.Ct
Keywords: Electromagnetic fields, Fluctuations, Time-varying media
DOI: 10.3938/jkps.56.775

I. INTRODUCTION

Recently, the quantum problem of light in time-varying media has attracted great concern in the community of quantum optics. If the parameters of the media, such as the conductivity, electric permittivity, and magnetic permeability, are explicitly dependent on time, the medium is specified as a time-varying medium. Such light is described by a time-dependent Hamiltonian that is derived from the fundamental Maxwell's equations [1–7]. Even if the time-dependence of the parameters disappears, the light is still described by a time-dependent Hamiltonian so long as the media is characterized by a nontrivial conductivity, *i.e.*, when we cannot neglect the conductivity [8–12]. The light in media that have conductivity is described by a damped wave equation and undergoes dissipation with time.

The quantization of light, which follows a time-dependent Hailtonian as in this case, can be achieved on a fundamental level by using the invariant operator formulation of quantum electrodynamics. In general, the invariant operator method is very useful when studying quantum properties of time-dependent Hamiltonian systems [1, 2, 8, 13–21]. In previous papers [1], we quantized the light in time-varying media by using the Lewis-Riesenfeld (LR) invariant operator method [13,14] with the choice of the Coulomb gauge. Further, the electric and magnetic field operators were formulated from the vector potential for the light in time-varying media [1].

The importance of the physical nature of the radiation field in the cavity was first realized by Planck [22], who simulated the physical properties of the radiation fields by using a finite set of harmonic oscillators. Planck's extensive research devoted to black-body radiation promoted the development of quantum mechanics and eventually gave rise to the discovery of the so-called zero-point energy of radiation fields. Appreciably later, the existence of zero-point fluctuations led to a theory that provided an alternative description of the many effects for vacuum field properties traditionally managed by quantum electrodynamics [23]. According to quantum field theory, the notorious cosmological constant tied to dark energy attributes the zero-point field to the virtual quantum effects of an already present electromagnetic

*Corresponding author; E-mail: dhkim7575@paran.com

field. Shortly before the dramatic discoveries of dark energy, Sidharth had constructed a cosmological model on the basis of fluctuations in an all permeating zero-point field [24–26], which is consistent with astrophysical observations and predicts an acceleratively expanding universe. A soluble quantum model of the photon creation produced by a time-dependent dielectric was investigated by Cirone *et al.* [27,28].

In this paper, we investigate zero-point fluctuations of an electromagnetic field in linear media with time-dependent parameters by taking advantage of the quantum results of the invariant operator method. For simplicity, we assume that the media have no net charge density. Then, under the choice of Coulomb gauge, we can expand the electric and magnetic field in terms of only the vector potential because the scalar potential is zero in this situation. The zero-point field fluctuations are the source of quantum noise and give rise to spontaneous emission in lasers, attenuators, parametric amplifiers, and the such [29].

In Sec. II, we survey the LR invariant operator method for light propagating in time-varying media. The fluctuations of the zero-point fields are investigated in Sec. III. Concluding remarks are addressed in the last section.

II. PRELIMINARY FOR QUANTUM ELECTROMAGNETIC FIELDS

We suppose that the parameters of the media such as the electric permittivity $\epsilon(t)$, the magnetic permeability $\mu(t)$, and the conductivity $\sigma(t)$ explicitly depend on time. Moreover, we consider only the case of linear media, so the fields and the current follow the relations

$$\mathbf{D} = \epsilon(t)\mathbf{E}, \tag{1}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu(t)}, \tag{2}$$

$$\mathbf{J} = \sigma(t)\mathbf{E}. \tag{3}$$

In this case, the speed of electromagnetic waves varies with time and is given by $c(t) = 1/[\epsilon(t)\mu(t)]^{1/2}$. The Maxwell's equations in the media are

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = 0, \quad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \quad \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}. \tag{4}$$

The well-known relation between the fields and the vector potential are

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t). \tag{6}$$

We did not regard the scalar potential in Eq. (5) because it is zero in the charge free space. Now, we can confirm in the Coulomb gauge that the vector potential is represented as

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu(\sigma+\dot\epsilon)\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{7}$$

To introduce the familiar procedure of separation of variables, we cast the vector potential in the form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sum_l \mathbf{u}_l(\mathbf{r})q_l(t). \tag{8}$$

The different modes of the position function $\mathbf{u}_l(\mathbf{r})$, which are distinguished by under subscript l, are determined by the boundary conditions and geometry. On the other hand, the time function $q_l(t)$ can be described by a Hamiltonian of the form [19,30,31]

$$\hat H_l(\hat q_l,\hat p_l,t) = e^{-\Lambda(t)}\frac{\hat p_l^2}{2\epsilon(0)} + \frac{1}{2}e^{\Lambda(t)}\epsilon(0)\omega_l^2(t)\hat q_l^2, \tag{9}$$

where

$$\Lambda(t) = \int_0^t \frac{\sigma(s)+\dot\epsilon(s)}{\epsilon(s)}ds, \tag{10}$$

and $\omega_l(t)$ are time-dependent natural frequencies that yield $\omega_l(t) = c(t)\omega_l(0)/c(0)$. If we use the Maxwell's equations $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ and $\nabla\times\mathbf{B} = \mu\mathbf{J}+\mu\epsilon\partial\mathbf{E}/\partial t$ instead of the first and the fourth of Eq. (4), the term involving $\dot\epsilon$ does not appear in Eq. (10) [1,2]. For further development, we suppose that the classical solution described by the Hamiltonian in Eq. (9) is represented in the form

$$q_l(t) = M_l(t)[C_+\exp(i\gamma_l(t)) + C_-\exp(-i\gamma_l(t))], \tag{11}$$

where C_+ and C_- are constants and $M_l(t)$ and $\gamma_l(t)$ are time functions that are real.

Apparently the Hamiltonian is a time-dependent form. When the Hamiltonian explicitly depend on time as in our problem, the invariant operator method is very useful in unfolding its quantum dynamical theory. From $d\hat I_l/dt = 0$, the invariant operator can be constructed to be [2]

$$\hat I_l(\hat q_l,\hat p_l,t) = \hbar\Omega_l\left(\hat a_l^\dagger\hat a_l + \frac{1}{2}\right), \tag{12}$$

where Ω_l are time-constants given by

$$\Omega_l = \frac{M_l^2(t)}{M_l^2(0)}e^{\Lambda(t)}\dot\gamma_l(t), \tag{13}$$

and $\hat a_l(t)$ are the annihilation operators that yield

$$\hat a_l(t) = \frac{1}{\sqrt2}(\hat X_l + i\hat Y_l), \tag{14}$$

with

$$\hat X_l = \sqrt{\frac{\epsilon(0)\dot\gamma_l(t)}{\hbar}}e^{\Lambda(t)/2}\hat q_l, \tag{15}$$

$$\hat Y_l = \frac{1}{\sqrt{\hbar\epsilon(0)\dot\gamma_l(t)}}\left[e^{-\Lambda(t)/2}\hat p_l - \epsilon(0)\frac{\dot M_l(t)}{M_l(t)}e^{\Lambda(t)/2}\hat q_l\right]. \tag{16}$$

The Hermitian adjoint of Eq. (14) is, of course, the creation operator $\hat{a}_l^\dagger(t)$. Note that these ladder operators satisfy the conventional boson commutation relation $[\hat{a}_l(t), \hat{a}_{l'}^\dagger(t)] = \delta_{ll'}$.

If we represent the corresponding Schrödinger equation as

$$i\hbar\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_l|\psi(t)\rangle, \tag{17}$$

the wave function $|\psi(t)\rangle$ is given by

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-i\sum_l(\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_l + 1/2)\gamma_l t\right]|\phi(t)\rangle, \tag{18}$$

where $|\phi(t)\rangle$ is the eigenstate of the invariant operator. We may express the eigenstate by

$$\begin{aligned}|\phi(t)\rangle &= \sum_{n_1,n_2,\cdots,n_\infty} c(n_1,n_2,\cdots,n_\infty) \\ &\quad\times|\phi_{n_1}(t),\phi_{n_2}(t),\cdots,\phi_{n_l}(t),\cdots,\phi_{n_\infty}(t)\rangle, \end{aligned}\tag{19}$$

where the modes are labeled 1,2,$\cdots$. For explicit form of $|\phi_{n_l}(t)\rangle$, you can refer to Ref. [1]. Thus, Eq. (18) is

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= \sum_{n_1,n_2,\cdots,n_\infty} c(n_1,n_2,\cdots,n_\infty)\cdot \\ &\quad\times\exp\left[-i\sum_l(n_l+1/2)\gamma_l t\right] \\ &\quad\times|\phi_{n_1}(t),\phi_{n_2}(t),\cdots,\phi_{n_l}(t),\cdots,\phi_{n_\infty}(t)\rangle. \end{aligned}\tag{20}$$

When the fields are described by a simple harmonic oscillator, which causes the time-dependence of the Hamiltonian to vanish, the eigenstate in Eq. (19) no longer depends on time.

Consider the case in which the electromagnetic fields have been prepared initially in a pure energy eigenstate and there are n_l quanta in the l mode so that

$$|\phi(t)\rangle = |\phi_{n_1}(t),\phi_{n_2}(t),\cdots,\phi_{n_l}(t),\cdots,\phi_{n_\infty}(t)\rangle. \tag{21}$$

The effect of $\hat{a}_l$ and $\hat{a}_l^\dagger$ on this eigenstate is expressed as

$$\hat{a}_l|\cdots,\phi_{n_l}(t),\cdots\rangle = \sqrt{n_l}|\cdots,\phi_{n_{l-1}}(t),\cdots\rangle, \tag{22}$$

$$\hat{a}_l^\dagger|\cdots,\phi_{n_l}(t),\cdots\rangle = \sqrt{n_l+1}|\cdots,\phi_{n_{l+1}}(t),\cdots\rangle. \tag{23}$$

This quantization scheme is slightly different from that of the simple harmonic oscillator. However, for the light in vacuum cavities or in infinite free space, the quantization procedure by using LR invariant operator method exactly recovers to the traditional one.

III. FLUCTUATIONS OF THE ZERO-POINT FIELDS

An important prediction of quantum theory is the existence of irreducible zero-point field fluctuations. There are many observable consequences of these fluctuations, like the Casimir effect, which is now measured with good accuracy in vacuum.

Let us investigate the fluctuations of a (complete) field that can be obtained by summing not only over all possible modes but also over two possible polarizations for each mode. Though we were neglected the polarizations of the fields up to now, it may be necessary to consider them in order to discuss fluctuations of the field at this stage. We denote the two unit vectors in the directions of the polarization as $\hat{\varepsilon}_{l\nu}$ ($\nu = 1, 2$). Then, the boson commutation relation becomes

$$[\hat{a}_{l\nu}(t), \hat{a}_{l'\nu'}^\dagger(t)] = \delta_{ll'}\delta_{\nu\nu'}. \tag{24}$$

From now on, we will consider the polarization when describing the electromagnetic fields. According to the invariant operator theory, the jth component of the electric field is given by [1,32]

$$E_j(\mathbf{r},t) = E_j^{(+)}(\mathbf{r},t) + E_j^{(-)}(\mathbf{r},t), \tag{25}$$

$$E_j^{(+)}(\mathbf{r},t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon(0)V}}e^{-\Lambda(t)/2}\sum_l\sum_{\nu=1}^{2}\frac{(\hat{\varepsilon}_{l\nu})_j}{\sqrt{\dot{\gamma}_l}}\left(i\dot{\gamma}_l - \frac{\dot{M}_l}{M_l}\right)\hat{a}_{l\nu}(t)\exp(i\mathbf{k}_l\cdot\mathbf{r}), \tag{26}$$

$$E_j^{(-)}(\mathbf{r},t) = [E_j^{(+)}(\mathbf{r},t)]^\dagger, \tag{27}$$

where $\mathbf{k}_l$ are wave numbers of the form

$$\mathbf{k}_l = \omega_l(t)\hat{\mathbf{n}}/c(t). \tag{28}$$

In a similar way, the magnetic field can be written as

$$B_j(\mathbf{r},t) = B_j^{(+)}(\mathbf{r},t) + B_j^{(-)}(\mathbf{r},t), \tag{29}$$

$$\begin{aligned}B_j^{(+)}(\mathbf{r},t) &= i\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon(0)V}}e^{-\Lambda(t)/2} \\ &\quad\times\sum_l\sum_{\nu=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{\dot{\gamma}_l}}(\mathbf{k}_l\times\hat{\varepsilon}_{l\nu})_j\hat{a}_{l\nu}(t)\exp(i\mathbf{k}_l\cdot\mathbf{r}), \end{aligned}\tag{30}$$

$$B_j^{(-)}(\mathbf{r},t) = [B_j^{(+)}(\mathbf{r},t)]^\dagger. \tag{31}$$

The average of electric field in the state $|\phi(t)\rangle$ of Eq. (21)

is

$$\langle E_j\rangle \equiv \langle\phi(t)|E_j(\mathbf{r},t)|\phi(t)\rangle = 0. \quad (32)$$

This means that the average of the electric field is zero when the field is in an eigenstate. Similarly, the average of the magnetic field also vanishes:

$$\langle B_j\rangle = 0. \quad (33)$$

Now, let's look at the expectation value of the square of the fields in the state $|\phi(t)\rangle$ given in Eq. (21). From Eq. (25) and (29), we get

$$E_j^2 = E_j^{(+)^2} + E_j^{(-)^2} + E_j^{(+)}E_j^{(-)} + E_j^{(-)}E_j^{(+)}, \quad (34)$$

$$B_j^2 = B_j^{(+)^2} + B_j^{(-)^2} + B_j^{(+)}B_j^{(-)} + B_j^{(-)}B_j^{(+)}. \quad (35)$$

By using Eqs. (22), (23), (24), (26), (27), (30), and (31) to calculate the expectation value of the above equations, we have after a little algebra

$$\langle E_j^2(\mathbf{r},t)\rangle = \frac{\hbar}{2\epsilon(0)V}e^{-\Lambda(t)} \times \sum_l\sum_{\nu=1}^{2}\frac{1}{\dot\gamma_l}(\hat\varepsilon_{l\nu})_j^2\left(\dot\gamma_l^2+\frac{\dot M_l^2}{M_l^2}\right)(2n_{l\nu}+1), \quad (36)$$

$$\langle B_j^2(\mathbf{r},t)\rangle = \frac{\hbar}{2\epsilon(0)V}e^{-\Lambda(t)} \times \sum_l\sum_{\nu=1}^{2}\frac{k_l^2}{\dot\gamma_l}(\hat\varepsilon_{l\nu})_j^2(2n_{l\nu}+1). \quad (37)$$

If we consider the above equations and the relations

$$\mathbf{E}^2 = \sum_{j=1}^{3}E_j^2, \quad (38)$$

$$\mathbf{B}^2 = \sum_{j=1}^{3}B_j^2, \quad (39)$$

it is clear that the averages of the total field are

$$\langle\mathbf{E}^2\rangle = \frac{\hbar}{2\epsilon(0)V}e^{-\Lambda(t)} \times \sum_l\sum_{\nu=1}^{2}\frac{1}{\dot\gamma_l}\left(\dot\gamma_l^2+\frac{\dot M_l^2}{M_l^2}\right)(2n_{l\nu}+1), \quad (40)$$

$$\langle\mathbf{B}^2\rangle = \frac{\hbar}{2\epsilon(0)V}e^{-\Lambda(t)} \times \sum_l\sum_{\nu=1}^{2}\frac{k_l^2}{\dot\gamma_l}(2n_{l\nu}+1). \quad (41)$$

In this calculation, we used $\sum_{j=1}^{3}(\hat\varepsilon_{l\nu})_j^2 = 1$.

If $n_{l\nu}=0$, we obtain vacuum fields such that

$$\langle\mathbf{E}^2\rangle = \frac{\hbar}{2\epsilon(0)V}e^{-\Lambda(t)}\sum_l\sum_{\nu=1}^{2}\frac{1}{\dot\gamma_l}\left(\dot\gamma_l^2+\frac{\dot M_l^2}{M_l^2}\right), \quad (42)$$

$$\langle\mathbf{B}^2\rangle = \frac{\epsilon(t)\mu(t)\hbar}{2\epsilon(0)V}e^{-\Lambda(t)}\sum_l\sum_{\nu=1}^{2}\frac{\omega_l^2}{\dot\gamma_l}. \quad (43)$$

Since there are infinite modes inside a cavity, the fluctuation of the zero-point field is also infinite. Because we do not specify the way to measure the electromagnetic field, this infinity may be not essential. In the view of electrical engineering, the width of the band is finite so that we cannot detect the infinity of the zero-point fluctuation [29]. We consider an electron that interacts with the fluctuation of the zero-point field as a means of detection. In this case, the electron may occupy a small space ΔV, and the measure of it requires a small time interval Δt. Thus, we must calculate the following space-time mean value so as to acquire a physically meaningful result [29]:

$$\bar E_j(\Delta V,\Delta t) \equiv \frac{1}{\Delta V\Delta t}\int_{\Delta V}dV\int_{\Delta t}dt\ E_j(\mathbf{r},t). \quad (44)$$

The expectation value of E_j^2 in the vacuum state is

$$\langle\phi_0|[\bar E_j(\Delta V,\Delta t)]^2|\phi_0\rangle = \frac{1}{(\Delta V)^2(\Delta t)^2}\int_{\Delta V}\int_{\Delta t}dVdV'dt\ dt' \times\langle\phi_0|E_j(\mathbf{r},t)E_j(\mathbf{r}',t')|\phi_0\rangle. \quad (45)$$

Recall that $|\phi_0\rangle = |\phi_0(t)\rangle$ is time-dependent. Considering Eqs. (25)-(27), we can see that

$$\langle\phi_0|E_j(\mathbf{r},t)E_j(\mathbf{r}',t')|\phi_0\rangle = \frac{\hbar}{2\epsilon(0)V}e^{-\Lambda(t)}\sum_l\sum_{\nu=1}^{2}\frac{(\hat\varepsilon_{l\nu})_j^2}{\dot\gamma_l}\left(\dot\gamma_l^2+\frac{\dot M_l^2}{M_l^2}\right) \times\exp[i\mathbf{k}_l\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\langle\phi_0|\hat a_{l\nu}(t)\hat a_{l\nu}^\dagger(t')|\phi_0\rangle. \quad (46)$$

By summing over j, we obtain total field for Eq. (45):

$$\langle\phi_0|\sum_j[\bar E_j(\Delta V,\Delta t)]^2|\phi_0\rangle = \frac{\hbar}{2(\Delta V)^2(\Delta t)^2\epsilon(0)}\int_{\Delta V}\int_{\Delta t}dVdV'dt\ dt' \times e^{-[\Lambda(t)+\Lambda(t')]/2}\sum_l\frac{1}{V\dot\gamma_l}\left(\dot\gamma_l^2+\frac{\dot M_l^2}{M_l^2}\right) \times\exp\{i\mathbf{k}_l\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-i[\gamma_l(t)-\gamma_l(t')]\}. \quad (47)$$

In the above calculations, we used

$$\langle\phi_0|\hat a_{l\nu}(t)\hat a_{l\nu}^\dagger(t')|\phi_0\rangle = e^{-i[\gamma_l(t)-\gamma_l(t')]}. \quad (48)$$

For the case of an ordinary underdamped harmonic oscillator characterized by $\dot\sigma(t)=0$, $\dot\epsilon(t)=0$, and $\dot\mu(t)=0$, the time functions in Eq. (11) read

$$\gamma_l = \sqrt{\omega_l^2-\frac{\sigma^2}{4\epsilon^2}}\ t, \quad (49)$$

$$M_l = \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\epsilon}t\right). \quad (50)$$

Then, Eq. (47) becomes

$$\langle\phi_0|\sum_j[\bar{E}_j(\Delta V,\Delta t)]^2|\phi_0\rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2(\Delta V)^2(\Delta t)^2\epsilon}\int_{\Delta V}\int_{\Delta t} dVdV'dt\ dt'$$
$$\times \exp\left[-\frac{\sigma}{2\epsilon}(t+t')\right]\sum_l \frac{\omega_l^2}{V\sqrt{\omega_l^2-\sigma^2/(4\epsilon^2)}}$$
$$\times \exp\{i\mathbf{k}_l\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i\sqrt{\omega_l^2-\sigma^2/(4\epsilon^2)}\ (t-t')\}. \quad (51)$$

Executing the integrals over dt and dt' and changing the sum over l to an integral over $\mathbf{k}$, we have

$$\langle\phi_0|\sum_j[\bar{E}_j(\Delta V,\Delta t)]^2|\phi_0\rangle$$
$$= \frac{\hbar}{8\pi^3(\Delta V)^2(\Delta t)^2\epsilon}\int_{\Delta V} dVdV'$$
$$\times \int d\mathbf{k}\frac{1}{[k^2c^2-\sigma^2/(4\epsilon^2)]^{1/2}}\exp[i\mathbf{k}_l\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]$$
$$\times\left\{\cosh\left(\frac{\sigma}{2\epsilon}\Delta t\right) - \cos[\sqrt{k^2c^2-\sigma^2/(4\epsilon^2)}\ \Delta t]\right\}$$
$$\times \exp\left(-\frac{\sigma}{2\epsilon}\Delta t\right). \quad (52)$$

In this evaluation, we used

$$\frac{1}{V}\sum_l \to \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dk_x\ dk_y\ dk_z. \quad (53)$$

Similarly to Eq. (44), space-time averages of the magnetic fields are

$$\bar{B}_j(\Delta V,\Delta t) \equiv \frac{1}{\Delta V\Delta t}\int_{\Delta V} dV\int_{\Delta t} dtB_j(\mathbf{r},t). \quad (54)$$

The expectation value of B_j^2 in the vacuum state is

$$\langle\phi_0|[\bar{B}_j(\Delta V,\Delta t)]^2|\phi_0\rangle$$
$$= \frac{1}{(\Delta V)^2(\Delta t)^2}\int_{\Delta V}\int_{\Delta t} dVdV'dt\ dt'$$
$$\times\langle\phi_0|B_j(\mathbf{r},t)B_j(\mathbf{r}',t')|\phi_0\rangle. \quad (55)$$

From Eqs. (29)-(31), we have

$$\langle\phi_0|B_j(\mathbf{r},t)B_j(\mathbf{r}',t')|\phi_0\rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2\epsilon(0)V}e^{-\Lambda(t)}\sum_l\sum_{\nu=1}^{2}\frac{(\hat{\varepsilon}_{l\nu})_j^2}{\dot{\gamma}_l}k_l^2\exp[i\mathbf{k}_l\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]$$
$$\times\langle\phi_0|\hat{a}_{l\nu}(t)\hat{a}_{l\nu}^\dagger(t')|\phi_0\rangle. \quad (56)$$

If we perform the summation over j, the total field for Eq. (55) becomes

$$\langle\phi_0|\sum_j[\bar{B}_j(\Delta V,\Delta t)]^2|\phi_0\rangle = \frac{\hbar}{2(\Delta V)^2(\Delta t)^2\epsilon(0)}\int_{\Delta V}\int_{\Delta t} dVdV'dt\ dt'$$
$$\times e^{-[\Lambda(t)+\Lambda(t')]/2}\sum_l\frac{k_l^2}{V\dot{\gamma}_l}\exp\{i\mathbf{k}_l\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i[\gamma_l(t)-\gamma_l(t')]\}. \quad (57)$$

In the limit of an ordinary underdamped harmonic oscillator, this can be rewritten as

$$\langle\phi_0|\sum_j[\bar{B}_j(\Delta V,\Delta t)]^2|\phi_0\rangle = \frac{\hbar}{2(\Delta V)^2(\Delta t)^2\epsilon}\int_{\Delta V}\int_{\Delta t} dVdV'dt\ dt'\exp\left[-\frac{\sigma}{2\epsilon}(t+t')\right]\sum_l\frac{k_l^2}{V\sqrt{\omega_l^2-\sigma^2/(4\epsilon^2)}}$$
$$\times\exp\{i\mathbf{k}_l\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i\sqrt{\omega_l^2-\sigma^2/(4\epsilon^2)}\ (t-t')\}. \quad (58)$$

By carrying out the integrals over dt and dt' and changing the sum over l to an integral over $\mathbf{k}$, we get

$$\langle\phi_0|\sum_j[\bar{B}_j(\Delta V,\Delta t)]^2|\phi_0\rangle = \frac{\hbar}{8\pi^3(\Delta V)^2(\Delta t)^2\epsilon c^2}\int_{\Delta V}dVdV'\int d\mathbf{k}\frac{1}{[k^2c^2-\sigma^2/(4\epsilon^2)]^{1/2}}\exp[i\mathbf{k}_l\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] \times\left\{\cosh\left(\frac{\sigma}{2\epsilon}\Delta t\right)-\cos[\sqrt{k^2c^2-\sigma^2/(4\epsilon^2)}\;\Delta t]\right\}\exp\left(-\frac{\sigma}{2\epsilon}\Delta t\right). \quad (59)$$

If we compare Eq. (52) with Eq. (59), we find a simple relation between the fluctuations for the electric and the magnetic fields, which is given by

$$\langle\phi_0|\sum_j[\bar{E}_j(\Delta V,\Delta t)]^2|\phi_0\rangle = c^2\langle\phi_0|\sum_j[\bar{B}_j(\Delta V,\Delta t)]^2|\phi_0\rangle. \quad (60)$$

So long as ΔV and Δt are finite, the fluctuations in Eqs. (52) and (59) are also finite in the region measured. However, they become infinite as ΔV and Δt approach zero. This restricts knowledge of the electric and the magnetic fields in the finite bandwidth region of space and time, when detecting them with an instrument.

IV. CONCLUSION

A solution of a somewhat curious problem associated with the quantization of light in time-varying linear media is presented. Through the invariant operator method of LR, it is possible to quantize the time-dependent Hamiltonian that describes the system. We consider the case that the electromagnetic fields are prepared initially in a pure energy eigenstate and there are n_l quanta in the l mode. Though the quantization scheme employed in this work is somewhat different from that of light described by using a simple harmonic oscillator, our quantization scheme exactly recovers to the standard one as the time-dependence of the Hamiltonian disappears.

If we remove the time-dependence of the magnetic permeability ($\mu(t)\rightarrow\mu_0$), our model of the system recovers to that of Pedrosa *et al.* presented in Ref. [19]. The generalization of the magnetic permeability fulfilled in this paper, however, incurs no significant difference from the quantization procedure of Ref. [19], because there is no meaningful alteration in the type of Hamiltonian, Eq. (9), when the magnetic permeability becomes time-dependent. In fact, the only parameter in Eq. (9) that varies with the value of $\mu(t)$ is $\omega_l(t)$.

One of the fundamental problems associated with quantum field theories and statistical mechanics is whether zero-point fluctuations are real in the sense that the corresponding zero-point energy has a gravitational effect [33]. In quantum mechanics, the zero-point field fluctuation is measurable. The distortion of the zero-point field fluctuations caused by the existence of classical boundaries can also be measurable through a study of the spontaneous and induced emission of excited atoms under the existence of classical boundaries [34]. As a means of detection, we considered an electron that interacted with the fluctuation of the zero-point field. To describe the physically meaningful result, we assumed that the measuring process by means of an electron occupying a small space ΔV required a small time interval Δt. The zero-point expectation value of the squared electric and magnetic fields diverged as one approached the boundary [35]. Due to the exponential term $e^{-\sigma\Delta t/(2\epsilon)}$ in Eqs. (52) and (59), the measured total fields decreased with time in the presence of conductivity.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was funded by the Korea Meteorological Administration Research and Development Program under Grant No. CATER 2008.3109.

REFERENCES

[1] J. R. Choi and K. H. Yeon, Int. J. Mod. Phys. B **19**, 2213 (2005).
[2] J. R. Choi, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **39**, 669 (2006).
[3] R. Matloob, R. Loudon, M. Artoni, S. M. Barnett and J. Jeffers, Phys. Rev. A **55**, 1623 (1997).
[4] Y. Zhang and B.-Q. Gao, Chinese Phys. Lett. **22**, 446 (2005).
[5] L. B. Felsen and G. M. Whitman, IEEE Trans. Ant. Propag. **18**, 242 (1970).
[6] V. V. Dodonov and A. V. Dodonov, J. Phys.: Conf. Ser. **99**, 012006 (2008).
[7] V. V. Dodonov and A. V. Dodonov, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **39**, S749 (2006).
[8] J. R. Choi, Chinese J. Phys. **41**, 257 (2003).
[9] S. Kozaki, Electron. Lett. **14**, 826 (1978).
[10] M. Crocce, D. A. R. Dalvit, F. C. Lombardo and F. D. Mazzitelli, Phys. Rev. A **70**, 033811 (2004).
[11] A. L. de Lima, A. Rosas and I. A. Pedrosa, J. Mod. Optic. **56**, 41 (2009).
[12] V. V. Dodonov and A. V. Dodonov, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 6271 (2006).
[13] H. R. Lewis, Jr., Phys. Rev. Lett. **18**, 510 (1967).

[14] H. R. Lewis, Jr. and W. B. R. Riesenfeld, J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).
[15] V. V. Dodonov, I. A. Malkin and V. I. Man'ko, Physica **59**, 241 (1972).
[16] D. A. Trifonov, J. Opt. Soc. Am. A **17**, 2486 (2000).
[17] M. Maamache, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 2833 (1996).
[18] J. R. Choi, Int. J. Mod. Phys. D **16**, 1119 (2007).
[19] I. A. Pedrosa and A. Rosas, Phys. Rev. Lett. **103**, 010402 (2009).
[20] A. L. De Lima, A. Rosas and I. A. Pedrosa, J. Mod. Opt. **56**, 59 (2009).
[21] A. L. De Lima, A. Rosas and I. A. Pedrosa, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **41**, 115503 (2008).
[22] M. Planck, *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung*, 5. Aufl., (J. A. Barth, Leipzig, 1923), p. 136.
[23] P. W. Milonni, *The Quantum Vacuum-An Introduction to Quantum Electrodynamics* (Academic Press, Boston, 1994).
[24] B. G. Sidharth In: S. C. Lim, R. Abd-Shukor and K. H. Kwek, Editors, *Frontiers of Quantum Physics* (Springer Verlag, Singapore, 1998).
[25] B. G. Sidharth, Int. J. Theor. Phys. **37**, 1307 (1998).
[26] B. G. Sidharth, Chaos, Solitons, & Fractals **16**, 613 (2003).
[27] M. Cirone, K. Rzążewski and J. Mostowski, Phys. Rev. A **55**, 62 (1997).
[28] M. A. Cirone and K. Rzążewski, Phys. Rev. A **60**, 886 (1999).
[29] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (John Wiley & Sons, New York, 1973), Chap. 4.
[30] J. R. Choi and M. Maamache, PIERS Online **6**, 113 (2010).
[31] J. R. Choi, Chinese Phys. B **19**, 010306 (2010).
[32] J. R. Choi and J. Y. Oh, Int. J. Mod. Phys. B **22**, 267 (2008).
[33] J. Schwinger, *Particles, Sources, and Fields* (Perseus Books, New York, 1998).
[34] D. Meschede. Phys. Rep. **5** 201 (1992).
[35] K. Olaussen and F. Ravndal, Nucl. Phys. B **192** 237 (1981).

الملخص:

هذا الانجاز ينقسم الى قسمين، الجزء الأول منه مكرس لإيجاد حلول معادلات ماكسويل ذات وسائط متعلقة كاظميا بالزمن في وسط خطي ناقل و متجانس. في الجزء الثاني سنقوم بتكميم حقل الضوء في وسط خطي متعلق بالزمن باستخدام طريقة اللامتغيرات للويس و روزنفيلد. سندرس ايضا تقلبات الحقل المغناطيسي عند النقطة صفر في وسط خطي متعلق بالزمن.

الكلمات المفتاحية: التكميم، الحقول الكهرومغناطيسية، الجمل المتعلقة بالزمن، الاطوار الهندسية، طور بيري، زاوية هاناي، نظرية اللامتغيرات، نظرية" لويس و روزنفيلد"، التقلبات، الأوساط المتعلقة بالزمن.

Résumé :

Ce travail est constitué de deux parties, la première consiste à déterminer la solution des équations de Maxwell avec des paramètres dépendant lentement du temps dans un milieu conducteur linéaire homogène non dispersif en absence de la source de charge électrique. Dans la deuxième partie, on va quantifier le champ de lumière dans un milieu linéaire dépendant du temps en utilisant la méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld. On va étudier aussi les fluctuations au point zéro du champ électromagnétique dans un milieu linéaire dépendant du temps.

Mots-clés : Quantification, champs électromagnétiques, systèmes dépendant du temps, phase géométrique, phase de Berry, angle de Hannay, la théorie des invariants, la théorie de Lewis-Riesenfeld, fluctuations, Milieu dépendant du temps.

Abstract:

This work is divided into two parts; the first consists in determining the solution of the Maxwell's equations with slowly time dependent parameters in a homogeneous linear conducting and nondispersive medium in the absence of the source of electric charge. In the second part, we will quantify the field of light in a time dependent linear medium by using the method of the invariants of Lewis-Riesenfeld. We will also study the zero-point fluctuations of the electromagnetic field in a linear time dependent medium.

Keywords: Quantification, electromagnetic fields, time dependent systems, geometrical phases, Berry's phase, Hannay's angle, the invariants theory, the Lewis-Riesenfeld theory, fluctuations, time dependent medium.