

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance, ainsi que mes vifs remerciements à Monsieur T.SERRAR pour avoir accepté de diriger ce travail, pour ses conseils et pour sa disponibilité permanente, en dépit de ses multiples responsabilités.

Je remercie aussi Monsieur S.DJABI qui a accepté d'être le président de ce jury.

Je remercie également Monsieur H.BENSERIDI qui a accepté d'examiner ce travail.

Enfin, je remercie ma famille, mes collègues, tous mes amis et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour l'élaboration de ce travail.

Table des matières

0.1	INTRODUCTION	5
1	FORMULATION MATHEMATIQUE DES PROBLEMES AUX LIMITES	7
1.1	Géométrie de la déformation	8
1.1.1	Définition d'un solide déformable	8
1.1.2	Notion de la déformation	8
1.1.3	Description analytique de la déformation	8
1.2	Equation du mouvement	10
1.3	Conditions aux limites	11
1.3.1	Conditions aux limites de déplacement-traction en dimension 1	11
1.3.2	Conditions aux limites de déplacement traction en dimension 3	11
1.4	Lois de comportement	13
1.4.1	Loi de comportement en dimension 1	13
1.4.2	Exemples d'essais	14
1.4.3	Notion de module de Young en 1807	18
1.5	Lois de comportement élastique non linéaire en dimension 1	19
1.6	Lois de comportement élastiques en dimension 3	21
1.7	Lois de comportement viscoplastiques	21

1.7.1	Loi de comportement viscoplastique en dimension 1 : . . .	24
1.8	Formulation des problèmes	29
2	ETUDE MATHEMATIQUE D'UN PROBLEME AUX LIMITES DE DEPLACEMENT-TRACTION EN ELASTICITE LINEAIRE	30
2.1	Etude théorique d'un problème aux limites de déplacement - traction en élasticité linéaire	31
2.1.1	Formulation du problème-Hypothèses	31
2.1.2	Unicité de la solution	32
2.1.3	Existence de la solution	33
2.1.4	Dépendance continue de la solution par rapport aux données	37
2.2	Exemples numériques	42
3	ETUDE MATHEMATIQUE D'UN PROBLEME AUX LIMITES DEPLACEMENT- TRACTION EN VISCOPLASTICITE	53
3.1	Formulation du problème-Hypothèses	54
3.2	Méthode de point fixe	56
3.2.1	Le principe de la méthode :	56
3.2.2	Algorithme permettant de calculer la solution en dimen- sion 1 :	64
3.2.3	Exemples numériques en dimension 1 :	66
4	UN PROBLEME D'EVOLUTION ABSTRAIT	76
4.1	Formulation du problème-Hypothèses :	77
4.2	Existence et unicité de la solution :	77
4.3	Une approche numérique	81
	Bibliographie	94

Notations

Soit Ω est un domaine de \mathbb{R}^N , on note par

Γ	: la frontière de Ω supposée assez régulière
Γ_1, Γ_2	: les parties de la frontière Γ
$mes\Gamma$: la mesure de Lebesgue superficielle de Γ_1
ν	: la normale extérieure unitaire à Γ
$p.p$: presque partout
X	: espace de Hilbert
X'	: le dual de X
$L^2(\Omega)$: espace des fonctions mesurables, de carré intégrable sur Ω
$L^\infty(\Omega)$: espace des fonctions mesurables sur Ω tel qu'il existe $c > 0$ $ u(x) \leq c$ p.p sur Ω
$D(\Omega)$: espace réel sur Ω de fonctions indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans Ω
$C^0(0.T.X)$: espace des fonctions continues de $(0.T)$ à valeurs dans X
$ X _{0.T.X}$: norme sur l'espace $C^0(0.T.X)$
$H^1(\Omega)$: espace de Sobolev
$H_0^1(\Omega)$: adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$
$H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$: espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Ω
\dot{f}, \ddot{f}	: dérivée première et seconde de f par rapport au temps
X^N	: espace défini par $X^N = \{x = (x_i) / x_i \in X, i = 1, 2, 3, \dots, N\}$
$X_s^{N \times N}$: espace défini par $X_s^{N \times N} = \{x = (x_{ij}) / x_{ij} = x_{ji} \in X, i, j = 1, 2, 3, \dots, N\}$
S_N	: espace des tenseurs d'ordre deux symétriques sur \mathbb{R}^N c-à-d $S_N = \mathbb{R}_s^{N \times N}$
0_N	: élément zéro de S_N
$ \cdot _X$: norme sur l'espace X
$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$: produit scalaire sur X
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$: produit de dualité entre X' et X
$L(X, Y)$: espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y ; en particulier $L(X) = L(X, X)$

$$\begin{aligned}
Div \sigma & : \text{divergence de } \sigma \\
\operatorname{div} D & : \text{divergence du vecteur } D \\
\varepsilon(u) & : \text{le tenseur de la déformation} \\
\nabla \varphi & : \text{le gradient de fonction } \varphi \\
H & = L^2(\Omega)^d \\
\mathcal{H} & = L^2(\Omega)_s^{d \times d} \\
H_1 & = \{u \in H / \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\} \\
\mathcal{H}_1 & = \{\theta \in L^2(\Omega) / \nabla \theta \in H\} \\
H^1(\Omega) & = \{u \in L^2(\Omega) / \partial_i u \in L^2(\Omega), i = 1 \dots d\} \\
H_\Gamma & = L^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\
\mathcal{H}_\Gamma & = \left(L^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^N \\
V & = \{u \in H_1 / \gamma u = 0 \text{ p.p sur } \Gamma_1\} \\
\mathcal{V} & = \{\sigma \in \mathcal{H}_1 / Div \sigma = 0 \text{ dans } \Omega, \sigma \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_2\} \\
W & = \{\sigma \in \mathcal{H}_1 / \sigma \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}
\end{aligned}$$

0.1 INTRODUCTION

Vu qu'il y a des propriétés de comportement des corps réels mises en évidence par les essais expérimentaux qui ne peuvent pas être décrites par les lois de comportement élastiques (viscosité, fluage, relaxation) c'est pour cela qu'on a considéré au début un corps élastique en mouvement soumis à des champs de contraintes et à des déformations. Ensuite on a considéré un corps viscoplastique dans les mêmes conditions.

Le but de ce mémoire est de proposer une étude mathématique de quelques problèmes aux limites pour des lois de comportement élastiques ou viscoplastiques dans le cadre des hypothèses de petites transformations (H.P.T).

Le mémoire est composé de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, avant d'établir le système d'équations aux dérivées partielles qui fera l'objet de notre étude tout en précisant le cadre de celle-ci, on a introduit quelques notions de la théorie de l'élasticité et la viscoplasticité concernant les lois de comportement, leur historique illustré par quelques exemples, les tenseurs, les équations du mouvement et les conditions aux limites.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un problème aux limites de déplacement traction en élasticité linéaire. On montrera l'existence et l'unicité de la solution du problème en utilisant le théorème de Lax-Milgram. On étudie également la dépendance continue de la solution par rapport aux données. Pour le cas non linéaire, on rappelle la méthode itérative utilisée par Lebri [7] pour résoudre le problème et on termine par quelques exemples numériques où on compare les solutions réelles et les solutions approchées.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'un problème aux limites en viscoplasticité. On montre l'existence et l'unicité de la solution en se basant seulement sur la méthode du point fixe. On achève ce chapitre par quelques exemples numériques pour tester l'algorithme proposé en comparant les solutions réelles et les solutions approchées.

Le quatrième chapitre est destiné à l'étude d'un problème d'évolution formulé dans un cadre hilbertien, ce problème abstrait est proposé uniquement dans le but d'offrir

une présentation dans un cadre plus général des problèmes étudiés dans les chapitres précédents. On démontre un résultat d'existence et d'unicité en utilisant la méthode de point fixe et on terminera par la proposition d'une approche numérique de la solution moyennant une méthode itérative.

On achève ce mémoire par une annexe résumant les principales notions, ainsi que quelques théorèmes importants en analyse fonctionnelle utilisés dans ce mémoire.

Chapitre 1

FORMULATION MATHÉMATIQUE DES PROBLÈMES AUX LIMITES

Dans ce premier chapitre, nous présentons le système d'équations aux dérivées partielles qui fera l'objet de notre étude en précisant le cadre de celle-ci.

Pour cela, nous introduisons quelques notions utilisées dans la théorie de l'élasticité. On donnera une idée sur l'historique et la signification mécanique de ces notions. Ces dernières porteront sur les tenseurs, les équations du mouvement, les conditions aux limites et les lois de comportement.

1.1 Géométrie de la déformation

1.1.1 Définition d'un solide déformable

Un solide déformable est un corps qui change de forme géométrique à cause des efforts extérieurs (mécaniques, thermiques, ou couplés).

1.1.2 Notion de la déformation

La déformation élastique est une déformation réversible : le milieu retourne à son état initial lorsqu'on supprime les sollicitations.

L'élasticité linéaire concerne les petites déformations proportionnelles à la sollicitation. Aux plus grandes déformations, l'élasticité devient non linéaire pour certains matériaux.

Le corps que nous étudions ici est déformable et en mouvement.

On désigne par Ω le domaine occupé par le corps à l'instant $t = 0$ (Ω s'appelle la configuration de référence), et par Ω_t le domaine occupé par le même corps à l'instant $t > 0$ (Ω_t s'appelle la configuration déformée).

$X = (X_i)$ désigne les composantes de la position d'une particule p du corps à l'instant $t = 0$.

$x = (x_i)$ désigne les composantes de la position de la même particule p à l'instant $t > 0$.

1.1.3 Description analytique de la déformation

Le lien entre $X \in \Omega$, et $x \in \Omega_t$ est donné par une application vectorielle :

$$\Phi(., t) : \Omega \rightarrow \Omega_t \quad \forall t > 0$$

$$X \rightarrow \Phi(X, t)$$

$$(1.1) \quad x = \Phi(X, t) = X + u(X, t) \quad t > 0 \quad X \in \Omega$$

Avec $u(X, t)$ le vecteur de déplacement.

$\Phi(., t)$ est appelé application déformation . En particulier la vitesse et l'accélération, sont définies respectivement par :

$$(1.2) \quad v = \dot{\Phi} = \frac{\partial (\Phi(X, t))}{\partial t} = \dot{u}$$

$$(1.3) \quad a = \dot{v} = \ddot{u} = \frac{\partial^2 (\Phi(X, t))}{\partial t^2}$$

Nous introduisons les notations suivantes :

$$(1.4) \quad F = \nabla_X \Phi = I_N + H \quad (\text{avec } H = \nabla_X u)$$

$$(1.5) \quad C = FF^T = (I_N + H + H^T + HH^T)$$

$$(1.6) \quad G = \frac{1}{2}(C - I_N) = \frac{1}{2}(H + H^T + HH^T)$$

Où $\nabla_X \Phi$ désigne le gradient de Φ par rapport aux coordonnées de la variable X , H^T est la transposée de H , F^T est la transposée de F et I_N est la matrice unité d'ordre N , F est le tenseur gradient de la déformation, C est le tenseur des dilatations ou tenseur des déformations de Cauchy tandis que le tenseur G est le tenseur des déformations ; en composantes on a :

$$(1.7) \quad G_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

On remarque que le tenseur des déformations G s'exprime d'une façon non linéaire par rapport aux composantes du vecteur déplacement u .

Précisons maintenant un peu plus le cadre de notre étude afin d'apporter quelques simplifications aux notions introduites récemment.

Remarque 1.1

Nous nous intéressons aux mouvements qui ont un vecteur de déplacement $u(X, t)$ qui varie lentement avec X . Alors les dérivées partielles $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ sont petites, on dira alors qu'on est dans l'hypothèse des petites transformations (H.P.T). Dans ce cas, les termes $(\frac{\partial u_k}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial X_j})$ sont négligés et l'expression de G se linéarise en ε :

$$(1.8) \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(H + H^T)$$

Ou en composantes :

$$(1.9) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

Le tenseur ε s'appelle le tenseur des déformations linéarisé.

Nous allons maintenant établir l'équation du mouvement du système matériel et préciser les conditions aux limites que nous considérons.

1.2 Equation du mouvement

La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence du torseur des forces extérieures et du torseur des accélérations pour un système quelconque, conduit aux équations du mouvement suivantes :

$$(2.1) \quad \text{Div} \sigma + f = \rho \ddot{u}. \quad \text{dans } \Omega_t, t > 0$$

Où $f : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ représente le champ de densité des forces volumiques appliquées sur le corps et

$$\text{Div} \sigma \left(\text{Div} \sigma = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)$$

Est la divergence du champ des contraintes.

Les équations du mouvement (2.1) ne peuvent être utilisées comme telles car elles dépendent de la déformation qui est précisément l'inconnue ; d'où la nécessité de leur réécriture dans la configuration de référence, on prouve sous des hypothèses et un changement de notation (voir Ciarlet[1]) que l'équation (2.1) devient :

$$(2.3) \quad \text{Div} \sigma + f = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]$$

Le processus d'évolution modélisé par l'équation (2.3) s'appelle processus dynamique.

Dans certaines situations, l'équation (2.3) peut encore se simplifier, par exemple dans le cas où le champ des vitesses \dot{u} varie très lentement, le terme $\rho \ddot{u}$ peut être négligé et l'équation (2.3) devient :

$$(2.4) \quad \text{Div} \sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

Dans la suite, on va appeler (2.3) équation de mouvement et (2.4) équation d'équilibre.

Pour compléter le modèle mathématique donné par (2.3) ou (2.4), il faut préciser les conditions aux limites qu'on impose.

1.3 Conditions aux limites

Les sollicitations surfaciques imposent des conditions sur la solution aux frontières du domaine Ω , et qu'on appelle généralement "conditions aux limites", mais elles peuvent être très diverses. Soit un corps déformable occupant un domaine Ω de IR^N et ayant une frontière Γ .

on suppose $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, une partition de Γ .

sur Γ_1 on impose un déplacement g

sur Γ_2 on impose une force traction h

1.3.1 Conditions aux limites de déplacement-traction en dimension 1

Soit $\Omega =]a, b[$, telle que : $\partial\Omega = \Gamma$

Où : $\Gamma_1 = \{a\}$ et $\Gamma_2 = \{b\}$

Les conditions aux limites dans le cas unidimensionnel deviennent :

$$(3.1) \quad u(a) = g$$

$$(3.2) \quad \sigma(b) = h$$

1.3.2 Conditions aux limites de déplacement traction en dimension 3

Soit : $\Omega \subset IR^3$, tel que : $\partial\Omega = \Gamma$

On suppose $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ une partition de Γ .

Les conditions aux limites sont données par :

$$(3.3) \quad u = g \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$(3.4) \quad \sigma \nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2$$

La condition (3.3) est appelée condition aux limites de déplacement.

Sa signification consiste à ce que le champ des déplacements est imposé sur la partie Γ_1 de la frontière Γ , la fonction g étant une donnée du problème. La condition (3.4) est appelée condition aux limites de traction, h représentant la densité des forces appliquées sur la surface et constituant une donnée du problème.

Si $\Gamma_1 = \emptyset$ le problème aux limites est un problème de traction pure et si $\Gamma_2 = \emptyset$ le problème aux limites est un problème de déplacement pur.

Remarque 1.2 :

Ainsi compte tenu de (2.3), (2.4), le système matériel peut être décrit à l'équilibre par les équations suivantes :

$$(3.5) \quad \text{Div} \sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(3.6) \quad u = g \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$(3.7) \quad \sigma \nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2$$

Les inconnues sont :

$$u_i : \Omega \rightarrow IR, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\sigma_{ij} : \Omega \rightarrow IR, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Puisque σ est symétrique, on aura neuf inconnues :

$$u = (u_i), \quad \sigma = (\sigma_{ij}) \quad i, j = 1, \dots, N$$

Du point de vue mathématique, nous avons trois équations avec neuf inconnues, il est improbable de résoudre ce problème. De même, du point de vue physique, décrire le mouvement d'un corps uniquement par (3.5)-(3.7) signifierait que, soumis à des conditions identiques, les divers milieux continus auraient des comportements identiques ; ce qui est faux. D'où l'intérêt de caractériser le comportement de chaque type de matériau par des relations qu'on appellera lois de comportement ; c'est l'objet du paragraphe suivant :

1.4 Lois de comportement

D'une façon générale, les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. En voici quelques exemples :

1.4.1 Loi de comportement en dimension 1

Le point de départ des lois de comportement est en dimension 1, on va voir un peu l'historique des expériences qui concernent ce point.

Loi de Hooke en 1678 :

L'idée est apparue en 1670, la loi de Hooke est une loi de comportement élastique linéaire des solides soumis à une déformation de faible amplitude. Cette loi de comportement a été énoncée par Robert Hooke en 1678, après une expérience faite en 1675, il a dit "**telle extension, telle force**" ou bien en termes modernes : **l'allongement est proportionnel à la force** Hooke désirait obtenir une théorie des ressorts, en soumettant ces derniers à des forces successives. De cette loi on tire deux aspects importants :

- a. La linéarité.
- b. L'élasticité.

Ces deux aspects ne sont pas identiques. La linéarité exprime que l'allongement est proportionnel à la force. L'élasticité exprime que cet effet est réversible et permet donc de revenir à l'état initial tel un ressort soumis à des forces faibles. L'élasticité a une limite qui est indépendante de la notion de linéarité.

Hooke n'a considéré que la phrase élastique et linéaire, donc proportionnelle et réversible.

C'est en quelque sorte une analogie avec l'allongement $(l - l_0)$ d'un ressort de raideur

k soumis à une force F avec :

l : longueur du ressort étiré ou comprimé.

l_0 : longueur du ressort à vide .

Pour un ressort, on a : $F = k \times (l - l_0)$

Remarque 1.3 :

La loi de Hooke s'exprime alors sous la forme :

$$\sigma = E.\varepsilon$$

Expérience de Leibnitz en 1690 :

Une première expérience pour les solides déformables a été faite par Leibniz en 1690, dans un labo sur la tige métallique (acier-doux).

1.4.2 Exemples d'essais

On considère une barre de section S et de longueur l_0 , on lui applique une force $F(t)$ à une extrémité, tandis que l'autre est maintenue fixée. On mesure l'allongement $l(t)$ de la barre, on définit la contrainte σ et la déformation ε par les égalités :

$$\sigma(t) = \frac{F(t)}{S}; \quad \varepsilon(t) = \frac{l(t) - l_0}{l_0}$$

Et on représente la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$.

On peut imaginer les essais suivants :

a-Essai de chargement monotone :

On considère une tige de longueur $l_0 = b - a$ et de section $S = 150 \text{ mm}^2$. La tige est fixée en a , et tirée de l'autre extrémité b avec une force $F(t)$ à chaque instant. L'opérateur peut voir avec grande précision et à l'aide d'un manomètre la valeur $F(t)$ augmenter progressivement de '0' à une certaine valeur ainsi que la longueur $l(t)$ correspondante.

$t=0$, la longueur de la tige est $l_0 = b - a$, $F(0) = 0$

$$t = t_0 \rightarrow F(t = 0) \rightarrow l_0 = ab$$

$$t = t_1 \rightarrow F(t_1) \rightarrow l(t_1)$$

$$t = t_2 \rightarrow F(t_2) \rightarrow l(t_2)$$

. .

$$t = t_j \rightarrow F(t_j) \rightarrow l(t_j)$$

$$\sigma(t) = \frac{F(t)}{S} \text{ et } \varepsilon(t) = \frac{l(t)-l_0}{l_0}$$

Leibniz a défini σ, ε et a tracé la courbe représentative σ en fonction de ε ($\sigma = \sigma(\varepsilon)$) où $\sigma(t)$ est le tenseur de contrainte et $\varepsilon(t)$ est le tenseur de déformation linéarisé.

$$\sigma_0 = \frac{3600 \text{ déca Newton}}{150 \text{ mm}^2}$$

Commentaire :

Tant que $\sigma(t)$ ne dépasse pas σ_0 les déformations sont très faibles et augmenteraient proportionnellement avec $\sigma(t)$.

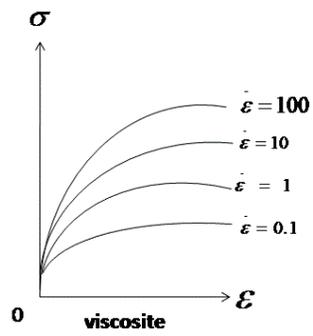
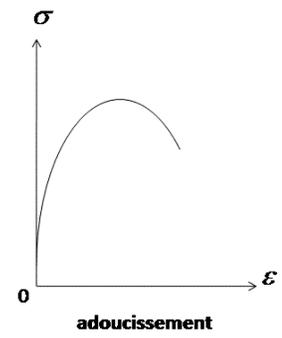
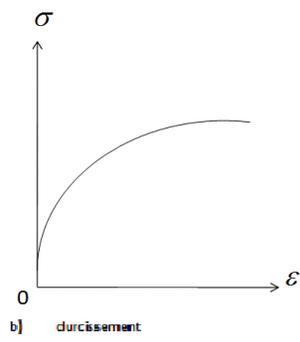
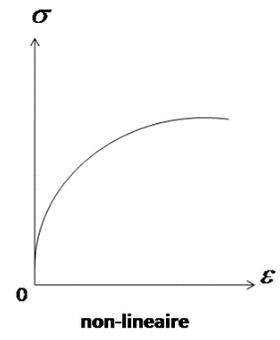
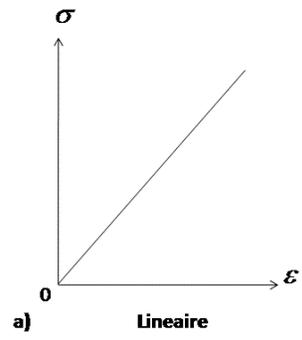
La représentation de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ met en évidence le phénomène suivant :

*La linéarité ou non linéarité de la courbe.

Cet essai permet de mettre en évidence les phénomènes suivants :

*L'adoucissement éventuel (la non monotonie de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$).

*La viscosité (on change $\dot{\varepsilon}$ =constante on peut obtenir des courbes $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ différentes, ce qui met en évidence le rôle de l'échelle de temps).



b-Essai de charge-décharge :

On augmente la force F puis on la ramène à zéro. Cet essai permet de mettre en évidence le comportement élastique ou anélastique du corps. Si les courbes de charge-décharge $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ coïncident, le milieu est élastique ; dans le cas contraire il est anélastique.



De ces expériences, on établit des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations linéarisées. Celles ci sont appelées lois de comportement.

Remarque 1.4 :

·L'analogie avec la constante de raideur du ressort est donc le module de Young.

Loi de comportement élastique linéaire en dimension 1

Le point de départ était la loi de comportement linéaire donnée par :

$$\sigma = E\varepsilon$$

Qui exprime une dépendance linéaire dans la relation contrainte-déformation.

Où :

· σ est la contrainte.

· E est le module de Young.

· ε est l'allongement relatif.

1.4.3 Notion de module de Young en 1807

Le module de Young ou module d'élasticité ou encore module de traction est la constante qui relie la contrainte de traction (ou de compression) et la déformation pour un matériau élastique.

Le physicien britannique Thomas Young (1773-1829) avait remarqué que le rapport entre la contrainte de traction appliquée à un matériau et la déformation qui en résulte (un allongement relatif) est constant, tant que cette déformation reste petite et que la limite d'élasticité du matériau n'est pas atteinte. La loi d'élasticité linéaire est la loi de Hooke :

$$\sigma = E\varepsilon$$

Un matériau dont le module de Young est très élevé est dit rigide. L'acier, l'iridium, le diamant, sont des matériaux très rigides, l'aluminium et le plomb le sont moins, les matières plastiques et organiques sont généralement peu rigides. Il ne faut cependant pas confondre élasticité et rigidité puisque la raideur d'une poutre par exemple dépend de son module Young mais aussi du moment d'inertie de sa section.

·lorsque l'on augmente la température, une éprouvette de métal s'allonge (dilatation), donc son module de Young diminue, tandis que l'éprouvette en polymère se raccourcit donc son module de Young augmente.

·lorsque l'on diminue la température, on observe le phénomène inverse : l'éprouvette de métal se raccourcit (contraction) donc son module de Young augmente, tandis que l'éprouvette de polymère s'allonge (les chaînes sont moins agitées et se laissent étirer) donc son module de Young diminue.

Ainsi, le tableau suivant représente quelques matériaux avec leurs coefficients

d'élasticité (tableau de Young) :

Matériau	Valeur de E en Déca – Newton/mm ²
Acier	(1.87-2.16).10 ⁵
Fonte	(0.88-1.47).10 ⁵
Cuivre	(0.98-1.28).10 ⁵
Aluminium	(0.69-0.71).10 ⁵
Caoutchouc	(3.00-7.80).10 ⁵

1.5 Lois de comportement élastique non linéaire en dimension 1

La loi constitutive est de la forme :

$$\sigma = F(\varepsilon(u))$$

Où F est un opérateur linéaire ou non linéaire. Cette loi permet de mettre en évidence l'adoucissement ou le durcissement du matériau suivant que F est monotone ou non.

EXEMPLE :

Nous présentons maintenant un exemple de loi élastique dans le cas unidimensionnel :

On a :

$$(4.1) \quad \sigma = E(\varepsilon) + G(\varepsilon)$$

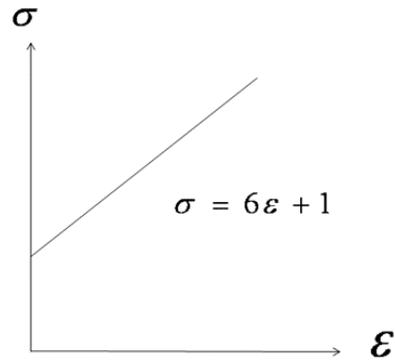
Où : $E > 0$ est le module de Young,

$$\sigma, \varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

On prend : $G = \varepsilon + 1$, $E = 5$, (4.1) devient :

$$\sigma = 5(\varepsilon) + \varepsilon + 1$$

$$\sigma = 6(\varepsilon) + 1$$



s.pdf

Interprétation mécanique

Soit : $\Omega =]a, b[$; avec $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ et $\partial\Omega = \Gamma$ tel que :

$$\Gamma_1 = \{a\}, \Gamma_2 = \{b\}, \varepsilon(u) = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

$$(4.2) \quad \sigma = F(\varepsilon(u)) \quad \text{dans } \Omega$$

$$(4.3) \quad u(a) = u_0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$(4.4) \quad \sigma(b) = \sigma_0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

Une tige unidimensionnelle de longueur $b - a$, ($\Omega =]a, b[$) ayant une loi de comportement élastique non linéaire : ($\sigma = F(\frac{\partial u}{\partial x})$).

On impose à l'extrémité a un déplacement égal à u_0 et à l'extrémité b une force de traction égale à σ_0 (si $u_0 = 0$, on dit que la tige est fixée en a).

1.6 Lois de comportement élastiques en dimension 3

Les lois de comportement élastiques en dimension 1 présentées dans la section précédente peuvent se généraliser au cas bidimensionnel et tridimensionnel.

1.7 Lois de comportement viscoplastiques

Pour les matériaux viscoplastiques la loi de comportement est de la forme :

$$(4.1) \quad \dot{\sigma} = \xi(\dot{\varepsilon}) + G(\sigma, \varepsilon)$$

Où $\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$, $\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$, ξ est un tenseur d'ordre quatre et G est une fonction constitutive donnée.

Les lois de comportement (4.1) s'appellent *lois viscoplastiques semi linéaires*. On peut envisager d'autres lois plus compliquées par exemple dans le cas où $\xi = \xi(\sigma, \varepsilon)$ (*lois viscoplastiques quasilineaires*). On suppose toujours que ξ est un tenseur inversible donc $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$ jouent des rôles symétriques dans l'équation (4.1) ; plus précisément (4.1) équivaut à

$$(4.2) \quad \dot{\varepsilon} = \tilde{\xi} \dot{\sigma} + \tilde{G}(\sigma, \varepsilon)$$

où $\tilde{\xi} = \xi^{-1}$ est l'inverse du tenseur ξ et $\tilde{G}(\sigma, \varepsilon) = -\xi^{-1}G(\sigma, \varepsilon)$. L'équation (4.2) met en évidence une décomposition additive du tenseur $\dot{\varepsilon}$:

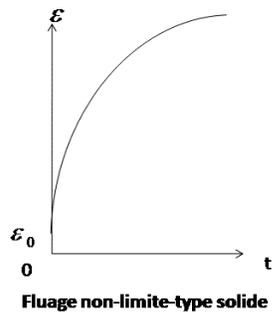
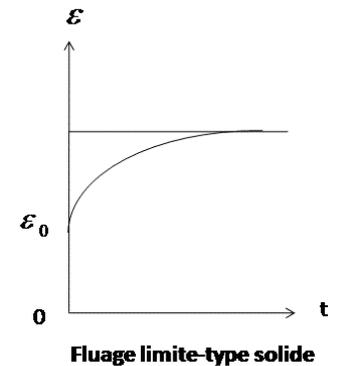
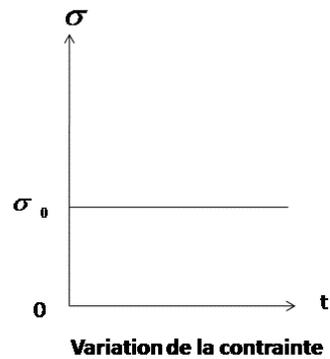
$$(4.3) \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^E + \dot{\varepsilon}^{AN}$$

La partie $\dot{\varepsilon}^E$ s'appelle *partie élastique* (réversible) du tenseur $\dot{\varepsilon}$ tandis que $\dot{\varepsilon}^{AN}$ s'appelle *partie anélastique* (irréversible) du tenseur $\dot{\varepsilon}$.

Essai de fluage : On commence par un essai de chargement monotone tel qu'à un instant t (considéré désormais l'instant initial $t = 0$) on ait :

$\sigma(0) = \sigma_0, \varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et $F(0) = F_0$. On maintient F constante au cours du temps. La contrainte reste constante pour $t > 0$. Généralement, la déformation augmente avec le temps ; c'est le fluage.

Si cette déformation reste limitée lorsque t tend vers l'infini, le milieu a un comportement du type solide. Si elle n'est pas limitée, il est du type fluide.



d-Essai de relaxation :

On maintient la déformation constante dans le temps. Généralement, les contraintes se relâchent au cours du temps ; c'est la relaxation.

Si la relaxation est totale $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$, le matériau est de type fluide.

Si $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \bar{\sigma}, \bar{\sigma} > 0$, le matériau est du type solide.

1.7.1 Loi de comportement viscoplastique en dimension 1 :

Nous présentons maintenant quelques exemples de lois viscoplastiques semi-linéaires, dans le cas unidimensionnel ; on a :

$$(4.5) \quad \dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} + G(\sigma, \varepsilon)$$

Où $E > 0$ est le module de Young, $\sigma, \varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Exemple 4.1 : (modèle de Maxwell, 1867)

On prend $G(\sigma, \varepsilon) = -\sigma$, donc (4.1) devient

$$(4.6) \quad \dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - \sigma$$

C'est un modèle viscoélastique ($k = 1$ et $F = 0$ dans $(G(\sigma, \varepsilon) = -k(\sigma - F(\varepsilon)))$). Il est capable de décrire les phénomènes de fluage et de relaxation. En effet si on prend $\sigma(t) = \sigma_0 \forall t \geq 0$ dans (4.6) on obtient

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E} \text{ donc } \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}t + \varepsilon_0 \text{ où } \varepsilon_0 = \varepsilon(0)$$

C'est -à-dire on a l'accroissement en temps de la déformation (fluage).Egalement si on prend $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \forall t \geq 0$ dans (4.6) on obtient $\dot{\sigma} = -\sigma$ d'où

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-t} \quad \text{où } \sigma_0 = \sigma(0)$$

On obtient la décroissance en temps de la contrainte (relaxation). Les deux expériences ci-décrites sont présentées en figure 1 .Suite à la terminologie introduite au paragraphe 1.4.2 le milieu décrit par l'équation de Maxwell (4.6) est du type fluide (les déformations ne sont pas limitées dans le fluage, la relaxation de la contrainte est totale).

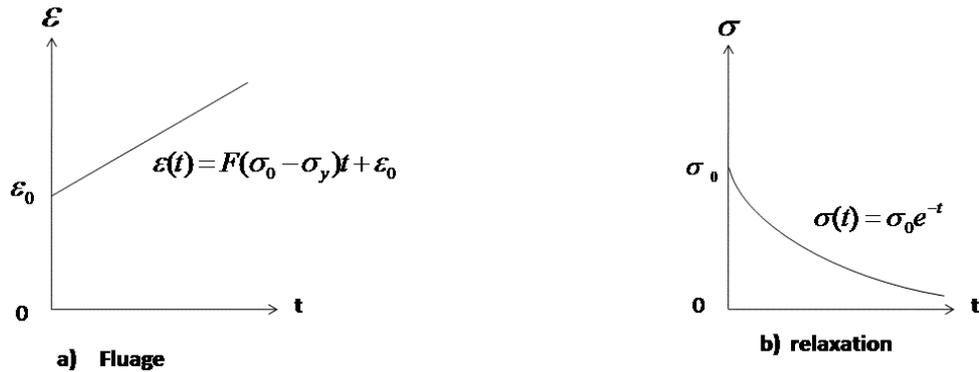


fig.1.Modèle de Maxwell

Exemple 4.2 : (modèle de Sokolowski, 1948).

On prend dans (4.1)

$$(4.7) \quad G(\sigma, \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\sigma| \leq \sigma_y \\ (-\text{sgn } \sigma)F(|\sigma| - \sigma_y) & \text{si } |\sigma| > \sigma_y \end{cases}$$

Où σ_y est une constante strictement positive appelée seuil de plasticité, $\text{sgn } \sigma$ est le signe de σ ($\text{sgn } \sigma = 1$ si $\sigma >$

0 et $\text{sgn } \sigma = -1$ si $\sigma < 0$) et $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière satisfaisant à $F(0) = 0$, $F(r) > 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}_+$. D'habitude on considère $F(r) = kEr$ où $k > 0$ est un coefficient de viscosité et $E > 0$ est le module de Young. Le modèle de sokolowski peut décrire les phénomènes de fluage, de relaxation et également d'anélasticité. Comme on peut voir dans ce qui suit :

a) si à l'instant $t = 0$ on a $\sigma(0) = \sigma_0 > \sigma_y$, $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et $\sigma(t) = \sigma_0 \quad \forall t > 0$, (4. 1) et (4.7) impliquent

$$\dot{\varepsilon}(t) = -\frac{G(\sigma_0, \varepsilon(t))}{E} = \frac{1}{E} F(\sigma_0 - \sigma_y)$$

Donc

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E}F(\sigma_0 - \sigma_y)t + \varepsilon_0 \quad \forall t \geq 0$$

On obtient un accroissement en temps de la déformation (fluage). Les déformations ne sont pas limitées en temps (voir fig. 2. a);

b) si à l'instant $t = 0$ on a $\sigma(0) = \sigma_0 > \sigma_y$, $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \quad \forall t > 0$ alors (4.1) et (4.7) impliquent

$$\dot{\sigma}(t) = G(\sigma(t), \varepsilon_0) = -F(\sigma(t) - \sigma_y) < 0.$$

donc σ est décroissante en temps (relaxation); on obtient facilement que $\sigma(t) > \sigma_y \quad \forall t \geq 0$ donc la relaxation n'est pas totale (voir fig. 2. b);

c) dans le domaine $|\sigma| \leq \sigma_y$ la loi de comportement (4.1), (4.7) est élastique ($\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$); par conséquent, la courbe $\sigma = (\dot{\varepsilon})$ pour un essai de charge-décharge dans lequel σ dépasse la valeur σ_y et qui commence à l'état $\sigma(0) = \varepsilon(0) = 0$ a la forme de la figure 2.c qui met en évidence la déformation résiduelle ε^R (anélasticité). On remarque également que le modèle de Sokolowski décrit une *plasticité parfaite* car les déformations anélastiques ne se manifestent que lorsque la contrainte atteint le seuil fixe σ_y (ou $-\sigma_y$ lorsqu'il s'agit d'une compression).

sokolowski

Nous présentons un exemple tridimensionnel de loi de comportement viscoplastique de la forme (4.2), assez fréquemment considérée en littérature :

Exemple 4.3 : (viscoplasticité de type Perzyna)

On prend dans (4.2)

$$(4.8) \quad \dot{\tilde{G}}(\sigma, \varepsilon) = \dot{\tilde{G}}(\sigma) = \frac{1}{2\mu}(\sigma - P_K\sigma)$$

Où $\mu > 0$ est un coefficient de viscosité, $K \in S_3$ est un convexe fermé tel que $0_3 \in K$ et $P_K : S_3 \rightarrow K$ est l'opérateur de projection sur K (voir le théorème A5-7). En utilisant (4.3) on obtient

$$(4.9) \quad \dot{\varepsilon}^{AN} = \frac{1}{2\mu}(\sigma - P_K\sigma)$$

Et comme $\sigma = P_K\sigma$ si et seulement si $\sigma \in K$ il résulte que les déformations anélastiques ne se manifestent que pour les états de contraintes qui n'appartiennent pas au convexe K . Ce convexe est d'habitude défini par l'égalité

$$(4.10) \quad K = \{\sigma \in S_3 / F(\sigma) \leq 0\}$$

Où $F : S_3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe, continue, telle que $F(0_3) = 0$. L'équation $F(\sigma) = 0$ définit le critère de plasticité car d'après (4.9) et (4.10) la surface définie dans l'espace des contraintes par cette équation sépare la région de comportement élastique de la région de comportement plastique ($\dot{\varepsilon}^{AN} = 0 \Leftrightarrow F(\sigma) \leq 0$). Des exemples classiques des critères de plasticité peuvent être obtenus en prenant.

$$(4.11) \quad F(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^D \cdot \sigma^D - k^2 \quad (\text{von Mises})$$

$$(4.12) \quad F(\sigma) = \max_{i,j=1,2,3} |\sigma_i - \sigma_j| - k^2 \quad (\text{Tresca})$$

$$(4.13) \quad F(\sigma) = \max(|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|, |2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3|, |2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|) - k^2$$

Les notations en (4.11)-(4.13) sont les suivantes :

σ^D : Le déviateur de σ ;

σ_i : Les valeurs propres de σ ;

k : constante strictement positive (limite de plasticité).

Nous allons maintenant compléter le modèle mathématique, en donnant la formulation des différents problèmes :

1.8 Formulation des problèmes

L'évolution d'un corps déformable sous l'action des efforts extérieurs est modélisée mathématiquement par un système d'équations linéaire ou non linéaire aux dérivées partielles, posé sur un domaine $\Omega \in IR^N$. Ce système comprend l'équation de mouvement ou d'équilibre du corps, la loi de comportement du matériau ainsi que les conditions initiales et aux limites de déplacement-traction.

Les problèmes mécaniques qu'on va étudier sont les suivants :

Problème 1.1.

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \rightarrow IR$ et le champ contraintes $\sigma : \Omega \rightarrow S_N$ tels que :

$$(1.1) \quad Div\sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(1.2) \quad \sigma = F\varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega$$

$$(1.3) \quad u = g \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$(1.4) \quad \sigma \cdot \nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2$$

Problème 1.2.

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow IR$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_N$ tels que :

$$(2.1) \quad Div\sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

$$(2.2) \quad \dot{\sigma} = \xi(\varepsilon(\dot{u})) + G(\sigma, \varepsilon) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

$$(2.3) \quad u = g \quad \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[$$

$$(2.4) \quad \sigma \cdot \nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2 \times]0, T[$$

$$(2.5) \quad u(0) = u_0 ; \sigma(0) = \sigma_0 \quad \text{dans } \Omega$$

Chapitre 2

ETUDE MATHÉMATIQUE D'UN PROBLÈME AUX LIMITES DE DEPLACEMENT-TRACTION EN ELASTICITE LINEAIRE

Nous proposons dans ce chapitre une étude de l'existence et de l'unicité de la solution d'un problème aux limites en élasticité.

Pour l'existence nous présentons une méthode qui utilise le théorème de Lax-Milgram et nous présentons aussi un résultat de dépendance continue de la solution par rapport aux données.

2.1 Etude théorique d'un problème aux limites de déplacement -traction en élasticité linéaire

Nous proposons dans cette partie une étude de l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites en élasticité linéaire. La démonstration de l'existence de la solution est basée sur théorème de Lax-Milgram.

Pour finir, nous étudierons la dépendance continue de cette solution par rapport aux données.

2.1.1 Formulation du problème-Hypothèses

Nous considérons les équations qui décrivent l'équilibre d'un corps élastique obéissant à une loi de comportement linéaire. Ce corps occupe un domaine Ω de IR^3 de frontière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$

Le problème est le suivant :

Trouver le champ de déplacements $u : \Omega \rightarrow IR^3$ et le champ $\sigma : \Omega \rightarrow S_3$ tels que :

$$(2.1) \quad Div\sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(2.2) \quad \sigma = \xi\varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega$$

$$(2.3) \quad u = g \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$(2.4) \quad \sigma\nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2$$

L'équation (2.1) représente l'équation d'équilibre où f est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable. (2.2) représente la loi de comportement élastique linéaire introduite dans le premier chapitre. (2.3) et (2.4) sont les conditions aux limites de déplacement traction.

On présente maintenant les hypothèses sur les données pour avoir l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1)-(2.4).

Hypothèses sur les fonctions constitutives :

$$(2.5) \left\{ \begin{array}{l} \xi : S_3 \rightarrow S_3 \text{ tels que :} \\ a) \xi\sigma.\tau = \sigma.\xi\tau, \forall \sigma, \tau \in S_3 \\ b) \exists \alpha > 0 / \xi\sigma.\sigma \geq \alpha |\sigma|^2 . \forall \sigma \in S_N \end{array} \right.$$

Hypothèses sur les données :

$$(2.6) \quad f \in H$$

$$(2.7) \quad g \in H_\Gamma$$

$$(2.8) \quad h \in H'_\Gamma$$

Sous les hypothèses (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.1 :

Soit mesure $\Gamma_1 > 0$, sous les hypothèses (2.5)-(2.8) le problème (2.1)-(2.4) admet une solution unique $u \in H_1, \sigma \in \mathcal{H}_1$

Donnons une démonstration de ce théorème.

2.1.2 Unicité de la solution

Soient $(u_i, \sigma_i)_{i=1,2} \in H_1 \times \mathcal{H}_1$ deux solutions de (2.1)-(2.4).

On pose :

$$(2.9) \quad u = u_1 - u_2; \sigma = \sigma_1 - \sigma_2$$

Le système (2.1)-(2.4) écrit pour chacune des deux solutions nous donne par différence des deux systèmes obtenus :

$$(2.10) \quad Div\sigma = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(2.11) \quad \sigma = \xi\varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega$$

$$(2.12) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$(2.13) \quad \sigma.\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

On a : $u_1, u_2 \in H_1 \Rightarrow u_1 - u_2 \in H_1$ (H_1 espace vectoriel).

$$\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{H}_1 \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 \in \mathcal{H}_1$$

Les égalités (2.10), (2.12) et (2.13) impliquent :

$$(2.14) \quad u \in V; \sigma \in \mathcal{V}$$

On a la formule de base :

$$\langle \sigma, \nu, \gamma u \rangle_{H'_1 \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} + \langle \text{Div} \sigma, u \rangle_{H \times H}. \forall u \in H_1, \sigma \in \mathcal{H}_1$$

D'après la définition de V et ϑ on a :

$$\sigma, \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \text{Div} \sigma = 0 \text{ dans } \Omega, \gamma u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ d'où :}$$

$$(2.15) \quad \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} = 0. \forall u \in V; \sigma \in \vartheta$$

(2.15) définit l'orthogonalité de $\varepsilon(V)$ et ϑ .

Alors d'après (2.11) on a :

$$\langle \sigma, \varepsilon(u_1 - u_2) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \xi \varepsilon(u_1 - u_2), \varepsilon(u_1 - u_2) \rangle_{\mathcal{H}} = 0$$

$$(2.16). \langle \xi \varepsilon(u_1 - u_2), \varepsilon(u_1 - u_2) \rangle_{\mathcal{H}} = 0$$

D'après l'hypothèse (2.5) on a : $\exists \alpha > 0$ tels que :

$$0 = \langle \xi \varepsilon(u_1 - u_2), \varepsilon(u_1 - u_2) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \alpha |\varepsilon(u_1 - u_2)|_{\mathcal{H}}^2$$

En utilisant maintenant l'inégalité de Korn on obtient :

$$0 \geq \alpha |\varepsilon(u_1 - u_2)|_{\mathcal{H}}^2 \geq \alpha c^2 |u_1 - u_2|_{H_1}^2 \geq 0$$

On obtient : $|u_1 - u_2|_{H_1} = 0$ d'où $u_1 = u_2$

D'autre part on a : $\sigma_1 - \sigma_2 = \xi \varepsilon(u_1 - u_2)$ et puisque $u_1 = u_2$ il vient :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 0 \text{ d'où } \sigma_1 = \sigma_2$$

Ce qui donne l'unicité de la solution (si elle existe).

2.1.3 Existence de la solution

Pour l'existence de la solution nous appliquons le théorème suivant (Lax Milgram)

Soit X un espace de Hilbert et soit $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire et coercive ;
c'est-à-dire qu'il existe des constantes M, m strictement positives telles que :

$$|a(u, v)| \leq M |u|_X |v|_X \quad \forall u, v \in X$$

$$a(u, u) \geq m |u|_X^2 \quad \forall u \in X$$

Alors pour tout $l \in X'$ il existe $u \in X$ unique tel que :

$$a(u, v) = l(v). \forall v \in X$$

Soit l'espace variationnel défini par :

$$V = \{u \in H_1 \text{ telle que } \gamma.u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram, on obtient l'existence d'un élément $\tilde{u} \in V$.

En admettant la décomposition suivante :

$$(2.17) \quad u = \tilde{u} + \hat{u} \quad \text{où}$$

$$(2.18) \quad \hat{u} = Zg$$

Passons maintenant à la formulation variationnelle du problème (2.1)-(2.4) :

En multipliant les deux termes de (2.1) par une fonction $v \in V$, on obtient par intégration sur Ω :

$$\int_{\Omega} \text{Div} \sigma \cdot v dx + \int_{\Omega} f \cdot v dx = 0 \quad \forall v \in V$$

En appliquant la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx - \int_{\Gamma} \sigma \cdot \nu \cdot \gamma v d\nu + \int_{\Omega} f \cdot v dx = 0 \quad \forall v \in V$$

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx - \int_{\Gamma_1} \sigma \cdot \nu \cdot \gamma v d\nu - \int_{\Gamma_2} \sigma \cdot \nu \cdot \gamma v d\nu + \int_{\Omega} f \cdot v dx = 0 \quad (\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2); \forall v \in V$$

D'après (2.4) et la définition de V on a : $\sigma \cdot \nu = h$ sur Γ_2 et $\gamma v = 0$ sur Γ_1

$$\text{Alors : } \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx - \int_{\Gamma_2} h \cdot \gamma v d\nu + \int_{\Omega} f \cdot v dx = 0 \quad \forall v \in V$$

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} - \langle h, \gamma v \rangle_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}} + \langle f, v \rangle_H = 0 \quad \forall v \in V$$

D'après (2.2) :

$$\langle \xi \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} - \langle h, \gamma v \rangle_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}} + \langle f, v \rangle_H = 0 \quad \forall v \in V$$

Et d'après (2.17) :

$$\langle \xi \varepsilon(\tilde{u}), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle h, \gamma v \rangle_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}} - \langle f, v \rangle_H - \langle \xi \varepsilon(\hat{u}), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V$$

On pose .:

$$(2.19) \quad a(\tilde{u}, v) = \langle \xi \varepsilon(\tilde{u}), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}$$

$$(2.20) \quad l(v) = \langle h, \gamma v \rangle_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}} - \langle f, v \rangle_H - \langle \xi \varepsilon(\hat{u}), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V$$

1/On démontre que $a(., .)$ est une forme bilinéaire :

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, v_1, v_2 \in V$ on montre que :

$$a(\alpha \tilde{u}_1 + \beta \tilde{u}_2, v) = \alpha a(\tilde{u}_1, v) + \beta a(\tilde{u}_2, v)$$

$$\begin{aligned} a(\alpha \tilde{u}_1 + \beta \tilde{u}_2, v) &= \langle \xi \varepsilon(\alpha \tilde{u}_1 + \beta \tilde{u}_2), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle \alpha \xi \varepsilon(\tilde{u}_1) + \beta \xi \varepsilon(\tilde{u}_2), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad (\xi, \varepsilon \text{ des opérateurs linéaires}) \\ &= \alpha \langle \xi \varepsilon(\tilde{u}_1), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + \beta \langle \xi \varepsilon(\tilde{u}_2), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha a(\tilde{u}_1, v) + \beta a(\tilde{u}_2, v) \\
a(\tilde{u}, \alpha v_1 + \beta v_2) &= \langle \xi \varepsilon(\tilde{u}), \varepsilon(\alpha v_1 + \beta v_2) \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle \xi \varepsilon(\tilde{u}), \alpha \varepsilon(v_1) + \beta \varepsilon(v_2) \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \alpha \langle \xi \varepsilon(\tilde{u}), \varepsilon(v_1) \rangle_{\mathcal{H}} + \beta \langle \xi \varepsilon(\tilde{u}), \varepsilon(v_2) \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \alpha a(\tilde{u}, v_1) + \beta a(\tilde{u}, v_2)
\end{aligned}$$

D'où a est bilinéaire.

2/On démontre que $a(., .)$ est continue :

On va montrer que $|a(\tilde{u}, v)| \leq M |\tilde{u}|_V |v|_V, \forall \tilde{u}, v \in V$

$$\begin{aligned}
|a(\tilde{u}, v)| &= |\langle \xi \varepsilon(\tilde{u}), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}| \\
&\leq |\xi \varepsilon(\tilde{u})|_{\mathcal{H}} |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \text{ (d'après Cauchy Schwartz)} \\
&\leq |\xi| |\varepsilon(\tilde{u})|_{\mathcal{H}} |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \text{ (\xi opérateur continu).} \\
&\leq c |\varepsilon(\tilde{u})|_{\mathcal{H}} |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \\
&\leq c |\tilde{u}|_V |v|_V \text{ .d'où } a \text{ est continue.}
\end{aligned}$$

3/On démontre que $a(., .)$ est coercive

on va démontrer que $|a(\tilde{u}, \tilde{u})| \geq \alpha |\tilde{u}|_V^2, \forall \tilde{u} \in V$

$$\begin{aligned}
|a(\tilde{u}, \tilde{u})| &= |\langle \xi \varepsilon(\tilde{u}), \varepsilon(\tilde{u}) \rangle_{\mathcal{H}}| \geq \alpha |\varepsilon(\tilde{u})|_{\mathcal{H}}^2 \text{ (d'après (2.5))} \\
&\geq \alpha c^2 |\tilde{u}|_{H_1}^2 \text{ (d'après l'inégalité de Korn)} \\
&\geq \beta |\tilde{u}|_V^2
\end{aligned}$$

4/On démontre que l est une forme linéaire :

On va montrer que : $l(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha l(v_1) + \beta l(v_2), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; v_1, v_2 \in V$

$$\begin{aligned}
l(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \langle h, \gamma(\alpha v_1 + \beta v_2) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} - \langle f, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle_H - \langle \xi \varepsilon(\hat{u}), \varepsilon(\alpha v_1 + \beta v_2) \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \alpha \langle h, \gamma v_1 \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} + \beta \langle h, \gamma v_2 \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} - \alpha \langle f, v_1 \rangle_H - \beta \langle f, v_2 \rangle_H - \\
&\alpha \langle \xi \varepsilon(\hat{u}), \varepsilon(v_1) \rangle_{\mathcal{H}} - \beta \langle \xi \varepsilon(\hat{u}), \varepsilon(v_2) \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \alpha \left[\langle h, \gamma v_1 \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} - \langle f, v_1 \rangle_H - \langle \xi \varepsilon(\hat{u}), \varepsilon(v_1) \rangle_{\mathcal{H}} \right] + \beta \left[\begin{array}{l} \langle h, \gamma v_2 \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} - \langle f, v_2 \rangle_H - \\ \langle \xi \varepsilon(\hat{u}), \varepsilon(v_2) \rangle_{\mathcal{H}} \end{array} \right] \\
&= \alpha l(v_1) + \beta l(v_2)
\end{aligned}$$

5/On démontre que l est continue :

On va montrer que $|l(v)| \leq M |v|_V, \forall v \in V$

$$\begin{aligned}
|l(v)| &= \left| \langle h, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} - \langle f, v \rangle_H - \langle \xi \varepsilon(\hat{u}), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \right| \\
&\leq \left| \langle h, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \right| + |\langle f, v \rangle_H| + |\langle \xi \varepsilon(\hat{u}), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}| \quad (\text{d'après l'inégalité triangulaire}). \\
&\leq |h|_{H'_\Gamma} |\gamma v|_{H_\Gamma} + |f|_H |v|_H + |\xi \varepsilon(\hat{u})| |\varepsilon(v)| \quad (\text{d'après Cauchy Schwartz}). \\
&\leq c_1 |h|_{H'_\Gamma} |v|_{H_1} + |f|_H |v|_H + c_2 |\varepsilon(\hat{u})|_{\mathcal{H}} |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \quad (\gamma, \xi \text{ des opérateurs continus}). \\
&\leq c_1 |h|_{H'_\Gamma} |v|_V + |f|_H |v|_V + c_2 |\hat{u}|_V |v|_V \quad \forall v \in V \\
&\leq \max(c_1, 1, c_2) \left[|h|_{H'_\Gamma} |v|_V + |f|_H |v|_V + |\hat{u}|_V |v|_V \right] \\
&\leq M' \left(|h|_{H'_\Gamma} + |f|_H + |\hat{u}|_V \right) |v|_V \quad \forall v \in V
\end{aligned}$$

$$|l(v)| \leq M |v|_V$$

Ainsi d'après de théorème de Lax-Milgram, il existe $\tilde{u} \in V$ unique tel que :

$$(2.21) \quad a(\tilde{u}, v) = l(v) \quad \forall v \in V$$

Construction de la solution :

Soit maintenant :

$$(2.22) \quad u = \tilde{u} + \hat{u} \in H_1$$

$$(2.23) \quad \sigma = \xi \varepsilon(u) \in \mathcal{H}_1$$

De (2.21), (2.22) on a :

$$\langle \xi \varepsilon(\tilde{u}), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle h, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} - \langle f, v \rangle_H - \langle \xi \varepsilon(\hat{u}), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V$$

$$\langle \xi \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle h, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} - \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in V$$

De (2.23) on a :

$$(2.24) \quad \langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle h, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} + \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in V$$

En remplaçant $v = \varphi \in D$ dans (2.24), on aura :

$$\begin{aligned}
\langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle h, \gamma \varphi \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} + \langle f, \varphi \rangle_H \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \\
- \langle \text{Div} \sigma, \varphi \rangle_H &= \langle f, \varphi \rangle_H \quad (\varphi \text{ à support compact})
\end{aligned}$$

Il vient que : $\text{Div} \sigma + f = 0$ Ce qui vérifie (2.1)

En plus puisque $f \in H$ on obtient $\text{Div} \sigma \in H$ et $\sigma \in \mathcal{H}$.alors :

$$\sigma \in \mathcal{H}_1$$

$$\text{On a : (2.25) } \langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \text{Div} \sigma, v \rangle_H = \langle \sigma, \nu, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \quad \forall v \in V$$

A partir de (2.24) et (2.25) on a :

$$\langle h, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} + \langle f, v \rangle_H + \langle \text{Div} \sigma, v \rangle_H = \langle \sigma, \nu, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \quad \forall v \in V$$

On a : $\langle Div\sigma, v \rangle_H + \langle f, v \rangle_H = 0 \forall v \in V$

Donc : (2.26) $\langle h, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma \cdot \nu, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \forall v \in V$

Cela entraîne $\sigma \cdot \nu = h$ sur Γ_2 . ce qui donne (2.4).

Enfin de (2.22) on a : $u = \tilde{u} + \hat{u}$ où $\tilde{u} \in V$ d'où $\tilde{u} = 0$ sur Γ_1

Donc : $u = 0 + \hat{u} = 0 + g = g$ sur Γ_1

Cela entraîne que $u = g$ sur Γ_1 , ce qui donne (2.3).

2.1.4 Dépendance continue de la solution par rapport aux données

Nous allons évaluer la différence entre deux solutions du problème (2.1)-(2.4) pour deux séries de données.

On a le résultat suivant :

Théorème 2.2 : Sous les hypothèses du théorème (2.1). Soit $(u_i, \sigma_i)_{i=1,2}$ deux solutions du problème (2.1)-(2.4) pour les données $(f_i, g_i, h_i)_{i=1,2}$ satisfaisant aux conditions (2.6)-(2.8). Alors il existe $c > 0$ qui ne dépend que de Ω, Γ et ξ tel que :

$$(2.27) \quad |u_1 - u_2|_{H_1} + |\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}_1} \leq C \left[|f_1 - f_2|_H + |g_1 - g_2|_{H_\Gamma} + |h_1 - h_2|_{H'_\Gamma} \right]$$

Démonstration :

En utilisant (2.1)-(2.4) on obtient :

$$(2.28) \quad Div(\sigma_1 - \sigma_2) + (f_1 - f_2) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(2.29) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \xi(\varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2)) \quad \text{dans } \Omega$$

$$(2.30) \quad u_1 - u_2 = g_1 - g_2 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$(2.31) \quad (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \nu = h_1 - h_2 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

Soit également

$$(2.32) \quad \hat{u}_i = Zg_i; i = 1, 2$$

$$(2.33) \quad \tilde{u}_i = u_i - \hat{u}_i; i = 1, 2$$

En utilisant (2.3), on a $\tilde{u}_i = g - g = 0$ sur Γ_1 , donc $\tilde{u}_i \in V, i = 1, 2$

D'après (2.31) il vient :

$$(2.34) \quad \langle (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \nu, \gamma(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle h_1 - h_2, \gamma(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$$

$$(2.35) \quad \langle (\sigma_1 - \sigma_2), \varepsilon(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} = \langle -Div(\sigma_1 - \sigma_2), \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \rangle_H + \langle (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \nu, \gamma(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$$

En utilisant (2.28), (2.29) et (2.33) on obtient :

$$(2.36) \quad \langle \xi \varepsilon(u_1) - \xi \varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1 - u_2) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \xi \varepsilon(u_1) - \xi \varepsilon(u_2), \varepsilon(\hat{u}_1) - \varepsilon(\hat{u}_2) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle f_1 - f_2, \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \rangle_H + \langle h_1 - h_2, \gamma(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$$

En utilisant maintenant (2.5) et (2.36) on obtient :

$$(2.37) \quad \alpha |\varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2)|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_1 |\varepsilon(u_1 - u_2)|_{\mathcal{H}} |\varepsilon(\hat{u}_1 - \hat{u}_2)|_{\mathcal{H}} + |\langle f_1 - f_2, \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \rangle_H| + \left| \langle h_1 - h_2, \gamma(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \right|$$

Et puisque :

$$(2.38) \quad |\langle f_1 - f_2, \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \rangle_H| \leq |f_1 - f_2|_H |\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2|_H \text{ (d'après Cauchy Schwartz).}$$

$$\leq |f_1 - f_2|_H |\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2|_{H_1}$$

$$(2.39) \quad \left| \langle h_1 - h_2, \gamma(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \right| \leq |h_1 - h_2|_{H'_\Gamma} |\gamma(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)|_{H_\Gamma}$$

$$\leq C_2 |h_1 - h_2|_{H'_\Gamma} |\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2|_{H_1}$$

On a obtenu :

$$(2.40) \quad |\varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2)|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \left[\begin{array}{l} |\varepsilon(u_1 - u_2)|_{\mathcal{H}} |\varepsilon(\hat{u}_1 - \hat{u}_2)|_{\mathcal{H}} + |f_1 - f_2|_H |\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2|_{H_1} + \\ |h_1 - h_2|_{H'_\Gamma} |\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2|_{H_1} \end{array} \right]$$

Compte tenu de (2.33), on obtient :

$$\varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2) = \varepsilon(\tilde{u}_1) - \varepsilon(\tilde{u}_2) + \varepsilon(\hat{u}_1) - \varepsilon(\hat{u}_2)$$

D'où il vient :

$$|\varepsilon(\tilde{u}_1) - \varepsilon(\tilde{u}_2)|_{\mathcal{H}} - |\varepsilon(\hat{u}_1) - \varepsilon(\hat{u}_2)|_{\mathcal{H}} \leq |\varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2)|_{\mathcal{H}} \leq |\varepsilon(\tilde{u}_1) - \varepsilon(\tilde{u}_2)|_{\mathcal{H}} + |\varepsilon(\hat{u}_1) - \varepsilon(\hat{u}_2)|_{\mathcal{H}}$$

En utilisant cette inégalité dans (2.40) on obtient :

$$(2.41) \quad [|\varepsilon(\tilde{u}_1) - \varepsilon(\tilde{u}_2)|_{\mathcal{H}} - |\varepsilon(\hat{u}_1) - \varepsilon(\hat{u}_2)|_{\mathcal{H}}]^2 \leq C \left[\begin{array}{l} |\varepsilon(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)|_{\mathcal{H}} |\varepsilon(\hat{u}_1 - \hat{u}_2)|_{\mathcal{H}} + |\varepsilon(\hat{u}_1) - \varepsilon(\hat{u}_2)|_{\mathcal{H}}^2 + \\ |f_1 - f_2|_H |\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2|_{H_1} + |h_1 - h_2|_{H'_\Gamma} |\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2|_{H_1} \end{array} \right]$$

En utilisant maintenant l'inégalité de Korn on obtient :

$$(2.42) \quad |\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2|_{H_1}^2 \leq C \left(|\hat{u}_1 - \hat{u}_2|_{H_1} + |f_1 - f_2|_H + |h_1 - h_2|_{H'_\Gamma} \right) |\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2|_{H_1} + C |\hat{u}_1 - \hat{u}_2|_{H_1}^2$$

Et puisque $X^2 \leq CX + Y^2 \Rightarrow X \leq C + Y$. il vient :

$$(2.43) \quad |\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2|_{H_1} \leq C \left(|\hat{u}_1 - \hat{u}_2|_{H_1} + |f_1 - f_2|_H + |h_1 - h_2|_{H'_\Gamma} \right) + |\hat{u}_1 - \hat{u}_2|_{H_1}$$

compte tenu de (2.33) on a $|u_1 - u_2|_{H_1} \leq |\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2|_{H_1} + |\hat{u}_1 - \hat{u}_2|_{H_1}$.donc (2.43) entraîne :

$$(2.44) \quad |u_1 - u_2|_{H_1} \leq C \left(|\hat{u}_1 - \hat{u}_2|_{H_1} + |f_1 - f_2|_H + |h_1 - h_2|_{H'_\Gamma} \right)$$

En utilisant maintenant (2.28), (2.29) il vient :

$$(2.45) \quad |Div(\sigma_1 - \sigma_2)|_H = |f_1 - f_2|_H$$

$$(2.46) \quad |\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}} = |\xi\varepsilon(u_1 - u_2)|_{\mathcal{H}} \leq C |u_1 - u_2|_{H_1}$$

Donc d'après (2.45), (2.46) on obtient :

$$(2.47) \quad |Div(\sigma_1 - \sigma_2)|_H + |\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}} \leq |f_1 - f_2|_H + C |u_1 - u_2|_{H_1}$$

$$\text{Alors : } |\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}_1} \leq C (|f_1 - f_2|_H + |u_1 - u_2|_{H_1})$$

En utilisant maintenant (2.44) il vient :

$$(2.48) \quad |\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}} \leq C \left[|f_1 - f_2|_H + |\hat{u}_1 - \hat{u}_2|_{H_1} + |h_1 - h_2|_{H'_\Gamma} \right]$$

En conclusion, d'après (2.44), (2.48), on obtient :

$$(2.49) \quad |u_1 - u_2|_{H_1} + |\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}_1} \leq C \left[|\hat{u}_1 - \hat{u}_2|_{H_1} + |f_1 - f_2|_H + |h_1 - h_2|_{H'_\Gamma} \right]$$

Et comme d'après (2.32) on a : $|\hat{u}_1 - \hat{u}_2|_{H_1} \leq c |g_1 - g_2|_{H_\Gamma}$

Alors :

$$(2.50) \quad |u_1 - u_2|_{H_1} + |\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}_1} \leq C \left[|g_1 - g_2|_{H_\Gamma} + |f_1 - f_2|_H + |h_1 - h_2|_{H'_\Gamma} \right]$$

C'est l'inégalité cherchée (2.27) ce qui achève la démonstration.

Cas non linéaire :

propose une méthode itérative qui résout le problème (P_μ) suivant

Trouver : $u_\mu \in H_1, \sigma_\mu \in \mathcal{H}$

$$u_\mu = \hat{u} + \tilde{u}_\mu$$

$$\tilde{u}_\mu \in V_\mu \quad \text{tel que} \quad (B_\mu \tilde{u}_\mu, v)_{V'_\mu \times V_\mu} = l_\mu(v)$$

$$\forall v \in V$$

$$\sigma_\mu = F(\varepsilon(u_\mu))$$

Celui -ci étant non linéaire, on va l'approcher par une suite de problèmes linéaires .on se base sur l'hypothèse $F = \xi + G$.

On ne va pas s'étaler sur les détails de la démonstration.

Théorème 2.3 :

Sous les hypothèses du théorème (2.1), le problème (P_μ^n) admet une solution unique $u_\mu^n \in H_1, \sigma_\mu^n \in \mathcal{H}_1$

Théorème 2.4 :

Soit $(u_\mu, \sigma_\mu) \in H_1 \times \mathcal{H}_1$ la solution du problème (P_μ) .

Soit $(u_\mu^n, \sigma_\mu^n) \in H_1 \times \mathcal{H}_1$ la solution du problème (P_μ^n) .

Alors quand $n \rightarrow +\infty$

$$(2.51) \quad u_\mu^n \rightarrow u_\mu \text{ dans } H_1; \quad \sigma_\mu^n \rightarrow \sigma_\mu \text{ dans } \mathcal{H}_1$$

$$(2.52) \quad |u_\mu^n - u_\mu| \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{K^n \times (1 - K^{m-n})}{1 - K} \right) \times |\eta_\mu^1 - \eta_\mu^0|_{\mathcal{H}} \text{ avec } K = \frac{L_G}{\alpha} < 1$$

$$(2.53) \quad |\sigma_\mu^n - \sigma_\mu| \leq \frac{1}{\alpha} |\beta + L_G| \times \frac{K^n \times (1 - K^{m-n})}{1 - K} |\eta_\mu^1 - \eta_\mu^0|_{\mathcal{H}}.$$

Où L_G est la constante de Lipchitz de G définie par $\left\{ \begin{array}{l} G : S_3 \rightarrow S_3 \text{ est telle que :} \\ a) \text{ il existe } L_G \succ 0 \text{ tel que} \\ |G(\varepsilon_1) - G(\varepsilon_2)| \leq L_G |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_3 \\ b) G(0) = 0 \end{array} \right.$

β la constante de continuité ξ définie en (2.5) et α la constante de coercivité de ξ définie en (2.5).

Démonstration : Voir Lebri [7]

Remarque :

Ainsi nous avons par la résolution des problèmes linéaires $(P_\mu^n)_{n \in \mathbb{N}}$ la solution du problème (P_μ) par un passage à la limite sur n .

La méthode est dite itérative car pour $\eta_\mu^0 \in \mathcal{H}$ donné, on résout le problème (P_μ^0) linéaire, et à l'aide de sa solution on calcule η_μ^1 par (η_μ^{n+1}) , et on résout (P_μ^1) autant de fois qu'on désire.

Et c'est cela que dans la suite nous allons traduire sous forme d'algorithme.

Alors pour résoudre de problème (P) il faut résoudre (P_μ^n) et en passant à la limite $(n \rightarrow +\infty, \mu \rightarrow 0)$ on trouvera la solution de P .

L'algorithme de la méthode :

On donne l'algorithme pour l'approximation de la solution du problème (P) par la résolution d'un problème plus simple :

Début de l'algorithme

Données : $\varepsilon > 0$ (suffisamment petit).

Initialisation : soit $\eta_\mu^0 \in \mathcal{H}$ donné, $\mu > 0$

Tandis que

$$(2.54) \quad \text{norme}(\eta_\mu^{n+1} - u_\mu^n, \sigma_\mu^{n+1} - \sigma_\mu^n) < \varepsilon$$

Trouver $\tilde{u}_\mu \in V_\mu$ tel que :

$$(2.55) \quad u_\mu^n = \hat{u} + \tilde{u}_\mu^n$$

$$(2.56) \quad \tilde{u}_\mu^n \in V_\mu \text{ tel que } A \langle \tilde{u}_\mu^n, v \rangle + \langle \eta_\mu^n, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} = L(v), \forall v \in V_\mu$$

$$(2.57) \quad \sigma_\mu^n = F(\varepsilon(u_\mu^n))$$

$$(2.58) \quad \eta_\mu^{n+1} = G\varepsilon(u_\mu^n)$$

Fin d'algorithme.

C'est -à-dire que pour η_μ^0 donné, on calcule (u_μ^0, σ_μ^0) avec (2.55), (2.56). En suite on recommence avec η_μ^1 donné par (2.58).

Pour $\mu \rightarrow 0$, on approche la solution de (P) à un ε donné positif pour un nombre d'itérations donné.

2.2 Exemples numériques

Nous allons ici, avec quelques exemples numériques expérimenter l'algorithme proposé, en comparant les solutions réelles des solutions approchées par des polynômes de degré 1.

L'étude comparative se fera sur les minima et les maxima donnés par les représentations graphiques du déplacement u et de la déformation ε approchées.

Exemple 1.1 : Trouver le champ des déplacements $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et le champ des contraintes $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$(1.1) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} + f = 0 \quad \text{dans } [0, 1]$$

$$(1.2) \quad \sigma = \xi \varepsilon(u) \quad \text{dans } [0, 1]$$

$$(1.3) \quad u(0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$(1.4) \quad \sigma(1) = \sigma_0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

$$\text{Où } \varepsilon(u) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Nous avons les données suivantes :

$$f = 20, E = 1, u(0) = 0, \sigma(1) = -1$$

Calculons la solution réelle, avec : $x \in [0, 1]$

$$\text{De (1.1) - (1.4) nous avons : } u(x) = -10x^2 + 19x$$

$$\varepsilon(x) = -20x + 19$$

$$\sigma(x) = -20x + 19$$

De plus on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{\max} = 9.025 & \text{avec } x = \frac{19}{20} \\ u_{\min} = 0 & \text{avec } x = 0 \\ \varepsilon_{\max} = 19 & \text{avec } x = 0 \\ \varepsilon_{\min} = -1 & \text{avec } x = 1 \end{array} \right.$$

Et sa solution approchée donnée par les résultats numériques ci-contre nous avons :

$$\mu = \frac{1}{5} : \quad E = 2$$

$$u_{\max} = 4.5$$

$$\varepsilon_{\max} = 9.5$$

$$u_{\min} = 0$$

$$\varepsilon_{\min} = -0.5$$

$$E = 3$$

$$u_{\max} = 3$$

$$\varepsilon_{\max} = 6.33$$

$$u_{\min} = 0$$

$$\varepsilon_{\min} = -0.333$$

$$E = 4$$

$$u_{\max} = 2.25$$

$$\varepsilon_{\max} = 4.75$$

$$u_{\min} = 0$$

$$\varepsilon_{\min} = -0.25$$

On remarque que plus E augmente, plus la déformation et le déplacement diminuent.

Les tableaux des solutions approchées avec les représentations graphiques :

Pour : $\mu = 1/5$

$f = 20, E = 2, U(0) = 0, \sigma(1) = -1, \mu = 0.2$

Noeud	X	U
1	0.00	0.00
2	0.20	1.70
3	0.40	3.00
4	0.60	3.90
5	0.80	4.40
6	1.00	4.50

Tableau : 1

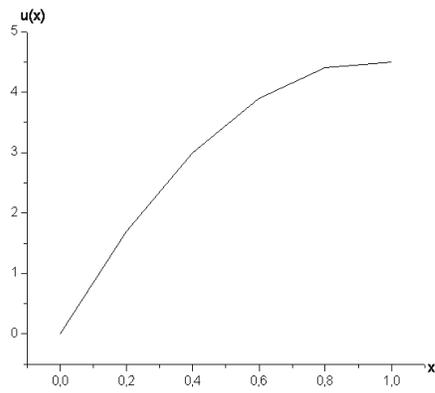
Noeud	X	ε
1	0.00	9.50
2	0.20	7.50
3	0.40	5.50
4	0.60	3.50
5	0.80	1.50
6	1.00	-0.50

Tableau : 2

Représentation graphique de déplacement

« Solution approchée pour : $E = 2; \mu = 0.2$

1



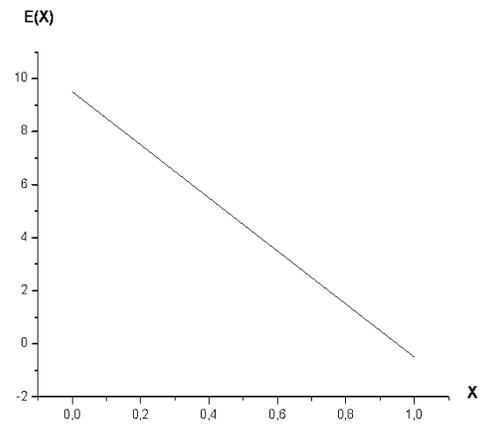
14.pdf

figure-1-

Représentation graphique de déformation

« Solution approchée pour : $E = 2; \mu = 0.2$ »

2



15.pdf

figure-2-

Pour : $E = 3$

$f = 20, u(0) = 0, \sigma(1) = -1, \mu = 0.2$

Noeud	X	U
1	0.00	0.00
2	0.20	1.13
3	0.40	2.00
4	0.60	2.60
5	0.80	2.93
6	1.00	3.00

Tableau : 3

Noeud	X	ε
1	0.00	6.33
2	0.20	5.00
3	0.40	3.66
4	0.60	2.33
5	0.80	1.00
6	1.00	-0.33

Tableau : 4

Représentation graphique de déplacement

« Solution approchée pour : $E = 3; \mu = 0.2$

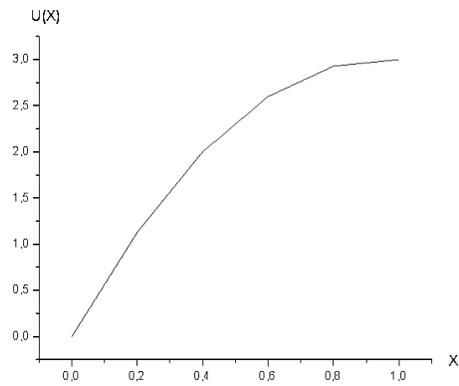
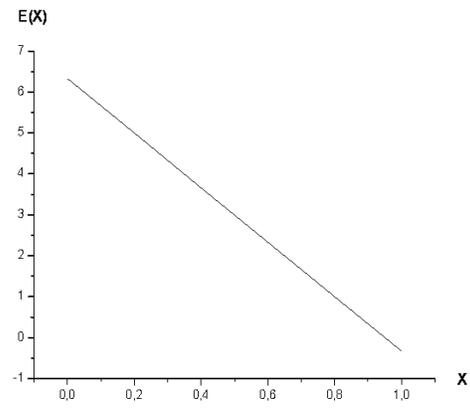


figure-3-

Représentation graphique de déformation

« Solution approchée pour : $E = 3; \mu = 0.2$ »

4



17.pdf

figure-4-

Pour : $E = 4$

$f = 20, u(0) = 0, \sigma(1) = -1, \mu = 0.2$

Noeud	X	U
1	0.00	0.00
2	0.20	0.85
3	0.40	1.50
4	0.60	1.95
5	0.80	2.20
6	1.00	2.25

Tableau : 5

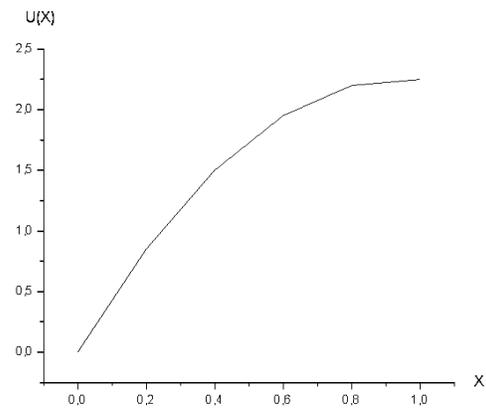
Noeud	X	ε
1	0.00	4.75
2	0.20	3.75
3	0.40	2.75
4	0.60	1.75
5	0.80	0.75
6	1.00	-0.25

Tableau : 6

Représentation graphique de déplacement

« Solution approchée pour : $E = 4; \mu = 0.2$ »

5



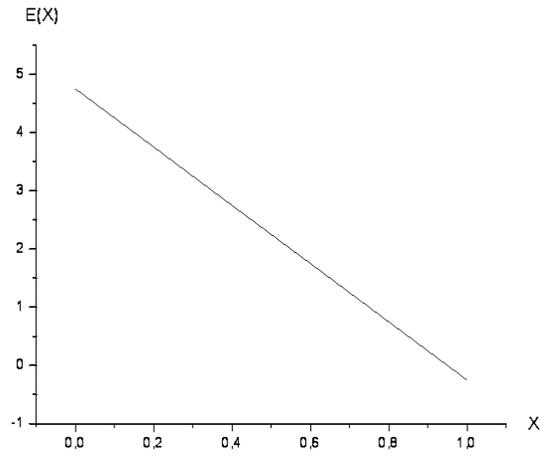
18.pdf

figure-5-

Représentation graphique de déformation

« Solution approchée pour : $E = 4; \mu = 0.2$ »

6



19.pdf

figure-6-

Chapitre 3

ETUDE MATHÉMATIQUE D'UN PROBLÈME AUX LIMITES DEPLACEMENT-TRACTION EN VISCOPLASTICITÉ

Nous proposons dans ce chapitre une étude de l'existence et de l'unicité de la solution d'un problème aux limites, en viscoplasticité dans le cas quasi-statique.

Pour l'existence nous présentons la méthode de point fixe.

3.1 Formulation du problème-Hypothèses

L'évolution quasistatique d'un corps viscoplastique occupant dans la configuration de référence le domaine Ω de \mathbb{R}^N ($N = 1, 2, 3$) est régie par le problème mixte suivant :

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tels que :

$$(3.1) \quad \text{Div} \sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

$$(3.2) \quad \dot{\sigma} = \xi \varepsilon(\dot{u}) + G(\sigma, \varepsilon(u)) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

$$(3.3) \quad u = g \quad \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[$$

$$(3.4) \quad \sigma \cdot \nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2 \times]0, T[$$

$$(3.5) \quad u(0) = u_0; \sigma(0) = \sigma_0 \quad \text{dans } \Omega$$

L'équation (3.1) représente l'équation d'équilibre où f est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable, (3.2) représente la loi de comportement viscoplastique introduite dans le premier chapitre, (3.3) et (3.4) sont les conditions aux limites de déplacement-traction. Finalement (3.5) représente les conditions initiales.

Donnons quelques exemples de problèmes similaires à (3.1)-(3.5) et leurs interprétations mécaniques.

Exemple 3.1 :

Soit $\Omega = [0, 1]$, $T > 0$, $E > 0$, $\alpha, \sigma_0 \in \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Lipchitz. On considère le problème suivant :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x) = 0 \quad \text{dans } [0, 1] \times [0, T]$$

$$\dot{\sigma}(t, x) = E \dot{\varepsilon}(t, x) + G(\sigma, \varepsilon(t, x)) \quad \text{dans } [0, 1] \times [0, T]$$

$$\varepsilon(t, x) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \quad \text{dans } [0, 1] \times [0, T]$$

$$u(t, 0) = 0; u(t, 1) = \alpha \quad \forall t \in]0, T[$$

$$u(0, x) = \alpha x; \sigma(0, x) = \sigma_0 \quad \forall t \in]0, T[$$

Où les inconnues sont les fonctions $u, \varepsilon, \sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

Donnons l'interprétation mécanique du problème.

On considère une barre unidimensionnelle fixée en $x = 0$, avec déplacement imposé en $x = 1$ et de loi de comportement viscoplastique

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}(t, x) + G(\varepsilon(t, x))$$

On présente maintenant les hypothèses sur les données pour avoir l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1)-(3.5)

-Hypothèses sur les fonctions constitutives :

$$(3.6) \left\{ \begin{array}{l} \xi : S_N \rightarrow S_N \text{ tels que :} \\ a) \xi\sigma.\tau = \sigma.\xi\tau, \forall\sigma, \tau \in S_N \\ b) \exists\alpha > 0 / \xi\sigma.\sigma \geq \alpha |\sigma|^2, \forall\sigma \in S_N \end{array} \right.$$

$$(3.7) \left\{ \begin{array}{l} G : S_N \times S_N \rightarrow S_N \text{ tels que :} \\ a) \exists L > 0 : |G(\sigma_1, \varepsilon_1) - G(\sigma_2, \varepsilon_2)| \leq L(|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|) \forall\sigma_i, \varepsilon_i \in S_N, i = 1, 2 \\ b) G(0, 0) \in \mathcal{H} \end{array} \right.$$

-Hypothèses sur les données :

$$(3.8) \quad f \in C^1(0, T, H)$$

$$(3.9) \quad g \in C^1(0, T, H_\Gamma)$$

$$(3.10) \quad h \in C^1(0, T, H'_\Gamma)$$

$$(3.11) \quad u_0 \in H_1, \sigma_0 \in \mathcal{H}_1$$

-Hypothèses de compatibilité :

$$(3.12) \quad \text{Div}\sigma_0 + f(0) = 0 \text{ dans } \Omega, u_0 = g(0) \text{ sur } \Gamma_1, \sigma_0.\nu = h(0) \text{ sur } \Gamma_2$$

Sous ces hypothèses, on a le résultat suivant :

Théorème 3.1 :

Soit $mes\Gamma_1 > 0$. Sous les hypothèses (3.8)-(3.12), le problème (3.1)-(3.5) admet une solution unique $u \in C^1(0, T, H_1), \sigma \in C^1(0, T, \mathcal{H}_1)$.

Des résultats d'existence et d'unicité pour le problème (3.1)-(3.5) ont été donnés antérieurement par Ionescu et Sofonea [1988], Djabi et Sofonea [1993], Djabi [1994] en utilisant différentes méthodes fonctionnelles. En fait, le théorème 3.1 a été démontré par Djabi et Sofonea en utilisant une méthode de point fixe. Pour la démonstration du théorème 3.1, commençons par présenter cette méthode.

3.2 Méthode de point fixe

L'existence de la solution a été prouvée par Djabi et Sofonea en utilisant uniquement des résultats d'existence et d'unicité d'élasticité linéaire suivie d'une technique de point fixe.

3.2.1 Le principe de la méthode :

L'idée est de remplacer le problème (3.1)-(3.5) par un problème plus simple : soit $\eta \in C^0(0,T, \mathcal{H})$, on construit Z_η qui dépend de η définie par :

$Z_\eta : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ tels que :

$$(3.13) \quad Z_\eta(t) = \int_0^t \eta(s) ds + Z_0 \text{ où}$$

$$(3.14) \quad Z_0 = \sigma_0 - \xi\varepsilon(u_0)$$

On a remplacé le problème d'évolution (3.1)-(3.5) par un problème élastique qui ne dépend pas du temps.

On a fait une intégration de la loi de comportement viscoplastique :

$$\int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial s} ds = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \xi\varepsilon(u) ds + \int_0^t G(\sigma, \varepsilon(u)) ds \Rightarrow$$

$$\sigma(t) - \sigma(0) = \xi\varepsilon(u(t)) - \xi\varepsilon(u(0)) + \int_0^t G(\sigma, \varepsilon(u)) ds \Rightarrow$$

$$\sigma(t) - \xi\varepsilon(u(t)) = \sigma_0 - \xi\varepsilon(u_0) + \int_0^t G(\sigma, \varepsilon(u)) ds \Rightarrow$$

$$\sigma_\eta(t) - \xi\varepsilon(u_\eta(t)) = \sigma_0 - \xi\varepsilon(u_0) + \int_0^t \eta(s) ds$$

On pose : $Z_0 = \sigma_0 - \xi\varepsilon(u_0)$

$$Z_\eta(t) = \int_0^t \eta(s) ds + Z_0$$

Alors la loi viscoplastique s'écrit comme suit :

$$\sigma_\eta(t) = \xi\varepsilon(u_\eta) + Z_\eta$$

On peut construire le problème suivant :

$$(P_\eta) \begin{cases} (3.15) & Div \sigma_\eta + f = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ (3.16) & \sigma_\eta = \xi \varepsilon(u_\eta) + Z_\eta & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ (3.17) & u_\eta = g & \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[\\ (3.18) & \sigma_\eta \cdot \nu = h & \text{sur } \Gamma_2 \times]0, T[\end{cases}$$

En utilisant des techniques classiques d'élasticité linéaire on prouve que le problème (3.15)-(3.18) admet une solution unique $u_\eta \in C^1(0.T, H_1)$, $\sigma_\eta \in C^1(0.T, \mathcal{H}_1)$ tel que : $u_\eta(0) = u_0$; $\sigma_\eta(0) = \sigma_0$ dans Ω .

On considère ensuite l'opérateur $\Lambda : C(0.T, \mathcal{H}) \rightarrow C(0.T, \mathcal{H})$ défini par :

$\Lambda \eta = G(\sigma_\eta, u_\eta), \forall \eta \in C(0.T, \mathcal{H})$ et on prouve que pour p assez grand Λ^p est une contraction, et (u_η, σ_η) solution du problème (P_η) .

Remarque 3.1

-Du point de vue mécanique le problème (3.15)-(3.18) est plus simple que (3.1)-(3.5), car il n'y a pas de dérivées par rapport au temps .

-Le problème (3.15)-(3.18) est un problème affine (presque linéaire).

-On note (u_η, σ_η) , la solution du problème (3.15)-(3.18).

La démonstration du théorème 3.1 par une méthode de point fixe est comme suit :

On a le résultat suivant :

Lemme 3. 1 :

Le problème (3.15)-(3.18) admet une solution unique $u_\eta \in C^1(0.T, H_1)$, $\sigma_\eta \in C^1(0.T, \mathcal{H}_1)$ tel que : $u_\eta(0) = u_0$, $\sigma_\eta(0) = \sigma_0$ dans Ω

.

Démonstration

-L'unicité :

Pour l'unicité de la solution, on s'intéresse à la différence de deux solutions éventuelles du problème (3.15)-(3.18).

Soient $(u_{i\eta}, \sigma_{i\eta})_{i=1,2} \in C^1(0.T, H_1 \times \mathcal{H}_1)$, deux solutions du problème (3.15)-(3.18).

On pose :

$$(3.19) \quad u_\eta = u_{1\eta} - u_{2\eta}; \quad \sigma_\eta = \sigma_{1\eta} - \sigma_{2\eta}$$

Le système (3.15)-(3.18) écrit pour chacune des deux solutions nous donne par différence des deux systèmes obtenus :

$$(3.20) \quad \text{Div} \sigma_\eta = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

$$(3.21) \quad \sigma_\eta = \xi \varepsilon(u_\eta) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

$$(3.22) \quad u_\eta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[$$

$$(3.23) \quad \sigma_\eta \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times]0, T[$$

Les égalités (3.20), (3.22) et (3.23), impliquent :

$$(3.24) \quad u_\eta \in C^1(0, T, V); \sigma_\eta \in C^1(0, T, \vartheta)$$

En utilisant l'orthogonalité de $\varepsilon(V)$ et ϑ , à partir de (3.20) et (2.22), on obtient :

$$(3.25) \quad \langle \sigma_\eta, \varepsilon(u_\eta) \rangle_{\mathcal{H}} = 0$$

D'où

$$(3.26) \quad \langle \xi \varepsilon(u_\eta), \varepsilon(u_\eta) \rangle_{\mathcal{H}} = 0$$

En utilisant maintenant l'hypothèse (3.6) sur ε et l'inégalité de Korn, on obtient :

$$(3.27) \quad |u_\eta|_{H_1} = 0$$

En utilisant (3.19) on obtient :

$$(3.28) \quad |u_{1\eta} - u_{2\eta}|_{H_1} = 0 \text{ d'où } u_{1\eta} = u_{2\eta}.$$

En utilisant (3.21), (3.28) on a :

$$|\sigma_\eta|_{\mathcal{H}} = |\xi \varepsilon(u_\eta)|_{\mathcal{H}} \Rightarrow |\sigma_{1\eta} - \sigma_{2\eta}|_{\mathcal{H}} = |\xi \varepsilon(u_{1\eta} - u_{2\eta})|_{\mathcal{H}} = 0$$

Et d'après (3.20) : $|\text{Div} \sigma_\eta|_H = 0$

D'autre part on a : $|\sigma_\eta|_{\mathcal{H}_1} = |\sigma_\eta|_{\mathcal{H}} + |\text{Div} \sigma_\eta|_H$

Alors :

$$(3.29) \quad |\sigma_\eta|_{\mathcal{H}_1} = 0 \text{ ce qui entraîne que : } \sigma_{1\eta} = \sigma_{2\eta}$$

-Existence : Pour la démonstration de l'existence nous admettons la décomposition suivante :

$$(3.30) \quad u_\eta(t) = \hat{u}(t) + \tilde{u}_\eta(t)$$

$$(3.31) \quad \hat{u}(t) = Zg \in C^1(0, T, H_1)$$

Afin d'appliquer le lemme de Lax-Milgram, nous définissons les opérateurs suivants :

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}; l(t, \cdot) : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ par :}$$

$$(3.33) \quad a(\tilde{u}_\eta, v) = \langle \xi \varepsilon(\tilde{u}_\eta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}$$

$$(3.34) \quad l(t, v) = \langle h, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} - \langle \xi \varepsilon(\hat{u}) + Z_\eta, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle f, v \rangle_H. \forall v \in V, \forall t \in [0, T]$$

On va vérifier les hypothèses du lemme de Lax-Milgram :

a est évidemment bilinéaire et après majoration on a

$$\begin{aligned} |a(\tilde{u}_\eta, v)| &= |\langle \xi \varepsilon(\tilde{u}_\eta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}| \leq |\xi \varepsilon(\tilde{u}_\eta)|_{\mathcal{H}} |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \text{ (d'après Cauchy Schwartz)}. \\ &\leq |\xi| |\varepsilon(\tilde{u}_\eta)|_{\mathcal{H}} |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \\ &\leq C |\tilde{u}_\eta|_V |v|_V. \text{ (}\xi \text{ opérateur continu). } \forall v \in V, C > 0 \end{aligned}$$

En utilisant maintenant l'hypothèse (3.6) et l'inégalité de Korn on obtient :

$$(3.35) \quad |a(u_\eta, u_\eta)| = |\langle \xi \varepsilon(\tilde{u}_\eta), \varepsilon(\tilde{u}_\eta) \rangle_{\mathcal{H}}| \geq \alpha |\varepsilon(\tilde{u}_\eta)|_{\mathcal{H}}^2 \geq \beta |\tilde{u}_\eta|_V^2.$$

D'où a est une forme bilinéaire continue et coercive.

On a aussi :

$$|l(t, v)| = \left| \langle h, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} - \langle \xi \varepsilon(\hat{u}) + Z_\eta, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle f, v \rangle_H \right|$$

D'après Cauchy Schwartz on a :

$$\begin{aligned} |l(t, v)| &\leq |h|_{H'_\Gamma} |\gamma v|_{H_\Gamma} + |\xi \varepsilon(\hat{u}) + Z_\eta|_{\mathcal{H}} |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} + |f(t)|_H |v|_H \\ &\leq c |h|_{H'_\Gamma} |v|_{H_1} + |\xi \varepsilon(\hat{u}) + Z_\eta|_{\mathcal{H}} |v|_V + |f(t)|_H |v|_H \\ &\leq C' (|h(t)|_{H'_\Gamma} + |\xi \varepsilon(\hat{u}) + Z_\eta|_{\mathcal{H}} + |f(t)|_H) |v|_V \\ &\leq C |v|_V. \end{aligned}$$

$$(3.36) \quad |l(t, v)| \leq C |v|_V. \forall v \in V, \forall t \in [0, T]$$

Cela implique que l est continue sur V .

Ainsi d'après le lemme de Lax-Milgram, il existe $\tilde{u}_\eta(t) \in V$ tel que :

$$(3.37) \quad a(\tilde{u}_\eta(t), v) = l(v, t), \forall v \in V; \forall t \in [0, T]$$

Et en plus

$$\tilde{u}_\eta \in C^1(0, T, V)$$

Construction de la solution :

Soit maintenant :

$$(3.38) \quad u_\eta(t) = \hat{u}(t) + \tilde{u}_\eta(t)$$

$$(3.39) \quad \sigma_\eta(t) = \xi \varepsilon(u_\eta(t)) + Z_\eta(t)$$

De (3.37), (3.39) on a :

$$\begin{aligned} \langle \xi \varepsilon(\tilde{u}_\eta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle f, v \rangle_H + \langle h(t), \gamma \cdot v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} - \langle \xi \varepsilon(\hat{u}) + Z_\eta, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall t \in [0, T] \\ \langle \xi \varepsilon(\tilde{u}_\eta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \xi \varepsilon(\hat{u}) + Z_\eta, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle f, v \rangle_H + \langle h(t), \gamma \cdot v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \end{aligned}$$

Cela implique :

$$\langle \xi \varepsilon(u_\eta) + Z_\eta, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, v \rangle_H + \langle h(t), \gamma \cdot v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \quad \forall t \in [0, T]$$

D'où il vient :

$$(3.40) \quad \langle \sigma_\eta(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, v \rangle_H + \langle h(t), \gamma \cdot v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \quad \forall t \in [0, T]$$

En remplaçant $v = \varphi \in D(\Omega)$ dans (3.40), on aura :

$$\langle \sigma_\eta(t), \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, \varphi \rangle_H ; \quad \forall t \in [0, T]$$

D'où :

$$\langle -Div \sigma_\eta(t), \varphi \rangle_H = \langle f, \varphi \rangle_H ; \quad \forall t \in [0, T]$$

Il vient que $Div \sigma_\eta + f = 0$, ce qui vérifie (3.15)

En plus puisque $f \in C^1(0, T, H)$; on obtient la régularité de $\sigma_\eta \in C^1(0, T, \mathcal{H}_1)$

On a :

$$(3.41) \quad \langle \sigma_\eta(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div \sigma_\eta(t), v \rangle_H = \langle \sigma_\eta \cdot \nu, \gamma \cdot v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \quad \forall v \in V, \forall t \in [0, T]$$

A partir de (3.40), (3.41) on a :

$$\langle f, v \rangle_H + \langle h(t), \gamma \cdot v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} + \langle Div \sigma_\eta(t), v \rangle_H = \langle \sigma_\eta \cdot \nu, \gamma \cdot v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \quad \forall v \in V, \forall t \in [0, T]$$

$$\text{Donc : } \langle h(t), \gamma \cdot v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma_\eta \cdot \nu, \gamma \cdot v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$$

Cela entraîne : $\sigma_\eta \cdot \nu = h(t)$ sur $\Gamma_2 \times]0, T[$, ce qui donne (3.18)

Enfin, de (3.38) on a : $u_\eta = \hat{u} + \tilde{u}_\eta$.

Or $\tilde{u}_\eta \in C^1(0, T, V)$, d'où $\tilde{u}_\eta = 0$ sur $\Gamma_1 \times]0, T[$

Donc : $u_\eta = \hat{u} + \tilde{u}_\eta = g + 0 = g$ sur $\Gamma_1 \times]0, T[$

Cela entraîne $u_\eta = g$ sur $\Gamma_1 \times]0, T[$ ce qui donne (3.17).

Pour prouver les conditions initiales, on remarque qu'à partir (3.12), (3.13) et (3.14) le couple (u_0, σ_0) est solution du problème (3.15)-(3.18) à l'instant $t = 0$. Les conditions initiales $(\sigma_\eta(0) = \sigma_0, u_\eta(0) = u_0)$ résultent alors de l'unicité de la solution $(u_\eta(t), \sigma_\eta(t))$ du problème (3.15)-(3.18)

pour tout $t \in [0, T]$.

En utilisant à présent (3.7), on remarque que $t \rightarrow G(\sigma_\eta(t), \varepsilon(u_\eta(t)))$ est une fonction continue sur $[0, T]$. Cette propriété permet donc de considérer l'opérateur $\Lambda : C^0(0, T, \mathcal{H}) \rightarrow C^0(0, T, \mathcal{H})$ défini par :

$$(3.42) \quad \Lambda\eta(t) = G(\sigma_\eta(t), \varepsilon(u_\eta(t))) \forall t \in [0, T]; \eta \in C^0(0, T, \mathcal{H})$$

Pour lequel on donne le résultat suivant :

Lemme 3.2 :

L'opérateur Λ admet un point fixe unique $\eta^* \in C^0(0, T, \mathcal{H})$

Démonstration :

Soit $\eta_1, \eta_2 \in C^0(0, T, \mathcal{H})$ et $t \in [0, T]$

Par soucis de simplification, on note : $Z_{\eta_1} = Z_1; Z_{\eta_2} = Z_2; u_{\eta_1} = u_1; u_{\eta_2} = u_2; \sigma_{\eta_1} = \sigma_1; \sigma_{\eta_2} = \sigma_2$

Soit $(u_i, \sigma_i)_{i=1,2}$ solution du problème (3.15)-(3.18) .

Le système (3.15)-(3.18), écrit pour chacune des deux solutions nous donne, par différence des systèmes obtenus :

$$(3.43) \quad \text{Div}(\sigma_1 - \sigma_2) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(3.44) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \xi\varepsilon(u_1) - \xi\varepsilon(u_2) + Z_1 - Z_2 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(3.45) \quad u_1 - u_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$(3.46) \quad (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

D'après (3.43), (3.45) et (3.46) nous avons :

$$(3.47) \quad (\sigma_1 - \sigma_2) \in \vartheta, u_1 - u_2 \in V$$

Alors d'après l'orthogonalité de $\varepsilon(V)$ et ϑ on obtient :

$$\langle \sigma_1 - \sigma_2, \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2) \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \text{ d'après (3.44) on a :}$$

$$\langle \xi\varepsilon(u_1) - \xi\varepsilon(u_2) + Z_1 - Z_2, \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2) \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \text{ alors}$$

$$\langle \xi\varepsilon(u_1) - \xi\varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2) \rangle_{\mathcal{H}} = - \langle Z_1 - Z_2, \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2) \rangle_{\mathcal{H}}$$

En utilisant (3.6) on obtient :

$$\exists \alpha > 0 : \alpha |\varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2)|_{\mathcal{H}}^2 \leq |\langle \xi\varepsilon(u_1) - \xi\varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2) \rangle_{\mathcal{H}}| \leq |Z_1 - Z_2|_{\mathcal{H}} |\varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2)|_{\mathcal{H}}$$

D'après l'inégalité de Korn on a :

$$(3.48) \quad |u_1 - u_2|_V \leq C |Z_1 - Z_2|_{\mathcal{H}}$$

En plus en utilisant (3.44), (3.48) on obtient :

$$|\sigma_1 - \sigma_2|_{\vartheta} \leq |\xi\varepsilon(u_1) - \xi\varepsilon(u_2)|_{\mathcal{H}} + |Z_1 - Z_2|_{\mathcal{H}}. (|\sigma_1 - \sigma_2|_{\vartheta} = |\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}})$$

Et d'après la continuité de ξ on a :

$$\begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2|_{\vartheta} &\leq C |\varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2)|_{\mathcal{H}} + |Z_1 - Z_2|_{\mathcal{H}} \\ (3.49) \quad |\sigma_1 - \sigma_2|_{\vartheta} &\leq C |u_1 - u_2|_V + |Z_1 - Z_2|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

D'où d'après (3.48), (3.49) on a :

$$\begin{aligned} |u_1 - u_2|_V + |\sigma_1 - \sigma_2|_{\vartheta} &\leq C |Z_1 - Z_2|_{\mathcal{H}} + C' |u_1 - u_2|_V + |Z_1 - Z_2|_{\mathcal{H}} \\ &\leq C |Z_1 - Z_2|_{\mathcal{H}} + C' |Z_1 - Z_2|_{\mathcal{H}} + |Z_1 - Z_2|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

Alors il existe $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} |u_1 - u_2|_V + |\sigma_1 - \sigma_2|_{\vartheta} &\leq C |Z_1 - Z_2|_{\mathcal{H}} \\ (3.50) \quad |u_1 - u_2|_{H_1} + |\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}} &\leq C |Z_1 - Z_2|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

Et à partir de (3.42) et (3.47), on obtient :

$$\begin{aligned} \Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t) &= \int_0^t \eta_1(s) ds - \int_0^t \eta_2(s) ds \text{ donc} \\ (3.51) \quad |\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{\mathcal{H}} &\leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{\mathcal{H}} ds \end{aligned}$$

On sait que $C > 0$ seulement Λ peut ne pas être une contraction, c'est pour cela qu'on considère Λ^p la puissance $P^{i\grave{e}me}$ de l'opérateur Λ .

Alors on utilise (3.7) on a :

$$\begin{aligned} \exists L > 0 : |G(\sigma_1, \varepsilon_1) - G(\sigma_2, \varepsilon_2)| &\leq L(|\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}} + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|_{\mathcal{H}}). \quad \forall \sigma_i, \varepsilon_i \in S_N \\ \text{Où, } \exists L > 0 : |G(\sigma_1, u_1) - G(\sigma_2, u_2)|_{\mathcal{H}} &\leq L(|\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}} + |u_1 - u_2|_{H_1}). \quad \forall \sigma_i \in S_N \end{aligned}$$

Et d'après (3.50) on a :

$$\begin{aligned} |G(\sigma_1, u_1) - G(\sigma_2, u_2)|_{\mathcal{H}} &\leq LC |Z_1 - Z_2|_{\mathcal{H}} \Rightarrow \\ |\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{\mathcal{H}} &\leq LC \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{\mathcal{H}} ds \end{aligned}$$

Par récurrence :

$$\begin{aligned} |\Lambda(\Lambda\eta_1(t)) - \Lambda(\Lambda\eta_2(t))|_{\mathcal{H}} &\leq LC \int_0^t |\Lambda\eta_1(r) - \Lambda\eta_2(r)|_{\mathcal{H}} dr \\ |\Lambda^2\eta_1(t) - \Lambda^2\eta_2(t)|_{\mathcal{H}} &\leq L^2C^2 \int_0^t \int_0^r |\eta_1(q) - \eta_2(q)|_{\mathcal{H}} dq dr. \end{aligned}$$

$$|\Lambda^P \eta_1(t) - \Lambda^P \eta_2(t)|_{\mathcal{H}} \leq L^P C^P \underbrace{\int_0^t \int_0^r \dots \int_0^q}_{p \text{ intégrales}} |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{\mathcal{H}} dqdr\dots ds.$$

Pour tout $t \in [0, T]$ et $p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\int_0^T |\Lambda^P \eta_1(t) - \Lambda^P \eta_2(t)|_{\mathcal{H}} dt \leq (CL)^P \int_0^T |\eta_1 - \eta_2|_{\mathcal{H}} dt \underbrace{\int_0^t \int_0^r \dots \int_0^q}_{p \text{ intégrales}} dqdr\dots ds.$$

$$|\Lambda^P \eta_1(t) - \Lambda^P \eta_2(t)|_{0,T,\mathcal{H}} \leq (CL)^P |\eta_1 - \eta_2|_{0,T,\mathcal{H}} \times \frac{T^P}{P!}$$

$$(3.52) \quad |\Lambda^P \eta_1 - \Lambda^P \eta_2|_{0,T,\mathcal{H}} \leq \frac{(CLT)^P}{P!} |\eta_1 - \eta_2|_{0,T,\mathcal{H}}$$

Est puisque $\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{(CLT)^P}{P!} = 0$ (d'après la règle de D'Alembert et la condition nécessaire de convergence des séries numériques), (3.52) implique que pour P assez grand l'opérateur Λ^P est une contraction dans $C^0(0,T, \mathcal{H})$. Alors d'après le théorème du point fixe, il existe un unique élément $\overset{*}{\eta} \in C^0(0,T, \mathcal{H})$ tel que :

$$(3.53) \quad \Lambda^P \overset{*}{\eta} = \overset{*}{\eta}$$

D'après (3.53) on a :

$$(3.54) \quad \Lambda^{P+1}(\overset{*}{\eta}) = \Lambda(\Lambda^P \overset{*}{\eta}) = \Lambda(\overset{*}{\eta}) = \Lambda^P(\Lambda \overset{*}{\eta})$$

Alors il résulte d'après (3.54) que $\Lambda \overset{*}{\eta}$ est un point fixe de Λ^P , mais $\overset{*}{\eta}$ est un point fixe unique de Λ^P c'est à dire

$$\Lambda^P(\Lambda \overset{*}{\eta}) = \Lambda^P(\overset{*}{\eta}) = \Lambda \overset{*}{\eta} = \overset{*}{\eta}$$

Alors il résulte que $\overset{*}{\eta}$ est un point fixe unique de Λ .

Démonstration du théorème 3.1 :

Existence :

Soit $\overset{*}{\eta} \in C^0(0,T, \mathcal{H})$ le point fixe de l'opérateur Λ est soit $(u_{\overset{*}{\eta}}, \sigma_{\overset{*}{\eta}}) \in C^1(0,T, H_1) \times C^1(0,T, \mathcal{H})$ solution de problème (3.15)-(3.18)

Pour $\eta = \overset{*}{\eta}$; en utilisant (3.13) et (3.16), après en dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$(3.55) \quad \dot{\sigma}_{\overset{*}{\eta}}(t) = \xi \varepsilon (i_{\overset{*}{\eta}}(t)) + \overset{*}{\eta}(t).p.p.t \text{ dans }]0, T[$$

A partir de (3.42); il résulte :

$$(3.56) \quad \overset{*}{\eta}(t) = \Lambda \overset{*}{\eta}(t) = G(\sigma_{\overset{*}{\eta}}(t), \varepsilon(u_{\overset{*}{\eta}}(t))), \forall t \in]0, T[$$

En utilisant (3.55) et (3.56), on obtient :

$$(3.57) \quad \sigma_{\overset{*}{\eta}}(t) = \xi \varepsilon(u_{\overset{*}{\eta}}(t)) + G(\sigma_{\overset{*}{\eta}}(t), \varepsilon(u_{\overset{*}{\eta}}(t))), p.p.t \text{ dans }]0, T[.$$

Et moyennant le théorème (3.1), on trouve que le couple $(u_{\overset{*}{\eta}}, \sigma_{\overset{*}{\eta}})$ est solution du problème (3.1)-(3.5).

Unicité :

Soit (u, σ) une solution du problème (3.1)-(3.5) ayant la régularité $u \in C^1(0.T, H_1)$, $\sigma \in C^1(0.T, \mathcal{H}_1)$

En notant par $\eta \in C^0(0.T, \mathcal{H})$ la fonction définie par :

$$(3.58) \quad \eta(t) = G(\sigma_{\eta}(t), \varepsilon(u_{\eta}(t))), \forall t \in]0, T[$$

Il vient à partir de (3.13), (3.14) que le couple (u, σ) est une solution du problème (3.15)-(3.18). Comme ce problème admet une solution unique $(u_{\overset{*}{\eta}}, \sigma_{\overset{*}{\eta}})$, on trouve :

$$(3.59) \quad u = u_{\overset{*}{\eta}}; \sigma = \sigma_{\overset{*}{\eta}}$$

En utilisant maintenant (3.42), (3.58) et (3.59), il vient $\Lambda \eta = \eta$

$$(3.60) \quad \eta = \overset{*}{\eta}$$

Alors la partie unicité dans le théorème (3.1) est maintenant une conséquence de (3.58), (3.59).

3.2.2 Algorithme permettant de calculer la solution en dimension 1 :

Soit G une fonction donnée, tel que : $\eta_0 = G(\sigma, \varepsilon(u))$.

1. Le problème sera :

$$(P_{\eta_0}) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \sigma_0(x,t)}{\partial x} + f(x,t) = 0 & \text{dans }]a, b[\times]0, T[\\ \sigma_0(x,t) = E \varepsilon(u_0(x,t)) + Z_0 & \text{dans }]a, b[\times]0, T[\\ u_0(a,t) = \beta & \text{dans } \{a\} \times]0, T[\\ \sigma_0(b,t) = \alpha & \text{dans } \{b\} \times]0, T[\\ u_0(x,0) = u_0(x) & \text{dans }]a, b[\\ \sigma_0(x,0) = \sigma_0(x) & \text{dans }]a, b[\end{array} \right.$$

Soit (u_0, σ_0) une solution de ce problème (P_{η_0})

2. On pose : $\Lambda\eta_0 = G(\varepsilon(u_0, \sigma_0))$ où $(u_{\eta_0}, \sigma_{\eta_0})$ solution du (P_{η_0})

$$\begin{aligned} \eta_0 &\xrightarrow{(P_{\eta_0})} (u_{\eta_0}, \sigma_{\eta_0}) \xrightarrow{\Lambda} \Lambda\eta_0 = G(\sigma_0, \varepsilon(u_0)) = \eta_1 \\ \eta_1 &\xrightarrow{(P_{\eta_1})} (u_{\eta_1}, \sigma_{\eta_1}) \xrightarrow{\Lambda} \Lambda\eta_1 = G(\sigma_1, \varepsilon(u_1)) = \eta_2 \end{aligned}$$

Le problème (P_{η_1}) sera :

$$(P_{\eta_1}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_1(x,t)}{\partial x} + f(x,t) = 0 \\ \sigma_1(x,t) = E\varepsilon(u_1(x,t)) + Z_1 \\ u_1(a,t) = \beta \\ \sigma_1(b,t) = \alpha \\ \sigma_1(x,0) = \sigma_1(x) \\ u_1(x,0) = u_1(x) \end{array} \right.$$

Et ainsi de suite jusqu'à :

$$\eta_{n-1} \xrightarrow{(P_{\eta_{n-1}})} (u_{\eta_{n-1}}, \sigma_{\eta_{n-1}}) \xrightarrow{\Lambda} \Lambda\eta_{n-1} = G(\sigma_{\eta_{n-1}}, \varepsilon(u_{\eta_{n-1}})) = \eta_n$$

$(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (u_{\eta_n}, \sigma_{\eta_n})$ solution du problème (P_{η_n})

Λ a un point fixe unique : $\Lambda\eta = \eta \Leftrightarrow \Lambda^p\eta = \eta$

3. Le test d'arrêt : à chaque fois je compare : $\Lambda\eta_i$ avec $\eta_i, i \in \mathbb{N}$

Si $\Lambda\eta_{i_0} = \eta_{i_0}$, dans ce cas : $(u_{\eta_{i_0}}, \sigma_{\eta_{i_0}})$ est la solution du problème (3.1)-(3.5).

L'intérêt de la méthode :

La méthode du point fixe est une méthode constructive c'est -à-dire :

a) A partir de η_0 , on calcule $(u_{\eta_0}, \sigma_{\eta_0})$ solution du problème (P_{η_0}) .

b) On calcule $\eta_1 = G(\varepsilon(u_{\eta_0}), \sigma_{\eta_0})$.

c) En suivant les mêmes étapes a), b) ; on calcule $\eta_i = G(\varepsilon(u_{\eta_{i-1}}), \sigma_{\eta_{i-1}})$.

d) A chaque fois, on compare η_j et $\Lambda\eta_j = G(\varepsilon(u_{\eta_{j-1}}), \sigma_{\eta_{j-1}})$ et lorsque $\Lambda\eta_j = \eta_j$,

alors la solution du problème sera $(u_{\eta_j}, \sigma_{\eta_j})$.

Le problème en dimension 1 et son interprétation mécanique :

Considérons le problème suivant :

Trouver $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que : $\Omega =]a, b[, \Gamma_1 = \{a\}, \Gamma_2 = \{b\}$

$$(3.61) \quad \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} + f(x,t) = 0 \quad \text{dans } [a, b] \times]0, T[$$

$$(3.62) \quad \dot{\sigma} = E\varepsilon(\dot{u}) + G(\varepsilon(u), \sigma) \quad \text{dans } [a, b] \times]0, T[$$

$$(3.63) \quad u(a, t) = \beta \quad \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[$$

$$(3.64) \quad \sigma(b, t) = \alpha \quad \text{sur } \Gamma_2 \times]0, T[$$

$$(3.65) \quad u(x, 0) = u_0(x), \sigma(x, 0) = \sigma_0(x) \quad \text{dans } [a, b]$$

Où ce problème représente une barre unidimensionnelle viscoplastique occupant un intervalle I de \mathbb{R} de frontière $\Gamma_1 = \{a\}$ et $\Gamma_2 = \{b\}$,

ayant une loi de comportement viscoplastique (décomposable en une partie linéaire et l'autre non linéaire) et soumis à des conditions aux limites déplacement-traction, on donne à l'extrémité ($x = a$) un déplacement égal à ($u(a, t) = \beta$), et l'autre extrémité ($x = b$) une force de traction égale à ($u(b, t) = \alpha$), et soumis à des conditions initiales ($u(x, 0) = u_0; \sigma(x, 0) = \sigma_0$).

3.2.3 Exemples numériques en dimension 1 :

Résoudre le problème suivant explicitement, puis par la méthode de point fixe pour expérimenter l'algorithme proposé et comparer les solutions réelles avec les solutions approchées :

1) Nous avons les données suivantes : $f = 0, E = 1, u_0 = \alpha x, \sigma_0 = \alpha$

$$\Omega = [0, 1], \Gamma_1 = \{0\}, \Gamma_2 = \{1\}$$

Trouver le champ des déplacement $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_1$ tels que :

$$(3.66) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

$$(3.67) \quad \dot{\sigma} = \dot{\varepsilon}(u(x, t)) - \varepsilon(x, t) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

$$(3.68) \quad u(0, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[$$

$$(3.69) \quad \sigma(1, t) = \alpha \quad \text{sur } \Gamma_2 \times]0, T[$$

$$(3.70) \quad u(x, 0) = \alpha x, \sigma(x, 0) = \alpha \quad \text{dans } \Omega$$

1/Calculons la solution réelle du problème (3.66)-(3.69) :

De (3.66) on tire $\sigma(x, t) = \sigma(t)$ (ne dépendant pas de x).

(3.69) implique $\sigma(1, t)$ ne dépendent pas de t .

Alors : $\sigma(x, t) = \alpha$

De (3.67) on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \dot{\varepsilon}(u(x, t)) - \varepsilon(x, t) &\Rightarrow \dot{\varepsilon}(u(x, t)) - \varepsilon(x, t) = 0 \\ &\Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{\varepsilon}(x, s)}{\varepsilon(x, s)} ds = \int_0^t ds \\ &\Rightarrow \ln \varepsilon(u(x, t)) - \ln \alpha = t + c \\ &\Rightarrow \varepsilon(u(x, t)) = \alpha \exp t \end{aligned}$$

Où $\varepsilon(u(x, t)) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \Rightarrow u(x, t) = \alpha x \exp t$

D'où la solution réelle est :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \alpha x \exp t \\ \varepsilon(u(x, t)) &= \alpha \exp t \\ \sigma(x, t) &= \alpha \end{aligned}$$

2/Calculons la solution par la méthode du point fixe :

Soit G une fonction donnée : $\eta = G(\sigma(x, t), \varepsilon(u(x, t))) = -\varepsilon(x, t)$

Le problème sera :

$$(P_\eta) \begin{cases} \frac{\partial \sigma_\eta(x, t)}{\partial x} = 0 \\ \sigma_\eta(x, t) = \varepsilon(u_\eta(x, t)) + Z_\eta \\ u_\eta(0, t) = 0 \\ \sigma_\eta(1, t) = \alpha \\ u_\eta(x, 0) = \alpha x, \sigma_\eta(x, 0) = \alpha \end{cases}$$

Où $Z_\eta(t) = \int_0^t \eta(s) ds + z_0, \forall t \in [0, T]$, et $z_0 = \sigma_0 - \varepsilon(u_0)$

Pour $N = 1$:

Posons $\eta_0 = 0$ (choisi où donné) tel que :

$$\eta_0 \rightarrow (P_{\eta_0}) \rightarrow (u_{\eta_0}, \sigma_{\eta_0}) = (u_0, \sigma_0)$$

D'où le problème devient :

$$(P_{\eta_0}) \begin{cases} (3.71) & \frac{\partial \sigma_0}{\partial x}(x, t) = 0 \\ (3.72) & \sigma_0 = \varepsilon(u_0(x, t)) + Z_0 \\ (3.73) & u_0(0, t) = 0 \\ (3.74) & \sigma_0(1, t) = \alpha \end{cases}$$

De (3.71), (3.74) on trouve :

$$\sigma_0(x, t) = \alpha$$

$$\text{Mais } Z_0 = \int_0^t \eta_0(s) ds + z_0 = 0$$

$$\text{De (3.72) on a : } \varepsilon(u_0(x, t)) = \alpha$$

$$\text{Alors : } u_0(x, t) = \int_0^x \varepsilon(u_0(X, t)) dX \Rightarrow u_0(x, t) = \alpha x$$

D'où les solutions approchées suivantes :

$$u_0(x, t) = \alpha x$$

$$\varepsilon(u_0(x, t)) = \alpha$$

$$\sigma_0(x, t) = \alpha$$

Pour $N = 2$:

Dans ce cas :

$$\eta_1 = G(\sigma_0, \varepsilon(u_0)) = -\varepsilon(u_0) = -\alpha$$

$$\eta_1 \rightarrow (P_{\eta_1}) \rightarrow (u_{\eta_1}, \sigma_{\eta_1}) = (u_1, \sigma_1)$$

D'où le problème devient :

$$(P_{\eta_1}) \begin{cases} (3.75) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(x, t) = 0 \\ (3.76) & \sigma_1(x, t) = \varepsilon(u_1(x, t)) + Z_1 \\ (3.77) & u_1(0, t) = 0 \\ (3.78) & \sigma_1(1, t) = \alpha \end{cases}$$

De (3.75), (3.78) on trouve : $\sigma_1(x, t) = \alpha$

$$\text{Mais } Z_1(t) = \int_0^t \eta_1(s) ds + z_0 = \int_0^t -\alpha ds + 0 = -\alpha t$$

De (3.76) on a : $\varepsilon(u_1(x, t)) = \alpha + \alpha t$

Alors

$$u_1(x, t) = \int_0^x \varepsilon(u_1(X, t)) dX = \int_0^x (\alpha + \alpha t) dX = \alpha x + \alpha t x$$

D'où les solutions approchées suivantes :

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \alpha x + \alpha t x \\ \varepsilon(u_1(x, t)) &= \alpha + \alpha t \\ \sigma_1(x, t) &= \alpha \end{aligned}$$

Pour $N = 3$:

Dans ce cas : $\eta_2 = G(\sigma_1, \varepsilon(u_1)) = -\varepsilon(u_1) = -(\alpha + \alpha t)$

$\eta_2 \rightarrow (P_{\eta_2}) \rightarrow (u_{\eta_2}, \sigma_{\eta_2}) = (u_2, \sigma_2)$

D'où le problème devient :

$$(P_{\eta_2}) \begin{cases} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x, t) = 0 \\ \sigma_2(x, t) = \varepsilon(u_2(x, t)) + Z_2 \\ u_2(0, t) = 0 \\ \sigma_2(1, t) = \alpha \end{cases}$$

De la même manière on trouve les solutions approchées suivantes :

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \frac{\alpha}{2} t^2 x + \alpha t x + \alpha x \\ \varepsilon(u_2(x, t)) &= \frac{\alpha}{2} t^2 + \alpha t + \alpha \\ \sigma_2(x, t) &= \alpha \end{aligned}$$

Pour $N = 4$:

Dans ce cas : $\eta_3 = G(\sigma_2, \varepsilon(u_2)) = -\varepsilon(u_2) = -(\frac{\alpha}{2} t^2 + \alpha t + \alpha)$

$\eta_3 \rightarrow (P_{\eta_3}) \rightarrow (u_3, \sigma_3)$

D'où le problème devient :

$$(P_{\eta_3}) \begin{cases} \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(x, t) = 0 \\ \sigma_3(x, t) = \varepsilon(u_3(x, t)) + Z_3 \\ u_3(0, t) = 0 \\ \sigma_3(1, t) = \alpha \end{cases}$$

De la même manière on trouve les solutions approchées suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon(u_3(x, t)) &= \alpha(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3) \\ u_3(x, t) &= \alpha x(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3) \\ \sigma_3(x, t) &= \alpha \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \varepsilon(u_n(x, t)) &= \alpha(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \dots + \frac{1}{n!}t^n) \\ u_n(x, t) &= \alpha x(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \dots + \frac{1}{n!}t^n) \\ \sigma_n(x, t) &= \alpha \end{aligned}$$

Remarque 3.1 :

On a :

$$\exp t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n)$$

*On remarque que plus le nombre d'itérations N est grand plus on se rapproche de la solution réelle.

2) Nous avons les données suivantes : $f = 0$, $E = 0$, $u_0 = x^2$, $\sigma_0 = \alpha$

$$\Omega = [0, 1], \Gamma_1 = \{0\}, \Gamma_2 = \{1\}$$

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$; et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_1$.

tels que :

$$(3.79) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

$$(3.80) \quad \dot{\sigma} = \dot{\varepsilon}(u(x, t)) - \sigma(x, t) + \varepsilon(x, t) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

$$(3.81) \quad u(0, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[$$

$$(3.82) \quad \sigma(1, t) = \alpha \quad \text{sur } \Gamma_2 \times]0, T[$$

$$(3.83) \quad u(x, 0) = x^2; \sigma(x, 0) = \alpha \quad \text{dans } \Omega$$

1) Calculons la solution réelle du problème (3.79)-(3.83) :

De (3.79), (3.82) on trouve :

$$\sigma(x, t) = \alpha$$

De (3.80) on a :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \dot{\varepsilon}(x, t) - \sigma(x, t) + \varepsilon(x, t) \Rightarrow (P) \begin{cases} \dot{\varepsilon}(x, t) + \varepsilon(x, t) = \alpha \\ \varepsilon(x, 0) = 2x \end{cases}$$

(P) est un problème de Cauchy :

La résolution de ce problème est comme suit :

1/ Résolution de l'équation sans second membre :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(x, t) + \varepsilon(x, t) = 0 &\Rightarrow \frac{\dot{\varepsilon}(x, t)}{\varepsilon(x, t)} = -1 \Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{\varepsilon}(x, T)}{\varepsilon(x, T)} dT = \int_0^t -1 dT \\ &\Rightarrow \ln \varepsilon(x, t) = \ln 2x - t + C \\ &\Rightarrow \varepsilon(u(x, t)) = C 2x \exp(-t) \end{aligned}$$

2/ variation de la constante :

$$\varepsilon(x, t) = C(t) 2x \exp(-t) \Rightarrow \dot{\varepsilon}(x, t) = C'(t) 2x \exp(-t) - C(t) 2x \exp(-t)$$

$$(P) \Rightarrow \begin{cases} C'(t) 2x \exp(-t) - C(t) 2x \exp(-t) + C(t) 2x \exp(-t) = \alpha \\ \varepsilon(x, 0) = 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x C'(t) = \alpha \exp(t) \\ \varepsilon(x, 0) = 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^t 2x C'(T) dT = \int_0^t \alpha \exp(T) dT$$

$$\Rightarrow C(t) = \frac{1}{2x} (\alpha (\exp(t) - 1) + k)$$

$$\text{Alors : } \varepsilon(u(x, t)) = \alpha (1 - \exp(-t)) + k \exp(-t)$$

$$\text{Mais } \varepsilon(u(x, 0)) = k. \Rightarrow k = 2x.$$

Donc $\varepsilon(u(x, t)) = \alpha(1 - \exp(-t)) + 2x \exp(-t)$

Puisque $\varepsilon(u(x, t)) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Rightarrow u(x, t) = \alpha x(1 - \exp(-t)) + x^2 \exp(-t)$

D'où la solution réelle est :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \alpha x(1 - \exp(-t)) + x^2 \exp(-t) \\ \varepsilon(u(x, t)) &= \alpha(1 - \exp(-t)) + 2x \exp(-t) \quad \forall x \in [0, 1], t \in [0, T] \\ \sigma(x, t) &= \alpha \end{aligned}$$

2) Calculons la solution approchée par la méthode du point fixe :

Soit G une fonction donnée : $\eta = G(\sigma(x, t), \varepsilon(u(x, t))) = -\sigma(x, t) + \varepsilon(u(x, t))$

Le problème sera :

$$(P_\eta) \begin{cases} \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial x}(x, t) = 0 \\ \sigma_\eta(x, t) = \varepsilon(u_\eta(x, t)) + Z_\eta \\ u_\eta(0, t) = 0 \\ \sigma_\eta(1, t) = \alpha \\ u_\eta(x, 0) = x^2, \sigma_\eta(x, 0) = \alpha \end{cases}$$

Où

$$Z_\eta(t) = \int_0^t \eta(s) ds + z_0; \forall t \in [0, T]; z_0 = \sigma_0 - \varepsilon(u_0)$$

Pour $N = 1$:

Posons $\eta_0 = 0$ tel que : $\eta_0 \rightarrow (P_{\eta_0}) \rightarrow (u_{\eta_0}, \sigma_{\eta_0}) = (u_0, \sigma_0)$

D'où le problème devient :

$$(P_{\eta_0}) \begin{cases} (3.84) \quad \frac{\partial \sigma_0}{\partial x}(x, t) = 0 \\ (3.85) \quad \sigma_0 = \varepsilon(u_0(x, t)) + Z_0 \\ (3.86) \quad u_0(0, t) = 0 \\ (3.87) \quad \sigma_0(1, t) = \alpha \end{cases}$$

De (3.84), (3.87) on trouve :

$$\sigma_0(x, t) = \alpha$$

On a : $Z_0 = \int_0^t \eta_0(s) ds + \sigma_0 - \varepsilon(u_0) = \alpha - 2x. \forall t \in [0, T]$
 Alors d'après (3.85) on a :

$$\varepsilon(u_0(x, t)) = 2x$$

Où

$$\varepsilon(u_0(x, t)) = \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \Rightarrow u_0(x, t) = x^2$$

D'où la solution approchée :

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= x^2 \\ \varepsilon(u_0(x, t)) &= 2x \\ \sigma_0(x, t) &= \alpha \end{aligned}$$

Pour $N = 2$:

$$\eta_1 = G(\sigma_0, \varepsilon(u_0)) = -\sigma_0 + \varepsilon(u_0) = -\alpha + 2x$$

$$\begin{aligned} \text{Où } Z_1 &= \int_0^t \eta_1(s) ds + \sigma_0 - \varepsilon(u_0) = \int_0^t (-\alpha + 2x) ds + \alpha - 2x \\ Z_1 &= (2x - \alpha)(t - 1) \end{aligned}$$

$$\eta_1 \rightarrow (P_{\eta_1}) \rightarrow (\sigma_{\eta_1}, u_{\eta_1}) = (\sigma_1, u_1)$$

Le problème (P_{η_1}) devient :

$$(P_{\eta_1}) \begin{cases} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(x, t) = 0 \\ \sigma_1(x, t) = \varepsilon(u_1(x, t)) + Z_1 \\ u_1(0, t) = 0 \\ \sigma_1(1, t) = \alpha \end{cases}$$

De la même manière on trouve les solutions approchées suivantes :

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= -x^2(t - 1) + \alpha tx \\ \varepsilon(u_1(x, t)) &= -2x(t - 1) + \alpha t \\ \sigma_1(x, t) &= \alpha \end{aligned}$$

Pour $N = 3$:

$$\eta_2 = G(\sigma_1, \varepsilon(u_1)) = -\sigma_1 + \varepsilon(u_1) = (\alpha - 2x)(t - 1)$$

$$\eta_2 \rightarrow (P_{\eta_2}) \rightarrow (\sigma_{\eta_2}, u_{\eta_2}) = (\sigma_2, u_2)$$

Le problème (P_{η_2}) devient :

$$(P_{\eta_2}) \begin{cases} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x, t) = 0 \\ \sigma_2(x, t) = \varepsilon(u_2(x, t)) + Z_2 \\ u_2(0, t) = 0 \\ \sigma_2(1, t) = \alpha \end{cases}$$

Où

$$Z_2 = \int_0^t \eta_2(s) ds + \sigma_0 - \varepsilon(u_0) = (\alpha - 2x)\left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right).$$

De la même manière on trouve les solutions approchées :

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \alpha x \left(-\frac{t^2}{2} + t\right) + x^2 \left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right) \\ \varepsilon(u_2(x, t)) &= \alpha \left(t - \frac{t^2}{2}\right) + 2x \left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right) \\ \sigma_2(x, t) &= \alpha \end{aligned}$$

Pour $N = 4$:

$$\eta_3 = (2x - \alpha)\left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right) \text{ et } Z_3 = (2x - \alpha)\left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + t - 1\right)$$

$$\eta_3 \rightarrow (P_{\eta_3}) \rightarrow (\sigma_3, u_3)$$

la solution approchée du problème (P_{η_3}) est :

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) &= \alpha x \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + t \right) + x^2 \left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right) \\
\varepsilon(u_3(x, t)) &= \alpha \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \right) + 2x \left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right) \\
\sigma_3(x, t) &= \alpha \\
&\dots \\
u_n(x, t) &= \alpha x \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} - \dots + \frac{(-t)^n}{n!} \right) + x^2 \left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \dots + \frac{(-t)^n}{n!} \right) \\
\varepsilon(u_n(x, t)) &= \alpha \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} - \dots + \frac{(-t)^n}{n!} \right) + 2x \left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \dots + \frac{(-t)^n}{n!} \right) \\
\sigma_n(x, t) &= \alpha
\end{aligned}$$

Remarque 3.2 :

On a :

$$\exp(-t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n t^n}{n!} + o(t^n)$$

*On remarque que plus le nombre d'itérations N est grand plus on se rapproche de la solution réelle.

Chapitre 4

UN PROBLEME D'EVOLUTION ABSTRAIT

Dans les chapitres précédents on a utilisé la méthode du point fixe pour l'étude des problèmes mécaniques en élasticité et viscoplasticité.

Les questions qu'on pourrait se poser sont les suivantes : Peut-on appliquer cette méthode dans un cadre plus général ? Si oui, à quels types de problèmes les appliquer ? Ce chapitre fournit donc des éléments de réponse à ces questions en proposant un problème d'évolution formulé dans un cadre hilbertien général. Ainsi après la formulation de ce problème on donne un résultat d'existence et d'unicité moyennant une technique de point fixe. Ensuite on proposera une approche numérique de la solution utilisant une méthode itérative.

4.1 Formulation du problème-Hypothèses :

Soit H un espace de Hilbert réel, tel que $H = X \oplus Y$ une décomposition orthogonale de H . Soient A et B deux opérateurs non linéaires $A : H \rightarrow H$ et $B : [0, T] \times X \times Y \rightarrow H, T > 0$. On considère alors le problème d'évolution suivant :

Problème P : Trouver les fonctions $x : [0, T] \rightarrow X$ et $y : [0, T] \rightarrow Y$ telles que :

$$(4.1) \quad \dot{y}(t) = Ax(t) + B(t, x(t), y(t)) \text{ pour tout } t \in [0, T]$$

$$(4.2) \quad x(0) = x_0, y(0) = y_0$$

Le problème (4.1)-(4.2) représente une version abstraite du problème (3.1)-(3.5) dans les cas où $h = 0, g = 0$.

Pour l'étude de ce problème on formule les hypothèses suivantes :

A est un opérateur symétrique défini positif :

$$(4.3) \quad \text{il existe } \alpha > 0 \text{ tel que } \langle Ax, x \rangle_H \geq \alpha |x|_H^2. \text{ pour tout } x \in H$$

$$(4.4) \quad \langle Ax, y \rangle_H = \langle x, Ay \rangle_H. \text{ pour tout } x, y \in H$$

Nous supposons également que B satisfait :

$$(4.5) \quad \text{il existe } L > 0 \text{ tel que}$$

$$|B(t, x_1, y_1) - B(t, x_2, y_2)| \leq L(|x_1 - x_2|_H + |y_1 - y_2|_H). \text{ pour tout } t \in [0, T] \text{ et } x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$$

$$(4.6) \quad t \rightarrow B(t, x, y) : [0, T] \rightarrow H \text{ est une fonction continue pour tout } x \in X, y \in Y$$

$$(4.7) \quad x_0 \in X, y_0 \in Y$$

4.2 Existence et unicité de la solution :

Sous les hypothèses (4.1)-(4.6), le problème P admet une solution unique $x \in C^1(0, T, X), y \in C^1(0, T, Y)$

Démonstration :

Soient $\eta \in C^0(0, T, H)$ et $z_\eta \in C^1(0, T, H)$ la fonction définie par

$$(4.8) \quad z_\eta(t) = \int_0^t \eta(s) ds + z_0. \text{ pour tout } t \in [0, T]$$

Où

$$(4.9) \quad z_0 = y_0 - Ax_0$$

En utilisant des arguments standards des équations elliptiques on obtient l'existence et l'unicité de deux fonctions $x_\eta \in C^1(0, T, X)$, $y_\eta \in C^1(0, T, Y)$ vérifiant :

$$(4.10) \quad y_\eta(t) = Ax_\eta(t) + z_\eta(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

Cependant, en prenant a la forme bilinéaire, symétrique et coercive sur H définie par :

$$(4.11) \quad a(u, v) = \langle Au, v \rangle_H \quad \forall u, v \in H$$

La fonction x_η vérifiera l'égalité

$$(4.12) \quad a(x_\eta(t), x') + \langle z_\eta(t), x' \rangle_H = 0 \quad \forall x' \in X \text{ et } t \in [0, T] \text{ (voir (1.3),(1.4) Lax - Milgram)}$$

En utilisant maintenant (4.8)-(4.10) et l'orthogonalité de X et Y on obtient

$$(4.13) \quad x_\eta(0) = x_0, y_\eta(0) = y_0$$

Soient $\eta_1, \eta_2 \in C^0(0, T, H)$, on note : $z_{\eta_1} = z_1$; $z_{\eta_2} = z_2$; $x_{\eta_i} = x_i$; $y_{\eta_i} = y_i$.

On a $x_1 - x_2 \in X$, $y_1 - y_2 \in Y$

En utilisant (4.10) on trouve :

$$(4.14) \quad y_1 - y_2 = Ax_1 - Ax_2 + z_1 - z_2$$

Moyennant l'orthogonalité de X et Y on obtient :

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle_H = 0 \text{ d'après (4.14) on a :}$$

$$\langle Ax_1 - Ax_2 + z_1 - z_2, x_1 - x_2 \rangle_H = 0 \text{ alors :}$$

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle_H = -\langle z_1 - z_2, x_1 - x_2 \rangle_H$$

En utilisant (4.3) on obtient :

$$\alpha |x_1 - x_2|_H^2 \leq |x_1 - x_2|_H |z_1 - z_2|_H$$

$$|x_1 - x_2|_H \leq \frac{1}{\alpha} |z_1 - z_2|_H$$

$$(4.15) \quad |x_1 - x_2|_H \leq C |z_1 - z_2|_H$$

En plus en utilisant (4.14), (4.15) on obtient :

$$|y_1 - y_2|_H \leq |Ax_1 - Ax_2|_H + |z_1 - z_2|_H$$

$$\leq C |x_1 - x_2|_H + |z_1 - z_2|_H \text{ (A opérateur continu)}$$

$$(4.16) \quad |y_1 - y_2|_H \leq C |z_1 - z_2|_H$$

D'où d'après (4.15), (4.16) on a :

$$|x_1 - x_2|_H + |y_1 - y_2|_H \leq C |z_1 - z_2|_H$$

Puis on passe à l'intégrale :

$$|x_1 - x_2|_{0,T,H} + |y_1 - y_2|_{0,T,H} \leq C |z_1 - z_2|_{0,T,H}$$

$$(4.17) \quad |x_\eta|_{0,T,H} + |y_\eta|_{0,T,H} \leq C |z_\eta|_{0,T,H}$$

De la même manière on considérant la dérivée par rapport au temps dans (4.15) et (4.16) on trouve

$$|\dot{x}_\eta|_{0,T,H} + |\dot{y}_\eta|_{0,T,H} \leq C |\dot{z}_\eta|_{0,T,H}$$

$$\text{Alors } \left(|x_\eta|_{0,T,H} + |\dot{x}_\eta|_{0,T,H} \right) + \left(|y_\eta|_{0,T,H} + |\dot{y}_\eta|_{0,T,H} \right) \leq C \left(|z_\eta|_{0,T,H} + |\dot{z}_\eta|_{0,T,H} \right)$$

$$(4.18) \quad |x_\eta|_{1,T,H} + |y_\eta|_{1,T,H} \leq C |z_\eta|_{1,T,H}$$

D'après (4.17), (4.18) il vient :

$$(4.19) \quad |x_\eta|_{j,T,H} + |y_\eta|_{j,T,H} \leq C |z_\eta|_{j,T,H}$$

Où C est une constante qui dépend seulement de A tel que $C > 0$.

Si on définit l'opérateur $\Lambda : C^0(0, T, H) \rightarrow C^0(0, T, H)$ par

$$(4.20) \quad \Lambda\eta(t) = B(t, x_\eta(t), y_\eta(t)); \forall \eta \in C^0(0, T, H) \text{ et } t \in [0, T]$$

et comme on obtient que $t \rightarrow B(t, x_\eta(t), y_\eta(t))$ moyennant (4.5), (4.6) est une fonction continu de $[0, T]$ dans H , on montre que Λ admet un point fixe unique. En effet, soient $\eta_1, \eta_2 \in C^0(0, T, H)$, en utilisant (4.5), (4.19) et (4.8) nous obtenons :

$$(4.21) \quad |\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_H \leq CL \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_H ds \quad \forall t \in [0, T]$$

Par récurrence, dénotant par Λ^p les puissances de l'opérateur Λ , (4.21) implique

$$|\Lambda^p\eta_1(t) - \Lambda^p\eta_2(t)|_H \leq (CL)^P \underbrace{\int_0^t \int_0^r \dots \int_0^q |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_H dqdr \dots ds}_{p \text{ intégrales}}$$

pour tout $t \in [0, T]$ et $p \in \mathbb{N}$. il résulte :

$$(4.22) \quad |\Lambda^p\eta_1 - \Lambda^p\eta_2|_{0,T,H} \leq \frac{(CLT)^P}{P!} |\eta_1 - \eta_2|_{0,T,H} \quad \forall P \in \mathbb{N}$$

Est puisque $\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{(CLT)^P}{P!} = 0$, (4.22) implique que pour P assez grand l'opérateur

Λ^P est une contraction dans $C^0(0.T, H)$. Alors d'après le théorème du point fixe, il existe un unique élément $\overset{*}{\eta} \in C^0(0.T, H)$ tel que :

$$(4.23) \quad \Lambda^P \overset{*}{\eta} = \overset{*}{\eta}$$

D'après (4.23) on a :

$$(4.24) \quad \Lambda^{P+1}(\overset{*}{\eta}) = \Lambda(\Lambda^P \overset{*}{\eta}) = \Lambda(\overset{*}{\eta}) = \Lambda^P(\Lambda \overset{*}{\eta})$$

Alors il vient d'après (4.24) que $\Lambda \overset{*}{\eta}$ est un point fixe de Λ^P , mais $\overset{*}{\eta}$ est un point fixe unique de Λ^P c'est à dire

$$\Lambda^P(\Lambda \overset{*}{\eta}) = \Lambda^P(\overset{*}{\eta}) = \Lambda \overset{*}{\eta} = \overset{*}{\eta}$$

Alors on conclut que $\overset{*}{\eta}$ est un point fixe unique de Λ .

Démonstration du théorème 4.1 :

Existence :

Soit $\overset{*}{\eta} \in C^0(0.T, H)$ le point fixe de l'opérateur Λ est soit $(x_*, y_*) \in C^1(0.T, X) \times C^1(0.T, Y)$ solution de problème (4.8)-(4.10)

Pour $\eta = \overset{*}{\eta}$; en utilisant (4.8) et (4.10), ensuite en dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$(4.25) \quad \dot{y}_*^*(t) = Ax_*^* + \dot{\eta}^*(t).p.p.t \text{ dans }]0, T[$$

à partir de (4.20); il résulte :

$$(4.26) \quad \dot{\eta}^*(t) = \Lambda \dot{\eta}^*(t) = B(t, x_*^*, y_*^*) \quad \forall t \in]0, T[$$

En utilisant (4.25) et (4.26), on obtient :

$$(4.27) \quad \dot{y}_*^*(t) = Ax_*^*(t) + B(t, x_*^*(t), y_*^*(t)), p.p.t \text{ dans }]0, T[$$

Et moyennant le théorème (4.1), il résulte que le couple (x_*^*, y_*^*) est solution du problème (4.1)-(4.2).

Unicité :

Soit (x, y) une solution du problème (P) ayant la régularité $x \in C^1(0.T, X), y \in C^1(0.T, Y)$

En notant par $\eta \in C^0(0.T, H)$ la fonction définie par :

$$(4.28) \quad \eta(t) = B(t, x_\eta(t), y_\eta(t)), \forall t \in]0, T[$$

Il vient à partir de (4.8), (4.9) que le couple (x, y) est une solution du problème (4.8)-(4.10). Comme ce problème admet une solution unique (x_η^*, y_η^*) , on a :

$$(4.29) \quad x = x_\eta^*; y = y_\eta^*$$

En utilisant maintenant (4.20), (4.28) et (4.29), il vient $\Lambda\eta = \eta$

$$(4.30) \quad \eta = \eta^*$$

Alors l'unicité de la solution dans le théorème 4.1 est maintenant une conséquence de (4.28), (4.29).

4.3 Une approche numérique

La propriété de contraction soulignée dans le paragraphe précédent nous permet d'étudier l'approche numérique de la solution du problème (4.1)-(4.2) par un processus itératif. Ainsi, nous supposons dans ce qui suit que (4.3)-(4.7) est vérifiée et nous considérons la suite $(\eta_n) \subset C^0(0, T, H)$ définie par :

$$(4.31) \quad \eta_{n+1} = \Lambda\eta_n$$

où η_0 est un élément arbitraire de $C^0(0, T, H)$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note z_n l'élément défini par (4.8) et par (x_n, y_n) la solution de (4.10) pour $\eta = \eta_n$. Soit η^* le point fixe unique de Λ ; on note également par z_η^* et par (x_η^*, y_η^*) la solution de (4.10) pour $\eta = \eta^*$. Il résulte de la preuve du théorème (4.1) que :

$$(4.32) \quad x^* = x \quad ; \quad y^* = y$$

où (x, y) est la solution du problème (4.1)-(4.2).

Lemme 4.1 :

quand $n \rightarrow +\infty$ nous avons $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$ dans $C^0(0, T, H)$, de plus on a l'estimation suivante :

$$(4.33) \quad |x_n - x|_{j,T,H} + |y_n - y|_{j,T,H} \leq C(T + j) \exp K \frac{K^n}{n!} |\Lambda\eta_0 - \eta_0|_{0,T,H}$$

pour tout $j = 0, 1, n \in \mathbb{N}$ où C est une constante strictement positive définie dans le théorème 4.1 et $K = CLT$.

Démonstration :

puisque Λ est un opérateur continu et pour p assez grand Λ^p est une contraction sur l'espace $C^0(0, T, H)$, il résulte que

$\eta_n \rightarrow \overset{*}{\eta}$ dans $C^0(0, T, H)$. par conséquent par (4.8) on obtient $z_n \rightarrow \overset{*}{z}$ dans $C^1(0, T, H)$. En utilisant le résultat de continuité trouvé dans (4.19) nous obtenons $x_n \rightarrow \overset{*}{x}, y_n \rightarrow \overset{*}{y}$ dans $C^1(0, T, H)$, par conséquent par (4.32) nous obtenons : $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ (la première partie du lemme).

Afin d'obtenir (4.33) nous commençons par estimer la distance entre η_n et $\overset{*}{\eta}$ nous remarquons que pour chaque $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n$, de (4.31) et (4.22) Nous déduisons :

$$\begin{aligned} |\eta_n - \eta_m|_{0,T,H} &= |\eta_n - \eta_{n+1} + \eta_{n+1} - \eta_{n+2} + \eta_{n+2} - \eta_{n+3} + \eta_{n+3} - \dots + \eta_{m-1} - \eta_m|_{0,T,H} \\ |\eta_n - \eta_m|_{0,T,H} &\leq |\eta_n - \eta_{n+1}|_{0,T,H} + |\eta_{n+1} - \eta_{n+2}|_{0,T,H} + |\eta_{n+2} - \eta_{n+3}|_{0,T,H} + \dots + |\eta_{m-1} - \eta_m|_{0,T,H} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \eta_{n+1} = \Lambda\eta_n, \eta_{n+2} = \Lambda\eta_{n+1} = \Lambda^2\eta_n, \dots, \eta_m = \Lambda^{m-(n+1)}\eta_{n+1} \forall m, n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } |\eta_n - \eta_m|_{0,T,H} &\leq |\eta_n - \eta_{n+1}|_{0,T,H} + |\Lambda\eta_n - \Lambda\eta_{n+1}|_{0,T,H} + |\Lambda^2\eta_n - \Lambda^2\eta_{n+1}|_{0,T,H} + \\ \dots &+ |\Lambda^{m-(n+1)}\eta_n - \Lambda^{m-(n+1)}\eta_{n+1}|_{0,T,H} . \end{aligned}$$

$$\text{D'après (4.22) on a : } |\Lambda\eta_n - \Lambda\eta_{n+1}|_{0,T,H} \leq \frac{K}{1!} |\eta_n - \eta_{n+1}|_{0,T,H} .$$

$$|\Lambda^2\eta_n - \Lambda^2\eta_{n+1}|_{0,T,H} \leq \frac{K^2}{2!} |\eta_n - \eta_{n+1}|_{0,T,H}$$

.
.
.

$$|\Lambda^{m-n-1}\eta_n - \Lambda^{m-n-1}\eta_{n+1}|_{0,T,H} \leq \frac{K^{m-n-1}}{(m-n-1)!} |\eta_n - \eta_{n+1}|_{0,T,H} .$$

$$\text{Alors : } |\eta_n - \eta_m|_{0,T,H} \leq \left(1 + \frac{K}{1!} + \frac{K^2}{2!} + \dots + \frac{K^{m-n-1}}{(m-n-1)!}\right) |\eta_n - \eta_{n+1}|_{0,T,H} .$$

Cette inégalité implique :

$$|\eta_n - \eta_m|_{0,T,H} \leq \exp K |\eta_n - \eta_{n+1}|_{0,T,H}$$

Et passant à la limite quand $m \rightarrow +\infty$, nous obtenons :

$$\left|\eta_n - \overset{*}{\eta}\right|_{0,T,H} \leq \exp K |\eta_n - \eta_{n+1}|_{0,T,H}$$

$$\text{De (4.31) nous obtenons : } \eta_n = \Lambda^n\eta_0, \eta_{n+1} = \Lambda^{n+1}\eta_0 = \Lambda\Lambda^n\eta_0 = \Lambda\eta_n$$

En utilisant encore (4.22), la dernière inégalité devient :

$$\left| \eta_n - \eta^* \right|_{0,T,H} \leq \exp K \left| \Lambda^n \eta_0 - \Lambda^{n+1} \eta_0 \right|_{0,T,H} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

D'après (4.22) :

$$(4.34) \quad \left| \eta_n - \eta^* \right|_{0,T,H} \leq \exp K \frac{K^n}{n!} \left| \Lambda \eta_0 - \eta_0 \right|_{0,T,H} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Maintenant remarquons que de (4.8) nous obtenons :

$$\left| z_n - z^* \right|_H \leq \int_0^t \left| \eta_n - \eta^* \right|_H ds$$

$$\int_0^T \left| z_n - z^* \right|_H dt \leq \int_0^T t \left| \eta_n - \eta^* \right|_H dt \quad \forall t \in [0, T] \Rightarrow$$

$$\left| z_n - z^* \right|_{0,T,H} \leq T \left| \eta_n - \eta^* \right|_{0,T,H}$$

Après en dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\left| \dot{z}_n - \dot{z}^* \right|_{0,T,H} \leq \left| \eta_n - \eta^* \right|_{0,T,H}$$

$$\text{On a } \left| z_n - z^* \right|_{1,T,H} = \left| z_n - z^* \right|_{0,T,H} + \left| \dot{z}_n - \dot{z}^* \right|_{0,T,H}$$

$$\leq T \left| \eta_n - \eta^* \right|_{0,T,H} + \left| \eta_n - \eta^* \right|_{0,T,H}$$

$$\left| z_n - z^* \right|_{1,T,H} \leq (T + 1) \left| \eta_n - \eta^* \right|_{0,T,H}$$

Alors :

$$(4.35) \quad \left| z_n - z^* \right|_{j,T,H} \leq (T + j) \left| \eta_n - \eta^* \right|_{0,T,H} \quad j = 0, 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(4.8) étant linéaire donc (4.19) entraîne :

$$(4.36) \quad \left| x_n - x^* \right|_{j,T,H} + \left| y_n - y^* \right|_{j,T,H} \leq C \left| z_n - z^* \right|_{j,T,H} \quad j = 0, 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En combinant (4.34)-(4.36) et (4.32) on trouve l'expression (4.33).

Afin de continuer l'approximation de la solution du problème (4.1)-(4.2) nous considérons $(X_h)_{h>0}$ une famille de sous espaces fermés de X et pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous définissons les suites $(x_{nh})_{h>0} \subset C^1(0, T, H)$, $(y_{nh})_{h>0} \subset C^1(0, T, H)$ par les égalités :

$$(4.37) \quad a(x_{nh}(t), x'_h) + \langle z_n(t), x'_h \rangle_H = 0, \quad \forall x'_h \in X_h, t \in [0, T]$$

$$(4.38) \quad y_{nh}(t) = Ax_{nh}(t) + z_n(t). \quad \forall t \in [0, T]$$

Soient maintenant les quantités $S_{nh}(j, T)$ définies par :

$$(4.39) \quad S_{nh}(0, T) = \sup_{t \in [0, T]} \left(\inf_{x'_h \in X_h} \left| x_n(t) - x'_h(t) \right|_H \right)$$

$$(4.40) \quad S_{nh}(1, T) = \sup_{t \in [0, T]} \left(\inf_{x'_h \in X_h} |x_n(t) - x'_h(t)|_H \right) + \sup_{t \in [0, T]} \left(\inf_{x'_h \in X_h} |\dot{x}_n(t) - \dot{x}'_h(t)|_H \right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $h > 0$. Nous avons le résultat suivant :

Lemme 4.2 :

Il existe $\tilde{C} > 0$ qui dépend seulement de A , tel que :

$$(4.41) \quad |x_{nh} - x_n|_{j, T, H} + |y_{nh} - y_n|_{j, T, H} \leq \tilde{C} S_{nh}(j, T) \quad \forall j = 0, 1, n \in \mathbb{N} \text{ et } h > 0$$

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $h > 0$, comme il vient de la preuve du théorème 4.1 (voir (4.12))

$$(4.42) \quad a(x_n(t), x') + \langle z_n(t), x' \rangle_H \quad \forall x' \in X, t \in [0, T]$$

En utilisant maintenant le premier lemme de Strang

$$(4.43) \quad |x_{nh}(t) - x_n(t)|_H \leq C_1 \inf_{x'_h \in X_h} |x_n(t) - x'_h|_H \quad \forall t \in [0, T]$$

Où $C_1 > 0$ dépend seulement de l'opérateur A . De la même manière on considérant la dérivée par rapport au temps dans (4.37) et (4.42) on trouve

$$(4.44) \quad \left| \dot{x}_{nh}(t) - \dot{x}_n(t) \right|_H \leq C_1 \inf_{x'_h \in X_h} |\dot{x}_n(t) - \dot{x}'_h|_H \quad \forall t \in [0, T]$$

En utilisant maintenant les notations (4.39), (4.40) dans (4.43), (4.44) il s'ensuit :

$$|x_{nh}(t) - x_n(t)|_{0, T, H} \leq C_1 \sup_{t \in [0, T]} \left(\inf_{x'_h \in X_h} |x_n(t) - x'_h(t)|_H \right) = C_1 S_n(0, T)$$

Et

$$\left| \dot{x}_{nh}(t) - \dot{x}_n(t) \right|_{0, T, H} \leq C_1 \sup_{t \in [0, T]} \left(\inf_{x'_h \in X_h} |\dot{x}_n(t) - \dot{x}'_h(t)|_H \right)$$

$$|x_{nh}(t) - x_n(t)|_{0, T, H} + \left| \dot{x}_{nh}(t) - \dot{x}_n(t) \right|_{0, T, H} \leq C_1 \left[\begin{array}{l} \sup_{t \in [0, T]} \left(\inf_{x'_h \in X_h} |x_n(t) - x'_h(t)|_H \right) + \\ \sup_{t \in [0, T]} \left(\inf_{x'_h \in X_h} |\dot{x}_n(t) - \dot{x}'_h(t)|_H \right) \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$|x_{nh}(t) - x_n(t)|_{1, T, H} \leq C_1 S_{nh}(1, T)$$

Alors :

$$(4.45) \quad |x_{nh}(t) - x_n(t)|_{j, T, H} \leq C_1 S_{nh}(j, T) \quad \forall j = 0, 1$$

De plus, de (4.38), (4.10) et de la continuité de l'opérateur A il résulte :

$$|y_{nh}(t) - y_n(t)|_H \leq C_2 |x_{nh}(t) - x_n(t)|_H \Rightarrow$$

$|y_{nh}(t) - y_n(t)|_{0,T,H} \leq C_2 |x_{nh}(t) - x_n(t)|_{0,T,H}$ en dérivant par rapport au temps on obtient :

$$|y_{nh}(t) - y_n(t)|_{0,T,H} \leq C_2 \left| \dot{x}_{nh}(t) - \dot{x}_n(t) \right|_{0,T,H} \Rightarrow$$

$$|y_{nh}(t) - y_n(t)|_{0,T,H} + |y_{nh}(t) - y_n(t)|_{0,T,H} \leq C_2 \left[|x_{nh}(t) - x_n(t)|_{0,T,H} + \left| \dot{x}_{nh}(t) - \dot{x}_n(t) \right|_{0,T,H} \right] \Rightarrow$$

$$|y_{nh}(t) - y_n(t)|_{1,T,H} \leq C_2 |x_{nh}(t) - x_n(t)|_{1,T,H} \text{ Alors :}$$

$$|y_{nh}(t) - y_n(t)|_{j,T,H} \leq C_2 |x_{nh}(t) - x_n(t)|_{j,T,H} \quad j = 0, 1$$

où C_2 dépend seulement de A et en utilisant (4.45) nous obtenons :

$$(4.46) \quad |y_{nh}(t) - y_n(t)|_{j,T,H} \leq C_1 C_2 S_{nh}(j, T) \quad \forall j = 0, 1$$

L'inégalité (4.41) est maintenant une conséquence de (4.45), (4.46).

Afin de conclure utilisons (4.33) et (4.41) et nous obtenons l'évaluation suivante de la différence entre la solution (x, y) du problème (4.1)-(4.2) et la solution (x_{nh}, y_{nh}) du problème approximatif (4.37), (4.38) ce qui achève la démonstration du théorème suivant :

Théorème 4.2 :

Il existe C, \tilde{C} qui dépend seulement sur A , tels que :

$$|x_{nh} - x|_{j,T,H} + |y_{nh} - y|_{j,T,H} \leq C(T + j) \exp K \frac{K^n}{n!} |\Lambda \eta_0 - \eta_0|_{0,T,H} + \tilde{C} S_{nh}(j, T)$$

$\forall j = 0, 1, n \in \mathbb{N}$ et $h > 0$. où $K = CLT$

ANNEXE

Nous présentons dans cette annexe des résultats de base sur les espaces fonctionnels utilisés dans l'étude des problèmes en élasticité-viscoplasticité. On étudie ici des espaces de type Sobolev associés à l'opérateur déformation et à l'opérateur divergence et on présente leurs principales propriétés, notamment les traces. On donne des compléments divers et quelques théorèmes d'existence.

Rappelons tout d'abord quelques notations et résultats d'analyse fonctionnelle.

A1-Notations -Espaces fonctionnels.

Nous donnons les notations que nous adopterons dans notre étude sur les espaces de distributions sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^N .

$$(A1.1) \quad D = [D(\Omega)]^N; \quad \mathcal{D} = [D(\Omega)]_S^{N \times N}$$

Où $D(\Omega)$: espace des fonctions indéfiniment dérivables, à valeurs réelles et à support compact inclus dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^N ($N = 1, 2, 3$) et (s) désigne la restriction aux éléments symétriques de l'espace considéré.

Soit également

$$(A1.2) \quad H = L^2(\Omega)^N; \quad \mathcal{H} = L^2(\Omega)_S^{N \times N}$$

Où $L^2(\Omega)$: espaces des fonctions mesurables, de carré intégrables sur Ω .

Les espaces H, \mathcal{H} sont des espaces de Hilbert munis des produits scalaires suivants :

$$(A1.3) \quad (u, v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i \, dx \quad \forall u, v \in H$$

$$(A1.4) \quad (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} \, dx \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}$$

Leurs normes sont définies de la façon suivante :

$$|u|_H = \left[\int_{\Omega} |u|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H, \quad |\sigma|_{\mathcal{H}} = \left[\int_{\Omega} |\sigma|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}$$

Nous avons les inclusions et relations suivantes :

$$(A1.5) \quad D \subset H \subset D'; \quad \mathcal{D} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$$

$$(A1.6) \quad \langle u, v \rangle_H = \langle u, v \rangle_{D' \times D} \quad \forall u \in H, \quad \forall v \in D$$

$$(A1.7) \quad \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}, \quad \forall \tau \in \mathcal{D}$$

Où $\langle, \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$ et $\langle, \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$ représentent la dualité entre \mathcal{D}' , \mathcal{D} (respectivement \mathcal{D}' , \mathcal{D})

On définit les opérateurs de déformation, de gradient et de divergence pour les distributions par :

$$\nabla \theta = (\nabla_i \theta), \quad \nabla_i \theta = \frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \quad i = 1 \dots N, \theta \in L^2(\Omega)$$

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad i, j = 1 \dots N, u \in H$$

$$\operatorname{div} q = \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \quad q \in H$$

$$\operatorname{Div} \sigma = (D_i \sigma), \quad D_i \sigma = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1 \dots N, \sigma \in \mathcal{H}$$

Rappelons maintenant quelques résultats concernant les espaces liés aux opérateurs déformation et divergence et leurs propriétés principales.

A2-Espaces liés à l'opérateur déformation et divergence

a) Espaces liés à l'opérateur déformation

Pour l'opérateur déformation défini par (A1.8), on introduit l'espace H_1 défini par

$$(A2.1) \quad H_1 = \{u \in H \mid \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}$$

On le munit du produit scalaire et de la norme

$$(A2.2) \quad \langle u, v \rangle_{H_1} = \langle u, v \rangle_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in H_1$$

$$(A2.3) \quad |u|_{H_1}^2 = |u|_H^2 + |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}}^2$$

$$(A2.4) \quad |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \leq |u|_{H_1}$$

On rappelle la définition de l'espace de Sobolev H^1 défini par :

$$(A2.5) \quad H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega), i = 1, d\}$$

Soit W le sous espace fermé de $H^1(\Omega)$ défini par :

$$(A2.6) \quad W = \{\Psi \in H^1(\Omega) \mid \Psi = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}$$

On a :

$$(A2.7) \quad \|\nabla \varphi\|_H = \|\varphi\|_W$$

$$(A2.8) \quad \mathcal{H}_1 = \{\theta \in L^2(\Omega) \mid \nabla \theta \in H\}$$

$$(A2.9) \quad (\theta, \varphi)_{\mathcal{H}_1} = (\theta, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (\nabla \theta, \nabla \varphi)_H$$

$$(A2.10) \quad |\nabla\theta|_H \leq |\theta|_{\mathcal{H}_1}$$

Nous avons les inclusions suivantes :

$$(A2.11) \quad D \subset H_1 \subset H \subset D'$$

Et

$$(A2.12) \quad (H_1, \langle, \rangle_{H_1}) \text{ est un espace de Hilbert.}$$

Enonçons maintenant quelques résultats sur les traces qui nous permettent d'étudier les conditions aux limites.

Soit l'application $\gamma_1 : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_\Gamma = [L^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^N$ est linéaire continue, surjective et il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que :

$$(A2.13) \quad |\gamma_1 u|_{\mathcal{H}_\Gamma} \leq C |u|_{\mathcal{H}_1}; \forall u \in \mathcal{H}_1$$

En plus, il existe une application inverse linéaire continue Z telle que :

$$Z : \mathcal{H}_\Gamma \rightarrow \mathcal{H}_1 \text{ telle que } \gamma_1(Z(\xi)) = \xi; \forall \xi \in \mathcal{H}_\Gamma$$

Et

$$|Z(\xi)|_{\mathcal{H}_1} \leq C |\xi|_{\mathcal{H}_\Gamma}$$

Soit l'application $\tilde{\gamma}_1 : H_1 \rightarrow H_\Gamma = L^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est linéaire continue, surjective et il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que :

$$(A2.14) \quad \left| \tilde{\gamma}_1 u \right|_{H_\Gamma} \leq C |u|_{H_1}; \forall u \in H_1$$

En plus, il existe une application inverse linéaire continue Z telle que :

$$Z : H_\Gamma \rightarrow H_1 \text{ telle que } \tilde{\gamma}_1(Z(\xi)) = \xi; \forall \xi \in H_\Gamma$$

et

$$|Z(\xi)|_{H_1} \leq C |\xi|_{H_\Gamma}$$

Soit maintenant V l'espace défini par :

$$(A2.15) \quad V = \{u \in H_1 / u = 0 \text{ p.p sur } \Gamma_1\}$$

V est un espace de Hilbert muni du produit scalaire \langle, \rangle_{H_1} . La norme sur V est :

$$(A2.16) \quad \|u\|_V = \|\varepsilon(u)\|_{\mathcal{H}}$$

Rappelons aussi le résultat technique suivant (l'inégalité de Korn) :

Soit $mes \Gamma_1 > 0$. alors il existe une constante $C > 0$ qui dépend de Ω et Γ_1 telle que :

$$(A2.17) \quad \|\varepsilon(u)\|_{\mathcal{H}} \geq C \|u\|_{H_1}; \quad \forall u \in V$$

La formule de Green :

On rappelle deux types la formule de Green :

soit $\sigma \in \mathcal{H}_2, v \in V$ on a :

$$(A2.18) \quad \langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div \sigma, v \rangle_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v \, da$$

pour $D \in W_1, \Psi \in W$ on a :

$$(A2.19) \quad \langle D, \nabla \Psi \rangle_H + \langle \operatorname{div} D, \Psi \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma_b} D \nu \cdot \Psi \, da$$

Passons maintenant à :

b) Espaces liés à l'opérateur Divergence :

Soit l'espace fonctionnel associé à l'opérateur divergence défini par

$$(A2.20) \quad \mathcal{H}_2 = \{\sigma \in \mathcal{H}, Div \sigma \in H\}$$

On le munit du produit scalaire et de la norme :

$$(A2.21) \quad \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div \sigma, Div \tau \rangle_H, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}_2$$

$$(A2.22) \quad |\sigma|_{\mathcal{H}_2}^2 = |\sigma|_{\mathcal{H}}^2 + |Div \sigma|_H^2, \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_2$$

$$(A2.23) \quad |Div \sigma|_H \leq |\sigma|_{\mathcal{H}_2}, \quad |\sigma|_{\mathcal{H}} \leq |\sigma|_{\mathcal{H}_2}$$

$$(A2.24) \quad H_2 = \{q \in H / \operatorname{div} q \in L^2(\Omega)\}$$

$$(A2.25) \quad \langle q, p \rangle_{H_2} = \langle q, p \rangle_H + \langle \operatorname{div} q, \operatorname{div} p \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$(A2.26) \quad |\operatorname{div} q|_{L^2(\Omega)} \leq |q|_{H_2}$$

Et on a l'espace fonctionnel W_1 :

$$(A2.27) \quad W_1 = \{D = (D_i) \in L^2(\Omega)^d, \operatorname{div} D = D_{ii} \in L^2(\Omega)\}$$

Nous avons les inclusions suivantes :

$$(A2.28) \quad \mathcal{D} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{D}'.$$

Et

$$(A2.29) \quad (\mathcal{H}_1, \langle, \rangle_{\mathcal{H}_1}) \text{ est un espace de Hilbert.}$$

Aussi compte tenu des relations (A2.11) et (A2.28), nous avons :

$$(A2.30) \quad \langle \varepsilon(u), \Phi \rangle_{D' \times D} + \langle u, Div \Phi \rangle_H = 0 \quad \forall u \in H, \forall \Phi \in D$$

$$(A2.31) \quad \langle \Phi, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div \Phi, u \rangle_{D' \times D} = 0 \quad \forall u \in D, \forall \Phi \in \mathcal{H}$$

$$(A2.32) \quad \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div \sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} = 0 \quad \forall \varphi \in D, \forall \sigma \in \mathcal{H}$$

$$(A2.33) \quad \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}_2} + \langle Div \sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} = 0 \quad \forall \varphi \in D, \forall \sigma \in \mathcal{H}_2$$

On considère maintenant les espaces fonctionnels suivants :

$$(A2.34) \quad V_1 = \left\{ \theta \in \mathcal{H}_1 / \tilde{\gamma}_1 \theta = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_1 \right\}$$

Donc :

$$(A2.35) \quad |\theta|_{V_1} = |\nabla \theta|_H$$

$$(A2.36) \quad \mathcal{V}_1 = \{u \in H_1 / \gamma_1 u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

$$(A2.37) \quad |u|_{\mathcal{V}_1} = |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}}$$

$$(A2.38) \quad V_{\Gamma_1}^- = \left\{ \Theta \in H_{\Gamma} / \Theta = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_1 \right\}$$

$$(A2.39) \quad V_{\Gamma_1} = \{g \in \mathcal{H}_{\Gamma} / g = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

$$(A2.40) \quad V_2 = \left\{ q \in H_2 / q\nu \setminus_{\Gamma_2}^- = 0 \right\}$$

$$(A2.41) \quad \mathcal{V}_2 = \{\sigma \in \mathcal{H}_2 / Div \sigma = 0, \sigma\nu \setminus_{\Gamma_2} = 0\} \subset \mathcal{H}_2$$

$$(A2.42) \quad |\sigma|_{\mathcal{V}_2} = |\sigma|_{\mathcal{H}}$$

$$(A2.43) \quad \mathcal{W} = \{\sigma \in \mathcal{H}_2 / \sigma\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_2\} \subset \mathcal{H}_2$$

\mathcal{V}_2 et \mathcal{W} sont des espaces de Hilbert munis du produit scalaire $\langle, \rangle_{\mathcal{H}_2}$

Nous avons les relations suivantes :

$$(A2.44) \quad \langle \sigma\nu, \gamma u \rangle_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}} = \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div \sigma, u \rangle_H, \quad \forall u \in H_1, \forall \sigma \in \mathcal{H}_2$$

$$(A2.45) \quad \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div \sigma, u \rangle_H = 0, \quad \forall u \in V, \forall \sigma \in \mathcal{W}$$

$$(A2.46) \quad \langle \sigma\nu, \gamma u \rangle_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}} = \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div \sigma, u \rangle_H \quad \forall u \in V, \forall \sigma \in \mathcal{V}_2$$

On note par orthogonalité :

$$(A2.49) \quad \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = 0, \text{ pour tout } u \in V_1$$

Introduisons maintenant d'autres espaces fonctionnels dont nous aurons besoin.

A3-Espaces des fonctions à valeurs vectorielles.

Soit $|\cdot|$ et \langle, \rangle_X la norme et le produit scalaire d'un espace de Hilbert X et $T > 0$

On définit les espaces $C^j(0, T, X)$, ($J = 0, 1, 2, 3, \dots$) par :

$$C^0(0, T, X) = \{x : [0, T] \rightarrow X/x \text{ est continue}\}$$

$$C^1(0, T, X) = \{x : [0, T] \rightarrow X/x \text{ est dérivable, } \dot{x} \in C^0(0T, X)\}$$

$$C^j(0, T, X) = \{x : [0, T] \rightarrow X/x \text{ est dérivable, } \dot{x} \in C^{j-1}(0T, X)\}$$

Où \dot{x} dénote la dérivée de la fonction x

alors $C^0(0, T, X)$, $C^1(0, T, X)$ munis respectivement des normes suivantes, sont des espaces de Banach :

$$(A3.1) \quad |X|_{0,T,X} = \max_{t \in [0,T]} |X(t)|_X.$$

$$(A3.2) \quad |X|_{1,T,X} = |X|_{0,T,X} + \left| \dot{X} \right|_{0,T,X}$$

Donnons maintenant des compléments divers sur les équations aux dérivées partielles

A4- Compléments divers

On présente ici quelques lemmes de type de Gronwall et quelques théorèmes d'existence

Lemme (A4-1).

Soient $m, n \in C^0(0, T, \mathbb{R})$ tels que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$.

Si $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que :

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\text{alors : } \phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T]$$

Lemme (A4-2).

Soient $m, n \in C(0, T, \mathbb{R})$ tels que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que :

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s) \phi(s) ds + \int_0^t n(s) \phi^2(s) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

Alors :

$$|\phi(t)| \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T]$$

On a les théorèmes suivants :

Théorème (A5.1). (Minty-Browder) :

Soit X un espace de Hilbert et soit $A : X \rightarrow X$ une application non linéaire fortement monotone et de Lipchitz.

C'est à dire qu'il existe deux constantes M, m strictement positives telles que :

$$\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle_X \geq m |u_1 - u_2|_X^2; \quad \forall u_1, u_2 \in X$$

$$|Au_1 - Au_2|_{X'} \leq m |u_1 - u_2|_X \quad ; \quad \forall u_1, u_2 \in X$$

Alors pour tout $f \in X'$, il existe $u \in X$ unique tel que : $Au = f$

Théorème (A5.2). (Cauchy-Lipchitz) :

Soit X un espace de Banach et soit $F : [0, T] \times X \rightarrow X$

une application continue et telle que

$$\begin{cases} |F(t, x_1) - F(t, x_2)|_X \leq L |x_1 - x_2|_X \\ \forall x_1, x_2 \in X \text{ et } \forall t \in [0, T] \quad L \geq 0 \end{cases}$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe $x \in C^1(0, T, X)$, unique telle que :

$$(A5.1) \quad \dot{x}(t) = F(t, x(t)); \quad \forall t \in [0, T]$$

$$(A5.2) \quad x(0) = x_0$$

Ce théorème rend de grands services dans l'étude des équations différentielles ordinaires mais il est pratiquement inutilisable pour résoudre les équations aux dérivées partielles.

Théorème (A5.3) (théorème de représentation de Riez-Fréchet)

Etant donné $\eta \in H'$,

il existe $f \in H$ unique tel que :

$$\langle \eta, v \rangle_{H \times H'} = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H$$

on a de plus $|\eta|_{H'} = |f|_H$

Théorème de Stampacchia (A5.4).

Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coersive .Soit $K \subset H$ (H espace de Hilbert) un convexe fermé non vide .

Etant donné $\varphi \in H'$, il existe $u \in K$ unique tel que :

$$a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle \quad \forall v \in K$$

Théorème du point fixe (A5.5).

Soit X espace de Banach

Soit $F : X \rightarrow X'$ une application non linéaire contractante.

$$\text{i-e : } \exists k : 0 < k < 1 \quad |F(x_1) - F(x_2)| \leq k |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

Alors :

L'application F admet un point fixe unique $x \in X$ c.à.d : $F(x) = x$

Théorème de Lax -Milgram (A5.6).

Soit X un espace de Hilbert

$a : X \rightarrow X$ une forme bilinéaire, continue et coersive c.à.d :

$$1) \exists M > 0 \quad |a(u, v)| \leq M |u|_X |v|_X \quad \forall u, v \in X \quad (\text{continue})$$

$$2) \exists m > 0 : a(u, u) \geq m |u|_X^2 \quad \forall u \in X \quad (\text{coersive})$$

Alors :

$$\forall f \in X, \exists! u \in X \quad a(u, v) = (f, v)_X \quad \forall v \in X$$

Théorème (A5.7).

Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in H$ il existe $u \in K$ unique tel que

$$(A5.1) \quad |f - u|_H = \min_{v \in K} |f - v|_H.$$

De plus, u est caractérisé par la propriété

$$(A5.2) \quad u \in K, \quad \langle u, v - u \rangle_H \geq \langle f, v - u \rangle_H \quad \forall v \in K.$$

Le théorème précédent nous permet d'associer à chaque élément $f \in H$ l'élément u défini par (A5.1) ou (A5.2). On note $u = P_K f$. On a mis ainsi en évidence l'opérateur $P_K : H \rightarrow K$ qui s'appelle l'opérateur de projection sur K .

Bibliographie

[1] **H.BREZIS**

Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson, Paris, 1987.

[2] **N.CRISTESCU et I.SULICIU**

Viscoplasticity, Martinus Nirjhoff, Editura Tehnica, Bucharest (1982)

[3] **S.DJABI et M.SOFONEA**

A fixed point method in quasistatic rate-type viscoplasticity. App .Math. and comp.Sci.V3 n⁰2 pp 269-279(1993)

[4] **I.R.IONESCU et M.SOFONEA**

Functional and numerical methods in viscolpasticity. Oxford University Press, (1993)

[5] **I. R. IONESCU et M.SOFONEA**

Quasistatic processes for elastic-visco-plastic materials, Quart. Appl. Math. 2(1988), 229-243.

[6] **J-L. LIONS**

Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non linéaires, Dunod, Gauthiers-Villars (1969).

[7] **N.LEBRI**

Mémoire de Magister, Etude théorique et Numérique de quelques problèmes en élasticité non linéaire.

[8] **.A.MEROUANI**

Mémoire de Magister ,Etude Mathématique d'un problème aux limites de déplacement-traction en élasto-viscoplasticité

[9] **B.MEROUANI ET S.DJABI**

Théorie de l'élasticité et de viscoplasticité .Cours de première année magister en mathématiques appliquées (1994-1995).

[10] **B.NOUIRI**

Mémoire de Magister, Etude théorique et Numérique d'un problème en viscoplasticité.

[11] **ROCHDI. M**

Thèse de Doctorat, Université de Perpignan 1997.

[12] **T.SERRAR**

DOCTORAT D'ETAT : Analyse variationnelle de quelques problèmes viscoplastiques.

[13] **M.SOFONEA**

Problèmes mathématiques en élasticité et viscoplasticité. Cours de DEA de Mathématiques Appliquées à L'université Blaise Pascal (Clermont I I), (1991).

[14] **M.SOFONEA**

Problèmes Non -linéaires dans la Théorie de l'élasticité, Cours de Magister de Mathématiques Appliquées, Université de Sétif, Algérie (1993)

ملخص

إن الهدف من هذه المذكرة هو دراسة بعض مسائل التغيرات الإنسحابية حيث قوانين السلوك المعتمدة قوانين مطاطية خطية أو غير خطية أو لدونة. في كل مرة ندرس وجود و وحدانية الحل لكل مسألة معتمدين على نظرية النقطة الثابتة التي نطبقها أيضا لدراسة مسألة تطور.

الكلمات المفتاحية: مطاطي – لدونة – نقطة ثابتة – مرونة مؤشر شديد الرتابة

Résumé :

Le but de ce travail est l'étude de quelques problèmes aux limites de déplacement traction.

Les lois de comportement considérées sont élastiques linéaires, non linéaires ou viscoplastiques.

On donne des résultats d'existence et d'unicité de la solution pour chaque problème en utilisant le théorème du point fixe. On donne aussi une application de ce théorème à un problème d'évolution.

Mots clés : élasticité, viscoplasticité, point fixe, opérateur fortement monotone.

Abstract :

The purpose of this work is the study of some problems with displacement traction boundary conditions. The constitutive laws consider here are linear, non linear elastic or viscoplastic. We give for each problem the existence and uniqueness result for the solution using the fixed point theorem we applied this theorem to evolutionary problem.

Key words : elasticity, viscoplasticity, fixed point, strongly monotone operator.