

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

جامعة سطيف 1  
UNIVERSITE SETIF 1

## THESE

présentée au département d'Electrotechnique  
Faculté de Technologie

pour obtenir le diplôme de

**Doctorat Sciences en Automatique**

Par

***DOUDOU Sofiane***

Thème

***Contribution à la commande moderne des  
systèmes non linéaires multivariables non affines***

*Soutenu le 29 /04 /2013 devant la commission d'examen composée de :*

<i>RAHMANI Lazhar</i>	<i>Prof. à l'université Sétif 1</i>	<i>Président</i>
<i>KHABER Farid</i>	<i>Prof. à l'université Sétif 1</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>BENMAHAMMED Khier</i>	<i>Prof. à l'université Sétif 1</i>	<i>Examineur</i>
<i>MOUSS Leila Hayet</i>	<i>Prof. à l'université de Batna</i>	<i>Examineur</i>
<i>BOUKHATALA Djamel</i>	<i>Prof. à l'Ecole Polytechnique d'Alger</i>	<i>Examineur</i>
<i>CHAABI Abdelhafid</i>	<i>Prof. à l'université de Constantine</i>	<i>Examineur</i>

# Remerciements

Le travail présenté dans le cadre de cette thèse a été réalisé dans le laboratoire Qualité de l'Energie dans les Réseaux Electriques (QUERE) sous la direction du Docteur Farid KHABER

Je tiens à remercier vivement, le Docteur **Farid KHABER** de l'université Ferhat ABBAS de Sétif pour m'avoir guidé et conseillé tout au long de ce travail et pour son soutien scientifique et humain, et la confiance qu'il m'a accordée pour mener ce travail de recherche.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur **Lazhar RAHMANI**, Professeur à l'université Ferhat ABBAS de Sétif pour avoir accepté de juger ce travail et de présider le jury.

Je tiens également à remercier Madame **Leyla Hayet MOUSS**, Professeur à l'université de Batna, Messieurs **Khier BENMAHAMMED**, Professeur à l'université Ferhat ABBAS de Sétif, **Djamel BOUKHETALA**, Professeur à l'école nationale polytechnique d'Alger et **Abdelhafid CHAABI**, Professeur à l'université de Constantine, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail, en acceptant de l'examiner.

Mes remerciements vont également à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail.

Enfin, je n'oublie pas d'adresser mes vifs remerciements à toute ma famille, qui m'a accompagné tout au long de mes études par son amour inconditionnel et son soutien constant.

# *Dédicaces*

*Je dédie cette thèse  
à mes parents,  
à ma femme et mon fils,  
à mes frères et sœurs,  
et à tous ceux que j'aime*

# Abréviations

MAM: Mamdani

T-S: Takagi-Sugeno

SISO : Mono entrée Mono sortie (Single Input Single Output)

MIMO : Multi entrées Multi sorties (Multiple Input Multiple Output)

PI : Proportionnel intégral

# Notations

$S$  : Surface de glissement.

$\mathfrak{R}$ : Ensemble des nombres réels.

$y_d$ : Signal de référence

$u$  : Commande du système.

$u_{eq}$  : Commande équivalente du système.

$p$  : Variable de la transformée de Laplace.

$\| \cdot \|$  : Norme 2.

# Liste des figures

## Chapitre I Commande adaptative floue par mode glissant

I.1. Structure générale d'un contrôleur flou .....	10
I.2. Fuzzification singleton .....	11
I.3. Fuzzification non-singleton .....	11
I.4. Défuzzification par le centre de gravité. ....	14
I.5. Défuzzification par la valeur maximale .....	15
I.6. Défuzzification par la méthode des hauteurs pondérées .....	15
I.7. Attractivité de la surface .....	21
I.8. Mode de glissement avec réticence .....	22
I.9. Structure de la commande proposée .....	31
I.10. Le pendule inversé .....	32
I.11. Evolution de l'angle du pendule $x_1 = \theta$ (en pointillés) et sa référence $y_d = \theta_d$ (en traits continus) .....	33
I.12. Evolution de la vitesse du pendule $x_2 = \dot{\theta}$ (en pointillés) et sa référence $\dot{y}_d = \dot{\theta}_d$ (en traits continus) .....	34
I.13. Evolution de la surface de glissement .....	34
I.14. Evolution de la norme des vecteurs de paramètres, $ \theta_f $ (en pointillés) et $ \theta_g $ (en traits continus) .....	35
I.15. Signal de commande .....	35

## Chapitre II Commande adaptative floue par mode glissant pour les systèmes non linéaires non affines SISO

II.1. Système flou récurrent .....	43
II.2. Structure de la commande proposée .....	48

II.3. Evolution de la sortie du système $y = x_1$ (en pointillés) et sa référence $y_d$ (en traits continus) .....	49
II.4. Evolution de l'état du système $\dot{y} = x_2$ (en pointillés) et sa référence $\dot{y}_d$ (en traits continus) .....	50
II.5. Surface de glissement .....	50
II.6. Signal de commande .....	51
II.7. Evolution des paramètres, $\ \theta\ $ (en pointillés) et $\psi$ (en traits continus) .....	51
II.8. Evolution de la sortie du système $y = x_1$ (en pointillés) et sa référence $y_d$ (en traits continus) .....	53
II.9. Evolution de l'état du système $\dot{y} = x_2$ (en pointillés) et sa référence $\dot{y}_d$ (en traits continus) .....	53
II.10. Surface de glissement .....	54
II.11. Signal de commande .....	54
II.12. Evolution des paramètres, $\ \theta\ $ (en pointillés) et $\psi$ (en traits continus) .....	55

### Chapitre III Commande adaptative floue par mode glissant

#### pour les systèmes non linéaires non affines MIMO

III.1. Structure de la commande proposée .....	66
III.2. Réponse de la sortie $y_1$ (en traits continus) et sa référence $y_{d1}$ (en pointillés) .....	68
III.3. Réponse de la sortie $y_2$ (en traits continus) et sa référence $y_{d2}$ (en pointillés) .....	68
III.4. Signal de commande $u_1$ .....	69
III.5. Signal de commande $u_2$ .....	69
III.6. Evolution de la norme des vecteurs des paramètres, $\ \psi\ $ (en traits continus) et $\ \theta\ $ (en pointillés) .....	70
III.7. Réponse de la sortie $y_1$ (en traits continus) et sa référence $y_{d1}$ (en pointillés) .....	71
III.8. Réponse de la sortie $y_2$ (en traits continus) et sa référence $y_{d2}$ (en pointillés) .....	72
III.9. Signal de commande $u_1$ .....	72
III.10. Signal de commande $u_2$ .....	73
III.11. Evolution de la norme des vecteurs des paramètres, $\ \psi\ $ (en traits continus) et $\ \theta\ $ (en pointillés) .....	73

---

# Table des matières

<b>Introduction générale</b> .....	01
<b>Chapitre I    Commande adaptative floue par mode glissant</b> .....	04
I.1. Introduction .....	04
I.2. Concepts de base de la logique floue .....	05
I.2.1. Notions de base d'un ensemble flou .....	05
I.2.2. Caractéristiques d'un ensemble flou .....	06
I.2.3. Variables linguistiques .....	06
I.2.4. Fonctions d'appartenance .....	07
I.2.5. Règles floues .....	08
I.3. Commande par logique floue .....	10
I.3.1. Propriétés d'une commande par logique floue .....	10
I.3.2. Structure de base d'un régulateur flou .....	10
I.3.2.1. Fuzzification .....	11
I.3.2.2. Base de connaissances .....	12
I.3.2.3. Moteur d'inférence .....	13
I.3.2.4. Défuzzification .....	14
I.3.3. Différents types de contrôleurs flous .....	16
I.3.3.1. Contrôleurs flous de Mamdani .....	16
I.3.3.2. Contrôleurs flous de Takagi-Sugeno .....	17
I.4. Commande adaptative .....	19
I.4.1. Commande adaptative indirecte .....	19
I.4.2. Commande adaptative directe .....	19
I.5. Commande par mode glissant .....	19
I.5.1. Choix de la surface de glissement .....	20
I.5.1.1. Remarque 1.1 .....	20

I.5.1.2. Remarque 1.2 .....	20
I.5.2. Condition d'existence du mode de glissement .....	20
I.5.2.1. Remarque 1.3 .....	21
I.5.3. Synthèse de la loi de commande par mode glissant .....	21
I.5.3.1. Remarque 1.4 .....	21
I.5.4. Phénomène de réticence .....	22
I.5.4.1. Solution de la couche limite .....	23
I.5.4.2. Solution basée sur un observateur .....	23
I.5.4.3. Mode glissant d'ordre supérieur .....	23
I.5.4.4. Régulateur PI type flou .....	23
I.6. Stabilité des systèmes dynamiques .....	24
I.6.1. Méthode directe de Lyapunov .....	24
I.6.1.1. Théorème 1.1 .....	24
I.7. Commande adaptative floue par mode glissant .....	25
I.7.1. Problématique .....	25
I.7.2. Description des systèmes flous utilisés .....	27
I.7.3. Synthèse de la loi de commande .....	28
I.7.3.1. Théorème 1.2 .....	28
I.7.3.2. Démonstration .....	28
I.7.3.3. Remarque 1.5 .....	30
I.7.3.4. Remarque 1.6 .....	31
I.7.3.5. Remarque 1.7 .....	31
I.7.4. Application .....	31
I.8. Conclusion .....	36

## **Chapitre II    Commande adaptative floue par mode glissant**

### **pour des systèmes non linéaires SISO non affines .....**

II.1. Introduction .....	37
II.1.1. Notations et préliminaires .....	39
II.1.1.1. Normes .....	39
II.1.1.2. Théorème de la fonction implicite .....	39
II.1.1.3. Théorème de la valeur moyenne .....	39

II.2. Formulation du problème .....	40
II.2.1. Objectifs de commande .....	40
II.3. Conception du contrôleur .....	41
II.3.1. Linéarisation .....	41
II.3.2. Approximation de la fonction $\{\Delta(x, u) - Ks\}$ .....	43
II.3.2.1. Lemme 2.1 .....	43
II.3.2.2. Démonstration .....	43
II.3.2.3. Remarque 2.1 .....	44
II.3.2.4. Description du système flou utilisé .....	44
II.3.2.5. Lemme 2.2 .....	46
II.4. Analyse de la stabilité et lois d'adaptation .....	46
II.4.1. Théorème 2.1 .....	46
II.4.2. Démonstration .....	47
II.4.3. Remarque 2.2 .....	48
II.5.Exemples de simulation .....	48
II.5.1.Exemple 1 .....	48
II.5.2.Exemple 2 .....	52
II.6.Conclusion .....	55
<b>Chapitre III      Commande adaptative floue par mode glissant</b>	
<b>                                 pour des systèmes non linéaires MIMO non affines .....</b>	<b>57</b>
III.1. Introduction .....	57
III.2. Formulation du problème .....	58
III.2.1. Objectifs de commande .....	58
III.2.1.1. Théorème de la fonction implicite globale .....	60
III.2.1.2. Lemme 3.1 .....	61
III.2.1.3. Démonstration .....	61
III.3. Description des systèmes flous utilisés .....	62
III.4. Conception du contrôleur adaptatif flou .....	63
III.5. Analyse de la stabilité .....	64
III.5.1. Théorème 3.1 .....	64
III.5.2. démonstration .....	65

---

III.5.3. Remarque 3.1 .....	66
III.6. Exemples de simulation .....	66
III.6.1. Exemple 1 .....	66
I II.6.2. Exemple 2 .....	70
III.7. Conclusion .....	73
<b>Conclusion générale</b> .....	<b>75</b>
<b>Bibliographie</b> .....	<b>77</b>

# **Introduction générale**

# Introduction générale

Contrairement à l'automatique linéaire, l'automatique non linéaire ne dispose pas de solutions universelles ni pour l'analyse des systèmes ni pour la conception de leurs contrôleurs. La plupart des approches de commande non linéaires exigent la connaissance d'un modèle mathématique du système. Les performances assurées seront directement liées à l'exactitude du modèle utilisé. En effet, l'obtention d'un modèle mathématique à la fois précis, pertinent et simple à exploiter, est parfois difficile et complexe. Pour résoudre ces problèmes, l'utilisation des contrôleurs basés sur l'expertise humaine peut être une alternative. Parmi ces approches, on trouve la commande par logique floue qui ne nécessite pas la connaissance du modèle mathématique du processus à commander, ainsi elle exploite les informations linguistiques de l'expert humain. En plus, les systèmes flous ont la capacité d'approximer n'importe quelle fonction non linéaire inconnue avec un degré de précision donné [Wan-94]. Le plus souvent les régulateurs flous sont utilisés dans des systèmes qui possèdent des variations inconnues intrinsèques. L'objectif est donc de conserver de bonnes performances du système global en adaptant le régulateur en fonction des variations du système.

La commande adaptative floue a été largement utilisée avec succès dans la littérature pour résoudre le problème de la commande des systèmes non linéaires affines en la commande. Ces systèmes sont caractérisés par des entrées de commande qui apparaissent linéairement dans l'équation d'état du système ( $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ ). Le cas mono-entrée mono-sortie (SISO) a été largement traité dans la littérature [Bou-01], [Cha-00], [Cha-01], [Che-96], [Che-08], [Ho-09], [Kha-06], [Lab-03], [Par-03], [Pha-08], [Spo-96], [Tan-99], [Ton-99], [Ton-02], [Wan-94] et [Yoo-98], alors que le cas multi-entrées multi-sorties (MIMO) l'a été moins [Cha-00], [Gol-03], [Lab-05], [Lab-07a], [Li-03], [Ord-99], [Qia-04], [Ton-00], et [Xu-03]. Conceptuellement, il y a deux approches distinctes formulées pour la commande adaptative floue : l'approche directe et l'approche indirecte. Dans l'approche directe, les systèmes flous sont utilisés pour approximer un contrôleur idéal inconnu [Cha-00], [Cha-01], [Che-96], [Lab-03], [Lab-07a], [Li-03], [Ord-99], [Pha-08], [Spo-96], [Tan-99], [Ton-02] et

[Wan-94]. En revanche, la commande indirecte exploite les systèmes flous pour estimer la dynamique inconnue du système non linéaire à commander afin de synthétiser des lois de commande basées sur ces estimations [Bou-01], [Cha-00], [Cha-01], [Che-96], [Che-08], [Gol-03], [Ho-09], [Kha-06], [Lab-05], [Li-03], [Ord-99], [Par-03], [Qia-04], [Spo-96], [Ton-99], [Ton-00], [Wan-94], [Xu-03] et [Yoo-98].

Toutefois, les performances de poursuite sont liées directement au choix des valeurs initiales des paramètres ajustables, et la robustesse du système bouclé vis à vis des incertitudes et des perturbations externes ne peut être garantie. Pour remédier à ces inconvénients et maintenir de bonnes performances de poursuite, l'utilisation d'approches de robustification s'avère nécessaire. Dans ce sens, plusieurs contrôleurs adaptatifs flous robustes utilisant la technique  $H^\infty$  ont été développés [Bou-01], [Cha-01], [Che-96], [Li-03] et [Ton-02]. Ces approches se basent sur l'ajout d'un signal de commande type  $H^\infty$  pour atténuer les effets des erreurs d'approximation et des perturbations externes à un niveau arbitraire prescrit. Ce terme de commande peut être traduit dans l'espace d'état par l'obtention d'une matrice définie positive unique solution de l'équation de Riccati [Iso-95]. D'autre part, en raison de sa robustesse vis à vis des incertitudes et des perturbations externes, la commande par mode glissant, qui consiste à définir une surface de glissement en fonction des états du système de façon qu'elle soit attractive [Utk-77] et [Slo-91], est combinée avec les algorithmes adaptatifs flous dans de nombreux travaux [Li-03], [Qia-04], [Ton-99] et [Yoo-98].

Cependant, les travaux de recherche précités sont applicables seulement pour les systèmes non linéaires affines en la commande. En pratique, il existe plusieurs systèmes non linéaires avec une structure non affine en la commande, c'est-à-dire des systèmes caractérisés par des entrées de commande qui n'apparaissent pas linéairement dans l'équation d'état du système ( $\dot{x} = h(x, u)$ ), tels que les processus biochimiques [Krs-95], les réacteurs chimiques [Ge-99], les systèmes de vol « certains modèles d'avion » [Bos-01], la dynamique d'un modèle dans le control d'un pendule [Shi-99], les moteurs à réluctance commutée [Sah-00] ... etc. Des résultats sont disponibles pour la commande adaptative floue des systèmes non linéaires SISO non affines sous sa forme directe [Dou-08], [Dou-10a], [Lab-07b], [Par-03b], [Par-04], [Par-05] et [Wen-08], ainsi que pour sa forme indirecte [Bou-03], [Dou-10b], [Ess-06], [Par-03a], [Wan-00] et [Yoo-01]. Pour le cas des systèmes non linéaires MIMO non affines, peu de travaux utilisant la commande adaptative floue indirecte sont disponibles [Wan-07] et [Liu-07] qui, en plus, souffrent du problème de la singularité.

Afin de remédier au problème de la singularité engendré par l'approche indirecte, l'utilisation de l'approche directe paraît à première vue une solution adéquate à ce problème. Dans ce contexte, l'objectif principal, qu'on s'est proposé dans le cadre de ce travail de thèse, est le développement de structures de commande adaptative floue directe par mode glissant pour prendre en charge des systèmes non linéaires MIMO non affines en la commande.

L'ensemble des travaux réalisés dans le cadre de cette thèse est regroupé en trois chapitres :

Dans le **premier chapitre**, nous présentons la structure générale d'un contrôleur flou avec les différents modèles utilisés dans sa conception ainsi que le théorème de l'approximation floue. Aussi, nous exposons les concepts de base de la commande adaptative et la commande par mode glissant. Enfin, nous appliquons la commande adaptative floue par mode glissant pour un système non linéaire SISO affine en la commande. L'exemple du pendule inversé est mis en œuvre pour tester la validité de ce contrôleur proposé.

Le **deuxième chapitre**, propose une commande adaptative floue directe par mode glissant pour une classe de systèmes non linéaires SISO non affines en la commande. Cette commande a pour but de résoudre le problème de suivi de trajectoires, tout en assurant stabilité et robustesse. Cette approche est une contribution, aux travaux proposés dans [Par-03b], [Par-04], [Par-05] et [Wen-08], qui consiste à introduire dans la structure de commande la technique du mode glissant, en raison de sa simplicité de mise en œuvre et de sa robustesse vis à vis des incertitudes et des perturbations externes.

Dans le **troisième chapitre**, l'intérêt s'est porté sur les comportements d'une classe de systèmes non linéaires MIMO non affines en la commande. L'objectif étant d'assurer à la fois la stabilité du système bouclé et une de bonnes performances de poursuite. Notre contribution porte essentiellement sur le développement d'une méthode de synthèse systématique d'un contrôleur adaptatif flou par mode glissant. L'idée de base de cette approche par rapport à celles développées dans la littérature réside dans l'utilisation du théorème de la fonction implicite globale pour montrer l'existence d'un contrôleur idéal qui sera approximé d'une manière directe par des systèmes flous.

Le bilan des travaux réalisés, dans le cadre de cette thèse, et les perspectives envisagées sont donnés en conclusion.

# **Chapitre I**

## **Commande adaptative floue par mode glissant**

# Commande adaptative floue par mode glissant

## I.1. Introduction

La plupart des systèmes rencontrés sont modélisables mathématiquement. Cependant, il existe de nombreux processus dans le monde réel possédant des mécanismes physiques complexes difficilement modélisables avec des paramètres incertains. L'obtention d'un modèle pour de tels systèmes devient alors une opération difficile à réaliser. Une des solutions consiste à utiliser la théorie de la logique floue proposée et développée par le professeur Lotfi A. Zadeh [Zad-65]. Cette approche permet d'exploiter les informations linguistiques de l'expert humain en décrivant le comportement dynamique d'un processus et/ou la stratégie de sa commande. L'intérêt de la logique floue réside dans sa capacité à traiter et manipuler l'imprécis, l'incertain et les informations vagues. Sa capacité est issue de l'aptitude de l'être humain à décider d'une façon pertinente malgré la nature floue des connaissances disponibles. En effet, l'opérateur humain peut définir des stratégies de commande de façon linguistique avec un minimum de connaissance sur le processus. La logique floue traduit cette stratégie en un ensemble de règles de la forme « Si 'Observation' Alors 'Décision' » où « Si 'Prémisse' Alors 'Conclusion' », qui peuvent être utilisées pour l'identification des systèmes comme pour leurs commandes.

Les premiers développements de la commande floue ont été initiés par Mamdani et Assilian [Mam-74] sur l'exemple d'une machine à vapeur expérimentale où l'idée de base consistait à exploiter l'expérience des opérateurs humains pour concevoir des lois de commande. Depuis l'épreuve de Mamdani, la commande floue a été largement exploitée dans plusieurs domaines (commande d'un échangeur de chaleur, régulation de vitesse d'un moteur, four à ciment...etc.). Ce succès revient à sa capacité d'approximer avec un degré de précision arbitraire fixé, n'importe quelle dynamique non linéaire sur un ensemble compact. Malheureusement, l'obtention de ces contrôleurs flous n'était pas toujours évidente à cause de la variation des paramètres. Pour résoudre ce problème, un mécanisme d'adaptation des

paramètres a été intégré dans le contrôleur flou pour aboutir à la structure d'un contrôleur adaptatif flou qui a été développée dans les années 90 [Wan-94].

Cependant, ce type de commande adaptative floue ne permet pas de maintenir de bonnes performances de poursuite en présence des erreurs d'approximation et des perturbations externes. Dans ce cadre, plusieurs techniques de robustification ont été introduites avec la commande adaptative floue. Parmi elles, on cite la technique de la commande par mode glissant qui est connue par sa robustesse et sa simplicité de mise en œuvre.

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques notions théoriques de base sur la logique floue, la commande par mode glissant et la commande adaptative. La stabilité des systèmes dynamiques sera abordée. Par la suite, l'approche de la commande adaptative floue par mode glissant sera formulée et développée. Son efficacité sera mise en évidence par simulation, sous l'environnement Matlab, à travers la commande d'un pendule inversé.

## **I.2. Concepts de base de la logique floue**

La description imprécise d'une certaine situation, d'un phénomène ou d'une grandeur physique ne peut se faire que par des expressions relatives ou floues. Ces différentes classes d'expressions floues dites ensembles flous forment ce qu'on appelle des variables linguistiques. Afin de pouvoir traiter numériquement ces variables linguistiques qui sont normalisées généralement sur un intervalle bien déterminé appelé univers de discours, il faut les soumettre à une définition mathématique à base de fonctions d'appartenance qui montrent le degré de vérification de ces variables linguistiques relativement aux différents sous ensembles flous de la même classe.

### **I.2.1. Notions de base d'un ensemble flou**

La notion d'ensembles flous permet de traiter les situations intermédiaires entre le tout et le rien, et d'utiliser les valeurs approximatives ("environ 40 ans") et les catégories aux limites mal définies (comme "vieux" ou "jeunes"), qui sont très souvent rencontrés dans le monde physique, c'est à dire, qui ne possèdent pas de critères d'appartenance bien définis.

Mathématiquement, un ensemble flou  $A$  sur un univers de discours  $X$  peut être représenté comme un ensemble de paires ordonnées [Meu-95] :

$$A = \{x, \mu_A(x); x \in X\} \quad (I.1)$$

où  $\mu_A(x)$  est un fonction d'appartenance définie comme suit :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 \leq b \leq 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (I.2)$$

### I.2.2. Caractéristiques d'un ensemble flou

Un ensemble flou  $A$  dans l'univers  $X$  possède les caractéristiques suivantes :

➤ **Support** : est un sous-ensemble ordinaire de  $X$  dont chacun de ses éléments à un degré d'appartenance non nul par rapport à  $A$ .

$$Supp(A) = \{x \in X; \mu_A(x) \neq 0\} \quad (I.3)$$

➤ **Noyau** : est un sous-ensemble ordinaire de  $X$  dont chacun de ses éléments à un degré d'appartenance égal à 1.

$$Ker(A) = \{x \in X; \mu_A(x) = 1\} \quad (I.4)$$

Si le noyau n'est pas vide ( $Ker(A) \neq 0$ ), on dit que l'ensemble flou  $A$  est normalisé.

➤ **Hauteur** : est le plus grand degré d'appartenance de  $A$ .

$$H(A) = \max\{\mu_A(x); x \in X\} \quad (I.5)$$

➤ **Cardinal** : le cardinal d'un ensemble flou  $A$  de support fini est égal à la somme de degrés d'appartenance des éléments de ce support.

$$Card(A) = \sum_{x \in Supp(A)} \mu_A(x), \text{ on note aussi } |A| \quad (I.6)$$

Dans le cas d'un support infini, le cardinal de  $A$  est donné comme suit :

$$Card(A) = \int_x \mu_A(x) dm(x) \text{ avec } \int_x dm(x) = 1. \quad (I.7)$$

### I.2.3. Variables linguistiques

Les variables linguistiques sont des variables non numériques sert à modéliser les connaissances imprécises ou vagues d'une variable dont sa valeur précise peut être inconnue. Elles décrivent les états (ou les situations) des phénomènes (ou des procédés) par des mots ou des phrases ou des expressions dans un langage naturel ou artificiel, par exemple : Quelque, peu, beaucoup, froid, chaud, tiède, ... etc.

Une variable linguistique appelée aussi attribut linguistique peut être définie à partir du

triplet  $(x, U, T_x)$  [Dri-93] où  $x$  représente une variable classique (âge, température,...) définie sur l'univers de discours  $U$  et  $T_x$  est un ensemble composé de sous ensembles flous de  $U$  caractérisant  $x$ . Ces sous ensembles flous de  $T_x$  sont souvent associés par une valeur ou un terme linguistique (étiquette).

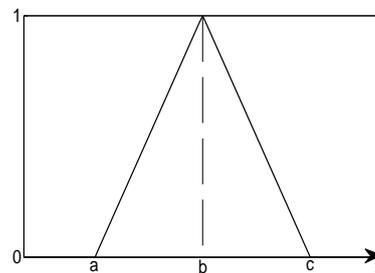
### I.2.4. Fonctions d'appartenance

La variable linguistique  $x$  variée dans un domaine appelé univers de discours qui est partagé en sous-ensembles flous de façon que dans chaque zone il a une situation dominante. Ces zones sont décrites par des fonctions appelées fonctions d'appartenance permettent un traitement numérique des variables linguistiques dans la prise de décisions floues sur ordinateur. Dans ce contexte, on associe à chaque valeur de la variable linguistique une fonction d'appartenance désignée par  $\mu_A(x)$ , qui représente le degré (ou le facteur) d'appartenance compris dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

En général, la forme des fonctions d'appartenance peuvent avoir différentes formes :

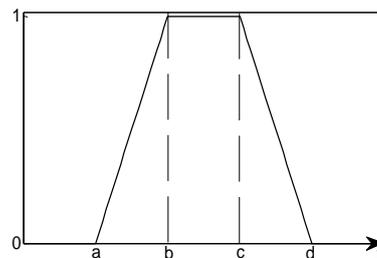
- **Fonction triangulaire** : elle est définie par trois paramètres  $\{a, b, c\}$  :

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{si } x \in [b, c] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



- **Fonction trapézoïdale** : elle est définie par quatre paramètres  $\{a, b, c, d\}$  :

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x \in [b, c] \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } x \in [c, d] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

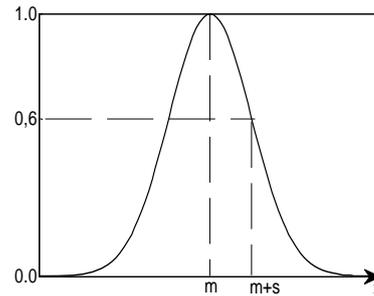


- **Fonction gaussienne** : elle est définie par deux paramètres  $\{m, s\}$  :

$$\mu(x) = \exp\left(-\left(\frac{x-m}{2s}\right)^2\right)$$

où  $m$  : centre de la gaussienne

et  $s$  : sa largeur



### I.2.5. Règles floues

Les variables linguistiques définies par des fonctions d'appartenance sont liées entre elles par des règles permettant de tirer des conclusions, on parle alors de déductions floues ou inférences. Ces règles floues sont élaborées à partir de la connaissance du système issue très souvent de l'observation expérimentale. Elles permettent de décrire l'évolution du système. Les règles floues, qui sont des objets linguistiques, doivent être mises sous forme de relations floues qui sont des objets mathématiques.

- ❖ **Définition** : Une règle floue est une relation entre deux propositions floues ayant chacune un rôle particulier, par exemple

$$R : \text{Si } x \text{ est } A \text{ Alors } y \text{ est } B \quad (I.8)$$

où la première proposition ( $x \text{ est } A$ ) est appelée prémisse de la règle alors que la seconde proposition ( $y \text{ est } B$ ) est la conclusion.

- ❖ **Activation d'une règle floue** : Une règle ne peut être activée (c'est à dire, intervenir dans le processus d'inférence) que lorsque la valeur de vérité de la proposition floue constituant sa prémisse est non nulle.

- ❖ **Implication floue** : La relation  $R$  entre la prémisse et la conclusion de la règle «  $\text{Si } x \text{ est } A \text{ Alors } y \text{ est } B$  » est déterminée par une implication floue dont le degré de vérité est défini par une fonction d'appartenance  $\mu_R$  qui dépend de degrés de vérité  $\mu_A$  et  $\mu_B$  de chacune des deux propositions élémentaires comme suit [Meu-95] :

$$\mu_R(x, y) = \text{imp}(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (I.9)$$

- ❖ **Agrégation des propositions floues** : Une proposition floue élémentaire est souvent insuffisante pour représenter l'ensemble des informations à manipuler. Plusieurs propositions

floues peuvent alors être combinées pour enrichir et détailler la représentation. Ainsi, on considère un ensemble de propositions floues, du genre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x \text{ est } A_1 \text{ et } y \text{ est } B_1 \text{ Alors } z \text{ est } C_1 \quad P_1 \\ \text{Si } x \text{ est } A_2 \text{ et } y \text{ est } B_2 \text{ Alors } z \text{ est } C_2 \quad P_2 \\ \dots \\ \text{Si } x \text{ est } A_n \text{ et } y \text{ est } B_n \text{ Alors } z \text{ est } C_n \quad P_n \end{array} \right. \quad (I.10)$$

Pour déterminer le sous ensemble flou solution de la conjonction des n propositions, il faut utiliser un opérateur d'agrégation  $\Lambda$  (généralement, l'opérateur  $\Lambda$  est réalisé par l'opérateur (OU) permettant de faire la synthèse des solutions de chaque  $P_i, i = 1, \dots, n$ . le sous ensemble résultant est défini comme suit :

$$\mu_P = \Lambda(\mu_{P_1}, \mu_{P_2}, \dots, \mu_{P_n}) \quad (I.11)$$

où  $\mu_{P_i} = \text{imp}(\{\mu_{A_i}(x) \text{ et } \mu_{B_i}(y)\}, \mu_{C_i}(z), i = 1, \dots, n$ .

Les opérateurs de calcul "et" et "imp" sont réalisés par les normes triangulaires (t-normes), et l'opérateur " $\Lambda$ " par les conormes triangulaires (t-conormes) comme le montre le tableau suivant [Lac-97] :

Tableau I.1 : Les t-normes et t-conormes.

	t-normes	t-conormes
Zadeh (1973)	$\min(x, y)$	$\max(x, y)$
Bandler (1980)	$x \cdot y$	$x + y - x \cdot y$
Giles (1976)	$\max(x + y - 1, 0)$	$\min(x + y, 1)$
Weber (1983)	$\begin{cases} x, \text{ si } y = 1 \\ y, \text{ si } x = 1 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} x, \text{ si } y = 0 \\ y, \text{ si } x = 0 \\ 1, \text{ sinon} \end{cases}$
Hamacher (1978) $\gamma > 0$	$\frac{x \cdot y}{\gamma + (1 - \gamma)(x + y - x \cdot y)}$	$\frac{x + y - (2 - \gamma)x \cdot y}{1 - (1 - \gamma)x \cdot y}$
Dubois et Prade (1986), $\alpha \in [0,1]$	$\frac{x \cdot y}{\max(x, y, \alpha)}$	$\frac{x + y - x \cdot y - \min(x, y, 1 - \alpha)}{\max(1 - x, 1 - y, \alpha)}$
Mamdani	$\min(x, y)$	$\max(x, y)$
Larsen	$x \cdot y$	$\max(x, y)$

## I.3. Commande par logique floue

Bien que la logique floue possède un champ d'application extrêmement vaste (commande, classification, aide à la décision, base de données imprécises,...). Nous nous intéressons ici qu'à son utilisation dans le cadre de la commande, c'est à dire, traiter les problèmes de commande de processus avec une approche différente de l'automatique classique, le plus souvent à partir des connaissances des experts ou d'opérateurs qualifiés travaillant sur le processus.

### I.3.1. Propriétés d'une commande par logique floue

Les propriétés essentielles d'une commande par logique floue peuvent être résumées dans les points suivants [Buh-94] :

- Aptitude à commander convenablement les systèmes avec un comportement dynamique compliqué ou difficile à modéliser ou inconnu.
- La clarté des règles qui sont facilement compréhensibles par les personnes expérimentés.
- La commande est simple à réaliser.
- Dans la plupart du temps un petit nombre de règle suffit à décrire le système.
- Cet outil permet de concevoir des commandes non linéaires qui sont réputées robustes.

### I.3.2. Structure de base d'un régulateur flou

Dans ce paragraphe, nous allons présenter la configuration de base du contrôleur flou qui comprend quatre parties principales [Buh-94] (voir la figure I.1).

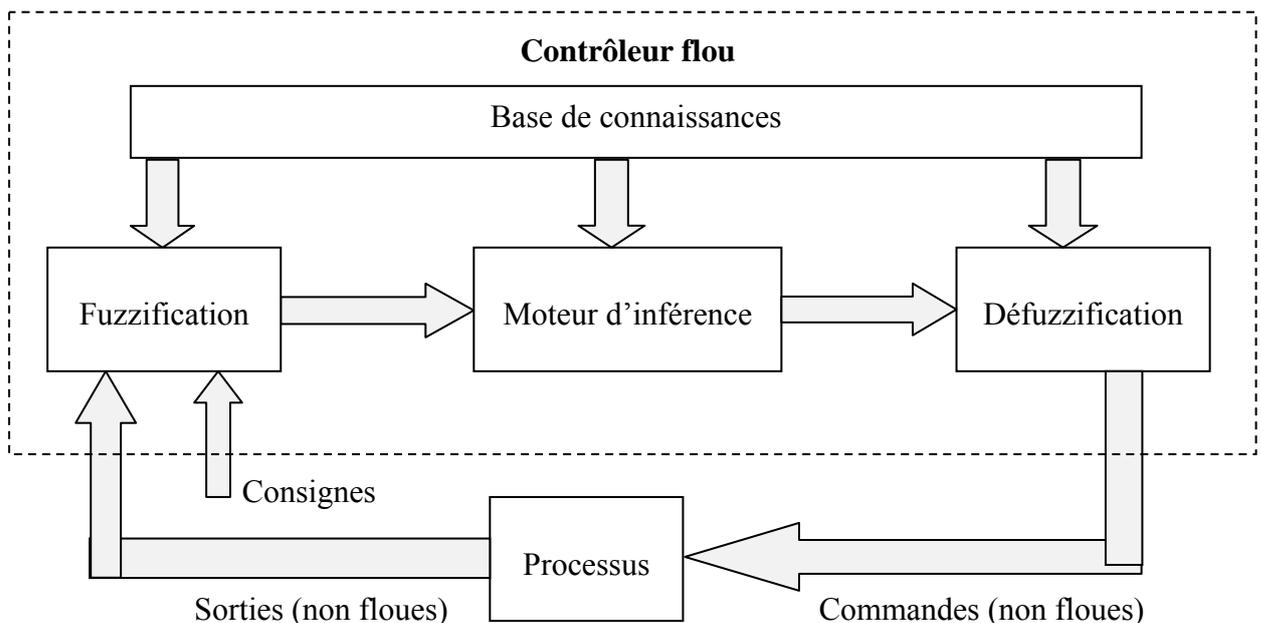


Figure I.1. Structure générale d'un contrôleur flou.

### I.3.2.1. Fuzzification

La fuzzification est l'étape de passage d'une grandeur physique en une variable floue ou variable linguistique. Elle consiste à définir le degré d'appartenance avec lequel la mesure de la variable physique appartient à un ensemble flou donné sur l'univers de discours. Deux modes de fuzzification sont possibles :

#### ■ Fuzzification par singleton

Cette démarche est utilisée lorsque la valeur fournie par le capteur est supposée précise. La fuzzification par singleton d'une valeur  $u_0 \in U$  est alors la partie floue numérique  $F_x$  dans  $U$  dont la fonction d'appartenance (voir figure I.2) est définie par :

$$\mu_{F_x}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u = u_0 \\ 0 & \text{si } u \neq u_0 \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

Cette stratégie est largement utilisée dans les applications de la commande floue, car elle est facile à implémenter.

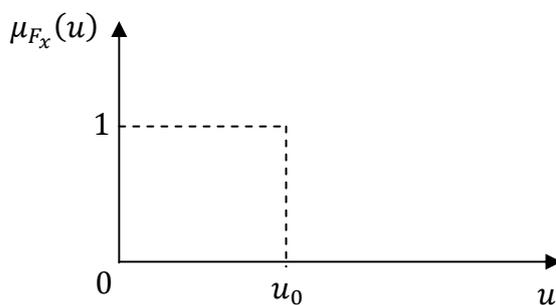


Figure I.2. Fuzzification par singleton.

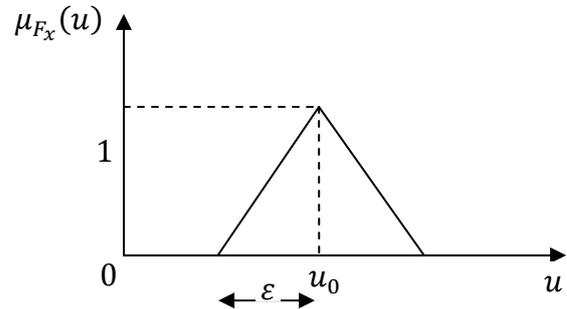


Figure I.3. Fuzzification non- singleton.

#### ■ Fuzzification non singleton

Dans cette démarche, on considère que le capteur peut engendrer une erreur de la mesure ou être exposé à un bruit. La fonction d'appartenance de  $F_x$  dépend dans ce cas de l'erreur ou du bruit, par exemple, elle peut être définie comme suit :

$$\mu_{F_x}(u) = \max \left\{ 0; 1 - \frac{|u - u_0|}{\varepsilon} \right\} \quad (\text{I.13})$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre caractérisant la forme de  $\mu_{F_x}$ .

La représentation graphique de cette fonction est montrée par la figure I.3. La base du triangle ( $\varepsilon$ ) est en fonction de l'importance relative des erreurs de mesures. En effet, plus

elles sont importantes, plus la mesure de la variable  $u_0$  devient imprécise, et donc, plus le triangle doit s'élargir.

### **I.3.2.2. Base de connaissances**

La conception d'une base de connaissances représente la phase de la conception des systèmes flous. Elle comprend la base de données et la base des règles floues

#### **■ La base de données**

La base de données consiste à définir les ensembles flous des variables d'entrée et de sorties, la partition de l'espace flou d'entrée et de sortie, et le choix des fonctions d'appartenance qui décrivent les ensembles flous des variables d'entrée et de sorties.

Bien qu'il n'existe pas de règles précises pour la définition de la forme des fonctions d'appartenance, quelques directives générales seront données, afin de faciliter un premier choix [Buh-94] :

- Le nombre de partitions de l'univers de discours dépend de l'application et la qualité du réglage désirée.
- Ces fonctions d'appartenance peuvent être symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, et distribuées de manière équidistante, c'est-à-dire, les maximums des différents ensembles sont écartés d'une manière équidistante.
- Pour les variables d'entrée, il faut éviter des lacunes (l'intersection entre deux prédicats « consécutifs » est non nulle) ou un chevauchement insuffisant « excessifs » entre les fonctions d'appartenance. Cela provoque des zones de non intervention des régulateurs.

#### **■ La base des règles floues**

La description de la commande dans le cas d'un contrôle de procédé, se fait par l'intermédiaire de règles floues. Comme nous l'avons vu précédemment, ces règles floues permettent de coder la connaissance d'un expert sur la commande du processus en termes linguistique sous la forme générale suivante « si prémisse alors conclusion », où les prémisses portent sur les entrées du contrôleur flou et les conclusions sur les sorties. Le nombre des règles floues dépendent, notamment, de la partition des univers de discours des variables d'entrée et de sortie.

Afin de garantir la couverture uniforme de l'univers de discours et d'éviter les indécisions ou les confusions entre les règles, on doit respecter certaines conditions pour assurer le bon fonctionnement de ce dernier [Bou-00], [Lac-97] :

➤ **La complétude** : une base de règles d'un système flou est dite complète, s'il existe au moins une règle floue activée pour chaque vecteur d'entrée. Afin d'assurer cette propriété, les fonctions d'appartenance doivent couvrir toutes les plages possibles des variables d'entrées.

➤ **La consistance** : une base de règles d'un système flou est dite inconsistante, s'il existe deux règles floues ayant la même prémisse mais des conclusions différentes. La propriété de consistance permet d'éviter les contradictions dans une base de règles.

### I.3.2.3. Moteur d'inférence

Le moteur d'inférence floue transforme, à l'aide des techniques de raisonnement flou, la partie floue issue de la fuzzification en une nouvelle partie floue afin de définir l'ensemble flou caractérisant la commande. En fait, le mécanisme d'inférence combine les règles floues pour effectuer une transformation à partir des ensembles flous dans l'espace d'entrée vers des ensembles flous dans l'espace de sortie. Il existe plusieurs méthodes d'inférence utilisées dans la littérature [Buh-94] , parmi elles, on cite :

- Méthode d'inférence MAX-MIN.
- Méthode d'inférence MAX-PROD.
- Méthode d'inférence SOMME-PROD.

#### ■ Méthode d'inférence MAX-MIN (Mamdani)

La méthode d'inférence max-min est réalisée au niveau de la condition, l'opérateur « ET » par la formation du minimum. La conclusion dans chaque règle, introduite par « ALORS » est réalisée par la formation du minimum. Enfin l'opérateur « OU » qui lie les différentes règles est réalisé par la formation du maximum.

#### ■ Méthode d'inférence MAX-PROD (Larsen)

La méthode d'inférence max-produit est réalisée, au niveau de la condition, l'opérateur « ET » par la formation du produit. La conclusion dans chaque règle, introduite par « ALORS » est réalisée par la formation du produit. L'opérateur « OU », qui lie les différentes règles, est réalisé par la formation du maximum.

#### ■ Méthode d'inférence SOMME-PROD (Sugeno)

Dans cette méthode, l'opérateur "ET" est réalisé par le produit, de même que la conclusion "ALORS". Cependant, l'opérateur "OU" est réalisé par la valeur moyenne des degrés d'appartenance intervenant dans l'inférence.

### I.3.2.4. Défuzzification

L'étape de défuzzification consiste à transformer l'ensemble flou résultant de l'inférence de différentes règles en une valeur numérique unique représentative de cet ensemble, cette valeur numérique est appliquée pour commander un processus réel. Plusieurs stratégies de défuzzification existent dont les plus communément usitées dans la littérature [Buh-94], [Lac-97] sont :

1. La méthode du centre de gravité.
2. La méthode de la valeur maximum.
3. La méthode de la moyenne des maximums.
4. méthode de hauteurs pondérées.

#### ■ Défuzzification par le centre de gravité

C'est la méthode la plus utilisée dans les contrôleurs flous. Elle consiste à calculer l'abscisse du centre de gravité  $X_R^*$  de la fonction d'appartenance résultante  $\mu_{res}(X_R)$  comme suit :

$$X_R^* = \frac{\int_{X_{R1}}^{X_{R2}} X_R \cdot \mu_{res}(X_R) dX_R}{\int_{X_{R1}}^{X_{R2}} \mu_{res}(X_R) dX_R} \quad (I.14)$$

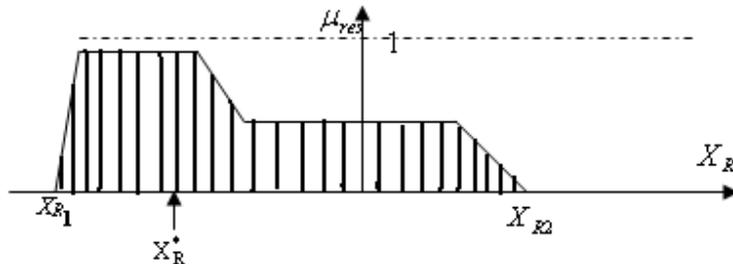


Figure I.4. Défuzzification par le centre de gravité.

Le centre de gravité permet d'exprimer analytiquement la sortie du système flou et de simplifier sa mise en œuvre. Cependant, son calcul est complexe et nécessite des calculs longs de l'intégrale.

#### ■ Défuzzification par la valeur maximale

Cette méthode, s'applique uniquement dans le cas où la fonction d'appartenance associée à l'ensemble flou de sortie n'admet qu'un seul maximum. On choisit comme sortie l'abscisse  $X_R^*$  correspondant à ce maximum.

Trois cas peuvent se produire comme le montre la figure I.5.

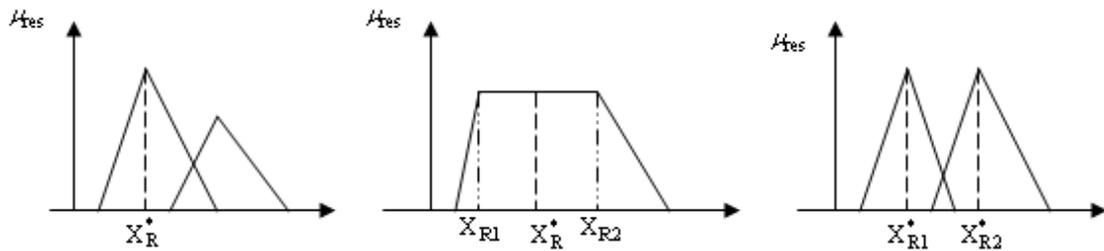


Figure I.5. Défuzzification par la valeur maximale.

Cette méthode est beaucoup plus simple, rapide et facile, mais elle introduit des ambiguïtés et une discontinuité de la sortie.

#### ■ Défuzzification par la moyenne des maximums

Dans le cas où plusieurs ensembles auraient la même hauteur maximale, on réalise leur moyenne, cette méthode permet d'enlever les ambiguïtés de la méthode de la valeur maximum.

#### ■ Méthode des hauteurs pondérées (moyenne pondérée)

Elle correspond à la méthode de centre de gravité quand les fonctions d'appartenance de la variable de sortie sont des singletons [Bag-99].

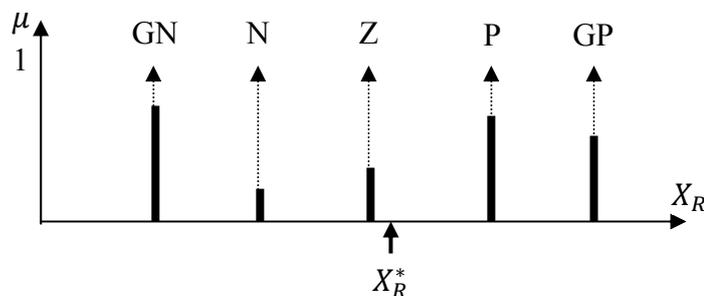


Figure I.6. Défuzzification par la méthode des hauteurs pondérées.

Ici, le défuzzificateur d'abord évalue  $\mu(X_R)$  en  $X_{R_i}$ . Ensuite, on calcul la sortie du système flou par :

$$X_R^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_{R_i} \cdot \mu(X_{R_i})}{\sum_{i=1}^n \mu(X_{R_i})} \quad (\text{I.15})$$

où  $n$  est le nombre de sous-ensembles flous  $X_{R_i}$  distincts.

Dans cette méthode, le calcul du centre de gravité se trouve grandement simplifié.

### I.3.3. Différents types de contrôleurs flous

Dans la théorie classique des systèmes et de point de vue mathématique, les systèmes sont classés selon la nature des équations qui les caractérisant (linéaires, non linéaires, ...etc). Cependant, en logique floue, cette classification est disparue et envisagée en deux classes particuliers selon leur nature structurelle : les modèles linguistiques (modèles de Mamdani) [Mam-74] et les modèles à conséquence fonctionnelle (modèles de Takagi-Sugeno) [Tak-85]. Ce choix est avant tout lié au fait que ces deux types de systèmes sont généralement exploités dans des contextes différents. En effet, les systèmes de type T-S sont souvent associés à une recherche de performance numérique alors que ceux de MAM sont orientés vers un possible prise en compte de connaissances expertes. Et par conséquent, La synthèse de lois de commande par logique floue est envisagée pour deux types particuliers de contrôleurs flous, à savoir les contrôleurs de MAM et ceux de T-S. Enfin, pour alléger les notations, la présentation est restreinte à des systèmes à deux entrées,  $x$  et  $y$ , et une sortie  $z$ .

#### I.3.3.1. Contrôleurs flous de Mamdani (Contrôleurs linguistiques)

Les contrôleurs flous de Mamdani sont historiquement les premiers à être proposés et sont assez simple à mettre en œuvre [Mam-74]. Ces contrôleurs utilisent des modèles flous permettent une description complètement linguistique du système sous forme règles floues, car les prémisses et les conclusions sont des propositions linguistiques floues. Un système flou de type MAM est basé sur une collection de règles qui ont la forme suivante [Gal-01] :

$$R_{(i,j,k)} : \text{Si } x \text{ est } A_i \text{ et } y \text{ est } B_j \text{ alors } z \text{ est } C_k \quad (\text{I.16})$$

où  $A_i, i \in I_1$ ,  $B_j, j \in I_2$ , et  $C_k, k \in I_3$ , représentent des termes linguistiques auxquels une signification floue est attribuée.

Pour des entrées numériques précises,  $x_0$  et  $y_0$ , un sous-ensemble flou de sortie, noté  $F$ , est généré selon la relation :

$$\mu_F(z) = \max_{(i,j,k) \in I} \min(\min(\mu_{A_i}(x_0), \mu_{B_j}(y_0)), \mu_{C_k}(z)). \quad (\text{I.17})$$

L'opération  $\max_{(i,j,k) \in I}$  correspond à l'application de l'opérateur  $\max$  sur l'ensemble des règles définies. La valeur numérique de sortie délivrée par le système flou est obtenue par défuzzification, classiquement implantée par la méthode du centre de gravité :

$$z = \text{MAM}(x_0, y_0) = \frac{\int z \cdot \mu_F(z) \cdot d(z)}{\int \mu_F(z) \cdot d(z)} \quad (\text{I.18})$$

L'équation (I.17) repose sur l'utilisation des opérateurs flous *min/max* préconisés par Mamdani. Elle peut être généralisée en introduisant des opérateurs quelconques de type t-norme et/t-conorme comme suit [Lac-97] :

$$\mu_F(z) = \perp_{(i,j) \in I} T_2(T_1(\mu_{A_i}(x_0), \mu_{B_j}(y_0)), \mu_{C_k}(z)) \quad (I.19)$$

où  $T_1$  et  $T_2$  représentent des t-normes, et  $\perp$  une t-conorme.

#### ■ Avantages et inconvénients du contrôleur flou de Mamdani :

Les avantages du système flou de MAM peuvent être résumés par les points suivants :

- L'avantage majeur de ces modèles est que les prémisses et les conclusions des règles sont de nature entièrement linguistique. Ceci les rend facilement compréhensibles, et donne une interprétation sémantique claire au modèle.
- Autre avantage réside dans la flexibilité dans l'implémentation : Ceci est du à la liberté dans le choix des formes d'implication floues, du fuzzificateur et du défuzzificateur.

En revanche, le système flou de MAM possède les inconvénients suivants :

- Un grand nombre de règles est souvent nécessaire pour approcher le comportement global d'un système. Par conséquent, le nombre de paramètres à identifier est élevé [Bab-95].
- Le deuxième inconvénient, du moins du point de vue purement théorique, réside dans la mise en œuvre heuristique, ne prenant en compte aucun critère de stabilité ou de robustesse de la théorie de la commande.

#### I.3.3.2. Contrôleurs flous de Takagi-Sugeno

Les modèles linguistiques ne permettent pas d'intégrer directement des connaissances exprimées sous forme analytique décrivant la structure physique du système. Takagi et Sugeno et ses collaborateurs [Tak-85] ont proposé une autre classe de modèles permettent de représenter ce type d'informations.

Les contrôleurs de Takagi-Sugeno sont, comme ceux de Mamdani, construits à partir d'une base de règles "Si... alors...". Si les prémisses sont toujours exprimées linguistiquement et donc similaires à celles utilisées dans (I.16), les conclusions sont par contre de nature numérique. Elles peuvent prendre différentes formes : équations linéaires ou polynômiales, statiques ou dynamiques. L'étude est ici restreinte à des conclusions constantes pour un souci de simplicité, les règles étant donc formulées de la manière suivante :

$$R_{(i,j)} : \text{Si } x \text{ est } A_i \text{ et } y \text{ est } B_j \text{ alors } z \text{ est } c_{i,j} , \quad (I.20)$$

où  $c_{i,j}$  représente une valeur réelle quelconque.

Pour les valeurs d'entrée précises  $x_0$  et  $y_0$ , la sortie  $z$  est réalisée à partir d'une combinaison des opérations d'inférence et de défuzzification selon le mécanisme de calcul suivant [Tak-85], [Gal-01]:

$$z = \text{SUG}(x_0, y_0) = \frac{\sum_{(i,j) \in I} w_{i,j} \cdot c_{i,j}}{\sum_{(i,j) \in I} w_{i,j}}, \quad \text{avec } w_{i,j} = \mu_{A_i}(x_0) \cdot \mu_{B_j}(y_0), \quad (\text{I.21})$$

où  $w_{i,j}$  représente le degré de vérité de la prémisse de la règle  $R_{(i,j)}$ .

Si les fonctions d'appartenance  $\mu_{A_i}(x_0)$  et  $\mu_{B_j}(y_0)$  sont fixées, et que les paramètres  $c_{i,j}$  sont considérés comme des paramètres ajustables, alors (I.21) peut être réécrite sous la forme compacte suivante [Wan-94] :

$$z = \theta^T \xi(x_0, y_0) \quad (\text{I.22})$$

où  $\theta = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T$  et  $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N]^T$  sont, respectivement, les vecteurs de paramètres ajustables et des fonctions flous de base avec  $N$  est le nombre total de règles floues et  $\xi_{i,j}$  définit par :

$$\xi_{i,j}(x_0, y_0) = \frac{w_{i,j}(x_0, y_0)}{\sum_{(i,j) \in I} w_{i,j}} \quad (\text{I.23})$$

### ■ Avantages et inconvénients du contrôleur flou de Takagi - Sugeno

Ces modèles sont actuellement les plus utilisés dans la conception des contrôleurs flous car ils présentent les avantages suivants :

- Ils permettent de décrire des situations où la structure physique du système est bien connue, par exemple, une fonction linéaire exprime la relation entrée-sortie.
- Ils permettent d'approcher le comportement d'un système complexe par une collection de modèles locaux, généralement linéaires.
- Les modèles de type T-S ont une capacité de représentation importante. En effet, le nombre de règles nécessaires pour approcher un système à un certain degré de précision est généralement plus faible que dans le cas des modèles linguistiques [Bab-95].
- Les systèmes flous de type de T-S permettent d'exploiter un certain nombre de techniques numériques issues de l'automatique conventionnelle (méthodes moindres carrés récursifs, filtrage de Kalman, commande adaptative, commande prédictive, ...etc) et d'établir l'analyse de la stabilité et la robustesse.

- Il a été démontré dans la littérature que les systèmes flous de type T-S sont des bon approximateurs universels car ils sont capables d'approximer toute fonction non linéaire continue sur un ensemble compact avec une précision arbitraire définie [Wan-94].

Toutefois, l'inconvénient majeur de ces modèles réside dans la nature fonctionnelle des conclusions, c'est-à-dire, les règles n'ont pas de signification sémantique claire comme dans le cas des modèles linguistiques. Autre inconvénient réside dans que les contrôleurs de Takagi-Sugeno peuvent être considérés comme une classe particulière de contrôleurs non linéaires.

## **1.4. Commande adaptative**

La commande adaptative est un ensemble de techniques utilisées pour l'ajustement automatique en ligne des paramètres du régulateur afin de réaliser ou de maintenir un certain niveau de performances quand les paramètres du procédé à commander variant dans le temps ou inconnus. Les paramètres du régulateur sont adaptés de manière à poursuivre le système dans son évolution [Lac-97].

Deux types de commande adaptative sont possibles :

### **I.4.1. Commande adaptative indirecte**

Cette approche s'effectue en deux étapes :

- Estimation des paramètres du modèle,
- Calcul des paramètres du contrôleur à partir des paramètres estimés.

### **I.4.2. Commande adaptative directe**

Elle conduit directement à l'estimation des paramètres de la loi de commande. Ce type de schéma est obtenu en réécrivant le modèle du processus en fonction des paramètres de la loi de commande.

## **1.5. Commande par mode glissant**

Etant un cas particulier de la commande à structure variable, la commande par mode glissant (CMG) a été largement utilisée dans la littérature. Ce succès est dû à sa simplicité de mise en œuvre et à sa robustesse vis à vis des variations paramétriques et des perturbations externes. La conception de cette commande est basée sur trois étapes dont la première consiste à choisir la surface de glissement qui représente la dynamique désirée. La deuxième

établie la condition d'existence du mode de glissement (attractivité) et la dernière étape détermine la loi de commande qui aura pour rôle de garantir le maintien et le glissement le long des trajectoires du système sur cette surface.

Dans un souci de facilité la compréhension, une classe des systèmes SISO affine en commande est considérée dans cette section.

### I.5.1. Choix de la surface de glissement

Soit le système non linéaire SISO, affine en entrée, défini par :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (I.24)$$

où  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n$  est le vecteur d'état,  $u \in R$  est la commande, et  $f$  et  $g$  sont des fonction non linéaires.

**Supposition 1.1 :** la fonction  $g(x)$  est supposée non nulle ( $g(x) \neq 0$ ).

On défini dans  $R$ , la surface de glissement ou de commutation notée  $S$  définie par :

$$S = \{x \in R^n : s(t, x) = 0\} \quad (I.25)$$

avec  $s$  la fonction décrivant la surface de glissement.

#### I.5.1.1. Remarque 1.1 [Ala-09]

Soit  $s(z_1, \dots, z_n) = z_n + k_{n-1}z_{n-1} + \dots + k_1z_1$  où les coefficients  $k_i$  sont choisis tel que l'équation caractéristique  $h(p) = p^{(n-1)} + k_{n-1}p^{(n-2)} + \dots + k_1$ , avec  $p$  est l'opérateur Laplace, possède des racines strictement dans le demi plan complexe gauche. Alors  $s(z, \dot{z}, \dots, z^{n-1}) = 0$  est une équation linéaire ordinaire stable.

#### I.5.1.2. Remarque 1.2

On dit qu'il existe un régime glissant idéal sur  $S$  s'il existe un temps fini  $t_s$  tel que la solution de (I.24) satisfasse  $s(t, x) = 0$  pour  $t \geq t_s$ .

### I.5.2. Condition d'existence du mode de glissement (attractivité)

L'étude de l'existence du mode de glissement est basée sur la méthode de Lyapunov, afin de garantir l'attractivité de la surface  $s(t, x) = 0$ , ce qui peut être traduire mathématiquement par [Slo-83] :

$$s\dot{s} < 0 \quad (I.26)$$

Cette condition indique que les trajectoires des systèmes convergent asymptotiquement vers la surface de glissement  $s(t, x) = 0$  puis restent dans un  $\varepsilon$ -voisinage de cette surface comme le présente la figure I.7.

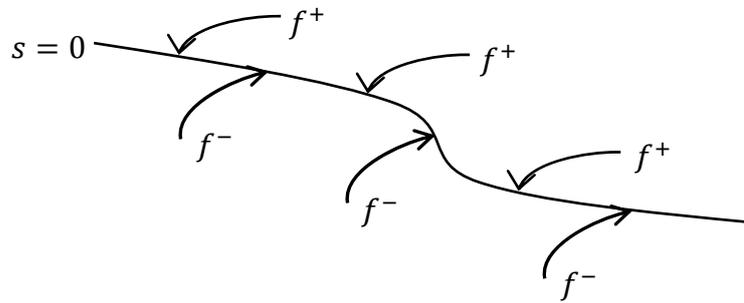


Figure I.7. Attractivité de la surface.

### I.5.2.1. Remarque 1.3

Pour une convergence en temps fini, la condition (I.26) qui ne garantit qu'une convergence asymptotique vers la surface de glissement est remplacée par une condition plus restrictive dite de  $\eta$ -attractivité et donnée dans [Slo-83] :

$$\dot{s} < -\eta|s| \quad (I.27)$$

qui assure une convergence en temps fini ( $t_s \leq \frac{|s(0)|}{\eta}$ ) vers la surface  $s(t, x) = 0$ .

### I.5.3. Synthèse de la loi de commande par mode glissant

La loi de commande par mode glissant est construite de façon à ce que les trajectoires du système pointent vers la surface de glissement  $s = 0$  dans un premier lieu et ensuite maintenir ces trajectoires sur cette surface en deuxième lieu. Pratiquement, cette commande est composée de deux composantes : une discontinue  $u_s$ , permet de ramener les trajectoires vers la surface de glissement et d'assurer la robustesse vis à vis des perturbations externes, et la seconde, continue, dite la commande équivalente  $u_{eq}$ , permet le maintien et le glissement le long de la surface.

#### I.5.3.1. Remarque 1.4

La commande équivalente est déduite par les conditions d'invariance suivantes de la surface de glissement [Utk-92] :

$$\begin{cases} s = 0 \\ \dot{s} = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (I.28)$$

Pour le système (I.24), la commande par mode glissant est choisie comme suit :

$$\begin{aligned} u &= u_{eq} + u_s \\ u_{eq} &= - \left[ \frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} f(x) \\ u_s &= -K \left[ \frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \text{sgn}(s) \end{aligned} \quad (\text{I.29})$$

où  $K$  est une constante positive et  $\text{sgn}$  est la fonction signe définie par :

$$\text{sgn}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \\ -1 & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

Si on considère la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2} s^2 \quad (\text{I.31})$$

La dérivée par rapport au temps de cette fonction permet d'obtenir :

$$\dot{V} = s\dot{s} \leq -K|s| \quad (\text{I.32})$$

et donc l'existence d'un régime glissant.

#### I.5.4. Phénomène de réticence

En effet, le terme discontinu ( $K * \text{sgn}(s)$ ) de la commande par mode glissant excite de fortes oscillations autour de la surface (voir la figure I.8), qui entraînent l'apparition de ce qu'on appelle "réticence" ou "broutement" connu en anglais sous le nom de "chattering".

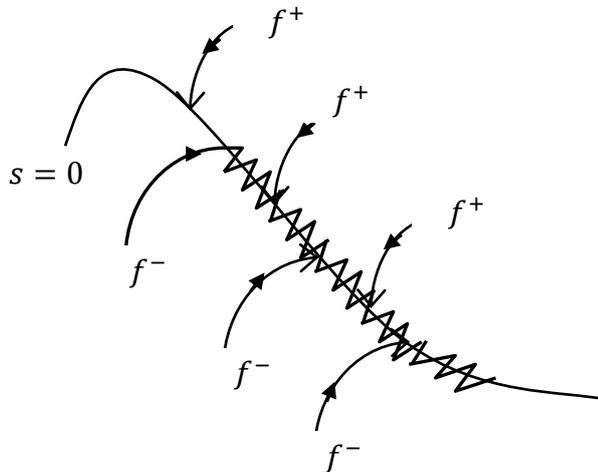


Figure I.8. Mode de glissement avec réticence.

Ce phénomène est indésirable en commande, car même s'il est possible de le filtrer à la sortie du processus, il ajoute au spectre de la commande des composantes hautes fréquences qu'on a pas tenu en compte lors de la modélisation. Ces dernières peuvent détériorer les performances du système et même conduisent à son instabilité [Utk-92]. La réticence implique également d'importantes oscillations mécaniques au niveau des actionneurs, pouvant provoquer leur usure rapide, ainsi que des pertes énergétiques non négligeables au niveau des circuits de puissance électrique.

Plusieurs solutions ont été proposées pour résoudre ce problème et ainsi réduire (ou éliminer) le phénomène de broutement, on cite :

#### **I.5.4.1. Solution de la couche limite**

Dans ce cas la fonction signe est remplacée par des approximations continues [Slo-84] comme la fonction de saturation « *sat* » qui filtre les hautes fréquences. D'autres fonctions peuvent être aussi utilisées telles que les fonctions sigmoïdes  $\frac{r^{2n+1}}{1+r^{2n}}$ ,  $\tanh(r)$ ,  $\frac{2}{r}\arctan(r)$ ,... avec  $r = \frac{x}{\varepsilon}$  et  $\varepsilon$  l'épaisseur du voisinage de la surface où les composantes hautes fréquence sont filtrées.

$$sat(s) = \begin{cases} s/\varepsilon & si |s/\varepsilon| \leq 1 \\ sgn(s) & si |s/\varepsilon| > 1 \end{cases} \quad (I.33)$$

#### **I.5.4.2. Solution basée sur un observateur**

Il s'agit de placer un observateur asymptotique par mode glissant pour éliminer la réticence due à cette discontinuité de la loi de commande. L'idée proposée par [Bon-85] consiste à générer les modes glissants idéaux dans une boucle auxiliaire d'observation, telle que cette boucle d'observateur n'intègre aucune dynamique non modélisée. La boucle principale est poursuivie de la boucle d'observateur.

#### **I.5.4.3. Mode glissant d'ordre supérieur**

On remplace le mode glissant d'ordre un «  $s = 0$  » par le mode glissant d'ordre supérieur «  $s = s^{(1)} = \dots = s^{(n)} = 0$  » où  $n$  est l'ordre du mode glissant [Eme-86], [Fri-02].

#### **I.5.4.4. Régulateur PI type flou**

Le terme discontinu est remplacé par un régulateur PI flou comme suit [Ho-09] :

$$u_s = k * \text{sgn}(s) = K_p s + k_i \int (s) dt \quad s = \theta_p^T \xi(z) \quad (\text{I.34})$$

où  $\theta_p = [K_p, K_i]^T$  est le vecteur des paramètres ajustables,  $\xi(z)$  est le vecteur des fonctions floues de base avec  $z = [z_1, z_2]^T$ , telle que  $z_1 = s$  et  $\dot{z}_2 = s$ .

## I.6. Stabilité des systèmes dynamiques

La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour son point d'équilibre, c'est à dire, la capacité à revenir à sa position d'équilibre lorsqu' il est ponctuellement écarté. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de ses trajectoires d'état lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre. Dans la littérature, plusieurs approches ont été proposées : les méthodes d'analyse qualitative, les méthodes géométriques, la théorie d'hyperstabilité de Popov, la théorie de Lyapunov, les versions floues des LMI (Linear Matrix Inequalities). La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie générale valable pour toute équation différentielle.

### 1.6.1. Méthode directe de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov permet d'analyser la stabilité d'un système autour de son point d'équilibre sans le résoudre explicitement [Ioa-96]. L'étude de la stabilité des systèmes différentiels  $\dot{x} = f(x, t)$  est énoncée par le théorème suivant :

#### 1.6.1.1. Théorème 1.1

Soit  $V(x, t): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction continue de classe  $C^1$ . La fonction  $V$  est dite fonction de Lyapunov si elle satisfait les conditions suivantes :

a)  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0: V(x, t) > 0.$

b)  $\forall t \in \mathbb{R}^+, V(0, t) = 0.$

c)  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \lim_{x \rightarrow \infty} V(x, t) = \infty.$

La dérivée de la fonction de Lyapunov est définie par :

$$\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t}(x, t) + \left[ \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) \right]^T f(x, t) \quad (\text{I.35})$$

où  $\left[ \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) \right] = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1}(x, t) \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n}(x, t) \right]^T$  est le gradient de  $V(x, t)/x$ .

- **Définition 1**

Le système défini par l'équation différentielle  $\dot{x} = f(x, t)$  est dit asymptotiquement stable si et seulement si  $\dot{V}(x, t) \leq 0$ .

- **Définition 2**

Le système défini par l'équation différentielle  $\dot{x} = f(x, t)$  est dit exponentiellement stable s'il existe des constantes  $\alpha, \beta, \gamma, p \geq 0$  telles que :

- $\alpha \|x\|^p \leq V(x, t) \leq \beta \|x\|^p$ .
- $\dot{V}(x, t) \leq -\gamma V(x, t)$ .

## I.7. Commande adaptative floue par mode glissant

Il s'agit de combiner les commandes floue, adaptative et par mode glissant pour concevoir une structure de commande stable et robuste pour une classe de systèmes non linéaires. Après une formulation du problème, nous allons montrer d'une manière constructive la procédure de développement d'un contrôleur adaptatif flou par mode glissant permettant au système d'atteindre les objectifs désirés. La performance des lois de commande développées, sera mise en évidence à travers leur application à un pendule inversé.

### I.7.1. Problématique

On considère une classe de systèmes non linéaires d'ordre  $n$  SISO, affine en la commande, d'écrite par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = f(x) + g(x)u + d(t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (I.36)$$

où  $f(x, t)$  et  $g(x, t)$  sont deux fonctions non linéaires continues inconnues,  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n$  est le vecteur d'état supposé mesurable,  $u \in R$  et  $y \in R$  sont l'entrée et la sortie du système, respectivement, et  $d(t)$  est une perturbation externe supposée bornée, c'est à dire,  $d(t) \leq D$ .

#### Supposition 1.2

Pour la commandabilité du système, on suppose que  $\forall x \in U_c \subset R^n$ ,  $g(x) \neq 0$  et par commodité, on prendra  $g(x) > 0$  avec  $U_c$  est la région certaine de contrôlabilité.

L'objectif de commande est de forcer la sortie du système  $y(t)$  à suivre un signal de référence borné donné  $y_d(t)$ , sous la contrainte que tous les signaux impliqués doivent être bornés.

### Supposition 1.3

Le signal de référence  $y_d(t)$  et ses dérivées par rapport au temps,  $y_d^{(i)}, i = 1, \dots, n$  sont supposés bornés.

Soit l'équation qui décrit la surface de glissement dans l'espace des erreurs de poursuite [Slo-91] :

$$s(t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e(t) = e^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(i-1)} \quad (I.37)$$

où  $\lambda$  est une constante positive,  $k_i = \frac{(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!} \lambda^{n-i}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , et  $e(t) = y(t) - y_d(t)$  est l'erreur de poursuite. Les coefficients  $k_i$  sont les coefficients du polynôme de Hurwitz  $h(p) = p^{(n-1)} + k_{n-1}p^{(n-2)} + \dots + k_1$ , c'est à dire, que toutes les racines du polynôme caractéristique ( $h(p)$ ) sont dans le demi-plan gauche, et  $p$  est l'opérateur Laplace.

Donc, le problème de poursuite revient à rapprocher les trajectoires des erreurs vers la surface de glissement  $s(t) = 0$  puis, à maintenir ces trajectoires le long de cette surface.

Si les fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  sont connues, alors la loi de commande par mode glissant  $u^*$  suivante satisfait la condition de convergence (I.27) :

$$\begin{aligned} u^* &= u_{eq} - u_s \\ u_{eq} &= \frac{1}{g(x)} \left[ -f(x) + y_d^{(n)} - \sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(i)} \right] \\ u_s &= \frac{k}{g(x)} \operatorname{sgn}(s) \end{aligned} \quad (I.38)$$

où  $k$  est une constante positive ( $k = D + \eta$  avec  $\eta \geq 0$ ) et  $\operatorname{sgn}(s)$  la fonction signe définie par (I.30).

Soit la fonction candidate de Lyapunov définie par :

$$V = \frac{1}{2} s^2 \quad (I.39)$$

On suppose que  $u = u^*$  et on dérive l'équation (I.39) par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\dot{V} = s\dot{s} &= s[f(x) + g(x)u^* + d(t) - y_d^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(i)}] \\ &= s[d(t) - k \operatorname{sgn}(s)] \leq -(k - D)|s| \leq -\eta |s|\end{aligned}\quad (\text{I.40})$$

L'équation (I.40) montre une fonction de Lyapunov décroissante et par conséquent l'erreur de poursuite tend vers zéro à l'infini.

Cependant, les fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  sont inconnues, donc il est difficile d'appliquer la loi de commande (I.38) pour le système non linéaire (I.36). Pour résoudre ce problème, on va présenter dans le paragraphe suivant deux systèmes flous pour approximer les fonctions inconnues.

### I.7.2. Description des systèmes flous

Dans ce paragraphe, on présente deux systèmes flous de type T-S pour approximer les fonctions inconnues  $f(x)$  et  $g(x)$ . Ces systèmes peuvent être construits à partir d'une collection de règles floues avec une conclusion en singleton comme suit :

$$R_f^{(j_1, \dots, j_n)} : \text{Si } x_1 \text{ est } A_1^{j_1} \text{ et } x_2 \text{ est } A_2^{j_2} \text{ et } \dots \text{ et } x_n \text{ est } A_n^{j_n} \text{ alors } \hat{f} = \theta_f^{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \quad (\text{I.41})$$

$$R_g^{(j_1, \dots, j_n)} : \text{Si } x_1 \text{ est } A_1^{j_1} \text{ et } x_2 \text{ est } A_2^{j_2} \text{ et } \dots \text{ et } x_n \text{ est } A_n^{j_n} \text{ alors } \hat{g} = \theta_g^{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \quad (\text{I.42})$$

où  $j_i \in \{1, 2, \dots, p_i\}$ ,  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $A_i^{j_i} \in T(x_i) = \{A_i^1, A_i^2, \dots, A_i^{p_i}\}$  et  $p_i$  le nombre des ensembles flous pour chaque variable d'état  $x_i$ .

En utilisant la fuzzification par singleton, la défuzzification par le centre de gravité et le mécanisme d'inférence somme-produit, les sorties des modèles flous (I.41) et (I.42) sont décrites par :

$$\hat{f}(x, \theta_f) = \theta_f^T \xi(x) \quad (\text{I.43})$$

$$\hat{g}(x, \theta_g) = \theta_g^T \xi(x) \quad (\text{I.44})$$

avec  $\theta_f$  et  $\theta_g$  sont les vecteurs des paramètres ajustables des fonctions  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$ , respectivement, et  $\xi(x)$  est le vecteur des fonctions floues de base.

Les approximations floues des fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  sont utilisées par la suite dans la synthèse de la commande adaptative floue par mode glissant pour le système non linéaire étudié.

### I.7.3. Synthèse de la loi de commande

En se basant sur les approximations floues obtenues dans (I.43) et (I.44), on propose le contrôleur adaptatif flou par mode glissant suivant :

$$\begin{aligned} u &= u_{eq} - u_s \\ u_{eq} &= \frac{1}{\hat{g}(x, \theta_g)} \left[ -\hat{f}(x, \theta_f) + y_d^{(n)} - \sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(i)} \right] \\ u_s &= \frac{k}{\hat{g}(x, \theta_g)} \text{sgn}(s) \end{aligned} \quad (\text{I.45})$$

#### I.7.3.1. Théorème 1.2

On considère le problème de commande pour le system (I.36). Si la loi de commande (I.45) est choisie, les fonctions  $f$  et  $g$  sont estimées par (I.43) et (I.44), respectivement, et les vecteurs  $\theta_f$  et  $\theta_g$  sont ajustés par les lois d'adaptation (I.46) et (I.47), respectivement.

$$\dot{\theta}_f = \gamma_f \cdot s \cdot \xi(x) \quad (\text{I.46})$$

$$\dot{\theta}_g = \gamma_g \cdot s \cdot u \cdot \xi(x) \quad (\text{I.47})$$

Alors les signaux du système en boucle fermée sont bornés et l'erreur de poursuite converge asymptotiquement vers zéro.

#### I.7.3.2. Démonstration

On définit les vecteurs des paramètres flous optimaux par :

$$\theta_f^* = \text{arg min}_{\theta_f \in \Omega_f} \left( \sup_{x \in U_c} |\hat{f}(x, \theta_f) - f(x)| \right) \quad (\text{I.48})$$

$$\theta_g^* = \text{arg min}_{\theta_g \in \Omega_g} \left( \sup_{x \in U_c} |\hat{g}(x, \theta_g) - g(x)| \right) \quad (\text{I.49})$$

où  $\Omega_f$  et  $\Omega_g$  sont les ensembles de contraintes pour  $\theta_f$  et  $\theta_g$ , respectivement, définis tels que:

$$\Omega_f = \{ \theta_f : |\theta_f| \leq M_f \} \quad (\text{I.50})$$

$$\Omega_g = \{ \theta_g : 0 < \varepsilon \leq |\theta_g| \leq M_g \} \quad (\text{I.51})$$

où  $M_f$ ,  $M_g$  et  $\varepsilon$  sont des constantes positives spécifiées par le concepteur.

On définit aussi, l'erreur d'approximation minimale par :

$$w = f(x) - \hat{f}(x, \theta_f^*) + \left( g(x) - \hat{g}(x, \theta_g^*) \right) u \quad (\text{I.52})$$

On considère la loi de commande (I.45) et en dérivant l'équation de la surface de glissement (I.37) par rapport au temps, on trouve :

$$\begin{aligned}\dot{s} &= y^{(n)} - y_d^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(i)} = f(x) + g(x)u + d(t) - y_d^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(i)} \\ &= f(x) - \hat{f}(x, \theta_f) + g(x)u - \hat{g}(x, \theta_g)u + d(t) - k \operatorname{sgn}(s)\end{aligned}\quad (\text{I.53})$$

Par l'addition et la soustraction du terme d'erreur d'approximation minimale du membre droit de l'équation (I.53), on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \hat{f}(x, \theta_f^*) - \hat{f}(x, \theta_f) + (\hat{g}(x, \theta_g^*) - \hat{g}(x, \theta_g))u + d(t) + w - k \operatorname{sgn}(s) \\ &= -\tilde{\theta}_f^T \xi(x) - \tilde{\theta}_g^T \xi(x)u + d(t) + w - k \operatorname{sgn}(s)\end{aligned}\quad (\text{I.54})$$

où  $\tilde{\theta}_f = \theta_f - \theta_f^*$  et  $\tilde{\theta}_g = \theta_g - \theta_g^*$ .

Maintenant, on considère la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2\gamma_f} \tilde{\theta}_f^T \tilde{\theta}_f + \frac{1}{2\gamma_g} \tilde{\theta}_g^T \tilde{\theta}_g \quad (\text{I.55})$$

En dérivant la fonction de Lyapunov par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= s\dot{s} + \frac{1}{\gamma_f} \tilde{\theta}_f^T \dot{\tilde{\theta}}_f + \frac{1}{\gamma_g} \tilde{\theta}_g^T \dot{\tilde{\theta}}_g \\ &= s \left( -\tilde{\theta}_f^T \xi(x) - \tilde{\theta}_g^T \xi(x)u + d(t) + w - k \operatorname{sgn}(s) \right) + \frac{1}{\gamma_f} \tilde{\theta}_f^T \dot{\tilde{\theta}}_f + \frac{1}{\gamma_g} \tilde{\theta}_g^T \dot{\tilde{\theta}}_g \\ &= \tilde{\theta}_f^T \left( \frac{\dot{\theta}_f}{\gamma_f} - s \cdot \xi(x) \right) + \tilde{\theta}_g^T \left( \frac{\dot{\theta}_g}{\gamma_g} - s \cdot u \cdot \xi(x) \right) - k \cdot s \cdot \operatorname{sgn}(s) + s(d(t) + w) \\ &\leq \tilde{\theta}_f^T \left( \frac{\dot{\theta}_f}{\gamma_f} - s \cdot \xi(x) \right) + \tilde{\theta}_g^T \left( \frac{\dot{\theta}_g}{\gamma_g} - s \cdot u \cdot \xi(x) \right) - (k - D)|s| + sw\end{aligned}\quad (\text{I.56})$$

où  $\dot{\tilde{\theta}}_f = \dot{\theta}_f$  et  $\dot{\tilde{\theta}}_g = \dot{\theta}_g$ .

En substituant les lois (I.46)-(I.47) dans (I.56), on obtient :

$$\dot{V} \leq -\eta|s| + sw \leq 0 \quad (\text{I.57})$$

où le terme  $sw$  est de l'ordre de l'erreur minimale d'approximation. Ce qui permet de déduire que tous les signaux dans la boucle fermée sont bornés, c'est à dire, que  $s, u, \theta_f$  et  $\theta_g \in L_\infty$ .

Pour compléter la démonstration et établir une convergence asymptotique de l'erreur de poursuite, on a besoin de montrer que  $s$  tend vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini.

On suppose que  $|s| \leq \eta_s$ , alors (I.57) peut être réécrite comme suit:

$$\dot{V} \leq -\eta|s| + sw \leq \eta_s|w| - \eta|s| \quad (\text{I.58})$$

En intégrant les deux membres de l'équation (I.58), on a

$$\int_0^\tau |s| d\tau \leq \frac{1}{\eta}(|V(0)| + |V(\tau)|) + \frac{\eta_s}{\eta} \int_0^\tau |w| d\tau \quad (\text{I.59})$$

Si le terme  $|w|$  est intégrable alors  $s \in L_1$ . A partir l'équation (I.57), on peut dire que chaque terme dans (I.53) est borné, et donc  $s, \dot{s} \in L_\infty$ . En utilisant le lemme de Barbalat [Kha-96], on aura  $s(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  et par conséquent, le système est stable et l'erreur de poursuite converge asymptotiquement vers zéro.

### I.7.3.3. Remarque 1.5

Pour s'assurer que  $\theta_f$  et  $\theta_g$  restent à l'intérieur de ses ensembles  $\Omega_f$  (I.50) et  $\Omega_g$  (I.51), respectivement, on utilise l'algorithme de projection de paramètres [Goo-87] et par suite les lois d'adaptation deviennent comme suit :

➤ La loi d'adaptation du vecteur  $\theta_f$  est donnée par :

$$\dot{\theta}_f = \begin{cases} \gamma_f \cdot s \cdot \xi(x) & \text{si } (|\theta_f| < M_f) \text{ ou } (|\theta_f| = M_f \text{ et } s \cdot \theta_f^T \cdot \xi(x) \leq 0) \\ P_f\{\gamma_f \cdot s \cdot \xi(x)\} & \text{si } (|\theta_f| = M_f) \text{ et } (s \cdot \theta_f^T \cdot \xi(x) > 0) \end{cases} \quad (\text{I.60})$$

➤ La loi d'adaptation du vecteur  $\theta_g$  est donnée par :

si un élément  $\theta_{g_i}$  de  $\theta_g$  est égal à  $\varepsilon$ , on utilise

$$\dot{\theta}_{g_i} = \begin{cases} \gamma_g \cdot s \cdot u \cdot \xi_i(x) & \text{si } s \cdot u \cdot \xi_i(x) < 0 \\ 0 & \text{si } s \cdot u \cdot \xi_i(x) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I.61})$$

où  $\xi_i(x)$  est le  $i^{\text{ème}}$  composant de  $\xi(x)$ .

Autrement,

$$\dot{\theta}_g = \begin{cases} \gamma_g \cdot s \cdot u \cdot \xi(x) & \text{si } (|\theta_g| < M_g) \text{ ou } (|\theta_g| = M_g \text{ et } s \cdot \theta_g^T \cdot u \cdot \xi(x) \leq 0) \\ P_g\{\gamma_g \cdot s \cdot u \cdot \xi(x)\} & \text{si } (|\theta_g| = M_g) \text{ et } (s \cdot \theta_g^T \cdot u \cdot \xi(x) > 0) \end{cases} \quad (\text{I.62})$$

où  $P_f\{*\}$  et  $P_g\{*\}$  sont les opérateurs de projection définis comme suit :

$$P_f\{\gamma_f \cdot s \cdot \xi(x)\} = \gamma_f \cdot s \cdot \xi(x) - \gamma_f \cdot s \cdot \frac{\theta_f \theta_f^T \xi(x)}{|\theta_f|^2} \quad (I.63)$$

$$P_g\{\gamma_g \cdot s \cdot u \cdot \xi(x)\} = \gamma_g \cdot s \cdot u \cdot \xi(x) - \gamma_g \cdot s \cdot u \cdot \frac{\theta_g \theta_g^T \xi(x)}{|\theta_g|^2} \quad (I.64)$$

**I.7.3.4. Remarque 1.6**

Pour éviter (ou éliminer) le phénomène de réticence provoqué par le terme signe dans le terme de commande  $u_s$  (I.45), la fonction signe (I.30) est remplacée par la fonction tangente hyperbolique « *tanh* ». Donc, le terme de commande  $u_s$  devient comme suit :

$$u_s = \frac{k}{\hat{g}(x, \theta_g)} \tanh(s/\varepsilon) \quad (I.65)$$

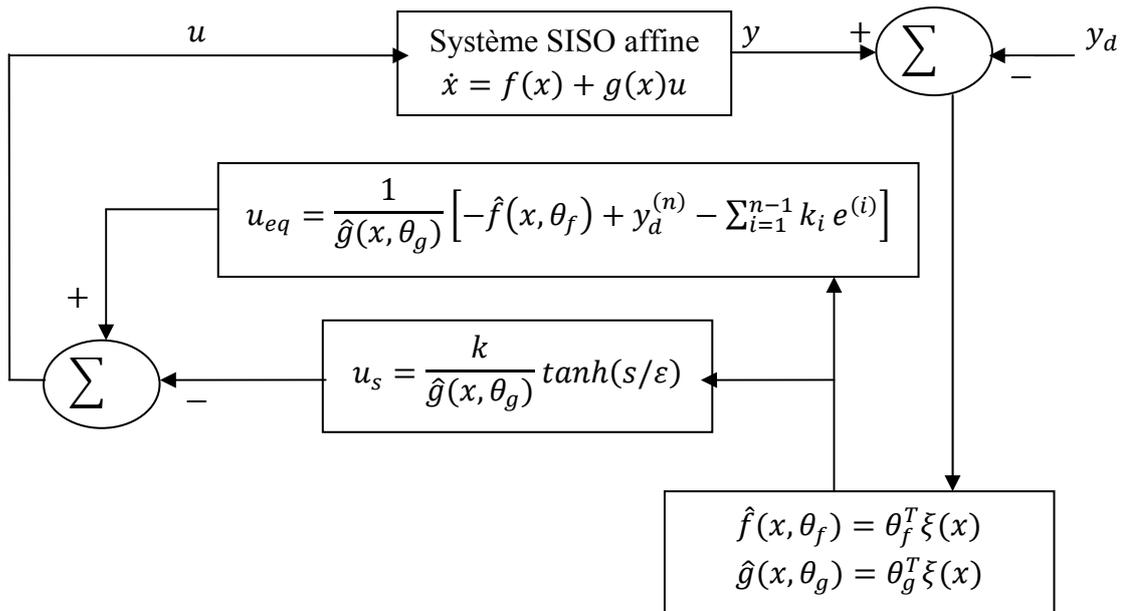


Figure I.9. Structure de la commande proposée.

**I.7.3.5. Remarque 1.7**

L'équation (I.61) permet d'éviter le problème de la division par zéro, c'est à dire,  $\hat{g}(x, \theta_g)$  est non nulle. Une autre technique pour résoudre ce problème proposée dans [ESS.06]

consiste à remplacer le terme  $[\hat{g}(x, \theta_g)]^{-1}$  par  $\frac{[\hat{g}(x, \theta_g)]}{\varepsilon + [\hat{g}(x, \theta_g)]^2}$ , ce qui donne la nouvelle

loi de commande suivante :

$$\begin{aligned}
u &= u_{eq} - u_s \\
u_{eq} &= \frac{[\hat{g}(x, \theta_g)]}{\varepsilon + [\hat{g}(x, \theta_g)]^2} \left[ -\hat{f}(x, \theta_f) + y_d^{(n)} - \sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(i)} \right] \\
u_s &= \frac{k \cdot [\hat{g}(x, \theta_g)]}{\varepsilon + [\hat{g}(x, \theta_g)]^2} \tanh(s/\varepsilon)
\end{aligned} \tag{I.66}$$

où  $\varepsilon$  est une petite constante positive.

### I.7.4. Application

Il s'agit d'appliquer le contrôleur adaptatif flou par mode glissant développé à un pendule inversé représenté sur la figure I.10 suivante :

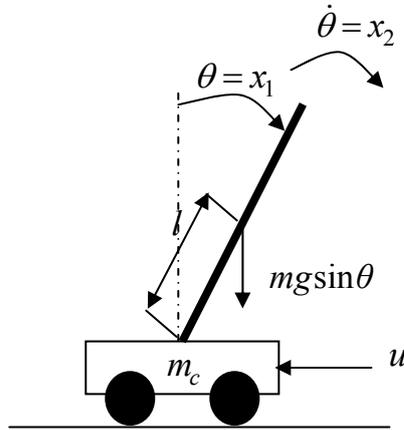


Figure I.10. Le pendule inversé.

La dynamique de ce pendule est décrite par les équations différentielles suivantes [Sol-91] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g \cdot \sin(x_1) - \frac{mlx_2^2 \cos(x_1) \sin(x_1)}{m_c + m}}{l \left( \frac{4}{3} - \frac{m \cdot \cos^2(x_1)}{m_c + m} \right)} + \frac{\frac{\cos(x_1)}{m_c + m}}{l \left( \frac{4}{3} - \frac{m \cdot \cos^2(x_1)}{m_c + m} \right)} u \end{cases} \tag{I.67}$$

où  $x_1 = \theta$  est l'angle de rotation,  $x_2 = \dot{\theta}$  la vitesse angulaire,  $g = 9.8m/s^2$  l'accélération due à la gravité,  $m_c$  la masse du chariot,  $m$  la masse de la poutre,  $2l$  la longueur de la poutre et  $u$  la force (commande) appliquée.

L'objectif du contrôleur est de forcer l'angle du pendule " $\theta$ " à suivre la trajectoire désirée définie par :  $y_d(t) = \theta_d = \frac{\pi}{30} \sin(t)$ .

On définit la surface de glissement par  $s(t) = \dot{e} + 10e$ .

Les fonctions d'appartenance utilisées dans les systèmes flous (I.41) et (I.42) sont définies sur l'univers  $[-\pi/6, \pi/6]$  comme suit:

$$\begin{aligned} \mu_{A_i^1}(x_i) &= \exp\left[-\left(\frac{x_i + \pi/6}{\pi/24}\right)^2\right], & \mu_{A_i^2}(x_i) &= \exp\left[-\left(\frac{x_i + \pi/12}{\pi/24}\right)^2\right], \\ \mu_{A_i^3}(x_i) &= \exp\left[-\left(\frac{x_i}{\pi/24}\right)^2\right], & \mu_{A_i^4}(x_i) &= \exp\left[-\left(\frac{x_i - \pi/12}{\pi/24}\right)^2\right], \\ \mu_{A_i^5}(x_i) &= \exp\left[-\left(\frac{x_i - \pi/6}{\pi/24}\right)^2\right], & i &= 1,2. \end{aligned}$$

Par conséquent, 25 règles sont obtenues pour approximer chacune des fonctions inconnues  $f$  et  $g$  décrivant la dynamique du pendule.

Les paramètres du pendule sont :  $m_c = 1kg$ ,  $m = 0.1kg$ ,  $l = 0.5m$ , et  $d(t) = 1.5\sin(2\pi t)$ .

Les paramètres de conception du contrôleur proposé sont sélectionnés comme suit :  $\gamma_f = 50$ ,  $\gamma_g = 1$ ,  $M_f = 20$ ,  $M_g = 20$  et  $k = 2.5$ .

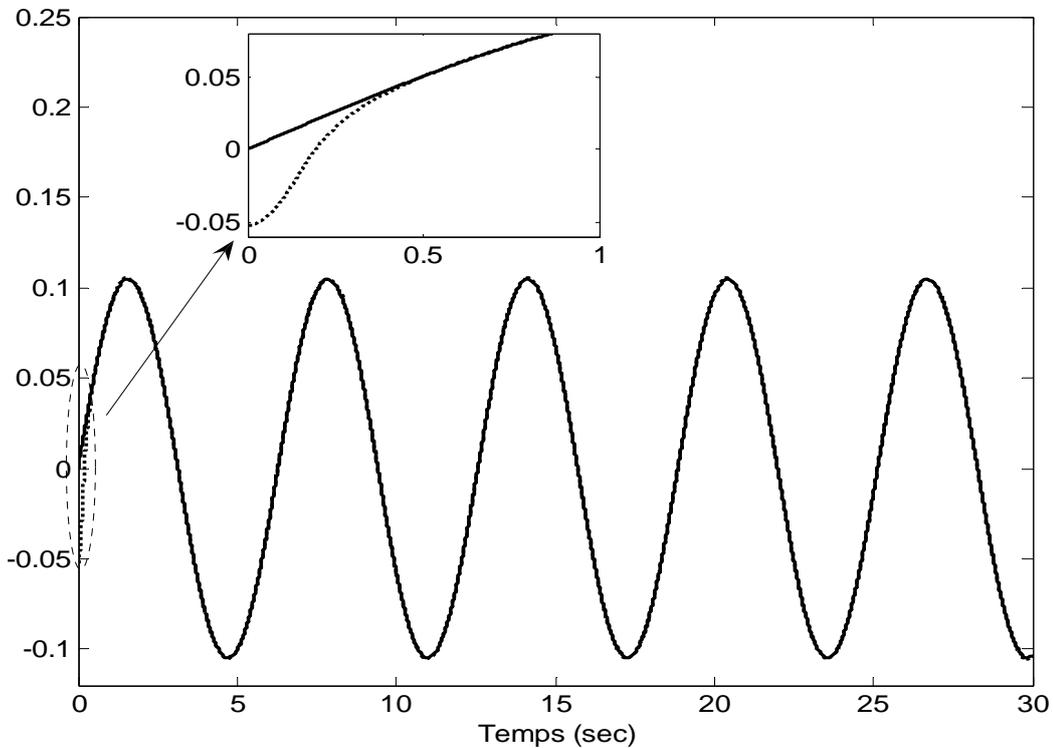


Figure I.11. Evolution de l'angle du pendule  $x_1 = \theta$  (en pointillés) et sa référence  $y_d = \theta_d$  (en traits continus).

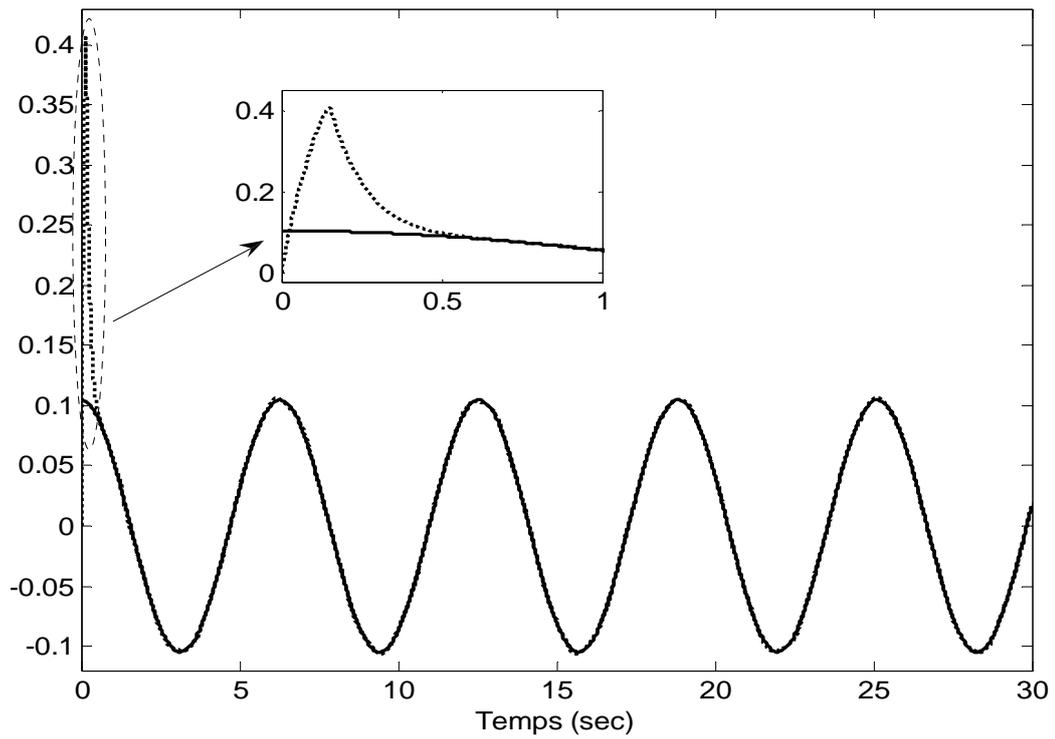


Figure I.12. Evolution de la vitesse du pendule  $x_2 = \dot{\theta}$  (en pointillés) et sa référence  $\dot{y}_d = \dot{\theta}_d$  (en traits continus).

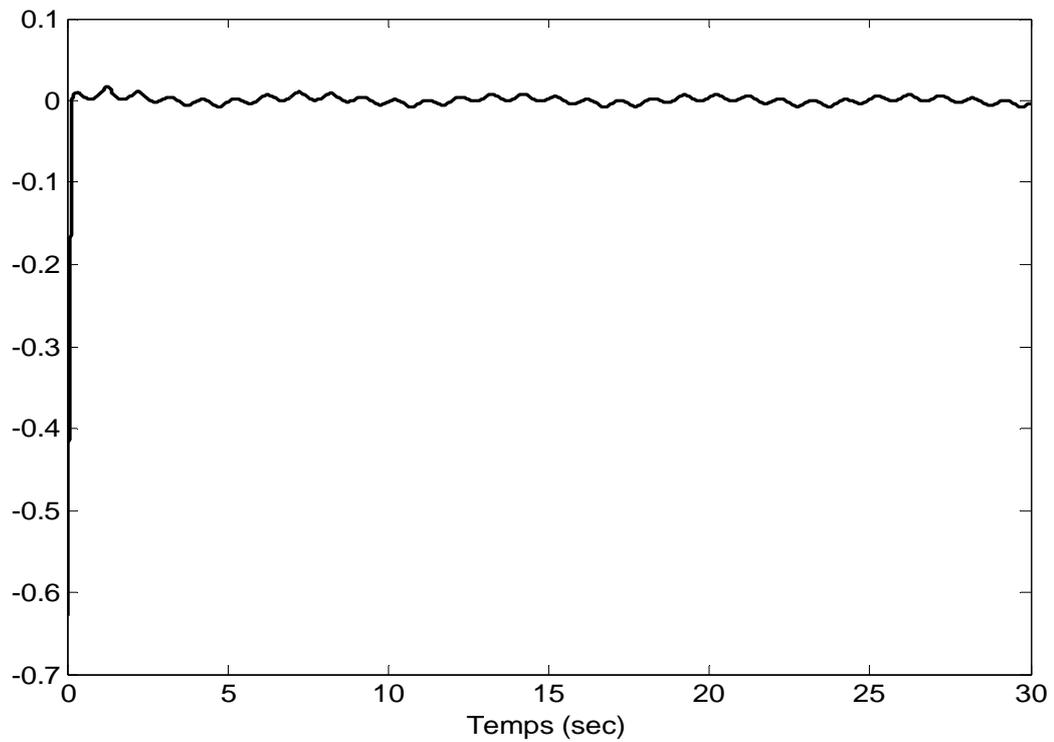


Figure I.13. Evolution de la surface de glissement.

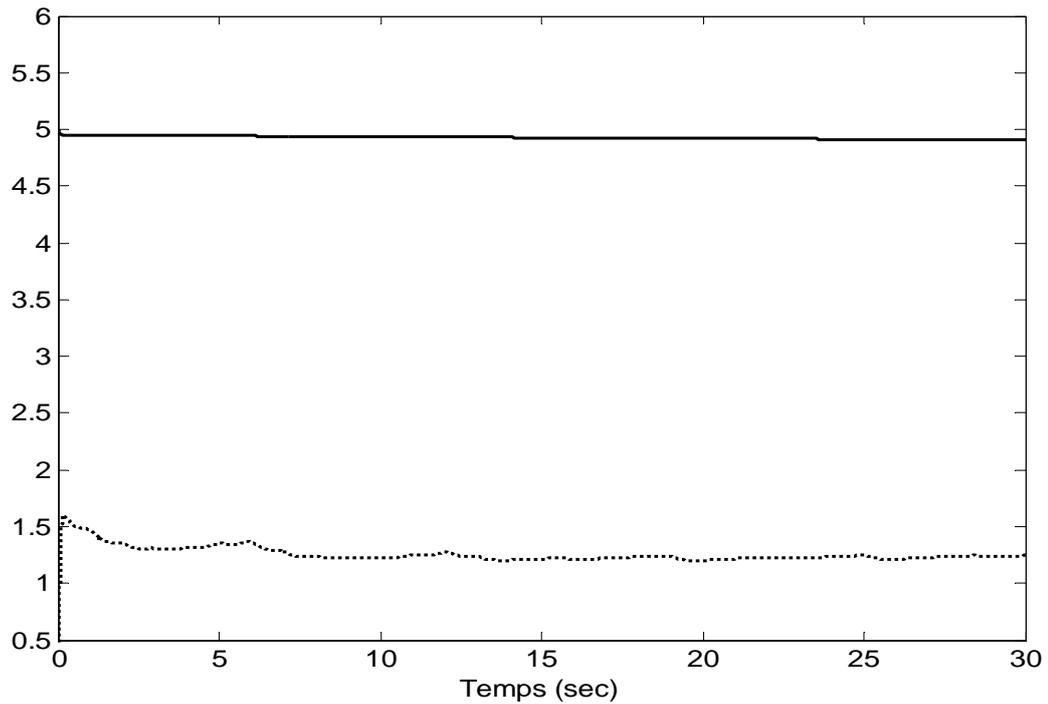


Figure I.14. Evolution de la norme des vecteurs de paramètres,  $|\theta_f|$  (en pointillés) et  $|\theta_g|$  (en traits continus).

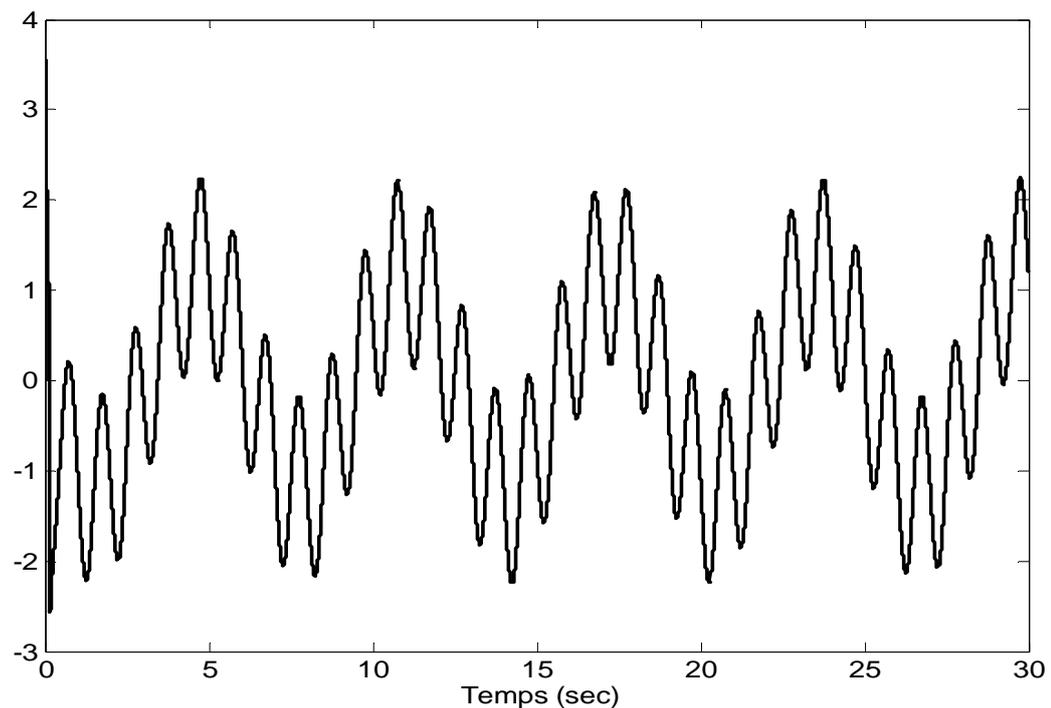


Figure I.15. Signal de commande.

Les figures I.11-I.15 représentent les résultats de simulation pour une condition initiale du système  $x_0 = [-\pi/60, 0]$  et des valeurs initiales des paramètres  $\theta_f = 1$  et  $\theta_g = 0$ .

Les figures I.11-I.12 montrent une convergence rapide de l'angle et de la vitesse du pendule vers leurs références respectives. La figure I.13 confirme cette interprétation dans le

sens que les trajectoires des erreurs de poursuite tendent rapidement vers la surface de glissement  $s(x, t) = 0$  pour s'y maintenir. La figure I.14 met en évidence la bornitude des normes des vecteurs de paramètres  $\theta_f$  et  $\theta_g$ . Le signal de commande est de forme lisse et continu comme le montre la figure I.15.

## I.8. Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation et au développement de la commande adaptative floue par mode glissant. Le principe de la commande floue qui est basé sur l'utilisation d'un système flou est explicité. La structure de base d'un contrôleur flou constituée essentiellement d'un fuzzificateur, d'un mécanisme d'inférence et d'un défuzzificateur ainsi que les différentes méthodes utilisées dans chaque partie sont détaillées.

Les contrôleurs flous se distinguent selon la conclusion de leurs règles : symbolique (contrôleurs de type Mamdani) ou algébrique (contrôleurs de type Takagi-Sugeno). Dans cette thèse, on limite la présentation des systèmes flous qui seront directement exploités dans les approches de commande développées, à savoir les systèmes flous de type T-S à conclusion constante. Ce choix est dicté essentiellement par la facilité d'implémentation de ces systèmes et leurs avantages précités.

Afin d'améliorer les performances du contrôleur flou avec des paramètres variant dans le temps et en présence des erreurs d'approximation et des perturbations externes, la commande par mode glissant a été présentée. Cette commande est combinée avec la commande adaptative floue pour synthétiser une loi de commande adaptative floue par mode glissant indirecte pour une classe de systèmes non linéaires SISO affine en la commande. Dans la conception du contrôleur proposé, deux systèmes flous de type T-S sont utilisés pour approximer la dynamique du système dans un premier temps. Ensuite, la dynamique approximée est exploitée pour développer le contrôleur adaptatif flou par mode glissant. L'étude de stabilité du système, au sens de Lyapunov, a permis de déduire les lois d'adaptation des paramètres ajustables. L'efficacité du contrôleur développé est montrée à travers la commande d'un pendule inversé sous l'environnement Matlab.

Cependant, la validité du contrôleur mis au point est limitée aux systèmes non linéaires affines en la commande. Dans le chapitre suivant, on se propose de développer une structure de commande capable de prendre en charge une certaine classe de systèmes non linéaires SISO non affines en la commande en utilisant l'approche adaptative floue par mode glissant.

# **Chapitre II**

**Commande adaptative floue  
par mode glissant pour des  
systèmes non linéaires SISO  
non affines**

# Commande adaptative floue par mode glissant pour des systèmes non linéaires SISO non affines

## II.1. Introduction

L'utilisation de l'approche floue dans le développement de lois de commande pour les systèmes non linéaires complexes a reçu un intérêt particulier ces dernières années. Dans ce sens, de nombreux résultats intéressants ont été obtenus [Cha-01], [Che-96], [Che-08], [Ho-09], [Kha-06], [Lab-03], [Cha-00], [Gol-03], [Lab-07a], [Li-03],...etc. Cet engouement est dû essentiellement au fait que les contrôleurs flous peuvent incorporer les connaissances fournies par des experts humains d'une part, et à leurs propriété d'approximation d'autre part [Wan-94]. Cependant, tous ces travaux ne concernent que certaines classes de systèmes non linéaires SISO affines en la commande.

Dans le but de prendre en charge les systèmes non linéaires SISO non affines en la commande, plusieurs travaux utilisant différentes approches sont proposées dans cette dernière décennie. En particulier des travaux utilisant l'approche floue avec la commande adaptative directe et indirecte ont été réalisés. Pour le cas de la commande adaptative floue indirecte, on trouve [Bou, 03], [Dou-10b] [Ess-06], [Par-03a], [Wan-00] et [Yoo-01], et pour le cas direct, on cite [Dou-08], [Dou-10a], [Ess-06] [Par-03b], [Par-04], [Par-05], [Lab-07] et [Wen-08]. Dans [Bou-03], [Dou-10b], [Ess-06] et [Yoo-01], les auteurs se basent sur une formulation spécifique d'un système flou de type T-S à conclusion constante, où l'entrée de commande est introduite dans la partie prémisse du système flou et elle prend des fonctions d'appartenance de forme triangulaire, pour transformer le processus non affine en un modèle affine, puis synthétiser la loi de commande par l'inversion du modèle affine obtenu. Dans [Par-03a] et [Wan-00], les auteurs utilisent le développement en série de Taylor autour d'une trajectoire de fonctionnement pour transformer le système non affine en

un système affine, puis utilisent deux systèmes adaptatifs flous pour approximer la dynamique du système affine. La loi de commande est déduite par l'inversion du système affine approximé. Dans [Dou-08], [Dou-10a], [Ess-06] et [Lab-07], le théorème de la fonction implicite est utilisé pour démontrer l'existence d'un contrôleur idéal inconnu qui est capable d'accomplir l'objectif de commande. Cependant ce théorème ne fournit pas de méthode pour la conception de ce contrôleur implicite, même lorsque la dynamique du système est bien connue. Dans ce cas les systèmes flous sont utilisés pour approximer ce contrôleur implicite idéal inconnu. Dans [Par-03b], [Par-04], [Par-05] et [Wen-08], sous certaines hypothèses, la dynamique du système est décomposée en deux parties : une partie connue qui ne dépend que de l'entrée de commande et une partie inconnue. La loi de commande proposée est composée de trois termes : un premier terme sert à stabiliser la dynamique linéaire du système en boucle fermée, un second terme adaptatif flou sert à approximer un contrôleur idéal implicite qui est utilisé pour éliminer la fonction non linéaire inconnue, et un dernier terme permet d'atténuer l'effet des erreurs d'approximation et des perturbations externes.

Les lois d'adaptation utilisées dans les travaux présentés précédemment sont basées sur l'approche de Lyapunov. Elles utilisent le signal d'erreur entre la sortie désirée et la sortie réelle du système afin d'ajuster en ligne les paramètres réglables. Dans [Lab-07] les lois d'adaptation des paramètres sont obtenues par la méthode de descente du gradient qui minimise l'erreur entre le contrôleur idéal implicite inconnu et le contrôleur flou.

La robustesse des systèmes vis à vis des erreurs d'approximation et des perturbations externes est assurée par un terme de commande supplémentaire type  $H_\infty$  ou type mode glissant. Elle peut être assurée également par un terme de robustification contenu dans la loi d'adaptation des paramètres ajustables [Dou-08], [Lab-07].

L'analyse de stabilité des systèmes en boucle fermée est étudiée en utilisant la synthèse de Lyapunov. La mise en œuvre de ces approches floues développées, sous l'environnement Matlab, à travers des exemples de simulation permet d'obtenir de bonnes performances de poursuite avec des signaux de commande bornés de forme lisses.

L'objectif de ce chapitre est de développer une commande adaptative floue par mode glissant pour une classe de systèmes non linéaires SISO non affines en la commande. Pour valider la structure de commande développée et mettre en évidence son efficacité, des exemples de simulation, sous l'environnement Matlab, sont considérés.

## II.1.1. Notations et préliminaires

### II.1.1.1. Normes [Ioa-96]

- La norme  $L_\infty$  d'un vecteur de signaux continus  $x(t) \in R^n$  est définie comme suit :

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\| = \sup_{t \geq 0} (\max_{1 \leq i \leq n} |x_i(t)|) \quad (\text{II.1})$$

On dit que  $x(t) \in L_\infty$  si  $\|x\|_\infty$  existe, c'est à dire,  $\|x\|_\infty < \infty$ .

- La norme  $H_\infty$  d'un système linéaire stable correspond à la valeur maximale du gain de la fonction de transfert. Cette norme peut être utilisée pour résoudre des problèmes de performance et de robustesse. Le problème consiste à déterminer une commande qui permet d'assurer la stabilité d'un système tout en réduisant l'effet des perturbations (diminuer la norme  $H_\infty$  du système).

- La norme  $L_2$  d'un vecteur de signaux continus  $x(t) \in R^n$  est définie comme suit :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty (x_1^2(t) + \dots + x_n^2(t)) dt} \quad (\text{II.2})$$

On dit que  $x(t) \in L_2$  si  $\|x\|_2$  existe, c'est-à-dire que  $\|x\|_2 < \infty$ .

- La norme  $H_2$  d'un système linéaire stable correspond à l'énergie de la réponse impulsionnelle. Elle peut également être caractérisée par la variance de la sortie, l'entrée étant un bruit blanc gaussien unitaire. Cette norme peut être utilisée pour résoudre les problèmes d'énergie, par exemple limiter l'effort du signal de commande.

### II.1.1.2. Théorème de la fonction implicite [Par-04]

Soit  $h$  une fonction continue et dérivable en chaque point  $(a, b)$  de l'ensemble ouvert  $S \subset R \times R$ . Soit  $(a_0, b_0)$  un point dans  $S$ , pour le quel  $h(a_0, b_0) = 0$  et telle que la matrice Jacobienne  $[\partial h / \partial a](a_0, b_0)$  est non singulière. Alors, il existe sur un voisinage  $U \times V \subset R \times R$  du point  $(a_0, b_0)$ , solution unique de l'équation  $h(a, b) = 0$  pour chaque point  $b \in V$ ,  $a \in U$ . De plus, la solution peut être donnée comme suit  $a = g(b)$  où  $g$  est continue et dérivable en  $b = b_0$ .

### II.1.1.3. Théorème de la valeur moyenne [Kha-96]

Soit  $f$  une fonction continue et intégrable sur  $[a, b]$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c) \quad (\text{II.3})$$

où  $a, b, c \in R$ .

## II.2. Formulation du problème

Soit le système non linéaire SISO non affine en la commande suivant :

$$y^{(n)} = f(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}, u) + d(t) \quad (\text{II.4})$$

où  $y \in R$  est la sortie mesurée,  $u \in R$  est la commande,  $y^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  la  $i^{\text{ème}}$  dérivée de la sortie  $y(t)$ ,  $d$  est une perturbation bornée qui agit sur le système ( $|d(t)| \leq \bar{d}$ ) et  $f(\cdot): R^{n+1} \rightarrow R$  une fonction non linéaire inconnue.

Si le vecteur d'état  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}]^T \in R^n$ , qui est supposé mesurable, alors le système (II.4) peut être exprimé comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(\mathbf{x}, u) + d \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

### II.2.1. Objectifs de commande

Il s'agit de concevoir un contrôleur adaptatif flou par mode glissant robuste pour le système non linéaire SISO non affine en la commande (II.4) afin de forcer sa sortie  $y$  à suivre une trajectoire de référence bornée  $y_d$  tout en garantissant la bornitude de toutes les variables impliquées dans système en boucle fermée.

Les suppositions suivantes sont nécessaires pour la commandabilité du système :

#### Supposition 2.1

La fonction  $f(\mathbf{x}, u)$  doit satisfaire l'inégalité suivante

$$0 < \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right) < c \quad (\text{II.6})$$

où  $c$  est une constante positive de conception, pour tout  $(\mathbf{x}, u) \in \Omega_{\mathbf{x}} \times \mathbf{R}$  où  $\Omega_{\mathbf{x}}$  est la région de commandabilité.

### Supposition 2.2

Le signal de référence  $y_d(t)$  et ses dérivés par rapport au temps  $y_d^{(1)}(t), \dots, y_d^{(n)}(t)$  sont supposés bornés.

Ainsi, forcer le système à suivre une trajectoire de référence revient à le contraindre pour atteindre une surface de glissement et de le maintenir sur elle. Pour aboutir aux performances souhaitées de la commande, on considère la surface de glissement  $s(t)$  donnée par [Slo-91]:

$$s(t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e(t) = e^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(i-1)} \quad (\text{II.7})$$

où  $\lambda > 0$ ,  $k_i = \frac{(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!} \lambda^{n-i}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  et  $e = y_d - y$  est l'erreur de poursuite.

A partir de l'équation (II.7),  $s(t) = 0$  représente une équation différentielle linéaire dont la solution implique que l'erreur de poursuite converge vers zéro avec une constante de temps  $(n-1)/\lambda$ . De plus, les dérivées par rapport aux temps de  $e(t)$  jusqu'à l'ordre de  $(n-1)$  convergent aussi vers zéro [Slo-91]. Dans ce cas, l'objectif de la commande revient à concevoir un contrôleur qui maintient la surface de glissement autour zéro.

La dérivée par rapport au temps de la surface de glissement (II.7) peut être exprimée comme suit :

$$\dot{s} = y_d^{(n)} - f(\mathbf{x}, u) - d(t) + \sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(i)} \quad (\text{II.8})$$

## II.3. Conception du contrôleur

### II.3.1. Linéarisation

La linéarisation est réalisée en réécrivant le système (II.4) comme suit [Par-04] :

$$y^{(n)} = cu + \{f(\mathbf{x}, u) - cu\} + d(t) \quad (\text{II.9})$$

Soit  $\Delta(\mathbf{x}, u) \triangleq f(\mathbf{x}, u) - cu$ , et l'entrée de commande  $u(t)$  calculée de la manière suivante :

$$u = \frac{1}{c}(u_{dc} - u_{ad} + u_{ro}) \quad (\text{II.10})$$

où  $u_{dc}$  est le terme de commande qui stabilise la dynamique linéarisée,  $u_{ad}$  un terme de

commande adaptatif désigné pour éliminer une fonction inconnue et  $u_{ro}$  un terme de commande supplémentaire pour assurer la robustesse de la commande vis à vis des erreurs d'approximation et des perturbations externes.

En substituant (II.10) dans (II.9), on obtient

$$y^{(n)} = u_{dc} + \{\Delta(x, u) - u_{ad}\} + u_{ro} + d(t) \quad (\text{II.11})$$

L'équation (II.8) peut être réécrite comme suit :

$$\dot{s} = y_d^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(i)} - u_{dc} + \{u_{ad} - \Delta(x, u)\} - u_{ro} - d(t) \quad (\text{II.12})$$

Un choix du terme de commande  $u_{dc}$  comme suit :

$$u_{dc} = y_d^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(i)} \quad (\text{II.13})$$

permet d'exprimer  $\dot{s}$  dans (II.12) par:

$$\dot{s} = \{u_{ad} - \Delta(x, u)\} - u_{ro} - d(t) \quad (\text{II.14})$$

L'addition et la soustraction du terme  $Ks$  ( $K$  est une constante positive) dans le membre droit de (II.14), donne

$$\dot{s} = \{u_{ad} - \Delta(x, u) + Ks\} - Ks - \{u_{ro} + d(t)\} \quad (\text{II.15})$$

On considère la fonction de Lyapunov suivante

$$V = \frac{1}{2} s^2 \quad (\text{II.16})$$

En dérivant l'expression (II.16) par rapport au temps, on obtient

$$\dot{V} = \dot{s} \cdot s = (\{u_{ad} - \Delta(x, u) + Ks\} - Ks - \{u_{ro} + d(t)\})s \quad (\text{II.17})$$

Ainsi, si la fonction  $\Delta(x, u) - Ks$  est parfaitement éliminée par  $u_{ad}$ , c'est à dire,  $\Delta(x, u) - Ks = u_{ad}$ , et en plus le terme  $u_{ro}$  compense l'erreur de modélisation et les perturbations, puis la dynamique linéarisée est stable, c'est à dire,

$$\dot{V} = -Ks^2 \leq 0 \quad (\text{II.18})$$

Ce qui permet de déduire que  $s$  et  $\dot{s} \in L_\infty$ .

L'intégration de l'équation (II.18), donne

$$K \int_0^\infty s^2(t) dt \leq V(0) - V(\infty) \quad (\text{II.19})$$

L'équation (II.19) garantit que  $s \in L_2$  car son membre droit est borné. L'utilisation du lemme de Barbalat [Kha-96] permet d'obtenir  $s \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , et par conséquent, l'erreur de poursuite converge vers l'origine, c'est à dire,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e| = 0$ .

### II.3.2. Approximation de la fonction $\{\Delta(x, u) - Ks\}$ .

Dans le but d'approximer la fonction  $\{\Delta(x, u) - Ks\}$ , un système flou dont les entrées sont  $x$ ,  $u$  et  $s$ , et la sortie est  $u_{ad}$  est employé. Toutefois, le système flou proposé est un système flou récurrent car sa sortie,  $u_{ad}$ , est directement réinjectée en retour dans le système flou pour former l'entrée de commande  $u$  comme le montre la figure II.1. Par conséquent, l'utilisation du système flou récurrent nécessite la résolution d'un problème de point fixe à chaque instant, ce qui impose un temps de calcul important. Afin d'éviter ce problème, on exploite le théorème de la fonction implicite pour garantir que le terme de commande  $u_{ad}^*$ , qui est fonction de  $x$ ,  $s$  et  $u_\alpha$  ( $u_\alpha = u_{dc} + u_{ro}$ ), doit satisfaire l'égalité suivante :

$$h(x, u_\alpha, u_{ad}^*, s) = \Delta(x, (u_\alpha - u_{ad}^*)/c) - Ks - u_{ad}^* = 0 \quad (\text{II.20})$$

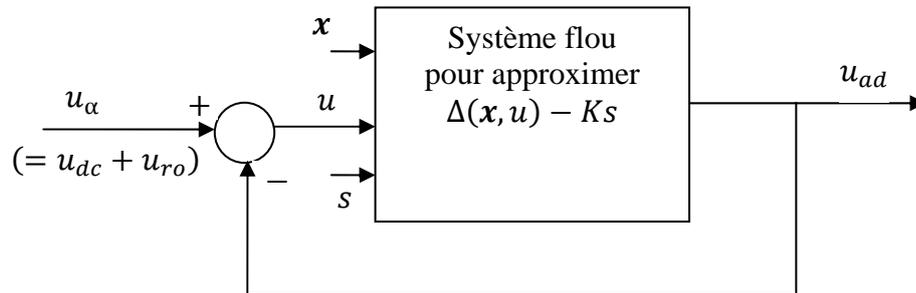


Figure II.1. Système flou récurrent.

#### II.3.2.1. Lemme 2.1

Il existe un ensemble  $\Omega_x \subset \mathbf{R}^n$  et un terme de commande unique  $u_{ad}^*(x, u_\alpha, s)$  satisfaisant l'égalité (II.20) pour tout triplet  $(x, u_\alpha, s) \in \Omega_x \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .

#### II.3.2.2. Démonstration

Tout d'abord, on montre que la solution  $u_{ad}^*$  de l'équation (II.12) existe. La condition suffisante d'existence est que l'inégalité suivante soit vérifiée [Par-04],[Hov-02]:

$$\left| \frac{\partial(\Delta - Ks)}{\partial u_{ad}^*} \right| < 1 \quad (\text{II.21})$$

qui peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial(\Delta - Ks)}{\partial u_{ad}^*} \right| &= \left| \frac{\partial(f(\mathbf{x}, u^*) - cu^* - Ks)}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial u_{ad}^*} \right| \\
 &= \left| \left( \frac{\partial f(\mathbf{x}, u^*)}{\partial u^*} - c \right) \left( -\frac{1}{c} \right) \right| = \left| 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial f(\mathbf{x}, u^*)}{\partial u^*} \right| < 1, \quad (\text{II.22})
 \end{aligned}$$

où  $u^* = (u_\alpha - u_{ad}^*)/c$

Par la suite, on montre que la fonction  $h(\cdot)$  est non singulière autour  $u_{ad}^*$ . En dérivant le membre gauche de (II.20) par rapport au  $u_{ad}^*$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial u_{ad}^*} h(\mathbf{x}, u_\alpha, u_{ad}^*) &= \frac{\partial}{\partial u_{ad}^*} \{\Delta(\mathbf{x}, u^*) - Ks - u_{ad}^*\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial u^*} \{f(\mathbf{x}, u^*) - cu^*\} \frac{\partial u^*}{\partial u_{ad}^*} - 1 \\
 &= \left\{ \frac{\partial f(\mathbf{x}, u^*)}{\partial u^*} - c \right\} \left( -\frac{1}{c} \right) - 1 \\
 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial f(\mathbf{x}, u^*)}{\partial u^*}
 \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

qui est différent de zéro par la supposition 1. Ainsi, selon le théorème de la fonction implicite, il existe un terme de commande unique  $u_{ad}^*(\mathbf{x}, u_\alpha, s)$  satisfaisant (II.20) pour tout  $(\mathbf{x}, u_\alpha, s) \in \Omega_x \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .

### II.3.2.3. Remarque 2.1

A partir du Lemme précédent, il est possible d'employer un système flou statique plutôt qu'un système flou récurrent pour approximer  $u_{ad}^*$  ce qui permet au contrôleur d'éviter la résolution du problème du point fixe à chaque instant. Dans ce travail,  $u_{ad}^*(\mathbf{x}, u_\alpha, s)$  est approximé par un système flou dont on a prouvé qu'il est un approximateur universel [Wan-94].

### II.3.2.4. Description du système flou utilisé

Le système flou d'une manière générale comprend trois composantes principales: la fuzzification, le mécanisme de l'inférence avec la base de règles floues et la defuzzification. Dans ce travail, la base des règles floues est caractérisée par un ensemble de règles Si-Alors de la forme suivante :

$$R_{i_1, i_2, \dots, i_m}: \text{Si } z_1 \text{ est } A_{i_1}^1 \text{ et } \dots \text{ et } z_m \text{ est } A_{i_m}^m \text{ Alors } u_{ad} \text{ est } C_{i_1, i_2, \dots, i_m} \quad (\text{II.24})$$

où  $i_1 = 1, 2, \dots, N_1$ ,  $i_m = 1, 2, \dots, N_m$ .  $z_j, j = 1, 2, \dots, m$  sont les variables d'entrée du système flou,

$u_{ad}$  est la variable de sortie du système flou, et les sembles flous  $A_{i_j}^j \in U_j$  et  $C_{i_1, i_2, \dots, i_m} \in V$  sont des termes linguistiques caractérisés par les fonctions d'appartenance floues  $A_{i_j}^j(z_j)$  et  $C_{i_1, i_2, \dots, i_m}(u_{ad})$ , respectivement.

En utilisant la fuzzification par singleton, le produit d'inférence, et la défuzzification par centre de gravité, la sortie du système flou peut être exprimée comme suit:

$$u_{ad}(\mathbf{z}) = \frac{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_m \in I} A_{i_1, i_2, \dots, i_m}(\mathbf{z})}{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_m \in I} A_{i_1, i_2, \dots, i_m}(\mathbf{z})} \theta_{i_1, i_2, \dots, i_m}, \quad (\text{II.25})$$

où  $A_{i_1, i_2, \dots, i_m}(\mathbf{z}) = \prod_{j=1}^m A_{i_j}^j(z_j)$  et  $\theta_{i_1, i_2, \dots, i_m}$  est le point de  $V$  où  $C_{i_1, i_2, \dots, i_m}$  atteint sa valeur maximale. Sans perte de généralité, nous supposons que  $C_{i_1, i_2, \dots, i_m}(\theta_{i_1, i_2, \dots, i_m}) = 1$ .

On définit les fonctions floues de base comme suit [Wan-94] :

$$\xi_{i_1, i_2, \dots, i_m}(\mathbf{z}) = \frac{A_{i_1, i_2, \dots, i_m}(\mathbf{z})}{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_m \in I} A_{i_1, i_2, \dots, i_m}(\mathbf{z})} \quad (\text{II.26})$$

et le vecteur des fonctions floues de base  $\xi(\mathbf{z}) = [\xi_{1,1, \dots, 1}(\mathbf{z}), \dots, \xi_{N_1, N_2, \dots, N_m}(\mathbf{z})]^T$ , le terme de commande  $u_{ad}(\mathbf{z})$  peut être réécrit dans la forme compacte suivante :

$$u_{ad}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}^T \xi(\mathbf{z}) \quad (\text{II.27})$$

où  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_{1,1, \dots, 1}, \dots, \theta_{N_1, N_2, \dots, N_m}]^T$  est le vecteur qui groupe tous les paramètres ajustables.

Le terme de commande  $u_{ad}^*(\mathbf{z})$  dans (II.20) peut être réécrit comme suit :

$$u_{ad}^*(\mathbf{z}) = u_{ad}^*(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}^*) + \delta(\mathbf{z}) = \boldsymbol{\theta}^{*T} \xi(\mathbf{z}) + \delta(\mathbf{z}) \quad (\text{II.28})$$

où  $\delta(\mathbf{z})$  est l'erreur d'approximation et  $\boldsymbol{\theta}^*$  est le vecteur des paramètres optimaux satisfaisant

$$\boldsymbol{\theta}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} [\sup_{\mathbf{z} \in (\Omega_{\mathbf{z}} \times \mathbf{R})} |u_{ad}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}) - u_{ad}^*(\mathbf{z})|] \quad (\text{II.29})$$

Selon le théorème d'approximation universelle [Wan-94], il existe une constante positive  $c_0 > 0$  telle que l'inégalité suivante est vérifiée pour tout  $(\mathbf{x}, u_{\alpha}, s) \in \Omega_{\mathbf{x}} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  :

$$|\delta(\mathbf{z})| \leq c_0 \quad (\text{II.30})$$

En utilisant (II.20), (II.27) et (II.28), l'expression (II.14) peut être réécrite comme suit :

$$\dot{s} = -Ks + \{\Delta(\mathbf{x}, u^*) - \Delta(\mathbf{x}, u)\} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi}(\mathbf{z}) - \delta(\mathbf{z}) - u_{ro} - d(t) \quad (\text{II.31})$$

où  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*$  est le vecteur des erreurs d'estimation des paramètres.

### II.3.2.5. Lemme 2.2

En exploitant le théorème de la valeur moyenne, il existe une constante  $\lambda$ , avec  $\lambda \in ]0, 1[$ , telle que la fonction non linéaire  $f(\mathbf{x}, u)$  peut être exprimée autour  $u^*$  comme suit :

$$f(\mathbf{x}, u) - f(\mathbf{x}, u^*) = f_{u_\lambda}(u - u^*) \quad (\text{II.32})$$

où  $f_{u_\lambda} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{u=u_\lambda}$  avec  $u_\lambda = \lambda u + (1 - \lambda)u^*$ .

En utilisant la technique de linéarisation, l'expression (II.32) peut être réécrite comme suit :

$$\Delta(\mathbf{x}, u) - \Delta(\mathbf{x}, u^*) = (f_{u_\lambda} - c)(u - u^*) \quad (\text{II.33})$$

## II.4. Analyse de la stabilité et lois d'adaptation

Il s'agit de déterminer les lois d'adaptation des paramètres ajustables  $\boldsymbol{\theta}$  et le terme de robustification de la commande à partir de l'étude de stabilité du système en boucle fermée selon la synthèse de Lyapunov

A partir des expressions (II.31) et (II.33), la dérivée de la surface  $s$  peut être réécrite par :

$$\dot{s} = -Ks + \frac{f_{u_\lambda}}{c} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi}(\mathbf{z}) - \frac{f_{u_\lambda}}{c} \delta(\mathbf{z}) - u_{ro} - d(t) \quad (\text{II.34})$$

### II.4.1. Théorème 2.1

On considère le système (II.4) avec les suppositions 1 et 2, la loi de commande  $u$  définie par (II.10), dont les termes  $u_{dc}$  et  $u_{ad}$  sont définis par (II.13) et (II.27), respectivement, le terme de robustification donné par

$$u_{ro} = \psi \operatorname{sgn}(s) \quad (\text{II.35})$$

où  $\psi$  est une estimation de  $\psi^*$  définie comme suit :

$$\psi^* = \frac{\sigma}{2} \alpha |\boldsymbol{\theta}^*|^2 + w \quad (\text{II.36})$$

avec  $\alpha = \frac{f_{u_\lambda}}{c}$  et  $w = \sup_t |d(t) + \alpha \delta(\mathbf{z})| = \bar{d} + \alpha c_0$ .

et les lois d'adaptation suivantes pour  $\boldsymbol{\theta}$  et  $\psi$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\gamma_{\boldsymbol{\theta}}[S\xi(\mathbf{z}) + \sigma|S|\boldsymbol{\theta}] \quad (\text{II.37})$$

$$\dot{\psi} = \gamma_{\psi}|S| \quad (\text{II.38})$$

où  $\gamma_{\boldsymbol{\theta}}$  et  $\gamma_{\psi}$  sont des taux d'apprentissage positifs et  $\sigma$  une constante de conception positive.

Alors, les paramètres  $\boldsymbol{\theta}$  et  $\psi$  sont bornés et la surface de glissement  $s$  est uniformément asymptotiquement stable.

#### II.4.2. Démonstration

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2}s^2 + \frac{\alpha}{2\gamma_{\boldsymbol{\theta}}}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2\gamma_{\psi}}\tilde{\psi}^2 \quad (\text{II.39})$$

où  $\tilde{\psi} = \psi - \psi^*$ .

En dérivant (II.39) par rapport au temps, et en utilisant (II.37) et l'inégalité suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T\boldsymbol{\theta} \geq \frac{1}{2}|\tilde{\boldsymbol{\theta}}|^2 - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\theta}^*|^2 \quad (\text{II.40})$$

on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s \left[ -Ks + \frac{F_{u_{\lambda}}}{c}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T\xi(\mathbf{z}) - \frac{F_{u_{\lambda}}}{c}\delta(\mathbf{z}) - u_{ro} - d(t) \right] + \frac{\alpha}{\gamma_{\boldsymbol{\theta}}}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T\dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{\gamma_{\psi}}\tilde{\psi}\dot{\psi} \\ &\leq -Ks^2 - su_{ro} + |s|w - \frac{\sigma}{2}\alpha|s||\tilde{\boldsymbol{\theta}}|^2 + \frac{\sigma}{2}\alpha|s||\boldsymbol{\theta}^*|^2 + \frac{1}{\gamma_{\psi}}\tilde{\psi}\dot{\psi} \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

En substituant (II.35) et (II.38) dans (II.41), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -Ks^2 - |s|\dot{\psi} + |s|\dot{\psi}^* + \frac{1}{\gamma_{\psi}}\tilde{\psi}\dot{\psi} \\ &\leq -Ks^2 - |s|\dot{\tilde{\psi}} + \frac{1}{\gamma_{\psi}}\tilde{\psi}\dot{\tilde{\psi}} \leq -Ks^2 \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

Cette dernière équation garantie que  $|s|$ ,  $|\psi|$ , et  $|\boldsymbol{\theta}|$  sont bornés. D'autre part, toutes les variables du membre droit de (II.34) sont bornées, alors  $\dot{s}$  est aussi bornée.

L'intégration des deux membres de (II.42), permet d'obtenir

$$K \int_0^{\infty} s^2(t)dt \leq V(0) - V(\infty) \quad (\text{II.43})$$

L'équation (II.43) garantie que  $s \in L_2$ , car son côté droite est également bornée. En utilisant

le lemme de Barbalat [Kha-96], on a  $s \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  et par conséquent, l'erreur de poursuite converge vers l'origine, c'est à dire,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e| = 0$ .

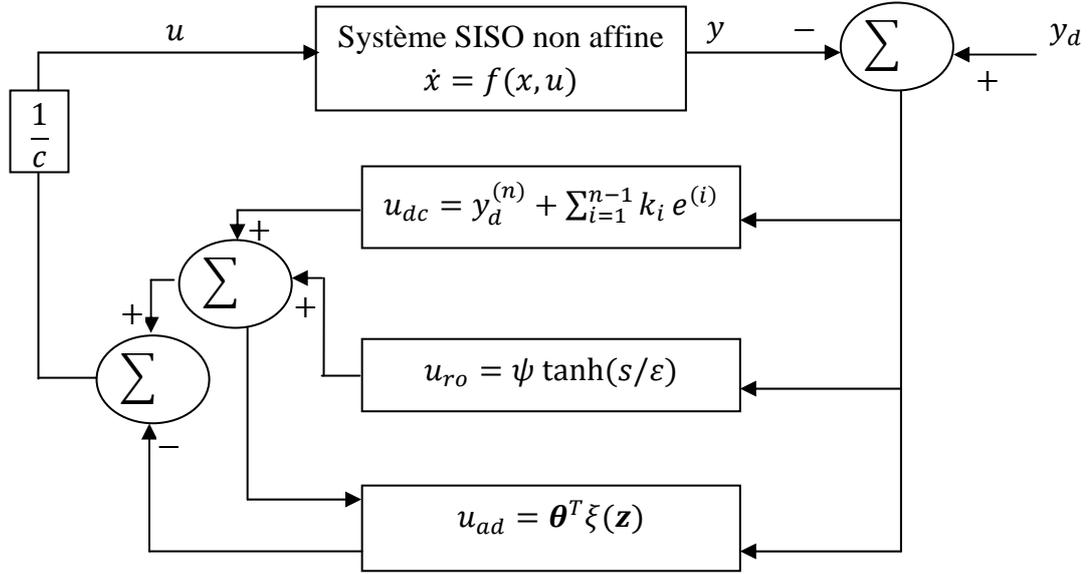


Figure II.2. Structure de la commande proposée.

#### II.4.3. Remarque 2.2

Dans nombreuses applications, le terme  $\text{sgn}(\cdot)$  dans (II.35) est remplacé par une fonction de saturation de la forme suivante

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} \text{sgn}(s) & \text{if } |s| \geq \varepsilon \\ s/\varepsilon & \text{if } |s| < \varepsilon \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

ou par la fonction tangente hyperbolique  $\tanh(s/\varepsilon)$  où  $\varepsilon$  est une petite constante positive.

## II.5. Exemples de simulation

Afin d'illustrer la validité de la commande adaptative floue par mode glissant proposée, des simulations sont développées sous l'environnement Matlab afin de commander deux systèmes non linéaires SISO non affines en la commande.

### II.5.1. Exemple 1

On considère le système non linéaire SISO non affine en la commande décrit par l'équation différentielle suivante [Par-05] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + 0.15u^3 + 0.1(1 + x_2^2)u + \sin(0.1u) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

Dans cet exemple de simulation, l'objectif de commande consiste à forcer la sortie du système  $y(t)$  à suivre une consigne désirée  $y_d(t) = \sin(t) + \cos(0.5t)$ . Pour montrer la robustesse du contrôleur proposé, une perturbation externe de la forme  $d(t) = 0.5 \sin(10t)$  est considérée.

Pour synthétiser le contrôleur adaptatif flou  $u_{ad}(\mathbf{z})$ , on utilise un système flou de la forme (II.27) dont les variables d'entrée sont choisies comme  $\mathbf{z} = [x_1 \ x_2 \ u_\alpha]^T$ . Les fonctions d'appartenance pour chaque variable d'entrée  $z_j, j = 1,2,3$ , sont sélectionnées comme suit :

$$\begin{aligned} u_{A_1}(z_j) &= 1/(1 + \exp 5(z_j + 2)), \\ u_{A_2}(z_j) &= \exp(-2.77 * (z_j + 1)^2), \\ u_{A_3}(z_j) &= \exp(-2.77 * z_j^2), \\ u_{A_4}(z_j) &= \exp(-2.77 * (z_j - 1)^2) \\ \text{et } u_{A_5}(z_j) &= 1/(1 + \exp -5(z_j - 2)). \end{aligned}$$

Le système doit atteindre la surface définie par  $s = \dot{e} + 4e$ , et glisse sur elle pour atteindre l'origine  $\dot{e} = e = 0$ .

Les paramètres de conception utilisés dans cette simulation sont supposés  $c = 1, \sigma = 0.5, \gamma_\theta = 100, \gamma_\psi = 10$ .

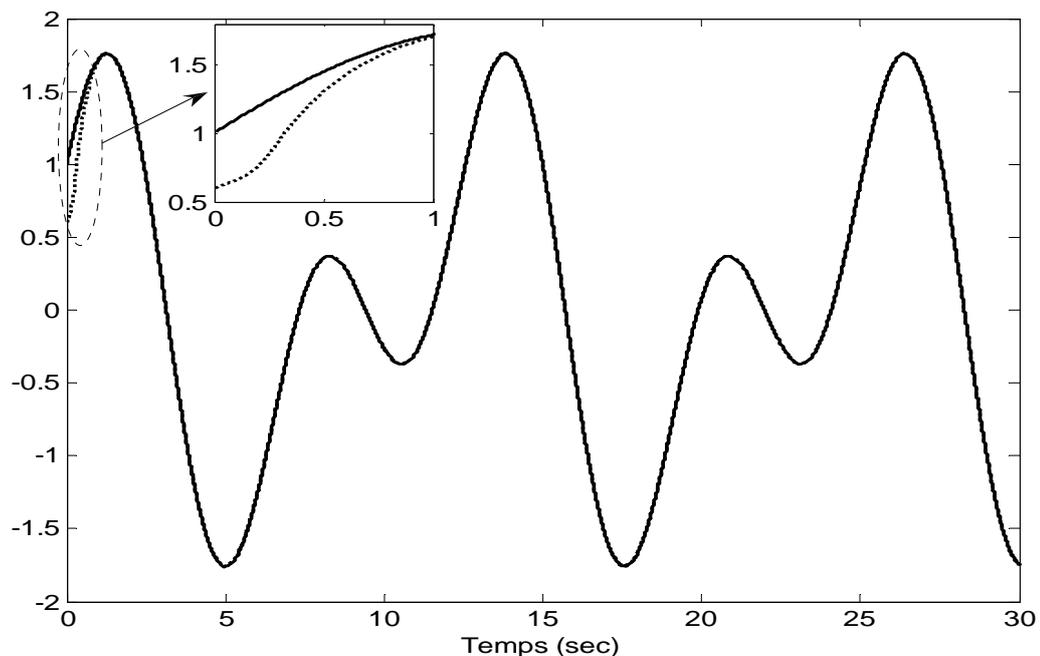


Figure II.3. Evolution de la sortie du système  $y = x_1$  (en pointillés) et sa référence  $y_d$  (en traits continus).

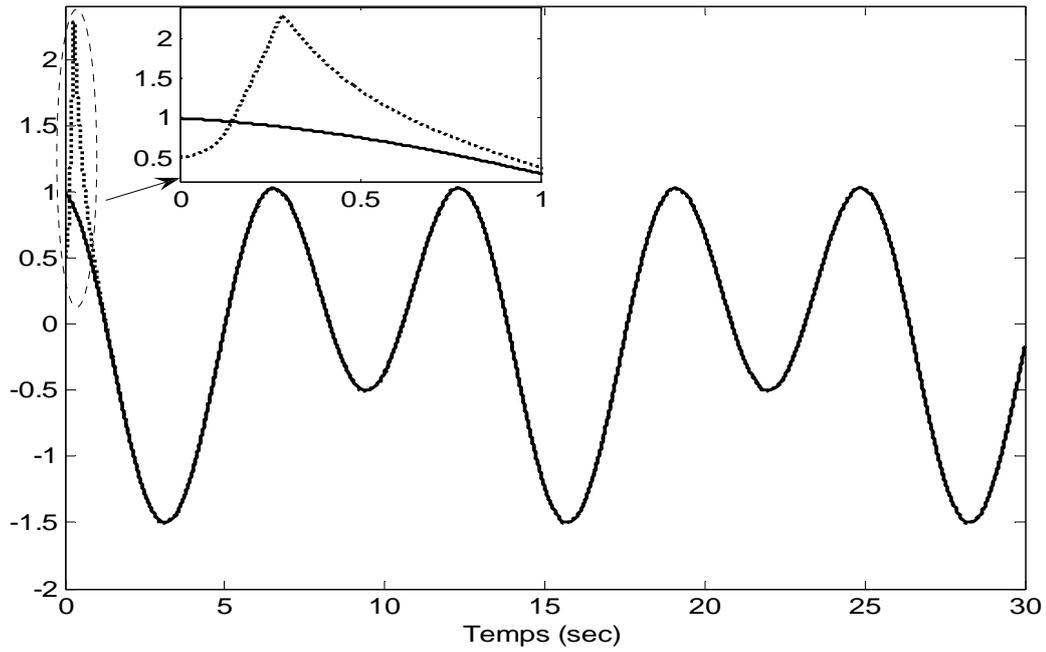


Figure II.4. Evolution de l'état du système  $\dot{y} = x_2$  (en pointillés) et sa référence  $\dot{y}_d$  (en traits continus).

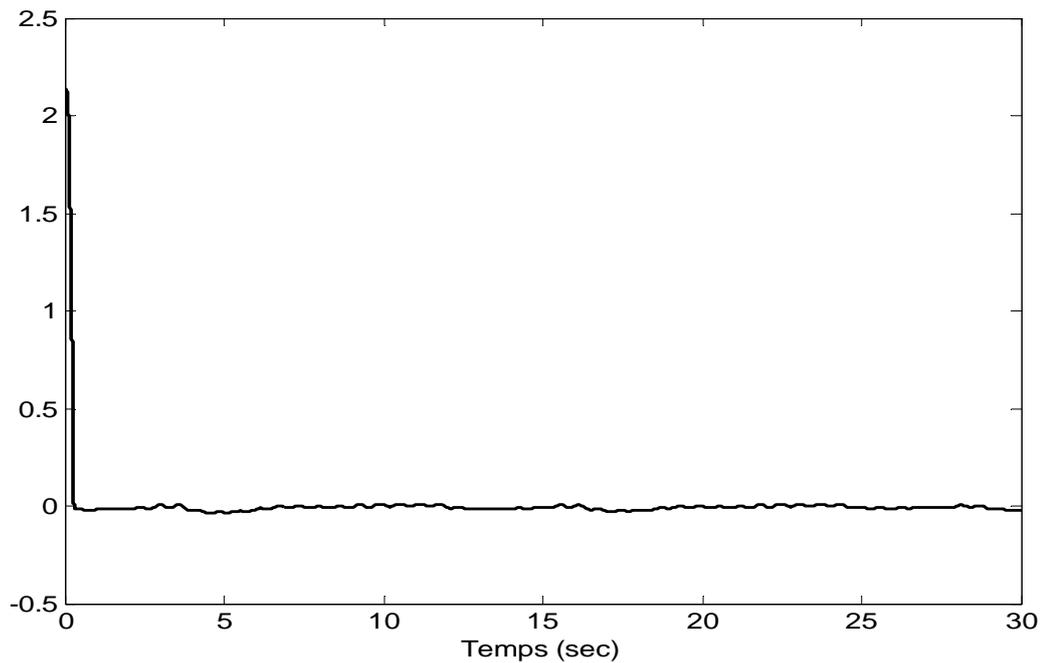


Figure II.5. Surface de glissement.

Les figures II.3–II.7 montrent les résultats de simulation pour les conditions initiales suivantes  $\mathbf{x}(0) = [0.6, 0.5]^T$ ,  $\boldsymbol{\theta}(0) = 0$ ,  $\psi(0) = 0$

Les figures II.3 et II.4 montrent une convergence rapide des états du système  $x_1$  et  $x_2$  vers leurs références. La figure II.5 montre la convergence du système vers une surface nulle et

son glissement. La figure II.6 représente le signal de commande borné et de forme lisse et. Les paramètres  $\theta$  et  $\psi$  sont bornés comme montré la figure II.7.

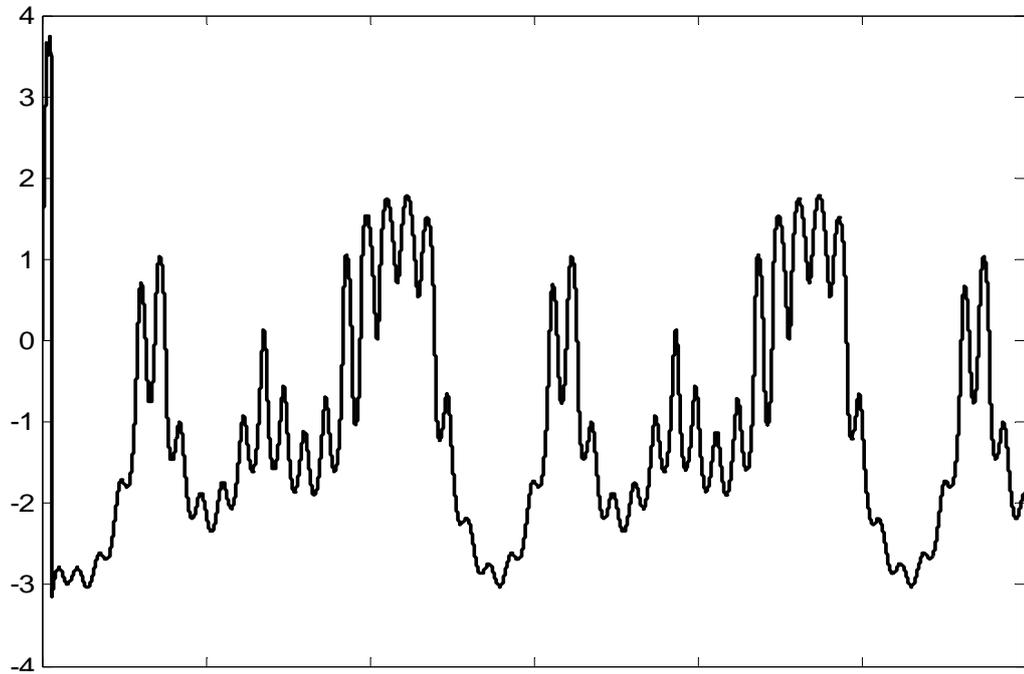


Figure II.6. Signal de commande.

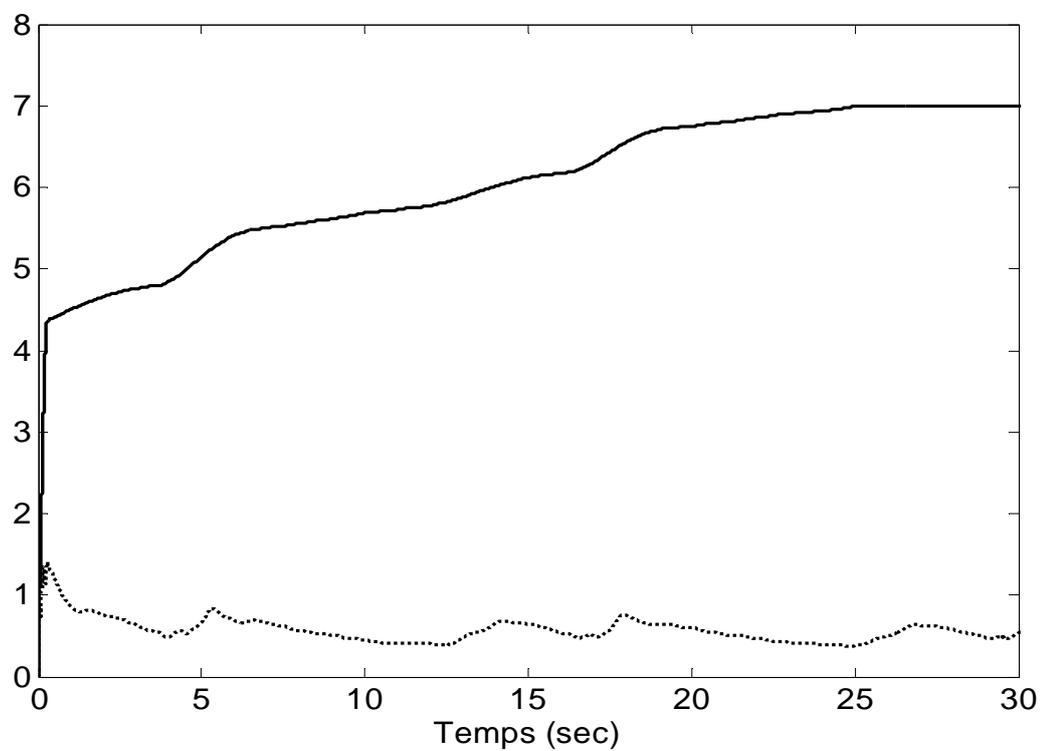


Figure II.7. Evolution des paramètres,  $|\theta|$  (en pointillés) et  $\psi$  (en traits continus).

## II.5.2. Exemple 2

Soit le système non linéaire SISO non affine en la commande suivant [Par-04] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 + \frac{u}{\sqrt{|u| + 0.1}} - 2x_1^2 x_2 + d(t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

où  $d(t)$  est une perturbation externe  $d(t) = 0.2$

L'objectif de commande est d'assurer une bonne poursuite du signal de référence  $y_d(t) = \sin(t)$  par la sortie  $y = x_1$ , tout en garantissant la stabilité du système en boucle fermée.

Pour synthétiser le contrôleur adaptatif flou  $u_{ad}(\mathbf{z})$ , on utilise un système flou de la forme de (II.24). Les variables d'entrée du système flou sont  $\mathbf{z} = [x_1 \ x_2 \ u_\alpha]^T$ , les fonctions d'appartenance choisies pour les variables d'entrée  $x_1$  et  $x_2$  sont définies par :

$$u_{A_1^j}(z_j) = \exp(-2.77 * (z_j + 1)^2),$$

$$u_{A_2^j}(z_j) = \exp(-2.77 * z_j^2),$$

$$u_{A_3^j}(z_j) = \exp(-2.77 * (z_j - 1)^2),$$

et pour la variable  $u_\alpha$ , on choisit cinq fonctions d'appartenance définies par :

$$u_{A_1^j}(z_j) = 1/(1 + \exp 5(z_j + 3)),$$

$$u_{A_2^j}(z_j) = \exp(-2.77 * (z_j + 1.5)^2),$$

$$u_{A_3^j}(z_j) = \exp(-2.77 * z_j^2),$$

$$u_{A_4^j}(z_j) = \exp(-2.77 * (z_j - 1.5)^2)$$

$$\text{et } u_{A_5^j}(z_j) = 1/(1 + \exp -5(z_j - 3)).$$

Le système doit atteindre la surface  $s = \dot{e} + 4e$ , et glisse sur elle pour arriver à l'origine  $\dot{e} = e = 0$ .

Les paramètres de conception utilisés dans cette simulation sont :

$$c = 1, \sigma = 0.5, \gamma_\theta = 100, \gamma_\psi = 10.$$

Les figures II.8 –II.12 représentent les résultats de simulation pour les conditions initiales suivantes :  $\mathbf{x}(0) = [0.1, 0.2]^T$ ,  $\boldsymbol{\theta}(0) = 0$  et  $\psi(0) = 0$ .

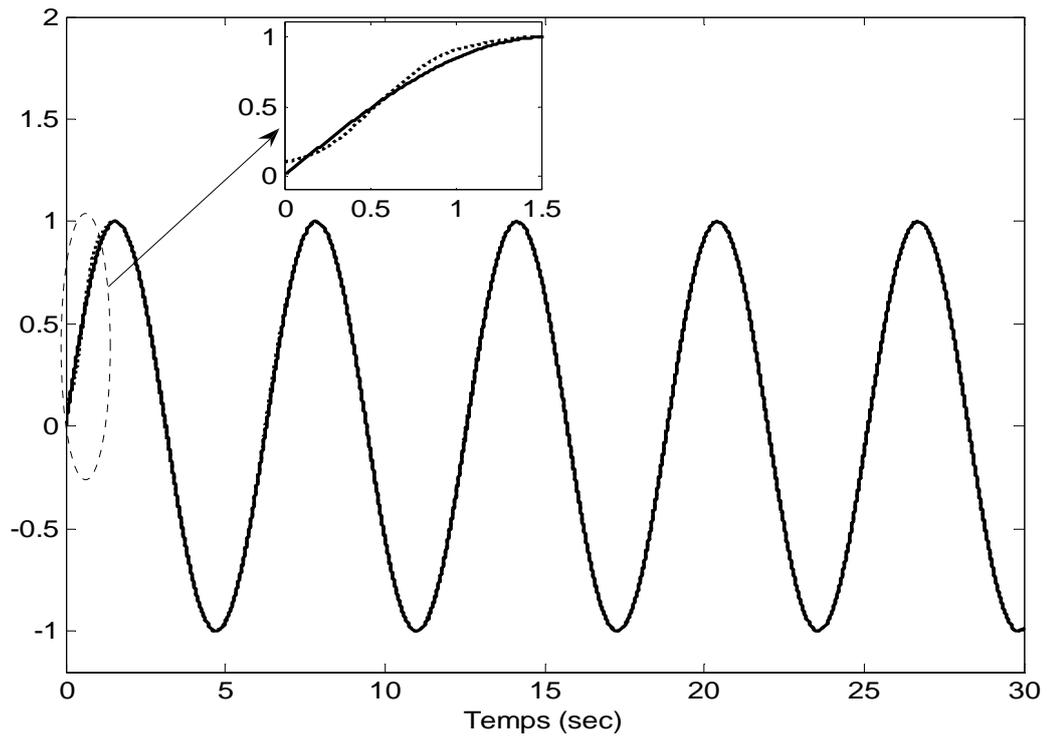


Figure II.8. Evolution de la sortie du système  $y = x_1$  (en pointillés) et sa référence  $y_d$  (en traits continus).

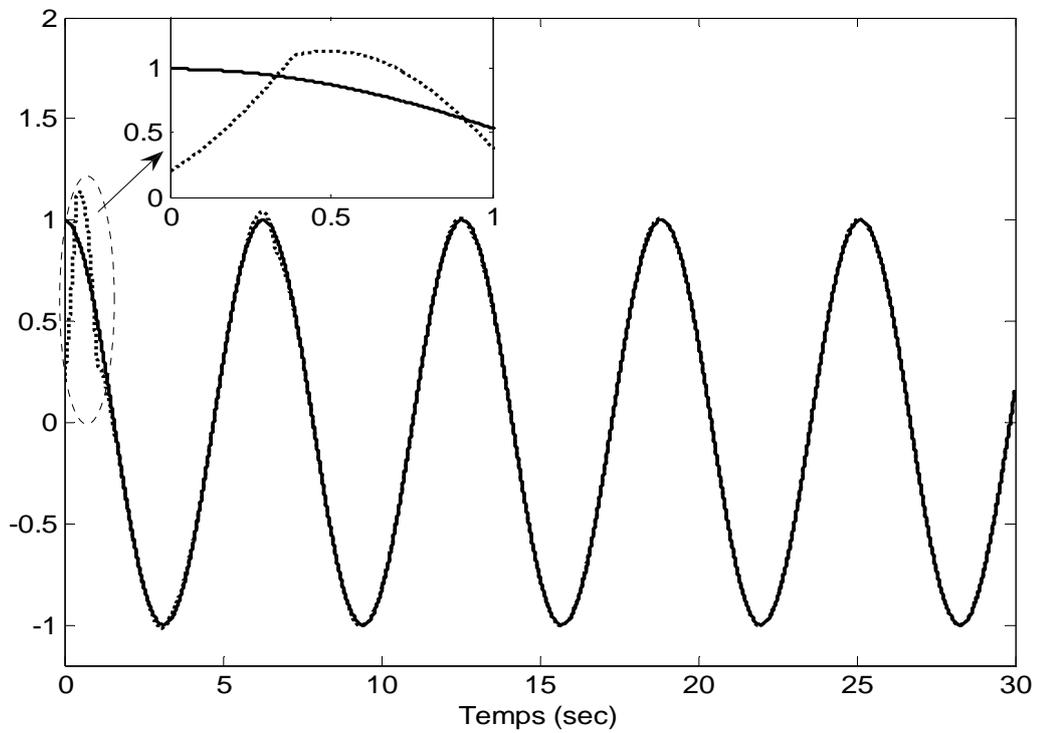


Figure II.9. Evolution de l'état du système  $\dot{y} = x_2$  (en pointillés) et sa référence  $\dot{y}_d$  (en traits continus).

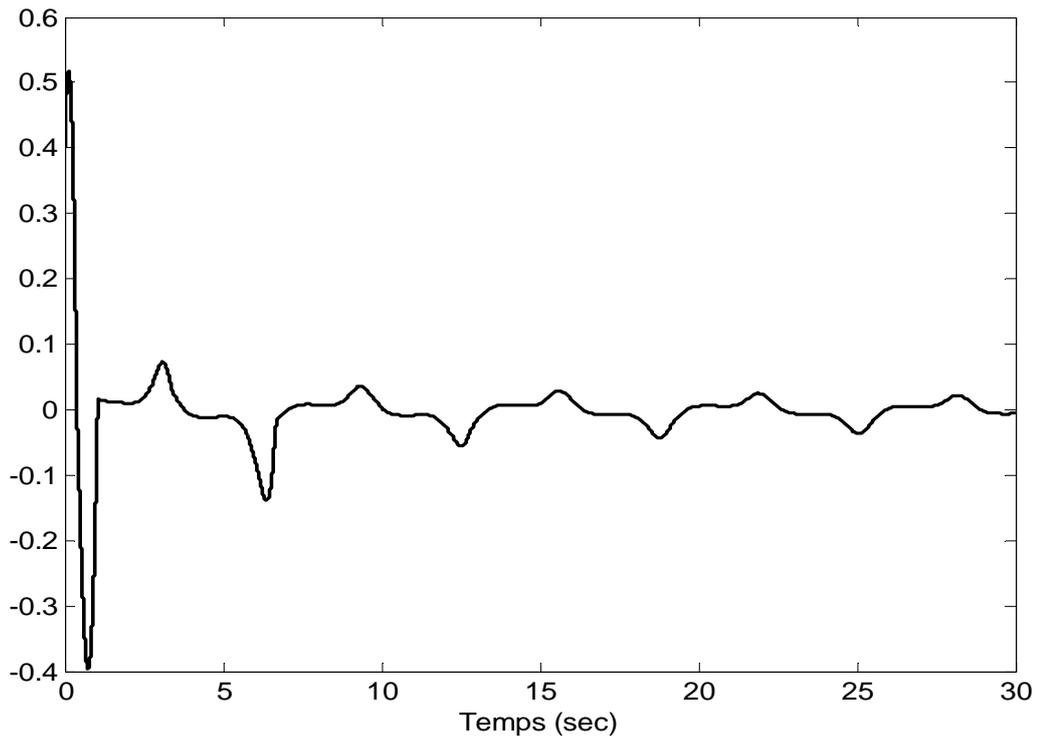


Figure II.10. Surface de glissement.

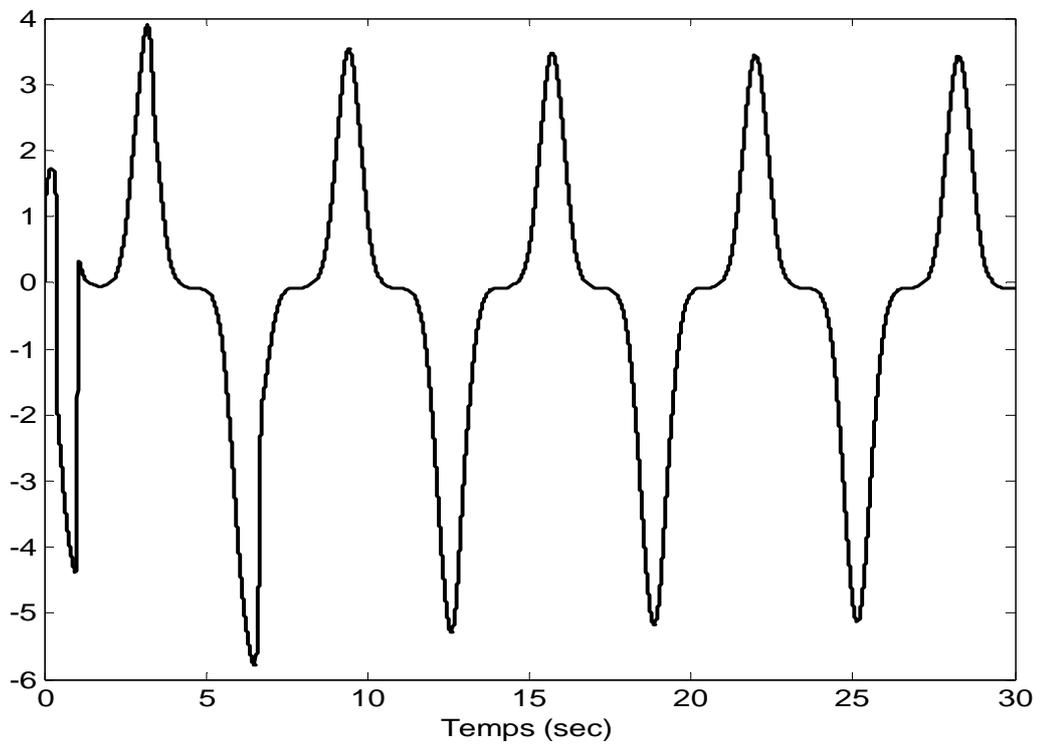


Figure II.11. Signal de commande.

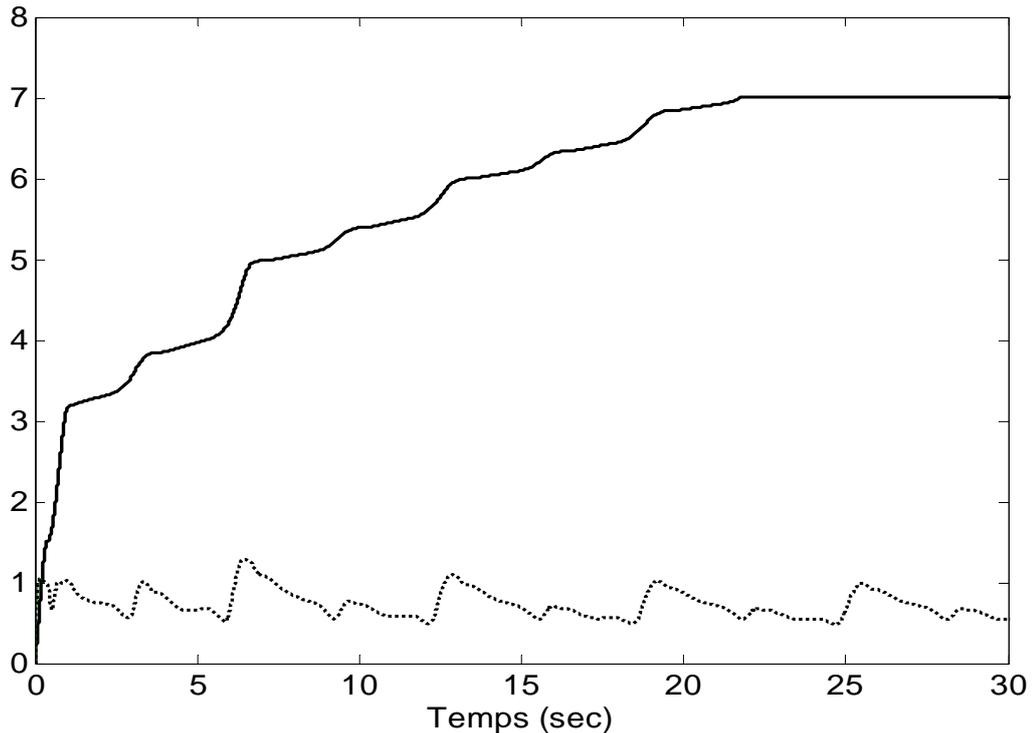


Figure II.12. Evolution des paramètres,  $|\theta|$  (en pointillés) et  $\psi$  (en traits continus).

Les figures II.8 et II.9 montrent une convergence rapide des états du système  $x_1$  et  $x_2$  vers leurs références. La figure II.10 montre la convergence du système vers une surface nulle et son glissement. La figure II.11 représente le signal de commande de forme lisse et bornée. Les paramètres  $\theta$  et  $\psi$  sont bornés comme le montre la figure II.12.

## II.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une approche adaptative floue par mode glissant pour la commande d'une classe de systèmes non linéaires SISO non affines en la commande, afin de garantir une bonne performance de poursuite. La commande proposée est composée de trois termes de commande, le premier sert à stabiliser la dynamique linéarisée du système, le deuxième utilise le théorème de la fonction implicite et un système flou pour approximer une fonction non linéaire inconnue, alors que le dernier terme assure la robustesse de la commande vis à vis des erreurs d'approximation et des perturbations externes. Les lois d'adaptation sont déduites via l'étude de stabilité, au sens de Lyapunov, du système en boucle fermée. Deux exemples de simulation sont mis en œuvre sous l'environnement Matlab pour valider l'approche proposée.

Cependant, cette approche reste applicable seulement pour le cas des systèmes non linéaires SISO non affines en la commande. Dans le chapitre suivant, une approche basée sur la commande adaptative floue directe par mode glissant, qui exploite le théorème de la fonction implicite globale, sera développée pour prendre en charge les systèmes non linéaires MIMO non affines en la commande.

# **Chapitre III**

**Commande adaptative floue  
par mode glissant pour des  
systèmes non linéaires  
MIMO non affines**

# Commande adaptative floue par mode glissant pour des systèmes non linéaires MIMO non affines

## III.1. Introduction

Le problème de la commande floue pour les systèmes non linéaires non affines en la commande est une tâche difficile et complexe, et plus particulièrement pour les systèmes MIMO. La principale difficulté pour la commande des systèmes non affines en la commande réside dans le fait que les signaux de commande ne peuvent pas être explicitement obtenus même si la dynamique du système est bien connue. Peu de travaux qui traitent le problème de la commande floue des systèmes non linéaires MIMO non affines en la commande sont présentés dans la littérature [Wan-07] et [Liu-07]. Dans [Wan-07], les auteurs se basent sur le développement en série de Taylor autour d'un point  $(x_0, u_0)$  pour obtenir un modèle affine en la commande. Le modèle affine obtenu est approximé par un modèle flou de type T-S afin de déduire le contrôleur qui garanti les objectifs de la commande. Un vecteur des termes de commande type mode glissant est ajouté au contrôleur pour compenser l'effet des erreurs d'approximation et des perturbations externes. Dans [Liu-07], les auteurs utilisent le théorème de la valeur moyenne pour construire un modèle affine. Un certain type particulier de fonctions de Lyapunov, la technique de Backstepping et des systèmes flous de type T-S sont exploités pour la synthèse du contrôleur. La stabilité des systèmes en boucle fermée dans [Wan-07] et [Liu-07] est prouvée au sens de Lyapunov.

Cependant les travaux précités présentent des contrôleurs indirects où le problème de la singularité, (division par zéro), peut dégrader les performances du contrôleur. En plus, l'étude de la stabilité nécessite la résolution de l'équation de Lyapunov qui devient plus complexe pour les systèmes MIMO. Afin de remédier à ces inconvénients, on propose de synthétiser un contrôleur adaptatif flou direct par mode glissant qui exploite le théorème de

la fonction implicite globale [Zha-06] qui est rarement appliqué dans les travaux de la commande des systèmes MIMO non affines. Deux exemples de simulation, sous l'environnement Matlab, sont présentés pour mettre en évidence l'efficacité de l'approche proposée.

## III.2. Formulation du problème

Soit le système non linéaire MIMO non affine en la commande décrit par la forme normale suivante :

$$\begin{aligned} y_1^{(r_1)} &= f_1(x, u) \\ &\vdots \\ y_p^{(r_p)} &= f_p(x, u) \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

où  $x = [y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(r_1-1)}, \dots, y_p, \dot{y}_p, \dots, y_p^{(r_p-1)}]^T \in R^n$  avec  $n = \sum_{i=1}^p r_i$  représente le vecteur d'état de la dynamique interne du système, qui est supposé mesurable,  $u = [u_1, \dots, u_p]^T \in R^p$  est le vecteur des entrées de commande,  $y = [y_1, \dots, y_p]^T \in R^p$  est le vecteur des sorties, et  $f_i(x, u)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , sont des fonctions continues non affines inconnues. On dénote

$$y^{(r)} = [y_1^{(r_1)}, \dots, y_p^{(r_p)}]^T \text{ et } F(x, u) = [f_1(x, u), \dots, f_p(x, u)]^T,$$

alors la dynamique du système (III.1) peut être réécrite dans la forme compacte suivante :

$$y^{(r)} = F(x, u) \quad (\text{III.2})$$

### III.2.1 Objectifs de commande

Il s'agit de concevoir un contrôleur flou dont le vecteur de sortie  $u(t)$  garantit à la fois une bonne performance de poursuite des trajectoires désirées  $y_d(t) = [y_{d1}(t), \dots, y_{dp}(t)]^T \in R^p$  et une stabilité du système en boucle fermée dans le sens que toutes les variables impliquées soient bornées.

Pour aboutir aux objectifs précités, on considère les suppositions et théorèmes suivants :

#### Supposition 3.1

Le vecteur de fonctions  $F(x, u)$  est de classe  $C^1$  pour tout  $(x, u) \in R^{n \times p}$ .

**Supposition 3.2**

Le système (III.2) satisfait l'inégalité suivante :

$$\left| \left[ \frac{\partial}{\partial u} F(x, u) \right]_{ii} \right| - \sum_{j \neq i} \left| \left[ \frac{\partial}{\partial u} F(x, u) \right]_{ij} \right| \geq d \quad \text{pour tout } (x, u) \in R^{n \times p}, i = 1, \dots, p, \text{ où } d \text{ est}$$

une constante positive.

**Supposition 3.3**

Le signal de référence  $y_{di}(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , et ses dérivées par rapport au temps  $y_{di}^j(t)$ ,  $j = 1, \dots, r_i$ , sont supposés connus et bornés.

**Supposition 3.4**

La matrice  $F_u = \frac{\partial}{\partial u} F(x, u)$  est symétrique et définie positive.

**Supposition 3.5**

Il existe une fonction non linéaire positive inconnue  $\beta(x)$  telle que  $\frac{1}{2} \|\dot{F}_u^{-1}\| \leq \alpha \beta(x)$  où  $\alpha$  est la valeur propre minimale de la matrice  $F_u^{-1}$ .

On définit les erreurs de poursuite par :

$$\begin{aligned} e_1(t) &= y_{d1}(t) - y_1(t) \\ &\vdots \\ e_p(t) &= y_{dp}(t) - y_p(t) \end{aligned} \tag{III.3}$$

et les surfaces de glissement (ou les erreurs de poursuite filtrées) dans l'espace des états des erreurs comme suit [Slo-91]:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \left( \frac{d}{dt} + \lambda_1 \right)^{r_1-1} e_1(t), \quad \lambda_1 > 0 \\ &\vdots \\ s_p(t) &= \left( \frac{d}{dt} + \lambda_p \right)^{r_p-1} e_p(t), \quad \lambda_p > 0 \end{aligned} \tag{III.4}$$

A partir de l'équation (III.4),  $s_i(t) = 0$  représente une équation différentielle linéaire dont la solution implique que l'erreur de poursuite  $e_i(t)$  converge vers zéro avec une constante de temps  $(r_i - 1)/\lambda_i$  [Slo-91]. De plus, les dérivées de  $e_i(t)$  jusqu'à l'ordre  $(r_i - 1)$

convergent aussi vers zéro. Dans ce cas, l'objectif de commande revient à concevoir un contrôleur qui force les surfaces  $s_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , à converger vers zéro.

Les dérivées par rapport au temps des surfaces  $s_i(t)$ , (III.4), peuvent être réécrites comme :

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= v_1 - f_1(x, u) \\ &\vdots \\ \dot{s}_p &= v_p - f_p(x, u)\end{aligned}\tag{III.5}$$

où  $v_1, \dots, v_p$  sont donnés par:

$$\begin{aligned}v_1 &= y_{d1}^{(r_1)} + \beta_{1,r_1-1} e_1^{(r_1-1)} + \dots + \beta_{1,1} e_1, \\ &\vdots \\ v_p &= y_{dp}^{(r_p)} + \beta_{p,r_p-1} e_p^{(r_p-1)} + \dots + \beta_{p,1} e_p,\end{aligned}\tag{III.6}$$

avec  $\beta_{i,j} = \frac{(r_i - 1)!}{(r_i - j)! (j - 1)!} \lambda_i^{r_i - j}$ ,  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, r_i - 1$ .

On note

$$s(t) = [s_1(t), \dots, s_p(t)]^T \text{ et } v(t) = [v_1(t), \dots, v_p(t)]^T$$

Alors, l'équation (III.5) peut être réécrite sous la forme compacte suivante:

$$\dot{s} = v - F(x, u)\tag{III.7}$$

### III.2.1.1 Théorème de la fonction implicite globale [Zha-06]

Soit  $f: R^n \times R^m \rightarrow R^k$  ( $k \leq m$ ) un vecteur de fonctions continues et dérivables pour la deuxième variable  $u \in R^m$ , et  $\left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right]_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, m$  est le terme d'ordre  $ij$  de la matrice Jacobienne  $\frac{\partial}{\partial u} f(x, u)$ .

Si l'inégalité suivante est vérifiée

$$\left| \left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right]_{ii} \right| - \sum_{j \neq i} \left| \left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right]_{ij} \right| \geq d, \forall (x, u) \in R^{n+m}, i = 1, \dots, p,\tag{III.8}$$

où  $d$  est une constante positive, alors il existe une fonction continue unique  $g: R^n \rightarrow R^m$  telle que  $f(x, g(x)) = 0$ .

### III.2.1.2 Lemme 3.1

Considérons le système (III.1) satisfaisant les suppositions 3.1–3.3, alors il existe un contrôleur idéal  $u^*$  tel que

$$\dot{s} = -Ks - \beta(x)I_p s \quad (\text{III.9})$$

où  $K = \text{diag}[k_1, \dots, k_p]$  avec  $k_i > 0$  pour  $i = 1, \dots, p$  et  $I_p$  la matrice identité. L'équation (III.9) implique que  $s_i(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Par conséquent  $e_i(t)$  et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $(r_i - 1)$  convergent vers zéro [Slo-91].

### III.2.1.3. Démonstration

En ajoutant et en retranchant le terme  $Ks + \beta(x)I_p s$  dans le membre droit de l'équation de la dérivée des surfaces (III.7), on obtient :

$$\dot{s} = -(F(x, u) - v - Ks - \beta(x)I_p s) - Ks - \beta(x)I_p s \quad (\text{III.10})$$

A partir de la supposition 3.2 et le fait que  $\partial(v + Ks + \beta(x)I_p s) / \partial u = 0$ , on a

$$\left| \left[ \frac{\partial}{\partial u} F(x, u) - v - Ks - \beta(x)I_p s \right]_{ii} \right| - \sum_{j \neq i} \left| \left[ \frac{\partial}{\partial u} F(x, u) - v - Ks - \beta(x)I_p s \right]_{ij} \right| \geq d,$$

$$\forall (x, u) \in R^{n \times p}.$$

D'après le théorème de la fonction implicite globale, il existe un contrôleur idéal  $u^*(z)$ , avec  $z = [x, v, s]$ , tel que

$$F(x, u^*) - v - Ks - \beta(x)I_p s = 0 \quad (\text{III.11})$$

On considère la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V_s = s^T s = \sum_{i=1}^p s_i^2 \quad (\text{III.12})$$

Si  $u = u^*$  (III.9), alors on obtient

$$\dot{V}_s = 2s^T \dot{s} = -2 \sum_{i=1}^p k_i s_i^2 - 2\beta(x)s^2 \quad (\text{III.13})$$

A partir de l'équation (III.13), on conclut que  $V_s$  est une fonction décroissante car les termes  $k_i$  et la fonction  $\beta(x)$  sont toujours positifs, et que l'erreur de poursuite  $e_i(t)$  et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $(r_i - 1)$  tendent vers zéro quand  $t$  tend vers  $\infty$  [Slo-91].

Cependant, le théorème de la fonction implicite globale garantit seulement l'existence du contrôleur idéal  $u^*(z)$  et ne fournit pas une méthode pour le concevoir. Dans la suite, on propose des systèmes adaptatifs flous pour approximer le contrôleur idéal inconnu.

### III.3. Description des systèmes flous utilisés

Les systèmes flous utilisés pour approximer le contrôleur idéal implicite inconnu sont de type T-S à conclusion constante caractérisés par une collection de règles Si-Alors de la forme suivante :

$$R^k: \text{Si } z_1 \text{ est } G_1^{j_1} \text{ et } \dots \text{ et } z_m \text{ est } G_m^{j_m} \text{ Alors } y_f \text{ est } C^k, k = 1, \dots, N \quad (\text{III.14})$$

où  $z = [z_1, \dots, z_m]^T \in \Omega_z \subset R^m$  est le vecteur des entrées linguistiques et  $y_f \in R$  la sortie numérique du système flou, avec  $\Omega_z = \Omega_{z_1} \times \dots \times \Omega_{z_m}$  et  $\Omega_{z_i} \subset R$ .  $G_i^{j_i}$ ,  $j_i = 1, \dots, N_i$  et  $C^k$  sont des ensembles flous caractérisés par les fonctions d'appartenance floues  $\mu_{G_i^{j_i}}(z_i)$  et  $\mu_{C^k}(y_f)$ , respectivement,  $N = \prod_{i=1}^m N_i$  est le nombre total de règles floues.

En utilisant la fuzzification par singleton, la défuzzification par le centre de gravité avec le mécanisme d'inférence somme-produit, la sortie résultante finale du système flou est donnée comme suit [Wan-94]:

$$y_f(z) = \frac{\sum_{k=1}^N \mu_k(z) d_k}{\sum_{k=1}^N \mu_k(z)} \quad (\text{III.15})$$

où  $\mu_k(z) = \prod_{i=1}^m \mu_{G_i^{j_i}}(z_i)$  et  $d_k$  est le point où la fonction d'appartenance de  $C^k$  atteint sa valeur maximale.

En introduisant le concept de la fonction floue de base [Wan-94], la sortie donnée par (III.15) peut être réécrite dans la forme compacte suivante:

$$y_f(z) = w^T(z) \theta \quad (\text{III.16})$$

où  $\theta = [d_1, \dots, d_N]^T$  est le vecteur de tous les paramètres conséquents, et  $w(z) = [w_1(z), \dots, w_N(z)]^T$  est l'ensemble des fonctions floues de base défini par :

$$w_k(z) = \frac{\mu_k(z)}{\sum_{j=1}^N \mu_j(z)}, k = 1, \dots, N \quad (\text{III.17})$$

### III.4. Conception du contrôleur adaptatif flou

Le lemme 1 précédent garantit seulement l'existence d'une loi de commande idéale  $u^*$  qui assure la convergence de l'erreur de poursuite vers zéro mais ne fournit pas de méthode pour sa détermination. En se basant sur le fait que le système flou de type T-S, de la forme (III.14), est un approximateur universel, chaque composante de la loi de commande idéale  $u^* = [u_1^*, \dots, u_p^*]^T$  peut être approximée comme suit :

$$u_i^*(z) = w_i^T(z)\theta_i^* + \delta_i(z), i = 1, \dots, p \quad (\text{III.18})$$

où  $\delta_i(z)$  est l'erreur d'approximation floue qui est bornée, c'est à dire,  $|\delta_i(z)| \leq \bar{\delta}_i$ .  $\theta_i^*$  est le vecteur des paramètres optimaux minimisant la fonction  $|\delta_i(z)|$  sur un ensemble de fonctionnement  $\Omega_z$ , et  $w_i(z)$  est le vecteur des fonctions floues de base.

Par conséquent, le contrôleur idéal  $u^*$  peut être défini comme suit :

$$u^* = w^T(z)\theta^* + \delta(z) \quad (\text{III.19})$$

où  $\theta^* = [\theta_1^{*T}, \dots, \theta_p^{*T}]^T$ ,  $w(z) = \text{diag}[w_1(z), \dots, w_p(z)]$  et  $\delta(z) = [\delta_1(z), \dots, \delta_p(z)]^T$ .

Cependant le vecteur des paramètres optimaux  $\theta^*$  dans (III.19) est inconnu, alors il doit être ajusté par une loi d'adaptation convenable. Soit  $\theta$  l'estimation du vecteur des paramètres optimaux  $\theta^*$  et  $u$  la loi de commande qui est l'approximation floue du contrôleur idéal (III.19). Dans ces conditions, la loi de commande proposée pour le system (III.1) est donnée par :

$$u(z) = u_{fuzzy} + u_s \quad (\text{III.20})$$

$$u_{fuzzy} = w^T(z)\theta \quad (\text{III.21})$$

où  $u_s = [u_{1s}, \dots, u_{ps}]^T$  est un vecteur de signaux supplémentaires, qui sera développé dans la section suivante, qui va servir à garantir la stabilité du système en boucle fermée.

D'après le théorème de la valeur moyenne [Kha-96], il existe une constante  $\lambda \in ]0, 1[$  telle que:

$$F(x, u) - F(x, u^*) = F_{u_\lambda}(u - u^*), \quad (\text{III.22})$$

où  $u_\lambda = u + \lambda(u^* - u)$ .

$$\text{avec } F_{u_\lambda} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p(x, u)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_p(x, u)}{\partial u_p} \end{array} \right]_{u=u_\lambda}$$

En substituant (III.22) dans l'équation de la dérivée des surfaces (III.7), on obtient

$$\dot{s} = v - F(x, u^*) - F_{u_\lambda}(u - u^*) \quad (\text{III.23})$$

En utilisant (III.11), (III.19) et (III.20), l'expression (III.23) devient

$$\dot{s} = -Ks - \beta(x)I_p s - F_{u_\lambda}(w^T(z)\tilde{\theta} - \delta(z) + u_s) \quad (\text{III.24})$$

où  $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$  est le vecteur d'erreur des paramètres estimés.

## III.5. Analyse de la stabilité

Afin d'étudier la stabilité du système en boucle fermée en utilisant la synthèse de Lyapunov, on propose le théorème suivant :

### III.5.1. Théorème 3.1

Soient le système (III.1) satisfaisant les suppositions 3.1-3.5, et le contrôleur flou défini par (III.20) et (III.21). Si on choisit le vecteur des signaux supplémentaires suivant :

$$u_s = \Lambda * \text{sgn}(s) \quad (\text{III.25})$$

et les lois d'adaptation des paramètres  $\theta$  et  $\psi$  suivantes :

$$\dot{\theta} = \eta[ws - \sigma\|s\|\theta] \quad (\text{III.27})$$

$$\dot{\psi} = \gamma[|s_1|, \dots, |s_p|]^T \quad (\text{III.28})$$

où  $\text{sgn}(\cdot)$  est la fonction signe définie pour le vecteur  $s = [s_1, \dots, s_p]^T$  comme suit :  $\text{sgn}(s) = [\text{sgn}(s_1), \dots, \text{sgn}(s_p)]^T$  et  $\Lambda = \text{diag}[\psi]$  avec  $\psi = [\psi_1, \dots, \psi_p]^T$  où  $\psi_i$  est l'estimation de  $\psi_i^*$  définie par :

$$\psi_i^* = \sup_t |\delta_i(z)| + \frac{\sigma}{2} \|\theta^*\|^2 \quad (\text{III.26})$$

avec  $\eta$ ,  $\gamma$  et  $\sigma$  sont des constantes positives.

Alors, le système (III.1) est asymptotiquement stable, c'est-à-dire que les paramètres  $\theta$  et  $\psi$  sont bornés, et que l'erreur de poursuite  $e_i(t)$  ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre  $(r_i - 1)$  convergent toutes vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini.

### III.5.2. Démonstration

On considère la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V_s = \frac{1}{2} s^T F_{u_\lambda}^{-1} s + \frac{1}{2\eta} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\psi}^T \tilde{\psi} \quad (\text{III.29})$$

En utilisant (III.24) et le fait que  $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta}$  et  $\dot{\tilde{\psi}} = \dot{\psi}$ , la dérivée par rapport au temps de la fonction  $V_s$  peut être réécrite comme suit:

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= s^T F_{u_\lambda}^{-1} \dot{s} + \frac{1}{2} s^T \dot{F}_{u_\lambda}^{-1} s + \frac{1}{\eta} \tilde{\theta}^T \dot{\theta} + \frac{1}{\gamma} \tilde{\psi}^T \dot{\psi} \\ &= -s^T F_{u_\lambda}^{-1} K s - s^T F_{u_\lambda}^{-1} \beta(x) s - s^T w^T(z) \tilde{\theta} + s^T \delta(z) \\ &\quad - s^T u_s + \frac{1}{2} s^T \dot{F}_{u_\lambda}^{-1} s + \frac{1}{\eta} \tilde{\theta}^T \dot{\theta} + \frac{1}{\gamma} \tilde{\psi}^T \dot{\psi} \\ &\leq -s^T F_{u_\lambda}^{-1} K s - \alpha \beta(x) s^2 - s^T w^T(z) \tilde{\theta} + s^T \delta(z) \\ &\quad - s^T u_s + \frac{1}{2} \|\dot{F}_{u_\lambda}^{-1}\| \|s\|^2 + \frac{1}{\eta} \tilde{\theta}^T \dot{\theta} + \frac{1}{\gamma} \tilde{\psi}^T \dot{\psi} \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

En choisissant la loi d'adaptation (III.27) et en utilisant l'inégalité suivante :

$$\tilde{\theta}^T \dot{\theta} \geq \frac{1}{2} \|\dot{\theta}\|^2 - \frac{1}{2} \|\theta^*\|^2, \quad (\text{III.31})$$

l'équation (III.30) peut être réécrite comme suit:

$$\dot{V}_s \leq -s^T F_{u_\lambda}^{-1} K s + \sum_{i=1}^p |s_i| \left[ |\delta_i(z)| + \frac{\sigma}{2} \|\theta^*\|^2 \right] - s^T u_s - \frac{\sigma}{2} \|s\| \|\tilde{\theta}\|^2 + \frac{1}{\gamma} \tilde{\psi}^T \dot{\psi} \quad (\text{III.32})$$

En substituant (III.25), (III.26) et (III.28) dans (III.32), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &\leq -c s^2 + \sum_{i=1}^p \psi_i^* |s_i| - s^T \Lambda \text{sgn}(s) + \frac{1}{\gamma} \tilde{\psi}^T \dot{\psi} \\ &\leq -c s^2 - \sum_{i=1}^p \tilde{\psi}_i |s_i| + \frac{1}{\gamma} \tilde{\psi}^T \dot{\psi} \leq -c s^2 \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

où  $c$  est la valeur propre minimale de la matrice  $F_{u_\lambda}^{-1} K$ .

L'équation (III.33) garantit que les signaux  $s_i(t)$ ,  $\tilde{\theta}(t)$  et  $\tilde{\psi}$  sont bornés car la fonction de

Lyapunov  $V_s$  est décroissante. Par conséquent les signaux  $\theta(t), x, u$  sont bornés. De plus,  $\dot{s}_i(t)$  est bornée car toutes les variables du membre droit de l'équation (III.24) sont bornés.

En intégrant l'équation (III.33) entre  $\tau = 0$  et  $\tau = t$ , et en supposant que  $c > 0$  car  $K$  est déterminée par le concepteur, on peut choisir une telle matrice  $K$ , on obtient:

$$\int_0^t s^2 d\tau \leq \frac{1}{c} [|V_s(0)| + |V_s(t)|] \quad (\text{III.34})$$

De l'équation (III.34), on déduit que le vecteur des surfaces de glissement  $s(t) \in L_2$ . Alors, en utilisant le lemme de Barbalat [Kha-96], on conclut que la surface de glissement  $s_i(t)$  tend vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini. De plus, l'erreur de poursuite  $e_i(t)$  et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $(r_i - 1)$  tendent vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini [Slo-91].

### III.5.3. Remarque 3.1

Dans le but de remédier au problème due au phénomène de broutement, la fonction  $sgn(s)$  dans (III.25) est remplacée par la fonction  $\tanh\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$ , où  $\varepsilon$  est une petite constante positive.

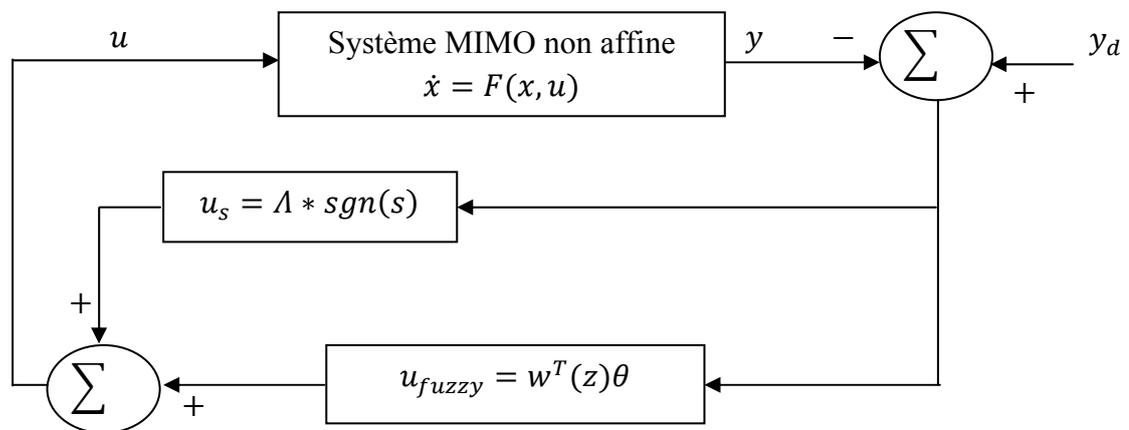


Figure III.1. Structure de la commande proposée.

## III.6. Exemples de simulation

Pour illustrer les performances de l'approche proposée, le contrôleur adaptatif flou robuste développé est mis en forme pour commander deux systèmes non linéaires MIMO non affines en la commande.

### III.6.1. Exemple 1

Considérons le système non linéaire MIMO non affine en la commande suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + 0.15u_1^3 + 0.1(2 + x_2^2)u_1 + \sin(0.1u_1) + 0.1u_2 + x_3x_4 + d \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -x_3 + x_2 + 0.1u_1 + u_2 - x_2^2x_4 - \frac{(x_1^2 + x_4^2)}{\exp(u_2)} + d \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

où  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  est le vecteur d'état du système,  $u_1$  et  $u_2$  sont les entrées de commande,  $y_1$  et  $y_2$  sont les sorties du système, et  $d = 0.5 \sin(t)$  est une perturbation externe.

L'objectif de la commande est de forcer les sorties du système  $y_1$  et  $y_2$  à suivre les trajectoires désirées  $y_{d1} = \sin(t)$  et  $y_{d2} = \cos(t)$ , respectivement.

Deux systèmes flous de la forme (III.16) sont utilisés pour générer les commandes  $u_1$  et  $u_2$ . Chaque système flou possède le vecteur d'entrée suivant  $z = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ , et pour chaque variable d'entrée  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , trois fonctions d'appartenance de forme Gaussienne sont définies :

$$\mu_{G_i^1}(x_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i + 0.5}{0.5}\right)^2\right)$$

$$\mu_{G_i^2}(x_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{0.5}\right)^2\right)$$

$$\mu_{G_i^3}(x_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - 0.5}{0.5}\right)^2\right)$$

L'état initial du système est  $x(0) = [0.5 \ 0 \ 0.25 \ 0]^T$ , et les valeurs initiales des vecteurs des paramètres estimés  $\theta$  et  $\psi$  sont considérées nulles.

Les paramètres de conception utilisés dans cet exemple de simulation sont choisis comme suit :  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\eta = 100$ ,  $\gamma = 10$  et  $\varepsilon = 0.01$ .

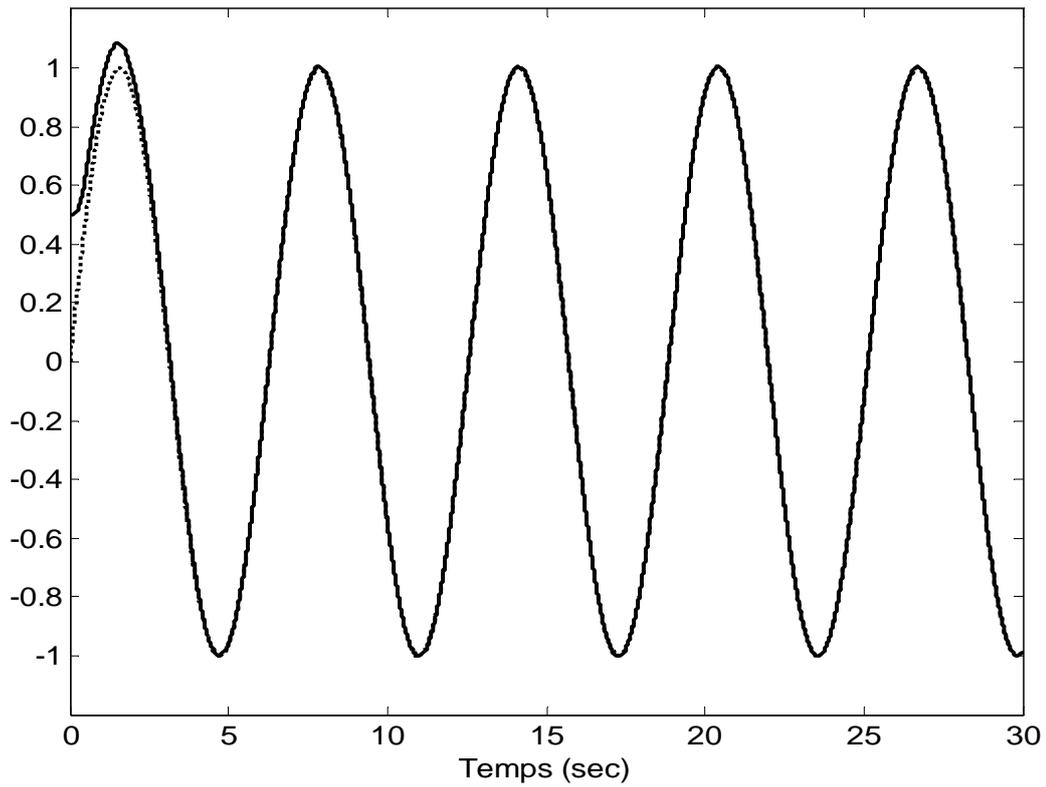


Figure III.2. Réponse de la sortie  $y_1$  (en traits continus) et sa référence  $y_{d1}$  (en pointillés).

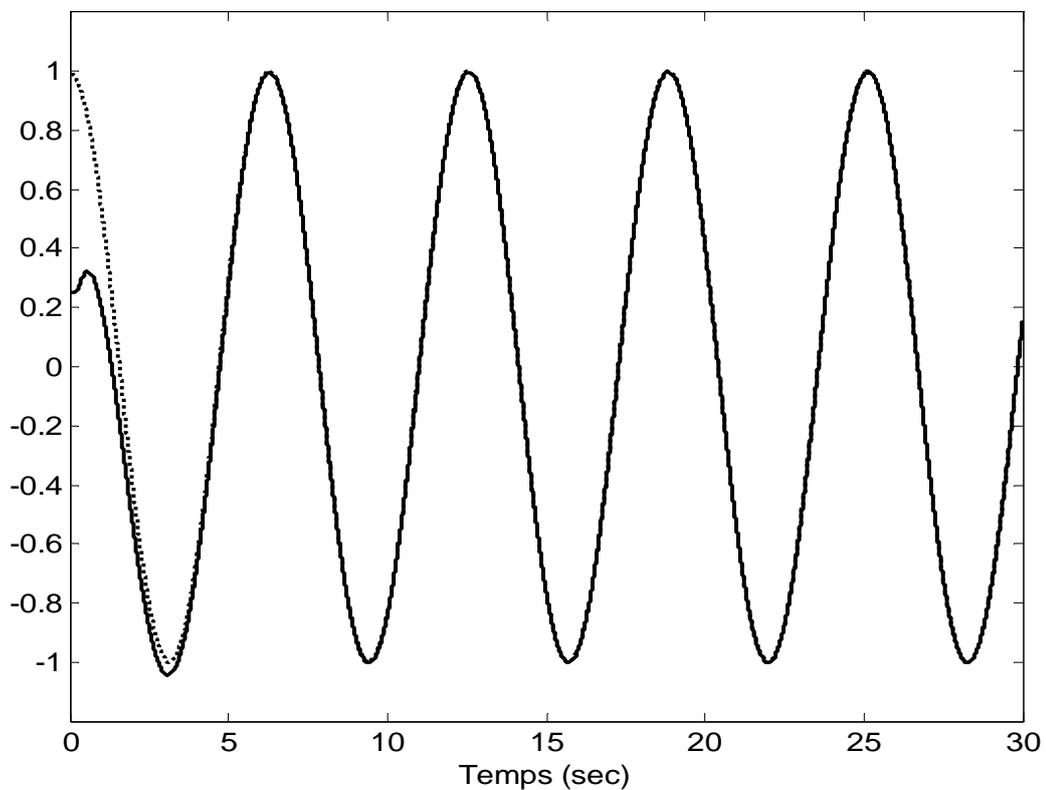


Figure III.3. Réponse de la sortie  $y_2$  (en traits continus) et sa référence  $y_{d2}$  (en pointillés).

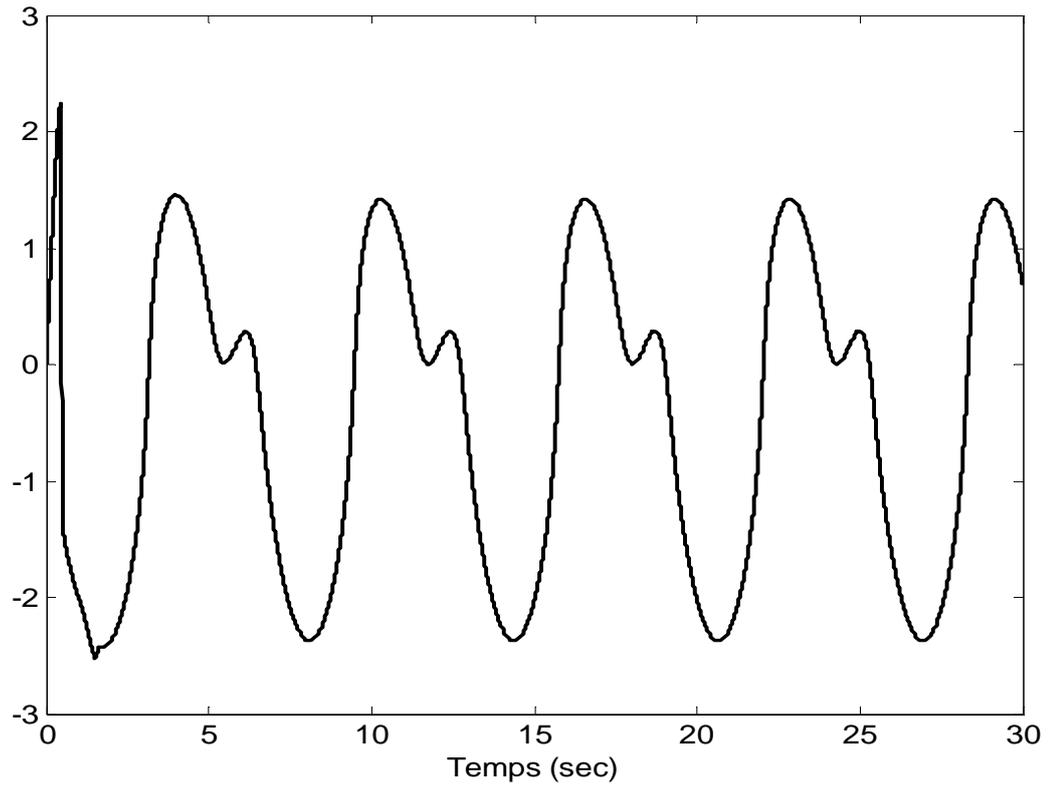


Figure III.4. Signal de commande  $u_1$ .

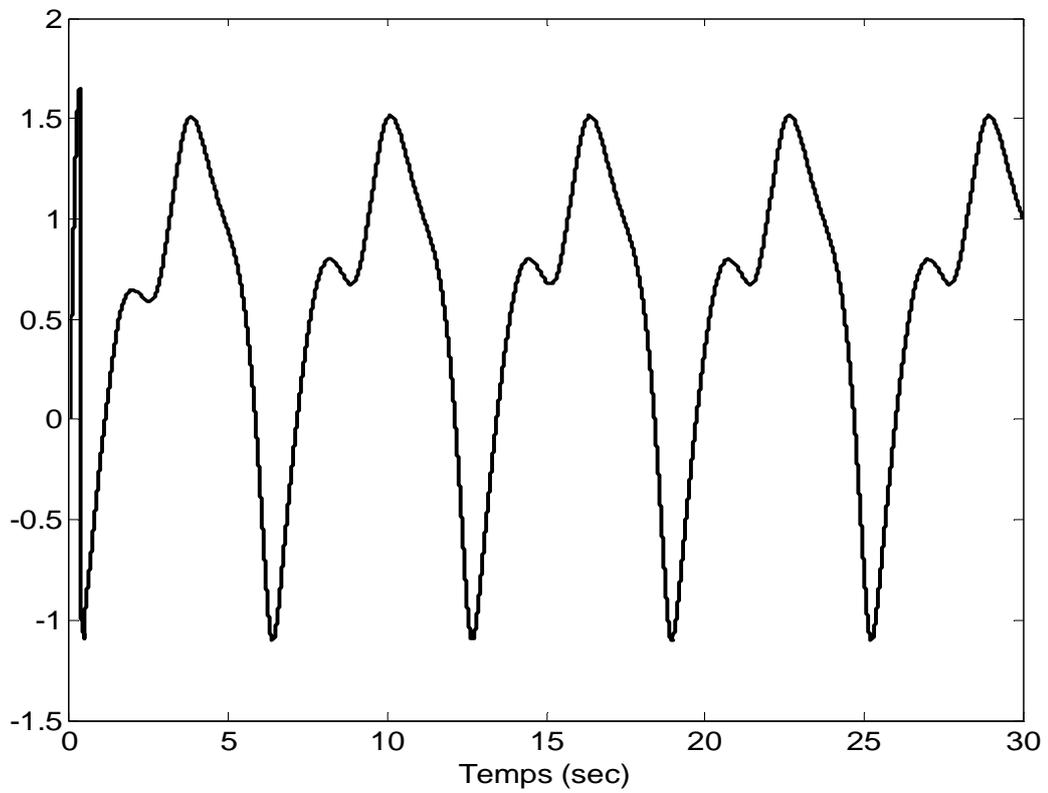


Figure III.5. Signal de commande  $u_2$ .

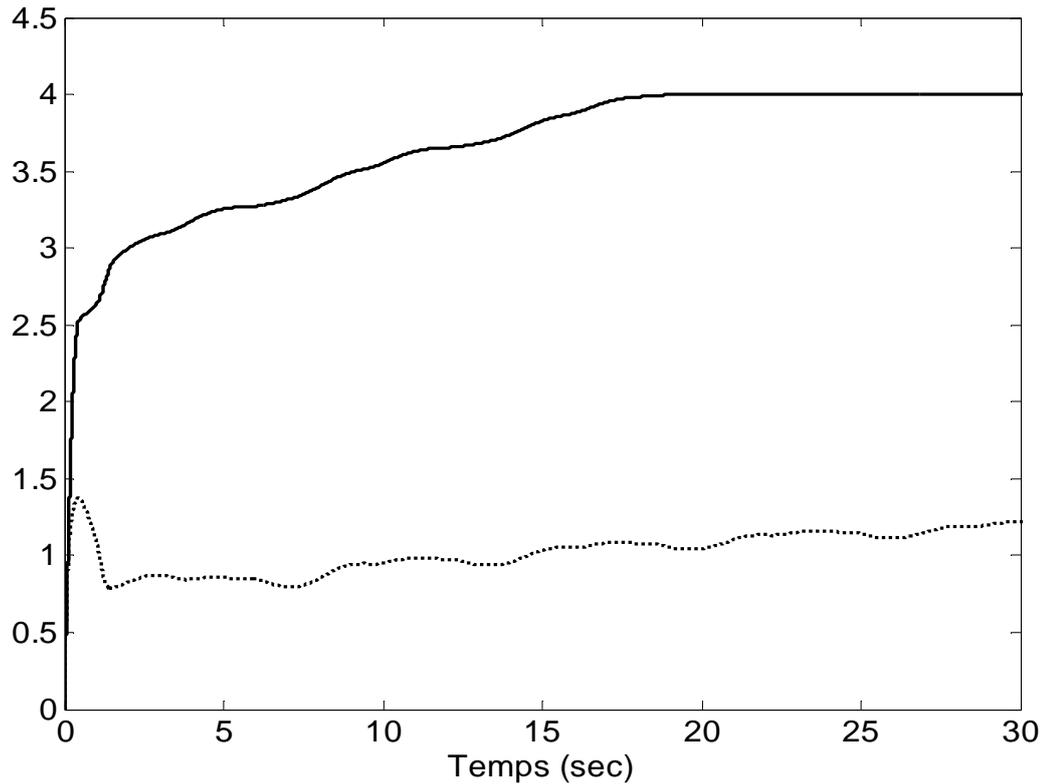


Figure III.6. Evolution de la norme des vecteurs des paramètres,  $\|\psi\|$  (en traits continus) et  $\|\theta\|$  (en pointillés).

Les résultats de simulation sont montrés sur les figures III.2-III.6. La sortie  $y_1$  et sa référence  $y_{d1}$  ainsi que la sortie  $y_2$  et sa référence  $y_{d2}$  sont représentés sur les figures III.2 et III.3, respectivement. L'allure des signaux de commande  $u_1$  et  $u_2$  est donnée par les figures III.4 et III.5, respectivement. L'évolution de la norme des paramètres estimés  $\theta$  et  $\psi$  est schématisée sur la figure III.6.

### III.6.2. Exemple 2

Considérons un deuxième système non linéaire MIMO non affine en la commande décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 2u_1 + u_2 + 2x_3 + x_4^2 + d \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = 0.5(2u_1 + \sin(u_2) + 4u_2) + 3x_1 + x_2^2 + d \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

où  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  est le vecteur d'état du système,  $u_1$  et  $u_2$  sont les entrées de commande,  $y_1$  et  $y_2$  sont les sorties du système, et  $d = 0.5 \sin(t)$  une perturbation externe.

L'objectif de la commande est de forcer les sorties de système  $y_1$  et  $y_2$  à suivre les trajectoires désirées suivantes  $y_{d1} = \sin(t) + \cos(0.5t)$  et  $y_{d2} = \sin(0.5t) + \cos(t)$ , respectivement.

Deux systèmes flous de la forme (III.16) sont utilisés pour générer les commandes  $u_1$  et  $u_2$ . Chaque système flou possède le vecteur d'entrée suivant  $z = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ , et pour chaque variable d'entrée  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , trois fonctions d'appartenance de forme Gaussienne sont considérées :

$$\mu_{G_i^1}(x_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}(x_i + 1)^2\right)$$

$$\mu_{G_i^2}(x_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}(x_i)^2\right)$$

$$\mu_{G_i^3}(x_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - 1)^2\right)$$

Les paramètres de conception utilisés dans cet exemple de simulation sont choisis comme suit:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\eta = 100$ ,  $\gamma = 10$  et  $\varepsilon = 0.01$ .

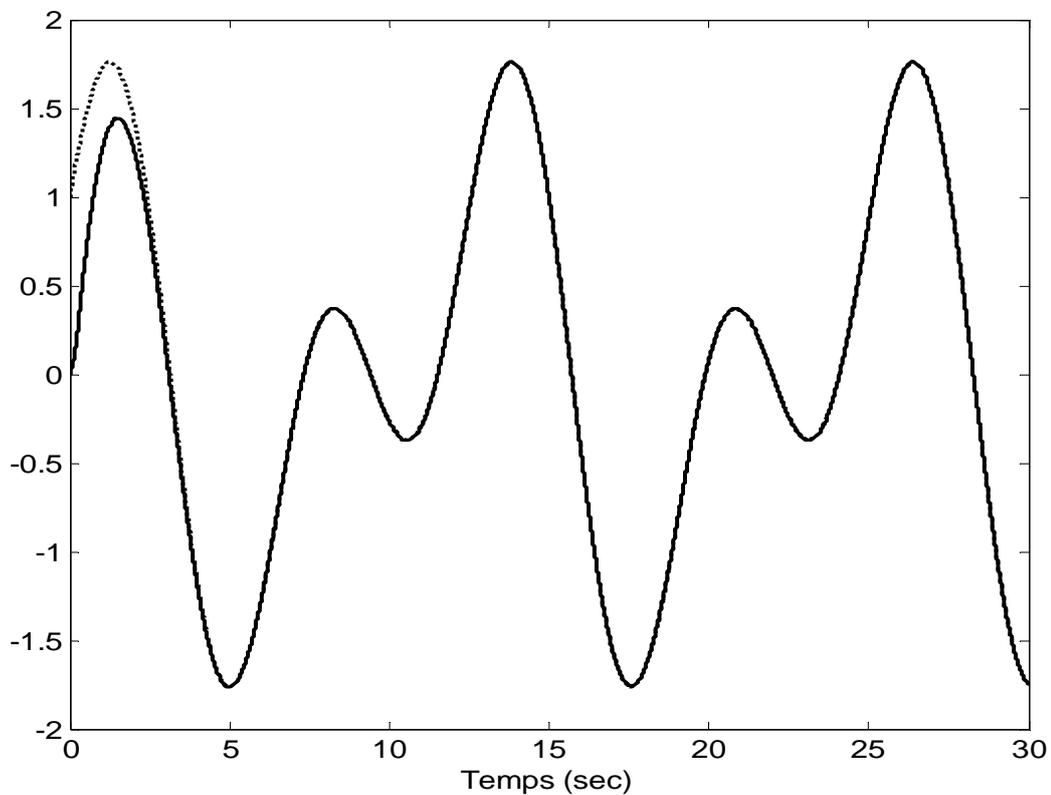


Figure III.7. Réponse de la sortie  $y_1$  (en traits continus) et sa référence  $y_{d1}$  (en pointillés).

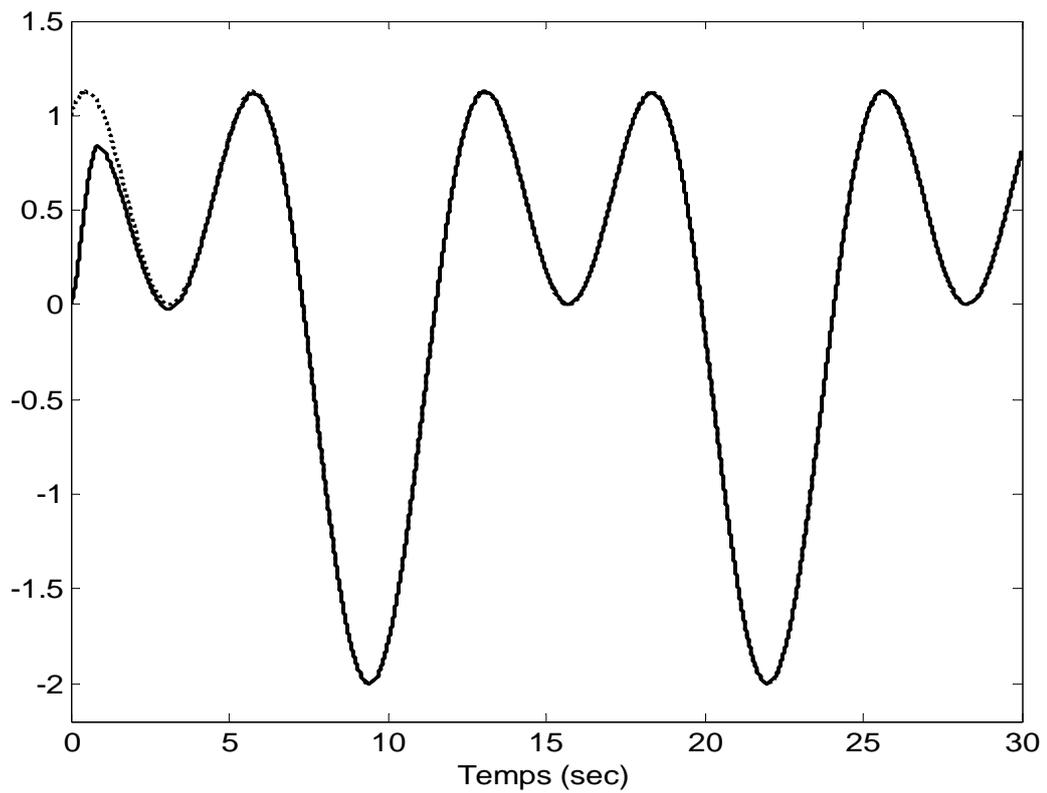


Figure III.8. Réponse de la sortie  $y_2$  (en traits continus) et sa référence  $y_{d2}$  (en pointillés).

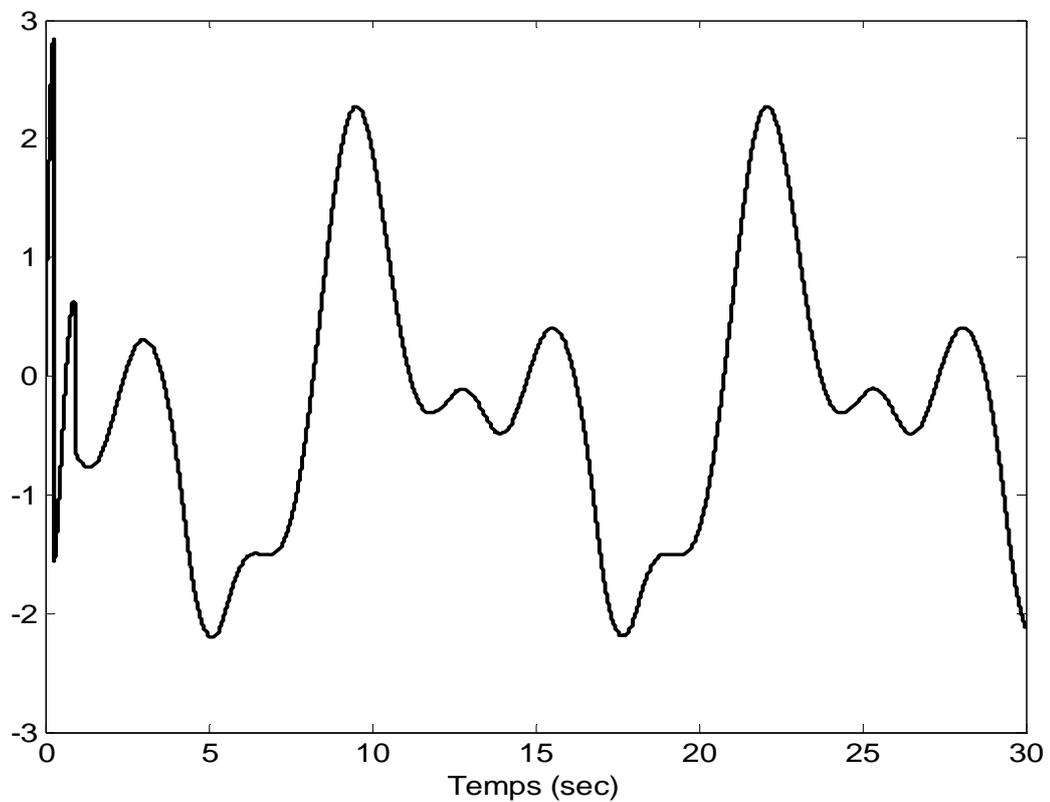


Figure III.9. Signal de commande  $u_1$ .

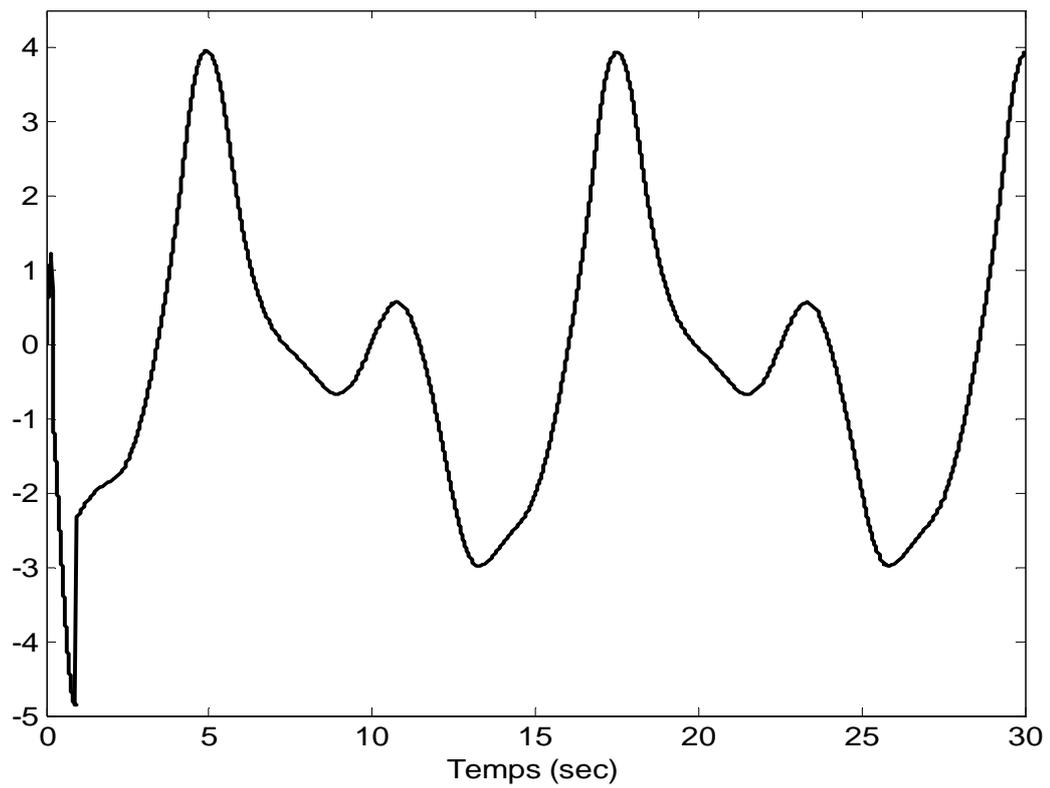


Figure III.10. Signal de commande

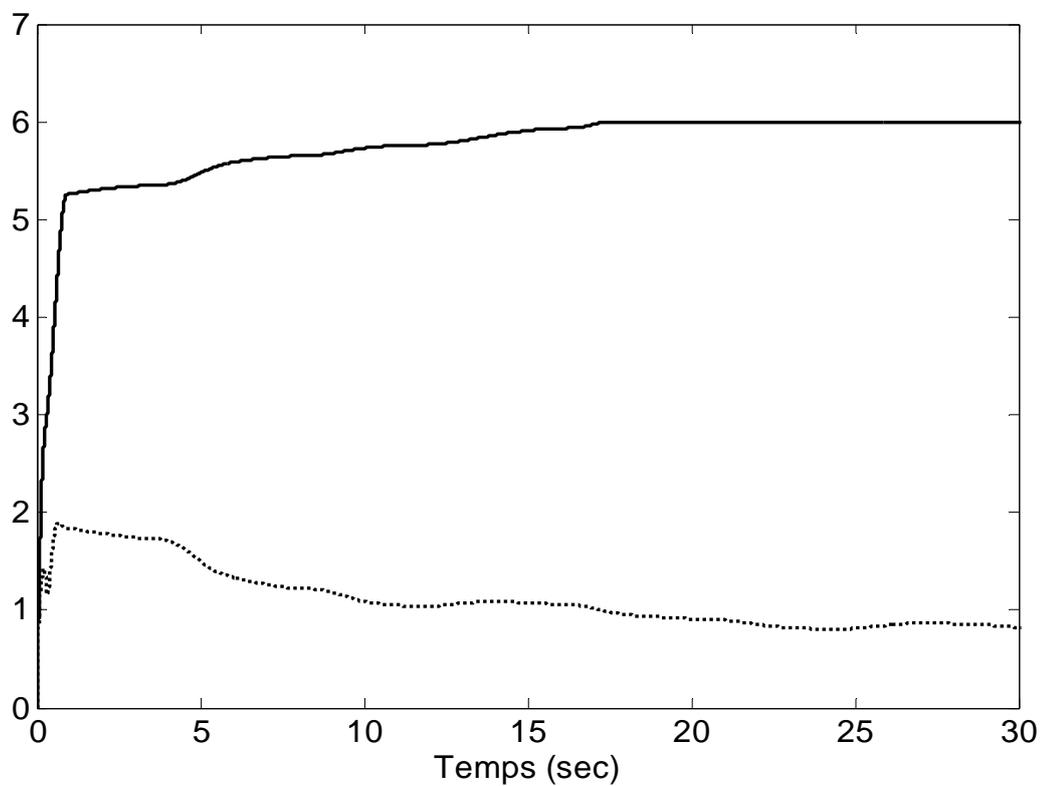


Figure III.11. Evolution de la norme des vecteurs des paramètres,  $|\psi|$  (en traits continus) et  $|\theta|$  (en pointillés).

Les résultats de simulation pour les conditions initiales suivantes :  $x(0) = [0 \ 0.5 \ 0 \ 0.5]^T$ ,  $\theta(0) = 0$  et  $\psi(0) = 0$  sont montrés sur les figures III.7-III.11. Les figures III.7 et III.8 montrent l'évolution des sorties du système  $y_1$  et  $y_2$  par rapport à leurs trajectoires de référence  $y_{d1}$  et  $y_{d2}$ , respectivement. Les figures III.9 et III.10 présentent les signaux de commande obtenus  $u_1$  et  $u_2$ , respectivement. La figure III.11 montre l'évolution de la norme des vecteurs des paramètres ajustés  $|\theta|$  et  $|\psi|$ .

A partir des résultats de simulation obtenus dans les deux exemples, nous pouvons noter de bonnes performances de poursuite réalisées grâce aux signaux de commande  $u_1$  et  $u_2$  qui sont bornés et de forme lisse avec des paramètres ajustables dont la norme est convergente (bornée).

### **III.7. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons proposé et développé une commande adaptative floue directe par mode glissant pour une classe de systèmes non linéaires MIMO non affines en la commande. Cette structure de commande est capable d'assurer de bonnes performances de poursuite et de garantir la stabilité du système en boucle fermée. Dans cette approche, des systèmes flous de type T-S sont exploités pour approximer un contrôleur idéal inconnu dont l'existence est prouvée par le théorème de la fonction implicite globale. La robustesse vis à vis des erreurs d'approximation et des perturbations externes est assurée par un terme de commande type mode glissant. Les lois d'adaptation sont déduites à travers l'analyse de la stabilité, au sens de Lyapunov, du système en boucle fermée. Les résultats de simulation obtenus pour les exemples proposés montrent de bonnes performances de poursuite et de robustesse, et mettent en évidence la capacité et l'efficacité du contrôleur flou développé à prendre en charge une certaine classe de systèmes non linéaires MIMO non affines en la commande.

# **Conclusion générale**

# Conclusion générale

Les travaux présentés dans le cadre de cette thèse de Doctorat ont pour objectif principal le développement de structures de commande adaptatives floues stables et robustes pour prendre en charge certaines classes de systèmes non linéaires SISO et MIMO non affines en la commande.

Pour atteindre cet objectif, nous avons commencé par présenter l'ensemble des définitions et des outils nécessaires à la mise au point de la stratégie adoptée pour le développement des lois de commande garantissant les performances souhaitées. En effet, après un rappel sur les principes de la logique floue, nous avons explicité les différentes étapes de la conception du contrôleur flou, à savoir; la fuzzification, la base de connaissances, le moteur d'inférence et la défuzzification, ainsi que les deux types de régulateurs flous : de Mamdani et celui de Takagi-Sugeno. Ensuite, nous avons présenté la structure de la commande adaptative avec ses deux variantes, directe et indirecte, ainsi que les concepts de la commande par mode glissant. Une commande adaptative floue indirecte par mode glissant est développée pour contrôler un système non linéaire SISO affine en la commande. La stabilité du système en boucle fermée est étudiée en utilisant l'approche de Lyapunov. La mise en œuvre de cette commande est validée, sous l'environnement Matlab, par la simulation du fonctionnement d'un pendule inversé.

Par la suite, nous avons développé une approche adaptative floue par mode glissant pour la commande des systèmes non linéaires SISO non affines en la commande. La structure de commande proposée comporte trois termes de commande ; le premier sert à stabiliser la dynamique linéarisée du système, le second exploite le théorème de la fonction implicite et un système flou pour approximer une fonction non linéaire inconnue, alors que le troisième terme assure la robustesse de la commande vis à vis des erreurs d'approximation et des perturbations externes. Les lois d'adaptation sont déduites via l'étude de stabilité du système

en boucle fermée en utilisant la synthèse de Lyapunov. Deux exemples de simulation sont mis en oeuvre, sous l'environnement Matlab, pour valider l'approche proposée.

Dans la dernière partie, qui constitue notre principale contribution dans ce travail, nous avons développé un contrôleur adaptatif flou par mode glissant pour une classe de systèmes non linéaires MIMO non affines en la commande. Pour ce fait, nous avons exploité en premier lieu le théorème de la fonction implicite globale pour montrer l'existence du contrôleur idéal inconnu. Ensuite, nous avons utilisé des systèmes flous de type Takagi-Sugeno (T-S) pour concevoir ce contrôleur implicite. Les lois d'adaptation des paramètres ajustables sont déduites à partir de l'étude de stabilité au sens de Lyapunov des systèmes en boucle fermée. La robustesse étant assurée par l'ajout d'un terme de commande type mode glissant. La simulation, sous l'environnement Matlab, de deux systèmes non linéaires MIMO non affines en la commande, a permis de mettre en évidence l'apport de l'approche proposée.

Les résultats obtenus pour la classe des systèmes non linéaires non affines MIMO, nous encouragent à étendre l'approche développée pour des classes plus générales de systèmes non linéaires MIMO non affines en la commande et d'introduire des observateurs pour estimer les états non mesurables.

---

# Bibliographie

**[Ala-09]**

**Alaoui. M.C.S.**, Commande et observateur par modes glissants d'un système de pompe et d'un bras manipulateur, Thèse de Doctorat Nationale, Université de Sidi Mohammed ben Abdellah, Maroc, 2009.

**[Bab-95]**

**Babuska, R., and Verbruggen , H.B.**, A New Identification Method for Linguistic Fuzzy Models, *Proc. of Fuzzy IEEE'95*, Yokohama, Japan, pp. 905-912, 1995.

**[Bag-99]**

**Baghli, L.**, Contribution à la commande de la machine asynchrone, utilisation de la logique floue, des réseaux de neurones et des algorithmes génétiques, Thèse de Doctorat, Université de Nancy-I, France, 1999.

**[Bon-85]**

**Bondarev, A.G., Bondarev, S.A., Kosteleva, N.E., and Utkin, V.I.**, Sliding Modes in Systems with Asymptotic State Observers, *Automation and remote control*, Vol. 46, N°. 6, pp. 49–64, 1985.

**[Bos-01]**

**Boskovic, J.D., Chen, L.J., and Mehra, R.K.**, Multivariable Adaptive Controller Design for a Class of Non-Affine Models Arising in Flight Control, *Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control*, Orlando, Florida USA: pp.273-278, 2001.

**[Buh-94]**

**Bühler, H.**, *Réglage Par Logique Floue*, Presse Polytechniques et Universitaires Romandes, 1994.

**[Bou-00]**

**Boukezzoula, R.**, Commande floue d'une classe de systèmes non linéaire : application au problème de suivi de trajectoire, Thèse de Doctorat, Université de Savoie- France, 2000.

**[Bou-01]**

**Boukezzoula, R., Galichet, S., and Foulloy, L.,** Robust Fuzzy Control for a Class of Nonlinear Systems Using Input-Output Linearization: Real-Time Implementation for a Robot Wrist, *Proc. of IEEE Inter Conf. on Control Applications*, Mexico City, Mexico, pp. 311-316, 2001.

**[Bou-03]**

**Boukezzoula, R., Galichet, S., and Foulloy, L.,** Fuzzy Adaptive Linearizing Control for Non-Affine Systems, *Proc. of IEEE Inter Conf. on Fuzzy Systems*, St Louis USA, pp. 543-548, 2003.

**[Cha-00]**

**Chang, Y. C.,** Robust Tracking Control for Nonlinear MIMO Systems via Fuzzy Approaches, *Automatica*, Vol. 36, pp. 1535–1545, 2000.

**[Cha-01]**

**Chang, Y. C.,** Adaptive Fuzzy-based Tracking Control for Nonlinear SISO Systems via VSS and  $H^\infty$  Approaches, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 9, pp. 278-292, 2001.

**[Che-96]**

**Chen, B.S., Lee, C.H., and Chang, Y.C.,**  $H^\infty$  Tracking Design of Uncertain Nonlinear SISO Systems: Adaptive Fuzzy Approaches, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 4, N° 1, pp. 32–43, 1996.

**[Che-08]**

Chen, C.S., Adaptive Fuzzy Control Systems with Dynamic Structure, *Inter Jour of Systems Science*, Vol. 39, N° 2, pp. 163-172, 2008.

**[Dou-08]**

**Doudou, S., Khaber, F.,** Adaptive fuzzy control of a class of SISO nonaffine nonlinear Systems. *Proc. of AIP Conf. on Intelligent Systems and Automation*, pp. 103-108, 2008.

**[Dou-10a]**

**Doudou, S., Khaber, F.,** Commande Adaptative Floue Robuste Directe par Mode Glissant pour une Classe de Systèmes Non Lineaires Non Affines. *Proc. of Inter Conf. on Industrial Engineering & Manufacturing, ICIEM'10*, Batna-Algeria, 2010.

**[Dou-10b]**

**Doudou, S., Khaber, F.**, Commande Robuste par Mode Glissant pour une Classe de Systèmes Non Linéaires Non Affines : Approche Adaptative Floue Indirecte. *Proc. of the 1er Colloque International Francophone Ingénierie et Environnement, CIFIE 2010*, Annaba-Algeria, 2010.

**[Dou-11]**

**Doudou, S., Khaber, F.**, Adaptive Fuzzy Controller for Uncertain Nonaffine Nonlinear System using Sliding Mode Control. *Proc. of Inter Conf. on Automation and Mechatronics, CIAM'2011*, pp. 133-138, Oran-Algeria, 2011.

**[Dou-12]**

**Doudou, S., Khaber, F.**, Direct Adaptive Fuzzy Control of a Class of MIMO Non-Affine Nonlinear Systems. *Inter Jour of Systems Science*, Vol. 43, N°. 06, pp. 1029-1038, 2012.

**[Dri-93]**

**Driankov, D., Hellendoorn, H., and Reinfrank, M.**, An Introduction to Fuzzy Control, *Springer-Verlag*, 1993.

**[Dub-87]**

**Duboi, D., and Prade, H.**, Théorie des Possibilités: Applications à la Représentation des Connaissances en Informatique, Masson, 1987.

**[Ess-06]**

**Essounbouli, N., Hamzaoui, A., and Zaytoon, J.**, Direct and Indirect Robust Adaptive Fuzzy Controllers for a Class of Nonlinear Systems. *Inter Jour of Control, Automation, and Systems*, Vol. 4, N°. 2, pp. 146-154, 2006.

**[Eme-86]**

**Emel'yanov, S.V., Korovin., S.V., and Levantovsky, L.V.**, Higher Order Sliding Modes in the Binary Control System, *Soviet Physics*, Vol. 31, N°. 04, pp. 291–293, 1986.

**[Fri-02]**

**Fridman, L., and Levant, A.**, Higher-Order Sliding Modes, Sliding Mode Control in Engineering, Control Engineering Series, Marcel Dekker Inc, 2002.

**[Gal-01]**

**Galichet, S.**, Contrôle flou : de l'interpolation numérique au codage de l'expertise, Habilitation à diriger des recherches, Université de Savoie- France, 2001.

**[Gol-03]**

**Golea, N., Golea, A., and Benmahammed, K.**, Stable Indirect Fuzzy Adaptive Control, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 137, pp. 353–366, 2003.

**[Goo-87]**

**Goodwin, G.C., and Mayne, D.Q.**, A parameter Estimation Perspective of Continuous Time Model Reference Adaptive Control, *Automatica*, Vol. 23, pp. 57-70, 1987.

**[Ho-09]**

**Ho, H.F., Wong, Y.K., and Rad, A.B.**, Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control with Chattering Elimination for Nonlinear SISO Systems, *Simulation Modeling Practice and Theory*, Vol. 17, pp. 1199-1210, 2009.

**[Ioa-96]**

**Ioannou, P., and Sun, J.**, *Robust Adaptive Control*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1996.

**[Isi-95]**

**Isidori, A.**, *Nonlinear Control System*, Springer-Verlag, Berlin, third edition.1995.

**[Kha-96]**

**Khalil, H.K.**, *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, 1996.

**[Kha-06]**

**Khaber, F., Hamzaoui, A., Zehar, K., and Essounbouli, N.**, New Stable Adaptive Fuzzy Approach to Control Uncertain Nonlinear SISO Systems, *Inter Jour of Systems Science*, Vol. 37, N<sup>o</sup>. 6, pp. 437-445, 2006.

**[Krs-95]**

**Krstic, M., Kanellakopoulos, I., and Kokotovic, P.V.**, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, NewYork: Weley Interscience, 1995.

**[Lab-03]**

**Labiod, S., and Boucherit, M.S.**, Direct Stable Fuzzy Adaptive Control of a Class of SISO Nonlinear Systems, *Arch. Control Science*, Vol. 13, N<sup>o</sup>. 1, pp. 95–110, 2003.

**[Lab-05]**

**Labiod, S., Boucherit, M.S., and Guerra, T.M.**, Adaptive Fuzzy Control of a Class of MIMO Nonlinear Systems, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 151, pp. 59–77, 2005.

**[Lab-07a]**

**Labiod, S., and Guerra, T.M.**, Direct Adaptive Fuzzy Control for a Class of MIMO Nonlinear Systems, *Inter Jour of Systems Science*, Vol. 38, N<sup>o</sup>. 8, pp. 665–675, 2007.

**[Lab-07b]**

**Labiod, S., and Guerra, T.M.**, Adaptive Fuzzy Control of a Class of SISO Non-affine Nonlinear Systems, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 158, pp. 1126–1137, 2007.

**[Lac-97]**

**Lacrose, V.**, Réduction de la complexité des contrôleurs flous : Application à la commande multivariable, Thèse de Doctorat, Université de Toulouse- France, 1997.

**[Liu-07]**

**Liu, Y.J., and Wang, W.**, Adaptive Fuzzy Control for a Class of Uncertain Non-affine Nonlinear Systems, *Information Sciences*, Vol. 177, pp. 3901–3917, 2007.

**[Li-03]**

**Li, H.X., and Tong, S.C.**, A Hybrid Adaptive Fuzzy Control for a Class of Nonlinear MIMO Systems, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 11, N<sup>o</sup>. 01, pp. 24-34, 2003.

**[Mam-74]**

**Mamdani, E.H.**, Application of Fuzzy Algorithms for Simple Dynamic Plant, *Proc. of IEE Control and Science*, Vol. 121, N<sup>o</sup>. 12, pp. 1585-1588, 1974.

**[Meu-95]**

**MEUNIER, B., Bernadette**, *La Logique Floue et ces Applications*, Addison Wesley, France, 1995.

**[Ord-99]**

**Ordonez, R., and Passino, K.M.**, Stable Multi-input Multi-output Adaptive Fuzzy/Neural Control, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 7, N<sup>o</sup>. 03, pp. 345-353, 1999.

**[Par-03]**

**Park, J.H., Seo, S.J., and Park, G.T.**, Robust Adaptive Fuzzy Controller for Nonlinear System using Estimation of Bounds for Approximation Errors, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 133, pp. 19–36, 2003.

**[Par-03a]**

**Park, J.H., and Park, G.T.**, Robust Adaptive Fuzzy Controller for Non-Affine Nonlinear Systems with Dynamic Rule Activation, *Inter Jour of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 13, pp. 117–139, 2003.

**[Par-03b]**

**Park, J.H., Kim, S.H., Kim, D.W., and Park, G.T.**, Direct Adaptive Fuzzy Controller with Small Number of Fuzzy Rules for Nonaffine Nonlinear System, *Proc. of IEEE Inter Conf. on Fuzzy Systems*, pp. 1412–1417, 2003.

**[Par-04]**

**Park, J. H., and Kim, S.H.**, Direct Adaptive Output Feedback Fuzzy Controller for Nonaffine Nonlinear System, *Proc. of IEE, Control Theory Applications*, Vol. 151, N<sup>o</sup>. 1, pp. 65–72, 2004.

**[Par-05]**

**Park, J.H., Park, G.T., Kim, S.H. and Moon, C.J.**, Direct Adaptive Self-Structuring Fuzzy Controller for Nonaffine Nonlinear System, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 153, N<sup>o</sup>. 3, pp. 429–445, 2005.

**[Pha-08]**

**Phan, P.A., and Gale, T.J.**, Direct Adaptive Fuzzy Control with a Self-Structuring Algorithm, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 159, pp. 871–899, 2008.

**[Qia-04]**

**Qiao, F., Zhu, Q., Winfield, A.F., and Melhuish, C.**, Adaptive Sliding Mode Control for MIMO Nonlinear Systems Based on Fuzzy Logic Scheme, *Inter Jour of Automation and Computing*, Vol. 01, pp. 51–62, 2004.

**[Sah-00]**

**Sahoo, N.C., Xu, J.X., and Panda, S.K.**, An Iterative Learning-based Modulation scheme for Torque Control in Switched Reluctance Motors, *Electr. Mach. Power Syst.*, Vol. 28, N<sup>o</sup>. 11, pp. 995–1018, 2000.

**[Shi-99]**

**Shiriaevev, A.S., Ludvigsen, H., Egeland, O., Fradkov, A.L.**, Swinging up of Non-Affine in Control Pendulum, *Proc. of American Control Conf.* San Diego, USA, pp. 4039–4044, 1999.

**[Slo-83]**

**Slotine, J.J., and Sastry, S.S.**, Tracking Control of Nonlinear System using Sliding Surface, with Application to Robotic Manipulators, *Inter Jour of Control*, Vol. 38, pp. 465–492, 1983.

**[Slo-84]**

**Slotine, J.J.E.**, Sliding Controller Design for Nonlinear Systems, *Inter Jour of Control*, Vol. 40, N°. 2, pp. 421–434, 1984.

**[Slo-91]**

**Slotine, J.J., and Li, W.**, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall. Inc., 1991.

**[Spo-96]**

**Spooner, J.T., and Passino, K.M.**, Stable Adaptive Control using Fuzzy Systems and Neural Networks, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*. Vol. 4, pp. 339-359, 1996.

**[Tak-85]**

**Takagi, T., and Sugeno, M.**, Fuzzy Identification of Systems and its Applications to Modeling and Control, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 15, N°. 1, pp. 116-132, 1985.

**[Tan-99]**

**Tang, Y., Zhang, N., and Li, Y.**, Stable Fuzzy Adaptive Control for a Class of Nonlinear Systems, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 104, pp. 279–288, 1999.

**[Ton-99]**

**Tong, S.C., Li, Q., and Chai, T.**, Fuzzy Adaptive Control of a Class of Nonlinear Systems, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 101, pp. 31–39, 1999.

**[Ton-00]**

**Tong, S.C., Tang, J., and Wang, T.**, Fuzzy Adaptive Control of Multivariable Nonlinear Systems, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 111, pp. 153–167, 2000.

**[Ton-02]**

**Tong, S.C., and Li, H.X.**, Direct Adaptive Fuzzy Output Tracking Control of Nonlinear Systems, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 128, pp. 107–115, 2002.

**[Utk-77]**

**Utkin, V.I.**, Variable Structure Systems with Sliding Mode, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 22, N° 2, pp. 212–222, 1977.

**[Utk-92]**

**Utkin, V.I.**, *Sliding Modes in Control Optimization*, Springer-Verlag, 1992.

**[Wan-94]**

**Wang, L.X.**, *Adaptive Fuzzy Systems and Control*, Englewood Cliff, NJ: Prentice-Hall, 1994.

**[Wan-96]**

**Wang, L.X.**, Stable Adaptive Fuzzy Controllers with Application to Inverted Pendulum Tracking, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 26, pp. 677-691, 1996.

**[Wan-00]**

**Wang, J., Ge, S.S., and Lee, T.H.**, Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control of a Class of Nonlinear Systems, *Proc. of Third Asian Control Conf*, pp. 599–604, 2000.

**[Wan-07]**

**Wang, W.Y., Chien, L.C., Li, I.H., and Su, S.F.**, MIMO Robust Control via T-S Fuzzy Models for Nonaffine Nonlinear Systems, *Proc of IEEE Inter Conf. on Fuzzy Systems*, pp. 1–6, 2007.

**[Wen-08]**

**Wen, J., Jiang, C., Zhou, L., and Qian, C.**, Robust Adaptive Fuzzy Controller for a Class of Non-affine Nonlinear Systems, *Proc. of IEEE Conf. on Systems and Control in Aerospace and Astronautics, ISSCAA 2008* , pp. 1–6, 2008.

**[Xu-03]**

**Xu, H., and Ioannou, P.A.**, Robust Adaptive Control for a Class of MIMO Nonlinear Systems with Guaranteed Error Bounds, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 48, N° 5, pp. 728-742, 2003.

**[Yoo-98]**

**Yoo, B., and Ham, W.**, Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control of Nonlinear System, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 6, pp. 315-321, 1998.

**[Yoo-01]**

**Yoon, P.S., Park, J.H. and Park, G.T.**, Adaptive Fuzzy Control of Nonaffine Nonlinear Systems using Takagi-Sugeno Models, *Proc. of IEEE Inter Conf. on Fuzzy Systems*. Melbourne, Australia, pp. 642-645, 2001.

**[Zad-65]**

**Zadeh, L.A.**, Information and Control, *Fuzzy Sets*, Vol. 8, pp. 338-353, 1965.

**[Zha-06]**

**Zhang, W., and Ge, S.S.**, A Global Implicit Function Theorem without Initial Point and its Applications to Control of Non-affine Systems of High Dimensions, *Jour of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 313, pp. 251–261, 2006.

## Résumé

La commande adaptative floue par mode glissant peut être définie comme une méthode de contrôle robuste, dans laquelle les systèmes flous sont utilisés pour approximer la dynamique du système où certains de ses paramètres sont adaptés en ligne afin de garantir la stabilité du système en boucle fermée. Les incertitudes et les perturbations externes sont compensées par un terme de commande par mode glissant. Dans ce travail de thèse, deux approches adaptatives floues sont proposées pour la commande de certaines classes de systèmes non linéaires SISO et MIMO non affines en la commande. Pour les systèmes SISO, la commande proposée comporte trois termes de commande ; le premier sert à stabiliser la dynamique linéarisée du système, le second terme utilise le théorème de la fonction implicite et un système flou pour approximer une fonction non linéaire inconnue alors que le dernier terme assure la robustesse de la commande vis à vis des erreurs d'approximation et des perturbations externes. Pour la classe des systèmes MIMO, un contrôleur idéal inconnu, dont l'existence est montrée par le théorème de la fonction implicite globale, est approximé par des systèmes flous de type Takagi-Sugeno à une conclusion constante. Cette approche assure la robustesse de la commande à travers un terme de commande par mode glissant. Dans les deux approches, les lois d'adaptation sont déduites via l'analyse de stabilité au sens de Lyapunov du système en boucle fermée.

**Mots Clés :** Systèmes flous, commande adaptative floue par mode glissant, théorème de la fonction implicite, systèmes non linéaires SISO et MIMO non affines.

## Abstract

Adaptive fuzzy sliding mode control can be defined as a method of robust control, in which fuzzy systems are used to approximate unknown functions, some of the system parameters are adapted online to ensure the stability of the closed loop system and, uncertainties and external disturbances are compensated by the sliding mode. In this thesis, two adaptive fuzzy approaches are proposed to control some classes of nonlinear non-affine SISO and MIMO systems. For SISO systems, the proposed control contains three terms, the first stabilize the linearized dynamic system, the second uses the implicit function theorem and a fuzzy system to approximate an unknown nonlinear function and the last term ensures the robustness of control. For the class of MIMO systems, an unknown ideal controller, whose existence is shown by the global implicit function theorem, is approximated by Takagi- Sugeno fuzzy systems with a constant conclusion. This approach ensures the robustness of the control via sliding mode term. The adaptation laws in both approaches are derived by analyzing the stability of the closed loop system by Lyapunov synthesis.

**Key words:** Fuzzy systems, adaptive fuzzy sliding mode control, implicit function theorem, nonlinear non affine SISO and MIMO Systems,.

## ملخص

التحكم الغامض التكيفي الإنزلاقي يمكن تعريفه كوسيلة من وسائل التحكم قوية، والتي تستخدم الأنظمة الغامضة لتقريب دوال غير معروفة أين يتم تكيف وسائط النظام لضمان استقرار النظام في حلقة مغلقة. عدم اليقين و الاضطرابات الخارجية تم تعويضهما عن طريق مكون إنزلاقي. في هذه المذكرة، طريقتين غامضتين تكيفيتين تم اقتراحهما للتحكم في فئات من الأنظمة غير الخطية غير الدقيقة حيث التحكم يظهر بصورة غير خطية في نموذج الحالة SISO و MIMO. بالنسبة لفئة الأنظمة SISO، التحكم المقترح يتكون من ثلاثة مركبات، الأول لضمان استقرار الديناميكية الخطية للنظام، الثاني يستعمل نظرية الدالة الضمنية و نظام غامض لتقريب دالة غير خطية مجهولة و المكون الأخير يضمن متانة التحكم ضد أخطاء التقريب و الاضطرابات الخارجية. بالنسبة لفئة الأنظمة MIMO، المراقب المثالي الضمني، المثبت وجوده بواسطة نظرية الدالة الضمنية الجامعة، يقرب من خلال الأنظمة الغامضة لتكاجي و سجينو ذات خلاصة ثابتة. هذه الطريقة تضمن متانة التحكم عن طريق مكون إنزلاقي. القوانين التكيفية للوسائط المعدلة للنظام في كلتا الطريقتين استخلصت من تحليل الإستقرار على المنهج الخاص بليابونوف.

**الكلمات المفتاحية :** النظام الغامض ، التحكم الغامض التكيفي الإنزلاقي، نظرية الدالة الضمنية، الأنظمة غير الخطية SISO و MIMO حيث التحكم يظهر في صورة غير خطية .