

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
(ALGERIE)

Université Ferhat Abbas-Sétif 1 (UFAS1)

MEMOIRE

Présenté à la Faculté de Technologie

Département d'Electrotechnique

Pour l'Obtention du Diplôme de

MAGISTER

Option : AUTOMATIQUE

Par

M. SOULA Aziz

Thème

Identification et Diagnostic des Systèmes
Linéaires à Paramètres Variants (LPV)
Application a un Système Thermique

Soutenu le 22 / 01 / 2014 devant un Jury composé de :

HARMAS MOHAMED NAGUIB	Prof. à l'université de Sétif1	Président
KHEMLICHE MABROUK	Prof. à l'université de Sétif1	Rapporteur
KHABER FARID	Prof. à l'université de Sétif1	Examineur
SAIT BELKACEM	M.C. à l'université de Sétif1	Examineur

Remerciement

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire d'Automatique de Sétif (LAS) sous la direction du Dr. KHEMLICHE Mabrouk, Professeur à l'Université Sétif 1 et Directeur du laboratoire L.A.S, à qui je tiens à exprimer mes vifs remerciements de son encadrement, de son patience, de ses compétences scientifiques, de ses idées par lesquelles il m'a orienté pour l'accomplissement de cette lourde tâche de recherche.

Je tiens à remercier Monsieur Dr. Mohamed Naguib HARMAS Professeur à l'Université Sétif1 et membre du Laboratoire de la Qualité d'Energie dans les Réseaux Electriques (Q.U.E.R.E) de Sétif pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de soutenance.

Je remercie également les membres de jury : Dr. Farid KHABER, Professeur à l'Université Sétif1 et Directeur du Laboratoire Q.U.E.R.E, Dr. Athmane LAMAMRA Maitre de Conférences à l'Université Sétif1 et Directeur du Laboratoire des Systèmes Intelligents (L.S.I) et Dr. Belkacem SAIT Maitre de Conférences à l'Université Sétif1 et membre du Laboratoire L.A.S, pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Mes vifs remerciements s'adressent également à mes chers collègues Dr. Bilal SARI et Dr. Seif Eddine CHOUABA, ainsi que M. Abderrahmane AKESSOULENE et M. Driss Mahdi AZIZI à qui j'exprime ma profonde gratitude pour leur aide, conseils et encouragements durant toute la période de réalisation de ce projet.

Je veux également remercier mes amis pour leur soutien moral. Ainsi que toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Je voudrais également adresser mes remerciements aux membres de l'administration du Département d'Electrotechnique pour l'aide apportée.

Enfin, je remercie tout particulièrement mes chers parents, pour leur soutien inconditionnel tout au long de ces longues années d'études.

M. Aziz SOULA

Table des matières

Introduction générale	01
------------------------------	-----------

Chapitre 01 : Généralités sur la Linéarité et la Non Linéarité des Systèmes

1.1	Introduction	04
1.2	Différents types de modèles mathématiques	05
1.3	Équations de systèmes dynamiques	06
1.3.1	Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles	07
1.3.2	Equations différentielles dépendante / indépendante du temps	07
1.3.3	Equations différentielles linéaires et non linéaires	08
1.4	Linéarité et Invariance Temporelle	11
1.4.1	Linéarité et superposition	11
1.4.2	Invariance temporelle	12
1.5	Systèmes bilinéaires ou multilinéaires	13
1.6	Systèmes dynamiques non linéaires	13
1.7	Quelques types de non-linéarité des systèmes	14
1.7.1	Non linéarités essentielles	15
1.7.2	Non linéarités accidentelles	15
1.8	Passage du modèle non linéaire au modèle linéaire	16
1.8.1	Point d'équilibre et ensemble d'équilibre	16
1.8.2	Linéarisation autour d'un point d'équilibre	17
1.9	Conclusion	19

Chapitre 02 : Modélisation et Identification des Systèmes LTI

2.1	Introduction	20
2.2	Types de modèles paramétriques	21
2.2.1	Modèles de Connaissance	21
2.2.2	Modèles de Comportement	21
2.3	Structures des modèles LTI	23
2.3.1	Modèle d'Espace d'Etat	23
2.3.2	Modèles de Fonction de Transfert	24
a)	Fonction de transfert en temps continu	24
b)	Fonction de transfert en temps discret	25
2.3.3	Famille de modèles de fonction de transfert	26
a)	Modèle Box Jenkins (BJ)	26
b)	Modèle Auto-Régressive Moving Average exogènes (ARMAX)	26
c)	Modèle Auto-Régressive exogènes (ARX)	27
d)	Modèle Erreur de Sortie (OE)	28
e)	Modèle Réponse Impulsionnelle Finie (FIR)	28
2.4	Prédiction	29
2.5	Régression linéaire	30
2.6	Identification paramétrique des systèmes LTI	31
2.6.1	Méthodes de formulation des fonctions d'erreur	32
a)	Méthode d'Erreur d'Equation (EEM)	32
b)	Méthode d'Erreur de Sortie (OEM)	33
2.6.2	Formulation du critère d'optimisation des fonctions d'erreur	34
2.6.3	Techniques d'optimisation des fonctions d'erreur	35
2.6.3.1	Optimisations linéaires au sens des moindres carrés simples	36
a)	Cas d'un modèle à temps discret	36
b)	Cas d'un modèle à temps continu	37
2.6.3.1	Optimisation non linéaires	39
a)	Méthode du Gradient Descent	39

	b)	Méthode du Gauss-Newton	39
	c)	Méthode de Levenberg-Marquardt	40
2.7		Qualité du Modèle	40
	a)	Variance	41
	b)	Biais	41
2.8		Conclusion	42

Chapitre 03 : Modélisation et Identification des Systèmes LPV

3.1		Introduction	43
3.2		Naissance et évolution des systèmes LPV	44
3.3		Systèmes dynamiques à Paramètre Variant	46
3.4		Définition des Systèmes LPV	48
3.5		Représentations des systèmes LPV	50
	3.5.1	Equations différentielles / aux différences à PV	50
	3.5.2	Représentation LPV-Entrée/Sortie	52
		3.5.2.1 Partition Entrée/Sortie	52
	3.5.3	Représentation LPV-Espace d'Etat	55
	3.5.4	Représentation LPV-OFB	59
3.6		Systèmes quasi-LPV	60
3.7		Formes de fonctions de séquençement	61
3.8		Dépendance statique et dépendance dynamique	63
3.9		Critères de choix du modèle : Continu ou Discret	64
3.10		Identification des systèmes LPV	65
	3.10.1	Identification LPV par approche locale	67
	3.10.2	Identification LPV par approche globale	68
	3.10.3	Identification LPV à temps continue / à temps discret	71
	3.10.4	Approches d'identification directe et indirecte	72
	3.10.5	Avantages d'estimation directe	72
	3.10.6	Excitation Persistante	75
3.11		Conclusion	78

Chapitre 04 : Modélisation et Identification LPV d'un Echangeur Thermique Réel

4.1	Introduction	80
4.2	Modélisation NL de l'Echangeur Thermique	81
4.3	Discretisation du modèle NL de l'échangeur	83
4.4	Modélisation LPV de l'échangeur	85
4.4.1	Choix de la structure du Modèle	86
4.4.2	Choix de l'approche d'Identification	86
4.4.3	Détermination des retards	87
4.4.4	Choix des variables de séquençement	88
4.4.5	Détermination de la structure du modèle LPV	90
4.5	Identification du modèle LPV global	92
4.5.1	Etape 1. Identification de la partie LPV	94
4.5.1.1	Choix des points de fonctionnement	94
4.5.1.2	Identification des modèles locaux	95
4.5.1.3	Interpolation des paramètres	100
a)	Interpolation Polynomiale	100
b)	Interpolation Floue	103
4.5.1.4	Construction du model LPV et validation	104
a)	Validation croisée (LPV, LTI)	105
b)	Validation du modèle LPV dans la zone d'estimation	106
c)	Validation du modèle LPV hors de la zone d'estimation	107
d)	Validation du modèle LPV avec une variation dynamique dans les variables de séquençement.	109
4.5.2	Etape 2. Identification de la partie LTI	111
4.5.3	Etape 3. Construction du modèle global et validation	113
4.6	Conclusion	118

Chapitre 05 : Modélisation et Identification LPV d'un Echangeur Thermique Réel

5.1	Introduction	119
5.1.1	Généralité sur le diagnostic des systèmes	120
5.1.2	Diagnostic moderne des systèmes LPV	122
5.2	Approches de diagnostic par les représentations LPV (état de l'art)	124
5.2.1	Approches basées sur la synthèse fréquentielle d'un filtre de détection LPV	125
5.2.2	Approches par espace de parité	126
5.2.3	Approche par inversion dynamique	128
5.2.4	Approches par observateurs LPV	129
a)	Approches par observateur de Luenberger	129
b)	Approches par observateur de Kalman	130
c)	Approches par observateurs à entrées inconnues (OEI)	131
d)	Approche par banc d'observateur	132
5.2.5	Approches par estimation paramétrique	132
5.3	Etude de cas : Diagnostic de défauts de l'échangeur thermique	134
5.3.1	Problématique	134
5.3.2	Description de la méthode adoptée	135
5.3.3	Formulation mathématique du problème	136
5.3.3.1	Etape de détection de défauts	136
5.3.3.2	Etape de location de défauts	139
a)	Matrice de Signature de Défauts (FSM)	139
b)	Estimation paramétrique du modèle défaillant	141
5.3.3.3	Etape d'estimation de défauts	143
5.4	Application à l'échangeur thermique	145
5.4.1	Etape de détection de défauts	145
5.4.2	Etape de localisation de défauts	146
5.4.3	Etape d'estimation de défauts	149
5.5	Résultats de simulation	150
5.6	Conclusion	155

Conclusion générale et perspectives	157
Annexe A : Exemples de systèmes non-linéaires supposés linéaires par zone.	160
Annexe B : Forme matricielle polynomiale des équations différentielles	168
Annexe C : Espace vectoriel	170
Annexe D : Brève description de l'échangeur	171
Références bibliographiques	173

Liste des figures

Figure 1.1	<i>Réponse d'un système tout ou rien.</i>	15
Figure 1.2	<i>Réponse d'un système à hystérésis à gauche, hystérésis simple, à droite, hystérésis TOR avec seuil.</i>	15
Figure 1.3	<i>Types des non linéarités accidentelles : (a) saturation (b) seuil (c) zone morte.</i>	16
Figure 1.4	<i>Variation de $g(x)$ pour une variation δx de la variable autour de x_0.</i>	18
Figure 2.1	<i>Modèle de Box-Jenkins (BJ)</i>	26
Figure 2.2	<i>Modèle Auto-Régressive Moving Average eXogenous (ARMAX)</i>	27
Figure 2.3	<i>Modèle Auto-Régressive eXogenous (ARX)</i>	27
Figure 2.4	<i>Modèle d'Erreur de Sortie (OE)</i>	28
Figure 2.5	<i>Modèle réponse impulsionnelle finie (FIR)</i>	28
Figure 2.6	<i>Le principe d'un algorithme d'identification</i>	32
Figure 2.7	<i>Formalisation de l'erreur de prédiction par l'EEM.</i>	33
Figure 2.8	<i>Formalisation de l'erreur de prédiction par l'OEM.</i>	34
Figure 3.1	<i>Flux de signal d'Entrée/Sortie des systèmes LPV.</i>	44
Figure 3.2	<i>Le mécanisme de gain-scheduling: interpolation des modèles LTI local pour approximer le comportement global du système NL (espace de séquençement).</i>	45
Figure 3.3	<i>Système ressort-mass variable.</i>	49
Figure 3.4	<i>Flux des données pour un système quasi-LPV.</i>	61
Figure 3.5	<i>Génération des signaux d'un système LPV à temps continu.</i>	69
Figure 4.1	<i>Simple illustration d'une cellule élémentaire d'un échangeur de chaleur à courants croisés.</i>	82
Figure 4.2	<i>Points de calcul de la température moyenne d'une cellule d'un échangeur à courants croisés.</i>	83
Figure 4.3	<i>Le dispositif expérimental GEA VT04 CD-16 de l'échange thermique.</i>	85

Figure 4.4	<i>Réponses indicielles de l'échangeur de chaleur pour un échelon de température d'entrée du coté chaud d'amplitude 4°C, et une température d'entrée du coté froid maintenue constante.</i>	89
Figure 4.5	<i>La structure Quasi-LPV de l'échangeur thermique.</i>	90
Figure 4.6	<i>Etapas d'identification du modèle LPV global.</i>	94
Figure 4.7	<i>Maillage de l'espace de séquençement par 49 couples ($\dot{m}_c, \dot{m}_h$).</i>	95
Figure 4.8	<i>Réponse temporelle de l'échangeur de chaleur pour $\dot{m}_c = 0.7\text{kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.3\text{kg/s}$.</i>	97
Figure 4.9	<i>Sorties du système (non bruitées) et du modèle pour $\dot{m}_c = 0.9\text{kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.1\text{kg/s}$.</i>	98
Figure 4.10	<i>Répartition des paramètres locaux de la fonction H_{ch} dans l'espace de séquençement pour les 49 points de fonctionnement.</i>	99
Figure 4.11	<i>Emplacement des pôles des modèles locaux H_{cc}, H_{ch}, H_{hc} et H_{hh}.</i>	100
Figure 4.12	<i>Interpolation polynomiale des paramètres $b_{0ch}(p)$, $a_{1ch}(p)$, $a_{2ch}(p)$</i>	102
Figure 4.13	<i>Modélisation de la partie LPV de l'échangeur.</i>	105
Figure 4.14	<i>Modélisation de la fonction H_{cc} (interpolation floue).</i>	105
Figure 4.15	<i>Validation croisée du modèle LPV estimé pour $\dot{m}_c = 0.8 \text{ kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.1 \text{ kg/s}$.</i>	106
Figure 4.16	<i>Validation du modèle LPV estimé dans la zone interpolée pour $\dot{m}_c = 0.88 \text{ kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.13 \text{ kg/s}$.</i>	107
Figure 4.17	<i>Validation du modèle LPV estimé par interpolation polynomiale pour $\dot{m}_c = 0.4 \text{ kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.6 \text{ kg/s}$.</i>	108
Figure 4.18	<i>Validation du modèle LPV estimé par interpolation Flou pour $\dot{m}_c = 0.4\text{kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.6\text{kg/s}$.</i>	109
Figure 4.19	<i>Variation des entrées de débit massique.</i>	110
Figure 4.20	<i>Validation du modèle LPV estimé pour $\dot{m}_c = 0.7\text{kg/s}$ et ($\dot{m}_h = 0.8\text{kg/s}$ pour $t < 200\text{s}$ et $\dot{m}_h = 1.2\text{kg/s}$ pour $t > 200\text{s}$).</i>	110
Figure 4.21	<i>Excitation du modèle LPV par $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$ variables.</i>	111
Figure 4.22	<i>Réponse du modèle LPV estimé pour $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$ variables.</i>	112
Figure 4.23	<i>Résultat d'estimation des fonctions $G_{..}$.</i>	112
Figure 4.24	<i>Emplacement des pôles des modèles locaux G_{cc}, G_{ch}, G_{hc} et G_{hh}.</i>	113

Figure 4.25	<i>Construction du modèle global de l'échangeur thermique.</i>	114
Figure 4.26	<i>Signaux d'entrées pour validation du modèle global : températures $T_{c_{in}}$ et $T_{h_{in}}$, débits massiques $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$.</i>	114
Figure 4.27	<i>Validation du modèle global pour des entrées de débit massique et des entrées de température variables.</i>	116
Figure 4.28	<i>Erreur d'estimation des températures de sorties du modèle global (par interpolation Floue).</i>	116
Figure 4.29	<i>Validation du modèle global pour des entrées de débit massique et des entrées de température variables.</i>	117
Figure 4.30	<i>Signaux d'erreur entre les températures estimées du modèle global et de l'échangeur (interpolation polynomiale).</i>	117
Figure 5.1	<i>Stratégie de commande FTC Par FDI-LPV</i>	123
Figure 5.2	<i>Principe de détection par filtre LPV</i>	125
Figure 5.3	<i>Modèle générateur de résidus r_c et r_h</i>	146
Figure 5.4	<i>Jeux de signaux d'entrée</i>	150
Figure 5.5	<i>L'impact de défaut $M_{c_{inf}}$ sur les signaux de sortie</i>	151
Figure 5.6	<i>Signaux de résidus</i>	151
Figure 5.7	<i>Estimation de la partie LTI (G_{ccf} et G_{chf}).</i>	153
Figure 5.8	<i>Valeurs relatives des normes des signaux de résidus secondaires.</i>	153
Figure 5.9	<i>Reconstruction du signal de défaut d'entrée $\dot{m}_{cf}$</i>	154
Figure 5.10	<i>Reconstruction du signal de défaut $\dot{m}_{cf}$ à partir de l'instant 150 sec.</i>	155
Figure A.1	<i>Circuit RLC alimenté par une source de tension.</i>	160
Figure A.2	<i>courbe de variation d'une résistance R subit à une température ambiante T</i>	161
Figure A.3	<i>Courbe de variation de nombre de maille de flux magnétique λ en fonction du courant i de l'inducteur qui traverse une bobine de noyau ferromagnétique.</i>	162
Figure A.4	<i>Courbe de tension et de courant de saturation du condensateur.</i>	163
Figure A.5	<i>Système mass-ressort et courbe de variation de la raideur</i>	163
Figure A.6	<i>Propagation thermique à travers trois surfaces.</i>	164

Figure A.7	<i>Conductivité thermique de quelques métaux</i>	165
Figure A.8	<i>montage d'un TC ; Courant et flux au primaire d'un TC dont le secondaire est ouvert et forme d'onde de la tension induite au secondaire</i>	167
Figure D.1	<i>Le dispositif expérimental de l'échangeur : GEA VT04 CD-16.</i>	171

Liste des Tableaux

Tableau 2.1	<i>Structures de modèles boîte noire.</i>	29
Tableau 4.1	<i>Valeurs de Fit pour l'interpolation polynomial des déférentes paramètres des fonctions $H_{\bullet\bullet}$.</i>	102
Tableau 4.2	<i>Valeurs de Fit pour l'interpolation polynomial des fonctions de retards $\delta_{ch}, \delta_{cc}, \delta_{hc}$ et δ_{hh}</i>	102
Tableau 4.3	<i>Valeurs de Fit pour l'interpolation Floue (3×2 fonctions d'appartenances) des déférentes paramètres des fonctions $H_{\bullet\bullet}$.</i>	104
Tableau 4.4	<i>Valeurs de Fit pour l'interpolation Floue (2×1 fonctions d'appartenances) des fonctions de retards $\delta_{ch}, \delta_{cc}, \delta_{hc}$ et δ_{hh}</i>	104
Tableau 4.5	<i>Comparaison des résultats obtenus avec celles obtenus dans les références [16], [27] et [15].</i>	115
Tableau 5.1	<i>Affectation de 03 ensembles de défauts aux résidus r_c et r_h</i>	147
Tableau 5.2	<i>Sensibilités des résidus r_c et r_h aux différents défauts possibles</i>	147

Liste de Symboles et Abréviations

$\mathbb{T}$	Ensemble définit l'axe du temps du système continu, si $\mathbb{T}=\mathbb{R}^+$, ou discret, si $\mathbb{T}=\mathbb{Z}^+$,
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R}^2$	Ensemble des paires de nombres réels
$\mathbb{Z}^+$	Ensemble des nombres Entiers positifs
$\mathbb{W}$	Ensemble définit la plage des signaux d'entrée /sortie du système dynamique
$\mathbb{W}^{\mathbb{T}}$	Notation standard pour toutes les fonctions de $\mathbb{T}$ vers $\mathbb{W}$
$\mathcal{B}$	Un sous-ensemble de $\mathbb{W}^{\mathbb{T}}$ appelé le comportement,
w	Vecteur de signaux scalaires représentent l'entrée ou la sortie du système
α, ρ, λ, c	Des constantes réelles
ξ, s	Opérateurs de dérivée ($= d/dt$)
$R(\xi)$ ou $R(\frac{d}{dt})$	Matrice polynomiale des dérivées.
$r(\xi)$	Fonction polynomial différentielle
$\otimes$	Le produit de Kronecker
$\langle \circ, \circ \rangle$	Le produit scalaire
θ	Vecteur de paramètres de système
t	Variable de temps continue
k	Variable de temps discret
$w(t)$	Terme de perturbation
$\eta(t)$	Terme de la sortie sans influence de signal bruit
$e(t)$	Signal de perturbation (généralement un bruit blanc)
q	Opérateur de décalage temporel
$\hat{y}(k)$	Sortie estimée du model
$\phi(k)$	Vecteur de régression linéaire
ε	Erreur de prédiction
$\ell(\varepsilon)$	Fonction de l'erreur d'estimation (au sens d'une norme).
$\hat{\theta}$	Vecteur de paramètres d'estimation
$f_e(\varepsilon)$	Fonction de densité de probabilité (PDF)
Φ	Matrice de régression linéaire
y_f	Sortie filtrée du système LTI.
u_f	Entrée filtrée du système LTI.
$\mathcal{J}$	Critère d'optimisation de l'erreur
$\mathcal{J}'_{\theta}$	Gradient

$\mathcal{J}_\theta''$	Hessien dans l'approximation de Gauss-Newton
diag	Diagonal d'une matrice
$\mathcal{G}$	Système dynamique LTI
q^τ	Décalage temporel τ fois
w_x, w_F	Signal de déplacement et de force
$\mathcal{S}$	Système dynamique LPV
$\mathbb{P}$	Espace de séquençement de dimension n_p
$p \in \mathbb{P}^T$	Vecteur de variable de séquençement, de dimension n_p
$\mathfrak{B}_p$	Comportement de séquençement projeté de $\mathfrak{B}$ qui définit tout les trajectoires de séquençement possibles de $\mathcal{S}$
$\mathfrak{B}_p$	Comportement projeté de $\mathfrak{B}$ qui définit l'ensemble des trajectoires de signaux compatibles avec la trajectoire de séquençement fixe p de $\mathcal{S}$
$\mathfrak{B}_p$	Le comportement figé de $\mathcal{S}$
$\mathcal{F}_p$	Système dynamique LPV : $\mathcal{S}$ figé. Equivalent d'un système LTI
$\mathcal{U}_s$	L'ensemble des systèmes figés de $\mathcal{S}$ (ensemble LTI)
$\diamond$	Opérateur fonctionnel différentielle sur les variables de séquençement p
$\mathcal{R}[\xi]$	Champs des matrices des fonctions polynomiales différentielles
$\text{Deg}(\cdot)$	Degré d'une matrice
$\mathbb{U}$	Espace des signaux d'entrée
$\mathbb{Y}$	Espace des signaux de sortie
$\mathbb{X}$	Espace des signaux d'état
$\mathcal{L}_1^{\text{loc}}$	L'espace des fonctions localement intégrable, c.à.d. Admettent l'intégration sur un intervalle borné.
$\text{rang}(\cdot)$	Rang d'une matrice
$\mathfrak{R}_{\text{IO}}(\mathcal{S})$	Représentation ES d'un système LPV
$\mathfrak{R}_{\text{ss}}(\mathcal{S})$	Espace d'état d'un système LPV
T_d	Période d'échantillonnage
$F_p(i\omega)$	Une réponse en fréquence d'un système LPV figé
$F_p(s)$	Fonction de transfert d'un système LPV figé
$h_p(t)$	Réponse impulsionnelle d'un système LPV figé.
$U_\bullet$	Le coefficient de transfert de chaleur
$T_{c_{in}}$ et $T_{h_{in}}$	Les températures d'entrée du fluide du côté froid et chaud
$T_{c_{out}}$ et $T_{h_{out}}$	Les températures de sorties du fluide du côté froid et chaud.
$\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$	Les débits massiques du fluide du côté froid et chaud
$\mathbf{p}(\dot{m}_c, \dot{m}_h)$	Vecteur de séquençement (débits massiques)
$\delta_{cc}, \delta_{ch}, \delta_{hc}$ et δ_{hh}	Retards dynamiques en fonction de $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$
$H_{cc}(\mathbf{p}, s)$	Fonction de transfert LPV lie l'entrée $T_{c_{in}}$ avec la sortie $T_{c_{out}}$
$H_{ch}(\mathbf{p}, s)$	Fonction de transfert LPV lie l'entrée $T_{h_{in}}$ avec la sortie $T_{c_{out}}$
$H_{hh}(\mathbf{p}, s)$	Fonction de transfert LPV lie l'entrée $T_{h_{in}}$ avec la sortie $T_{h_{out}}$

$H_{hc}(p, s)$	Fonction de transfert LPV lie l'entrée $T_{c_{in}}$ avec la sortie $T_{h_{out}}$
$G_{cc}(s)$	Fonction de transfert LTI lie l'entrée $\dot{m}_c(t)$ avec la sortie $T_{c_{out}}$
$G_{ch}(s)$	Fonction de transfert LTI lie l'entrée $\dot{m}_h(t)$ avec la sortie $T_{c_{out}}$
$G_{hc}(s)$	Fonction de transfert LTI lie l'entrée $\dot{m}_c(t)$ avec la sortie $T_{h_{out}}$
$G_{hh}(s)$	Fonction de transfert LTI lie l'entrée $\dot{m}_h(t)$ avec la sortie $T_{h_{out}}$
$\dot{m}_c(t)$ $\dot{m}_h(t)$	Les entrées dynamiques des débits massiques du coté froid et chaud
$a_{i\bullet\bullet}(p)$ et $b_{j\bullet\bullet}(p)$	Les fonctions paramètres de la fonction $H_{\bullet\bullet}(p, s)$
$\bar{T}_{\bullet_{out}}(t)$	Sortie de l'échangeur sans l'influence des entrées $\dot{m}_c(t)$ et $\dot{m}_h(t)$ et après le traitement des retards
$\tilde{T}_{\bullet_{out}}(t)$	Sortie de l'échangeur avec l'influence des entrées $\dot{m}_c(t)$ et $\dot{m}_h(t)$
$T'_{\bullet_{out}}(t)$	Sortie résiduel de l'échangeur sans l'influence des entrées $T_{c_{in}}$ et $T_{h_{in}}$
ES	Représentation entrée/sortie
SS	Représentation espace d'état
TC	Représentation à temps continu
TD	Représentation à temps discret
LTI	Les systèmes linéaires à paramètres invariant
LTV	Les systèmes linéaires à temps variants
LPV	Les systèmes linéaires à paramètres variants
FIR	Modèle réponse impulsionnelle finie
ARX	Modèle Auto-Regressive exogenous
ARMAX	Modèle Auto-Régressive Moving Average exogenous
BJ	Modèle de Box-Jenkins
OE	Modèle Erreur de Sortie
FSM	Matrice de Signature de Défaut
$r(t)$	Signal de résidu entre la sortie mesurée et estimée.
$f(t)$	Signal de défaut
H_{ccf}	Fonction de transfert LPV du système défaillant lie l'entrée $T_{c_{in}}$ avec la sortie $T_{c_{out}}$
H_{chf}	Fonction de transfert LPV du système défaillant lie l'entrée $T_{h_{in}}$ avec la sortie $T_{c_{out}}$
H_{hhf}	Fonction de transfert LPV du système défaillant lie l'entrée $T_{h_{in}}$ avec la sortie $T_{h_{out}}$
H_{hcf}	Fonction de transfert LPV du système défaillant lie l'entrée $T_{c_{in}}$ avec la sortie $T_{h_{out}}$
G_{ccf}	Fonction de transfert LTI du système défaillant lie l'entrée $\dot{M}_c(s)$ avec la sortie $T_{c_{out}}$
G_{chf}	Fonction de transfert LTI du système défaillant lie l'entrée $\dot{M}_h(s)$ avec la sortie $T_{c_{out}}$
G_{hcf}	Fonction de transfert LTI du système défaillant lie l'entrée $\dot{M}_c(s)$ avec la sortie $T_{h_{out}}$

$G_{h hf}$	Fonction de transfert LTI du système défaillant lie l'entrée $\dot{m}_h(s)$ avec la sortie $T_{h out}$
$\dot{m}_{cf}$ et $\dot{m}_{hf}$	Défauts d'actionneur sur les entrées dynamiques des débits massiques du côté froid et chaud
$T_{c inf}$ et $T_{h inf}$	Défauts d'actionneur sur les températures d'entrée du fluide du côté froid et chaud
$T_{c out f}$ et $T_{h out f}$	Défauts de capteurs sur les températures de sorties du fluide du côté froid et chaud.
σ_c et σ_h	Limites supérieure et inférieure des incertitudes paramétriques et du bruit.
sup et inf	Fonctions déterminent les bornes supérieure et inférieure d'une fonction.
max et min	Fonctions déterminent le plus grand/petit élément dans un ensemble.

Introduction générale

De plus en plus le travail de l'ingénierie, basé sur une plateforme solide, s'appuie sur des modèles mathématiques des systèmes complexes. Le développement de modèles mathématiques des systèmes physique est un sujet central dans le domaine des sciences de l'ingénieur. Traditionnellement, la modélisation est vue comme la jonction entre la compréhension de la nature et le traitement mathématique approprié qui conduise à l'obtention d'un modèle utilisable. Un modèle fiable signifie une simulation réussie et très proche à la réalité, et par conséquent, plus de fiabilité des systèmes avec le moindre coût et risque. Il est donc important de maîtriser l'art de construction des modèles pour des processus réels.

Les modèles mathématiques sont souvent classés, suivant leur complexité, en modèles linéaires et non linéaires. En fait, il est bien difficile d'établir une limite entre les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires. Il serait plus correct de parler de non linéarités négligeables (sans influences apparentes) et de non linéarités non négligeables. A la limite, on peut même penser qu'il n'existe pas de systèmes rigoureusement linéaires. Beaucoup de systèmes peuvent être qualifiés de linéaires dans un certain domaine. Beaucoup d'autres peuvent être linéarisés facilement, au moyen de certaines approximations. Cependant, il reste une catégorie très importante de systèmes asservis qu'il est impossible de traiter par les méthodes linéaires. La majorité des systèmes de la nature sont non linéaires. Cependant, le terme linéaire est projeté sur les modèles qui sont conçus pour une zone de fonctionnement restreinte, cela veut dire que le domaine d'utilisation des techniques qui traitent ce type de systèmes est limité. Néanmoins, l'utilisation des modèles non linéaires, qui sont souvent jugés volumineux, est inadaptée pour une classe importante de méthodes classiques dans le domaine du contrôle automatique.

Nombreuses sont les techniques de commande non linéaire qui possèdent, au plan méthodologique, un niveau d'aptitude suffisante pour traiter efficacement des problèmes liés au contrôle/commande des systèmes industriels et relevant d'une

modélisation non linéaire. En revanche, On constate une certaine réticence à adopter aux méthodes de commande non linéaire, souvent jugées difficiles à comprendre, compliquées à mettre en œuvre et dont l'analyse systématique des performances à posteriori se révèle complexe.

D'autre part, des techniques d'analyse et de commande de systèmes linéaires, dont les principes de fonctionnement sont bien maîtrisés depuis plusieurs années, sont efficacement utilisées pour traiter des problèmes concrets. Aujourd'hui, les ingénieurs travaillant dans l'industrie, préfèrent l'application des contrôleurs LTI, en raison des approches attractives de contrôle optimal et robuste. Ces approches sont préférables car ils garantissent des performances et fiabilités élevées, ont des règles de conception facile et rapide, et les ingénieurs possèdent une vaste expérience dans leurs applications. En outre, il a également été observé dans le champ pratique que de nombreux systèmes non linéaires peuvent être bien approchés par plusieurs modèles LTI qui décrivent le comportement du processus autour des points de fonctionnement.

Les premières reconnaissances se sont manifestées dans les années 80, à cette époque la décision était prise, au lieu de développer des nouvelles techniques d'analyse pour les systèmes Non Linéaires (NL), il est plus convenable d'introduire une nouvelle classe de modèle, capable d'intégrer les approches linéaires existantes, destinées essentiellement à l'analyse des systèmes LTI, et peut servir de l'analyse et la commande des systèmes Non Linéaires et à Temps Variants en même temps. Cette nouvelle vue a conduit à la naissance d'une nouvelle classe de systèmes *Linéaires à Paramètres Variants* (LPV) par le concept de « *séquençement de gain* ou *gain scheduling* ».

Les systèmes LPV constituent une classe de modèles linéaires permettant la description des procédés dont les caractéristiques dynamiques évoluent en fonction des conditions de fonctionnement. En d'autres termes, les systèmes LPV désignent des modèles linéaires dont la représentation d'état dépend d'un vecteur de paramètres borné susceptible d'être varié dans le temps.

Actuellement, la modélisation, l'identification et la conception de contrôleurs des systèmes LPV sont des domaines de recherche actifs qui contribuent au développement de contrôleurs capables de gérer la variation rapide des points de fonc-

tionnement avec performance. De plus, les modèles LPV sont reconnus pour leurs capacités à approcher le comportement dynamique complexe d'une large gamme de systèmes non linéaires.

Dans ce contexte, l'objectif principal de ce travail est d'exposer les principes de base des représentations LPV, puis de montrer que dans le cas d'une classe particulière de systèmes non linéaires, il est possible de déduire systématiquement un modèle LPV pour un système d'échange thermique. Enfin ce modèle sera utilisé pour diagnostiquer les défauts du système à échange thermique.

Ce mémoire est réparti sur cinq chapitres essentiels :

- **Le Premier Chapitre** donnera une aperçue sur les notions de base sur la linéarité et la non-linéarité des systèmes d'une manière suffisante et utile. L'objectif de ce chapitre est d'éclaircir ces notions afin d'éviter toute confusion entre les deux types de systèmes.
- **Le Deuxième Chapitre** est consacré aux techniques de modélisation et d'identification des systèmes linéaires à paramètres invariants (LTI). Nous verrons les différentes structures de modèles utilisées dans le domaine d'automatique ainsi que quelques techniques d'identification paramétriques de ces modèles.
- L'exposition des systèmes LPV sera décrite dans **le Troisième Chapitre**, dans lequel on va présenter les principes généraux de la modélisation et l'identification LPV et les structures de modèle existantes, ainsi que les approches d'identification de ces modèles à travers un bref état de l'art.
- **Le Quatrième Chapitre** sera consacré à la modélisation et l'identification LPV d'un échangeur thermique à courant croisé réel.
- **Le Cinquième Chapitre** donne une vue globale sur les techniques récemment utilisées pour le diagnostic des systèmes non linéaires par une approche LPV à travers un état de l'art. Puis un ensemble de ces techniques sera utilisé pour traiter le problème de diagnostic des défauts dans le cas de l'échangeur thermique.

Finalement, on terminera par une conclusion générale.

Chapitre 01

Généralités sur la Linéarité et la Non-Linéarité des Systèmes

1.1 Introduction

Un modèle est un ensemble de relations mathématiques entre des quantités fondamentales (distances, courants, flux, activités, gains etc.) qui peuvent être observées dans un système. La plupart des lois de la nature sont des modèles mathématiques dans ce sens [1]. Le modèle mathématique sélectionne un sous-ensemble $\mathfrak{B}$, appelé *comportement*, à partir d'un certain univers-somme $\mathbb{W}$ de possibilités, $\mathbb{W}$ est appelé espace des signaux. Ce sous-ensemble est constitué d'occurrences que le modèle permet, qu'il déclare possibles et exclu l'apparition de certains résultats, pour lesquelles les équations ne sont pas satisfaites [2]. On obtient alors la définition suivante :

Définition 1.1 (modèle d'un système dynamique) [2]. *Un système dynamique $\mathcal{G}$ est défini comme un triplet*

$$\mathcal{G}=(\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathfrak{B}), \quad (1.1)$$

avec l'ensemble $\mathbb{T}$ définit l'axe du temps du système continu, si $\mathbb{T}=\mathbb{R}^+$, ou discret si $\mathbb{T}=\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{W}$ indique la plage des signaux temporels d'entrée / sortie du système et $\mathfrak{B}$ (le comportement) un sous-ensemble de $\mathbb{W}$.

De cette façon, un modèle mathématique visant un phénomène, affirme que certains résultats sont possibles, tandis que d'autres ne le sont pas. Ainsi un modèle reconnaît un certain sous-ensemble $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{W}$. Nous parlerons donc des équations

de comportement lorsque les équations mathématiques sont destinées à modéliser un phénomène. La collection de tous les signaux compatibles avec ces lois définit le comportement du système dynamique.

La définition 1.1 est assez vaste pour définir la notion de modèle d'un système dynamique, donc la définition 1.2 et 1.3 vont nous donner des notions plus précises.

Définition 1.2 (modèle mathématique) [3] *Un modèle est une représentation mathématique permettant de calculer l'évolution des sorties du système, lorsque l'on connaît l'évolution de ses entrées et les conditions initiales de cette évolution.*

Définition 1.3 (modèle mathématique) [1] *On appelle modèle mathématique toute représentation mathématique sous forme d'équations, soit algébriques, différentielles ou aux différences, qui lient les entrées avec les sorties d'un système.*

Le modèle d'un système dynamique applique des contraintes sur les signaux temporels que le système peut, en théorie, produire.

1.2 Différents types de modèles mathématiques [1]

- Déterministe – Stochastique

Un modèle déterministe est un modèle qui contient des relations exactes entre les variables du modèle. Par exclusion, le modèle stochastique est décrit par des variables intrinsèquement stochastiques, qui relèvent de la théorie des probabilités, comme les systèmes aléatoires.

- Dynamique – Statique

Un système dynamique est un ensemble structuré de quantités fondamentales qui évolue au cours du temps de façon déterministe et causale (qui son avenir ne dépend que de phénomènes du passé et du présent). Tandis que l'état d'un modèle statique ne dépend que de l'instant présent (non causal). Ces modèles sont des gains statiques.

- Analytique – Non Analytique

Le modèle analytique est un modèle qui est décrit par des équations algébriques. Le modèle non analytique est un modèle qui est décrit par des relations descriptives, quelles soient schématiques ou graphiques, linguistiques, etc.

- à Changement Orienté — à Événement Discret

Pendant que le comportement des systèmes à changement orienté est un comportement qui peut être représenté par des fonctions lisses, c'est-à-dire des fonctions dérivables au cours du temps, le comportement des systèmes à événement discret varie brusquement dans le temps ou d'une manière discontinue.

- à Temps Continu – à Temps Discret

Les modèles à temps continu ont une évolution continue dans le temps, représentée par une équation différentielle. C'est le cas le plus naturel physiquement. Les modèles à temps discret, par contre, ont une évolution discontinue dans le temps, c'est souvent le cas le plus simple à décrire un phénomène numériquement, même s'il peut sembler moins réaliste physiquement. Cependant, l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues.

- Linéaire – Non Linéaire

D'un point de vue mathématique, un modèle est linéaire s'il est décrit par une équation linéaire. La linéarité permet d'effectuer des sommes et des combinaisons linéaires de solutions, ce qui est connu en automatique sous le nom de principe de superposition. Tous les autres systèmes sont considérés non linéaires, c'est-à-dire ne peuvent pas être décrits par des équations mathématiques linéaires, ou bien ne vérifient pas le principe de superposition.

1.3 Équations de systèmes dynamiques

Les lois physiques définissent des relations entre certaines quantités fondamentales. Celles-ci sont, en général, représentées par des équations différentielles. Les équations différentielles constituent un type d'équations qui ont de nombreuses applications dans la description des lois physiques.

Définition 1.4 (équations différentielles) [4] *On appelle équation différentielle n'importe quelle égalité algébrique ou transcendante qui comporte soit des différentielles, soit des dérivées.*

Les équations différentielles sont utilisées pour lier les *taux de variation* des va-

riables aux autres paramètres. Il ya deux types d'équations différentielles, les équations différentielles ordinaires et les équations différentielles aux dérivées partielles.

1.3.1 Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles

Définition 1.5 (équations différentielles ordinaires) [4] *On appelle équation différentielle ordinaire (totale) une égalité portant sur une variable dépendante au moins, une variable indépendante et une dérivée au moins des variables dépendantes par rapport à la variable indépendante.*

Définition 1.6 (équations différentielles aux dérivées partielles) [4] *On appelle équation aux dérivées partielles une égalité portant sur une variable dépendante et deux variables indépendantes au moins, ainsi que sur les dérivées des variables dépendantes par rapport aux variables indépendantes.*

Selon leur évolution dans le temps, les paramètres des équations différentielles peuvent être classés en statique et dynamique. Par conséquent, deux types d'équations différentielles sont possibles : dépendantes du temps et indépendantes du temps.

1.3.2 Equations différentielles dépendante / indépendante du temps

Définition 1.7 (équation différentielle dépendante du temps) [4] *On appelle équation différentielle dépendante du temps, une équation différentielle où l'un au moins des termes dépend explicitement de la variable indépendante t , le temps.*

Définition 1.8 (équation différentielle indépendante du temps) [4] *On appelle équation différentielle indépendante du temps, une équation différentielle où aucun des termes ne dépend explicitement de la variable indépendante t , le temps.*

Cette définition implique que le processus décrit par une équation différentielle indépendante du temps, ne varie pas avec le temps.

Exemple 1.1 :

- N'importe quelle équation différentielle ordinaire

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j(t) \frac{d^j x(t)}{dt^j}, \quad (1.2)$$

où les coefficients $a_i(t)$ et $b_j(t)$ ne dépendent que de la variable t *explicitement*, est une *équation dépendante du temps*.

➤ N'importe quelle équation différentielle ordinaire de la forme

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}, \quad (1.3)$$

où les coefficients a_i et b_j sont des constantes, est une *équation indépendante du temps* puisqu'elle ne dépend qu'*implicitement* des variables liées $x(t)$ et $y(t)$ et leurs dérivées.

1.3.3 Equations différentielles linéaires et non linéaires

Selon la nature des termes des équations différentielles, on distingue les équations différentielles linéaires et non linéaires.

Définition 1.9 (équation différentielle linéaire/non-linéaire) [4] *On dit qu'une équation différentielle est linéaire si elle consiste en une somme de termes linéaires. Toutes les autres équations différentielles sont dites non linéaires.*

Définition 1.10 (terme linéaire) [4] *On dit qu'un terme est linéaire s'il est du premier degré¹ dans les variables dépendantes et leurs dérivées.*

On appelle *terme* d'une équation différentielle ordinaire un produit ou un quotient de fonctions explicites de la variable indépendante t et de fonctions des variables dépendantes et de leurs dérivées.

Ainsi, toute équation différentielle, qui contient des termes de puissances supérieures ou inférieures à la première (soit entier ou fractionnelles, positives ou négatives), de produits, ou de fonctions transcendantes des variables dépendantes, n'est pas linéaire. De plus, si dans une équation différentielle on trouve au moins un terme non linéaire, alors l'intégralité de l'équation différentielle devient non linéaire. Le même raisonnement est valable pour les équations différentielles aux dérivées partielles.

Exemple 1.2 :

➤ Les équations différentielles *dépendantes du temps* et *indépendantes du temps*

¹ Degré au sens de puissance et non pas au sens de dérivation.

de l'exemple 1.1 sont linéaires car elles consistent des termes du premier degré dans les variables dépendantes et leurs dérivées.

- Ex. $t^2 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = x$, $\frac{5}{\cos(3t^2 + 2)} \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} = \sin(t) \cdot \frac{dx}{dt} + 2x$, $2 \frac{dy}{dt} = \log 3 \cdot \frac{dx}{dt}$

sont des équations différentielles linéaires par rapport aux variables dépendantes x et y .

- L'équation de la chaleur $\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$ où λ, ρ, c sont des constantes, est une équation aux dérivées partielles linéaire, car ses termes sont du premier degré.
- Les conditions initiales non nulles n'affectent pas la linéarité des équations différentielles linéaires, car elles sont des valeurs instantanées des variables et n'ont fait pas une partie du modèle.
- Le terme $2x \cdot y^3 \frac{dy}{dt}$ est un terme non linéaire car il est du cinquième degré dans les variables dépendantes x et y .
- Les termes $\int_0^t y(\tau) d\tau$ et $\int_a^b y(t) dt$ sont des termes linéaires, tandis que les termes $\int_0^t f(\tau) d\tau$, $\int_a^b f(t) dt$ avec $f(t)$ dépend explicitement du temps et ($a \neq b$), sont non linéaires, car il représente des constantes par rapport aux variables dépendantes.
- Chacun des termes suivants $\left(\frac{dy}{dt}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)^0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)^{-1}$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)^3$, $x \cdot \frac{dy}{dt}$ et $\sin(x)$ est non linéaire, car ils sont tous de puissance supérieure ou inférieure à la première, de produit, ou de fonction transcendante, respectivement.

Les fonctions transcendantes² (non algébriques) ne sont pas du premier degré parce qu'elles peuvent être définies par des séries infinies de degré supérieur à un.

Par exemple,

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad (1.4)$$

² Les fonctions transcendantes sont les fonctions logarithmiques, trigonométriques, hyperboliques et leurs inverses, ...etc.

pendant que le premier terme soit du premier degré, le second est du troisième et ainsi de suite.

Il est à noter que les équations différentielles linéaires sont linéaires par rapport aux variables dépendantes $x(t)$, $y(t)$,..., et leurs dérivées.

Remarque 1.1 : Dans le cas des équations différentielles dépendantes du temps, on distingue entre les coefficients $a_i(t)$, $b_i(t)$,..., qui dépendent explicitement du temps et les variables dépendantes $x(t)$, $y(t)$,..., solutions de l'équation différentielle, qui dépendent implicitement du temps. Dans certains cas, la connaissance de la relation entre l'une de ces fonctions (fonction de la variable dépendante) et le temps t , dans une équation différentielle non linéaire, peut la rendre une équation différentielle linéaire. Dans ce cas, la variable dépendante devient un coefficient explicite du temps.

Exemple 1.3 : considérons l'exemple suivant :

$$\frac{1}{tg(t^2)} x(t) \frac{dy(t)}{dt} + t \frac{dx(t)}{dt} y(t) = 0 \quad (1.5)$$

On suppose les deux cas suivants :

- 1) $x(t)$ est inconnue (c'est-à-dire la relation entre $x(t)$ et t est inconnue). Alors l'équation (1.5) dans ce cas est une équation différentielle non linéaire.
- 2) $x(t)$ est connue, on prend par exemple $x(t) = \sin(t^2)$. Dans ce cas, le degré de chaque terme dans l'équation (1.5) est égal à un. donc cette équation devient une équation différentielle linéaire dépendante du temps.

En résumé, Un modèle linéaire est un modèle qui prend la forme canonique suivante:

$$Y = A \cdot X \quad (1.5)$$

C'est-à-dire, un signal de sortie Y égale à un gain A multiplié par un signal d'entrée X de puissance unitaire. Dans le cas d'une puissance différente de l'unité, on parle ainsi d'un système non linéaire.

Dans la littérature, trois représentations linéaires sont envisagés :

- La représentation Linéaire à Temps Invariant (LTI). Les paramètres du modèle

dans cette catégorie sont des paramètres fixes au cours du temps. Le modèle du système dans cette classe est souvent représenté par des équations différentielles indépendantes du temps, c'est-à-dire des équations différentielles à coefficients constants [1]. Les différentes structures utilisées dans la théorie des systèmes automatiques sont illustrée dans le chapitre 02 ;

- La représentation Linéaire à Temps Variant (LTV). Le modèle du système dans cette classe est généralement représenté par des équations différentielles dépendantes du temps, c'est-à-dire des équations différentielles à coefficients à coefficients variables dans le temps [5] ;
- La représentation Linéaire à Paramètres Variants (LPV). Le modèle du système dans cette classe est généralement sont représentés par des équations différentielles non linéaires [6], supposées linéaires au sens d'entrées/sorties, la non linéarité dans termes non linéaires du modèle est repoussé vers le vecteur de paramètres. La classe des systèmes LPV fera l'objet du chapitre 03.

En plus de la nature des équations différentielles approchées qui caractérise les systèmes linéaires, on peut définir d'autres critères pratiques, parmi lesquels le principe de superposition. Ce critère est important, car si un système ne régit pas ce principe, le système est supposé non linéaire quelle que soit la nature mathématique des équations qui le décrivent (cas de dynamiques non modélisées).

1.4 Linéarité et Invariance Temporelle

Les systèmes dynamiques linéaires à paramètres invariants dans le temps (LTI) ont deux propriétés essentielles : la linéarité et l'invariance temporelle.

1.4.1 Linéarité et Superposition

Définition 1.11 (système dynamique linéaire) [2] : *Un système dynamique $\mathcal{G}=(\mathbb{T},\mathbb{W},\mathcal{B})$ est dit linéaire si $\mathbb{W}$ est un espace vectoriel sur le champ $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}$ est un sous-espace linéaire de $\mathbb{W}^{\mathbb{T}}$.*

avec $\mathbb{T}$ l'axe du temps, $\mathbb{W}$ l'espace des signaux du système de dimension $n_{\mathbb{W}}$ et $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{W}^{\mathbb{T}}$ ($\mathbb{W}^{\mathbb{T}}$ est la notation standard pour toutes les applications de $\mathbb{T}$ à $\mathbb{W}$).

Ainsi, les systèmes linéaires obéissent au principe de superposition de la manière suivante :

Définition 1.12 (linéarité et superposition) [4] : On appelle linéaire, un système tel que :

$$\{w_1(*), w_2(*) \in \mathfrak{B}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \{\alpha w_1(*) + \beta w_2(*) \in \mathfrak{B}\}, \quad (1.7)$$

avec $w_1(*)$ et $w_2(*)$ présentent les vecteurs de signaux d'entrées/sorties.

D'un autre terme, si le signal d'entrée $x_1(t)$ produit le signal de sortie $y_1(t)$ et le signal d'entrée $x_2(t)$ produit le signal de sortie $y_2(t)$, alors le signal d'entrée $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ produit le signal de sortie $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ pour tout couple de signaux d'entrée $x_1(t), x_2(t)$ et pour tout couple de constantes c_1, c_2 réel.

D'une manière générale, la réponse $y(t)$ d'un système linéaire produite par différents signaux d'entrée $x_1(t), x_2(t), \dots, x_h(t)$ agissant simultanément, est égale à la somme des réponses produites par chacun des signaux agissant séparément. C'est-à-dire, si $y_i(t)$ est la réponse produite par le signal d'entrée $x_i(t)$, alors

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) \frac{d^i}{dt^i} (c_1y_1(t) + \dots + c_hy_h(t)) = \sum_{j=0}^l b_j(t) \frac{d^j}{dt^j} (c_1x_1(t) + \dots + c_hx_h(t)), \quad (1.8)$$

La sortie $y(t)$ représente une somme des sorties partielles obtenues par l'excitation de chaque entrée à la fois individuellement h fois.

Remarque 1.2: si au moins un terme dans les équations qui décrivent le système est non linéaire, alors le système devient non linéaire. Dans ce cas, le système présente une distorsion dans le signal de sortie.

1.4.2 Invariance Temporelle

Définition 1.13 (système à temps invariant) [2]. Un système dynamique $\mathcal{G}=(\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathfrak{B})$ est dit à temps-invariant si

$$q^\tau \mathfrak{B} = \mathfrak{B}, \quad \forall \tau \in \mathbb{T} = \mathbb{R}, \quad (1.9)$$

avec q^τ désigne le décalage temporel,

$$(q^\tau f)(t') = f(t' + \tau), \quad (1.10)$$

L'invariance temporelle est une propriété des systèmes LTI signifie l'indépendance de ces systèmes du temps.

1.5 Systèmes bilinéaires ou multilinéaires

Définition 1.14 (système bilinéaire) : Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est bilinéaire si elle est linéaire en chacune de ses variables, c'est-à-dire :

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \begin{cases} f(x_1 + x_2, y_1) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1) \\ f(x_1, y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2) \\ f(\lambda x_1, y_1) = f(x_1, \lambda y_1) = \lambda f(x_1, y_1) \end{cases} \quad (1.11)$$

La bilinéarité n'implique pas la linéarité dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire, si $f(x, y)$ est linéaire par rapport au couple (x, y) , cela n'implique pas que $f(x, y)$ est linéaire par rapport à x et linéaire par rapport à y en même temps. Dans le même sens on peut définir les systèmes multilinéaires.

Exemple 1.4 (systèmes bilinéaires). L'équation différentielle (1.5) de l'exemple précédent est linéaire par rapport à x et linéaire par rapport à y , mais n'est pas linéaire par rapport au couple (x, y) . On dit que c'est une équation bilinéaire.

1.6 Systèmes dynamiques non linéaires

Définition 1.15 (système dynamique non linéaire) [6]. Un système dynamique $\mathcal{G}=(\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$ est dit non linéaire noté $\mathcal{G}_{NL}$, si $\mathbb{W} = \mathbb{R}^{n_w}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{W}^{\mathbb{T}}$, et il existe une fonction méromorphe³ (non linéaire) $f : \mathbb{R}^{(n+1) \times n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_f}$, telle que :

$$f\left(w, \frac{d}{dt}w, \frac{d^2}{dt^2}w, \dots, \frac{d^n}{dt^n}w\right) = 0, \quad (1.12)$$

accepte $\mathcal{B}$ (réponse du système) comme solution.

Exemple 1.5 (système linéaire / non linéaire variant dans le temps). Considérons le mouvement d'une fusée brûlante de masse $m(t)$ variant avec le temps. L'équation différentielle décrivant ce mouvement est donnée par :

³ Une fonction méromorphe est une fonction analytique de la forme (h/g) tel que $g \neq 0$.

$$\frac{d}{dt}(m(t) \frac{d}{dt} w_x) = w_F \quad (1.13)$$

avec w_x et w_F sont les vecteurs de mouvement et de force respectivement.

Deux remarques importantes peuvent être extraites :

- Considérons l'équation (1.13) comme un modèle pour les manifestes variables $(w_x, w_F) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, alors le système dynamique est *linéaire* mais *variant* dans le temps.
- Considérons maintenant l'équation (1.13) comme un modèle pour les manifestes variables $(w_x, w_F, m) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$, alors le système dynamique résultant est *invariant* dans le temps, mais *non linéaire*.

La théorie des asservissements linéaires n'est valable que pour les systèmes linéaires, les équations qui les régissent doivent être des équations différentielles à coefficients constants. Beaucoup de systèmes peuvent être qualifiés de linéaires dans un certain domaine. Dans ce cas, il est bien difficile d'établir une limite entre les systèmes linéaires et les systèmes non-linéaires. Il serait alors plus correct de parler de non-linéarités négligeables (sans influence apparentes) et de non linéarités non négligeables. A la limite, on peut même penser qu'il n'existe pas de systèmes rigoureusement linéaires. Beaucoup d'autres systèmes peuvent être linéarisés facilement, moyennant certaines approximations. Cependant, il reste une catégorie importante de systèmes asservis qu'il est impossible de les traiter par les méthodes linéaires. Quelques types de ces non-linéarités seront illustrés dans la section suivante.

1.7 Quelques types de non-linéarité des systèmes [7]

La non-linéarité se manifeste sous forme des modifications qualitatives brusques du comportement des systèmes ou des distorsions du signal de sortie sous l'influence de certains phénomènes. Pratiquement, la non-linéarité des systèmes se manifeste en plusieurs formes, cependant on peut citer deux catégories principales :

1.7.1 Non-linéarités essentielles

Ce sont des non linéarités intrinsèques du système à étudier; il est impossible alors de trouver pour celui-ci un domaine de linéarité, même très petit. Ces systèmes obéissent à des équations différentielles non linéaires ou il est impossible de les mettre en équation. Parmi elles on peut citer :

➤ Les systèmes à événement discret

Les systèmes à événement discret sont des systèmes fonctionnant par une logique de « tout ou rien ». Le signal de sortie reste constant, quelle que soit l'entrée, le signe dépend du signe de l'entrée.

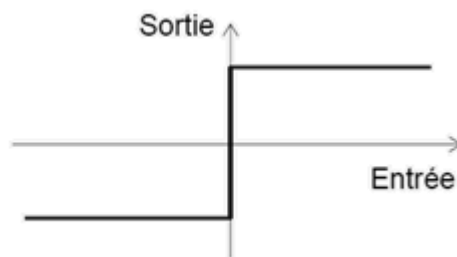


Fig. 1.1 Réponse d'un système tout ou rien.

➤ Les systèmes à hystérésis

La grandeur de sortie n'a pas la même valeur pour une grandeur d'entrée donnée, suivant que celle-ci est atteinte par une valeur croissante ou par une valeur décroissante. Ce phénomène est bien connu en magnétique, mais ce n'est pas une exception.



Fig. 1.2 Réponse d'un système à hystérésis : à gauche, hystérésis simple, à droite, hystérésis TOR avec seuil.

1.7.2 Non linéarités accidentelles

Les systèmes qui présentent ce type de non linéarité sont des systèmes linéaires dans un domaine bien défini. On peut citer parmi ces non linéarités :

➤ La saturation

La notion de saturation est très familière à tous les électriciens, mais elle concerne beaucoup d'autres phénomènes physiques. Son existence résulte de cette évidence : aucune grandeur physique ne peut tendre vers l'infini (pour des raisons énergétiques). Il existe donc, pour chaque élément d'une chaîne, des signaux d'entrées incompatibles avec le fonctionnement linéaire. Ces signaux d'entrées donneraient une valeur trop grande à la sortie, qui ne peut pas l'atteindre : le signal réel que l'on recueille alors est plus faible, il y a une saturation (figure 1.3 a).

➤ Le seuil

La notion de seuil est aussi très familière. Beaucoup de systèmes électromécaniques présentent un seuil de fonctionnement ; la présence de ce seuil est due au frottement et à l'inertie. Il faut que le signal d'entrée ait une valeur supérieure à un certain niveau pour que la valeur de la sortie soit différente de zéro. En effet, il faut injecter au système une énergie suffisante pour vaincre les frottements et l'inertie au démarrage (figure 1.3 b).

➤ La zone morte

Il faut noter que le seuil n'est qu'un cas particulier de "la zone morte" qui correspond à l'annulation de la grandeur de sortie quand la grandeur d'entrée s'inverse. Ce phénomène correspond à la présence de deux seuils qui doivent être franchis, ces deux seuils peuvent, bien entendu, avoir des valeurs différentes (figure 1.3 c).

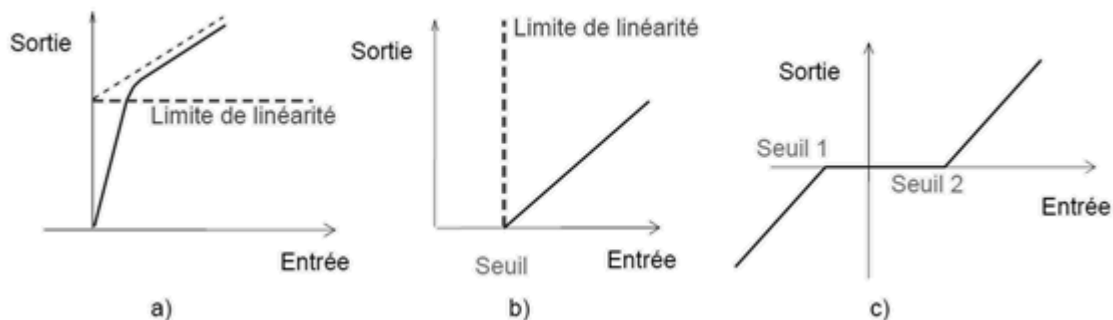


Fig. 1.3 types de non linéarités accidentelles : (a) saturation (b) seuil (c) zone morte.

On admet, généralement, que les asservissements présentant des non linéarités accidentelles sont linéaires dans un domaine limité par un seuil et une saturation en ce qui concerne l'amplitude (domaine de linéarité statique), les non linéarités peuvent apparaître en cas d'utilisation des signaux d'amplitude trop élevée,

comme elles peuvent aussi être mises en évidence à cause des signaux trop faibles, ces deux limites sont caractérisées par la limite supérieure et inférieure du domaine de linéarité. D'autre part, elles ont aussi un domaine de linéarité limité par la fréquence (domaine de linéarité dynamique).

1.8 Passage du modèle non linéaire au modèle linéaire

Le passage du modèle non linéaire au modèle linéaire peut être effectué par plusieurs techniques, parmi elles : la linéarisation autour d'un point d'équilibre (ou fonctionnement), linéarisation par segmentation, linéarisation par retour d'état (linéarisation selon une direction et changement de base), etc. la méthode de linéarisation autour d'un point de fonctionnement s'avère la plus intéressante grâce à ses nombreuses applications (Gain Scheduling, filtre de Kalman étendu, etc.). Cette méthode donne une représentation linéaire locale, valable uniquement au voisinage du point de fonctionnement désiré pour un système non linéaire.

Le paragraphe suivant donne une brève description sur cette méthode.

1.8.1 Point d'équilibre et ensemble d'équilibre

Un système quelconque, représenté par l'équation $\dot{x} = f(x, u)$ est dit dans un état stationnaire si son état n'évolue pas au cours du temps. Dans ces conditions, la dérivée temporelle du vecteur d'état est nulle $\dot{x}(t) = 0$. On appelle points d'équilibre les états stationnaires du système. Ils sont donc solution de $f(x_0, u_0) = 0$ où l'indice zéro est mis pour indiquer qu'il s'agit des grandeurs à l'équilibre.

On appelle ensemble d'équilibre E du système, l'ensemble de ses points d'équilibre:

$$E = \{ (x_0, u_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m / f(x_0, u_0) = 0 \}, \quad (1.14)$$

1.8.2 Linéarisation autour d'un point d'équilibre

Considérons une fonction continue mono-variable $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On souhaite décrire le comportement de cette fonction au voisinage d'un point x_0 à l'aide d'une relation linéaire de la forme $a\delta x + b$, où δx représente des petites variations de la variable x autour de $x_0 : x = x_0 + \delta x$, et où a et b sont des constantes à déterminer.

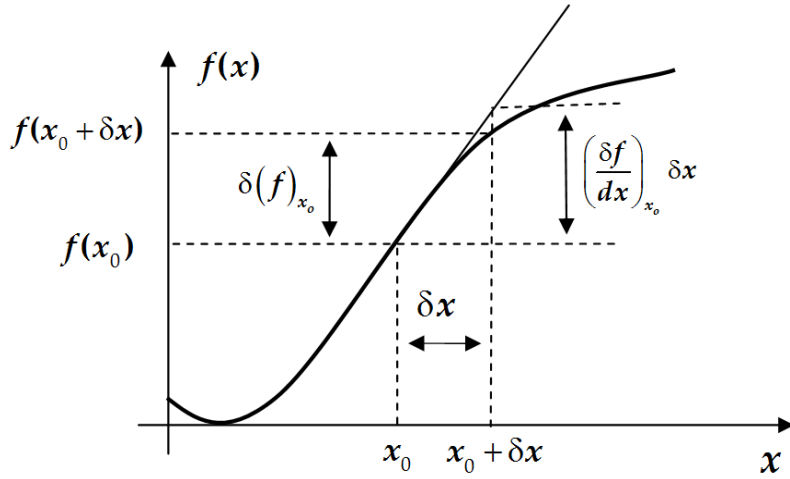


Fig. 1.4 Variation de $g(x)$ pour une variation δx de la variable autour de x_0

l'accroissement δx est suffisamment petit alors on peut écrire :

$$f(x_0 + \delta x) \cong f(x_0) + \left(\frac{df}{dx} \right)_{x_0} \delta x, \quad (1.15)$$

Notons que la quantité $(\delta f)_{x_0} = f(x_0 + \delta x) - f(x_0)$, (voir la figure 1.4), a été approchée par la quantité $(df/dx)_{x_0} \delta x$. La relation (1.14) correspond au premier terme du développement en série de Taylor de la fonction $f(x)$. Ceci peut être généralisé au cas des fonctions multidimensionnelles où $f(x) = [f_1(x) \ \cdots \ f_n(x)]^T$ avec $x = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T$ comme suit :

$$f(x_0 + \delta x) \cong f(x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0} \delta x, \quad (1.16)$$

où $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0}$ est le Jacobéen de la fonction $f(x)$ évalué en $x^0 = [x_1^0 \ \cdots \ x_n^0]^T$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_{x_0} & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right)_{x_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right)_{x_0} & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)_{x_0} \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

Il est à noter que le modèle linéaire obtenu par cette méthode dépend du point d'équilibre autour duquel a été effectuée la linéarisation.

Finalement, des exemples illustratifs sur la linéarité de quelques systèmes physiques sont présentés dans l'Annexe B. Ces exemples montrent bien la limitation de domaine de linéarité dans l'espace des systèmes non linéaires ou à variations paramétriques, ainsi que le risque d'utilisation d'un modèle linéaire hors de sa zone de linéarité.

1.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons illustré les différents critères, théoriques (selon les équations mathématiques du système dynamique) et pratiques (du point de vue du comportement du système), de classification des systèmes en linéaires et non linéaires. Les notions de base et les différents points critiques entre ces deux représentations sont mis en évidence à travers des définitions et des exemples illustratifs. Dans la pratique, il est bien difficile d'établir une limite entre les systèmes linéaires et non linéaires. Il serait plus correct de parler de **non linéarités négligeables** et de **non linéarités non négligeables**. La majorité des systèmes physiques sont des systèmes NL dans ce sens. Ainsi, il est déconseillé d'utiliser un modèle non linéaire si l'équivalent linéaire est suffisant. A la limite, on peut dire que l'existence des systèmes physiques parfaitement linéaires est pratiquement impossible. Par contre, on peut parler d'une ou plusieurs zones où le comportement du système peut être considéré comme linéaire.

La complexité des systèmes non linéaires exige des techniques d'analyse jugées souvent complexes, coûteuses et volumineuses. En contrepartie, plusieurs techniques de calcul simples mais puissantes qui permettent l'analyse systématique des systèmes dynamiques restent restrictives pour le domaine linéaire. Ces avantages ont motivé les experts pendant une longue durée pour chercher des nouvelles solutions qui permettent l'analyse des systèmes non linéaires dans un contexte linéaire. De cette manière, on peut garder la généralité des représentations non linéaires et la puissance des techniques linéaires en même temps. Cela conduit à l'apparition des systèmes LPV sur la base des systèmes LTI.

Donc le chapitre suivant va traiter Les différentes techniques de modélisation des systèmes LTI avec les différentes formes possibles, ainsi que quelques techniques d'identification paramétriques appropriées.

Chapitre 02

Modélisation et Identification des Systèmes LTI

2.1 Introduction

Comme nous avons vu dans le chapitre précédent, la modélisation est la procédure de mise en équations mathématiques des lois de la nature de. Ces équations définissent les relations entre différentes variables du système c'est-à-dire les différents signaux d'entrées-sortie du système. Le modèle d'un système peut être *paramétrique* avec une structure fixe et un nombre fixe de paramètres, ou *non paramétrique* avec une structure variable sous forme d'une somme de termes algébriques.

L'identification des systèmes est l'ensemble des techniques qui consistent à estimer les paramètres du modèle mathématique à partir d'un ensemble de mesures expérimentales d'entrées-sorties issues d'un système dynamique. Les modèles résultants de cette procédure doivent fournir une reproduction fidèle du comportement réel du système physique dans le but de simulation ou de prévision, de commande, de surveillance, etc.

Les méthodes d'identification peuvent être classées en *paramétriques* et *non paramétriques*.

- Les méthodes d'identification paramétriques sont des techniques d'estimation des paramètres pour un modèle de structure donnée. C'est une opération de recherche statistique des valeurs numériques des paramètres pour atteindre le meilleur accord entre la sortie théorique du modèle et la sortie mesurée. Ces méthodes

sont caractérisées par le nombre de paramètres utilisés dans une structure donnée pour approximer le comportement désiré.

- Les méthodes d'identification non paramétriques sont des techniques permettant l'estimation du comportement du processus par interpolation. Ces méthodes sont caractérisées par le nombre de termes utilisés pour approximer le comportement désiré. Typiquement, les méthodes non paramétriques comprennent l'analyse de corrélation, qui estime la réponse impulsionnelle d'un système, et l'analyse spectrale, qui estime la réponse en fréquence d'un système. Ce chapitre ne fait pas l'objet de ce type d'identification.

2.2 Types de modèles paramétriques

Les modèles linéaires paramétrés peuvent être classés en deux types principaux :

2.2.1 Modèles de Connaissance

Les modèles de connaissance sont construits à partir des lois physiques, ils sont basés sur la connaissance détaillée du système. Le modèle ainsi obtenu est dit modèle de connaissance ou modèle boîte blanche. Lorsque les relations entre les variables du système sont établies avec des équations différentielles, il se trouve qu'un certain nombre de constantes qui représente les paramètres du système ont des valeurs inconnues. Les paramètres de ce type de modèle représentent des grandeurs physiques, ou ont au moins une interprétation physique. Ce type de modélisation est analytique et son comportement est très proche au comportement du système réel si ses paramètres sont bien ajustés, donc sa réponse est bien adaptée à la réponse du système réel. Cela signifie que la stabilité du système implique la stabilité du modèle et le modèle reste valide dans tout l'espace des signaux du système. Par contre, un modèle de connaissance est caractérisé souvent par sa complexité qui dépend de complexité du système et par conséquent il est souvent difficile à trouver.

2.2.2 Modèles de Comportement

Les modèles de comportement sont des familles de modèles flexibles d'applicabilité générale. Les paramètres de ces modèles n'ont pas une interprétation physique directe, mais ils sont uniquement utilisés comme des rapports entre

les signaux d'entrée et de sortie du système. Ces modèles sont également connus sous le nom modèle boîte noire. Parfois, nous sommes confrontés à des systèmes ou des sous-systèmes qui ne peuvent pas être modélisés à partir de connaissances physiques. La raison peut être que la structure du système ou son mécanisme interne est inconnu, ou qu'elle serait être trop compliqué d'en démêler des relations physiques. Il est alors possible d'utiliser des modèles standards, qui sont connus, par l'expérience, à être capables d'approximer un large intervalle de la dynamique des différents systèmes. Pratiquement, ces modèles donnent des résultats très proches à la réalité, à côté des modèles de connaissance. La structure de ce type de modèle est très flexible et peut s'adapter facilement avec les algorithmes d'identification. Les formes linéaires constituent la classe la plus commune de ces modèles standards. Par contre, cette structure n'est qu'une approximation de la structure réelle du système physique et par conséquent, elle peut fournir des estimations biaisées, non convergentes ou les deux. Si le modèle est utilisé hors de sa zone de validité (où il est identifié), il peut souffrir des problèmes de divergence ou d'instabilité.

Quelques notations utiles sont illustrées dans la section suivante [1] :

- **Constant:** une quantité dans le modèle qui ne varie pas avec le temps.
- **Paramètre du système:** une constante, qui est donnée par le système.
- **Paramètre de conception:** une constante que l'on peut faire varier afin de donner au système des propriétés différentes.
- **Signal ou variable:** une quantité dans le modèle qui varie avec le temps.
- **Signal externe:** une variable qui affecte le système sans être affectée par d'autres variables du système.
- **Entrée:** un signal externe au système dont nous pouvons choisir ses variations dans le temps, désigné par u , représente souvent le *signal de commande*.
- **Signal de perturbation:** un signal externe au système qui a une influence sur le système et qu'on ne peut pas l'influencer, dénoté par w .

Le *signal de commande* et *signal de perturbation* sont des entrées du système.

- **Sortie:** un signal dont l'évolution est notre intérêt principal, dénoté par y .

- **Signal interne:** une variable dans le système qui est ni une sortie, ni un signal externe, elle représente l'état du système constituant la mémoire du système et cache toute l'information sur son passé.

2.3 Structures des modèles LTI

En automatique classique, il y a deux structures principales que peut prendre un modèle d'un système linéaire :

- La première forme lie l'entrée, l'état du système et la sortie avec deux équations appelées « *équation d'état* » et « *équation de sortie* ». Cette forme est connue sous le nom « *forme d'Entrée/Etat/Sortie (E/E/S)* ».
- La deuxième forme lie l'entrée avec la sortie à travers une fonction appelée « *Fonction de Transfert* », cette forme est connue sous le nom « *forme d'Entrée/Sortie (E/S)* ».

2.3.1 Modèle d'Espace d'Etat

Une représentation d'état ou modèle d'état est un ensemble fini d'équations différentielles du premier ordre reliant des grandeurs scalaires, divisées en variables internes (ou variables d'état) et en variables externes comprenant les grandeurs d'entrée et de sortie.

Dans le cas du système linéaire, le modèle d'état prend la forme :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) \\ y(t) = C(\theta)x(t) + D(\theta)u(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

où $A(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état ou d'évolution, $B(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice d'entrée, $C(\theta) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ est la matrice de sortie ou d'observation, $D(\theta) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ est la matrice de transmission directe des entrées sur les sorties.

Dans le cas discret :

$$\begin{cases} x(k+1) = F(\theta)x(k) + G(\theta)u(k) \\ y(k) = C(\theta)x(k) + D(\theta)u(k) \end{cases} \quad (2.2)$$

où les matrices F et G sont données par :

$$F = e^{AT}, \quad G = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau \quad (2.3)$$

T est la période d'échantillonnage. La matrice D est généralement nulle dans le cas d'un système dynamique causal car les sorties ne peuvent pas réagir instantanément aux variations des entrées. Le vecteur paramètre $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)^T$ contient les paramètres inconnus du système.

2.3.2 Modèles de Fonction de Transfert

Les fonctions de transfert sont classées, selon l'axe du temps t , en deux catégories principales : les fonctions en temps continu avec $t \in \mathbb{R}$, et les fonctions en temps discret avec $t = k \in \mathbb{Z}$.

a) Fonction de transfert en temps continu

Un modèle linéaire SISO en temps continu peut être décrit comme suit:

$$y(t) = y_0(t) + v(t) \quad (2.4)$$

$v(t)$ est la sortie du système de perturbation et $y_0(t)$ est le terme de la sortie sans bruit :

$$y_0(t) = G(s, \theta)u(t) \quad (2.5)$$

$G(s, \theta)$ est la fonction de transfert rationnelle du vecteur de paramètres θ , et s est l'opérateur dérivée qui correspond à la variable de Laplace dans le domaine fréquentiel avec :

$$s^n u(t) = \frac{d^n}{dt^n} u(t) = u^{(n)}(t) \quad (2.6)$$

et

$$G(s, \theta) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{n_b} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n_a-1} a_i s^i + s^{n_a}} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n_b} s^{n_b}}{a_0 + a_1 s + \dots + s^{n_a}}, \text{ avec } n_a \geq n_b \quad (2.7)$$

où $a_0, a_1, \dots, a_{n_a}$, et $b_0, b_1, \dots, b_{n_b}$ sont des valeurs constantes. Si le système présente un retard τ dans sa réponse, ceci est interprété par le terme $u(t - \tau)$.

L'équation 2.5 est une notation abrégée de l'équation différentielle suivante :

$$a_0 y_0(t) + a_1 \frac{d}{dt} y_0(t) + \dots + \frac{d}{dt^{n_a}} y_0(t) = b_0 u(t) + b_1 \frac{d}{dt} u(t) + \dots + b_{n_b} \frac{d}{dt^{n_b}} u(t), \quad (2.8)$$

De la même manière la sortie du système de perturbation peut être écrit,

$$v(t) = H(s, \theta)e(t) \quad (2.9)$$

$$\text{Avec} \quad H(s, \theta) = \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{n_c} c_j s^j}{\sum_{i=0}^{n_d-1} d_i s^i + s^{n_d}} = \frac{c_0 + c_1 s + \dots + c_{n_c} s^{n_c}}{d_0 + d_1 s + \dots + s^{n_d}}, \text{ avec } n_c \geq n_d \quad (2.10)$$

Le signal $e(t)$ est un signal de perturbation (généralement un bruit blanc), on ne peut pas influencer sa valeur, cependant, il est mesurable. Le filtre $H(s, \theta)$ est le lien qui permet de transférer l'influence des différents signaux de perturbation sur la réponse du système.

Le modèle (2.4) peut être réécrit sous la nouvelle forme :

$$y(t) = G(s, \theta)u(t) + H(s, \theta)e(t) \quad (2.11)$$

b) Fonction de transfert en temps discret

De la même manière, si $G(q, \theta)$ et $H(q, \theta)$ sont les fonctions de transfert discrètes d'un système linéaire SISO, la réponse du modèle discret est écrite sous la forme suivante :

$$y(k) = G(q, \theta)u(k) + H(q, \theta)e(k) \quad (2.12)$$

avec q l'opérateur de décalage, tel que :

$$q^{-n}u(k) = u(k-n) \quad (2.13)$$

$$G(q, \theta) = \frac{B(q)}{F(q)} = \frac{b_1 q^{-n_k} + b_2 q^{-n_k-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_k-n_b+1}}{1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f}}, \quad (2.14)$$

$$H(q, \theta) = \frac{C(q)}{D(q)} = \frac{1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c}}{1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{n_d} q^{-n_d}}, \quad (2.15)$$

Alors (2.4) est une notation abrégée de l'équation suivante :

$$y_0(k) + f_1 y_0(k-1) + \dots + f_{n_f} y_0(k-n_f) = b_1 u(k-n_k) + \dots + b_{n_b} u(k-(n_b+n_k-1)) \quad (2.16)$$

Les effets des retards du système, désigné par n_k , peuvent être traités sans difficulté après l'acquisition par décalage temporel des données par un multiple entier de la période d'échantillonnage.

2.3.3 Famille de modèles de fonction de transfert [1]

Dans cette section on va décrire les différentes figures de paramétrage de G et H . les différentes combinaisons des coefficients b_i, c_i, d_i et f_i de G et H et l'ordre n_b, n_c, n_d et n_f des polynômes associés donnent une famille de fonctions de transfert standard caractérisée par une structure commune.

a) Modèle Box Jenkins (BJ)

Lorsque $n_f \neq 0, n_b \neq 0, n_c \neq 0, n_d \neq 0$, la sortie $y(k)$ du modèle prend la forme :

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)} u(k) + \frac{C(q)}{D(q)} e(k), \quad (2.17)$$

Cette structure est connue sous le nom de *modèle de Box-Jenkins* (BJ).

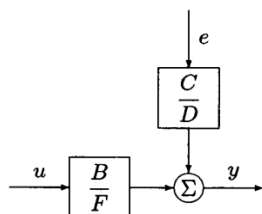


Fig. 2.1 *Modèle de Box-Jenkins* (BJ)

La structure BJ est la structure du « modèle complet » dans lequel les propriétés des perturbations sont modélisées séparément de la dynamique du système. Le modèle BJ est préférable lorsque les perturbations sont modélisées à la "fin" du processus, dans le cas où le bruit de mesure affecte seulement la sortie.

b) Modèle Auto-Regressive Moving Average eXogenous (ARMAX)

Une structure courante consiste à utiliser un dénominateur commun entre G et H :

$$F(q) = D(q) = A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}, \quad (2.18)$$

On obtient
$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)e(k), \quad (2.19)$$

Ce modèle est connu sous le nom *ARMAX*. Ce nom est dérivé du fait que $A(q)y(k)$ représente une Auto-Régression, et $C(q)e(t)$ représente un bruit blanc de moyenne mobile, tandis que la variable exogène $B(q)u(k)$ représente un apport supplémentaire.

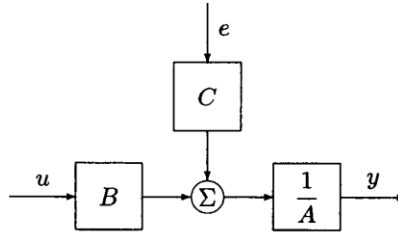


Fig. 2.2 *Modèle Auto-Regressive Moving Average eXogenous (ARMAX).*

Physiquement, la différence entre les modèles ARMAX et BJ, c'est que le signal de bruit $e(k)$ et le signal de commande $u(k)$ sont soumis à la même dynamique (mêmes pôles) dans le cas ARMAX. Ce qui est raisonnable si les perturbations entrent en collaboration directe avec l'entrée de commande du processus. Le modèle ARMAX donne la flexibilité à la modélisation des perturbations, par le biais du polynôme C . Pour cela, cette structure est souvent utilisée.

c) **Modèle Auto-Regressive eXogenous (ARX)**

Dans ce cas, $C(q) \equiv 1$, c'est-à-dire $n_c = 0$, le model prend le structure suivante :

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + e(k), \quad (2.20)$$

Avec la même terminologie cette structure est appelé un modèle ARX.

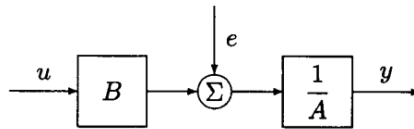


Fig. 2.3 *Modèle Auto-Régressive eXogenous (ARX).*

Dans cette forme, le signal de bruit est supposé parvenir à travers la dynamique du dénominateur du système avant d'être ajouté avec la sortie. Cette structure est très préférée dans plusieurs applications car son prédictateur est un régresseur linéaire. Dans cette structure l'ensemble des entrées et sorties précédentes participe dans la formulation de la réponse du système avec les valeurs instantanées de l'entrée et du bruit. Les modèles ARX et ARMAX ont une dynamique commune (pôles communs) pour le signal de bruit et de l'entrée du système. Cette option est recommandée lorsque les perturbations dominantes rentrent tôt dans le processus, comme une entrée.

d) Modèle Erreur de Sortie (OE)

Ce cas particulier est important car dans ce cas les propriétés de la perturbation ne sont pas modélisées et le modèle de bruit $H(q)$ est choisie pour être $H(q) \equiv 1$, c'est-à-dire $n_c = n_d = 0$, avec $n_f \neq 0, n_b \neq 0$. alors la sortie $y(k)$ devient :

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)} u(k) + e(k), \quad (2.21)$$

Ce cas particulier est connu sous le nom de *modèle d'Erreur de Sortie* (OE). La source de bruit $e(t)$ sera alors la différence (l'erreur) entre la sortie réelle et la sortie sans bruit.

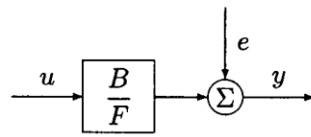


Fig. 2.4 Modèle d'Erreur de Sortie (OE)

La structure OE présente l'avantage que la dynamique du système peut être décrite séparément et qu'aucun paramètre n'est gaspillé sur le modèle de perturbation. Cette structure est la plus commode dans le cas des systèmes en boucle ouverte et donne une bonne description de la fonction de transfert quelle que soit la nature de la perturbation. Toutefois, la minimisation de la fonction du critère peut être plus difficile que dans le cas ARMAX.

e) Modèle Réponse Impulsionnelle Finie (FIR)

Un cas particulier où $n_a = 0$, $y(k)$ représente la Réponse Impulsionnelle Finie (FIR),

$$y(k) = B(q)u(k) + e(k), \quad (2.22)$$

Cette structure de modèle est particulièrement très commune dans les applications du traitement de signal.

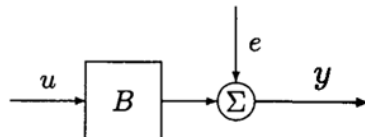


Fig. 2.5 Modèle Réponse Impulsionnelle Finie (FIR)

Dans cette structure, seules les entrées précédentes participent dans la formulation de la réponse du système avec les valeurs instantanées de l'entrée et de bruit.

Le tableau suivant résume les structures de modèles boîte noire :

	ARX	ARMAX	OE	FIR	BJ
$G(q, \theta)$	$\frac{R_B(q^{-1}, \theta)}{R_A(q^{-1}, \theta)}$	$\frac{R_B(q^{-1}, \theta)}{R_A(q^{-1}, \theta)}$	$\frac{R_B(q^{-1}, \theta)}{R_F(q^{-1}, \theta)}$	$R_B(q^{-1}, \theta)$	$\frac{R_B(q^{-1}, \theta)}{R_F(q^{-1}, \theta)}$
$H(q, \theta)$	$\frac{1}{R_A(q^{-1}, \theta)}$	$\frac{R_C(q^{-1}, \theta)}{R_A(q^{-1}, \theta)}$	1	1	$\frac{R_C(q^{-1}, \theta)}{R_D(q^{-1}, \theta)}$

Tab.2.1 Structures de modèles boîte noire

Le choix de la structure du modèle est un ingrédient essentiel de toute procédure d'identification des systèmes, ce choix décrit l'ensemble de modèles valables pour représenter le système dans lequel le candidat optimal se trouve. Chaque structure offre ses propres avantages. Si cette structure est bien fondée à l'égard du système d'être identifié, tous les autres ingrédients comme la conception d'expérience, la sélection du critère d'estimation, etc. peuvent contribuer avec succès à la validité du résultat final. Communément, un mauvais choix du modèle affecte directement les résultats avec une mauvaise estimation du système.

2.4 Prédiction

A partir du modèle (2.17), il est possible de prédire la valeur future de la sortie $y(k)$ à partir des mesures précédentes de $u(k)$ et $y(k)$. Le signal $e(k)$ qui représente le signal de bruit ne peut pas être prédit car il est indépendant de tout ce qui s'est passé avant. Pour le cas des modèles OE et FIR, où $H(q) \equiv 1$, il est plus facile de calculer la prédiction lorsque le modèle est obtenu :

$$y(k) = G(q, \theta)u(k) + e(k) \quad (2.22)$$

Avec une prédiction naturelle

$$\hat{y}(k) = G(q, \theta)u(k) \quad (2.23)$$

Avec les autres modèles on obtient la prédiction comme suit [1]:

$$H^{-1}(q, \theta)y(k) = H^{-1}(q, \theta)G(q, \theta)u(k) + e(k) \quad (2.24)$$

$$\text{Ou bien} \quad y(k) = (1 - H^{-1}(q, \theta))y(k) + H^{-1}(q, \theta)G(q, \theta)u(k) + e(k) \quad (2.25)$$

L'expression $(1 - H^{-1}(q, \theta))y(k)$ ne contient donc que les anciennes valeurs de $y(k)$, le côté droit de (2.25) est donc connu à l'instant $k-1$, à l'exception de $e(k)$, la prédiction de $y(k)$ est simplement obtenue par suppression de $e(k)$:

$$\hat{y}(k) = (1 - H^{-1}(q, \theta))y(k) + H^{-1}(q, \theta)G(q, \theta)u(k) \quad (2.26)$$

Cette relation est l'expression générale de prédiction de la prochaine valeur de la sortie $y(k)$, avec les anciennes valeurs de $y(k)$ et $u(k)$.

Deux propriétés importantes pour les structures introduites ci-dessus sont :

- Si $G(q, \theta)$ et $H(q, \theta)$ sont indépendamment paramétrées, les deux fonctions de transfert peuvent être estimées indépendamment. Cette propriété est valable pour les structures FIR, OE, et BJ.
- Pour les modèles de structure ARX et FIR, l'expression de la sortie du prédicteur (2.26) est linéaire par rapport au vecteur de paramètres inconnus, c'est-à-dire, les deux termes $(1 - H^{-1}(q, \theta))$ et $H^{-1}(q, \theta)G(q, \theta)$ sont des polynômes. Cette propriété présente l'avantage pour une optimisation linéaire.

2.5 Régression linéaire

Le problème d'estimation de vecteur de paramètre inconnus θ avec $\theta = (f_1, \dots, f_{nf}, b_1, \dots, b_{nb}, c_1, \dots, c_{nc}, d_1, \dots, d_{nd})^T$ peut être considérablement facilité en utilisant une prédiction sous forme d'une fonction linéaire de θ :

$$\hat{y}(k) = \varphi(k)^T \theta \quad (2.27)$$

avec $\varphi(k)$ est un vecteur formé par les anciennes valeurs d'entrées et de sorties. Une telle structure est appelée *régression linéaire* adoptée pour les modèle ARX et FIR. Le vecteur $\varphi(k)$ est le *vecteur de régression* et ses composantes sont appelées *variables de régression*.

Avec la détermination d'une structure de modèle appropriée, l'étape suivante consiste à déterminer les valeurs de paramètres à partir des données expérimentales

d'entrée/sortie appelées vecteur de données, à l'aide d'une technique d'estimation paramétrique. Ce problème sera abordé dans la section suivante.

2.6 Identification paramétrique des systèmes LTI

L'objectif principal du processus d'identification est la recherche d'une meilleure estimation possible du vecteur de paramètres θ , à partir des mesures réalisées sur le système. Le processus d'identification paramétrique passe par les trois étapes suivantes :

- a) La formulation de la fonction de l'erreur d'estimation qui s'appelle ainsi l'erreur de prédiction;
- b) La formulation du critère d'optimisation pour la fonction d'erreur d'estimation ;
- c) L'utilisation d'une technique d'optimisation pour minimiser le critère d'optimisation de la fonction d'erreur par rapport au vecteur de paramètres.

Pour chaque valeur du vecteur de paramètres θ , le modèle du système donne une estimation de la sortie $y(k)$. A l'instant k , nous pouvons évaluer la qualité de cette estimation en calculant l'erreur d'estimation (ou de prédiction), c'est-à-dire l'écart entre la sortie mesurée et la sortie calculée à l'aide de la relation suivante :

$$\varepsilon(k, \theta) = y(k) - \hat{y}(k | \theta) \quad (2.28)$$

L'erreur d'estimation est le résultat réfléchi de l'union de plusieurs sources et problèmes techniques. Cette erreur est due aux perturbations inévitables qui agissent sur le système, aux bruits de mesures, aux incertitudes de modélisation (un modèle n'est qu'une représentation approximative du système, la structure et l'ordre du modèle ont ainsi des grandes influences sur les erreurs de modélisation) et aux erreurs de la méthode d'estimation utilisée, qui sont liées partiellement à la direction de convergence de la méthode d'optimisation.

Le principe d'un algorithme d'identification est illustré dans la figure suivante :

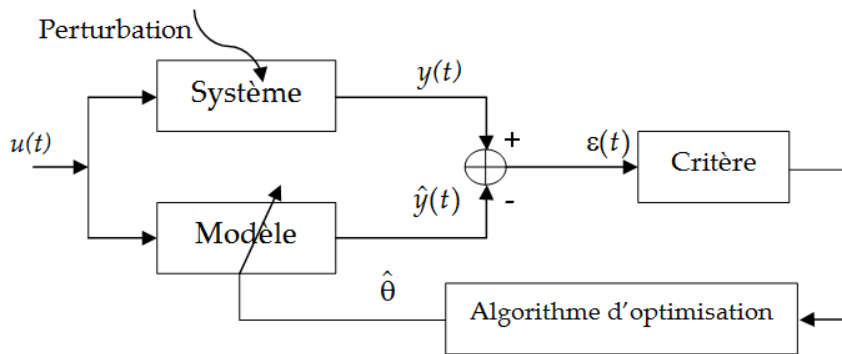


Fig. 2.6 Le principe d'un algorithme d'identification.

L'objectif de cet algorithme est de déterminer le vecteur paramètre du modèle pour que la sortie calculée soit la plus proche possible de la sortie mesurée, c'est-à-dire que l'erreur d'estimation soit, à chaque instant, la plus petite possible.

2.6.1 Méthodes de formulation des fonctions d'erreur

La formulation de la fonction de l'erreur d'estimation se fait suivant sa linéarité par rapport aux vecteur de paramètres selon deux formes, la forme linéaire ou la forme non linéaire. Par conséquence, deux familles de méthodes d'identification principale sont envisagées : les Méthodes d'Erreur d'Equation (EEM) et les Méthodes d'Erreur de Sortie (OEM). La première est utilisée lorsque le critère d'optimisation est linéaire par rapport au vecteur de paramètres, tandis-que la deuxième est utilisée dans le cas d'un critère non linéaire.

a) Méthodes d'Erreur d'Equation (EEM)

Les méthodes d'erreur d'équation sont basées sur la régression linéaire des signaux d'entrée-sortie (adaptées à la structure ARX ou FIR). Leur avantage principal réside dans la linéarité de la fonction d'erreur d'estimation par rapport au vecteur de paramètre, ce qui permet l'utilisation des techniques d'optimisation linéaires simples, comme la méthode des moindres carrés simples pour minimiser le critère d'optimisation.

Ainsi, la simplicité de calcul et la nature non-itérative (une seule étape de calcul sans besoin de conditions initiales) favorisent l'utilisation de ces méthodes comme méthodes d'initialisation dans le processus d'identification. L'optimisation de la fonction de l'erreur de prédiction selon un critère convexe est considérablement aisée et donne toujours un voisinage proche au minimum global, à l'opposé des méthodes OEM qui peuvent confronter des minimums locaux.

Toutefois, en présence du bruit de mesure, l'estimation est asymptotiquement biaisée, incohérente et perdent leur efficacité [8] (et voir ainsi [28]). La figure suivante montre le principe de formulation de l'erreur d'estimation par ces méthodes :

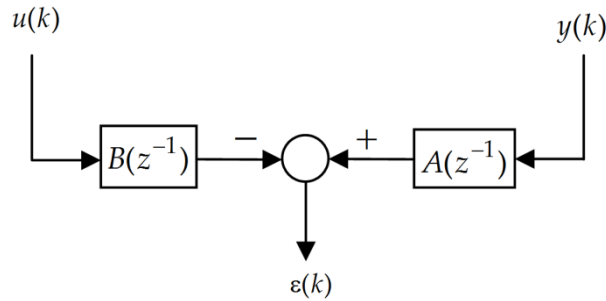


Fig. 2.7 Formalisation de l'erreur de prédiction par l'EEM

Suivant la méthode d'EEM, l'erreur d'estimation prend la forme suivante :

$$\varepsilon(k, \theta) = A(q, \theta)y(k) - B(q, \theta)u(k) \quad (2.29)$$

b) Méthode d'Erreur de Sortie (OEM)

Les méthodes d'erreur de sortie est probablement les méthodes les plus utilisées dans l'estimation paramétrique d'un système. Ces méthodes sont basées sur la simulation d'un modèle initial et de ses fonctions de sensibilité à partir de la seule connaissance de l'excitation. Grâce à cette procédure, la sortie simulée (estimée) est indépendante de la perturbation affectant le système. Par conséquent, le résidu est l'image de cette perturbation, d'où l'appellation *erreur de sortie*. La minimisation du critère d'optimisation se fait d'une manière itérative, et nécessite une technique de programmation non-linéaire. La propriété fondamentale de ces méthodes est qu'elle fournit une estimation asymptotiquement non biaisée des paramètres. Par contre, la non-linéarité du critère par rapport aux paramètres nécessite l'utilisation des techniques d'optimisation non-linéaire.

Le problème principal des méthodes d'erreur de sortie est l'existence possible de plusieurs minimums locaux vers lesquels l'algorithme d'optimisation peut converger. Ce problème est lié directement au choix des conditions initiales. Ce qui signifie que la convergence de ces méthodes vers un minimum global n'est pas garantie en général, et nécessite des bonnes conditions initiales. Pour cela, l'initialisation se fait souvent par une méthode d'erreur d'équation [9]. Le principe de formulation de l'erreur d'estimation par ces méthodes est montré sur la figure suivante :

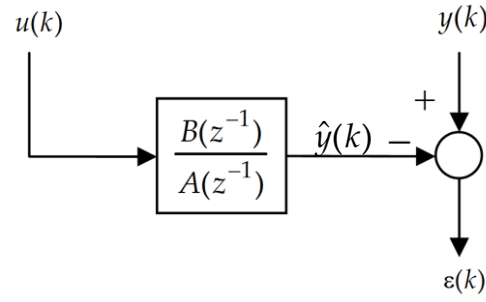


Fig. 2.8 Formalisation de l'erreur de prédiction par l'OEM

Suivant la méthode d'OEM, l'erreur d'estimation prend la forme suivante :

$$\varepsilon(k, \theta) = y(k) - \frac{B(q, \theta)}{A(q, \theta)} u(k) \quad (2.30)$$

2.6.2 Formulation du critère d'optimisation des fonctions d'erreur

Etant donné un ensemble de N couples de mesures entrées/sorties réalisées sur le système :

$$Z^N = \{(u_1, y_1), (u_2, y_2), \dots, (u_N, y_N)\} \quad (2.31)$$

et soit $\ell(\varepsilon(k, \theta))$ une fonction de l'erreur d'estimation. il s'agit de chercher une estimation, notée $\hat{\theta}$ du vecteur paramètre inconnu θ , permettant de minimiser la moyenne des mesures des erreurs d'estimation [3] :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \mathcal{J}(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ell(y(k) - \hat{y}(k | \theta)) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ell(\varepsilon(k | \theta)) \quad (2.32)$$

La notation « $\arg \min_{\theta}$ » désigne l'argument minimisant. Le critère $\mathcal{J}$ à minimiser prend plusieurs formes selon la méthode d'estimation utilisée.

➤ Structure au sens des moindres carrées (Least Squares, LS)

Cette méthode utilise, pour l'estimation, la norme quadratique de l'erreur des sorties $\ell(\varepsilon(k, \theta)) = \|\varepsilon(k, \theta)\|_2^2$, le critère à minimiser représente la moyenne quadratique des erreurs d'estimation (critère quadratique) [3]:

$$\mathcal{J}(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k | \theta))^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\varepsilon(k | \theta))^2 \quad (2.33)$$

➤ **Structure au sens du Maximum Likelihood (ML)**

Dans ce cas, la fonction utilisée pour l'estimation est une fonction logarithmique de la fonction de l'erreur. Cette méthode est recommandée lorsque le critère d'optimisation possède des propriétés statistiques observables, comme le bruit de forme gaussien, la valeur significative de la variance du vecteur de paramètres, etc. Dans ce cas, la fonction $\ell(\varepsilon)$ est choisie comme suit [1]:

$$\ell(\varepsilon) = \log f_e(\varepsilon) \quad (2.34)$$

où $f_e(\varepsilon)$ est la fonction de densité de probabilité (PDF) du signal de bruit $e(k)$.

En général, on peut utiliser n'importe quelle fonction scalaire $\ell(\varepsilon)$ positive arbitraire en tant que mesure et de la minimiser. Si ce critère atteint son minimum, cela veut dire que ce vecteur de paramètres est l'optimum pour la méthode d'estimation utilisée, parmi un ensemble infini de vecteurs candidats. Le problème de la recherche de l'optimum repose donc sur l'efficacité de la méthode utilisée.

2.6.3 Techniques d'optimisation des fonctions d'erreur

Les méthodes d'estimation paramétrique sont classées en méthodes linéaires et méthodes non linéaires et suivent la linéarité et la non-linéarité des modèles par rapport au vecteur de paramètres. L'objectif principal de ces méthodes est la recherche d'un minimum global du vecteur de paramètres qui minimise l'erreur d'estimation dans une direction optimale. Dans ce sens les méthodes d'estimation paramétrique sont des techniques d'optimisation selon un critère donné.

Définition 2.1 (minimum global) [10]: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. $f(x^*)$ est le minimum global de f si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(x^*) \quad (2.35)$$

x^* est un minimiseur global de f .

Définition 2.2 (minimum local) [10]: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. $f(x^*)$ est le minimum local de f si et seulement si :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \forall x \in]x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon[, f(x) \geq f(x^*) \quad (2.36)$$

x^* est un minimiseur local de f .

Théorème 01 (condition suffisante de minimalité locale) [10] : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 . Si $x \in \mathbb{R}$ vérifie les conditions :

$$\begin{cases} f'(x^*) = 0 \\ f''(x^*) > 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

Alors $f(x^*)$ est un minimum local strict de f .

Définition 2.3 (moindres carrés non linéaires) [10] : Soit une fonction ε , tel que $\varepsilon = (\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \dots \ \varepsilon_m)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Les problèmes des moindres carrés non linéaires visent à minimiser la fonction objective de la forme :

$$\mathcal{J}(\theta) = \frac{1}{2} \varepsilon(\theta)^T \varepsilon(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2(\theta) \quad (2.39)$$

Où les fonctions ε_i sont des fonctions non linéaires par rapport au vecteur θ .

2.6.3.1 Optimisation linéaire au sens des moindres carrés simples

Dans le cas de modèles linéaires par rapport aux paramètres, le minimum du critère peut être calculé et est *unique* [3]. La minimisation du critère (2.33) par rapport au vecteur paramètre conduit alors à une formule bien connue des moindres carrés. Cette méthode s'applique en temps différé car elle nécessite l'inversion d'une matrice de taille importante.

a) Cas d'un modèle à temps discret

Si l'on dispose de N couples de mesures entrée/sortie réalisées sur le système à identifier, la relation (2.27) s'écrit:

$$\hat{Y} = \Phi \theta \quad (2.40.a)$$

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} \hat{y}_k \\ \vdots \\ \hat{y}_{k+N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_{k-1} \ \dots \ -y_{k-n} & u_{k-1} \ \dots \ u_{k-m} \\ \vdots & \vdots \\ -y_{k+N-2} \ \dots \ y_{k+N-1-n} & u_{k+N-2} \ \dots \ u_{k+N-1-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \ \dots \ a_n \ b_m \ \dots \ b_m \end{pmatrix}^T \quad (2.41.b)$$

avec y_k est la valeur de y à l'instants k .

Il s'agit alors de déterminer le vecteur paramètre permettant de rendre minimum le critère quadratique sur l'erreur de prédiction. Compte tenu de (2.31), le critère à minimiser s'écrit :

$$\mathcal{J}(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_{k,\theta})^2 = \frac{1}{N} (Y - \hat{Y})^T (Y - \hat{Y}) = \frac{1}{N} (Y - \Phi \theta)^T (Y - \Phi \theta) \quad (2.42)$$

Où Y représente le vecteur de N mesures de sortie du système à identifier. La minimisation de $\mathcal{J}$ conduit à annuler la dérivée du critère par rapport au vecteur paramètre, on obtient, alors :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta} = -\frac{2}{N} \Phi^T (Y - \Phi \theta) \quad (2.43)$$

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (2.44)$$

L'identification de $(n+m)$ paramètres nécessite au minimum $(n+m) \times N$ mesures, avec $N \geq (n+m)$.

b) Cas d'un modèle à temps continu

Pour un modèle continu la régression linéaire peut être écrite sous la même forme précédente, mais cette fois-ci les entrées-sorties différées sont remplacées par des dérivées comme suit :

$$\hat{y}(t) = \varphi(t)^T \theta \quad (2.45.a)$$

$$\text{Avec} \quad \begin{cases} \varphi(t) = \left(-\frac{dy(t)}{dt} \quad \dots \quad -\frac{d^n y(t)}{dt^n} \quad u(t) \quad \dots \quad \frac{d^m u(t)}{dt^m} \right)^T \\ \theta = (a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m)^T \end{cases} \quad (2.45.b)$$

Contrairement au cas discret, les composantes du vecteur d'observations $\varphi(t)$, qui représentent des dérivées successives de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$, ne sont pas mesurables directement. Pour résoudre ce problème, on peut extraire les dérivées successives de $y(t)$ et $u(t)$ numériquement, mais à condition qu'elles ne soient pas entachées du bruit et qu'elles soient dérivables au moins n et m fois respectivement. Ceci n'est pas toujours le cas. Le remplacement de l'opérateur de dérivée par un opérateur d'intégral dans $\varphi(t)$ peut résoudre ce problème, mais ainsi peut conduire à des résultats d'estimation biaisés ou divergentes. Autre solution consiste à utiliser un filtrage de variable d'état (FVE) [3] des mesures $y(t)$ et $u(t)$. Si les dérivées successives de la sortie filtrée $y_f(s)$ et de l'entrée filtrée $u_f(s)$ sont obtenues par un FVE, on peut écrire l'expression $\hat{y}_f(s)$ de la manière suivante :

$$\hat{y}_f(t) = \left(-\frac{dy_f(t)}{dt} \quad \dots \quad -\frac{d^n y_f(t)}{dt^n} \quad u_f(t) \quad \dots \quad \frac{d^m u_f(t)}{dt^m} \right) \cdot \theta \quad (2.46)$$

De plus, le vecteur paramètre reste inchangé par filtrage.

Maintenant, avec N séquences de mesures, depuis un instant t_1 , jusqu'à un instant t_N , la relation (2.40.a) s'écrit, sous forme matricielle suivante:

$$\hat{Y}_f = \Phi \theta \quad (2.47.a)$$

$$\text{Avec } \left\{ \begin{array}{l} \hat{Y}_f = (\hat{y}_f(t_1) \quad \dots \quad \hat{y}_f(t_N))^T \\ \Phi = \begin{pmatrix} -y_f^{(n)}(t_1) & \dots & -\dot{y}_f(t_1) & u_f(t_1) & \dots & u_f^{(m)}(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_f^{(n)}(t_N) & \dots & -\dot{y}_f(t_N) & u_f(t_N) & \dots & u_f^{(m)}(t_N) \end{pmatrix} \\ \theta = (a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad \dots \quad b_m)^T \end{array} \right. \quad (2.47.b)$$

$$\text{Ainsi :} \quad Y_f = (y_f(t_1) \quad \dots \quad y_f(t_N))^T \quad (2.48)$$

qui représente N mesures de la sortie du système à identifier, on peut calculer le vecteur paramètre en minimisant le critère $\mathcal{J}$ comme dans (2.43) de la manière suivante :

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y_f \quad (2.49)$$

L'estimation du vecteur de paramètre par cette méthode est caractérisé par :

- L'estimation peut s'effectuer en une seule étape de calcul, sans aucune possibilité d'améliorer le résultat. Par conséquent, la mise à jour du vecteur de paramètre, avec la disposition d'un nouveau couple u_{N+1}, y_{N+1} , n'est pas possible.
- Pour que le résultat soit le plus proche de la valeur réelle de θ , il faut augmenter le nombre de mesures N (affin de minimiser l'effet du bruit). Par contre, l'augmentation du nombre de mesures N influence directement le coût et le temps de calcul du terme $(\Phi^T \Phi)^{-1}$.
- L'influence du signal du bruit peut rendre le terme $(\Phi^T \Phi)^{-1}$ non inversible, dans ce cas la solution est supposée inexistante.

Les méthodes d'estimation paramétrique itératives non linéaires peuvent résoudre ces problèmes.

2.6.3.2 Optimisation non linéaires

Une parmi les méthodes les plus utilisées comme technique d'optimisation non-linéaire est la méthode de *Levenberg-Marquardt* (LM). Cette méthode est devenue une technique standard pour les problèmes non-linéaires des moindres carrés, largement adoptée dans un large spectre de disciplines. Cette méthode est une méthode itérative qui permet de localiser le minimum d'une fonction, à plusieurs variables, qui est exprimée comme somme des carrés des fonctions non-linéaires à valeurs réelles. La méthode de *LM* est une combinaison de deux méthodes, la méthode du *Gradient Descent* et la méthode de *Gauss-Newton*. Lorsque la solution est loin de l'optimum, l'algorithme se comporte comme une méthode du *Gradient Descente*, lent, mais stable et garantit sa convergence. Une fois la solution actuelle est rapprochée du minimum, il devient une méthode de *Gauss-Newton* qui est caractérisée par sa convergence rapide. Le paragraphe suivant donne une brève description sur ces trois méthodes.

a) Méthode du Gradient Déscent

Dans la méthode du Gradient Descent, le vecteur de paramètre θ est estimé itérativement de la manière suivante :

$$\theta^{i+1} = \theta^i - (\alpha \cdot \mathcal{J}'_{\theta})^i, \quad (2.50.a)$$

$$\text{Avec : } \mathcal{J}'_{\theta} = 2 \sum_{k=1}^N \varepsilon_k^i \sigma_k^i : \text{ est le Gradient ;} \quad (2.50.b)$$

$$\sigma_k^i = \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \theta^i} : \text{ est la fonction de sensibilité de l'itération } i \text{ de sortie} \quad (2.50.c)$$

par rapport au vecteur de paramètres θ .

α^i : est le pas de convergence dans l'itération i .

b) Méthode du Gauss-Newton

Dans la méthode de Gauss-Newton le vecteur de paramètre θ est estimé itérativement de la manière suivante :

$$\theta^{i+1} = \theta^i - \left(\mathcal{J}_\theta''^{-1} \cdot \mathcal{J}_\theta' \right)^i, \quad (2.51.a)$$

$$\text{Avec :} \quad \left(\mathcal{J}_\theta'' \right)^i = 2 \sum_{k=1}^N \left(\sigma_k^i \right)^T \sigma_k^i \quad (2.51.b)$$

est le *Hessien* dans l'approximation de *Gauss-Newton*.

c) Méthode de Levenberg-Marquardt

La méthode de Levenberg [11] propose une concaténation de ces deux équations en une seule :

$$\theta^{i+1} = \theta^i - \left(\left(\mathcal{J}_\theta'' + \lambda I \right)^{-1} \mathcal{J}_\theta' \right)^i, \quad (2.52)$$

Avec $\lambda = 1/\alpha$, est le facteur de déplacement et de balancement progressif entre les deux méthodes. Lorsqu'on se trouve trop loin du minimum (c.à.d. l'erreur est très grande) on augmente la valeur de λ , ce qui permet à la méthode de Levenberg de basculer vers la méthode du Gradient, et lorsqu'on se trouve proche du minimum (c.à.d. l'erreur est très petite) on diminue le facteur λ , ce qui néglige son terme devant le terme du Hessien, dans ce cas, la méthode de Gauss-Newton prend la manœuvre et accélère l'opération d'optimisation vers le minimum. La méthode Marquardt [11] propose une version améliorée de la méthode de Levenberg par remplacement de la matrice d'identité par la diagonale de la matrice Hessienne ce qui améliore le facteur déplacement et de balancement λ ,

$$\theta^{i+1} = \theta^i - \left(\left(\mathcal{J}_\theta'' + \lambda \cdot \text{diag}(\mathcal{J}_\theta'') \right)^{-1} \mathcal{J}_\theta' \right)^i, \quad (2.53)$$

Cette dernière prend le nom de méthode de *Levenberg-Marquardt*.

Cette procédure garantit une convergence robuste, même en présence d'une mauvaise initialisation de θ , si elle est choisie dans le voisinage de l'optimum global. L'avantage de cet algorithme est qu'aucune hypothèse particulière n'est nécessaire sur les spécifications du bruit de sortie.

2.7 Qualité du Modèle

Un bon modèle signifie qu'il est proche de la description vraie. Dans la pratique, aucune "vrai" description n'est disponible et la qualité du modèle doit donc être jugée pour des motifs différents. Un modèle de qualité est lié au domaine d'utilisation et des conditions de fonctionnement de ce modèle. Il peut être excel-

lent pour la conception de la commande, mais insuffisant pour la simulation. La qualité du modèle est liée aussi à la capacité du modèle à reproduire le comportement du système [1]. Cela signifie qu'une sortie simulée ou prédite par le modèle est généralement en bon accord avec la sortie produite par le système.

La qualité du modèle est également liée à la stabilité du modèle. Pour la même entrée du système réel et du modèle, si le système est stable le modèle est stable aussi pour les mêmes conditions de fonctionnement. La validation du modèle consiste à vérifier tous les aspects des propriétés du modèle. Un outil important est d'évaluer la capacité du modèle par simulation et par prévision s'il peut reproduire le comportement du système à travers des données de validation. Une autre technique utile est d'analyser les propriétés des résidus, s'ils ne contiennent pas des propriétés tronquées du système réel. Le choix d'une structure de modèle ainsi que l'ordre du modèle doivent déterminer le nombre d'entrées et de sorties retardées (décalées) à utiliser dans la description du système avant qu'un changement de u affecte y . L'insuffisance du modèle peut prendre principalement deux différentes formes, *la Variance* et *le Biais*.

a) Variance

L'erreur du modèle se pose en raison de l'influence du bruit sur le système et la mesure. Notons que, si une expérience est répétée avec exactement les mêmes signaux d'entrées, la sortie ne sera pas exactement la même car le signal de bruit n'est pas reproduit. Pour cette raison le modèle qui en résulte sera différent. Ces variations de modèles sont appelées *les erreurs de la variance*. Les erreurs de la variance peuvent généralement être réduites en utilisant plus de séquences de mesure.

b) Biais

Si la structure du modèle est insuffisante ou n'est pas capable de décrire le système, même si les mesures ne sont pas entachées de bruit, de telles erreurs seront appelées erreurs systématiques ou *les erreurs de biais*. Les erreurs de biais sont constatées comme des variations dans le modèle lorsqu'il est ajusté sur les données qui ont été recueillies dans des conditions différentes (même si les intervalles de mesure sont suffisamment longs pour annuler l'erreur de la variance). Les différents aspects du système sont ajustés pour des propriétés dominantes du système pour des condi-

tions différentes (points de fonctionnement, caractéristiques d'entrée, etc.). C'est la raison probable pour le biais du modèle.

Un bon modèle est donc celui qui a à la fois une faible variance et un faible biais.

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les notions de base sur la modélisation des systèmes LTI. Deux types de modèle sont présentés, le modèle de connaissance et le modèle de comportement, le premier présente l'avantage d'être stable et cohérente tandis que le deuxième est d'une applicabilité générale. Les différentes structures de fonctions de transfert donne la flexibilité et la simplicité d'approximer le comportement désiré. Avec l'ensemble des données d'entrées/sorties, la tâche principale du système d'identification est d'évaluer les paramètres du modèles. La détermination des valeurs numériques des paramètres de ces modèles est une tâche importante, pour cela nous avons examiné quelques techniques d'estimation paramétrique.

Les structures de modèles LTI, ainsi que les méthodes d'identification associées peuvent être utilisées pour identifier des systèmes non linéaires dans un contexte linéaire en utilisant une approche LPV. Les différentes structures de modélisation et les techniques d'identification associées de Cette dernière seront présentées d'une manière détaillée dans le chapitre suivant.

Chapitre 03

Modélisation et Identification des Systèmes LPV

3.1 Introduction

Les notions de la modélisation LPV trouvent ses origines dans l'approche de *séquencement de gain* (ou *gain scheduling* en anglais) par les travaux de Schamma et Athans [12]. Cette approche est peut-être l'un des approches de conception de commande non linéaires la plus populaire et qui a été largement appliquées avec succès dans une large gamme de domaines d'applications allant de l'aérospatiale au contrôle de processus. La théorie classique de conception par *séquencement de gain*, provient des années 60s, a eu récemment une augmentation considérable d'intérêt dans la littérature avec beaucoup de nouveaux résultats obtenus [13].

D'abord, examinons ce que nous appelons un système LPV du point de vue de comportement et quel genre de phénomènes physiques sont représentés par ce concept de modélisation.

Basant initialement sur le principe de *séquencement de gain*, les systèmes LPV peuvent être définis comme une relation linéaire entre les entrées et les sorties du modèle, comme dans le cas LTI, cependant, les paramètres du modèle varient dans le temps selon une ou plusieurs variables externes (ou internes selon une classe spécifique des systèmes LPV). Ces variables, supposées mesurables et variantes dans un ensemble compact de bornes connues, sont appelées *variables de séquencement*, représentées par p . La variable p représente la nature non linéaire ou variante dans le

temps des dynamiques modélisées. Par ce concept, il est possible de modéliser un système présentant des non linéarités par une formulation proche des modèles LTI dont les caractéristiques dynamiques évoluent en fonction des conditions de fonctionnement. Une vue schématique de ce type de modèle est présentée par la figure suivante :

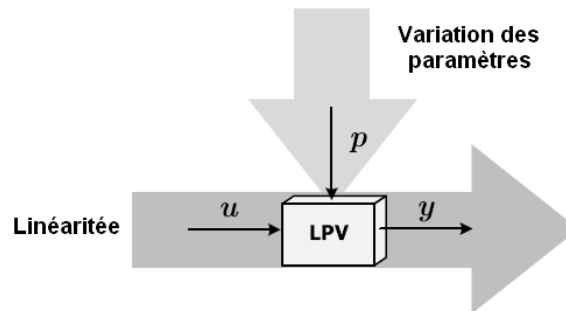


Fig. 3.1 Flux de signaux d'entrée/sortie des systèmes LPV

La flexibilité structurelle des systèmes Linéaires à Paramètres Variants (LPV) est capable de prendre en compte des systèmes à paramètres variables ou des systèmes naturellement non linéaires. Cette structure a été introduite dans le but de gérer ces systèmes de façon simple mais efficace. Le concept de modélisation LPV permet une large capacité de représentation des processus physiques et ses approches sont bien élaborées dans la synthèse de contrôle, qui a conduit à de nombreuses applications réussies de commande LPV dans la pratique [14].

3.2 Naissance et évolution des systèmes LPV

Dans l'approche *séquençement de gain* (gain scheduling), le concept de base est de linéariser le modèle du système NL à des différents points d'équilibre de fonctionnement résultant en un ensemble de descriptions LTI locales du processus (voir figure 3.2). Cette conception est inspirée principalement de la théorie de développement en série, où la linéarisation d'un système non linéaire peut être approximée par un système linéaire à la proximité d'une trajectoire ou dans le voisinage d'un point d'équilibre. Noter que la linéarisation par rapport à une trajectoire donne une classe de systèmes linéaires variants dans le temps qui s'appelle systèmes linéaires à temps variants (LTV) [13].

Puis, des contrôleurs LTI sont conçus pour chaque section locale. Ces contrôleurs sont interpolés, par la suite, pour donner une solution de contrôle global au régime d'opération entière.

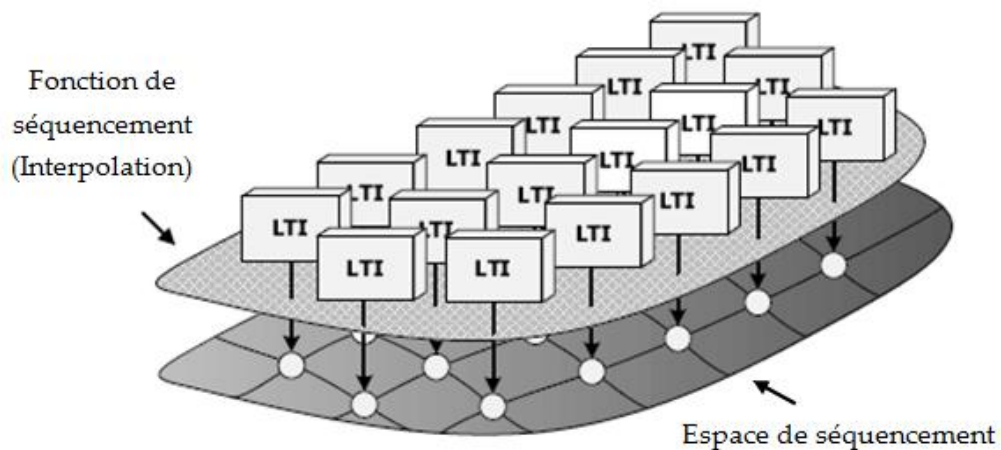


Fig. 3.2 Mécanisme de gain-scheduling : interpolation des modèles LTI local pour approximer le comportement global du système NL (espace de séquençement) [6]

La fonction d'interpolation utilisée est appelée la *fonction de séquençement* de cette structure. Elle est dépendante du point courant de fonctionnement du processus. Pour décrire les changements du point de fonctionnement, un signal de séquençement $p(t)$ est introduit, ce signal exogène est considéré à priori inconnu, cependant, il peut être mesuré ou estimé à travers le processus. Dans cette voie, les paramètres du régulateur sont résultants du signal variant $p(t)$, d'où le nom paramètre variant, tandis que la relation dynamique entre les signaux du système reste encore linéaire [6].

Les systèmes LPV constituent une classe de modèles linéaires permettant de décrire des procédés dont les caractéristiques dynamiques évoluent en fonction des conditions de fonctionnement. En d'autres termes, les systèmes LPV désignent des modèles linéaires dont la représentation d'état dépend d'un vecteur de paramètres $\theta(p(t))$ borné susceptible de varier dans le temps. Il est important de faire une distinction claire entre le système LPV et la famille de systèmes linéaires associés aux points / trajectoires d'équilibre d'un système non linéaire. De toute évidence, la famille de linéarisation est un ensemble de systèmes dynamiques, tandis que le sy-

tème LPV est un système dynamique unique [13]. Les modèles LPV possèdent des propriétés particulières, basées sur des techniques développées essentiellement dans le cadre linéaire et qui font leur intérêt en identification, commande et diagnostic des systèmes.

En raison de nombreuses applications réussies de cette méthodologie de conception, elle est devenue populaire dans les applications industrielles. Contrairement à l'ancienne méthode de *séquencement de gain*, celles-ci garantissent la stabilité des approches et donne des performances optimales et robustes sur le régime d'exploitation complet des modèles LPV [6].

Les systèmes LPV aujourd'hui ont prouvé, à travers plusieurs travaux de recherche, leur efficacité d'interpoler le comportement des systèmes non linéaires et nombreux entre eux peuvent être convertis en une forme LPV. Plusieurs approches ont fourni des modèles LPV directs sans processus laborieux de modélisation NL [15], [16], [17]. Le champ LPV a évolué rapidement au cours de ces dernières années et est devenu un cadre prometteur pour le contrôle/commande industriel moderne avec un nombre croissant de domaines d'applications tels que l'aviations [18], les automobiles [19] les éoliennes, [20], [21], les moteurs à induction [22], les compresseurs [23], etc.

Dans les sections qui suivent on va donner une vue globale sur les concepts des systèmes LPV.

3.3 Systèmes dynamiques à Paramètre Variant

Dans les systèmes LPV, les paramètres du modèle varient selon le signal de séquencement $p(t)$. Le rôle du signal $p(t)$ peut être compris comme un autre "signal variable dans le temps" qui détermine le changement des relations entre les signaux du système. Cependant, la trajectoire de $p(t)$ est à priori indéterminée. C'est cette propriété qui distingue la classe des systèmes LPV de celle des systèmes LTV, où les variations des relations entre les signaux du système sont directement liées au temps. Sur cette base, la classe des systèmes à paramètres variant peut être définie comme suit:

Définition 3.1 (Système dynamique à paramètres variants PV) [6]. *Un système dynamique $\mathcal{S}$ à paramètres variants est défini comme un quadruple*

$$\mathcal{S}=(\mathbb{T}, \mathbb{P}, \mathbb{W}, \mathfrak{B}), \quad (3.1)$$

Avec $\mathbb{P}$ l'espace de séquençement de dimension n_p et $\mathfrak{B} \subseteq (\mathbb{W} \times \mathbb{P})^{\mathbb{T}}$.

Le comportement $\mathfrak{B} \subseteq (\mathbb{W} \times \mathbb{P})^{\mathbb{T}}$ est l'espace de toutes les trajectoires possibles d'entrée/sortie et de séquençement qui sont compatibles avec le système. L'espace de séquençement $\mathbb{P}$ est généralement un sous-ensemble fermé (borné) d'un espace vectoriel sur lequel la variable de séquençement p , de dimension n_p et $p \in \mathbb{P}^{\mathbb{T}}$, varie. L'ensemble de trajectoires de séquençement admissibles est défini comme étant le comportement de séquençement projeté :

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{P}} = \pi_p \mathfrak{B} = \{p \in \mathbb{P}^{\mathbb{T}} \mid \exists w \in \mathbb{W}^{\mathbb{T}} \text{ s.t. } (w, p) \in \mathfrak{B}\}, \quad (3.2)$$

Où π_p désigne la projection sur $\mathbb{P}^{\mathbb{T}}$. En d'autres termes, $\mathfrak{B}_{\mathbb{P}}$ décrit toutes les trajectoires de séquençement possibles de $\mathcal{S}$. De même, on peut définir le comportement du signal projeté $\mathfrak{B}_{\mathbb{W}}$. En outre, pour une trajectoire fixe de $p \in \mathfrak{B}_{\mathbb{P}}$ donnée, le comportement projeté

$$\mathfrak{B}_p = \{w \in \mathbb{W}^{\mathbb{T}} \mid (w, p) \in \mathfrak{B}\}, \quad (3.3)$$

définit l'ensemble des trajectoires de signaux compatibles avec la trajectoire de séquençement fixe p pour $\mathcal{S}$.

Dans le cas d'une trajectoire constante $p \in \mathfrak{B}_{\mathbb{P}}$ avec $p(t) = p$ pour tout $t \in \mathbb{T}$ où $p \in \mathbb{P}$, le comportement projeté $\mathfrak{B}_p$ est appelé un comportement figé et noté :

$$\mathfrak{B}_p = \{w \in \mathbb{W}^{\mathbb{T}} \mid (w, p) \in \mathfrak{B} \text{ avec } p(t) = p, \forall t \in \mathbb{T}\}, \quad (3.4)$$

Définition 3.2 (Système figé) [6]. *Soit $\mathcal{S}=(\mathbb{T}, \mathbb{P}, \mathbb{W}, \mathfrak{B})$ un système PV et considérons $\mathfrak{B}_p$ pour un $p \in \mathbb{P}$ donné. Le système dynamique*

$$\mathcal{F}_p=(\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathfrak{B}_p), \quad (3.5)$$

est appelé un système figé de $\mathcal{S}$.

3.4 Définition des Systèmes LPV

Avec les concepts introduits précédemment, nous pouvons définir les systèmes LPV comme suit:

Définition 3.3 (Systèmes LPV) [6]. *Le système à paramètres variants $\mathcal{S}=(\mathbb{T}, \mathbb{P}, \mathbb{W}, \mathfrak{B})$ est appelé LPV, si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- $\mathbb{T}$ est fermé sous l'addition (c.-à-d. l'addition est une opération interne dans $\mathbb{T}$).
- $\mathbb{W}$ est un espace vectoriel et $\mathfrak{B}_p$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{W}^{\mathbb{T}}$ pour tous $p \in \mathbb{P}$ (linéarité).
- Pour tout couple $(w, p) \in \mathfrak{B}$ et tout $\tau \in \mathbb{T}$, il faut que $(w(\bullet + \tau), p(\bullet + \tau)) \in \mathfrak{B}$; en d'autres termes $q^{\tau} \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$, $\forall \tau \in \mathbb{T}$ (invariance temporelle).

En termes de définition 3.3, la linéarité et l'invariance temporelle de $\mathcal{S}$ pour chaque trajectoire de séquençement constante $p(t) = p \in \mathbb{P}$, implique que le système figé associé $\mathcal{F}_p$ soit un système LTI. De cette façon, les comportements projetés d'un système LPV donné $\mathcal{S}$ par rapport aux trajectoires constantes de séquençement, définissent un ensemble de systèmes LTI.

Définition 3.4 (Ensemble de systèmes figés) [6]. *Soit $\mathcal{S}=(\mathbb{T}, \mathbb{P}, \mathbb{W}, \mathfrak{B})$ un système LPV. L'ensemble de systèmes LTI*

$$\mathcal{U}_{\mathcal{S}} = \{ \mathcal{F}=(\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathfrak{B}') \mid \exists p \in \mathbb{P} \text{ s.t. } \mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_p \}, \quad (3.6)$$

est appelé l'ensemble de systèmes figés de $\mathcal{S}$.

Le concept des systèmes LPV est avantage par rapport aux systèmes non-linéaires car le rapport entre les signaux des ces systèmes est linéaire. La définition 3.3 révèle également l'avantage de cette classe de systèmes par rapport aux systèmes LTV car la dynamique du système n'est pas associée directement au temps, mais à la variation d'un signal libre. Ainsi, l'interprétation de la dépendance non stationnaire des phénomènes physiques figés dans le concept LPV le rend plus approprié pour décrire ces phénomènes par rapport à la modélisation LTV. De plus, les modèles LPV ont beaucoup plus de flexibilité dans le paramétrage en comparant avec la classe de modèles LTI. Cela est dû à la présence de dépendance statique et parfois dynamique des paramètres du modèle au signal de séquençement. Par contre,

le choix d'une structure LPV pour la modélisation est plus sensible que dans le cas LTI [6].

Exemple 3.1 (*Système ressort - masse variable*). Prenons le modèle caractéristique du mouvement d'une masse variable reliée à un ressort (voir figure 3.3). Ce problème est l'un des phénomènes typiques qui se produisent dans des systèmes avec des masses variables dans le temps comme dans le cas de contrôle des mouvements (robotique, aéronautique, spatial, biomécanique, etc.).

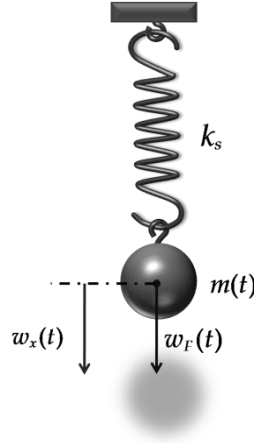


Fig. 3.3 *Système ressort - masse variable*

On note par w_x la position de la masse variable $m(t)$. Soit la constante du ressort $k_s > 0$, on introduit w_F comme la force agissant sur la masse et on suppose qu'il n'y ait aucun amortissement. Par deuxième loi du mouvement de Newton, l'équation suivante est vérifiée :

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{d}{dt} w_x \right) = w_F - k_s w_x, \quad (3.7)$$

Ou bien

$$k_s w_x + \left(\frac{d}{dt} m \right) \frac{d}{dt} w_x + m \frac{d^2}{dt^2} w_x = w_F, \quad (3.8)$$

- Si on prend m comme variable de séquencement, le comportement de ce système peut être décrit comme un système LPV, en préservant de même la deuxième loi de Newton de la physique.
- D'autre part, la visualisation de m en tant que paramètre variant selon une trajectoire fixe dans le temps, se traduit par un système LTV. Un tel système pourrait expliquer le comportement du système à partir d'une trajectoire fixe de la masse.

Il détient également que pour chaque trajectoire de séquençement constante $p(t) = p$, c'est-à-dire $m(t)$ constante pour tout $t \in \mathbb{T}$, l'ensemble des trajectoires de signaux admissibles de (3.8), est défini comme la solution de :

$$k_s w_x - w_F + p \frac{d^2}{dt^2} w_x = 0, \quad (3.9)$$

L'ensemble des systèmes figés $\mathcal{U}_s$ est l'ensemble des systèmes LTI représenté par (3.9) pour tout $p \in \mathbb{P}$, c'est à dire toutes les $m(t)$ constantes possibles.

On peut conclure, à travers l'exemple précédent, que pour un système quelconque possède un vecteur de paramètres θ :

1. Si le vecteur paramètre θ est constant autour d'un point de fonctionnement, le modèle correspondant est linéaire invariant dans le temps (LTI).
2. Si le vecteur paramètre θ est variable au cours du temps et son évolution est connue (selon une trajectoire fixée dans le temps), le modèle obtenu est linéaire à temps variant (LTV).
3. Finalement, dans le cas des variations supposées a priori inconnues et bornées, le modèle obtenu est linéaire à paramètres variants (LPV).

Dans ce qui suit, une illustration des représentations développées pour les systèmes LPV.

3.5 Représentations des systèmes LPV

3.5.1 Equations différentielles / aux différences à PV

Les équations différentielles/ aux différences, à paramètres fixes, sont le point de départ pour les représentations d'état et les représentations d'entrée/sortie dans le cas des systèmes LTI. De même, les équations différentielles/ aux différences, à paramètres variants sont le point de départ pour les représentations d'état et les représentations d'entrée/sortie dans le cas des systèmes LPV.

Définition 3.5 (Equation différentielle PV) [6]. On appelle une équation différentielle PV d'ordre $n_\xi = \text{Deg}(R)$, l'équation

$$(R(\frac{d}{dt}) \diamond p) w := \sum_{i=0}^{n_\xi} (r_i \diamond p) \frac{d^i}{dt^i} w = 0, \quad (3.10)$$

avec $(w, p) \in (\mathbb{R}^{n_{\mathbb{W}}} \times \mathbb{R}^{n_{\mathbb{P}}})^{\mathbb{R}}$, et $R \in \mathcal{R}[\xi]^{n_r \times n_{\mathbb{W}}}$ est une matrice polynomiale (voir l'annexe B), $\mathcal{R}$ est le champ des fonctions méromorphiques $r \in \mathcal{R}^{n_r \times n_{\mathbb{W}}}$ et $\xi = \frac{d}{dt}$.

L'opérateur $\diamond : (\mathcal{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{P}}) \rightarrow (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$, qui associe une fonction $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ avec $p \in \mathfrak{B}_{\mathbb{P}}$, est défini comme suit [6]:

$$r \diamond p = r \left(\left\{ \xi^i p_j \right\}_{n_{\xi}, n_{\mathbb{P}}, \tau} \right) = r \left(\underbrace{p_1, \dots, p_{n_{\mathbb{P}}}}_{n_1}, \underbrace{\frac{d}{dt} p_1, \dots, \frac{d}{dt} p_{n_{\mathbb{P}}}}_{n_2}, \dots, \underbrace{\frac{d^{n_{\xi}}}{dt^{n_{\xi}}} p_1, \dots, \frac{d^{n_{\xi}}}{dt^{n_{\xi}}} p_{n_{\mathbb{P}}}}_{n_r} \right), \quad (3.11)$$

Avec $n_{\xi} \geq 0$ et $0 < \tau \leq n_{\mathbb{P}}$, tel que, $n_{\xi} n_{\mathbb{P}} + \tau = n$.

La structure mathématique (3.10) permet la transformation d'une large classe de systèmes non linéaires en une forme LPV en préservant une structure compréhensive des lois de la physique (voir l'exemple 3.1). Les équations différentielles à PV sous la forme de (3.10) sont utilisées pour définir la classe des systèmes LPV à temps continu (TC), telle que la classe des systèmes sous forme d'espace d'état (LPV-EE) et d'entrée/sortie (LPV-ES) que nous considérerons dans la suite. De la même manière, on peut définir la classe des équations aux différences à paramètres variants comme suit:

Définition 3.6 (Equation aux différences à PV) [6]. On appelle une équation aux différences à PV d'ordre $n_{\xi} = \text{Deg}(R)$, l'équation

$$(R(q) \diamond p)w := \sum_{i=0}^{n_{\xi}} (r_i \diamond p) q^i w = 0, \quad (3.12)$$

avec $(w, p) \in (\mathbb{R}^{n_{\mathbb{W}}} \times \mathbb{R}^{n_{\mathbb{P}}})^{\mathbb{Z}}$, et $R(\xi) := \sum_{i=0}^{n_{\xi}} r_i \xi^i \in \mathcal{R}[\xi]^{n_r \times n_{\mathbb{W}}}$, avec $\xi = q$ et $q^i u = u(k+i)$.

L'opérateur $\diamond : (\mathcal{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{P}}) \rightarrow (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})$ dans ce cas est défini comme suit [6]:

$$r \diamond p = r \left(\left\{ \xi^i p_j \right\}_{n_{\xi}, n_{\mathbb{P}}, \tau} \right) = r \left(p^T, qp^T, q^{-1}p^T, q^2p^T, q^{-2}p^T, \dots, q^{\tau_1}(p^T)^{\tau_2} \right), \quad (3.13)$$

$$(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} (n_{\xi}, \tau) & \text{si } \tau \leq n_{\mathbb{P}} \\ (-n_{\xi}, \tau - n_{\mathbb{P}}) & \text{si } \tau > n_{\mathbb{P}} \end{cases} \quad (3.14)$$

En temps discret, toutes les trajectoires en $(\mathbb{W}, \mathbb{P})^{\mathbb{Z}}$ qui satisfont (3.12) sont considérées des solutions. Ainsi, les équations aux différences à PV sous la forme (3.12) sont utilisées pour définir la classe de systèmes LPV-DT.

Exemple 3.2 (Fonction de coefficient). Soit $\mathbb{P} = \mathbb{R}^{n_{\mathbb{P}}}$ avec $n_{\mathbb{P}} = 2$. Considérons la fonction méromorphe⁴ r de $\dim = 3$, $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$r(x_1, x_2, x_3) = \frac{1 + x_3}{1 - x_2}, \quad (3.15)$$

1- En temps continu, pour un signal de séquencement $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$r \diamond p = r(p_1, p_2, \frac{d}{dt} p_1) = \frac{1 + \frac{d}{dt} p_1}{1 - p_2}, \quad (3.16)$$

Si $n_{\mathbb{P}} = 3$, alors

$$r \diamond p = r(p_1, p_2, p_3) = \frac{1 + p_3}{1 - p_2}, \quad (3.17)$$

2- En temps discret, pour un signal de séquencement $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$r \diamond p = r(p_1, p_2, qp_1)(k) = \frac{1 + p_1(k+1)}{1 - p_2(k)}, \quad (3.18)$$

Si $n_{\mathbb{P}} = 1$, alors

$$r \diamond p = r(p_1, qp_1, q^{-1} p_1)(k) = \frac{1 + p_1(k-1)}{1 - p_1(k+1)}, \quad (3.19)$$

3.5.2 Représentation LPV-Entrée/Sortie

Une autre forme de représentation clé, c'est la représentation Entrée/Sortie (E/S), que nous définissons à partir du point de vue comportemental dans ce paragraphe. Avant d'établir une définition pour cette forme, nous avons besoin de définir le concept de partition E/S pour les systèmes LPV.

3.5.2.1 Partition Entrée/Sortie

Dans de nombreuses applications, en particulier dans la théorie de commande, il est nécessaire de regrouper les signaux des systèmes dynamiques en ensembles de signaux d'entrée $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{U}$, et signaux de sortie $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{Y}$, puis on actionne les en-

⁴ Fonction sous forme d'un quotient de deux fonctions analytiques f et g avec $g \neq 0$ ($r = f/g$)

trées pour conduire les signaux de sortie à une trajectoire souhaitée de $\mathfrak{B}$. La définition d'une telle partition non unique de S , est comme suit :

Définition 3.7 (Partition E/S d'un système LPV) [6]. Soit $\mathcal{S} = (\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n_{\mathbb{P}}}, \mathbb{R}^{n_{\mathbb{W}}}, \mathfrak{B})$ un système LPV. La partition de l'espace des signaux $\mathbb{R}^{n_{\mathbb{W}}} = \mathbb{U} \times \mathbb{Y} = \mathbb{R}^{n_{\mathbb{U}}} \times \mathbb{R}^{n_{\mathbb{Y}}}$ et la partition de $w \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n_{\mathbb{W}}})$ ⁵ en correspondance avec $u \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{T}, \mathbb{U})$ et $y \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{T}, \mathbb{Y})$ est appelée une partition E/S de $\mathcal{S}$, si

1. u est libre : autrement dit, pour tout $u \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{T}, \mathbb{U})$ et $p \in \mathfrak{B}_{\mathbb{P}}$, il existe un $y \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{T}, \mathbb{Y})$ de telle sorte que $((u, y), p) \in \mathfrak{B}$.

2. y ne contient pas de composants supplémentaires libres, c.-à-d. pour une entrée u donnée, aucun des composants de y ne peut être choisi librement pour chaque $p \in \mathfrak{B}_{\mathbb{P}}$.

Une partition E/S implique l'existence d'une matrice des fonctions polynomiales $R_y \in \mathcal{R}[\xi]^{n_{\mathbb{Y}} \times n_{\mathbb{Y}}}$ et $R_u \in \mathcal{R}[\xi]^{n_{\mathbb{Y}} \times n_{\mathbb{U}}}$ avec R_y est de rang plein ($\text{rang}(R_y) = n_{\mathbb{Y}}$), telle que (3.10) peut être écrite comme suit,

$$(R_y(\frac{d}{dt}) \diamond p)y = (R_u(\frac{d}{dt}) \diamond p)u, \quad (3.20)$$

avec $n_{\mathbb{W}} = n_{\mathbb{U}} + n_{\mathbb{Y}}$.

Une partition E/S définit un *mappage causal*. Tandis que, les systèmes LPV sans aucune partition E/S sont appelés *autonomes*.

Définition 3.8 (Représentation LPV-ES-TC) [6]. La représentation E/S en temps continu de $\mathcal{S} = (\mathbb{R}, \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}^{n_{\mathbb{P}}}, \mathbb{R}^{n_{\mathbb{W}}}, \mathfrak{B})$, désignée par $\mathfrak{R}_{IO}(\mathcal{S})$, avec un vecteur de séquence-ment $p \in \mathfrak{B}_{\mathbb{P}}$ et une partition E/S $(u, y) \in (\mathbb{R}^{n_{\mathbb{U}}} \times \mathbb{R}^{n_{\mathbb{Y}}})$ est définie comme un système d'équations différentielles à paramètres variants d'ordre n_a comme suit :

$$\sum_{i=0}^{n_a} (a_i \diamond p) \frac{d^i}{dt^i} y = \sum_{j=0}^{n_b} (b_j \diamond p) \frac{d^j}{dt^j} u, \quad (3.21)$$

où $a_i \in \mathcal{R}^{n_{\mathbb{Y}} \times n_{\mathbb{Y}}}$ et $b_j \in \mathcal{R}^{n_{\mathbb{Y}} \times n_{\mathbb{U}}}$ avec $a_{n_a} \geq b_{n_b} > 0$ sont des paramètres variants méromorphiques, coefficients d'une matrice des polynômes $R_u(\xi) = \sum_{j=0}^{n_b} b_j \xi^j$ et $R_y(\xi) = \sum_{i=0}^{n_a} a_i \xi^i$ de plein rang.

⁵ L'espace des fonctions localement intégrable, c.à.d. admettent l'intégration sur un intervalle borné.

La représentation E/S est également importante pour le comportement des systèmes LPV-TD. A côté des aspects théoriques du système, ce type de représentations relie la théorie comportementale développée avec les modèles d'entrées-sorties utilisés dans l'identification des systèmes LPV. Les systèmes LPV-ES-TD sont également caractérisés par les conditions de définition 3.7.

Définition 3.9 (Représentation LPV-ES-TD) [6]. *La représentation E/S du système $\mathcal{S} = (\mathbb{Z}, \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}^{n_{\mathbb{P}}}, \mathbb{R}^{n_{\mathbb{W}}}, \mathfrak{B})$ en temps discret, désignée par $\mathfrak{R}_{\text{IO}}(\mathcal{S})$, avec la partition E/S (u, y) et le vecteur de séquencement p , est définie comme un système d'équations aux différences à paramètres variants d'ordre n_a :*

$$\sum_{i=0}^{n_a} (a_i \diamond p) q^i y = \sum_{j=0}^{n_b} (b_j \diamond p) q^j u, \quad (3.22)$$

où $a_i \in \mathcal{R}^{n_{\mathbb{Y}} \times n_{\mathbb{Y}}}$ et $b_j \in \mathcal{R}^{n_{\mathbb{Y}} \times n_{\mathbb{U}}}$ avec $a_{n_a} \geq b_{n_b} > 0$ sont des paramètres variants méromorphiques, coefficients d'une matrice des polynômes $R_u(\xi) = \sum_{j=0}^{n_b} b_j \xi^j$ et $R_y(\xi) = \sum_{i=0}^{n_a} a_i \xi^i$ de plein rang.

Notons que la représentation à temps discret doit donner les mêmes valeurs que celle de la représentation à temps continu pour des instants équivalents. Ainsi, la projection à temps discret avec un période d'échantillonnage T_d arbitraire peut changer la validité de la partition E/S, comme une partie de la dynamique des composants du système peut être perdue à cause du taux d'échantillonnage ralenti.

Remarque 3.1 : En cas des systèmes LPV à temps continu/discret, la notion de fonction de transfert ou de réponse en fréquence n'a pas d'interprétation significative [6]. Dans ce cas, chaque élément de l'ensemble du système figé $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ est un système LTI, par conséquent, chaque $\mathcal{F}_p \in \mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ a une fonction de transfert $F_p(s)$, une réponse en fréquence $F_p(i\omega)$ et une réponse impulsionnelle $h_p(t)$. L'ensemble des pôles ou zéros figés suit la même manière. De la même manière, la notion de fonctions de transfert pour les systèmes LPV-ES-TD n'est pas définie. Les notions de fonctions de transferts figés, les réponses en fréquence, les réponses impulsionnelles et les pôles et zéros peuvent être définis de façon similaire pour des systèmes figés.

3.5.3 Représentation LPV d'Espace d'Etat

Basant essentiellement sur la représentation d'espace d'état classique des modèles LTI, la structure LPV est définie comme suit :

Définition 3.10 (Représentation LPV-EE-TC) [6]. La représentation d'espace d'état d'un système LPV à temps continu $\mathcal{S} = (\mathbb{R}, \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}^{n_{\mathbb{P}}}, \mathbb{R}^{n_{\mathbb{U}} \times n_{\mathbb{Y}}}, \mathfrak{B})$, désignée par $\mathfrak{R}_{ss}(\mathcal{S})$, est définie par un système d'équations différentielles à paramètres variants de premier ordre de la variable d'état $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ tel que :

$$\frac{d}{dt}x = (A \diamond p)x + (B \diamond p)u, \quad (3.23 \text{ a})$$

$$y = (C \diamond p)x + (D \diamond p)u, \quad (3.23 \text{ b})$$

où (u, y) est la partition E/S de $\mathcal{S}$ x est le vecteur d'état et $\mathbb{X} = \mathbb{R}^{n_{\mathbb{X}}}$ est l'espace d'état.

Les matrices (A, B, C, D) sont des matrices des fonctions coefficients de dimension :

$$\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathcal{R}^{n_{\mathbb{X}} \times n_{\mathbb{X}}} & \mathcal{R}^{n_{\mathbb{X}} \times n_{\mathbb{U}}} \\ \mathcal{R}^{n_{\mathbb{Y}} \times n_{\mathbb{X}}} & \mathcal{R}^{n_{\mathbb{Y}} \times n_{\mathbb{U}}} \end{bmatrix}.$$

On peut également définir une représentation des systèmes LPV-EE-TD comme suit :

Définition 3.11 (Représentation LPV-EE-TD) [6]. Une représentation d'espace d'état d'un système LPV à temps discret $\mathcal{S} = (\mathbb{Z}, \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}^{n_{\mathbb{P}}}, \mathbb{R}^{n_{\mathbb{U}} \times n_{\mathbb{Y}}}, \mathfrak{B})$, désignée par $\mathfrak{R}_{ss}(\mathcal{S})$, est définie par un système d'équations différentielles à paramètres variants de premier ordre de la variable d'état $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ tel que :

$$qx = (A \diamond p)x + (B \diamond p)u, \quad (3.24 \text{ a})$$

$$y = (C \diamond p)x + (D \diamond p)u, \quad (3.24 \text{ b})$$

où (u, y) est la partition E/S de $\mathcal{S}$, x est le vecteur d'état, $\mathbb{X} = \mathbb{R}^{n_{\mathbb{X}}}$ est l'espace d'état et

$$\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathcal{R}^{n_{\mathbb{X}} \times n_{\mathbb{X}}} & \mathcal{R}^{n_{\mathbb{X}} \times n_{\mathbb{U}}} \\ \mathcal{R}^{n_{\mathbb{Y}} \times n_{\mathbb{X}}} & \mathcal{R}^{n_{\mathbb{Y}} \times n_{\mathbb{U}}} \end{bmatrix}.$$

Pour la même raison précédente, l'existence de ces représentations n'est pas garantie pour une valeur T_d arbitraire (perte de la dynamique du système).

Exemple 3.3 (représentations LPV du système ressort-masse variable).
1- Cas continu :

Considérons le système masse-ressort de l'exemple 3.1. Soit $p = m$ avec un espace de séquençement compact $\mathbb{P}$ et soit $w = [w_x \ w_f]^T$ avec $\mathbb{W} = \mathbb{R}^2$. Les signaux trajectoires possibles sont définis comme les solutions de :

$$k_s w_1 - w_2 + \left(\frac{d}{dt} p \right) \frac{d}{dt} w_1 + p \frac{d^2}{dt^2} w_1 = 0, \quad (3.25)$$

pour tout p lisse, $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La force w_f est une variable libre.

- Une telle équation peut s'écrire sous la forme (3.10) avec $n_w = 2, n_p = 1$, et

$$r_0 \diamond p = [k_s \ -1]^T, \quad r_1 \diamond p = \left[\frac{d}{dt} p \ 0 \right]^T, \quad r_2 \diamond p = [p \ 0]^T,$$

Ainsi, le choix de $w = [y \ u]^T = [w_x \ w_f]^T$ donne une partition E/S. Avec m choisi comme signal de séquençement p , le comportement PV peut être représenté sous la forme de l'équation (3.17) avec des coefficients polynômiales

$$R_y(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2, \quad R_u(\xi) = b_0, \quad (3.26)$$

avec les coefficients

$$a_0 \diamond p = k_s, \quad a_1 \diamond p = \frac{d}{dt} p, \quad a_2 \diamond p = p, \quad b_0 \diamond p = 1.$$

Il est évident que R_y est de plein rang. Ceci implique que $R_y(\xi)$ et $R_u(\xi)$ définissent une représentation LPV-ES du système.

- La représentation d'espace d'état LPV du système est donnée par:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x &= \begin{bmatrix} 0 & -k_s \\ 1/p & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ainsi, la représentation correspondante des matrices de fonctions coefficients est définie par:

$$\left[\begin{array}{c|c} \overline{A \diamond p} & \overline{B \diamond p} \\ \hline \overline{C \diamond p} & \overline{D \diamond p} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -k_s & 1 \\ 1/p & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array} \right], \quad (3.28)$$

2- Cas discret :

Considérons à nouveau l'exemple 3.1. Soit $0 < T_d \lll 1$, le comportement CT de ce système est approximé par l'approximation d'Euler:

$$\frac{d}{dt}w \cong \frac{qw_d - w_d}{T_d}, \quad (3.29)$$

où $w_d(k) = w(kT_d)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. on applique la relation (3.29) pour les dérivées de m, w_x et w_F de (3.8) on trouve :

$$(T_d^2 k_s + m(k))w_x(k) - (m(k+1) + m(k))w_x(k+1) + m(k+1)w_x(k+2) = T_d^2 w_F(k), \quad (3.30)$$

L'équation de différence (3.30) définit les trajectoires des signaux possibles de l'approximation du système masse-ressort en temps discret et peut être écrite sous la forme de (3.23) avec $w = [w_x \quad w_F]^T$, $n_{\mathbb{W}} = 2$, $p = m$, et $n_{\mathbb{P}} = 1$:

$$(R(q) \diamond p)w = (r_0 \diamond p)w + (r_1 \diamond p)qw + (r_2 \diamond p)q^2w = 0, \quad (3.31)$$

où $r_0 \diamond p = [T_d^2 k_s + p \quad -T_d^2]$, $r_1 \diamond p = [-qp - p \quad 0]$, $r_2 \diamond p = [qp \quad 0]$.

Le choix de $w = [w_x \quad w_F]^T = [y \quad u]^T$ donne une partition E/S valide, le comportement en temps discret PV peut être représenté sous la forme de (3.23) avec les polynômes

$$R_y(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2, \quad R_u(\xi) = b_0, \quad (3.32)$$

avec les coefficients

$$a_0 \diamond p = T_d^2 k_s + p, \quad a_1 \diamond p = -p - qp, \quad a_2 \diamond p = qp, \quad b_0 \diamond p = T_d^2.$$

Il est évident que R_y est de plein rang. Ceci implique que $R_y(\xi)$ et $R_u(\xi)$ définissent une représentation LPV-ES-TD du système.

- La représentation d'espace d'état du modèle correspondant est donnée par :

$$\begin{aligned} qx &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{p + T_d^2 k_s}{q^{-1}p} \\ 1 & 1 + \frac{p}{q^{-1}p} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -T_d^2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{-q^{-1}p} \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (3.33)$$

avec la représentation des fonctions coefficients

$$\begin{bmatrix} \frac{A \diamond p}{C \diamond p} & \frac{B \diamond p}{D \diamond p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{p+T_d^2 k_s}{q^{-1}p} \\ 1 & 1+\frac{p}{q^{-1}p} \\ 0 & \frac{-1}{q^{-1}p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -T_d^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Remarque 3.2 (représentations LPV) : certaines littératures utilisent des représentations différentes que celles présentées en dessus, pour indiquer la nature variante des paramètres. Les représentations qui sont, usuellement, utilisées pour les systèmes LPV-EE-TD et LPV-ES-TD sont les suivantes :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(p(k))x(k) + B(p(k))u(k) \\ y(k) &= C(p(k))x(k) + D(p(k))u(k) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i(p(k))y(k-i) + \sum_{j=0}^{n_b} b_j(p(k))u(k-j) \quad (3.35)$$

Dans ces deux représentations seulement une dépendance statique des paramètres sur p est considérée (voir la section 3.8 pour la définition). Si la dépendance des paramètres sur p devient dynamique, cette représentation sera non suffisante pour représenter le système LPV. L'exemple suivant peut illustrer ce problème.

Considérons le système LPV-EE-TD d'ordre deux sous la forme de l'équation (3.34) :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & a_1(p(k)) \\ 1 & a_2(p(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}(k) + \begin{bmatrix} b_1(p(k)) \\ b_2(p(k)) \end{bmatrix} u(k) \quad (3.36.a)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}(k) \quad (3.40.b)$$

Ce système peut s'écrire sous la forme E/S suivante :

$$\begin{aligned} y(k) &= a_2(p(k-1))y(k-1) + a_1(p(k-2))y(k-2) \\ &\quad + b_2(p(k-1))u(k-1) + b_1(p(k-2))u(k-2), \end{aligned} \quad (3.37)$$

Il est évident que la forme d'équation (3.37) n'est pas équivalente à la forme (3.35). Pour obtenir une équivalence entre la forme LPV-EE-TD et LPV-ES-TD, il est nécessaire que les deux représentations précédentes prennent en considération la dépendance dynamique des paramètres aux variables de séquençement, c.à.d. aux

$\{..., p(k-1), p(k), p(k+1), ...\}$. Tandis que les représentations (3.22) et (3.25) ne rencontrent pas ce type de problèmes.

3.5.4 Représentation LPV-OBF

La représentation LPV-OBF (Fonctions de Base Orthonormales) est une représentation particulière vue comme une extension de la forme des systèmes FIR (Réponse Impulsionnelle Finie) dans le cas non linéaire. Cette représentation est motivée par :

- Cette représentation est une réponse impulsionnelle du système, donc elle est unique,
- Cette représentation est une série d'expansion,
- Cette représentation existe toujours pour les systèmes stables ou instables [6],
- Les modèles FIR ont prouvé leur efficacité dans plusieurs champs d'application (traitement de signal, système de commande, les systèmes d'identification, etc.),
- Les séries d'expansion sont des outils mathématiques efficaces pour l'approximation du comportement des systèmes LTI, comme elles ont prouvé leur utilité comme des approximateurs des fonctions non linéaires,
- Les OBFs sont des outils puissants pour l'identification des systèmes LTI [24].

Pendant que la structure des modèles FIR possède plusieurs propriétés attractives, cette structure demande un nombre important de termes d'une série d'expansion pour pouvoir approximer la dynamique originale du système. Pour résoudre ce problème, une méthode (proposée par Toth et al. dans [6]) consiste à exploiter les propriétés attractives de la *Réponse Impulsionnelle Infinie* (IIR) des fonctions OBFs. Par conséquent, une nouvelle représentation LPV-FIR, représente une généralisation de la notion de la réponse impulsionnelle finie dans le cas LTI, a été introduite. Le paragraphe suivant donne une très brève description de cette méthode. Cette dernière est expliqué en détaille dans [6].

La réponse d'un modèle LTI, décrit par une représentation IIR sous forme d'une série d'expansions, est donnée par :

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} g_k q^{-k} u, \quad (3.38)$$

où $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ sont des coefficients constants. Avec l'utilisation des fonctions OBF, un nombre finie de termes d'expansion peut approximer le comportement du modèle (3.38). Ce modèle prend une structure FIR comme suit :

$$h(q) = w_0 + \sum_{k=1}^n w_k F_k(q), \quad (3.39)$$

où $\{F_k\}_{k=0}^n$, avec $F_0 = 1$, représentent des fonctions OBF, et $\{w_k\}_{k=0}^n$ sont des coefficients constants. Un tel modèle préserve tous les avantages de la structure IIR et bénéficie des propriétés caractérisant la famille des fonctions OBFs pour diminuer le nombre de termes d'expansion requis pour une approximation adéquate.

Le modèle (3.39) peut être étendu dans le cas des systèmes LPV comme suit :

$$h(q, p) = (w_0 \diamond p) + \sum_{k=1}^n (w_k \diamond p) F_k(q), \quad (3.40)$$

avec $\{w_k \diamond p\}_{k=0}^n$ sont des paramètres variants et $(w_0 \diamond p)$ est le modèle initial. Pour plus de détails sur les représentations en série d'expansion par OBF, le lecteur peut se référer aux références [24] et [6].

3.6 Systèmes quasi-LPV

En général, dans le cadre des systèmes LPV, la variable de séquençement $p(t)$, est une variable externe, tandis que dans les systèmes où $p(t)$ est une variable interne, c'est-à-dire p est une fonction de y , u ou x , ces systèmes sont appelés *systèmes quasi-LPV*. Cependant, de tels systèmes sont généralement traités comme des systèmes LPV avec une variable de séquençement externe. L'avantage de cette représentation est la possibilité de transformer la non-linéarité du système en une variation paramétrique avec la contribution des variables interne du système [26].

Définition 3.12 (Système quasi-LPV) [6]. *Un système dynamique à paramètres variants $\mathcal{S} = (\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n_p}, \mathbb{R}^{n_w}, \mathfrak{B})$ avec les signaux w et la variable de séquençement p est appelé quasi-LPV si elle satisfait les conditions de définition 3.6 sauf que p étant une variable libre (c.-à-d. que $p(t)$ dépend de l'entrée, l'état, ou la sortie du système).*

La classe des systèmes quasi-LPV prend la forme générale suivante [13] :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(x, u)x + B(x, u)u, \\ y &= C(x, u)x + D(x, u)u,\end{aligned}\tag{3.41}$$

Cette forme est une forme généralisée des systèmes LPV. En effet, la structure (3.41) peut représenter des non-linéarités dues aux variables internes ou externes du système. Il s'ensuit que la classe des systèmes quasi-LPV est suffisamment riche pour accommoder une large gamme d'applications non linéaires [13]. Plusieurs systèmes non linéaires de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \\ y &= g(x, u),\end{aligned}\tag{3.42}$$

peuvent être reformulés en système quasi-LPV équivalent, d'où la nature conservative de ce type de représentation. La figure suivante montre le flux des données pour un système quasi-LPV où l'ensemble de signaux d'entrée/sortie peut être assigné à la variable de séquençement $p(t)$.

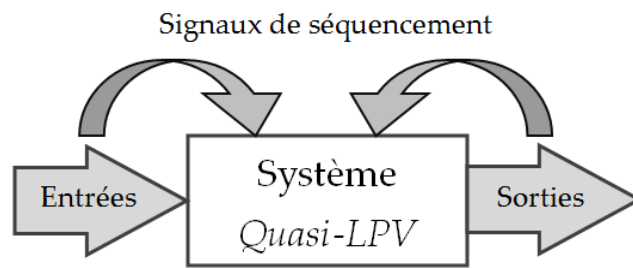


Fig. 3.4 Flux de données pour un système Quasi-LPV

Pour plus de détails sur ce type de représentation ainsi que les techniques de transformation conservatrice des systèmes non linéaires en une forme quasi-LPV, le lecteur peut se référer aux références [6 ch.7] et [13].

3.7 Formes des fonctions de séquençement

Les paramètres dans les représentations LPV sont dans la plupart des cas, des fonctions non linéaires du signal de séquençement $p(t)$. Ces fonctions sont utilisées non seulement pour décrire la dépendance statique/dynamique des coefficients au signal $p(t)$, mais aussi pour décrire la nature variante des dynamiques entre les signaux du système. Afin de décrire cette dépendance fonctionnelle, nombreux choix de formes sont possibles pour ces fonctions :

- **Forme Méromorphe**

C'est le cas général, où on utilise des fonctions polynomiales réelles méromorphes $r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de dimension n

$$r = \frac{f}{g} \quad (3.43)$$

avec f et g sont deux fonctions analytiques avec $g \neq 0$. (voir l'exemple 3.2).

- **Forme Linéaire**

La forme linéaire est une combinaison linéaire d'un ensemble limité de fonctions de base $f_1, \dots, f_n$, c'est-à-dire :

$$a(p) = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \dots + a_n f_n \quad (3.44)$$

Où les constantes a_i sont des nombres réels dont le modèle LPV est complètement caractérisé par eux.

- **Forme Affine**

Cette forme est un cas spécial de la forme linéaire où $f_i(p) = p_i$, avec $f_0(p) = 1$, et $p = [p_1 \dots p_{np}]$ est appelée la représentation affine et prend la structure suivante :

$$a(p) = a_0 + \sum_{i=1}^{np} a_i p_i \quad (3.45)$$

Cette représentation suppose que $a(p)$ peut être représenté par une somme d'une valeur initiale de $a(p)$ et des changements pondérés produits par les éléments du vecteur de séquençement.

- **Forme Polynomiale**

Si on considère une dépendance polynomiale, les fonctions $f(p)$ sont tout simplement des puissances de p , (c'est-à-dire que $f_l(p) = p^l$, et $l = 0, \dots, n$). Dans ce cas, le paramètre $a(p)$ (qui dépend statiquement au p) est une fonction polynomiale qui prend la structure suivante :

$$a(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n \quad (3.46)$$

- **Forme Trigonométrique**

Maintenant, Si les fonctions $f(p)$ sont des fonctions périodiques, par exemple :

$$f_l(p) = \sin(lw_0 p), \quad l = 0, \dots, n. \quad (3.47)$$

Si w_0 est connue, la fonction du paramètre représente une combinaison linéaire de premiers n harmoniques d'une fonction périodique de la variable p . Cette représentation sera utile où les paramètres sont des fonctions cycliques.

Plusieurs autres choix peuvent être utilisés pour interpoler les trajectoires paramétriques dans l'espace de séquençement, comme les représentations par réseaux de neurones, les représentations floues de type Takagi-Sugeno, etc. Ces approximations sont universelles et donnent des bons résultats d'interpolation. Cependant, leur nature non analytique défavorise leur utilisation dans une structure LPV, à cause de la différence structurelle entre ces deux représentations [6]. L'objectif est de choisir un type de fonctions qui simplifie l'implémentation du modèle et donne une meilleure consistance à l'algorithme d'identification. En générale, les représentations affines et polynomiales sont les plus utilisées dans les structures LPV.

3.8 Dépendance statique et dépendance dynamique

Considérons la représentation d'un système LPV-FIR dans sa forme discrète suivante :

$$y = \sum_{i=0}^n (g_i \diamond p) q^{-i} u \quad (3.48)$$

Les coefficients g_i sont des fonctions de la variable de séquençement, définissent les relations dynamiques variantes entre les signaux du système u et y .

Si les fonctions g_i dépendent seulement des valeurs instantanées de p , donc leur dépendance fonctionnelle s'appelle *une dépendance statique*. Cela signifie que (3.48) prend la forme suivante [6]:

$$y(k) = g_0(p(k))u(k) + g_1(p(k))u(k-1) + g_2(p(k))u(k-2) + \dots, \quad (3.49)$$

Si maintenant les fonctions g_i dépendent aussi aux versions décalées dans le temps du signal de séquençement p , donc leur dépendance fonctionnelle dans ce cas s'appelle *une dépendance dynamique* et (3.48) prend la forme suivante [6]:

$$y(k) = g_0(p(k), p(k-1))u(k) + g_1(p(k), p(k-1), p(k-2))u(k-1) + \dots, \quad (3.50)$$

Dans ce cas la réponse du système LPV dépend de la dynamique du signal p .

3.9 Critères de choix du modèle : Continue ou Discret

Les modèles à représentation continue est avantageux et présente principalement plusieurs intérêts pour certain nombre de raisons pratiques important :

- Les lois physiques utilisées dans des modèles sont des lois de nature continu et ses coefficients représentent des grandeurs physiques, donc l'estimation de telles grandeurs conserve ces quantités dans sa nature originale sans l'addition d'autres quantités numérique.
- Les modèles à temps continu estimés reflètent parfaitement la nature variante dans le temps des systèmes LPV, ainsi que le comportement transitoire d'un état de fonctionnement à l'autre, ce qui constitue une réalisation importante compte tenu de la complexité du système étudié et le niveau de bruit additif.
- En diagnostic, l'interprétation physique des paramètres du modèle à temps continu est beaucoup plus aisée que dans l'équivalent discret.
- De plus, les modèles à temps continu conservent l'ordre, la structure et le type de dépendance des paramètres dans les lois physiques. En second lieu, la représentation continue est unique à l'opposé de plusieurs représentations discrètes pour un seul système (selon la méthode de discrétisation utilisée). En troisième lieu, les modèles en temps continu sont définies par un ensemble unique de paramètres qui sont indépendantes de l'intervalle d'échantillonnage, tandis que, la dépendance des paramètres de la période d'échantillonnage dans le cas discret donne plusieurs valeurs au même vecteur de paramètres.
- L'étude de la stabilité et les performances des systèmes LPV peut être significativement facile dans leur forme à temps continu. Par contre, les techniques de l'étude de la stabilité et de performances dans le champ discret n'est pas bien développé, même pour les systèmes LTI.
- Les techniques de commande LPV sont généralement synthétisées à temps continu, donc elles nécessitent des modèles à temps continu précis et fiables.

Par contre, l'utilisation des modèles à temps discrets est nécessaire dans certaines situations, cette nécessité est venue pour répondre aux exigences numériques :

- L'implantation des lois de commande dans des dispositifs numériques nécessite une discrétisation de ces lois afin de synchroniser les événements d'entrée /sortie.

- La simulation du modèle continue nécessite une version discrétisé affine du modèle.
- Dans la pratique, les systèmes à temps continu sont identifiés sur la base des données échantillonnées avec des fréquences d'échantillonnage élevées. Tandis que les systèmes discrets sont plus adaptés avec les faibles fréquences.

En conclusion les systèmes à temps continus sont préférés pour des raisons de simulation, d'études de la stabilité et des performances des systèmes, synthèse de correcteurs, etc. par contre la discrétisation est utilisée pour l'implémentation de modèle dans des dispositifs numériques.

3.10 Identification des systèmes LPV

Les travaux de recherche dédiés à l'identification des systèmes non linéaires par une approche LPV sont nombreux. En effet, il n'y a pas de méthodologie unique pour déduire une représentation LPV d'un système. Dans tous les cas, l'élaboration d'un modèle LPV soulève trois problèmes majeurs, à savoir :

- le choix de l'ensemble des variables de séquençement permettant la détermination de la dépendance fonctionnelle des paramètres ;
- la détermination de la structure du modèle LPV
- et l'identification des paramètres par approche locale ou globale.

Il convient de souligner que ces problèmes présentent un degré de complexité important défavorisant leur résolution simultanée. Toutefois, deux critères préliminaires sont discutés :

- La première concerne le choix de l'ordre du système.
- La seconde concerne le choix de type de fonctions d'interpolation des paramètres de séquençement.

Considérant le nombre important de paramètres dont peut dépendre le système, ces deux problèmes d'optimisation joints rendent le problème difficile à résoudre.

L'hypothèse généralement émise concernant l'ordre de système est qu'il est identique à celui du modèle linéaire autour d'un point de fonctionnement. D'autre part, la dépendance du système aux variables de séquençement est considérée, dans la plupart des cas, comme affine. Les raisons de ce choix sont diverses. L'intérêt prin-

principal d'utiliser des formes de structure affine est que ces formes, en plus de leur simplicité structurelle, gardent la linéarité des paramètres par rapport aux variables de séquençement. L'objectif prévu est d'obtenir un modèle LPV parcimonieux, c'est-à-dire un modèle LPV capable de fournir une bonne caractéristique du système identifié (faible biais) avec un nombre minimal de paramètres [14].

Les procédures d'identification cherchent à estimer les paramètres du modèle LPV à partir des données mesurées. Ces procédures sont formalisées selon :

- la structure choisie,
- la dépendance fonctionnelle du système aux variables de séquençement utilisée,
- et le critère d'optimisation choisi.

Les méthodes d'identification LPV utilisées jusqu'à récemment, sont presque toutes formulées en temps discret, avec une dépendance statique de la variable de séquençement, bien que quelques méthodes existent pour les modèles LPV à temps continu [28]. Du point de vue méthodologique, plusieurs méthodes ont été proposées. On trouve ainsi,

- Les approches basées sur la méthode des moindres carrés pour les modèles décrits par des régressions linéaires entrées-sorties [14], [29], [30], [31],
- Les approches basées sur les techniques des sous-espaces sous forme d'état [32], [33],
- les méthodes basées sur les modèles de Fonctions de Base Orthonormales (OBFs) [6].
- Les méthodes basées sur les techniques d'optimisation non linéaire [34], [35], [28],
- Les approches basées sur l'interpolation [36] [37], [38].

Pour prendre une aperçue générale sur les techniques d'identification LPV et les techniques d'estimation (jusqu'à l'année 2010) on peut référer le lecteur à la réf. [6].

Les méthodes d'identification peuvent être classifiées en deux approches principales : Les méthodes d'identification par approche locale et les méthodes d'identification par approche globale.

3.10.1 Identification LPV par approche locale

L'identification par approche locale est basée essentiellement sur les notions de *séquen-
cement de gain*, elle introduit une certaine flexibilité dans l'étape d'identification. Elle consiste à appliquer une procédure d'identification classique en différents points de fonctionnement du système définis par des trajectoires constantes des variables de séquençement et permet de déterminer des modèles LTI locaux qui peuvent être de différentes structures. On utilise en général des modèles locaux de structure simple et identique en chaque point de fonctionnement.

L'amplitude des signaux d'excitation du model local doit être maintenue dans leur régime nominal pour assurer la linéarité des données d'entrée-sortie.

Ensuite, une procédure d'identification est lancée pour estimer les paramètres de chaque model local. Une fois les jeux de paramètres des modèles locaux sont obtenus pour toute la zone de fonctionnement, le modèle LPV du système est construit par l'interpolation de chaque jeu de paramètres. On peut considérer différentes techniques d'interpolation des paramètres locaux en fonction des variables de séquençement ([15], [37], [36] et [39]). En général, toutes les techniques d'interpolation peuvent être utilisées. Cependant, les interpolations polynomiales, affines fournissent souvent des résultats satisfaisants [27]. Le choix des fonctions d'interpolation donne des estimations différentes de paramètres et la qualité de ce choix est jugée à travers la validation du modèle global.

La réalisation d'une approche de type *locale* facilite l'utilisation des méthodes d'identification linéaires qui sont bien développées et aisément applicables. Cet avantage est l'un des propriétés principales des systèmes LPV.

De plus, des propriétés importantes des systèmes LTI, comme la stabilité, la commandabilité, l'observabilité qui sont largement étudiées dans le cadre linéaire, peuvent être partiellement utilisées sur les modèles LPV (à la proximité des valeurs constantes des variables de séquençement).

Bien qu'elle soit très utile en pratique, l'approche locale a également quelques inconvénients. Sa restriction principale réside dans le fait que la dynamique des variables de séquençement n'est pas modélisée [13]. Par conséquent, ces méthodes sont plus appropriées pour les systèmes avec des variables de séquençement qui

varient lentement dans le temps (les systèmes relativement lent). De plus, l'utilisation de type d'approche n'est pas, toutefois, en mesure de capturer le comportement global du système (un nombre limité de modèles LTI à identifier, il n'y a aucune information sur le comportement transitoire d'une condition de fonctionnement à autre et l'approximation des paramètres est affectée par des problèmes d'interpolation). L'inconvénient majeur des approches locales réside dans la nécessité d'obtenir un nombre important des modèles LTI dans l'espace de fonctionnement de l'application étudiée, ce qui augmente le nombre d'essais à réaliser.

3.10.2 Identification LPV par approche globale

A l'opposé de *l'approche locale*, *l'approche globale* utilise un seul ensemble de données qui est recueilli pour différentes valeurs des variables de séquençement à travers une expérience globale. Elle favorise une bonne caractérisation du comportement global (entrées-sorties) du système par un seul modèle LPV. Toutefois, d'un point de vue identification, cette approche nécessite l'attribution de la dépendance fonctionnelle du système aux variables de séquençement *à priori*. Une fois le modèle et les structures de paramètres sont choisis, l'approche globale consiste à réaliser une seule identification au cours de laquelle toutes les variables d'entrées et de séquençement sont excitées de manière persistante pour que les données doivent refléter le fonctionnement global du système. Une fois les signaux sont mesurés, les méthodes d'identification globale dédiées aux modèles LPV sont utilisées selon la structure et le critère choisis, donnant une estimation directe des paramètres sans la nécessité d'une interpolation. Parmi les travaux faits dans ce domaine notons [6], [28], [30] et [40].

Les difficultés principales de cette approche sont les suivantes :

- premièrement, on doit choisir une structure de modèle adéquate en mesure de donner une bonne caractérisation globale du comportement dynamique du système.
- deuxièmement, on doit définir des conditions pour une expérience appropriée (excitation persistante pour les entrées et les variables de séquençement, définition de la plage de fonctionnement du système, période d'échantillonnage suffisamment petit,...) et afin de collecter des données suffisamment riches pour faciliter la tâche d'identification.

Ces deux problèmes nécessitent une bonne connaissance du processus à identifier. L'approche globale, bien que difficile à mettre en œuvre dans de nombreuses applications non linéaire (comme celle des échangeurs de chaleur), présente l'intérêt de ne nécessiter qu'un essai pour construire le modèle LPV. Dans le cas où il est impossible d'effectuer une expérience globale, il est approprié d'utiliser une identification locale.

Exemple 3.4 (identification par approche globale) [27].

Soit le système LPV-ES-TC avec une dépendance statique dans la variable de séquençement $p(t)$ générant les données d'entrée/sortie non bruitées exprimé sous sa forme à temps continu :

$$A_0(s, p)y_0(t) = B_0(s, p)u(t) \quad (3.51)$$

où s représente l'opérateur différentiel tel que $sx(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, et $y_0(t)$ est la sortie non bruitée du "vrai système" à identifier ; $A_0(s, p), B_0(s, p)$ sont des expressions polynomiales de s d'ordre n_a et n_b respectivement avec $n_a > n_b$, et la dépendance aux variables de séquençement p est donnée par :

$$\begin{aligned} A_0(s, p) &= \sum_{i=0}^{n_a-1} a_i^0(p)s^i + s^{n_a}, \\ B_0(s, p) &= \sum_{j=0}^{n_b} b_j^0(p)s^j \end{aligned} \quad (3.52)$$

On considère que le système LPV à temps continu est BIBO stable pour toutes les trajectoires de p , c'est-à-dire que pour toute entrée bornée $u(t)$, la sortie $y_0(t)$ du système LPV est bornée. On suppose que les signaux $u(t)$ et $y_0(t)$ sont échantillonnés aux instants $t_k = kTe$, $k = 0, \dots, N$. Faisons l'hypothèse que les perturbations agissent sur la sortie échantillonnée non bruitée sous forme d'un terme additif. La sortie $y_0(t)$ est perturbée par un bruit à temps discret v_k de moyenne nulle et de variance finie. Le terme de perturbation v_k est supposé non-corrélé avec le signal d'entrée u et p (ici, le cas d'un système évoluant en boucle ouverte est considéré). La procédure générant les données du système LPV à temps continu est représentée par le schéma de la figure suivante :

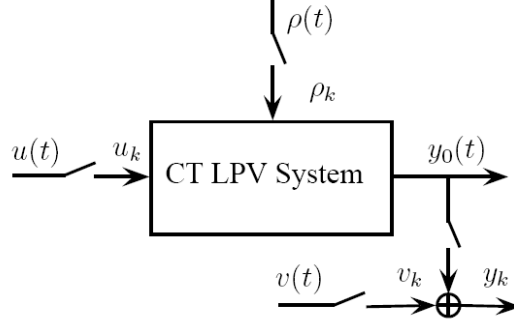


Fig. 3.5 Génération des signaux d'un système LPV à temps continu.

On peut écrire ce système LPV sous la forme suivante :

$$y(t) = y_0(t) + v(t) \quad (3.53)$$

Les modèles paramétriques du système, dans notre cas, sont représentés sous la forme LPV-ES :

$$A(s, p, \theta) y_0(t) = B(s, p, \theta) u(t) \quad (3.54)$$

Où les polynômes A et B sont donnés par

$$\begin{aligned} A(s, p, \theta) &= \sum_{i=0}^{n_a-1} a_i(p, \theta) s^i + s^{n_a}, \\ B(s, p, \theta) &= \sum_{j=0}^{n_b} b_j(p, \theta) s^j \end{aligned} \quad (3.55)$$

On suppose que les paramètres variables $a_i(p, \theta_a)$ et $b_j(p, \theta_b)$ sont des fonctions méromorphiques de p , c.-à-d., qu'elles ne présentent pas de singularité sur p .

$$\begin{aligned} a_i(p, \theta_a) &= \sum_{l=0}^r a_i^l f_l(p) \\ b_j(p, \theta_b) &= \sum_{l=0}^r b_j^l f_l(p) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Où a_i^l, b_j^l avec $l=1, \dots, r$ sont des coefficients constants. Le modèle LPV-ES-TC est complètement caractérisé par le nombre de ces paramètres. Les $f_l(p)$ sont des fonctions de la variable p , avec une dépendance statique. En particulier si nous considérons une dépendance polynomiale, les fonctions $f_l(p)$ sont tout simplement des puissances de p .

Dans ce cas, les paramètres $a_i(p, \theta_a)$ et $b_j(p, \theta_b)$ ont la structure suivante :

$$\begin{aligned} a_i(p, \theta_a) &= a_i^0 + a_i^1 p + \dots + a_i^r p^r \\ b_j(p, \theta_b) &= b_j^0 + b_j^1 p + \dots + b_j^r p^r \end{aligned} \quad (3.57)$$

Avec le vecteur paramètre à identifier

$$\begin{aligned} \theta &= [\theta_a \quad \theta_b] \\ &= [a_0^0, \dots, a_0^r, \dots, a_{n_a-1}^0, \dots, a_{n_a-1}^r, b_0^0, \dots, b_0^r, \dots, b_{n_b}^0, \dots, b_{n_b}^r]^T \end{aligned} \quad (3.58)$$

Dans le cas général, en l'absence de bruit, le modèle LPV à temps continu d'ordre n_a et à l'instant t_k peut s'écrire sous forme d'une régression linéaire comme suit :

$$\hat{y}^{(n_a)}(t_k) = - \sum_{i=0}^{n_a-1} \sum_{l=0}^r a_i^l f_l(p) y^{(i)}(t_k) + \sum_{j=0}^{n_b} \sum_{l=0}^r b_j^l f_l(p) u^{(j)}(t_k), \quad (3.59)$$

Où $y^{(n_a)}(t_k)$ est la dérivée i^{eme} de $y(t_k)$, avec $f_0(p) = 1$. De plus, il est possible d'exprimer la relation liant les signaux d'E/S de manière compacte grâce au produit de Kronecker sous la forme :

$$y^{n_a}(t_k) = \Phi(t_k) \theta^T \quad (3.60)$$

$$\Phi(t_k) = \varphi^T (I_n \otimes F) \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= [-y(t_k) \quad \dots \quad y^{(n_a-1)}(t_k) \quad u(t_k) \quad \dots \quad u^{(n_b)}(t_k)]^T \\ F &= [1 \quad f_1(p) \quad \dots \quad f_r(p)] \end{aligned} \quad (3.62)$$

I_n est la matrice identité de taille $n = n_a + n_b + 1$, $\theta \in \mathbb{R}^{nr \times 1}$ est le vecteur qui contient tous les paramètres à identifier. $\varphi \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $F \in \mathbb{R}^{1 \times r}$ et $\Phi \in \mathbb{R}^{1 \times nr}$. Ici $\otimes$ désigne le produit de Kronecker et r est l'ordre des polynômes.

3.10.3 Identification LPV à temps continue / à temps discret

Si l'identification des modèles LPV-ES à temps discret a fait l'objet de nombreux travaux au cours des dernières années, l'identification de modèles LPV-ES à temps continu n'a été étudiée que très peu. Donc ce domaine reste très largement ouvert. En revanche, les problèmes d'identification des modèles LPV-CT sont largement non résolus, ce qui présente un écart entre les méthodes d'identification LPV disponibles et les besoins pour l'étude des performances des systèmes et la synthèse des correcteurs [14].

En représentation discrète, le regresseur est naturellement construit par les versions décalées des données d'entrée/sortie. En continu, un traitement préalable des données est nécessaire pour construire le regresseur. L'identification directe des systèmes à temps continu est difficile et un de ses problèmes majeurs est la nécessi-

té d'obtenir des dérivées des signaux d'E/S. Toute tentative utilisant une approximation numérique de la dérivation résulte en effet en une amplification des perturbations stochastiques. La solution consiste donc à filtrer convenablement les données d'entrées-sorties du système [27].

Pour identifier un modèle LPV à temps continu à partir de donnée d'entrées/sorties échantillonnées, deux approches principales sont possibles : *l'approche indirecte* et *l'approche directe*.

3.10.4 Approches d'identification directe et indirecte

L'approche indirecte consiste à déterminer, dans un premier temps, un modèle discrétisé, puis à travers une opération de conversion ce modèle est converti en modèle à temps continu. Cependant, l'étape de conversion discret-continu dans le cas LPV est délicate et peut être très sensible au choix de la méthode de conversion [6 ch. 4], [14] et voire l'exemple 3.5.

L'approche directe consiste à estimer les paramètres du modèle directement sous la forme continu en une seule étape, à l'aide des méthodes développées spécifiquement pour l'identification de modèles à temps continu. Bien sûr, l'estimation des modèles en temps continu à travers des données en temps discret est rendue plus difficile, parce que le signal d'entrée n'est pas normalement connu au cours de la période d'échantillonnage. Toutefois, dans le cas où l'entrée est presque constante sur l'intervalle d'échantillonnage, l'erreur de mesure va considérablement diminuer, dans ce cas, il est possible de formuler simplement une estimation optimale.

3.10.5 Avantages d'estimation directe

Dans la pratique, les systèmes à temps continu ne peuvent être identifiés que sur la base des données mesurées échantillonnées. Malheureusement, la transformation des modèles DT-LPV en modèles CT-LPV est plus compliquée que dans le cas LTI (voir l'exemple 3.5). Ainsi, il est souvent difficile en pratique d'obtenir une réalisation à TC adéquate à partir d'un modèle à TD identifié [14]. Par conséquent, l'identification directe du modèle en temps continu est avantageuse pour un certain nombre de raisons :

- les paramètres des modèles étant indépendants du pas d'échantillonnage. Dans ce cas, il y a avantage à utiliser les méthodes d'identification directe à temps continu.
- les méthodes d'identification directes à temps continu peuvent être adaptées facilement pour traiter le cas des données irrégulièrement échantillonnées (par interpolation) [41].
- De plus, l'estimation directe à TC dans le cadre LPV utilise un modèle parcimonieux, (pas de paramètres de plus à estimer) et par conséquent le moindre de biais.
- Dans l'approche locale, pour tout comportement figé du système LPV (pour des trajectoires fixes de p) il est rationnel d'utiliser un procédé d'identification directe à TC.
- Enfin, et peut-être le plus important, les modèles en temps continu peuvent être identifiés à partir de données rapidement échantillonnées, tandis que les modèles à temps discret rencontrent des difficultés lorsque la fréquence d'échantillonnage est trop élevé par rapport à la fréquence dominante du système étudié [42]. Dans cette situation, les valeurs propres se trouvent trop près du cercle unitaire dans le domaine complexe et l'estimation des paramètres du modèle en temps discret devient statistiquement mal définie. Les conséquences pratiques de cette sont : soit que l'estimation en temps discret ne converge pas correctement, fournissant ainsi une interprétation erronée des données, ou que, même si la convergence est atteinte, le modèle en temps continu, tel qu'il est obtenu par conversion standard (par exemple la fonction $d2c$ du Matlab) de modèle estimée en temps discret, ne fournit pas un modèle en temps continu correcte [41].

Noter que d'essayer d'identifier un modèle à temps discret pour le système considéré continu est tout à fait une tâche délicate et nécessite des solutions aux problèmes suivants:

- 1- Estimation d'un modèle discret, où les dépendances des paramètres sur p sont non linéaires, est difficilement réalisable en utilisant les méthodes paramétriques existantes. car elle nécessite une approche d'optimisation non linéaire personnalisée.

- 2- la propriété de temps variant du système LPV ne serait pas directement liée aux coefficients du modèle DT considérée et, par conséquent, n'a pas pu être clairement identifié.
- 3- Pour un modèle LPV à représentation continue simple, l'équivalent discret pose un nombre de problèmes qui n'existe pas dans l'original continu, on obtient :
 - une augmentation du nombre de paramètres à estimer,
 - des fonctions non linéaires de p dans les paramètres,
 - apparition de quelques dépendances dynamiques sur p (de nouveaux termes $p(k-1)$, $p(k-2)$, ...).

Une illustration de certains de ces problèmes est donnée à travers l'exemple suivant :

Exemple 3.5 (Quelques problèmes d'approche indirecte)

Considérons le modèle CT-LPV simples suivant :

$$\frac{d}{dt}y(t) + a(p(t))y(t) = bu(t), \quad (3.63)$$

Où p , y et u sont les signaux de séquençement, de sortie et d'entrée du système respectivement, $a(p(t))$ et b sont deux paramètres réels variant et constant respectivement.

En utilisant l'approximation en arrière d'Euler, $\frac{d}{dt}y(t) \approx \frac{y(k) - y(k-1)}{T_e}$, pour la dérivée,

avec $T_e > 0$ est la période d'échantillonnage, (3.63) se transforme en:

$$y(k) = \frac{1}{1 + T_e a(p(k))} y(k-1) + \frac{b T_e}{1 + T_e a(p(k))} u(k), \quad (3.64)$$

Ce modèle discrétisé a maintenant deux coefficients dépendants de p à estimer à la place d'un seul paramètre dans (3.63). De plus, la dépendance des coefficients sur p n'est pas linéaire et pose une singularité chaque fois que $a(p(k)) = -\frac{1}{T_e}$.

Une autre façon à approximer la dérivée dans le temps discret est d'appliquer une

approximation en avant d'Euler: $\frac{d}{dt}y(t) \approx \frac{y(k+1) - y(k)}{T_e}$, Qui donne

$$y(k) = (1 - T_e a(p(k-1)))y(k-1) + b T_e u(k-1), \quad (3.65)$$

Ce modèle discrétisé ne dispose qu'un seul coefficient dépendant de p et la linéarité de la dépendance est préservée, mais maintenant l'équation du modèle est en fonction de $p(k-1)$ au lieu de $p(k)$, c'est-à-dire un changement de la dépendance dynamique du système sur p . En outre, il est bien connu dans l'analyse numérique que l'approximation en avant d'Euler est plus sensible au choix de T_e en terme de stabilité numérique que l'approximation en arrière d'Euler [43]. Cela signifie que (3.65) nécessite une fréquence d'échantillonnage beaucoup plus rapide que dans (3.64) pour donner une approximation stable du système. Ainsi la représentation (3.65) est plus sensible aux incertitudes des paramètres et cause des problèmes si elle est utilisée pour l'estimation [14].

On peut conclure que même pour un simple modèle LPV-TC, l'estimation d'un modèle DT dont l'objectif d'obtenir un modèle CT est une tâche difficile avec de nombreux sous-problèmes pour lesquels il n'existe pas de solutions théorique générale disponibles.

Contrairement à une approche indirecte, une solution directe offre une façon efficace pour surmonter les problèmes précédents. En raison des récents développements technologiques des instruments d'échantillonnage, l'utilisation d'une approche d'estimation directe a plusieurs intérêts, et montre une meilleure performance que l'approche indirecte.

3.10.6 Excitation persistante

Afin de garantir la consistance de l'algorithme d'identification, l'entrée du système mise en question doit être une *excitation persistante*.

Soit θ_0 la valeur réel, alors l'algorithme d'identification converge si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\theta}_k = \theta_0 \quad (3.66)$$

Une excitation persistante selon [30] au sens des fonctions paramétriques polynomiales est définie comme suit :

Définition 3.13 (Excitation persistante) [30]. *Le regresseur étendu Φ_k (définie dans (3.61)) est subit à une Excitation Persistante (EP) si*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N E\{\Phi_k \otimes \Phi_k\} > 0 \quad (3.67)$$

C'est-à-dire que la moyenne infinie de l'espérance mathématique E d'une fonction de régresseur doit être toujours une quantité positive non nulle.

Définition 3.14 (Excitation Persistante relatif à sous-séquence) [30]. Soit $\mathcal{I}$ une sous-séquence des nombres naturels $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}^*$. La séquence $\{\varphi_k\}$ est dite persistante excitée relative à une sous-séquence $\mathcal{I}$ si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathcal{I}} E\{\varphi_k \varphi_k^*\} > 0, \quad (3.68)$$

Avec une manière similaire on peut définir la condition EP pour un système LPV.

Théorème 3.1 (EP pour les systèmes LPV) [30]. Le régresseur étendu Φ_k est subit à une EP si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (1) Il existe N points distincte $\bar{p}_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N$, qui sont des points limites de $p(k)$. Soit $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_N$ indices des sous-séquences tel que

$$\lim_{k \in \mathcal{I}_i} p(k) = \bar{p}_i, \quad (3.69)$$

- (2) La séquence $\{\varphi_k\}$ est subite à une EP pour chaque ensemble $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_N$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathcal{I}_i}^T E\{\varphi_k \varphi_k^*\} > 0, \quad (3.70)$$

Les conditions du théorème 3.1 supposent que le spectre du signal d'entrée soit suffisamment riche pour assurer que φ_k soit subit à une EP, ceci nécessite que les trajectoires de $p(k)$ balayent N points limites distinctes $\bar{p}_i$ plusieurs fois. La condition (2) signifie que le taux de re-balayage de $p(k)$ de l'un de ces points limites ne doit pas être chuté. Ainsi ces balayages sont suffisants pour extraire les données de corrélation de φ_k [30]. Tandis que l'excitation persistante dans le cas LPV doit être satisfait les deux conditions (1) et (2) selon [30], l'excitation persistante selon [40] doit être vérifiée d'autres conditions se semblent (selon [40]) plus générales. En effet, la notion d'excitation persistante dans le cas LPV a de nombreuses difficultés. Noter que la notion de d'excitation persistante dans le cas LPV n'est pas équivalente au cas LTI, de même ordre, pour plusieurs raisons:

- 1) Les paramètres θ du modèle sont liés à la dynamique des signaux de séquençement et pas seulement aux versions décalées dans le temps de u et y , donc les fonctions d'interpolation et les trajectoires de séquençement p sont également influentes sur l'estimation de θ .
- 2) Le modèle LPV est plus riche en dynamiques que l'équivalent LTI de même ordre et les différents aspects du système sont ajustés pour des propriétés dominantes du système pour des différents points de fonctionnement. par conséquent, l'excitation doit être une combinaison de plusieurs excitations en même temps. Par contre, une bonne excitation pour une dynamique, peut devenir mauvaise pour les autres (la bonne excitation pour une dynamique devient un signal de bruit pour les autres dynamiques).
- 3) Le concept de l'excitation persistante d'ordre n est mal défini dans le cas LPV. Donc, l'excitation doit être suffisamment riche pour sensibiliser les différents modes du système, mais dans certains cas, c'est une hypothèse assez réaliste [27]. En effet, il y a un manque de méthodes de conception d'entrée adaptée pour l'identification de systèmes LPV (voir [14], [25]) et le concept de l'excitation persistante n'est pas encore bien compris pour les modèles LPV. Dans certains cas, on utilise une excitation de type SBPA (signal binaire pseudo aléatoire) si ce type ne pose pas des problèmes pour le système.

Remarque 3.3 : Dans le contexte précédant, on propose quelques concepts, qui peuvent aider à la bonne conception du signal d'excitation. Ces concepts sont résumés dans les points suivants :

- Le signal d'excitation d'un système quelconque est jugé bon s'il peut exciter, d'une manière persistante, toutes les dynamiques du système. En d'autres termes, le signal d'excitation doit contenir un spectre de fréquences convenable avec le spectre du système, puis le produit de ces deux spectres augmente l'amplitude des fréquences utiles (celles qui sont incluses dans la bande passante du système) dans le signal de sortie, et diminue en même temps les fréquences non désirables qui correspondent au bruit de mesure et aux signaux de perturbation, c'est le phénomène de « résonance ».
- L'excitation doit être *riche en fréquences* (généralement un bruit blanc pré-filtré) afin d'exciter toutes les dynamiques du système, sans qu'elle provoque

l'apparition des non linéarités du système (saturation par exemple) dans le signal de sortie, cette non linéarité n'interprète aucune dynamique dans le système et ajoute une charge non utile sur le système d'identification.

- Afin de séparer les fréquences non utiles des fréquences utiles dans le signal d'excitation, ce dernier doit subir un prétraitement par un filtre dynamique adapté à la dynamique du système (c'est-à-dire à sa bande passante), comme ça on peut augmenter l'amplitude des fréquences utiles et diminuer l'effet des signaux perturbateurs dans le signal de sortie. Avec cette technique on peut garantir une convergence rapide de l'algorithme d'estimations. Ce concept peut être trouvé implicitement dans nombreuses travaux réussies, par exemple dans [41] avec le cas LTI, dans [28] et [14] avec le cas LPV.
- L'excitation persistante d'ordre n dans le cas LTI est en relation directe avec la structure du model de n paramètres, ce qui signifie que pour chaque fonction de sensibilité d'un paramètre, il y a au moins un signal d'excitation avec un spectre de fréquence convenable [6].
- Finalement, si l'excitation est mal conditionnée, selon un critère donné $\mathcal{J}$, cela peut conduire à l'apparition de plusieurs optimums locaux pour le critère $\mathcal{J}$, ce qui signifie qu'il est possible de trouver deux vecteurs paramètres différents θ_1 et θ_2 qui peuvent donner la même prédiction $\hat{y}(t)$. dans le cas contraire l'excitation amène à un optimum global du critère $\mathcal{J}$ et donne un vecteur de paramètres unique [6].

Enfin, ces concepts peuvent être mis sous forme des critères mathématiques pour construire un bon signal d'excitation et mesurer sa capacité d'exciter toutes les dynamiques d'un système.

3.11 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les concepts de base des systèmes LPV à travers des différentes structures de modélisation, telles que la représentation d'entrée/sortie (E/S) et la représentation d'espace d'état (EE) dans le cas continu et discret, ainsi que la représentation OBF. Toutes ces représentations sont développées d'après une structure originale d'équations différentielles à paramètres variants. La deuxième partie traite l'identification des systèmes LPV et ses différentes approches (locale et globales). Dans cette partie nous avons examiné quelques pro-

blèmes concernant l'identification de ces systèmes, l'avantage de quelques approches visant d'autres et quelques problèmes liées à la conception d'une excitation adapté à ce type de systèmes. Finalement nous avons proposé quelques idées qui peuvent aider à une bonne conception des signaux d'excitation.

On peut conclure que cette classe de modèles LPV vient à répondre aux difficultés que pose la complexité des modèles non linéaires, en utilisant des techniques de modélisation et d'identification développées essentiellement dans le cadre LTI. Cette approche de modélisation est bien adaptée à l'approximation d'une large classe de systèmes non linéaires et permet d'avoir une bonne représentation des processus réels avec l'utilisation de modèles de structures linéaires.

Un point délicat pour une modélisation LPV réside dans le choix des variables de séquencement qui servent à décrire les conditions de fonctionnement du système non linéaire. De plus, le choix de l'ordre du modèle et le nombre de ces paramètres. Il convient de noter que ces deux problèmes, ainsi que le problème d'excitation persistante, présentent un degré de complexité important et leur résolution dépend de la compréhension du fonctionnement du système.

Chapitre 04

Modélisation et Identification LPV d'un Echangeur Thermique Réel

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va démontrer l'utilité des systèmes LPV et leur capacité d'approximer des modèles non linéaires / à paramètres variants. Le problème de dérivation d'un modèle dynamique MIMO à temps continu pour un échangeur de chaleur réel est considéré. Afin de prendre en compte la dépendance dynamique du système sur les taux du débit massique chaud et froid de manière explicite, un modèle entrée-sortie linéaire à paramètre variant en temps continu (LPV-ES-TC) est utilisé. Dans ce cas, les paramètres du modèle LPV sont identifiés par une approche locale en utilisant des méthodes spécifiques de programmation non linéaire pour minimiser les fonctions d'erreurs. Des simulations sont effectuées, et les résultats montrent bien les avantages de l'approche proposée.

Dans les sociétés industrielles, les échangeurs de chaleur sont des éléments essentiels de toute politique de maîtrise de l'énergie. Ce sont des dispositifs largement utilisés dans les applications industrielles et domestiques (chimie, pétrochimie, sidérurgie, agroalimentaire, production d'énergie, chauffage, climatisation, etc.). Il existe plusieurs types et tailles d'échangeurs, mais le principe de base reste relativement simple : un échangeur de chaleur permet de transférer de l'énergie thermique d'un fluide vers un autre, sans les mélanger (le flux thermique traverse la surface d'échange qui sépare les fluides) [44].

Un des problèmes majeurs liés aux échangeurs en milieu industriel est l'encrassement qui entraîne une baisse de rendement et une surconsommation

d'énergie. D'un point de vue scientifique, en envisageant éventuellement la détection et la localisation de ce phénomène pour aboutir à une maintenance ciblée. Cette détection basée sur des bilans des mesures locales [45], rendue difficile par le caractère progressif de l'encrassement, mais il s'avère beaucoup plus judicieux d'utiliser un modèle sain de l'échangeur pour y parvenir.

La littérature sur le domaine de la modélisation des échangeurs de chaleur est relativement importante, mais il s'agit, dans la majorité des cas, de la modélisation physique du système basée sur les équations des bilans de masse et d'énergie, ou une modélisation boîte noire par des réseaux de neurones artificiels [48], ou encore par un modèle LTI, sans que les entrées du modèle (températures, débits) puissent varier rapidement de façon significative [46], [47]. Mais pour ce qui concerne la modélisation linéaire, la littérature est assez pauvre, et peu de méthodes d'identification aboutissant à des modèles complets [15]. Dans ce contexte, l'approche LPV peut être utilisée pour couvrir ce manque et réduire la complexité du modèle décrivant le processus des échangeurs de chaleur [16], [49]. Dans cette nouvelle configuration, quand la thermodynamique ou les lois de transfert de chaleur sont étudiées, on peut montrer que certains paramètres physiques importants, tels que les coefficients de transfert de chaleur, sont directement liés à certaines composantes du système telles que les taux de débit massique d'entrée. Ainsi, la structure du modèle, prenant compte cette dépendance explicite, pourrait améliorer la précision du modèle final.

4.2 Modélisation NL de l'Echangeur Thermique

Il s'agit d'un échangeur thermique à courant croisé. Dans cette configuration les écoulements des deux fluides, chaud et froid, se croisent perpendiculairement (voir figure 4.1). Les échangeurs à courants croisés, tandis qu'ils sont un peu plus complexes dans leur configuration que d'autres types d'échangeurs, ils offrent l'avantage d'être plus compacts et plus efficaces pour un même volume donné [27].

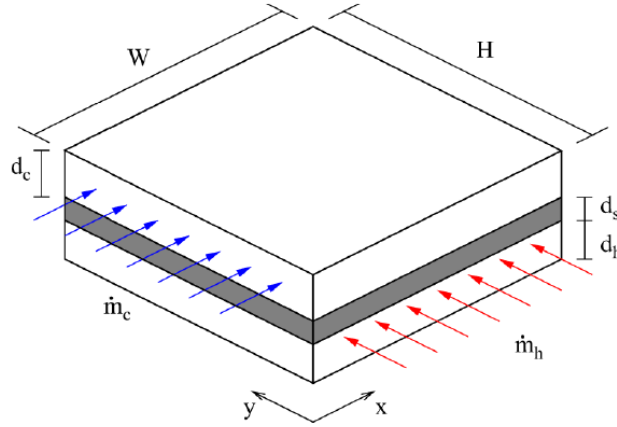


Fig. 4.1. Simple illustration d'une cellule élémentaire d'un échangeur de chaleur à courants croisés.

La dynamique complète de cet échangeur repose sur des équations aux dérivées partielles (PDE) non linéaires liées aux transferts de chaleur qui dépendent du temps ainsi que des coordonnées spatiales. Le modèle dynamique de l'échangeur est décrit par le système d'équation suivant [16] :

$$\rho_c c_c d_c \frac{\partial T_c}{\partial t} + \frac{\dot{m}_c c_c}{H} \frac{\partial T_c}{\partial x} = U_c (T_s - T_c) \quad (4.1a)$$

$$\rho_s c_s d_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = U_c (T_c - T_s) + U_h (T_h - T_s) \quad (4.1b)$$

$$\rho_h c_h d_h \frac{\partial T_h}{\partial t} + \frac{\dot{m}_h c_h}{W} \frac{\partial T_h}{\partial y} = U_h (T_s - T_h) \quad (4.1c)$$

Avec :

- ρ , la densité du fluide,
- c , la capacité calorifique,
- d , l'épaisseur de chacune des trois sections.

Par ailleurs, H et W définissent le gabarit de l'échangeur, $\dot{m}$ représente le débit massique. Ces relations représentent le transfert de chaleur qui se fait principalement du fluide chaud à la plaque de séparation par convection caractérisé par le coefficient de transfert de chaleur U_h , puis par conduction à travers la plaque et enfin de la plaque au fluide froid par convection caractérisé par le coefficient de transfert de chaleur U_c .

On suppose que la conduction au sein des fluides est négligeable, que les débits sont uniformes et que l'équilibre thermique est atteint à la sortie des fluides dans l'échangeur. Par ailleurs, les températures et les débits massiques d'entrée ainsi que les coefficients de transfert de chaleur sont généralement considérés comme fonctions du temps, tandis que tous les autres paramètres seront supposés constants. L'état de l'échangeur de chaleur à un point donné dans le temps est représenté par trois variables de champ $T_c(x, y)$, $T_h(x, y)$ et $T_s(x, y)$, représentant respectivement la température du fluide froid, du fluide chaud et de la paroi.

4.3 Discrétisation du modèle NL de l'échangeur

La construction d'un simulateur numérique pour l'échangeur thermique à courants croisés nécessite la discrétisation du modèle décrit par les équations (4.1a-c). Pratiquement, il est nécessaire de subdiviser la surface totale d'échange thermique de taille en N cellules élémentaires comme sont illustrées dans la figure 4.2 suivante :

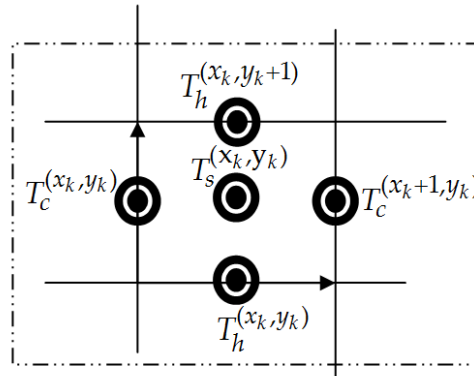


Fig. 4.2. Points de calcul de la température moyenne d'une cellule d'un échangeur à courants croisés.

Chacune de ces cellules est décrite par le modèle (4.1).

La discrétisation du système d'équation (4.1a-c) par la méthode de différence centrale dans le temps donne :

$$\rho_c c_c d_c \frac{(T_c^{k+1} - T_c^k)}{\Delta t} + \frac{\dot{m}_c c_c}{H} \frac{T_c^{(x_{k+1}, y_k)} - T_c^{(x_k, y_k)}}{\Delta x_k} = U_c \left(\frac{T_s^{k+1} - T_c^{k+1}}{2} + \frac{T_s^k - T_c^k}{2} \right), \quad (4.2a)$$

$$\rho_s c_s d_s \frac{(T_s^{k+1} - T_s^k)}{\Delta t} = U_c \left(\frac{T_c^{k+1} - T_s^{k+1}}{2} + \frac{T_c^k - T_s^k}{2} \right) + U_h \left(\frac{T_h^{k+1} - T_s^{k+1}}{2} + \frac{T_h^k - T_s^k}{2} \right), \quad (4.2b)$$

$$\rho_h c_h d_h \frac{(T_h^{k+1} - T_h^k)}{\Delta t} + \frac{\dot{m}_h c_h}{W} \frac{T_h^{(y_{k+1}, x_k)} - T_h^{(y_k, x_k)}}{\Delta y_k} = U_h \left(\frac{T_s^{k+1} - T_h^{k+1}}{2} + \frac{T_s^k - T_h^k}{2} \right), \quad (4.2c)$$

Ce qui donne la forme matricielle suivante (voir [16]) :

$$\left[\Gamma + \frac{\Delta t}{2} \Lambda \right] \times \begin{bmatrix} T_c^{k+1} \\ T_s^{k+1} \\ T_h^{k+1} \end{bmatrix} = \left[\Gamma - \frac{\Delta t}{2} \Lambda \right] \times \begin{bmatrix} T_c^k \\ T_s^k \\ T_h^k \end{bmatrix} - \Gamma \begin{bmatrix} \tilde{T}_c^k \\ 0 \\ \tilde{T}_h^k \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Avec

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_c^k \\ \tilde{T}_h^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{m}_c}{\rho_c d_c H} & \frac{\dot{m}_h}{\rho_h d_h W} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{T_c^{(x_{k+1}, y_k)} - T_c^{(x_k, y_k)}}{\Delta x_k} \\ \frac{T_h^{(y_{k+1}, x_k)} - T_h^{(y_k, x_k)}}{\Delta y_k} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Et Γ et Λ sont des matrices définies comme :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \rho_c c_c d_c & 0 & 0 \\ 0 & \rho_s c_s d_s & 0 \\ 0 & 0 & \rho_h c_h d_h \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} U_c & -U_c & 0 \\ -U_c & U_c + U_h & -U_h \\ 0 & -U_h & U_h \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

Le modèle numérique (4.3) est assigné à chaque cellule de 3 couches. L'ensemble de N cellules construit le modèle numérique, simulateur de l'échangeur.

Le nombre de cellules N dans le sens d'écoulement joue un rôle majeur pour l'obtention de résultats de simulation précis et par conséquent il doit être déterminé avec attention. Dans [50], il a été démontré que 20×20 cellules de 3 couches sont suffisantes, pour un échangeur de chaleur à courants croisés, dans une configuration similaire du modèle numérique.

Remarque 4.1 : afin de donner notre travail un aspect pratique, nous avons traité le cas d'un échangeur réel (le dispositif expérimental de la figure 4.3 est composé de 03 échangeurs à courants croisés, un principal, à modélisé, et deux auxiliaires). Le

modèle NL discret de cet échangeur (constitué de 20×20 cellules de 3 couches c'est à dire 1200 blocs de Simulink [50]) a été validé au sein du laboratoire TEMPO de l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis. La validation de ce modèle a été faite pour l'état d'équilibre et transitoire et les résultats ont montré un bon accord avec les résultats attendus. Il a été, également, démontré que ce modèle peut représenter le comportement global de l'échangeur de chaleur réel avec une précision suffisante [27]. Une brève description sur ce type d'échangeur peut être trouvée dans l'annexe D. Donc ce modèle NL sera utilisé par la suite pour générer les sorties de l'échangeur à la place des sorties réels, comme ça on peut réduire considérablement le temps nécessaire pour chaque expérience.

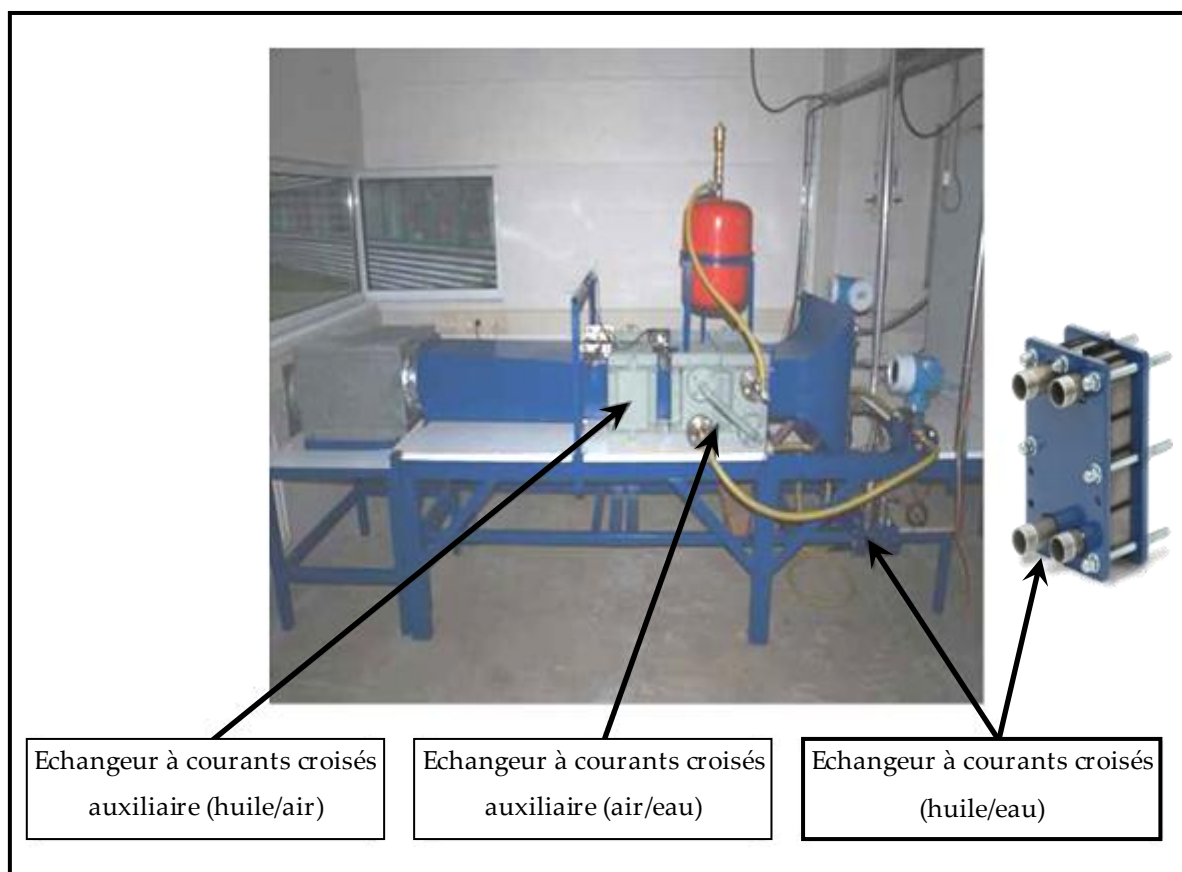


Fig. 4.3. Le dispositif expérimental GEA VT04 CD-16 de l'échange thermique.

4.4 Modélisation LPV de l'échangeur thermique

Bien qu'il soit non linéaire, l'échangeur peut être considéré comme système linéaire autour de plusieurs points de fonctionnement à condition qu'on limite les variations des grandeurs d'entrée. En effet, pour de très faibles variations, le comporte-

ment thermique des fluides traversant l'échangeur peut être facilement approché par des modèles linéaires, ceci n'est plus possible lorsque les variations deviennent plus grandes, et le modèle du système dans ce cas devient non linéaire. Pour cela, l'étude du fonctionnement des échangeurs thermiques peut être divisée en deux régimes :

- *fonctionnement permanent*, l'échangeur est supposé fonctionner en régime établi, où une partie des grandeurs d'entrée (débits massiques des fluides) est maintenue constante dans le temps;
- *fonctionnement dynamique*, où toutes les grandeurs d'entrée du système sont variables en fonction du temps.

Le choix de la structure du modèle et l'approche d'identification paramétrique sont deux facteurs cruciaux pour toute modélisation fidèle.

4.4.1 Choix de la structure du Modèle

Concernant la modélisation LPV de l'échangeur de chaleur, le choix de la structure du modèle doit prendre en considération plusieurs conditions de fonctionnement. En se basant essentiellement sur les différents critères de choix d'un modèle, discutés dans le chapitre précédant, on va considérer un modèle à temps continu avec une représentation E/S de type multi-entrées multi-sorties (MIMO), d'ordre réduit, incluant des retards purs. Le choix des variables de séquençement, exprimant les différentes non-linéarités de l'échangeur de chaleur, est un problème délicat, et sera traité par la suite. Par la suite, les variables d'entrées de l'échangeur de chaleur sont les températures d'entrée et les débits massiques du côté froid et chaud qui sont désignées par $T_{c_{in}}$ et $T_{h_{in}}$ et $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$ respectivement, les variables de sortie sont les températures $T_{c_{out}}$ et $T_{h_{out}}$ du côté froid et chaud.

4.4.2 Choix de l'approche d'Identification

Concernant l'identification du modèle LPV de l'échangeur de chaleur, nous avons fixé le choix sur une approche locale. Cette approche permet la résolution du problème d'identification par plusieurs étapes. Ce choix permet ainsi d'éviter l'excitation des entrées de l'échangeur (températures d'entrée et les débits massiques du côté froid et chaud) d'une manière persistante sur une énorme plage de

variation. D'un point de vue pratique, les températures ne peuvent pas être contrôlées directement, mais elles sont assez constantes sur des intervalles de temps longs. En d'autres parts, les fortes variations dans les débits massiques seront facilitées dans les systèmes de tuyauterie, à cause de la limitation en bande passante de ces dernières, ce qui présente une limitation physique. Contrairement, l'application des petites variations autour des points de fonctionnements peut être effectuée dans de nombreux cas pratiques. Par ailleurs, la possibilité d'utiliser des données d'E/S et des connaissances à priori (telles que les différents points de fonctionnement de l'échangeur, et la présence des retards), donne d'autres avantages à l'utilisation de cette approche pour tel système complexe. Ainsi l'utilisation d'une approche locale, permet de découpler les problèmes liés aux techniques d'identification LPV, et facilite le traitement selon une procédure de plusieurs étapes :

- des expériences locales sont effectuées, dans lesquels les variables de séquençement sont maintenues constantes et les entrées de commande sont excitées;
- les modèles LTI locaux sont estimés à l'aide de ces ensembles des mesures locales d'entrée/sortie (E/S);
- une phase d'interpolation des paramètres des modèles locaux est effectuée afin de calculer un modèle LPV final.

4.4.3 Détermination des retards

Puisque la configuration de l'échangeur est à courants croisés, les températures $T_{c_{out}}$ et $T_{h_{out}}$ ne sont pas directement liées à $T_{c_{in}}$ et $T_{h_{in}}$. En effet, les retards δ_c et δ_h sont nécessaires pour prendre en compte la durée lors des échanges thermiques, ainsi que la période d'écoulement des fluides dans l'échangeur de chaleur entre $T_{c_{out}}/T_{c_{in}}$, et $T_{h_{out}}/T_{h_{in}}$. Ces retards sont définis par [16] :

$$\delta_{cc} = \frac{\rho_c d_c WH}{\dot{m}_c} \quad (4.7a)$$

$$\delta_{hh} = \frac{\rho_h d_h WH}{\dot{m}_h} \quad (4.7b)$$

Selon [16], ces retards n'affectent pas les échanges entre le fluide d'entrée coté froid et le fluide de sortie coté chaud (respectivement, le fluide d'entrée côté chaud

fluide de sortie coté froid) parce que le transfert de chaleur entre les fluides se fait à la position $(x = 0, y = H)$ (respectivement $(x = W, y = 0)$).

Remarque 4.2 : les relations (4.7a-b) sont calculées à partir d'un point de vue théorique. Mais les expériences pratiques montrent qu'il y a d'autres types de retards δ_{ch} et δ_{hc} entre $T_{c_{out}}/T_{h_{in}}$, et $T_{h_{out}}/T_{c_{in}}$ qui affecte l'échangeur. Les deux nouveaux retards proposés sont définis comme suit :

$$\delta_{ch} = \frac{\rho_c d_c WH}{\dot{m}_h} \quad (4.7c)$$

$$\delta_{hc} = \frac{\rho_h d_h WH}{\dot{m}_c} \quad (4.7d)$$

L'intégration de ces deux types de retards dans le modèle LPV nous permettra l'amélioration des résultats obtenus par la suite.

4.4.4 Choix des variables de séquençement

En général, la représentation LPV pour un système non linéaire n'est pas unique. A chaque représentation LPV correspond un ensemble particulier de variables de séquençement. Le choix d'une représentation LPV est équivalent au choix d'un ensemble de variables de séquençement. Dans l'approche d'identification locale, ce choix est important et crucial, car il influe sur le nombre de modèles locaux puis sur la structure du modèle global [27].

Dans le cas de l'échangeur, les paramètres du modèle LPV dépendent explicitement des débits massiques $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$ qui sont mesurables pendant le fonctionnement du procédé. Donc, on va choisir les débits massiques $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$ comme des variables de séquençement. Ce choix peut être justifié tout d'abord par le fait que ces deux signaux sont généralement mesurables sur des échangeurs de chaleur réels. De plus, la dynamique de l'échangeur évolue en fonction des entrées de débit massique $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$. Noter ainsi que les débits massiques affectant directement certains paramètres physiques influant sur la dynamique, comme les coefficients de convection τ_c et τ_h et le coefficient de transfert de chaleur global U qui varient en fonction de ces deux signaux comme suit [16] :

$$\tau_c(t) = \eta \dot{m}_c^\mu(t) \quad (4.8a)$$

$$\tau_h(t) = \eta \dot{m}_h^\mu(t) \quad (4.8b)$$

$$U(t) = \frac{\tau_c(t)\tau_h(t)}{\tau_c(t) + \tau_h(t)} = \eta \frac{(\dot{m}_c^\mu(t)\dot{m}_h^\mu(t))^\mu}{\dot{m}_h^\mu(t) + \dot{m}_c^\mu(t)} \quad (4.8c)$$

Où η et μ sont des paramètres constants. D'autres paramètres importants, comme les taux de capacité d'échauffement R_c et R_h [51] :

$$R_c = \frac{\dot{m}_c c_c}{\dot{m}_h c_h}, \quad R_h = \frac{\dot{m}_h c_h}{\dot{m}_c c_c} \quad (4.9)$$

sont aussi liés à $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$. Ces équations montrent bien la façon dont les paramètres de transfert de chaleur sont liés à la vitesse d'écoulement des fluides. Ainsi, le choix de $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$ comme variables de séquençement semble pertinent, car les paramètres physiques du système sont explicitement dépendants de ces variables mesurables. Ainsi, l'analyse des réponses indicielles autour de plusieurs points de fonctionnement [27], montre qu'il y a une variation paramétrique en fonction des variations des débits des fluides de l'échangeur et permet de constater qu'une augmentation des débits massiques accélère la dynamique de l'échangeur et entraîne une augmentation du coefficient de transfert de chaleur. Comme le montre la figure suivante :

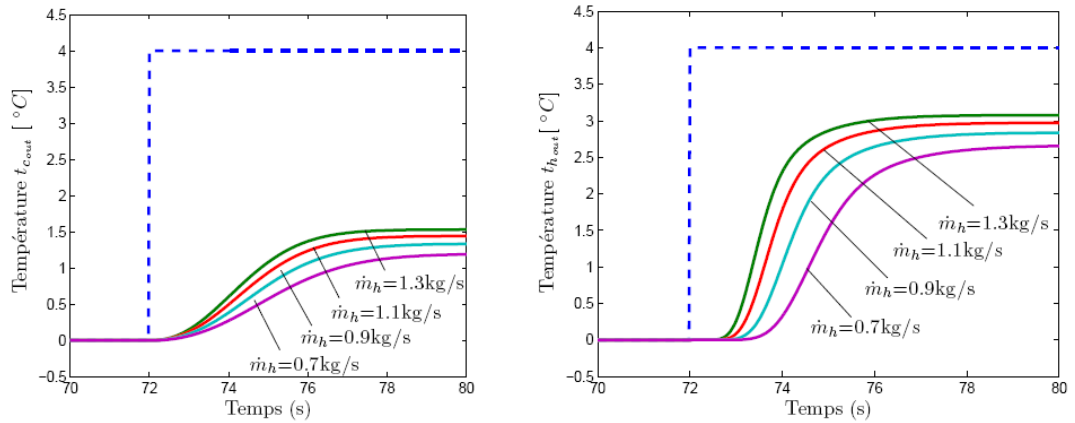


Fig. 4.4 Réponses indicielles de l'échangeur pour un échelon sur $T_{h_{in}} = 4\text{ C}^\circ$, avec $\dot{m}_h$ variable, et $(T_{c_{in}}, \dot{m}_c) = (\text{Cst.}, \text{Cst.})$, [27].

Ces résultats permettent de fixer le choix sur les variables de séquençement $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$.

4.4.5 Détermination de la structure du modèle LPV

Considérons le système d'échange thermique représenté par l'ensemble des entrées $(T_{c_{in}}, T_{h_{in}}, \dot{m}_c, \dot{m}_h)$ et des sorties $(T_{c_{out}}, T_{h_{out}})$ et le vecteur de séquençement $p(\dot{m}_c, \dot{m}_h)$ montré dans la figure suivante :

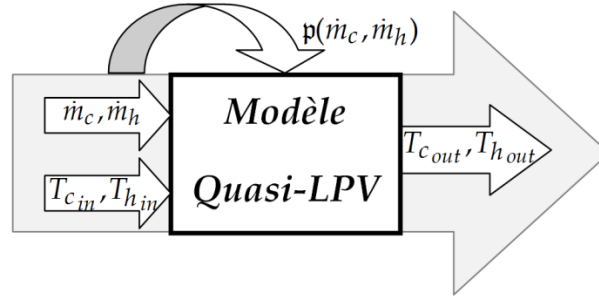


Fig. 4.5. La structure quasi-LPV de l'échangeur thermique.

Pour simplifier la modélisation LPV de l'échangeur, ainsi que la procédure d'identification qui suit, on doit choisir une structure simple qui prend en considération les points suivants:

- les deux régimes de fonctionnement, statique et dynamique, du système.
- une structure MIMO avec une représentation explicite des signaux d'E/S.
- les retards entre $T_{c_{in}}$ et $T_{c_{out}}$, et $T_{h_{in}}$ et $T_{h_{out}}$.
- le comportement linéaire du système autour des points de fonctionnement.
- pour simplifier la complexité de l'algorithme d'identification, on utilise une approche d'identification locale, cela permet de dissocier les phénomènes complexes de l'échangeur, et faciliter leurs traitements avec des méthodes LTI.

De plus, les expériences faites sur l'échangeur montrent que le transfert entre $(T_{c_{in}}, T_{h_{in}})$ et $T_{c_{out}}$, et $(T_{c_{in}}, T_{h_{in}})$ et $T_{h_{out}}$ est de nature variante en fonction des entrées $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$ (prennent les termes LPV), tandis que le transfert entre $(\dot{m}_c, \dot{m}_h)$ et $T_{c_{out}}$, et $(\dot{m}_c, \dot{m}_h)$ et $T_{h_{out}}$ est de nature fixe (prennent les termes LTI).

Donc, on propose un modèle hybride qui contient des termes LPV et des termes LTI. Ce modèle global prend une structure E/S à temps continu comme suit :

$$T_{c_{out}}(t) = (H_{cc}(s, p))T_{c_{in}}(t - \delta_{cc}(p)) + (H_{ch}(s, p))T_{h_{in}}(t - \delta_{ch}(p)) + (G_{cc}(s))\dot{m}_c(t) + (G_{ch}(s))\dot{m}_h(t) \quad (4.10a)$$

$$T_{h_{out}}(t) = (H_{hc}(s, \mathbf{p}))T_{c_{in}}(t - \delta_{hc}(\mathbf{p})) + (H_{hh}(s, \mathbf{p}))T_{h_{in}}(t - \delta_{hh}(\mathbf{p})) + (G_{hc}(s))\dot{m}_c(t) + (G_{hh}(s))\dot{m}_h(t) \quad (4.10b)$$

Où s représente la variable de dérivé, $\delta_{cc}, \delta_{ch}, \delta_{hc}$ et δ_{cc} sont les retards présentés dans (4.7a-d). Il est évident que les fonctions $H_{\bullet\bullet}$ sont de nature LPV car elles représentent une dépendance aux variables de séquençement $\mathbf{p}(\dot{m}_c(t), \dot{m}_h(t))$, tandis que les fonctions $G_{\bullet\bullet}$ sont de nature linéaire mais à paramètres fixes (LTI) car elles représentent des liens directs entre les entrées ($\dot{m}_c, \dot{m}_h$) et les sorties ($T_{c_{out}}, T_{h_{out}}$). Il est aussi important de signaler que le modèle globale (4.10) ne présente pas des termes modélisant le bruit, car ce dernier sera éliminé dans l'étape d'identification des modèles locaux.

La forme matricielle du modèle global (4.10) de l'échangeur de chaleur est représentée par :

$$\begin{bmatrix} T_{c_{out}}(t) \\ T_{h_{out}}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (H_{cc}(\mathbf{p}, s, \delta_{cc})) & (H_{ch}(\mathbf{p}, s, \delta_{ch})) \\ (H_{hc}(\mathbf{p}, s, \delta_{hc})) & (H_{hh}(\mathbf{p}, s, \delta_{hh})) \end{bmatrix}}_{LPV} \begin{bmatrix} T_{c_{in}}(t) \\ T_{h_{in}}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} (G_{cc}(s)) & (G_{ch}(s)) \\ (G_{hc}(s)) & (G_{hh}(s)) \end{bmatrix}}_{LTI} \begin{bmatrix} \dot{m}_c(t) \\ \dot{m}_h(t) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Les fonctions $H_{\bullet\bullet}$ représentent des liens d'E/S directes et leur structure doit être adaptée au comportement du système autour du point de fonctionnement. Cette structure, donc, est une représentation LPV-ES-CT, définie initialement comme suit :

$$H_{\bullet\bullet}(\mathbf{p}, s) = \frac{\sum_{j=0}^{n_b} b_{j\bullet\bullet}(\mathbf{p}) s^j}{\sum_{i=0}^{n_a-1} a_{i\bullet\bullet}(\mathbf{p}) s^i + s^{n_a}}, \quad n_a \geq n_b \quad (4.12)$$

Où $a_{i\bullet\bullet}(\mathbf{p}), b_{j\bullet\bullet}(\mathbf{p})$ sont des fonctions de la variable de séquençement avec une dépendance statique.

La dynamique du système présenté par les formes des réponses indicielles dans la figure 4.4, permet de constater que le modèle adéquat pour représenter ce comportement est un modèle de deuxième ordre, avec $n_a = 2$ et $n_b = 0$, les fonctions de

transfert $G_{\bullet\bullet}$ des modèles LTI prennent la même structure, cela permet d'unifier la procédure d'identification pour cette structure, donc :

$$H_{\bullet\bullet}(p,s) = \frac{b_{0\bullet\bullet}(p)}{s^2 + a_{1\bullet\bullet}(p)s + a_{2\bullet\bullet}(p)}, \quad (4.13)$$

$$G_{\bullet\bullet}(s) = \frac{d_{0\bullet\bullet}}{s^2 + c_{1\bullet\bullet}s + c_{2\bullet\bullet}}, \quad (4.14)$$

Par la suite, l'étape d'identification cherche à évaluer séparément les paramètres des fonctions $H_{\bullet\bullet}$ et $G_{\bullet\bullet}$ de l'équation (4.11), pour chaque point de fonctionnement, en utilisant des techniques d'identification LTI, qui sont maintenant applicables à ce type de représentation.

4.5 Identification du modèle LPV global

Comme nous avons vu, le modèle global est constitué de deux parties, la première est une structure LPV qui prend en considération la dépendance dynamique des signaux d'E/S, ainsi que la dépendance des paramètres du modèle au vecteur de séquençement $p(\dot{m}_c, \dot{m}_h)$, tandis que la deuxième est une structure fixe des modèles LTI, qui représente la dynamique entre les signaux d'entrée ($\dot{m}_c, \dot{m}_h$) et les signaux de sortie du système.

La démarche d'identification pour obtenir le modèle global de l'échangeur est réalisée en trois étapes principales:

➤ Etape 1. Identification de la partie LPV

Dans cette étape on cherche à identifier les paramètres de la représentation LPV E/S du modèle (4.11) reliant les **températures de sortie** aux **températures d'entrée**. Ce modèle est construit en associant les informations fournies par des modèles LTI locaux valables pour des petites variations autour des points de fonctionnement.

Le modèle LPV est obtenu dans ce cas à travers une procédure en quatre étapes :

- On définit l points de fonctionnement dans un intervalle de valeurs minimales et maximales des variables de séquençement $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$. Ainsi, les points de fonctionnement correspondent à des valeurs constantes de $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$.

- Pour chaque point de fonctionnement, on identifie un modèle local LTI à temps continu reliant **les températures de sortie** aux **températures d'entrée**. Les débits massiques étant maintenus constants, et leur influence sur la dynamique des températures de sortie peut être facilement éliminée. L'estimation paramétrique est initialisée par un algorithme à erreur d'équation (EE), puis raffinée par un algorithme à erreur de sortie (OE) (voir la section 2.6 pour le détail). Les paramètres obtenus sont indexés en fonction des variables de séquençement.
- L'interpolation de chaque paramètre des modèles LTI locaux en fonction des variables de séquençement. Cette étape peut être plus ou moins délicate selon la manière dont évolue un paramètre entre chaque point de fonctionnement et autre.
- Finalement, les modèles LPV peuvent être construits en intégrant les fonctions des paramètres dans la structure des modèles LPV, puis une validation du modèle LPV à travers plusieurs tests.

➤ **Etape 2. Identification de la partie LTI**

Connaissant la partie LPV du modèle (4.11), on peut éliminer son influence sur le comportement global du système, le résidu sera donc utilisé pour définir la partie LTI, c'est-à-dire l'ensemble des modèles liant les **températures de sortie** et les **débits massiques**. Autre fois, l'algorithme d'erreur de sortie (OE) est réutilisé pour estimer les paramètres fixes de ces modèles.

➤ **Etape 3. Construction du modèle global et validation.**

Dans cette dernière étape, le modèle global (4.11) est construit, puis la validation de ce modèle se fait par des essais où les 4 entrées varient simultanément.

Les trois étapes précédentes sont résumées dans la figure 4.6 suivante :

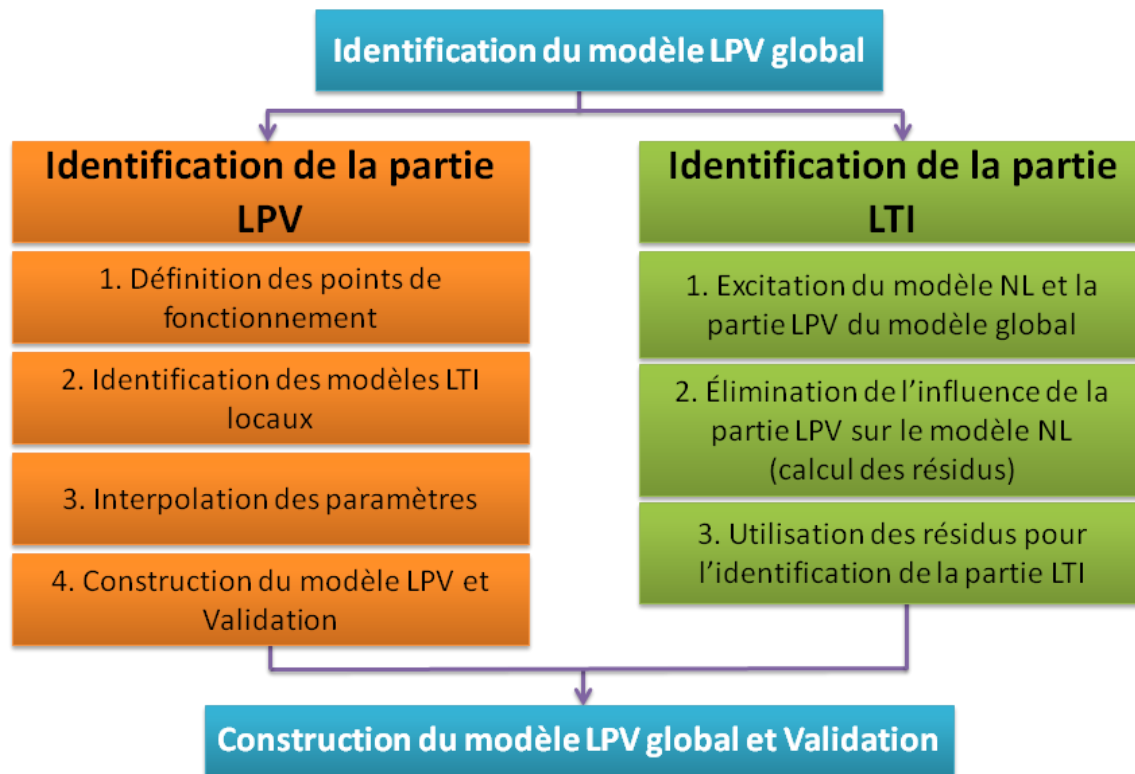


Fig. 4.6 *Etapes d'identification du modèle LPV global.*

Une description détaillée de ces points est illustré dans les sections suivantes.

4.5.1 Etape 1. Identification de la partie LPV

Dans cette phase, on s'intéresse à l'identification des transferts $H_{..}$, du modèle (4.11), reliant les températures de sortie aux températures d'entrée, en commençant par le choix des points de fonctionnement.

4.5.1.1 Choix des points de fonctionnement

Il y a plusieurs possibilités pour choisir les points de fonctionnement. Techniquement, le choix dépend des points limites supérieurs et inférieurs et de la dynamique du système entre ces deux points. Dans le cas où la variation de la dynamique est inconnue, une approche générale pour sélectionner les points de fonctionnement consiste à choisir une grille équidistante entre les valeurs minimales et maximales admissibles pour chaque variable de séquençement, et de prendre toutes les combinaisons possibles. La densité de la grille doit être optimale, la plus petite possible pour réduire le nombre d'expériences d'identification LTI d'une part, et suffisamment élevée pour capturer l'influence des variables de séquençement sur la dynamique du système, d'autre part.

Dans notre cas, un maillage de l'espace de séquençement se fait à l'aide de $l = 49 = 7 \times 7$ points de fonctionnement correspondant à chaque couple de variables de séquençement de valeur constante (voir figure 4.7). Ces points de fonctionnement sont définis en choisissant des valeurs entre les valeurs minimales et maximales pour chaque variable de séquençement, comme suit :

$$\dot{m}_c \in [\dot{m}_c^{(1)} \quad \dots \quad \dot{m}_c^{(q)}] \in [0.7 : 0.1 : 1.3] \text{ kg/s} \quad (4.15a)$$

$$\dot{m}_h \in [\dot{m}_h^{(1)} \quad \dots \quad \dot{m}_h^{(q)}] \in [0.7 : 0.1 : 1.3] \text{ kg/s} \quad (4.15b)$$

Avec $\max q = 49$, et un pas fixe de maillage égal à 0.1.

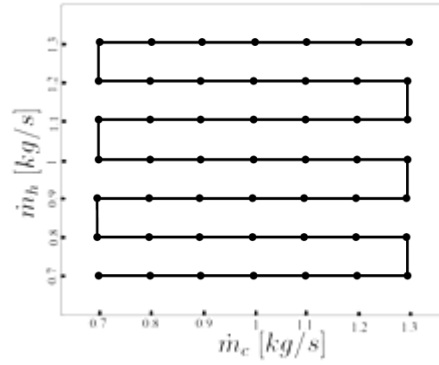


Fig. 4.7 Maillage de l'espace de séquençement par 49 couples $(\dot{m}_c, \dot{m}_h)$.

4.5.1.2 Identification des modèles locaux

Après avoir maintenir les signaux des débits massiques $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$ constants. Il s'ensuit que les résultats suivants sont issus:

- Les retards $\delta_{cc}, \delta_{ch}, \delta_{hc}$ et δ_{hh} , liés aux temps d'écoulement des fluides entre leur entrée et leur sortie, sont constants. Donc ils peuvent être traités sans difficulté après l'acquisition par un décalage temporel des données d'entrée $T_{c_{in}}$ et $T_{h_{in}}$ pour les fonctions de transfert locales correspondantes;
- Les paramètres $a_{i\bullet\bullet}(p)$ et $b_{j\bullet\bullet}(p)$ sont invariants dans le temps (constants) puisque ce sont des fonctions des variables de séquençement figées, ce qui signifie que les méthodes classiques d'identification des systèmes LTI peuvent être utilisées pour identifier les modèles locaux.
- L'influence des termes $G_{\bullet c} \dot{m}_c$ et $G_{\bullet h} \dot{m}_h$ sur la dynamique des sorties est nulle. Cependant, l'influence des entrées $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$ peut être annulée pendant le prétraitement des données incluant l'élimination des composantes continues

Dans cette phase, le modèle LTI local à identifier au point de fonctionnement q s'écrit sous cette forme :

$$\bar{T}_{c_{out}}(t) = (H_{cc}(s))T_{c_{in}d}(t) + (H_{ch}(s))T_{h_{in}d}(t) \quad (4.16a)$$

$$\bar{T}_{h_{out}}(t) = (H_{hc}(s))T_{c_{in}d}(t) + (H_{hh}(s))T_{h_{in}d}(t), \quad (4.16b)$$

Où

- $T_{c_{in}d}$ et $T_{h_{in}d}$ sont les données d'entrée après le traitement des retards et l'élimination des offsets.
- $\bar{T}_{c_{out}}$ et $\bar{T}_{h_{out}}$ sont les données de sortie après traitement (élimination des offset).

Noter que la dépendance explicite de p dans les fonctions $H_{\bullet\bullet}$ est éliminée.

Maintenant, pour chaque point de fonctionnement, les signaux d'entrée choisis lors du processus d'identification sont des signaux de type SBPA, centrés autour de 20°C (côté froid) et de 38°C (côté chaud), avec des variations fréquentielles assez riches par rapport à la dynamique transitoire du système. L'amplitude de l'excitation est choisie faible pour assurer la linéarité des données d'entrée-sortie. Afin de simuler les perturbations rencontrées dans la pratique, et d'évaluer significativement les méthodes d'identification utilisées, les signaux de la température de sortie sont générés avec un bruit additif de type Gaussien, qui s'ajoutent aux sorties, avec un rapport signal/bruit de 20 dB. Un exemple d'une réponse temporelle issue du simulateur de l'échangeur de chaleur est tracée sur la figure 4.8 suivante.

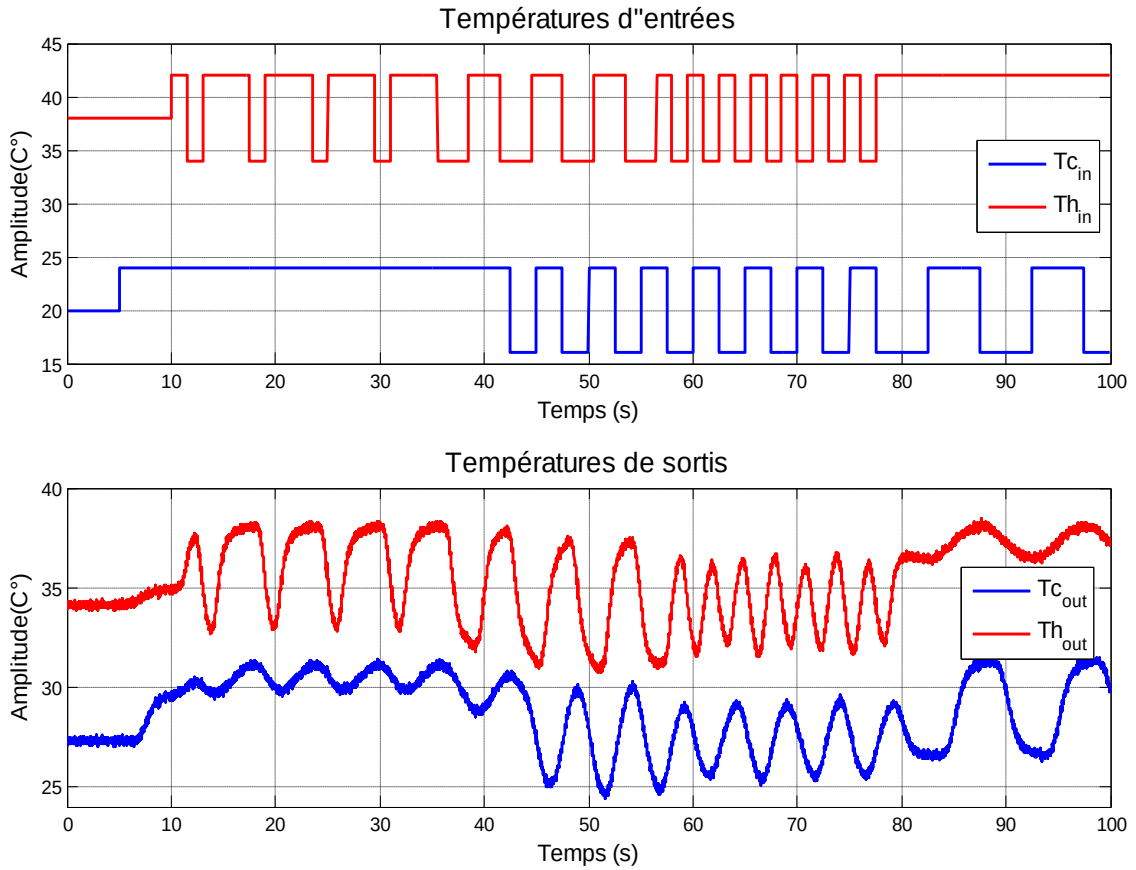


Fig. 4.8 Réponse temporelle de l'échangeur de chaleur pour
 $\dot{m}_c = 0.7\text{kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.3\text{kg/s}$

La période d'échantillonnage est fixée à $T_e = 10\text{ms}$ et la durée de chaque expérience est de 100s.

La démarche de la procédure d'identification commence par un traitement des retards dans chaque point de fonctionnement, car leur effet est important et valent parfois plus d'une seconde pour certains points de fonctionnements, alors cet effet n'est plus négligeable à l'égard de la dynamique de l'échangeur. Le traitement des retards est réalisé par décalage temporel des données d'entrée $T_{c_{in}}$ et $T_{h_{in}}$ en calculant les valeurs de δ_{cc} , δ_{ch} , δ_{hc} et δ_{hh} respectivement (voir la section 4.4.3).

Maintenant, l'estimation des 49 modèles LTI locaux à temps continu reliant les températures de sortie aux températures d'entrée est prête à être réalisée. L'estimation paramétrique est initialisée par un algorithme de type erreur d'équation (EE) en utilisant la méthode des moindres carrées, puis elle sera raffinée par une autre méthode de type erreur de sortie (OE), cette méthode est basée sur

une technique de programmation non linéaire, utilisant l'algorithme de *Levenberg-Marquardt*.

Suivant cette méthodologie, les résultats sont très satisfaisants. A titre d'exemple, la figure 4.9 présente les sorties de température de l'échangeur et celles des modèles estimés au point $\dot{m}_c = 0.9\text{kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.1\text{kg/s}$. On constate une bonne concordance entre les différentes courbes. Afin de donner une vue claire sur la consistance de la sortie estimée, la sortie réelle de l'échangeur est affichée à la place de la sortie bruitée utilisée dans la procédure d'identification.

A l'issue de cette phase d'identification, on dispose 3×49 paramètres pour chaque modèle $H_{..}(s)$. Par exemple, pour la fonction de transfert $H_{ch}(s)$, nous avons 49×3 paramètres pour $(b_{1ch}(p), a_{1ch}(p), a_{2ch}(p))$. La figure 4.10 montre l'évolution de ces paramètres dans l'espace de séquençement pour les 49 points de fonctionnement considérés. Ces paramètres sont indexés en fonction de q , c'est-à-dire en fonction du couple des variables de séquençement $(\dot{m}_c, \dot{m}_h)$.

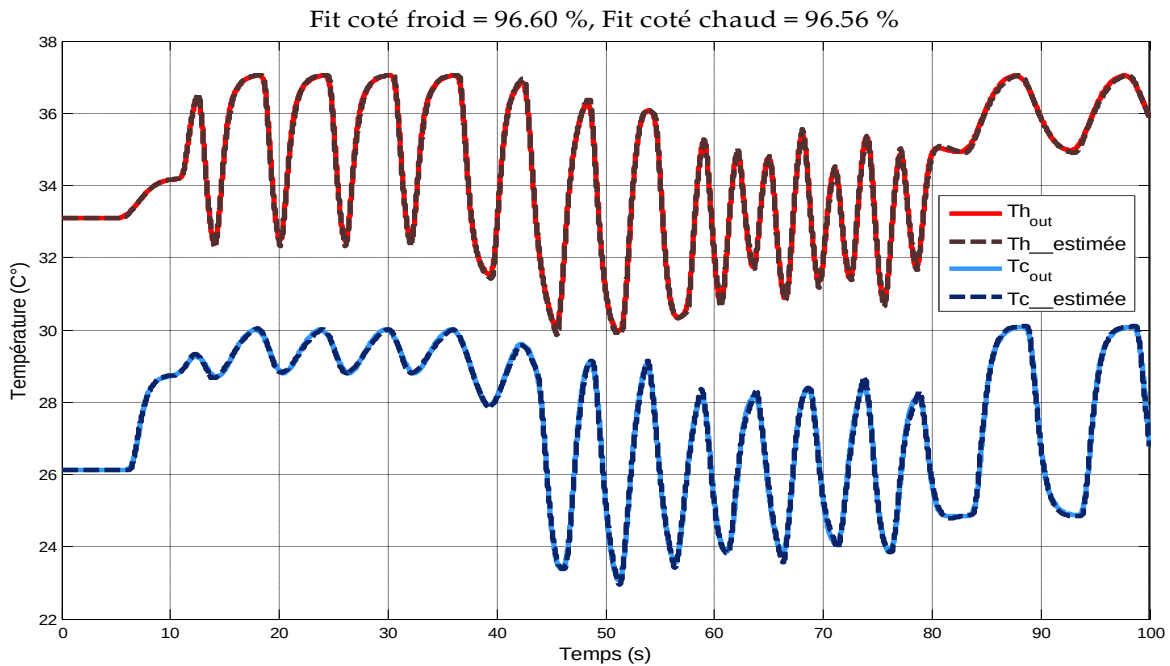


Fig. 4.9 Sorties du système (non bruitées) et du modèle pour $\dot{m}_c = 0.9\text{kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.1\text{kg/s}$.

L'opérateur *Fit* est un bon critère pour juger la qualité des modèles obtenus, ainsi la consistance des méthodes d'identification utilisées, cet opérateur est défini comme suit [52] :

$$Fit(y^*, \hat{y}) = \max \left\{ 1 - \frac{\|y^* - \hat{y}\|}{\|y^* - \text{mean}(y^*)\|}, 0 \right\} \times 100\% \quad (4.17)$$

Où y^* représente le signal de température de sortie sans bruit (froide ou chaude) de l'échangeur réel, et $\hat{y}$ la sortie de l'estimateur. En appliquant ce critère sur toutes les sorties estimées, on obtient des valeurs du *Fit* variant entre 95% et 97% ce qui signifie que l'ensemble des modèles locaux est bien identifié.

Remarque 4.3 : Il est convenable de signaler que l'identification des modèles locaux se fait à travers des signaux de sortie bruités (avec un rapport de SNR=20dB), pour simuler l'environnement expérimental de l'échangeur, tandis que le paramètre *Fit* est appliqué au signal de sortie original sans bruit. Comme ça, on donne plus de crédibilité aux résultats obtenus et on prouve en même temps, la robustesse de la méthode d'identification adoptée vis-à-vis le bruit de mesure.

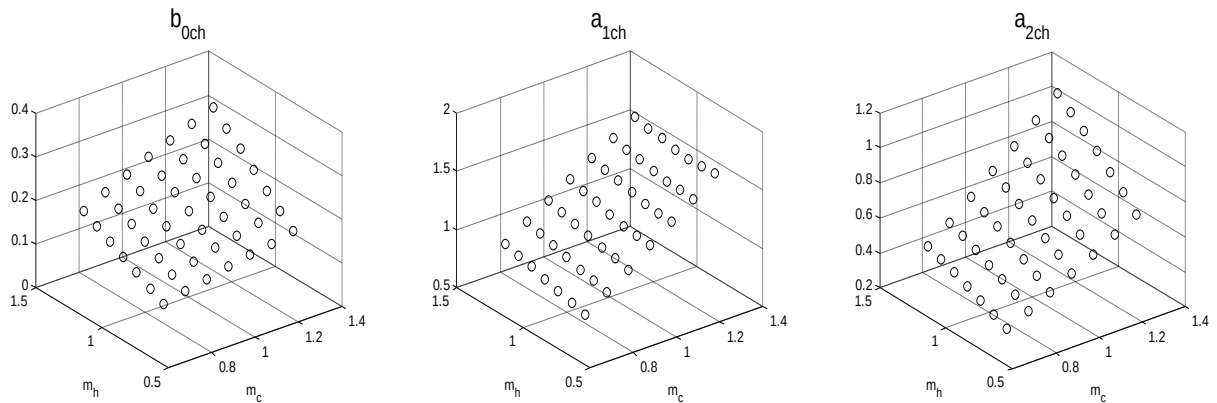


Fig. 4.10 Répartition des paramètres locaux de la fonction H_{ch} dans l'espace de séquencement pour les 49 points de fonctionnement.

Remarque 4.4 : à la fin de cette étape, quatre ensembles de 49 fonctions de transfert de second ordre sont disponibles, c'est-à-dire $4 \times 49 \times 3 = 588$ paramètres locaux sont identifiés.

La stabilité des modèles locaux est vérifiée à travers l'emplacement des pôles de ces derniers et la figure suivante montre cet emplacement:

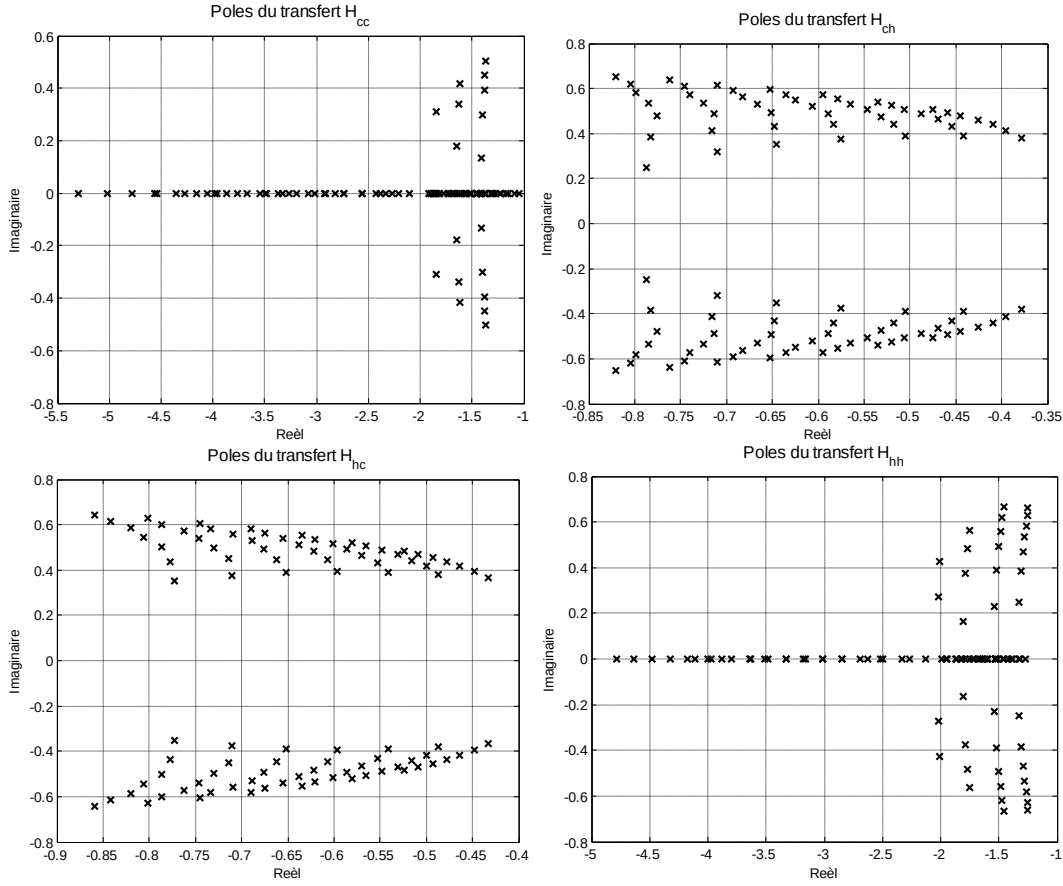


Fig. 4.11 Emplacement des pôles des modèles locaux H_{cc} , H_{ch} , H_{hc} et H_{hh} .

L'étape suivante consiste à interpoler l'évolution de ces paramètres en fonction des variables de séquençement $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$.

4.5.1.3 Interpolation des paramètres

Choisir une fonction et construire une courbe à partir d'un nombre fini de données c'est l'opération principale de l'interpolation. Dans cette phase, l'interpolation des paramètres des modèles locaux, ainsi que les retards, se font par deux méthodes : l'interpolation polynomiale et l'interpolation floue.

a) Interpolation polynomiale :

La variation de chaque paramètre est modélisée dans un espace 3D des deux variables de séquençement. Chaque paramètre est défini par le produit de deux polynômes d'ordre (n_c, n_h) :

$$\gamma_{\lambda..}(p) = \left(\sum_{\kappa=0}^{n_c} \beta_{\kappa..} \dot{m}_c^{\kappa} \right) \times \left(\sum_{\iota=0}^{n_h} v_{\iota..} \dot{m}_h^{\iota} \right) \quad (4.18)$$

avec $\gamma_{\lambda,\bullet\bullet}(\mathbf{p}) \in \{a_{i,\bullet\bullet}(\mathbf{p}), b_{j,\bullet\bullet}(\mathbf{p})\}$, $\beta_{\kappa,\bullet\bullet}, v_{\iota,\bullet\bullet} \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \{i, j\}$, $\kappa \in [0, n_c]$, $\iota \in [0, n_h]$, $\bullet\bullet \in \{c, h\}$

Les courbes des fonctions paramétriques $a_{i,\bullet\bullet}(\mathbf{p})$, $b_{j,\bullet\bullet}(\mathbf{p})$ suivent des formes paraboliques. la fonction d'interpolation la plus adéquate est une fonction polynomiale d'ordre 2. Donc on pose $(n_c, n_h) = (2, 2)$. la variable générique $\gamma_{\lambda,\bullet\bullet}(\mathbf{p})$ de l'équation (4.18) dans ce cas s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma_{\lambda,\bullet\bullet}(\mathbf{p}) &= (\beta_{0,\bullet\bullet} + \beta_{1,\bullet\bullet} \dot{m}_c + \beta_{2,\bullet\bullet} \dot{m}_c^2) \times (v_{0,\bullet\bullet} + v_{1,\bullet\bullet} \dot{m}_h + v_{2,\bullet\bullet} \dot{m}_h^2) \\ &= \alpha_{0,\bullet\bullet} + \alpha_{1,\bullet\bullet} \dot{m}_c + \alpha_{2,\bullet\bullet} \dot{m}_c^2 + \alpha_{3,\bullet\bullet} \dot{m}_h + \alpha_{4,\bullet\bullet} \dot{m}_h^2 + \alpha_{5,\bullet\bullet} \dot{m}_c \dot{m}_h \\ &\quad + \alpha_{6,\bullet\bullet} \dot{m}_c^2 \dot{m}_h + \alpha_{7,\bullet\bullet} \dot{m}_c \dot{m}_h^2 + \alpha_{8,\bullet\bullet} \dot{m}_c^2 \dot{m}_h^2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

Cette structure polynomiale générique des paramètres présente une similitude avec les expressions des coefficients physiques du système τ_c , τ_h et U (voir les équations (4.8a-c)), alors ce choix semble être approprié.

Avoir accès aux 49 valeurs de $\gamma_{\lambda,\bullet\bullet}(\mathbf{p})$, chacun correspondant à un couple $(\dot{m}_c, \dot{m}_h) \in [\dot{m}_c^{(1)} \dots \dot{m}_c^{(q)}] \times [\dot{m}_h^{(1)} \dots \dot{m}_h^{(q)}]$, les coefficients $\hat{\alpha}_k$, $k \in [0, 8]$ peuvent être estimés à partir d'une procédure d'optimisation linéaire.

➤ Optimisation paramétrique

Pour minimiser l'erreur entre les estimations des paramètres $a_{i,\bullet\bullet}(\mathbf{p})$, $b_{j,\bullet\bullet}(\mathbf{p})$ des modèles locaux LTI et les fonctions polynomiales $\gamma_{\lambda,\bullet\bullet}(\mathbf{p})$, en utilisant la méthode des moindres carrés simples. Noter que dans ce niveau, l'estimation n'est pas affectée par le signal de bruit car les valeurs des paramètres représentent les résultats finaux de la phase d'estimation locale. Pour définir les coefficients inconnus $\hat{\alpha}_k$ pour chaque polynôme, une procédure d'optimisation linéaire est utilisée.

Considérons les fonctions $\gamma_{\lambda,\bullet\bullet}(\mathbf{p})$ données sous forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\lambda,\bullet\bullet}^{(1)}(\mathbf{p}) \\ \vdots \\ \gamma_{\lambda,\bullet\bullet}^{(q)}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dot{m}_c^{(1)2} \dot{m}_h^{(1)} & \dot{m}_c^{(1)2} \dot{m}_h^{(1)2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dot{m}_c^{(q)2} \dot{m}_h^{(q)} & \dot{m}_c^{(q)2} \dot{m}_h^{(q)2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_8 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Par une technique de moindres carrés, on peut estimer sans biais les coefficients $\hat{\alpha}_k$. Les paramètres $a_{i\bullet\bullet}(\mathbf{p})$, $b_{j\bullet\bullet}(\mathbf{p})$ des modèles locaux sont groupés comme suit :

$$\{a_{i\bullet\bullet}(\mathbf{p}), b_{j\bullet\bullet}(\mathbf{p})\} \in \left\{ \left[a_{i\bullet\bullet}^{(1)}(\mathbf{p}) \dots a_{i\bullet\bullet}^{(q)}(\mathbf{p}) \right], \left[b_{j\bullet\bullet}^{(1)}(\mathbf{p}) \dots b_{j\bullet\bullet}^{(q)}(\mathbf{p}) \right] \right\}, \quad (4.21)$$

La figure 4.12 montre les résultats d'interpolation obtenus sur les paramètres $(b_{0ch}(\mathbf{p}), a_{1ch}(\mathbf{p}), a_{2ch}(\mathbf{p}))$. On constate une bonne adéquation entre les paramètres estimés et ceux interpolés.

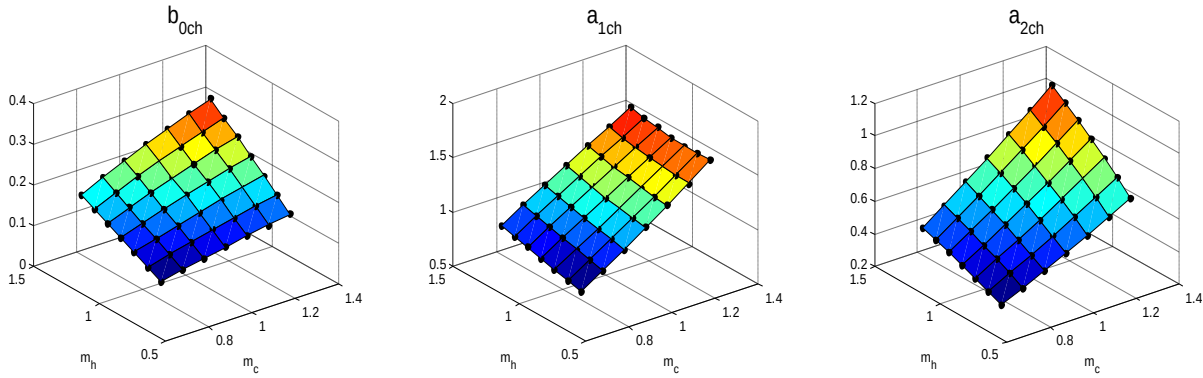


Fig. 4.12 Interpolation polynomiale des paramètres $b_{0ch}(\mathbf{p})$, $a_{1ch}(\mathbf{p})$, $a_{2ch}(\mathbf{p})$

Le paramètre *Fit*, montre la qualité d'interpolation polynomiale par la méthode des moindres carrés pour l'ensemble des fonctions $(b_{0\bullet\bullet}(\mathbf{p}), a_{1\bullet\bullet}(\mathbf{p}), a_{2\bullet\bullet}(\mathbf{p}))$ des transferts $H_{\bullet\bullet}$ est présentée dans le tableau suivant :

	b_{0cc}	a_{1cc}	a_{2cc}	b_{0ch}	a_{1ch}	a_{2ch}	b_{0hc}	a_{1hc}	a_{2hc}	b_{0hh}	a_{1hh}	a_{2hh}
Fit(%)	97.14	96.63	97.02	98.97	98.09	99.22	98.98	98.26	99.23	98.08	97.14	97.95

Tab. 4.1. Valeurs du *Fit* pour l'interpolation polynomiale des différents paramètres des fonctions $H_{\bullet\bullet}$

	δ_{cc}	δ_{ch}	δ_{hc}	δ_{hh}
Fit(%)	97.54	96.60	96.66	96.61

Tab. 4.2. Valeurs du *Fit* pour l'interpolation polynomiale des fonctions de retards δ_{ch} , δ_{cc} , δ_{hc} et δ_{hh}

b) Interpolation Floue

L'approche floue, qui est liée directement au raisonnement humain, offre un cadre systématique universel pour la modélisation et l'approximation des systèmes. Elle permet de modéliser des fonctions non linéaires de complexité arbitraire [53], elle représente ainsi un outil efficace pour la conception des systèmes intelligents. Le concept de la modélisation floue a trouvé ses origines dans la théorie des ensembles flous proposés en 1965 par Zadeh [54]. Cette théorie a introduit une manière de formaliser les méthodes de raisonnement humain en utilisant des bases de règles et variables linguistiques pour la représentation de connaissances. Dans cette structure de modélisation, on peut tirer profit de différents types de connaissance, telle que l'expertise sur certains points limités, les modèles locaux à validité restreinte et ainsi de nombreuses données entrées-sorties sur le procédé.

Les approximateurs flous sont des approximateurs universels des fonctions non linéaires. L'intégration de tel type de système dans une structure LPV (comme des fonctions des paramètres), donne cette dernière une capacité étonnante de représentation des systèmes non linéaires, tout en réservant la structure linéaire des systèmes LPV. D'une autre part, des propriétés attirantes dans les systèmes à inférence floue générés par des réseaux de neurones adaptatifs [55], [56] sont exploitées pour une interpolation floue optimale, cette structure est appelée ANFIS (Adaptive Network-based Fuzzy Inference System). Cette structure donne une aptitude d'interpolation universelle pour un ensemble réduit de fonctions d'appartenance d'un système flou de type Takagi-Sugeno (T-S).

Dans la structure d'identification ANFIS, les paramètres d'un système flou sont estimés à partir d'une procédure d'apprentissage basée sur des réseaux de neurones artificiels avec une structure adaptative des nœuds. Cette procédure de modélisation cherche, à travers l'ajustement des paramètres des fonctions floues avec un mécanisme d'inférence de structure fixe, à minimiser la fonction d'erreur d'estimation. La référence [56] contient plus de détails sur la structure ANFIS ainsi que les méthodes d'ajustement des paramètres du système flou.

Chaque vecteur de paramètres des modèles locaux est formulé de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_c^{(1)} & \dot{m}_h^{(1)} & \gamma_{\lambda..}^{(1)}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{m}_c^{(q)} & \dot{m}_h^{(q)} & \gamma_{\lambda..}^{(q)}(p) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Puis, dans le Toolbox ANFIS de Matlab, la procédure d'estimation ANFIS détermine les valeurs optimales du vecteur de paramètres de l'approximateur flou $[\hat{v}_0 \ \dots \ \hat{v}_n]$. A la fin de cette procédure, on obtient un système d'inférence flou pour chaque paramètre variant. Les valeurs de paramètre *Fit* (Tableau 4.3 et 4.4) montrent l'avantage d'utilisation de ce type de système pour l'interpolation des paramètres des modèles LPV, ainsi que les fonctions de retards δ_{ch} , δ_{cc} , δ_{hc} et δ_{hh} .

	$b0cc$	$a1cc$	$a2cc$	$b0ch$	$a1ch$	$a2ch$	$b0hc$	$a1hc$	$a2hc$	$b0hh$	$a1hh$	$a2hh$
Fit(%)	99.95	99.92	99.95	98.93	99.93	99.93	99.96	99.94	99.92	99.07	98.29	98.93

Tab. 4.3. Valeurs du Fit pour l'interpolation Floue (3×2 fonctions d'appartenance) des différents paramètres des fonctions $H_{..}$

	δ_{cc}	δ_{ch}	δ_{hc}	δ_{hh}
Fit(%)	99.95	99.44	99.36	99.28

Tab. 4.4 Valeurs du Fit pour l'interpolation Floue (2×1 fonctions d'appartenance) des fonctions de retards δ_{ch} , δ_{cc} , δ_{hc} et δ_{hh}

Remarque 4.5 : la méthode d'interpolation floue offre une approximation proche de l'idéal, donc on va l'adopter dans le reste du travail afin d'éviter de continuer le parcours sur deux axes. Dans le cas où les deux méthodes donnent deux résultats différents, on va signaler cette différence à sa position.

4.5.1.4 Construction du modèle LPV et validation

Jusqu'à cette phase, l'ensemble des modèles LTI locaux pour chaque point de fonctionnement est identifié, les ensembles des paramètres correspondants sont interpolés, alors la propriété linéaire de nature variante pour l'échangeur de chaleur peut prendre une forme LPV. Les figures 4.13 et 4.14 montrent la modélisation de cette partie dans l'environnement de Simulink.

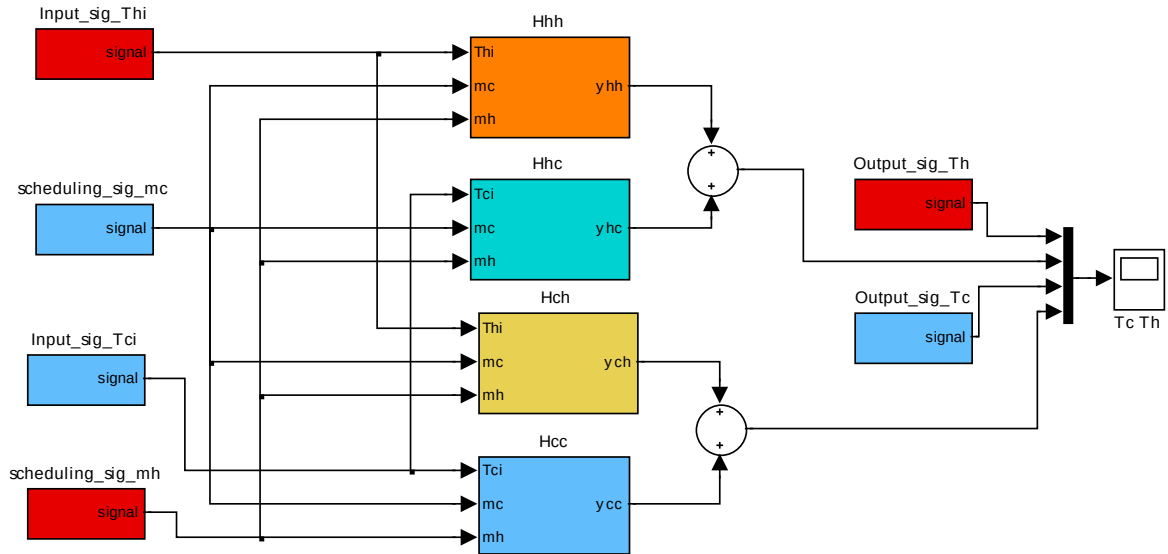


Fig. 4.13 Modélisation de la partie LPV de l'échangeur.

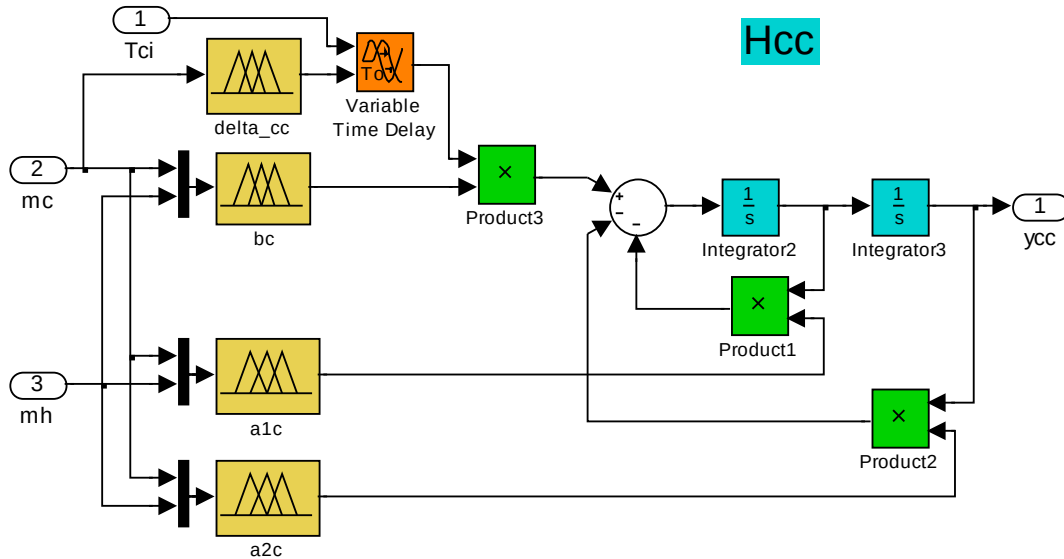


Fig. 4.14 Modélisation de la fonction Hcc (interpolation floue)

Pour démontrer les capacités de cette représentation LPV, quatre tests de validation pour différentes situations vont être analysés.

a) Validation croisée (LPV, LTI)

Un premier test montre la capacité du système LPV de simuler un comportement figé d'un système LTI. Pour cela on utilise des valeurs des entrées de débits massiques constants similaires à celles utilisées dans la phase d'estimation locale. La figure 4.15 présente un test de validation pour les sorties du modèle LPV pour $\dot{m}_c = 0.8 \text{ kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.1 \text{ kg/s}$, comparées avec celles de l'échangeur. Noter que la sortie réelle de l'échangeur est affichée à la place de la sortie bruitée.

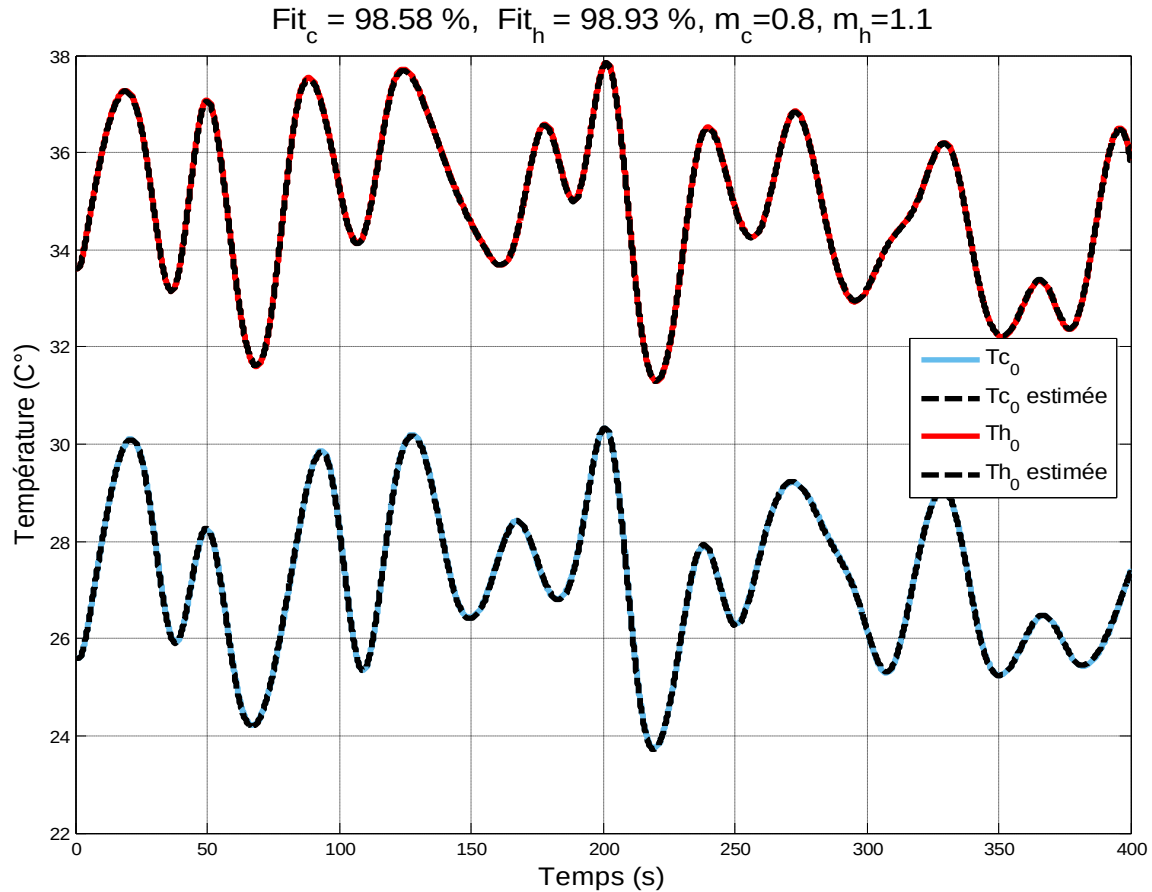


Fig. 4.15 Validation croisée du modèle LPV estimé pour

$\dot{m}_c = 0.8 \text{ kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.1 \text{ kg/s}$.

b) Validation du modèle LPV dans la zone d'estimation

Un deuxième test montre la capacité du système LPV de formuler un comportement non estimé, pour cela on utilise des valeurs des entrées de débits massiques constants différents de celles utilisées pour la phase d'estimation. La figure 4.16 présente un test pour $\dot{m}_c = 0.88 \text{ kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.13 \text{ kg/s}$.

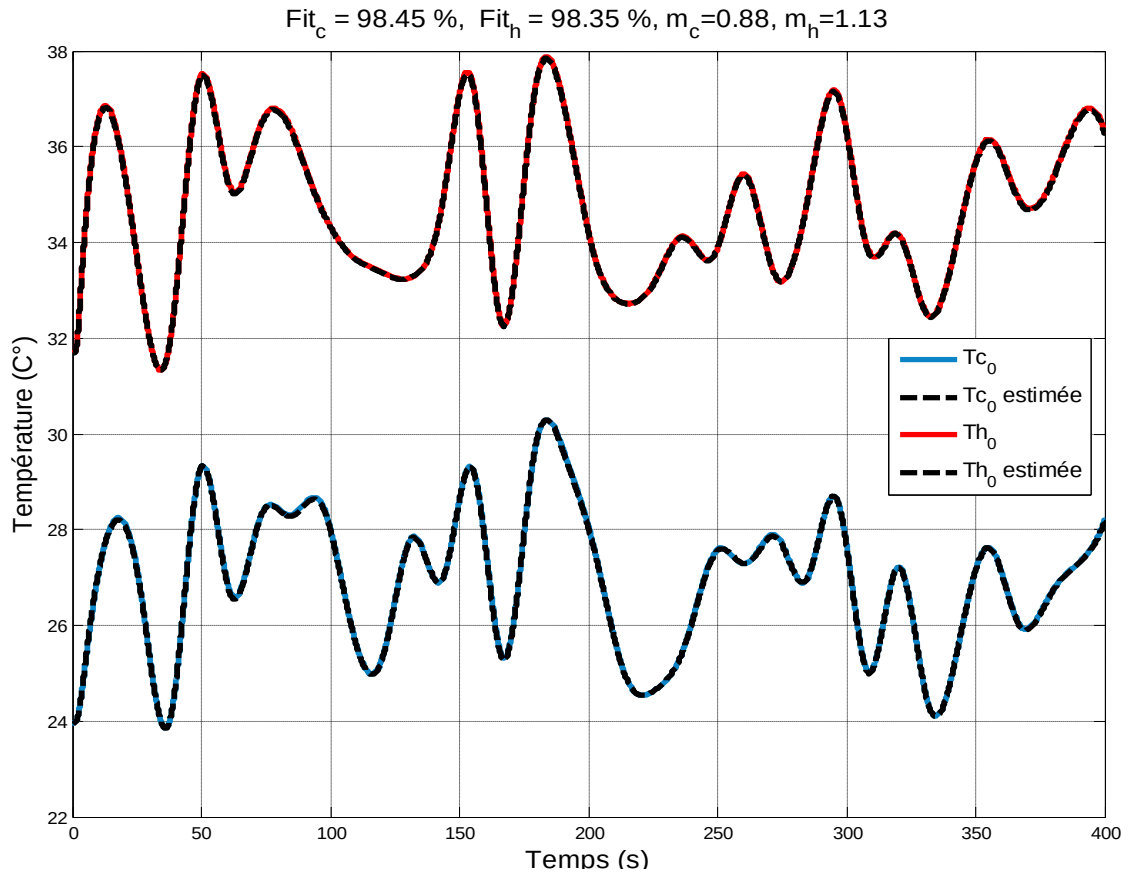


Fig. 4.16. Validation du modèle LPV estimé dans la zone interpolée
pour $\dot{m}_c = 0.88 \text{ kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.13 \text{ kg/s}$.

c) Validation du modèle LPV hors de la zone d'estimation

Dans le troisième test on donne des valeurs hors des limites admissibles (supérieures et inférieures) pour les débits massiques $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$. Ce test donne deux résultats différents. Cette différence est due à la méthode d'interpolation des paramètres utilisés. On remarque :

- Pour la méthode d'interpolation polynomiale, le **premier test** est effectué pour $\dot{m}_c = 0.4 \text{ kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.6 \text{ kg/s}$. Ce test montre que, pour la sortie du côté froid, le modèle LPV génère le comportement du système de l'échangeur sans influence observable, tandis que la sortie du côté chaud présente une variance avec une valeur du *Fit* proportionnellement faible. On constate que pour les deux sorties, le modèle reste dans sa zone de stabilité. La figure 4.17 illustre bien ces deux cas.

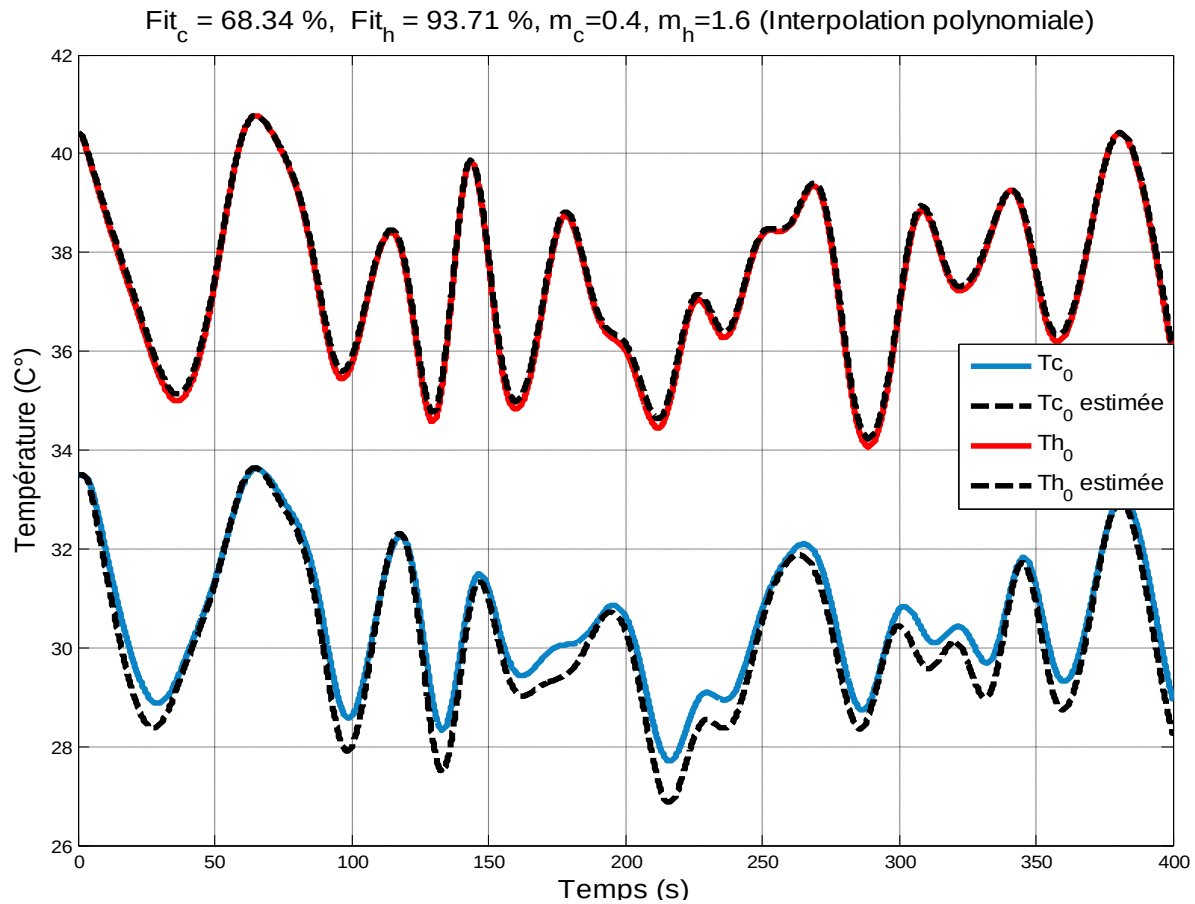


Fig. 4.17. Validation du modèle LPV estimé par interpolation polynomiale

pour $\dot{m}_c = 0.4 \text{ kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.6 \text{ kg/s}$.

- Pour la méthode d'interpolation floue, le test est effectué ainsi pour $\dot{m}_c = 0.4 \text{ kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.6 \text{ kg/s}$. Ce test montre que, pour la sortie du côté chaud, le modèle LPV génère encore le comportement du système de l'échangeur sans influence observable, tandis que la sortie du côté froid présente une divergence totale au comportement de l'échangeur. La valeur du *Fit* est nulle ce qui signifie une incohérence totale. On constate que dans le premier cas, le modèle reste dans sa zone de stabilité, tandis que dans le deuxième cas le modèle devient instable. La figure 4.18 illustre ces deux cas.

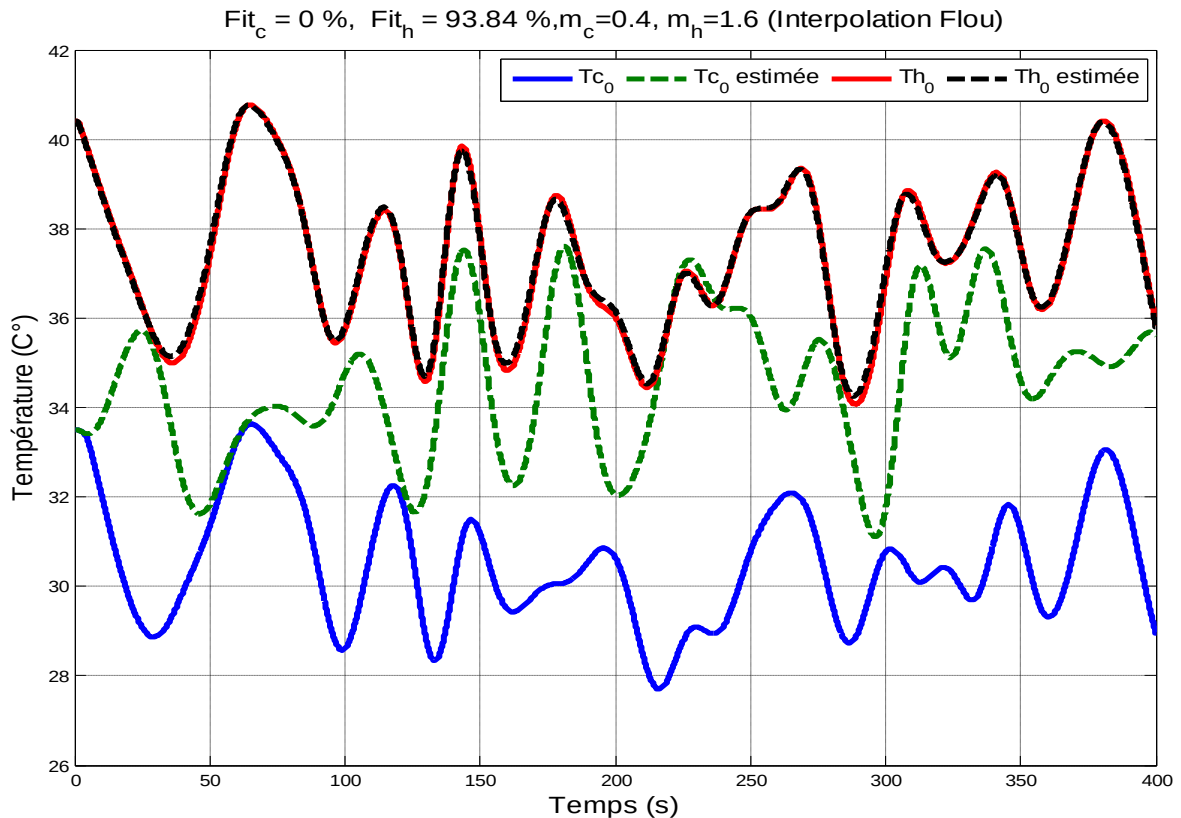


Fig. 4.18. Validation du modèle LPV estimé par interpolation Floue

pour $\dot{m}_c = 0.4 \text{ kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.6 \text{ kg/s}$.

Conclusion : on peut conclure dans ce cas où le comportement prédit du modèle LPV est généré dans la zone non estimée dans l'espace de séquençement, que la méthode d'interpolation polynomiale présente l'avantage, par rapport à la méthode d'interpolation floue, d'être non divergente, ce qui réduit les risques de son utilisation dans des situations pratiques. A l'opposé, la méthode d'interpolation floue donne une bonne précision dans l'espace d'estimation, mais sa capacité d'interpolation chute brusquement dans les bornes supérieures et inférieures, ce qui représente une limitation de cette méthode dans ces zones. Cette conclusion montre que dans certains cas l'utilisation des méthodes classiques simples est plus convenable que l'utilisation des méthodes avancées et qui coutent plus.

d) Validation du modèle LPV avec une variation dynamique dans les variables de séquençement.

Dans ce dernier test, on va voir le comportement du modèle LPV devant une variation dynamique dans les variables de séquençement. Pour ce but, on excite le modèle LPV par les signaux de séquençement tracés sur la figure 4.19, les résultats de

test sont présentés dans la figure 4.20. Noter que le *Fit* est significativement faible après le saut.

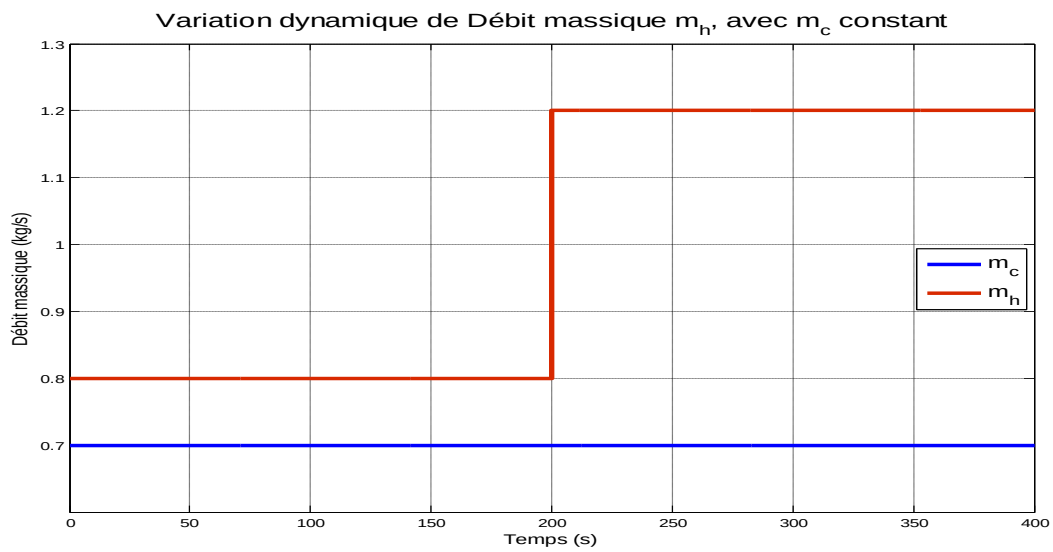


Fig. 4.19 échelon dans l'entrée du débit massique $\dot{m}_h$ avec $\dot{m}_c$ maintenu constant.

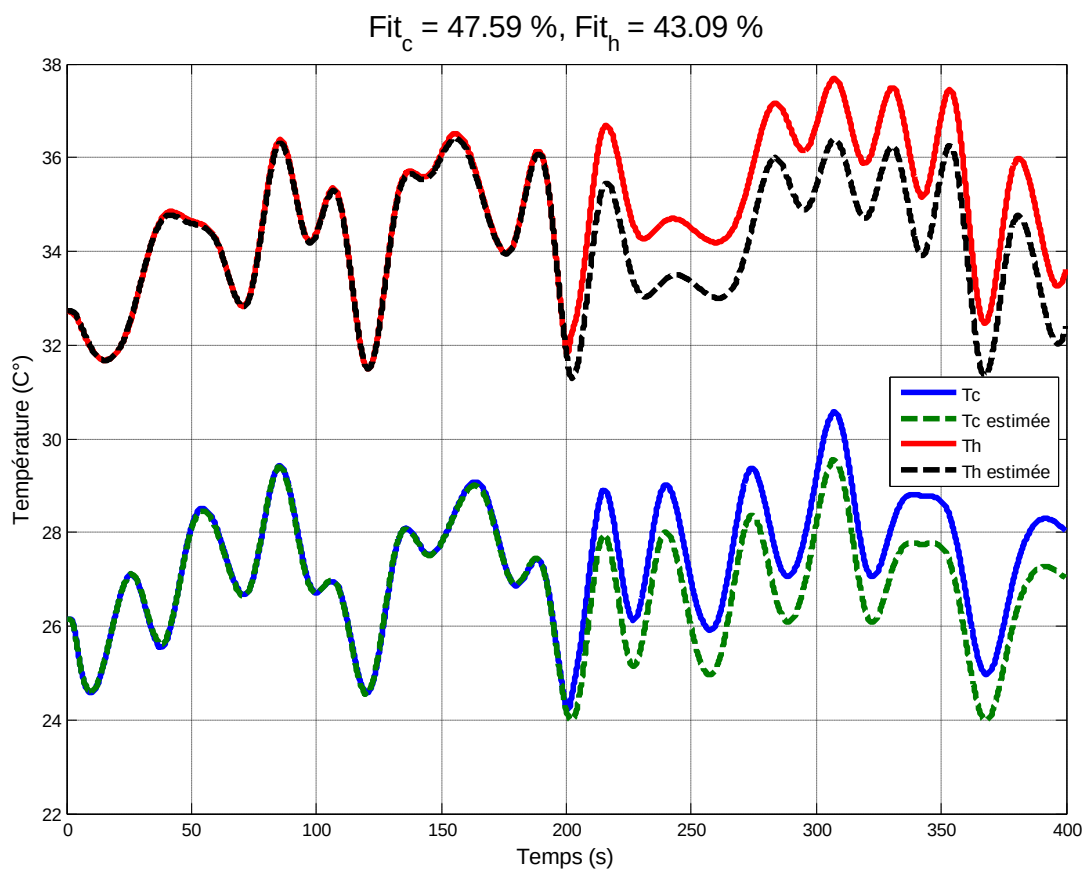


Fig. 4.20. Validation du modèle LPV estimé pour $\dot{m}_c = 0.7\text{kg/s}$ et
($\dot{m}_h = 0.8\text{kg/s}$ pour $t < 200\text{s}$ et $\dot{m}_h = 1.2\text{kg/s}$ pour $t > 200\text{s}$).

Ce dernier test montre bien que le comportement global de l'échangeur ne peut pas être pris par les termes LPV seuls, ce qui signifie que l'utilisation des termes LTI est nécessaire pour approximer le comportement global de l'échangeur. Ce test justifie la structure du modèle global (4.11).

4.5.2 Etape 2. Identification de la partie LTI

Dans cette étape, on doit estimer les paramètres des modèles LTI $G_{..}$ à représentation continue reliant les **températures de sortie** $\bar{T}_{c_{out}}$ et $\bar{T}_{h_{out}}$ aux **débits massiques d'entrée** $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$. Pour cela 3 étapes sont réalisées comme suit :

1. On doit simuler les sorties du modèle LPV MIMO (estimé dans la section précédente) en excitant les débits massiques (figure 4.21), pour obtenir les sorties suivantes (figure 4.22) :

$$\tilde{T}_{c_{out}}(t) = (\hat{H}_{cc}(\mathbf{p}, s, \delta_{cc}))T_{c_{in}}(t) + (\hat{H}_{ch}(\mathbf{p}, s, \delta_{ch}))T_{h_{in}}(t) \quad (4.23a)$$

$$\tilde{T}_{h_{out}}(t) = (\hat{H}_{hc}(\mathbf{p}, s, \delta_{hc}))T_{c_{in}}(t) + (\hat{H}_{hh}(\mathbf{p}, s, \delta_{hh}))T_{h_{in}}(t) \quad (4.23b)$$

2. On élimine ces sorties simulées de celles obtenues expérimentalement sur le système, on obtient les deux résidus suivants :

$$T'_{c_{out}}(t) = T_{c_{out}}(t) - \tilde{T}_{c_{out}}(t) \quad (4.24a)$$

$$T'_{h_{out}}(t) = T_{h_{out}}(t) - \tilde{T}_{h_{out}}(t) \quad (4.24b)$$

3. Ces résidus sont utilisés alors pour identifier les fonctions de transfert thermique LTI $G_{..}(s)$ en utilisant l'algorithme de *Levenberg-Marquardt*, et en se basant sur ce modèle :

$$T'_{c_{out}}(t) = (G_{cc}(s))\dot{m}_c(t) + (G_{ch}(s))\dot{m}_h(t) \quad (4.25a)$$

$$T'_{h_{out}}(t) = (G_{hc}(s))\dot{m}_c(t) + (G_{hh}(s))\dot{m}_h(t) \quad (4.25b)$$

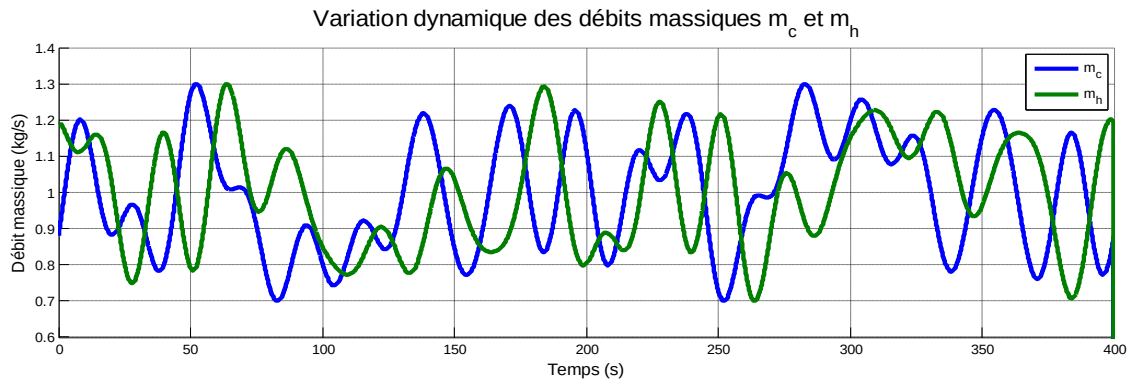


Fig. 4.21. Excitation du modèle LPV par $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$ variables.

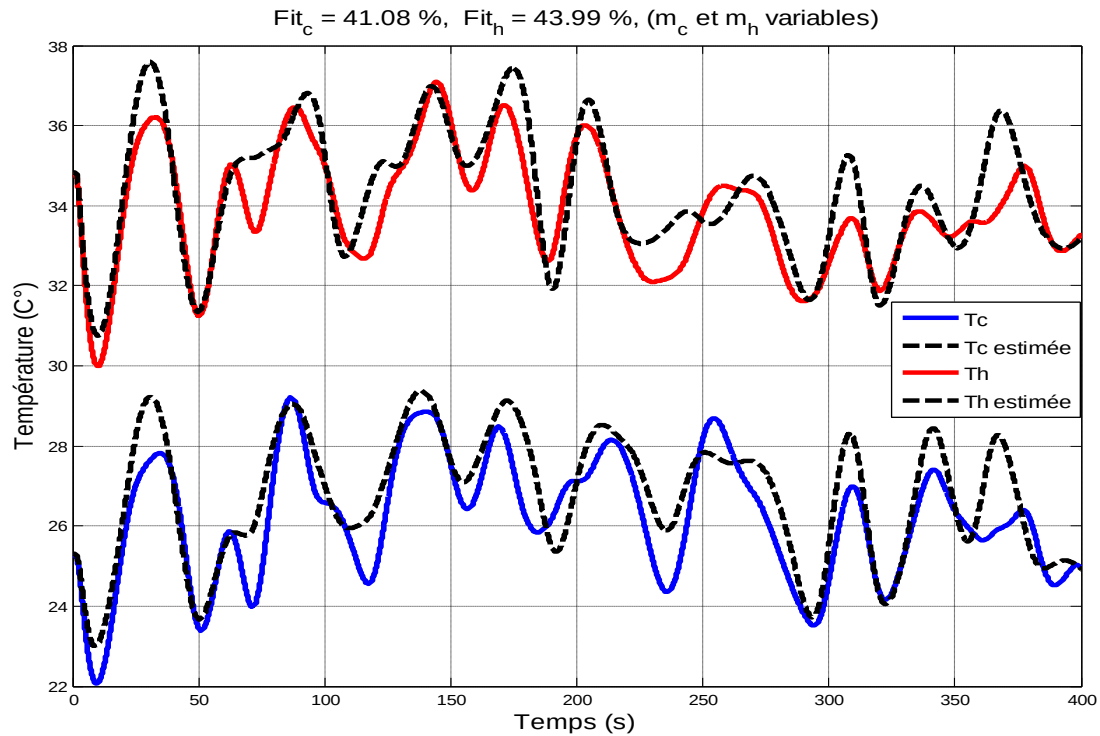


Fig. 4.22. Réponse du modèle LPV estimé pour $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$ variables.

L'estimation des fonctions $G_{..}(s)$ donne les résultats de la figure 4.23 suivante :

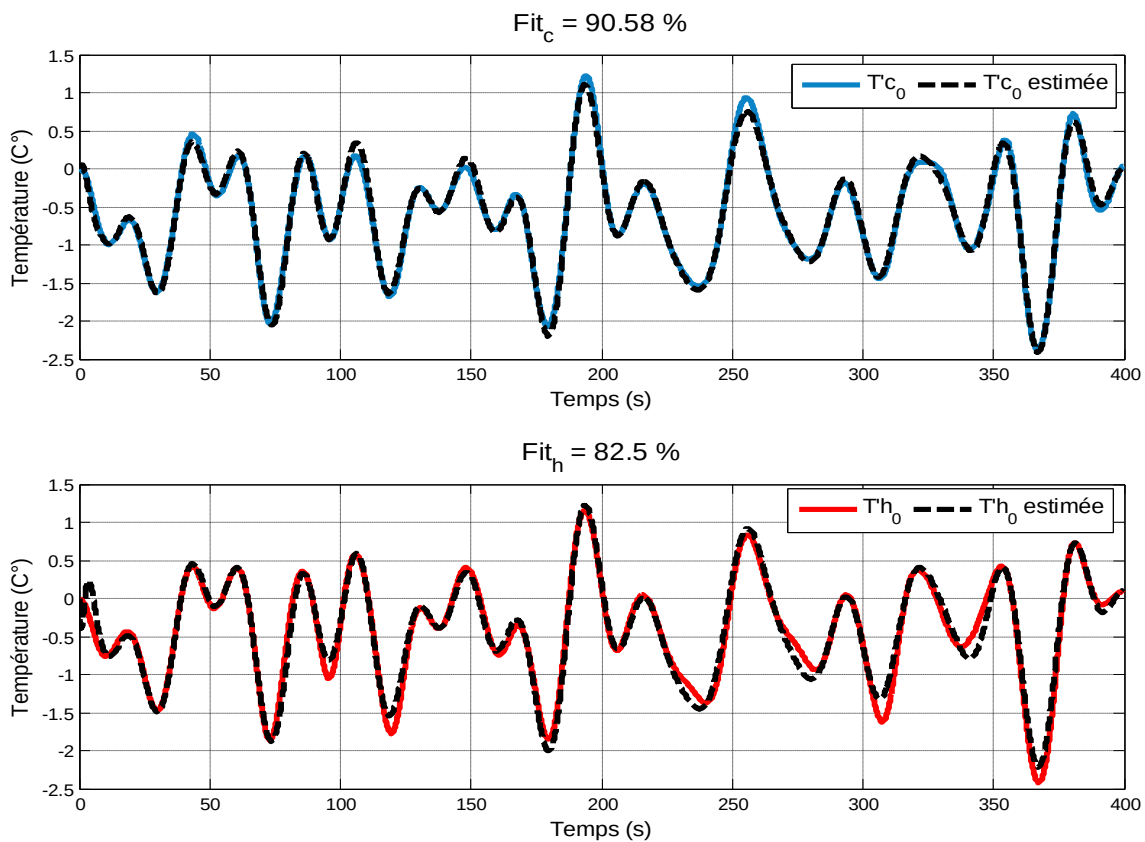


Fig. 4.23. Résultat d'estimation des fonctions $G_{..}$.

Remarque 4.6 : il est évident que le paramètre *Fit* dans ce cas prend des valeurs inférieures que précédemment ; cette atténuation peut être renvoyée à la qualité des signaux d'excitation utilisés, et montre la difficulté du choix des signaux d'excitation dans le cas des systèmes LPV.

L'emplacement des pôles des modèles LTI montre que la stabilité de ces derniers est vérifiée et la figure suivante montre la position de chaque pôle:

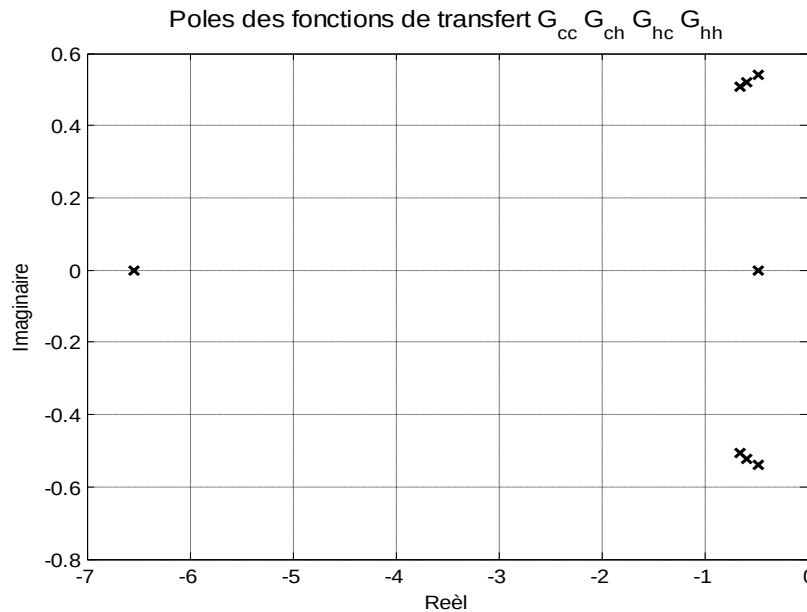


Fig. 4.24 Emplacement des pôles des modèles locaux G_{cc} , G_{ch} , G_{hc} et G_{hh} .

Par l'accomplissement de cette étape, les problèmes d'identification sont terminés. La construction et la validation du modèle final seront réalisées facilement.

4.5.3 Etape 3. Construction du modèle global et validation

Après construction du modèle global à temps continu (figure 4.25) selon la structure du modèle MIMO (4.11), on peut valider sa capacité d'approximation le comportement de l'échangeur de chaleur (le simulateur NL de l'échangeur). Pour cela, les sorties estimées sont comparées avec les sorties du simulateur NL, en utilisant des entrées de températures et de débits massiques variables.

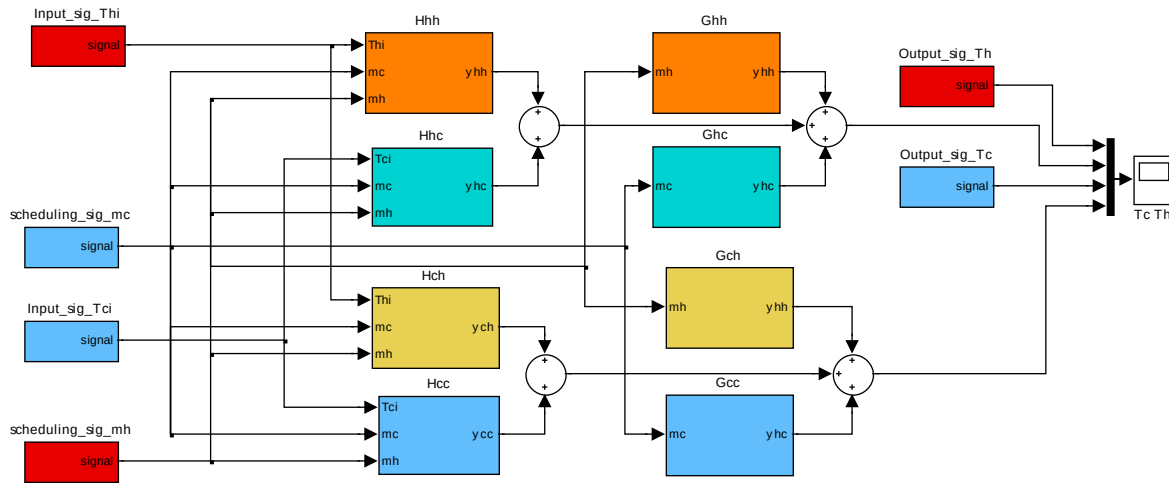


Fig. 4.25 Construction du modèle global de l'échangeur thermique.

Les signaux d'entrée de validation sont illustrés sur la figure 4.26.

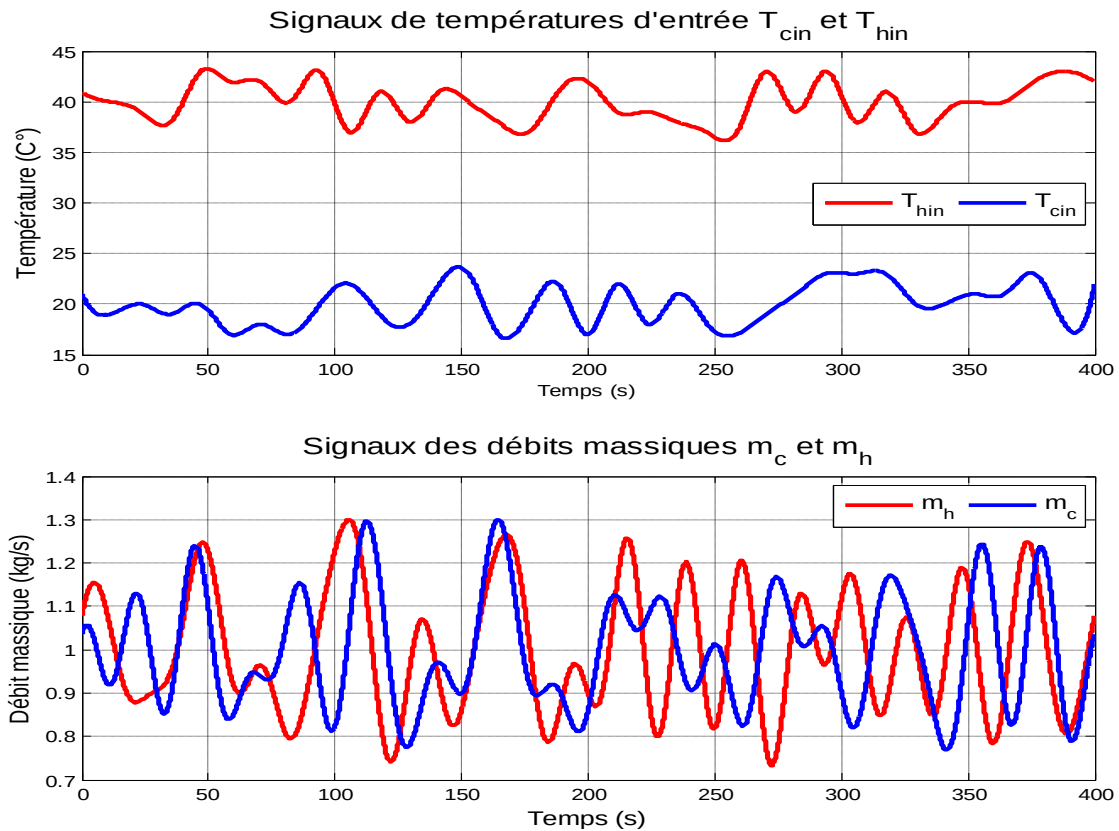


Fig. 4.26. Signaux d'entrées pour validation du modèle global :

températures $T_{c_{in}}$ et $T_{h_{in}}$, débits massiques $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$.

Finalement, les résultats d'estimation final du modèle global obtenus par interpolation Floue et Polynomiale sont illustrés dans les figures 4.27 et 4.29, ainsi que les signaux d'erreur d'estimation (figure 4.28 et 4.30) pour chaque méthode.

Les résultats obtenus sont mieux que celles obtenus dans [16] et [27] pour la méthode d'interpolation polynomiale, et plus mieux que celles obtenus dans [15] pour la méthode d'interpolation floue. Le tableau suivant donne une comparaison de nos résultats avec celles obtenus dans les références [16] et [27] et [15] en fonction du paramètre de Fit.

Spécifications	Notre méthode	[27]	[16]	[15]
Résultats de l'identification de la partie LPV en fonction de (Fit_c, Fit_h)				
<i>Validation croisée</i> $\dot{m}_c = 0.8 \text{ kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.1 \text{ kg/s}$.	98.58%, 98.93%	93.24%, 97.97%	93.81%, ⁽¹⁾ 96.90%	
<i>Validation dans la zone interpolée</i> $\dot{m}_c = 0.88 \text{ kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.13 \text{ kg/s}$.	98.45%, 98.35%	93.20%, 97.73%	92.71%, 96.66%	
<i>Validation hors de la zone interpolée</i> $\dot{m}_c = 0.4 \text{ kg/s}$ et $\dot{m}_h = 1.6 \text{ kg/s}$.	68.34%, 93.71%	68.28%, 87.51%	76.76%, ⁽²⁾ 80.71%	
Identification de la partie LPV global				
<i>Validation du modèle global</i> (Interpolation polynomiale)	93.60%, 95.20%	92.02%, 92.90%	91.53%, 91.56%	81.76%, 81.84%
<i>Validation du modèle global</i> (Interpolation floue)	93.71%, 95.34%			86.70%, 85.13%
(1) Avec $\dot{m}_h = 1.3 \text{ kg/s}$ (avec une durée de l'expérience de 300sec)				
(2) Avec $\dot{m}_c = 0.5 \text{ kg/s}$. (avec une durée de l'expérience de 300sec)				

Tab. 4.5 : Comparaison des résultats obtenus avec celles obtenus dans les références [16], [27] et [15].

A partir de ce tableau, on peut clairement voir qu'il y a une amélioration importante au niveau de la partie LPV en fonction du paramètre Fit ($\approx 99\%$ pour les deux cotés chaud et froid), tandis que la valeur de ce dernier n'est pas gardée lors de la validation du modèle global, la difficulté est rendue à l'étape d'identification LTI.

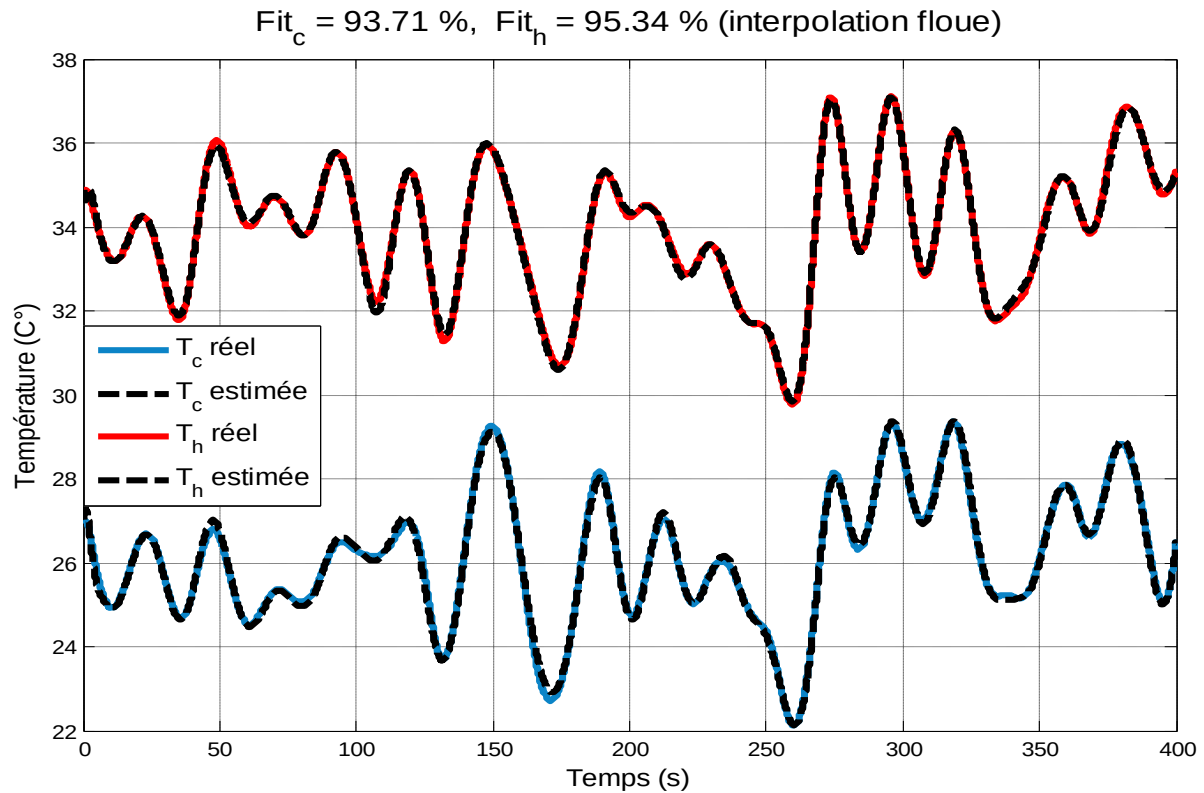


Fig. 4.27. Validation du modèle global pour des entrées de débit massique et des entrées de température variables (interpolation floue).

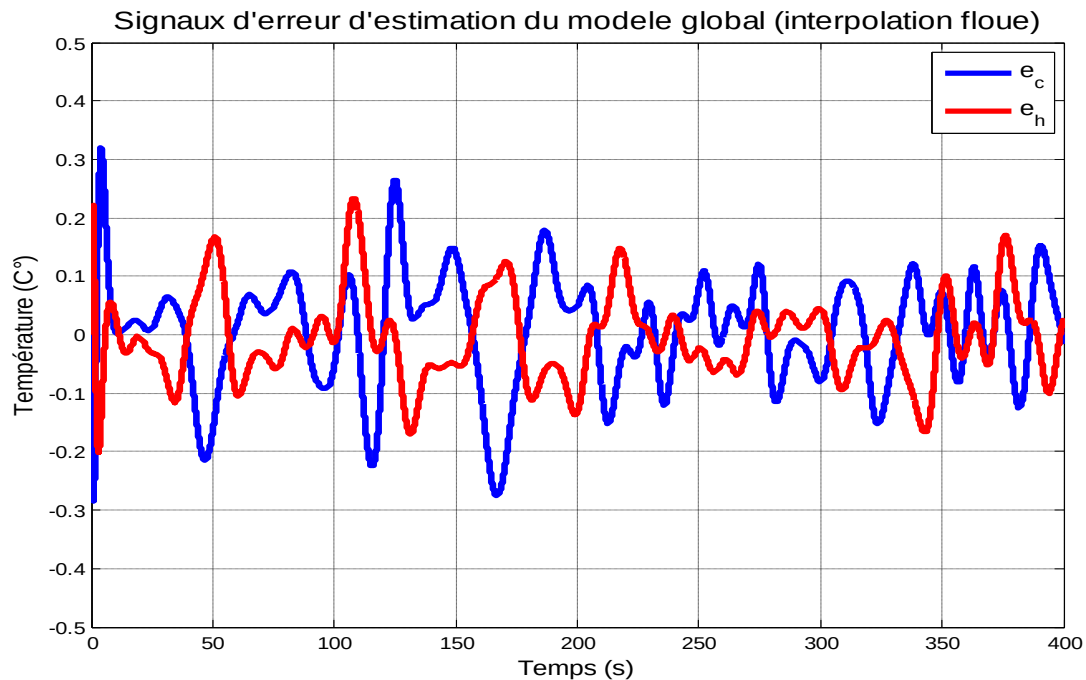


Fig. 4.28. Erreur d'estimation des températures de sorties du modèle global (interpolation floue)

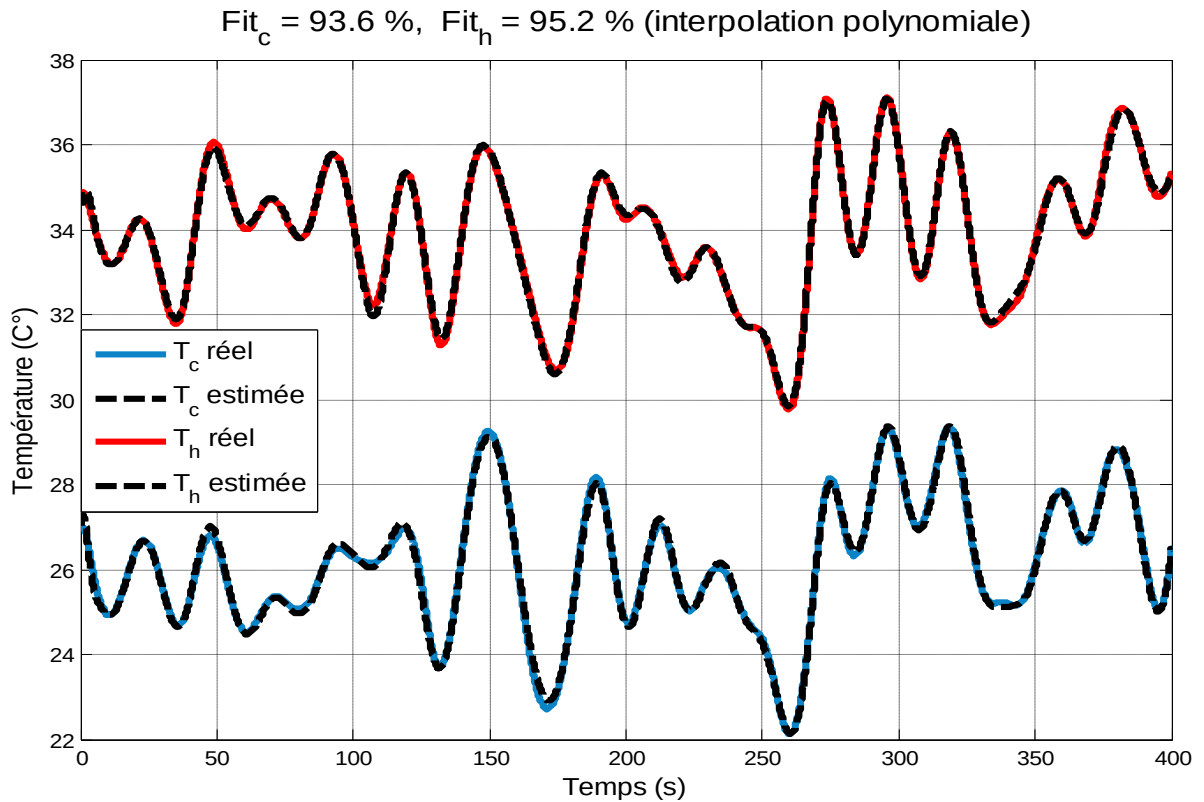


Fig. 4.29. Validation du modèle global pour des entrées de débit massique et des entrées de température variables (interpolation polynomiale).

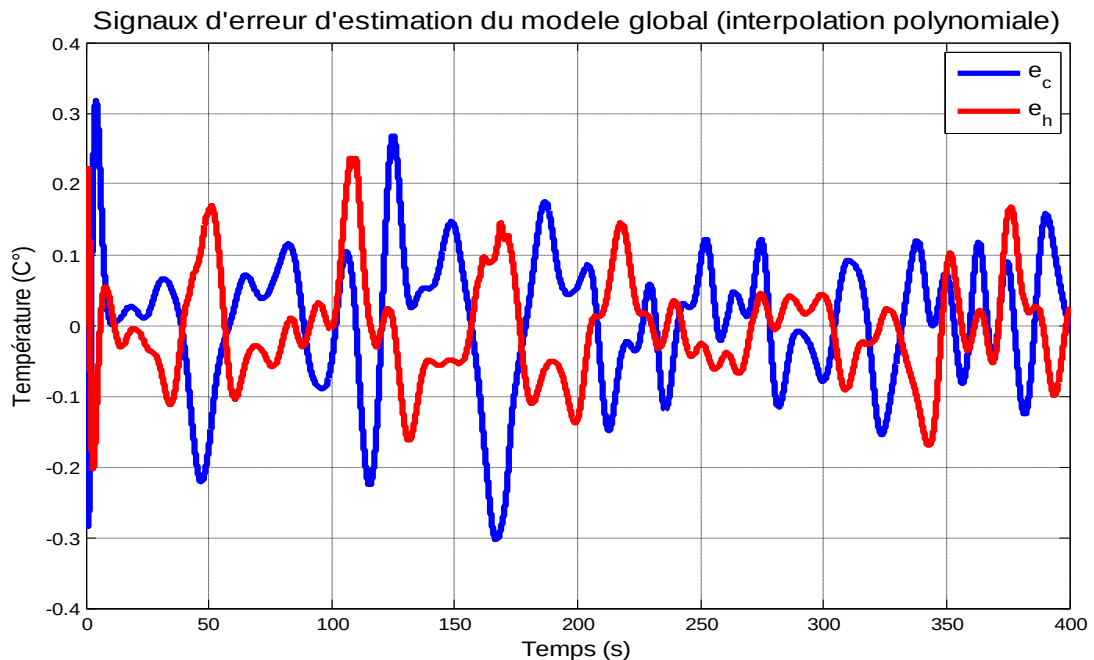


Fig. 4.30. Signaux d'erreur entre les températures estimées du modèle global et de l'échangeur (interpolation polynomiale).

Ces résultats montrent bien l'efficacité de l'utilisation des représentations LPV pour simuler le comportement dynamique global continu d'un système non li-

néaire complexe et de nature variante tel que l'échangeur de chaleur à courants croisés avec une précision satisfaisante. Cela est confirmé par la courbe d'erreur correspondante.

4.6 Conclusion

Nous avons vu à travers ce chapitre, la possibilité de modéliser et identifier un système non linéaire de nature variante lié aux retards variables, tel que l'échangeur de chaleur, avec une approche LPV. Nous avons considéré dans cette étude une approche d'identification locale et nous avons vu dans ce cas particulier, comment une telle approche peut aider à la décomposition des problèmes liés à l'identification d'un tel système complexe en un ensemble de problèmes élémentaires simples et faciles à traiter avec des outils connus dans le cadre des systèmes LTI. Le modèle global a été construit à travers quatre étapes principales:

- L'identification d'un ensemble de modèles locaux pour plusieurs points de fonctionnement du système non linéaire.
- L'interpolation des paramètres locaux par deux méthodes différentes, la première est l'interpolation polynomiale, qui est caractérisée par sa simplicité et sa capacité d'étendre relativement l'estimation pour des zones non estimées, tandis qu'elle possède une précision standard. La deuxième méthode est l'interpolation floue par la technique ANFIS, cette méthode possède une capacité d'interpolation énorme avec un ensemble réduit de fonctions d'appartenance, mais l'inconvénient majeur de cette méthode réside dans sa limitation d'interpolation dans des zones non estimées. Noter que l'utilisation d'une structure floue dans une structure LPV de nature analytique, pose des problèmes d'un point de vue structurel et empêche l'utilisation des techniques d'analyse des systèmes LTI.
- L'identification d'une partie complémentaire composée avec des modèles LTI, cette partie participe à la modélisation de la dynamique globale de l'échangeur.
- Enfin, le modèle global a été construit et validé.

Les résultats de simulation montrent bien les performances intéressantes des modèles LPV et sa capacité d'approximer des systèmes non linéaires dans le contexte des systèmes linéaires.

Chapitre 05

Diagnostic des systèmes LPV

Application à un Echangeur Thermique Réel

5.1 Introduction

La demande croissante de fiabilité et de sûreté de fonctionnement et également un fonctionnement moins coûteux et plus écologique justifie l'intérêt porté à des techniques avancées de conduite de processus incluant des méthodes performantes de détection de défauts et de diagnostic. Lorsqu'un défaut apparaît, il doit être détecté le plus rapidement possible, puis il doit être localisé et identifié. Les défauts ne peuvent pas toujours être détectés par une seule analyse individuelle des signaux acquis sur le système. D'où l'intérêt d'utilisation des modèles liant les différentes variables mesurées.

Dans ce chapitre des généralités sur le diagnostic des systèmes suivis d'une brève aperçue sur les techniques de diagnostic des systèmes LPV à travers un état de l'art sur les récents travaux de recherche, ensuite une description détaillée sur la méthode adoptée pour l'étude de cas, suivie d'une application directe de la méthode sur le système à échange thermique, enfin une conclusion termine le chapitre.

5.1.1 Généralités sur le diagnostic des systèmes

Les méthodes de diagnostic peuvent être classées en trois grandes familles :

- **les méthodes inductives et les méthodes déductives** sont des méthodes classiques basées sur le mode de raisonnement utilisé pour remonter à la cause de la défaillance. Les méthodes inductives correspondent à une approche montante où l'on identifie toutes les combinaisons d'événements élémentaires possibles qui entraînent la réalisation d'un événement unique indésirable. Par contre, la démarche dans les méthodes déductives est inversée, ici on part de l'événement indésirable et on recherche ensuite par une approche descendante toutes les causes possibles.
- **les méthodes qualitatives ou externes**, ces méthodes supposent qu'aucun modèle n'est disponible, mais en se basant sur le comportement naturel du système pour déterminer son état défaillant. La seule connaissance repose sur l'expertise humaine confortée par un solide retour à l'expérience pour décrire les relations de cause à effet. Dans cette catégorie, on trouve :
 - les méthodes d'estimation du défaut à partir du signal de sortie, cette approche suppose qu'en cas de défaut le signal de sortie doit contenir des indicateurs de défaut et avec un traitement approprié, fréquentielle ou temporelle (traitement de signal, filtrage, tests statistiques, etc.) du signal de sortie on peut évaluer la source et l'ampleur du défaut,
 - les méthodes basées sur l'intelligence artificielle comme la reconnaissance de formes, les systèmes experts, les réseaux de neurones artificiels, etc.
- **les méthodes quantitatives ou internes**, qui sont basées sur des modèles mathématiques, impliquent une connaissance approfondie du fonctionnement du système. Dans cette catégorie, on trouve :
 - Méthode de génération des résidus (méthode indirecte), cette méthode utilise le modèle nominal du système pour générer un signal de résidu qui est l'erreur entre la sortie du système et la réponse du modèle. Ce résidu est synthétisé pour être robuste contre les erreurs de modélisation et des entrées inconnues et en même temps, sensible aux différents défauts possibles, ce principal avantage caractérise l'utilisation de cette approche.

- Méthode de génération directe des défauts (méthode directe), cette méthode utilise une technique d'inversion dynamique du modèle pour évaluer explicitement le signal de défaut.

La confiance dans les résultats du diagnostic dépend de la fiabilité des mesures. Pour assurer une validation de mesures on utilise l'une des techniques de redondance suivante :

- L'approche par redondance matérielle utilise plusieurs capteurs, cette approche classique est très efficace bien qu'elle ne couvre pas les pannes de mode commun (panne d'alimentation électrique, panne de masse, etc.). Le coût, l'encombrement et le champ d'application strictement limité aux pannes de capteurs constituent les inconvénients majeurs de cette méthode.
- L'approche par redondance analytique faisant appel à des modèles. Cette approche consiste à utiliser des informations supplémentaires issues de modèles générant des grandeurs homogènes à celles provenant des capteurs.

Enfin, quelques termes souvent utilisés dans le domaine de diagnostic des défauts sont déterminés comme suit:

- **Défaut** : tout écart entre la caractéristique observée sur le dispositif et la caractéristique de référence lorsque celui-ci est en dehors de ses spécifications nominales. Les défauts peuvent être classés en 03 types :
 - **Défaut actionneur ou défaut d'entrée**, comme le Biais, la Dérive, le Blocage, le Calibrage, etc.
 - **Défauts capteurs ou défaut de sortie**, comme le Blocage, la Saturation, la Perte d'efficacité (perte des performances), etc.
 - **Défaut système ou défaut interne** : une variation paramétrique hors de domaines du système nominal.
- **Faute** : action volontaire ou non, dont le résultat est la prise en compte incorrecte (voire la non prise en compte) d'une directive, d'une contrainte exprimée par le cahier des charges.
- **Défaillance** : perte partielle ou totale de l'aptitude du système à accomplir ses fonctionnalités avec les performances définies dans les spécifications techniques qui le rend incapable de délivrer le service pour lequel il a été conçu.

- **Panne** : état d'un système incapable d'assurer le service spécifié à la suite d'une défaillance.
- **Perturbation** : tout phénomène conçu comme normal influence un processus mal représenté par un modèle de référence.
- **Résidu** : signal conçu comme indicateur d'anomalies fonctionnelles ou comportementales.
- **Détection** : opération qui permet de décider si le système est en fonctionnement normal ou non. La probabilité de fausse détection conduit à des arrêts ou des reconfigurations inutiles, tandis que la probabilité de non-détection peut conduire à une panne, parfois intolérable dans les systèmes à haut niveau de sécurité (aéronautique, nucléaire...)
- **Localisation ou Isolation**: la localisation suit l'étape de détection. C'est de définir la source de l'anomalie du système; elle attribue le défaut à un sous système particulier : capteur, actionneur, organe de commande, processus, etc.
- **Estimation** : opération d'identification de l'ampleur du défaut. Cette opération est souvent suivie par une classification du défaut par son amplitude, son type et son degré de sévérité.

5.1.2 Diagnostic moderne des systèmes LPV

La demande croissante de productivité conduit à des conditions d'opération très contraignantes pour plusieurs systèmes industriels. Tels conditions augmentent la possibilité d'échecs du système. Les défaillances des capteurs, d'actionneurs ou de processus peuvent changer radicalement le comportement du système, conduit à une dégradation ou même à l'instabilité du système. Dans le but d'améliorer l'efficacité et de garantir un fonctionnement sûr durant une longue durée des systèmes industriels. Il est nécessaire d'utiliser des techniques systématiques de commande qui permettent d'augmenter la tolérance aux défauts sur la base de la détection précoce des défauts.

La nouvelle stratégie de conception par FDI (Détection et Isolation des Défauts) dans les nouvelles techniques de commande des systèmes modernes, propose

l'utilisation directe du signal de défaut pour générer des commandes tolérantes au défaut (FTC) et garde les performances du système le plus possible dans ces limites acceptables. Ceci est plus pratique que la conception des contrôleurs assez robustes pour contourner toutes les possibilités d'échec du système [57]. La figure suivante schématise cette nouvelle conception.

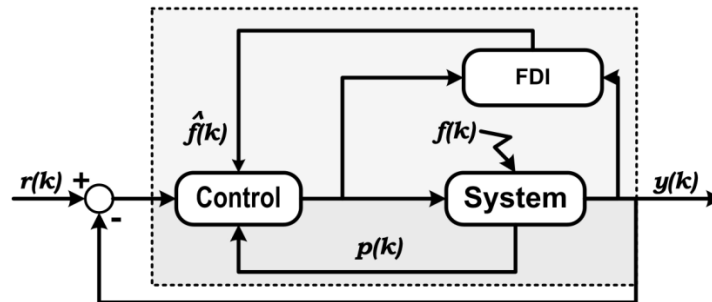


Fig. 5.1 Stratégie de commande FTC Par FDI-LPV

La commande tolérante aux défauts dans les systèmes industriels d'ingénierie modernes fournit des actions appropriées par les techniques de reconfiguration. Grâce à des avances alarmes de défauts fournit par le système FDI, on évite tout échec catastrophique du système. Pour cela le problème de détection par FDI présente une importance capitale dans les travaux de recherche de la commande tolérante des systèmes. La première tâche pour réaliser une commande FTC est basée sur l'inclusion d'un système FDI en temps réel. Le système de diagnostic dans ce cas, doit permettre non seulement la détection et l'isolation du défaut, mais aussi l'estimation de son ampleur.

Le diagnostic de défauts dans les systèmes non linéaires représente un challenge pour le domaine de recherche actuelle. La plupart des méthodes FDI destiné aux systèmes LTI perdent une large plage de leurs performances pour une faible perturbation au tour du point de fonctionnement, car ces méthodes doivent obligatoirement faire une distinction entre la variation paramétrique et l'estimation des défauts en même temps. Cependant, pour une large classe de systèmes non linéaires qui ont plusieurs points de fonctionnement ou ceux qui sont difficiles à linéariser, l'utilisation d'une représentation LPV est une stratégie très utile, car elle permet de prendre en compte la nature non linéaire de ces systèmes ou leurs variations pa-

ramétriques rapides. Dans ce contexte, les techniques de la détection des défauts développées essentiellement pour les modèles LTI peuvent trouver leur extension dans le cas LPV. Par ce fait, ces techniques ont été largement utilisées d'une manière efficace dans certains travaux de recherche récents. Les outils sont maintenant disponibles pour améliorer la robustesse face aux petites perturbations. Le problème de FDI robuste résultant est généralement formulée comme un problème d'optimisation, afin de maximiser les performances de sensibilité aux défauts, et en même temps, de minimiser l'influence des perturbations d'entrées inconnues.

5.2 Approches de diagnostic par représentations LPV (état de l'art)

Les approches de diagnostic LPV à base d'un modèle de référence sont basées sur le calcul résiduel entre la réponse du système et son modèle LPV incertain. Comme la représentation exacte de l'ensemble des états compatibles avec les mesures est difficile à calculer, un ensemble d'approximation qui fournit des limites extérieures sont utilisés à la place. Lorsqu'une mesure est jugée incompatible avec son modèle LPV, un défaut est signalé. Afin d'accroître la fiabilité et les performances du système de diagnostic LPV, le développement d'algorithmes robustes de détection de défaut devrait être abordé. La robustesse d'un système de détection de défaut signifie qu'il soit sensible aux défauts, même en présence des erreurs de modélisation et des perturbations externes. L'avancée des techniques d'optimisation, notamment celles liées aux approches robustes et l'utilisation des Inégalités Matricielles Linéaires (LMI), permettent la synthèse de générateurs de résidus en optimisant des critères temporels ou fréquentiels. Pratiquement, les différentes perturbations du système, les incertitudes paramétriques et les erreurs de modélisation sont tous considérées comme des signaux sources de perturbation [3].

Différentes approches ont été appliquées au diagnostic des systèmes LPV : Filtre de Détection LPV et analyse fréquentielle, espace de parité étendue et techniques d'inversion dynamique du modèle, système de détection par Observateur, etc. dans ce qui suit une aperçue sur ces approches.

5.2.1 Approches basées sur la synthèse fréquentielle d'un filtre de détection LPV

Dans cette approche, la synthèse de générateurs de résidus LPV est effectuée dans le domaine fréquentiel. L'objectif recherché est d'effectuer un filtrage des observations (entrées - mesures) tel que la sortie (résidus) maximise la sensibilité aux défauts et minimise la sensibilité aux perturbations. Cela peut être obtenu au travers d'un découplage parfait des perturbations, sous réserve que certaines conditions de rang soient satisfaites ou bien au travers d'un découplage approximatif optimal. Dans ce dernier cas, le compromis entre sensibilité aux défauts et robustesse aux perturbations est quantifié par un critère basé sur le rapport entre deux normes.

Dans [58], un générateur de résidus est construit par le biais d'un filtre LPV et deux matrices de structuration. Le générateur de résidus est schématisé comme suit :

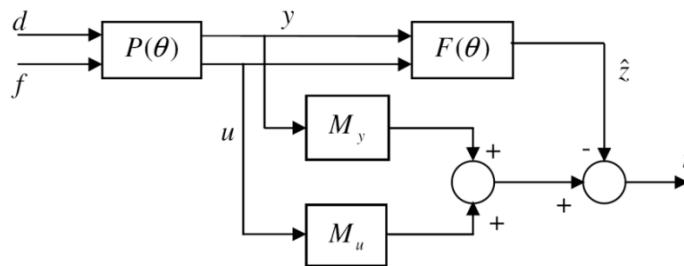


Fig. 5.2 Principe de détection par filtre LPV

$P(\theta)$ représente le transfert LPV entre la paire (défauts, perturbations) sur la paire (entrées/sorties) en boucle fermée. $F(\theta)$, M_y et M_u représente un filtre LPV sous forme d'espace d'état et deux matrices résiduelles à atteindre. L'objectif envisagé du filtre LPV est de filtrer les signaux de défauts et générer une estimation des signaux de perturbation incluant les incertitudes de modélisation et le bruit de mesure. En même temps, les deux matrices résiduelles sont conçues pour éliminer l'influence des signaux d'entrée/sorties sur le résidu. Pour augmenter la robustesse contre l'influence des perturbations et assurer la sensibilité du signal de résidu aux défauts, les normes H-infinie/H-sensibilité⁶ des matrices de transfert: perturba-

⁶ La norme H-sensibilité représente le minimum gain non nul de valeurs singulières d'une matrice de transfert dans un domaine de pulsation limité.

tions/résidus et défauts/résidus en boucle fermée sont mises sous certaines contraintes de seuillage par les niveaux de performance de robustesse et de sensibilité. La norme H-sensibilité est transformée par la suite en une norme H-infinie ce qui permet de structurer la synthèse du générateur de résidus comme un problème d'optimisation convexe au sens H-infinie, qui est résolu avec une technique LMI. Les matrices de structuration résiduelle My et Mu , et le filtre LPV sont optimisés comme une partie intégrale du système augmenté.

Dans [59] et [60] une étude similaire est effectuée, mais cette fois-ci, l'estimation du défaut est faite, non à travers les matrices My et Mu , mais par une estimation de l'entrée inconnue du signal de défaut, en minimisant l'erreur entre le résidu et l'entrée estimée du défaut au sens H-infinie et une technique LMI. A la fin d'étape d'estimation, le signal d'erreur ne contient que des signaux de perturbation et de bruit de mesures.

Dans [61] et [62], un filtre FDI-LPV basé sur un banc d'observateur de Luenberger est synthétisé. Les gains des observateurs sont interpolés puis sont calculés par des techniques fréquentielles robustes en termes d'H-infinie et H-index⁷ et une technique d'optimisation LMI, pour assurer un certain niveau de rejection de perturbation et une bonne sensibilité aux défauts.

5.2.2 Approches par espace de parité

Les approches du type espace de parité reposent sur la vérification des relations statiques ou dynamiques qui relie les mesures dans un horizon temporelle finie. Ces relations sont souvent définies par l'élimination de la matrice d'observabilité par le concept géométrique, ce qui revient à éliminer l'influence de l'état sur le résidu. L'extension de ces méthodes au cas non linéaire donne des équations de parité étendue.

Dans [63], la méthode de détection utilise des équations de parité étendue non strictes sur la base d'un modèle LPV incertain. Dans cette approche, les différentes incertitudes paramétriques forment une bonde (intervalle), autour du modèle nominal qui caractérise la dynamique réelle du système à l'état sain. Les incertitudes

⁷ La norme H-index, qui est le rapport entre deux normes H_2 de signaux d'E/S, représente le plus minimum gain possible non nul dans un domaine de pulsation limité.

paramétriques sont modélisées par une forme de *Zonotope* (concept géométrique sous forme matricielle). Cette forme facilite considérablement la manipulation des incertitudes dans leurs plages de variation min-max sous forme matricielle. L'utilisation d'une stratégie de robustesse passive permet de générer des seuils résiduels adaptatifs et diffuser les incertitudes paramétriques aux limites d'alarme de résidus. L'objectif des approches par robustesse passive consiste généralement à déterminer si le modèle LPV incertain peut expliquer les mesures ou non. Lorsque les résidus sont en dehors des limites d'alarme, il est argumenté que les incertitudes du modèle seules ne suffisent pas à expliquer le résiduel et donc un défaut doit être signalé. Cette approche présente l'inconvénient que les défauts qui produisent une déviation résiduelle inférieure à celle générée sous l'influence des incertitudes paramétriques ne seront pas détectés (voir par exemple [64]). Pour résoudre ce problème, une solution alternative proposée par [63] consiste à calculer explicitement l'ensemble des paramètres incertains qui sont compatibles avec les mesures. Cette étape passe par une phase d'identification de l'amplitude optimale de l'intervalle des résidus qui assurent une détection de défauts et évite l'apparition des fausses alarmes le long des trajectoires paramétriques et leurs incertitudes. La propagation des incertitudes paramétriques aux résidus permet à ces derniers de prendre ainsi une forme zonotope avec des intervalles de seuils adaptatifs suivant le point de fonctionnement du système. Par conséquence, la phase de détection suppose l'apparition d'un défaut lorsqu'un signal de résidu n'appartient pas à l'intervalle admissible des résidus (zonotope de résidu). La phase de localisation utilise une *matrice de signature de défaut* (FSM) pour déterminer la source du défaut. Afin de renforcer l'isolation et performer une bonne estimation des défauts, des *fonctions de sensibilité* des résidus par rapport au défaut ont été introduites. Enfin le calcul de la fonction de sensibilité inverse permet de calculer le défaut isolé.

Dans [65], le système de diagnostic LPV est basé sur une méthode de redondance analytique dans un horizon temporel fini dans un espace de parité étendu. Le système de détection commute, selon le niveau du signal de séquençement, entre plusieurs termes résiduels conçus pour des systèmes locaux avec entrées inconnues. La robustesse des termes résiduels est synthétisée par le concept géométrique. Ce concept permet un découplage de l'influence des entrées inconnues sur la génération des résidus par deux méthodes : un découplage parfait et approximatif. Dans

le cas d'un découplage parfait, une projection orthogonale aux directions d'influence des perturbations permet de découpler ces dernières parfaitement. Ceci n'est pas toujours le cas en pratique. Pour cela [65] utilise un découplage approximatif qui consiste à effectuer une projection en une direction permettant de maximiser la sensibilité aux défauts et de minimiser la sensibilité aux perturbations (robustesse). Ce découplage est conçu par une synthèse $H\text{-}inf$ et résolu à travers l'optimisation de plusieurs critères par une technique LMI.

5.2.3 Approche par inversion dynamique

L'objectif de cette approche est de développer un générateur de défaut à travers une nouvelle reconfiguration du modèle LPV. A l'opposé des méthodes *indirectes* d'estimation de défauts qui fournissent des signaux des résidus comme indicateurs de défauts, les méthodes *directes* proposent une conception différente qui consiste à concevoir un générateur de défauts à l'aide d'une technique d'inversion dynamique du modèle. Ce concept rentre dans les méthodes de diagnostic par redondance analytique.

Dans [66], un générateur explicite de défauts (seul le cas d'un défaut d'actionneur est considéré dans cette étude) est construit par le concept d'inversion dynamique d'un modèle LPV-SS-TD dans un horizon temporel fini. Le nombre de mesures effectuées est considéré supérieur ou égal au nombre maximum de défauts. Après l'application du concept géométrique sur les états du système qui permettent l'inversion explicite du défaut. Un observateur de Luenberger est construit sur la base du générateur proposé avec deux versions de gain: fixe et variante (qui dépend du point de fonctionnement). Cet observateur a pour but de reconstruire le signal de défaut d'une manière robuste et atténuer l'influence des signaux de perturbation sur l'estimation du signal de défaut. Afin de stabiliser la dynamique de l'erreur d'estimation du défaut et d'atténuer l'effet des perturbations, une fonction objective quadratique est formulée au sens de Lyapunov et minimisée par une technique LMI. Enfin, il est démontré que l'observateur à gain variable présente l'avantage d'être plus robuste par rapport à l'observateur à gain constant.

5.2.4 Approches par observateurs LPV

Certes, l'utilisation des techniques de conception d'observateur pour générer une loi de commande est une technique très populaire dans la théorie des systèmes de commande. D'une manière similaire, la majorité des travaux récemment publiés dans le domaine de diagnostic utilisent des observateurs pour la détection et la localisation des défauts. Dans le domaine de diagnostic, la construction d'un observateur est beaucoup plus complexe que dans le cas de commande, car lors de l'apparition d'une anomalie dans le processus, les paramètres d'observateur sont ainsi affectés par le défaut, et la stabilité de l'observateur, dans ce cas n'est plus assurée. L'idée générale consiste à synthétiser un filtre de détection à base d'observateur LPV, en utilisant les techniques d'optimisation d'Inégalité Matricielle Linéaire (LMI).

a) Approches par observateur de Luenberger

L'observation de Luenberger repose essentiellement sur des techniques de placement de pôles, en prenant l'erreur d'estimation comme critère à minimiser. Pour ce type d'observateur, une grande liberté est laissée au choix des valeurs propres, mais en pratique on choisit une dynamique d'observation plus rapide que celle du processus. Cependant, ce choix est limité par deux conditions essentielles : l'utilisation des gains réalisables et une bande passante restreinte pour éliminer les bruits prépondérants en hautes fréquences.

Dans [64], [67], [68] et [69], le problème de conception d'un observateur LPV de Luenberger pour un modèle LPV poly-topique incertain est résolu en utilisant une technique de placement de pôles sous contraintes LMI. Cette technique permet de stabiliser l'observateur dans chaque point de fonctionnement et d'assurer certaines performances désirées. Dans [64], la prise en compte des limites min-max pour les incertitudes paramétriques impose sur les valeurs propres de l'observateur un positionnement dans des régions spécifiques dans le plan gauche des pôles, ce qui permet de générer les limites min-max correspondantes à la réponse estimée de l'observateur. Ces limites sont utilisées par la suite pour calculer les intervalles admissibles du signal de résidu, en formant avec cette manière des seuils résiduels adaptatifs. Ces seuils adaptatifs sont utilisés pour assurer une certaine robustesse

dite « passive » contre les fausses alarmes prévues excitées par l'effet des incertitudes du modèle. Il est à noter que les défauts qui produisent une déviation résiduelle inférieure à celle générée par les incertitudes paramétriques qui ne seront pas détectés par cette approche. Dans [68], des seuils fixes pour chaque signal de résidu sont utilisés. Une étude similaire dans [64] est faite dans [67] et [69], mais dans cette fois, l'influence des incertitudes paramétriques sur les résidus est remplacée par un calcul explicite des intervalles qui enveloppent tous les états et les sorties possibles qui sont compatibles avec les mesures en absence de défauts dans des points distincts. Cette enveloppe est modélisée par une forme Zonotope, ce qui facilite sa structuration en une forme matricielle. La détection de défauts suit une approche par robustesse passive. Puis *la matrice de signature de défauts* et *la fonction de sensibilité de défauts* sont utilisées pour localiser et estimer l'ampleur du défaut.

La référence [70] se base sur un observateur de Luenberger, une nouvelle méthode d'estimation adaptative des défauts permet d'améliorer l'estimation du défaut d'une manière itérative à travers une stabilisation de la dynamique de l'erreur d'estimation du défaut, de l'état et de sortie au sens de Lyapunov sous certaines contraintes en terme LMI.

b) Approches par observateur de Kalman

L'observateur de Kalman est basé sur des propriétés statistiques des bruits et nécessite la résolution d'une équation de Riccati pour calculer le gain d'observation. Plus précisément, par la minimisation de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, qui représente la solution de l'équation de Riccati, on peut déduire l'expression du gain de l'observateur.

Dans [71] et [72] l'observateur de Kalman prend en considération le signal du défaut système comme état augmenté du système. Dans un premier temps, le modèle LPV du système à l'état sain est identifié par un algorithme d'identification bilinéaire par approximation successive en utilisant une version LPV d'un filtre de Kalman comme reconstituteur d'état du système. Certaines conditions de persistance de l'excitation du système sont données afin d'assurer la convergence de l'algorithme d'identification. A la fin de cette étape, un modèle et une version LPV d'un filtre de Kalman sont obtenus. Pour construire le système de diagnostic, le

modèle et le filtre de Kalman sont utilisés pour détecter et estimer le défaut. L'observateur de Kalman utilise l'ensemble des signaux d'entrée/sortie du système pour donner une estimation du défaut, mais cette estimation s'avère biaisée [72]. Afin d'assurer une certaine robustesse contre les différents signaux de perturbation qui peuvent affecter l'estimation du défaut, [71] utilise un deuxième filtre LPV de Kalman comme un générateur de référence pour l'état augmenté. Pour qu'il soit insensible au défaut, ce deuxième filtre utilise un signal de séquençement calculé indirectement à partir de la sortie du modèle LPV. Enfin, le calcul de l'erreur d'estimation d'état entre les deux états augmentés donne une estimation fiable du défaut.

c) Approches par observateurs à entrées inconnues (OEI)

Le principe de construction d'un observateur à entrées inconnues consiste à rendre l'erreur d'estimation indépendante des perturbations non mesurables moyennant une transformation linéaire appropriée. Dans ce cas, on vise à annuler l'erreur d'estimation d'états indépendamment de la présence d'entrées inconnues. L'existence de ce type d'observateur est reliée à des conditions nécessaires et suffisantes. La possibilité de synthétiser un tel observateur est vérifiée à travers une condition sur le rang de la matrice d'observabilité et implique que le nombre de mesures indépendantes doit être supérieur ou égal au nombre d'entrées inconnues à découpler.

Dans [73] le problème de conception d'un double générateur de résidus pour la commande FTC, l'un sensible aux défauts actionneur et l'autre aux signaux de perturbation (entrées inconnues), est résolu à travers un filtre FDI-LPV qui prend comme entrées les signaux de commande et de sortie du système et comme structure un OEI dont les états à estimer sont les signaux résiduels. Des conditions nécessaires d'observabilité et de détectabilité sont mises afin de vérifier l'existence d'un tel générateur. Enfin, la stabilité du modèle LPV du système en boucle fermée et du filtre FDI-LPV est analysée par une technique de placement de pôles au sens de Lyapunov.

Dans [74], une structure particulière d'OEI proposé initialement par [75] dans le cadre des systèmes LTI, a été étendue pour le cas LPV. Des conditions nécessaires sont mises pour assurer l'existence de tel observateur puis ses matrices sont dé-

terminées tel que l'erreur d'estimation d'état tend vers zéro en présence de perturbations en utilisant une technique LMI optimisée au sens de Lyapunov.

d) Approche par banc d'observateurs

La possibilité d'apparition de plusieurs défauts simultanément dans un processus pose des problèmes délicats pour un système de localisation de défaut, ou même pour un système de détection si les effets des défauts se recouvrent. Pour résoudre ce problème, en se réfugiant généralement aux techniques de la redondance analytique par la construction d'un banc d'observateurs où chacun d'entre eux est utilisé comme un filtre pour un seul défaut.

Dans [74], pour un modèle LPV augmenté de structure poly-topes, un banc d'observateurs d'OEI est utilisé pour construire un système de détection et localisation des défauts capteurs par redondance analytique. L'ensemble des signaux de résidus est calculé telles que leurs réponses atteignables à chacun des défauts ne se recouvrent pas. Chaque résidu est insensible à un défaut et sensible aux autres défauts. Par conséquent, chaque résidu est nul en présence de son défaut associée.

Dans [61] et [62], le modèle LPV incertain avec une structure multimodèle, est construit par une technique d'interpolation d'un ensemble de modèles LTI linéarisés en plusieurs points de fonctionnement d'un système non-linéaire. Puis, un filtre FDI-LPV basé sur un banc d'observateur de Luenberger est synthétisé et ses gains sont interpolés. Les exigences de la robustesse contre les perturbations et la sensibilité aux défauts pour un système de détection ouvrent le choix sur les techniques fréquentielles et les techniques LMI, pour minimiser la norme H^∞ du terme perturbation/résidus et maximiser la norme H_2 du terme défauts/résidus. Ce calcul passe par le calcul des valeurs optimales des gains des observateurs par une technique LMI.

5.2.5 Approches par estimation paramétrique

Les techniques d'estimation paramétriques appliquées au diagnostic consistent généralement à évaluer la cohérence des paramètres estimés avec ceux nominales. L'apparition d'un défaut au sein du système entraîne une modification de ses caractéristiques physiques d'où résulte une évolution significative des paramètres

par rapport à leurs valeurs nominales. En d'autre terme, tout écart notable des paramètres par rapport aux valeurs nominales est révélatrice d'un défaut. Les capacités de localisation de ces techniques sont généralement bonnes et la nécessité de reconstruire les défauts conduit souvent à appliquer des techniques d'estimation paramétrique. Pour les systèmes de diagnostic qui utilisent des modèles de connaissance cette approche présente l'avantage d'être la mieux placée pour donner une signification physique aux défauts paramétriques, ce qui facilite considérablement la tâche de classification de défauts pour un système de diagnostic. Cependant, les contraintes d'excitation sur les signaux d'entrée sont en général importantes. Une limitation du nombre de paramètres adaptés est un moyen pour lever partiellement les contraintes sur l'excitation du système.

La méthode proposée dans [3] pour une version LTI consiste à estimer en ligne les paramètres du modèle du système défaillant par une méthode des moindres carrés itérative simple, puis à les comparer avec ceux du modèle nominal. Le signal du résidu dans ce cas est calculé au niveau des paramètres et permet non seulement une localisation directe des défauts paramétriques mais aussi une estimation fiable de son ampleur. Dans le cas LPV, l'estimation sera un peu plus compliquée car elle nécessite l'utilisation d'une approche globale et peut se confronter à des modèles LPV de nature variante en fonction du signal du défaut lui-même.

La méthode proposée dans [76] utilise une technique stochastique d'estimation en ligne des états et des paramètres du système LPV défaillant à l'aide d'un observateur de Kalman de type DUKF (Dual Unscented Kalman Filter). Dans cette version, les états et les paramètres du système sont estimés simultanément et séparément, à travers des mesures bruitées, à chaque instant, par des fonctions probabilistes et des règles statistiques. Le système de diagnostic est basé sur un mappage entre les deux modèles sain et défaillant en utilisant des techniques statistiques Bayésiennes pour la reconstruction du défaut. La méthode d'estimation par DUKF présente l'avantage qu'elle peut faire une estimation séparée des états et des paramètres précisément en la comparant à d'autres types d'observateurs de Kalman, ainsi qu'elle peut utiliser le modèle non-linéaire (sans besoin de linéarisation), mais elle nécessite des calculs complexes.

5.3 Etude de cas : diagnostic de défauts de l'échangeur thermique

5.3.1 Problématique

La détection du défaut sur la base d'un modèle consiste à vérifier la cohérence entre les relations mathématiques du système et les mesures. L'incohérence n'a pas une explication par le modèle nominal, donc il s'interprète comme un indicateur de défaut affectant le processus. Ce problème peut s'exprimer de la manière suivante :

Définition 5.1 (système LPV défaillant) : *Etant donné un système LPV $\mathcal{S}=(\mathbb{T},\mathbb{P},\mathbb{W},\mathfrak{B})$, le système $\mathcal{S}$ est dit « défaillant », s'il appartient à l'ensemble $\mathfrak{B}_p^f$ pour toute trajectoire fixe $p \in \mathfrak{B}_p$ donnée. Le comportement $\mathfrak{B}_p^f$ du système est défini par :*

$$\mathfrak{B}_p^f = \{\exists w \in \mathbb{W}^{\mathbb{T}} \mid (w, p) \notin \mathfrak{B}\}, \quad (5.1)$$

$\mathfrak{B}_p^f$ définit l'ensemble de trajectoires non compatibles avec l'ensemble $\mathfrak{B}_p$ du système $\mathcal{S}$ à l'état normal.

Dans ce concept, on suppose que le modèle du système surveillé à l'état sain interprète bien la relation entre les signaux d'entrée et de sortie. L'apparition d'un défaut provoque un changement dans la dynamique des différentes parties du système (chaîne d'actionneurs, système, chaîne de mesure). Son impact n'a pas une interprétation par le modèle nominal du système à travers une prédiction de son signal de sortie, cela signifie que la détection de ce défaut est argumentée.

Remarque 5.1 : La connaissance des modèles dynamiques des capteurs et/ou des actionneurs n'est pas nécessaire dans ce concept, car les deux chaînes d'actionneurs et de mesure doivent assurer le passage de l'information, sans la déformée, entre le système de commande et le système commandé. Ces deux chaînes donc doivent avoir obligatoirement un gain statique unitaire et une bande passante plus large que celle du système réel.

Dans la suite de cette section on va donner une brève description des différentes solutions adoptées pour la détection, la localisation et l'estimation du signal de défaut, puis ses formulations mathématiques à travers les relations mathématiques de l'échangeur.

5.3.2 Description des différentes techniques adoptées

En gros, la nouvelle technique de détection adoptée se base essentiellement sur une approche par espace de parité dans la phase de détection. Puis, on utilise une technique de diagnostic par estimation paramétrique du modèle du système défaillant pour la phase de localisation. Dans la phase d'estimation de défaut, on utilise le modèle du système défaillant calculé dans la phase précédant pour remonter les effets aux causes, donc une technique d'inversion dynamique est utilisée pour ce but. Ces trois techniques sont illustrées comme suit :

Dans l'étape de détection de défauts, la méthode proposée utilise la sortie du modèle LPV incertain pour vérifier sa **cohérence** avec la mesure. La génération des signaux de résidus entre les deux sorties (mesurée et estimée) permet une détection rapide des défauts. Pour atténuer les effets des **erreurs de modélisation** et de **bruit de mesure** sur le signal du résidu, une technique par **robustesse passive** est utilisée [63], [64]. Cette technique consiste à déterminer un **intervalle des résidus admissibles** en utilisant des seuils fixes supérieurs et inférieurs, que nous appelons **seuils de limitation résiduelle**. En effet, l'intervalle des résidus admissibles détermine le comportement du système sain autour de sa sortie nominale. Il doit être à la fois **suffisamment étroit** pour détecter les petites déviations de la sortie mesurée provoquée par les différents défauts possibles, et **suffisamment large** pour éviter la signalisation des **fausses alarmes**. Toute valeur résiduelle jugée inadmissible est supposée comme indicateur de défaut. Dans ce cas, les incertitudes du modèle seules ne suffisent pas à expliquer l'écart résiduel significatif, donc l'existence du défaut est probable. Avant la prise de décision et pour éviter l'apparition des fausses alarmes dans les environnements trop bruités, un deuxième **seuil de détection** est utilisé. Dans ce cas, l'apparition du défaut sera prouvée si la norme du signal du résidu dépasse le deuxième seuil.

Dans la phase de localisation de défauts, on utilise une matrice de signature de défauts (*FSM*) qui permet une localisation globale des défauts [64], [69]. Afin de renforcer la localisation par la matrice *FSM*, une technique d'estimation paramétrique LPV par une approche globale du système défaillant est utilisée. Cette technique non seulement permet une localisation directe du défaut, mais ainsi aide à l'estimation de son amplitude.

Dans l'étape d'estimation de défauts, on utilise un modèle dynamique différentiel inversé (calculé à travers le modèle du système sain et défaillant) pour reconstruire le signal du défaut.

5.3.3 Formulation mathématique du problème

5.3.3.1 Etape de détection de défauts

Considérons le système LPV à surveiller qui peut être décrit par un modèle MIMO

$$y(t_k) = \hat{y}(t_k) + e(t_k) = \hat{y}^0(t_k) + \Phi(t_k)\Delta\theta(p_{t_k}) + e(t_k) \quad (5.2)$$

Où :

- $y(t_k), \hat{y}(t_k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ sont le vecteur de la sortie mesurée et la sortie de prédiction respectivement.
- $\hat{y}^0(t_k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie nominale du système défini par :

$$\hat{y}^0(t_k) = \Phi(t_k)\theta^0(p_{t_k}) \quad (5.3)$$

- $\Phi(t_k) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_\theta}$ est la matrice du regresseur.
- $p_{t_k} = p(t_k) \in \mathbb{R}^{n_p}$ est le vecteur de variables de séquençement mesurables qui définit le point de fonctionnement du système.
- $\Delta\theta(p_{t_k}) \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ est le vecteur des incertitudes paramétriques dont les valeurs peuvent varier en fonction du point de fonctionnement du système LPV selon p_{t_k} . Ce vecteur représente la différence entre le vecteur de paramètres incertains $\theta(p_{t_k})$ et le vecteur de paramètres nominaux $\theta^0(p_{t_k})$ comme suit :

$$\Delta\theta(p_{t_k}) = \theta(p_{t_k}) - \theta^0(p_{t_k}) \quad (5.4)$$

- $e(t_k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est un vecteur du bruit de mesure additif.

On définit le vecteur $\sigma \in \mathbb{R}^{n_y}$, comme le vecteur des seuils qui délimite l'effet des incertitudes paramétriques et du bruit. Le vecteur σ détermine donc deux limites supérieure et inférieure $\bar{\sigma}$ et $\underline{\sigma}$ sont définies par:

$$\bar{\sigma} = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}^{n_y} : \sigma_i = \sup_{t_k} \{ \varphi_i(t_k) \Delta \theta(p(t_k)) + e_i(t_k) \}, \forall i = 1, \dots, n_y \right\} \quad (5.5.a)$$

$$\underline{\sigma} = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}^{n_y} : \sigma_i = \inf_{t_k} \{ \varphi_i(t_k) \Delta \theta(p(t_k)) + e_i(t_k) \}, \forall i = 1, \dots, n_y \right\} \quad (5.5.b)$$

Où $\varphi_i(t_k)$ désigne la ligne i de la matrice de $\Phi(t_k)$.

Afin de prendre en considération le cas le plus défavorable introduit par l'effet des dynamiques transitoires non modélisées du système et du bruit, on prend :

$$\sigma = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}^{n_y} : \sigma_i = \max \{ \text{abs}(\bar{\sigma}_i), \text{abs}(\underline{\sigma}_i) \}, i = 1, \dots, n_y \right\} \quad (5.6)$$

En d'autre terme :

$$\sigma = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}^{n_y} : \sigma_i = \sup_{t_k} | \varphi_i(t_k) \Delta \theta(p(t_k)) + e_i(t_k) |, i = 1, \dots, n_y \right\} \quad (5.7)$$

Le vecteur de mesure de la sortie $y(t_k)$ est dit *compatible* avec la sortie prédite par le modèle lorsque le test de cohérence suivant est vérifié :

$$y(t_k) \in Y(t_k) \quad (5.8)$$

Où $Y(t_k)$ est l'ensemble des sorties prédites centré dans la sortie nominale $\hat{y}^0(t_k)$. L'ensemble $Y(t_k)$ est délimité par les limites supérieure et inférieure de la sortie estimée et du bruit comme suit :

$$Y(t_k) = [\underline{y}(t_k), \bar{y}(t_k)] \quad (5.9)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \bar{y}(t_k) = \hat{y}^0(t_k) + \sigma \\ \underline{y}(t_k) = \hat{y}^0(t_k) - \sigma \end{cases} \quad (5.10)$$

Soit $r^0(t_k)$ le résidu nominal basé sur la différence entre les mesures et le modèle de prédiction nominale, défini par :

$$r^0(t_k) = y(t_k) - \hat{y}^0(t_k) \quad (5.11)$$

Dans le cas idéal, lorsque les erreurs de modélisation et de bruit sont négligées, l'expression (5.11) doit être égale à zéro en absence de défaut, et différent de zéro en présence de défaut. Toutefois, en raison des erreurs de modélisation et de bruit de mesure, le résidu peut être différent de zéro dans un scénario sain. Afin de tenir compte de ces deux quantités, leurs effets seront propagés à la valeur résiduelle pour définir une région admissible des résidus $\hat{\Gamma}(t_k)$.

Ainsi, la condition (5.8) peut être réécrite comme suit :

$$r^0(t_k) \in \hat{\Gamma}(t_k) \quad (5.12)$$

En tenant compte (5.10) et (5.11) on peut écrire :

$$\begin{cases} \bar{r}(t_k) = y(t_k) - \bar{y}(t_k) = y(t_k) - \hat{y}^0(t_k) - \sigma, \\ \underline{r}(t_k) = y(t_k) - \underline{y}(t_k) = y(t_k) - \hat{y}^0(t_k) + \sigma, \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\begin{cases} \bar{r}(t_k) = r^0(t_k) - \sigma \\ \underline{r}(t_k) = r^0(t_k) + \sigma \end{cases} \quad (5.14)$$

où $\bar{r}(t_k)$ et $\underline{r}(t_k)$ représentent respectivement les deux limites inférieure et supérieure de la région des résidus nominaux admissibles.

Le signal de résidu utilisé pour la détection de défaut est maintenant obtenu par la relation suivante :

$$r(t_k) = \max\{\bar{r}(t_k), 0\} + \min\{\underline{r}(t_k), 0\} \quad (5.15)$$

À chaque instant t_k , le vecteur de résidus $r(t_k)$ définit deux demi-espaces $\bar{\Gamma}(t_k)$ et $\underline{\Gamma}(t_k)$ dans $\mathbb{R}^{n_y}$ donnés par :

$$\bar{\Gamma}(t_k) = \left\{ r(t_k) \in \mathbb{R}^{n_y} : r_i(t_k) \geq r_i^0(t_k) - \sigma_i, \forall i = 1, \dots, n_y \right\} \quad (5.16.a)$$

$$\underline{\Gamma}(t_k) = \left\{ r(t_k) \in \mathbb{R}^{n_y} : r_i(t_k) \leq r_i^0(t_k) + \sigma_i, \forall i = 1, \dots, n_y \right\} \quad (5.16.b)$$

Par conséquent, la région des résidus admissibles $\hat{\Gamma}(t_k)$ représente l'espace défini par l'intersection des deux demi-espaces $\bar{\Gamma}(t_k)$ et $\underline{\Gamma}(t_k)$.

L'ensemble $\hat{\Gamma}(t_k)$ est défini donc comme suit :

$$\hat{\Gamma}(t_k) = \bar{\Gamma}(t_k) \cap \underline{\Gamma}(t_k) \quad (5.17)$$

Cet ensemble représente un canal très étroit dans l'espace global des résidus $\Gamma(t_k)$.

Dans les environnements trop bruités, l'apparition des pics aléatoires dans les signaux de sorties mesurées provoque des fausses alarmes. Pour cela un deuxième seuillage doit être utilisé. En effet, la détection de défaut est assurée par un deuxième test qui consiste à calculer les normes de résidus dans un intervalle de scrutation périodique. Les valeurs des ces normes doivent vérifier la condition suivante :

$$\begin{cases} \|r_i\| \leq \tau_i & \text{en absence de défaut} \\ \|r_i\| > \tau_i & \text{en présence de défaut} \end{cases} \quad (5.18)$$

avec $\tau_i, i=1,...,n_y$ sont les éléments du vecteur τ qui représente le vecteur des seuils de faible valeur à définir.

Finalement, le problème de détection de défauts du système LPV défini par (5.3) se réduit en une vérification des conditions (5.18).

5.3.3.2 Etape de localisation des défauts

Dans cette phase, après que le défaut est détecté au niveau du processus, la tâche principale du système de localisation est de chercher la source de ce défaut.

L'ensemble des sources de défaut possibles est répartie en trois types principaux :

- les défauts d'actionneurs qui affectent l'étage de l'entrée,
- les défauts de mesure ou de capteurs qui affectent l'étage de la sortie,
- les défauts de système ou les défauts paramétriques qui font varier les paramètres du système.

La *Matrice de Signature de Défaut* (FSM) peut être utilisée comme un outil efficace de discrimination entre ces trois sources de défaut.

a) Matrice de signature de défauts (FSM)

La localisation de défauts à travers les signaux de résidus consiste à déterminer la source de défaut qui affecte le système à l'aide de leurs impacts sur les signaux de résidus.

Considérons un vecteur de défauts envisagés $f(t)=[f_1(t),...,f_n(t)]^T$ d'ordre n , l'évaluation des résidus permet d'obtenir une matrice d'indicateurs de défauts :

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \cdots & \phi_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n_y,1} & \cdots & \phi_{n_y,n} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Où chaque indicateur de défaut est conditionné par :

$$\phi_{i,l} = \begin{cases} 1 & \text{si le résidu } r_i \text{ est affecté par le défaut } f_l \\ 0 & \text{si le résidu } r_i \text{ n'est pas affecté par le défaut } f_l \end{cases} \quad (5.20)$$

La méthode de localisation des défauts standards consiste à exploiter la relation définie par le produit cartésien des deux ensembles en considérant :

$$FSM \in \phi \times f \quad (5.21)$$

Chaque élément FSM_{il} de la matrice FSM est un produit de $\phi_{i,l} \times f_l$, elle est définie comme suit :

$$FSM = \begin{bmatrix} \phi_{1,1}f_1 & \cdots & \phi_{1,n}f_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n_y,1}f_1 & \cdots & \phi_{n_y,n}f_n \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

La matrice FSM considère l'influence de chaque défaut sur chaque résidu. Cette matrice est évaluée à chaque intervalle de scrutation de défaut à travers les conditions (5.18).

Dans plusieurs cas pratiques, le nombre réduit des signaux des résidus ne permet pas une distinction entre les différents défauts possibles, comme dans le cas où le nombre de défauts est un multiple du nombre de résidus. Ce problème limite la localisation par la matrice FSM .

Dans le but de renforcer la localisation de défaut par la matrice FSM , on doit générer d'autres signaux de résidus secondaires en utilisant un modèle du système défaillant. L'obtention de ce dernier à travers une technique d'estimation paramétrique permet non seulement une localisation directe de défaut mais aussi la reconstruction de son signal d'évolution et la détermination des éléments FSM_{il} par la suite.

b) Estimation paramétrique du modèle défaillant

L'identification du modèle défaillant présente une importance capitale dans les approches de diagnostic par estimation paramétrique. Dans ce cas, le jeu des signaux d'entrée/sortie est utilisé dans une procédure d'identification LPV globale robuste vis à vis du bruit de mesure. Parmi ces méthodes, la méthode de Marquardt étendue (ELM) [28] et la méthode de *La Variable Instrumentale Raffinée Simplifiée* (SRIV) [14]. Une brève description de la méthode SRIV est présentée dans la partie suivante.

On considère la structure du modèle LPV-ES-TC suivante :

$$\mathcal{S} \begin{cases} A(p_{t_k}, s) \mathcal{X}(t_k) = B(p_{t_k}, s) u(t_k) \\ y(t_k) = \mathcal{X}(t_k) + v(t_k) \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\begin{cases} A(p_{t_k}, s) = s^{n_a} + \sum_{i=1}^{n_a} a_i(p_{t_k}) s^{n_a-i}, \text{ et } a_i(p_{t_k}) = a_{i,0} + \sum_{l=1}^{n_a} a_{i,l} f_l(p_{t_k}), i = 1, n_a \\ B(p_{t_k}, s) = \sum_{j=0}^{n_b} b_j(p_{t_k}) s^{n_b-j}, \text{ et } b_j(p_{t_k}) = b_{j,0} + \sum_{l=1}^{n_a} b_{j,l} g_l(p_{t_k}), j = 0, n_b \end{cases} \quad (5.24)$$

Avec s est l'opérateur différentiel et $u(t_k), y(t_k),$ et $\mathcal{X}(t_k)$ sont les signaux d'entrée, de sortie mesurée et de sortie du modèle LPV. Le signal de bruit $v(t)$ est supposé un bruit blanc à moyenne nulle et non corrélé avec l'entrée $u(t)$. Le système (5.23) est considéré stable pour tout $p(t_k)$ dans la zone d'opération. Il est possible de considérer le modèle LPV-TC précédent comme un système LTI-CT avec une nouvelle structure MISO en reformulant les relations entre les signaux du système (5.23) comme suit :

$$\underbrace{\mathcal{X}^{(n_a)} + \sum_{i=1}^{n_a} a_{i,0} \mathcal{X}^{(n_a-i)}(t_k)}_{F(s) \mathcal{X}(t_k)} + \sum_{i=1}^{n_a} \sum_{l=1}^{n_a} a_{i,l} f_l(p_{t_k}) \underbrace{\mathcal{X}^{(n_a-i)}(t_k)}_{\mathcal{X}_{i,l}(t_k)} = \sum_{j=0}^{n_b} \sum_{l=0}^{n_b} b_{j,l} g_l(p_{t_k}) \underbrace{u^{(n_b-j)}(t_k)}_{u_{j,l}(t_k)} \quad (5.25)$$

Avec $g_0(p_{t_k}) = 1, F(s) = s^{n_a} + \sum_{i=1}^{n_a} a_{i,0} s^{n_a-i}$. Noter que par cette manière la variation temporelle des coefficients est transposée aux signaux d'entrée. Donc, le modèle

LPV est reformulé en un modèle LTI-MISO, avec $n_a n_\alpha + (n_b + 1)(n_\beta + 1)$ entrées

$\{\mathcal{X}_{i,l}\}_{i=1,l=1}^{n_a,n_\alpha}$ et $\{u_{j,l}\}_{j=0,l=0}^{n_b,n_\beta}$ comme suit :

$$y(t_k) = - \left(\sum_{i=1}^{n_a} \sum_{l=1}^{n_\alpha} \frac{a_{i,l}}{F(s)} \mathcal{X}_{i,l}(t_k) \right) + \left(\sum_{j=0}^{n_b} \sum_{l=0}^{n_\beta} \frac{b_{j,l}}{F(s)} u_{j,l}(t_k) \right) + v(t_k), \quad (5.26)$$

$y(t_k)$ peut être réécrit sous forme d'une régression linéaire suivante :

$$y_f^{(n_a)}(t_k) = \Phi_f^T(t_k) \rho + v(t_k), \quad (5.27)$$

Avec $\Phi_f^T(t_k) = \left[-y_f^{(n_a-1)}(t_k) \dots y_f(t_k) - \hat{\mathcal{X}}_{1,1}(t_k) \dots - \hat{\mathcal{X}}_{n_a,n_\alpha}^f(t_k) u_{0,0}^f(t_k) \dots u_{n_a,n_\alpha}^f(t_k) \right]^T$

et $\rho = \left[a_{1,0} \dots a_{n_a,0} \ a_{1,1} \dots a_{n_a,n_\alpha} \ b_{0,0} \dots b_{n_b,n_\beta} \right]^T$

Où $y_f(t_k)$ et $\Phi_f(t_k)$ sont respectivement $y(t_k)$ et $\Phi(t_k)$ filtrés par $F^{-1}(s)$.

Maintenant, on introduit la variable instrumentale $\hat{\zeta}_f(t_k)$ telle que :

$$\hat{\zeta}_f^T(t_k) = \left[-\hat{\mathcal{X}}_f^{(n_a-1)}(t_k) \dots \hat{\mathcal{X}}_f(t_k) - \hat{\mathcal{X}}_{1,1}^f(t_k) \dots - \hat{\mathcal{X}}_{n_a,n_\alpha}^f(t_k) u_{0,0}^f(t_k) \dots u_{n_a,n_\alpha}^f(t_k) \right]^T \quad (5.28)$$

Le critère d'optimisation par la méthode *SRIV* prend la forme suivante :

$$\rho^{\{i+1\}}(N) = \arg \min_{\rho \in \mathbb{R}^{n_p}} \left\| \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\zeta}_f^T(t_k) \Phi_f(t_k) \right] \rho - \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\zeta}_f^T(t_k) y_f^{(n_a)}(t_k) \right] \right\|^2 \quad (5.29)$$

Où la solution à l'itération $(i+1)$ est obtenue par :

$$\rho^{\{i+1\}}(N) = \left[\sum_{k=1}^N \hat{\zeta}_f^T(t_k) \Phi_f(t_k) \right]^{-1} \cdot \sum_{k=1}^N \hat{\zeta}_f^T(t_k) y_f^{(n_a)}(t_k). \quad (5.30)$$

La méthode *RIV* a l'avantage de fournir une estimation consistante et non biaisée, tandis que d'autres méthodes comme la méthode des moindres carrés étendus donne une estimation biaisée et la méthode d'erreur de prédiction nécessite de bonnes conditions initiales [14].

Afin de garantir la convergence de la méthode d'identification proposée, les conditions suivantes doivent être vérifiées.

- 1- Le système doit être excité d'une manière persistante. Si cette condition est vérifiée, l'approche de localisation par estimation paramétrique est plus avantageuse par rapport aux autres méthodes, car elle permet, non seulement la localisation, mais aussi une évaluation fiable du défaut, sachant que les systèmes subissant une excitation persistante sont les systèmes les plus candidates d'être affectés par des défauts.
- 2- Pour assurer une estimation non biaisée du système défaillant, l'intervalle du temps de chaque scrutation doit être suffisamment long. Le temps optimal pour atteindre une bonne estimation dépend du mode de fonctionnement, statique ou dynamique, du système et de son excitation.
- 3- Pour assurer la convergence de la méthode d'estimation, les signaux d'entrées/sorties doivent être bornés, ce qui nécessite la stabilité du système.

5.3.3.3 Etape d'estimation de défauts

Par l'obtention du modèle du système défaillant face au modèle du système sain, on peut déduire une estimation fiable pour les trois types de défauts, comme suit :

- Pour l'ensemble des défauts en entrée, l'utilisation d'une technique basée sur le modèle différentiel dynamique inversé permet de régénérer les signaux de défauts d'entrée à partir des signaux de sortie et le modèle différentiel inversé, l'évaluation du défaut se fait à travers la formule suivante :

$$f(t) = F^{-1}(G_f(\theta), G(\theta), y_f, u) \quad (5.31)$$

Avec $f(t), F^{-1}, G_f(\theta), G(\theta), y_f, u$ sont respectivement le signal de défaut, la fonction d'inversion dynamique, le modèle sain et défaillant, la sortie du système défaillant et l'entrée nominale de commande. Par exemple, pour un système d'ordre deux, le modèle différentiel inversé est construit comme suit :

- Dans le cas LTI :

$$\begin{cases} s^2 y_f(t_k) + a_{1f} \cdot s y_f(t_k) + a_{2f} \cdot y_f(t_k) = b_f \cdot u(t_k) \\ s^2 y_f(t_k) + a_1 \cdot s y_f(t_k) + a_2 \cdot y_f(t_k) = b \cdot u_f(t_k) \end{cases} \quad (5.32)$$

$$u_f(t_k) = b^{-1} (\delta a_1 \cdot s y_f(t_k) + \delta a_2 \cdot y_f(t_k) + b_f \cdot u(t_k)). \quad (5.33)$$

Avec $\delta a_1(p_{t_k}) = a_1 - a_{1f}, \quad \delta a_2 = a_2 - a_{2f}$ et $b \neq 0$.

- Dans le cas LPV :

$$\begin{cases} s^2 y_f(t_k) + a_{1f}(p_{t_k}).sy_f(t_k) + a_{2f}(p_{t_k}).sy_f(t_k) = b_f(p_{t_k}).u(t_k) \\ s^2 y_f(t_k) + a_1(p_{t_k}).sy_f(t_k) + a_2(p_{t_k}).sy_f(t_k) = b(p_{t_k}).u_f(t_k) \end{cases}, \quad (5.34)$$

$$u_f(t_k) = b^{-1}(p_{t_k}) (\delta a_1(p_{t_k}).sy_f(t_k) + \delta a_2(p_{t_k}).y_f(t_k) + b_f(p_{t_k}).u(t_k)). \quad (5.35)$$

Avec $\delta a_1(p_{t_k}) = a_1(p_{t_k}) - a_{1f}(p_{t_k})$, $\delta a_2(p_{t_k}) = a_2(p_{t_k}) - a_{2f}(p_{t_k})$ et $b(p_{t_k}) \neq 0, \forall t$.

- L'estimation d'un défaut système consiste simplement à calculer la différence paramétrique des deux modèles sain et défaillant, ce défaut est représenté par la quantité suivante :

$$\delta\theta(p_{t_k}) = \theta(p_{t_k}) - \theta_f(p_{t_k}) \quad (5.36)$$

Ou plus précisément $\delta\rho = \rho - \rho_f \quad (5.37)$

avec $(\delta\theta, \delta\rho), (\theta, \rho), (\theta_f$ et $\rho_f)$ représentent respectivement l'ampleur du défaut paramétrique estimé, le vecteur des paramètres des modèles sain et défaillant.

- Pour l'ensemble des défauts de sortie, les signaux de résidus constituent une estimation naturelle et directe des défauts. L'évaluation des défauts dans ce cas est donnée par :

$$\delta y(t_k) = y_f(t_k) - \hat{y}(t_k), \quad (5.38)$$

Remarque 5.2 : à la fin de cette étape, on peut signaler trois remarques importantes :

- 1) L'évaluation du défaut par cette méthode est relative à la robustesse de la méthode d'identification utilisée. Plus la méthode est robuste vis-à-vis du bruit, plus l'évaluation du défaut est fiable. Dans cette approche de diagnostic, l'estimation paramétrique du nouveau modèle du système défaillant contribue efficacement au diagnostic du défaut.
- 2) L'utilisation des deux modèles du système sain et défaillant permet de réduire l'ordre du modèle inversé. Par conséquent, on peut réduire l'effet des biais d'estimation sur la construction du signal de défaut.

- 3) Pour reconstruire le signal de défaut d'actionneurs à partir de la relation (5.35), la sortie estimée du modèle du système défaillant est utilisée à la place de la sortie réelle, cette technique permet d'éviter le calcul de la dérivée d'un signal de sortie bruité.

5.4 Application à l'échangeur thermique

L'application de la méthodologie proposée précédemment sur le modèle de l'échangeur thermique (3.10) développée dans le chapitre précédent permet de détecter et d'estimer ses défauts.

5.4.1 Etape de détection de défauts

Le problème de détection de défauts dans l'échangeur de chaleur est formulé à travers des équations des résidus selon la méthodologie proposée précédemment. Pratiquement, seules les deux sorties $T_{c_{out}}$ et $T_{h_{out}}$ sont mesurables. Par conséquent, seulement deux résidus r_c et r_h sont accessibles (le résidu r_c associé à la sortie $T_{c_{out}}$ et le résidu r_h associé à la sortie $T_{h_{out}}$).

L'expression de ces deux résidus est formulée de la manière suivante :

$$\begin{cases} r_c(t_k) = \max\{\bar{r}_c(t_k), 0\} + \min\{\underline{r}_c(t_k), 0\} \\ r_h(t_k) = \max\{\bar{r}_h(t_k), 0\} + \min\{\underline{r}_h(t_k), 0\} \end{cases} \quad (5.39)$$

$$\text{Avec} \quad \begin{cases} \bar{r}_c(t_k) = r_c^0(t_k) - \sigma_c \\ \bar{r}_h(t_k) = r_h^0(t_k) - \sigma_h \\ \underline{r}_c(t_k) = r_c^0(t_k) + \sigma_c \\ \underline{r}_h(t_k) = r_h^0(t_k) + \sigma_h \end{cases} \quad (5.40.a)$$

$$\begin{cases} \sigma_c = \sup_{t_k} |T_{c_{out}}(t_k) - \hat{T}_{c_{out}}(t_k)| \\ \sigma_h = \sup_{t_k} |T_{h_{out}}(t_k) - \hat{T}_{h_{out}}(t_k)| \end{cases} \quad (5.40.b)$$

Avec σ_c et σ_h sont déterminées dans l'état sain de l'échangeur.

Pour simuler un environnement pratique du système, le rapport SNR du signal de bruit $e_c(t_k)$ et $e_h(t_k)$ est choisi de 20 dB de type Gaussien.

Les essais sur les signaux de sortie de l'échangeur montre que les valeurs pour $\sigma_c = 0.3, \sigma_h = 0.6$, et $\tau_c = \tau_h = 0.25$ sont convenables.

Un modèle par blocs dans l'environnement Simulink (figure 5.3) est utilisé pour évaluer les résidus.

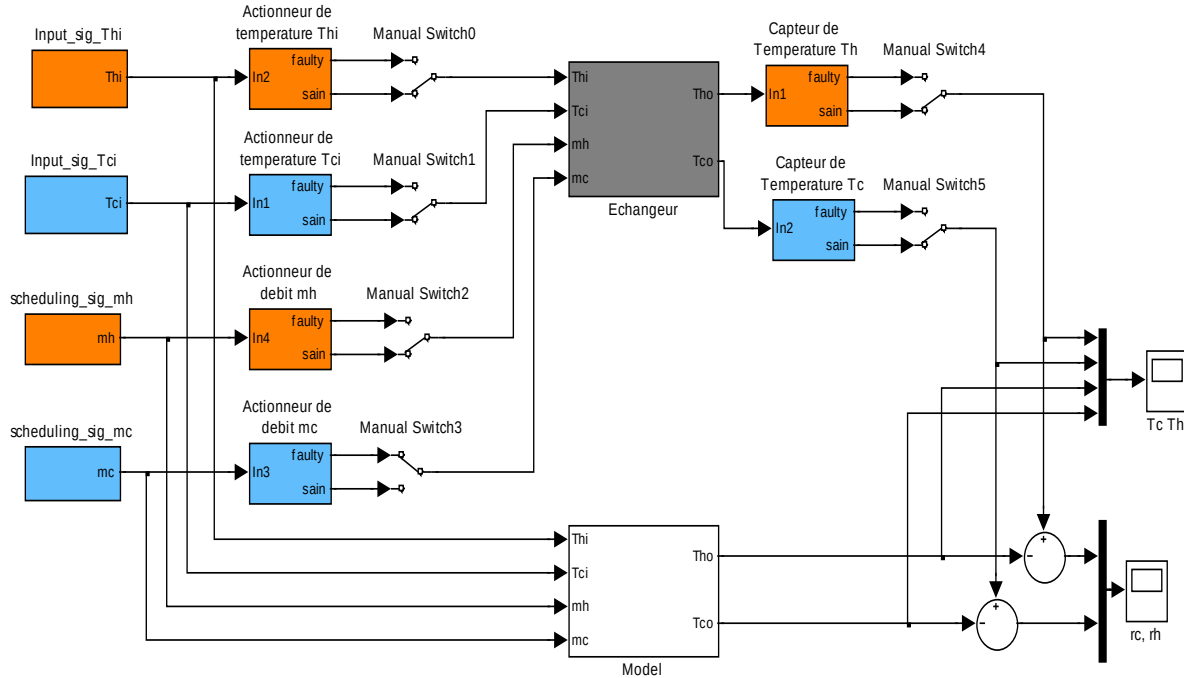


Fig. 5.3 Modèle générateur de résidus r_c et r_h

Finalement, la procédure de détection est testée pour différents signaux de perturbations limités en amplitude. Le choix d'une stratégie basée sur la robustesse passive avec des seuils fixes pour le cas de l'échangeur de chaleur donne une bonne immunité contre les fausses alarmes excitées par des signaux de perturbation limités et de bruit de mesure.

5.4.2 Etape de localisation de défauts

Plusieurs défauts peuvent affecter l'ensemble des organes de l'échangeur (actionneurs, processus, capteurs). On peut constater qu'il y a (14) différents défauts possibles :

- Pour les différentes entrées, (04) défauts d'entrée sont possibles qui sont $\{T_{c_{inf}}, T_{h_{inf}}, \dot{m}_{cf}, \dot{m}_{hf}\}$,
- Pour les deux sorties, (02) défauts sont possibles $\{T_{c_{outf}}, T_{h_{outf}}\}$,
- Pour l'ensemble des transferts du système, (08) défauts sont possibles qui sont $\{H_{ccf}, H_{chf}, H_{hcf}, H_{hhf}, G_{ccf}, G_{chf}, G_{hcf}, G_{hhf}\}$.

L'isolation d'un défaut parmi l'ensemble de (14) défauts possibles avec la matrice de signature de défaut à travers seulement deux résidus r_c et r_h est impossible. Pour simplifier la procédure de localisation, on considère les deux hypothèses suivantes.

Hypothèses :

- 1- L'apparition de deux défauts à la fois n'est pas possible, c'est-à-dire, on aperçoit l'apparition d'un seul défaut dans chaque intervalle de scrutation ΔT .
- 2- Les deux sorties $T_{c_{out}}$ et $T_{h_{out}}$ de l'échangeur de chaleur sont découplées sauf qu'à travers ses entrées, c'est-à-dire que le défaut qui affecte la sortie du coté froid n'affecte pas la sortie du coté chaud et vis versa.

En se basant sur ces deux hypothèses, on peut maintenant distinguer entre trois ensembles de défauts selon le tableau suivant :

r_h	r_c	Description du défaut possible
1	1	Défaut actionneur
0	1	Défaut capteur $T_{c_{out}}$ ou défaut système (partie cc et ch)
1	0	Défaut capteur $T_{h_{out}}$ ou défaut système (partie hc et hh)
0	0	Pas de défaut

Tab. 5.1 Affectation de 03 ensembles de défauts aux résidus r_c et r_h

Le tableau 5.2 d'indicateurs de défauts illustre d'une manière détaillée la sensibilité des résidus r_c et r_h à chaque type de défaut (mentionnés ci-dessus).

r_h	r_c	$T_{c_{out}f}$	$T_{h_{out}f}$	$T_{c_{in}f}$	$T_{h_{in}f}$	$\dot{m}_{cf}$	$\dot{m}_{hf}$	H_{ccf}	H_{chf}	H_{hcf}	H_{hhf}	G_{ccf}	G_{chf}	G_{hcf}	G_{hhf}
1	1	0 ⁽¹⁾	0 ⁽¹⁾	1	1	1	1	0 ⁽²⁾	0 ⁽²⁾	0 ⁽²⁾	0 ⁽²⁾	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1

Tab. 5.2 Sensibilités des résidus r_c et r_h aux différents défauts possibles

- (1) Selon l'hypothèse 01.
- (2) Le défaut actionneur qui affecte les entrées $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_h$ (considérés comme signaux de séquencement) affecte également l'estimation des transferts $H_{\bullet\bullet}$ mais il est toujours

considéré comme un défaut d'entrée et pas un défaut système. Dans ce cas, les indicateurs de $T_{c_{inf}}$ et $T_{h_{inf}}$ seront masqués à la présence du défaut $\dot{m}_{cf}$ ou $\dot{m}_{hf}$.

Cependant, la sensibilité des signaux des résidus r_c et r_h (selon le tableau 5.2) ne permet pas une bonne distinction entre les différents défauts possibles. En même temps, les sorties partielles des différents transferts, formant la sortie globale ($T_{c_{out}}$ et $T_{h_{out}}$), peuvent aider à la génération d'autres résidus. Pratiquement, ces sorties partielles ne sont pas mesurables (non accessibles), mais peuvent être estimées. Pour cela, la solution proposée dans ce chapitre consiste à utiliser la méthode d'estimation paramétrique *SRIV* proposée précédemment pour estimer ces sorties partielles de l'échangeur de chaleur à l'état défaillant.

Pour pouvoir appliquer la méthode d'estimation *SRIV* sur le modèle de l'échangeur, il est nécessaire de le reconfigurer en une nouvelle forme.

Les deux sorties de l'échangeur $T_{c_{out}}$ et $T_{h_{out}}$ données par (3.10) sont constituées par une somme de plusieurs sorties partielles :

$$\begin{aligned} T_{c_{out}}(s) &= y_{cc}(p, \delta_{cc}(p), s) + y_{ch}(p, \delta_{ch}(p), s) + z_{cc}(s) + z_{ch}(s) \\ T_{h_{out}}(s) &= y_{hc}(p, \delta_{hc}(p), s) + y_{hh}(p, \delta_{hh}(p), s) + z_{hc}(s) + z_{hh}(s) \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\text{où } s^{n_a} y_{\bullet*}(t) + \sum_{i=1}^{n_a} \sum_{l=0}^{n_\alpha} a_{i,l} f_l(p(t)) s^{n_a-i} y_{\bullet*}(t) = \sum_{j=0}^{n_b} \sum_{l=0}^{n_\alpha} b_{j,l} f_l(p(t)) s^{n_a-i} T_{\bullet_{in}}(t - \delta_{\bullet*}), \quad (5.42)$$

$$s^{n_c} z_{\bullet*}(t) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i s^{n_c-i} z_{\bullet*}(t) = \sum_{j=0}^{n_d} d_j s^{n_d-j} \dot{M}_{\bullet_{in}}(t) \quad (5.43)$$

avec $n_a = n_c = 2, n_b = n_d = 0, n_\alpha = 8, f_0 = 1, (\bullet*) \in \{cc, ch, hc, hh\}$. Noter que chaque sortie partielle $\bullet$ ($y_{\bullet*}$ ou $z_{\bullet*}$) a un lien direct et unique avec l'entrée $*$.

Après le traitement des retards dynamiques $\delta_{\bullet*}(p)$, les notations des termes de sorties partielles sont données par une forme généralisée comme suit :

$$A(p_{t_k}, s, \rho) \chi(t_k) = B(p_{t_k}, s, \rho) u(t_k), \quad (5.44)$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} A(p_{t_k}, s, \rho) = s^{n_a} + \sum_{i=1}^{n_a} \sum_{l=0}^{n_\alpha} a_{i,l} f_l(p_{t_k}) s^{n_a-i} \\ B(p_{t_k}, s, \rho) = \sum_{j=0}^{n_b} \sum_{l=0}^{n_\alpha} b_{j,l} f_l(p_{t_k}) s^{n_a-i} \\ \chi \in \{y_{\bullet*}, z_{\bullet*}\} \end{cases} \quad (5.45)$$

Par cette manière de représentation on peut garder la même représentation que dans (5.42), avec $n_\alpha = 8$ pour la partie LPV et $n_\alpha = 0$ pour la partie LTI.

L'obtention du modèle du système défaillant aide, non seulement, à une localisation directe du défaut, mais facilite la tâche pour l'étape d'estimation du défaut.

A la fin de cette étape on obtient, à côté des résidus r_c et r_h , huit (08) résidus secondaires à partir des sorties partielles de l'échangeur. Ces résidus représentent la différence entre les sorties du modèle sain et défaillant, et se sont définies comme suit :

$$\begin{cases} r_{1c} = y_{cc} - y_{ccf} \\ r_{2c} = y_{ch} - y_{chf} \\ r_{3c} = z_{cc} - z_{ccf} \\ r_{4c} = z_{ch} - z_{chf} \\ r_{1h} = y_{hc} - y_{hcf} \\ r_{2h} = y_{hh} - y_{hhf} \\ r_{3h} = z_{hc} - z_{hcf} \\ r_{4h} = z_{hh} - z_{hhf} \end{cases} \quad (5.46)$$

5.3.3 Etape d'estimation des défauts

L'estimation du signal du défaut se fait à travers le modèle différentiel inversée pour les défauts actionneurs et le calcul des quantités différentielles pour les défauts système et les défauts capteurs, avec la méthode proposée précédemment. A condition que les paramètres du modèle sain et défaillant de l'échangeur de chaleur soient bien identifiés, on peut garantir une bonne reconstruction de défaut.

5.5 Résultats de simulation

Pour démontrer l'efficacité de la méthodologie de diagnostic proposée ci-dessus, un défaut actionneur sera diagnostiqué en considérant le scénario suivant :

Scénario : défaut multiplicatif sur l'actionneur $\dot{m}_c$:

Dans ce scénario, « un défaut multiplicatif $\dot{m}_{cf}$ se présente à l'instant $t_k = 150$ seconde, au niveau de la vanne de commande qui sert à régler le débit massique $\dot{m}_c$ du coté froid. Ce défaut ajoute une quantité $\lambda.\dot{m}_c$ à l'entrée nominale $\dot{m}_c$ dans chaque ouverture et fermeture de la vanne ».

Solution :

Ce défaut est représenté par $\dot{m}_{cf} = \dot{m}_c + \lambda.\dot{m}_c$ (on prend $\lambda = 0.75$).

Le jeu des signaux d'entrée et de sortie est présenté sur les figures suivantes :

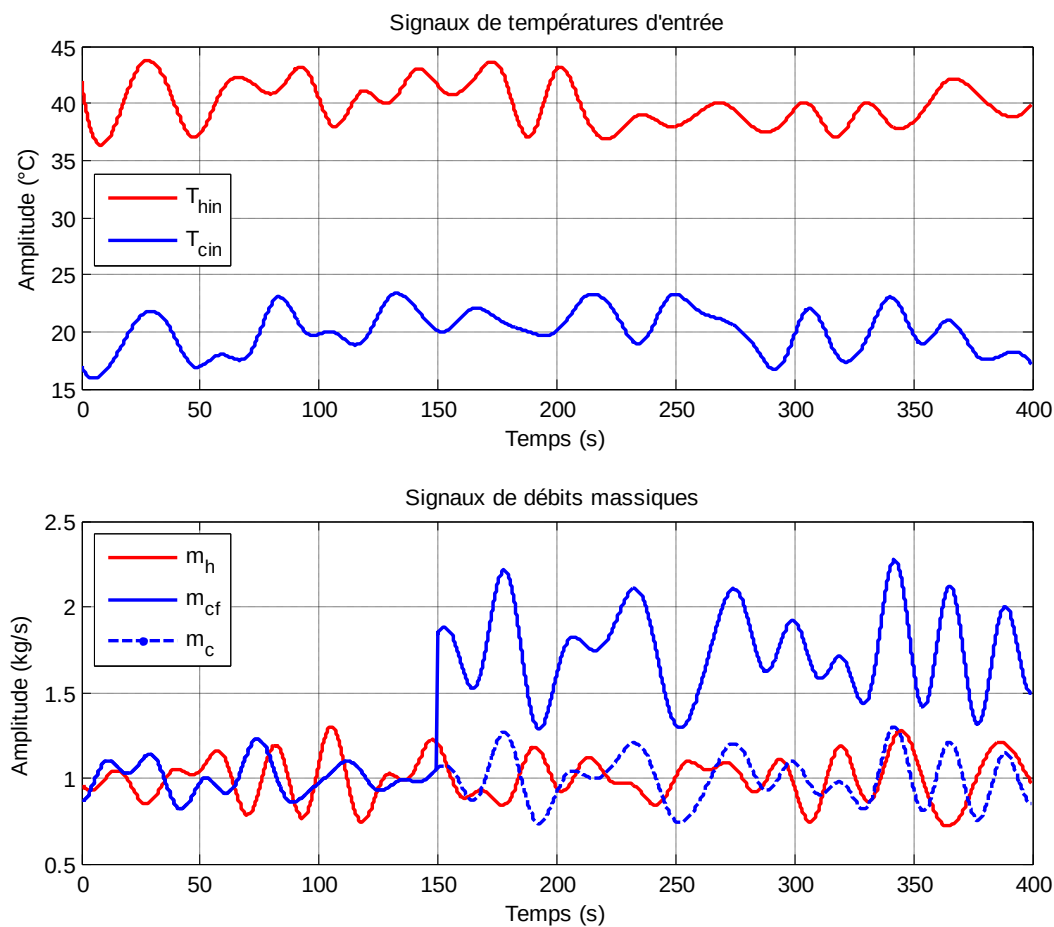


Fig. 5.4 Jeux des signaux d'entrée

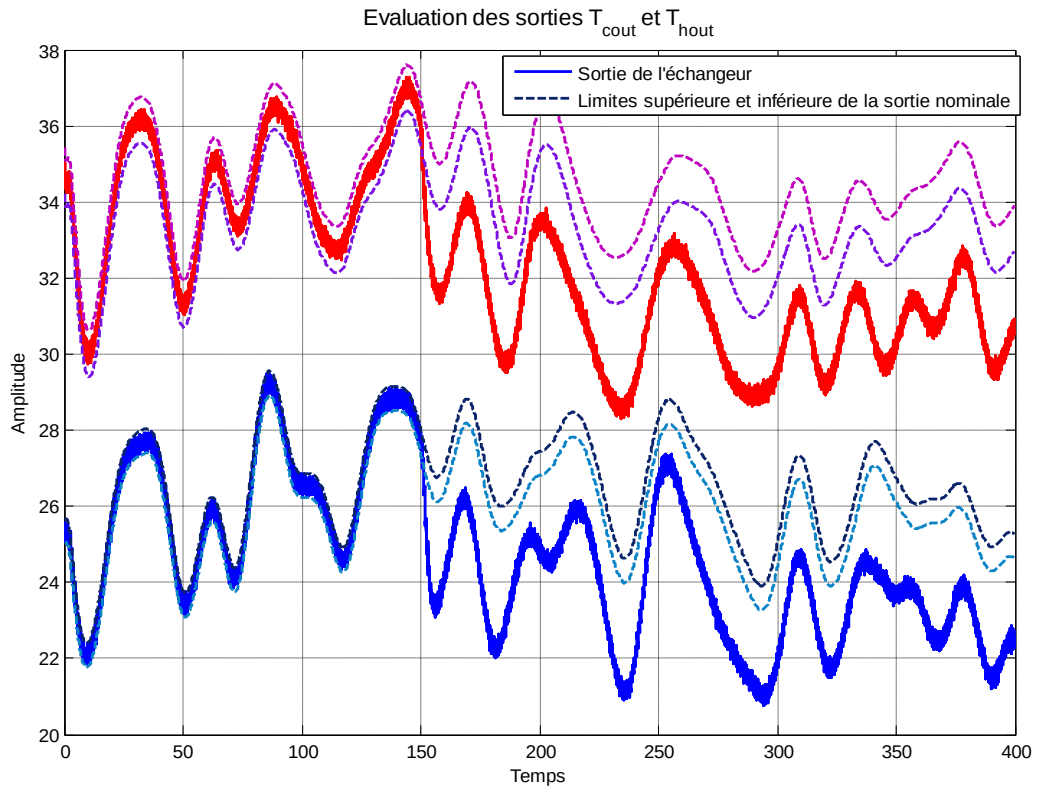


Fig. 5.5 L'impact du défaut $\dot{m}_{cf}$ sur les signaux de sortie $T_{c_{out}}$ et $T_{h_{out}}$

L'impact du signal de défaut d'actionneur s'apparait clairement dans les deux signaux de sortie de l'échangeur (figure 5.5), les valeurs de ces deux sorties sortent de la bande nominale du système.

Les signaux de résidus sont évalués, et la figure 5.6 montre leurs évolutions temporelles.

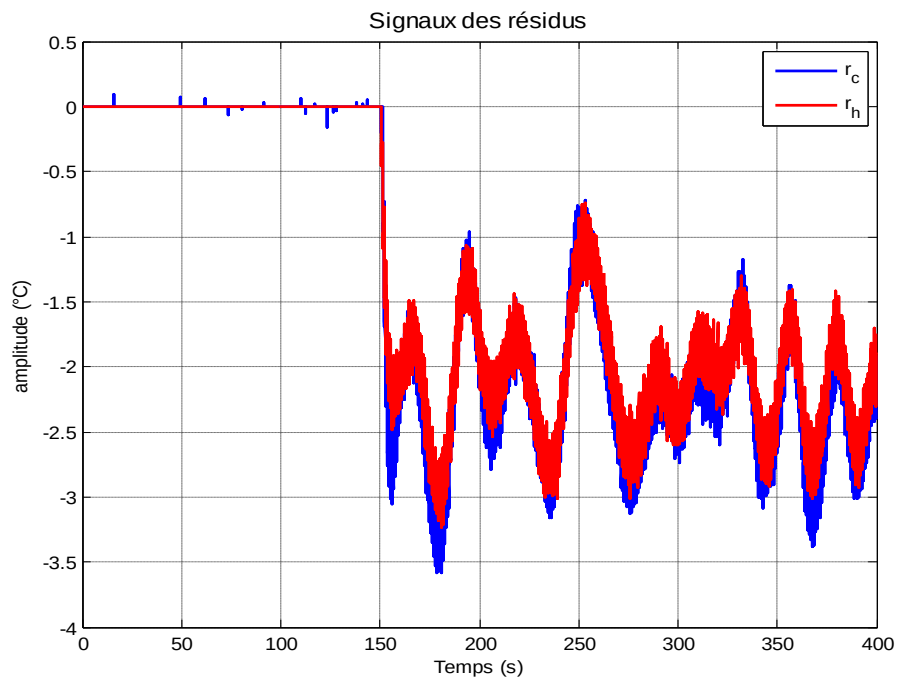


Fig. 5.6 Signaux de résidus

Il est clair à partir de la figure 5.6 que la technique de détection que nous avons adoptée présente une bonne immunité contre les signaux de bruit et les erreurs de modélisation avant l'instant 150 sec. Par contre, elle reflète instantanément les deux signaux de résidu après cet instant. Le calcul des normes des deux signaux de résidu dans ce cas donnent $\|r_c\| = 360.62$, $\|r_h\| = 336.38$. La valeur de ces deux normes dépasse largement les seuils de détection $((\tau_c, \tau_h) = (0.25, 0.25))$, ce qui signale l'existence d'un défaut dans l'échangeur.

L'évaluation binaire de la matrice de signature de défaut à travers les valeurs des deux résidus r_c et r_h , (selon le tableau 5.2), signale globalement l'apparition d'un défaut actionneurs. Cette matrice prend dans ce cas la valeur suivante :

$$FSM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \times T_{cin_f} & 1 \times T_{hin_f} & 1 \times \dot{m}_{c_f} & 1 \times \dot{m}_{h_f} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times T_{cin_f} & 1 \times T_{hin_f} & 1 \times \dot{m}_{c_f} & 1 \times \dot{m}_{h_f} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le processus d'identification de la partie froide permet, par la suite, d'estimer le nouveau modèle du système défaillant à partir de l'instant d'apparition de défaut c'est-à-dire $t_k = 150 \text{ sec}$.

Remarque 5.3 : La procédure d'identification LPV par l'approche globale dans le cas de l'échangeur de chaleur, a rencontré des difficultés pour converger. Ce problème est dû à plusieurs causes possibles, les conditions initiales, le nombre important de paramètres (60×2 paramètres), l'efficacité de la méthode d'identification et l'excitation persistante sont des facteurs importants pour résoudre ce problème. Ce problème donc reste une perspective à atteindre pour les futurs travaux. Toutefois, dans cette étape de localisation, on peut supposer qu'une connaissance à priori suggère que le défaut a affecté un des actionneurs de débit massique, mais sans avoir connaître exactement lequel. Cette information nous permet d'utiliser une procédure d'identification LTI pour estimer les nouvelles fonctions de transferts G_{ccf} et G_{chf} utilisées pour la localisation de ce défaut.

Le signal de sortie nécessaire pour l'estimation est calculé à partir de la différence entre la sortie de la partie LPV du modèle global sain et la sortie de l'échangeur défaillant. Cette sortie et la sortie du modèle estimé (représenté par les fonctions de transfert G_{ccf} et G_{chf}) sont représentées par la figure suivante :

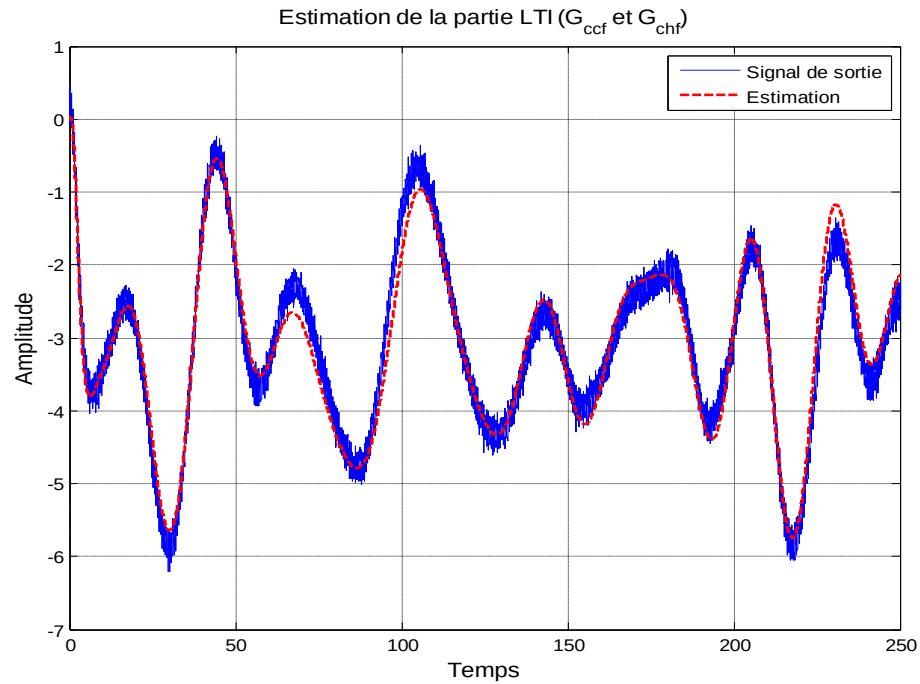


Fig. 5.7 Estimation de la partie LTI (G_{ccf} et G_{chf})

En rappelant que les défauts affectant les transferts H_{ccf} et H_{chf} en présence de défaut sur les actionneurs de débits massiques seront masqués (selon la note (2) du tableau 5.2). L'obtention du nouveau modèle de la partie LTI (c.à.d. G_{ccf} et G_{chf}) permet de calculer les sorties partielles puis les normes normalisées des résidus partiels qui sont représentés par la figure suivante :

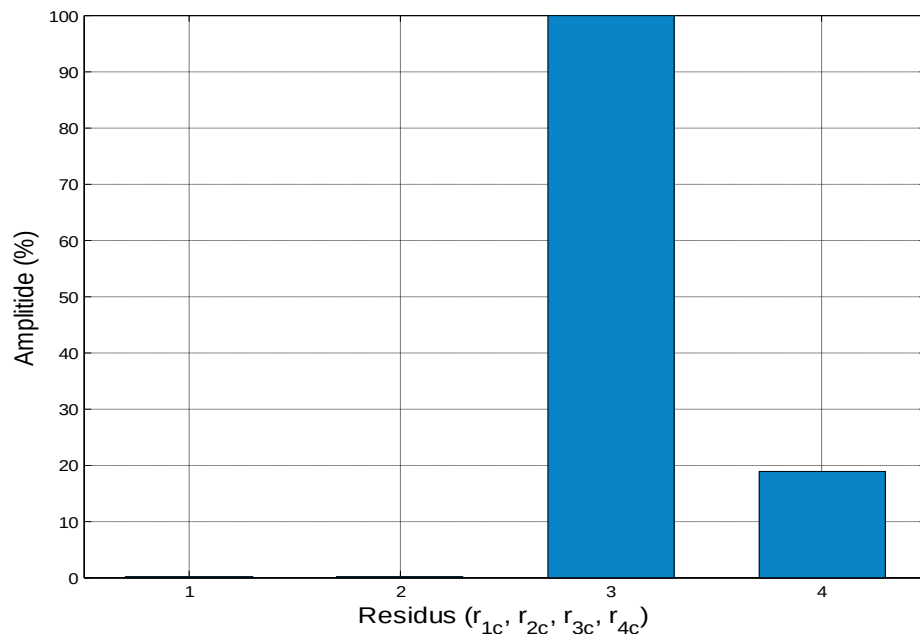


Fig. 5.8 Valeurs relatives des normes des signaux de résidus secondaires.

A travers le calcul des résidus partiels, on peut localiser directement la source de défaut. Ici le résidu r_{3c} correspond au défaut d'actionneur de débit massique m_c , prend l'amplitude max au sens de la norme 2. Tandis que les deux résidus r_{1c} et r_{2c} sont masqués à la présence de r_{3c} ou r_{4c} , selon la condition mise dans l'hypothèse n°1.

Finalement, Le modèle dynamique différentiel inversé est utilisé pour reconstruire le signal de défaut d'actionneur, les deux figures suivantes montrent le résultat de cette opération :

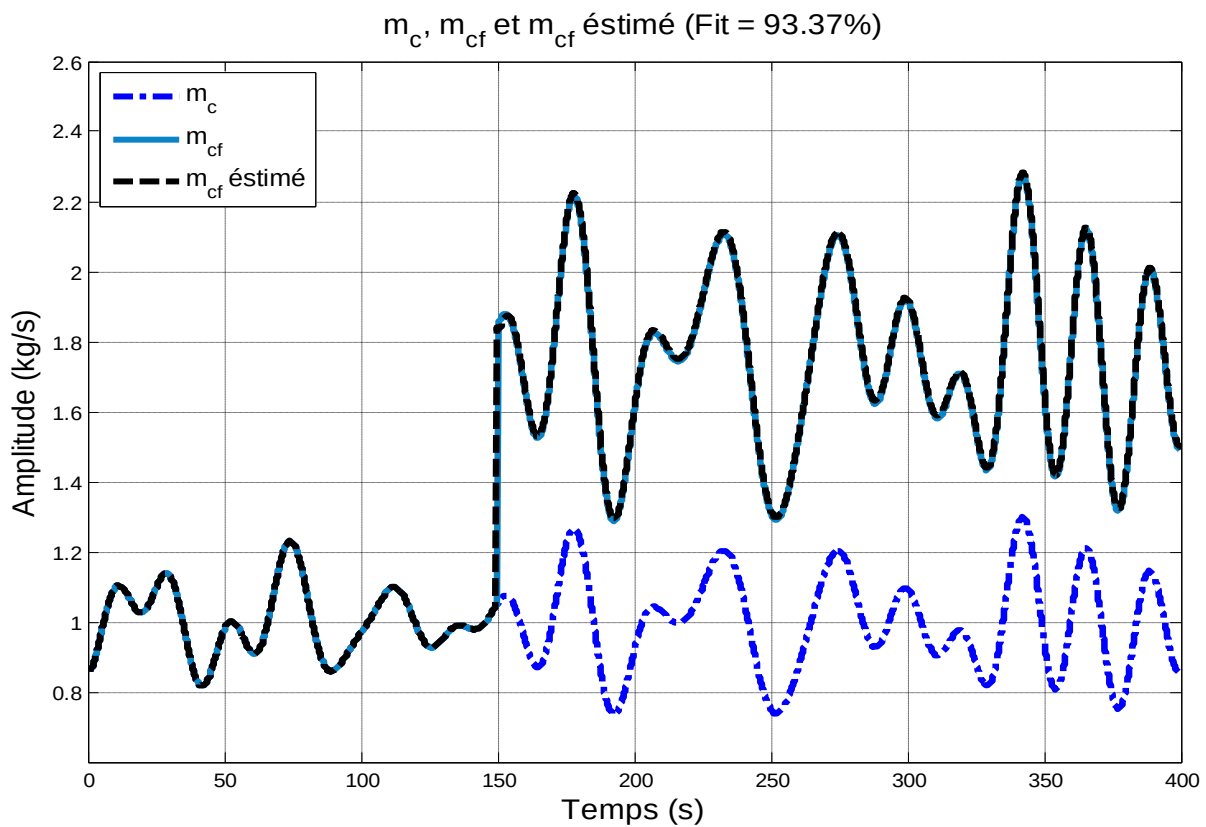


Fig. 5.9 Reconstruction du signal de défaut d'entrée m_{cf}

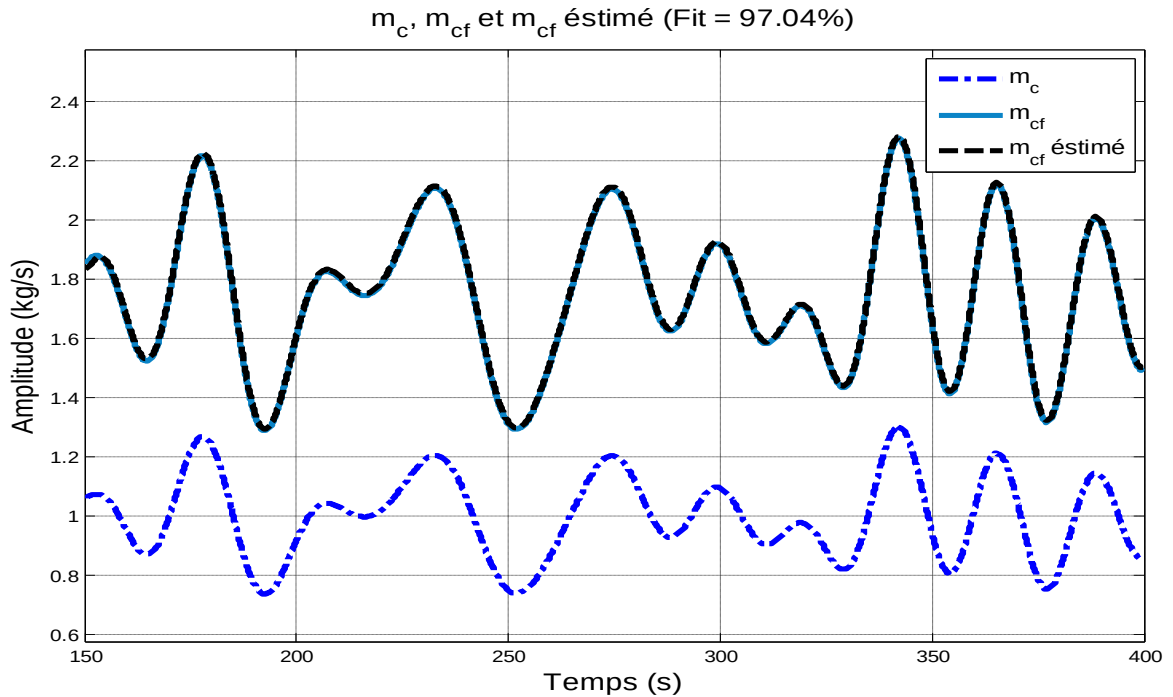


Fig. 5.10 Reconstruction du signal de défaut m_{cf} à partir de l'instant 150 sec.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, un ensemble de techniques de diagnostic de défaut pour un système LPV-MIMO incertain sont présentées.

La méthode de Détection de défaut est basée sur une approche de robustesse passive particulière. Dans cette approche, on vérifie si les mesures sont à l'intérieur des bornes de prédiction fournies par le modèle LPV-MIMO incertain de l'échangeur. Plus précisément, les limites supérieures et inférieures des incertitudes de modélisation et de bruit de mesure sont prises en compte à l'aide de doubles seuils fixes de limitation. Ces deux seuils forment une bande de sécurité pour le système nominale dans son état sain, et ses valeurs sont calculées telles que toutes les données mesurées, en absence de défauts, sont à l'intérieur des limites prédites. Un deuxième seuil de détection est utilisé afin de garantir une bonne immunité contre les fausses alarmes provoquées par différents signaux de bruit et de perturbation dans les environnements trop bruyants. Une signalisation de défaut est effectuée si la norme du signal de résidu dépasse le deuxième seuil de détection.

La méthode de Localisation de défauts est basée sur la matrice de signature de défauts et une technique d'estimation paramétrique. L'estimation LPV globale de l'échangeur a rencontrée des difficultés, mais avec une connaissance partielle à priori sur le type de défaut, une estimation LTI est utilisée à la place. L'estimation LPV globale de l'échangeur reste donc une perspective pour les futurs travaux.

Enfin, **La méthode d'Estimation de défauts** utilise les deux modèles sain et défaillant pour reconstruire le signal de défaut d'actionneur (à travers un modèle dynamique inversé), et le signal de défaut de système (à travers le calcul la différence paramétrique), tandis que le signal de résidu représente lui-même une reconstruction naturelle et directe du signal de défaut de mesure. Les informations acquises de cette étape sont utilisées pour rafraichir les valeurs de la matrice de signature de défaut. Cette matrice peut être utilisée dans un système de supervision.

Les résultats de simulation obtenus montrent bien l'efficacité des différents techniques appliquées au système à échange thermique.

Conclusion générale et Perspectives

Les systèmes LPV peuvent être vus comme une extension de la classe des systèmes LTI, où les relations entre les signaux du système sont linéaires, tandis que les paramètres du modèle sont des fonctions d'un signal exogène ou endogène. En raison de cette variation des paramètres, la classe de système LPV constitue une étape intermédiaire entre les systèmes Linéaires Invariants dans le Temps (LTI) et Non Linéaires ou Variants dans le temps. Par conséquent, cette approche permet d'étendre considérablement les méthodes d'analyse linéaires aux domaines des systèmes non linéaires. Aujourd'hui, l'approche LPV constitue une alternative intéressante et un outil très utilisé dans le domaine de la modélisation des systèmes non linéaires.

Le modèle LPV proposé dans ce travail représente une contribution à la modélisation à temps continu des systèmes NL, dans le temps où la plupart des méthodes d'identification LPV sont développées dans le temps discret. L'objectif est de connaître la capacité de ce type de représentation d'approximer le comportement dynamique d'un système non linéaire avec une structure de complexité moindre. Notre attention s'est portée sur la modélisation LPV à temps continu d'un échangeur de chaleur réel à courants croisés (un banc d'essai GEA VT04 CD-16) à travers une approche locale. Le choix d'un modèle à temps continu donne une représentation naturelle du système physique, comme il permet une interprétation physique des paramètres du système, et offre l'avantage pour la simulation, l'étude des performances, la synthèse des correcteurs etc.

Les résultats présentés dans ce mémoire montrent bien que la structure du modèle utilisée, l'approche d'identification choisie, ainsi que la méthodologie suivie offrent ensemble : un traitement ordonné du problème, des résultats précis, et une bonne capture de l'évolution des paramètres d'un système non linéaire à paramètres variants lié à des retards dynamiques.

La deuxième partie dans ce travail consiste à utiliser le modèle obtenu dans la première partie pour diagnostiquer les différents défauts possibles qui peuvent

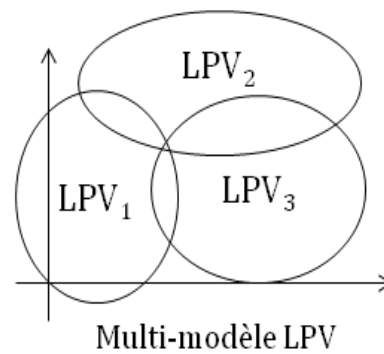
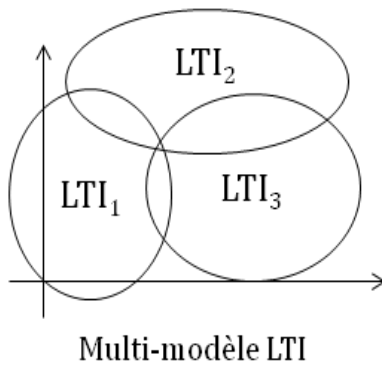
affecter l'échangeur de chaleur. La méthode de détection de défauts proposée utilise une approche par robustesse passive pour détecter les défauts dans les différentes parties du système. Cette approche prend en considération les incertitudes paramétriques du modèle LPV. Puis une technique de localisation basée sur la Matrice de Signature de Défaut et une technique d'identification LPV globale permet de localiser le défaut et faciliter la reconstruction du signal de défaut. Dans l'étape d'estimation, les causes sont remontées aux effets par l'utilisation d'une technique d'inversion dynamique pour évaluer l'ampleur du défaut. Les résultats de simulation prouvent l'efficacité de la méthodologie proposée dans le traitement des problèmes LPV MIMO incertains.

Comme perspectives pour les futurs travaux on prévoit des solutions pour plusieurs problèmes dans le domaine d'identification et de diagnostic LPV telles que :

- La détermination des formules mathématiques pour concrétiser les notions de l'excitation persistante dans le cas des systèmes LPV.
- Par l'utilisation d'une approche d'identification LPV globale on peut réduire le modèle LPV global de l'échangeur thermique en éliminant la partie LTI, et on cherche la possibilité de réduire l'ordre des polynômes des fonctions paramétriques.

$$\begin{bmatrix} T_{c_{out}}(t) \\ T_{h_{out}}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (H_{cc}(s, \mathbf{p}, \delta_{cc})) & (H_{ch}(s, \mathbf{p}, \delta_{ch})) \\ (H_{hc}(s, \mathbf{p}, \delta_{hc})) & (H_{hh}(s, \mathbf{p}, \delta_{hh})) \end{bmatrix}}_{LPV} \begin{bmatrix} T_{c_{in}}(t) \\ T_{h_{in}}(t) \end{bmatrix}$$

- Pour modéliser les systèmes NL compound, la notion d'une représentation multi-modèle LTI peut aussi s'étendre dans le cas LPV pour contenir plusieurs espaces de fonctionnement.



- Dans le cas d'une dégradation d'un élément du processus, le caractère graduel du signal de défaut provoque un changement paramétrique. Le signal du défaut dans ce cas est considéré comme un signal de séquençement non mesurable. Ce problème peut être résolu en utilisant le modèle nominal et une approche par observateur LPV pour estimer le signal de défaut, considéré comme un état augmenté du système.
- Comme une nouvelle approche d'identification des systèmes LPV, on propose l'identification directe des trajectoires paramétriques, puis l'interpolation de ces trajectoires par une méthode d'interpolation convenable.

$$\{ Y(t), U(t), P(t) \} \Rightarrow \theta(p(t), \alpha_{ij}) \Rightarrow \{ \alpha_{ij} \},$$

Avec ce nouveau concept, on peut diminuer considérablement la complexité des approches globales et minimiser le temps de calcul. Dans ce cas, la méthode d'interpolation est choisie selon la complexité des trajectoires paramétriques. Ce nouveau concept ainsi, donne la possibilité de générer des signaux de résidus au niveau des fonctions paramétriques, ce qui donne aux signaux de résidus une la possibilité de représenter une dégradation du rendement du système au niveau de ses paramètres. Par contre, les méthodes d'optimisation actuellement existantes doivent être adaptées à ce nouveau concept.

- Les approches de diagnostic par estimation paramétrique sont souvent pénalisées par le temps de calcul, tandis que la rapidité d'évaluation du défaut est l'un des objectifs principaux du système de diagnostic. L'utilisation des générateurs instantanés de défaut en se basant sur une technique d'inversion dynamique du modèle nominal s'avère un peu plus intéressante si les problèmes liés à cette méthode sont traités d'une manière efficace.

Annexe A

Exemples de systèmes non-linéaires supposés linéaires par zone.

Exemple A.1: (exemple d'un système non linéaire : moteur à courant continue)

Considérons un moteur à courant continue à excitation séparée, avec une tension nominale V_n comme signal d'entrée, et une vitesse nominale v_n comme signal de sortie. Ce moteur à courant continue est souvent considéré par un électrotechnicien comme un système linéaire. Cette hypothèse est vraie si on néglige la légère non-linéarité de ce système dans une zone de fonctionnement limitée. Tandis que ce système est pratiquement un système non linéaire, car les phénomènes de non linéarité accidentelle sont applicables pour ce système de la manière suivante :

Au démarrage, si on augmente progressivement la tension d'entrée on voit que le système ne répond pas dans toute la plage des tensions faibles qu'elles soient positives ou négatives, c'est la *zone morte* du moteur. Après un certain *seuil* de niveau de tension qui représente une limite inférieure de démarrage, le moteur accélère proportionnellement avec la tension d'entrée. Après certain limite supérieur la vitesse du moteur se fixe même avec l'augmentation de la tension d'entrée, c'est le phénomène de *saturation*.

Exemple A.2 (Circuit RLC)

Considérons le circuit électrique suivant :

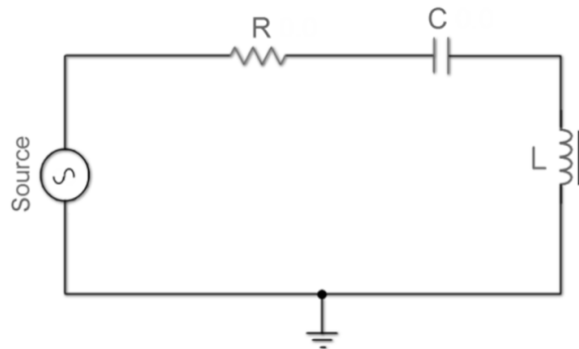


Fig. A.1 circuit RLC alimenté par une source de tension.

L'équation différentielle qui représente le modèle du système relie la tension $v(t)$ et le courant $i(t)$ pour ($t \geq 0$) dans le circuit électrique représenté dans la figure 1.10. On admettra que la capacité n'est pas chargée au temps $t = 0$, que le courant i est nul pour $t = 0$ et que l'inductance L est de noyau ferromagnétique.

- D'après la loi de Kirchhoff relative aux tensions, la tension appliquée $v(t)$ est égale à la somme des chutes de tension v_R , v_L et v_C à travers de la résistance R , de l'inductance L et de la capacité C respectivement. ainsi

$$v = v_R + v_C + v_L = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (A.1)$$

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dv}{dt} \quad (A.2)$$

Typiquement, on travail dans la zone linéaire de ce circuit, et on suppose que les grandeurs physiques de ce circuit sont généralement constante, mais ceci n'est qu'une partie de la réalité. Ces grandeurs physiques cachent des non-linéarités.

- Pratiquement la résistance $R(\Omega)$ à la température $T(^{\circ}\text{K})$ est définie par la relation

$$R = R_0(1 + \alpha.(T - T_0)) \quad (A.3)$$

avec R_0 la résistance à T_0 , $\alpha.(1/^{\circ}\text{K})$ un coefficient thermique.

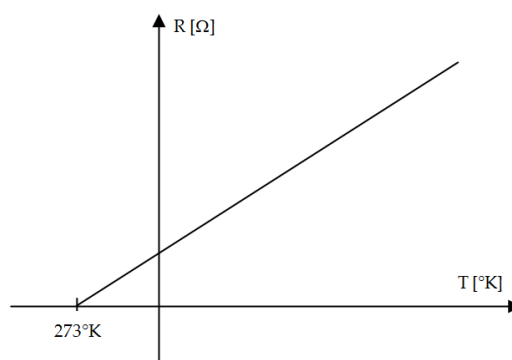


Fig. A.2 courbe de variation d'une résistance R subit à une température ambiante T

(Pratiquement la résistance R est une fonction non constante par rapport au temps).

Encore, la courbe de certain type de résistance n'est pas forcément linéaire. Il existe

des résistances dont la valeur varie fortement avec la température ambiante (thermistances); Pour un conducteur normal, on peut utiliser une approximation linéaire par rapport à la température, si la valeur de sa résistance fixe est insuffisante. De plus, Nous pourrions dire que l'augmentation de l'intensité du courant i qui traverse une résistance R provoque la température T à augmenter, ce phénomène rend la valeur de la résistance R non constante. Par conséquent, le terme $R.i(t)$, dans l'équation A.1, devient : $R(t).i(t)$, c.à.d. un terme non-linéaire.

- La loi de *Faraday* affirme que la différence de potentiel v aux bornes d'une bobine d'induction est égale à la variation dans le temps de la quantité de mailles de flux λ . (Une maille de flux est définie comme étant une ligne de flux magnétique traversant un tour de l'induit de la bobine).

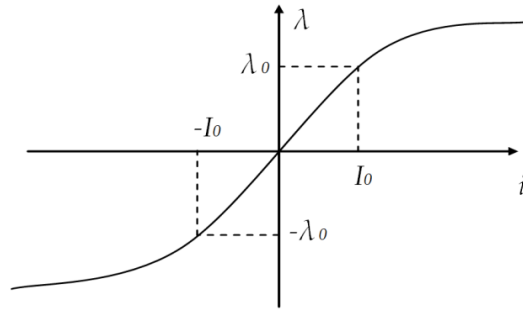


Fig. A.3 courbe de variation de nombre de maille de flux magnétique λ en fonction du courant i de l'inducteur qui traverse une bobine de noyau ferromagnétique [4].

L'équation différentielle (A.1) est valable pour $-I_o < i < I_o$ où la courbe est à peu près une droite. En outre, l'équation qui relie la tension induite v et le courant i , avec

$$v = \frac{d\lambda(i)}{dt} \quad (A.4)$$

et $\lambda(i) = L(i).i \quad (A.5)$

implique que

$$v = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(L(i).i)}{dt} = i. \frac{dL(i)}{dt} + L(i). \frac{di}{dt} \quad (A.6)$$

où les termes $i \cdot \frac{dL(i)}{dt}$ et $L(i) \cdot \frac{di}{dt}$ deviennent non-linéaires.

➤ Le condensateur se charge jusqu'à certain limite, c'est le phénomène de saturation du condensateur qui représente une non linéarité dans l'élément C.

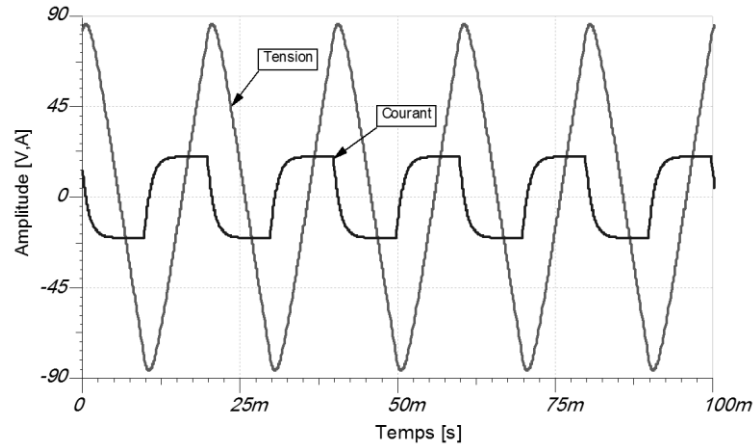


Fig. A.4 courbe de tension et de courant de saturation du condensateur.

Exemple A.3 (système mass-ressort)

Considérons le système formé d'une masse et d'un ressort de la figure A.5 où la force exercée par le ressort, $f_s(x)$ est une fonction non linéaire du déplacement x de la masse par rapport à sa position d'équilibre, comme le montre la figure A.5.

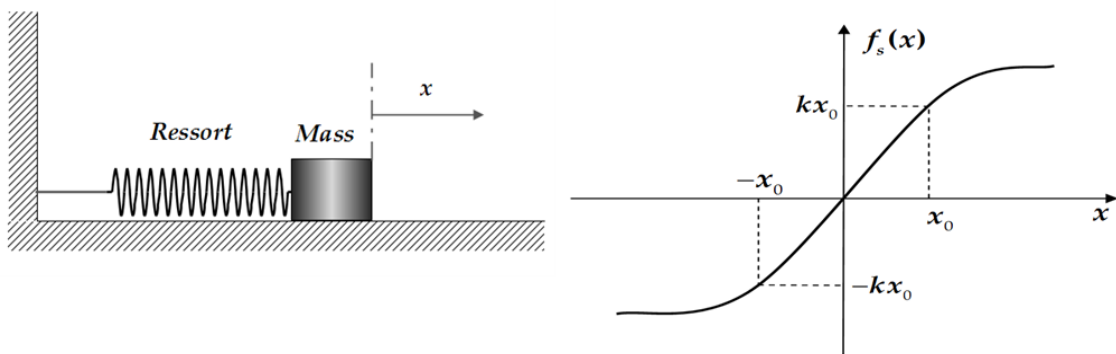


Fig. A.5 système mass-ressort et courbe de variation de la raideur k [4].

L'équation du mouvement de la masse est :

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + f_s(x) = 0 \quad (A.7)$$

Cependant, si la grandeur absolue du déplacement est inférieure ou égale à x_0 , alors $f(x) = k.x$ où k est une constante. Dans ce cas-là, l'équation du mouvement est une équation linéaire à coefficients constants donnée par

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (A.8)$$

Cette équation est valable seulement pour $|x| \leq x_0$. Maintenant, si on suppose que k n'est pas constante, alors l'équation du mouvement (A.7) devient une équation non linéaire.

Exemple A.4 : (*variation du Conductivité thermique*)

La *conduction thermique* (ou diffusion thermique) est un mode de transfert thermique provoqué par une différence de température entre deux régions d'un même milieu, ou entre deux milieux en contact, et se réalisant sans déplacement global de matière, par opposition à la convection qui est un autre transfert thermique. Elle peut s'interpréter comme la transmission de proche en proche de l'agitation thermique : un atome cède une partie de son énergie cinétique à l'atome voisin [77].

Considérons les surfaces planes en série suivantes :

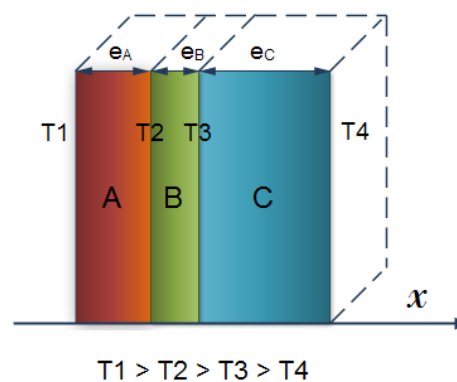


Fig. A.6 *propagation thermique à travers trois surfaces.*

On considère des matériaux A , B et C d'épaisseur respective e_A , e_B et e_C et de conductivité radiative respective λ_A , λ_B et λ_C . Les hypothèses sont identiques à celles d'une surface plane simple. On considère que le contact entre chaque couche est

parfait ce qui signifie que la température à l'interface entre deux matériaux est identique dans chaque matériau (Pas de saut de température au passage d'une interface). Enfin la surface de contact entre chaque matériau est constante ce qui implique un flux surfacique Φ constant. Les résistances thermiques s'additionnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 - T_4 = \left(\frac{e_A}{\lambda_A S} + \frac{e_B}{\lambda_B S} + \frac{e_C}{\lambda_C S} \right) \Phi = (R_{thA} + R_{thB} + R_{thC}) \Phi \\ \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \end{array} \right. \quad (A.9)$$

La constante de proportionnalité λ ($\text{J.m}^{-1}.\text{K}^{-1}.\text{s}^{-1}$) est nommée *conductivité thermique* du matériau. La conductivité thermique est une grandeur physique caractérisant le comportement des matériaux lors du transfert thermique par conduction. Elle représente la quantité de chaleur transférée par unité de surface et par unité de temps sous un gradient de température de un degré par mètre.

Réellement, la *conductivité thermique* λ des métaux n'est pas constante, par contre elle est variable en fonction de la température, les courbes de variation de la conductivité thermique de quelques métaux sont représenté dans la figure suivante :

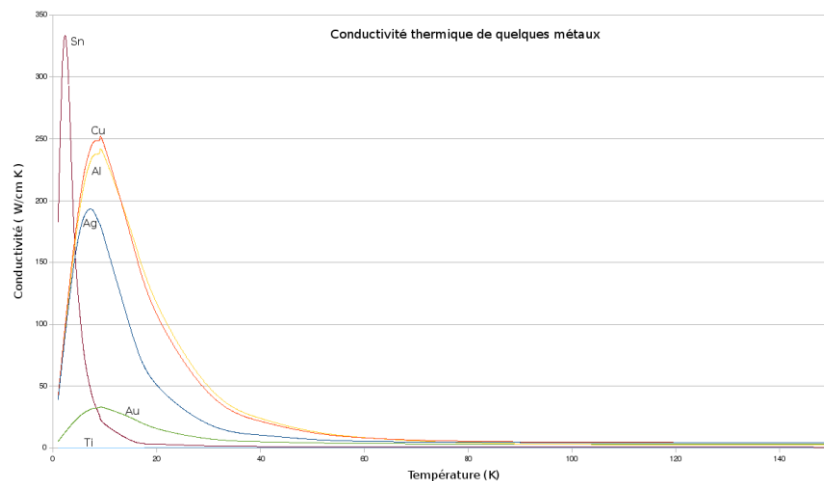


Fig. A.7 Conductivité thermique de quelques métaux [78].

➤ Evolution avec la température

La conductivité thermique évolue avec la température. Pour les matériaux solides,

elle répond à la loi suivante :

$$\lambda = \lambda_0(1 + a\theta) \quad (A.10)$$

Où : λ_0 est la conductivité thermique du matériau à 0 K°, a est un coefficient caractérisant chaque matériau, et est positif pour les isolants thermiques et négatif pour les conducteurs thermiques, θ est la température en Kelvin. Cette équation n'est pas valide pour les hautes températures.

Quand la température augmente, l'isolant thermique perd de sa capacité d'isolation et inversement le conducteur thermique perd de sa capacité de conduction.

➤ Évolution avec l'humidité

Pour les matériaux de construction, il est courant d'utiliser la relation suivante :

$$\lambda = k.\lambda_0 e^{0.08H} \quad (A.11)$$

Où : k est un coefficient de dimension approprié, λ_0 est la conductivité thermique du matériau sec, H est l'humidité relative en pourcentage.

La variation de la conductivité thermique en fonction de la température et de l'humidité rend les équations du modèle (A.9), supposées à priori linéaires, des équations non linéaires.

Les exemples précédant utilise des modèles linéaire pour des systèmes de nature non linéaire, exploitant une partie limitée de zone de fonctionnement de ces systèmes, elle est souvent la partie utile du système et suffisante pour le modéliser dans plusieurs applications. Cependant, la négligence des hypothèses de simplification qui limitent le domaine d'utilisation de modèle linéaire dans le plan non linéaire, et l'utilisation de ces modèles hors de la zone où ils sont conçus, ceci peut déséquilibrer le système de commande et conduire à l'instabilité voire au dysfonctionnement complète du système.

Exemple A.5 : (Utilisation d'un modèle hors de sa zone de fonctionnement) [79].

En se référant à la figure A.8. Tend que le noyau du secondaire du transformateur de courant (TC) n'est pas saturé, le TC reste fonctionner dans la zone linéaire. Si

par mégarde on ouvre le circuit secondaire, quand le courant d'excitation du transformateur dans le primaire continue à circuler inchangé, et comme celui-ci est 100 à 200 fois plus grand que la normale, il produit une densité de flux très élevée qui sature le noyau demi-périodiquement (zone non-linéaire). Lors de ces demi-périodes de saturation, la tension induite est très faible, car le flux change très peu. Cependant, durant les périodes non saturées (passage de la zone non-linéaire à la zone linéaire, et vis versa), le flux change très vite, ce qui peut induire aux bornes du secondaire une tension crête de quelques milliers de volts, assez haute pour provoquer un choc électrique dangereux et endommager les équipements.

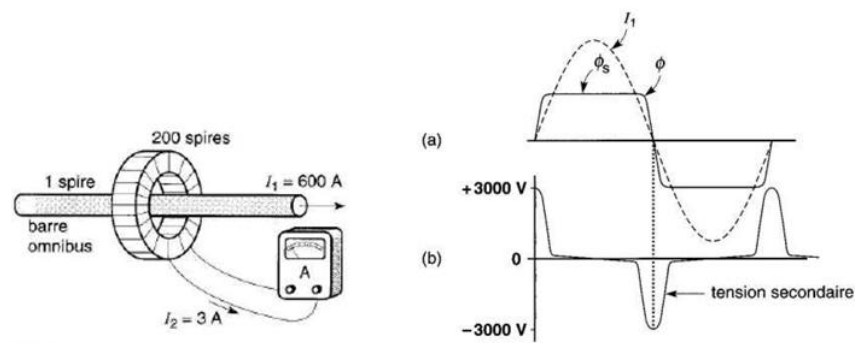


Fig. A.8 montage d'un TC (à gauche) ; à droite : (a) Courant et flux au primaire d'un TC dont le secondaire est ouvert; (b). Forme d'onde de la tension induite au secondaire [79].

Il est montré à travers les exemples précédant que les systèmes supposés à priori linéaires sont réellement des systèmes non linéaires.

Annexe B

Forme Matricielle Polynomiale des Equations Différentielles

Etant donné un système de g équations différentielles linéaires à coefficients constantes écrit sous forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{110}w_1 + \dots + \alpha_{11n_{11}} \frac{d^{n_{11}}}{dt^{n_{11}}} w_1 + \dots + \alpha_{1q0}w_q + \dots + \alpha_{1qn_{1q}} \frac{d^{n_{1q}}}{dt^{n_{1q}}} w_q = 0, \\ \vdots \\ \alpha_{g10}w_1 + \dots + \alpha_{g1n_{g1}} \frac{d^{n_{g1}}}{dt^{n_{g1}}} w_1 + \dots + \alpha_{gq0}w_q + \dots + \alpha_{gqn_{gq}} \frac{d^{n_{gq}}}{dt^{n_{gq}}} w_q = 0, \end{array} \right. \quad (B.1)$$

Chacun de ces équations différentielles comprend des signaux scalaires $w_1, w_2, \dots, w_q$, et certain nombre de ses dérivés. Les α_{gqn} sont des nombres réels.

Le système d'équations différentielles (B.1) peut être réécrit sous forme matricielle polynomiale comme suit [2] :

$$R\left(\frac{d}{dt}\right)w = 0, \quad (B.2)$$

Ou plus explicitement

$$R_0 w + R_1 \left(\frac{d}{dt}\right)w + \dots + R_L \left(\frac{d^L}{dt^L}\right)w = 0, \quad (B.3)$$

Avec $R = (R_0, R_1, \dots, R_L) \in \mathbb{R}^{g \times q}$ est une matrice polynomiale de l'opérateur différentiel ξ , avec $\xi = d/dt$, de coefficients données, et $w^T = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_q]$ est le vecteur de signaux réelles.

On met :

$$r(\xi) = \alpha_0 + \alpha_0 \xi + \dots + \alpha_{n-1} \xi^{n-1} + \alpha_n \xi^n, \quad (B.4)$$

L'application de cette opérateur à une fonction f , est équivalente à :

$$r\left(\frac{d}{dt}\right)f = \alpha_0 f + \alpha_0 \frac{d}{dt} f + \dots + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f + \alpha_n \frac{d^n}{dt^n} f, \quad (B.6)$$

Dans ce cas, le système d'équations différentielles (B.1) s'écrit :

$$R(\xi)w = \begin{pmatrix} r(\xi)_{11} & \cdots & r(\xi)_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r(\xi)_{g1} & \cdots & r(\xi)_{gq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_q \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

Exemple B.1 : considérons la matrice d'équation différentielle $R(\xi) \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ suivante :

$$R(\xi) := \begin{pmatrix} \xi^3 & -2 + \xi & 3 \\ -1 + \xi^2 & 1 + \xi + \xi^2 & \xi \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

$$w = (w_1 \quad w_2 \quad w_3)^T \quad (\text{B.8})$$

L'équation différentielle multi variable $R(\frac{d}{dt})w = 0$ est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{d^3}{dt^3} w_1 - 2w_2 + \frac{d}{dt} w_2 + 3w_3 = 0, \\ -w_1 + \frac{d^2}{dt^2} w_1 + w_2 + \frac{d}{dt} w_2 + \frac{d^2}{dt^2} w_2 + \frac{d}{dt} w_3 = 0. \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Annexe C

Espace vectoriel

Définition A3.1 (Espace vectoriel). [80] *Un espace vectoriel est un ensemble $\mathcal{V}$ et deux opérations appelées addition vectorielle, et multiplication par un scalaire sur lequel les dix propriétés suivantes sont vérifiées:*

Pour tout $u, v, w \in \mathcal{V}$, et pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

- | | |
|---|--|
| <i>(A) $u + v \in \mathcal{V}$</i> | <i>$\Rightarrow$ propriété de fermeture sur l'addition,</i> |
| <i>(B) $a \cdot u \in \mathcal{V}$</i> | <i>$\Rightarrow$ propriété de fermeture sur la multiplication scalaire,</i> |
| <i>(1) $u + v = v + u$</i> | <i>$\Rightarrow$ loi commutative de l'addition,</i> |
| <i>(2) $u + (v + w) = (u + v) + w$</i> | <i>$\Rightarrow$ loi associative de l'addition,</i> |
| <i>(3) $\exists 0 \in \mathcal{V} \mid \forall y \in \mathcal{V}: 0 + y = y = y + 0$</i> | <i>$\Rightarrow$ l'existence de l'élément d'identité pour l'addition,</i> |
| <i>(4) $\exists -u \in \mathcal{V} \mid u + (-u) = 0 = (-u) + u$</i> | <i>$\Rightarrow$ Existence d'inverse additif,</i> |
| <i>(5) $a \cdot (u + v) = (a \cdot u) + (a \cdot v)$</i> | <i>$\Rightarrow$ loi distributive pour un scalaire,</i> |
| <i>(6) $(a + b) \cdot u = (a \cdot u) + (b \cdot u)$</i> | <i>$\Rightarrow$ multiplication sur l'addition,</i> |
| <i>(7) $(a \cdot b)u = a(b \cdot u)$</i> | <i>$\Rightarrow$ associativité de multiplication scalaire,</i> |
| <i>(8) $1 \cdot u = u$</i> | <i>$\Rightarrow$ propriété d'identité pour la multiplication scalaire,</i> |

Les éléments d'un espace vectoriel V sont appelés vecteurs.

Annexe D

Brève description de l'échangeur de chaleur: GEA VT04 CD-16.

Le dispositif expérimental (présenté sur la figure D.1) rentre dans le cadre du projet international DESURENEIR (DEtection et SURveillance de l'Encrassement dans les Echangeurs de chaleur Isolés ou en Réseau). Ce projet (DESURENEIR) est dédié à la détection d'encrassement dans les échangeurs de chaleur. Le banc d'essai GEA VT04 CD-16 a été construit à l'Université de Valenciennes en France pour cet objectif. Il est constitué essentiellement d'un réchauffeur électrique et de trois échangeurs de chaleur de trois fluides (huile, eau, air). Les deux fluides, huile et eau, fonctionnent en circuit fermé tandis que l'air provient directement de la salle de travail.

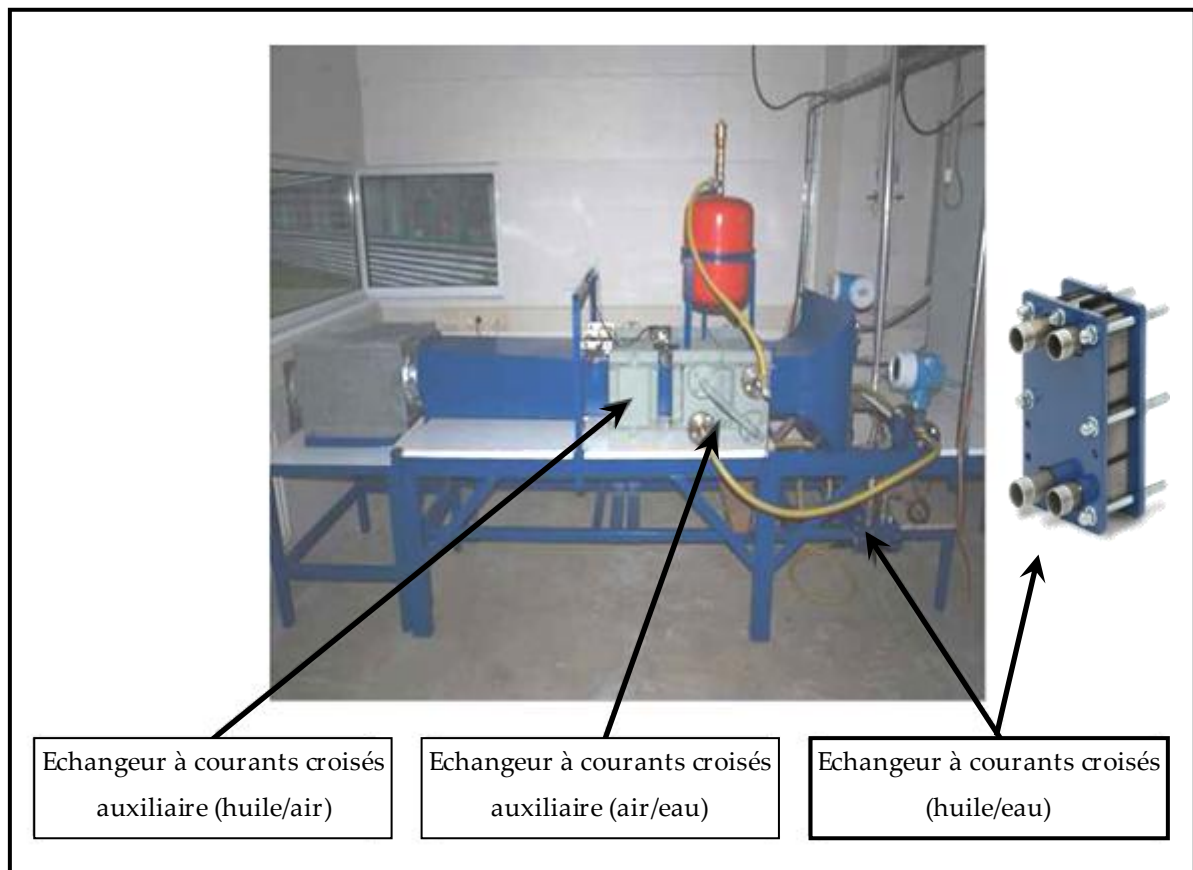


Fig. D.1. *Le dispositif expérimental de l'échangeur : GEA VT04 CD-16.*

Ce dispositif expérimental est composé de trois échangeurs de chaleur à courants croisés:

- 1) Echangeur à courant croisé huile/air ;
- 2) Echangeur à courant croisé air/eau ;
- 3) Echangeur à contre courant huile/eau ;

- **Le fluide de réchauffement : huile**

Le fluide chaud dans l'échangeur de chaleur à contre courants huile/eau est une huile à faible viscosité (aux basses températures). Dans le circuit de chauffage, Un réchauffeur électrique est utilisé pour contrôler la température de l'huile qui est distribuée afin d'assurer une température uniforme. L'huile circule en boucle fermée. Le fluide retenu de l'échangeur à contre courants passe par l'échangeur à courants croisés huile/air pour un refroidissement supplémentaire avant son retour au réchauffeur électrique. L'échauffement de l'huile est plus rapide que son refroidissement. Si la température augmente la viscosité de l'huile diminue et le débit massique augmente, mais avec l'utilisation un régulateur de débit cet effet est limité.

- **Le fluide de refroidissement : l'eau**

L'eau est utilisée comme fluide de refroidissement dans l'échangeur à plaques. Le circuit d'eau provient d'un réservoir sous pression. Après l'échangeur de chaleur à contre courant, il passe par l'échangeur à courants croisés eau/air pour le refroidissement avant de retourner dans le réservoir sous pression. La température d'eau est contrôlée par le flux d'air à travers l'échangeur à courants croisés eau/air. L'échangeur à courants croisés eau/air agit comme un filtre très efficace : il atténue toutes les variations de températures d'entrée et les températures de sortie deviennent presque constantes.

Références bibliographiques

- [1] L. Ljung, T. Glad: **Modeling of dynamic systems**, Parentiss-Hall, 1994.
- [2] J. W. Polderman, J. C. Willems: **Introduction to the mathematical theory of systems and control**, Springer, 1997.
- [3] R. Toscano : **Commande et diagnostic des systèmes dynamiques**, 2ème édition, Thechnosup, 2005.
- [4] J. J. Di Stefano, A. R. Stubberud et I. J. Willams: **Systèmes Asservis**, tome1, McGrawHill, Paris, 1985.
- [5] H. Sandberg: **Linear Time Varying Systems: Modeling and Reduction**, Lund Sweden, 2002.
- [6] R. Toth: **Modeling and identification of Linear Parameter Varying systems**, Springer, 2010.
- [7] M. K. FELLAH : **Asservissements Linéaires Continus**, cour d'automatique 4ème Année Ingéniorat en Electrotechnique, partie 01 Version PDF, Université de Djilali Liabès-Sidi Bel-Abbas, 2007.
- [8] N. K. Peyada, A. Sen and A. K. Ghosh: **Aerodynamic Characterization of HANSA-3 Aircraft using Equation Error, Maximum Likelihood and Filter Error Methods**, Proceedings of the International Multi Conference of Engineers and Computer Scientists, Vol II, 2008.
- [9] Y. Tomita, A. H. Damen and P. J. Van Den Hof: **Equation Error Versus Output Error Methods**, Ergonomics, Vol 35, No 5/6, 55 -564, 1992.
- [10] R. Fletcher: **Practical Methods of Optimization**. 2nd edition, John Wiley & Sons, 1987.
- [11] D. Marquardt: **An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters**, SIAM Journal on Applied Mathematics, 11, 431–441, 1963.
- [12] J. S. Shamma and M. Athans: **Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter varying plants**, Automatica, vol. 27, no. 3, pp. 559–564, 1991.
- [13] D. J. Leith and W. E. Leithead: **Survey of gain-scheduling analysis and design**, Int. J. Control, vol. 73, no. 11, pp. 1001–1025, 2000.
- [14] V. Laurain, R. Toth, M. Gilson, and H. Garnier: **Direct identification of conti-**

- nuous-time LPV input/output models**, IET Control Theory & Applications, 5:878–888, 2011.
- [15] S. Chouaba, B. Sari, A. Chamroo, and T. Poinot : **Identification quasi-lpv floue : application à la modélisation des échangeurs de chaleur**, In Journées Doctorales GRD MACS, Marseille, France, 2011.
 - [16] G. Mercere, H. Palsson, and T. Poinot: **Continuous-time linear parameter varying identification of a cross flow heat exchanger: a local approach**, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 19:64–76, 2011.
 - [17] L. H. Carter and J. S. Shamma: **Gain-scheduled bank-to-turn autopilot design using linear parameter varying transformations**, International Journal of Control 19(5), 1056–1063, 1996.
 - [18] C. Poussot-Vassal and C. Roos: **Flexible Aircraft Reduced-Order LPV Model Generation from a Set of Large-Scale LTI Models**, American Control Conference on O'Farrell Street, 745-750, 2011.
 - [19] C. Novara, F. Ruiz and M. Milanese: **Direct Identification of Optimal SM-LPV Filters and Application to Vehicle Yaw Rate Estimation**, IEEE Transactions On Control Systems Technology, VOL.19, NO.1, 1063-6536, 2011.
 - [20] F.D. Bianchi, H. De Battista and R.J. Mantz: **Wind Turbine control systems principles, Modelling and gain scheduling design**, springer-Verlag, London, 2007.
 - [21] F. Lescher, J. Y. Zhao and A. Martinez: **Multi objective H_2/H_∞ control of a pitch regulated wind turbine for mechanical load reduction**, In Proc. of the European Wind Energy Conf., Athens, Greece, 2006.
 - [22] R. Tóth, and D. Fodor: **Speed sensorless mixed sensitivity Linear Parameter Variant H_∞ control of the induction motor**, In Proc. of the 43rd IEEE Conf on Decision and Control, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, pp. 4435–4440, 2004.
 - [23] L. Giarré, D. Bauso, P. Falugi and B. Bamieh: **LPV model identification for gain scheduling control: An application to rotating stall and surge control problem**, Control Engineering Practice 14, 351–361, 2006.
 - [24] S.C. P. Heuberger, P. M.J. Van den Hof and B. Wahlberg: **Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions**, Springer, 2005.
 - [25] M.J. Paul, R. Toth and Peter S.C. Heuberger, **Model Structures for Identification of Linear Parameter-Varying (LPV) Models**, survey paper, 2008.

- [26] W. J. Rugh and J. S. Shamma: **Research on gain scheduling**, Automatica, vol. 36, no. 10, pp. 1401–1425, 2000.
- [27] S. Chouaba: **Contribution à l'estimation des modèles Linéaires à Paramètres Variants à Temps Continu: Application à la Modélisation des échangeurs de chaleur**, Thèse de Ph. D, Université de Poitiers, Juin 2012.
- [28] S. Chouaba, A. Chamroo, R. Ouvrard, and T. Poinot: **Continuous-time identification of linear parameter varying model using an output-error technique**, In IFAC World Congress, Milan, 28 August 2011.
- [29] B. Bamieh and L. Giarré: **Identification of linear parameter varying models**, In Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA, December 1999.
- [30] B. Bamieh and L. Giarré: **Identification of linear parameter varying models**, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 12:841–853, 2002.
- [31] L. Giarré, D. Bauso, P. Falugi, and B. Bamieh: **LPV model identification for gain scheduling control: an application to rotating stall and surge control problem**, Control Engineering Practice, 14:351–361, 2006.
- [32] J. W. van Wingerden and M. Verhaegen: **Subspace identification of MIMO LPV systems: the PBSID approach**, 47th IEEE Conference on Decision and Control, 08: 4516–4521, 2008.
- [33] J.-W. Van Wingerden and M. Verhaegen: **Subspace identification of bilinear and LPV systems for open- and closed-loop data**, Automatica 45:372–381, 2009.
- [34] L. Lee and K. Poolla: **Identification of linear parameter varying systems using non linear programming**, Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control, 121 : 71–78, 1999.
- [35] L. N. Lee and K. Poolla: **Identification of Linear Parameter-Varying Systems via LFT**, Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, 5:50, 1545-1561, 1996.
- [36] J. De Caigny, J. F. Camino, J. Swevers: **Identification of MIMO LPV models based on interpolation**, International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA, 2631- 2645, 2008.
- [37] M. Lovera and G. Mercère: **Identification for gain scheduling a balanced subspace approach**, In Proceedings of the 26th American Control Conference, New York, USA, July 2007.

- [38] J. De Caigny, J. F. Camino, and J. Swevers: **Interpolation based modeling of mimo lpv systems**, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 19: 46–63, 2011.
- [39] M. Steinbuch, R. Van de Molengraft, and A. Van der Voort: **Experimental modeling and LPV control of a motion system**, In Proceedings of the American Control Conference, Denver, Colorado, USA, 2003.
- [40] X. Wei and L. Re Del: **On persistent excitation for parameter estimation of Quasi-LPV systems and its application in modeling of diesel engine torque**, In 14th IFAC Symposium on System Identification, Newcastle, Australia, March 2006.
- [41] P. C. Young, H. Garnier: **Identification and Estimation of Continuous-Time, Data-Based Mechanistic (DBM) Models for Environmental, Environmental modelling & software**, December 2006.
- [42] K. J. Astrom: **On the choice of sampling rates in parametric identification of time series**, Information Science. 1(1): 273–278, 1969.
- [43] K. E. Atkinson: **An Introduction to Numerical Analysis**, John Wiley and Sons, New York, 1989.
- [44] J. Padet : **Echangeurs thermiques: méthodes globales de calcul avec 11 problèmes résolus**, Masson, 1994.
- [45] P. Withers: **Ultrasonic, acoustic and optical techniques for the non invasive detection of fouling in food processing equipment**, Trends in Food Science and Technology, 7 :293–298, 1996.
- [46] G. R Jonsson, S. Lalot, O. P. Palsson, and B. Desmet: **Use of extended kalman filtering in detecting fouling in heat exchangers**, International Journal of Heat and Mass Transfer, 50 :2643–2655, 2007.
- [47] O. Gudmussen, O. P. Palsson, H. Palsson, and S. Lalot: **Fouling detection in a cross-flow heat exchanger based on physical modeling**, In Heat Exchanger Fouling and Cleaning, Schlading, Austria, June 14-19 2009.
- [48] S. Lalot, O. P. Palsson, G. R. Jonsson, and B. Desmet: **Comparison of neural networks and kalman filters performances for fouling detection in a heat exchanger**, International Journal of Heat Exchangers, 8: 151–168, 2007.
- [49] S. Chouaba, A. Chamroo, R. Ouvrard, and T. Poinot: **A counter flow water to oil heat exchanger: MISO quasi linear parameter varying modelling and identifi-**

- cation**, Simulation, Modeling, Practice and Theory, vol. 23: 87–98, 2012.
- [50] O. Gudmussen, O. P. Palsson, H. Palsson, and S. Lalot: **Fouling detection in a cross-flow heat exchanger based on physical modeling**, In Heat Exchanger Fouling and Cleaning, Schlading, Austria, June 14-19 2009.
- [51] O. Andriessdottir, H. Palsson S. Lalot and B. Desmet: **Detection of Fouling in Heat Exchanger by application of a lock-in technique**, Proceeding of international Conference on Heat Exchanger Fouling and Cleaning, Greece 2011.
- [52] L. Ljung: **System identification, Theory for the user**, 2nd edition, Prentice Hall, 1999.
- [53] **Fuzzy Logic Toolbox for use with MATLAB user's guide**, 2nd Version, The MathWorks Inc, January 2005.
- [54] L.A. Zadeh, **Fuzzy sets**, Information and Control, 8: 338–353, 1965.
- [55] J. S. R. Jang and C. T. Sun: **Neuro-Fuzzy Modeling and Control**, Proceedings of the IEEE, 83(3):378-406, 1995.
- [56] J. S. R. Jang: **ANFIS: Adaptive-Network-based Fuzzy Inference Systems**, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 23, No. 3, pp. 665-685, May 1993.
- [57] P. Gaspar, Z. Szabo, J. Bokor: **The design of a reconfigurable suspension control system based on an FDI filter**, 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, 2008 pp.445-450, 2008.
- [58] A. Zolghadri, D. Henry, and S. Grenaille: **Fault diagnosis for LPV systems**, 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, pp.261-266, 2008.
- [59] M. O. Abdalla, E. G. Nobrega, K. M. Grigoriadis: **Fault detection and isolation filter design for linear parameter varying systems**, American Control Conference, pp.3890-3895, 2001.
- [60] D. Henry, A. Zolghadri: **Robust fault diagnosis in uncertain linear parameter-varying systems**, IEEE International Conference on Man and Cybernetics, pp.5165-5170, 2004.
- [61] G. Gagliardi, A. Casavola, and D. Famularo: **A bank of observers based LPV Fault Detection and Isolation method for Spark Injection Engines**, IEEE International Conference on Control Applications, pp.561-566, 2010.
- [62] A. Casavola, D. Famularo, G. Franze, R. J. Patton: **A Fault Detection filter design**

- method for a class of linear time-varying systems**, 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, pp.1681-1686, 2008.
- [63] J. Blesa, V. Puig, J. Saludes: **Identification and fault diagnosis for LPV uncertain systems**, 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, pp.3056-3061, 2011.
 - [64] S. M. de Oca and V. Puig: **Fault Diagnosis of Nonlinear Systems using LPV Interval Observers**, 48th IEEE Conference on Decision and Control, pp.1015-1023, 2009.
 - [65] S. Varrier, D. Koenig, J. J. Martinez: **Robust fault detection for vehicle lateral dynamics**, IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control, pp.4366,4371, 2012.
 - [66] B. Kulcsár, M. Verhaegen: **Robust Inversion Based Fault Estimation for Discrete-Time LPV Systems**, IEEE Transactions on Automatic Control, pp.1581,1586, June 2012.
 - [67] F. Nejari, V. Puig, S. M. de Oca, A. Sadeghzadeh: **Robust fault detection for LPV systems using interval observers and zonotopes**, 48th IEEE Conference on Decision and Control, pp.1002-1007, 2009.
 - [68] S. De Lira, V. Puig, J. Quevedo: **Robust LPV model-based sensor fault diagnosis and estimation for a PEM fuel cell system**, Conference on Control and Fault-Tolerant Systems, pp.819-824, 2010.
 - [69] S. De Lira, V. Puig, J. Quevedo, A. Husar: **Robust LPV model-based sensor fault diagnosis using relative fault sensitivity signature and residual directions approaches in a PEM fuel cell**, Vehicle Power and Propulsion Conference pp.1-7, 2010.
 - [70] K. Zhang and B. J. W. Chen: **An improved adaptive fault estimation design for polytopic LPV systems with application to helicopter models**, 7th Asian Control Conference, pp.1108-1113, 2009.
 - [71] P. A. L. dos Santos, T. P. Perdicoúlis, J. A. Ramos, J. L. M. de Carvalho, G. Jank and J. Milhinhos: **An LPV Modeling and Identification Approach to Leakage Detection in High Pressure Natural Gas Transportation Networks**, IEEE Transactions on Control Systems Technology, pp.77-92, 2011.
 - [72] P. A. L. dos Santos, T. P. Perdicoúlis, J.A. Ramos, G. Jank, J.L.M. de Carvalho and J. Milhinhos: **Gas pipelines LPV modelling and identification for leakage de-**

- tection**, American Control Conference pp.1211-1216, 2010.
- [73] L. Kovacs, B. Kulcsár, J. Bokor, and Z. Benyo: **LPV fault detection of glucose-insulin system**, 14th Mediterranean Conference on Control and Automation, pp.1-5, 2006.
 - [74] M. Carlos, Z. Astorga, D. Theilliol, J. Ponsart and M. Rodrigues: **Sensor fault diagnosis for a class of LPV descriptor systems**, 48th IEEE Conference on Decision and Control, pp.1118-1124, 2009.
 - [75] M. Chadli, M. Darouach, and J. Daafouz: **Static output stabilisation of singular LPV systems: LMI formulation**. Proc. of the 47th Conference on Decision and Control, 4793-4796. 2008.
 - [76] L. M. Y. Zhang: **DUKF-based GTM UAV fault detection and diagnosis with nonlinear and LPV models**, IEEE/ASME International Conference on Mechatronics and Embedded Systems and Applications, pp.375-380, 2010.
 - [77] J. Ph. Pérez et A. M. Romulus: **Thermodynamique, fondements et applications**, Masson, Paris, 1993.
 - [78] Wikipédia.org : **Conductivité Thermique**, octobre 2011
 - [79] T. Wildi, G. Sybille : **Électrotechnique**, 4ème édition, Québec, Presse de l'Université Laval / De Boeck, 2005.
 - [80] S. Andrilli, D. Hecker: **Elementary Linear Algebra**, 4th edition, Elsevier, Canada, 2010.

ملخص: في هذا العمل، بينا فعالية النماذج الخطية ذات المعاملات المتغيرة (LPV) وسعتها في استقطاب ومحاكاة الأنظمة غير الخطية، من خلال اشتقاق نموذج ذو مداخل ومخارج متعددة (MIMO) لمبادل حراري حقيقي. في هذا السياق، ومن أجل تمثيل الارتباط الديناميكي للنظام بترددات التدفق الكتلي للمدخلين الساخن والبارد بصورة صريحة، اعتبرنا نموذجا خطيا ذو معاملات متغيرة في الزمن المستمر باعتبار نموذج المداخل والمخارج (LPV-ES-TC). في هذه الحالة، عرفنا معاملات النموذج LPV بطريقة التقريب المحلي، مستعملين طرق البرمجة اللاخطية لتقليص دوال الأخطاء. أخيرا قمنا بإجراء اختبارات المحاكاة، وأكدت لنا النتائج ميزات ومحاسن المنهج المتبع. فيما يخص قسم التشخيص، يملك نظام التشخيص المصمم، القدرة على كشف الأخطاء و تقييمها بفعالية وذلك في مختلف أجزاء النظام المراقب. استعملنا عدة تقنيات حديثة لمختلف مراحل الكشف، الفصل و تقدير الأخطاء. النتائج المتحصل عليها تثبت بوضوح أهمية المنهجية المتبعة.

كلمات مفتاحية: الأنظمة الخطية ذات المعاملات المتغيرة LPV المستمرة، الأنظمة quasi-LPV، الأنظمة غير الخطية، الأنظمة ذات المعاملات المتغيرة، التمثيل LPV، مبادل حراري، تشخيص LPV، الأنظمة الخطية ذات المعاملات الثابتة LTI، FDI.

Résumé : Dans ce travail, nous avons démontré l'utilité des représentations Linéaires à Paramètres Variants (LPV) et leur capacité d'approximer des systèmes Non Linéaire. Pour la partie d'identification, le problème de dérivation d'un modèle dynamique MIMO pour un échangeur de chaleur réel est considéré. Afin de prendre en compte la dépendance dynamique du système sur les taux du débit massique chaud et froid d'une manière explicite, un modèle entrée-sortie LPV à temps continue est utilisé. Dans ce cas, les paramètres du modèle LPV sont identifiés par une approche locale en utilisant des méthodes spécifiques de programmation non linéaire pour minimiser les fonctions d'erreurs. Des simulations sont effectuées, et les résultats démontrent bien les avantages de l'approche proposée. Pour la partie de diagnostic, le système de diagnostic a été construit pour la détection et l'estimation de défauts dans les différentes parties du système à surveillé. Différentes nouveaux techniques ont été utilisées pour les étapes de détection, de localisation et d'estimation de défauts. Les résultats de simulation montrent bien l'efficacité de la méthodologie proposée.

Mots clés : Système Linéaires à Paramètres Variants (LPV) à temps continu, Système quasi-LPV MIMO, Système Non Linéaire, Système à Paramètres Variants, Echangeur de Chaleur, Modélisation LPV, Identification LPV, Diagnostic LPV, FDI, Modélisation LTI, Identification LTI, Diagnostic LTI.

Abstract: In this work, we demonstrated the usefulness of Linear Parameter Varying representations (LPV) and their ability to approximate the Nonlinear Systems. For the identification part, the problem of deriving a dynamic model for a MIMO actual heat exchanger is considered. To take into account the dynamic system dependency on the mass flow rate of hot and cold side explicitly, a continuous time input-output LPV model is used. In this case, the parameters of the LPV model are identified by a local approach using specific methods of nonlinear programming to minimize the error functions. Simulations are performed and the results clearly demonstrate the advantages of the proposed approach. For the fault diagnosis part, the diagnostic system has been constructed for the detection and estimation of faults in the different parts of the monitored system. Various new techniques have been used for detecting, isolating and estimating of faults. The simulation results clearly show the effectiveness of the proposed methodology.

Keywords: Linear parameter Varying Systems (LPV) continuous time system quasi-LPV MIMO Nonlinear System, System Settings Variants, Heat Exchanger, Modelling LPV, LPV Identification, FDI, Diagnosis LPV, LTI modeling, LTI Identification, Diagnosis LTI.