

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE FERHAT ABBAS – SETIF, ALGÉRIE

THESE

PRESENTÉE A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT D'OPTIQUE ET DE MECANIQUE DE PRECISION
Pour l'obtention du Diplôme de

DOCTEUR SCIENCE

EN OPTIQUE ET MECANIQUE DE PRECISION

PAR :

Sebti BOUCHERIT

SUR LE THEME

Développement d'une technique d'analyse des états de déformations par holographie et transformée de Fourier fractionnaire

Soutenue le 28/01/2009, devant Le jury :

ABDELHAMID CHERGUI	Professeur	Université Ferhat Abbas- Sétif	Président
LARBI BOUAMAMA	Professeur	Université Ferhat Abbas- Sétif	Rapporteur
SERGE SIMOËNS	Chargé de recherche CNRS	Ecole centrale de Lyon-France	Examineur
MADANI SAMAH	Maître de conférences	Université Abderrahmane mira- Bejaia	Examineur
DRISS NEHARI	Maitre de conférences	Université Abe el Hamid Ibn Badis-Mostaganem	Examineur

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord Mr. Larbi Bouamama, Maître de conférences au Département d'Optique et de Mécanique de Précision de l'Université Ferhat Abbas de Sétif, pour la confiance qu'il m'a accordée en m'acceptant dans son équipe. Ma thèse a été effectuée sous sa direction scientifique et je suis très reconnaissant pour tous les conseils dont il m'a fait part tout au long de mes travaux de recherches. Qu'il trouve ici ma profonde reconnaissance.

J'exprime ma gratitude à Mr. Rabah Zegadi, Professeur au Département d'Optique et de Mécanique de Précision de l'Université Ferhat Abbas de Sétif, pour son aide précieuse.

Mes remerciements vont aussi à Mr. Serge Simoens, chargé de recherche au CNRS, laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustiques de l'Ecole Centrale de Lyon, pour son accueil au sein du laboratoire, pour sa collaboration si importante en prenant le temps de me conseiller au cours de mes travaux expérimentaux et de bien avoir accepté de faire part du jury de ma thèse.

Je remercie également Monsieur le Professeur Michel Lance, directeur du LMFA de l'école centrale de Lyon de m'avoir accueilli dans son laboratoire.

Je remercie Monsieur Abdelhamid Chergui, Professeur au Département de Physique de l'Université Ferhat Abbas de bien avoir accepté de présider le jury.

J'exprime toute ma gratitude également à Monsieur Driss Nehari, Maître de conférences au Département de Génie Mécanique de l'Université Abd elhamid

ibn Badis de Mostaganem, et Monsieur Madani Samah, Maître de conférences à l'Université de Bejaia, de bien vouloir accepter de faire part du jury de cette thèse.

Que tous les membres de ma famille trouvent dans cette page une particulière expression de ma reconnaissance et de mes remerciements pour toute l'aide et les encouragements qu'ils m'ont exprimés tout au long de mes études.

Résumé

L'holographie numérique a été toujours considérée comme une technique d'imagerie tridimensionnelle très prometteuse dans différents domaines de la science. C'est grâce à son atout tridimensionnel qu'elle permette la localisation d'objets dans un volume donné. Elle est alors utilisée pour la caractérisation des microdéformations dans différents types d'applications, notamment, en mécanique des fluides pour la caractérisation des différents écoulements (suivi de microparticules de type traceurs).

A partir des hologrammes restitués, les positions tridimensionnelles ainsi que les tailles des particules peuvent être estimées afin de pouvoir évaluer entre deux prises de vues décalées dans le temps, les différents paramètres caractérisant l'état de cet écoulement.

Cependant, les travaux effectués dans cet objectif ont fait apparaître une contrainte expérimentale limitant la précision de cette technique qui est la grande profondeur de champ.

Différentes méthodes expérimentales et numériques ont été proposées pour surmonter cette contrainte, mais aucune d'entre elles n'a donné une grande satisfaction aux utilisateurs.

Dans cette thèse, nous proposons un recours à la transformation de Fourier fractionnaire (TFFr) pour résoudre ce problème. Nous montrons que la TFFr permet d'analyser des hologrammes numériques pour déterminer la position tridimensionnelle des objets holographiés.

En vue de surmonter de manière plus poussée ce problème de la grande profondeur de champ, nous proposons également une technique expérimentale basée sur la configuration hors axe de l'holographie digitale, permettant l'enregistrement simultané de deux hologrammes croisés sur le même capteur CCD par simple variation de la fréquence spatiale des faisceaux.

Une application directe de ces deux techniques a été conduite sur des microparticules ensemencées dans un écoulement.

SOMMAIRE

Introduction

Chapitre I Holographie digitale

I.1 Introduction	1
I.2 Théorie de l'holographie	2
I.2.1 Bases mathématiques et physiques de L'holographie	2
I.2.1.1 Phase d'enregistrement	3
I.2.1.2 Phase de reconstruction optique	6
I.3 Holographie numérique ou digitale	7
I.3.1 Le capteur CCD comme dispositif d'enregistrement holographique	8
I.3.2 Reconstruction numérique	12
I.3.2.1 Méthode de Fresnel	14
I.3.2.1.1 Discrétisation	15
I.3.2.2 Méthode de convolution.	15
I.3.2.2.1 Discrétisation	16
I.3.3 Comparaison des tailles de pixel obtenues avec la méthode de Fresnel et de convolution	17
4 Amélioration d'image	18
I.5 Speckle	18
I.5.1 Taille du speckle	19
I.6 Les applications de l'holographie digitale	19
Chapitre II La transformée de Fourier fractionnaire en optique	
II.1 Introduction	21
II.2 La transformée de Fourier classique	21
II.3 La transformée de Fourier fractionnaire (TFFr)	22
II.3.1 Fonctions propres	22
II.3.2 Représentation intégrale	23

II.3.3 Propriétés de la TFFr	25
II.3.4 TFFr de fonctions usuelles	28
II.4. La transformée de Fourier fractionnaire en optique	29
II.4.1. Montages optiques permettant la réalisation de La TFFr	29
II.4.1.1. Montage de Lohmann type I	29
II.4.1.2. Montage de Lohmann type II	30
II.5 Expression de l'intégrale de diffraction scalaire par une transformation de Fourier fractionnaire	31
II.6 Algorithmes de calcul de la TFFr	33
II.6.1 Calcul numérique de la TFFr à l'aide d'une seule transformée de Fourier rapide TFR	34
II.6.2 Calcul numérique de la TFFr à l'aide de deux TFR	36
II.7 Détermination du paramètre F_l	37
III.8 Reconstruction des hologrammes numériques par la TFFr.	37
III.8.1 Introduction	37
III.8.2 La reconstruction par la TFFr	38
Chapitre III Application de la transformée de Fourier fractionnaire à la restitution des hologrammes digitaux	
III.1 Introduction	40
III.2 Approximation numérique de la diffraction de Fresnel par la TFFr	40
III.2.1 Position du problème	41
III.2.2 Résultats et discussions	46
III.3 Contribution à la reconstruction numérique des hologrammes par la TFFr	50
III.3.1 De l'intégrale de Fresnel à la TFFr	51
III.3.2 De la TFFr à l'intégrale de Fresnel.	53

III.3.3 Résultats et discussions.	54
III.4 Application à la reconstruction des hologrammes numériques	55
III.5 Résultats expérimentaux	58
III.5.1 Enregistrement d'un hologramme	58
III.5.2 Restitution numérique d'un hologramme	59
III.5.3 Localisation des particules en profondeur	62

Chapitre IV: Suivi des microparticules de types traceurs par holographie digitale pour l'évaluation des états de déformation dans un fluide

IV.1 Introduction	65
IV.2 Historique	65
IV.3 Principe de la méthode	66
IV.3.1 Montage expérimental	67
IV.3.2 Analyse mathématique de la méthode	68
IV.3.3 Enregistrement de l'hologramme	72
IV.3.4 Restitution de l'hologramme	73
IV.3.5 Restitution du volume	75
IV.3.6 Choix du pas de restitution	76
IV.3.7 Détection des particules	77
VI.3.8 Identification 3D des images de particules et leur extraction	78
VI.3.9 Comparaison des résultats	79
VI.3.10 Taux des particules extraites	80
VI.3.11 Principe de l'évaluation des états de déformation du fluide	83

Conclusion

Références

Introduction

L'holographie numérique a toujours été considérée comme une technique d'imagerie tridimensionnelle très prometteuse dans différents domaines de la science, elle est utilisée dans de nombreuses applications telles que l'interférométrie holographique, le cryptage de l'information, la microscopie et la vélocimétrie par images des particules.

Parmi les configurations holographiques proposées pour la vélocimétrie, la configuration en ligne, qui occupe une place importante. Dans cette configuration, le champ lumineux diffracté par chaque particule du faisceau incident interfère avec la partie non diffractée du même faisceau. La réalisation pratique de cette technique étant simple et performante, par contre elle souffre de différents inconvénients, tels que la présence des images jumelles qui affectent la qualité des images enregistrées, en plus, lorsque la densité de particules devient importante, le rapport signal / bruit de ces systèmes peut devenir problématique.

Le procédé de restitution numérique consiste à implémenter le calcul de l'intégrale de propagation de la lumière (intégrale d'Huygens-Fresnel). Cette intégrale a été représentée sous plusieurs formes mathématiques, telles que l'opération de convolution, la transformation en ondelettes et récemment la transformation de Fourier fractionnaire, de la distribution d'intensité enregistrée par l'hologramme.

L'objectif de cette thèse étant de développer une technique basée sur la transformation de Fourier Fractionnaire et l'holographie hors axe permettant de surmonter les différents inconvénients inhérents soit à la technique en ligne soit aux différents modèles de restitution pour l'extraction des positions tridimensionnelles réelles des objets holographiés.

Le travail présenté dans cette thèse est organisé en quatre chapitres.

Le premier est consacré à la théorie de l'holographie digitale et aux méthodes de restitution numérique par la transformation de Fresnel et la méthode de convolution. Nous avons envisagés aussi les conditions d'enregistrement et de restitution d'un hologramme sur un capteur CCD.

Le deuxième chapitre aborde la théorie de la transformées de Fourier fractionnaire du point de vue purement mathématique et les possibilités de son implémentation optique, et à la

fin de ce chapitre nous avons exposé sa relation avec l'intégrale de Fresnel pour décrire le phénomène de diffraction à distance finie. Cette relation est la clé de son aptitude à restituer des hologrammes numériques.

L'application de la transformée de Fourier fractionnaire à la description du phénomène de diffraction à travers un espace libre fera l'objet du troisième chapitre. Une nouvelle contribution concernant le lien entre l'intégrale de Fresnel et la transformée de Fourier fractionnaire est aussi abordé dans ce chapitre. Cette nouvelle contribution constituera la base de la restitution des hologrammes par la transformée de Fourier fractionnaire.

L'application de la méthode de restitution à l'extraction des positions tridimensionnelles des particules sera présentée au chapitre 4. Cette application utilise principalement la configuration holographique hors axe, avec deux faisceaux objets et un seul faisceau de référence.

La thèse s'achève par une conclusion récapitulative où sont rappelés les principaux résultats obtenus au cours de cette thèse. Des perspectives de recherche et des propositions pour l'amélioration des résultats seront également abordés dans cette conclusion.

Chapitre I

Holographie digitale

I.1 Introduction

Le principe de l'holographie fut réellement introduit par *Dennis Gabor*, en 1947, durant ses travaux de recherches sur l'amélioration du pouvoir séparateur du microscope électronique en essayant de trouver une méthode permettant de réduire les aberrations de sphéricité des objectifs électromagnétiques [1, 2,3]. Ces travaux ont conduit *Gabor* à découvrir que si le spectre de diffraction d'un objet et l'information sur les phases pouvaient être enregistrés, l'image du même objet pouvait être reconstruite par une illumination cohérente du spectre de diffraction enregistré. Le développement de cette technique a été freiné à l'époque car les sources lumineuses disponibles n'étaient pas vraiment cohérentes.

Il a fallu attendre les années 1960 que l'intérêt pour la nouvelle technique a vraiment commencé à se développer, notamment grâce au développement de la source de lumière cohérente connue sous le nom laser et les travaux de recherche sur le radar d'*Emmeth Leith* et *Juris Upatnieks* de l'université du Michigan. Grâce à leurs travaux, ils réalisèrent que l'holographie pourrait être utilisée comme média de visualisation en trois dimensions. Ils ont rétabli la technique de *Gabor* en utilisant un laser et une géométrie "hors-axe" qu'ils avaient développée pour le radar. Les résultats obtenus étaient déterminants: ils créèrent le premier hologramme de transmission d'un objet tridimensionnel. Ce type d'hologramme donne des images très claires et d'une grande profondeur.

Le processus holographique peut se résumer en deux étapes: Premièrement, on enregistre les interférences entre un faisceau de lumière cohérente (onde de référence) et l'onde diffusée ou transmise par l'objet, le support d'enregistrement (plaque holographique) est nommé hologramme. Dans la deuxième étape, on éclaire l'hologramme développé (développement chimique) par un faisceau de lumière cohérente pour reconstruire une image de l'objet. Malheureusement, cette méthode est lourde et coûteuse du fait qu'elle nécessite un développement chimique des plaques holographiques et une mise au point sur chacune des images (réelle et virtuelle) d'une part et d'autre part le fait que l'information n'est pas tout de suite accessible à l'exploitation à l'aide des moyens informatiques. C'est la raison pour laquelle des techniques d'enregistrement et de restitution numériques ont été développées [4, 5, 6]. Cette nouvelle technique est nommée holographie digitale ou numérique qui fera l'objet de ce chapitre.

I.2 Théorie de l'holographie

Aucune surface sensible (rétine, plaque photographique, capteur à semi-conducteur, etc...) n'est sensible à la phase. En holographie on contourne cette difficulté en faisant interférer la lumière venant de l'objet avec un faisceau de référence de lumière cohérente. De telle manière que ce qu'on enregistre sur la plaque photographique est une image interférométrique formée par des zones plus ou moins lumineuses. Les zones les plus lumineuses seront celles dans lesquelles la lumière venant de l'objet et celle du faisceau de référence sont en phase. Cette luminosité dépendra aussi de l'amplitude de la lumière venant de l'objet.

L'hologramme ainsi enregistré et traité sera lu en l'éclairant avec un faisceau de lumière monochromatique similaire à celui utilisé comme référence. L'hologramme laissera passer plus de lumière aux endroits où l'amplitude de la lumière venant de l'objet était plus grande est surtout là où la phase de cette lumière était proche de celle du faisceau de référence. L'hologramme n'enregistre pas vraiment la phase de la lumière mais il enregistre les endroits où la phase "était la bonne". Ainsi, lors de la lecture, la phase de la lumière qui sort de l'hologramme n'est pas identique à la phase de la lumière qui l'a enregistrée, mais elle est suffisamment proche pour que cette information de phase permette de restituer la profondeur de l'objet et de recréer l'image réelle de cet objet.

I.2.1 Bases mathématiques et physiques de L'holographie

L'Holographie est un processus à deux étapes. L'objet est éclairé par une lumière monochromatique et cohérente de longueur d'onde λ . L'objet diffuse ou transmet la lumière reçue sous forme d'un front d'onde d'amplitude complexe $O(\xi, \eta)$, qui se compose d'une amplitude $|O|$ et d'une phase Φ [7]:

$$O(\xi, \eta) = |O(\xi, \eta)| \exp i\phi(\xi, \eta) \quad (\text{I.1})$$

ξ et η dénotent les coordonnées cartésiennes dans le plan où le front d'onde est enregistré.

L'objectif visé par cette technique est l'enregistrement complet du front d'onde, c'est à dire l'amplitude et la phase et par la suite, être capable de reconstruire ce front d'onde.

I.2.1.1 Phase d'enregistrement

Étant donné que tous les matériaux d'enregistrement répondent seulement à l'intensité, la phase doit être codée dans le modèle d'intensité capté par le dispositif d'enregistrement. La solution est d'ajouter une autre onde lumineuse mutuellement cohérente avec $O(\xi, \eta)$, appelée onde de référence:

$$r(\xi, \eta) = |r(\xi, \eta)| \exp i \phi_r(\xi, \eta) \quad (\text{I.2})$$

L'intensité totale en tout point, dans le cas de la lumière incohérente, est alors égale à $\frac{1}{2}(O^2 + r^2)$. Cependant, si les faisceaux sont mutuellement cohérents, l'intensité résultante est donnée par :

$$I = (O + r)^2 = O^2 + r^2 + 2O.r$$

Ce qui est très différent, car le troisième terme de l'équation contient l'information concernant la phase. Nous pouvons voir ceci plus clairement en écrivant $O(\xi, \eta)$ et $r(\xi, \eta)$ selon la notation usuelle d'une onde progressive :

$$O(\xi, \eta) = |O(\xi, \eta)| \cos(2\pi\omega t + \phi(\xi, \eta))$$

Et

$$r(\xi, \eta) = |r(\xi, \eta)| \cos(2\pi\omega t + \phi_r(\xi, \eta))$$

Où ω représente la fréquence, t la variable temps et $\phi(\xi, \eta)$, la phase de l'onde en tout points (ξ, η) de l'émulsion. Le faisceau de référence n'étant pas modulé, $r(\xi, \eta)$ est constant et $\phi_r(\xi, \eta)$ est constante (si le faisceau est perpendiculaire à l'émulsion) ou directement proportionnel à (ξ, η) (s'il est oblique). Du fait de la diffraction par l'objet, $|O(\xi, \eta)|$ et $\phi(\xi, \eta)$ seront tous deux des fonctions complexes de (ξ, η) .

En écrivant l'équation en entier, nous aurons :

$$I = |O(\xi, \eta)|^2 \cos^2(2\pi\omega t + \phi(\xi, \eta)) + |r(\xi, \eta)|^2 \cos^2(2\pi\omega t + \phi_r(\xi, \eta)) \\ + 2|O(\xi, \eta)||r(\xi, \eta)| \cos(2\pi\omega t + \phi(\xi, \eta)) \cos(2\pi\omega t + \phi_r(\xi, \eta))$$

En utilisant l'identité $2 \cos X \cos Y = \cos(X + Y) + \cos(X - Y)$, pour développer le troisième terme, il vient :

$$I = |O(\xi, \eta)|^2 \cos^2(2\pi\omega t + \phi(\xi, \eta)) + |r(\xi, \eta)|^2 \cos^2(2\pi\omega t + \phi_r(\xi, \eta)) \\ + |O(\xi, \eta)||r(\xi, \eta)| [\cos(4\pi\omega t + \phi(\xi, \eta) + \phi_r(\xi, \eta)) + \cos(\phi(\xi, \eta) - \phi_r(\xi, \eta))]$$

Nous devons maintenant prendre la moyenne temporelle de cette expression, car les émulsions photographiques, ne réagissent qu'à la moyenne temporelle de l'intensité, qui est égale numériquement à la moitié du carré de l'amplitude. La moyenne temporelle d'une fonction \cos^2 donne $\frac{1}{2}$ et la moyenne temporelle de toute fonction cosinus donne 0. Toutefois le dernier terme de l'équation ne dépend pas du temps (absence de t). On obtient donc l'équation:

$$I = \frac{1}{2}|O(\xi, \eta)|^2 + \frac{1}{2}|r(\xi, \eta)|^2 + |O(\xi, \eta)r(\xi, \eta)|\cos(\phi(\xi, \eta) - \phi_r(\xi, \eta)) \quad (1.3)$$

De l'équation. (I.3), on peut voir que l'intensité est une fonction de ϕ , donc la phase est codée dans l'enregistrement, qu'on appelle communément hologramme (fig. I.1).

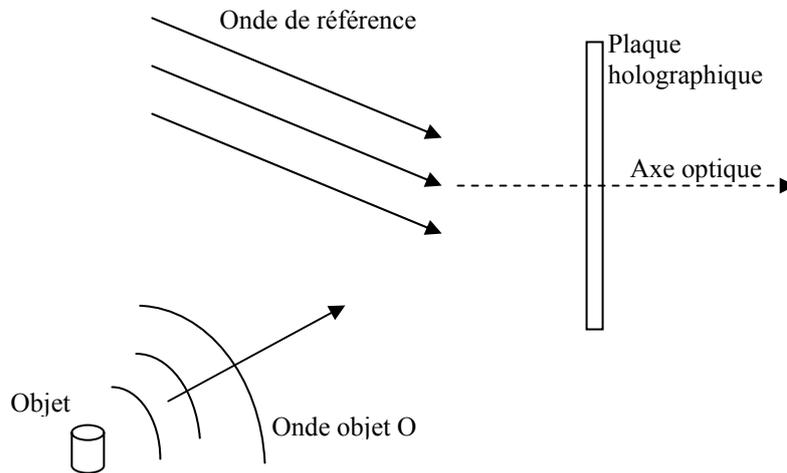


Figure I-1 : Principe d'enregistrement d'un hologramme

Plusieurs configurations et différents types d'ondes de référence sont possibles dans ce processus, le choix se fait en fonction du type d'hologramme nécessaire.

Selon la figure (I.1) l'onde objet est séparée de celle de référence par un angle θ , cette configuration est appelée hors axe (off-axis). Lorsque ($\theta = 0$), les deux fronts d'onde coïncident, nous nous trouvons dans le cas de la configuration en ligne ou de Gabor (in-line).

Pour des raisons de simplicité on considérera que la référence (fig. I.2) est une onde plane uniforme donnée par $r(\xi, \eta) = |r|$. La phase $\Phi_r(\xi, \eta)$ dans les équations (I.2) et (I.3) est alors égale à zéro [8]. Ce type de configuration est largement utilisé dans l'holographie numérique.

En plus, $\Phi(\xi, \eta)$ peut être divisée en un terme aléatoire $\phi(\xi, \eta)$ qui dépend de la diffusion de la surface de l'objet a enregistrer, et un terme $2\pi\omega_r \xi$ causé par le décalage d'angle :

$$\phi(\xi, \eta) = \phi(\xi, \eta) + 2\pi\omega_r \xi \tag{I.4}$$

Où $\omega_r = \frac{\sin \theta}{\lambda}$ Peut être considérée comme une fréquence spatiale, $\phi(\xi, \eta)$ contient l'information voulue. L'équation (I.3) devient Alors :

$$I = |O(\xi, \eta)|^2 + |r(\xi, \eta)|^2 + 2|O(\xi, \eta)||r| \cos[\phi(\xi, \eta) + 2\pi\omega_r \xi] \tag{I.5}$$

Un champ d'interférence de deux fronts d'onde est enregistré dans la région de diffraction de Fresnel [7], donc les hologrammes sont appelés hologrammes de Fresnel [9].

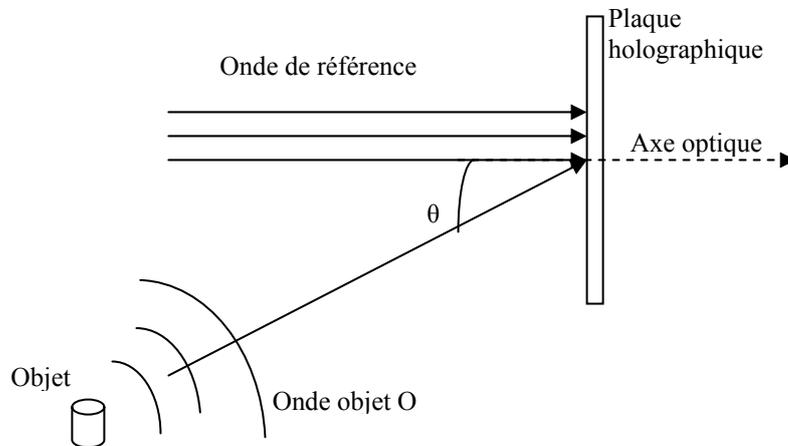


Figure I-2 : configuration hors axe pour l'enregistrement des hologrammes de Fresnel.

Traditionnellement, les supports d'enregistrement étaient des pellicules ou des plaques avec des émulsions aux halogénures d'argent, mais d'autres matériaux existent aussi [7.10]. Ils ont au Moins une chose en commun: ils sont destinés à l'enregistrement et la reconstruction optique.

I.2.1.2 Phase de reconstruction Optique

La deuxième étape est la reconstruction du front d'onde de l'objet. La plaque holographique après être développée chimiquement est remise à sa position initiale, par contre l'objet est enlevé. La plaque peut maintenant être considérée comme une transparence à transmittance en amplitude [7] donnée par :

$$\begin{aligned} h(\xi, \eta) &= h_0 + \beta I \\ &= h_0 + \beta \left[|O(\xi, \eta)|^2 + |r|^2 + |r|O(\xi, \eta) + |r|O^*(\xi, \eta) \right] \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

h_0 est un terme uniforme causé par l'onde de référence. Les deux termes h_0 et β sont constants et ne dépendent pas des coordonnées, mais dépendent de la durée d'exposition et des propriétés physiques de la plaque holographique.

Si la plaque développée est éclairée par l'onde de référence, le champ d'onde transmis par la transparence sera :

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= r(\xi, \eta)h(\xi, \eta) \\ &= |r| \left[|h_0 + \beta|r|^2 \right] + \beta|r||o|^2 + \beta|r|^2 O(\xi, \eta) + \beta|r|^2 O^*(\xi, \eta) \\ &= u_1(\xi, \eta) + u_2(\xi, \eta) + u_3(\xi, \eta) + u_4(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

Où :

$$\begin{aligned} u_1(\xi, \eta) &= |r| \left[|h_0 + \beta|r|^2 \right] \\ u_2(\xi, \eta) &= \beta|r||O(\xi, \eta)|^2 \\ u_3(\xi, \eta) &= \beta|r|^2 |O(\xi, \eta)| \exp i\varphi(\xi, \eta) \exp i2\pi\omega_r \xi \\ u_4(\xi, \eta) &= \beta|r|^2 |O(\xi, \eta)| \exp -i\varphi(\xi, \eta) \exp -i2\pi\omega_r \xi \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

Le premier terme, $u_1(\zeta, \eta)$, est l'onde de référence atténuée, elle est transmise directement par l'hologramme. $u_2(\zeta, \eta)$ est une variable spatiale "nuage" qui entoure u_1 et dont la propagation angulaire est donnée par l'angle entre l'objet et la référence. Ces deux termes constituent l'ordre zéro de la diffraction (fig. I.3).

Le troisième terme $u_3(\zeta, \eta)$ est, à une constante près, une réplique exacte de du front d'onde original. En regardant à travers l'hologramme, on peut voir une image tridimensionnelle identique à l'objet original, avec une parallaxe et une profondeur de mise au point. Elle est appelée image virtuelle (fig. I.3), à l'opposé de l'image réelle (fig. I.3) produite par le quatrième terme $u_4(\zeta, \eta)$.

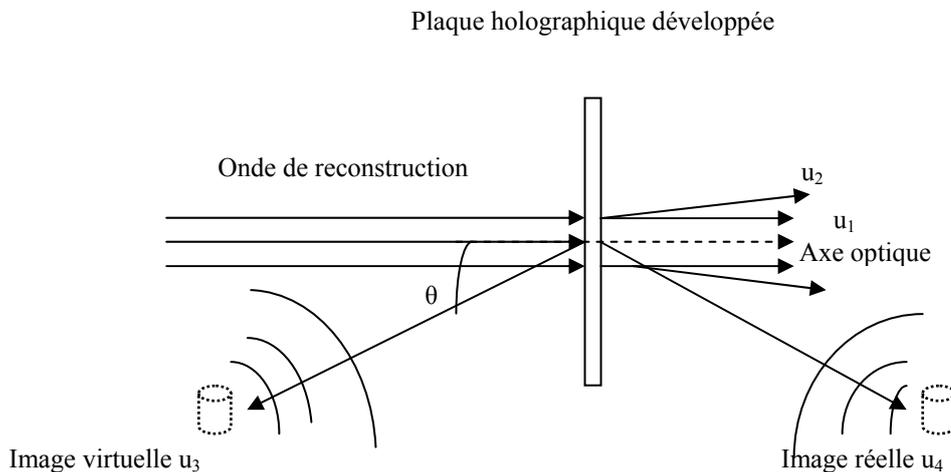


Figure I-3: Principe de la reconstruction du front d'onde.

I.3 Holographie numérique ou digitale

En 1967 Goodman et Lawrence [4] ont montré qu'un front d'onde enregistré par un détecteur vidicon pourrait être reconstruit numériquement par un ordinateur. C'était le premier exemple de l'holographie numérique.

La première étape du processus holographique est effectuée optiquement, mais le support d'enregistrement traditionnel est remplacé par un dispositif électronique tel qu'une caméra CCD. Le front d'onde est numérisé et stocké sous une forme binaire dans un ordinateur.

Avec l'hologramme numérique de base, la seconde étape consiste en la reconstruction par une simulation numérique de la propagation des ondes. La reconstruction est rapide et facile; aucune lourdeur due au processus chimique n'est nécessaire. En outre, la méthode permet de fournir un accès facile et rapide à la fois à l'amplitude et à la phase comme il a été démontré dans les publications de Schnars et Jüptner [6.11], Pedrini et al. [12].

Les progrès récents dans la technologie informatique et des capteurs CCD ont rendu l'enregistrement numérique par caméra CCD une alternative à l'holographie classique dans certains cas. En 1967 une reconstruction numérique a pris 5 minutes; aujourd'hui le même calcul avec un grand ensemble ne prendra que quelques secondes. Cependant, aucun des appareils électroniques n'a été capable, jusqu'à présent, de rivaliser la haute résolution des plaques holographiques.

I.3.1 Le capteur CCD comme un dispositif d'enregistrement holographique

Le processus d'enregistrement est un échantillonnage d'un champ d'interférences constitué de fréquences spatiales, les plus hautes fréquences sont données par le plus grand angle entre le faisceau objet et le faisceau de référence. La limite de résolution des capteurs CCD et les dispositifs similaires numériques détermine la fréquence maximale autorisée pour l'échantillonnage et impose des limitations sur le montage expérimental. Selon le théorème d'échantillonnage de Whittaker - Shannon [7.13] chaque période (ou interfrange) doit être enregistrée par aux moins deux éléments du détecteur.

Si i est l'interfrange et d_p est l'espacement entre deux éléments voisins du détecteur (distance mesurée de centre au centre) dans un sens transversal, alors :

$$2d_p \leq i \quad (\text{I.9})$$

Une évaluation géométrique [8] dans laquelle θ est l'angle entre l'onde objet et l'onde de référence donne :

$$i = \frac{\lambda}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (\text{I.10})$$

En combinant les équations (I, 9) et (I, 10), on obtient :

$$\theta \leq \arcsin\left(\frac{\lambda}{2d_p}\right) \quad (\text{I.11})$$

Où $\frac{1}{2d_p}$ est la fréquence d'échantillonnage. Ceci signifie que l'étendue angulaire de l'objet, dans

la figure. (I,4) ne doit pas dépasser cette limite, afin d'utiliser la largeur de bande entière disponible du dispositif d'enregistrement, le signe égal dans l'équation (I,11) devrait être utilisé.

Une autre évaluation géométrique montre que si la distance d entre le capteur CCD et l'objet est :

$$d \approx \frac{2d_p}{\lambda} D \quad (\text{I.12})$$

Alors la bande passante maximale est obtenue sans violer le théorème de l'échantillonnage. D est la dimension transversale (hauteur ou largeur) de l'objet, et les petites valeurs angulaires sont supposées vérifier l'équation (I.11).

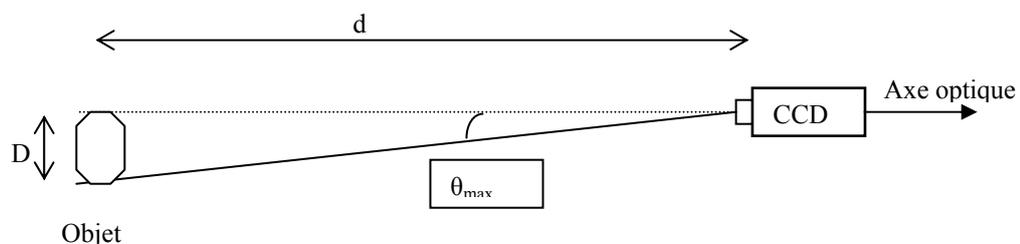


Figure I-4: Ecartement angulaire des ondes objet et référence

θ_{\max} est l'angle maximal entre l'onde objet et l'onde de référence, d est la distance le long de l'axe optique entre le capteur CCD et l'objet et D est la taille transversale de l'objet.

Dans de nombreux cas, la hauteur d_p du détecteur est égale à la taille de chaque élément du détecteur, également appelée la taille cellulaire ou taille du pixel. $\Delta\xi$ et $\Delta\eta$ dénotent la taille des pixels le long des axes respectifs ξ et η (fig.I.5).

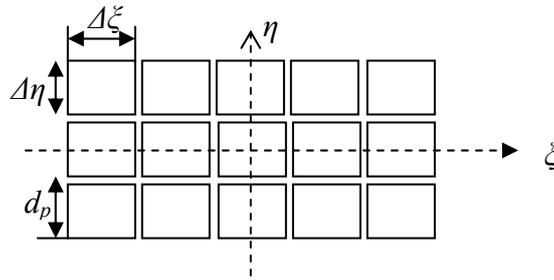


Figure III-5 : Schéma de principe d'un capteur à pixels surfaciques

Une étude détaillée sur les conditions d'enregistrement par un capteur CCD a été donnée par Xu, Miao et Asundi [14]. Dans cette étude les auteurs ont étudié les deux configurations de l'holographie digitale en ligne et hors axe, ils ont montré que la distance minimale séparant l'objet et le capteur CCD permettant ainsi à l'ondelette sphérique émise par chaque point de l'objet d'interférer avec l'onde de référence dans la configuration en ligne (fig. I.6) est donnée par:

$$d_{\min} = \frac{L_{CCD} + L_{oy}}{2\theta_{\max}} \quad (\text{I.13})$$

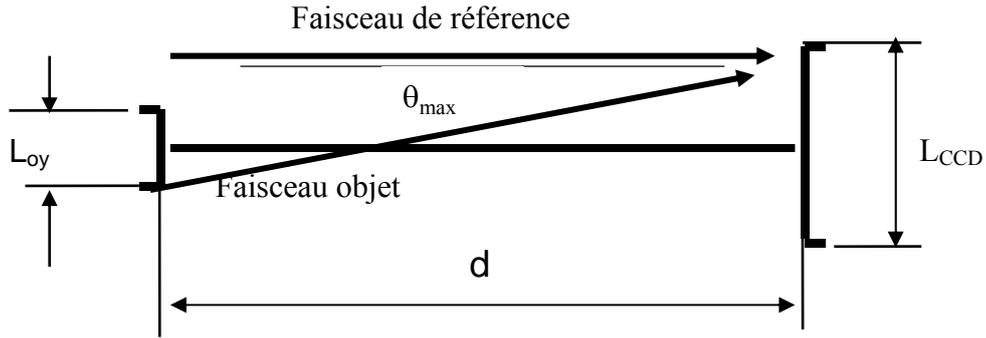


Figure I-6: Configuration en ligne

Dans le cas du montage hors axe (fig. I.7), un angle (β) est introduit entre le faisceau objet et celui de référence, permettant par la suite de séparer les composantes de l'onde diffractée, en plaçant l'objet à une distance (b) de l'axe optique du système de la figure (I.7), cependant l'onde de référence reste parallèle et tombe de manière normale sur le capteur CCD.

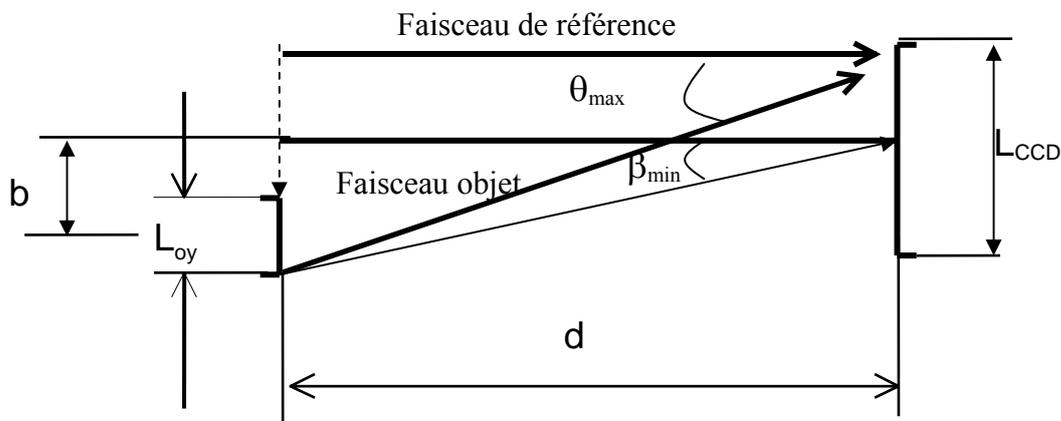


Figure I-7: Configuration hors axes

Les images jumelles ne seront séparées que si l'angle de décalage est pris supérieur à une valeur minimale :

$$\beta_{\min} = \frac{1}{\sin(3W\lambda)} \quad (\text{I.14})$$

Où (W) est la plus grande fréquence spatiale de l'objet.

Si les dimensions latérales de l'objet placé à la distance (d) du capteur CCD dans le cas de l'holographie hors axe sont ($L_{ox} \times L_{oy}$), son image est alors formée dans un rectangle de dimensions ($2W_x \times 2W_y$) sur le plan de l'hologramme, où :

$$2W_x = \frac{L_{ox}}{\lambda d} \quad \text{et} \quad 2W_y = \frac{L_{oy}}{\lambda d} \quad (\text{I.15})$$

Si le décalage de l'objet est fait dans la direction (y) (fig. I.7), la largeur de l'objet selon cet axe est donc celle qui est d'intérêt. Ainsi l'angle minimal de décalage est approximativement donné par :

$$\beta_{\min} = \frac{3L_{oy}}{2d} \quad (\text{I.16})$$

I.3.2 Reconstruction Numérique

L'enregistrement est fondamentalement un phénomène d'interférence, la reconstruction peut être expliquée par la théorie de diffraction.

La figure (I.8) montre la géométrie adoptée pour la reconstruction numérique, dans laquelle l'axe z est l'axe optique. L'hologramme est placé dans le plan (ξ, η) où $z = 0$, alors que l'objet est dans le plan (x, y) placé à une distance $z = -d$. (x', y') est un plan d'observation arbitraire situé à une distance $z = d'$. Tous les plans sont normaux à l'axe optique.

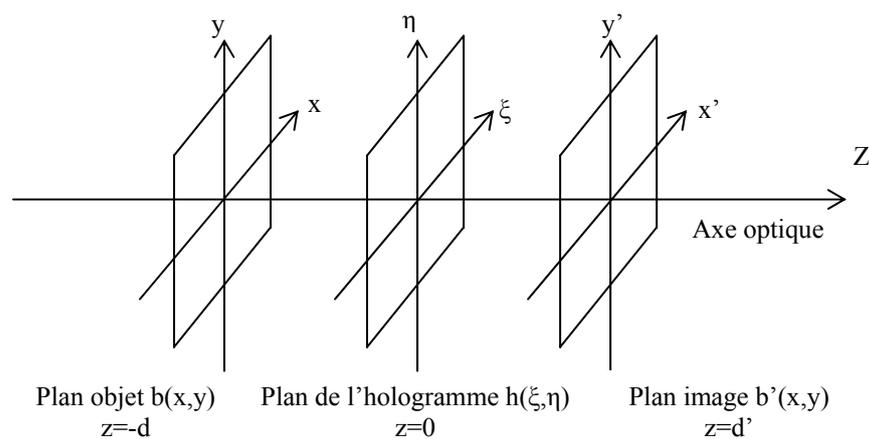


Figure I.8: Géométrie d'enregistrement et de reconstruction numérique

Au cours de la reconstruction, l'hologramme est considéré comme une transmittance en amplitude ou une ouverture qui diffracte l'onde de référence, et la propagation du front d'onde $u(\xi,\eta)=h(\xi,\eta)r(\xi,\eta)$ du plan de l'hologramme au plan d'observation est numériquement simulée. L'image de l'objet doit être située à une distance $z = d$ et $z = -d$.

Un calcul détaillé avec les formules mathématiques de la théorie de diffraction est donné par J.W.Goodman [7]. Si $b'(x',y')$ est le front d'onde reconstruit dans le plan d'observation, alors l'intégrale de diffraction de Rayleigh-Sommerfeld [7] peut être écrite comme suit [15]:

$$b'(x',y') = \frac{1}{i\lambda} \iint h(\xi,\eta)r(\xi,\eta) \frac{\exp ik\rho}{\rho} \cos\Omega d\xi d\eta \quad (\text{I.17})$$

Où l'intégrale est calculée sur toute la surface de l'hologramme avec :

$$\rho = \sqrt{d^2 + (x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2} \quad (\text{I.18})$$

La distance entre un point donné sur le plan de l'hologramme et un point d'observation. $\cos\Omega$ est un facteur d'obliquité [7] normalement fixé à 1 en raison de petits angles Ω . Si la référence est une onde plane et normale au plan de l'hologramme, on peut fixer $r(\xi,\eta)=|r|=1$, ce qui simplifie l'implémentation numérique.

L'équation (I.17) représente une onde complexe dont l'intensité I et la phase ψ sont données par :

$$I(x',y') = b(x',y')b^*(x',y') \quad \psi = \arctan \frac{\Im b'(x',y')}{\Re b'(x',y')} \quad (\text{I.19})$$

Où $\Im\{b'\}$ et $\Re\{b'\}$ représentent la partie imaginaire et la partie réelle de b' respectivement.

Il y a plusieurs façons [8] pour l'implémentation de l'équation (I.17) sur un ordinateur: la méthode de Fresnel et celle de convolution sont en général les plus utilisées. Les deux approches permettent de convertir l'intégrale de diffraction de Rayleigh-Sommerfeld en une ou plusieurs transformées de Fourier qui rendent l'application numérique plus facile.

I.3.2.1 Méthode de Fresnel

La méthode de Fresnel est Basée sur des approximations de l'expression (I.18) En appliquant le développement binomial de la racine carrée [7], où ρ devient:

$$\rho \approx d' \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(x'-\xi)^2}{d'^2} + \frac{1}{2} \frac{(y'-\eta)^2}{d'^2} \right] \quad (\text{I.20})$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, de petites erreurs peuvent être produites lors du calcul de la phase. Pour que l'approximation soit bonne il faut que la distance d' soit suffisamment grande [7] :

$$d'^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda} [(x'-\xi)^2 + (y'-\eta)^2]_{\max}^2 \quad (\text{I.21})$$

Comme il s'agit d'une condition trop rigoureuse, même pour des courtes distances elle mène à des résultats exacts. Ainsi, l'intégrale de propagation (I.17) devient :

$$b'(x', y') = \frac{1}{i\lambda} \iint h(\xi, \eta) r(\xi, \eta) \exp ikd' \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(x'-\xi)^2}{d'^2} + \frac{1}{2} \frac{(y'-\eta)^2}{d'^2} \right] d\xi d\eta \quad (\text{I.22})$$

Qui représente une approximation parabolique d'une onde sphérique. En réécrivant cette intégrale d'une façon plus simple, le front d'onde reconstruit se ramène en une transformée de Fourier du produit de l'hologramme, de l'onde de référence et d'une fonction de pépiement (chirp) $\exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda d'}(\xi^2 + \eta^2)\right\}$.

$$\begin{aligned} b'(x', y') &= \frac{1}{i\lambda d'} \exp ikd' \cdot \exp \frac{i\pi}{\lambda d'} (x'^2 + y'^2) \iint h(\xi, \eta) r(\xi, \eta) \exp \frac{i\pi}{\lambda d'} [\xi^2 + \eta^2] \exp -\frac{2\pi}{\lambda d'} i[\xi x' + \eta y'] d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{i\lambda d'} \exp ikd' \cdot \exp i\pi \lambda d' (\nu^2 + \mu^2) F \left\{ h(\xi, \eta) r(\xi, \eta) \exp \frac{i\pi}{\lambda d'} [\xi^2 + \eta^2] \right\} \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

Où $\nu = \frac{x'}{\lambda d'}$, $\mu = \frac{y'}{\lambda d'}$ et $F\{ \}$ désigne la transformée de Fourier.

La transformation est multipliée par un facteur d'intensité constant $\frac{1}{i\lambda d'}$ et un facteur de phase $\exp(ikd') \exp(i\pi \lambda d' (\nu^2 + \mu^2))$ ne dépendant pas de l'hologramme.

I.3.2.1.1 Discrétisation

Notre hologramme est un ensemble de nombres $h(k\Delta\xi, l\Delta\eta)$ prise sur un rectangle $N \times M$ élément avec un pas de $\Delta\xi$ et $\Delta\eta$ le long des coordonnées. Par conséquent, une application numérique de l'équation (I, 23) est équivalente à une transformée de Fourier discrète bidimensionnelles [8] :

$$\begin{aligned}
 b'(n,m) &= \exp\left[-\frac{\pi d' \lambda}{NM} \left(\frac{n^2}{\Delta\xi^2} + \frac{m^2}{\Delta\eta^2} \right)\right] \\
 &\times \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} h(k\Delta\xi, l\Delta\eta) r(k\Delta\xi, l\Delta\eta) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d'} (k^2 \Delta\xi^2 + l^2 \Delta\eta^2)\right] \exp\left[2i\pi \left[\frac{kn}{N} + \frac{lm}{M} \right]\right] \\
 &= \exp\left[-\frac{\pi d' \lambda}{NM} \left(\frac{n^2}{\Delta\xi^2} + \frac{m^2}{\Delta\eta^2} \right)\right] DF\left\{h(k,l) r(k,l) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d'} (k^2 \Delta\xi^2 + l^2 \Delta\eta^2)\right]\right\} \quad (I.24)
 \end{aligned}$$

En omettant le facteur constant $\frac{\exp i k d'}{i \pi d'}$ pour la clarté. $DF\{\dots\}$ Désigne la transformée de Fourier discrète. L'image reconstruite est une matrice $N \times M$ d'éléments (n, m) et un pas :

$$\Delta x'_F = \frac{d' \lambda}{N \Delta \xi} \quad , \quad \Delta y'_F = \frac{d' \lambda}{M \Delta \eta} \quad (I.25)$$

Le long des directions transversales

I.3.2.2 Méthode de convolution.

La deuxième méthode considère l'équation (I.17) comme une intégrale de convolution :

$$\begin{aligned}
 b'(x', y') &= \iint g(\xi, \eta) r(\xi, \eta) g(x' - \xi, y' - \eta) d\xi d\eta \\
 &= [h(x', y') r(x', y')] * g(x', y') \quad (I.26)
 \end{aligned}$$

Dans laquelle, le produit $h \cdot r$ est convolué a une réponse impulsionnelle [8] :

$$g(x' - \xi, y' - \eta) = \frac{1}{i\lambda} \frac{\exp i k \rho}{\rho} \cos \theta$$

$$\approx \frac{1}{i\lambda} \frac{\exp ik\sqrt{d'^2+(x'-\xi)^2+(y'-\eta)^2}}{\sqrt{d'^2+(x'-\xi)^2+(y'-\eta)^2}} \quad (\text{I.27})$$

* Désigne l'opération de convolution dans l'équation (I.26). b' décrit ici un système d'espace invariant linéaire, de la propagation d'une onde sphérique dans l'espace libre à partir de l'hologramme au plan image;

Une source ponctuelle à $Z=0$ est à l'origine de son image donnée par $g(x,y)$ à $Z=-d$. Le théorème de convolution [7,16] indique que la convolution du produit $h.r$ avec g est le produit des deux transformations $F(h.r)$ et $F(g)$. Ainsi, le front d'onde peut être trouvé par la transformation inverse:

$$b'(x', y') = F^{-1}\{F[h(\xi, \eta)r(\xi, \eta)]F[g(\xi, \eta)]\} \quad (\text{I.28})$$

I.3.2.2.1 Discrétisation

De la même manière que la méthode de Fresnel, la forme discrète de la formule de reconstruction doit être implémentée. Une forme analytique de $F(g)$ est disponible, prenons une transformée de Fourier dans l'équation (I.28), sa forme discrète est donnée par[8] :

$$G=F\{g\}=\exp\left\{\frac{2\pi id'}{\lambda}\sqrt{1-\frac{\lambda^2\left(n+\frac{N^2\Delta n^2}{2d'\lambda}\right)}{N^2\Delta\xi^2}-\frac{\lambda^2\left(m+\frac{M^2\Delta n^2}{2d'\lambda}\right)}{M^2\Delta\eta^2}}\right\} \quad (\text{I.29})$$

La formule finale de reconstruction est alors :

$$b'(n,m)=DF^{-1}\{DF[h(k,l)r(h,l)]G\} \quad (\text{I.30})$$

et dans l'image résultante la taille des pixels est donnée par :

$$\Delta x'_c=\Delta\xi \quad , \quad \Delta y'_c=\Delta\eta \quad (\text{I.31})$$

I.3.3 Comparaison des tailles de pixel obtenues avec la méthode de Fresnel et de convolution

Lorsque l'on compare les deux méthodes de reconstruction, différentes tailles de pixels se présentent dans le plan d'observation en raison de la différence du nombre des transformées de Fourier impliquées.

Une comparaison des équations (I.25) et (I.31) montre que $\Delta x'_c$ est plus petite que $\Delta x'_F$ si $d' > \frac{N\Delta\xi^2}{\lambda}$ (et de même pour la direction y'). Lors de l'insertion des valeurs typiques dans l'équation :

$$\Delta x'_c = \frac{N\Delta\xi^2}{\lambda d'} \Delta x'_F \quad (\text{I.32})$$

Qui relie les deux dimensions de pixels, on peut voir que $\Delta x'_F$ est d'environ 14 fois plus grande que $\Delta x'_c$. Cette dernière étant la taille des pixels dans le plan de l'hologramme, seule une fraction de $N\Delta\xi \times M\Delta\eta$ de l'ensemble de la scène est affichée lors de l'utilisation de la convolution. D'une manière ou d'une autre, on doit ajuster l'image à l'intérieur du petit rectangle de la taille de notre hologramme, soit en augmentant l'hologramme ou en modifiant l'onde de reconstruction.

L'ancienne méthode, c'est-à-dire accroître la fenêtre rectangulaire en rembourrant l'hologramme par des zéros (zero padding) (comme décrit dans [8,15]), n'est pas une méthode efficace, tout au moins lorsque tout l'ensemble du champ reconstruit nous intéresse. Si la matrice devrait contenir 14 fois plus d'éléments dans chaque sens, un calcul prend beaucoup de temps et la demande de l'espace de stockage serait très grande.

Une autre approche consiste à introduire un changement dans la réponse impulsionnelle (I.27) et reconstruire les différentes sections de champ d'onde [8].

Selon [17] une lentille numérique est proposée pour réduire la taille de l'image reconstruite. La réduction souhaitée de l'image est facile à réaliser sans avoir recours à une puissance et à un temps de calcul plus élevés.

I.4 Amélioration de l'image reconstruite

Tous les termes, à part le troisième, u_3 , et le quatrième, u_4 , de l'équation (I.8) sont des perturbations et doivent être éliminés. La séparation des deux images réelle et virtuelle est fournie par le montage hors axe (off-axis). L'angle θ permet de supprimer soit l'image réelle ou virtuelle par l'application du montage $4f$ [18.19.20].

L'ordre zéro peut être supprimé soit par la soustraction de la valeur moyenne de l'hologramme ou par l'application d'un filtre passe haut avant la reconstruction numérique. Pour la première opération de filtrage on aura besoin d'un fond uniforme, qui est dans ce cas une onde de référence plane, afin de supprimer le terme central lumineux u_1 également connu sous le terme DC [21].

Le filtre passe haut doit supprimer (au moins partiellement) le "nuage" central u_2 . Ce terme est constitué principalement de fréquences spatiales plus basses.

Une autre technique de filtrage nécessite deux enregistrements séparés, un enregistrement du faisceau de référence et un autre du faisceau objet, puis on les soustrait de l'hologramme.

$$|h'(\xi,\eta)|^2 = |h(\xi,\eta)|^2 - |r(\xi,\eta)|^2 - |o(\xi,\eta)|^2 \quad (\text{I.33})$$

I.5 Speckle

Quand une surface rugueuse diffusante est éclairée avec une lumière cohérente, tous les points éclairés émettent des ondes sphériques qui interfèrent [23]. Le résultat est un modèle extrêmement variant dans l'espace. Un tel modèle est facile à observer si un objet est éclairé par

un laser. En regardant l'objet, l'éclairement semble constitué de petits points clairs et sombres, espacés de façon aléatoire. Ces spots sont appelés le speckle.

Le speckle agit comme un transporteur de l'information dans l'interférométrie holographique et speckle [24.25], mais aussi de réduire la résolution. Les détails d'une image reconstruite sont perturbés par la présence du speckle.

I.5.1 taille du speckle

Contrairement au speckle objectif le speckle subjectif se produit lorsqu'un système de formation d'image est présent [26]. Dans le cas de la méthode de Fresnel, l'étendue angulaire finie de l'hologramme détermine la taille du speckle dans le plan d'observation. La façon la plus simple de déterminer la taille unidimensionnelle, est d'examiner l'hologramme de deux points distants de $N\Delta\xi$ (fig. I.9). Ils sont analogues aux deux fentes de Young [26.27].

La taille speckle Δs est alors égale à l'espacement entre les franges :

$$\Delta s = \frac{\lambda d'}{N\Delta\xi} = \Delta x' \quad (\text{I.34})$$

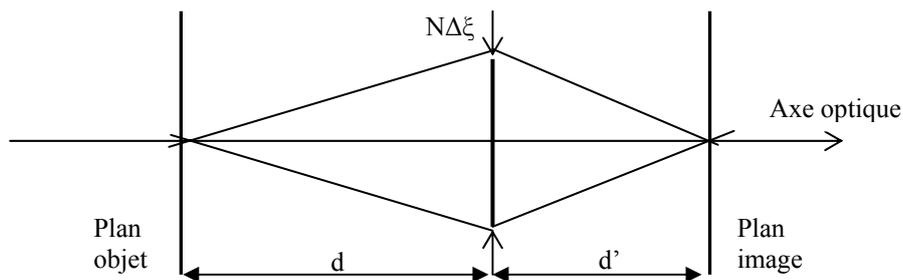


Figure I-9: Détermination de la taille du speckle dans le plan d'observation à $Z=-d$.

I.6 Les applications de l'holographie digitale

Les applications couvertes au cours de ces dernières années, telles que la microscopie [28.29], l'étude des états de déformation [30], l'analyse des particules [31] et l'analyse des vibrations [32.33] montrent que l'holographie digitale est une technique de diagnostic et

d'analyse très prometteuse du fait qu'elle rend possible l'accès facile à la troisième dimension et de plus elle répond mieux à des contraintes de rapidité d'exécution.

Chapitre II:

La transformée de Fourier fractionnaire en optique

II.1 Introduction

La transformée de Fourier fractionnaire est une généralisation de la transformée de Fourier classique. Elle a été introduite en mathématique dès 1929 [34.35.36], et redécouverte en mécanique quantique [37.38], en optique [39.40.41] et en traitement du signal [42]. Son succès dans les publications a commencé à partir des premières années 1990. Une étude détaillée et récente sur cet opérateur peut être trouvée dans [43].

II.2 La transformée de Fourier classique

Nous rappelons quelques définitions et propriétés qui sont en rapport avec la transformée de Fourier classique continue (TF) afin que nous puissions justifier notre définition de la transformée de Fourier fractionnaire (TFFr) plus tard.

Sur une fonction de l'espace L comme par exemple, $L^2(\mathfrak{R})$ l'opérateur de la transformée de Fourier classique $f \rightarrow F$ et son inverse sont donnés par :

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad , \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (\text{II.1})$$

Dans les applications du traitement du signal, $f(x)$ est souvent un signal qui dépend du temps alors que x dénote le temps et ξ la fréquence.

Par conséquent $f(x)$ est une description du domaine temporel du signal et $F(\xi)$ une description du domaine fréquentiel.

En outre, il est vérifié immédiatement que $\left(F^{\frac{2\pi}{2}} f \right)(x) = f(-x)$, $\left(F^{\frac{3\pi}{2}} f \right)(\xi) = F(-\xi)$ et

$\left(F^{\frac{4\pi}{2}} f \right)(x) = f(x)$. Cela veut dire que pour $a \in \mathbb{Z}$ nous pouvons identifier l'opérateur F^a avec

une rotation dans le plan (x, ξ) sur un angle $\varphi = a \frac{\pi}{2}$. L'idée de la transformée de Fourier

fractionnaire TFFr est de définir l'opérateur F^a pour tout $a \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, il est utile d'introduire quelques notations. Soit R_φ la matrice de rotation :

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = e^{J\varphi}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

Et supposant que $(x_\varphi, \xi_\varphi)^T = R_\varphi(x, \xi)^T$, et en les changeant aux variables complexes $z = x - i\xi$, et que $z_\varphi = e^{i\varphi} z$, avec $\xi = x \frac{\pi}{2}$, et en général $\xi_\varphi = x \frac{\pi}{\varphi + \frac{\pi}{2}}$.

La notation R_φ sera aussi utilisée comme un opérateur qui agit sur une fonction de deux variables pour signifier $R_\varphi f(x, \xi) = f(x_\varphi, \xi_\varphi)$ et pour indiquer que $R_\varphi(x, \xi) = (x_\varphi, \xi_\varphi)$.

II.3 La transformée de Fourier fractionnaire

Dans [43] les auteurs donnent six différentes définitions possibles de la TFFr et d'autres peuvent être trouvées ailleurs. Nous préférons suivre une approche intuitive et la définir comme une extension de F^a pour $a \in \mathbb{Z}$ à $a \in \mathbb{R}$.

II.3.1 Fonctions propres

Comment définir la F^a pour $a \in \mathbb{R}$? La clef est la décomposition en valeurs propres de F . Il est connu que F a un ensemble complet de vecteurs propres qui couvre $L^2(\mathfrak{R})$. Puisque $F^2 = I$, les différentes valeurs propres sont $\{1, -1, i, -i\}$ chacun avec un espace propre dimensionnel infini. Les vecteurs propres ne sont donc pas uniques, mais un choix possible des fonctions propres orthonormé est donné par l'ensemble des fonctions Hermite-Gauss normalisées:

$$\phi_n(x) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{2^n n!}} e^{-x^2/2} H_n(x), \quad \text{où} \quad H_n(x) = (-i)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2}, \quad D = -i \frac{d}{dx}$$

Est un polynôme d'Hermite de degré n . Nous avons $F\phi_n = \lambda_n \phi_n$ avec $\lambda_n = e^{-in\pi/2}$. Donc, à condition que nous définissons correctement F^a , car $a \in \mathbb{R}$, nous pouvons mettre $F^a \phi_n = \lambda_n^a \phi_n$, et parce que $\{\phi_n\}$ est un ensemble complet, cela définit F^a sur L .

Si nous définissons l'opérateur d'analyse T_ζ , l'opérateur de synthèse T_ϕ^* et l'opérateur d'échelle S_λ comme :

$$T_\phi : f \mapsto \{c_n = \langle f, \phi_n \rangle_2\}, \quad S_\lambda : \{c_n\} \mapsto \{\lambda_n c_n\}, \quad T_\phi^* : \{d_n\} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} d_n \phi_n$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle_2$) Étant le produit intérieur dans $L^2(\mathfrak{R})$, il est alors clair que nous pouvons écrire :

$$F = T_\phi^* S_\lambda T_\phi \quad \text{et} \quad F^\varphi = T_\phi^* S_\lambda^\varphi T_\phi \quad (\text{II.3})$$

Notons que l'opérateur T_ζ est unitaire sur $L^2(\mathfrak{R})$ et que T_ϕ^* est son adjoint.

La formule (II.3) donne une procédure générale pour définir la puissance fractionnaire de tout opérateur qui a un ensemble complet de fonction propre. Cette définition implique que F^φ peut être écrit comme un opérateur exponentiel $F^\varphi = e^{-i\varphi H} = e^{-ia\pi H/2}$ où l'opérateur Hamiltonien H est donné par $H = \frac{1}{2}(D^2 + U^2 - I)$ avec $D = -id/dx$, et U c'est l'opérateur de translation de

$L^2(\mathfrak{R})$ définie comme : $(Uf)(x) = xf(x)$ ou $U = FDF^{-1}$ [38. 37.43]. La forme de l'opérateur H peut être calculée aisément par différentiation de la relation :

$$e^{-i\varphi H} (e^{-x^2/2} H(x)) = e^{-in\varphi} (e^{-x^2/2} H_n(x)) \quad (\text{II.4})$$

Par rapport à φ , mettons $\varphi = 0$ et utilisons l'équation différentielle $(D + 2iU)DH_n = 2nH_n$ qui satisfait aux polynômes d'Hermite.

Notons que cette forme identifie la F^φ comme un opérateur unitaire.

Plusieurs propriétés simples peuvent maintenant être dérivées, dont la plus remarquable est l'existence de $F^\varphi F^\beta = F^{\varphi+\beta}$, qui reflète la structure de rotation du groupe.

II.3.2 Représentation intégrale

Toute fonction $f \in L^2(\mathfrak{R})$ peut être étendue comme $f = \sum_n \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n$, afin qu'après l'application de F^φ nous ayons $(F^\varphi f)(\xi) = \left\langle f(x), \sum_n \phi_n(x) \lambda_n^\varphi \phi_n(\xi) \right\rangle_2$, qui identifie la F^φ comme une transformation intégrale de noyau $K_\varphi(\xi, x) = \sum_n \phi_n(x) \lambda_n^\varphi \phi_n(\xi) / \sqrt{2\pi}$. Pour $a = \pm 1$ il se réduit au noyau de la TF $K_{\pm 1}(\xi, x) = e^{\mp i x \xi} / \sqrt{2\pi}$. Pour $a \neq \pm 1$, ce n'est pas si simple. En utilisant les valeurs propres et les fonctions propres pour la transformation F^φ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 K_{\frac{a\pi}{2}}(\xi, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-ina\pi/2} H_n(\xi) H_n(x)}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{-(x^2 + \xi^2)/2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{1 - e^{-2i\varphi}}} \exp\left\{ \frac{2x\xi e^{-i\varphi} - e^{-2i\alpha}(\xi^2 + x^2)}{1 - e^{-2i\varphi}} \right\} \exp\left\{ -\frac{\xi^2 + x^2}{2} \right\}
 \end{aligned} \tag{II.5}$$

Où dans le dernier pas nous avons utilisé la formule de Mehler [37, p. 244] ou [44, eq.(6.1.13)].

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-in\varphi} H_n(\xi) H_n(x)}{2^n n! \sqrt{\pi}} = \frac{\exp\left\{ \frac{2x\xi e^{-i\varphi}(\xi^2 + x^2)}{1 - e^{-2i\varphi}} \right\}}{\sqrt{\pi}(1 - e^{-2i\varphi})}$$

Pour récrire cette expression, nous observons que les identités suivantes apparaissent:

$$\begin{aligned}
 \frac{2x\xi e^{-i\varphi}}{1 - e^{-2i\varphi}} &= -ix\xi \csc \varphi \\
 \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{1 - e^{-2i\varphi}}} &= \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\tilde{\varphi} - \varphi)}}{\sqrt{2\pi|\sin \varphi|}} \\
 \frac{e^{-2i\varphi}}{1 - e^{-2i\varphi}} + \frac{1}{2} &= -\frac{1}{2} \cot \varphi
 \end{aligned}$$

Où $\tilde{\varphi} = \operatorname{sgn}(\sin \varphi)$.

Évidemment, de telles relations n'ont de sens que si $\sin \varphi \neq 0$, c'est à dire, si $\varphi \notin \pi Z$ ou $a \notin 2Z$.

Avec cette expression, nous obtenons une représentation intégrante plus douce de F^φ pour $a \notin 2Z$.

$$f_\varphi(\xi) := (F^\varphi f)(\xi) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}\tilde{\varphi} - \varphi)} e^{\frac{1}{2}\xi^2 \cot \varphi}}{\sqrt{2\pi|\sin \varphi|}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -i \frac{x\xi}{\sin \varphi} + \frac{i}{2} x^2 \cot \varphi \right\} f(x) dx \tag{II.6}$$

Où $\tilde{\varphi} = \operatorname{sgn}(\sin \varphi)$ et $0 < |\varphi| < \pi$.

Précédemment nous avons défini $(F^\varphi f)(x) = f(x)$, si $\varphi = 0$, et $(F^\varphi f)(\xi) = f(-\xi)$. Si $\alpha = \pm\pi$.

C'est logique avec cette représentation intégrale parce que pour ces valeurs spéciales, elle conserve que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varphi+\varepsilon} = f_\varphi$. Donc, avec cette propriété de limite, nous pouvons supposer que la représentation intégrale tient sur tout l'intervalle $\varphi \leq |\pi|$. Quand $\varphi \rightarrow |\pi|$, la définition est prise modulo 2π et sera réduite à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Définir la TFFr par cette transformation intégrale, nous permet de dire que la TFFr existe dans $L^1(\mathfrak{R})$ (et aussi dans $L^2(\mathfrak{R})$), quand c'est une fonction généralisée). En effet, dans ce cas, l'intégrant dans (II.3) est aussi dans $f \in L^1(\mathfrak{R})$ (et dans $f \in L^2(\mathfrak{R})$) ou c'est une fonction

généralisée. Donc la TFFr existe sous exactement les mêmes conditions comme sous lesquelles la TF existe.

En supposant $\varphi = a \frac{\pi}{2}$, alors la TFFr a une représentation intégrale :

$$f_{\varphi}(\xi) := (F^{\varphi} f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\varphi}(\xi, x) f(x) dx \quad (\text{II.7})$$

Le noyau est défini comme suit: pour $a \notin 2Z$, et avec $\tilde{\varphi} = \text{sgn}(\sin \varphi)$

$$K_{\varphi}(\xi, x) = C_{\varphi} \exp \left\{ -i \frac{x\xi}{\sin \varphi} + \frac{i}{2} (x^2 + \xi^2) \cot \varphi \right\} \quad \text{Avec} \quad C_{\varphi} = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \tilde{\varphi} - \varphi \right)}}{\sqrt{2\pi |\sin \varphi|}} = \sqrt{\frac{1 - i \cot \varphi}{2\pi}}$$

Pour $a \in 4Z$ la TFFr devient l'opérateur identité, d'où $K_{4n}(\xi, x) = \delta(\xi - x)$, $n \in Z$ et pour $a \in 2 + 4Z$, c'est l'opérateur de parité: $K_{2+4n}(\xi, x) = \delta(\xi + x)$, $n \in Z$.

Si nous restreignons a à l'intervalle $0 < a < 2$, alors la F^{φ} est un homomorphisme de $L^2(\mathfrak{R})$ (avec l'inverse $F^{-\varphi}$). Cela est prouvé dans [38, p. 162].

II.3.3 Propriétés de la TFFr

Les propriétés les plus importantes de la TFFr sont liées aux propriétés de son noyau. Nous allons d'abord étudier quelques propriétés du noyau :

$$K_{\varphi=a\frac{\pi}{2}}(\xi, x) = K_{\varphi=a\frac{\pi}{2}}(x, \xi) \quad (\text{Symétrie}) \quad (\text{II.8})$$

$$K_{-\varphi}(\xi, x) = [K_{\varphi}(\xi, x)]^* \quad (\text{Self-reciprocity}) \quad (\text{II.9})$$

$$K_{\varphi+2\pi}(\xi, x) = K_{\varphi}(\xi, x) \quad (\text{Périodicité}) \quad (\text{II.10})$$

$$K_{\varphi}(-\xi, x) = K_{\varphi}(\xi, -x) \quad (\text{Renversement des axes}) \quad (\text{II.11})$$

$$\int K_{\varphi_1}(\xi, x_1) K_{\varphi_2}(x_1, x) dx = K_{\varphi_1+\varphi_2}(\xi, x) \quad (\text{Additivité}) \quad (\text{II.12})$$

$$\int K_{\varphi}(\xi, x) [K_{\varphi}(\xi', x)]^* dx = \delta(\xi - \xi') \quad (\text{Complétude}) \quad (\text{II.13})$$

$$\int K_{\varphi}(\xi, x) [K_{\varphi}(\xi, x')]^* d\xi = \delta(x - x') \quad (\text{Orthonormalité}) \quad (\text{II.14})$$

On déduit de ces propriétés du noyau K , les propriétés suivantes pour l'opérateur F^{φ} :

- **Additivité :**

$$F^{\varphi 1} F^{\varphi 2} = F^{\varphi 1 + \varphi 2} \quad (\text{II.15})$$

- **Périodicité :**

$$F^{\varphi + 2\pi} = F^{\varphi} \quad (\text{II.16})$$

- **La TFFr est une transformation unitaire :**

- **Bijektivité :**

$$F^{-\varphi} F^{\varphi} = I \quad (\text{II.17})$$

- **Conservation de l'énergie**

$$\begin{aligned} \int f_1(x) f_2^*(x) dx &= \int F_1^{\varphi}(\xi) [F_2^{\varphi}(\xi)]^* d\xi \\ \int |f(x)|^2 dx &= \int |F^{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

En outre, nous allons présenter quelques propriétés de la TFFr liées à certaines opérations sur le signal $f(x)$.

- **Propriété de renversement de l'axe :**

$$(F^{\varphi} \{f(-x)\})(\xi) = F^{\varphi}(-\xi) \quad (\text{II.19})$$

- **Propriété du complexe conjugué :**

$$(F^{\varphi} \{f^*(x)\})(\xi) = [F^{-\varphi}(-\xi)]^* \quad (\text{II.20})$$

- **Propriété de translation dans le temps :**

$$(F^{\varphi} \{f(x - \mu)\})(\xi) = F^{\varphi}(\xi - \mu \cos(\varphi)) e^{i\pi \mu^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)} e^{-2i\pi \mu \xi \sin(\varphi)} \quad (\text{II.21})$$

- **Propriété de modulation :**

$$(F^{\varphi} \{f(x) e^{i2\pi v x}\})(\xi) = F^{\varphi}(\xi - v \sin(\varphi)) e^{2i\pi v \cos(\varphi)} e^{-i\pi v^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)} \quad (\text{II.22})$$

- **Propriété de multiplication par x :**

$$(F^\varphi \{xf(x)\})(\xi) = \xi \cos(\varphi)F^\varphi(\xi) + \frac{i \sin(\varphi)}{2\pi} \cdot \frac{dF^\varphi(\xi)}{d\xi} \quad (\text{II.23})$$

- **Propriété de différenciation :**

$$(F^\varphi \{f'(x)\})(\xi) = i2\pi\xi \sin(\varphi)F^\varphi(\xi) + \cos(\varphi) \cdot \frac{dF^\varphi(\xi)}{d\xi} \quad (\text{II.24})$$

- **Propriété du produit mixte :**

$$(F^\varphi \{xf'(x)\})(\xi) = \sin(\varphi)(i2\pi\xi^2 \cos(\varphi) - \sin(\varphi))F^\varphi(\xi) + \xi \cos(2\varphi) \cdot \frac{dF^\varphi(\xi)}{d\xi} + i \frac{\sin(2\varphi)}{4\pi} \cdot \frac{d^2 F^\varphi(\xi)}{d\xi^2} \quad (\text{II.25})$$

- **Propriété de division par x :**

$$\left(F^\varphi \left\{ \frac{f(x)}{x} \right\} \right)(\xi) = -i \frac{2\pi}{\sin(\varphi)} e^{i\pi \cot(\varphi)\xi^2} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-i\pi \cot(\varphi)x} F^\varphi(x_0) dx_0 \quad (\text{II.27})$$

- **Propriété d'intégration :**

$$\left(F^\varphi \left\{ \int_a^x f(x) dx \right\} \right)(\xi) = \frac{1}{\cos(\varphi)} e^{-i\pi\xi \cot(\varphi)\xi^2} \int_{-\infty}^{\xi} e^{i\pi \tan(\varphi)x^2} F^\varphi(x) dx \quad (\text{II.28})$$

- **TFFr d'un produit :** La TFFr d'un produit de $f(x)$ par $g(x)$ est obtenu en multipliant la TFFr par une fonction de pépiement (chirp), puis en la convoluant avec la TF de g et enfin en modulant le tout par un chirp et une constante [45].

$$(F^\varphi \{f(x).g(x)\})(\xi) = |\csc(\varphi)| e^{i\pi\xi^2 \cot(\varphi)} \int_{-\infty}^{\infty} X^\varphi(v) e^{-i\pi v^2 \cot(\varphi)} \cdot G^\varphi([(u-v)\csc(\varphi)]) dv \quad (\text{II.29})$$

- **TFFr d'un produit de convolution :** Prenons de nouveau $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions de $L^1 \cap W$ et faisons leur produit de convolution [45] :

$$W(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau) d\tau \quad (\text{II.30})$$

Qui est dans $L^1(\mathfrak{R})$. En faisant la transformée de Fourier classique, nous obtenons :

$$W(\xi) = F(\xi).G(\xi) \quad (\text{II.31})$$

Avec F et G dans $L^1 \cap W$. On sait que W^α est la TFFr de W d'angle $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Nous utilisons donc directement la formule (II.29) et nous obtenons :

$$W^\varphi(\xi) = |\sec(\varphi)| e^{i\pi\xi^2 \tan(\varphi)} \int_{-\infty}^{\infty} F^\alpha(v) e^{-i\pi v^2 \tan(\varphi)} \cdot g([(u-v)\sec(\varphi)]) dv \quad (\text{II.32})$$

La TFFr d'un produit de convolution est donc obtenue en prenant la TFFr d'un des deux signaux, puis en la multipliant par un chirp et en la convoluant par une « dilatation » de l'autre fonction et enfin en modulant le résultat par un chirp et une constante.

II.3.4 TFFr de fonctions usuelles

Une fois, la définition et quelques propriétés essentielles de la TFFr ont été données, le tableau suivant présente les transformées de Fourier fractionnaires de certaines fonctions usuelles :

Tableau 1 : La transformée de Fourier fractionnaire de quelque fonctions élémentaires.		
	$f(u)$	$F^\varphi(u)$
1	$\delta(u - \gamma)$	$\sqrt{\frac{1+i \cot \varphi}{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(u^2 \cot \varphi - 2u\gamma \csc \varphi + \gamma^2 \cot \varphi)}$, si $a \notin 2Z$
2	1	$\sqrt{\frac{1+i \cot \varphi}{2\pi}} e^{-i\frac{1}{2} \tan \varphi}$, si $a \notin 2Z + 1$
3	$e^{\frac{1}{2}(\chi u^2 + 2\gamma u)}$	$\frac{\sqrt{1+i \tan \varphi}}{\sqrt{1+\chi \tan \varphi}} e^{i\frac{u^2(\chi - \tan \varphi) + 2u\gamma \csc \varphi - \gamma^2 \tan \varphi}{2(1+\chi \tan \varphi)}}$, si $a - \frac{2}{\pi} \arctan \chi \notin 2Z + 1$
4	$e^{-\frac{1}{2}(\chi u^2 + 2\gamma u)}$	$\frac{\sqrt{1+i \tan \varphi}}{\sqrt{1+\chi \tan \varphi}} e^{\frac{1}{2} \cot \varphi \frac{u^2(\chi^2 - 1) + 2u\gamma \csc \varphi - \xi^2}{\chi^2 + \cot^2 \varphi}} e^{-\frac{1}{2} \csc^2 \varphi \frac{u^2 \chi + 2u\gamma \cos \varphi - \chi \gamma^2 \sin^2 \varphi}{\chi^2 + \cos^2 \varphi}}$ si $\chi > 0$
5	$\phi_l(u)$	$e^{i l \varphi} \phi_l(u)$
6	$e^{-\frac{u^2}{2}}$	$e^{-\frac{u^2}{2}}$

II.4. La transformée de Fourier fractionnaire en optique

Comme il a été indiqué précédemment, la TFFr est une opération mathématique qui s'utilise fréquemment dans le domaine de traitement du signal et dans l'optique [46].

La TFFr est définie par l'expression suivante :

$$F^\varphi \{f(x')\} = \int K_\varphi(x, x') f(x') dx' \quad (\text{II.33})$$

Avec

$$K_\varphi(x, x') = \frac{\exp\{-i[\pi \operatorname{sgn}(\varphi)/4 - \varphi/2]\}}{(\lambda F_1 |\sin \varphi|)^{1/2}} \times \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda F_1} [(x^2 + x'^2) \cot \varphi - 2xx' \csc \varphi]\right\}$$

Où :

$$\varphi = a \cdot \frac{\pi}{2} ; a \text{ est l'ordre fractionnaire}$$

λ : Est la longueur d'onde

F_1 : Est un facteur d'échelle

II.4.1. Montages optiques permettant la réalisation de La FrFT

D'une manière générale, une TFFr d'ordre a peut être expérimentalement exécutée selon deux montages optiques [46].

II.4.1.1. Montage de Lohmann de type I

Le montage est constitué par une lentille de distance focale f et de deux plans d'entrée et de sortie écartés d'une même distance Z de la lentille (fig. II.1). La distance focale f de la lentille et la distance de propagation Z doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$f = \frac{F_1}{Q} ; Z = RF_1 ; R = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) ; Q = \sin(\varphi)$$

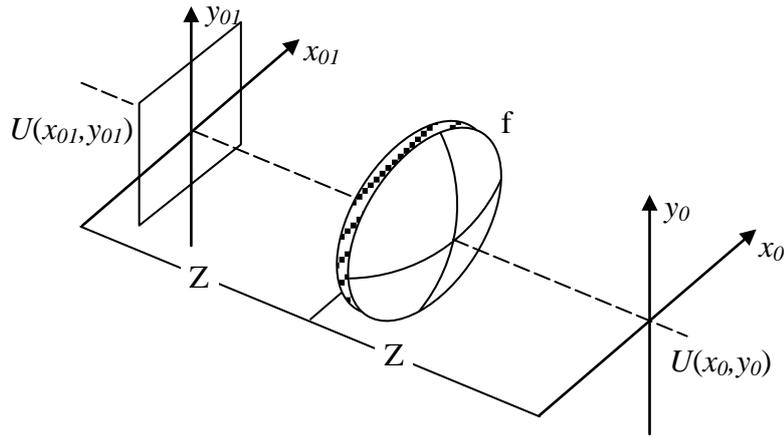


Figure II-1 : Montage de Lohmann de type I [46]

II.4.1.2. Montage de Lohmann de type II

Ce dernier comprend une lentille de distance focale f , un espace de propagation libre de distance Z et une deuxième lentille de même distance focale f placée au plan image de la première lentille (fig. II.2).

Là aussi, la distance focale f de la lentille et la distance de propagation Z doivent remplir les conditions suivantes :

$$f = \frac{F_1}{\tan \frac{Q}{2}} \quad Z = F_1 \sin \varphi = R$$

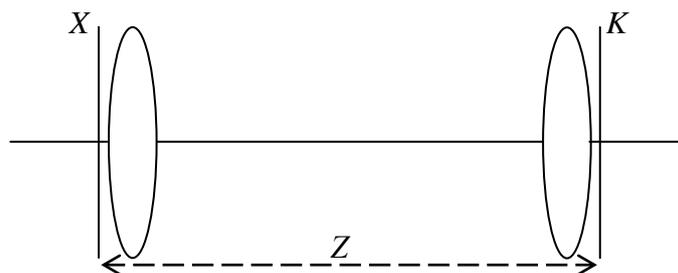


Figure II-2 : Montage de Lohmann de type II. [46]

Récemment dans [47], il a été démontré que la transformée de Fourier fractionnaire est un cas particulier de la transformation intégrale canonique [47] qui permet de décrire la propagation de la lumière à travers un milieu quelconque.

II.5 Expression de l'intégrale de diffraction scalaire par une transformation de Fourier fractionnaire

Dans ce paragraphe, le cas unidimensionnel est développé. Une extension au cas bidimensionnel sera simple à obtenir. Le transfert d'un champ électrique $U_1(x_0)$ d'un émetteur vers un récepteur situé à une distance z de ce dernier, aboutit à un nouveau champ $U_2(x)$ qui, d'après l'intégrale de Huygens-Fresnel, a pour expression [48] :

$$\begin{aligned} U_2(x) &= \frac{\exp j(2\pi/\lambda)Z}{\sqrt{j\lambda Z}} \int U(x_0) \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda Z}(x_0^2 + x^2)\right] \times \exp\left[\frac{-j2\pi}{\lambda Z}(x_0 x)\right] dx_0 \\ &= \frac{\exp j(2\pi/\lambda)Z}{\sqrt{j\lambda Z}} \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda Z}(x^2)\right] \int U(x_0) \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda Z}(x_0^2)\right] \times \exp\left[\frac{-j2\pi}{\lambda Z}(x_0 x)\right] dx_0 \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Si ω est la fréquence de l'onde et v sa vitesse de phase, le terme $\exp j(2\pi/\lambda)Z$ qui figure dans l'équation (II.34) peut s'écrire :

$$T = \exp j(2\pi/\lambda)Z = \exp\left(j \frac{2\pi Z \omega}{v}\right) = \exp(i2\pi\tau) \quad (\text{II.35})$$

Où τ est le temps de propagation de l'onde de l'émetteur vers le récepteur.

Comme l'onde est monochromatique, le terme τ est une constante qui représente un retard de l'onde entre l'émetteur et le récepteur. On peut l'omettre en choisissant l'origine des temps sur le récepteur translaté de z/v par rapport à l'origine des temps sur l'émetteur [49, 50]. L'équation (II.34) devient :

$$U_2(x) = \frac{1}{\sqrt{j\lambda Z}} \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda Z}(x^2)\right] \int U(x_0) \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda Z}(x_0^2)\right] \times \exp\left[\frac{-j2\pi}{\lambda Z}(x_0 x)\right] dx_0 \quad (\text{II.36})$$

Rappelons que la transformée de Fourier fractionnaire d'ordre a d'une fonction $f(x)$ s'exprime par:

$$F^\alpha[f(x)](x_a) = C_1 \exp\left[\frac{j\pi}{s^2 \tan(\phi)}(x_a^2)\right] \int f(x) \exp\left[\frac{j\pi}{s^2 \tan(\phi)}(x^2)\right] \exp\left[\frac{-2j\pi}{s^2 \sin(\phi)}(x_a x)\right] dx \quad (\text{II.37})$$

Avec

$$C_1 = \frac{\exp\{-i[\pi \operatorname{sgn}(\alpha)/4 - \alpha/2]\}}{(\sin \alpha)^{1/2}}$$

Et

$$s^2 = \lambda F_1$$

L'analogie entre les équations (II.36) et (II.37) est claire. Soit $I(x)$ l'intégrale de l'équation (II.36):

$$I(x) = \int U(x_0) \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda Z}(x_0^2)\right] \times \exp\left[-\frac{j2\pi}{\lambda Z}(x_0 x)\right] dx_0 \quad (\text{II.38})$$

Posons:

$$\lambda Z = s^2 \tan \varphi \quad (\text{II.39})$$

Où

$$\tan \varphi = \frac{\lambda Z}{s^2} \quad (\text{II.40})$$

En considérant le changement de variable :

$$x = \frac{u}{\cos \varphi} \quad (\text{II.41})$$

L'équation (II.38) devient :

$$\begin{aligned} I'(u) &= I\left(\frac{u}{\cos \varphi}\right) = \int U(x_0) \exp\left[\frac{j\pi}{s^2 \tan \varphi}(x_0^2)\right] \times \exp\left[\frac{-j2\pi}{s^2 \tan \varphi \cos \varphi}(x_0 u)\right] dx_0 \\ &= \int U(x_0) \exp\left[\frac{j\pi}{s^2 \tan \varphi}(x_0^2)\right] \times \exp\left[\frac{-j2\pi}{s^2 \sin \varphi}(x_0 u)\right] dx_0 \\ &= \frac{1}{C_1} \exp\left[-\frac{j\pi}{s^2 \tan \varphi}(u^2)\right] F^\phi[U_1(x_0)](u) \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

D'après l'équation (II.36), le champ $U_2(x) = U_2(u/\cos \varphi) = \tilde{U}_2(u)$ observé à une distance z de l'émetteur sera :

$$\begin{aligned} U_2(u) &= \frac{1}{\sqrt{j\lambda Z}} \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda Z}(x^2)\right] I(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{j\lambda Z}} \exp\left[j\pi \frac{u^2}{\cos^2 \varphi s^2 \tan \varphi}\right] \frac{1}{C_1} \exp\left[-\frac{j\pi}{s^2 \tan \varphi}(u^2)\right] F^\phi[U_1(x_0)](u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{j\lambda Z}} \frac{1}{C_1} \exp\left[j\pi \frac{u^2}{s^2} \tan \varphi\right] F^\phi[U_1(x_0)](u) \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

Dans cette écriture, le champ $U_2(u)$ peut être calculé à partir de la transformée de Fourier fractionnaire de $U_1(x_0)$. La difficulté vient du terme de phase quadratique $\exp\left[j\pi \frac{u^2}{s^2} \tan \varphi\right]$ qui

affecte l'équation (II.43). En remplaçant u par sa valeur dans (II.41) [50], ce terme devient $\exp\left[j\pi \frac{x^2}{s^2} \sin \varphi \cos \varphi\right]$. En optique géométrique paraxiale et en lumière incohérente, les termes

de phases quadratiques n'apparaissent pas et la recherche d'images se fait dans des plans. La base théorique de l'optique paraxiale n'est donc pas adaptée à l'analyse des systèmes d'imageries en éclairage cohérent. Le terme de phase quadratique peut être ignoré si l'image cohérente de l'objet

est observée sur un récepteur sphérique de rayon de courbure $R = f / \sin \varphi \cos \varphi$ et non plus sur un récepteur plan. C'est l'idée de base de l'optique métaxiale proposée par Bonnet [51, 52] où les calculs approchés sont développés au second ordre [50]. Dans ce cas l'équation (II.43) devient :

$$U_2(u) = \frac{1}{\sqrt{j\lambda Z}} \frac{1}{C_1} F^\varphi[U_1(x_0)](u) \quad (\text{II.44})$$

Notons que par imagerie cohérente, nous entendons l'image en amplitude et en phase d'un objet [50]. En pratique, les récepteurs utilisés sont des capteurs plans uniquement sensibles à l'éclairement, c'est-à-dire au module au carré du champ. Ainsi le terme de phase quadratique de l'équation (II.43) n'intervient pas dans nos traitements holographiques. L'extension au cas bidimensionnel de l'équation (II.44) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} U_2(u, v) &= \frac{1}{j\lambda Z} \frac{1}{C_1^2} F^\varphi[U_1(x_0, y_0)](u, v) \\ &= \cos \varphi \exp(j\varphi) F^\varphi[U_1(x_0, y_0)](u, v) \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

D'après cette dernière équation, lorsque $a = 0$, c.à.d $z = 0$, on observe le champ dans le plan de l'émetteur : il n'y a donc pas de diffraction. Si nous nous éloignons de l'émetteur, l'ordre de la transformée de Fourier fractionnaire croît de manière continue jusqu'à la valeur limite de $\pi/2$. On progresse donc continuellement d'une position où il n'y a pas de diffraction à un phénomène de diffraction de Fraunhofer, en passant par la diffraction de Fresnel. C'est un résultat remarquable puisque la transformation de Fourier fractionnaire synthétise la diffraction scalaire dans l'approximation de Fresnel et dans l'approximation de Fraunhofer.

La transformation de Fourier fractionnaire permet donc de décrire la propagation en champ proche et en champ lointain. L'ordre fractionnaire φ et la distance de propagation z sont liés par la relation (II.40).

Cette propagation est accompagnée par une modification de support du signal de facteur $[\cos \varphi]$ (II.41).

II.6 Algorithmes de calcul de la TFFr

Il existe un nombre important de travaux proposant une implémentation digitale de la transformée de Fourier fractionnaire. Les plus intéressants sont ceux basés sur la TFR (Transformée de Fourier rapide). En effet, il existe deux algorithmes; le premier est basé sur une seule TFR et le second sur deux TFR.

II.6.1 Calcul numérique de la TFFr à l'aide d'une seule TFR

Cet algorithme [53] décompose la TFFr de façon semblable au point de vue de l'optique métaxiale. La méthode consiste à multiplier le signal d'entrée par un facteur de phase quadratique, effectuer une TFR, et multiplier de nouveau le résultat par un facteur de phase quadratique.

L'intégrale simple qui décrit la TFFr d'une fonction peut être considérée comme la transformée de Fourier du produit de cette fonction par un facteur de phase quadratique, comme le montre la définition suivante:

$$F^\phi[f(x)](x_a) = \int f(x) \exp\left[\frac{j\pi}{s^2 \tan(\phi)}(x^2 + x_a^2)\right] \exp\left[\frac{-2j\pi}{s^2 \sin(\phi)}(x_a x)\right] dx \quad (\text{II.46})$$

Où l'on néglige un facteur de phase constant. On a $\phi = a \cdot \frac{\pi}{2}$ et $s^2 = \lambda F_1$ où s est un facteur d'échelle. Après un changement de variable:

$$F^\phi[f(sx_0 \sin \phi)](x_a) = F(\xi) = s \sin \phi \int f(sx_0 \sin \phi) \exp\left[\frac{j\pi}{\tan(\phi)}(x_0^2 \sin \phi + \xi^2)\right] \exp[-2j\pi(x_0 \xi)] dx_0$$

Soit

$$F(\xi) = s \sin \phi \exp\left[\frac{j\pi}{\tan(\phi)}(\xi^2)\right] \int f_0(x_0) \exp[j\pi x_0^2 \sin \phi \cos \phi] \exp[-2j\pi(x_0 \xi)] dx_0$$

Avec

$$\xi = \frac{x_a}{s} ; \quad x_0 = \frac{x}{s \sin \phi} \quad \text{Et} \quad f_0(x_0) = f(sx_0 \sin \phi)$$

La forme discrète de $F(\xi)$ est alors:

$$F(k\delta\xi) = s\delta x_0 \sin \phi \exp\left[\frac{j\pi k^2 \delta\xi^2}{\tan \phi}\right] \sum_{n=N/2}^{(N/2)-1} f_0(n\delta x_0) \exp(-j2\pi n k \delta\xi \delta x_0 + j\pi n^2 \delta x_0^2 \sin \phi \cos \phi) \quad (\text{II.47})$$

où $x_0 = n\delta x_0$ et $\xi = k\delta\xi$. Δx_0 et $\delta\xi$ sont les périodes d'échantillonnage dans les domaines spatiale et fréquentielle, et n et k sont des entiers.

En introduisant le nombre d'échantillon N , la longueur du domaine d'échantillonnage Δx_0 , avec $\delta x_0 = \Delta x_0 / N$, et en utilisant le fait que $\delta\xi = 1/\Delta x_0$ (théorie de la Transformée de Fourier discrète (TFD)), On peut réécrire (II.47) comme suit:

$$F_k = \frac{s\Delta x_0 \sin \phi}{N} \exp\left[\frac{j\pi k^2}{\Delta x_0^2 \tan \phi}\right] \sum_{n=N/2}^{(N/2)-1} \tilde{f}_{0n} \exp\left(\frac{-j2\pi n k}{N}\right)$$

$$F_k = \frac{s\Delta x_0 \sin \varphi}{N} \exp\left[\frac{j\pi k^2}{\Delta x_0^2 \tan \varphi}\right] TFD\{\tilde{f}_{0_n}\}$$

Avec
$$\tilde{f}_{0_n} = f_0\left(\frac{n\Delta x_0}{N}\right) \exp\left[\frac{j\pi n^2 \Delta x_0^2 \sin 2\varphi}{2N^2}\right]$$

Finalement,

$$F_k = \frac{s\Delta x}{N} \exp\left[\frac{j\pi k^2 s^2 \sin 2\varphi}{2\Delta x^2}\right] \sum_{n=N/2}^{(N/2)-1} \tilde{f}_{0_n} \exp\left[\frac{j\pi n^2 \Delta x^2}{N^2 s^2 \tan \varphi}\right] \exp\left(\frac{-j2\pi nk}{N}\right) \quad (\text{II.48})$$

La période d'échantillonnage pour que le facteur de phase quadratique satisfasse le théorème de Nyquist pour x est la suivante:

$$\delta x \leq \frac{s^2 \tan \varphi}{\Delta x}. \text{ Pour } x_a, \text{ on a } \delta x_a \leq \frac{s^2 \tan \varphi}{\Delta x_a}$$

Par ailleurs, on a:
$$\Delta x_a \leq \frac{Ns^2 \sin \varphi}{\Delta x_a}, \delta x_a \leq \frac{s^2 \sin \varphi}{\Delta x_a} \text{ et } \Delta x \leq N\delta x$$

Le nombre d'échantillons doit donc respecter la condition suivante:

$$\frac{\Delta x^2}{s^2 \tan \varphi} \leq N \leq \frac{2\Delta x^2}{s^2 \sin 2\varphi} \quad (\text{II.49})$$

Si l'on choisit de fixer le paramètre N afin de permettre l'utilisation des algorithmes de TFR ($N=2n$), les conditions sur la longueur du domaine d'échantillonnage Δx s'écrivent:

$$\left(\frac{Ns^2 \sin 2\varphi}{2}\right)^{1/2} \leq \Delta x \leq (Ns^2 \tan \varphi)^{1/2} \quad (\text{II.50})$$

Il faut noter que le domaine d'échantillonnage est normalement plus grand que le domaine de la fonction. Si c'est le cas, on considère simplement la fonction nulle en dehors de son domaine de définition. Pour un ordre suffisamment proche de 1, le facteur de phase quadratique oscille lentement et les critères établissant un domaine d'échantillonnage correcte doivent être basés sur la fonction elle-même. Pour un ordre proche de 0, Δx est trop petit (II.50) et N trop grand (II.49). Néanmoins, on peut s'affranchir de cette difficulté en calculant, dans un premier temps, une transformée fractionnaire d'ordre $a'=1+a$, suivit ensuite d'une TFD inverse.

II.6.2 Calcul numérique de la TFFr à l'aide de deux TFR

Un autre algorithme utilisant 2 TFR [54] possède des caractéristiques intéressantes. Cette méthode est basée sur l'implémentation optique de type II du système de Lohmann [46].

L'algorithme se réalise en trois temps:

- 1- L'action de la première lentille produit la multiplication du signal d'entrée par le facteur de phase quadratique:

$$\exp\left[-j\frac{\pi m^2}{N}\tan\frac{\varphi}{2}\right]$$

- 2- L'action de la propagation de l'onde dans l'espace libre produit la multiplication par un facteur de phase dans le domaine de Fourier, qui peut s'effectuer de la façon suivante:

Réaliser la TFD et multiplier le signal obtenu par le facteur de phase quadratique:

$$\exp\left[-j\frac{\pi \tilde{m}^2}{N}\sin\varphi\right]$$

réaliser la TFD inverse.

- 3- L'action de la seconde lentille produit à nouveau une multiplication par le facteur de phase quadratique:

$$\exp\left[-j\frac{\pi m^2}{N}\tan\frac{\varphi}{2}\right]$$

L'échantillonnage est identique dans chaque domaine fractionnaire:

$$\delta x = \delta x_a = \delta \tilde{x} = \sqrt{\frac{\lambda F_1}{N}} \quad \text{et} \quad \Delta x \Delta x_a = \lambda F_1 N$$

Les conditions d'échantillonnage s'écrivent: $|\sin\varphi| \leq 1$, qui est toujours vérifiée, et $\left|\tan\frac{\varphi}{2}\right| \leq 1$, qui est vérifiée lorsque $|a| \leq 1$.

Cet algorithme permet donc l'implémentation de la TFFr digitale pour un ordre $a \in [-1; 1]$, ce qui est suffisant pour n'importe quel ordre réel étant donné les propriétés de symétrie de la TFFr.

Notons qu'un facteur de phase constant a été négligé et que l'on doit multiplier le résultat par la

constante $C_1 = \exp\left[-j\pi\frac{\text{sgn}(\sin\varphi)}{4} + ja\frac{\pi}{4} + j\frac{\pi}{4}\right]$ si l'on souhaite une identification totale.

II.7 Détermination du paramètre F_1

La détermination du paramètre $s^2 = \lambda F_1$ se fait par l'utilisation des algorithmes rapides. Considérons l'algorithme utilisant deux TFR du paragraphe précédent, on a $\Delta x \Delta x_a = \lambda F_1 N$ et sachant que $\Delta x = N \delta x$ et $\Delta x_a = N \delta x_a$ et que l'échantillonnage est identique dans chaque domaine fractionnaire c'est-à-dire que $\delta x = \delta x_a$ alors, on peut déduire facilement que:

$$F_1 = \frac{N \delta x^2}{\lambda} \quad (\text{II.51})$$

L'échantillonnage expérimental est lié au pas δx_{CCD} des pixels de la matrice du capteur CCD. Alors de l'équation (II.51) on peut déduire:

$$F_1 = \frac{N \delta x_{CCD}^2}{\lambda} \quad (\text{II.52})$$

La relation (II.52) définit clairement F_1 alors qu'elle n'était qu'une constante arbitraire dans l'équation (II.33). Sa valeur est imposée par le système d'acquisition du signal.

Enfin, grâce à la définition de F_1 , nous avons réalisé une synthèse entre la définition optique de la TFFr et la numérisation des signaux optiques par un système d'acquisition numérique.

Il serait avantageux de palier aussi au problème de changement d'échelle, par exemple en interpolant le signal par les fonctions sinus cardinale. Il existe des algorithmes rapides et relativement souples [55] pour ce type d'interpolations mais plusieurs difficultés apparaissent, notamment le fait que la plus part des algorithmes existants ne fonctionnent que pour des puissances de 2 échantillons.

II.8 Reconstruction des hologrammes numériques par la TFFr.

III.8.1 Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons exposé les deux méthodes les plus utilisées pour la reconstruction numérique des hologrammes: la méthode de Fresnel et de convolution, récemment différentes méthodes ont été proposées. La fonction de distribution de Wigner est utilisée pour l'extraction directe des emplacements tridimensionnels d'un objet à partir de l'hologramme [56]. La transformation en ondelette pour la reconstruction des hologrammes était également proposée [57,58]. Coëtmelec *et al.* [59] ont étudié l'application de la transformée de

Fourier fractionnaire pour la reconstruction des hologrammes en ligne sous l'approximation de Fraunhofer.

III.8.2 La reconstruction par la TFFr

Quand un objet avec une fonction d'opacité $a(x)$ est éclairé par une onde plane, l'hologramme en ligne enregistré par une caméra CCD est exprimé par [60]:

$$I(x) = 1 - A(x) - A^*(x) + |A(x)|^2 \quad (\text{II.53})$$

Où $A(x)$ est la transformation de Fresnel de $a(x)$:

$$A(x) = \frac{1}{(\lambda d)^{1/2}} \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} d\right) \times \int a(x') \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d} (x - x')^2\right] dx' \quad (\text{II.54})$$

Où d est la distance entre l'objet et la caméra CCD. Quand l'onde diffractée par l'objet est beaucoup plus faible que l'onde de référence, le dernier terme dans l'équation (II.54) peut être négligé. Le premier terme ne présente aucun intérêt et peut être soustrait de $I(x)$ pour produire un nouvel hologramme dont l'intensité est donnée par :

$$I_c(x) = 1 - I(x).$$

La TFFr de ce nouvel hologramme reconstruit est.

$$F^\alpha \{I_c(x)\} = F^\alpha \{A(x)\} + F^\alpha \{A^*(x)\} \quad (\text{II.55})$$

Si l'ordre fractionnaire est sélectionné selon l'expression $P = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{-F_1}{d}\right)$, le premier terme de l'équation (II.55) peut être exprimé par :

$$\begin{aligned}
 F^\alpha \{A(x)\} &= \frac{\exp\{-i[\pi \operatorname{sgn}(\alpha)/4 - \alpha/2]\}}{(\lambda F_1 |\sin \alpha|)^{1/2}} \\
 &\times A\left(-\frac{d}{F_1} \operatorname{csc} \alpha x\right) \\
 &\times \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda F_1} \left(\frac{d}{F_1} \operatorname{csc}^2 \alpha + \cot \alpha\right) x^2\right]
 \end{aligned} \tag{II.56}$$

C'est une fonction d'opacité multipliée par une fonction de pépiement (chirp) de phase. Le deuxième terme dans l'équation (II.55) est :

$$\begin{aligned}
 F^\alpha \{A^*(x)\} &= \frac{\exp\{-i[\pi \operatorname{sgn}(\alpha)/4 - \alpha/2]\}}{(\lambda F_1 |\sin \alpha|)^{1/2}} \\
 &\times A_{2d}^*\left(-\frac{d}{F_1} \operatorname{csc} \alpha x\right) \\
 &\times \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda F_1} \left(\frac{d}{F_1} \operatorname{csc}^2 \alpha + \cot \alpha\right) x^2\right]
 \end{aligned} \tag{II.57}$$

Où

$$\begin{aligned}
 A_{2d}^*(x) &= \frac{1}{(\lambda 2d)^{1/2}} \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} 2d\right) \\
 &\times \int a(x') \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda 2d} (x-x')^2\right] dx'
 \end{aligned} \tag{II.58}$$

est la transformée de Fresnel de $a(x)$ à la distance $-d$.

Pour la formation d'image, nous nous intéressons seulement à la distribution d'intensité de l'objet et nous négligeons ainsi la fonction chirp de phase. L'intensité de la TFFr de cet hologramme

dont l'ordre fractionnaire $a = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{-F_1}{d}\right)$ est égale à celle de la transformée de Fresnel

multipliée par un facteur d'échelle pour l'hologramme reconstruit à la distance $-d$.

Seulement quand l'objet est reconstruit à la distance $-d$ de l'hologramme nous avons une image

claire ; autrement l'image devient brouillée. Le facteur d'échelle $-d \operatorname{csc} \alpha / F_1$ est une fonction de

la distance d qui affecte l'emplacement 3D de l'objet [60].

Chapitre III

Application de la transformée de Fourier

Fractionnaire à la restitution des hologrammes digitaux

III.1 Introduction

La Transformée de Fourier fractionnaire est définie comme une généralisation de la transformée de Fourier classique, elle a été proposée par Namias [37] en 1980 et réintroduite dans les systèmes optiques par Mendlovic, Ozaktas et Lohmann par la suite [39].

La reconstruction numérique des hologrammes digitaux est basée sur les lois de propagation de la lumière telle que l'intégrale de Fresnel et la transformée de Fourier classique. Pellat-Finet [49] a étudié le rapport entre la TFFr et la diffraction de Fresnel, Coëtmellec et al [59] ont appliqué la TFFr à la reconstruction numérique des hologrammes en ligne.

Dans ce chapitre nous exposons le principe de la TFFr dans l'expression de la formulation de la diffraction de Fresnel et son utilité dans la reconstruction des hologrammes digitaux en ligne pour de petites particules plongées dans un fluide.

III.2 Approximation numérique de la diffraction de Fresnel par la TFFr

Depuis le début des années 90, de nombreuses contributions ont montré l'utilité de la TFFr comme un outil de traitement de l'information optique [62, 63, 64], recouvrement de phase [65], caractérisation d'un signal [66], filtrage [67], codage de l'information [68] etc...

Des problèmes comme la théorie de la diffraction optique et la propagation à travers des systèmes optiques ont également été traités avec la TFFr [69, 70, 71], mais toutes ces approches

utilisent une ou plusieurs lentilles pour la réalisation expérimentale de la TFFr jusqu'à l'apparition du travail de Hua et al [72] et Kuo et al [73]. Ils démontrent la possibilité de décrire la diffraction de Fresnel dans l'espace libre, d'un objet éclairé par une onde plane par la TFFr sans utilisation de système optique. Toutefois, Hone-Ene Hwang [74] a montré que les résultats obtenus par Hua et al [72] et Kuo et al [73] ne sont valables que pour certaines conditions restrictives, et a présenté une méthode plus précise pour réduire au minimum les erreurs d'échelle. Mais sa méthode contient encore des erreurs et ne peut pas décrire avec exactitude le phénomène de la diffraction. Dans ce qui suit, nous proposons une nouvelle approche dans le but d'obtenir une grande précision.

III.2.1 Position du problème

La transformée de Fourier fractionnaire a été définie mathématiquement par McBride [38], et sa définition optique, ainsi que son implémentation par un système optique, ont été données par Lohmann [60]. La transformée de Fourier fractionnaire d'une fonction $f(x)$ en un point (x_0) peut être définie comme [60, 39]:

$$\begin{aligned}
 F^a[f(x_0)] &= \frac{\exp[-j(\pi/4 - \varphi/2)]}{\sqrt{|\sin \varphi|}} \\
 &\times \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0) \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda F_1 \tan \varphi} (x_0^2 + x_1^2)\right] \\
 &\times \exp\left(\frac{-2j\pi}{\lambda F_1 \sin \varphi} x_0 x_1\right) dx_0
 \end{aligned} \tag{III.1}$$

Où $\varphi = a \frac{\pi}{2}$.

La plupart des applications optiques pour l'implémentation expérimentale de l'équation (III.1) utilisent des systèmes de lentilles. Hua et al [72] ont proposé que le champ de la diffraction de Fresnel dans un espace libre (fig. III-1) décrit par la formule suivante:

$$G(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0) \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda z} (x_0 - x_1)^2\right] dx_0 \quad (\text{III.2})$$

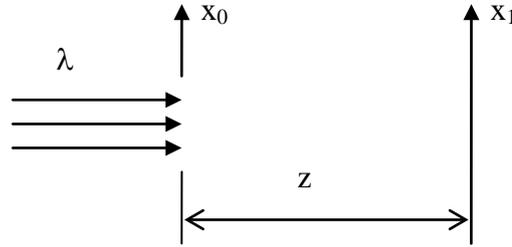


Figure.III-1: Géométrie de la diffraction de Fresnel dans un espace libre.

Peut être estimée par une TFFr en introduisant le changement de variables suivant:

$$x_0 = x_{0F} \cos \varphi \quad (\text{III.3})$$

$$x_1 = x_{1F} \quad (\text{III.4})$$

$$z = F_1 \sin \varphi \cos \varphi \quad (\text{III.5})$$

$$\cos \varphi \approx \pm 1 \quad (\text{III.6})$$

L'équation (III.2) devient alors :

$$G(x_{1F}) = C \int f(x_{0F} \cos \varphi) \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda F_1 \cos \varphi \sin \varphi} (x_{0F}^2 \cos^2 \varphi + x_{1F}^2)\right] \\ \times \exp\left[\frac{-j2\pi}{\lambda F_1 \cos \varphi \sin \varphi} (x_{0F} x_{1F} \cos \varphi)\right] dx_{0F} \cos \varphi$$

En prenant maintenant $(\cos^2 \varphi)$ comme un facteur commun ;

$$G(x_{1F}) = C \cos \varphi \int f(x_{0F} \cos \varphi) \exp\left[\frac{j\pi \cos^2 \varphi}{\lambda F_1 \cos \varphi \sin \varphi} (x_{0F}^2 + \frac{x_{1F}^2}{\cos^2 \varphi})\right] \times \exp\left[\frac{-j2\pi \cos \varphi}{\lambda F_1 \cos \varphi \sin \varphi} (x_{0F} x_{1F})\right] dx_{0F}$$

Donc :

$$G(x_{1F}) = C \int f(x_{0F} \cos \varphi) \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda F_1 \tan \varphi} (x_{0F}^2 + \frac{x_{1F}^2}{\cos^2 \varphi})\right] \times \exp\left[\frac{-j2\pi}{\lambda F_1 \sin \varphi} (x_{0F} x_{1F})\right] dx_{0F} \quad (\text{III.7})$$

En comparant l'expression de la diffraction de Fresnel (III.2) et l'équation (III.7), on remarque qu'elles sont assez semblables. On peut constater aussi que l'équation (II.7) représente bien l'expression de la TFFr, sauf qu'elle est multipliée par un facteur $\frac{1}{\cos \varphi}$ appelé facteur d'échelle.

Kuo et al [73] ont montré que ce résultat, sous les conditions de Hua et al et pour une hypothèse différente que celle proposée ($\cos \varphi \approx \pm 1$), est en mesure de causer des erreurs d'échelle dans la distribution de l'intensité de la figure de diffraction de Fresnel. Ils ont proposé une méthode permettant de réduire au minimum les erreurs d'échelle en utilisant les changements de variable suivants:

$$x_0 = \alpha x_{0F} \quad \text{(III.8)}$$

$$x_1 = \beta x_{1F} \quad \text{(III.9)}$$

$$z = \gamma F_1 \quad \text{(III.10)}$$

Dans ces conditions l'équation (III.2) devient:

$$F^a [f(\alpha x_{0F})] = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha x_{0F}) \times \exp \left[\frac{j\pi}{\lambda \gamma F_1} (\alpha^2 x_{0F}^2 + \beta^2 x_{1F}^2) \right] \times \exp \left(\frac{-2j\pi}{\lambda \gamma F_1} x_{0F} x_{1F} \right) dx_{0F} \quad \text{(III.11)}$$

Où $\gamma = \alpha\beta \sin \varphi$ et $(\alpha^2 x_{0F}^2 + \beta^2 x_{1F}^2) / \gamma = (x_{0F}^2 + x_{1F}^2) / \tan \varphi$.

Ils prennent la même condition que Hua et al (III.5) pour le paramètre Z pour le calcul de l'intensité de la figure de diffraction de Fresnel avec une erreur minimale Δ et ils ont ajouté les hypothèses suivantes:

$$|\alpha\beta - \cos \varphi| = \Delta \quad \text{(III.12)}$$

$$|\alpha^2 - \cos^2 \varphi| = \Delta \quad \text{(III.13)}$$

$$|\beta^2 - \cos^2 \varphi| = \Delta \quad \text{(III.14)}$$

Des équations (III.13 et III.14), Kuo et al [73] ont donné des solutions utiles pour les paramètres suivants:

$$\Delta = \frac{|\cos \varphi - \cos^2 \varphi|}{2} \quad (\text{III.15})$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\cos \varphi + \cos^2 \varphi}{2}} . \quad (\text{III.16})$$

Hone - Ene Hwang [74] ont montré que l'approximation de Kuo et al ne donne, une description fidèle de la figure de diffraction de Fresnel en terme d'intensité, que si la condition $\cos^2 \varphi \approx \pm 1$ est vérifiée, si non, elle mène à des erreurs à grande échelle et ne peut, en conséquence, être généralisée sur tous les ordres de la TFFr. Ils ont, à leur tour, proposé les hypothèses ci-dessous en vue de minimiser ces erreurs et rapprocher cette description de la diffraction de Fresnel par la TFFr avec une plus grande flexibilité:

$$|\alpha\beta - \cos \varphi| = \Delta \quad (\text{III.17})$$

$$|\alpha^2 - \cos^2 \varphi| = N.\Delta \quad (\text{III.18})$$

$$|\beta^2 - \cos^2 \varphi| = N.\Delta \quad (\text{III.19})$$

Où N est un nombre arbitraire positif.

La solution pour ces paramètres est donnée par [74]:

$$\Delta = \frac{|\cos \varphi - \cos^2 \varphi|}{N} \quad (\text{III.20})$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{N \cos \varphi + \cos^2 \varphi}{N+1}} . \quad (\text{III.21})$$

En regardant l'équation (III.20), il est très clair que l'erreur diminue quand N augmente. Mais nous constatons que l'influence de N sur α ou β est négligeable au-delà ($N = 10$), cela implique que le résultat de la transformée de Fourier fractionnaire pour décrire la diffraction de Fresnel dans l'espace libre contient de grandes erreurs. Nous vérifions également que la solution

proposée converge vers la solution avec un minimum d'erreurs relatives à un ordre de la transformée de Fourier fractionnaire $a \geq 0,5$. En outre, si nous prenons comme exemple une fente fine, éclairée par une onde plane, nous pouvons clairement constater (Fig. III.2), que si nous nous écartons de l'ordre 0, la description de ce phénomène par la transformée de Fourier fractionnaire devient inacceptable du point de vue précision.

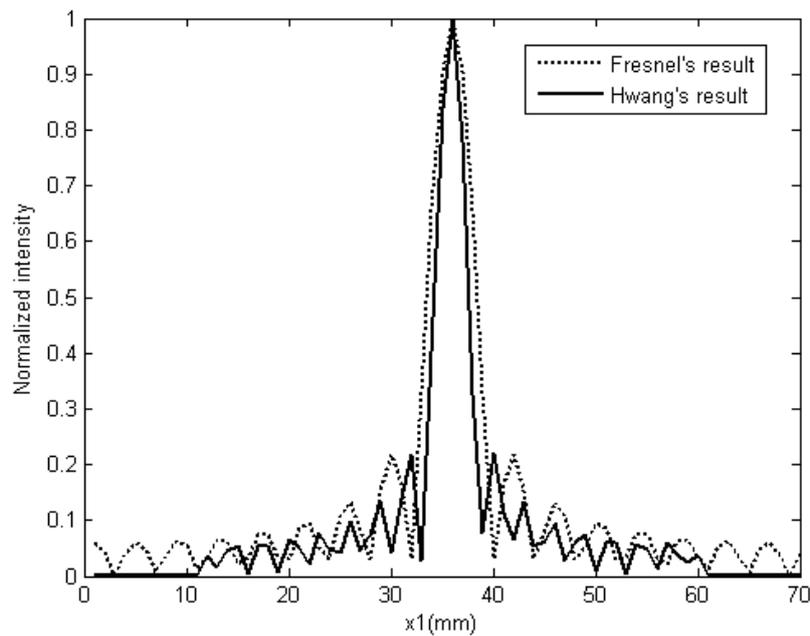


Figure III-2: Distribution de l'intensité normalisée de la figure de diffraction calculée par l'intégrale de Fresnel et l'approximation de Hwang pour $\lambda=632,8 \text{ nm}$, $F_1=1,5 \text{ m}$, largeur de l'ouverture= 1 mm et $a=0,5$.

Conformément à ce qui précède, il n'est pas évident de décrire le phénomène de la diffraction dans l'espace libre par la transformée de Fourier fractionnaire avec exactitude suivants les approximations de Hua et all, Kuo et all et Hwang.

Pour ce faire, nous proposons de rechercher une solution concernant les paramètres α et β permettant de surmonter la condition de l'équation (III.5).

En plus des équations (III.6, III.8 et III.9), nous supposons que $\alpha = \beta \approx 1$, et donc, nous devons rechercher une solution, des paramètres pour lesquels la condition doit être remplie pour tous les ordres de la TFFr [75].

La solution proposée est la suivante:

$$\alpha = \beta = \frac{3}{2} \cos(\varphi/4) - \frac{1}{2 \cos(\varphi/4)} \quad (\text{III.22})$$

$$\gamma = \sin \varphi \cos(\varphi/2) \quad (\text{III.23})$$

III.2.2 Résultats et discussions

Pour comparer notre solution à celles proposées précédemment, nous traçons la variation du paramètre α (β) (III.16, III.21 et III.22) en fonction de l'ordre (a) de la transformée de Fourier fractionnaire (fig. III-3).

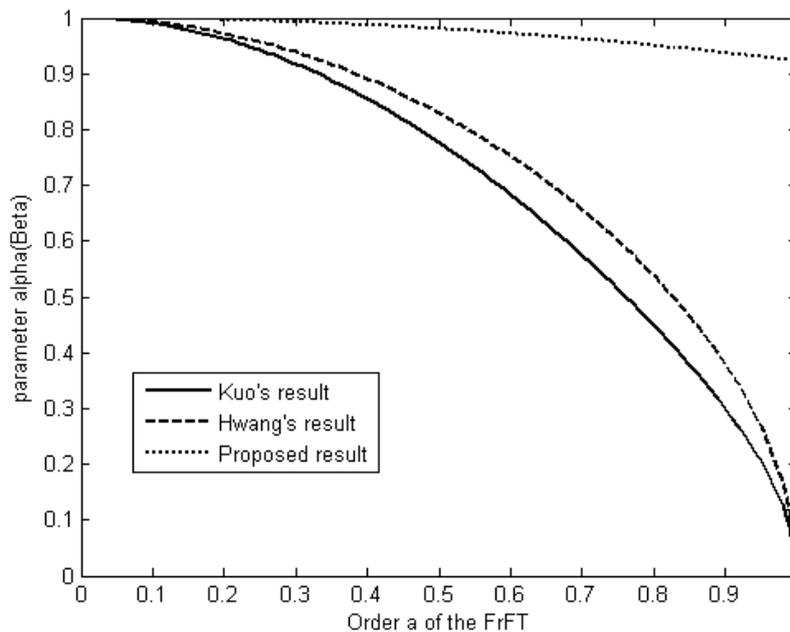


Figure III-3: Variation du paramètre $\alpha(\beta)$ en fonction de l'ordre de la TFFr pour les trois approches.

De la Figure (III-3), on peut voir que les approximations de Kuo et Hwang convergent vers la solution recherchée avec un minimum d'erreurs pour un ordre $\alpha \leq 0,5$, parce que le paramètre α ou β est très proche de 1. Au-delà de cette valeur, les erreurs deviennent significatives et la solution ne correspond pas exactement à la figure de diffraction de Fresnel. Ceci limite l'utilisation de ces approximations à un cas très particulier.

Ainsi, notre approximation est très utile pour décrire la diffraction de Fresnel dans l'espace libre et son exactitude est satisfaite pour toutes les valeurs de l'ordre de la TFFr avec un minimum d'erreurs.

Si l'on définit comme erreur d'échelle:

$$\text{erreur}(\%) = |1 - \alpha| \times 100\% \quad (\text{III.24})$$

On peut évaluer l'erreur sur α ou β pour tous les ordres de la TFFr (fig. III-4).

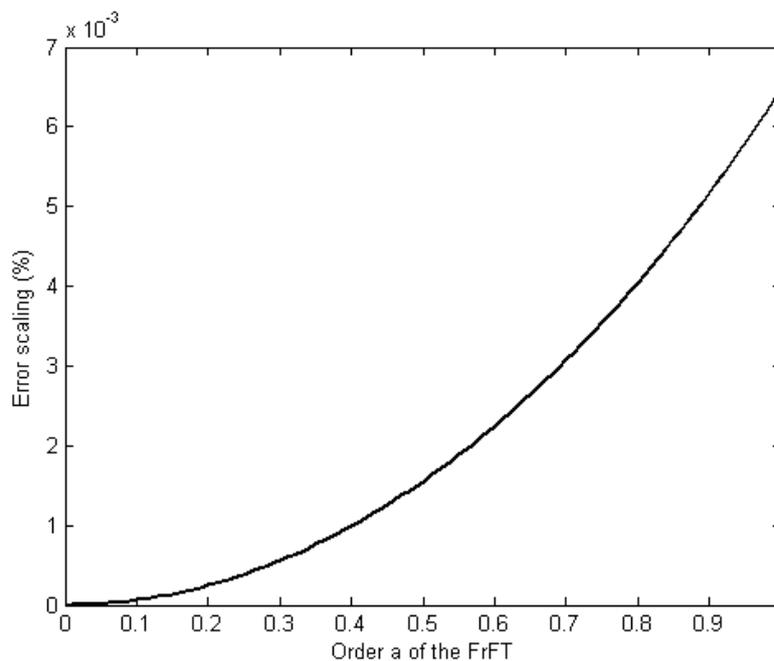


Figure III-4: Variation de l'erreur d'échelle en fonction de l'ordre de la TFFr

De la figure (III-4), l'erreur maximale de l'échelle est de 6,4645%, qui se produit lorsque l'ordre de la TFFr est égale à 1, et elle diminue pour a inférieur à 1.

Pour la validation de notre approximation, nous avons tracé sur la figure suivante (fig. III-5) la répartition de l'intensité normalisée de la figure de diffraction de Fresnel d'une fente fine de 1 mm de largeur, éclairée par un faisceau laser de longueur d'onde 632.8nm, suivant l'intégrale de Fresnel, avec celle obéissant aux approximations de Hwang.

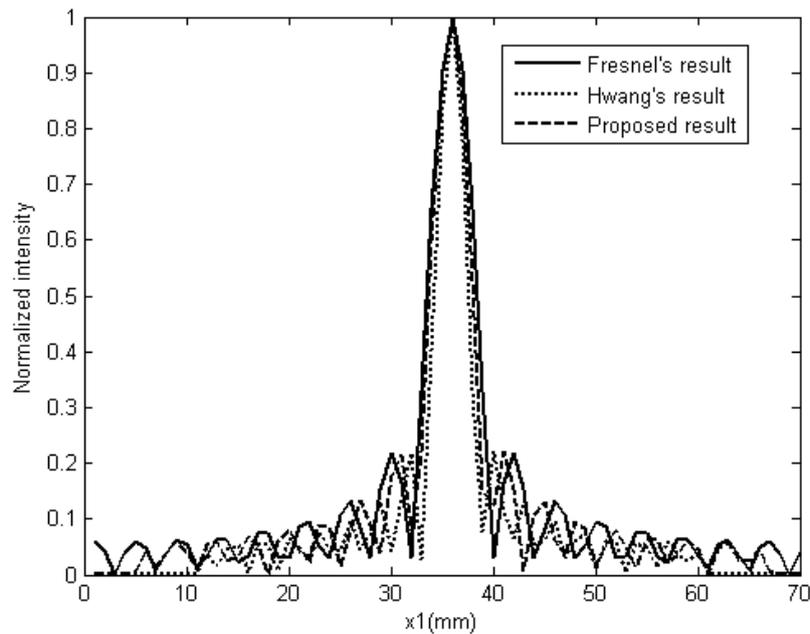


Figure III-5: Distribution de l'intensité normalisée de la figure de diffraction dans l'espace libre calculée par l'intégrale de Fresnel selon l'approche proposée et celle approche de Hwang pour: $\lambda=632.8 \text{ nm}$, $F_1 = 1.5 \text{ m}$, largeur d'ouverture= 1 mm et $a =0.5$

Nous pouvons voir clairement que notre approximation est très flexible pour décrire la diffraction de Fresnel dans l'espace libre avec un minimum d'erreur, et l'ensemble de la figure de diffraction est approximativement la même que celle obtenue par la formule de Fresnel de

l'équation (III.2). Contrairement à l'approche Hwang qui perd sa précision quand nous nous éloignons de l'ordre central.

Nous présentons sur les figures suivantes la figure de diffraction de la fente fine calculée par l'équation (III.2), les approximations de Kuo, Hwang et celle proposée.

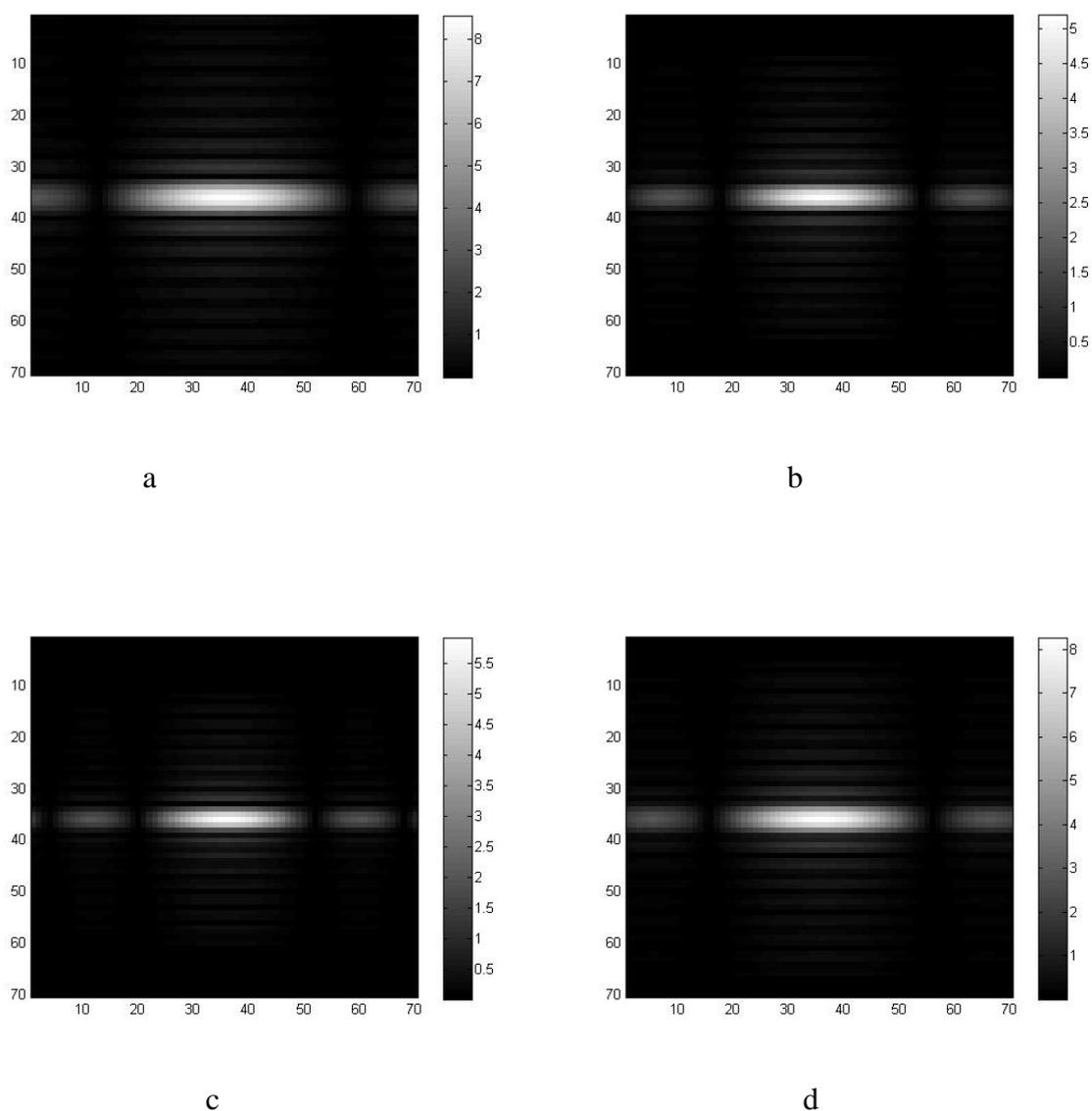


Figure III-6: Distribution d'amplitude de la figure de diffraction dans l'espace libre calculé par l'intégrale de Fresnel (a), approche de Kuo (b), approche de Hwang (c) et l'approche proposée

(d) pour: $\lambda=632:8 \text{ nm}$, $F_1= 1.5 \text{ m}$, largeur d'ouverture 1mm and $a = 0.5$

Suite à ces figures, il est clair que notre approximation donne un résultat similaire à celui calculé par l'intégrale de Fresnel pour un ordre de la TFFr $a = 0,5$.

Afin de généraliser notre approximation de la TFFr pour décrire le phénomène de la diffraction de Fresnel sur l'ensemble de l'intervalle] $0,1$ [, nous présentons sur la figure (III-7) la répartition de l'intensité normalisée calculée par la TFFr pour différents ordres et celle calculée par l'intégrale de Fresnel.

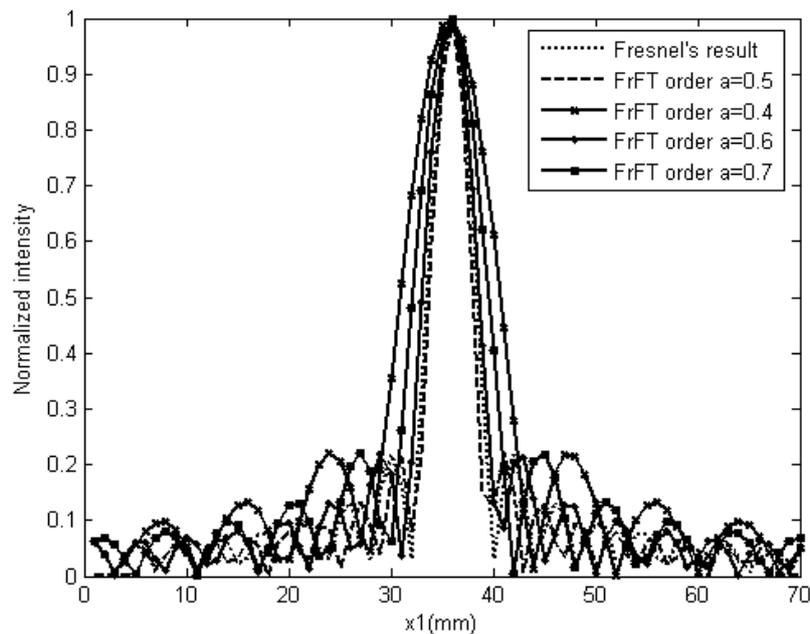


Figure III-7 : Distribution de l'intensité normalisée de la figure de diffraction dans l'espace libre calculée par l'intégrale de Fresnel et l'approche proposée pour: $\lambda=632:8 \text{ nm}$, $F_1 = 1.5 \text{ m}$, largeur d'ouverture= 1 mm et différents ordres fractionnaires.

Sur cette figure, on peut voir que notre approximation est bonne pour un ordre optimal de la TFFr qui est égal à 0,5. Pour le reste des ordres, l'approximation conserve sa fidélité à décrire le phénomène de la diffraction dans l'espace libre, mais le résultat sera multiplié par un facteur d'échelle qui est fonction de la valeur de l'erreur.

III.3 Contribution à la reconstruction numérique des hologrammes par la TFFr

Dans ce paragraphe, nous essayons de développer une relation simple et plus générale entre la transformée de Fourier fractionnaire et l'intégrale de la diffraction de la lumière dans l'espace libre en champ proche. Et puisque l'intégrale de Fresnel est utilisée comme outil de reconstruction numérique des hologrammes digitaux, nous essayons, en utilisant une analogie très simple entre l'intégrale de Fresnel et la transformée de Fourier fractionnaire de développer un formalisme de reconstruction numériques des hologrammes basé sur la transformée de Fourier fractionnaire.

III.3.1 De l'intégrale de Fresnel à la TFFr

Soit le montage de la figure (III-1), où une ouverture quelconque est éclairée par une onde monochromatique plane. La distribution de l'amplitude complexe sur un écran placé à une distance Z du plan de l'ouverture est donnée par l'intégrale de Fresnel suivante :

$$U(x_0) = \frac{1}{j\lambda Z} \cdot \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} Z\right) \cdot \int u(x) \cdot \exp j \frac{\pi}{\lambda Z} (x^2 + x_0^2) \exp - j \frac{2\pi}{\lambda Z} (xx_0) \cdot dx \quad (\text{III.25})$$

Le cas unidimensionnel est considéré pour des raisons de simplification.

Faisons maintenant un changement de variable, en posons :

$$x = (\sqrt{\cos \varphi})^N \cdot x_F$$

$$Z = F_1 \sin \varphi \cos^{N-1}(\varphi)$$

Avec N=0, 1, 2,3,.....

Avec $\varphi = a \cdot \frac{\pi}{2}$, a est l'ordre de la TFFr, alors l'équation (III.25) devient :

$$\begin{aligned}
 U(x_0) = & \frac{(\sqrt{\cos \varphi})^N}{j\lambda F_1 \sin \varphi \cos^{N-1}(\varphi)} \cdot \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} F_1 \sin \varphi \cos^{N-1}(\varphi)\right) \cdot \\
 & \times \int u\left(\left(\sqrt{\cos \varphi}\right)^N x_F\right) \exp\left[j \frac{\pi \cos^N(\varphi)}{\lambda F_1 \sin \varphi \cos^{N-1}(\varphi)} \left(x_F^2 + \left(\frac{x_0}{\left(\sqrt{\cos \varphi}\right)^N}\right)^2\right)\right] \cdot \\
 & \times \exp\left[-j \frac{2\pi \left(\sqrt{\cos \varphi}\right)^N}{\lambda F_1 \sin \varphi \cos^{N-1}(\varphi)} (x_F x_0)\right] dx_F
 \end{aligned} \tag{III.26}$$

Dans cette dernière expression, il est évident que si on fait un changement de variable dans le

plan de sortie en posant $x_0 = \frac{1}{\left(\sqrt{\cos \varphi}\right)^N} x_{0s}$ et après de simples simplifications, on obtiendra

aisément l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 U\left(\frac{1}{\left(\sqrt{\cos \varphi}\right)^N} x_{0s}\right) = & \frac{(\sqrt{\cos \varphi})^N}{j\lambda F_1 \sin \varphi \cos^{N-1}(\varphi)} \cdot \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} F_1 \sin \varphi \cos^{N-1}(\varphi)\right) \cdot \\
 & \times \int u\left(\left(\sqrt{\cos \varphi}\right)^N x_F\right) \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda F_1 \tan \varphi} (x_F^2 + x_{0s}^2)\right] \cdot \\
 & \times \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda F_1 \sin \varphi \cos^{N-1}(\varphi)} (x_F x_{0s})\right] dx_F
 \end{aligned} \tag{III.27}$$

Maintenant, envisageons la condition que doit satisfaire l'équation (III.27) pour qu'elle concorde avec la définition de Lhomann de la transformée de Fourier fractionnaire. En comparant les termes de l'équation (III.27) et ceux de l'équation (III.1) de Lhomann, il est évident qu'à part le facteur de propagation

$$C_1 = \frac{(\sqrt{\cos \varphi})^N}{j\lambda F_1 \sin \varphi \cos^{N-1}(\varphi)} \cdot \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} F_1 \sin \varphi \cos^{N-1}(\varphi)\right) \quad \text{l'équation (III.27) correspond à la}$$

définition de transformée de Fourier fractionnaire $\text{si } \cos^{N-1}(\varphi) = 1$. C'est une condition moins restrictive que celle de l'équation (III.6) de Hua et al [72], car pour un choix de N=1, elle est vérifiée quelque soit l'ordre de la TFFr, et dans ce cas nous aurons le changement de variables suivant:

$$x = \sqrt{\cos \varphi} \cdot x_F$$

$$Z = F_1 \sin \varphi$$

Pour la réalisation expérimentale de l'équation (III.27), il est évident que le facteur d'échelle $(\sqrt{\cos \varphi})^N$ soit compris dans l'intervalle $[0,1]$ quelque soit N et l'ordre de la TFFr. Donc, pour un objet de dimensions très petites, on peut visualiser sa transformée de Fourier fractionnaire sans aucune difficulté, en choisissant $N=1$, mais pour des objets de dimensions assez grandes, la visualisation de la TFFr est pratiquement difficile à cause de la limitation du phénomène de la diffraction. Pour cela, on propose de choisir un N suffisamment grand en tenant compte de la condition $\cos^{N-1}(\varphi) \approx 1$, donc l'équation (III.27) est beaucoup plus générale que celle proposée par Hua et al [72].

III.3.2 De la TFFr à l'intégrale de Fresnel.

Maintenant, considérons, le modèle de la transformée de Fourier fractionnaire selon la définition de Lhomann :

$$U(x_{0s}) = C_\varphi \cdot \int u(x_F) \cdot \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda F_1 \tan \varphi} (x_F^2 + x_{0s}^2) \right] \cdot \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda F_1 \sin \varphi} (x_F x_{0s}) \right] \cdot dx_F \quad \text{(III.28)}$$

$$\text{Où } C_\varphi = \frac{\exp\left(j \frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{2\pi j \sin \varphi}} = \sqrt{\frac{1 - j \cot \varphi}{2\pi}} \quad \text{avec } \varphi = a \cdot \frac{\pi}{2}$$

Faisons le changement de variables suivant :

$$x_F = \frac{1}{(\sqrt{\cos \varphi})^N} \cdot x$$

$$Z = F_1 \sin \varphi \cos^{N-1}(\varphi)$$

Avec $N=0, 1, 2, 3, \dots$ etc.

L'équation (III.28) devient :

$$U(x_{0s}) = \frac{C_\varphi}{(\sqrt{\cos \varphi})^N} \cdot \int u \left(\frac{x}{(\sqrt{\cos \varphi})^N} \right) \cdot \exp \left[j \frac{\pi \cos^N(\varphi)}{\lambda Z} \left(\left(\frac{x}{(\sqrt{\cos \varphi})^N} \right)^2 + x_{0s}^2 \right) \right] \times \exp \left[-j \frac{2\pi \cos^{N-1}(\varphi)}{\lambda Z} \left(\frac{xx_{0s}}{(\sqrt{\cos \varphi})^N} \right) \right] dx \quad (\text{III.29})$$

Si nous remplaçons $x_{0s} = (\sqrt{\cos \varphi})^N x_0$ dans la dernière équation, nous obtenons l'expression suivante :

$$U \left((\sqrt{\cos \varphi})^N x_0 \right) = \frac{C_\varphi}{\sqrt{\cos \varphi}} \cdot \int u \left(\frac{x}{(\sqrt{\cos \varphi})^N} \right) \cdot \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda Z} (x^2 + x_0^2) \right] \times \exp \left[-j \frac{2\pi \cos^{N-1}(\varphi)}{\lambda Z} (xx_0) \right] dx \quad (\text{III.30})$$

A part le facteur de propagation $C_2 = \frac{C_\varphi}{(\sqrt{\cos \varphi})^N}$, il est très clair que cette dernière équation

représente l'intégrale de Fresnel si $\cos^{N-1}(\varphi) \approx 1$. Cette condition est vérifiée quelque soit l'ordre de la TFFr pour un $N=1$.

III.3.3 Résultats et discussions.

Pour valider ce qui a été avancé précédemment, nous avons représenté la variation des

facteurs d'échelle respectifs $S_1 = (\sqrt{\cos \varphi})^N$ et $S_2 = \frac{1}{(\sqrt{\cos \varphi})^N}$ en fonction de N pour différents

ordres de la TFFr (fig. III-8 et 9).

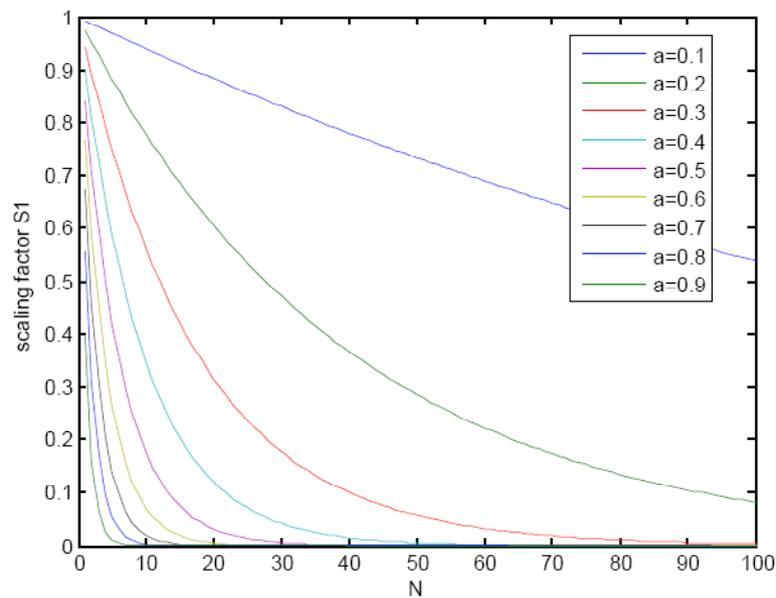


Figure III-8 : Influence du facteur d'échelle de la fonction d'entrée en fonction de N

On remarque, clairement que pour $N=2$, l'équation (III.27) est la même que celle trouvée par Hua et al [72]. Et pour des valeurs de N supérieures à 2, le facteur d'échelle diminue considérablement, ce qui diminue les dimensions de l'objet, alors la TFFr sera facilement réalisée tout en respectant la condition $\cos^{N-1}(\varphi) \approx 1$.

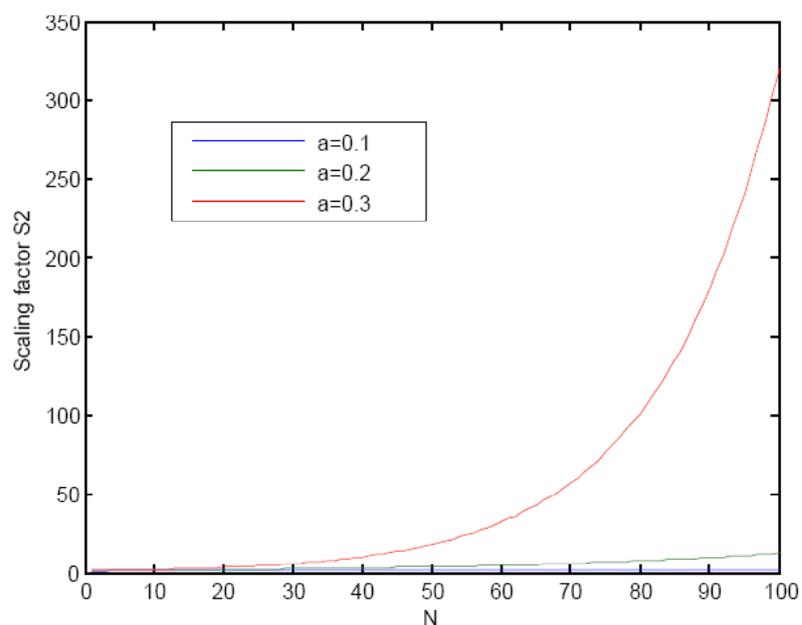


Figure III-9 : Influence du facteur d'échelle de la fonction de sortie en fonction de N

On remarque, clairement que pour $N=2$, l'équation (III.30) est la même que celle trouvée par Hua et al [72]. Et pour des valeurs de N supérieures à 20 le facteur d'échelle augmente considérablement ce qui augmente les dimensions de l'objet, alors la FrFT des objets de taille microscopiques sera facilement réalisée en respectant la condition $\cos^{N-1}(\varphi) \approx 1$.

III.4 Application à la reconstruction des hologrammes numériques

Soit l'équation (III.31) qui décrit l'amplitude complexe juste derrière l'hologramme :

$$b'(x', y') = \frac{1}{i\lambda d'} \exp ikd' \cdot \exp \frac{i\pi}{d'\lambda} (x'^2 + y'^2) \iint h(\xi, \eta) r(\xi, \eta) \exp \frac{i\pi}{\lambda d'} [\xi^2 + \eta^2] \exp - \frac{2\pi}{\lambda d'} i[\xi x' + \eta y'] d\xi d\eta \quad (\text{III.31})$$

Faisons le changement de variables suivant.

$$\xi = (\sqrt{\cos \varphi})^N \cdot \xi_F$$

$$\eta = (\sqrt{\cos \varphi})^N \cdot \eta_F$$

$$d' = F_1 \sin \varphi (\cos \varphi)^{N-1}$$

Avec $N=0, 1, 2, 3, \dots$

Nous obtenons l'expression suivante:

$$\begin{aligned} b'(x', y') &= \frac{1}{i\lambda F_1 \sin \varphi (\cos \varphi)^{N-1}} \exp ikF_1 \sin \varphi (\cos \varphi)^{N-1} \cdot \exp \frac{i\pi}{F_1 \sin \varphi (\cos \varphi)^{N-1} \lambda} (x'^2 + y'^2) \\ &\times \iint h \left((\sqrt{\cos \varphi})^N \cdot \xi_F, (\sqrt{\cos \varphi})^N \cdot \eta_F \right) r \left((\sqrt{\cos \varphi})^N \cdot \xi_F, (\sqrt{\cos \varphi})^N \cdot \eta_F \right) \\ &\times \exp \frac{i\pi}{\lambda F_1 \sin \varphi (\cos \varphi)^{N-1}} \left[\left((\sqrt{\cos \varphi})^N \cdot \xi_F \right)^2 + \left((\sqrt{\cos \varphi})^N \cdot \eta_F \right)^2 \right] \\ &\times \exp - \frac{2\pi i}{\lambda F_1 \sin \varphi (\cos \varphi)^{N-1}} \left[(\sqrt{\cos \varphi})^N \cdot \xi_F x' + (\sqrt{\cos \varphi})^N \cdot \eta_F y' \right] d(\sqrt{\cos \varphi})^N \cdot \xi_F d(\sqrt{\cos \varphi})^N \cdot \eta_F \end{aligned}$$

Après simplification nous aurons:

$$\begin{aligned} b'(x', y') &= \frac{(\cos \varphi)^N}{i\lambda F_1 \sin \varphi (\cos \varphi)^{N-1}} \exp ikF_1 \sin \varphi (\cos \varphi)^{N-1} \cdot \exp \frac{i\pi}{F_1 \sin \varphi (\cos \varphi)^{N-1} \lambda} (x'^2 + y'^2) \\ &\times \iint h \left((\sqrt{\cos \varphi})^N \cdot \xi_F, (\sqrt{\cos \varphi})^N \cdot \eta_F \right) r \left((\sqrt{\cos \varphi})^N \cdot \xi_F, (\sqrt{\cos \varphi})^N \cdot \eta_F \right) \end{aligned}$$

$$\times \exp \frac{i\pi(\cos \varphi)^N}{\lambda F_1 \sin \varphi (\cos \varphi)^N (\cos \varphi)^{-1}} [(\xi_F)^2 + (\eta_F)^2]$$

$$\times \exp - \frac{2\pi i (\sqrt{\cos \varphi})^N}{\lambda F_1 \sin \varphi (\cos \varphi)^{N-1}} [\xi_F x' + \eta_F y'] d.\xi_F d.\eta_F$$

Dans cette dernière expression faisons le changement de variables au plan image comme

suit : $x' = \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}} \right)^N .x_F$, $y' = \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}} \right)^N .y_F$ et après de simples simplifications, nous pouvons

avoir facilement l'expression suivante:

$$b' \left(\left(\frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}} \right)^N .x_F, \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}} \right)^N .y_F \right) = \frac{1}{i\lambda F_1 \tan \varphi} \exp ikF_1 \tan \varphi \exp \frac{i\pi}{\lambda F_1 \tan \varphi} (x_F^2 + y_F^2)$$

$$\times \iint h \left((\sqrt{\cos \varphi})^N .\xi_F, (\sqrt{\cos \varphi})^N .\eta_F \right) f \left((\sqrt{\cos \varphi})^N .\xi_F, (\sqrt{\cos \varphi})^N .\eta_F \right)$$

$$\times \exp \frac{i\pi}{\lambda F_1 \tan \varphi} [(\xi_F)^2 + (\eta_F)^2] \quad \text{(III.32)}$$

$$\times \exp - \frac{2\pi i}{\lambda F_1 \sin \varphi \cos^{N-1}(\varphi)} [\xi_F x_F + \eta_F y_F] d.\xi_F d.\eta_F$$

A part le facteur de propagation $\frac{1}{i\lambda F_1 \sin \varphi (\cos \varphi)^{-1}} \exp ikF_1 \sin \varphi (\cos \varphi)^{N-1}$, l'équation (III.32) qui

décrit l'amplitude complexe juste derrière l'hologramme est similaire à la formulation de la TFFr trouvée par Lhomann à condition que $\cos^{N-1}(\varphi) \approx 1$. Il faut signaler que les dimensions de

l'hologramme doivent être multipliées par un facteur d'échelle $(\sqrt{\cos \varphi})^N$ ce qui entraîne un changement sur les dimensions de l'image reconstruite d'un facteur $\frac{1}{(\sqrt{\cos \varphi})^N}$.

III.5 Résultats expérimentaux

III.5.1 Enregistrement d'un hologramme

Le montage utilisé dans cette expérience (fig. III.13) consiste en un laser à Argon de longueur d'onde $\lambda = 514.5 \text{ nm}$, un objectif de microscope pour élargir le faisceau et une lentille de distance focale $f=50\text{mm}$ placée au point focale de l'objectif du microscope pour rendre le faisceau laser parallèle. Le faisceau émergent éclaire ensuite une fiole de volume $(10 \times 10 \times 50) \text{ mm}^3$ dans laquelle on a plongé des particules de diamètre environ 200 micromètres. Une caméra CCD est placée à une distance d d'environ 320cm de la face arrière de la fiole pour enregistrer les figures de diffraction des particules.

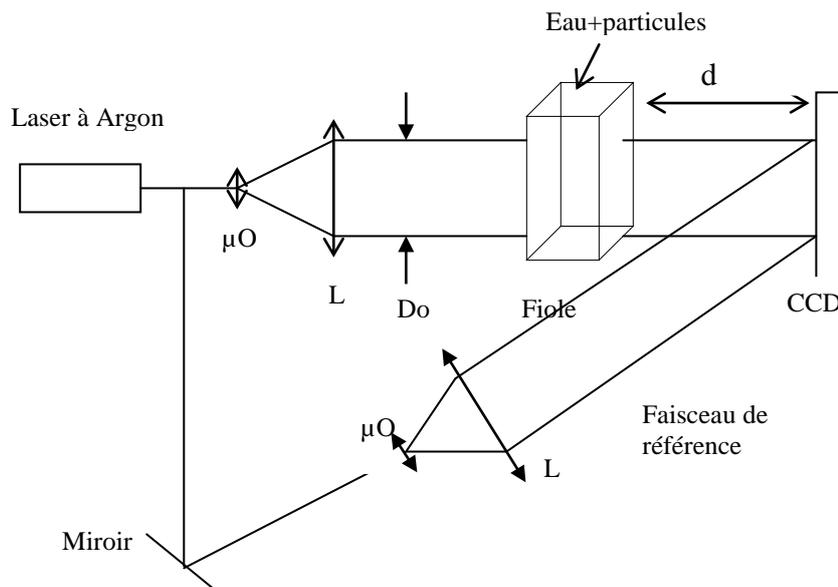


Figure III-13 : Montage expérimental

μO : Objectif de microscope ; L : Lentille ; Do : Diaphragme d'ouverture.

Le capteur CCD utilisé dans cette expérience est de type PCO 4000. Les dimensions de l'image enregistrée sont de 1900 par 1900 pixels et la taille des pixels est de $(9 \times 9) \mu\text{m}^2$. L'image enregistrée par la caméra CCD est représentée par la figure (III-14).

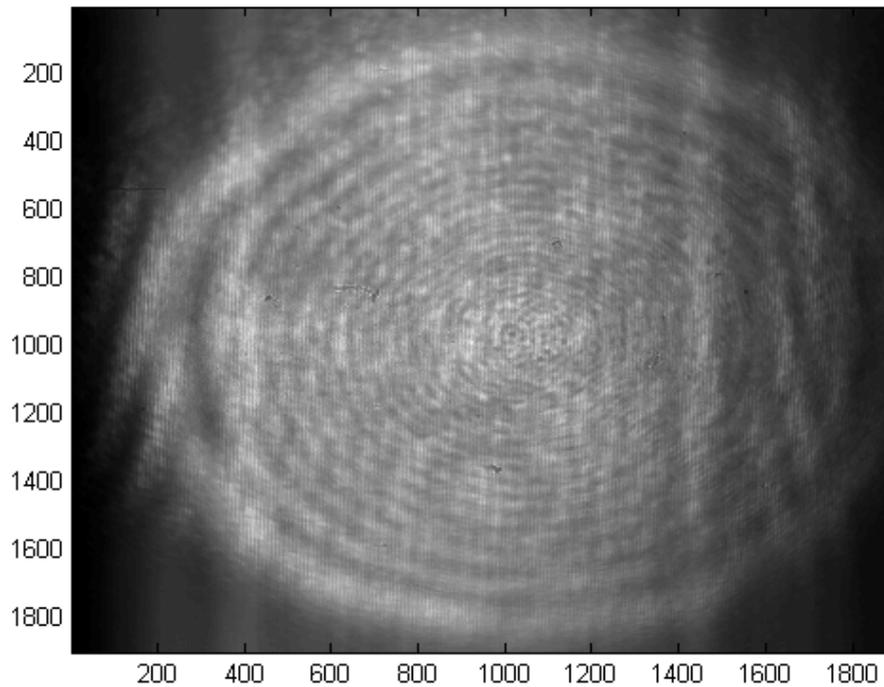


Figure.III-14 : Hologramme de petites particules

III.5.2 Restitution numérique d'un hologramme

La restitution numérique se fait en introduisant la distance entre la caméra CCD et la face arrière de la fiole, la longueur d'onde de la lumière utilisée et les dimensions des pixels de la caméra CCD. Le programme de restitution numérique de l'hologramme est basé sur la transformée de Fourier fractionnaire (III.32), réalisée selon l'algorithme suivant à deux TFR [54]:

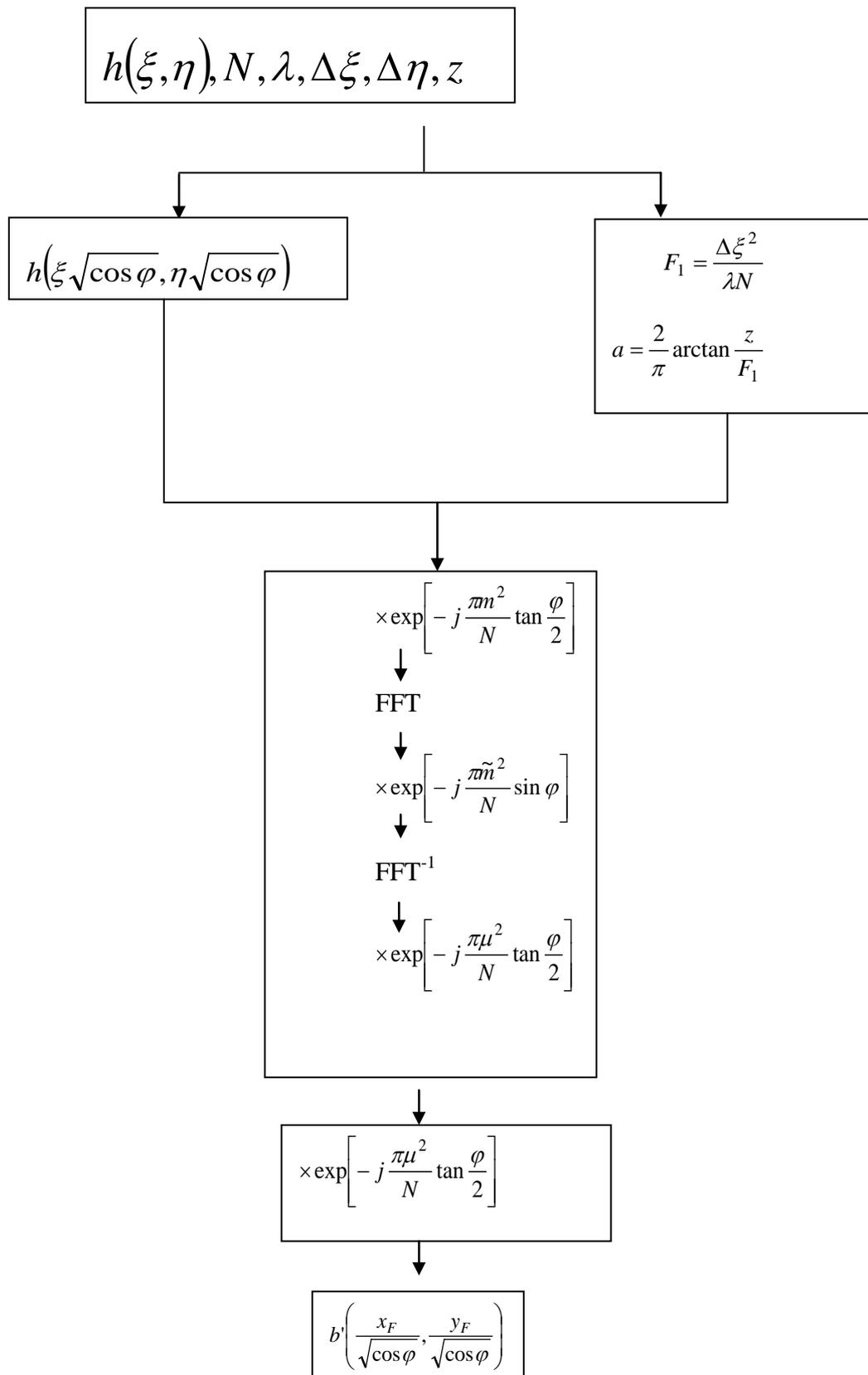


Figure III-15: Organigramme de restitution numérique des hologrammes par la TFFr.

L'image des particules correspondant à la distance $d = 314\text{cm}$ est représentée par la figure (III-16).

Sur cette image on observe l'ordre central qui est assez intense et de part et d'autre de cet ordre, les images réelle et virtuelle de la partie de la fiole éclairée par le faisceau laser.

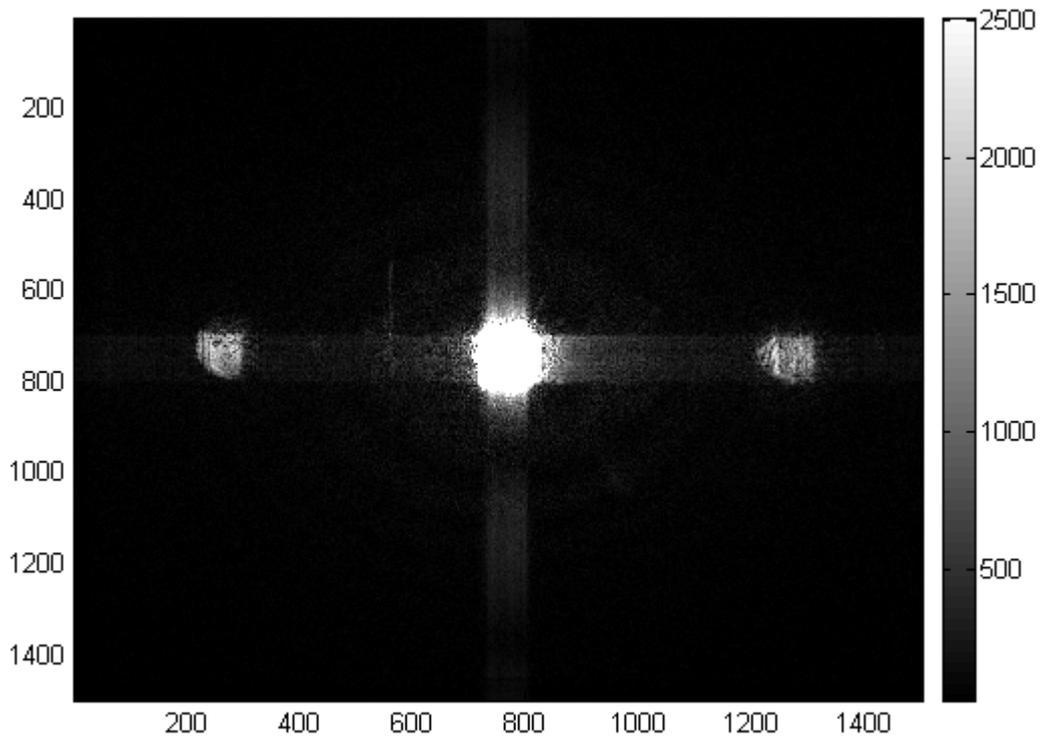


Figure III-16 : Image des particules restituée à la distance $z = 314\text{cm}$ ce qui correspond à l'ordre de la TFFr $a=0.9395$

Sur la figure suivante, après la sélection de la zone qui contient l'image réelle, on peut observer très clairement des particules réparties aléatoirement sur toute l'image. On peut remarquer aussi une forte concentration des particules dans la partie supérieure de la fiole par contre il y a une faible concentration en bas, cela est dû au fait que l'image réelle est renversée.

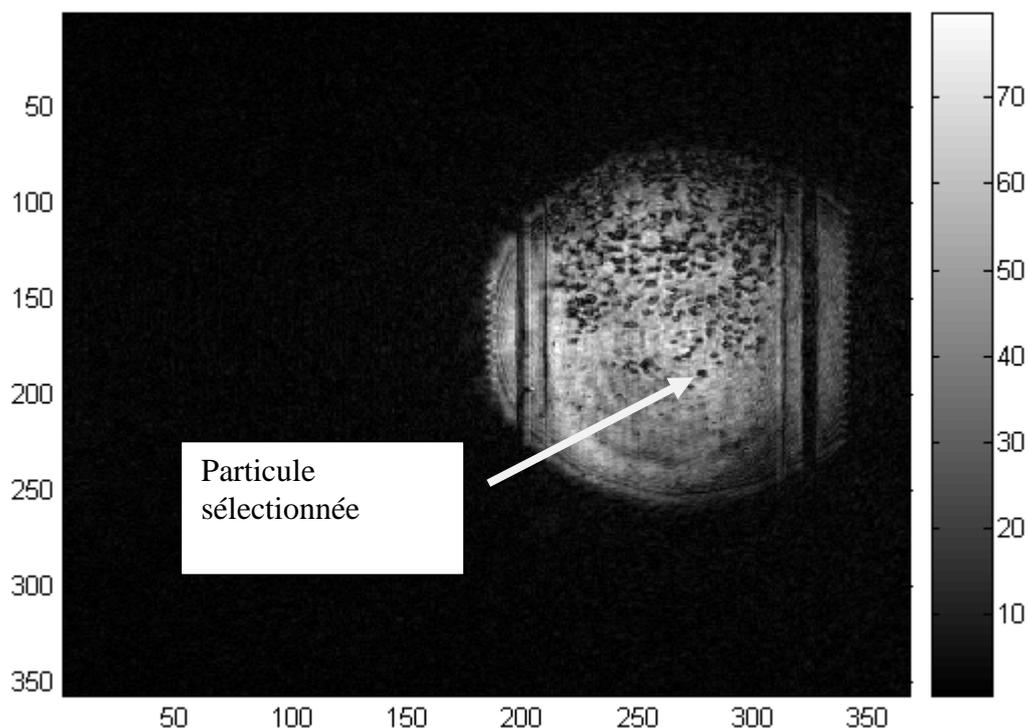


Figure III-17 : Image des particules restituée à la distance $z = 314\text{cm}$ ce qui correspond à l'ordre de la TFFr $a = 0.9395$

III.5.3 Localisation des particules en profondeur

Comme l'holographie classique est une technique d'imagerie tridimensionnelle permettant l'accès à la position en profondeur de l'objet enregistré, l'holographie digitale, par contre, et à cause de la faible résolution des capteurs CCD, ne peut atteindre cette information avec précision. Ceci est du à la grande profondeur de champ qui accompagne l'image reconstruite numériquement.

Jusqu'à présent, aucun critère ne permet de connaître si la bonne distance de focalisation (distance de reconstruction z) est atteinte ou non. En effet, même si la reconstruction numérique peut focaliser un objet par la reconstruction plan-par-plan comme en imagerie classique, la

bonne focalisation de cet objet reste tributaire à un critère externe [76]. Dans ce contexte, un critère de focalisation basé sur le calcul du module de l'amplitude complexe a été examiné [76].

Il est basé sur la nature de l'objet, qu'il soit d'amplitude ou de phase.

Les objets d'amplitudes seront reconstruits à la bonne distance quand le module de l'amplitude complexe atteint son minimum, alors que pour les objets de phase, la bonne distance de focalisation correspond à un maximum du module de l'amplitude complexe.

Sur la base de ce critère, nous essayons de déterminer la position en profondeur de la particule indiquée par la flèche sur la figure (III-17).

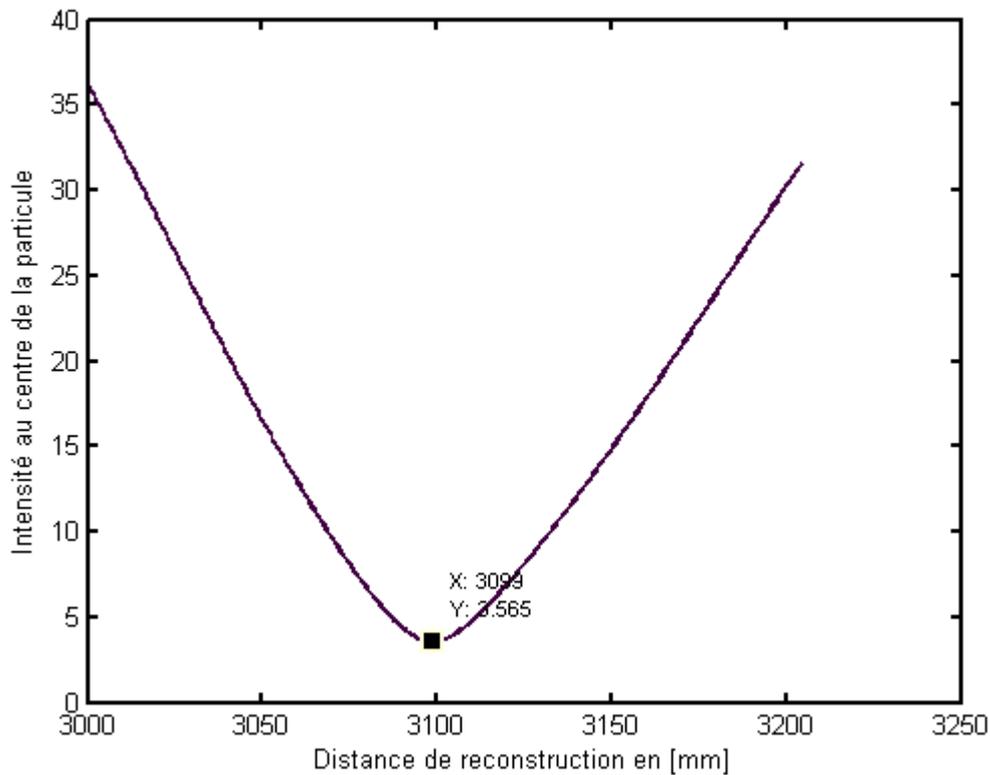


Figure III-18 : Localisation d'une particule en profondeur par le critère du minimum d'intensité

Cette figure représente la variation de l'intensité mesurée au centre d'une particule en fonction de la distance de reconstruction Z . La reconstruction numérique est faite par la transformée de Fourier fractionnaire en variant l'ordre de la transformation de $a = 0.93690$

jusqu'à $a = 0.94090$ avec un pas de 0.00001 ce qui correspond à une distance de reconstruction comprise entre $Z_{min} = 3000mm$ et $Z_{max} = 3204.4mm$ avec un pas de $400\mu m$. L'intensité atteint son minimum à une distance $Z = 3099mm$ ce qui correspond à la position exacte de la particule en question.

Chapitre IV:

Holographie digitale appliquée au suivi des états de déformation dans les fluides par le suivi de microparticules de type traceurs

IV.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre une méthode permettant l'extraction des coordonnées tridimensionnelles des particules réparties dans un volume restitué par holographie numérique. Cette technique présente l'avantage d'être simple et de permettre de réduire la profondeur de champs (Depth of focus DOF) de l'holographie digitale. En effet, ce problème (DOF) est proprement lié à la résolution des capteurs CCD utilisés comme support d'enregistrement en holographie digitale, contrairement à l'holographie classique, où les supports d'enregistrement étaient des films ou des plaques de haute résolution.

Ensuite, nous essayons à travers la méthode proposée de connaître le taux d'extraction (le nombre de particules extraites) qui est un paramètre très important dans la technique de vélocimétrie par suivi de particules. Dans cette technique, la fiabilité du résultat (champs de déplacements) est directement lié au nombre de paires de particules retrouvées.

IV.2 Historique

L'utilisation de l'holographie dans la technique de vélocimétrie par suivi de particules nécessite des méthodes d'identification et d'extraction des coordonnées tridimensionnelles des particules réparties dans un volume restitué.

Y. Pu et al [77, 78] et H. Meng et al [79] ont utilisé la configuration hors axe pour l'enregistrement et la restitution des images des particules. Ils ont placé une plaque holographique dans le système d'enregistrement en le tournant de $\pm 180^\circ$. Après avoir restitué optiquement l'hologramme, une caméra CCD équipée d'un microscope optique et montée sur un dispositif de translation à trois axes permet de scanner l'image réelle du volume d'étude restitué.

Par la méthode de détection de contours (PRED : Particle Reconstruction by Edge Detection method), les coordonnées tridimensionnelles des particules sont extraites.

G. Pan et al [80] ont développé une méthode basée sur l'exploitation de l'information de l'amplitude complexe de l'image tridimensionnelle restituée numériquement.

Pour identifier les images de particules dans un volume, les auteurs analysent l'évolution de la variance de la partie imaginaire de l'amplitude complexe de l'image restituée. La position axiale correspond au minimum de ce paramètre. Les auteurs ont utilisé la configuration de l'holographie on ligne de Gabor du fait de sa simplicité mais le problème concernant la présence des images 3D d'objets liés au bruit de speckle intrinsèque à cette technique n'a pas été abordé. De plus, ils n'ont pas évalué les capacités (taux d'extraction) de leur méthode en fonction des paramètres comme la concentration en particules et l'épaisseur des volumes d'étude.

J. Sheng et al [81], pour faciliter l'extraction des coordonnées tridimensionnelles des particules, ont proposé une technique basée sur l'utilisation de faisceaux orthogonaux pour enregistrer les hologrammes de particules dans un volume d'étude. Ces hologrammes sont enregistrés avec un seul faisceau de référence. Un miroir est inséré dans la zone d'essai et réfléchit l'onde diffractée par les particules sous un angle de 45° . Par ce procédé, les particules situées dans le volume d'étude (zone dans laquelle les faisceaux incident et réfléchi se recouvrent) se trouvent éclairées deux fois dans deux directions perpendiculaires. A la restitution, les auteurs exploitent les deux images tridimensionnelles (qui se trouvent ainsi séparées) pour calculer les coordonnées de la particule considérée. Cependant, cette technique, présente une configuration expérimentale complexe (enregistrement dans l'axe et restitution hors axe). En plus, l'accès optique n'est pas simplifié par l'introduction du miroir de renvoi.

IV.3 Principe de la méthode

La méthode que nous proposons est basée sur l'enregistrement numérique de deux hologrammes en même temps par un seul faisceau de référence, sur le même endroit du même support d'enregistrement. Le premier hologramme est celui de la vue directe du volume éclairé, le deuxième est celui de la vue orthogonale à la première du même volume [82]. Par un simple

changement d'angle entre les deux faisceaux objets, les deux hologrammes seront codés spatialement par des fréquences spatiales différentes. Dans ce qui suit, nous présentons les détails de la méthode.

IV.3.1 Montage expérimental

La figure (IV.1) montre le principe d'enregistrement de la méthode proposée. Un faisceau laser a Argon de longueur d'onde $\lambda=514,5\text{nm}$ et de puissance 2W est divisé par un premier cube séparateur BS_1 en deux faisceaux orthogonaux, le premier faisceau qui passe directement éclaire le volume à étudier et traverse ensuite le cube séparateur BS_3 qui le renvoie vers la caméra CCD, c'est la vue direct ou bien le faisceau objet (1). Le deuxième faisceau est divisé par un autre cube séparateur BS_2 , celui qui passe directement rencontre un miroir M_1 incliné d'un angle θ qui le réfléchit vers la caméra CCD, c'est le faisceau de référence. L'autre faisceau sera réfléchi par un miroir M_2 incliné à 45° , il passe a travers le volume du coté perpendiculaire à la première vue, un autre miroir M_3 incliné à 45° le réfléchit vers un autre miroir M_4 incliné de 45° qui le renvoie vers le cube séparateur BS_3 , une partie passe directement et une autre sera déviée par le cube vers la camera CCD. Finalement on aura sur le plan de la caméra trois faisceaux; le faisceau de référence, le faisceau objet (1) de la vue directe et le faisceau objet (2) de la vue à 90° .

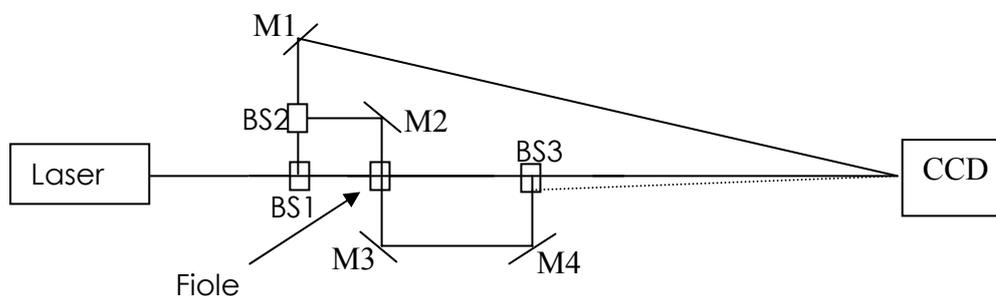


Figure IV-1: Montage expérimentale de la technique proposée.

IV.3.2 Analyse mathématique de la méthode

Le schéma simplifié du montage précédent est représenté par la figure ci-dessous :

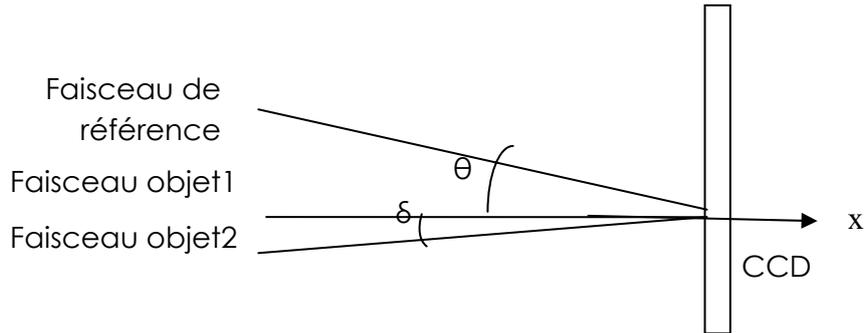


Figure IV-2: Schéma simplifié du montage.

Dans ce qui suit et pour alléger la démonstration, nous considérons que l'onde objet (1) est suivant l'axe (x), l'onde objet (2) est inclinée d'un angle δ par rapport à l'onde objet (1) et d'un angle $(\theta + \delta)$ par rapport au faisceau de référence, de plus soit la notation suivantes :

- $O_1(x, y) = o_1 \exp[i\varphi_1(x, y)]$ C'est l'onde objet (1)

- $O_2(x, y) = o_2 \exp[i[\varphi_2(x, y) + 2\pi\omega_0 x]]$ C'est l'onde objet (2). On doit ajouter un terme de phase supplémentaire dû à l'angle δ qui provoque des fréquences spatiales $\omega_0 = \frac{\sin \delta}{\lambda}$

- $R(x, y) = r \exp[i2\pi\omega_R x]$ étant l'onde de référence de fréquence spatiale $\omega_R = \frac{\sin \theta}{\lambda}$

Maintenant considérons le formalisme de formation d'un hologramme sur la surface du CCD :

L'intensité résultante au plan du CCD est donnée par

$$I(x, y) = |O_1(x, y) + O_2(x, y) + R(x, y)|^2$$

$$I_{CCD} = (O_1 + O_2 + R)(O_1 + O_2 + R)^*$$

$$= \underbrace{O_1^2 + O_2^2 + R^2}_{\text{ordre}(0)[u_1(x,y)]} + \underbrace{O_1 O_2^* + O_1^* O_2}_{\text{Terme sans int eret}} + \underbrace{(O_1 + O_2)R^*}_{\text{Image réelle}[u_2(x,y)]} + \underbrace{R(O_1 + O_2)^*}_{\text{Image virtuelle}[u_3(x,y)]}$$

Développons maintenant chaque terme de l'équation précédente:

$$u_1(x, y) = O_1^2 + O_2^2 + R^2$$

$$u_2(x, y) = (O_1 + O_2)R^* = [o_1 \exp(i\varphi_1(x, y)) + o_2 \exp(i(\varphi_2(x, y) + 2\pi\omega_0 x))]r \exp(-i2\pi\omega_R x)$$

$$u_3(x, y) = R(O_1 + O_2)^* = [o_1 \exp(-i\varphi_1(x, y)) + o_2 \exp(-i(\varphi_2(x, y) + 2\pi\omega_0 x))]r \exp(i2\pi\omega_R x)$$

Après restitution, on doit multiplier les trois termes précédents par la même onde de référence, donc on aura les expressions suivantes :

$$u_1(x, y) = (O_1^2 + O_2^2 + R^2) r \exp(i2\pi\omega_R x)$$

$$u_2(x, y) = [o_1 \exp(i\varphi_1(x, y)) + o_2 \exp(i(\varphi_2(x, y) + 2\pi\omega_0 x))]r^2$$

$$u_3(x, y) = [o_1 \exp(-i\varphi_1(x, y)) + o_2 \exp(-i(\varphi_2(x, y) + 2\pi\omega_0 x))]r^2 \exp(i4\pi\omega_R x)$$

D'après ces trois équations on peut déduire :

- chaque ordre contient les deux ondes objets O_1 et O_2
- il n'y aura pas d'interférence entre les deux ondes objets O_1 et O_2 car chaque onde est codée par un faisceau de référence différent c'est-à-dire des fréquences spatiales différentes.

Prenons par exemple le terme u_3 :

$$u_3(x, y) = r^2 \exp[i4\pi\omega_R x] [o_1 \exp[-i\varphi_1(x, y)] + o_2 \exp[-i(\varphi_2(x, y) + 2\pi\omega_0 x)]]$$

$$= r^2 \exp[i4\pi\omega_R x] o_1 \exp[-i\varphi_1(x, y)] + r^2 \exp[i4\pi\omega_R x] o_2 \exp[-i(\varphi_2(x, y) + 2\pi\omega_0 x)]$$

$$= r^2 \exp[i4\pi\omega_R x] o_1 \exp[-i\varphi_1(x, y)] + r^2 \exp\left[\left(i4\pi\left(\omega_R + \frac{\omega_0}{2}\right)x\right)\right] [o_2 \exp[-i(\varphi_2(x, y) + 2\pi\omega_0 x)]]$$

D'après cette expression on peut considérer que l'onde O_1 est enregistrée par un faisceau de référence de fréquence spatiale $\omega_R = \frac{\sin \theta}{\lambda}$ par contre le faisceau O_2 est enregistré par un autre faisceau de référence de fréquence spatiale $\omega_R + \omega_0 = \frac{\sin \theta}{\lambda} + \frac{\sin \delta}{\lambda}$ donc les deux ondes sont codées sur le même support avec des fréquences spatiales différentes.

Maintenant, il est très important que les deux vues après restitution ne se chevauchent pas, pour cela cherchons la condition nécessaire qu'il faut respecter pour que les deux images soient complètement séparées.

Soit le spectre des trois termes :

$$U_1(\xi, \eta) = TF(u_1(x, y))$$

$$= r \delta(\xi + \omega_R, \eta)$$

$$U_2(\xi, \eta) = TF[u_2(x, y)]$$

$$= r^2 o_1 \exp(i\varphi_1) \otimes \delta(\xi + 2\omega_R, \eta) + r^2 o_2 \exp(i\varphi_2) \otimes \delta(\xi + 2\omega_R + \omega_0, \eta)$$

$$U_3(\xi, \eta) = TF[u_3(x, y)]$$

$$= r^2 o_1 \exp(-i\varphi_1) + r^2 o_2 \exp(-i\varphi_2) \otimes \delta(\xi - \omega_0, \eta)$$

\otimes Désigne le produit de convolution.

Comme nous pouvons le constater d'après la figure ci-dessous qui représente les spectres des trois termes précédents et d'après les équations ci-dessus on peut remarquer très clairement que l'onde objet O_1 (terme U_2) est centrée à l'origine des fréquences et que l'onde objet O_2 est convoluée par une Dirac (translation dans le domaine fréquentiel d'une

fréquence ω_0). Dans le terme U_3 , l'image virtuelle de l'objet O_1 est à la distance $2\omega_R$. Et celle de l'objet O_2 se trouve à une distance $2\omega_R + \omega_0$

Cherchons, maintenant la condition qui permet de séparer les deux vues.

Soit ω_m la fréquence de l'objet (elle est liée à la taille maximale de l'objet).

D'après la figure ci-dessous, et pour que les deux vues soient complètement séparées il faut que la fréquence ω_0 (l'angle δ) vérifie la relation suivante :

$$\omega_0 \geq 2\omega_m \Rightarrow \frac{\sin \delta}{\lambda} \geq 2 \frac{L_{OX}}{\lambda Z} \Rightarrow \delta \geq \arcsin\left(2 \frac{L_{OX}}{Z}\right)$$

C'est-à-dire que l'angle qu'on doit ajouter au deuxième faisceau objet soit supérieur ou égal à la taille maximale de l'objet à enregistrer.

L_{OX} ou L_{OY} sont les dimensions de l'objet dans les directions OX respectivement OY .

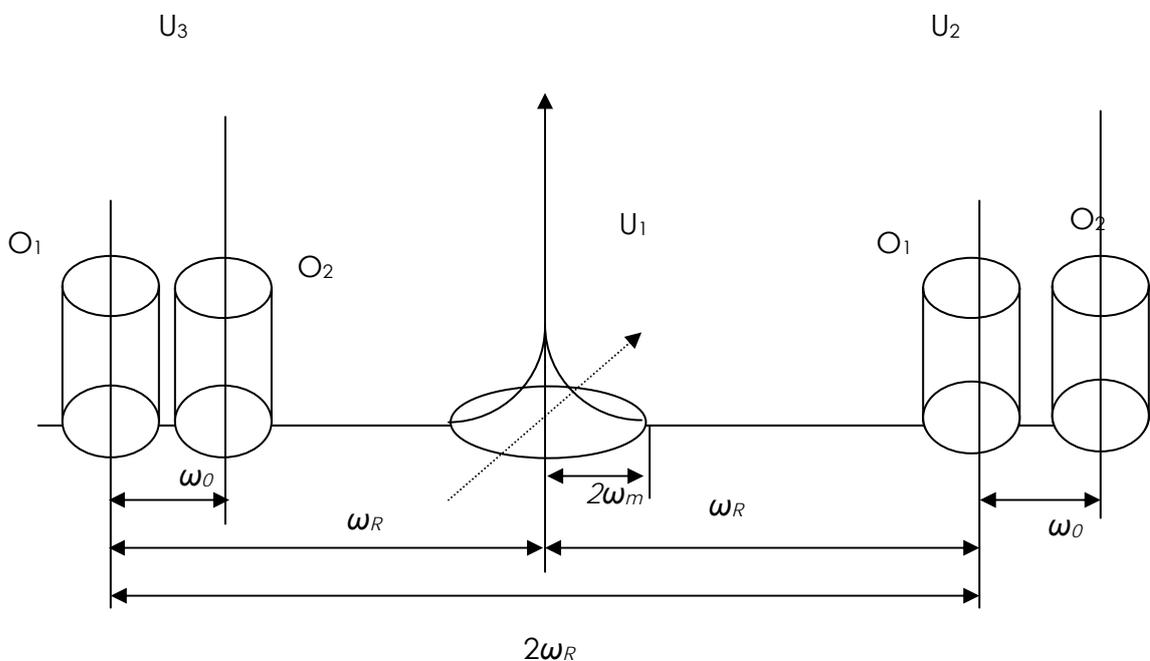


Figure IV-3: Spectre des deux hologrammes.

IV.3.3 Enregistrement de l'hologramme

Pour l'enregistrement de l'hologramme et conformément à ce qui a été démontré précédemment, il faut créer un angle δ très petit entre le faisceau objet (1) et le faisceau objet (2) en tournant les deux miroirs M_3 et M_4 du montage de la figure (IV.1), comme résultat de ce pivotement le faisceau objet (2) se déplace en dehors de la surface du capteur de la caméra CCD, il est ramené sur la même position du faisceau objet (1) à l'aide du cube séparateur BS_3 . Notre objet est une fiole remplie d'eau, de dimension $(10 \times 10 \times 50) \text{ mm}^3$ dans laquelle on a plongé des particules de $200 \mu\text{m}$ de diamètre. La fiole est déposée sur un micro agitateur magnétique qui permet au fluide et donc aux particules d'acquies des mouvements aléatoires dans la fiole.

L'hologramme enregistré par une caméra CCD de type PCO 4000 est représenté par la figure suivante.

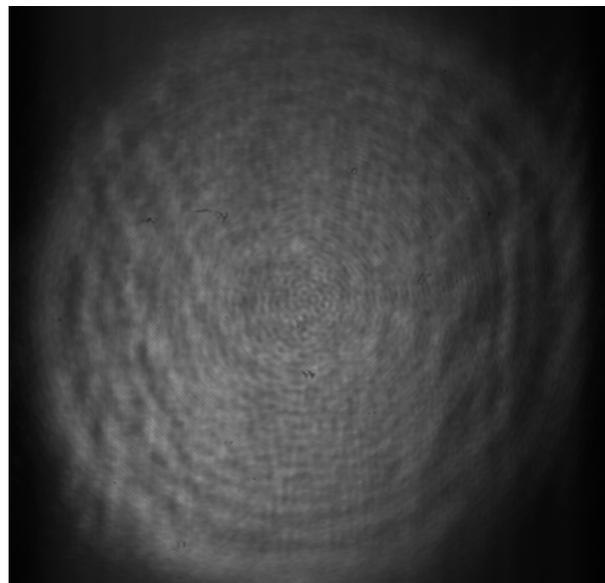


Figure IV-4: Hologramme enregistré.

La taille du capteur CCD est de 4008X2672 éléments, les dimensions des pixels sont de 9µmX 9µm. Sur la figure (IV-4), les deux vues sont complètement superposées, mais chaque vues est codée par des fréquences spatiales différentes.

IV.3.4 Restitution de l'hologramme

La restitution se fait numériquement selon l'algorithme de la figure (III-15). Le principe de restitution par TFFr de l'image consiste à déterminer l'ordre fractionnaire qui correspond à l'image nette des particules. L'ordre fractionnaire est donné par l'expression suivante:

$$a = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\lambda Z}{\delta_{CCD}^2 N}\right)$$

$$F_1 = \frac{\delta_{CCD}^2 N}{\lambda Z}$$

Avec:

Z = La distance d'enregistrement (de reconstruction).

δ_{CCD} = Taille des pixels de la camera CCD.

N = Le nombre de pixels suivant x et y (matrice carrée).

λ = la longueur d'onde de la lumière utilisée pour l'enregistrement.

Notre capteur CCD est très large (4008X2672), alors que notre faisceau est enregistré sur une surface de (1895X1895), le reste de la surface est pratiquement inutile, donc on a choisit de travailler sur des matrices carrées et de taille réduite pour deux raisons essentielles:

- Gain du temps de calcul.
- Gain de l'espace mémoire disponible.

La restitution holographique donne naissance à deux images des particules comme l'illustre la figure (IV-5). De part et d'autre de l'ordre zéro, des images dites réelles et virtuelles des particules peuvent être observées.

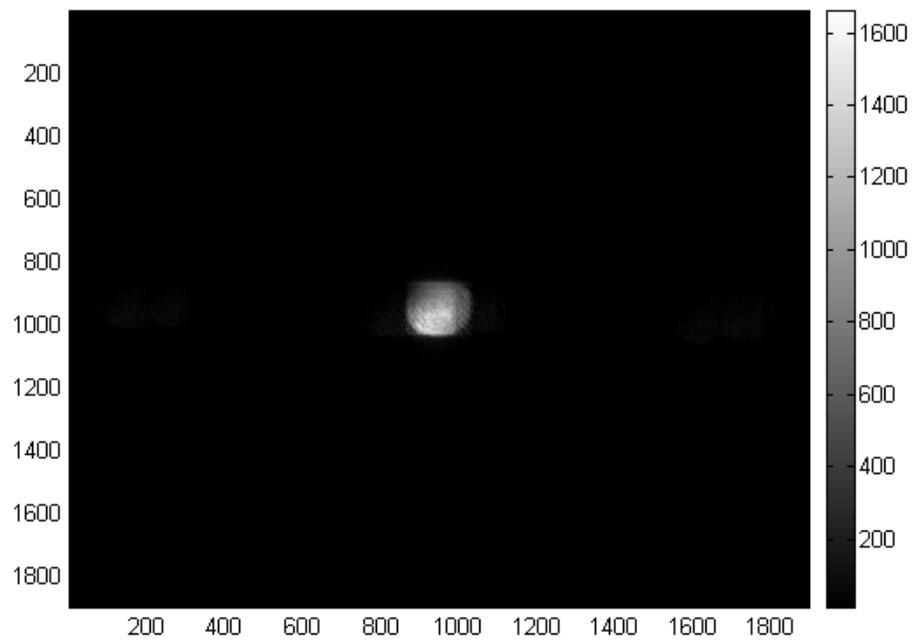


Figure IV-5:Restitution numérique par la TFFr pour une distance $Z=3300\text{mm}$ et un ordre de la TFFr $a= 0.9426$

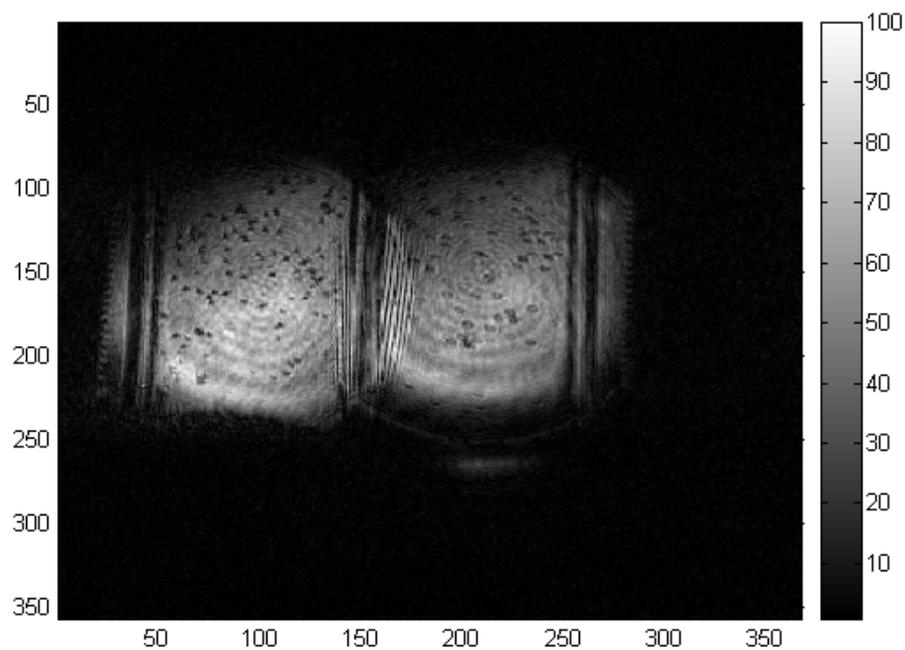


Figure IV-6:Restitution numérique par la TFFr pour une distance $Z=3300\text{mm}$ et un ordre de la TFFr $a= 0.9426$

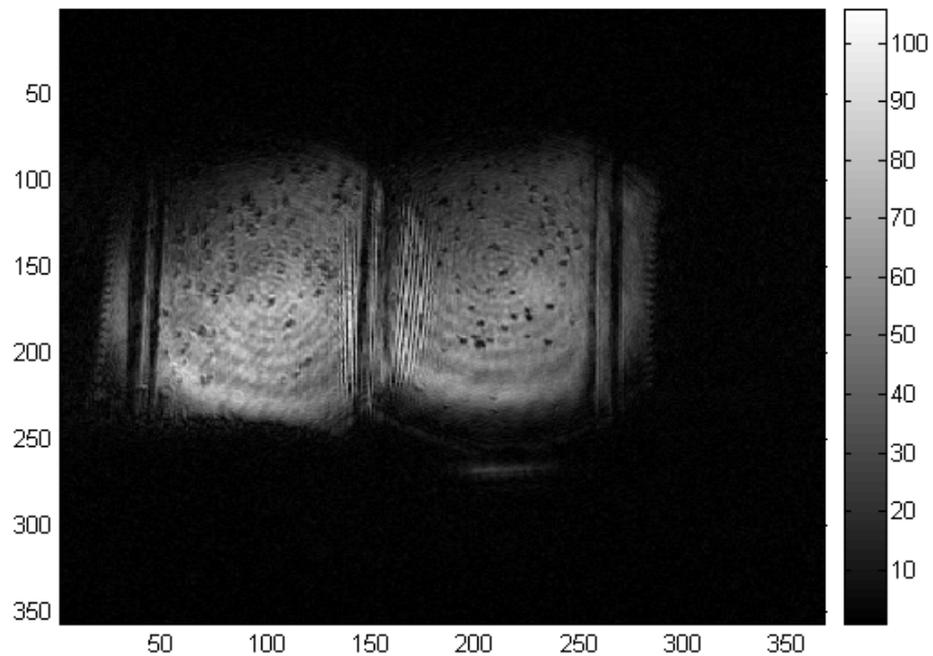


Figure IV.7:Restitution numérique par la TFFr pour une distance $Z=3140\text{mm}$ et un ordre de la TFFr $a= 0.9397$

IV.3.5 Restitution du volume

Notre échantillon est une fiole d'épaisseur égale à $E=10\text{mm}$. La reconstruction d'un volume d'épaisseur égale à E , se fait par la reconstruction des images restitués à différentes distances Z , telles que $Z = Z_r \pm \frac{E}{2}$. Ces images seront reconstruites suivant un pas bien déterminé, ensuite, elles seront stockées dans une matrice tridimensionnelle (fig. IV-8). Rappelons qu'il s'agit ici de deux vues orthogonales, la reconstruction du volume de la vue directe se fait indépendamment de la vue à 90° car les deux vues sont à des distances différentes (fig. IV-6 et 7) mais avec un même pas.

A la fin nous aurons deux matrices tridimensionnelles, celle de la vue directe qui nous permet d'extraire les trois coordonnées des particules (x,y,z) et celle de la vue à 90° qui nous fournit les trois coordonnées $(x'=-z, y'=y, z'=x)$. Et puisque il s'agit d'un même volume, mais selon deux vues

orthogonales, la superposition de deux matrices permet de localiser les particules en profondeur (suivant Z) du fait qu'on est entrain de superposer l'axe Ox de la vue directe avec l'axe Oz de la vue à 90° et vis versa.

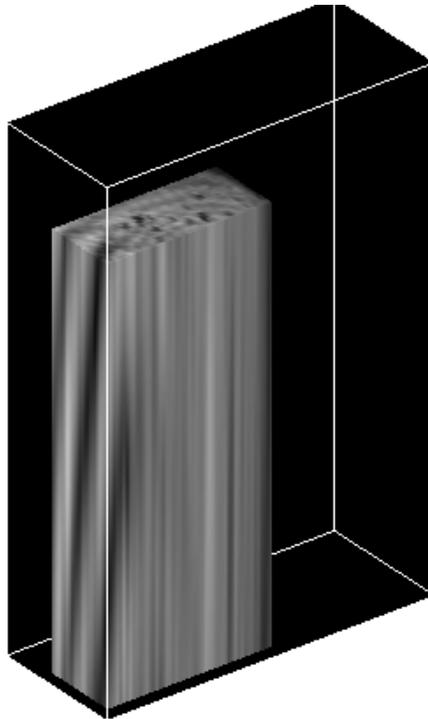


Figure IV-8:Restitution d'une partie du volume restitué de la vue directe.

IV.3.6 Choix du pas de restitution

Comme il a été expliqué au paragraphe précédent, cette méthode permet de réduire la profondeur de champ (DOF) de l'holographie digitale par la superposition de la résolution transversale, généralement bonne, à la résolution longitudinale. Donc le choix du pas de reconstruction dépend de la résolution transversale de l'holographie digitale, qui dépend de la résolution du capteur CCD et la distance de reconstruction.

La taille des pixels au plan reconstruit est donnée par:

$$\Delta x_F = \frac{\lambda F_1 \tan\left(a \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{N \delta_{x_{CCD}}}$$

Et du fait que l'holographie digitale ne permet pas l'accès à des détails inférieurs à Δx_F , on prend

$$Pas_{rec} = \Delta x_F = \frac{\lambda F_1 \tan\left(a \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{N \delta_{x_{CCD}}}$$

IV.3.7 Détection des particules

Cette étape a pour objectif de détecter les particules et de les extraire du fond cohérent dans chaque plan reconstruit. La méthode utilisée dans ce travail est la méthode de détection de contours (PRED : Particle Reconstruction by Edge Detection method).

Le principe de la méthode consiste à détecter les zones dans une image qui correspondent à un changement rapide de l'intensité. L'algorithme utilisé dans ce travail est basé sur la technique décrite par Smith et al. [83]. La figure (IV-8) montre l'effet de l'application de ce filtre sur un plan reconstruit.

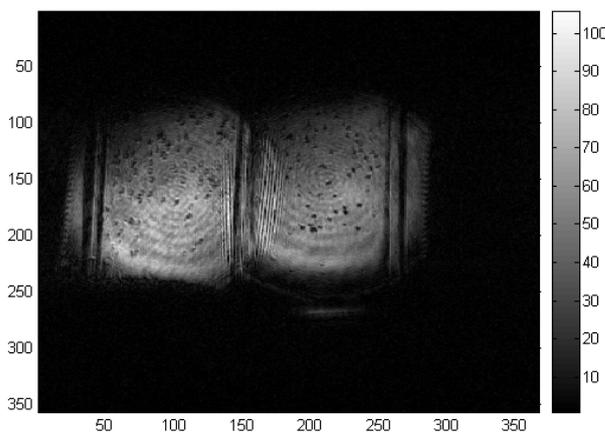


Figure IV-9a Image originale

Figure IV-9b : détection du contour

Figure IV-9: Détection des particules dans un plan reconstruit.

D'après les deux figures ci-dessus, on peut remarquer que l'efficacité de cette méthode pour la détection des particules dépend fortement de la qualité de l'hologramme et de la présence du bruit qui peut être considéré comme des particules. En effet, ces problèmes n'auront aucun effet lors de la superposition de la deuxième vue, car leur présence sur les deux images est aléatoire contrairement aux particules qui ont une distribution spatiale bien définie.

IV.3.8 Identification 3D des images de particules et leur extraction

Après la restitution des deux vues entre les deux distances axiales $Z_{\min} = Z - \frac{E}{2}$ et $Z_{\max} = Z + \frac{E}{2}$ suivant un pas $Pas_{rec} = \Delta x_F$, les matrices bidimensionnelles contenant les positions (x et y) seront ensuite, stockées dans une matrice tridimensionnelle contenant l'information sur la position longitudinale (Z). Donc nous aurons deux matrices, celle de la vue directe donnant la position (x, y et z) des particules et celle de la deuxième vue permettant l'accès à la position ($x'=-z, y'=y$ et $z'=x$) des mêmes particules.

Par la suite nous devons procéder à la détection des particules par la méthode citée au paragraphe précédent. La réalisation de cette tâche se fait sur chaque plan des deux matrices des deux vues.

Une fois cette tâche est achevée, nous pouvons procéder à l'extraction de la position tridimensionnelle des particules. Pour cela soit par exemple une particule dont la position (x et y) est connue et appartenant à la première vue, cette particule doit exister dans la deuxième vue, elle sera identifiée par sa position (y) qui est obligatoirement la même que celle de la vue directe, par une simple intersection ou superposition des deux vues, les deux autres coordonnées (x et z) seront déterminée avec exactitude. Notons que si la particule ne peut pas être identifiée par sa hauteur (y), il faut l'éliminer de la procédure, et on continuera la procédure pour les autres particules.

Le résultat de la procédure d'extraction des positions tridimensionnelles est schématisé par la figure suivante:

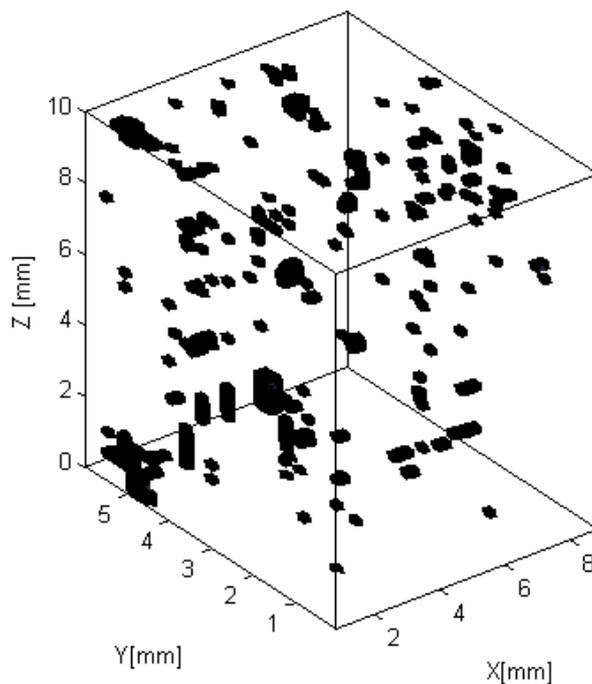


Figure IV-10: Extraction des positions tridimensionnelles des particules.

IV.3.9 Comparaison des résultats

Afin de mettre en valeur les résultats trouvés par la méthode proposée, nous avons procédé à une comparaison de ces résultats avec ceux trouvés par la technique du minimum d'intensité (§. III.5.3). Pour cela, nous avons déterminé la position en profondeur correspondant à un minimum d'intensité pour neuf (09) particules choisies de manière arbitraire, ensuite, nous avons appliqué la technique proposée pour retrouver ces mêmes positions.

Sur la figure (IV-11), nous avons porté sur l'axe des ordonnées la position en profondeur des particules et sur l'axe des abscisses le numéro des particules.

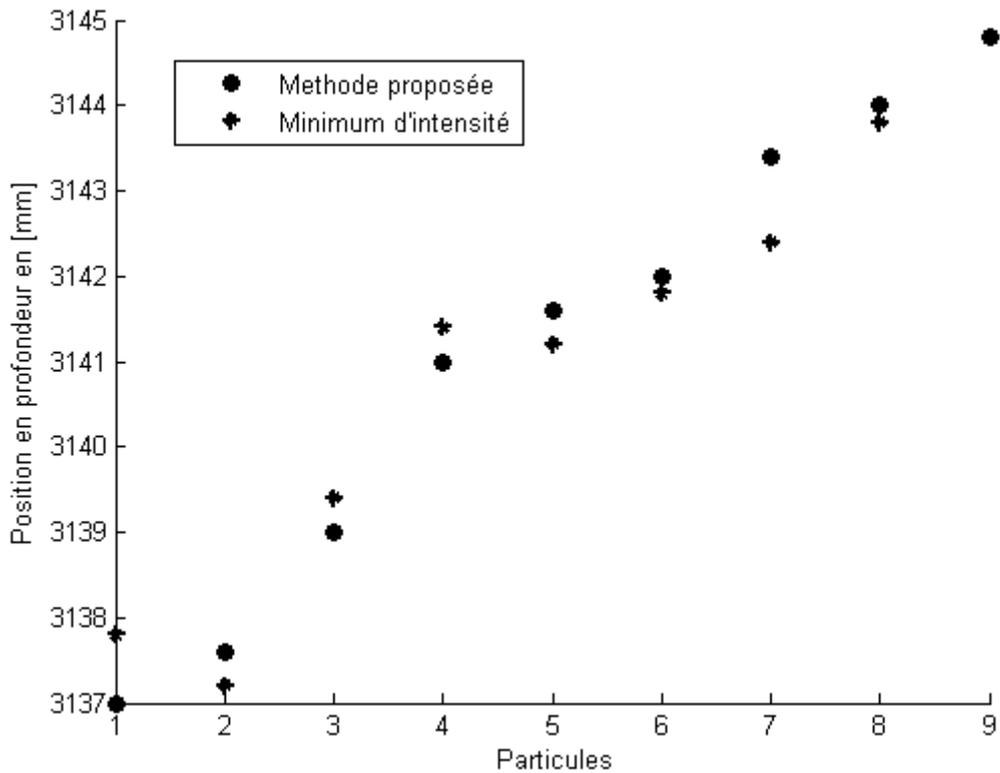


Figure IV-11: Positions en profondeur des particules trouvées par la méthode Proposée et la méthode du minimum d'intensité.

D'après la figure ci-dessus l'erreur moyenne sur la position des particules en profondeur est de l'ordre de $\pm 67\mu\text{m}$

IV.3.10 Taux des particules extraites

Pour évaluer la potentialité de la méthode d'extraction des particules par la technique proposée, nous avons étudié l'influence de la densité volumique des particules (ρ_p) dans un volume du fluide d'épaisseur ($E_p = 10\text{mm}$) sur le nombre de particules extraites. Cette étude est réalisée sur des particules de diamètres $d=200\mu\text{m}$ distribuées dans le volume d'une façon aléatoire, c'est le cas le plus susceptible d'être rencontré dans la pratique.

Pour caractériser la répartition des particules, nous avons introduit le taux d'obscuration $Sd = \rho_p E_p d^2$ utilisé par Royer [84]. Ce paramètre est par définition la fraction surfacique des projections des particules sur le capteur CCD et il est supposé être responsable de la qualité d'un hologramme. D'après ce critère, un taux d'obscuration inférieur à 1% produit un hologramme de bonne qualité, entre 1% et 10% un hologramme de qualité moyenne et supérieur à 10% un hologramme de mauvaise qualité [85].

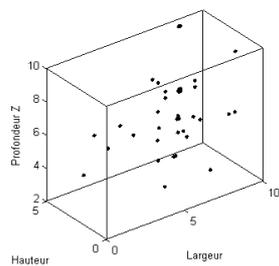
Meng et al ont démontré que le bruit (speckle) dans les images holographiques est principalement dû à la diffraction provenant des images jumelles des particules [86]. C'est le cas de l'holographie on ligne par contre dans notre cas (holographie hors axe) ce bruit speckle est éliminé par l'introduction de l'angle entre le faisceau de référence et le faisceau objet. D'après ces mêmes auteurs, le rapport signal sur bruit RSB des images restituées n'est fonction que du taux d'obscuration Sd . Ils ont démontré que le RSB diminue en augmentant la densité des particules, l'épaisseur du volume et le diamètre des particules.

Ici, nous ne nous sommes intéressés qu'à l'influence de la densité des particules sur le taux d'extraction pour des taux d'obscuration entre 1% et 10% permettant d'avoir un hologramme de qualité moyenne.

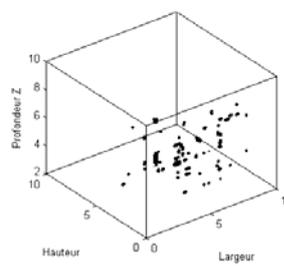
Le tableau suivant résume les différentes densités étudiées.

Densité volumique des particules (P/cm ³)	33 cm ⁻³	66 cm ⁻³	98 cm ⁻³	164 cm ⁻³	197 cm ⁻³
Taux d'obscuration	1,31%	2,62%	3,92%	5,24%	6,56%
Nombre de particules extraites	29	54	81	114	164
Taux d'extraction	87,87%	81,81%	82,65%	87,02%	83,48%

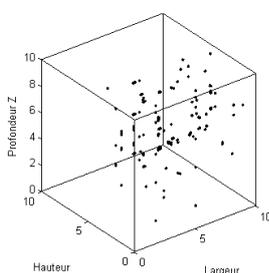
Tableau IV-1: Les différentes densités étudiées.



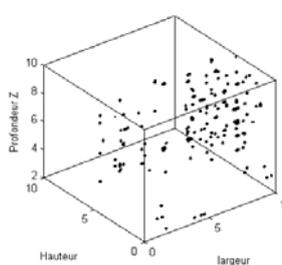
a) 1^{ère} Concentration



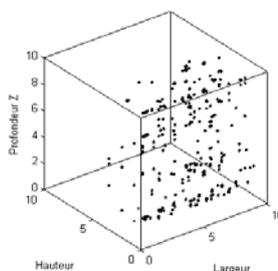
b) 2^{ème} Concentration



c) 3^{ème} Concentration



d) 4^{ème} Concentration



e) 5^{ème} Concentration

Figure IV-12: Extraction des positions tridimensionnelles des particules pour différentes concentrations

D'après ces résultats, nous pouvons dire que la méthode présentée ici constitue un moyen automatique et efficace pour l'extraction des champs de particules. Son implémentation est facile. Les différentes étapes peuvent être améliorées par d'autres traitements numériques

pouvant perfectionner l'efficacité de ce processus d'extraction. Par exemple, le problème de recouvrement entre les particules qui constitue l'une des sources d'erreurs dans le processus d'extraction en plus des erreurs causées par la méthode de détection automatique des particules (PRED) utilisée dans notre travail.

IV.3.11 Principe de l'évaluation des états de déformation du fluide

La vélocimétrie par images de particules est l'une des plus importantes techniques utilisées pour déterminer le champ de vitesse d'un fluide. Le liquide estensemencé par des particules (de 10 à 500 μm) de même densité que le fluide pour qu'elles puissent suivre la dynamique du flux.

Le principe de cette technique consiste à illuminer un plan très fin du fluide étudié par un laser pulsé par exemple un laser Nd-YAG. Pour mesurer la vitesse, au moins deux expositions séparées doivent être enregistrées par le capteur CCD. Cela implique typiquement la production d'une paire des impulsions laser qui sont enregistrées sur une paire de trames d'un capteur CCD. Le traitement des images se fait numériquement, chaque image est divisée en petites zones (fenêtres dont la taille est typiquement de 16 x 16 ou 32 x 32 pixels). L'intercorrélation des deux fenêtres issues de deux images consécutives permet de déterminer le déplacement des particules situées dans cette zone. Le résultat de cette opération permet d'obtenir des cartes de vitesse instantanée donnant les deux composantes de la vitesse dans le plan éclairé par le laser. L'utilisation de deux capteurs CCD regardant la même zone de fluide illuminée permet d'obtenir les trois composantes de la vitesse dans le plan (principe de la stéréoscopie).

En holographie, l'enregistrement des couples d'images s'effectue comme pour les méthodes de PIV classique : la caméra CCD associée à un système d'acquisition et de traitement d'images saisit séparément les hologrammes des particules correspondant à chacune des impulsions laser.

Les impulsions laser de durée δt sont délivrées avec un décalage temporel noté Δt . Ces temps caractéristiques peuvent être ajustés en fonction de l'écoulement étudié.

Pour l'enregistrement des couples d'images du fluide en mouvement, nous avons adopté le montage de la figure (IV-1) auquel on a associé une cellule acousto-optique juste après la source laser comme le montre la figure (VI-13) pour générer des pulses de courte durée. Les deux pulses laser sont obtenus en excitant la cellule acousto-optique par deux signaux de durée δt (δt définie le temps d'exposition) décalés dans le temps d'un intervalle Δt . Ces signaux sont délivrés par un générateur de pulses, commandé directement par la caméra CCD qui lui envoie un signal en même temps qu'elle commence à enregistrer.

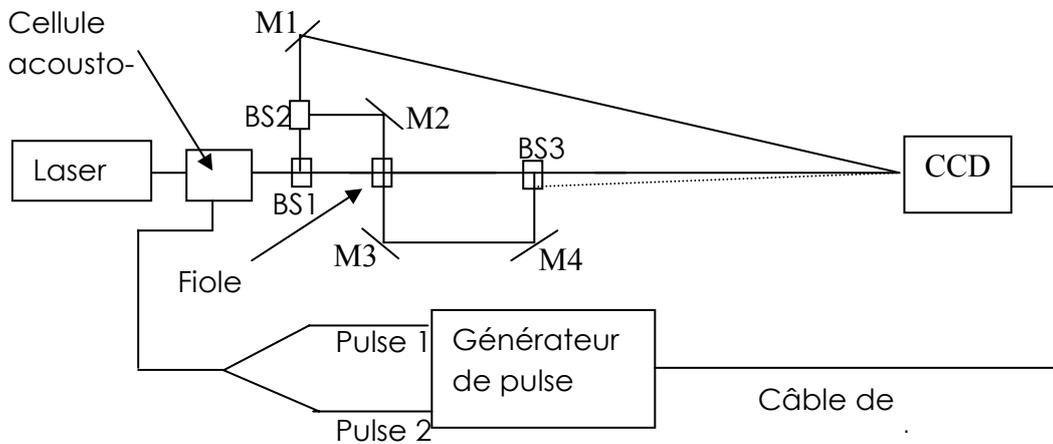


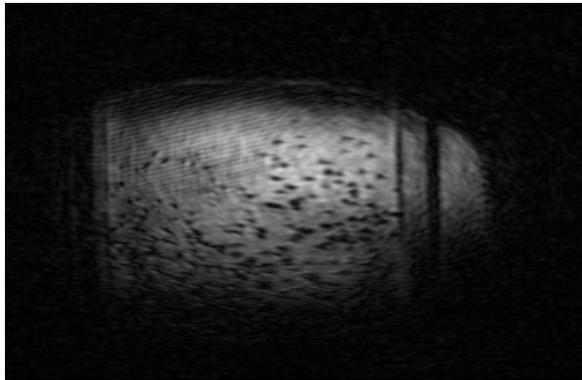
Figure IV-13: Montage expérimentale.

Le décalage temporel Δt des deux pulses (donc des deux images) est un paramètre très important pour la détermination de la vitesse des particules dans le fluide.

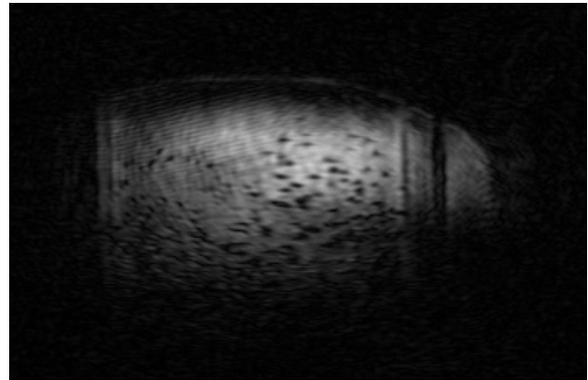
Notre étude étant réalisée sur des particules plongées dans une fiole pleine d'eau déposée sur un micro agitateur magnétique dont on ne connaît pas la vitesse de rotation, en plus, le mouvement des particules à l'intérieur de la fiole est assez compliqué, ce qui rend difficile la détermination de la valeur de Δt qui nous permet de détecter un déplacement d'une particule de quelques pixels.

Pour résoudre ce problème nous avons pris des couples d'images dont l'intervalle temporel varie de 1 ms à 5ms.

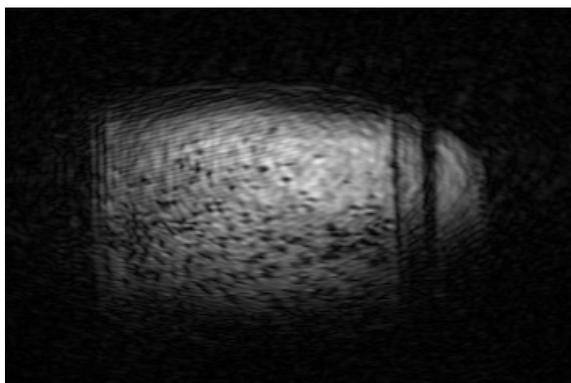
Les résultats de la restitution par la transformée de Fourier fractionnaire des couples d'images sont schématisés par les figures suivantes:



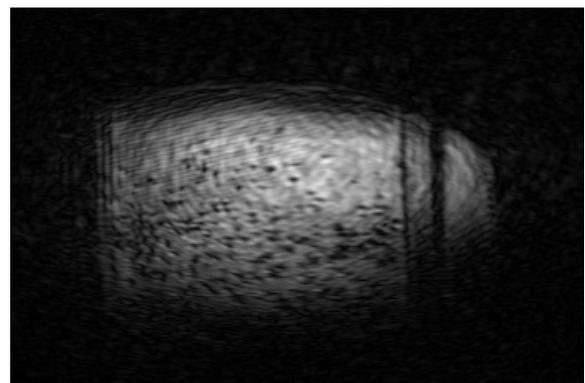
(a) Trame A



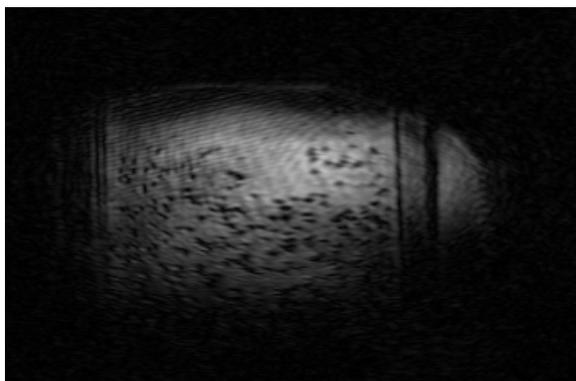
Trame B $\Delta t = 1\text{ms}$



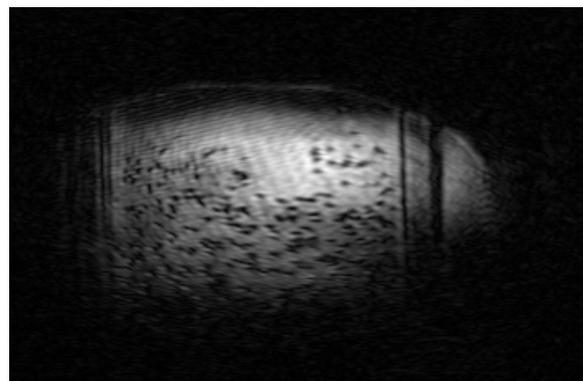
(b) Trame A



Trame B $\Delta t = 2\text{ms}$



(c) Trame A



Trame B $\Delta t = 3\text{ms}$

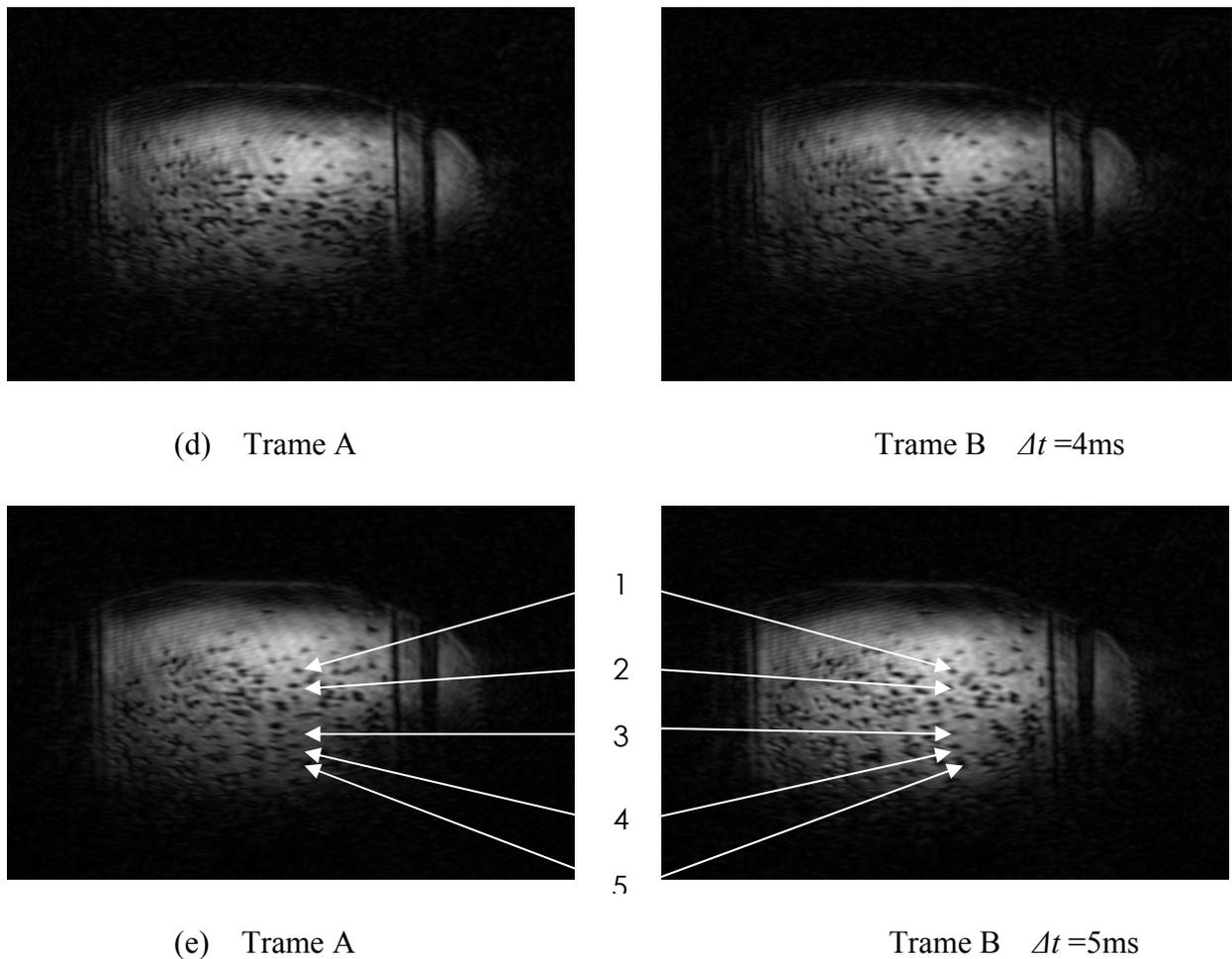


Figure IV-14: Restitution numérique par transformée de Fourier

Fractionnaire.

Figure IV-14: Restitution numérique par transformée de Fourier fractionnaire.

Les couples d'images (IV-14 (a, b et c, d)) montrent bien, que pour une valeur de $\Delta t < 4\text{ms}$, on ne peut pas détecter de déplacement de particules car la vitesse du fluide est assez faible.

Pour permettre aux particules de se déplacer, un intervalle de temps supérieur à 4ms est donc nécessaire.

C'est ce qui est visible sur le couple d'images de la figure (IV-14 (d, e)) où on peut déceler que les particules ont bougé de leurs positions initiales. A titre d'exemple, on prend les particules

numérotées 1, 2, 3, 4 et 5 dans la trame A, pour lesquelles, on détermine les coordonnées en pixels (tableau IV-2), ensuite on va déterminer leurs coordonnées dans la trames B (tableau IV-2).

Particules	Trame A		Trame B	
	Abscisse	Ordonné	Abscisse	Ordonné
1	779	1061	779	1061
2	775	1052	775	1052
3	777	1022	778	1023
4	775	1015	778	1016
5	776	1006	782	1008

Tableau IV-2 : Coordonnées en pixels de quelques particules entre deux trames

Le tableau ci-dessus montre que la vitesse du fluide augmente au fur et à mesure qu'on se rapproche de l'agitateur magnétique.

A partir de ces résultats préliminaires, nous pouvons prétendre que l'holographie digitale à transformée de Fourier fractionnaire est un outil efficace pour le suivi des états de déformations, dans les fluides pour le cas ci-présent, par le suivi des microparticules de types traceurs.

Ce travail qui n'est qu'un travail préliminaire, fera l'objet de nos perspectives de recherche.

Conclusion

L'holographie digitale est une méthode de diagnostic optique tridimensionnelle. Elle consiste à enregistrer sur un capteur CCD la figure d'interférences produite entre une onde de référence et une partie de l'onde diffractée par l'objet. Les montages proposés peuvent être classés en deux catégories: les montages dits dans l'axe et ceux dits hors axe.

Les montages dans l'axe (ou de Gabor) sont très simples et bien adaptés à l'étude des micros objets, par contre, ils souffrent d'un certain nombre d'inconvénients tels que la présence simultanée des images jumelles et le bruit de speckle qui affectent la qualité des hologrammes reconstitués. En plus, cette configuration fournit des images de grande profondeur de champ ce qui rend difficile la localisation d'un objet en profondeur. Pour ces raisons, nous avons opté pour la configuration hors axe.

Dans cette configuration le problème des images jumelles est automatiquement éliminé, le bruit speckle peut être réduit, par contre le problème de localisation en profondeur reste posé.

En vue de surmonter ce problème, nous avons développé une nouvelle technique de reconstruction basée sur la Transformée de Fourier Fractionnaire.

Nous avons donc étudié la transformation de Fourier fractionnaire et sa relation avec l'intégrale de Fresnel pour décrire le phénomène de diffraction dans l'espace libre. Cette étude nous a permis de développer une relation plus générale que celle trouvée dans la littérature, nous avons montré également que son implémentation expérimentale et numérique n'exige aucune condition restrictive en ce qui concerne l'angle de la transformation.

Cette technique a été testée expérimentalement pour la restitution des hologrammes de petites particules ensemencées dans un fluide. Nous avons montré aussi son aptitude à restituer automatiquement le volume d'étude enregistré en balayant seulement l'ordre fractionnaire.

Le problème de localisation et d'extraction des positions tridimensionnelles des particules a été aussi abordé dans ce travail. Partant du fait que la résolution transversale est beaucoup plus meilleure que la résolution longitudinale dans l'holographie digitale, nous avons apporté une contribution basée sur l'enregistrement de deux vues orthogonales sur le même support et en même temps. Après la restitution numérique par transformée de Fourier fractionnaire de chaque vue, nous obtiendrons deux volumes suivant deux axes orthogonaux,

la superposition de ces deux volumes permet de surmonter le problème de profondeur de champ de l'holographie digitale et donc de localiser les particules en profondeur.

Les résultats de la technique proposée ont été comparés et validés par la méthode du minimum d'intensité mesuré au centre des particules.

Enfin, nous avons étudié le taux d'extraction des particules par la méthode proposée en fonction de la concentration, les résultats trouvés semblent être prometteurs et les techniques de corrélation d'image utilisées en PIV peuvent y être appliquées.

D'autres améliorations comme :

L'utilisation de l'holographie par réflexion qui rend possible l'enregistrement d'un volumeensemencé par des particules de faibles diamètres et de fortes concentrations, améliore considérablement les résultats de la technique de corrélation d'images utilisée en PIV pour la détermination des champs de déplacements des particules ;

L'utilisation d'un laser de forte puissance qui s'avère utile pour augmenter la diffusion et la prise en compte du bruit speckle dans nos traitements des images de particules restituées, feront l'objet de nos perspectives les plus proches.

Références

- [1] D. Gabor, *Nature*, vol. 161, pp. 777-778, 15 mai 1948.
- [2] D. Gabor, *Proceeding of the Royal Society*, vol. A197, pp. 454-487, 1949.
- [3] D. Gabor, *The Proceeding of the Physical Society*, vol. 64, pp. 449_469, 1 juin 1951.
- [4] J.J.W. Goodman & R.W. Lawrence *Appl. Phys. Lett.* 11, 77-79, 1967
- [5] O. Coquoz *et al.* in *14th Annual International Conference of the IEEE-EMBS*, (IEEE, Paris, 1992), pp. 338-339.
- [6] U. Schnars & W. Jüptner *Appl. Opt.* 33, 179-181, 1994
- [7] Joseph W. Goodman McGraw-Hill Companies Inc., 2nd ed., 1996
- [8] H.M. Smith John Wiley & Sons, 2nd ed., 1975
- [9] Thomas M. Kreis, Mike Adams & Werner P.O. Jüptner *A Comparison Proc. SPIE* vol. 3098, 224-233, 1997
- [10] H.M. Smith (editor) *Topics in Applied Physics* vol. 20, Springer Verlag, 1977
- [11] Ulf Schnars *J. Opt. Soc. Am. A* 11, 2011-2015, 1994
- [12] G. Pedrini, Y.L. Zou & H.J. Tiziani *J. Mod. Opt. Soc.* 42, 367-374, 1995
- [13] Edward W. Kamen & Bonnie S. Heck Prentice Hall, 2nd ed., 2000
- [14] L. Xu, J. Miao and A. Asundi *Opt. Eng.* Vol. 39 N°12, 3214-3219 Decem. 2000
- [15] Thomas M. Kreis & Werner P.O. Jüptner *Proc. of Fringe 97*, Akademie Verlag Series in Optical Metrology vol. 3, 353-363, 1997
- [16] Erwin Kreyszig John Wiley & Sons, 7th ed., 1993
- [17] Øystein Skotheim *HoloVision* Group of Technical Optics, Dept. of Physics, Norwegian University of Science and Technology, 2001
- [18] B.E.A. Saleh & M.C. Teich Wiley Interscience, 1991
- [19] Etienne Cuche, Pierre Marquet & Christian Depeursinge *Appl. Opt.* 39, 4070-4075, 2000
- [20] Volker Kebbel, Hans-Jurgen Hartmann & Werner P.O. Jüptner *Proc. SPIE* vol. 4101, 2000
- [21] Thomas M. Kreis & Werner P.O. Jüptner *Opt. Eng.* 36, 2357-2360, 1997
- [22] Ulf Schnars, Thomas M. Kreis & Werner P.O. Jüptner *Opt. Eng.* 35, 977-982, 1996
- [23] J.C. Dainty (editor) *Topics In Applied Physics* vol. 9, Springer Verlag, 1975
- [24] Hans M. Pedersen *Optica Acta* 29, 105-118, 1982
- [25] Nils Abramson Academic Press, 1981
- [26] Thomas Kreis Akademie Verlag Series in Optical Metrology vol. 1, Akademie Verlag, 1996
- [27] Christophe Wagner, Wolfgang Osten & Soenke Seebacher *Opt. Eng.* 30, 79-85, 2000
- [28] Tong Zhang & Ichirou Yamaguchi *Opt. Lett.* 23, 1221-1223, 1998
- [29] Etienne Cuche, Pierre Marquet & Christian Depeursinge *Appl. Opt.* 38, 6994-7001, 1999
- [30] S. Seebacher, W. Osten W. Jüptner *Proc. SPIE* vol. 3098, 382-391, 1997

- [31] Robert B. Owen & Alex A. Zozulya *Opt. Eng.* 39, 2187-2197, 2000
- [32] G. Pedrini, Y.L. Zou & H.J. Tiziani *J. Mod. Opt. Soc.* 42, 367-374, 1995
- [33] Giancarlo Pedrini, Philipp Fröning, Henrik Fessler & Hans J. Tiziani *Appl. Opt.* 37, 6262-6269, 1998
- [34] N. Wiener. *Hermitian. J. Math. Phys.*, 8:70{73, 1929.
- [35] E.U. Condon. *Proc. National Academy Sciences*, 23:158{164, 1937.
- [36] H. Kober. *Quart. J.Math. Oxford Ser.*, 10:45{49, 1939.
- [37] V. Namias. *J. Inst.Math. Appl.*, 25:241{265, 1980.
- [38] A.C. McBride and F.H. Kerr. *IMA J. Appl. Math.*, 39:159{175, 1987
- [39] D. Mendlovic, H. M. Ozaktas, and A. W. Lohmann, *Appl. Opt.* **33**, 6188–6193 (1994).
- [40] H.M. Ozaktas and D. Mendlovic. *J. Opt. Soc. Amer. A*, 10:2522{2531, 1993.
- [41] T. Alieva, V. Lopez, F. Agullo-Lopez, and L.B. Almeida. *J. Mod. Opt.*, 41:1037{1044, 1994.
- [42] L.B. Almeida. *IEEE Trans. Sig.Proc.*, 42:3084{3091, 1994.
- [43] H.M. Ozaktas, Z. Zalevsky, and M.A. Kutay. *Wiley, Chichester*, 2001.
- [44] G.E. Andrews, R. Askey, and R. Roy., volume 71 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.
- [45] Luis Almeida, *IEEE Signal Processing Letters*, Vol 4, NO 1, Janvier 1997
- [46]. A. W. Lohmann, , *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 2181– 2186 (1993).
- [47]. Jian-Jiun Ding, Soo-Chang Pei, *icassp*, pp.3181-3184, Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1999. Proceedings. Vol 6, 1999 IEEE International Conference on, 1999
- [48] Haldun M. Ozaktas, David Mendlovic , *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 12, no. 4, pp. 743_751, 1995.
- [49] Pierre Pellat-Finet, *Optics Letters*, vol. 19, no. 18, pp. 1388_1390, 1994.
- [50] P. Pellat-Finet, *Cours d'optique de Fourier*. Springer-Verlag, 1ere ed., 2003.
- [51] G. Bonnet, *Ann. Télécom.*, vol. 33, no. 5-6, pp. 143_165, 1978.
- [52] G. Bonnet, *Ann. Télécom.*, vol. 33, no. 7-8, pp. 225_243 , 1978.
- [53]. F. J. Marinho, and L. M. Bernardo, *J. Opt. Soc. Am A* 15, 2111-2116 (1998).
- [54]. J. García, D. Mas, and R. G. Dorsch, *Applied Optics*, vol. 35, 7013-7018 (1996).
- [55]. L.P. Yaroslavsky, *Appl. Opt.* Vol. 36, No 2, 460-463 (1997).
- [56]. L. Onural and M. T. Ozgen, *J. Opt. Soc. Am. A* **9**, 252(1992).
- [57]. D. Lebrun, S. Belaid, and C. Ozkul, *Appl. Opt.* **38**, 3730(1999).
- [58]. Z. Zalevsky, K. Mills, and E. N. Leith, *Appl. Opt.* **41**, 6193 (2002).
- [59]. S. Coëtmellec, D. Lebrun, and C. Ozkul, *Appl. Opt.* **41**, 312 (2002).
- [60]. Yan Zhang et al , August 1, 2004 / Vol. 29, No. 15 / *OPTICS LETTERS* 1793-1795
- [61]. H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky, and M. A. Kutay, (Wiley, New York, 2001).
- [62] H. M. Ozaktas, B. Barshan, D. Mendlovic, and L. Onural, *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 547–559 (1994).

- [63] D. Mendlovic, H. M. Ozaktas, and A. W. Lohmann, *Appl. Opt.* **34**, 303–309 (1995).
- [64] D. Mendlovic, Y. Bitran, R. G. Dorsch, C. Ferreira, J. Garcia, and H. M. Ozaktas, *Appl. Opt.* **34**, 7451–7456 (1995).
- [65] M. J. Bastiaans and K. B. Wolf, *Journal of the Optical Society of America {A}*, vol. 20, no. 6, pp. 1046–1049, (2003).
- [66] D. Rodriguez Merlo, J. A. R. Martín-Romo, T. Alieva, and M. L. Calvo, *Optics and Spectroscopy*, vol. 95, no. 1, pp. 131–133, (2003).
- [67] O. Akay and G. F. Boudreaux-Bartels, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, no. 5, pp. 979–993, (2001).
- [68] G. Unnikrishnan and K. Singh, *Optics Communications*, vol. 193, no. 1–6, pp. 51–67, (2001).
- [69] H. M. Ozaktas and D. Mendlovic, *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 743–751 (1995).
- [70] S. Pei and M. Yeh, *Opt. Lett.* **22**, 1047–1049
- [71] L. M. Bernardo and O. D. D. Soares, *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 2622–2626 (1994).
- [72] J. Hua, L. Liu, G. Li, *Appl. Opt.* **36** (1997) 512.
- [73] C.J. Kuo, N.Y. Chang, Y. Luo, *Opt. Quantum Electron.* **34**(2002) 369.
- [74] Hone-Ene Hwang, *Optics Communications* **223** (2003) 47–53
- [75] S. Boucherit, L. Bouamama, M. Bouafa, and G. Wernicke, *International Review of PHYSICS* - Vol. 1, N.4, 236-241. October, 2007
- [76] F. Dubois, C. Schockaert, N. Callens and C. Yourassowsky, *OPTICS EXPRESS*, Vol. 14, No. 13. PP 5895-5908. June 2006.
- [77] Y. Pu, H. Meng, *Experiment in Fluids*, vol. 29, pp. 184_197, 2000.
- [78] Y. Pu, X. Song, H. Meng, *Experiment in Fluid [Supp.]*, vol. 29, pp. S117_S128, 2000.
- [79] Y. P. H. Meng, G. Pan and S. H. Woodward, *Meas. Sci. Technol.*, vol. 15, pp. 673_685, 2004.
- [80] H. M. G. Pan, *Applied Optics*, vol. 42, pp. 827_833, 2003.
- [81] J. Sheng, E. Malkiel, J. Katz, *Applied Optics*, vol. 42, pp. 235_250, 2003.
- [82] S. Boucherit, L. Bouamama, H. Benchikh, J-M. Lenoir, and S. Simoëns- , September 15, 2008 / Vol. 33, No. 18 / OPTICS LETTERS PP 2095-2097
- [83] S.M. Smith, J.M. Brady, *Int Journal of Computer Vision*, 23(1):45-78, May 1997.
- [84] H. Royer, *Optics Communications*, vol. 20, no. 1, pp. 73_75, 1977.
- [85] G. Hausmann, W. Lauterborn, *Applied Optics*, vol. 19, no. 20, pp. 3529_3535, 1980.
- [86] H. Meng, W. L. Anderson, F. Hussain, D. Liu, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 10, pp. 2046_2058, 1993.

ملخص

تعتبر الهولوجرافيا الرقمية ذات التصوير الثلاثي الأبعاد من التقنيات الواعدة جدا في مختلف المجالات العلمية. بفضل ما تتمتع به من ميزة في تصوير الأجسام ثلاثية الأبعاد فهي تسمح بتحديد موقع الأجسام في أي حجم معين, وهي تستخدم لوصف التشوهات الدقيقة في مختلف أنواع التطبيقات، بما في ذلك، ميكانيكا السوائل لدراسة مختلف خصائص التدفق (تتبع حركة الجسيمات الصغيرة).

ابتداء من الهولوجرام المعاد بناؤه، فإن الأبعاد الثلاثية وأحجام الجسيمات يمكن تقديرها لتقييم المعالم التي تميز حالة التدفق ما بين صورتين التقطت على فترتين من الزمن.

ومع ذلك، فإن الأبحاث التي أجريت لهذا الغرض قد كشفت المشكل التجريبي الذي يحد من مدى دقة هذه التقنية وهو كبر عمق المجال. عدة طرق تجريبية و عددية قد اقترحت أساليب للتغلب على هذا المشكل، لكن أحدا منها لم يعطي الارتياح الكبير للمستخدمين.

في هذه الرسالة، نقترح استخدام تحويل فورييه ذو الكسور TFFr لحل هذه المشكلة، و نبرهن أن TFFr تستطيع تحليل الهولوجرام الرقمي لتحديد أبعاد الأجسام ثلاثية الأبعاد المدونة في الهولوجرام

من أجل التغلب على مشكلة عمق المجال بطريقة أكثر تقدما، نقدم تقنية تجريبية تقوم على التركيب خارج المحور الخاص بالهولوجرافيا الرقمية. هذه التقنية تمكن من تسجيل اثنين من الهولوجرام المتقاطعين في الوقت نفسه و على نفس المستقبل CCD بمجرد تغيير التردد المكاني للحزمة الضوئية.

في هذه الرسالة، نعرض تطبيقات مباشرة لهاتين التقنيتين، أجريت على جسيمات دقيقة تسبح داخل مجرى مائي.



Abstract

The digital holography was always considered as a very promising three-dimensional imaging technique in various domains of the science. It is thanks to its three-dimensional asset that it's allow the localization of objects in a given volume. It is then used for the characterization of the micro deformations in various types of applications, in particular, in fluid mechanics for the characterization of the various flows (followed by micro particles of type tracer).

From the reconstructed holograms, the three-dimensional positions as well as the sizes of particles can be estimated to be able to estimate between two shots moved in the time, the various parameters characterizing the state of this flow.

However, the works made in this objective created an experimental constraint limiting the precision of this technique which is the big depth of focus.

Various experimental and numerical methods were proposed to surmount this constraint, but nobody of them gave a big satisfaction to the users.

In this thesis, we propose an appeal to the fractional Fourier transform (FrFT) to resolve this problem. We show that the FrFT allows us to analyze digital holograms to determine the three-dimensional position of holographic objects.

To surmount in a more pushed way this problem of the a big depth of focus, we also propose an experimental technique based on the configuration off-axis of the digital holography, allowing the simultaneous recording of two holograms crossed on the same CCD sensor by simple variation of the spatial frequency of the beams.

A direct application of these two techniques was driven on micro particles sowed in flow.