

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS-SÉTIF



THÈSE

Présenté à la Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option: Mathématiques Appliquées

Par

Mr Laissaoui Diffalah

THÈME

ETUDE DES TEMPS LOCAUX BROWNIENS

Soutenu le : 16 octobre 2014

Devant le jury:

Mr. A. Ziadi	Prof. Université Sétif-1	Président
Mr. A. Benchérif-Madani	Prof. Université Sétif-1	Encadreur
Mr. M. R. Remita	Prof. Université Badji Mokhtar à Annaba	Examineur
Mr. F.L. Rahmani	Prof. Université de Constantine-1	Examineur

Remerciements

C'est pour moi un très grand plaisir d'exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, Monsieur Abdellatif Bencherif-Madani, Professeur à l'université de Sétif 1. Il m'a ouvert les portes de la recherche et m'a accordé sa confiance en acceptant de m'encadrer, en dirigeant ma thèse de Magister. Il a continué avec la même bienveillance à encadrer ma thèse de Doctorat. Ses encouragements et sa disponibilité ont grandement contribué à l'élaboration de ce travail. La qualité du sujet proposé, les orientations et les heures de discussion, dont j'ai bénéficié se sont avérées toujours pertinentes. Je le remercie du fond du cœur.

Monsieur Abdelkader Ziadi, Professeur à l'université de Sétif 1 m'a fait le grand honneur de bien vouloir de présider le jury, je le remercie vivement.

Mes remerciements vont également à Messieurs : Rahmani Foued Lazher, Professeur à l'université de Constantine 1. Remita Mohamed Riadh, Professeur à l'université d'Annaba, pour avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie du jury.

Je suis très reconnaissant à Madame Sonia Fourati, Maitre de conférence à INSA de Rouen, de m'avoir donné la chance de travailler avec lui, durant mon stage scientifique.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur Claude Dellacherie, Professeur de recherche au laboratoire LMRS du Rouen, pour les discussions que j'ai pu avoir avec lui sur les temps locaux.

Mes vifs remerciements vont également à tous mes collègues et mes amis à l'université de Médéa.

Dédicace

Merci Allah (mon dieu) de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire

" Ya Kayoum "

Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère ...

A mon père, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie à m'encourager, à me donner l'aide et à me protéger.

Que dieu les protège.

A ma très chère femme Bahmed Ratiba reçoit à travers ce travail tout mon respect, ma gratitude et ma Profonde reconnaissance.

A mes enfants chéris Ahmed yacine et Salsabil, Ce modeste travail doit vous servir d'exemple pour réussir.

A toute la famille de ma Femme.

A mes adorables sœurs : Hafida et son époux ; djamila son époux et leurs enfants ; Rachida ; Fadila ; Fatiha son époux et leurs enfants ; khadidja son époux et leurs enfants ; hamida son époux et leurs enfants ; fatma son époux et leurs enfants ; Mbarka son époux et leurs enfants .

A mon très cher frère Rabah, son épouse Zahia et leurs enfants ;

A mon très cher frère Benaissa, son épouse Rachida et leurs enfants ;

A mon très cher frère Mohamed, son épouse linda et leurs enfants ;

A mes amies.

A tous ceux qui me sont chères.

A tous ceux qui m'aiment.

A tous ceux que j'aime.

Je dédie ce travail

ملخص الأطروحة

ليكن متغير عشوائي زمني معياري وس نقطة متكررة. ندرس الأزمنة المحلية ومجموعة اللحظات المرور ب س. نعم الأعمال فيما يخص الحركة البراونية. بإستعمال العلاقة الجمعية لأولار ماكلوران ونتائج التحليل الهرموني نستطيع أن نتحكم بطريقة فعالة في عدد من المجالات التناوية التي يدخلها السبرديتاتور قبل زمن معين. نتيجتنا حول الزمن المحلي جديدة ونقارها بأعمال كنفمان، فرستيد وتيلور، قريغو إلخ... نتيجتنا ذاتية وليست مثلا، نتيجة لتعداد الرحلات. ودالتنا تتألم جيدا مع طرق منتكارلو. من ناحية أخرى نساهم أيضا في نظرية الدوال المتعددة العشوائية بدراسة قياس لوباغ لمجموع منكوفسكي لمجموعات عشوائية. أدخل دليل جديد. هذا يشير الى وجود ظاهرة قطع: قياس لوباغ لتركيب خطي لمنكوفسكي ل ك نسخة مستقلة لأزمنة المستوى تساوي الصفر ثم تقفز إلى عدد موجب لماك يعبر الدليل. نتيجتنا تعتمد على قياس هوزدورف و تستعمل في مجالات اخرى في الرياضيات

Résumé

Considérons un processus de Markov standard et x un point récurrent. On étudie les temps locaux et l'ensemble des instants où le processus passe par x . On généralise des travaux concernant le mouvement brownien. Grâce à la formule de sommation d'Euler Maclaurin et aux résultats d'analyse harmonique, un meilleur contrôle du nombre de boîtes dyadiques touchées par le subordinateur avant un certain temps est possible. Notre construction du temps local est nouvelle et devrait être comparée aux travaux de Kingman, Fristedt et Taylor, Griego etc. Notre résultat est intrinsèque et n'est pas, par exemple, une conséquence d'une statistique d'excursions. Notre fonctionnelle est bien adaptée pour les méthodes de Monte Carlo. D'autre part, nous contribuons aussi à la théorie des multifonctions aléatoires (et à l'analyse fine de la fractale aléatoire des temps de niveau) en étudiant la mesure de Lebesgue des sommes de Minkowski d'ensembles aléatoires. Un nouvel indice est introduit. Cela montre l'existence d'un phénomène intéressant de cut-off : la mesure de Lebesgue d'une combinaison linéaire adéquate de Minkowski de k copies indépendantes, $k \geq 1$, de l'ensemble des temps de niveau est égale à zéro puis saute brusquement vers une valeur positive quand k passe outre l'indice. Il s'en suit par exemple que pour un mouvement brownien, pour un r fixé, on ne peut trouver p.s. deux zéros distants de r . Notre technique est basée sur une analyse des mesures de Hausdorff. Nos résultats peuvent aussi être intrinsèquement formulés et utilisés dans d'autres branches des probabilités que la théorie des processus de Markov proprement dite : dans la théorie du renouvellement et des ensembles régénératifs par exemple ou dans la synthèse d'Itô.

Abstract

Consider a standard Markov process and a recurrent state x . We study the local time and the set of times where the process passes through x . We generalize works on Brownian motion. With the summation formula of Euler Maclaurin and harmonic analysis, a better control of the number of dyadic boxes entered by the subordinateur before some fixed time is possible. Our construction of the local time is new and should be compared to the works of Kingman, Fristedt and Taylor Griego etc.. Our result is intrinsic and is not, for example, a consequence of excursion statistics. Our functional is well suited for Monte Carlo methods. On the other hand, we also contribute to the theory of random multifunctions (and detailed analysis of the random fractal of the level times) by studying the Lebesgue measure of Minkowski sums of random sets. A new index is introduced. This shows the existence of an interesting cut-off phenomenon: the Lebesgue measure of adequate Minkowski linear combinations of k independent copies, $k \geq 1$, of the level set is zero then suddenly jumps to a positive value when k crosses the index. It follows for example that for Brownian motion, for r fixed, we can't find two zeros distant by r . Our technique is based on an analysis of Hausdorff measures. Our results can also be independently developed and used in other branches of probability than the theory of Markov processes itself: in the theory of renewal and regenerative sets for example, or in the synthesis of Itô.

Contents

1	Préliminaires	9
1.1	Espérance conditionnelle	9
1.2	Processus de Markov	10
1.2.1	Résolvante et semi-groupe associés	14
1.2.2	Propriété de Markov forte	16
1.2.3	Processus de Markov standard	17
1.2.4	Processus de diffusion	18
1.2.5	Processus de Lévy et subordonateur	19
1.2.6	Fonctionnelle additive et temps local	24
1.2.7	L'inverse du temps local	27
1.3	Variation régulière	27
1.4	La formule d'Euler-Maclaurin	28
1.5	Quelques notions d'analyse harmonique	29
1.6	Mesure et dimension de Hausdorff	30
1.7	Analyse par une méthode de simulation, Méthode de Monte-Carlo	32
1.7.1	Nombres aléatoires	33

1.7.2	Généralités sur la simulation des processus stochastiques	35
1.7.3	Méthodes numériques pour les équations différentielles ordi- naires (EDO)	36
1.7.4	Le schéma d'Euler pour les EDS	36
1.7.5	La Méthode d'Euler pour les EDS	37
1.8	Fonctions multivoques aléatoires	37
1.8.1	Fonctionnelles de capacité	38
1.8.2	Loi forte des grands nombres pour les ensembles aléatoires . .	40
2	Quelques constructions du temps local	45
2.1	Introduction	45
2.2	P. Lévy et les mesures de voisinage	49
2.3	R.J. Griego et les densités d'occupation	63
2.4	S. J. Taylor et les h -mesures de Hausdorff	66
2.5	J. F. C. Kingman et l' ϵ -enveloppe	71
2.6	S.J. Taylor et B.E. Fristedt et dénombrement d'excursion	72
3	Un théorème limite pour le temps local et applications aux ensem- bles aléatoires	79
3.1	Hypothèses fondamentales	80
3.2	Préliminaires	84
3.2.1	Les indices de Blumenthal-Gettoor	84
3.3	Méthode de Borel-Cantelli et moments	86
3.3.1	Relation avec d'autres normalisations	92

3.4	Une densité de Lévy à variation régulière	94
3.4.1	Une expression pour $p'_r(y)$	96
3.4.2	Monotonie de u au voisinage de l'origine	100
3.4.3	Vérification de la condition (A2)	102
3.5	Etude des sommes de Minkowski de $aZ(t)$	107
3.6	Glossaire de notations	114

Introduction générale

Soit $X(t)$ un processus de Markov à valeurs dans un espace d'états E . On suppose X récurrent de façon à avoir une notion non triviale (au moins en ce qui nous concerne ici) de temps local. Historiquement, le temps total passé dans certains sous ensembles A de E jusqu'à $t > 0$ (pour fixer les idées, pensons à prendre $E = \mathbb{R}$, un mouvement brownien et un intervalle $A = [-1, 1]$), c'est-à-dire

$$L(A, t) = \int_0^t I_A(X(s)) ds \quad (1)$$

est bien étudié pour beaucoup de raisons. Par contre, si A est un singleton $A = \{x_0\}$ alors l'ensemble $Z(x_0, t)$ des instants où le processus passe par x_0 est de mesure Lebesgue nulle dans la majorité des cas qu'on rencontre dans la pratique. Le "temps passé dans $\{x_0\}$ " est beaucoup moins évident à définir. Le plus naturel est peut être le point de vue des densités d'occupation car des processus plus généraux que les markoviens peuvent aussi être concernés par cette étude. D'autre part, ce point de vue est aussi considéré dans d'autres domaines de la science comme la physique, la thermodynamique etc., voir l'excellente synthèse de Geman et Horowitz [42] où le temps local apparaît comme l'importante fonction de structure en thermodynamique. C'est Paul Lévy qui le premier montre, pour ainsi dire à la main, un théorème limite pour le nombre $N_0(\epsilon, t)$ d'intervalles contigus à l'ensemble $Z(\{0\}, t)$ dont la longueur est supérieure à $\epsilon > 0$ assez petit, on a p.s.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N_0(\epsilon, t) \sqrt{\epsilon} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} L(0, t).$$

Par ailleurs, des connections subtiles et très intéressantes entre les processus de Markov et l'analyse mathématique, en commençant par la théorie du potentiel classique, ont vu le jour au moins dès 1944 avec le japonais Kakutani. On recommande ici l'excellent petit livre [18] de l'éminent mathématicien Chung où les notions analytiques s'expriment intuitivement en fonction de concepts probabilistes très familiers. Cela a occasionné la naissance de nouvelles notions telles que les fonctionnelles additives, les λ -potentiels etc. qui ont jeté un pont entre la théorie des probabilités en général et, au moins, l'analyse mathématique. Ce creuset sera favorable à l'éclosion de la notion de temps local. A l'heure actuelle, on utilise des méthodes probabilistes d'une manière insoupçonnée dans d'autres domaines lointains de l'analyse et même d'algèbre. Rappelons que la théorie des probabilités est restée longtemps en dehors du cadre habituel des mathématiques pures ; par exemple, elles ne figurent pas dans la compilation notoire du groupe Bourbaki.

P. Lévy ne semble pas avoir érigé une théorie générale des temps locaux telle qu'on la connaît aujourd'hui à partir des travaux de Blumenthal et Gettoor [14]. On raconte même une anecdote selon laquelle Lévy avait horreur de la propriété de Markov forte découverte vers la fin des années 1950 par Hunt et son élève Blumenthal (au moins pour le mouvement brownien), voir la section (1.2.2).

Le but de ce travail de doctorat en science est de généraliser l'article [2] obtenu initialement pour les subordinateurs stables qui sont naturellement associés aux processus semi-stables de Stone, voir [81], le prototype étant le mouvement brownien. Signalons auparavant qu'on a communiqué en France, voir [61], un résultat partiel dans le cas où la densité de noyau potentiel est décroissante. Nous avons réussi à largement

étendre la classe des processus de Markov considérés dans ces travaux, voir [62].

Voici brièvement de quoi il s'agit. Soit $X(t)$ un processus de Markov standard dans un espace d'états E , on suppose la durée de vie infinie p.s., voir [15]. On suppose également l'existence d'une mesure de Radon référence $\xi(dx)$ sur E et des noyaux ponctuels $G^\lambda(x, y)$, $\lambda > 0$, satisfaisant $G^\lambda(x, dy) = G^\lambda(x, y)\xi(dy)$ pour tout x , (les noyaux à gauche sont ceux de la résolvante, voir l'équation (1.9) plus bas). Cette condition est connue comme l'hypothèse (F) de Hunt. C'est la situation par exemple pour une diffusion sur \mathbb{R} de mesure de vitesse "speed measure" $\xi(dx)$, voir [7]. Dans ce contexte, on traite l'exemple d'une mesure de Lévy de l'inverse du temps local, noté $S(r)$, ayant une densité à variation régulière, voir la section 3.4. Dans [2], on a procédé à une discrétisation en temps et espace, au niveau du subordonateur, travaillé sur une "charpente" pour ainsi dire, ensuite on est passé à la limite. Il s'en est suivi des calculs très longs et délicats. Grâce à la formule sommatoire bien connue d'Euler Maclaurin et aux résultats non triviaux d'analyse harmonique, un meilleur contrôle du nombre $N(n, T)$ de boîtes $I_{n,k} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$, $n > 0$, $k \geq 0$, touchées par le subordonateur avant un certain $T > 0$ fixe est possible. Comme dans [2], l'étude du temps local passe aussi par le biais du subordonateur associé.

Plus précisément, pour un état régulier et instantané x_0 et $t > 0$ soit

$$Z(x_0, t) = \{s \leq t | X(s-) = x_0 \text{ ou } X(s) = x_0\} \quad (2)$$

"l'ensemble de niveau" en x_0 . Le nombre $N(n, t)$ croît avec n ; nous montrons que pour le facteur de normalisation $H(x) = (1/x) \int_0^x \bar{\pi}(y)dy$, où $\bar{\pi}(\cdot)$ est la queue de la

mesure de Lévy, voir l'équation (1.15), la fonctionnelle

$$K(n, t) = \frac{N(n, t)}{H(2^{-n})} \quad (3)$$

converge p.s. vers le temps local sous des conditions plutôt faibles, voir la section 3.1 et le Corollaire 70.

Notre construction du temps local est nouvelle et devrait être comparée aux travaux suivants : [1], [34], [43], [46], [47], [60], [87] et [90]. Notre théorème limite est intrinsèque dans la mesure où il dépend seulement de $Z(x_0, t)$ et non pas de tout le processus aux alentours de x_0 . Il n'est pas non plus une conséquence d'une statistique d'excursions comme dans [34]. D'un autre côté, la fonctionnelle $K(n, t)$ est clairement plus fine que la fonctionnelle entropique considérée dans [59], c'est-à-dire la mesure de Lebesgue de l' ϵ -enveloppe de $Z(x_0, t)$, voir la relation (1.22) et la section 2.5. Notre travail confirme encore une fois l'intuition de David Williams selon laquelle toute description fine de $Z(x_0, t)$ donne invariablement le temps local.

Considérons à présent la pertinence aux méthodes numériques. Une caractéristique de base de $K(n, t)$ est qu'elle n'est pas adaptée (à la filtration habituelle de X continue à droite et complète) ; et plus grave encore : elle n'est pas une fonctionnelle additive de X . Opposons à cela que le temps local lui-même est défini comme l'unique fonctionnelle additive continue de λ -potentiel $G^\lambda(x, x_0)$, voir [14] ; puisqu'en redémarrant $K(n, t)$ dans un intervalle où $X(t)$ enregistre des temps de niveau fait accroître $K(n, t)$ par des multiples de $1/H(2^{-n})$. Cependant, en compensation la fonctionnelle $K(n, t)$ est favorable pour les méthodes numériques de Monte Carlo. En effet, une fois un intervalle $I_{n,k}$ a été enregistré en t , le temps de calcul est gagné en arrêtant

la recherche pour d'autres temps de niveau $r \in]t, (k+1)2^{-n}[$ et en passant à la boîte suivante $I_{n,k+1}$. Dans [60] par exemple, une fois $X(t)$ a été simulé (pour une diffusion penser à un schéma d'Euler avec des interpolations linéaire voir plus bas) alors une recherche plus exhaustive de l'ensemble de niveau est nécessaire pour décider si oui ou non un grand saut $(r_1, r_2) \subset [0, t]$, $r_2 - r_1 > 2^{-n}$, a eu lieu en vérifiant qu'on n'a pas de temps de niveau dans (r_1, r_2) ; on doit aussi faire attention aux petites excursions pour éviter de perdre les plus grandes.

D'autre part, nous contribuons aussi à la théorie des multifonctions aléatoires (et à l'analyse fine de la fractale aléatoire $Z(x_0, t)$) en étudiant la mesure de Lebesgue des sommes de Minkowski d'ensembles aléatoires. Un nouvel indice σ^0 est introduit, voir la relation (3.18), le Corollaire 78 et le Théorème 80 plus bas. Cela montre l'existence d'un phénomène intéressant de cut-off : la mesure de Lebesgue d'une combinaison linéaire adéquate de Minkowski de k copies indépendantes, $k \geq 1$, de l'ensemble $Z(x_0, t)$ est égale à zéro puis saute brusquement vers une valeur positive quand k passe outre l'indice σ^0 . Il s'en suit par exemple que pour un mouvement brownien, pour un $\rho > 0$ fixé, on ne peut trouver p.s. deux zéros distants de ρ !. Notre technique est basée sur une analyse des mesures de Hausdorff. Quand le subordonateur ralentit, il apparaît une relation non triviale intéressante entre notre résultat, voir le Théorème 77, et les théorèmes limites standard de la théorie des multifonction aléatoires, voir [71] et la section 1.8.2.

Il est important de noter que nos résultats, qui sont basés sur les propriétés de la mesure de Lévy de $S(r)$, peuvent aussi être intrinsèquement formulés et utilisés dans d'autres branches des probabilités que la théorie des processus de Markov propre-

ment dite. En effet, dans la théorie du renouvellement et des ensembles régénératifs par exemple, voir [50], c'est seulement l'image du subordonateur qui importe vraiment. Notons cependant qu'un processus simple en dents de scie (appelé aussi semi-linéaire) peut être associé à un ensemble régénératif. D'autre part, on construit souvent des processus de Markov à l'aide d'un fermé aléatoire et d'un processus ponctuel d'excursions, comme par exemple les "skew Brownian motions" ou browniens obliques, voir [6]. Notre résultat est donc pertinent dans ce domaine qu'on appelle souvent synthèse d'Itô. Cependant, il serait intéressant de pouvoir étudier la compatibilité spatiale de notre résultat vis-à-vis des autres états qui porte les excursions, c'est-à-dire voir le rapport avec la formule du théorème 2.1 de [14].

Concernant nos hypothèses (A), (B) et (C) plus bas ; la condition (A1) est fondamentale et est nécessaire pour le théorème limite, elle est discutée par le biais des conditions (A2) et (B). La situation globale est que nos conditions sont susceptibles d'être violées quand des phénomènes de résonance apparaissent non seulement au voisinage de 0 mais aussi de ∞ . Rappelons qu'intuitivement on entend par résonance des phénomènes physiques où des pics d'énergie apparaissent plus ou moins régulièrement et sans relâche dans tous les voisinages de 0 et ∞ ; ce qui exclut toute notion de monotonie. La condition (B) s'avère une hypothèse clef, si le subordonateur ralentit, elle est à peine vérifiée. Cependant, les subordonateurs stables satisfont aisément nos conditions.

Dans le chapitre I on réunit toutes les notions de bases nécessaires pour la compréhension de nos résultats, au chapitre II on expose quelques une des constructions les plus importantes du temps local afin de pouvoir les comparer à la nôtre et enfin

le chapitre III constitue une rédaction détaillée de l'article [62].

Pour la commodité du lecteur, les notations et symboles utilisés dans notre travail sont réunis dans un glossaire à la fin de la thèse.

Chapter 1

Préliminaires

Dans cette partie, on réunit les notions techniques dont nous aurons besoin tout au long de cette thèse.

1.1 Espérance conditionnelle

Fixons pour toute la suite un espace de probabilité complet (Ω, \mathcal{F}, P) . Rappelons que la probabilité conditionnelle est définie par

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} \tag{1.1}$$

où $P(D) > 0$ et représente intuitivement une réduction ou contraction du hasard car l'événement D a effectivement eu lieu et donne des informations partielles sur le hasard qui reste. D à lui tout seul représente en vérité la tribu $\sigma(D) = \{\emptyset, \Omega, D, \overline{D}\}$. En enrichissant cette tribu en prenant $\sigma(D_1, \dots, D_n)$ où D_i , $i = 1, \dots, n$ est une partition de Ω , on peut définir une variable aléatoire étagée, notée $P(A|\sigma(D_i))(\omega)$, qui

généralise la formule (1.1) en prenant la valeur constante

$$P(A|\sigma(D_i))(\omega) = P(A|D_i)$$

sur l'atome D_i . On peut encore généraliser en prenant une variable aléatoire intégrable X au lieu de l'indicatrice I_A et une tribu $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ qui n'est plus forcément générée par un nombre fini d'atomes. On a alors le

Théorème 1 *Soit X une variable aléatoire intégrable, il existe une variable aléatoire notée $E(X|\mathcal{D})(\omega)$ appelée espérance conditionnelle de X sachant \mathcal{D} , t.q.*

$$\int_D E(X|\mathcal{D})(\omega)P(d\omega) = \int_D X(\omega)P(d\omega),$$

pour tout $D \in \mathcal{D}$. Cette variable aléatoire est définie seulement modulo des ensembles de mesure nulle près.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème de Radon-Nikodym aux mesures $P(X \in I, D)$ et $P(D)$, I est un intervalle de \mathbb{R} et $D \in \mathcal{D}$. ■

1.2 Processus de Markov

Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable, qui sera pour nous principalement la droite réelle.

On munit cet espace d'une filtration de tribus \mathcal{F}_t , $t \geq 0$, c'est-à-dire que \mathcal{F}_t est croissante, pour $t \leq s$ on a

$$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$$

qui intuitivement représente des informations qui s'enrichissent en fonction du temps t . Un processus stochastique X_t est markovien si son évolution sachant tout le passé

contenu dans la tribu \mathcal{F}_t ne donnera rien de plus concernant le future $\sigma(X_s, s \geq t)$ que l'information disponible à l'instant présent t ; où que \mathcal{F}_t et $\sigma(X_s, s \geq t)$ sont conditionnellement indépendantes sachant le présent $\sigma(X_t)$. L'exemple le plus simple est celui d'un projectile qui se déplace en fonction du temps selon les équations classiques de Newton dans un champ potentiel (par exemple terrestre) : c'est une évolution soumise seulement au potentiel et aux conditions initiales au temps zéro. Le future après un instant ultérieur t ne dépendra que des conditions à l'instant précis t qui serviront de conditions initiales pour le mouvement après t .

Définition 2 Soit X_t un processus stochastique à valeurs dans (E, \mathcal{E}) . On dit que X est un processus de Markov par rapport à la filtration \mathcal{F}_t si

- 1) X est adapté à \mathcal{F}_t c'est-à-dire que X est mesurable par rapport à \mathcal{F}_t ,
- 2) pour tout $A \in \mathcal{F}_t$ et $B \in \sigma(X_s, s \geq t)$

$$P(A \cap B | X_t) = P(A | X_t)P(B | X_t).$$

On dira Markovien tout court si la filtration \mathcal{F}_t est la filtration naturelle $\sigma(X_s, s \leq t)$.

On montre que cette définition a des équivalents.

Théorème 3 a/ Soit X_t un processus stochastique adapté à la famille $\{\mathcal{F}_t\}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- i/ X est un processus de Markov par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}$,
- ii/ pour chaque t et Y dans $b\sigma(X_s : s \geq t)$, voir la section 3.6, on a

$$E(Y | \mathcal{F}_t) = E(Y | X_t);$$

iii/ si $t \leq s$ alors pour tout $f \in b\mathcal{E}$

$$E(f \circ X_s | \mathcal{F}_t) = E(f \circ X_s | X_t).$$

b/ X est un processus de Markov (par rapport à $\sigma(X_s | s \leq t)$) si pour chaque collection finie $t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t$ et $f \in b\mathcal{E}$ on a

$$E(f \circ X_t | X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = E(f \circ X_t | X_{t_n}).$$

Le lien avec l'analyse apparaît avec la notion de fonction de transition.

Définition 4 Une fonction $P_{t,s}(x, A)$ définie pour $0 \leq t < s < \infty$, x dans E , A dans

\mathcal{E} , s'appelle une fonction de transition de Markov sur (E, \mathcal{E}) pourvu que

i/ $A \rightarrow P_{t,s}(x, A)$ est une mesure de probabilité sur \mathcal{E} pour chaque t, s et x ;

ii/ $x \rightarrow P_{t,s}(x, A)$ est \mathcal{E} -mesurable pour chaque t, s et A ;

iii/ si $0 \leq t < s < u$, alors

$$P_{t,u}(x, A) = \int P_{t,s}(x, dy) P_{s,u}(y, A) \quad (1.2)$$

pour tout x et A . La relation (1.2) est appelée équation de Chapman-Kolmogorov.

Dans ce travail on ne considérera que les processus de Markov homogènes,

Définition 5 Une fonction de transition de Markov $P_{t,s}(x, A)$ dans (E, \mathcal{E}) est dite

temporellement homogène s'il existe une fonction $P_t(x, A)$ définie pour $t > 0$, $x \in E$,

et $A \in \mathcal{E}$ telle que $P_{t,s}(x, A) = P_{s-t}(x, A)$ pour tout t, s, x , et A . Dans ce cas $P_t(x, A)$

est appelée une fonction de transition de Markov temporellement homogène sur (E, \mathcal{E})

et l'équation de Chapman-Kolmogorov devient

$$P_{t+s}(x, A) = \int P_t(x, dy) P_s(y, A)$$

pour tout t, s, x , et A .

Définition 6 On dit que le processus de Markov X (par rapport à la famille \mathcal{F}_t) admet $P_{t,s}(x, A)$ comme fonction de transition si

$$E(f \circ X_s | \mathcal{F}_t) = P_{t,s}(X_t, f) \quad (1.3)$$

pour tout $0 \leq t < s$ et f dans $b\mathcal{E}$.

En prenant une espérance conditionnelle par rapport à $\sigma(X_t)$ dans l'équation (1.3) on a

$$E(f \circ X_s | X_t) = P_{t,s}(X_t, f). \quad (1.4)$$

En combinant l'équation (1.3) et l'équation (1.4) avec le Théorème 3 nous voyons que la définition ci-dessus est conforme à la définition 2. Remarquons en passant qu'ils existent des processus qui satisfont l'équation (1.4) mais pas l'équation (1.3). En outre, il existe des processus de Markov (au sens de la définition 2) qui ne possèdent pas de fonction de transition. Le fait qu'un processus de Markov ait une fonction de transition signifie qu'il est possible de définir des distributions de probabilités conditionnelles $P(X_s \in A | \mathcal{F}_t)$, $0 \leq t < s$, $A \in \mathcal{E}$, régulières. Comme d'habitude, si nous disons que X est un processus de Markov de fonction de transition $P_{t,s}(x, A)$ sans préciser les σ -algèbre \mathcal{F}_t , il est entendu que $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$. La signification intuitive de la fonction de transition doit être claire: $P_{t,s}(x, A)$ est "la probabilité conditionnelle $X_s \in A$ sachant que $X_t = x$ quand $0 \leq t < s$ ". Bien que cette affirmation soit très attirante, il faut se méfier de ces déclarations puisque les probabilités conditionnelles ne sont déterminées que presque sûrement. Nous devrions peut-être remarquer

que, sans autre restriction, un processus de Markov peut avoir plus d'une fonction de transition. Mais bien sûr, l'équation (1.3) implique que si P^1 et P^2 sont des fonctions de transition pour X alors pour chaque t, s , fixe et A , $P_{t,s}^1(x, A) = P_{t,s}^2(x, A)$ pour presque tout x par rapport à la distribution de X_t dans E . Il est maintenant naturel de poser la question suivante : supposons que l'on nous donne une mesure de probabilité μ et une fonction de transition $P_{t,s}(x, A)$ sur un espace mesurable (E, \mathcal{E}) . Existe-t-il un processus de Markov X à valeurs dans (E, \mathcal{E}) qui possède μ comme mesure initiale et $P_{t,s}(x, A)$ comme fonction de transition?. Si l'ensemble des temps est \mathbb{Z}_+ , un tel processus existe toujours ; mais si c'est \mathbb{R}_+ les conditions les plus générales sur (E, \mathcal{E}) pour lesquelles l'affirmative est réalisée sont inconnues. Cependant, si E est un espace séparé et compact et \mathcal{E} la σ -algèbre borélienne, alors le célèbre théorème de Kolmogorov garantit l'existence d'un processus de Markov avec les propriétés souhaitées.

L'écriture axiomatique, pour ainsi dire, moderne est de voir un processus de Markov comme le sextuplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ muni d'une famille de probabilités P^x où x parcourt l'espace d'états et θ_t est l'opérateur de translation $\theta_t \Omega \rightarrow \Omega$ t.q.

$$(X_s \circ \theta_t)(\omega) = X_{s+t}(\omega). \quad (1.5)$$

1.2.1 Résolvante et semi-groupe associés

La fonction de transition nous permet de développer un traitement analytique en posant

$$P_{t,s}(x, f) = \int P_{t,s}(x, dy) f(y). \quad (1.6)$$

Une fonction de transition homogène définit un semi-groupe P_t sur (au moins) l'espace de Banach $B(E)$ des fonctions mesurables bornées sur E (muni de la topologie de la convergence uniforme) par

$$P_t : f(\cdot) \mapsto P_t(\cdot, f)$$

$$P_t(x, f) = \int f(y)P_t(x, dy).$$

Le générateur infinitésimal A du semi-groupe est défini par

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t} \quad (1.7)$$

et l'ensemble des fonctions (dans $B(E)$) pour lesquelles cette limite existe (au sens de la norme sup) s'appelle le domaine du générateur. On a une définition similaire pour une norme plus générale $\|\cdot\|$. Le semi-groupe est entièrement déterminé par son générateur. Malheureusement, ce dernier est souvent difficile à manipuler. Le semi-groupe est dit de Feller si $C_0(E)$, voir le glossaire 3.6, est invariant par le semi-groupe, c'est-à-dire si

$$P_t(C_0(E)) \subset C_0(E). \quad (1.8)$$

Cependant, il est souvent plus pratique et naturel de partir des noyaux de la résolvante

$$G^\lambda(x, dy) = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)P_t(x, dy), \quad (1.9)$$

et d'utiliser le théorème d'inversion de Hille-Yosida pour retourner au semi-groupe.

Dans le cas des processus de Markov continu, il est encore plus naturel d'utiliser le calcul stochastique et la formulation en terme de problèmes de martingales à l'exception peut être de la dimension un.

1.2.2 Propriété de Markov forte

Dans beaucoup d'arguments, il est nécessaire d'utiliser la propriété de Markov (1.3) pour certains temps aléatoires, appelés temps d'arrêt τ , aussi bien que pour des temps fixes t . L'exemple fondamental de temps d'arrêt est le temps d'entrée τ_E dans un "bon" espace d'état E

$$\tau_E = \inf\{t > 0 | X_t \in E\}.$$

Au début de l'histoire des processus de Markov, il était plus ou moins implicitement supposé que c'était possible, Lévy lui-même semble avoir eu des réticences concernant ce sujet. Cependant, cela demande des justifications et il s'avère que ce n'est pas vrai pour tous les processus de Markov. Mais en ce qui nous concerne ici, nos conditions sont suffisantes pour cette propriété de Markov "forte" ou "généralisée".

Définition 7 *Une variable aléatoire non négative τ est un \mathcal{F}_t -temps d'arrêt si $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t > 0$. La tribu \mathcal{F}_τ du "passé avant τ " est l'ensemble des A t.q. $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Dans toute la suite, on suppose que la filtration \mathcal{F}_t satisfait les "conditions habituelles", c'est-à-dire en gros la continuité à droite de la filtration, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>0} \mathcal{F}_{t+s}$ et la complé-
tion vis-à-vis des ensembles négligeables dans \mathcal{F}_0 pour tout $t > 0$.

Définition 8 *Soit $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ un processus de Markov dans un espace d'états (E, \mathcal{E}) . On dit qu'il possède la propriété de Markov forte si pour tout temps d'arrêt τ et $f \in b\mathcal{E}$ on a*

$$X_\tau \in \mathcal{F}_\tau \tag{1.10}$$

et p.s. pour tout t et x on a

$$E^x\{f \circ X_{t+\tau} | \mathcal{F}_\tau\} = E^{X_\tau}(f(X_t)).$$

Théorème 9 Si X satisfait la relation (1.10), alors X est Markov fort ssi pour tout temps d'arrêt τ et f dans $b\mathcal{E}$ on a pour tout t et x

$$E^x(f(X_{t+\tau})) = E^x\{E^{X_\tau}(f(X_t))\}.$$

Il existe aussi une propriété de Markov généralisée qu'on utilisera par la suite.

Corollaire 10 Soit $(t, \omega, \omega') \longrightarrow f(t, \omega, \omega')$ une fonction réelle bornée ou positive, mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{B}([0, \infty]) \times \mathcal{F}_\tau \times \mathcal{F}$, où τ est un temps d'arrêt. La fonction $F(t, \omega, x) = E^x[f(t, \omega, \cdot)]$ est alors mesurable par rapport à la tribu

$\mathcal{B}([0, \infty]) \times \mathcal{F}_\tau \times \mathcal{B}(E)$, et l'on a p.s. (quelle que soit la mesure initiale)

$$E[f(\tau(\omega), \omega, \theta_\tau \omega) | \mathcal{F}_\tau] = F(\tau(\omega), \omega, X_\tau(\omega)). \quad (1.11)$$

Preuve. voir [20] p. 179. ■

1.2.3 Processus de Markov standard

Dans cette thèse nous étudierons seulement les processus de Markov standard. Tous les processus qui vont suivre sont standard.

Définition 11 Un processus de Markov $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ dans un espace d'états (E, \mathcal{E}) est standard si

i/ E est un espace localement compact à base dénombrable et on ajoute un point cimetièrre Δ à E comme point à l'infini si E est non compact et comme un point isolé

si E est compact. Le processus est tué et envoyé à Δ dès que le temps t dépasse la variable aléatoire durée de vie $\zeta(\omega)$, en outre \mathcal{E}_Δ est la σ -algèbre des ensembles de Borel de E_Δ .

ii/ $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t = \overline{\mathcal{F}}_t$ pour tout t , où $\overline{\mathcal{F}}_t$ est la complétée de \mathcal{F}_t par les ensembles négligeables de \mathcal{F}_0 .

iii/ X est de Markov fort.

iv/ Les trajectoires $t \mapsto X_t(\omega)$ sont continués à droite sur $[0, \infty[$ et admettent des limites à gauche sur $[0, \zeta[$ presque sûrement.

v/ X est quasi-continue à gauche.

Voici des exemples de processus standard dont on reparlera par la suite.

1.2.4 Processus de diffusion

Si le processus de Markov X est continu, il est plus avantageux de l'étudier comme une équation différentielle stochastique EDS, grâce au puissant calcul stochastique (d'Itô etc.). Partant à l'instant 0 de x_0 , c'est-à-dire $X(0) = x_0$ p.s., on a pour tout $t \geq 0$

$$X(t) = x_0 + \int_0^t a(s, X(s))ds + b(s, X(s))dB(s), \quad (1.12)$$

où $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard. La première intégrale est de Lebesgue, quant à la deuxième, c'est l'intégrale stochastique au sens d'Itô. Cela définit un markovien qui n'est pas nécessairement homogène par rapport au temps et dont le générateur infinitésimal, voir l'équation (1.7), est l'opérateur différentiel

$$A(\cdot) = \frac{1}{2}a^2(t, x)(\cdot)'' + b(t, x)(\cdot)'$$

On rencontre les EDS dans une foule d'applications allant de la physique à la biologie, la finance mathématique etc.. Le cas autonome dans lequel $a(x) = a(t, x)$ et $b(x) = b(t, x)$ est d'un intérêt particulier ; la dépendance est seulement en x et pas en t . L'équation stochastique (1.12) décrit l'évolution temporelle d'un processus de diffusion $X(t)$, de drift $a(x)$ et coefficient de diffusion $b^2(x)$, qui peut être considéré comme un processus se comportant localement comme un mouvement brownien B de dérive $a(x)$ et de variance $b^2(x)$ quand on est en x .

1.2.5 Processus de Lévy et subordonateur

Traitement analytique

Nous recommandons [10] et [78] pour les faits suivants. Soit $\{\mu_r; r > 0\}$ un semi-groupe de convolution de mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ t.q. $\mu_r \rightarrow \delta_0$ étroitement quand $r \rightarrow 0$ où δ_0 est une masse de Dirac à l'origine. Si f est mesurable bornée et $r > 0$ on définit le noyau

$$P_r(x, f) = \int f(x + y)\mu_r(dy).$$

Cela donne une fonction de transition (temporellement) homogène sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Par conséquent si μ est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ il existe un processus de Markov X (temporellement homogène) à valeurs dans $(\mathbb{E}, \mathcal{B})$ ayant μ comme mesure initiale et $P_r(x, A)$ comme fonction de transition. Notons que $P_r(x, A)$ est invariante par translation, c'est-à-dire $P_r(x + y, A + y) = P_r(x, A)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Par un abus d'écriture on a donc $P_r(x, dy) = P_r(dy - x)$; cela signifie que le processus X a des accroissements indépendants, c'est-à-dire si $r_0 < r_1 < \dots < r_n$ alors les variables

aléatoires $X_{r_0}, X_{r_1} - X_{r_0}, \dots, X_{r_n} - X_{r_{n-1}}$ sont indépendantes. Il est bien connu, voir [78], qu'un tel semi-groupe $\{\mu_r\}$ peut être caractérisé par le fait que la transformée de Fourier $\widehat{\mu}_r(x) = \exp[-r\psi(x)]$ où l'exposant

$$\psi(\lambda) = ia\lambda + \frac{1}{2}b\lambda^2 + \int [(1 - \exp i\lambda x) + i\lambda x I_{\{|x|<1\}}] \pi(dx) \quad (1.13)$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ et π une mesure sur \mathbb{R}^* satisfaisant

$$\int (1 \wedge |x|^2) \pi(dx) < \infty.$$

La fonction ψ s'appelle l'exposant caractéristique. Inversement si ψ est défini par l'équation (1.13) alors il existe un semi-groupe $\{\mu_r\}$ de mesures de probabilité sur \mathbb{R} t.q. $\widehat{\mu}_r(x) = \exp[-r\psi(x)]$ pour tout $r > 0$ et $\mu_r \rightarrow \delta_0$ étroitement quand $r \rightarrow 0$.

En ce qui nous concerne, la mesure de Lévy intègre aussi la fonction x au voisinage de l'origine. Il s'en suit que la formule (1.13) se simplifie en

$$\psi(\lambda) = ia\lambda + \int_0^\infty (1 - \exp i\lambda x) \pi(dx). \quad (1.14)$$

Le processus associé sera noté S plutôt que X et s'appelle subordonateur. Il s'appelle ainsi car en le subordonant à un markovien $X(t)$, en suivant Bochner, en écrivant $t \mapsto X_{S(t)}$ on obtient un autre processus de Markov. S est un processus à accroissements positifs.

Définition 12 *Posons pour $x > 0$,*

$$\bar{\pi}(x) = \pi((x, \infty)). \quad (1.15)$$

c'est-à-dire la queue de la mesure de Lévy.

Voici pour toute la suite, nos conditions fondamentales sur S qui découlent des hypothèses faites dans la section 3.1.

Condition 13 *On prendra $a = 0$, $\bar{\pi}(0+) = \infty$ et $S(0) = 0$ p.s..*

Par conséquent, le noyau de transition est continu $\forall r > 0$. La mesure potentielle (ou de renouvellement) est $U^0(dx) = \int_0^\infty P_s(dx)ds$. Un exposant x indiquera que S part de x , si $x = 0$ cet exposant sera omis pour toute la suite. La mesure potentielle arrêtée, qui est continue, est définie par $U_r(dx) = \int_0^r P_s(dx)ds$, de telle sorte que $U_r(\mathbb{R}_+) = r$. On notera simplement $U(x) = U(]0, x[)$. Si $U(dx)$ est absolument continue, il est évident que $U_r(dx)$, $r > 0$, le sera aussi avec des densités respectivement $u(x)$ et $u_r(x)$. C'est clairement le cas (par le théorème de Fubini) quand $P_r(dx)$ est absolument continue de densité $p_r(x)$. Une intégration par parties dans l'équation (1.14) donne

$$\psi(\lambda) = -i\lambda \int_0^\infty \exp(i\lambda x)\bar{\pi}(x)dx. \quad (1.16)$$

Les fonctions $\psi(\lambda)$ et $\exp -r\psi(\lambda)$ peuvent être prolongées analytiquement au demi-plan complexe supérieur et donc la transformée de Laplace du subordonateur est donnée par

$$E \exp -\lambda S(r) = \exp -rg(\lambda),$$

où $g(\lambda) = \psi(i\lambda)$.

Une quantité fondamentale dans notre thèse est la valeur moyenne de $\bar{\pi}(x)$ sur des petits intervalles $]0, x[$, $x > 0$,

$$H(x) = I(x)/x,$$

où $I(x) = \int_0^x \bar{\pi}(y)dy$. On dit que la fonction $I(x)$ est à accroissements positifs si la limite inférieure de $I(2x)/I(x)$ quand $x \rightarrow 0+$ est supérieure à 1. Le produit $U(x)H(x)$ reste toujours borné.

Traitement probabiliste

On peut "démonter" S , voir [78] page 121, en la somme de ses sauts en suivant (encore) Itô. On a

Théorème 14 *Si on désigne par $J((ds, dx), \omega)$ la mesure de comptage du nombre de sauts dont la longueur l est comprise dans dx i.e. $x < l < l + dx$, pendant le temps ds , alors on a*

$$X_t(\omega) = \int_{]0,t] \times \mathbb{R}_+^*} x J((ds, dx), \omega)$$

pour tout $t > 0$.

Tournons maintenant vers l'étude de la monotonie de $u(x)$, commençons par la

Définition 15 *On dit qu'une fonction à valeurs strictement positives f est log-convexe si son logarithme est convexe, c'est-à-dire si aux points réguliers x on a*

$$f(x).f''(x) - (f'(x))^2 \geq 0. \tag{1.17}$$

Le théorème suivant est dû à Hawkes [48].

Théorème 16 *Si le drift $a = 0$ et si $\bar{\pi}(x)$ est log-convexe, c'est-à-dire satisfait l'inégalité (1.17), alors $U(dx)$ est absolument continue de densité $u(x)$ qui est monotone sur $]0, \infty[$.*

Preuve. L'idée de base est une discrétisation de l'espace d'états du subordonateur et l'utilisation des techniques de la théorie du renouvellement. Soit $\epsilon > 0$, on pose alors $v_n = \bar{\pi}(n\epsilon + \epsilon)/\bar{\pi}(\epsilon)$. Il s'en suit, par les hypothèses, que v_n est une suite de Kaluza, et donc une suite de renouvellement, voir [59]. Par conséquent, en posant $r_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} f_j$, on a pour tout n , voir [31] page 338,

$$\sum_{j=0}^n r_j v_{n-j} = 1.$$

En posant $u_j = r_j(\epsilon)/\bar{\pi}(\epsilon)$, alors $u_j(\epsilon)$ est décroissante et satisfait pour tout n

$$\sum_{j=0}^n u_j(\epsilon) \bar{\pi}((n-j)\epsilon + \epsilon) = 1,$$

qui est l'équivalent discret de l'équation de convolution de Chung suivante, voir [70],

$$\int_{[0,b]} \bar{\pi}(b-x) U(dx) = 1,$$

$b > 0$. La mesure potentielle U est contrôlée par sa transformée de Laplace qui apparaît (au moins sous forme discrétisée) lorsqu'on définit la mesure atomique

$$U_\epsilon = \sum_{j \geq 0} u_j(\epsilon) \delta_{j\epsilon},$$

et qu'on calcule sa transformée de Laplace. A partir de là, les arguments sont calculatoires plutôt qu'intuitifs. ■

Le résultat suivant dû toujours au même auteur [49] donne une monotonie partielle.

Théorème 17 *Soient X_i , $i = 1, 2$, deux subordonateurs ayant des exposants de coefficients $(a_i, \bar{\pi}_i)$. Si $a_1 = a_2$ et s'il existe un $\delta > 0$ tel que pour $x \in]0, \delta]$ on ait*

$$\bar{\pi}_1(x) = \bar{\pi}_2(x),$$

alors nous avons pour tout sous-ensemble A de $]0, \delta[$

$$U_1^\lambda(0, A) = U_2^\lambda(0, A).$$

Preuve. Soient $J_i^\delta(t)$ la somme des sauts de $X_i(t)$ qui sont supérieurs à δ . Alors

$$P\{J_i^\delta(t) = 0\} = \exp(-t\bar{\pi}_i(\delta))$$

et, par la représentation d'Itô, voir le Théorème 14, on a les processus

$$X_i(t) - J_i^\delta(t) = Y(t)$$

sont des réalisations d'un même processus Y . Si $x \in]0, \delta[$ on a

$$\begin{aligned} P\{X_i(t) \leq x\} &= P\{Y(t) \leq x, J_i^\delta(t) = 0\} \\ &= P\{Y(t) \leq x\} \exp(-t\bar{\pi}_i(\delta)). \end{aligned}$$

Ceci est indépendant de i d'où le résultat. ■

Remarquons enfin que les singletons $\{b\}$ sont polaires pour S , c'est-à-dire que l'ensemble $\{x | P^x(\tau_{\{b\}} < \infty) > 0\}$ est vide.

1.2.6 Fonctionnelle additive et temps local

Les temps locaux (de processus de Markov) sont des exemples de la notion générale de fonctionnelle additive. Ces dernières jouent le rôle de mesures et on leur associe des supports et des potentiels qui sont des transformées de Laplace aléatoires, etc. Dans notre travail on ne considèrera que les fonctionnelles continues p.s..

Définition 18 *Considérons un processus de standard $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ défini sur un espace d'état régulier E^Δ avec durée de vie $\zeta(\omega)$. Une fonctionnelle additive $A(t, \omega)$ de X_t est une famille de variables aléatoires telles que*

1/ pour presque tout ω on a les conditions: $t \mapsto A_t(\omega)$ est continue à droite, non décroissante, $A_0 = 0$ et $A_t(\omega) = \lim_{s \uparrow \zeta(\omega)} A_s(\omega)$ pour tout $t < \zeta(\omega)$

2/ A_t est adaptée à \mathcal{F}_t .

3/ Pour tout $s, t \geq 0$, on a p.s. $A_{t+s} = A_t + A_s \circ \theta_t$.

Il faut tout de suite signaler qu'un remarquable théorème de J. B. Walsh permet de perfectionner la fonctionnelle $A(t)$ c'est-à-dire qu'il existe une fonctionnelle additive $A'(t)$ indistinguable de $A(t)$ pour laquelle on peut faire entrer les s et t à l'intérieur des accolades dans la propriété (3), voir [20] chapitre XV page 230. La notion de fonctionnelle additive est apparue pour la première fois en relation avec la formule de Feynman-Kac. Les fonctionnelles additives sont au cœur même de la théorie des processus de Markov. Rappelons d'abord qu'une fonction surharmonique est en gros une fonction dont le laplacien est négatif. Rappelons aussi que le célèbre théorème de représentation de Riesz affirme essentiellement qu'une fonction surharmonique admet une décomposition comme la somme d'une fonction harmonique et du potentiel d'une mesure. Cela admet en théorie des processus de Markov un équivalent pour ce qu'on appelle les fonctions excessives qui jouent le rôle de fonctions surharmoniques. Elles permettent aussi d'échantillonner le processus seulement sur leurs supports. Pour des motivations et une discussion instructive concernant ces fonctionnelles on pourra consulter à profit [44] ou bien [20] chapitre XV page 223. La fonctionnelle est dite continue si ses trajectoires sont continues p.s..

Définition 19 Soit $A(t)$ une fonctionnelle additive, le λ -potentiel de A est défini par

$$E^x \int_0^\infty \exp(-\lambda t) dA(t).$$

Il résulte d'un théorème de Meyer que si deux fonctionnelles additives continues ont un même λ -potentiel fini, pour une valeur $\lambda \geq 0$, alors elles sont indistinguables.

Il existe aussi la notion de support fin $Supp(A)$ de A . Soit D la variable aléatoire

$$D = \inf\{t|A(t) > 0\} = \sup\{t|A(t) = 0\}.$$

Le support fin de $A(t)$, soit $Supp(A)$, est l'ensemble $\{x \in E \mid P^x(D = 0) = 1\}$. Soit x_0 un point de E .

Définition 20 *Une fonctionnelle additive continue A de X est appelée un temps local de X au point x_0 si $Supp(A) = \{x_0\}$.*

Il est alors communément désigné par $L(x_0, t)$. Il est bien connu qu'un temps local de X en x_0 existe si et seulement si x_0 est régulier pour $\{x_0\}$, voir [15] page 216. Les temps locaux en x_0 diffèrent seulement par des constantes multiplicatives. On choisit une version telle que son 1-potentiel soit $E^x(\exp -\tau_{x_0})$ pour tout x , τ_{x_0} étant le temps d'entrée dans $\{x_0\}$. Cette version est dite normalisée ou le temps local de Blumenthal et Gettoor. Intuitivement, un temps local $L(x_0, t)$ de X mesure le temps que passe X dans $\{x_0\}$ avant l'instant $t \wedge \zeta$ en ce sens que le support de la mesure $dL(x_0, t)$ est précisément la fermeture de l'ensemble de niveau stricte $Z_{x_0}^o = \{t|X(t) = x_0\}$, ce dernier ne diffère de $Z(x_0, t)$ que par un ensemble dénombrable. Il est bien connu que $Z(x_0, t)$ est, sous nos hypothèses, p.s. de mesure Lebesgue nulle, fermé et sans points isolés.

1.2.7 L'inverse du temps local

L'inverse continu à droite de $L(x_0, t)$, soit

$$S(r) = \inf\{t \geq 0 | L(t) > r\},$$

pour $r \geq 0$, est stochastiquement équivalent à un subordonateur. La relation fondamentale entre la mesure de Lévy et notre processus de Markov X est que

$$g(\lambda) = 1/(\lambda G^\lambda(x_0, x_0)). \quad (1.18)$$

1.3 Variation régulière

Le concept de variation régulière dû à Karamata, voir par exemple [5], est d'une grande importance en analyse. Il est permis de relier et de formuler, de manière insoupçonnée, des branches entières des mathématiques.

Définition 21 *Soit f une fonction mesurable et non négative définie au voisinage de $+\infty$, elle est dite à variation régulière d'exposant $\alpha \in \mathbb{R}$ si $\forall \lambda > 0$*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^\alpha.$$

La fonction $f(x) = x^\alpha$ est évidemment à variation régulière d'exposant α . Il est remarquable de voir que toutes les fonctions à variation régulière s'obtiennent à partir de cet exemple fondamental simplement en multipliant par ce qu'on appelle une fonction à variation lente.

Définition 22 Soit f une fonction mesurable et non négative définie au voisinage de $+\infty$, elle est dite à variation lente si $\forall \lambda > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = 1.$$

L'exemple fondamental est celui du logarithme $\log(x)$.

Une fonction f mesurable et non négative définie au voisinage de $+\infty$ est à variation régulière d'exposant $\alpha \in \mathbb{R}$ ssi il existe une fonction à variation lente $l(x)$ telle que

$$f(x) = x^\alpha l(x).$$

1.4 La formule d'Euler-Maclaurin

Cette formule célèbre s'avère très importante dans notre travail, voir [16].

Lemme 23 Soit f une fonction dans $C^1(\mathbb{R}_+)$ et $a > x > 0$, on a

$$a \sum_{k \geq 1} f(x + ka) = \int_0^\infty f(y) dy + \frac{a}{2} f(x + a) - \int_0^{x+a} f(y) dy - a^2 \int_1^\infty P_1(y) f'(x + ay) dy,$$

où $P_1(y) = 1/2 - (y - [y])$ est une fonction périodique, à condition que la somme et les intégrales convergent. Les trois derniers termes d'erreur dans le membre droit de l'égalité ci-dessus seront notés respectivement $R_i(x)$, $i = 1, 2, 3$.

1.5 Quelques notions d'analyse harmonique

Définition 24 Soit μ une mesure positive sur \mathbb{R} , la transformée de Fourier de μ , si elle existe est définie par

$$\widehat{\mu}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \exp(i\lambda x) \mu(dx).$$

Elle est notée $\widehat{\mu}$. Si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité f (absolument intégrable) on notera \widehat{f} au lieu de $\widehat{\mu}$. Concernant l'asymptotique des transformations de Fourier, on a l'important résultat suivant,

Définition 25 Pour tout $f \in L^1$ nous avons associé sa transformée de Fourier \widehat{f} défini par

$$\widehat{f}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \exp(-ivu) du, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Nous prenons maintenant le problème d'inversion, c'est-à-dire, le problème de la reconstitution de la fonction f d'origine à partir des valeurs \widehat{f} de f .

Définition 26 Si $f \in L^1$ et

$$\widehat{f}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \exp(-ivu) du,$$

on peut s'attendre une formule comme

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(v) \exp(ivx) du$$

soit valide.

Il existe d'innombrables travaux sur le comportement asymptotique d'une transformée de Fourier. C'est l'un des sujets clef de l'analyse harmonique. Le résultat suivant nous sera essentiel.

Théorème 27 Soit f une fonction dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ t.q. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ et t.q. la condition de Fomin $\int_0^\infty (u^{-1} \int_u^\infty |f'(x)|^p dx)^{1/p} du < \infty$ soit vérifiée pour un certain $p > 1$.

Soit pour tout $y > 0$, $\zeta_1(y) = -y^{-1} \int_0^\infty f'(x) \sin xy dx$ et $\zeta_2(y) = y^{-1} (\int_0^{\pi/2y} f'(x) (\cos xy - 1) dx + \int_{\pi/2y}^\infty f'(x) \cos xy dx)$; alors en posant $\widehat{f}_c(y) = \zeta_1(y)$ et $\widehat{f}_s(y) = y^{-1} f(\pi/2y) + \zeta_2(y)$ on a pour $j = 1, 2$

$$\int_0^\infty |\zeta_j(y)| dy \leq c(p) \int_0^\infty (u^{-1} \int_u^\infty |f'(x)|^p dx)^{1/p} du,$$

où la constante $c(p)$ ne dépend que de p .

Preuve. Dans la preuve, pourtant simple au début, on commence par utiliser une intégration par partie sur x apparaîtra alors tous les termes indiqués plus haut. Ensuite on entre franchement dans de l'analyse asymptotique bien huilée, voir [67].

■

1.6 Mesure et dimension de Hausdorff

Soit \mathcal{H} l'ensemble, voir [84], des fonctions de mesure de Hausdorff $h : (0, \delta) \rightarrow [0, 1]$, $\delta > 0$, qui sont définies au voisinage de l'origine, qui sont continues, monotone non-décroissantes et qui satisfont $h(0) = 0$. On prendra aussi la condition de régularité (faible) de Besicovitch suivante, voir la formule (1) dans [84], il existe une constante $K > 0$ t.q.

$$h(2s) \leq Kh(s) \tag{1.19}$$

pour $s \in (0, \delta/2)$. La h -mesure de Hausdorff est une mesure extérieure de Carathéodory définie pour tout les sous-ensembles E d'un espace métrique, dans notre cas \mathbb{R}^k , $k \geq 1$,

$$h - m(E) = \sup_{\delta > 0} \left[\inf \left\{ \sum_{i \geq 1} h(\text{diam} C_i), E \subset \cup C_i, \text{diam} C_i < \delta \right\} \right]$$

où les C_i sont des sous-ensembles de \mathbb{R}^k . Le supremum indique que l'expression entre parenthèses croît quand δ décroît. La classe des ensembles h -mesurables, au sens de Carathéodory, comprend au moins les boréliens. En général, les h -mesures de Hausdorff ne sont pas des mesures de Radon.

Il existe un ordre partiel important dans \mathcal{H} . En effet, on pose $h_1 \prec h_2$ si

$$h_2(s) = o(h_1(s)), \quad s \rightarrow 0.$$

On a alors le

Théorème 28 Soient $E \subset \mathbb{R}^k$, h_1 et h_2 deux fonctions de \mathcal{H} telles que $h_1 \prec h_2$, alors

$$h_1 - m(E) < \infty \Rightarrow h_2 - m(E) = 0.$$

Preuve. Voir [55] page 26. ■

Par conséquent, si on se restreint aux puissances $h(s) = s^\theta$, $\theta > 0$, on peut voir que

$$\inf \{ \theta | s^\theta - m(E) = 0 \} = \sup \{ \theta | s^\theta - m(E) = \infty \}, \quad (1.20)$$

la valeur commune dans l'équation (1.20) s'appelle la dimension de Hausdorff (-Besicovitch) de E . Elle est notée par $\dim_H(E)$.

Concernant les dimensions de produits cartésiens, on a au moins le

Théorème 29 Soient $E_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, alors

$$\sum_{i=1}^k \dim_H(E_i) \leq \dim_H\left(\prod_{i=1}^k E_i\right).$$

Preuve. Voir [28]. ■

Concernant le comportement vis-à-vis des projections notées Pr sur l'hyperplan H , on a le

Théorème 30 Soit $E \subset \mathbb{R}^k$, alors

$$s^\theta - m(\text{Pr}_H E) \leq s^\theta - m(E).$$

Preuve. Voir [30] page 75. ■

Parfois, il est difficile d'avoir des informations sur les mesures de Hausdorff, c'est pourquoi on a recours à la quantité entropique suivante. Considérons la mesure de Lebesgue $\lambda(\epsilon, E)$ de l' ϵ -enveloppe

$$\wedge(\epsilon, E) = \bigcup_{x \in E}]x - \frac{\epsilon}{2}, x + \frac{\epsilon}{2}[. \quad (1.21)$$

La quantité $\wedge(\epsilon, E)$ est donc l'ensemble des points de \mathbb{R} situés à moins de $\epsilon/2$ d'un point de E et $\lambda(\epsilon, E) = m(\wedge(\epsilon, E))$, m étant la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Notre fonctionnelle $K(\epsilon, E)$ c'est-à-dire le nombre (normalisé) de boîtes $[k\epsilon, (k+1)\epsilon[$ contenant un point de E est une autre quantité entropique. Il est facile de voir que

Théorème 31 Soit $E \subset \mathbb{R}$ borné et $\epsilon > 0$, alors

$$\frac{\lambda(\epsilon, E)}{2} \leq \epsilon N(\epsilon, E) \leq 2\lambda(\epsilon, E). \quad (1.22)$$

1.7 Analyse par une méthode de simulation, Méthode de Monte-Carlo

Il est difficile de donner une définition exacte de ces méthodes ; on appelle généralement "méthode de Monte-Carlo" un procédé de calcul où sont employés des échantillons artificiels de lois de probabilité. La façon d'employer ces échantillons est très différente suivant le cas considéré. On dit encore que l'on fait une "simulation du certain par l'aléatoire" ou dans d'autres cas une "simulation de l'aléatoire par l'aléatoire". Par "simulation" on entend une reconstitution artificielle suffisamment fidèle d'un phénomène réel, qui peut être de nature abstraite ou concrète. Toutes ces méthodes sont basées sur le concept de "nombres aléatoires". Nous allons brièvement aborder la question des "nombres aléatoires". Ensuite on passera à la simulation de processus stochastiques.

1.7.1 Nombres aléatoires

Soit une variable aléatoire N peuvent prendre les valeurs entières $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et 9 , chaque valeur constituant un état E_n ayant une probabilité $p_n = 1/10$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. On appellera "séquence équiprobable de base" (s. e. b.) ou "échantillon de base", une suite de valeurs de N indépendantes. Pour obtenir une s. e. b., on peut utiliser une roulette comme celle des casinos de jeux, mais comprenant 10 secteurs égaux numérotés de 0 à 9, ou encore une sphère dans laquelle on a placé (par exemple), 1000 boules numérotées 0, 1000 boules numérotées 1, ..., 1000 numérotées 9. Après avoir agité cette sphère un temps convenable on peut sortir une s. e. b.

Dans la pratique on préfère employer des moyens beaucoup plus rapides, utilisant des propriétés physique ou des calculateurs électroniques ; par exemple on prend comme source le bruit de fond d'un circuit ou des impacts d'électrons d'une radiation, ou encore une penthode avec une grille en l'air (en général on obtient une loi de Poisson qu'un transforme pour avoir une s. e. b.). Pour s'affranchir des procédés physiques qui peuvent être délicats à réaliser ou à employer, on a imaginé des procédés arithmétiques particuliers adaptés aux calculateurs électroniques digitaux mais ceci au prix d'une certaine détérioration de la notion de "hasard scientifique". Les nombres obtenus successivement peuvent être utilisés comme matériau " pseudo-aléatoire" grâce à leur désordre apparent. En ce qui concerne les calculateurs électroniques, une première méthode arithmétique due à Von Neumann consiste à prendre un nombre, à l'élever au carré puis à l'arrondir par les deux bouts ou d'une façon générale à procéder à des opérations arithmétiques avec arrondi. Par exemple:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2061, & x_0^2 &= 04|2477|21 \\ x_1 &= 2477, & x_1^2 &= 06|1355|29 \\ x_2 &= 1355, \dots \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Si l'on répète ce procédé un nombre de fois suffisant, les parties centrales des x_n^2 donnent des s. e. b. Pratiquement, après 20 itérations, on obtient une s. e. b. assez pure, c'est-à-dire distribuée d'une façon très voisine de la distribution rectangulaire $p_n = 1/10$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Une autre méthode consiste à prendre pour s. e. b. la suite des restes x_{n+1} de la division modulo M d'un produit

ex_n , soit

$$x_{n+1} = ex_n - Mq$$

où q est le quotient. On risque de trouver une suite périodique, aussi prend on des valeurs de e et de M telles que la période soit très grande. Par exemple $e = 5^{17}$ et $M = 2^{24}$. On ne peut démontrer en toute rigueur la validité de ces méthodes, mais on vérifie la pureté des séquences à l'aide de tests de signification statistique et on écarte les mauvaises portions si l'on en trouve, ce qui est rare.

1.7.2 Généralités sur la simulation des processus stochastiques

Simuler une variable (ou un vecteur) aléatoire est bien connu ; la question concernant des processus aléatoires est plus ardue. Soit $\{X(t)\}_{0 \leq t \leq \tau}$ un processus stochastique en temps discret ou continu. Le problème que nous étudions est de générer une trajectoire de l'échantillon par la simulation, où τ est un nombre fixe (par exemple $\tau = 1$) ou un temps d'arrêt. Les méthodes dépendent fortement du type de processus en question ainsi que du type d'application (comment va être utilisée la trajectoire de l'échantillon?). Dans certains cas, comme celui des processus stables, ou de Lévy en général, il peut même être non négligeable, voir impossible, de produire des distributions unidimensionnelles (c'est-à-dire $X(\tau)$ pour un τ fixe) ; nous sommes alors confrontés à un problème particulier. Dans d'autres situations telles que les processus gaussiens stationnaires, la génération de $X(\tau)$ pour un seul τ peut être facile, mais la structure de la dépendance dans le processus peut rendre difficile la génération

des distributions de dimension finie (c'est-à-dire les vecteurs aléatoires de la forme $(X(0), X(1), \dots, X(\tau))$ en temps discret, ou une grille discrète en temps continu), en particulier quand la dimension est grande. En temps continu, il peut être facile de générer une grille discrète avec des distributions de dimension finie correctes (par exemple pour le mouvement brownien), mais l'utilisation d'une grille discrète peut introduire des erreurs dans l'application spécifique, telle que les caractéristiques du temps d'entrée $\tau_{[0, \infty[} = \inf\{t > 0 | X(t) \geq 0\}$.

Avant d'aborder la simulation des diffusions (EDS) abordons le cas déterministe

1.7.3 Méthodes numériques pour les équations différentielles ordinaires (EDO)

Considérons l'EDO $x'(t) = a(t, x(t))$ avec la condition initiale $x(0) = x_0$ dans l'intervalle de temps $[0, 1]$. La solution numérique x^h est généralement mise en œuvre par des approximations discrètes $x_n^h = x^h(t_n^h)$ en des points équidistants de la grille $t_n^h = nh$, où $h = h_N = 1/N$. L'erreur est

$$e(h) = |x(1) - x^h(1)|.$$

La méthode numérique de base est la méthode d'Euler

$$x_0^h = x_0, x_n^h = x_{n-1}^h + a(t_{n-1}^h, x_{n-1}^h)h. \quad (1.23)$$

Dans des conditions de régularité convenables (que nous omettons ici et dans la suite), $e(h) = O(h) = O(1/N)$.

1.7.4 Le schéma d'Euler pour les EDS

Soit B un mouvement brownien. Posons

$$t_n^h = nh,$$

$$\Delta_n^h B = B(t_n^h) - B(t_{n-1}^h).$$

Une approximation numérique de X générée en t_n^h et interpolée linéairement à l'intérieur est désignée par $\{X^h(t)\}_{0 \leq t \leq 1}$, de sorte que $X_n^h = X^h(t_n^h)$ est la valeur au n ème point de grille.

1.7.5 La Méthode d'Euler pour les EDS

Les méthodes numériques pour les *EDS* sont modélisées sur celles des *EDO*. Nous exposerons la méthode d'Euler. Nous mentionnons pour la complétude que les méthodes implicites ont également été étendues mais on ne donnera pas les détails. Rappelons que $t_n^h = nh$, entre les points de la grille, $X^h(t)$ peut être définie comme X_{n-1}^h quand $t_{n-1}^h \leq t \leq t_n^h$ ou par interpolation linéaire. Les schéma d'Euler est $X^h(0) = x_0$,

$$X_n^h = X_{n-1}^h + a(t_{n-1}^h, X_{n-1}^h)h + b(t_{n-1}^h, X_{n-1}^h) \Delta_n^h B,$$

où $\Delta_n^h B$ sont i.i.d. $\mathcal{N}(0, h)$ (voir le Glossaire de notation) pour h fixe et $X_n^h = X^h(t_n^h)$.

Lorsque l'on considère l'horizon $0 \leq t \leq 1$, on prend $h = 1/N$ avec $N \in \mathbb{N}$.

1.8 Fonctions multivoques aléatoires

Comme son nom l'indique, un ensemble aléatoire est un objet dont les valeurs sont des ensembles, de sorte que l'espace d'arrivée est l'espace des sous-ensembles d'un espace

donné. A ce stade, une simple définition d'un élément aléatoire général comme un ensemble aléatoire présente peu de difficulté dès qu'une σ -algèbre sur l'espace d'arrivée est spécifiée. La nouvelle caractéristique principale est que les ensembles aléatoires peuvent avoir quelque chose de l'intérieur (différente des variables et vecteurs aléatoires) et le développement de cette idée est crucial dans les études de séries aléatoires. Étant donné que la famille de tous les ensembles est trop grande, il est d'usage de considérer les ensembles fermés aléatoires définis comme des éléments mais au hasard dans l'espace des parties fermées d'un certain espace topologique E . La famille des parties fermées de E est désignée par F , \mathcal{K} et \mathcal{G} représentent respectivement la famille de tous les sous-ensembles compacts et ouverts de E . On suppose souvent que E est un espace topologique séparé, à base dénombrable et localement compact. L'espace euclidien \mathbb{R}^d est un exemple générique d'un tel espace E . Fixons un espace de probabilité complet (Ω, \mathcal{F}, P) . Il est naturel d'appeler un élément aléatoire de F un ensemble fermé aléatoire. Cependant, il faut être plus précis concernant les questions de mesurabilité. En d'autres termes, lors de la définition d'un élément aléatoire, il est nécessaire de préciser les informations qui sont disponibles en fonction des événements observables de la σ -algèbre \mathcal{F} . Il est essentiel de veiller à ce que la mesurabilité est suffisamment restrictive pour s'assurer que toutes les fonctionnelles d'intérêt deviennent des variables aléatoires. En même temps, la condition de mesurabilité ne doit pas être trop stricte afin d'inclure autant d'éléments aléatoires que possible. La définition suivante décrit un concept d'un ensemble fermé aléatoire assez souple et utile.

Définition 32 $X : \Omega \rightarrow \Upsilon$ est appelé un ensemble fermé aléatoire si, pour tout compact K dans E , on a

$$\{\omega : X \cap K = \emptyset\} \in \mathcal{F} \quad (1.24)$$

1.8.1 Fonctionnelles de capacité

La Condition (1.24) signifie simplement qu'en observant X on peut toujours dire si X touche ou rate un ensemble compact K donné. L'application $X : \Omega \rightarrow \Upsilon$ est mesurable entre l'espace de probabilité sous-jacente et l'espace Υ équipé de la σ -algèbre $\mathcal{B}(\Upsilon)$ généré par $\{F \in \Upsilon : F \cap K \neq \emptyset\}$ pour K parcourant E . Nous écrivons

$$\Upsilon_K = \{F \in \Upsilon : F \cap K \neq \emptyset\}.$$

La σ -algèbre générée par les Υ_K pour tout K de \mathcal{K} contient clairement

$$\Upsilon^K = \{F \in \Upsilon : F \cap K = \emptyset\}.$$

De plus, pour chaque G de la famille \mathcal{G}

$$\Upsilon_G = \{F \in \Upsilon : F \cap G \neq \emptyset\} = \bigcap_n \Upsilon_{K_n},$$

où $\{K_n, n \geq 1\}$ est une suite d'ensembles compacts t.q $K_n \uparrow G$ (ici la compacité locale de E est essentielle). Par conséquent, $\Upsilon_G \in \mathcal{B}(\Upsilon)$ pour tout $G \in \mathcal{G}$. Il convient de noter que la topologie de Fell sur Υ est générée par des ouverts Υ_G pour $G \in \mathcal{G}$ et Υ^K pour $K \in \mathcal{K}$. Par conséquent, la σ -algèbre engendrée par Υ_K pour $K \in \mathcal{K}$ coïncide avec la tribu borélienne engendrée par la topologie de Fell sur Υ . Il est possible de reformuler la définition 32 comme suit.

Définition 33 Une application $X : \Omega \rightarrow \Upsilon$ est un ensemble fermé aléatoire si X est mesurable par rapport à la tribu borélienne sur Υ engendrée par la topologie de Fell, c'est-à-dire

$$X^{-1}(\mathcal{X}) = \{\omega : X(\omega) \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{F}$$

pour chaque $\mathcal{X} \in \mathcal{B}(\Upsilon)$. Alors la relation (1.24) peut être formulé comme

$$X^{-1}(\Upsilon_K) = \{\omega : X(\omega) \in \Upsilon_K\} \in \mathcal{F}. \quad (1.25)$$

Nous écrivons $X^{-1}(K)$ au lieu de $X^{-1}(\Upsilon_K)$. Il est facile de voir que la relation (1.25) implique la mesurabilité d'un certain nombre d'autres événements, par exemple, $\{X \cap G \neq \emptyset\}$ pour chaque $G \in \mathcal{G}$, $\{X \cap F \neq \emptyset\}$ et $\{X \subset F\}$ pour tout $F \in \Upsilon$. Puisque la σ -algèbre $\mathcal{B}(\Upsilon)$ est la tribu borélienne par rapport à une topologie sur Υ , cela conduit souvent à la conclusion que $f(X)$ est un ensemble fermé aléatoire si X est un ensemble fermé aléatoire et l'application $f : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$ est continue ou semi-continue (et donc mesurable).

Définition 34 La distribution d'un ensemble fermé aléatoire X est déterminée par

$$P(\mathcal{X}) = P\{X \in \mathcal{X}\}$$

pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{B}(\Upsilon)$. Le choix particulier de $\mathcal{X} = \Upsilon_K$ et $P\{X \in \Upsilon_K\} = P\{X \cap K \neq \emptyset\}$ est utile puisque les familles Υ_K , $K \in \mathcal{K}$, génèrent la \blacksquare -algèbre $\mathcal{B}(\Upsilon)$.

Définition 35 Une fonctionnelle $T_X : \mathcal{K} \rightarrow [0, 1]$ donnée par

$$T_X(K) = P\{X \cap K \neq \emptyset\}, K \in \mathcal{K},$$

est dite la fonctionnelle de capacité de X .

1.8.2 Loi forte des grands nombres pour les ensembles aléatoires

Somme de Minkowski d'ensembles déterministes

L'addition de Minkowski est une opération naturelle pour les ensembles dans les espaces linéaires. Si M et L sont deux parties d'un espace linéaire \mathbb{E} , alors leur somme de Minkowski (ou élément par élément) est définie comme

$$M \oplus L = \{x + y : x \in M, y \in L\}$$

Nous écrivons systématiquement $M + L$ au lieu de $M \oplus L$. Ici on traite les lois des grands nombres et théorèmes limites pour les sommes de Minkowski d'ensembles aléatoires. Les méthodes pertinentes sont étroitement liées à des probabilités dans les espaces de Banach, puisque l'addition de Minkowski des ensembles convexes peut être identifiée avec l'addition arithmétique classique de leurs fonctions de support. Par conséquent, un certain nombre de résultats pour les sommes de Minkowski d'ensembles aléatoires peut être obtenue en utilisant les résultats connus pour des sommes de fonctions aléatoires. L'addition de Minkowski d'ensembles possède une propriété de "convexification", ce qui signifie que la somme est "plus convexe" que les nombres à additionner. Cette propriété est appuyée par le résultat important suivant. Rappelons que $\|K\|$ est la norme de l'ensemble K et ρ_H est la métrique de Hausdorff

Théorème 36 (*Shapley–Folkman–Starr*). Soient K_1, \dots, K_n des sous ensembles com-

compact de \mathbb{R}^d pour $n \geq 1$. Alors

$$\rho_H(K_1 + \dots + K_n, \text{co}(K_1 + \dots + K_n)) \leq \sqrt{d} \max_{1 \leq i \leq n} \|K_i\|. \quad (1.26)$$

Corollaire 37 (Sommes d'ensembles identiques). Si K est un compact de \mathbb{R}^d , alors

$$\rho_H(K^{(n)}, \text{co}(K^{(n)})) \leq \sqrt{d} \|K\| \quad (1.27)$$

où $K^{(n)} = K + \dots + K$ est la somme de Minkowski de n copies identiques.

Il résulte de la relation (1.27) que

$$\rho_H(n^{-1}K^{(n)}, n^{-1}\text{co}(K^{(n)})) \leq \frac{\sqrt{d}}{n} \|K\|$$

le membre à droite converge vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Donc, $n^{-1}K^{(n)}$ converge vers un ensemble convexe quand le nombre n tend vers l'infini.

Un outil utile approprié pour obtenir la loi forte des grands nombres (LFGN) pour des ensembles convexes aléatoires est basée sur leur représentation en tant qu'éléments d'espaces fonctionnels. Un ensemble K de la famille $\text{co}\mathcal{K}$ d'ensembles compacts convexes dans \mathbb{R}^d donne lieu à sa fonction de support

$$h(K, u) = \sup\{\langle x, u \rangle : x \in K\}, u \in \mathbb{R}^d.$$

Dans ce qui suit on considère généralement la fonction de support comme une fonction définie sur la boule unité B_1 ou la sphère unité \mathbb{S}^{d-1} . La fonction de support est lipchitzienne sur \mathbb{R}^d les propriétés

$$h(K_1 + K_2, u) = h(K_1, u) + h(K_2, u)$$

et

$$h(cK, u) = ch(K, u)$$

permettent de convertir les sommes de Minkowski d'ensembles convexes dans les sommes arithmétiques des fonctions de support correspondant. En outre,

$$\begin{aligned} \rho_H(K, K_2) &= \sup_{\|u\|=1} |h(K_1, u) - h(K_2, u)| \\ &= \sup_{\|u\|\leq 1} |h(K_1, u) - h(K_2, u)|. \end{aligned} \tag{1.28}$$

et, en particulier,

$$\|K\| = \|co(K)\| = \rho_H(K, \{0\}) = \sup_{\|u\|=1} |h(K, u)|.$$

Ainsi, la fonction de support fournit une isométrie de la famille $co\mathcal{K}$ de sous-ensembles compacts convexes de E dans l'espace de Banach $C(B_1)$ (ou $C(\mathbb{S}^{d-1})$) des fonctions continues sur B_1 (ou \mathbb{S}^{d-1}) avec la norme uniforme.

L'approche générale consiste en deux étapes :

Étape 1 : Réduction au cas des ensembles compacts convexes aléatoires.

Étape 2 : obtenir des résultats pour les ensembles convexes aléatoires en utilisant les résultats correspondants des probabilités dans les espaces de Banach et de les appliquer à la suite $h(X_n, \cdot)$ des fonctions de support de X_n , $n \geq 1$.

Rappelons que la représentation des ensembles aléatoires par leurs fonctions de support peut être utilisée pour définir la sélection. Par conséquent, il est naturel que l'espérance de sélection apparaît dans la loi forte des grands nombres pour les ensembles aléatoires en ce qui concerne l'addition de Minkowski . Dans sa forme la plus simple, cette loi des grands nombres établit la convergence presque sûre par rapport à

la métrique de Hausdorff des sommes de Minkowski normalisées d'ensembles aléatoire fermés i.i.d.. L'existence d'une suite d'éléments aléatoires indépendants implique que l'espace de probabilité sous-jacente est non atomique, de sorte que l'espérance de sélection est convexe. EX signifie toujours l'espérance de sélection. Rappelons qu'un ensemble compact aléatoire X est intégrable bornée si $\|X\|$ est intégrable.

Théorème 38 (*LFGN pour ensembles aléatoires dans \mathbb{R}^d*). Soient X, X_1, X_2, \dots une suite i.i.d. d'ensembles aléatoires compacts bornée intégrable dans \mathbb{R}^d et soit $S_n = X_1 + \dots + X_n, n \geq 1$. Alors

$$\rho_H(n^{-1}S_n, EX) \rightarrow 0 \text{ p.s. quand } n \rightarrow \infty. \quad (1.29)$$

Preuve. Voir [71]. ■

Chapter 2

Quelques constructions du temps local

2.1 Introduction

Nous avons déjà défini la notion de temps local d'un processus de Markov, voir la section (1.2.6). Cette notion est aujourd'hui un outil essentiel non seulement en théorie des processus stochastiques mais aussi en physique. Elle fut introduite par P. Lévy [65], pages 210-212, dans le cas particulier du mouvement brownien sous le nom de mesure du voisinage.

Comme nous allons le voir ci-dessous, dans la plupart des cas qu'on rencontre dans la pratique, le temps local est en fait une densité d'occupation. Nous allons rapidement illustrer l'importance de cette notion. Nous commençons par la considération d'un système dynamique conservatif déterministe à n degrés de libertés (q_1, \dots, q_n) régi par les $2n$ équations différentielles

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

où les p_i sont les moments généralisés, L le lagrangien et $H = \sum_{i=1}^n p_i q_i' - L$ est l'hamiltonien du système, indépendant du temps. Au mouvement réel du système dynamique correspond un mouvement dans l'espace des phases. Sous certaines conditions ([58] page 33), l'énergie totale du système, soit E , coïncide avec l'hamiltonien. Soit $V(x)$ le volume de la partie de l'espace des phases dans laquelle $E \leq x$, c'est-à-dire le domaine compris dans la surface d'énergie constante x , notée $Z(x)$. Alors la fonction $V'(x)$ fournit les caractéristiques les plus importantes du système dynamique et elle est appelée la fonction de structure. On peut la considérer comme une densité d'occupation. En fait on a

$$V'(x) = \int_{Z(x)} d\mu,$$

où μ est une mesure portée par $Z(x)$ et $d\mu = d\Sigma / \|\text{grad } E\|$, $d\Sigma$ étant l'élément de surface et le gradient pris en un point de l'élément. Le fait important est que le mouvement du système conserve μ comme il conserve la mesure de Lebesgue (théorème de Liouville). D'autre part, soit $X(t)$ un mouvement brownien linéaire et soit $\mu(A, t)$ le temps passé par $X(t)$ dans A avant t , c'est-à-dire temps de séjour voir la relation (1). Plus bas on montre qu'il existe un processus de deux variables $L(x, t)$ tel que p.s.

$$\mu(A, t) = \int_A L(x, t) dx. \quad (2.1)$$

Dans l'article remarquable [88] on montre qu'on peut choisir $L(x, t)$ p.s. continu par rapport à $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. En suivant [10] nous allons montrer que non seulement

$X(t)$ est partout non différentiable p.s. mais qu'en fait, pour tout $t \geq 0$ et pour tout cône plan de sommet $(t, X(t))$, représenté par une paire de droites de pentes $-M$ et M passant par $(t, X(t))$, l'instant t est un point de densité zéro de l'ensemble des instants s en lesquels $(s, X(s))$ se trouve dans le cône. On a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\delta}\right)m\{s \in]t - \delta, t + \delta[\mid |X(s) - X(t)| < M|s - t|\} \\ & \leq \left(\frac{1}{2\delta}\right)m\{s \in]t - \delta, t + \delta[\mid |X(s) - X(t)| < M\delta\} \\ & = \left(\frac{1}{2\delta}\right) \int_{X(t)-M\delta}^{X(t)+M\delta} (L(t + \delta, x) - L(t - \delta, x))dx, \end{aligned}$$

cette expression tend vers 0 quand δ tend vers 0. [91] page 12 donne d'autres conséquences importantes du théorème de [88].

Il n'est pas question pour nous d'énumérer toutes les applications du temps local ne serait-ce qu'en mathématiques. Nous nous contenterons d'ajouter aux illustrations de l'excellent article de [42] l'utilisation du temps local par [89] pour résoudre le problème de Skorokhod sur \mathbb{R} et par [72] et [36] pour étudier les équations différentielles stochastiques uni-dimensionnelles. Toutefois ces derniers considèrent les temps locaux de semi-martingales. Nous laissons de côté l'importante question du comportement du temps local comme fonction du couple spatio-temporel (t, x) . Voir [45], [73], [9] etc..

Nous laissons de côté également l'importante notion de temps local d'intersection. Nous nous bornerons seulement à la définir. Soit $\bar{X}(t)$ un mouvement brownien dans \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$. Les résultats de [24],[25],[26],[27] montrent que $\bar{X}(t)$ admet dans \mathbb{R}^2 des points de multiplicité k , pour tout $k \geq 2$, et dans \mathbb{R}^3 pour seulement $k = 2$; à partir de quatre les trajectoires sont simples. Pour $h > 0$ et $A = [0, h]^k$, on peut ainsi

formellement écrire

$$L(0, A) = \int_A \delta_0(\bar{X}_{t_1} - \bar{X}_{t_2}) \dots \delta_0(\bar{X}_{t_{k-1}} - \bar{X}_{t_k}) dt_1 \dots dt_k. \quad (2.2)$$

Cette fonctionnelle a été introduite par les manipulations du physicien [82] pour $n = 2$ et $k = 2$ dans le contexte de la théorie quantique euclidienne des champs (lagrangiens quadratiques par rapport aux vitesses). Dans l'annexe à [82], S. R. S. Varadhan renormalise (2.2), c'est-à-dire l'empêche de diverger vers l'infini, voir [77],[76]. La méthode de Varadhan est retrouvée plus tard par [37], pour ainsi dire sans calculs. L'expression $L(0, dt_1, \dots, dt_k)$ joue le rôle d'une mesure portée par l'ensemble des points de multiplicité k . Elle permet ainsi une analyse fine de ces ensembles: existence de points de multiplicité Σ_0 , Le Gall [38] ; mesure de Hausdorff exacte, [39],[40] ; étude des points multiples de processus de Lévy, [41]. Dans cette dernière on répond aux conjectures B, C et D posées par [84]. Maintenant qu'on possède un temps local, voir chapitre I, il s'agit de le construire. Nous allons décrire succinctement les différentes facettes que peut revêtir le temps local d'un processus de Markov standard. Il ne nous est pas possible de passer en revue toute la littérature existante. Nous mettrons simplement l'accent sur les faits les plus importants en vue de bien mettre en évidence la construction du chapitre III. Cependant, la contribution de Lévy concernant le mouvement brownien sera amplement traitée vu son importance historique. Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ désignera un processus de Markov standard sur un espace d'états \mathbf{E}^Δ régulier, la filtration \mathcal{F}_t satisfaisant aux conditions habituelles. On aura affaire à un état x_0 tel que x_0 soit un état régulier pour lui même, récurrent et que $m(\bar{Z}_{x_0}(\infty)) = 0$, où $\bar{Z}_{x_0}(\infty)$ désigne l'ensemble de niveau x_0 . On notera

simplement $L(t)$ au lieu de $L(x_0, t)$.

2.2 P. Lévy et les mesures de voisinage

Il importe de bien savoir que la notion de temps local à d'abord été introduite, par P. Lévy, dans le cas particulier d'un mouvement brownien $X(t)$ pour ainsi dire à la main. En effet, dès 1939 lors d'une étude approfondie d'un mouvement brownien linéaire, Lévy [66] s'intéressa, d'une manière naturelle, à divers phénomènes de compensation asymptotique de variables aléatoires browniennes de grandeurs arbitrairement grandes ou arbitrairement petites par rapport à un paramètre réel convenablement choisi. Ses découvertes serviront de modèles à toutes les recherches ultérieures sur les temps locaux de processus de Markov et aussi de semi-martingales. Soit $X(t)$ un mouvement brownien issu de zéro. Il remarqua vite que l'inverse continu à droite du processus

$$M(t) = \sup\{X(s), s \leq t\}, \quad (2.3)$$

soit $S(t)$, est un subordonnateur stable d'indice $1/2$, avec une mesure de Lévy donnée par

$$\pi(dx) = (2\pi)^{-1/2} x^{-3/2} dx.$$

Il montra aussi que le processus $Y(t) = M(t) - X(t)$ est un mouvement brownien réfléchi. Le processus $M(t)$ apparaît donc comme le temps local en zéro du processus $Y(t)$. Nous allons commencer par établir l'approximation du temps local brownien, à l'origine, en tant que mesure de voisinage. Ce fut la première en date dans la chronologie des constructions de temps locaux de processus de Markov et aussi de

semi-martingales. Comme nous le verrons plus bas, elle s'apprête à une généralisation considérable.

On considère les sauts du subordonateur $S(t)$ sur les intervalles $[0, T]$, $T > 0$. Soit A un borélien de \mathbb{R} . Si on désigne par $N_0(A, T)$ le nombre de sauts d'amplitude dans A accomplis par $S(t)$ avant T , on a (quand $A =]\epsilon, \infty[$, $\epsilon > 0$, on note simplement $N_0(\epsilon, T)$)

$$N_0\left(\frac{1}{n}, T\right) = \sum_{k=1}^n N_0\left(\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right], T\right).$$

Les variables aléatoires $N_0\left(\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right], T\right)$ sont indépendantes. Les premiers moments de ces variables aléatoires sont immédiats

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N_0\left(\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right], T\right)) &= T\pi\left(\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right]\right) \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} T(k^{1/2} - (k-1)^{1/2}). \end{aligned}$$

Posons

$$\xi_k = N_0\left(\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right], T\right) - \mathbf{E}(N_0\left(\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right], T\right)),$$

on a alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}(\xi_k^2)}{(k^{1/2})^2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} T \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^{1/2} - (k-1)^{1/2}}{k}\right) < \infty.$$

Par la loi forte des grands nombres, voir par exemple [10] page 51, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{N_0(1/n, T)}{n^{1/2}}\right) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} T.$$

Le passage de $1/n$ à ϵ est facile, d'où le

Théorème 39 *Pour $T > 0$, on a*

$$P \left\{ \lim N_0(\epsilon, T) \epsilon^{1/2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} T \right\} = 1.$$

Soit $N_0(\epsilon, t)$ le nombre d'excursion de durée $> \epsilon$ accomplis par $X(t)$ avant l'instant t . Dans sa remarque finale (6) en page 339, Lévy déduit du théorème 39 le.

Théorème 40 *Pour tout $t \geq 0$, on a*

$$P \left\{ \lim N_0(\epsilon, t) \epsilon^{1/2} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} M(t) \right\} = 1.$$

Preuve. Dans le Théorème 39 on fait entrer T à l'intérieur des accolades en tant que rationnel. Ensuite, grâce à un argument de monotonie, on s'affranchit de la rationalité de T . Maintenant on n'a qu'à prendre un $T = M(t)$. ■

Une conséquence facile de ce théorème est que la somme totale des intervalles résiduels λ_k dans $Z(t)$, c'est-à-dire

$$r(\epsilon, t) = \sum_{\lambda_k \leq \epsilon} \lambda_k,$$

décroît vers zéro. C'est Lévy qui découvrit le paramètre de compensation correct, à savoir $\epsilon^{-1/2}$. Cependant celui-ci, dans son style intuitif habituel, ne donne pas de démonstration explicite. Toutefois, grâce à un peu d'algèbre, voir [56] page 413, on a le

Théorème 41 *Pour tout $t \geq 0$, on a*

$$P \left\{ \lim \frac{r(\epsilon, t)}{\epsilon^{1/2}} = (2/\pi)^{1/2} M(t) \right\} = 1.$$

Preuve. Soient $T > 0$, $r^*(\epsilon, T)$ la longueur totale des sauts résiduels accomplis par le subordonateur $S(t)$ avant T et $\rho \in]0, 1[$. Posons $J_{\rho, k}(\epsilon) = [\epsilon \rho^{2k}, \epsilon \rho^{2(k-1}[$ et

rappelons que $N_0(A, T)$ désigne le nombre de sauts d'amplitude dans A accomplis par le subordonateur $S(t)$ avant T . On a pour tout n

$$\sum_{k=1}^n \epsilon^{1/2} \rho^{2k} N_0(J_{\rho,k}(\epsilon), T) \leq \epsilon^{-1/2} r^*(\epsilon, T) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^{1/2} \rho^{2(k-1)} N_0(J_{\rho,k}(\epsilon), T). \quad (2.4)$$

En écrivant $N_0(J_{\rho,k}(\epsilon), T) = N_0(\epsilon \rho^{2k}, T) - N_0(\rho^{2(k-1)}, T)$ et en appliquant le théorème 39, on a

$$(2/\pi)^{1/2} T(\rho - \rho^{n+1}) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1/2} r^*(\epsilon, T).$$

D'autre part, posons $\eta(\epsilon) = \sup_{\delta \leq \epsilon} \left| \delta^{1/2} N_0(\delta, T) - (2/\pi)^{1/2} T \right|$, en vertu de même théorème, le dernier terme dans (2.4) est

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} (\rho^{k-2} (\epsilon \rho^{2k})^{1/2} N_0(\epsilon \rho^{2k}, T) - (\rho^{k-1} (\epsilon \rho^{2(k-1)})^{1/2} N_0(\rho^{2(k-1)}, T)) \\ & \leq (2/\pi)^{1/2} \frac{T}{\rho} + \eta(\epsilon) \left(\frac{1}{\rho} - \frac{2}{1-\rho} \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1/2} r^*(\epsilon, T) \leq (2/\pi)^{1/2} \frac{T}{\rho}.$$

Le théorème se trouve maintenant facilement démontré. ■

Considérons à présent le temps passé par $X(t)$ dans $]0, \epsilon[$ avant l'instant t , c'est-à-dire la fonctionnelle

$$\mu_X(\epsilon, t) = \int_0^t I_{(0, \epsilon)}(X(s)) ds.$$

Par une intuition profonde, probablement déclenchée par l'observation des oscillations violentes du mouvement brownien, Lévy entreprit de prouver que le temps local est en fait une densité d'occupation. On a le

Théorème 42 *Pour tout $t \geq 0$, on a*

$$P \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_X(\epsilon, t)}{\epsilon} = M(t) \right\} = 1.$$

Preuve. Soit $e_k(\delta)$, $k \geq 1$, la suite de toutes les excursions positives de longueur $> \delta$ accomplies par $X(t)$. Ce sont donc des processus indépendants et identiquement distribués. L'idée de Lévy [66] pages 330 et 339 est d'approximer $\mu_X(\epsilon, t)$, pour δ assez petit, par

$$\sum_k \mu_{e_k(\delta)}(\infty, \epsilon). \quad (2.5)$$

Il dispose du théorème 40 qui lui donne le nombre effectif de termes $\mu_{e_k(\delta)}(\infty, \epsilon)$ entrants dans la somme (2.5). Il entama alors, suivant une tradition classique en théorie du calcul des probabilités, l'estimation des moments de $\mu_{e_k(\delta)}(\infty, \epsilon)$. Malheureusement Lévy se trompe. [52] page 43 ne remédient pas vraiment à la situation. Il a fallu attendre [17] pour mener rigoureusement à bien la démarche de Lévy, voir [17] page 106 et [8] page 9. Dans [17] on donne une foison de formules très importantes concernant la valeur absolue de l'excursion brownienne $e(t)$ en cours en t . Cette excursion est bien définie car *p.s.* le mouvement brownien ne peut s'annuler justement en t . ■

On a le

Lemme 43 *L'excursion $e_1(\delta)$ a la même distribution que $e(\delta)$ sachant que cette dernière a une durée strictement plus grande que δ .*

Preuve. Soit $(\eta_i)_{i \geq 1}$ la famille d'excursions suivantes avec intervalles d'excursions (α_i, β_i)

$$\eta_1 = e(\delta), \quad \eta_2 = e(\beta_1 + \delta), \quad \eta_3 = e(\beta_2 + \delta), \dots$$

et ainsi de suite. Par la propriété de Markov forte, les β_i étant des temps d'arrêts, ces excursions sont indépendantes et identiquement distribuées. Comme δ est strictement positif, il nous fera à chaque fois avancer à droite vers les nouvelles excursions. On voit bien que $e_1(\delta)$ sera celle des η_i dont la longueur dépasse δ . ■

Nous allons maintenant estimer les moments de $\mu_{e(\delta)}(\infty, \epsilon)$ avec [17]. Pour cela nous aurons besoin de quelques préliminaires. Posons $Y'(t) = |X(t)|$ et

$$\alpha(t) = \sup \{s | s \leq t, X(s) = 0\}$$

$$\beta(t) = \inf \{s \geq t | X(s) = 0\}$$

$$\lambda(t) = \beta(t) - \alpha(t).$$

Il est bien connu que

Lemme 44 *Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$*

$$P \{ \tau_x \in dt \} = u(t, 0, x) dt.$$

où $u(t, 0, x) = (|x|/(2\pi t^3)^{1/2}) \exp(-x^2/2t)$, et que

Lemme 45 *Pour $t > 0$, $x > 0$, $y > 0$, on a*

$$P^x \{ X(t) \in dy, \sigma_0 > t \} = q(t, x, y) dy,$$

où $q(t, x, y) = (1/(2\pi t)^{1/2}) (\exp(-(x-y)^2/2t) - \exp(-(x+y)^2/2t))$. On a alors le

Théorème 46 *Pour $0 < s < t$ et $0 < y$, on a*

$$P \left\{ \alpha(t) \in ds, Y'(t) \in dy \right\} = \left(\frac{2}{\pi s} \right)^{1/2} u(t-s, 0, y).$$

Preuve. Il suffit de calculer $P \{ \alpha(t) \leq s, Y'(t) \in dy \}$. Pour cela on crée l'état intermédiaire $Y'(s)$ afin de pouvoir supprimer la fenêtre horizontale $\alpha(t)$ au profit de la fenêtre verticale $Y'(s)$ plus maniable. Ensuite on applique la propriété de Markov en s suivie du Lemme 45, puis on somme sur tous les états $Y'(s)$. On aboutit facilement au lemme moyennant des calculs élémentaires explicites. ■

D'autre part, la propriété de Markov appliquée en t suivie de Lemme 44 nous permet de déduire le

Lemme 47 *Pour $0 < t < u$*

$$P \left\{ \beta(t) \in dv \mid Y'(t) = y \right\} = u(v - t, 0, y) dv.$$

En combinant les lemmes 46 et 47 par une application successive de la propriété de Markov en s et t , on aura la loi du triplet $(\alpha(t), Y'(t), \beta(t))$, en l'occurrence

$$(2/\pi s)^{1/2} u(t - s, 0, y) u(v - t, 0, y) ds dy dv.$$

En intégrant par rapport à y on aboutit à la loi du couple $(\alpha(t), \beta(t))$. Par suite, le théorème de Fubini nous permet facilement d'avoir le

Théorème 48 *Pour $t - l < s < t$, on a*

$$P \{ \alpha(t) \in ds, \lambda(t) \in dl \} = \frac{ds dl}{(2\pi (sl^3)^{1/2})}.$$

Afin de pouvoir estimer le second moment de $\mu_{e(\delta)}(\infty, \epsilon)$, nous aurons besoin de la loi de l'excursion $e(\delta)$, au moins pour un cylindre dont la base est de dimension deux. Les manipulations de [17] en bas de la page 166 sont un peu ambiguës. Nous allons facilement y remédier.

Théorème 49 Pour $0 < z_1 < z_2 < l$, $y_1 > 0$ et $y_2 > 0$, on a pour $s + l > t$

$$\begin{aligned} & P \{ \alpha(t) \in ds, u(t, z_1) \in dy_1, u(t, z_2) \in dy_2, \lambda(t) \in dl \} \\ &= (2/\pi s)^{1/2} ds u(z_1; 0, y_1) dy_1 q(z_2 - z_1; y_1, y_2) dy_2 u(l - z_2; 0, y_2) dl. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Preuve. Nous allons produire des fenêtres horizontales arbitrairement petites pour pouvoir passer du processus $e(t)$ au processus $Y'(t)$. Le travail direct sur $\lambda(t)$ n'est pas commode, c'est pourquoi nous introduisons $\beta(t)$. Rappelons que $\alpha_{n,k} = k2^{-n}$ et posons

$$I_{n,k}(s) = [\alpha_{n,k-1}s, \alpha_{n,k}s], \text{ et } z'_i = \alpha_{n,k}s + z_i, \quad i = 1, 2,$$

et

$$\Omega_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} \left\{ \alpha(t) \in I_{n,k}(s), z'_2 < \beta(t) \right\},$$

les Ω_n sont croissants et on a à la limite

$$\bigcup \Omega_n = \{ \alpha(t) < s, \alpha(t) + z_2 < \beta(t) \}.$$

Soient φ_1, φ_2 et φ_3 trois fonctions continues bornées sur \mathbb{R}_+^* . Maintenant, on voit bien que

$$\begin{aligned} & E(\alpha(t) < s, \alpha(t) + z_2 < \beta(t), \varphi_1(v(t, z_1))\varphi_2(v(t, z_2))\varphi_3(\beta(t))) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} E\left(\alpha(t) \in I_{n,k}(s), z'_2 < \beta(t), \varphi_1(Y'(z'_1))\varphi_2(Y'(z'_2))\varphi_3(\beta(t))\right). \end{aligned}$$

Par exactement la même méthode que dans la démonstration du Théorème 46, on utilise successivement la propriété de Markov en z'_1 et z'_2 . Le k^e élément de la somme plus haut se réduit alors à

$$\begin{aligned} & \int_{I_{n,k}} \left(\frac{2}{\pi r} \right)^{\frac{1}{2}} dr \int_0^\infty u(z'_1 - r; 0, y_1) \varphi_1(y_1) dy_1 \int_0^\infty q(z'_2 - z'_1; y_1, y_2) \varphi_2(y_2) \\ & \times E^{y_2}(z'_2 + \sigma_0 > t, \varphi_3(z'_2 + \sigma_0)) dy_2. \end{aligned}$$

Grâce au Lemme 44, l'espérance à la fin de ce groupement se calcule aisément, en sommant sur k et en faisant tendre n vers l'infini, on voit sans peine que

$$\begin{aligned} & P \{ \alpha(t) \in ds, v(t, z_1) \in dy_1, v(t, z_2) \in dy_2, \lambda(t) \in dl \} \\ &= \left(\frac{2}{\pi s} \right)^{\frac{1}{2}} ds u(z_1; 0, y_1) dy_1 q(z_2 - z_1; y_1, y_2) dy_2 u(l - z_2; 0, y_2) dl. \end{aligned}$$

■

Corollaire 50 *Pour $0 < s < t$, $0 < z_1 < z_2 < l$, $y_1 > 0$ et $y_2 > 0$, on a*

$$\begin{aligned} & P \{ e(t, z_1) \in dy_1, e(t, z_2) \in dy_2 \mid \alpha(t) = s, \lambda(t) = l \} \\ &= (8\pi l^3)^{1/2} u(z_1; 0, y_1) dy_1 q(z_2 - z_1; y_1, y_2) dy_2 u(l - z_2; 0, y_2) dy_2. \end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de diviser l'expression (2.6) par la loi du couple $(\alpha(t), \lambda(t))$ donnée par le Théorème 48. ■

Passons maintenant au calcul du premier moment de $\mu_{e(\delta)}(\infty, \epsilon)$. Les manipulations suivantes sont facilement justifiées en vertu des définitions des espérances conditionnelles (résolution arbitrairement précise par rapport à $\alpha(t)$ et $\lambda(t)$, théorèmes de Radon-Nikodym et Fubini). On a par le corollaire 50.

$$\begin{aligned} E(\mu_{e(t)}(\infty, dx) \mid \alpha(t) = s, \lambda(t) = l) &= \int_0^l \mathbf{P} \{ e(t, z) \in dx \mid \alpha(t) = s, \lambda(t) = l \} dz \\ &= \int_0^l (8\pi l^3)^{1/2} u(z; 0, x) u(l - z; 0, x) dx dz \\ &= (8\pi l^3)^{1/2} u(l; 0, 2x) dx \\ &= 4x \exp\left(\frac{-2x^2}{l}\right) dx \end{aligned}$$

d'où

$$= E(\mu_{v(t)}(\infty, \epsilon) \mid \alpha(t) = s, \lambda(t) = l) = l(1 - \exp(\frac{-2\epsilon^2}{l})).$$

Remarquons en passant que dans cette formule ne figure ni t ni s . Comme on possède déjà la loi de $\lambda(t)$, donnée par le Théorème 48 en intégrant par rapport à s de 0 à t , on peut alors en déduire le

Théorème 51 *Pour $\epsilon > 0$, on a*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{E(\mu_{\epsilon(\delta)}(\infty, \epsilon) | \lambda(\delta) > \delta)}{\delta^{1/2}} = \epsilon(2\pi)^{1/2}.$$

Le calcul du second moment se fait absolument de la même manière que dans le Théorème 51. La présence du carré induit une triangularisation par rapport à la variable z , d'où

$$\begin{aligned} & E(\mu_{v(t)}^2(\infty, \epsilon) | \alpha(t) = s, \lambda(t) = l) \\ &= 2 \int_0^l dz_1 \int_0^{l-z_1} dz_2 \int_0^\epsilon dx_1 \int_0^\epsilon dx_2 \mathbf{P}\{e(t, z_1) \in dx_1, e(t, z_1 + z_2) \in dx_2 | \alpha(t) = s, \lambda(t) = l\} \\ &= 4 \int_0^\epsilon dx_1 \int_0^\epsilon dx_2 \int_{|x_1-x_2|}^{x_1+x_2} (x_1 + x_2 + z) \exp\left(\frac{-(x_1 + x_2 + z)^2}{2l}\right) dz. \end{aligned}$$

Maintenant on remarque que

$$\int_{|x_1-x_2|}^{x_1+x_2} (x_1 + x_2 + z) dz \leq 6x_1x_2,$$

donc on a le

Lemme 52 *Pour $s > 0$ et $l > 0$*

$$E(\mu_{v(t)}^2(\infty, \epsilon) | \alpha(t) = s, \lambda(t) = l) \leq 6\epsilon^4.$$

On peut facilement en déduire le théorème suivant, voir [8] page 14.

Théorème 53 *On a*

$$E \left(\mu_{v(\delta)}^2(\infty, \epsilon) \mid \lambda(\delta) > l \right) \leq 6\epsilon^3 \delta^{1/2}.$$

On possède maintenant assez d'ingrédients pour entraîner le Théorème 42.

Pour finir, [64] conjectura un autre phénomène de compensation asymptotique concernant le nombre de descentes $d(t, \epsilon)$ du niveau ϵ au niveau zéro accomplies par le processus $Y(t)$ avant t . Dans ce qui suit, σ_a^X désignera le temps d'entrée dans a par le processus X . On a le

Théorème 54

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon d(t, \epsilon) = M(t), \forall t \geq 0 \right\} = 1.$$

Preuve. [52] page 48 donnent une démonstration obscure ; d'ailleurs [43] affirme qu'il n'y comprend rien et que Chung lui aurait fait savoir que la preuve dans [52] contenait plusieurs erreurs sérieuses. La première preuve classique correcte est ainsi due à [19] ; elle utilise les excursions browniennes. [43] de son côté, et indépendamment de [19], fournit une preuve en utilisant les méthodes générales de la théorie probabiliste du potentiel, développée principalement par Doob, Hunt, Meyer et Gettoor lui même. Il est clair que le théorème est une conséquence facile de

$$P \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon d(\tau_a^X, \epsilon) = a, \forall a \in \mathbb{Q}_+^* \right\} = 1. \quad (2.7)$$

Pour cela, voir par exemple [91] en bas de la page 91. Pour tout a de \mathbb{R}_+^* , la propriété de changement d'échelle montre que $d(\tau_a^X, \frac{\epsilon}{m})$ et $d(\tau_{am}^X, \epsilon)$ ont la même distribution. Par la propriété de Markov forte, $d(\tau_{am}^X, \epsilon)$ est la somme de m variables aléatoires indépendantes dont la distribution commune est celle de $d(\tau_a^X, \epsilon)$. Par conséquent, la

loi faible des grandes nombres implique que $\frac{\epsilon}{m}d(\tau_a^X, \frac{\epsilon}{m})$ converge en probabilité vers $E(\epsilon d(\tau_a^X, \epsilon))$, quand m tend vers l'infini. Cela suffit pour entraîner le théorème. On doit donc montrer le fait remarquable suivant

$$E(\epsilon d(\tau_a, \epsilon)) = a. \quad (2.8)$$

L'idée est de compter le nombre d'excursion, dont le maximum dépasse ϵ , accomplies par le processus $Y(t)$ avant l'instant aléatoire τ_a^X . Afin de pouvoir traiter directement les excursions du processus $Y(t)$, [52] proposent un moyen d'installer un bon ordre sur l'ensemble dénombrable de ces excursions. En effet, considérons la suite

$$1, 1/2^1 3/2^1 2, 1/2^2 \dots 11/2^2 3, 1/2^3 \dots,$$

qui est un remplissage dyadique progressif de \mathbb{R}_+^* . Comme première excursion on prend celle qui est en cours en 1, ensuite celle qui est en cours sur le premier élément de la suite non déjà enjambé par les excursions précédentes et ainsi de suite. Le fait remarquable, découvert par Lévy, est que la suite de processus sur $[0, 1]$

$$e_k(t) = \frac{Y(\alpha_k + t\lambda_k)}{\lambda_k^{1/2}},$$

où α_k est le début de l'excursion et λ_k sa longueur, est constituée de processus mutuellement indépendants et identiquement distribués et qu'elle est indépendante de la suite des longueurs d'excursions λ_k . Désignons par $(e'_k)_{k \geq 1}$ la sous suite, normalisée, des excursions, ordonnées, accomplies par $Y(t)$ avant τ_a^X . On a donc

$$E(\epsilon d(\tau_a^X, \epsilon)) = \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} P(\sup_{t \in [0,1]} e'_1 > \epsilon z^{-1/2}) \mathbf{P}(\lambda'_k \in dz).$$

On est ainsi amené à trouver la loi du maximum de l'excursion de $Y(t)$ à cheval sur 1, voir [17] page 167. On se heurte à des calculs non triviaux sur une fonction θ

de Jacobi

$$\theta(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi n^2 x).$$

Il est agréable de savoir que [6] page 113 donne une preuve simple des résultats de Lévy-(Ito et McKean) plus haut. Ainsi, la démarche de Chung et Durrett est plutôt sophistiquée. On doit peut être à [90] la plus courte et la plus élémentaire des preuves du théorème 16, voir aussi [69]. Williams ne s'attaque pas d'une façon directe aux excursions à la manière de [19], mais utilise les idées d'Ito [51] ainsi que les inégalités de Doob en théorie des martingales. Cela lui permet notamment d'identifier le paramètre de compensation et d'améliorer [19] en introduisant une convergence uniforme par rapport aux compacts de \mathbb{R}_+ et de montrer facilement (2.8). Comme ses prédécesseurs, il doit d'abord montrer (2.7). L'idée fondamentale est d'écrire

$$U_{\epsilon,a} = \epsilon(d(\tau_a^X, \epsilon) - a/\epsilon),$$

et de suivre l'impulsion naturelle de voir en $(d(\tau_a^X, \epsilon))_{a \geq 0}$ un processus de poisson de paramètre $\frac{1}{\epsilon}$ et en $d(\sigma_a^X, \epsilon) - a/\epsilon$ la martingale poissonnienne bien connue. Soit

$$M^Y(t) = \sup_{s \leq t} Y(s).$$

On a

$$P \{d(\tau_a^X, \epsilon) = 0\} = \mathbf{P} \{M^Y(\tau_a^X) < \epsilon\}.$$

Posons

$$f_\epsilon(a) = P \{M^Y(\tau_a^X) < \epsilon\}.$$

Il est clair que $f_\epsilon(a) > 0$ pour tout a et tout ϵ . Comme $Y(\tau_a^X) = 0$, la propriété de

Markov forte appliquée au temps d'arrêt τ_a^X donne

$$f_\epsilon(a+b) = f_\epsilon(a)f_\epsilon(b).$$

En prenant les logarithmes, on aboutit à l'équation fonctionnelle classique de Cauchy.

Comme les $f_\epsilon(a)$ sont majorées par 1, alors il existe un $\beta(\epsilon)$ de \mathbb{R}_+^* tel que

$$P \{M^Y(\tau_a^X) < \epsilon\} = \exp(-a\beta(\epsilon)),$$

le signe moins met en évidence la décroissance (stricte) de $f_\epsilon(a)$ par rapport à a , voir [53] pages 63 et 64. Maintenant, il est facile de voir que le processus $(d(\tau_a^X, \epsilon))_{a \geq 0}$ commence d'abord par passer un laps de temps positif en zéro p.s.. Il croit ainsi par sauts unités discrets. Comme $Y(\tau_a^X) = 0$ pour tout a , la propriété de Markov forte implique qu'en fait c'est un processus de poisson de paramètre $\beta(\epsilon)$ (continu à gauche), voir [11] page 308. Il reste donc à identifier ce paramètre. Comme $\{d(\tau_a^X, \epsilon) = 0\} = \{M^X(\tau_\epsilon^Y) > a\}$, on en déduit que $M^X(\tau_\epsilon^Y)$ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\beta(\epsilon)$. Maintenant, $X = M^X - Y$ est une martingale, par rapport aux filtrations de départ. Il s'en suit, grâce à un théorème bien connu de la théorie des martingales, que

$$E(M^X(t \wedge \tau_\epsilon^Y)) = \mathbf{E}(Y(t \wedge \tau_\epsilon^Y)),$$

pour tout $t \geq 0$. Il en résulte, en faisant tendre t vers l'infini, que $\beta(\epsilon) = \epsilon^{-1}$. D'autre part, on voit facilement que $U_{\epsilon,a}$ est une L^2 -martingale avec $E(U_{\epsilon,a}^2) = a\epsilon$. L'inégalité maximale de Doob donne alors

$$P \left\{ \sup_{x \leq a} |U_{\epsilon,x}| > \delta \right\} \leq \delta^{-2} a\epsilon.$$

Maintenant, le lemme de Borel-Cantelli implique que

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} U_{\theta^n, x} = 0, \forall \theta \in]0, 1[\cap \mathbb{Q} \right\} = 1, \quad (2.9)$$

la convergence à l'intérieur des accolades a lieu sur tous les compacts de \mathbb{R}_+ . Comme la fonction $d(\tau_a^X, \cdot)$ est monotone en ϵ , le théorème est une conséquence facile de (2.9).

■

2.3 R.J. Griego et les densités d'occupation

Ici on suppose que le λ -potentiel $U_\lambda(x, dy)$ du processus $X(t)$ est absolument continu par rapport à une mesure de Radon $\xi(dy)$, appelée mesure de référence. Pour tout $\lambda \geq 0$, il existe un noyau potentiel $U_\lambda(x, y)$ tel que

$$U_\lambda(x, dy) = U_\lambda(x, y)\xi(dy).$$

G.A. Hunt désigne cette condition par F. Le temps local au sens de Blumenthal et Gettoor au point x_0 est alors l'unique fonctionnelle additive continue dont le λ -potentiel soit $U_\lambda(x, x_0)$, on a pour tout x de E

$$\mathbf{E}^x \int_0^\infty \exp(-\lambda t) dL(x_0, t) = U_\lambda(x, x_0).$$

Si on suppose que tous les points de E sont réguliers, [13] page 63 montrent alors que le temps local $L(x, t)$ est en fait une densité d'occupation. On a $\mathbf{P}^x.p.s.$ pour tout x et tout borélien B

$$\int_B L(x, t) dx = \int_0^t I_B(X(s)) ds.$$

L'idée naturelle de [47] est de fournir une construction directe et intuitive de $L(x, t)$ inspirée du Théorème 42 de Lévy. On doit cependant imposer une condition technique de régularité, à savoir, pour tout $\lambda > 0$, tout x, y et x_0 on a

$$\lim_{y \rightarrow x_0} U_\lambda(x, y) = U_\lambda(x, x_0),$$

uniformément en x . Cette condition est satisfaite pour tous les processus de Lévy réels tels que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + \operatorname{Re} \psi(x))^{-1} dx < \infty, \lambda > 0,$$

où $\psi(x)$ est l'exposant du processus. Soit x_0 fixé et soit A_n une suite d'ouverts à fermétures compactes tendant vers x_0 . On désire avoir

$$L(x_0, t) = \lim \frac{1}{\mu(A_n)} \int_0^t I_{A_n}(X(s)) ds.$$

La situation ici n'est pas aussi simple que dans le Théorème 42. Les outils essentiels sont le théorème d'unicité de Meyer et l'inégalité maximale de Doob. On va d'abord, selon la méthode habituelle, faire la construction pour le processus $X^\lambda(t)$ obtenu en tuant $X(t)$ à l'aide d'une variable aléatoire exponentielle $\zeta(\lambda)$ de paramètre λ : $X^\lambda(t) = X(t)$ si $t < \zeta(\lambda)$ et $X^\lambda(t) = \Delta$ sinon. Posons pour $\lambda > 0$

$$L_n^\lambda(t) = \frac{1}{\mu(A_n)} \int_0^{t \wedge \zeta(\lambda)} I_{A_n}(X(s)) ds.$$

Il est évident que le potentiel de $L_n^\lambda(t)$ doit converger vers $U_\lambda(x, x_0)$, quand n tend vers l'infini. Si on désigne par $f_n^\lambda(x)$ le potentiel de $L_n^\lambda(t)$, un calcul simple montre en effet que

$$f_n^\lambda(x) = \mathbf{E}^x L_n^\lambda(\infty) = \frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} U_\lambda(x, y) d\mu(y),$$

on obtient ainsi une convergence uniforme de $f_n^\lambda(x)$ vers $U_\lambda(x, x_0)$, grâce à la condition de régularité indiquée plus haut, en utilisant la continuité des trajectoires de $L_n^\lambda(t)$ d'emblée par une convergence uniforme de fonctions continues. Il est naturel de penser à introduire une martingale. Elle est fournie par le procédé classique: une projection optionnelle de $L_n^\lambda(\infty)$, soit $M_n^\lambda(t)$. On a grâce à la propriété de Markov forte

$$M_n^\lambda(t) = \mathbf{E}^x(L_n^\lambda(\infty) / \mathcal{F}_{t \wedge \zeta(\lambda)}) = L_n^\lambda(t) + f_n^\lambda(X_t^\lambda).$$

Maintenant, pour $\delta > 0$, on a

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}^x \left(\sup_t |L_n^\lambda(t) - L_m^\lambda(t)| > \delta \right) \\ & \leq \mathbf{P}^x \left(\sup_t |M_n^\lambda(t) - M_m^\lambda(t)| \geq \frac{\delta}{2} \right) + \mathbf{P}^x \left(\sup_t |f_n^\lambda(X_t^\lambda) - f_m^\lambda(X_t^\lambda)| \geq \frac{\delta}{2} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, le second terme du second membre de l'inégalité tend vers zéro quand n et m tendent vers l'infini. On montre facilement, à l'aide de l'inégalité maximale de Doob, que le premier terme tend aussi vers zéro quand n et m tendent vers l'infini.

On a en effet

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^x \left(\sup_t |M_n^\lambda(t) - M_m^\lambda(t)| > \delta \right) & \leq \delta^{-2} \mathbf{E}^x \left((M_n^\lambda(\infty) - M_m^\lambda(\infty))^2 \right) \\ & = \delta^{-2} \mathbf{E}^x \left((L_n^\lambda(\zeta(\lambda)) - L_m^\lambda(\zeta(\lambda)))^2 \right) \\ & \leq \delta^{-2} U_\lambda(x, x) \|f_n^\lambda - f_m^\lambda\|. \end{aligned}$$

Par suite, on peut trouver une sous suite n_k telle que $L_{n_k}^\lambda(\cdot)$ converge uniformément $\mathbf{P}^x - p.s.$ pour tout x . Comme les trajectoires de $L_n^\lambda(t)$ sont continues, on obtient une fonctionnelle additive continue $L^\lambda(t)$. Bien entendu, on s'assure facilement du fait que

$$\mathbf{E}^x(L^\lambda(\infty)) = U_\lambda(x, x_0).$$

Ensuite, on procède au recollement de tous ces $L^\lambda(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, en une seule fonctionnelle additive continue $L^\lambda(t)$, voir [20] page 224. Pour finir, on s'affranchit des variables $\zeta(\lambda)$, $\lambda > 0$, à l'aide du procédé habituel, voir par exemple [14] page 53. On trouve, pour tout x_0 , une fonctionnelle additive continue $L(x_0, t)$ dont le potentiel est $U(x, x_0)$. En vertu du théorème d'unicité de Meyer, c'est donc bien le temps local de Blumenthal et Gettoor.

2.4 S. J. Taylor et les h -mesures de Hausdorff

Soit $X(t)$ un processus semi-stable de Stone et $t > 0$. Comme $m(Z(\infty)) = 0$, l'idée de prendre une mesure plus fine que celle de Lebesgue pour évaluer les dimensions de $Z(t)$ est intuitivement attractive. Ce fut Lévy (inévitablement) qui le premier prit conscience de cette idée en 1957 et suggéra l'utilisation d'une h -mesure de Hausdorff, voir aussi l'introduction de l'article de [84] page 383. Ce programme fut réalisé par [87]. Le fait remarquable (prévisible) est que le regard à travers cette loupe hausdorffienne, pour ainsi dire, donne justement le temps local $L(t, 0)$. Le moyen traditionnel pour trouver la dimension de $Z(t)$ consiste à utiliser les méthodes de la théorie probabiliste du potentiel. En effet, un théorème bien connu de Frostman [35] égalise la dimension de Hausdorff et la dimension capacitaire de $Z(t)$. C'est ainsi que [12] trouvent $\dim_H(Z(t)) = \beta$ *p.s.* dans le cas où $X(t)$ est un stable symétrique. Taylor auparavant, a montré que de plus $t^{\frac{1}{2}} - m(Z(t)) = 0$ *p.s.* pour un mouvement Brownien. Par conséquent, le terme dominant dans $h(t)$ est t^β , altéré par un logarithme itéré, vu les résultats de [33] et [57]. On a le résultat suivant qui donne la vitesse fractionnaire de

croissance de $L(t)$ à l'origine

$$\mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{L(t)}{t^\beta (\log \log \frac{1}{t})^{1-\beta}} = c_1 \right\} = 1. \quad (2.10)$$

La fonction $h(t) = t^\beta (\log \log \frac{1}{t})^{1-\beta}$ est ainsi le candidat. La loi (2.10) est d'abord établie pour le subordonateur $S(t)$, inverse continu à droite de $L(t)$, sous forme de limite inférieure bien entendu. On possède des estimations précises concernant la distribution de $S(1)$ et sa queue, depuis les années cinquantes. La propriété de changement d'échelle transmet ces estimations à toutes les variables aléatoires $S(r)$, $r > 0$. On va commencer par analyser l'image du subordonateur stable $S(t)$, sur des intervalles temporels quelconques $[0, T]$, $T > 0$. On a alors besoin de deux arguments séparés de nature probabiliste, l'un étant de montrer que *p.s.* la h -mesure de $S([0, T])$, $T > 0$, est positive et l'autre qu'elle est finie. Il en découlera que le processus $h - m(S([0, T]))$ est un processus de Lévy à trajectoires continues. Comme il est monotone, il se réduit à une dérive pure sans composante brownienne. Ensuite on prend comme d'habitude $T = L(t)$. Maintenant, [85] a montré que les h -mesures de Hausdorff et les h -capacités sont fondamentalement deux moyens différents pour mesurer les ensembles. Il montre en effet qu'il existe un intervalle d'incertitude essentiellement de l'ordre d'un logarithme itéré. Cet intervalle est sans effet dans les considérations de dimension. La technique concernant la première étape consiste alors à utiliser un théorème de densité établi par [75], allégé dans [87] page 176. Ce théorème de densité fut utilisé pour la première fois dans un article très populaire de Z. Ciesielski et S. J. Taylor. On a

Lemme 55 *Soit μ une mesure de Borel sur \mathbb{R} et soit E un borélien tel que pour tout*

x de E on a

$$\overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \mu([x, x + \epsilon]) / h(\epsilon) \leq c_2 < \infty,$$

alors $h - m(E) \geq c_2^{-1} \mu(E)$.

Ici on prend simplement $\mu = dL$. Grâce à la propriété de régénération de l'image de notre subordonateur, μ est "uniformément" répartie sur $S([0, \infty[)$. On peut donc utiliser le lemme, qui combiné à (2.10) et à un argument facile de Fubini, permet d'avoir la borne inférieure cherchée.

Considérons à présent la borne supérieure. A première vue, on est tenté de penser que la méthode plus haut est adaptable pour donner une borne supérieure, en utilisant le lemme 2 au lieu du lemme 3 de [75]. Cependant, cette idée n'est pas exécutable car on obtient un ensemble temporel exceptionnel de mesure Lebesgue nulle et il n'est pas évident de manier un recouvrement de son image par $S(r)$.

D'autre part, un recouvrement par des intervalles tous de la même longueur donnerait un résultat fini seulement pour $h(t) = t^\beta$. Cette remarque, initialement due à [52] pour le mouvement brownien, découle facilement de notre construction du chapitre III. La seule issue est d'utiliser un recouvrement par des intervalles de longueurs très différentes afin de bien mettre en évidence la structure fine de notre image.

Soit $\delta > 0$ et n suffisamment grand. On commence d'abord par contrôler la limite supérieure dans (2.10) par le choix judicieux d'une suite temporelle u_k qui tend suffisamment rapidement vers zéro. Ensuite, si $I_{n,k}$ est entré par $Z(1)$, on attend suffisamment longtemps pour que, à partir d'un bref moment l_k après le premier zéro

dans $I_{n,k}$, soit $z_{n,k}$, on trouve un u_k sur lequel le temps local accélère

$$L(z_{n,k} + u_k) - L(z_{n,k}) \geq c_3 h(u_k).$$

Cependant, il est possible que le temps local ralentisse sur toute une série de temps u_k . C'est la difficulté majeure dans ces problèmes de majorations, voir par exemple [29] et [83]. Le fait remarquable est qu'il est possible de choisir deux entiers n_1 et n_2 , suffisamment grands, tels qu'il soit, afin d'appliquer Borel-Cantelli, suffisamment improbable d'avoir

$$L(z_{n,k} + u_k) - L(z_{n,k}) \leq c_4 h(u_k),$$

sur toute la série des u_k pour k compris entre n_1 et n_2 .

La manipulation des intervalles bruts $[z_{n,k}, z_{n,k} + u_k[$ n'est visiblement pas commode. Il est naturel de penser à introduire des réseaux dyadiques emboîtés, qui prolongent les $I_{n,k}$, afin de pouvoir approximer les u_k . Toutefois, il faudrait qu'il y ait des raccords pour absorber les intervalles bruts et aussi éviter les recouvrements abusifs, une fois les intervalles bruts absorbés. Soient alors les familles

$$\ell_{n,k} = \{[(k-1)2^{-n}, (k+1)2^{-n}[, k \geq 1\}, n \geq 0.$$

On a ainsi le

Lemme 56 *Soit $E \subset \mathbb{R}_+$, si $E = \bigcup_{j=1}^m I_j$, où $I_j \in \bigcup_{n=n_1}^{n_2} \ell_{n,k}$, alors il existe un sous recouvrement de E par des intervalles I_{j_r} tels que chaque point de E soit contenu dans au plus deux intervalles I_{j_r} .*

Pour reprendre la terminologie habituelle, on dit que $I_{n,k}$ est mauvais, pour la réalisation ω , s'il est impossible de le plonger dans un intervalle $[a, b[$ de $\bigcup_{n=n_1}^{n_2} \ell_{n,k}$ avec

$$L(b) - L(a) \geq c_3 h(b - a),$$

et bon dans le cas contraire. Ce dernier correspond alors à une forte densité de $Z(1)$ dans $I_{n,k}$. Ainsi, pour recouvrir $Z(1)$, on prend pour un $I_{n,k}$ bon, un étirement $[a, b[$ de celui-ci sur lequel le temps local accélère et simplement $I_{n,k}$ si celui-ci est mauvais. On grâce à la propriété de Markov forte

$$\begin{aligned} & P(I_{n,k} \text{ mauvais}) \\ &= P(Z(1) \cap I_{n,k} \neq \emptyset). P(L(t) \text{ ralentit sur la série } u_k, n_1 \leq k \leq n_2). \end{aligned} \tag{2.11}$$

La contribution des mauvais intervalles $I_{n,k}$ est

$$\Sigma'_n = T_n 2^{-n\beta} (\log(n \log 2))^{1-\beta},$$

où T_n désigne le nombre total de ces mauvais intervalles. Par conséquent, grâce à la relation (2.11) et au lemme de Borel-Cantelli, on montre que p.s. à partir d'un certain rang n

$$\Sigma'_n < 1/n.$$

Quant aux bons intervalles, ils sont recouverts par une famille finie d'intervalles $[a_j, b_j[$ de $\bigcup_{n=n_1}^{n_2} \ell_{n,k}$, laquelle contient la sous famille économique $[a_{j_r}, b_{j_r}[$, donc

$$\Sigma''_n (L(b_{j_r}) - L(a_{j_r})) < 2(L(c_5) - L(0)).$$

Donc, en faisant tendre δ vers zéro, on a en tout

$$\varphi - m(Z(1)) \leq c_6 L(1).$$

2.5 J. F. C. Kingman et l' ϵ -enveloppe

Comme on vient de le voir, l'approximation de [87] est très sophistiquée. L'idée de base de [60] est de proposer une autre mesure de $Z(t)$, moins fine qu'une mesure de Hausdorff et dont la construction est aisée et intrinsèque. La mesure en question est très naturelle. Il s'agit simplement de la mesure de Lebesgue de l' ϵ -enveloppe $\Lambda(Z(t), \epsilon)$ du chapitre I.

Le lemme technique suivant est, à l'aide d'un dessin, immédiat

Lemme 57 *Soit E un sous ensemble borné de \mathbb{R} avec $m(\overline{E}) = 0$, alors on a*

$$\lambda(E, \epsilon) = \epsilon + \sum_I \min(m(I), \epsilon),$$

où la somme porte sur les composantes connexes bornées du complémentaire de \overline{E} .

L'inverse continu à droite du temps local à l'origine de notre processus de Markov est un subordonateur qui satisfait la condition 13. Soit $T > 0$, quand ϵ est assez petit, on voit bien que

$$\lambda(S([0, T]), \epsilon) = \epsilon + \epsilon N_0(\epsilon, T),$$

par conséquent, un théorème de la moyenne apparenté nous permet d'écrire

$$\lambda(S([0, T]), \epsilon) = \epsilon + \int_0^\epsilon N_0(\delta, T) d\delta, \quad (2.12)$$

qu'on vérifiera sans peine en disposant sur \mathbb{R}_+^* tous les sauts dans l'ordre naturel et en décomposant l'intégrale. Toutefois, faute de données précises, on ne peut plus utiliser la loi forte des grands nombres à la manière du Théorème 39, voir même un assouplissement de celle-ci. Cependant, cette loi fournit bien l'ordre de grandeur

exact de $N_0(\delta, T)$, soit $\bar{\pi}(\delta)$. L'astuce fondamentale de Kingman, d'ailleurs inspirée de [52] page 218 et [14] page 68, est de faire exploser, pour ainsi dire, l'amoncellement des nombres $m(I)$ à droite de zéro au profit d'une répartition uniforme sur tout \mathbb{R}_+^* grâce à $\bar{\pi}(x)$ (quoi d'autre?). Le processus ponctuel résultant a pour image l'ensemble $\Pi = \{\bar{\pi}(m(I)), I \text{ un saut}\}$. Il est poissonien homogène dans le sens où le nombre moyen de points enregistrés dans $]0, a[$ avant T est

$$T\pi(\{x/\bar{\pi}(x) < a\}) = aT.$$

La loi forte des grands nombres est maintenant facilement applicable. Soit $N_0(a, \Pi)$ le nombre de points de Π dans $]0, a[$, on a

$$P \left\{ \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{N_0(a, \Pi)}{a} = T \right\} = 1.$$

Par conséquent, grâce à un argument de monotonie, on a

$$P \left\{ \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{N_0(\delta, T)}{\bar{\pi}(\delta)} = T, \forall T > 0 \right\} = 1.$$

Sachant la relation (2.12), on en déduit le

Théorème 58 *Pour tout $t \geq 0$, on a*

$$P \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(Z(t), \epsilon)}{\int_0^\epsilon \bar{\pi}(\delta) d\delta} = L(t) \right\} = 1.$$

2.6 S.J. Taylor et B.E. Fristedt et dénombrement d'excursion

On a vu plus haut que les constructions de Lévy et celle de Kingman passaient toutes par une considération d'excursions. Il est naturel de pousser en profondeur cet

argument pour développer un contexte général donnant lieu à toute la catégorie des constructions qui sont à base de comptage de contributions d'excursions. Ce fut [68] théorème X.4 et [69] qui le premier prit conscience d'une telle possibilité. Cependant, la formulation définitive est peut être celle de [34]. Ce dernier travail est un article long et ample dans lequel on considère aussi des processus de Markov transients. Nous allons en faire ressortir les idées fondamentales.

En effet, par exemple en vue de la relation entre accolades du Théorème 40, il est naturel de poser pour $t > 0$ et $m \geq 1$

$$L_m(t) = \sum_{u^- \leq t} f_m(u)/b_m,$$

où f_m est une suite de fonctions mesurables non négatives sur l'espace mesurable des excursions u , muni de la tribu borelienne de la topologie de Skorokhod, b_m une suite de nombres finis positifs et u^- désigne l'extrémité gauche de l'intervalle de l'excursion u . Remarquons en passant que $L_m(t)$ n'est pas une fonctionnelle additive; d'ailleurs elle n'est pas adaptée. Ensuite, en un certain sens, on procède à la limite sur m .

Comme on l'a vu maintes fois, il est plus commode d'utiliser des subordonateurs. On écrit

$$S_m(r) = \sum_{u^- \leq L^-(r)} f_m(u)/b_m.$$

On montre en effet que lorsque $\int_U (f_m(u) \wedge 1) \pi(du) < \infty$, $S_m(r)$ est un subordonateur qui saute en même temps que $L^-(\tau)$. Sa mesure de Lévy $\eta_m(dx)$ est telle que

$$H_m(x) = \pi(u/f_m(u) > b_m x).$$

Pour toute la suite, notons par $\mu(dx)$ la mesure image de $\pi(du)$ par f . En chaque point $L(u^-)$ le subordonateur $S_m(\tau)$ a un saut d'amplitude $f_m(u)/b_m$. A la limite on désire,

bien entendu, que les masses $f_m(u)/b_m$ convergent vers les durées des excursions u .

Donc en tout

$$\lim_m S_m(T) = T. \quad (2.13)$$

Dans [34] on étudie la convergence de l'équation (2.13) en probabilités, dans L^2 et *p.s.*

On commence d'abord par prouver que la convergence intuitive de l'équation (2.13) est bien ce que l'on cherche. On a, en particulier, le

Théorème 59 *Pour chacun des trois modes de convergence, les assertions suivantes sont équivalentes*

$$1/ \forall t > 0, L_m(t) \rightarrow L(t),$$

$$2/ \exists r_0 > 0, S_m(r_0) \rightarrow r_0,$$

$$3/ \forall r > 0, S_m(r) \rightarrow r.$$

On donne des conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence en probabilités et dans L^2 . Le cas de la convergence *p.s.* est plus ardu.

Théorème 60

$$\forall t > 0, L_m(t) \xrightarrow{\text{Pr}} L(t) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} H_m(x) \rightarrow 0, x > 0, \\ \int_{]0, \beta]} x \eta_m(dx) \rightarrow 1, \beta \in]0, \infty[. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Preuve. La démonstration est simple. En effet, la convergence en probabilités dégénérée $S_m(1) \rightarrow 1$ implique une convergence en distribution. Une application du théorème de continuité permet facilement de prouver le théorème. ■

Comme on a $E\left(\sum_{u^- \leq L^-(1)} f(u)\right) = \int_{\mathbb{R}_+^*} x \mu(dx)$, la suite $b_m = \int_{\mathbb{R}_+^*} x \mu(dx)$ est privilégiée car elle nous permet d'ores et déjà d'avoir $E(S_m(r)) = r$, $r > 0$. Cependant, dans

[34] on montre que la relation (2.14) peut être vérifiée pour une suite b_m sans pour cela qu'elle le soit pour $\int_{\mathbb{R}_+^*} x\mu(dx)$. Mais si l'on utilise cette dernière les conditions du Théorème 60 peuvent être comprimées en une seule condition, à savoir, quand m tend vers l'infini

$$(1/b_m) = \int_{] \beta b_m, \infty[} x\mu_m(dx) \rightarrow 0, \beta > 0.$$

Considérons à présent la convergence dans L^2 . On a le

Théorème 61

$$\forall t > 0, L_m(t) \xrightarrow{L^2} L(t) \iff \begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} b_m / \int_{\mathbb{R}_+^*} x\mu_m(dx) = 1, \\ b_m^{-2} \int_{\mathbb{R}_+^*} x^2\mu_m(dx) \rightarrow 0. \end{cases}$$

Preuve. La démonstration est encore simple. La convergence $S_m(1) \xrightarrow{L^2} 1$ équivaut aux deux limites $E(S_m(1)) \rightarrow 1$ et $Var(S_m(1)) \rightarrow 0$. Une double différentiation de la transformée de Laplace de $S_m(1)$ permet d'aboutir aux conditions du théorème. ■

Contrairement au cas de la convergence en probabilités, la suite $b_m = \int_{\mathbb{R}_+^*} x\mu_m(dx)$ permet ici de remplacer toutes les suites b_m . Les conditions du théorème précédent se réduisent alors à

$$\int_{] \beta a_m, \infty[} x^2\mu_m(dx) / \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} x\mu_m(dx) \right)^2 \rightarrow 0, \beta > 0.$$

Considérons maintenant le cas de la convergence *p.s.* En général on ne peut espérer obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence *p.s.* De plus, puisque la convergence *p.s.* peut avoir lieu sans l'existence de seconds moments, toute les conditions mettant en jeu des moments ne peuvent être nécessaires car elles peuvent être violées par l'addition d'un second terme qui converge vers zéro *p.s.* mais

qui possède des moments finis très grands. Si on n'utilise pas de monotonie ou quelque autre propriété de dépendance de la famille f_m , les conditions suffisantes pour une convergence presque sûre doivent être assez fortes pour permettre l'utilisation d'un argument de Borel-Cantelli. On a au moins le

Théorème 62 *Si la condition $\sum_{m \geq 1} \int_{\mathbb{R}_+^*} x^2 \mu_m(dx) / (\int_{\mathbb{R}_+^*} x \mu_m(dx))^2 < \infty$ est satisfaite, alors*

$$L_m(t) \xrightarrow{p.s.} L(t) \text{ avec } b_m = \int_{\mathbb{R}_+^*} x \mu_m(dx).$$

Preuve. Dans la démonstration on utilise simplement l'inégalité de Tchébychev et le lemme de Borel-Cantelli. ■

Ce théorème, plutôt restrictif, donne un résultat remarquable quand on l'applique à une famille bornée f_ϵ , $\epsilon > 0$, qui croît quand ϵ décroît vers 0. On le

Théorème 63 *Soient c_1 une constante positive finie et f_ϵ , $\epsilon > 0$, une famille de fonctions mesurables non-négatives sur U telle que pour tout $\epsilon > 0$, $f_\epsilon(u) \leq c_1$ et $f_\epsilon(u)$ qui croît quand $\epsilon \downarrow 0$, pour tout u dans U . Posons $b_\epsilon = \int_{\mathbb{R}_+^*} x \mu_\epsilon(dx)$. Supposons que $b_\epsilon < \infty$ et que $b_\epsilon \rightarrow \infty$. Alors, pour tout $t > 0$, $L_\epsilon(t) \xrightarrow{p.s.} L(t)$.*

Preuve. Dans la démonstration, on utilise simplement le théorème précédent et un corollaire facile du Théorème 61. ■

Dans le reste de l'étude de la convergence $p.s.$, Fristedt et Taylor raffinent encore les conditions suffisantes pour la convergence $p.s.$ en établissant des majorations fines des probabilités $P \left\{ \left| b^{-1} \sum_{u^- \leq L^-(1)} f(u) - 1 \right| > \delta \right\}$ à l'aide d'exponentielles négatives en vue de l'utilisation du lemme de Borel-Cantelli.

Signalons tout de même que des conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence *p.s.* sont données dans un cas particulier important, en l'occurrence le théorème 4. 6. en page 91.

Les conséquences des théorèmes précédents sont nombreuses. La méthode de Fristedt et Taylor englobe toutes les constructions de Lévy et aussi celle de Kingman. En outre, on obtient aussi dans [34] une construction du temps local d'un processus stable non encore répertoriée, même pour le mouvement brownien. Il s'agit de l'aire résiduelle $\epsilon t - \int_0^t (\epsilon \wedge |X(s)|) ds$. Il s'avère que la constante de normalisation est ϵ^2 .

Le cas de la fonctionnelle de Lévy

$$r(\epsilon, t) = \sum_{u^- \leq t, u^+ - u^- \leq \epsilon} (u^+ - u^-), \quad (2.15)$$

est plus compliqué. Il offre toute une variété de comportements. Toutefois, on récupère bien le résultat de Lévy (Théorème 41) généralisé à tous les processus de Markov standard satisfaisant nos conditions plus haut et tels que la mesure de Lévy de $L^{-1}(r)$ soit $c_2 x^{-\beta-1} dx$, $\beta \in]0, 1[$. On a alors pour tout $t > 0$, $r(\epsilon, t) \xrightarrow{L^2, p.s.} L(t)$.

Notons qu'il existe des constructions du temps local qui n'entrent pas sous le parapluie de Fristedt et Taylor. Ce sont des constructions qui ne s'expriment pas par une statistique d'influences infinitésimales d'excursions. Il est clair que la construction de Taylor et Wendel en est un exemple. En effet, la mesure de Hausdorff dépend non seulement de l'ordre de intervalles contigus aux zéros mais aussi de leur longueur. Celle de [43] en est un autre exemple car la statistique ne peut pas ici être menée en considérant les excursions une à une. Celles-ci surviennent en groupe. Toutefois, dans [34] on inclut aussi une variante de cette dernière. La nôtre au chapitre prochain

constitue évidemment un troisième exemple.

Pour finir, signalons qu'il n'est pas toujours facile de calculer les constantes de normalisation et de s'assurer de la validité des conditions des théorèmes. C'est la raison pour laquelle la construction principale de [46] ne peut pas, pour le moment, être mise sous le parapluie.

Chapter 3

Un théorème limite pour le temps local et applications aux ensembles aléatoires

Dans cette partie, nous allons détailler l'article [62]. Pour les notations et les notions de base, on devra consulter les deux chapitres précédents. Nous allons suivre une méthode générale exposée par Taylor dans [86] et utilisée au chapitre précédent plusieurs fois. On doit donc d'abord analyser l'image d'un subordonateur sur des intervalles quelconques $[0, T[$, $T > 0$. Ensuite, à l'aide de la substitution temporelle aléatoire qu'on a à maintes reprises vu l'utilisation au chapitre précédent, on revient à la fonctionnelle $K(n, t)$. Nous aurons besoin de certaines hypothèses sous lesquelles tous nos résultats sont basés.

3.1 Hypothèses fondamentales

Rappelons qu'on travaille avec un processus standard $X(t)$ récurrent et x_0 un point régulier pour lui même, i.e. $P^{x_0}(\tau_{\{x_0\}}=0) = 1$ et instantanée pour éliminer les cas poissonniens. Supposons que $U(dx)$ est absolument continue avec une densité dans $\mathcal{C}^1((0, \infty))$, et que pour tout $T > 0$

$$(A1) \int_0^{2^{-n}} dx \bar{\pi}(2^{-n} - x) \left| \int_x^\infty P_1(y) u_T'(y) dy \right| = O(1), \text{ quand } n \rightarrow \infty;$$

$$(A2) \exists b > 0 \text{ t.q. l'intégrale } \int_b^\infty P_1(y) u_T'(y) dy \text{ existe;}$$

$$(B) xu(x) \rightarrow 0, \text{ quand } x \rightarrow 0.$$

Rappelons que $P_1(\cdot)$ est défini dans le Lemme 23. Nous discutons maintenant la vérification pratique de la condition (A1). En général, plus d'informations sont nécessaires sur u_T' pour aller plus loin. Nous introduisons la valeur absolue à l'intérieur de l'intégrale par rapport à dy . Puisque la monotonie de $u(y)$ n'implique pas nécessairement celle de la densité de la résolvante (voir la remarque en bas de la page 104 de [79]) la monotonie de $u_T(y)$ (par rapport à la variable y) ne suivra pas de celle de $u(y)$. Si $u_T(y)$ était monotone nous aurions

$$\begin{aligned} & \int_0^{2^{-n}} dx \bar{\pi}(2^{-n} - x) \left| \int_x^\infty P_1(y) u_T'(y) dy \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^{2^{-n}} dx (\bar{\pi}(2^{-n} - x) (u_T(x) - u_T(\infty))) = O(1), \end{aligned}$$

à cause du fait que $\int_0^{2^{-n}} dx (\bar{\pi}(2^{-n} - x) u_T(x)) dx \leq 1$ et $u_T(\infty) \leq u(\infty) < \infty$ (notons qu'il n'est pas nécessaire que $u(\infty)$ soit nul, voir [80]). Supposons que (A2) et (B) sont vérifiées et que S a une densité $p_T \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ (elle est vérifiée si $\lambda \widehat{P_T}(\lambda)$ est absolument intégrable, voir par exemple [78] page 190). Comme $u_T'(y)$ est intégrable sur chaque

compact et $I(2^{-n}) \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$, nous avons donc

$$\begin{aligned} & \int_0^{2^{-n}} dx \bar{\pi}(2^{-n} - x) \left| \int_x^\infty P_1(y) u'_T(y) dy \right| \\ & \leq \int_0^{2^{-n}} dx \bar{\pi}(2^{-n} - x) \left(\left| \int_x^a P_1(y) u'_T(y) dy \right| \right. \\ & \quad \left. + \left| \int_a^b P_1(y) u'_T(y) dy \right| + \left| \int_b^\infty P_1(y) u'_T(y) dy \right| \right). \end{aligned}$$

Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned} & \int_0^{2^{-n}} dx \bar{\pi}(2^{-n} - x) \left| \int_a^b P_1(y) u'_T(y) dy \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^{2^{-n}} dx \bar{\pi}(2^{-n} - x) \int_a^b |u'_T(y)| dy = o(1), \end{aligned}$$

et

$$\int_0^{2^{-n}} dx \bar{\pi}(2^{-n} - x) \left| \int_b^\infty P_1(y) u'_T(y) dy \right| = o(1),$$

donc il ne reste plus qu'à vérifier ce qui suit, pour un certain $a > 0$,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2^{-n}} dx \bar{\pi}(2^{-n} - x) \left| \int_x^a P_1(y) u'_T(y) dy \right| \leq \\ & \frac{1}{2} \int_0^{2^{-n}} dx \bar{\pi}(2^{-n} - x) \left(\int_x^a |u'_T(y)| dy \right) = O(1). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Maintenant on va discuter des conditions suffisantes pour assurer la validité de la relation (3.1). Par la propriété de Markov et Fubini on a pour tout $y > 0$

$$\begin{aligned} u_T(y) &= \int_0^T p_r(0, y) dr = u(y) - \int_T^\infty p_r(0, y) dr \\ &= u(y) - E^0 \int_T^\infty I_{\{S_r=y\}} dr \\ &= u(y) - E^0 \left(E \left(\int_T^\infty I_{\{S_r=y\}} dr \mid \mathcal{F}_T \right) \right) \end{aligned}$$

Faisons le changement de variable $r = T + \alpha$ cette quantité devient,

voir la relation (1.5)

$$\begin{aligned}
&= u(y) - E^0(E(\int_0^\infty I_{\{S_{\alpha \circ \theta_T} = y\}} d\alpha | \mathcal{F}_T)) \\
&= u(y) - E^0(E^{S_T}(\int_0^\infty I_{\{S_\alpha = y\}} dr)) \\
&= u(y) - \int_0^\infty p_T(z)u(y-z)dz \\
&= u(y) - \int_0^y p_T(z)u(y-z)dz,
\end{aligned}$$

car il n'est pas possible de descendre après y pour entrer dans y encore une fois. Par le changement de variable $v = z/y$, nous avons

$$u_T(y) = u(y) - \int_0^1 yp_T(vy)u(y(1-v))dv;$$

en prenant la dérivée on trouve par la condition (B) et par le théorème de convergence dominée

$$\begin{aligned}
u'_T(y) &= u'(y) - \frac{1}{y} \int_0^y p_T(z)u(y-z)dz \\
&\quad - \frac{1}{y} \int_0^y zp'_T(z)u(y-z)dz - \frac{1}{y} \int_0^y zp_T(y-z)u'(z)dz. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Une intégration par partie sur le terme $(1/y) \int_0^y zp_T(y-z)u'(z)dz$ on pose

$$U = zp_T(y-z) \quad U' = p_T(y-z) - zp'_T(y-z)$$

$$V' = u'(z) \quad V = u(z)$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y} \int_0^y zp_T(y-z)u'(z)dz &= -\frac{1}{y} \int_0^y p_T(y-z)u(z)dz \\
&\quad + \frac{1}{y} \int_0^y zp'_T(y-z)u(z)dz,
\end{aligned}$$

en fait un changement de variable, posons $y-z = x$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y} \int_0^y zp_T(y-z)u'(z)dz &= -\frac{1}{y} \int_0^y p_T(x)u(y-x)dx \\
&\quad + \int_0^y p'_T(x)u(y-x)dx - \frac{1}{y} \int_0^y xp'_T(x)u(y-x)dx.
\end{aligned}$$

Finalement, on remplace la dernière équation dans l'équation (3.2) des termes vont s'annuler et on trouve

$$u'_T(y) = u'(y) - \int_0^y p'_T(z)u(y-z)dz. \quad (3.3)$$

d'où $|u'_T(y)| \leq |u'(y)| + \|p'_T(\cdot)\|_{C_b^1} U(y)$. Si par exemple u est monotone au voisinage de zéro, alors pour a assez petit la condition (3.1) est satisfaite si quand $n \rightarrow \infty$

$$\int_0^{2^{-n}} dx \bar{\pi}(2^{-n} - x) \int_x^a |u'(y)| dy = O(1),$$

à cause du fait que $U(y)$ est bornée au voisinage de zéro ($U \rightarrow 0$) et du fait que $\int_0^{2^{-n}} \bar{\pi}(2^{-n} - x)U(dx) \leq 1$ qui découle du fait que (par le théorème de convergence dominée) $\int_0^{2^{-n}} \bar{\pi}(2^{-n} - x)U_T(dx) \leq 1$.

En ce qui concerne la condition (A2) notons que si par exemple $p_T(y)$ est monotone décroissante (en la variable y) à ∞ (c'est le cas si p_T a un maximum unique qui est souvent rencontré dans les distributions unimodales, telles que celles qui sont auto-décomposable, voir [78] page 403) alors on peut écrire $|u'_T(y)| \leq \int_0^T |p'_s(y)| ds$, par le théorème de convergence dominé on en déduit facilement que

$$\int_b^{+\infty} |u'_T(y)| dy \leq \int_0^T ds \int_b^{+\infty} |p'_s(y)| dy = u_T(b) < \infty.$$

Il est probable que le comportement de $u_T(y)$ au voisinage de ∞ est principalement celui de $u(y)$ pour un subordonateur stable. Mais, en général, la contribution du deuxième terme du membre droit de l'équation (3.3) peut être important pour les grands y et les petits T , comme ce serait le cas des subordonateurs lents.

3.2 Préliminaires

$N(n, T)$ le nombre d'intervalles $I_{n,k}$ entrés par le subordonateur S avant $T > 0$, c'est-à-dire

$$N(n, T) = \{k \geq 0 \mid S_{[0,T]} \cap I_{n,k} \neq \emptyset\}$$

pour $k \geq 0, n \geq 0$; on pose

$$N_k(n, T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_{[0,T]} \cap I_{n,k} \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } S_{[0,T]} \cap I_{n,k} = \emptyset \end{cases}$$

3.2.1 Les indices de Blumenthal-Gettoor

Ces indices sont introduits pour la première fois dans [12]. L'idée est de chercher quelque généralisation des exposants stables. Concernant le subordonateur S , l'indice de Blumenthal-Gettoor $\beta = \inf \{ \alpha \geq 0 \mid |x|^{-\alpha} |\psi(x)| \rightarrow 0, \text{ lorsque } |x| \rightarrow \infty \}$. La dimension de Hausdorff de l'image $\mathcal{R}(S)$ est donnée par

$\sigma = \sup \{ \alpha < 1 \mid x^\alpha H(x) \rightarrow \infty, \text{ lorsque } x \rightarrow 0 \}$. Concernant la fonction de mesure correcte, c'est-à-dire ni zéro ni l'infini, qu'on note $\eta(s)$, nous supposons la remarque (valide pour toutes les situations pratiques) en bas de la page 176 de [32] est satisfaite, c'est-à-dire pour $c > 0, g(s) \leq \exp -(\log 1/s)^c$ pour s petit ou $g(s) \geq \exp(\log s)^c$ pour s grand. Alors (voir [32])

$$\eta(s) = \frac{\log(|\log s|)}{g(\log(|\log s|)/s)}. \quad (3.4)$$

Lemme 64 *Le temps d'entrée dans l'ensemble $I = (b, c), c > b > 0$, c'est-à-dire*

$\tau_I = \inf \{ r > 0 \mid S_r \in I \}$, *admet une loi continue elle est donnée par*

$$P(\tau_I < t) = \int_0^b \pi((b, c) - x) U_t(dx).$$

Preuve. On utilise la formule de compensation ou la formule du système de Lévy quand on considère notre subordonateur comme un markovien. Par le théorème 35 en p. 253 de Dellacherie et Meyer [20], soit J l'ensemble de tous les instants de saut. Nous avons l'identité

$$E \left(\sum_{r \in J} g_r f(S_{r-}, S_r) \right) = E \left(\int_0^\infty g_r \bar{N}f(S_{r-}) dr \right),$$

où g_r est un processus prévisible positif, $f(., .)$ une fonction mesurable sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et $\bar{N}f$ est l'opérateur associé au noyau produit (tensoriel) des mesures $\delta_x(.)$ et $N(x, .)$, c'est-à-dire $\bar{N}f(x) = \delta_x \times N(x, dy)$, dans lequel, le noyau de convolution $N(x, dy)$ intègre la fonction φ par $N\varphi(x) = \int_0^\infty \varphi(x+y)\pi(dy)$. Il suffit de prendre, puisque le saut qui conduit $S(r)$ dans l'intervalle $[b, c[$ avant $r \leq T$ ne se produit qu'une fois dans $[0, T]$, l'indicateur déterministe continue à gauche $g_r = I_{]0, r]}$ et $f(x, y) = I_A$, où $A =]0, b[\times]b, c[$ et de garder à l'esprit que tout le temps fixe $r \geq 0$ est un point de continuité de S de sorte que $P_{S_{r-}}(dx)$ est juste $P_{S_r}(dx)$, pour obtenir le résultat. ■

Nous aurons besoin de la probabilité de toucher deux intervalles I et J t.q. $I \cap J = \emptyset$ avant T .

Lemme 65 *On a par la propriété de Markov forte (voir la relation 1.11)*

$$P(\exists r_1 \text{ et } \exists r_2 \leq T | S(r_1) \in I \text{ et } S(r_2) \in J) = \int_{[0, T] \times I} F(d\tau, dz) P^z(\exists r \leq T - \tau | S(r, \omega') \in J),$$

où $F(d\tau, dz)$ est la loi conjointe des variables aléatoires τ_I et $S(\tau_I)$ et où la probabilité sous le signe somme se calcule d'après le lemme précédent.

Preuve. L'évènement cherché est l'indicatrice de $\{\tau_I(\omega) < T, \tau_I(\omega') < T - \tau_I(\omega)\}$

qui est notre f dans le Corollaire 10 (voir [20] p. 179) , où $F_i(d\tau, dz)$ est la loi conjointe (loi du couple) des variables aléatoires τ et $S(\tau)$, maintenant par le Lemme 64 on obtient

$$\begin{aligned}
P(\exists r_1 \text{ et } \exists r_2 \leq T | S(r_1) \in I \text{ et } S(r_2) \in J) &= E(f) \\
&= E^0(E(f | \mathcal{F}_\tau)) \\
&= E_\omega^0[E_{\omega'}^{S(\omega, \tau(\omega))}(f(\omega, \omega'))] \\
&= E_\omega^0[\tau_I(\omega) < T, E_{\omega'}^{S(\omega, \tau(\omega))}(\tau_J(\omega') < T - \tau_I(\omega))] \\
&= \int_{[0, T] \times I} F(d\tau, dz) P^z(\exists r \leq T - \tau | S(r, \omega') \in J).
\end{aligned}$$

■

3.3 Méthode de Borel-Cantelli et moments

Cette méthode est très connue, nous ne la décrivons pas ; passons aux moments d'ordre un et deux.

Lemme 66 *Pour tout $T > 0$, on a*

$$E(N(n, T)) = 1 + \sum_{i \geq 0} \int_0^{2^{-n}} \bar{\pi}(2^{-n} - x) U_T(dx + i2^{-n}).$$

Preuve. Nous avons

$$E(N(n, T)) = E\left(\sum_{i \geq 0} N_i(n, T)\right)$$

d'après le théorème de Beppo levi on a

$$E(N(n, T)) = \sum_{i \geq 0} E(N_i(n, T)) = 1 + \sum_{i \geq 1} E(N_i(n, T));$$

(le premier interval $I_{n,0}$ est *p.s.* touché puisqu'on démarre de zéro d'où le 1), donc

$$E(N(n, T)) = 1 + \sum_{i \geq 1} P(\exists t < T | S(t) \in I_{n,i}).$$

D'après le Lemme 64 on a

$$\begin{aligned} E(N(n, T)) &= 1 + \sum_{i \geq 1} \int_0^{i2^{-n}} \pi(I_{n,i} - x) U_T(dx) \\ &= 1 + \sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \int_{j2^{-n}}^{(j+1)2^{-n}} \pi(I_{n,i} - x) U_T(dx) \right). \end{aligned}$$

Maintenant on pose

$$\tilde{U}_i = \sum_{j=0}^{i-1} \int_{j2^{-n}}^{(j+1)2^{-n}} \pi(I_{n,i} - x) U_T(dx)$$

et on va calculer les \tilde{U}_i . On a

$$\tilde{U}_i = \int_0^{2^{-n}} \pi(I_{n,i} - x) U_T(dx) + \dots + \int_{(i-1)2^{-n}}^{i2^{-n}} \pi(I_{n,i} - x) U_T(dx).$$

Maintenant, on applique le théorème de Fubini, c'est-à-dire qu'on fait la somme en colonnes puis en lignes, on obtient

$$\sum_{i \geq 1} \tilde{U}_i = \sum_{i \geq 0} \int_{i2^{-n}}^{(i+1)2^{-n}} \bar{\pi}((i+1)2^{-n} - x) U_T(dx).$$

Par le changement de variable $x = x' + i2^{-n}$, on obtient

$$\sum_{i \geq 1} \tilde{U}_i = \sum_{i \geq 0} \int_0^{2^{-n}} \bar{\pi}(2^{-n} - x') U_T(dx' + i2^{-n}).$$

Donc

$$\sum_{i \geq 1} \int_0^{i2^{-n}} \pi(I_{n,i} - x) U_T(dx) = \sum_{i \geq 0} \int_0^{2^{-n}} \bar{\pi}(2^{-n} - x') U_T(dx' + i2^{-n}). \quad (3.5)$$

Finalement, on a

$$E(N(n, T)) = 1 + \sum_{i \geq 0} \int_0^{2^{-n}} \bar{\pi}(2^{-n} - x) U_T(dx + i2^{-n}).$$

■

Sous nos hypothèses fondamentales, on en déduit le

Lemme 67 *Sous la condition (A1), on a pour $T > 0$ fixé quand $n \rightarrow \infty$*

$$E(N(n, T)) = TH(2^{-n}) + O(1).$$

Preuve. D'après le Lemme 66 et le Lemme 23 on a

$$\begin{aligned} E(N(n, T)) &= 1 + \sum_{i \geq 0} \int_0^{2^{-n}} \bar{\pi}(2^{-n} - x) U_T(dx + i2^{-n}) \\ &= 1 + 2^n \int_0^{2^{-n}} \bar{\pi}(2^{-n} - x) (2^{-n} \sum_{i \geq 0} u_T(x + i2^{-n})) dx \\ &= TH(2^{-n}) + \int_0^{2^{-n}} \bar{\pi}(2^{-n} - x) u_T(x) dx - 2^n \int_0^{2^{-n}} \bar{\pi}(2^{-n} - x) U_T(x \\ &\quad + 2^{-n}) dx + \frac{1}{2} \int_0^{2^{-n}} \bar{\pi}(2^{-n} - x) u_T(x + 2^{-n}) dx - 2^{-n} \int_0^{2^{-n}} \bar{\pi}(2^{-n} - x) \\ &\quad \times \int_1^\infty P_1(y) u_T'(x + 2^{-n}y) dy dx \\ &= TH(2^{-n}) + \sum_{i=1}^4 R_{1,i}(n, T) + 1 \end{aligned}$$

où les termes d'erreur $R_{1,i}(n, T)$, $i = 2, 3, 4$ correspondent aux termes d'erreurs dans le Lemma 23 mais après une intégration. On commence par le premier terme, on utilise le Lemme 64 on trouve

$$R_{1,1}(n, T) = \int_0^{2^{-n}} \bar{\pi}(2^{-n} - x) u_T(x) dx \leq 1,$$

puisque c'est une probabilité. Ensuite, pour $R_{1,2}(n, T)$ on utilise le fait que $U(x)$ est croissante par rapport à la variable x et que $U(x)H(x)$ est bornée, voir la section

1.2.5. Ensuite,

$$\begin{aligned}
|R_{1,2}(n, T)| &\leq 2^n \int_0^{2^{-n}} \bar{\pi}(2^{-n} - x) U(x + 2^{-n}) dx \\
&\leq H(2^{-n}) U(2^{-n} + 2^{-n}) \\
&\leq H(2^{-n}) (U(2^{-n}) + U(2^{-n})) \\
&\leq 2H(2^{-n}) U(2^{-n}) \leq c.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour le terme $R_{1,3}(n, T)$ on utilise le Lemme 64 et le changement de variable $y = x + 2^{-n}$ on obtient

$$\begin{aligned}
|R_{1,3}(n, T)| &\leq \frac{1}{2} \int_{2^{-n}}^{2 \cdot 2^{-n}} \bar{\pi}(2 \cdot 2^{-n} - y) u_T(y) dy \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^{2 \cdot 2^{-n}} \bar{\pi}(2 \cdot 2^{-n} - y) u_T(y) dy \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Finalement, majorons le terme $R_{1,4}(n, T)$ comme suit

$$\begin{aligned}
|R_{1,4}(n, T)| &\leq \frac{1}{2} \int_0^{2^{-n}} dx \bar{\pi}(2^{-n} - x) \int_{x+2^{-n}}^{\infty} |u'_T(y)| dy \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^{2^{-n}} dx \bar{\pi}(2^{-n} - x) \int_x^{\infty} |u'_T(y)| dy.
\end{aligned}$$

Donc par la condition (A1) on trouve que $|R_{1,4}(n, T)| = O(1)$,

le Lemme est démontré. ■

Considérons à présent le second moment. On a le

Lemme 68 *Sous la condition (A1), on a pour $T > 0$ fixé quand $n \rightarrow \infty$*

$$EN^2(n, T) = [TH(2^{-n})]^2 + O[H(2^{-n})].$$

Preuve. On a

$$N^2(n, T) = 1 + 3 \sum_{i \geq 1} N_i(n, T) + 2 \sum_{1 \leq i < j} N_i(n, T) N_j(n, T);$$

Ensuite, par le Lemme 65 on a

$$\sum_{1 \leq i < j} E(N_i(n, T)N_j(n, T)) = \sum_{1 \leq i < j} \int_{[0, T] \times I_{n, i}} F_i(d\tau, dz) \int_0^{j2^{-n} - z} \pi(I_{n, j} - z - x) U_{T-\tau}(dx).$$

Par le changement de variable $z = i2^{-n} + z'$ avec $z' \in [0, 2^{-n}[$ et le théorème de Beppo-Levi on a

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j} E(N_i(n, T)N_j(n, T)) &= \sum_{i \geq 1} \int_{[0, T] \times I_{n, 0}} F_i(d\tau, i2^{-n} + dz) \\ &\quad \times \sum_{i < j} \int_0^{(j-i)2^{-n} - z} \pi(I_{n, j-i} - z - x) U_{T-\tau}(dx) \\ &= \sum_{i \geq 1} \int_{[0, T] \times I_{n, 0}} F_i(d\tau, i2^{-n} + dz) \\ &\quad \times \sum_{j \geq 1} \int_0^{j2^{-n} - z} \pi(I_{n, j} - z - x) U_{T-\tau}(dx). \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise l'équation (3.5) on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j} E(N_i(n, T)N_j(n, T)) &= \sum_{i \geq 1} \int_{[0, T] \times I_{n, 0}} F_i(d\tau, i2^{-n} + dz) \\ &\quad \times \sum_{j \geq 1} \int_0^{2^{-n}} \bar{\pi}(2^{-n} - x) U_{T-\tau}(j2^{-n} - z + dx) \\ &\quad + \sum_{i \geq 1} \int_{[0, T] \times I_{n, 0}} F_i(d\tau, i2^{-n} + dz) \\ &\quad \times \int_0^{2^{-n} - z} \bar{\pi}(2^{-n} - z - x) U_{T-\tau}(dx) \\ &= \sum_{i \geq 1} \int_{[0, T] \times I_{n, 0}} F_i(d\tau, i2^{-n} + dz) \\ &\quad \times \sum_{j \geq 1} \int_0^{2^{-n}} \bar{\pi}(2^{-n} - x) u_{T-\tau}(j2^{-n} - z + x) dx + R_{2,1}(n, T) \end{aligned}$$

où évidemment $|R_{2,1}(n, T)| \leq \sum_{i \geq 1} \int_{[0, T] \times I_{n, 0}} F_i(d\tau, i2^{-n} + dz) \leq TH(2^{-n})$. Dans la somme sur j ci-dessus, le terme $j = 1$ est une probabilité. Les autres termes donnent

$(T - \tau)H(2^{-n}) + \sum_{i=1}^3 R_{3,i}(n, T)$. Tous les derniers termes d'erreur sont traités comme dans le premier moment, mais avec de légères modifications. Ils sont tous $O(1)$. D'où

$$\sum_{j \geq 1} \int_0^{2^{-n}} \bar{\pi}(2^{-n} - x) u_{T-\tau}(j2^{-n} - z + x) dx = (T - \tau)H(2^{-n}) + O(1).$$

Le terme principal dans le deuxième moment devient

$$\begin{aligned} &= 2 \sum_{i \geq 1} H(2^{-n}) \int_0^T (T - \tau) d\left(\int_0^{i2^{-n}} \pi(I_{n,i} - x) U_\tau(dx)\right) + R_{2,2}(n, T) \\ &= [TH(2^{-n})]^2 + R_{2,2}(n, T) + R_{2,3}(n, T), \end{aligned}$$

par une intégration par parties, on a alors $|R_{2,2}(n, T)| \leq TH(2^{-n})$ et $|R_{2,3}(n, T)| \leq TH(2^{-n})$. Le lemme en résulte immédiatement. ■

Nous sommes en mesure de montrer notre résultat principal.

Théorème 69 *Soit $T > 0$. Sous la condition (A1), nous avons p.s.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(n, T)/H(2^{-n}) = T.$$

Ce théorème résulte du Lemme 67, du Lemme 68 et d'un argument de Borel-Cantelli.

Nous écrivons (par un léger abus de notation) $N(n, t)$ pour le nombre d'intervalles $I_{n,i}$ qui contiennent un point de $Z(x_0, t)$. Voici enfin notre théorème limite.

Corollaire 70 *Sous la condition (A1), nous avons p.s. $\forall t > 0$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K(n, t) = L(t).$$

Preuve. Le Théorème 69 est évidemment vrai p.s. pour tout T rationnel. Pour $T > 0$ arbitraire, prenons deux suites de rationnels $T^i \downarrow T$ et $T_i \uparrow T$, quand i tend

vers l'infini. On a

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} N(n, T_i)/H(2^{-n}) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} N(n, T)/H(2^{-n}) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} N(n, T^i)/H(2^{-n}),$$

d'où

$$T_i \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} N(n, T)/H(2^{-n}) \leq T^i$$

et

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} N(n, T_i)/H(2^{-n}) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} N(n, T)/H(2^{-n}) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} N(n, T^i)/H(2^{-n}),$$

d'où

$$T_i \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} N(n, T)/H(2^{-n}) \leq T^i$$

maintenant on fait tendre i vers l'infini. Ensuite, il suffit alors de mettre $T = L(t)$

dans le Théorème 69. ■

Remarque 71 *Sous les conditions du Théorème 69, nous avons aussi la convergence dans $L^2 \forall t > 0$.*

3.3.1 Relation avec d'autres normalisations

Soit $\mathcal{E}(t)$ l'ensemble dénombrable de tous les intervalles ouverts (bornés) $e(t)$ contigus à $Z(t)$. En fait, le nombre entier $N(n, t)$ dans l'équation (3) est la résultante de deux actions. D'une part, les éléments de $\mathcal{E}(t)$ qui sont plus grands que 2^{-n} contribuent évidemment $N_0(n, t)$ intervalles $I_{n,k}$. D'autre part, l'amoncellement, ou l'accumulation, des petits intervalles $e(t)$ (sans pour autant qu'il y ait parmi eux un grand intervalle) finit aussi par arriver à de nouveaux intervalles $I_{n,k}$. Nous allons calculer la contribution de ces petites excursions de X . Si $R(n, t)$ désigne le nombre

d'intervalles $I_{n,k}$, $k \geq 0$, qui ont une intersection non vide avec $Z(t)$ qui ne sont *pas* ceux qu'on toucherait à l'aide d'un grand saut $\geq 2^{-n}$, on peut écrire

$$\frac{N(n, t)}{H(2^{-n})} = \frac{N_0(n, t)}{\bar{\pi}(2^{-n})} \cdot \frac{\bar{\pi}(2^{-n})}{H(2^{-n})} + \frac{R(n, t)}{H(2^{-n})}.$$

Nous avons déjà vu, voir [59] et [34] et le chapitre I, que p.s. $\forall t > 0$, $N_0(n, t)/\bar{\pi}(2^{-n}) \rightarrow t$ quand $n \rightarrow \infty$; par conséquent, quand la condition suivante est vérifiée, pour un certain $c > 0$ (nécessairement ≤ 1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\bar{\pi}(x)}{H(x)} \rightarrow c, \quad (3.6)$$

alors il s'en suivra que $R(n, t)/H(2^{-n})$ contribue p.s. une portion du temps local ce fait jette un peu de lumière sur le problème ouvert voir la remarque à la fin de la section 7 de [34], concernant la recherche de conditions nécessaires and suffisantes pour la convergence p.s. de la fonctionnelle $r(n, t)/\int_0^{2^{-n}} x\pi(dx)$ où (voir le Glossaire) $r(n, t) = \sum_{|e(t)| < 2^{-n}} |e(t)|$ met en jeu la totalité des excursions de longueur $< 2^{-n}$ qui étés effectuées avant t . Notons que le facteur de normalisation ici est en relation avec le nôtre selon la formule

$$\int_0^{2^{-n}} x\pi(dx) = 2^{-n}[H(2^{-n}) - \bar{\pi}(2^{-n})].$$

Dans le cas spécial d'un mouvement brownien, les grandes excursions ont exactement la même contribution que l'accumulation des petites excursions comme cela peut être vérifié par un calcul directement. Cela souligne encore une fois les symétries profonde du mouvement brownien.

La Condition (3.6), qui est facilement satisfaite par les processus stables a des liens avec la notion de croissance positive de (voir la section 1.2.5 et un exercice dans [10])

qui donnent plusieurs formulations équivalentes pour la croissance positive) la queue intégrée de la mesure de Lévy car alors pour tout $x > 0$, $\liminf \bar{\pi}(x)/H(x) > 0$ quand $x \rightarrow 0+$.

3.4 Une densité de Lévy à variation régulière

Prenons l'exemple d'une mesure de Lévy absolument continue sur $]0, \infty[$ de densité $\pi(x) = cx^{-3/2} |\log x|$, on prendra $c = 1$ pour simplifier les calculs ; cela correspond à une perturbation logarithmique irrégulière des noyaux de la résolvante d'un mouvement brownien. La fonction $\pi(x)$ est à variation régulière au voisinage de zéro et au voisinage de l'infini par la section 1.3. Commençons par donner la quantité $\bar{\pi}$, voir section 1.2.5. On a

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(x) &= 2 \frac{\log(1/x)}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{2}{\log(1/x)} + \frac{4\sqrt{x}}{\log(1/x)}\right), \quad \text{si } x < 1, \\ \bar{\pi}(x) &= 2 \frac{\log x}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{2}{\log x}\right), \quad \text{si } x \geq 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Passons maintenant aux densités de transition et leur dérivée. L'idée fondamentale est de les écrire comme des transformées de Fourier et ensuite d'étudier l'asymptotique à l'infini. On a

$$\psi(\lambda) = \lambda \widehat{\pi}_s(\lambda) - i\lambda \widehat{\pi}_c(\lambda).$$

On posera pour la suite

$$\Pi^{(s)}(\lambda) = \lambda \widehat{\pi}_s(\lambda),$$

$$\Pi^{(c)}(\lambda) = \lambda \widehat{\pi}_c(\lambda).$$

Il n'est pas facile de trouver d'emblée les transformées sinus et cosinus de $\bar{\pi}(x)$, c'est pourquoi on écrit

$$\begin{aligned}
\widehat{\bar{\pi}}_s(\lambda) &= \int_0^{\infty} \bar{\pi}(x) \sin \lambda x dx \\
&= \int_0^1 \left(-2 \frac{\log x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 8\right) \sin \lambda x dx + \int_1^{\infty} \left(2 \frac{\log x}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{x}}\right) \sin \lambda x dx \\
&\quad + \int_0^1 \left(2 \frac{\log x}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{x}}\right) \sin \lambda x dx - \int_0^1 \left(2 \frac{\log x}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{x}}\right) \sin \lambda x dx \\
&= 8 \left(\frac{1 - \cos \lambda}{\lambda}\right) - 4 \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} \sin \lambda x dx - 8 \int_0^1 \frac{\sin \lambda x}{\sqrt{x}} dx \\
&\quad + 2 \int_0^{\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} \sin \lambda x dx + 4 \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{\sqrt{x}} dx.
\end{aligned}$$

Maintenant en utilisant les tables bien connues des transformations intégrales, par exemple dans [22], on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} \sin \lambda x dx &= \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{\lambda}} (\psi(1/2) + (\pi/2) - \ln \lambda), \\
\int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{\sqrt{x}} dx &= \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{\lambda}},
\end{aligned}$$

où ψ est la fonction transcendante Γ'/Γ , où Γ est la fonction gamma. Faisons le changement de variable $\lambda x = y$, on trouve

$$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} \sin \lambda x dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\lambda} \frac{\log x}{\sqrt{x}} \sin x dx - \frac{\log \lambda}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\lambda} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx,$$

et

$$\int_0^1 \frac{\sin \lambda x}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\lambda} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

Finalement, on obtient

$$\Pi^{(s)}(\lambda) = \sqrt{\lambda} \log \lambda (\Pi_1^{(s)}(\lambda) - \sqrt{2\pi} + c/\log \lambda) \quad (3.8)$$

où $c = \sqrt{2\pi}(\psi(1/2) - (\pi/2) + 2)$ et

$$\Pi_1^{(s)}(\lambda) = 8(1 - \cos \lambda)/\sqrt{\lambda} \log \lambda - (4/\log \lambda) \int_0^{\lambda} (2 + \log x) \sin x/\sqrt{x} dx + 4 \int_0^{\lambda} \sin x/\sqrt{x} dx;$$

de la même manière on trouve

$$\Pi^{(c)}(\lambda) = \sqrt{\lambda} \log \lambda (\Pi_1^{(c)}(\lambda) - \sqrt{2\pi} + c'/\log \lambda)$$

où $c' = \sqrt{2\pi}(\psi(1/2) + (\pi/2) + 2)$ et

$$\Pi_1^{(c)}(\lambda) = 8 \sin \lambda / \sqrt{\lambda} \log \lambda - (4/\log \lambda) \int_0^\lambda (2 + \log x) \cos x / \sqrt{x} dx + 4 \int_0^\lambda \cos x / \sqrt{x} dx;$$

Lemme 72 *Les deux fonctions $\Pi^{(s)}(\lambda)$ et $\Pi^{(c)}(\lambda)$ sont équivalentes à $\sqrt{2\pi\lambda} |\log \lambda|$ au voisinage de zéro et l'infini. De plus, il existe des constantes positives c, c' avec $c' < c$, pour lesquelles on peut trouver un λ_0 t.q. pour tout $\lambda \geq \lambda_0$*

$$c' \sqrt{\lambda} \log \lambda \leq \Pi^{(s)}(\lambda) \leq c \sqrt{\lambda} \log \lambda. \quad (3.9)$$

Preuve. C'est immédiate d'après la relation (3.8). ■

3.4.1 Une expression pour $p'_r(y)$

Il est très rare que l'on puisse disposer d'une expression analytique simple pour la densité $p_r(y)$. On ne peut le faire que pour un subrodateur stable d'indice $1/2$ où on a $p_r(y) = (r/\sqrt{2\pi}y^{3/2}) \exp(-r^2/2y)$ et en général pour un processus semi stable de Stone d'indice $\beta \in]0, 1[$ on a par [74]

$$p_r(y) = \frac{1}{\pi y} \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \frac{\sin(\pi\beta k) \Gamma(\beta k + 1)}{k! (r/y^\beta \delta)^k}.$$

Cependant, dans le cas général on doit recourir à des formules d'inversion à partir de l'équation

$$p_r(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(ixy) \widehat{p_r}(x) dx.$$

Pour cela, nous allons montrer que

Lemme 73 $\lambda \widehat{P}_r(\lambda)$ est absolument intégrable pour tout les $r > 0$.

Preuve. Posons

$$l(\lambda) = \sqrt{\lambda} \log \lambda \quad (3.10)$$

et faisons le changement de variables $\rho = l(\lambda)$ pour des arguments suffisamment grands. Notons par l^* la fonction réciproque de la fonction l , on a donc

$$dl^*(\rho)/d\rho = (2 + \log l^*(\rho))/(2\sqrt{l^*(\rho)}).$$

Il n'est pas facile de donner une formule explicite (dans un voisinage de l'infini) pour la fonction inverse de $l(\lambda)$; cependant, soit la fonction

$$\tilde{l} : \rho \longmapsto (\rho / \log \rho)^2 / 4,$$

on en déduit que quand $\rho \rightarrow \infty$

$$l^*(\rho) \sim \tilde{l}(\rho).$$

Nous avons par la monotonie

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\lambda \widehat{P}_r(\lambda)| d\lambda &\leq \int_0^\infty \exp(-r\Pi^{(s)}(\lambda)) \lambda d\lambda \\ &\leq c(\lambda_0) + c \int_{l(\lambda_0)}^\infty \exp(-c'r\rho) \sqrt{l^*(\rho)} \log l^*(\rho) d\rho \\ &\leq c(\lambda_0) + c \int_{l(\lambda_0)}^\infty \exp(-c'r\rho) \rho (1 + \log \rho + \log \log \rho) / \log \rho d\rho < \infty. \end{aligned}$$

d'où le lemme. ■

On peut donc passer des transformées de Fourier aux transformées sinus et cosinus.

On a par le théorème de convergence dominée

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}p_r(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dy} \exp(ixy) \widehat{p_r}(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} ix \exp(ixy) \widehat{p_r}(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(ixy) \widehat{p'_r}(x) dx,\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que

$$\widehat{p'_r}(x) = ix \widehat{p_r}(x).$$

Maintenant on fait le changement de variables $x = -\alpha$, on obtient

$$p'_r(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\alpha y) \widehat{p'_r}(-\alpha) d\lambda,$$

d'autre part

$$\widehat{p'_r}(-\alpha) = \frac{-i\alpha}{\sqrt{2\pi}} \exp(-r\psi(\alpha)),$$

d'où

$$\begin{aligned}p'_r(y) &= \frac{-1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} i\alpha \exp(-i\alpha y) \exp(-r\psi(\alpha)) d\alpha & (3.11) \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{\infty} i\alpha \exp(-i\alpha y) \exp(-r\psi(\alpha)) d\alpha \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 i\alpha \exp(-i\alpha y) \exp(-r\psi(\alpha)) d\alpha.\end{aligned}$$

Faisons un changement de variables, on pose $-\lambda = \alpha$, on obtient

$$\begin{aligned}
p'_r(y) &= \frac{-i}{2\pi} \int_0^\infty \lambda \exp(-i\lambda y) \exp(-r\psi(\lambda)) d\lambda \\
&\quad + \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty \lambda \exp(i\lambda y) \exp(-r\psi(-\lambda)) d\lambda \\
&= \frac{-1}{\pi} \operatorname{Re} \left(i \int_0^\infty \lambda \exp(-i\lambda y) \exp(-r\psi(\lambda)) d\lambda \right) \\
&= \frac{-1}{\pi} \operatorname{Re} \left(i \int_0^\infty \lambda (\cos \lambda y - i \sin \lambda y) \exp(-r\lambda i \int_0^\infty \exp(-i\lambda x) \bar{\pi}(x) dx) d\lambda \right) \\
&= \frac{-1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty \lambda (\sin \lambda y + i \cos \lambda y) \exp(-r\lambda \int_0^\infty \sin \lambda x \bar{\pi}(x) dx) \right. \\
&\quad \left. \cdot \exp(-ir\lambda \int_0^\infty \cos \lambda x \bar{\pi}(x) dx) d\lambda \right) \\
&= \frac{-1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty \lambda (\sin \lambda y + i \cos \lambda y) \exp(-r\lambda \int_0^\infty \sin \lambda x \bar{\pi}(x) dx) \right. \\
&\quad \left. [\cos r\lambda \int_0^\infty \cos \lambda x \bar{\pi}(x) dx - i \sin r\lambda \int_0^\infty \cos \lambda x \bar{\pi}(x) dx] d\lambda \right) \\
&= \frac{-1}{\pi} \left[\int_0^\infty \sin \lambda y (\lambda \exp(-r\lambda \int_0^\infty \sin \lambda x \bar{\pi}(x) dx) \cos r\lambda \int_0^\infty \cos \lambda x \bar{\pi}(x) dx) d\lambda \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \cos \lambda y (\lambda \exp(-r\lambda \int_0^\infty \sin \lambda x \bar{\pi}(x) dx) \sin r\lambda \int_0^\infty \cos \lambda x \bar{\pi}(x) dx) d\lambda \right].
\end{aligned}$$

D'où en notant

$$f_1(r, \lambda) = \exp(-r\Pi^{(s)}(\lambda)) \cos(r\Pi^{(c)}(\lambda)),$$

$$f_2(r, \lambda) = \exp(-r\Pi^{(s)}(\lambda)) \sin(r\Pi^{(c)}(\lambda)),$$

on a

$$p'_r(y) = -1/\pi \left(\int_0^\infty \sin(\lambda y) \lambda f_1(r, \lambda) d\lambda + \int_0^\infty \cos(\lambda y) \lambda f_2(r, \lambda) d\lambda \right), \quad (3.12)$$

Les dérivées par rapport à λ seront également nécessaires ci-dessous, on a

$$\begin{aligned} f'_1(r, \lambda) &= -r \exp(-r\Pi^{(s)}(\lambda))[\Pi^{(s)}(\lambda) \cos(r\Pi^{(c)}(\lambda)) \\ &\quad + \Pi^{(c)}(\lambda) \sin(r\Pi^{(c)}(\lambda))], \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} f'_2(r, \lambda) &= -r \exp(-r\Pi^{(s)}(\lambda))[\Pi^{(s)}(\lambda) \sin(r\Pi^{(c)}(\lambda)) \\ &\quad - \Pi^{(c)}(\lambda) \cos(r\Pi^{(c)}(\lambda))]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.4.2 Monotonicité de u au voisinage de l'origine

Pour vérifier que la condition (B) est satisfaite il est facile de voir qu'il suffit de vérifier que u est monotone au voisinage de l'origine. En effet, soit $y > 0$, on a pour tout $x < y$ l'inégalité $u(y) < u(x)$ et donc $\int_0^y u(y)dx < \int_0^y u(x)dx$, c'est-à-dire $yu(y) < U(y) \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow 0$, d'où notre assertion. De toute façon, cette monotonicité de u sera bien utilisée d'après la discussion plus haut. Nous allons nous inspirer du travail [48], voir le Théorème 16, qui donne des conditions pour avoir une monotonicité complète sur tout $]0, \infty[$ que nous n'avons pas car $\bar{\pi}$ n'est pas log-convexe partout mais seulement au voisinage de l'origine. Cependant, nous allons construire un autre subordonateur (peut être sur un autre espace de probabilité) qui aura les mêmes petits sauts au voisinage de l'origine que notre subordonateur et dont la densité de noyau potentiel sera monotone. Pour cela prenons la densité de Lévy pour $0 < x < \epsilon < 1$

$$\pi_0(x) = -x^{-3/2} \log x,$$

et

$$\pi_0(x) = \bar{\pi}(\epsilon) \exp(\epsilon - x)$$

autrement, ϵ est un nombre qui sera fixé plus bas. Nous allons vérifier que

Lemme 74 *La fonction $\bar{\pi}_0(x)$ est log-convexe sur tout $]0, \infty[$.*

Preuve. Notons que pour $x \geq \epsilon$,

$$\begin{aligned}\bar{\pi}_0(x) &= \int_x^\infty \bar{\pi}(\epsilon) \exp(\epsilon - z) dz = \bar{\pi}(\epsilon) (\exp \epsilon) \int_x^\infty \exp -z dz \\ &= \bar{\pi}(\epsilon) \exp(\epsilon - x) = \pi_0(x),\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}\bar{\pi}_0(x) &= \int_x^\infty \pi_0(y) dy \\ &= \int_x^\epsilon -y^{-3/2} \log y dy + \int_\epsilon^\infty \bar{\pi}(\epsilon) \exp(\epsilon - y) dy \\ &= \bar{\pi}(\epsilon) + \int_x^\infty -y^{-3/2} \log y dy - \int_\epsilon^\infty -y^{-3/2} \log y dy \\ &= \bar{\pi}(\epsilon) + \bar{\pi}(x) - \bar{\pi}(\epsilon) = \bar{\pi}(x) = 8 - 2 \frac{\log x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

autrement. Comme $\bar{\pi}_0(x)$, $x < \epsilon$, est deux fois continument différentiable, il suffit de vérifier que $\bar{\pi}_0(x)$ vérifie l'inégalité (1.17). On a

$$\bar{\pi}_0(x) = 8 - 2 \frac{\log x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}$$

donc

$$\bar{\pi}'_0(x) = x^{-3/2} \log x$$

et

$$\bar{\pi}''_0(x) = x^{-5/2} (1 - \frac{3}{2} \log x)$$

d'où

$$\begin{aligned}\bar{\pi}_0(x) \bar{\pi}''_0(x) &= \left(8 - 2 \frac{\log x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) x^{-5/2} \left(1 - \frac{3}{2} \log x\right) \\ &= 2x^{-3} (4\sqrt{x} - \log x - 2 - 6\sqrt{x} \log x + 3 \log x + \frac{3}{2} (\log x)^2).\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
& \bar{\pi}_0(x)\bar{\pi}_0''(x) - (\bar{\pi}_0'(x))^2 \\
= & 2x^{-3}(4\sqrt{x} - \log x - 2 - 6\sqrt{x}\log x + 3\log x + \frac{3}{2}(\log x)^2 - \frac{1}{2}(\log x)^2) \\
= & 4x^{-3}(-1 + 2\sqrt{x} + (1 - 3\sqrt{x})\log x + (\log x)^2/2).
\end{aligned}$$

Posons

$$c_0(x) = (-1 + 2\sqrt{x} + (1 - 3\sqrt{x})\log x + (\log x)^2/2),$$

comme la quantité $c_0(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow 0+$, on peut choisir un $\epsilon \in]0, 1[$, t.q. $c_0(x) > 0$ pour tout $x \in]0, \epsilon[$, par conséquent l'inégalité (1.17) est vérifiée. ■

On en déduit par le théorème 2.1 de [48] (dont la preuve n'exige pas la différentiabilité partout de $\bar{\pi}_0$ mais seulement la convexité de $\log \bar{\pi}_0$) que la densité de noyau potentiel $u_0(x)$ est monotone sur $]0, \infty[$. Par le théorème 5.1 de [49] voir le Théorème 17 ici, il s'en suit que $u = u_0$ sur l'intervalle $(0, \epsilon)$ et donc $u(x)$ est aussi monotone au voisinage de l'origine.

3.4.3 Vérification de la condition (A2)

On prend $b = 1$. Rappelons que la fonction périodique $P_1(y)$ est donnée dans le Lemme 23. Nous allons utiliser le lemme clef suivant

Lemme 75 *La fonction $P_1(y)p_r'(y)$ est intégrable sur tout compact et pour tout entier*

m on a la formule

$$\begin{aligned}
\int_1^{m+1} P_1(y)p'_r(y)dy &= \frac{1}{2\pi}[\widehat{f}_{1c}(r, 1) - \widehat{f}_{1c}(r, m+1) + \widehat{f}_{2s}(r, m+1) - \widehat{f}_{2s}(r, 1) \\
&\quad - 2 \int_0^\infty d\lambda f_1(r, \lambda) \sum_{k=1}^m \cos \lambda k + 2 \int_0^\infty d\lambda f_2(r, \lambda) \sum_{k=1}^m \sin \lambda k] \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \left(\int_1^{m+1} \widehat{f}_{1c}(y)dy - \int_1^{m+1} \widehat{f}_{2s}(y)dy \right). \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Preuve. Puisque la fonction $P_1(y)p'_r(y)$ est bornée sur $[1, m+1]$, elle est intégrable. A cause de la discontinuité de P_1 , nous travaillons séparément sur chaque intervalle ouvert $]k+\epsilon, k+1-\epsilon[$, $k=1, \dots, m$ et $\epsilon > 0$ assez petit. Une intégration par partie et Fubini donnent

$$\begin{aligned}
\int_{k+\epsilon}^{k+1-\epsilon} P_1(y)p'_r(y)dy &= -\frac{1}{\pi} \left(\int_{k+\epsilon}^{k+1-\epsilon} dy P_1(y) \int_0^\infty \cos(\lambda y) \lambda f_2(r, \lambda) d\lambda \right. \\
&\quad \left. + \int_{k+\epsilon}^{k+1-\epsilon} dy P_1(y) \int_0^\infty d\lambda \sin(\lambda y) \lambda f_1(r, \lambda) \right) \\
&= -\frac{1}{\pi} \left(\int_0^\infty f_2(r, \lambda) d\lambda [P_1(k+1-\epsilon) \sin \lambda(k+1-\epsilon) \right. \\
&\quad \left. - P_1(k+\epsilon) \sin \lambda(k+\epsilon) + \int_{k+\epsilon}^{k+1-\epsilon} \sin \lambda y dy] \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty f_1(r, \lambda) d\lambda [-P_1(k+1-\epsilon) \cos \lambda(k+1-\epsilon) \right. \\
&\quad \left. + P_1(k+\epsilon) \cos \lambda(k+\epsilon) - \int_{k+\epsilon}^{k+1-\epsilon} \cos \lambda y dy] \right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^m \int_k^{k+1} P_1(y) p'_r(y) dy &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m \int_{k+\epsilon}^{k+1-\epsilon} P_1(y) p'_r(y) dy \\
&= -\frac{1}{\pi} \left(\int_0^\infty d\lambda f_2(r, \lambda) \left[\frac{1}{2} \sin \lambda - \frac{1}{2} \sin \lambda(m+1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{k=1}^m \sin \lambda k + \int_1^{m+1} \sin \lambda y dy \right] \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty d\lambda f_1(r, \lambda) \left[-\frac{1}{2} \cos \lambda + \frac{1}{2} \cos \lambda(m+1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^m \cos \lambda k - \int_1^{m+1} \cos \lambda y dy \right] \right),
\end{aligned}$$

puisque la fonction $P_1(y)p'_r(y)$ est intégrable sur $[1, m+1]$. ■

Nous allons faire tendre m vers ∞ dans l'expression de $\int_1^{m+1} P_1(y)p'_r(y)dy$ donnée par l'équation (3.15). On utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Pour cela, on doit veiller à avoir des estimées qui sont uniformes en $r \in [0, T]$. Dans les formules du théorème 3 en page 158 de [67], voir le Théorème 27 ici, on doit suivre à la trace la dépendance en r ; une fois l'intégrabilité par rapport à y est vérifiée, une intégration supplémentaire par rapport à r doit aussi converger. Ainsi, on doit établir les majorations appropriées correspondantes. On utilise encore le changement de variables $\rho = l(\lambda)$, voir la formule (3.10). Cela nous permettra de scinder les diverses intégrales en λ à la valeur $\lambda_0 = l^*(\rho_0)$. Les intégrales temporelles des parties jusqu'à λ_0 vont être typiquement traitées grâce à l'inégalité (voir la relation (3.13))

$$|f'_1(r, \lambda)| \leq T(|\Pi^{(s)}(\lambda)| + |\Pi^{(c)}(\lambda)|) \leq cT |\log \lambda| / \sqrt{\lambda}, \quad (3.16)$$

en supprimant complètement l'exponentielle. D'un autre côté, en posant

$$\varphi(r, \lambda) = \exp(-r\Pi^{(s)}(\lambda)) \log \lambda / \sqrt{\lambda}$$

nous allons utiliser à plusieurs reprises les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{\infty} \varphi(r, \lambda) d\lambda &\leq c \int_{l(\lambda_0)}^{\infty} \exp(-c'r\rho) [\log l^*(\rho)]^2 / l^*(\rho) d\rho \\ &\leq c \int_{l(\lambda_0)}^{\infty} \exp(-c'r\rho) (\log \rho)^4 / \rho^2 d\rho \leq c \exp(-c'rl(\lambda_0)) / r. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Transformées en des points simples Considérons les quatre termes transformées sinus et cosinus en les points $y_0 = 1, m + 1$. Une intégration par partie donne par exemple pour $y_0 = m + 1$

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{2s}(r, m + 1) &= (m + 1)^{-1} \widehat{f}'_{2c}(r, m + 1) \\ &= (m + 1)^{-1} (c(r, \lambda_0) + \int_{\lambda_0}^{\infty} \cos((m + 1)\lambda) f'_2(r, \lambda) d\lambda), \end{aligned}$$

l'intégrale $c(r, \lambda_0)$ par rapport à λ est encore intégrable par rapport à r sur $[0, T]$ par l'inégalité (3.16). Sur $] \lambda_0, \infty[$ on utilise la relation (3.17). Par conséquent l'intégrale temporelle du terme $\widehat{f}_{2s}(r, m + 1)$ converge vers 0 quand $m \rightarrow \infty$ (c'est donc un théorème de Riemann-Lebesgue uniforme). Les trois autres termes sont traités de la même manière.

Les termes de discontinuité Les intégrales mettant en jeu les sommes des sinus et cosinus seront traitées de façon presque similaire. Posons pour l'instant $m = 1, \dots, \infty$

$$d_c(m, \lambda) = \sum_{k=1}^m \cos \lambda k / k.$$

On a pour $a > 0$ arbitraire

$$\int_a^{\infty} d\lambda f_2(r, \lambda) \sum_{k=1}^m \sin \lambda k = \int_a^{\infty} f'_2(r, \lambda) d_c(m, \lambda) d\lambda + f_2(r, a) d_c(m, a).$$

Une relation similaire à lieu pour

$$d_s(m, \lambda) = \sum_{k=1}^m \sin \lambda k/k.$$

Pour tout $\lambda \in (0, 2\pi)$, nous avons les identités $d_s(\infty, \lambda) = (\pi - \lambda)/2$ et $d_c(\infty, \lambda) = -\log(2 \sin \lambda/2)$ qui sont disponibles dans les manuels de graduation (brièvement, il suffit d'utiliser un argument de fonction génératrice ; on somme la suite géométrique $x^k \exp(i\lambda k)$, où $|x| < 1$, on intègre terme à terme et on passe à la limite quand $x \rightarrow 1$ ce qui est permis par la règle de transformation d'Abel). La fonction (discontinue périodique) $d_s(\infty, \lambda)$ s'annule aux singularités $\lambda = k2\pi$, $k \geq 0$ et est bornée sur \mathbb{R} . D'autre part, on a $d_c(\infty, \lambda) \sim -\log \lambda$ au voisinage de l'origine et $d_c(\infty, \lambda) \sim -\log(2\pi - \lambda)$ au voisinage de 2π . Par conséquent, sur $(0, \lambda_0)$ on a encore une intégrabilité par rapport à λ et on utilise l'équation (3.16). En supposant, si nécessaire, que λ_0 est plus grand que la valeur donnée dans la relation (3.9) et que $\lambda_0 \neq k2\pi$, $k \geq 0$, on a par l'équation (3.17) (l'intégrale de λ_0 à $2\pi([\lambda_0/2\pi] + 1)$ est traitée facilement et est omise),

$$\begin{aligned} & \int_{2\pi([\lambda_0/2\pi]+1)}^{\infty} |f_2'(r, \lambda) d_c(\infty, \lambda)| d\lambda \\ & \leq cr \int_{2\pi([\lambda_0/2\pi]+1)}^{\infty} \varphi(r, \lambda) |\log(2 \sin \lambda/2)| d\lambda \\ & \leq cr \sum_{k \geq [\lambda_0/2\pi]+1} \varphi(r, k2\pi) \int_0^{2\pi} |\log(2 \sin \lambda/2)| d\lambda \\ & \leq cr \sum_{k \geq [\lambda_0/2\pi]+1} \varphi(r, k2\pi) \leq cr \int_{2\pi[\lambda_0/2\pi]}^{\infty} \varphi(r, \lambda) d\lambda \leq c(\lambda_0). \end{aligned}$$

Intégrales de transformées Ce cas est beaucoup plus compliqué et on a besoin du Théorème 27. Remarquons que la transformée sinus demande évidemment plus d'attention que la transformée cosinus. Par le Lemme 72 on peut trouver un $y_0(T)$ t.q. $\forall y \geq y_0(T)$ on a $0 < \Pi^{(c)}(\pi/2y) \leq 1/T$ et, si nécessaire, on peut prendre un

$y_0(T)$ plus grand t.q. $\forall y \geq y_0(T)$ et $\forall r \leq T$ on a

$$0 < y^{-1} f_2(r, \pi/2y) \leq y^{-1} \sin(r\Pi^{(c)}(\pi/2y)) \leq cTy^{-3/2} \log y.$$

L'intégrale par rapport à λ sur $[1, y_0(T)]$ est finie (uniformément en r) par la continuité sur un ensemble compact. Passons à la condition de Fomin ; on prend $p = 2$. On a

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty du(1/\sqrt{u}) \sqrt{\int_u^\infty d\lambda |f_2'(r, \lambda)|^2} \\ & \leq \int_0^{\lambda_0} du(1/\sqrt{u}) \sqrt{c(T, \lambda_0) + \int_{\lambda_0}^\infty d\lambda |f_2'(r, \lambda)|^2} \\ & \quad + \int_{\lambda_0}^\infty du(1/\sqrt{u}) \sqrt{\int_u^\infty d\lambda |f_2'(r, \lambda)|^2} \end{aligned}$$

il suffit donc d'utiliser l'équation (3.16) et de remarquer par exemple que nous avons

$$\begin{aligned} \int_u^\infty d\lambda |f_2'(r, \lambda)|^2 & \leq cr^2 \int_{l(u)}^\infty \exp(-c'r\rho) (\log(l^*(\rho)))^3 / (l^*(\rho))^{3/2} d\rho \\ & \leq cr^2 \int_{l(u)}^\infty \exp(-c'r\rho) (\log \rho)^6 / \rho^3 d\rho \leq cr \exp(-c'rl(u)). \end{aligned}$$

La fonction $f_1(r, \lambda)$ est également traitée de la même manière.

3.5 Etude des sommes de Minkowski de $aZ(t)$

Fixons $t > 0$. Soit $\tau_j, j \geq 0$, la suite des temps d'arrêt : $\tau_0 = 0$ p.s. et

$$\tau_{j+1} = \inf \{s > \tau_j + t | X(s-) = x_0 \text{ ou } X(s) = x_0\}.$$

Soit $Z_j(t), j \geq 1$, l'ensemble des temps de niveau entre τ_{j-1} et $\tau_{j-1} + t$. Définissons la multifonction aléatoire $Y_j = Z_j(t)$. Par la propriété de Markov forte, la suite Y_j est indépendante et identiquement distribuée. Soit k un entier positif et $a_i^k, i = 1, \dots, k$,

une collection de nombres réels non tous nuls, c'est-à-dire $\exists i_0 = 1, \dots, k$ t.q. $a_{i_0}^k \neq 0$.

Dans ce qui suit, on suppose sans perte de généralité que $a_k^k = 1$. Nous allons étudier

p.s. la mesure de Lebesgue des combinaisons linéaires de Minkowski

$$S_k = \sum_{i=1}^k a_i^k Y_i.$$

Notre approche est d'analyser les propriétés des mesures de Hausdorff de l'ensemble produit $Z^k(t) = \prod_{j=1}^k Z_j(t)$. En plus des conditions dans les sections 3.1 et 3.2.1 nous

supposons également que (concernant le subordonateur S)

(C1) la queue $\bar{\pi}(\cdot)$ est continue et $1/(\eta H)(s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow 0$, voir la relation (3.4);

(C2) les indices σ et β sont égaux et non critiques dans la mesure où $\sigma \in]0, 1[$.

Notre exemple dans la section 3.4 satisfait toutes les conditions plus haut (y compris la condition du Théorème 80 plus bas) avec $\sigma = \beta = 1/2$. En effet, par la relation

(3.7) et les tables dans [22], on a

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \lambda \int_0^\infty \exp(-\lambda x) \bar{\pi}(x) dx \\ &= \lambda \left(\int_0^1 \exp(-\lambda x) \bar{\pi}(x) dx + \int_1^\infty \exp(-\lambda x) \bar{\pi}(x) dx \right) \\ &= \lambda \left[\int_0^1 \exp(-\lambda x) \left(8 - 2 \frac{\log x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx - \int_0^1 \exp(-\lambda x) \left(2 \frac{\log x}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \exp(-\lambda x) \left(2 \frac{\log x}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx + \int_1^\infty \exp(-\lambda x) \left(2 \frac{\log x}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx \right] \\ &= \lambda \left[\int_0^1 \exp(-\lambda x) \left(8 - 4 \frac{\log x}{\sqrt{x}} - \frac{8}{\sqrt{x}} \right) dx + \int_0^\infty \exp(-\lambda x) \left(2 \frac{\log x}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx \right] \\ &= \sqrt{\lambda} \log \lambda \left[\left(4 \int_0^\lambda \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} dx - 2\sqrt{\pi} \right) - \frac{8}{\log \lambda} \int_0^\lambda \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} dx - \frac{4}{\log \lambda} \int_0^\lambda \frac{\exp(-x) \log x}{\sqrt{x}} dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\sqrt{\pi}(\psi(1/2)+2)}{\log \lambda} + \frac{8(1-\exp(-\lambda))}{\sqrt{\lambda} \log \lambda} \right], \end{aligned}$$

et donc quand $\lambda \rightarrow \infty$, $g(\lambda) \sim 2\sqrt{\pi\lambda} \log \lambda$, $|\psi(\lambda)| \sim 2\sqrt{\pi\lambda} \log \lambda$ et $H(s) \sim$

$2\sqrt{\pi/s} \log(1/s)$ au voisinage de zéro.

Rappelons que σ est la dimension de Hausdorff de l'image et définissons

$$\sigma^0 = [1/\sigma]. \quad (3.18)$$

Soit $H(\rho, k)$ l'hyperplan $\sum_{i=1}^k a_i^k x_i = \rho$, ou $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $\rho \in \mathbb{R}$. La projection de $[0, t]^k$ relativement à $H(0, k)$ sur l'axe des coordonnées ox_k sera notée $[c(t, k), c'(t, k)]$.

Le lemme suivant traite la question de la mesurabilité de l'ensemble

$$\mathcal{F}(t, k) = \{(\rho, \omega) \in [c(t, k), c'(t, k)] \times \Omega \mid H(\rho, k) \cap Z^k(t) \neq \emptyset\}$$

par rapport à la tribu produit.

Lemme 76 *On a $\mathcal{F}(t, k) \in \mathcal{B}(t, k) \otimes \mathcal{A}$ où $\mathcal{B}(t, k)$ est la tribu de Borel de $[c(t, k), c'(t, k)]$.*

Preuve. Il suffit de noter que

$$\mathcal{F}(t, k) = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{\bar{i} \in \{0, \dots, 2^m - 1\}^k} A_m(t, \bar{i}) \times \Omega_m(t, \bar{i}) \quad (3.19)$$

où \bar{i} est le multi-indice (i_1, \dots, i_k) , $A_m(t, \bar{i})$ la projection du cube

$$\prod_{r=1}^k [i_r 2^{-m} t, (i_r + 1) 2^{-m} t] \quad (3.20)$$

sur l'axe k par rapport à $H(0, k)$ et $\Omega_m(t, \bar{i})$ est l'ensemble des ω t.q. $Z^k(t)$ ait une intersection non vide avec le cube (3.20). En effet, une inclusion est évidente. Soit (ρ, ω) un élément du second membre de l'égalité (3.19) plus haut et supposons qu'il n'est pas dans $\mathcal{F}(t, k)$. Il va alors exister une bande ouverte contenant $H(\rho, k)$ et qui n'intersecte pas $Z^k(t)$ ce qui est manifestement impossible. ■

On peut à présent montrer le théorème principal de cette section.

Théorème 77 *Sous les notations ci-dessus, supposons que la condition (C1) est vérifiée, alors pour tout $1 \leq k < \sigma^0$ on a p.s.*

$$H^{-k} - m(Z^k(t)) = 0.$$

Preuve. Fixons $1 \leq k < \sigma^0$. Par la condition (C1) la dérivée de H^{-1} est

$$\frac{H(x) - \bar{\pi}(x)}{xH(x)},$$

car $\bar{\pi}(\cdot)$ est monotone, elle donc positive et ainsi elle est monotone. D'autre part, puisque de toute évidence

$$H(2x) \geq H(x)/2,$$

alors H^{-1} est bien une fonction de mesure de Hausdorff régulière, c'est-à-dire satisfait la relation (1.19). Nous montrons tout d'abord que p.s.

$$f - m(Z^k(t)) < \infty,$$

où $f(s) = H^{1-k}(s)\eta(s)$. Nous cherchons un recouvrement économique de $Z^k(t)$, à l'aide d'ensembles de diamètre suffisamment petit, qui est justement fourni par le Corollaire 70. Pour presque tout ω on peut trouver un $n_0(\omega)$, qui ne dépend que de ω , t.q. pour tout $n \geq n_0(\omega)$, nous avons

$$N(n, t) \leq c_1(\omega)H(2^{-n}).$$

Soit $\delta > 0$ t.q. $\delta < 2^{-n_0}\sqrt{k}$. Nous pouvons trouver un recouvrement $(Q_j)_{j \geq 1}$ de $Z_k(t)$ t.q. $\text{diam}Q_j < \delta/(2\sqrt{k})$ et t.q.

$$\sum_{j \geq 1} \eta(\text{diam}Q_j) \leq c_2(\omega).$$

Notons que $c_1(\omega)$ et $c_2(\omega)$ sont uniformes en δ . Soit n_j l'unique entier t.q. $2^{-(n_j+1)} \leq \text{diam}Q_j < 2^{-n_j}$. Pour $Z_k(t)$ dans la dernière direction $e_k = (0, \dots, 0, 1)$ de \mathbb{R}^k nous conservons le recouvrement ci-dessus (Q_j) de $Z_k(t)$. Cependant, pour $i \neq k$, nous allons utiliser le recouvrement économique des $k-1$ copies restantes de $Z(t)$ grâce aux intervalles $I_{n_j, i(j)}$ où $i(j)$ parcourt la collection des $N(n_j, t)$ intervalles qui recouvrent $Z_i(t)$. Pour simplifier la notation, nous écrivons simplement $K_{j, i(j)} = \prod_{i(j)} I_{n_j, i(j)} \times Q_j$ pour les éléments du recouvrement. On a par la relation (1.19) et par le fait que $\text{diam}K_{j, i(j)} \leq \sqrt{k}2^{-n_j} < \delta$,

$$\begin{aligned} \sum_{j, i(j)} f(\text{diam}K_{j, i(j)}) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i(j)} (H^{-1})^{k-1} (\text{diam}K_{j, i(j)}) \eta(\text{diam}K_{j, i(j)}) \\ &\leq c \sum_{j=1}^{\infty} H^{k-1}(2^{-n_j}) (H^{-1})^{k-1} (\text{diam}K_{j, i(j)}) \eta(\text{diam}K_{j, i(j)}) \\ &\leq c \sum_{j=1}^{\infty} \eta(c' \text{diam}Q_j) < c < \infty, \end{aligned}$$

où la dernière constante c est uniforme en δ . D'où $f - m(Z^k(t)) < \infty$ p.s.. Par le Théorème 28, notre théorème résulte de la Condition (C1) et du fait que $f(s) \prec H^{-k}(s)$. ■

Corollaire 78 *Sous les hypothèses du théorème précédent, supposons par ailleurs que la Condition (C2) est vérifiée, alors pour tout $\rho > 0$, l'événement que $H(\rho, k)$ rencontre $Z^k(t)$ est négligeable et $|S_k| = 0$ p.s..*

Preuve. Par la Condition (C2), on a pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, nous avons donc $s^{\sigma+\epsilon} = o(H^{-1}(s))$ quand $s \rightarrow 0$; ainsi pour $k < \sigma^0$ on a $H^{-k}(s) \prec s$. Par conséquent, par le Théorème 77 et par le théorème en page 75 de [30], la projection par rapport à $H(0, k)$ de $Z^k(t)$ sur l'axe ox_k a une mesure de Lebesgue nulle p.s..

Par le Lemme 76, un argument standard de Fubini montre qu'il existe un ensemble $E(t, k)$ dans $[c(t, k), c'(t, k)]$ avec $|E(t, k)| = 0$ t.q pour tout ρ_0 à l'extérieur de $E(t, k)$ l'événement que $H(\rho, k)$ rencontre $Z^k(t)$ est négligeable. Par conséquent, il existe un sous-ensemble E_0 dénombrable et dense dans $[c(t, k), c'(t, k)]$ t.q.

$$P(\forall x \in Z^k(t) \mid \sum_{i=1}^k a_i^k x_i \neq \rho_0, \forall \rho_0 \in E_0) = 1.$$

Supposons maintenant que, pour un certain ρ dans $[c(t, k), c'(t, k)]$, le plan $H(\rho, k)$ rencontre effectivement $Z^k(t, \omega)$ en un certain $x = x(\omega)$ avec une probabilité positive. Comme $Z^k(t, \omega)$ n'a pas de points isolés, il existe une suite $x_r(\omega) \in Z^k(t, \omega)$ qui converge vers $x(\omega)$. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, la bande compacte

$$K(\rho, \epsilon) = \cup_{\rho'} H(\rho', k) \cap [0, t]^k$$

pour $\rho' \in [\rho - \epsilon, \rho + \epsilon]$ contient tous les $x_r(\omega)$ pour r suffisamment grand. D'autre part, $\forall \rho_0 \in E_0 \cap [\rho - \epsilon, \rho + \epsilon]$ il existe évidemment une bande ouverte autour $H(\rho_0, k)$ qui ne rencontre pas $Z^k(t, \omega)$. Puisqu'un nombre fini de ces bandes suffit à recouvrir $K(\rho, \epsilon)$ il s'en suit une contradiction. ■

Remarque 79 *Si $1/\sigma$ n'est pas un nombre entier, le résultat ci-dessus est valable jusqu'à $k = \sigma^0$. Le cas où $1/\sigma$ est un nombre entier est en général critique. Dans le cas des exposants stables par exemple, il est possible que $k = \sigma^0$ comme on peut le vérifier directement puisque $\eta(s) \prec s^\sigma$ quand $s \rightarrow 0$ et $H(s) = cs^{-\sigma}$.*

Le résultat ci-dessous est complémentaire au Corollaire 78 et utilise l'analyse harmonique.

Théorème 80 Si $k > \sigma^0$ nous supposons que $a_i^k \neq 0$, $i = 1, \dots, k$, et que $|x|^{\sigma+\epsilon} = o(\tilde{\psi}(x))$ quand $|x| \rightarrow \infty$, pour tout $\epsilon > 0$, où

$$\tilde{\psi}(x) = \inf_{|y| \geq |x|} |\psi(y)|;$$

alors $|S_k| > 0$ p.s..

Preuve. Soit $k > \sigma^0$. Comme les théorèmes de projection pour les fractales de dimension > 1 ne donnent un ensemble de mesure positive que pour presque tout hyperplan $H(\rho, k)$, nous avons besoin d'une autre méthode basée sur l'asymptotique de la transformation de Fourier du temps local

$$\widehat{L}(x) = o\left(\sqrt{\log|x|/\tilde{\psi}(x)}\right) \text{ as } |x| \rightarrow \infty$$

établie dans [54]. Ceci montre que la mesure de convolution $\mu_k(dt) = *_{i=1}^k L_i(dt)$, où $L_i(dt)$ est l'image de la mesure $L(dt)$ par la transformation $t \mapsto a_i^k t$, satisfait $\widehat{\mu}_k(x) = o(|x|^{-1/2-c})$, pour un certain $c > 0$ suffisamment petit, quand $|x| \rightarrow \infty$. Cette transformée est donc de carré intégrable, la mesure est donc absolument continue avec une densité de carré intégrable. Elle est donc portée par un ensemble de mesure positive. ■

3.6 Glossaire de notations

\overline{A} adhérence de A

\mathcal{F} σ -algèbre

ρ_H distance de Hausdorff

F ensemble des fermes

$B(E)$ espace des fonctions bornées sur E

$C_0(E)$ espace de fonctions continues sur E qui tendent vers zéro à l'infini

$g(\lambda)$ exposant d'un subordonateur

I_A fonction indicatrice de A

Υ La famille de parties fermées

$\overline{\lim}$ la limite sup

$\underline{\lim}$ la limite inf

$\overline{\pi}(x) = \pi(]x, \infty[)$ la queue

$N(\epsilon, E)$ le nombre d'intervalles $[k\epsilon, (k+1)\epsilon[$, $k \in \mathbb{Z}$, qui contiennent un point de E

$b\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions réelles mesurables par rapport à \mathcal{F} bornées

\mathbb{Q} l'ensemble rationnels

\mathbb{R} l'ensemble des réels

\mathbb{Z} l'ensemble des entiers relatifs

$co(E)$ les ensembles convexes de E

β indice de Blumenthal et Gettoor

i.i.d. indépendantes et identiquement distribuées

$I_{n,k}$ intervalles dyadiques $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$, $n \geq 0, k \in \mathbb{Z}$

δ_x mesure de Dirac en x

$m(\cdot)$ mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

$|E|$ mesure de Lebesgue de E sur \mathbb{R}

$\pi(dx)$ mesure de Lévy

$N_0(\epsilon, T)$ nombre de sauts d'amplitude strictement plus grande que ϵ accomplis par un subordonateur avant T

$[x]$ partie entière du réel x

$\text{Pr} |_E$ projection par rapport à E

$x_n \uparrow$ suite x_n croissante

$x_n \downarrow$ suite x_n décroissante

$M \oplus L$ ou $M + L$ somme de Minkowski des ensembles M et L

$\hat{\mu}$ transformée de Fourier de la mesure μ

τ_E temps d'entrée dans E

$L(x, t)$ temps local à l'instant t en x

\mathcal{B} tribu de Borel de \mathbb{R}

$\overline{\mathcal{F}}$ complétée de \mathcal{F}

I un ensemble arbitraire d'indice

REFERENCES

- [1] Bally, V. (1986). Approximation theorems for the local time of a Markov process. Vestnik of Tomsk State University, Ser. Stud. Cerc. Mat. 38: 139-147.
- [2] Bencherif Madani, A., (1995). Une nouvelle construction du temps local d'un processus semi-stable. C. R. Acad. Sci. Paris. 321:1509-1511.
- [3] Bencherif-Madani, A., Laissaoui, D., (2004). On the local time of a semi-stable process, Scie. Tech. A. 21:11-14.
- [4] Bertoin, J. (1996). Lévy processes. Cambridge Univ. Press.
- [5] Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L.,(1987) Regular variation, Cambridge Univ. Press.
- [6] Blumenthal, R., M. (1992). Excursions of Markov processes. Birkhäuser. Boston.
- [7] Borodin, A., N., Salminen, P. (2002). Handbook of Brownian motion-facts and formulae, 2nd ed. Birkhäuser. Basel.
- [8] Balkema, A.A., Chung, K.L., (1991). Paul Lévy's way to his local time, Seminars on stochastic processes 1990, Birkäuser, Boston.
- [9] Barlow, M.T., Perkins, E.A., Taylor, S.J., (1986). Two uniform intrinsic constructions for the local time of a class of Lévy processes, Ill. J. Math., 30:1, printemps.
- [10] Berman, S., (1970). Gaussian processes with stationary increments: local times and sample function properties, Ann. Math. Stat. 41:1260-1272.
- [11] Breiman, L., (1968). Probability, Addison Wesley.
- [12] Blumenthal, R., M., Getoor, R., K. (1961). Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments. J. Math. Mech. 10: 493-516.
- [13] Blumenthal, R.M.,Getoor, R.K., (1962). The dimension of the set of zeros and the graph of a symmetric stable process, Ill. J. Math. 6:308-316.
- [14] Blumenthal, R.M.,Getoor, R.K., (1964). Local times for Markov processes, PTRF. 3: 50-74.
- [15] Blumenthal, R., M., Getoor, R., K. (1968). Markov processes and potential theory. Academic Press. New York.
- [16] Cramer, H., (1957). The mathematical foundations of statistics. Seventh printing, Princeton Univ. Press.

- [17] Chung, K.L., (1976). Excursions in Brownian motion, Arkiv. Math. 14:155-177.
- [18] Chung, K.L., (1995). Green, Brown and probability, World Scientific publishing.
- [19] Chung, K.L., Durrett, R., (1976). Downcrossings and local time, PTRF. 35: 147-149.
- [20] Dellacherie, C., Meyer, P.A., (1986). Probabilités et potentiel, chap I à XVI, Hermann.
- [21] Dellacherie, C., Meyer, P., A. (1986). Probabilités et potentiel. Chap. XII to XVI. Hermann.
- [22] Ditkine, V., Proudnikov, A., (1978). Transformations intégrales et calcul opérationnel. Mir. Moscow.
- [23] Dvoretzky, A., Erdős, P. (1951). Proc. Second Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. Univ. Calif. Press. 353-367.
- [24] Dvoretzky, A., Erdős, P., Kakutani, S., (1950). Double points of paths on Brownian motion in n -space, Acta. Sci. Math. 12:75-81.
- [25] Dvoretzky, A., Erdős, P., Kakutani, S., (1954). Multiple points of paths on Brownian motion in the plane, Bull. Res. Council. Israel. F3:364-371.
- [26] Dvoretzky, A., Erdős, P., Kakutani, S., (1958). Points of multiplicity c of plane Brownian paths, Bull. Res. Council. Israel. F7:175-180.
- [27] Dvoretzky, A., Erdős, P., Taylor, S.J., (1957). Triple points of Brownian motion in 3-space, Proc. Camb. Phil. Soc. 53: 856-862.
- [28] Eggleston, H.G., (1950). The Besicovitch dimension of cartesian product sets, Proc. Camb. Phil. Soc. 46: 383-386.
- [29] Erdős, P., Taylor, S.J., (1961). On the Hausdorff measure of Brownian paths in the plane, Proc.Camb. Phil. Soc., 57: 209-222.
- [30] Falconer, K., (1985). The geometry of fractal sets, Camb. Univ. Press.
- [31] Feller, W., (1950). An introduction to probability theory and its applications
- [32] Fristedt, B., E., Pruitt, W., E. (1971). Lower functions for increasing random walks and subordinators. PTRF. 18: 167-182.
- [33] Fristedt, B.E., (1964). The behavior of increasing stable processes for both small and large times, J. Math. Mech., 13:849-856.

- [34] Fristedt, B.E., Taylor, S.J., (1983). Constructions of local time for a Markov process. PTRF. 62: 73-112.
- [35] Frostman, O., (1935). Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles, Thèse, Lund.
- [36] Le Gall, J.F., (1983). Application du temps local aux équations différentielles stochastiques unidimensionnelles, Lec. Notes. Math. 986:15-31.
- [37] Le Gall, J.F., (1985). Sur le temps local d'intersection du mouvement Brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan, Lec. Notes. Math. 1123:314-331.
- [38] Le Gall, J.F., (1987). Le comportement du mouvement Brownien entre les deux instants où il passe par un point double, J. Funct. Anal. 71:246-262.
- [39] Le Gall, J.F., (1987). The exact Hausdorff measure of Brownian multiple points I, Seminars on stochastic processes, 1986, Birkäuser Boston. 107-137.
- [40] Le Gall, J.F., (1989). The exact Hausdorff measure of Brownian multiple points II, Seminars on stochastic processes, 1988, Birkäuser Boston. 193-197.
- [41] Le Gall, J.F., (1987). Temps locaux d'intersection et points multiples des processus de Lévy, Lec. Notes. Math. 986:15-31.
- [42] Geman, D., Horowitz, J., (1980). Occupation densities, Ann. Prob., 8:1-68.
- [43] Gettoor, R.K., (1976). Another limit theorem for local time, PTRF. 34: 1.10.
- [44] Gettoor, R.K., (1965). Additive functionals and excessive functions, Ann. Math. Stat. 36:409-422.
- [45] Gettoor, R.K., Kesten, H., (1972). Continuity of local times for Markov processes, Compositio. Math. 24:277-303.
- [46] Gettoor, R.K., Millar, P.W., (1972). Some limit theorems for local time, Comp. Math. 25(2):123-134.
- [47] Griego, R.J., (1967). Local time as a derivative of occupation times, Ill. J. Math. 11:54-63.
- [48] Hawkes, J. (1975). On the potential theory of subordinators. PTRF. 33: 113-132.
- [49] Hawkes, J. (1979). Potential theory of Lévy processes. Proc. London Math. Soc. 38(3): 335-352.
- [50] Horowitz, J. (1972). Semi-linear Markov processes, Subordinators and Renewal Theory. PTRF. 24: 167-193.

- [51] Ito, K., (1971). Poisson point processes attached to Markov processes, Proc. Sixth Berkeley. Symp. Math. Stat. Prob., 3, University of California Press. 225-240.
- [52] Ito, K., McKean, H.P., (1974). Diffusion processes and their sample paths, 2^e édition, Springer.
- [53] Jean, R., (1975). Mesure et intégration, Les presses de l'Université du Québec.
- [54] Kahane, J.P., Mandelbrot, B. (1965). Ensembles de multiplicité aléatoires. C. R. Acad. Sci. Paris. 261: 3931-3933.
- [55] Kahane, J.P., Salem, R. (1994). Ensembles parfaits et séries trigonométriques, 2^e édition, Hermann.
- [56] Karatzas, I., Shreve, S.E., (1988). Brownian motion and stochastic calculus, 2^e édition, Springer.
- [57] Kesten, H., (1965). An iterated logarithm law for local time, Duke Math. J. 32:447-456.
- [58] Khintchine, A.Y., (1949). Mathematical foundations of statistical mechanics, Dover, New York.
- [59] Kingman, J.F.C., (1972). Regenerative phenomena, London, Wiley.
- [60] Kingman, J.F.C., (1973). An intrinsic description of local time. J. Lond. Math. Soc. 6(2): 725-731.
- [61] Laissaoui, D., Bencherif-Madani, A., (2011). An entropy limit law for local time. Self-similarity and related fields; Le Touquet Paris-Plage France.
- [62] Laissaoui, D., Bencherif-Madani, A., (2014). A limit theorem for local time and application to random sets. Sta. Pro. Let. 88: 107-117.
- [63] Lamperti, J., (1962). Semi-stable stochastic processes, Trans. AMS. 104: 62-78.
- [64] Lévy, P., (1959). Construction du processus de W. Feller et H. P. McKean en partant du mouvement brownien, Probability and statistics (le volume Harald Cramer), Stokholm.
- [65] Lévy, P., (1965). Processus stochastiques et mouvement Brownien, Gauthier-Villars.
- [66] Lévy, P., (1939). Sur certains processus stochastiques homogènes, Compositio. Math. 7:283-339.

- [67] Liflyand, E., R. (1993). On asymptotics of Fourier transform for functions of certain classes. *Analysis Mathematica*. 19: 151-168.
- [68] Maisonneuve, B., (1974). Systèmes régénératifs, *Astérisque*, 15 Soc. Math. France.
- [69] Maisonneuve, B., (1980). Temps local et dénombrements d'excursions, *PTRF*. 52: 109-113.
- [70] Meyer, P.A., (1969). Processus à accroissements indépendants et positifs. *LMN*. 88:175-189.
- [71] Molchanov, I. (2005). *Theory of random sets*. Springer. Berlin.
- [72] Perkins, E., (1982). Local time and pathwise uniqueness for stochastic differential equations, *Lec. Notes. Math.* 920:201-208.
- [73] Perkins, E., (1982). Local time is a semi-martingale, *PTRF*. 60: 79-117.
- [74] Pollard, H., (1946). The representation of e^{-x^λ} as a Laplace transform, *Bull. Amer. Math. Soc.* 52:908-910.
- [75] Rogers, C.A., Taylor, S.J., (1961). Functions continuous and singular with respect to a Hausdorff measure, *Mathematika*. 8:1-31.
- [76] Rosen, J., (1986). A renormalized local time for multiple intersections of planar Brownian motion, *Lec. Notes. Math.* 1204:515-531.
- [77] Rosen, J., (1983). A local time approach to self-intersections of Brownian paths in space, *Commun. Math. Phys.* 88: 327-338.
- [78] Sato, K., I. (1999). *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge Univ. Press.
- [79] Schilling, R., L., Song, R., Vondracek, Z. (2010). *Bernstein Functions Theory and Applications*. De Gruyter Stud. Math. 37.
- [80] Song, R., Vondracek, Z. (2010). Some remarks on special subordinators. *Rocky Mount. J. Math.* 40(1): 321-337.
- [81] Stone, C J., (1961). The set of zeros of a semi-stable process, III. *J. Math.* 7:631-637.
- [82] Symanzik, K., (1969). Euclidean quantum field theory, dans: *Local quantum theory*, R. Jost, (éd), Acad. press, New York.
- [83] Taylor, S.J., (1964). The exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion, *Proc.Camb. Phil. Soc.*, 60: 253-258.
- [84] Taylor, S.J., (1986). The measure theory of random fractals, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 100:383-406.

- [85] Taylor, S.J., (1961). On the connection between Hausdorff measures and generalized capacities, Proc. Camb. Phil. Soc., 57:524-531.
- [86] Taylor, S.J., (1973). Sample path properties of processes with stationary independent increments, Stochastic analysis, D.G. Kendall et E.F. Harding éd. 387-414.
- [87] Taylor, S.J., Wendel, J.G., (1966). The exact Hausdorff measure of the zero set of a stable process. PTRF. 6: 170-180.
- [88] Trotter, H.F., (1958). A property of Brownien motion paths, Ill. J. Math. 2:425-432.
- [89] Vallois, P., (1983). Le problème de Skorokhod sur \mathbb{R} : une approche avec le temps local, Lec. Notes. Math. 986:227-239.
- [90] Williams, D., (1977). On Lévy's downcrossing theorem, PTRF. 40: 157-158.
- [91] Williams, D., (1979). Diffusions, Markov processes and martingales, voll, Wiley.