REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS SETIF
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE

Présentée par :

Nadia RAHMANI ép. KERAGHEL

Pour l'Obtention du Diplôme de

DOCTORAT D'ETAT

Option : Mathématiques Appliquées

THEME

Reconstruction d'une fonction d'utilité à partir d'un nombre fini d'observations sur le comportement d'un consommateur

Soutenue Le 30 Décembre 2008

Devant le jury

Président	**: Dr. N. BENSALEM**	**Prof. Université Ferhat Abbas Sétif.**
Rapporteurs	**: Dr. J.P. CROUZEIX**	**Prof. Université Clermont-Fd France.**
	: Dr. A. KERAGHEL	**Prof. Université Ferhat Abbas Sétif.**
Examinateurs	**: Dr. A. YASSINE**	**Prof. Université Le Havre France.**
	: Dr. D. BENTERKI	**M.C. Université Ferhat Abbas Sétif.**

Année 2008/ 2009

Reconstruction d'une fonction d'utilité
à partir d'un nombre fini d'observations sur le
comportement d'un consommateur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, Monsieur Jean-Pierre Crouzeix Professeur à l'université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, pour son soutien permanent. Il a su me faire profiter de toute son expérience. Je ne le remercierai jamais assez pour sa disponibilité et ses conseils précieux.

Mes vifs remerciements vont également à mon co-directeur de thèse, Monsieur Abdelkrim Keraghel Professeur à l'université de Sétif, pour son assistance sans limite tout au long de cette étude.

Merci à Monsieur Naceurdine Bensalem pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à messieurs Adnane Yassine Professeur à l'université le Havre et Djamel Benterki Maître de conférence à l'université de Sétif, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Résumé. Notre étude apporte des contributions théoriques et algorithmiques pour traiter le problème des préférences révélées dans la théorie du consommateur. On s'intéresse essentiellement à la reconstruction d'une fonction d'utilité à partir d'un nombre fini d'observations sur les choix effectués par le consommateur. Nous montrons qu'il s'agit d'un problème d'intégration dans le contexte le plus général de la convexité généralisée. Nous développons alors une approche originale faisant appel aux investigations récentes liées à l'analyse convexe généralisée et la monotonie généralisée. L'optimisation linéaire et non linéaire sont également fondamentales pour établir certains résultats. Des simulations numériques sont réalisées avec succès mettant en évidence la cohérence des résultats établis.

Abstract. Our study gives theoretical and algorithmic contributions to treat revealed preferences problem in consumer theory. We are essentially interested in the reconstruction of a utility function from a finite number of observations on choices made by the consumer. We show that it is about a problem of integration in the most general context of the generalized convexity. We develop then an original approach appealing recent investigations of generalized convex analysis and generalized monotonicity. Linear and nonlinear optimization are also fundamental to establish certain results. Numeric simulations are successfully realized showing the coherence of the established results.

Table des matières

INTRODUCTION

La convexité des fonctions joue un rôle central dans plusieurs branches de mathématiques appliquées. En particulier dans la théorie classique de l'optimisation où la convexité permet d'obtenir des conditions d'optimalité globale nécessaires et suffisantes.

Or, dans plusieurs cas, des fonctions non convexes interviennent dans la modélisation de problèmes réels. Une question fondamentale est donc de savoir si ces fonctions, malgré qu'elles soient non convexes, conservent certaines propriétés caractéristiques des fonctions convexes. Par exemple, assurer qu'une condition nécessaire pour un minimum est aussi suffisante ou bien qu'un minimum local est aussi un minimum global. Cela a conduit à l'introduction de plusieurs généralisations du concept classique des fonctions convexes utilisables dans plusieurs domaines tels que l'économie, la théorie des probabilités et d'autres domaines scientifiques.

Ainsi une large classe de fonctions dites quasi-convexes est introduite. Cette notion est attribuée à De Finetti (1949) bien que son utilisation remonte à (1928) comme hypothèse technique dans la théorie de minimaximisation de John Von Neumann.

Il est facile de se rendre compte que la quasi-convexité ne suffit pas pour globaliser un minimum local. De même une condition de stationnarité n'est pas une condition nécessaire et suffisante d'optimalité. Ces deux inconvénients ont motivé l'introduction des fonctions pseudo-convexes que nous présentons sous la forme due à Ponstein (1969).

Aussi, la convexité est étroitement liée à la monotonie : une fonction différentiable est convexe si et seulement si son gradient est un opérateur monotone. Ceci peut être étendu aux fonctions non différentiables à travers le sous-différentiel. Des caractérisations similaires de monotonie dites généralisées sont établies pour les fonctions convexes généralisées. La quasimonotonie a été introduite par Hassouni en (1983) et indépendamment par Karamardian et Schaible en (1990), la pseudomonotonie par Karamardian en (1976). En fait, les opérateurs monotones généralisés ne sont pas nouveaux dans la littérature. La première apparition de la monotonie généralisée remonte à (1936) [43], aussi bien dans le concept des préférences locales dans le problème du consommateur que dans le domaine de l'équilibre économique. Il est également remarquable que différents axiomes de préférences révélées dans la théorie du consommateur sont tout simplement des conditions de monotonie généralisée. Une littérature considérable est consacrée à ces aspects. Ainsi le domaine déjà bien établi de la convexité généralisée et celui de la monotonie généralisée moins développé progressent et apparaissent simultanément dans plusieurs domaines d'application. Des ouvrages et des monographies de haut niveau sont consacrés actuellement à ces notions leur donnant une nature interdisciplinaire dans le domaine de la recherche.

La microéconomie est un domaine de recherche important où l'on fait constamment appel à la convexité généralisée et à la monotonie généralisée. Notamment dans le problème du consommateur. En effet, ce dernier disposant de ressources budgétaires limitées, cherche à maximiser la satisfaction que lui procurent les biens qu'il peut acquérir en fonction du budget dont il dispose et des prix des biens. Un cas intéressant est celui où cette satisfaction peut être mesurée par une grandeur numérique $u(x)$, le vecteur x représentant les biens achetés, la fonction u est appelée **fonction d'utilité**. Le problème se met alors sous la forme :

$$\max \{u(x) \,:\, x \in G, \;\; \langle p, x\rangle \leq b\} \tag{U}$$

où $G \subseteq \mathbb{R}^n_+$ représente l'ensemble de biens disponibles, $b > 0$ est le budget du consommateur, la composante i du vecteur $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ est le prix unitaire du bien i, la composante i du vecteur x est la quantité du bien i acheté. Ainsi $\langle p, x\rangle$ est le coût de la consommation x, $\langle p, x\rangle \leq b$ représente la contrainte budgétaire, $u(x)$ représente la satisfaction (l'utilité) ressentie par le consommateur lorsqu'il a obtenu le vecteur bien x.
L'ensemble des solutions optimales du problème (U) est noté $X(p, b)$ il est le même que $X(\alpha p, \alpha b)$ pour tout $\alpha > 0$. On peut donc se contenter de $X(p)$ moyennant une normalisation des prix par le budget (on remplace p par $\frac{1}{b}\,p$) . De façon générale $X(p)$ est un ensemble et non nécessairement un singleton. La relation qui à p associe $X(p)$ est donc une multiapplication (correspondance chez les économistes) appelée **demande**.

Si la fonction d'utilité u est disponible la correspondance demande est parfaitement déterminée en résolvant tout simplement le problème d'optimisation (U). Un problème important **auquel on s'intéresse** consiste à construire, quand cela est possible, à partir de la correspondance demande $X(p)$ une fonction d'utilité. Ce problème connu comme le **problème des préférences révélées**, toujours d'actualité a reçu une attention spéciale depuis les derniers développements liés à la théorie du consommateur voir [38, 22], [33] .
Cependant, des recherches menées par des économistes qui s'aventurent parfois dans des aspects mathématiques ambigus, ou par des mathématiciens qui n'accordent pas à certains aspects économiques l'intérêt qu'il faut ont conduit à des confusions ressenties par tous, ne favorisant pas le développement d'une méthodologie convenable.
Il est donc nécessaire et important d'engager une étude théorique cohérente permettant d'établir l'existence d'une fonction d'utilité, d'hexiber ses propriétés et proposer un algorithme pour sa construction.
Notre étude va dans ce sens : nous reprenons à la base les concepts économiques liés au problème en leur donnant une modélisation mathématique claire et exploitable. Nous montrons que le problème des préférences révélées est un problème d'intégration relatif au cadre de la convexité généralisée. Nous proposons alors une approche fiable et avantageuse en tirant profit des travaux de J.P. Crouzeix et ses coauteurs relatifs au problème d'intégration convexe approchée.
La thèse est répartie en trois chapitres. Le premier présente des résultats d'analyse convexe, d'optimisation, de convexité et monotonie généralisées qui serviront d'appui pour les développements ultérieurs. Le second chapitre illustre les principaux concepts de la théorie du consommateur dans un cadre mathématique original. Le troisième chapitre est consacré au problème des préférences révélées, c'est à dire la construction effective d'une fonction d'utilité à partir d'un nombre fini d'observations sur le choix du consommateur. Deux approches sont à l'ordre du jour :

- L'approche d'Afriat qui conduit à la construction d'une fonction d'utilité u concave à l'aide d'une procédure standard de programmation linéaire. Nous avons pu constaté qu'une telle procédure prédictrice risque de conduire

à des conclusions trompeuses concernant les choix du consommateur et nous avons donné des explications raisonnables à ce propos.

• Notre approche qui considère la fonction u quasiconcave seulement et met au point un algorithme original pour évaluer approximativement les valeurs de u. Le préordre est alors bien représenté. Des simulations numériques signifiantes sont effectuées mettant en évidence la cohérence des résultats que nous avons établis.

Mots clés : Convexité généralisée, Monotonie généralisée,
Optimisation, Problème du consommateur,
Fonctions d'utilité, Fonction demande,
Préférences révélées.

Chapitre 1

Rappels d'analyse convexe et d'optimisation

1.1 Introduction

Ce chapitre présente le bagage mathématique nécessaire pour le traitement du problème considéré dans cette thèse.
Il s'agit de résultats fondamentaux d'analyse convexe et d'optimisation.

1.2 Éléments d'analyse convexe

1.2.1 Ensembles convexes

Définition 1.1 *: Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si :*

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in C \quad \forall\, x, y \in C, \ \ \forall\, \lambda \in [0,1].$$

Autrement dit si le segment de droite joignant deux points quelconques $x, y \in C$: $[x,y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y \ : \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$ est entièrement inclus dans C.

Une conséquence immédiate de la définition dit que **toute intersection de convexes est convexe**. En particulier **toute intersection de convexes fermés est un ensemble convexe fermé**.

Exemples :

1. Les ensembles : $\left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ b^T x \geq \beta\right\}$, $\left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ b^T x \leq \beta\right\}$, $b \neq 0$ appelés **demi-espaces fermés** sont des convexes.
2. Les ensembles : $\left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ b^T x > \beta\right\}$, $\left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ b^T x < \beta\right\}$, $b \neq 0$ appelés **demi-espaces ouverts** sont des convexes.
3. Les ensembles de la forme : $P = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \geq b\}$, où A est une $m \times n$ matrice et b un m-vecteur, sont des convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ comme intersections d'un nombre fini de demi-espaces fermés. On les appelle polyèdres convexes (ou tout simplement polyèdres si aucune confusion n'est à craindre).
4. L'ensemble S des solutions optimales du programme linéaire

$$m = \min_x \left\{c^T x \ : Ax = b, \ x \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^n\right\}. \qquad (PL)$$

   est un polyèdre convexe, il constitue l'ensemble de tous les points qui minimisent la forme linéaire $c^T x$ sur la région polyédrique :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = b, \ x \geq 0\}.$$

5. La boule unité $C = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x\| \leq 1\}$, où $\| \, \|$ désigne une norme, est convexe.

Définition 1.2 *: On appelle* ***combinaison convexe*** *de m-vecteurs $x^1, \cdots, x^m$ de $\mathbb{R}^n$, toute* ***combinaison linéaire*** *de la forme :*
$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i$, *avec* $\lambda_i \geq 0, \forall i$ *et* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

On montre qu'un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est convexe si et seulement si, il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.

Définition 1.3 *: L'intersection de tous les convexes contenant un sous ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est appelée :* ***enveloppe convexe*** *de S. On la note $conv(S)$ ou $co(S)$. C'est le plus petit convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant S.*

Définition 1.4 *: L'intersection de tous les convexes fermés contenant un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est appelée :* ***enveloppe convexe fermée*** *de S. On la note $\overline{conv}(S)$ ou $\overline{co}(S)$. C'est le plus petit convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ contenant S.*

Définition 1.5 *: Un sous ensemble K de $\mathbb{R}^n$ est appelé* ***cône*** *si $\mathbb{R}_+^* K \subseteq K$ ie., $\forall \, \lambda > 0 \, , \forall \, x \in K, \; \lambda x \in K$.*

Si $K \bigcap (-K) = \{0\}$, K est dit ***pointé*** *ou* ***saillant*** *(ie., ne contenant aucune droite).*

Si K est convexe, on l'appelle ***cône convexe****.*

N.B : Tout cône fermé non vide contient l'origine.

Exemples

1. L'orthant $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, x_i \geq 0, \, i = 1 : n\}$ et son intérieur $\text{int}(\mathbb{R}_+^n) = \mathbb{R}_{++}^n = \{x \, : \, x_i > 0\}$ sont deux cônes convexes d'usage fréquent.
2. Tout sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est un cône convexe (fermé).

Si C est un convexe alors $int(C)$ et $cl(C)$ sont convexes. Si $int(C) \neq \emptyset$ alors

$$int(C) = int(cl(C)) \text{ et } cl(in(C)) = cl(C).$$

Définition 1.6 *Etant donné $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe, $c \in C$ est dit être un* ***point extrémal*** *de C si*

$$c = (1-\lambda)a + \lambda b \ \text{ avec } a, b \in C \ \text{ et } \lambda \in]0,1[\Longrightarrow a = b = c.$$

Il est clair que si C est un convexe d'intérieur non vide, tous ses points extrémaux sont contenus dans sa frontière.
Un convexe fermé peut ne pas avoir de point extrémal. C'est le cas de $\mathbb{R}^n$. Un autre exemple est $C = [0, \infty[\times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$.
Si C est un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$ alors C admet au moins un point extrémal et est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Ce résultat puissant est dû à Minkowsky. IL est particulièrement important lorsque C est un polyèdre, appelé alors polytope auquel cas on obtient une caractérisation simple d'une solution optimale d'un programme linéaire.

1.2.2 Projection et séparation

Rappelons le résultat classique suivant où $\| . \|$ désigne la norme euclidienne.

Théorème 1.1 *Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe fermé non vide et x un élément de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un élément $\bar{x}$ unique appartenant à C tel que $\|x - \bar{x}\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in C$. On dit que $\bar{x}$ est la* ***projection orthogonale*** *de x sur C, on la note $Proj_C(x)$. On a la caractérisation suivante*

$$\bar{x} = Proj_C(x) \Longleftrightarrow \bar{x} \in C \ \text{ et } \ \langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle \leq 0 \ , \ \forall y \in C.$$

En particulier $x \in C$ si et seulement si $x = Proj_C(x)$.

En conséquence du théorème 1.1 nous avons les théorèmes de séparation :

Théorème 1.2 ***(séparation forte)*** *Si C et D sont deux convexes fermés non vides de $\mathbb{R}^n$ tels que $C \cap D = \emptyset$ et si l'un des deux est compact, alors il existe un vecteur $a \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$ et deux scalaires α, β tels que*

$$\langle a, x\rangle \leq \alpha < \beta \leq \langle a, y\rangle \quad \forall x \in C, \quad \forall y \in D.$$

Théorème 1.3 ***(séparation stricte)*** *Soient C et D deux convexes non vides de $\mathbb{R}^n$, C ouvert et tels que $C \cap D = \emptyset$. Alors il existe un vecteur $a \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$ et un scalaire α tels que*

$$\langle a, x\rangle < \alpha \leq \langle a, y\rangle \quad \forall x \in C, \quad \forall y \in D.$$

Théorème 1.4 ***(séparation propre)*** *Soient C et D deux convexes non vides de $\mathbb{R}^n$, tels que $C \cap D = \emptyset$. Alors il existe un vecteur $a \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$ et un scalaire α tels que*

$$\langle a, x\rangle \leq \alpha \leq \langle a, y\rangle \quad \forall x \in C, \quad \forall y \in D$$

$$\text{et} \quad \exists\, x \in C\ ,\ y \in D \quad \text{tel que} \quad \langle a, y - x\rangle > 0.$$

On déduit du théorème 1.2 le résultat suivant :

Proposition 1.1 *Un convexe est fermé si et seulement si il est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.*

Proposition 1.2 *Si C est un convexe ouvert alors il est l'intersection des demi-espaces ouverts qui le contiennent.*

Contrairement à la proposition 1.1, la proposition 1.2 ne donne qu'une implication. En effet si toute intersection de fermés est un fermé, une intersection d'ouverts n'est point nécessairement un ouvert. C'est ainsi que le demi espace fermé

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle a, x\rangle \leq \alpha\}\ ,\ a \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

Peut s'écrire comme :

$$E = \bigcap_{\lambda > \alpha} \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle a, x\rangle < \lambda\}\,.$$

Ceci nous conduit à la notion d'evenly-convexe introduite par Fenchel[36] et redécouverte par Martinez. Legaz[56] et Penot. P[60] :

Définition 1.7 *On dit que $C \subset \mathbb{R}^n$ est* ***evenly-convexe*** *s'il est une intersection de demi espaces ouverts de $\mathbb{R}^n$.*

Il s'ensuit que :

a) Toute intersection d'ensembles evenly- convexes est evenly convexe.

b) Tout demi espace fermé est evenly- convexe, comme vu précédemment.

c) Tout ensemble convexe ouvert est evenly- convexe, puisqu'en raison, de la proposition 1.2, il est intersection de demi espaces ouverts.

d) Tout ensemble convexe fermé est evenly- convexe, puisqu'en raison, de la proposition 1.1, il est intersection de demi espaces fermés et donc intersection d'evenly-convexes.

Il existe des ensembles convexes qui ne sont pas evenly- convexes.
Exemple :

$$C = [0\,,\,1] \times [0\,,\,1[\cup \{(1,1)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

1.2.3 Fonctions convexes

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{\pm\infty\} = [-\infty, +\infty]$. On associe à f les ensembles suivants :

Epigraphe de f : $epi(f) = \Big\{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) \leq \lambda\Big\}$.

Epigraphe strict de f : $\widetilde{epi}(f) = \Big\{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) < \lambda\Big\}$.

Tranche ou ensemble de niveaux : $S_\lambda(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \lambda\}$.

Tranche stricte : $\widetilde{S}_\lambda(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Domaine effectif de f : $dom(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}$.

Nous avons choisi ici le point de vue de la minimisation (de fonctions convexes), ce qui conduit à privilégier les inégalités du type $f(x) \leq \lambda$. Les inégalités du type $f(x) \geq \lambda$ seront à considérer pour le cas de maximisation (par exemple de fonctions concaves).

Nous avons les relations (triviales) suivantes :

$$dom(f) = Proj_E(epi(f)) = Proj_E(\widetilde{epi}(f)) = \bigcup_{\lambda} S_\lambda(f) = \bigcup_{\lambda} \widetilde{S}_\lambda(f)$$

où $E = \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$S_\lambda(f) \times \{\lambda\} = epi(f) \bigcap [\mathbb{R}^n \times \{\lambda\}] \ , \ \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\text{et } S_\lambda(f) = \bigcap_{\mu > \lambda} \{x : f(x) \leq \mu\} = \bigcap_{\mu > \lambda} \{x : f(x) < \mu\} .$$

$$f(x) = \inf \{\lambda \in \mathbb{R}, : (x, \lambda) \in epi(f)\} = \inf \left\{\lambda \in \mathbb{R}, : (x, \lambda) \in \widetilde{epi}(f)\right\},$$

$$\text{et } f(x) = \inf \{\lambda \in \mathbb{R} \ : x \in S_\lambda(f)\} = \inf \left\{\lambda \in \mathbb{R} \ : x \in \widetilde{S}_\lambda(f)\right\}.$$

- f est dite **propre** si $\{\mathrm{dom\,(f)} \neq \emptyset \ \text{ et } \ \mathrm{f(x)} > -\infty, \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}\}$.

Définition 1.8 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *est dite **convexe sur*** $\mathbb{R}^n$ ***si*** $epi(f)$ *est un sous ensemble convexe de* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Nous avons donné la définition géométrique d'une fonction convexe. On montre que cette définition est équivalente à la définition analytique suivante :

Définition 1.9 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *est dite **convexe** sur* $\mathbb{R}^n$ *si*

$$f\left[(1-\lambda)x + \lambda y\right] \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in [0, 1] .$$

avec la convention $+\infty - \infty = -\infty + \infty = +\infty$.

Exemples

1. Toute norme de $\mathbb{R}^n : x \longmapsto \|x\|$ définit une fonction convexe.
2. Soit C un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, la **fonction indicatrice** de C est définie par

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & si \ x \in C, \\ +\infty & si \ x \notin C. \end{cases}$$

Il est facile de voir que δ_C est convexe si et seulement si C est convexe.

• f est dite **strictement convexe** sur $\mathbb{R}^n$ si :

$$f\left[(1-\lambda)x+\lambda y\right] < (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}^n, x\neq y\ ,\forall\lambda\in]0,1[.$$

• f est dite **concave** sur $\mathbb{R}^n$ si $-f$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.10 *: $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\bar{\mathbb{R}}$ est dite **semi-continue inférieurement** (s.c.i) en x^0 si pour tout $\lambda < f(x^0)$ il existe $\alpha>0$ tel que $\|x-x^0\|\leq\alpha\Longrightarrow f(x)>\lambda$.*

• f est dite **semi-continue supérieurement** (*s.c.s*) en x^0 si $-f$ est *s.c.i* en x^0.
• f est dite **semi-continue inférieurement** sur $C\subseteq\mathbb{R}^n$ si f est *s.c.i* en x, $\forall x\in C$.
• f est dite **continue** en x^0 (resp. sur C) si f est à la fois *s.c.i* et *s.c.s* en x^0 (resp. sur C).
On montre la proposition suivante :

Proposition 1.3 *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *f est s.c.i en tout $x\in\mathbb{R}^n$.*
2. *$epi(f)$ est fermé.*
3. *$S_\lambda(f)$ est fermée $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.*

Par analogie, f est *s.c.s* sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\geq\lambda\}$ est fermé $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.
On démontre également le résultat fondamental suivant :

Proposition 1.4 *Si $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\bar{\mathbb{R}}$ est une fonction convexe propre, alors f est continue sur $int(dom(f))$.*

Définition 1.11 *: Etant donné $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\bar{\mathbb{R}}$, la fermeture de son épigraphe est l'épigraphe d'une fonction que l'on note $\bar{f}$. Elle est la plus grande minorante s.c.i de f, on l'appelle **fermeture** (ou **régularisée**) de f.*

Si f **est convexe**, $cl(epi(f))$ est convexe et donc $\bar{f}$ est convexe.
On montre que f est $s.c.i$ en x^0 si et seulement si $f(x^0) = \bar{f}(x^0)$.
Si $f = \bar{f}$ alors f est dite fermée.
Nous avons :

$$\inf_x [f(x), x \in \mathbb{R}^n] = \inf_x [\bar{f}(x), x \in \mathbb{R}^n].$$

Définition 1.12 *: Soit* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, *on appelle* ***conjuguée (ou polaire)*** *de* f *la fonction* $f^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, *définie par :*

$$f^*(x^*) = \sup_x [\langle x, x^* \rangle - f(x) : x \in \mathbb{R}^n].$$

• f^* étant un suprémum de fonctions affines est par construction convexe $s.c.i.$
La conjuguée de f^* est appelée **biconjuguée** de f et est notée f^{**}. Il est clair que f^{**} est convexe $s.c.i.$
On démontre que :

1. $f^{**} \leq \bar{f}$.
2. Si $f(x) > -\infty, \forall x$ alors f est convexe et $s.c.i$ si et seulement si $f = f^{**}$.

Une conséquence directe de la définition de f^* est **l'inégalité dite de Fenchel** :

$$\langle x, x^* \rangle \leq f(x) + f^*(x^*), \, \forall \, x, x^* \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 1.13 *: Soit* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *propre et* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $f(x^0)$ *ait une valeur finie.*
• $x^* \in \mathbb{R}^n$ *est appelé* ***sous-gradient*** *de* f *en* x^0 *si*

$$f(x) \geq f(x^0) + \langle x - x^0, x^* \rangle, \, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

• *L'ensemble de tous les sous gradients de* f *en* x^0 *est appelé* ***sous-différentiel*** *de* f *en* x^0 *et est noté* $\partial f(x^0)$.

On a la caractérisation suivante :

$$\partial f(x^0) = \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n : f(x^0) + f^*(x^*) = \langle x^0, x^* \rangle \right\}.$$

On note que

$$\partial f(x^0) = \left\{x^* \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq f(x^0) + \langle x - x^0, x^* \rangle, \, \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

$$= \left\{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x - x^0, x^* \rangle \leq f(x) - f(x^0) \, \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

$$= \bigcap_x \left\{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x - x^0, x^* \rangle \leq f(x) - f(x^0) \right\}.$$

C'est donc un convexe fermé car intersection de demi-espaces fermés.

L'épigraphe d'une fonction convexe *s.c.i* étant l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent, donc f est enveloppe supérieure de ses minorantes affines. Nous avons donc le résultat suivant :

Proposition 1.5 *: Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une fonction convexe, propre et s.c.i, alors on a*

$$f(x) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(z) + \langle g(z), x - z \rangle \right\}.$$

où $g(z)$ est un élément arbitraire de $\partial f(z)$. Le suprémum peut être également pris sur un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x.

Par analogie, nous avons la représentation d'une fonction concave, propre et *s.c.s* :

Proposition 1.6 *: Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une fonction concave propre et s.c.s, alors on a :*

$$f(x) = \inf_z \left\{ f(z) + \langle g(z), x - z \rangle, \, z \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

$g(z)$ étant un élément arbitraire de $\bar{\partial} f(z)$.

où $\bar{\partial} f(z)$ désigne le **sur-différentiel** de f en z défini par :

$$\bar{\partial} f(z) = \left\{ g \in \mathbb{R}^n / \, f(x) \leq f(z) + \langle g, x - z \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Propriétés :

- $\partial f(x^0)$ est un convexe fermé, (éventuellement vide).
- $x^0 \notin dom(f) \Longrightarrow \partial f(x^0) = \emptyset$ par définition.
- Si $\partial f(x^0) \neq \emptyset$, f est dite **sous-différentiable** en x^0.

Si f est convexe, alors :

- f est différentiable en x^0 si et seulement si $\partial f(x^0)$ est un singleton, alors on a $\partial f(x^0) = \{\nabla f(x^0)\}$.
- $\partial f(x^0) \neq \emptyset \Longrightarrow f$ *s.c.i* en x^0 $(f(x^0) = \bar{f}(x^0))$. La réciproque est fausse.
- f *s.c.i* propre $\Longrightarrow \partial f(x^0) \neq \emptyset \; \forall x^0 \in ri(dom f)$.
- Si $x \in int(dom f)$ alors $\partial f(x)$ est convexe compact non vide.

Exemple intéressant :
Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $x^0 \in C$, on vérifie aisément que

$$\partial \delta_C(x^0) = \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x - x^0, x^* \rangle \leq 0 \, \forall x \in C \right\}.$$

C'est un cône convexe fermé, appelé **cône normal** à C en x^0, noté $N_C(x^0)$.
où rappelons le δ_C désigne la fonction indicatrice de l'ensemble C.
En fait le cône normal n'a d'intérêt que pour les points frontières de C,
En effet il est facile de vérifier que $N_C(a)$ est réduit à $\{0\}$ lorsque $a \in int(C)$.

Règles de calcul :

- $\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x)$, $\forall \lambda > 0$.
- $\partial(f+g)(x) \supseteq \partial f(x) + \partial g(x)$, $\forall x$. Si f et g sont convexes et propres, alors il y a égalité lorsque $int(dom f) \cap int(dom g) \neq \emptyset$
- Si $f(x) = \max_{i \in I} f_i(x)$, f_i convexe $\forall i \in I = \{1, \cdots, m\}$ alors $\partial f(x) = co\{\partial f_i(x),\, i \in I : f_i(x) = f(x)\}$.

Exemples :

- Si $f(x) = \max_{i=1}^{m} \{\langle a^i, x \rangle + t_i\}$ alors $\partial f(x) = co(a^i, i \in I(x))$, avec $I(x) = \{i \; : f(x) = \langle a^i, x \rangle + t_i\}$, $a^i \neq 0$ et $t_i \in \mathbb{R}$.

• $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe (propre) $\Longrightarrow \partial\varphi(t_0) = \left[\varphi'_-(t_0), \varphi'_+(t_0)\right], \forall\, t_0 \in$ $int(dom\varphi)$, où $\varphi'_-(t_0)$ et $\varphi'_+(t_0)$ désignent respectivement les dérivées à gauche et à droite en t_0. Rappelons à ce propos que φ étant convexe, elle admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en tout point appartenant à l'intérieur de son domaine effectif.

Soit f une fonction convexe, propre et $s.c.i$ sur $\mathbb{R}^n$ et soit $(x_i, x_i^*)_{i=0,1,\cdots,p}$ tels que $x_i^* \in \partial f(x_i)$, $\forall i$. Alors nous avons par définition :

$$f(x_1) \geq f(x_0) + \langle x_0^*, x_1 - x_0\rangle,$$

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \langle x_1^*, x_2 - x_1\rangle,$$

$$\vdots$$

$$f(x_p) \geq f(x_{p-1}) + \langle x_{p-1}^*, x_p - x_{p-1}\rangle,$$

$$f(x_{p+1}) \geq f(x_p) + \langle x_p^*, x_{p+1} - x_p\rangle.$$

avec $x_{p+1} = x_0$,
En additionnant membre à membre les inégalités précédentes on obtient :

$$\sum_{i=0}^{p} \langle x_i^*, x_{i+1} - x_i\rangle \leq 0.$$

cette dernière inégalité exprime la **cyclique monotonie du sous-différentiel** ∂f comme le montre la définition suivante :

Définition 1.14 *Etant donnée une multiapplication* $\Gamma : \mathbb{R}^n \overset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n$ *on dit que* Γ *est* ***monotone*** *si*

$$\langle y_1 - y_0, x_1 - x_0\rangle \geq 0 \quad, \forall\ (x_0, y_0),\ (x_1, y_1) \in \text{graphe}\,(\Gamma).$$

et est ***cycliquement monotone*** *si*

$$\sum_{i=0}^{p} \langle y_i, x_{i+1} - x_i\rangle \leq 0, \quad y_i \in \Gamma(x_i).$$

On rappelle que

$$\mathrm{graphe}\,(\Gamma) = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : \mathrm{y} \in \Gamma(\mathrm{x})\}\,.$$

On voit bien que pour $p = 0,$ la monotonie cyclique coincide avec la monotonie. Autrement dit, la monotonie cyclique implique la monotonie. La réciproque est en générale non satisfaite, considérer par exemple l'opérateur linéaire :

$$x \in \mathbb{R}^n \to Ax \in \mathbb{R}^n.$$

A étant une $n \times n$ matrice réelle. On vérifie sans peine que la monotonie est satisfaite si et seulement si la matrice $\frac{1}{2}(A + A^T)$ est semi-définie positive, alors que la monotonie cyclique est équivalente à A symétrique semi-définie positive.
Notons que pour $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la monotonie coincide avec la monotonie cyclique.

Définition 1.15 *On dit qu'une multiapplication* $\Gamma : \mathbb{R}^n \overset{\rightarrow}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n$ *est **maximale monotone** si* Γ *est monotone et pour toute multiapplication* $\acute{\Gamma} : \mathbb{R}^n \overset{\rightarrow}{\longrightarrow} R^n$ *monotone avec* $\Gamma(x) \subset \acute{\Gamma}(x)\, \forall x \in \mathbb{R}^n$ *on a* $\Gamma(x) = \acute{\Gamma}(x),\, \forall x \in \mathbb{R}^n$

On montre que si Γ est maximale monotone alors $\Gamma(x)$ est convexe fermé en tout x, et que si $int(dom(\Gamma)) \neq \emptyset$ alors $int(dom(\Gamma))$ et $cl(dom(\Gamma))$ sont convexes, ont même intérieur et fermeture et que $\Gamma(x)$ est un compact non vide en tout $x \in int(dom(\Gamma))$.
On note ici que $dom(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Gamma(x) \neq \emptyset\}$.

1.3 Rappels d'optimisation

Sous sa forme générale, un problème d'optimisation s'écrit comme suit

$$\min_x \left[f(x) \,:\, x \in C\right]. \qquad (P)$$

La fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée **fonction objectif**, l'ensemble $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$ est appelé **l'ensemble des solutions réalisables**.

On appelle **solution optimale globale** de (P), tout point $\bar{x} \in C$ satisfaisant $f(\bar{x}) \leq f(x)\ \forall x \in C$. L'ensemble des points $\bar{x}$ ainsi défini est noté $\arg\min_C f(x)$.
On dit qu'un point $\bar{x} \in C$ est **solution optimale locale** de (P), s'il existe un voisinage V de $\bar{x}$ tel que $f(\bar{x}) \leq f(x)\ \forall x \in C \cap V$. L'ensemble des points $\bar{x}$ ainsi défini est noté $\text{locmin}_{\,\text{C}}\ f(x)$.
Nous avons toujours $\arg\min_C f(x) \subseteq \text{locmin}_{\,\text{C}}\ f(x)$.
Rappelons que si f est semi continue inférieurement (s.c.i) et C compact (fermé et borné) alors $\arg\min_C f(x) \neq \emptyset$.

1.3.1 Conditions d'optimalité

A) Le cas sans contraintes

Ici $C = \mathbb{R}^n$. Le problème est donc

$$\min_x \left[f(x)\ :\ x \in \mathbb{R}^n \right]. \tag{P}$$

Conditions du premier ordre

Supposons la fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

Condition nécessaire (CN1)
– Si f a un minimum local en $\bar{x}$ alors $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

Condition suffisante (CS1)
– Si f est convexe et $\nabla f(\bar{x}) = 0$ alors f a un minimum global en $\bar{x}$.

Conditions du second ordre

Supposons la fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

Conditions nécessaires (CN2)

– Si f a un minimum local en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ alors $\nabla f(\bar{x}) = 0$ et la matrice des dérivées secondes $\nabla^2 f(\bar{x})$ est semi-définie positive sur $\mathbb{R}^n$.

Conditions suffisantes (CS2)

– Si $\nabla f(\bar{x}) = 0$ et si la matrice $\nabla^2 f(\bar{x})$ est définie positive, alors f a un minimum local en $\bar{x}$.

Cas des fonctions convexes
Si f est convexe (non nécessairement différentiable), alors une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que $\bar{x}$ soit un minimum global est
$0 \in \partial f(\bar{x})$.

B) Le cas avec contraintes

On considère maintenant le problème :

$$\min_x \left[f(x) \, : \, x \in C \right]. \tag{P}$$

où C est un convexe de $\mathbb{R}^n$ et f est C^1 sur un ouvert contenant C. On a les conditions suivantes d'optimalité en un point $\bar{x} \in C$:

– (CN1) Si f a un minimum local sur C en $\bar{x}$ alors $\langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0$ pour tout $x \in C$.
– (CS1) Si f est convexe et $\langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0$ pour tout $x \in C$ alors f a un minimum global sur C en $\bar{x}$.

Notons que dans les deux cas nous avons $\nabla f(\bar{x}) \in \tilde{N}(\bar{x})$ où
$\tilde{N}(\bar{x}) = \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n \, : \, \langle x^*, y - x \rangle \leq 0 \, \forall y \in \tilde{S}(\bar{x}) \right\}$ est le cône normal à l'ensemble de niveau $\tilde{S}(\bar{x}) = \{ y \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(y) < f(\bar{x}) \}$

On suppose maintenant que C est défini comme suit :

$$C = \{ x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, \, i = 1, \cdots, p \; ; \; h_j(x) = 0, \, j = 1, \cdots, q \}.$$

Les contraintes $g_i(x) \leq 0$ sont appelées **contraintes d'inégalités** et les contraintes $h_j(x) = 0$ **contraintes d'égalités**.
L'obtention de conditions nécessaires d'optimalité nécessite que certaines

conditions appelées conditions de qualification des contraintes soient vérifiées. Ici nous nous limiterons aux trois conditions de qualification suivantes :

- **(CQ1) C est un polyèdre convexe**

  C'est le cas lorsque les fonctions g_i et h_j sont affines.

- **(CQ2) Condition de Slater**

  La condition de qualification des contraintes de Slater est comme suit :

  1. Les fonctions g_i sont convexes et les fonctions h_j sont affines.
  2. Il existe x^0 tel que $g_i(x^0) < 0$ et $h_j(x^0) = 0$ pour tout i, j.

- **(CQ3) Condition de Mangasarian-Fromowitz**

La condition de qualification des contraintes de Mangasarian-Fromowitz en un point $\bar{x} \in C$ est comme suit

1. Les q vecteurs $\nabla h_j(\bar{x})$ sont linéairement indépendants.
2. Il existe $\bar{d}$ tel que $\langle \nabla h_j(\bar{x}), \bar{d} \rangle = 0$ pour tout j et $\langle \nabla g_i(\bar{x}), \bar{d} \rangle < 0$ pour tout $i \in I(\bar{x})$.

Le théorème suivant dit de Karush-Kuhn-Tucker-Lagrange donne une condition nécessaire d'optimalité :

Théorème 1.5 *Supposons que les fonctions f, g_i, h_j sont C^1 dans un voisinage de $\bar{x} \in C$ et que les contraintes vérifient une des trois conditions de qualification ci-dessus. Si f a un minimum local en $\bar{x}$ sur C alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^p$ et $\mu \in \mathbb{R}^q$ tels que*

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{q} \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0,$$

$\lambda_i \geq 0,\ g_i(\bar{x}) \leq 0,\ \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0\ \forall i$ *et* $h_j(\bar{x}) = 0\ \forall j$.
*Les quantités λ_i et μ_j sont appelées **multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker-Lagrange**.*

Lorsque le problème est convexe (f et g_i convexes et h_j affines) on a la condition suffisante d'optimalité :

Théorème 1.6 *Supposons que les fonctions* f , g_i *sont* C^1 *dans un voisinage de* $\bar{x} \in C$ *et convexes et que les fonctions* h_j *sont affines. S'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}^p$ *et* $\mu \in \mathbb{R}^q$ *tels que*

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{q} \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0,$$

$\lambda_i \geq 0,\ g_i(\bar{x}) \leq 0,\ \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0\, \forall i$ *et* $h_j(\bar{x}) = 0\, \forall j$
alors f *a un minimum global en* $\bar{x}$ *sur* C.

On associe au problème d'optimisation :

$$\min_x \{f(x) : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \cdots, p\ ;\ h_j(x) = 0,\ j = 1, \cdots, q\}, \qquad (P)$$

la fonction $l : \mathbb{R}^n \times [0, \infty[^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$l(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j h_j(x).$$

appelée Lagrangien.

Le théorème 1.7 s'écrit en terme de Lagrangien comme suit :

Théorème 1.7 *Supposons que les fonctions* f , g_i , h_j *sont* C^1 *dans un voisinage de* $\bar{x} \in C$ *et que les contraintes vérifient une condition de qualification. Si* f *a un minimum local en* $\bar{x}$ *sur* C *alors il existe* $\lambda \in \mathbb{R}^p$ *et* $\mu \in \mathbb{R}^q$ *tels que*

$$\nabla_x l(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0,\ \ \nabla_\lambda l(\bar{x}, \lambda, \mu) \leq 0,\ \ \nabla_\mu l(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0,$$

$\lambda \geq 0,\ \langle \lambda, \nabla_\lambda l(\bar{x}, \lambda, \mu) \rangle = 0.$

On montre dans [50] le résultat fondamental suivant :

Proposition 1.7 *: Soit* $C = \{x \in \mathbb{R}^n : p^t x \leq \beta\}, p \neq 0$ *un demi-espace et* $a \in C$ *alors :*

$$N_C(a) = \begin{cases} \{0\} & si\ p^t a < \beta, \qquad (1) \\ \{\lambda p : \lambda \geq 0\} & si\ p^t a = \beta. \qquad (2) \end{cases}$$

1.4 Quasiconvexité, pseudoconvexité

Une fonction convexe est caractérisée par la convexité de son épigraphe, alors qu'une fonction convexe généralisée est caractérisée seulement par la convexité de ses ensembles de niveaux inférieurs. Il s'agit donc d'une fonction non nécessairement convexe, mais qui conserve certains résultats intéressants garantis par la convexité, notamment dans le domaine de l'optimisation. En fait, les fonctions convexes généralisées sont extensivement considérées dans différents domaines d'application en l'occurrence l'économie. Ce paragraphe présente les propriétés fondamentales de telles fonctions.

Définition 1.16 *: Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est dite* ***quasi-convexe*** *(q.c) si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $S_\lambda(f) = \{x : f(x) \leq \lambda\}$ est convexe.*

Ce qui signifie également que toutes les sections $\widetilde{S}_\lambda(f)$ sont convexes.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est (q.c) sur $\mathbb{R}^n$.
2. $\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^n, \forall\, \lambda \in [0,1]$ $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$.
3. $\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^n, \forall\, \lambda \in [0,1]$ $f(y) \geq f(x) \Longrightarrow f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq f(y)$.
4. $\forall\, x^i \in \mathbb{R}^n, \forall\, \lambda_i \geq 0$ tel que $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$,
   $f(\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i) \leq \max_{i=1}^m \{f(x^i)\}$.

• f est dite **strictement quasi-convexe** (s.q.c) si l'inégalité dans (2) est stricte pour tout $x \neq y$ et $\lambda \in]0,1[$, ou si la dernière inégalité dans (3) est stricte.

Si de plus f est différentiable, alors chacune des conditions suivantes est une condition nécessaire et suffisante pour que f soit quasi-convexe sur $\mathbb{R}^n$.

1. $\forall x,\, y \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq f(y) \Rightarrow \langle \nabla f(y), x - y \rangle \leq 0$.
2. $\forall x,\, y \in \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y), x - y \rangle > 0 \Rightarrow \langle \nabla f(x), x - y \rangle \geq 0$.

Rappelons que si une fonction différentiable f est convexe et $\nabla f(x) = 0$, alors f atteint son minimum en x. Cette condition essentielle d'optimalité n'est malheureusement pas conservée par une fonction quasi-convexe comme

le montre la fonction d'une variable réelle définie par $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.
Un autre défaut des fonctions quasi-convexes est qu'un minimum local n'est pas nécessairement global comme le montre la fonction d'une variable réelle $f(x) = (x+1)^3$ si $x \leq -1$, $f(x) = 0$ si $-1 \leq x \leq 1$ et $f(x) = (x-1)^3$ si $x \geq 1$. Les fonctions pseudo-convexes sont introduites pour remédier à ces défauts.

Définition 1.17 *: Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ différentiable est dite **pseudo-convexe** sur $\mathbb{R}^n$ si, $\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^n, f(x) < f(y) \Rightarrow \langle \nabla f(y), x - y \rangle < 0$.*
*Elle est **strictement pseudoconvexe** si*
$\forall x,\, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y\ f(x) \leq f(y) \Rightarrow \langle \nabla f(y), x - y \rangle < 0.$

Si f est pseudoconvexe et si $\nabla f(x) = 0$, alors f a un minimum global en x, de plus tout minimum local est aussi global.
Une fonction pseudoconvexe (strictement pseudoconvexe) est quasi-convexe (strictement quasi-convexe). Réciproquement, nous avons [43]

Proposition 1.8 *: Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ différentiable est pseudoconvexe sur $\mathbb{R}^n$ ssi f est quasi-convexe sur $\mathbb{R}^n$ et possède un minimum local en tout x tel que $\nabla f(x) = 0$.*

Une fonction **quasiconcave** est caractérisée par la convexité de ses ensembles de niveaux supérieurs. Autrement dit, une fonction f est dite **quasiconcave** si $-f$ est quasi-convexe. Toutes les inégalités de caractérisation changent de signe (deviennent supérieurs).
Une fonction à la fois quasi-convexe et quasiconcave est dite être **quasimonotone**.
Une fonction f est **pseudoconcave** si $-f$ est pseudoconvexe.

Définition 1.18 *:Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est dite **evenly-quasi-convexe** si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble*

$$\widetilde{S}_\lambda(f) = \{x\, :\, f(x) < \lambda\}\,,$$

est evenly-convexe. Puisque $S_\lambda(f) = \bigcap_{\mu > \lambda} \widetilde{S}_\mu(f)$. $S_\lambda(f)$ est aussi evenly-convexe comme intersection d'ensembles evenly-convexes.

1.5 Monotonie, monotonie généralisée

Définition 1.19 *: Une multiapplication (ou un opérateur)*

$$T : \mathbb{R}^n \overset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \mathbb{R}^m$$

$$x \longmapsto T(x) \subset \mathbb{R}^m.$$

dont le graphe est

$$Gr(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y \in T(x)\}.$$

est dite

1. ***Monotone*** *si :*

$$\langle x^1 - x^0, y^1 - y^0 \rangle \geq 0,\ \forall\, (x^0, y^0), (x^1, y^1) \in Gr(T).$$

2. ***Cycliquement monotone*** *si :*

$$\sum_{i=0}^{k} \langle y^i, x^{i+1} - x^i \rangle \leq 0$$

$x^{k+1} = x^0$, $\forall\ y^i \in T(x^i),\ i = 0, \cdots, k.$

3. ***pseudomonotone*** *si :*

$$\left.\begin{array}{c} y^0 \in T(x^0)\ ,\ y^1 \in T(x^1) \\ \langle y^0, x^1 - x^0 \rangle \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \langle y^1, x^1 - x^0 \rangle \geq 0.$$

$$\left.\begin{array}{c} y^0 \in T(x^0)\ ,\ y^1 \in T(x^1) \\ \langle y^0, x^1 - x^0 \rangle > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \langle y^1, x^1 - x^0 \rangle > 0.$$

4. ***Cycliquement pseudomonotone*** *si :*

$$\left.\begin{array}{c} y^i \in T(x^i)\ \forall i = 0, 1, \cdots, k\ ,\ x^{k+1} = x^0 \\ \langle y^i, x^{i+1} - x^i \rangle \geq 0\ \forall i = 0, 1, \cdots, k-1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \langle y^k, x^k - x^0 \rangle \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{c} y^i \in T(x^i)\ \forall i = 0, 1, \cdots, k\ ,\ x^{k+1} = x^0 \\ \langle y^i, x^{i+1} - x^i \rangle \geq 0\ \forall i = 0, 1, \cdots, k-1 \\ \textit{et si une des inégalités est stricte} \end{array}\right\} \Longrightarrow \langle y^k, x^k - x^0 \rangle > 0$$

5. ***Maximale monotone*** *s'il n'existe aucune multi-application monotone* $L : \mathbb{R}^n \overrightarrow{\longrightarrow} \mathbb{R}^m$ *telle que*

$$Gr(L) \supset Gr(T) \quad et \quad Gr(L) \neq Gr(T).$$

Chapitre 2

Éléments de la théorie du consommateur

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous faisons le point sur les concepts économiques utilisés. Les notions de préférence, d'utilité et de demande sont présentées de manière claire permettant de définir sans peine les modélisations mathématiques correspondantes. Nous établissons des résultats utiles pour formuler convenablement la fonction dite d'utilité et retrouver aisément ses propriétés.

Les développements et concepts présentés au début de ce chapitre, ont motivé la naissance de la théorie des préférences révélées, fondée et élaborée par P.A. Samuelson entre (1938) et (1948), et développée entre autre par H.S. Houthakker (1950), S. Afriat (1967) et H.R. Varian (1982). Cette notion a permis d'exprimer les préférences de manière simple conduisant à une analyse plus objective du comportement du consommateur.

Nous présentons également, les propriétés de cette notion (axiomes pour les économistes), que nous traduirons aisément en propriétés de monotonie généralisée de la fonction dite demande.

2.2 Préordre des préférences

La théorie du consommateur a pour objet l'étude des choix du consommateur en fonction des prix des biens et du budget dont il dispose.

Notons par G l'ensemble des biens disponibles. On suppose qu'il y a n biens disponibles, ainsi on a $G \subset \mathbb{R}^n$.
Un vecteur $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ (appelé "panier" par les économistes) signifie que l'on a x_i quantités du bien i. Dans notre étude on suppose que les x_i sont des variables continues et non des variables entières. On suppose aussi que $G \subset \mathbb{R}^n_+$ (on ne considère pas de quantités négatives de biens). Les hypothèses suivantes sont aussi très naturelles :
• $0 \in G$ (le consommateur peut choisir de ne rien consommer)
• G est convexe, c'est à dire

$$0 < t < 1\,,\; x\,,\; y \in G \Longrightarrow tx + (1-t)y \in G.$$

(toute combinaison convexe de biens dans G appartient à G).
Dans cette étude nous ferons l'hypothèse encore plus forte : $G = \mathbb{R}^n_+$ qui signifie que toute quantité de biens est potentiellement disponible au consommateur.
Les préférences du consommateur entre deux paniers de biens sont exprimées à l'aide d'une relation binaire $\preceq$ ($x \preceq y$ signifie que y est préféré à x). Cette relation vérifie les conditions suivantes tout à fait justifiables sur le plan économique :
• (Re) $x \preceq x$ $\forall\, x \in G$ (x est préféré à lui même) (**Réflexivité**)
• (Tr) $x\,,\, y\,,\, z \in G$ avec $x \preceq y$ et $y \preceq z$ implique $x \preceq z$ (**Transitivité**) (Si z est préféré à y et y préféré à x, alors z est préféré à x).
Ces deux conditions signifient que $\preceq$ définit un **préordre** sur G.

Les conditions suivantes sont aussi tout à fait justifiables sur le plan économique :
• (Tc) pour tout $x\,,\, y \in G$, on a soit $x \preceq y$, soit $y \preceq x$, soit les deux à la fois. On dit que le préordre est **complet** ou **total**.
• (Cr) Si on a $x\,,\, y \in G$, avec $x \leq y$ (c.à.d. $x_i \leq y_i$ pour tout i) alors on a $x \preceq y$. On dit que le préordre est **croissant**.

On définit la relation de préordre strict associée à $\preceq$ en posant

$$x \prec y \quad \text{si } x \preceq y \quad \text{et non} \quad y \preceq x.$$

La condition suivante qui est une relation de monotonie stricte est aussi raisonnable du point de vue économique :
• (Cns) $x\,,\, y \in G\,,$ avec $x \leq y$ et $x \neq y$ implique $x \prec y$. On dit que le préordre est **strictement croissant**, cette condition est appelée par les économistes **condition de non-satiété**.
Il est également raisonnable d'avoir la condition de convexité suivante :
• $(Conv)$ Pour tout $x\,,\, y \in G$, pout tout $t \in]0\,,\,1[$
si $x \preceq y$ alors $x \preceq x + t(y-x)$.
Si y est préféré à x alors toute combinaison convexe de x et y est préférée à x. On dit que le préordre est **convexe**.
Finalement, on considère la condition topologique suivante
• $(Cont)$ Pour tout $x \in G$ les ensembles $\{y \in G\ :\ x \preceq y\}$ et $\{z \in G\ :\ z \preceq x\}$ sont fermés. On dit alors que le préordre est **continu**.

2.3 Fonction d'utilité

Etant donnée une fonction $u\ :\ G \to \mathbb{R}$, la relation binaire $\preceq$ définie sur G par

$$x \preceq y \Longleftrightarrow u(x) \leq u(y). \qquad (R_b)$$

définit un préordre complet sur G. Le préordre est (strictement) croissant sur G si et seulement si la fonction u est (strictement) croissante. Le préordre est convexe si et seulement si la fonction u est quasi-concave. Si la fonction u est continue alors le préordre est continu.

Lorsqu'un préordre $\preceq$ est associé à une fonction u par la relation (R_b) on dit que u donne une représentation **cardinale** du préordre : la quantité $u(x)$ est ainsi une mesure de la satisfaction éprouvée par le consommateur lorsqu'il choisit le panier de biens x. La fonction u est appelée **fonction d'utilité**.
Si à toute fonction u correspond un préordre, on peut se poser le **problème**

de savoir **si tout préordre peut être représenté par une fonction d'utilité**. La réponse est donnée par le résultat suivant du à Debreu [27] :

Théorème 2.1 *: Si G est connexe et si $\preceq$ définit sur G un préordre complet continu, alors il existe une fonction $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x, y \in G$ on ait*

$$x \preceq y \Longleftrightarrow u(x) \leq u(y).$$

La représentation d'un préordre par une fonction d'utilité n'est point unique, en effet si u représente le préordre alors la fonction $k \circ u$ avec k continue strictement croissante représente aussi le préordre.

En fait la classe des fonctions d'utilité associées à un préordre est une classe d'équivalence. Il est agréable de pouvoir représenter cette classe par une fonction particulière définie de façon unique. C'est l'objet du présent résultat qui sera la base des constructions que nous ferons plus tard. Ici le vecteur $e \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur $e = (1, 1, ..., 1)^t$.

Proposition 2.1 *: Supposons que $\preceq$ définit un préordre complet continu et strictement croissant sur $G = \mathbb{R}^n_+$. Alors il existe une fonction d'utilité unique u associée au préordre telle que $u(te) = t$, $\forall t > 0$. Cette fonction est continue strictement croissante. Toute autre fonction d'utilité continue strictement croissante associée au préordre est de la forme $k \circ u$ avec k continue strictement croissante.*

Preuve :

Existence : En raison du théorème de Debreu, il existe une fonction d'utilité $\tilde{u}$ continue strictement croissante représentant le préordre. On considére la fonction $\varphi :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \tilde{u}(te)$.

Cette fonction est continue strictement croissante et donc possède une fonction inverse φ^{-1} qui est aussi continue strictement croissante.

Posons $u(x) = \varphi^{-1}(\tilde{u}(x)) = (\varphi^{-1} \circ \tilde{u})(x)$ alors u représente le préordre et $u(te) = t$.

Unicité : Pour $t > 0$, posons $S_t = \{x \geq 0 : x \preceq te\}$. Si u représente le préordre avec $u(te) = t$, on doit avoir $S_t = \{x \geq 0 : u(x) \leq u(te) = t\}$. Mais alors u est définie de façon unique par la formule :

$$u(x) = \inf\,[t : x \in S_t]\,.$$

■

2.4 Le problème du consommateur

Le problème du consommateur consiste à choisir le panier de bien compte tenu des prix des biens et de son budget de manière à maximiser la satisfaction qu'il obtiendra avec son choix. On suppose que son **budget** est la quantité $b > 0$ et que le **prix unitaire** du bien i est $p_i > 0$. Le vecteur p est appelé **vecteur des prix unitaires**. Si le consommateur achète le panier de biens $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$, le coût est $\langle p, x\rangle = \sum_{i=1}^n p_i\, x_i$.

Lorsque les préférences du consommateur s'expriment à l'aide de la fonction d'utilité u, le problème s'écrit :

$$\max_x\,[u(x)\ :\ x \geq 0\,,\ \ \langle p, x\rangle \leq b\,]\,. \tag{U}$$

On appelle $X(p,b)$ l'ensemble des solutions optimales de (U). On observe que cet ensemble de solutions optimales coincide avec celui du problème

$$\max_x\,[(k \circ u)(x)\ :\ x \geq 0\,,\ \ \langle p, x\rangle \leq b\,]\,. \tag{$\widetilde{U}p$}$$

où k est une fonction continue strictement croissante. Ainsi $X(p,b)$ ne dépend que du préordre et non pas de la fonction d'utilité choisie pour le représenter. La multiapplication $X\ :\ \mathbb{R}^n_+ \times\,]0\,,\infty[\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n_+$, qui à (p,b) associe $X(p,b)$ est appelée **multiapplication demande** (**correspondance demande** pour les économistes). Si la correspondance demande est parfaitement déterminée quand la fonction d'utilité est donnée (il s'agit alors de résoudre un problème d'optimisation), le problème qui consiste à **trouver une fonction d'utilité lorsque la correspondance demande est connue est beaucoup plus complexe**. Il s'agit là du **problème des préférences révélées** qui fait l'objet de notre étude.

2.5 Dualité en théorie du consommateur

Il est clair que le problème

$$\max_x \,[u(x) \,:\, x \geq 0\,,\;\; \langle p\,,\,x\rangle \leq b\,]\,,$$

est équivalent, pour tout $\lambda > 0$, au problème

$$\max_x \,[u(x) \,:\, x \geq 0\,,\;\; \langle \lambda\, p\,,\,x\rangle \leq \lambda\, b\,]\,. \qquad (\widetilde{U})$$

dans le sens que les deux problèmes admettent la même valeur optimale et les mêmes solutions optimales, i.e., $X(\lambda\, p\,,\,\lambda\, b) = X(p\,,\,b)$. On peut donc se limiter à l'étude du problème

$$\max_x \,[u(x) \,:\, x \geq 0\,,\;\; \langle p\,,\,x\rangle \leq 1\,]\,. \qquad (U)$$

qui correspond à une normalisation des prix par le budget (on a remplacé p par $\frac{1}{b}\,p$). En ce qui concerne la correspondance demande il suffit de s'intéresser à la correspondance $p \in \mathbb{R}^n_+ \overset{\longrightarrow}{\longrightarrow} X(p,1)$. En effet on a
$X(b\,p\,,\,b) = X(p,1)$. Dans cet esprit de simplification, on posera
$X(p) = X(p,1)$.

On définit la fonction $v \,:\, \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$v(p) = \sup_x \,[u(x) \,:\, x \geq 0\,,\;\; \langle p\,,\,x\rangle \leq 1\,]\,.$$

La fonction v introduite ici, est appelée fonction **d'utilité indirecte** associée à u qui, en conséquence, sera appelée fonction **d'utilité directe**.
Nous allons étudier quelques propriétés de la fonction v.

a) v est décroissante sur $\mathbb{R}^n_+$

En effet si on a $p^1\,,p^2 \in \mathbb{R}^n_+$ avec $p^1 \leq p^2$ alors $\{x \,:\, x \geq 0\,,\,\langle p^1, x\rangle \leq 1\,\} \;\supset\; \{x \,:\, x \geq 0\,,\,\langle p^2, x\rangle \leq 1\,\}$ ce qui signifie que plus les prix sont élevés, moins on peut acheter de biens. Il s'ensuit

$$p^1 \,\leq\, p^2 \Longrightarrow v(p^1) \,\geq\, v(p^2).$$

b) La fonction v est evenly- quasi-convexe sur $\mathbb{R}^n_+$

En effet on a les équivalences suivantes :

$$v(p) < \lambda \Longleftrightarrow ([x \geq 0\,,\ \langle p\,,\, x\rangle \leq 1] \Longrightarrow u(x) < \lambda),$$

$$\Longleftrightarrow ([x \geq 0\,,\ u(x) \geq \lambda\,] \Longrightarrow \langle p\,,\, x\rangle > 1\,).$$

Il s'ensuit que pour tout λ

$$\{p\,:\, p \geq 0\,,\, v(p) < \lambda\,\} = \bigcap_{x\geq 0\,,\, u(x)\geq\lambda} \{x\,:\, \langle p\,,\, x\rangle > 1\,,\, p \geq 0\,\}\,.$$

Cet ensemble est evenly-convexe comme intersection de demi espaces ouverts.

Posons

$$\tilde{u}(x) = \inf_p\,[v(p)\,:\, p \geq 0\,,\, \langle p\,,\, x\rangle \leq 1\,]\,.$$

On note par $P(x)$ l'ensemble des solutions optimales de ce problème. Par symétrie on déduit que la fonction $\tilde{u}$ est croissante et evenly-quasi-concave. En outre on a la relation suivante entre u et $\tilde{u}$:

Proposition 2.2 *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^n_+$ *on a* $\tilde{u}(x) \geq u(x)$.

Preuve : : Soit $x \in \mathbb{R}^n_+$, alors

$$\langle p\,,\, x\rangle \leq 1\,,\, p \geq 0 \Longrightarrow v(p) \geq u(x)$$

$$\text{Donc} \quad \tilde{u}(x) = \inf_p\,[v(p)\,:\, p \geq 0\,,\, \langle p\,,\, x\rangle \leq 1\,] \geq u(x).$$

Ainsi $\tilde{u}$ est une majorante quasi-concave de u.

On peut se poser le problème de savoir si $\tilde{u}$ coincide avec u. On a le résultat suivant :

Proposition 2.3 *Supposons l'hypothèse de non-satiété satisfaite. Soit* $p \geq 0$, $p \neq 0$. *Si* $x \in X(p)$ *alors*

a) $\langle p \,, \, x \rangle = 1$,

b) $\tilde{u}(x) = u(x)$.

Preuve :

a) Supposons $x \in X(p)$. Alors $v(p) = u(x)$. Supposons, pour contradiction, que l'on a $\langle p \,, \, x \rangle < 1$. Il existe alors un voisinage V de x tel que $\langle p \,, \, y \rangle < 1 \quad \forall y \in V$. Dans ce voisinage il existe $y > 0$ tel que $y_i > x_i$ pour tout i. Mais alors on a $u(y) > u(x)$ et x n'est pas solution du problème de maximisation.

b) Par définition

$$\tilde{u}(x) = \inf_{p'} \left[v(p') \; : \; p' \geq 0 \text{ et } \langle p' \,, \, x \rangle \leq 1 \, \right],$$

On a $\tilde{u}(x) \leq v(p) = u(x)$. Or on sait que l'on a $u(x) \leq \tilde{u}(x)$.
Donc $\tilde{u}(x) = u(x)$. ■

Nous avons montré que l'on a $\tilde{u}(x) = u(x)$ pour tout x tel qu'il existe un vecteur prix p avec $x \in X(p)$. On peut donc se poser la question de savoir lorsque les fonctions u et $\tilde{u}$ coincident. On aura alors un schéma de dualité symétrique. Cela nécessite des conditions de quasiconcavité et continuité sur u et des conditions sur la frontière de l'orthant. Les principales contributions à cette dualité sont dues à Diewert [30] , Crouzeix [15] , Martinez-Legaz [55].

Nous allons illustrer cette dualité avec l'exemple des fonctions de Cobb-Douglas. Ces fonctions sont utilisées par les économistes pour modéliser les comportements des consommateurs, des producteurs, $\cdots$ Elles jouent pour les économistes le même rôle que la loi normale et ses dérivées pour les statisticiens.

Une fonction d'utilité u, est dite de **Cobb-Douglass** si elle s'exprime comme suit

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \text{ , pour tout } \quad x \in \mathbb{R}^n_{++} \ , \quad \alpha_i > 0.$$

On vérifie bien que l'on a

$$u(x) = \inf_p \, [v(p) \; : \; p > 0 \, , \; \langle p \, , \, x \rangle = 1] \, ,$$

$$v(p) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i} \; , \text{ pour tout } \; p \in \mathbb{R}^n_{++} \; , \quad \alpha_i > 0.$$

Ici, $X(p)$ et $P(x)$ sont des singletons et on a :

$$X(p) = \left\{ (\frac{\alpha_1}{p_1}, \cdots, \frac{\alpha_n}{p_n})^t \right\} \; , \; P(x) = \left\{ (\frac{\alpha_1}{x_1}, \cdots, \frac{\alpha_n}{x_n})^t \right\} .$$

2.6 Propriétés de la correspondance demande

Nous allons maintenant étudier les propriétés de la fonction demande. Dans tout le reste du chapitre nous supposerons que l'on a une dualité parfaite entre la fonction d'utilité directe u et la fonction d'utilité indirecte v associée. Plus précisément on suppose que les conditions suivantes sont satisfaites

a) u est quasi-concave continue strictement croissante sur $]0\, , \infty[^n$.

b) v est quasi-convexe continue strictement décroissante sur $]0\, , \infty[^n$.

c) Pour tout $p > 0$ on a

$$v(p) = \max_x \; [u(x) \; : \; x \geq 0 \, , \; \langle p \, , \, x \rangle \leq 1 \,] \, , \tag{2.1}$$

d) Pour tout $x > 0$ on a

$$u(x) = \min_p \; [v(p) \; : \; p \geq 0 \, , \; \langle p \, , \, x \rangle \leq 1 \,] \, . \tag{2.2}$$

Il s'ensuit que la donnée de u entraine celle de v et la donnée de v entraine celle de u. Suivant les notations déjà utilisées, $X(p)$ et $P(x)$ désignent respectivement les ensembles des solutions optimales des problèmes (2.1) et (2.2). La proposition suivante montre que les multiapplication X et P sont inverses l'une de l'autre ($X^{-1} = P$ et $P^{-1} = X$).

Proposition 2.4 *: Pour* $p \geq 0 \quad , \quad x \geq 0$ *on a*

$$x \in X(p) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \langle p\,,\,x\rangle = 1 \\ v(p) = u(x) \end{array} \quad \Longleftrightarrow p \in P(x).$$

Preuve : Conséquence de la proposition 2.3.

Ce résultat est à rapprocher du résultat sur les fonctions conjuguées et leurs sous-différentiels. En effet, Si f est convexe *s.c.i* propre et f^* est sa conjuguée alors

$$x^* \in \partial f(x) \Longleftrightarrow f(x) + f^*(x^*) = \langle x\,,\,x^*\rangle \Longleftrightarrow x \in \partial f^*(x^*).$$

Ainsi les multiapplications $X(\,.\,)$ et $P(\,.\,)$ jouent le rôle des sous-différentiels ∂f et ∂f^*.
On étudie maintenant certaines propriétés de la correspondance demande. Supposons que l'on a $x \in X(p)$, $y \geq 0$ avec $\langle p, y\rangle \leq 1$. Alors la satisfaction avec la consommation y n'est pas supérieure à celle obtenue avec x. Si $\langle p, y\rangle < \langle p, x\rangle = 1$ alors en raison de l'hypothèse de non- satiété la satisfaction obtenue avec y est strictement inférieure à celle obtenue avec x.
On en déduit les deux conditions suivantes :

$$x \in X(p),\ y \geq 0 \text{ et } \langle p, y - x\rangle \leq 0 \Longrightarrow u(y) \leq\ u(x), \qquad (D_1)$$

$$x \in X(p),\ y \geq 0 \text{ et } \langle p, y - x\rangle < 0 \Longrightarrow u(y) <\ u(x), \qquad (D_2)$$

Ces conditions sont respectivement équivalentes aux conditions suivantes

$$x \in X(p),\ y \geq 0 \text{ et } u(y) > u(x) \Longrightarrow \langle p, y - x\rangle > 0, \qquad (D_1')$$

$$x \in X(p),\ y \geq 0 \text{ et } u(y) \geq u(x) \Longrightarrow \langle p, y - x\rangle \geq 0. \qquad (D_2')$$

Considérons maintenant les $k+1$ éléments $\{(x^i,\,p^i)\}_{i=0,1,\cdots,k}$ tel que $x^i \in X(p^i)$ pour tout i et $(x^0,\,p^0) = (x^{k+1},\,p^{k+1})$.
Supposons en outre

$$\langle p^i, x^{i+1} - x^i\rangle \leq 0 \text{ pour tout } \; i = 0, 1, \cdots, k-1$$

alors on a par (D_1)

$$u(x^k) \leq u(x^{k-1}) \leq \cdots \leq u(x^0).$$

Mais $u(x^k) \leq u(x^0)$ implique en raison de (D_2')

$$\langle p^k, x^0 - x^k \rangle \geq 0.$$

Si en outre une des inégalités $\langle p^i, x^{i+1} - x^i \rangle \leq 0$ est stricte alors par (D_2) on a $u(x^k) < u(x^0)$ et donc par (D_1') on a $\langle p^k, x^0 - x^k \rangle > 0$.
En prenant $k = 0$ on obtient la proposition suivante qui correspond à l'axiome faible des préférences révélées (Weak Axiom of Revealed Preferences) du à Samuelson[73].

Proposition 2.5 ***(WARP) :*** *Si $x^i \in X(p^i)$ pour $i = 0, 1$ alors*

$$\langle p^0, x^1 - x^0 \rangle \leq 0 \Longrightarrow \langle p^1, x^0 - x^1 \rangle \geq 0, \qquad (A_1)$$

$$\langle p^0, x^1 - x^0 \rangle < 0 \Longrightarrow \langle p^1, x^0 - x^1 \rangle > 0.$$

Pour plus de deux éléments on obtient la proposition suivante qui correspond à l'axiome fort des préférences révélées (Strong Axiom of Revealed Preferences) dû à Houthakker[45].

Proposition 2.6 ***(SARP) :*** *Supposons que l'on ait*
$x^i \in X(p^i)$, $i = 0, 1, \cdots, k$, $(x^{k+1}, p^{k+1}) = (x^0, p^0)$ tels que

$$\langle p^i, x^{i+1} - x^i \rangle \leq 0 \,,\, i = 0, 1, \cdots, k-1. \qquad (F)$$

alors

$$\langle p^k, x^0 - x^k \rangle \geq 0 \qquad (A_2)$$

et si une des inégalités de (F) est stricte, alors

$$\langle p^k, x^0 - x^k \rangle > 0.$$

Il est clair que (SARP) implique (WARP) mais la réciproque n'est pas nécessairement satisfaite .
Varian[76] a donné la formulation suivante équivalente à (SARP). C'est cette formulation que nous utiliserons dans le chapitre suivant. Elle correspond à l'axiome généralisé des préférences révélées (Generalized Axiom of Revealed Preferences) :

Proposition 2.7 ***(GARP) :*** *On dit que l'ensemble des observations* $\{(p^i, x^i)\}_{i\in I}$ *vérifie l'axiome généralisé des préférences révélées* $(GARP)$*, si* $x^i \in X(p^i)$*, pour tout sous ensemble ordonné fini* $J = \{j_0, j_1, \cdots, j_k\} \subset I$*,* $j_{k+1} = j_0$ *tel que*

$$\langle p^{j_l}, x^{j_{l+1}} - x^{j_l}\rangle \leq 0 \ \ pour \ \ l = 0, 1, \cdots, k-1$$

on a

$$\langle p^{j_k}, x^{j_k} - x^{j_0}\rangle \leq 0. \tag{A_3}$$

Et dans le cas où $\langle p^{j_k}, x^{j_k} - x^{j_0}\rangle = 0$ *on a*

$$\langle p^{j_l}, x^{j_{l+1}} - x^{j_l}\rangle = 0 \ \ pour\ tout\ l = 0, 1, \cdots, k-1.$$

Montrons maintenant, que les axiomes des préférences révélées correspondent aux propriétés de monotonie généralisée de la multiapplication $-X$.

Proposition 2.8 *: L'axiome faible des préférences révélées exprime la pseudo-monotonie de la multi-application* $-X$*.*

Preuve : Soient $x^0 \in X(p^0)$ et $x^1 \in X(p^1)$ tels que

$$\langle p^0, x^1 - x^0\rangle \leq 0 \Longrightarrow \langle p^1, x^1 - x^0\rangle \leq 0, \tag{1}$$

$$\text{et} \quad \langle p^0, x^1 - x^0\rangle < 0 \Longrightarrow \langle p^1, x^1 - x^0\rangle < 0. \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) sont respectivement équivalent aux relations

$$\langle -p^0, x^1 - x^0\rangle \geq 0 \Longrightarrow \langle -p^1, x^1 - x^0\rangle \geq 0, \tag{3}$$

$$\langle -p^0, x^1 - x^0\rangle > 0 \Longrightarrow \langle -p^1, x^1 - x^0\rangle > 0. \tag{4}$$

Les relations (3) et (4) signifient que, $-P = -X^{-1}$ est pseudo-monotone, il en est de même pour $-X$. ∎

Proposition 2.9 *: L'axiome fort* ($SARP$) *des préférences révélées exprime la cyclique pseudo-monotonie de la multiapplication* $-X$.

Preuve : Comme précédemment il suffit de montrer que $-P$ est cycliquement pseudo-monotone. En effet supposons que l'on ait

$$\left.\begin{array}{c} x^i \in X(p^i)\,,\; i\;:\;k \\ ,\;(x^{k+1},p^{k+1}) = (x^0,p^0) \\ \text{et }\; \langle p^i, x^{i+1}-x^i\rangle \leq \;\;\forall i = 0,1,\cdots,k-1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \langle p^k, x^k - x^0\rangle \leq 0 \qquad (5)$$

$$\left.\begin{array}{c} x^i \in X(p^i)\,,\; i=0\;:\;k \\ (x^{k+1},p^{k+1}) = (x^0,p^0) \\ \langle p^i, x^{i+1}-x^i\rangle \leq 0\;\forall i = 0\;:\;k-1 \quad (F) \\ \text{Et si une des inégalités de (F) est stricte} \end{array}\right\} \Longrightarrow \langle p^k, x^k - x^0\rangle < 0 \qquad (6)$$

Les relations (5) et (6) sont respectivement équivalentes aux relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{c} x^i \in X(p^i)\,,\; i\;:\;k \\ ,\;(x^{k+1},p^{k+1}) = (x^0,p^0) \\ -p^i \in (-P(x^i)),\;\; i=0\;:\;k \\ \langle -p^i, x^{i+1}-x^i\rangle \geq 0\;\forall i = 0\;:\;k-1 \quad (F) \end{array}\right\} \Longrightarrow \langle -p^k, x^k - x^0\rangle \geq 0 \qquad (7)$$

$$\left.\begin{array}{c} x^i \in X(p^i)\,,\; i\;:\;k \\ ,\;(x^{k+1},p^{k+1}) = (x^0,p^0) \\ -p^i \in (-P(x^i)),\;\; i=0\;:\;k \\ \langle -p^i, x^{i+1}-x^i\rangle \geq 0\;\forall i = 0\;:\;k-1 \quad (F) \\ \text{Et si une des inégalités de (F) est stricte} \end{array}\right\} \Longrightarrow \langle -p^k, x^k - x^0\rangle > 0 \qquad (8)$$

Les relations (7) et (8) expriment la cyclique pseudo-monotonie $-P$ ■

2.7 Le problème des préférences révélées est un problème d'intégration

A) Problème d'intégration classique :

Etant donnée une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, trouver une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $F'(x) = f(x) \, \forall x \in I$, F est appelée primitive de f. Le problème a des solutions sous réserve de certaines conditions sur f (par exemple f continue sur I).

Elles sont définies à une constante additive près : si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I, alors $\exists k \in \mathbb{R}$ telle que

$$F_2(x) = F_1(x) + k \;\; \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

Etant donnés $a \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ fixés, il existe une primitive F et une seule de f telle que $F(a) = \lambda$. On pose alors

$$F(x) = \lambda + \int_a^x f(t)dt \;\; , \;\; x \in I$$

Le problème d'intégration approchée est le suivant :

On connait f aux points $x_0, x_1, \cdots, x_p \in I$ et on veut en déduire une valeur approchée de la fonction F telle que $F(a) = \lambda$.

Une technique consiste à construire le polynôme (d'interpolation) P de degré p telle que $P(x_i) = f(x_i)\,,\, i = 0, 1, \cdots, p$ et prendre pour valeur approchée $\tilde{F}(x)$ la valeur

$$\tilde{F}(x) = \lambda + \int_a^x P(t)dt$$

On note que l'approximation est d'autant meilleure que x est proche de a.

D'autres techniques existent, par exemple en considérant pour P les fonctions splines polynomiales d'interpolation aux points x_i.

B) Problème d'intégration convexe :

Etant donné C convexe $\subset \mathbb{R}^n$ et une fonction convexe *sci* $f : C \to \mathbb{R}$. On sait d'après les résultats établis au chapitre1 que le sous-différentiel

∂f est une multiapplication maximale cycliquement monotone.
Réciproquement, étant donnée une multiapplication $\Gamma : C \overset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n$ maximale cycliquement monotone, existe t-il une fonction convexe *s.c.i* $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $\partial f(x) = \Gamma(x)\ \forall x \in C$. Ce problème est appelé **problème d'intégration convexe**. Il est complètement résolu par Rockafellar[66]. Les solutions sont comme les primitives d'une fonction réelle, définies à une constante additive près.
Etant donnés $x^0 \in C$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ fixés, il existe une fonction convexe *sci* et une seule telle que $f(x^0) = \lambda$ et $\partial f(x) = \Gamma(x)\ \forall x \in C$. Cette fonction est donnée par la formule :

$$f(x) = \lambda + \sup \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \langle x^{i+1} - x^i, y^i \rangle + \langle x - x^m, y^m \rangle,\ m \geq 1 \right\}.$$

où le sup est pris sur toutes les parties finies ordonnées de points $(x^i, y^i)_{i=0}^m$ du graphe de Γ.
Notons que pour $\Gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ le problème revient à chercher
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable telle que $\Gamma(x) = f'(x)$, on retrouve ainsi le problème d'intgration classique.
Le problème d'intégration convexe approchée est le suivant :
On connait des couples de points $(x^i, y^i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avec $x^i \in C$ $\forall i = 1, 2, \cdots, m$ vérifiant la propriété de cyclique monotonie suivante :
Une famille finie $\{(x^i, z^i) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ i \in I \subset \mathbb{N}\}$ est dite
cycliquement monotone si :

$$\sum_{k=1}^{m} \langle z^{j_k}, x^{j_{k+1}} - x^{j_k} \rangle \leq 0$$

$\forall\ j_1, j_2, \cdots, j_m, j_{m+1} \in I$, avec $j_{m+1} = j_1$.
On construit une fonction convexe *sci* $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que
$y^i \in \partial f(x^i)\ \forall i = 1, 2, \cdots, m$. Il en existe une infinité même en fixant la valeur de f en un point $a \in C$. J.P.Crouzeix, D.Lambert, V.H.Nguyen et J.J.Strodiot [21] montrent qu'il existe deux fonctions convexes f_- et f_+ répondant à la question telles que pour tout f solution du problème on ait

$$f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x)$$

Là aussi la qualité de l'approximation donnée par l'intervalle $[f_-(x), f_+(x)]$ est d'autant meilleure que x est proche de a.

Si f_1 et f_2 sont deux fonctions répondant à la question alors $\exists k \in \mathbb{R}$ telle que

$$f_2(x) = f_1(x) + k \ \forall x \in C \tag{2.4}$$

C) Le problème des préférences révélées est le suivant :

Etant donnée une correspondance demande $X(p)$, le problème consiste à construire, quand cela est possible, une fonction d'utilité. Ce qui revient à savoir quelles conditions sont nécessaires et suffisantes sur la correspondance demande pour que l'on puisse construire une telle fonction. Ce problème a été posé par Samuelson[71], et revisité par de nombreux économistes : Houthakker[45], ... ll n'est point entièrement résolu.

Dans le cas où la correspondance demande est univoquement différentiable, le problème a été résolu récemment par Crouzeix-Rapcsak [22].

Dans le cas où la correspondance demande est multivoque, les axiomes (WARP) , (SARP) et (GARP) sont des conditions nécessaires. Pour que la construction soit possible, il faut leur adjoindre des conditions de maximalité et continuité, voir les travaux en cours de Crouzeix, Eberhard et Ralph[24].

Si u est différentiable en $x \in X(p)$ alors en écrivant les conditions d'optimalité pour le problème (U), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\nabla u(x) = \lambda p$. Cette relation montre que le problème des préférences révélées est un problème d'intégration. Si la fonction u est non différentiable mais concave, le gradient de u en x est remplacé par le sur-différentiel de u en x, on a donc un problème d'intégration convexe. Or la concavité de la fonction u est une hypothèse beaucoup trop forte, on peut raisonnablement considérer des fonctions d'utilité quasi-concaves auquel cas on utilise le cône normal à l'ensemble de niveau supérieur de u en x comme substitut du surdifférentiel.

Le problème des préférences révélées approché est le suivant : Etant donné un nombre fini de couples de points (x^i, p^i), $i \in I$ tels que $x^i \in X(p^i)$ et satisfaisant (GARP), on cherche une fonction quasi-concave croissante semi-continue supérieurement permettant de reconstituer approximativement le préordre. C'est un problème d'intégration avec un nombre fini de données dans un contexte de convexité généralisée ce qui entraine des difficultés supplémentaires. Ce problème fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Construction d'un préordre approché à partir d'un nombre fini d'observations

3.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est le suivant : Nous savons que les préférences du consommateur peuvent être exprimées à l'aide d'une fonction d'utilité quasi-concave continue strictement croissante mais nous ne connaissons ce préordre de préférences qu'à partir d'un nombre fini d'observations (x^i, p^i) , $i = 1$ à m. On sait que $x^i \in X(p^i)$ et $\langle p^i \, , x^i \rangle = 1$ pour tout i et que l'ensemble des observations vérifie l'axiome généralisé des préférences révélées (GARP. Le problème est le suivant : comment exploiter au mieux les données à notre disposition pour en tirer des conclusions sur le préordre. Ainsi étant donnés $x, y \geq 0$ peut-on dire que x est préféré à y, ou y à x ou les deux à la fois.

ll est bien sur illusoire de prétendre connaître parfaitement le préordre de préférences à partir d'un nombre fini d'observations.

Une première approche est celle d'Afriat [1] reprise par Diewert[32], Fostel, Scarf et Todd[38]. Elle consiste à construire une fonction d'utilié u_a consistante avec les observations, c'est à dire telle que pour tout i , x^i

est solution du problème

$$\max_x \Big[u_a(x) \,:\, x \geq 0\,,\, \langle p^i, x\rangle \leq 1\,,\, x \geq 0\Big]\,.$$

La fonction u_a construite par les techniques d'Afriat est concave et affine par morceaux. On note qu'étant donnés x, $y \geq 0$ on peut toujours les comparer à l'aide de u_a.

Cette approche a selon nous deux défauts :

a) Il n'est pas possible, comme nous l'avons déjà dit, à partir d'un nombre fini d'observations de connaître tout le préordre. L'utilisation de la fonction u_a pour comparer deux éléments peut donc conduire à des interprétations fausses.

b) Il existe des préordres non concavifiables c'est à dire non représentables par une fonction d'utilité concave. Or les fonctions construites sont concaves.

Notre approche sera la suivante : Nous savons que le préordre peut être représenté par une fonction d'utilité u quasi-concave continue strictement croissante que l'on peut supposer telle que $u(te) = t$ pour tout $t > 0$, e représentant le vecteur dont toutes les composantes sont 1.

Nous allons utiliser les informations à notre disposition pour construire deux fonctions u_- et u_+ encadrant au mieux la fonction inconnue u. Ainsi pour tout $x \geq 0$ on aura

$$u_-(x) \leq u(x) \leq u_+(x).$$

Lorsque l'on aura par exemple :
• $u_-(x) \geq u_+(y)$ on pourra conclure avec toute certitude que x est préféré à y.
• $u_-(y) \geq u_+(x)$ y est préféré à x.
• Dans tous les autres cas on s'abstiendra de conclure.

Contrairement à l'approche précédente, nos conclusions seront totalement fiables.

3.2 L'approche d'Afriat

Cette approche est basée sur le résultat fondamental suivant du à Afriat[1]. La démonstration en est laborieuse et fait appel à des techniques de théorie des graphes et aux théorèmes d'alternatives pour les systèmes d'inéquations linéaires. La démonstration a été revisitée par plusieurs chercheurs dont les principaux sont Diewert (1973), Varian (1982), Fostel, Scarf et Todd (2003), et qui ont également donné des reformulations équivalentes des résultats. Ces résultats sont les suivants :

Théorème 3.1 *: Etant donné l'ensemble fini d'observations* $\{(x^i, p^i)\,, i = 1, 2, \cdots, m\}$ *sur le préordre, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Les couples* $(x^i, p^i)\,, i = 1, 2, \cdots, m,$ *satisfont l'axiome* $(GARP)$,
2. *Il existe* $\lambda_i\,,\ \varphi_i \in \mathbb{R}$ *tels que pour tout* $i, j = 1, 2, \cdots, m$

$$\lambda_i > 0, \quad \varphi_j \leq \varphi_i + \lambda_i \langle p^i, x^j - x^i \rangle,\ i \neq j. \tag{R}$$

Théorème 3.2 *: Supposons que les couples* $(x^i, p^i)\,,\ i = 1, 2, \cdots, m$ *satisfont (R), alors la fonction affine par morceaux*

$$u_a(x) = \min_{i=1\,:\,m} \left\{ \varphi_i + \lambda_i \langle p^i, x - x^i \rangle \right\}.$$

est concave strictement croissante continue et satisfait les conditions suivantes :

- $u_a(x^i) = \varphi_i\,,\ \forall i = 1, \cdots, m$ $\qquad (C_1)$
- x^i *est solution optimale du problème d'optimisation*

$$\max_x \left[u_a(x)\ :\ \langle p^i, x \rangle \leq 1\,,\ x \geq 0 \right]. \tag{C_2}$$

On remarque que toute solution du système d'inéquations linéaires (R) donne une fonction u_a satisfaisant (C_1) et (C_2).
Pour obtenir une solution du système (R), on peut utiliser un problème de programmation linéaire associé au système d'inéquations linéaires (R).

Il existe donc une infinité de fonctions u_a possibles, puisque sauf cas pathologique, le système d'inéquations linéaires (R) possède une infinité de solutions. Ces fonctions u_a différentes conduisent à des préordres différents et donc à des conclusions différentes sur le préordre. Illustrons ceci par un exemple :

Considérons le préordre sur $\mathbb{R}^2$ induit par la fonction de Cobb-Douglas

$$u(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}.$$

Supposons que nous disposons seulement des deux observations (x^1 , p^1) et (x^2 , p^2) ci-dessous sur le préordre :

$$x^1 = (\frac{9}{2} , \frac{9}{4})^t \ , \ p^1 = (\frac{1}{9} , \frac{2}{9})^t,$$

$$x^2 = (3 , 1)^t \ , \ p^2 = (\frac{1}{6} , \frac{1}{2})^t.$$

On vérifie bien que x^i , $i = 1, 2$ est solution du problème de maximisation :

$$\max_x [u(x) : \ x \geq 0 \, , \ \langle p^i , x \rangle \leq 1].$$

Le théorème 3.1 conduit au système d'inéquations linéaires

$$\left\{ \begin{array}{c} -\frac{4}{9}\lambda_1 + \varphi_1 - \varphi_2 \geq 0, \\ \frac{7}{8}\lambda_2 - \varphi_1 + \varphi_2 \geq 0, \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 1. \end{array} \right. \qquad (R)$$

Des solutions de (R) peuvent être obtenues en résolvant des programmes linéaires associés. En considérant par exemple le problème :

$$(LP_1) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \min(\lambda_1 + \lambda_2), \\ -\frac{4}{9}\lambda_1 + \varphi_1 - \varphi_2 \geq 0, \\ \frac{7}{8}\lambda_2 - \varphi_1 + \varphi_2 \geq 0, \\ \lambda_1 \geq 1 \, , \ \lambda_2 \geq 1. \end{array} \right.$$

Il est évident que toute solution (réalisable) de (LP_1) est une solution de (R). Par exemple,

$$(\lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \varphi_2)^t = (1, 1, -\frac{1}{8}, -1)^t.$$

La fonction d'utilité associée est

$$u_1(x_1,x_2) = \min\left\{\frac{1}{9}\,x_1 + \frac{2}{9}x_2 - \frac{9}{8}\,,\,\frac{1}{6}\,x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 2\right\}.$$

De même,

$$(\lambda_1,\lambda_2,\varphi_1,\varphi_2)^t = (2,4,-2,-4)^t,$$

est une solution du système (R) qui donne la fonction d'utilité :

$$u_2(x_1,x_2) = \min\left\{\frac{2}{9}\,x_1 + \frac{4}{9}\,x_2 - 4,\,\frac{2}{3}\,x_1 + 2x_2 - 8\right\}.$$

Une autre solution du système (R) est

$$(\lambda_1,\lambda_2,\varphi_1,\varphi_2)^t = (\frac{63}{32},1,1,\frac{1}{8})^t,$$

la fonction d'utilité associée est :

$$u_3(x_1,x_2) = \min\left\{\frac{7}{32}\,x_1 + \frac{7}{16}\,x_2 - \frac{31}{32}\,,\,\frac{1}{6}\,x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{7}{8}\right\}.$$

Montrons que les préordres construits à partir des fonctions u_1 , u_2 et u_3 ne coincident pas avec le préordre de référence et ne coincident pas entre eux.

Contre-exemple :

Considérons les cinq points de $\mathbb{R}_+^2$ suivants :
$a = (\frac{5}{3},3)^t$, $b = (10,\frac{1}{4})^t$, $c = (5,4)^t$, $d = (11,\frac{1}{2})^t$ et $e = (\frac{1}{2},5)^t$.
Le tableau suivant présente les valeurs des quatre fonctions u, u_1 , u_2 et u_3 aux points a, b, c, d et e.

x	$u(x)$	$u_1(x)$	$u_2(x)$	$u_3(x)$
a	2.236	-0.273	-2.296	0.708
b	1.581	-0.208	-1.667	0.917
c	4.472	0.319	-1.111	1.875
d	2.345	0.083	-1.333	1.208
e	1.581	0.042	-1.667	1.328

Notons par $\succeq$, $\succeq_1$, $\succeq_2$ et $\succeq_3$ les préordres associés.

$$c \succ d \succ a \succ (b \approx e)$$
$$c \succ_1 d \succ_1 e \succ_1 b \succ_1 a$$
$$c \succ_2 d \succ_2 (e \approx b) \succ_2 a$$
$$c \succ_3 e \succ_3 d \succ_3 b \succ_3 a$$

On voit que les préordres sont différents.

3.3 Construction d'un encadrement d'une fonction canonique d'utilité associée au préordre

On suppose que les préférences peuvent être représentées par une fonction d'utilité quasi-concave continue strictement croissante. On a vu que l'on pouvait choisir comme représentation la fonction d'utilité unique u telle que $u(te) = t$, $t > 0$, e étant le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont 1.

On suppose comme dans l'approche précédente que l'on dispose de m observations $(x^i\,,\,p^i)$, $x^i \in X(p^i)$, $x^i > 0\,, p^i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$. On a alors $\langle p^i\,,\,x^i\rangle = 1 \;\forall i$.

On se propose de construire deux fonctions u_- et u_+ sur $]0, \infty[^n$ telles que

$$u_-(x) \leq u(x) \leq u_+(x) \;\forall x,$$

donnant le meilleur encadrement possible de $u(x)$ compte tenu des informations en notre possession.

La construction repose sur les 3 principes suivants :

(a) $u(te) = t\,, \forall\, t > 0$,

(b) $x \leq y \Rightarrow u(x) \leq u(y)$,

(c) $x \in X(p)$ et $\langle p, y - x\rangle \leq 0 \Rightarrow u(y) \leq u(x)$. On dit que x est **révélé préféré** à y.

Elle se fait en 2 étapes :

1ère **étape** : Construction des $u^i_- = u_-(x^i)$ et $u^i_+ = u_+(x^i)$.

2ème **étape** : Extension aux points $x \in]0, \infty[^n \quad , \quad x \neq x^i$.

3.3.1 Première étape : construction des u^i_- et u^i_+

La construction est basée sur les principes suivants :

$\alpha)$ Puisque
$$\min_{1\leq k\leq n}(x^i_k)\, e \;\leq x^i \leq \max_{1\leq k\leq n}(x^i_k)\, e,$$
en raison de (a) et (b) on a
$$\min_{1\leq k\leq n}(x^i_k) \;\leq u(x^i) \leq \max_{1\leq k\leq n}(x^i_k).$$
Donc u^i_- et u^i_+ devront satisfaire les inégalités suivantes :
$$\min_{1\leq k\leq n}(x^i_k) \;\leq\; u^i_- \;\leq\; u^i_+ \;\leq\; \max_{1\leq k\leq n}(x^i_k) \tag{1}$$

$\beta)$ Puisque $\langle p^i, t_i\, e - x^i\rangle = 0$ pour $t_i = [\langle p^i, e\rangle]^{-1}$, en raison de (c) on a $t_i = u(t_i\, e) \leq u(x^i)$. Ainsi on devra avoir $t_i \leq u^i_-$ et donc $\max\,[t_i\,,\, \min x^i_k] \leq u^i_-$.

On montre aisément que l'on a
$$\min_p \left[\langle p, e\rangle \;:\; p \geq 0,\; \langle p, x^i\rangle = 1\right] = \min_{1\leq k\leq n}\left[x^i_k\right],$$
et
$$\max_p \left[\langle p, e\rangle \;:\; p \geq 0,\; \langle p, x^i\rangle = 1\right] = \max_{1\leq k\leq n}\left[x^i_k\right].$$
D'où l'on déduit
$$\min_k(x^i_k) \;\leq\; t_i \;\leq\; \max_k(x^i_k).$$
La condition suivante améliore la condition (1)
$$\frac{1}{\langle p^i, e\rangle} \leq u^i_- \leq u^i_+ \leq \max_k\left[x^i_k\right] \tag{2}$$

γ) Pour $j \neq i$

- Si $a_{ij} = \langle p^i, x^j - x^i \rangle \leq 0$ alors $u(x^j) \leq u(x^i)$.

  On devra donc avoir

$$a_{ij} \leq 0 \implies u_-^j \leq u_-^i \text{ et } u_+^j \leq u_+^i \tag{3}$$

- Si $a_{ji} = \langle p^j, x^i - x^j \rangle \leq 0$ alors $u(x^i) \leq u(x^j)$

  On devra donc avoir

$$a_{ji} \leq 0 \implies u_-^j \geq u_-^i \text{ et } u_+^j \geq u_+^i \tag{4}$$

- Dans le cas où $a_{ij} > 0$ ou $a_{ji} > 0$, on ne peut rien dire.

Les résultats ainsi établis, nous permettent d'élaborer un algorithme pour construire les quantités u_-^i et u_+^i optimales satisfaisant les conditions (2), (3) et (4), optimal étant pris dans le sens que les u_-^i sont les plus grandes valeurs possibles et les u_+^i sont les plus petites valeurs possibles. L'algorithme est présenté en deux versions.

ALGORITHME1 (première version)

Initialisation :

Iter $= 0$

Pour $i = 1$ à m calculer

$u_-^i = \frac{1}{\langle p^i, e\rangle}$ et $u_+^i = \max_{k=1:n}(x_k^i)$

Pour $j = 1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, m,$ calculer le signe de

$a_{ij} = \langle p^i, x^j - x^i\rangle$

Itération : Modif = faux

Pour $i = 1, 2, \cdots, m$

Pour $j = 1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, m$

Si $a_{ij} < 0$

Si $u_-^j > u_-^i$ alors Modif = vrai et $u_-^i = u_-^j$

Si $u_-^i > u_+^i$ alors aller à Echec

Si $u_+^j > u_+^i$ alors Modif = vrai et $u_+^j = u_+^i$

Si $u_+^j < u_-^j$ alors aller à Echec

Si $a_{ji} < 0$

Si $u_-^i > u_-^j$ alors Modif = vrai et $u_-^j = u_-^i$

Si $u_-^j > u_+^j$ alors aller à Echec

Si $u_+^i > u_+^j$ alors Modif = vrai et $u_+^i = u_+^j$

Si $u_+^i < u_-^i$ alors aller à Echec

Fin de boucle j.

Fin de boucle i.

Si Modif = vrai alors Iter = Iter + 1 et aller à itération.

Si Modif = faux aller à Succès

Succès : La construction des u_-^i et u_+^i est réussie.

Echec : On ne peut pas construire les u_-^i et u_+^i.

Remarque 1 :

- Au cours des étapes successives on a procédé à des augmentations des u_-^i et/ou à des diminutions des u_+^i.
- Si on va à Succès, alors pour tout i on a $u_-^i \leq u_+^i$, et pour tout i, j $a_{ij} \leq 0 \Rightarrow u_-^j \leq u_-^i$ et $a_{ji} \leq 0 \Rightarrow u_+^i \leq u_+^j$.

ALGORITHME2 (deuxième version)

Initialisation :

Pour $i = 1$ à m calculer

$u_-^i = \frac{1}{\langle p^i, e\rangle}$ et $u_+^i = \max_{k=1:n}(x_k^i)$

Pour $j = 1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, m,$ calculer le signe de

$a_{ij} = \langle p^i, x^j - x^i\rangle$

(Initialisation de la matrice S)

Pour $i = 1$ à m , Pour $j = 1$ à m faire $s_{ij} = 0$

Si $a_{ij} < 0$ et $a_{ji} < 0$ alors Echec

Si $a_{ij} < 0$ alors $s_{ij} = -1$ $(s_{ji} = +1)$

Si $a_{ji} < 0$ alors $s_{ij} = +1$ $(s_{ji} = -1)$

Iter=0

Etape : Modif=faux

Pour $i = 1, 2, \cdots, m-1$

Pour $j = i+1, \cdots, m$

Si $s_{ij} = -1$ (On compare la ligne i avec la ligne j)

Pour $k = 1, 2, \cdots, m$, $k \neq i, j$

Si $s_{jk} = -1$

- Si $s_{ik} = +1$ alors aller à Echec
- Si $s_{ik} = -1$ (Pas de changement)
- Si $s_{ik} = 0$ alors Modif=vrai et on fait $s_{ik} = -1$ et $s_{ki} = +1$

Si $s_{ij} = +1$ (On compare toujours la ligne i avec la ligne j)

Pour $k = 1, 2, \cdots, m$, $k \neq i, j$

Si $s_{jk} = +1$

- Si $s_{ik} = -1$ alors aller à Echec
- Si $s_{ik} = +1$ (Pas de modification)
- Si $s_{ik} = 0$ alors Modif=vrai et on fait $s_{ik} = +1$ et $s_{ki} = -1$

Fin de boucle j

Fin de boucle i

Si Modif = vrai alors iter=iter+1 aller à Etape

Si Modif = faux retour à Succès (c'est la fin de construction de la matrice S).

Succès : La construction de la matrice S est réussie.

Fin de construction de la matrice S.

Construction des valeurs u_-^i et u_+^i

$u_-^i = \max(u_-^j : s_{ij} = -1)$

$u_+^i = \min(u_+^j : s_{ij} = +1)$

Echec : On ne peut pas construire les s_{ij}.

La matrice S de taille $m \times m$ introduite dans l'algorithme2 permet d'effectuer les modifications nécessaires de manière plus exhaustive. A priori l'algorithme2 présente certains avantages en terme de performance par rapport à l'algorithme1. Ceci devra se confirmer par les expérimentations numériques. Le théorème suivant présente les résultats de convergence consernant les deux algorithmes précédents.

Théorème 3.3 *: Chacun des deux algorithmes précédents s'arrête en un nombre fini d'itérations ne dépassant pas le nombre* $\frac{m(m-1)}{2}$*. L'arrêt en **Succès** signifie que les observations satisfont (GARP). L'arrêt en **Echec**, signifie que les observations ne satisfont pas (GARP).*

Preuve :

• Le passage d'une itération à une autre se fait quand au moins une modification est réalisée, auquel cas au moins une quantité a_{ij} ou a_{ji} est négative pour $i \neq j$, l'eventualité $a_{ij} < 0$ et $a_{ji} < 0$ étant exclue, d'où le nombre $\frac{m(m-1)}{2}$.

• L'arrêt de l'algorithme correspondant à **Succès** est évident par construction.

• L'arrêt de l'algorithme à **Echec** correspond à $u_-^k > u_+^k$ pour un certain $k \leq m$, ce qui signifie que l'axiome (GARP) est non satisfait du fait que l'on a d'après l'algorithme $a_{ij} = \langle p^i, x^j - x^i \rangle < 0$ pour $i = 1, 2, \cdots, k-1$, $j = i+1, \cdots, k$ et $a_{k1} < 0$. ■

3.3.2 Deuxième étape : extension aux $x \neq x^i$

Par l'algorithme précédent on connait les valeurs $u_-(x^i) = u_-^i$ et $u_+(x^i) = u_+^i$. On se propose alors de calculer des valeurs optimales $u_-(x)$ et $u_+(x)$ pour $x \in]0, \infty[^n, \quad x \neq x^i$.

Tout d'abord puisque

$$\min_k [x_k]\, e \ \leq x \ \leq \max_k [x_k]\, e,$$

On a

$$\min_k [x_k] \leq u(x) \leq \max_k [x_k],$$

On choisira les fonctions u_- et u_+ de sorte que

$$u_-(x) \geq \min_k [x_k] = u_-^1(x), \qquad (\alpha)$$

$$u_+(x) \leq \max_k [x_k] = u_+^1(x). \qquad (\beta)$$

Utilisons maintenant les informations obtenues aux points x^i

- Si $x \geq x^i$ alors $u(x) \geq u(x^i) \geq u_-^i$, (γ)
- Si $x \leq x^i$ alors $u(x) \leq u(x^i) \leq u_+^i$, (δ)
- Si $\langle p^i, x - x^i \rangle \leq 0$ alors $u(x) \leq u(x^i) \leq u_+^i$. (η)

Or la valeur $u(x^i)$ est inconnue, on dispose simplement de l'encadrement

$$u_-^i \leq u(x^i) \leq u_+^i,$$

Calcul de $u_+(x)$

Remarquons que (δ) est une conséquence de (η), en effet si $x \leq x^i$ on a $\langle p^i, x - x^i \rangle \leq 0$ car on a $p^i > 0$.
Si on a $\langle p^i, x - x^i \rangle \leq 0$ on sait alors que

$$u(x) \leq u(x^i) \leq u_+^i$$

Posons

$$u_+^2(x) = \min_i \left[u_+^i \ : \ \langle p^i, x \rangle \leq 1 \right]$$

donc on a

$$u(x) \leq u_+^2(x)$$

Les propriétés de la fonction u_+^2 sont données par la proposition suivante :

Proposition 3.1 *: La fonction u_+^2 est quasi-concave croissante.*

Preuve : : On doit montrer que la section $\Big\{x \,:\, u_+^2(x) > \lambda\Big\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est convexe. En effet puisque l'on a

$$u_+^2(x) = \min_i \Big[u_+^i \ :\ \langle p^i, x\rangle \ \leq 1\Big]$$

alors

$$u_+^2(x) > \lambda \Longleftrightarrow [\forall\, i \ : \langle p^i, x\rangle \ \leq 1 \Longrightarrow u_+^i > \lambda].$$

$$\Longleftrightarrow [u_+^i \leq \lambda \Longrightarrow \forall\, i \,:\, \langle p^i, x\rangle > 1].$$

Posons : $I_+(\lambda) = \Big\{i \text{ tel que } \ u_+^i \leq \lambda\Big\}$ alors

$$\Big\{x \,:\, u_+^2(x) > \lambda\Big\} = \bigcap_{i\in I_+(\lambda)} \Big\{x \,:\, \langle p^i, x\rangle > 1\Big\}$$

Ainsi l'ensemble $\Big\{x \,:\, u_+^2(x) > \lambda\Big\}$ est convexe car intersection de demi-espaces, par conséquent la fonction u_+^2 est **quasi-concave**.
La croissance découle du fait que l'on a pour tout $y \geq x$

$$\Big\{i \,:\, \langle p^i, y\rangle \leq 1\Big\} \subseteq \Big\{i \,:\, \langle p^i, x\rangle \leq 1\Big\}.$$

■

On a d'après (β)

$$u(x) \ \leq u_+^1(x).$$

On prendra alors

$$u_+(x) = \min\Big[u_+^1(x)\,,\ u_+^2(x)\Big]. \qquad (U_p)$$

C'est une fonction majorante plus fine numériquement mais non quasi-concave. Notons que u_+^1 est convexe.

On vérifie facilement que $u_+(x^i) = u_+^i$ pour tout i.

Calcul de $u_-(x)$

On va utiliser au mieux (α) et (γ). En effet étant donné $I \subset \{1, 2, \cdots, m\}$ on pose

$$S_I = co_{i \in I}(x^i) + \mathbb{R}^n_+ \quad , \quad T_I = \left\{ x \, : \, x \geq x^i \, , \, i \in I \right\} .$$

Il est claire que $T_I \subset S_I$.

Puisque u est une fonction croissante quasi-concave on a

$$u(x) \geq \min_{i \in I} \left[u(x^i) \right] \, , \, \forall x \in S_I, \tag{U_q}$$

et donc

$$u(x) \geq \max_I [\min_{i \in I} u(x^i) \, : \, x \in S_I] \geq \max_I [u(x^i) \, : \, x \in T_I] \tag{U_T}$$

Puisque la quantité $(u(x^i))$ est inconnue, on remplacera $(u(x^i))$ par u^i_-.

En combinant (α) et (γ) on obtient la formule :

$$u_-(x) = \max \left[\min_k [x_k] \, , \, \max_I \left[\min u^i_- \, , x \in S_I \right] \right] \tag{U_c}$$

Le problème est de savoir quand $x \in S_I$. Ce problème est un problème de réalisabilité du type : Trouver

$$\lambda \in \mathbb{R}^q, \, (q = \mathrm{card\,(I)}), \text{ tel que : } \mathrm{x \geq A\lambda \, , \, \lambda \geq 0, \, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1.} \tag{pr}$$

où A est une matrice $n \times q$ dont les colonnes sont les x^i $, i \in I$. Le problème (pr) peut être résolu à partir du programme linéaire :

$$0 = \sup_\lambda \left[\langle 0, \lambda \rangle \, : \, A\lambda \leq x, \, \lambda \geq 0 \, , \, -e^t \lambda = -1 \right] . \tag{$pr1$}$$

qui est équivalent à :

$$0 = \inf_{(y,t)} \left[\langle x, y \rangle - t \, , A^t y \geq te, \, y \geq 0 \right] . \tag{$pr2$}$$

La résolution de (pr1) ou de son dual (pr2) est coûteuse quoique possible. Pour simplifier, on prendra la formule moins coûteuse mais moins bonne :

$$u_-(x) = \max \left[u^1_-(x) \, , \, u^2_-(x) \right] . \tag{U_m}$$

avec

$$u^1_-(x) = \min_k [x_k].$$

$$u^2_-(x) = \max[u^i_- \ , \ x \in T_I]$$

Notons que la fonction u^1_- est concave puisque enveloppe inférieure de fonctions linéaires

$$u^1_-(x) = \min_k [x_k] = \min_k \langle e_k, x \rangle.$$

où $e_k = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ est le $k^{\text{iéme}}$ vecteur de la base canonique. La fonction u^2_- est quasi-convexe puisque l'ensemble de niveau

$$\Big\{ x \ : \ u^2_-(x) < \lambda \Big\} = \bigcap_{i \in T_I} \Big\{ x \ : \ u^i_- < \lambda \Big\}$$

est convexe car intersection de demi-espaces. En conclusion la fonction u_- est une minorante non quasi-concave de la fonction u.

Il est facile de voir que si x est un des x^i, les deux formules (U_c) et (U_m) donnent :

$$u_-(x^i) = u^i_- \ , \quad \text{pour tout } i.$$

3.3.3 Effet de la taille des observations

On peut se poser le problème de la précision des conclusions lorsque l'on augmente le nombre d'observations.

Supposons que dans un premier temps on ait à notre disposition r observations $\{(x^i, p^i)\}_{i=1}^r$ et qui nous ont permis d'obtenir l'encadrement

$$u_-(x) \leq u(x) \leq u_+(x).$$

Supposons que l'on ajoute à ces observations q nouvelles observations. On calcule de nouvelles bornes à partir des observations $\{(x^i, p^i)\}_{i=1}^{r+q}$ qui nous donnent l'encadrement

$$\tilde{u}_-(x) \leq u(x) \leq \tilde{u}_+(x),$$

avec

$$\tilde{u_+}(x) = \min\left[\min_{\widetilde{I}}[u_+^i\ ,\ \langle p^i, x\rangle \leq 1\ :\ i \in \widetilde{I}]\,, \max_k[x_k]\right] \leq u_+(x)$$

$$\tilde{u_-}(x) = \max\left[\max_{\tilde{I}}[u_-^i\ ,\ x \in T_{\tilde{I}}]\,, \min_k[x_k]\right] \geq u_-(x)$$

Ces inégalités sont conséquence des relations :

$$\widetilde{I} = I \cup \{r+1, \cdots, r+q\} \quad \text{et } T_{\widetilde{I}} \supset T_I$$

Soit finalement :

$$[\tilde{u}_-(x)\,,\ \tilde{u}_+(x)] \subset [u_-(x)\,,\ u_+(x)]\,.$$

Autrement dit l'encadrement s'améliore en augmentant le nombre d'observations.

3.3.4 Simulations numériques

Dans toutes les simulations nous supposons que les préférences sont représentées par la fonction de référence de Cobb-Douglas définie par $u : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$u(x) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}\ ,\ \alpha_j > 0.$$

On peut choisir, cette fonction de manière à avoir $u(te) = t \ \ \forall t > 0$ ce qui se traduit par $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$.
La correspondance demande est le singleton $X(p) = \left\{(\frac{\alpha_j}{p_j})_{j=1}^n\right\}$ pour tout $p \in \mathbb{R}^n_{++}$.

On peut ainsi générer autant de points $\{(x^i, p^i)\quad, i = 1\ :\ m\}$ que l'on désire pourvu que l'on tienne compte de la relation $p_j^i x_j^i = \alpha_j \quad , \forall j$.

Les programmes sont écrits en delphi5 et exécutés sur un PC portable (Aspire 7000).

Dans tous les tests effectués nous avons constaté que le choix des valeurs α_j n'a pas d'influence signifiante sur les résultats. De ce fait on se contentera d'une seule fonction dans toutes les simulations.

Nous commençons nos expérimentations numériques par une comparaison entre nos deux algorithmes pour construire les valeurs u_-^i et u_+^i pour $i = 1 : m$.

Nous présentons dans les tableaux ci dessous les résultats numériques fournis par les deux algorithmes.
$\Delta_{\max} = \max_i [u_+^i - u_-^i]$ désigne l'écart maximal enregistré entre la valeur de la borne supérieure et la valeur de la borne inférieure de $u(x^i)$.
Iter désigne le nombre d'itérations et Temps le temps d'exécution exprimé en minutes, secondes et millième de secondes.

Première série d'exemples :

Plaçons nous dans $\mathbb{R}^2$ et considérons la fonction de Cobb-Douglas définie sur $\mathbb{R}_{++}^2$ par

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}.$$

On a alors la correspondance demande :

$$X(p_1, p_2) = \left\{ (\frac{1}{2p_1}, \frac{1}{2p_2}) \right\}.$$

Exemple 1.1 :

Les points d'observations sont les points du pavé $[1\,,\,2]^2$ et sont donnés par

$$x^{ij} = \begin{pmatrix} 1 + (i-1)\,2^{-r} \\ \\ 1 + (j-1)\,2^{-r} \end{pmatrix} \quad i, j = 1, \cdots, 1 + 2^r$$

où $r = 0, 1, \cdots$ désigne le nombre de subdivisions. Le nombre de points $m = (1 + 2^r)^2$ correspondant aux différentes valeurs de r est donné par le tableau suivant :

r	Nombre de points
0	4
1	9
2	25
3	81
4	289
5	1089
$\vdots$	$\vdots$

Algorithme1

Tableau 1.1.1

m	$\Delta_{\max}$	Iter	Temps
4	0.6667	0	0 : 0 : 16
9	0.6667	0	0 : 0 : 31
25	0.4167	1	0 : 0 : 47
81	0.2953	2	0 : 0 : 370
289	0.1541	3	0 : 6 : 240
1089	0.0926	4	1 : 58 : 921

Algorithme2

Tableau 1.1.2

m	$\Delta_{\max}$	Iter	Temps
4	0.6667	0	0 : 0 : 2
9	0.6667	0	0 : 0 : 2
25	0.4167	0	0 : 0 : 2
81	0.2953	1	0 : 0 : 16
289	0.1541	1	0 : 0 : 378
1089	0.0926	1	0 : 17 : 131

Exemple 1.2 :

Les points sont générés de manière aléatoire dans $[1,2]^2$ via la fonction standard random.

L'écriture $a = 1 + random$, donne un nombre aléatoire a entre 1 et 2.

Algorithme1

Tableau 1.2.1

m	$\Delta_{\max}$	Iter	Temps
10	0.3206	1	0 : 0 : 31
50	0.2647	1	0 : 0 : 168
100	0.2327	2	0 : 0 : 684
250	0.1512	2	0 : 3 : 853
500	0.1188	3	0 : 19 : 867
1000	0.1036	3	1 : 20 : 332
2000	0.0800	3	6 : 42 : 964

Algorithme2

Tableau 1.2.2

m	$\Delta_{\max}$	Iter	Temps
10	0.3993	0	0 : 0 : 4
50	0.2128	1	0 : 0 : 11
100	0.2033	1	0 : 0 : 78
250	0.1985	2	0 : 0 : 562
500	0.1461	2	0 : 4 : 220
1000	0.1346	3	0 : 41 : 793
2000	0.1041	3	4 : 28 : 262

Exemple 1.3 :

Les points sont pris dans le pavé $[1, 10]^2$ donnés par :

$$x^{ij} = \begin{pmatrix} 1 + 9(i-1)\,2^{-r} \\ \\ 1 + 9(j-1)\,2^{-r} \end{pmatrix} \quad i, j = 1, \cdots, 1 + 2^r$$

Algorithme1

Tableau 1.3.1

m	$\Delta_{\max}$	Iter	Temps
4	8.1818	0	0 : 0 : 7
9	8.1818	1	0 : 0 : 31
25	5.9318	1	0 : 0 : 47
81	3.7026	2	0 : 0 : 381
289	2.1564	3	0 : 6 : 490
1089	1.3284	6	2 : 41 : 476

Algorithme2

Tableau 1.3.2

m	$\Delta_{\max}$	Iter	Temps
4	8.1818	0	0 : 0 : 4
9	8.1818	0	0 : 0 : 4
25	5.9318	1	0 : 0 : 7
81	3.7026	1	0 : 0 : 15
289	2.1564	1	0 : 0 : 265
1089	1.3284	1	0 : 15 : 691

Exemple 1.4 :

Les points sont générés de manière aléatoire dans $[1, 10]^2$.

Algorithme1

Tableau 1.4.1

m	$\Delta_{\max}$	Iter	Temps
10	5.2222	1	0 : 0 : 78
50	4.2857	1	0 : 0 : 109
100	3.2500	2	0 : 0 : 688
250	3.2222	2	0 : 3 : 546
500	3.2222	2	0 : 14 : 986
1000	3.2222	2	0 : 59 : 575
2000	3.2222	2	3 : 53 : 782

Algorithme2

Tableau 1.4.2

m	$\Delta_{\max}$	Iter	Temps
10	5.1429	0	0 : 0 : 2
50	4.2857	1	0 : 0 : 8
100	4.2222	2	0 : 0 : 23
250	4.2222	2	0 : 0 : 281
500	4.2222	2	0 : 2 : 496
1000	3.2857	2	0 : 20 : 343
2000	3.2857	2	2 : 46 : 655

Deuxième série d'exemples :

Plaçons nous à présent dans $\mathbb{R}^3$. La fonction de Cobb-Douglas considérée ici est définie sur $\mathbb{R}^3_{++}$ par :

$$u(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\frac{1}{3}}\, x_2^{\frac{1}{3}}\, x_3^{\frac{1}{3}}$$

La correspondance demande est alors le singleton :

$$X(p_1, p_2, p_3) = \left\{ (\frac{1}{3p_1}\,,\, \frac{1}{3p_2}\,,\, \frac{1}{3p_3}) \right\}.$$

Exemple 2.1 :

Les points d'observations sont pris dans le pavé $[1\,,\,2]^3$ et sont donnés par :

$$x^{i\,j\,k} = \begin{pmatrix} 1 + (i-1)\,2^{-r} \\ \\ 1 + (j-1)\,2^{-r} \\ \\ 1 + (k-1)\,2^{-r} \end{pmatrix} \quad i, j, k = 1, \cdots, 1 + 2^r$$

$r = 0, 1, \cdots$ désigne le nombre de subdivisions.
Le nombre de points $m = (1 + 2^r)^3$ correspondant aux différentes valeurs de r est donné par le tableau ci dessous :

r	Nombre de points
0	8
1	27
2	125
3	729
$\vdots$	$\vdots$

Algorithme1

Tableau 2.1.1

m	$\Delta_{\max}$	Iter	Temps
8	0.8000	0	0 : 0 : 172
27	0.6154	1	0 : 0 : 343
125	0.3654	1	0 : 0 : 546
729	0.2386	2	0 : 31 : 496

Algorithme2

Tableau 2.1.2

m	$\Delta_{\max}$	Iter	Temps
8	0.8000	0	0 : 0 : 0
27	0.6154	0	0 : 0 : 0
125	0.3654	1	0 : 0 : 46
729	0.2386	2	0 : 9 : 874

Exemple 2.2 :

Les points sont aléatoires générés par la fonction random dans $[1,2]^3$.

Algorithme1

Tableau 2.2.1

m	$\Delta_{\max}$	Iter	Temps
10	0.3272	1	0 : 0 : 31
50	0.2877	1	0 : 0 : 125
100	0.2710	2	0 : 0 : 686
500	0.1749	3	0 : 19 : 47
1000	0.1546	3	1 : 17 : 204
2000	0.1348	4	6 : 19 : 157

Algorithme2

Tableau 2.2.2

m	$\Delta_{\max}$	Iter	Temps
10	0.3605	0	0 : 0 : 0
50	0.3698	1	0 : 0 : 16
100	0.2654	2	0 : 0 : 47
500	0.1860	2	0 : 4 : 990
1000	0.1829	2	0 : 37 : 690
2000	0.1740	3	4 : 2 : 595

Exemple 2.3 :

Les points d'observations sont pris dans le pavé $[1\ ,\ 10]^3$.

Algorithme1

Tableau 2.3.1

m	$\Delta_{\max}$	Iter	Temps
8	8.5714	0	0 : 0 : 108
27	7.6596	1	0 : 0 : 424
125	5.4096	2	0 : 1 : 52
729	3.6464	3	0 : 46 : 55

Algorithme2

Tableau 2.3.2

m	$\Delta_{\max}$	Iter	Temps
8	8.5714	0	0 : 0 : 2
27	7.6596	0	0 : 0 : 3
125	5.4096	2	0 : 0 : 41
729	3.6464	3	0 : 11 : 333

Exemple 2.4 :

Les points sont aléatoires générés par la fonction random dans $[1,10]^3$.
L'écriture $a = 1 + random(9)$, donne un nombre aléatoire a entre 1 et 10.

Algorithme1

Tableau 2.4.1

m	$\Delta_{\max}$	Iter	Temps
10	5.5882	1	0 : 0 : 67
50	4.9231	1	0 : 0 : 204
100	4.5455	2	0 : 0 : 649
500	3.6000	2	0 : 15 : 939
1000	3.2308	2	1 : 4 : 288
2000	3.2808	2	3 : 58 : 118

Algorithme2

Tableau 2.4.2

m	$\Delta_{\max}$	Iter	Temps
10	4.7091	0	0 : 0 : 6
50	4.6338	1	0 : 0 : 15
100	4.6338	2	0 : 0 : 26
500	4.0000	2	0 : 2 : 965
1000	3.4286	2	0 : 24 : 489
2000	3.2308	3	2 : 17 : 498

A l'issue de ces expérimentations numériques, nous constatons que l'algorithme2 est nettement plus rapide que l'algorithme1. Les autres propriétés sont pratiquement les mêmes pour les deux algorithmes : le nombre d'itérations largement inférieur au nombre de points utilisés m. La précision s'améliore en augmentant le nombre de points. Elle est d'autant meilleure que les points sont proches de la diagonale et moins bonne quand on s'éloigne de celle ci, ce qui s'explique par le fait qu'il s'agit d'un problème d'intégration connu par ce genre de situations. L'origine est représentée dans notre cas par la diagonale du pavé utilisé, sans oublier que l'on travaille en plusieurs dimensions $(n \geq 2)$.

Troisième série d'exemples :

Exemple 3.1 (GARP non vérifié)
On envisage ici le cas où (GARP) n'est pas vérifié. Considérons par exemple dans le pavé $[1\,,\,2]^2$, le point $x = (3/2, 3/2)$ auquel on associe le vecteur prix $p = (1/15, 3/5)$ au lieu de $(1/3, 1/3)$. La condition $\langle p, x\rangle = 1$ est bien satisfaite, par contre les deux algorithmes s'arrêtent en Echec du fait que l'on obtient $u_-(x) = 1.515 > u_+(x) = 1.5$, ce qui signifie conformément au théorème 3.3 que (GARP) n'est pas satisfait. A ce propos, d'autres points présentent aussi cette anomalie.

Dans tout ce qui suit le point x qui va servir à faire les comparaisons n'est pas un point d'observation $(x \neq x^i)$. Pour le calcul de $u_+(x)$ on utilise la formule (U_p) et pour $u_-(x)$ la formule (U_m). Il s'agit de l'extension de notre algorithme.
Dans les tableaux qui suivent $\Delta_x = u_+(x) - u_-(x)$.

Exemple 3.2

Les points d'observations sont ceux du pavé $[1,2]^2$. On considère le point $x = (1.36\,,\,1.90)$, on a $u(x) = 1.607$. On obtient le tableau suivant :

Tableau 3.2

m	$u_-(x)$	$u_+(x)$	Δ_x
9	1.360	1.900	0.540
25	1.458	1.750	0.292
81	1.502	1.630	0.128
289	1.555	1.630	0.075
1089	1.576	1.630	0.054

Considérons un autre point $y = (1.39\,,\,1.87)$ pour lequel nous obtenons l'encadrement final pour la taille $(m = 1089)$

$$u_-(y) = 1.580 \leq u(y) = 1.612 \leq u_+(y) = 1.630$$

On s'aperçoit alors que l'intervalle $[1.580\,,\,1.630]$ contenant $u(y)$ est inclu dans l'intervalle $[1.576\,,\,1.630]$ contenant $u(x)$, auquel cas **on doit s'abstenir**, les deux biens ne peuvent être comparés.

Exemple 3.3 :

Les points d'observations sont ceux du pavé $[1,10]^2$.
On prend $x = (8\,,\,3)$, on a $u(x) = 4.899$. Nous obtenons le tableau suivant :

Tableau 3.3

m	$u_-(x)$	$u_+(x)$	Δ_x
9	3.000	8.000	5.000
25	3.000	7.750	4.750
81	3.290	5.500	2.210
289	4.302	5.500	1.098
1089	4.516	5.220	0.704

Exemple 3.4 :

Les points d'observations sont ceux du pavé $[1,2]^3$.
On considère le point $x = (1.12\,,\,1.41\,,,\,1.73)$, on a $u(x) = 1.398$.
On obtient le tableau suivant :

Tableau 3.4

m	$u_-(x)$	$u_+(x)$	Δ_x
8	1.120	1.730	0.610
27	1.125	1.500	0.375
125	1.216	1.500	0.284
729	1.285	1.500	0.215

Exemple 3.5 :

Les points d'observations sont ceux du pavé $[1,10]^3$.
On considère le point $x = (2.5\,,\,5\,,\,8.5)$, on a $u(x) = 4.736$.
On obtient le tableau suivant :

Tableau 3.5

m	$u_-(x)$	$u_+(x)$	Δ_x
8	2.500	8.500	6.000
27	2.500	5.500	3.000
125	2.500	5.500	3.000
729	3.763	5.500	1.737

Quatrième série d'exemples :

Ici on utilise les fonctions $u_-(x)$ et $u_+(x)$ pour encadrer $u(x)$ pour un échantillon de points x générés de manière aléatoire autres que les x^i. Les deux versions de l'algorithme sont utilisées.

A) Dans le pavé $[1, 2]^2$

Exemple 4.1 :

Algorithme1 : $m = 1089$, x^i sont du maillage.

Tableau 4.1.1

x_1	x_2	$u_-(x)$	$u_+(x)$	Δ_x
1.000	1.013	1.015	1.030	0.015
1.861	1.203	1.457	1.530	0.073
1.273	1.672	1.429	1.470	0.041
1.319	1.162	1.230	1.250	0.020
1.372	1.426	1.374	1.410	0.036

Algorithme1 : $m = 1000$, les points x^i sont aléatoires.

Tableau 4.1.2

x_1	x_2	$u_-(x)$	$u_+(x)$	Δ_x
1.131	1.550	1.297	1.353	0.056
1.149	1.580	1.316	1.364	0.048
1.057	1.353	1.183	1.218	0.035
1.731	1.775	1.731	1.763	0.032
1.301	1.469	1.371	1.419	0.048

Exemple 4.2 :

Algorithme2 : $m = 1089$, x^i sont du maillage.

Tableau 4.2.1

x_1	x_2	$u_-(x)$	$u_+(x)$	Δ_x
1.154	1.955	1.457	1.530	0.073
1.781	1.025	1.312	1.380	0.068
1.038	1.525	1.233	1.310	0.077
1.466	1.018	1.190	1.250	0.060
1.880	1.248	1.498	1.560	0.062

Algorithme2 : $m = 1000$, les points x^i sont aléatoires.

Tableau 4.2.2

x_1	x_2	$u_-(x)$	$u_+(x)$	Δ_x
1.580	1.954	1.739	1.783	0.044
1.163	1.055	1.093	1.131	0.038
1.712	1.014	1.282	1.357	0.075
1.099	1.052	1.058	1.099	0.041
1.968	1.133	1.452	1.532	0.080

B) Dans le pavé $[1,2]^3$

Exemple 4.3 :

Algorithme1 : $m = 729$, les points x^i sont du maillage.

Tableau 4.3.1

x_1	x_2	x_3	$u_-(x)$	$u_+(x)$	Δ_x
1.293	1.917	1.368	1.407	1.630	0.223
1.203	1.273	1.672	1.305	1.380	0.075
1.319	1.162	1.372	1.207	1.372	0.165
1.426	1.082	1.475	1.225	1.380	0.155
1.071	1.841	1.060	1.176	1.380	0.204

Algorithme1 : $m = 1000$, les points x^i sont aléatoires.

Tableau 4.3.2

x_1	x_2	x_3	$u_-(x)$	$u_+(x)$	Δ_x
1.267	1.897	1.898	1.576	1.721	0.145
1.218	1.911	1.753	1.500	1.658	0.158
1.575	1.701	1.375	1.494	1.613	0.119
1.022	1.228	1.254	1.099	1.213	0.114
1.328	1.454	1.335	1.328	1.432	0.104

Exemple 4.4 :

Algorithme2 : $m = 729$, les points x^i sont du maillage.

Tableau 4.4.1

x_1	x_2	x_3	$u_-(x)$	$u_+(x)$	Δ_x
1.650	1.291	1.679	1.472	1.630	0.158
1.988	1.836	1.231	1.511	1.750	0.239
1.419	1.907	1.710	1.586	1.750	0.164
1.854	1.088	1.375	1.276	1.500	0.224
1.475	1.857	1.263	1.418	1.630	0.212

Algorithme2 : $m = 1000$, les points x^i sont aléatoires.

Tableau 4.4.2

x_1	x_2	x_3	$u_-(x)$	$u_+(x)$	Δ_x
1.463	1.720	1.010	1.228	1.435	0.207
1.169	1.132	1.138	1.132	1.169	0.037
1.283	1.477	1.574	1.336	1.494	0.158
1.828	1.887	1.069	1.449	1.653	0.204
1.393	1.316	1.756	1.424	1.556	0.132

Exemple 4.5 : $m = 2000$, les points x^i sont aléatoires.

Algorithme1 :

Tableau 4.5.1

x_1	x_2	x_3	$u_-(x)$	$u_+(x)$	Δ_x
1.033	1.313	1.584	1.236	1.343	0.107
1.308	1.077	1.411	1.173	1.311	0.138

Algorithme2 :

Tableau 4.5.2

x_1	x_2	x_3	$u_-(x)$	$u_+(x)$	Δ_x
1.509	1.714	1.512	1.509	1.638	0.129
1.164	1.955	1.896	1.557	1.695	0.138

Conclusion :

Dans cette thèse on s'est intéressé à la résolution approchée du problème des préférences révélées. Il s'agit là d'un problème de grande importance et très difficile dans la théorie du consommateur.
Le problème du consommateur consiste à déterminer sa consommation de manière à maximiser la satisfaction (mesurée par une fonction d'utilité u) qu'il obtient à partir de son choix compte tenu des prix des biens et du budget dont il dispose. Le problème ainsi posé est de nature tout à fait théorique puisque la fonction d'utilité (unique à une scalarisation près) représentant les préférences du consommateur n'est point connue. On ne connaît que les choix effectués par le consommateur en fonction des prix et du budget. Reconstruire une fonction d'utilité à partir de ces choix définit ce qui est appelé le problème des préférences révélées. C'est un problème difficile non résolu pleinement actuellement.

L'objet de cette thèse consiste à obtenir la meilleure minorante et la meilleure majorante de la fonction u inconnue lorsque nous disposons d'un nombre fini d'observations sur les choix du consommateur. Ce problème est en une certaine manière un problème d'intégration approchée mais est beaucoup plus complexe. Nous avons développé une approche tout à fait originale et élaboré un algorithme permettant de construire les bornes cherchées. C'est un algorithme fiable et beaucoup plus efficace, rapide et moins coûteux que les quelques râres méthodes existantes pour chercher une approximation de la fonction u. La mise en oeuvre est réalisée avec succès en deux versions donnant lieu à des résultats cohérents très satisfaisants.

Bibliographie

[1] **Afriat S.N.,** *The construction of a Utility Function from Expenditure Data*, International Economic Review vol. 8, 1967, 67-77.

[2] **Afriat S.N.,** *On a system of Inequalities in Demand Analysis : an Extension of the Classical Method*, International Economic Review vol. 14, 1973, 460-472.

[3] **Afriat S.N.,** *Combinatorial Theory of Demand*, 1976, Londres.

[4] **Afriat S.N.,** *Demand Function and the Slutsky Matrix*, Princeton University Press, 1982.

[5] **Afriat S.N.,** *The Connection between Demand and Utility*, Dipartimento Di Economia Politica Univesità Degli Studi di Siena, no. 275, 1999.

[6] **Aussel D., Daniilidis.,** *Normal characterization of the main classes of quasiconvex functions, Set-Valued Analysis*, 8, 2000, 219-236.

[7] **Aussel D., Daniilidis.,** *Normal cones to level sets and axiomatic approch. Applications in quasiconvexsity and pseudoconvexity*, Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, Karlovassi 1999, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, 502, Springer, Berlin, 2002, 88-101.

[8] **Avriel M., Diewert w.E., Schaible S. and Zang I.,** *Generalized Concavity*, Plenum Publishing Corporation, New York, 1998.

[9] **Baudry M., Leprince M. and Moreau C.,** *Préférences révélées, bien public local et électeur médian : tests sur données françaises*, Économie et prévision, 2002-5, no 156, 125-146.

[10] **Borde J., Crouzeix J.-P.,** *Continuity of the normal cones to the level sets of quasiconvex functions*, Journal of Optimisation theory and Applications 66, no. 3, 1990, 415-429.

[11] **Bouyssou D.,** *Relations binaires et modélisation des préférences*, Université libre de Bruxelles, 2003.

[12] **Chiappori P.A., Ekeland I.,** *Aggregation and market demand : an exterior differential calculus viewpoint*, Econometrica, 67, 1999, 1435-1458.

[13] **Chabrillac Y., Crouzeix J.-P.,** *Continuity and differentiability properties of monotone real functions of several variables*, Mathematical Programming Study Vol. 23, 1982, 193-205.

[14] **Crouzeix J.-P., Ferland J. A.,** *Criteria for quasiconvexity and pseudoconvexity : Relationships and Comparisons*, Mathematical Programming Vol. 23, 1982, 193-205.

[15] **Crouzeix J.-P.,** *Duality between direct and indirect utility functions, differentiability properties*, Journal of Mathematical Economics 12, 1983, 149-165.

[16] **Crouzeix J.-P., Ferland J. A.,** *Criteria for differentiable generalized monotone maps*, Mathematical Programming Vol. 75, 1996, 399-406.

[17] **Crouzeix J.-P.,** *La Convexité Généralisée en Economie Mathématique*, Esaim : Proceedings, December 2003, vol. 13, 31-40.

[18] **Crouzeix J.-P.,** *Criteria for genaralized convexity and generalized monotonicity in the differentible case*, Chapter 2 in the Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, Nonconvex optimization and its Applications, vol.76, Springer, 2005, 121-149.

[19] **Crouzeix J.-P.,** *Continuity and differentiability of quasiconvex functions*, Chapitre 3 in the Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, Nonconvex optimization and its Applications, Springer, vol. 76, 2005, 121-149.

[20] **Crouzeix J.-P.,** *Charactérizations of generalized convexity and generalized monotonicity, a survey*, in Generalized Convexity and Genera-

lized Monotonicity, Couzeix J-p, Martinez-Legaz J-E and Volle M,eds, Non convex optimization and its applications,Kluwer Academic Publishers,1998, 237-256.

[21] **Crouzeix J.-P., Lambert D., V.H Nguyen. and J.-J Strodiot.,** *Finite Convex Integration*, Journal of Convex Analysis, 2004, vol. 11, no 1, 131-146.

[22] **Crouzeix J.-P., Rapcsak T.,** *Integrability of pseudomonotone differentiable maps and the revealed preference problem*, Journal of Convex Analysis 12, no. 2, 2005, 431-446.

[23] **Crouzeix J.-P., Keraghel A. and Sosa W.,** *Programmation Mathématique différentiable*, Livre à paraître.

[24] **Crouzeix J.-P., Eberhard A. and Ralph D.,** *A geometrical insight on pseudoconvexity and pseudomonotonicity*, Mathematical Programming manuscrit, à paraître.

[25] **Debreu G.,** *Definite and semi-definite quadratic forms*, Econometrica 20, 1952, 295-300.

[26] **Debreu G.,** *Theory of value : an axiomatic approch of economic equilibrium*, Wiley,New York, 1959.

[27] **Debreu G.,** *Economic Theory*, 24, 2004, no. 1, 211-219.

[28] **Debreu G., Koopmans T. C.,** *Additively decomposed quasiconvex functions, Mathematical Programming*, 24, 1982, 1-38.

[29] **Deslierres M.,** *Théorie du consommateur : Marche à suivre*, Département d'économie, Université de Moncton, 2005.

[30] **Diwert W.E.,** *Duality approches to microeconomics theory*, in Handbook of Mathematical Economics, vol. 2, Arrow K. J. and intrilligator M. D. eds, North-Holland Publishing Company, 1982, 535-599.

[31] **Diwert W.E.,** *Applications of duality theory*, in Frontiers of Quantitative Economics, vol. 2, M. D. intrilligator and D. A. kendrick editors, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1974, 106-171.

[32] **Diwert W.E.,** *"Afriat and Revealed Preference theory"*, Review of Economic Studies, 40, 1973, 419-426.

[33] **Eberhard A., Crouzeix J.-P.,** *Integration of a normal cone relation generated by the level sets of pseudoconvex functions*, in process.

[34] **Eberhard A., Crouzeix J.-P.,** *Existence of closed graph, maximal, cyclic pseudomonotone relations and revealed preference theory*, Journal of Industrial and Management Optimization, vol. 3,no 2, 2007, 233-255.

[35] **Ekeland I.,** *Exterior differential calculus and applications to economy theory*, Scuola Normale Superiore di Pisa Quaderni, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1998.

[36] **Fenchel w.,***Convex cones, sets and Functions*, Lecture notes, Princeton university, 1951.

[37] **Forges F., Mirelli E.,** *Afriat's theorem for the general budget sets*, CESIFO Working paper 2006, no. 1703.

[38] **Fostel A., Scarf H.E. and Todd M.J.,** *Two new proofs of Afriat's theorem*, Economic Theory 24, 2004, no. 1 211-219.

[39] **Gardes F.,** *La contribution de Jeanville au débat sur l'intégrabilité*, Université Paris 1.

[40] **Grant S.,** *Consumer theory and Demand.*

[41] **Green J., Mas-Collel A. and Whinston M.,** *Microeconomics theory*, Oxford University Press, 1995.

[42] **Gune T.,** *The problems of testing preference Axioms with Revealed preference theory* , Royal institute of technology, Stockholm and London school of economics.

[43] **Hadjisavvas N., Komlosi S. and Schaible S.,** *Handbook of Generalized Convexity and Monotonicity*, Springer, 2004.

[44] **Henrici P.,** *Elements of numerical analysis*, Wiley, new York, 1964.

[45] **Houthakker H.,** *Revealed Preference and the Utility Function*, Economica, vol. 17, 1950, 159-174.

[46] **Hurwicz L., Uzawa.,** *On the integrability of demand functions*, Ch. 6 in Preferences, Utility and Demand, Chipman J. Hurwicz L, and Sonnenscheim, Harcourt brace Jovanovich, 1971.

[47] **Kannai Y.,** *Concavifiability and constructions of concave utility functions*, Journal of Mathemetical Economics, 4, 1974, 1-56.

[48] **Kannai Y.,** *Concave utility functions, existence, constructions and cardinality*, in Generalized concavity in optimization and economics, Schaible S. and Ziemba W. T. eds, Academic Press,1981, 543-612.

[49] **Keraghel A.,** *Analyse Convexe : Théorie Fondamentale et Exercices*, Université de Sétif, Faculté des sciences, Laboratoire de Mathématiques Fondamentale et Numérique, Avril 2001.

[50] **Keraghel A., Rahmani N.,** *New alternative to formulate utility functions in consumer theory*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 2, 2008, no. 2, 73-79.

[51] **Kihlstrom R., Mas Collel A. and Sonnenscheim.,** *The demand theory of the weak axiom of revealed preference*, Econometrica 44, 1976, 971-978.

[52] **Lau L.J.,** *Duality and the structure of utility functions*, Journal of Economic Theory 1, 1970, 374-396.

[53] **Little M.D.,** *A reformulation of the theory of consumer's behaviour*, Oxford Economic Papers 1, 1949, 90-99.

[54] **Magnien F., Pougnard J.,** *Les indices à utilité constante : une référence pour mesurer l'évolution des prix*, Economie et Statistiques no 335, 2000.

[55] **Martinez-Legaz J.-E.,** *Duality between direct and indirect utility functions under minimal hypotheses*, Journal of Mathemetical Economics 20, 1991, 199-209.

[56] **Martinez-Legaz J.-E.,** *Generalized convex duality and its economic applications*, Chapitre 6 in the Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, Hadjisavvas N, Komlosi S, and Schaible S., editors, Kluwer Academic Publishers, 2004, 237-392.

[57] **Mattei A.,** *Economie expérimentale et modèle intertemporel du consommateur*, Université de Lausanne Dorigny, CH-1015 Lausanne.

[58] **Mongin P.,** *Les préférences révélées et la formation de la théorie du consommateur*, Laboratoire d'économie et centre national de la recherche scientifique, Paris,Revue économique, 2000, 1125-1152.

[59] **Mongin P.,** *Les controverses en théorie de l'entreprise et la théorie des préférences révélées*, Editions la découverte, 2000.

[60] **Penot J.-P., M.wolle.,** *On quasi-convex duality*, Mathematics of Operation Research, 15, 1990, 597-624.

[61] **Penot J.-P.,** *Observations about microeconomics and duality*, International Workshop on games, Mathematical Programming in Economics, Aix en Provence, décembre 2001.

[62] **Piaw T.C., Vohra R.,** *Afriat's Theorem and Negative Cycles*, University of Singapore and graduate school North Western University, 2003.

[63] **Rapcsâk T.,** *an unsolved problem of Fenchel*, Journal of Global Optimization, 11, 1997, 207-217.

[64] **Reinhard J.,** *Uses of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity in Economics*, University of Bonn, Germany, 2004.

[65] **Reinhard J.,** *Local and global Consumer Preferences*, University of Bonn, Germany, 2005.

[66] **Rockafellar R. T.,** *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1972.

[67] **Roy B.,** *De l'utilité*, Paris Herman, 1942.

[68] **Sakai Y.,** *Equivalence of the weak and strong axioms of revealed preference without demand continuity assumptions : a" regularity condition" approch*, Journal of Economic Theory 8, 1974, 292-304.

[69] **Sakai Y.,** *Revealed favorability, indirect utility and direct utility*, Journal of Economic Theory 14, 1977, 113-129.

[70] **Samuelson P.A.,** *A note on the pure theory of consumer's behaviour*, Econometrica 5, 1938, 61-71.

[71] **Samuelson P.A.,** *The empirical implications of utility analysis*, Economica 6, 1938, 344-356.

[72] **Samuelson P.A.,** Foundations of Economic Analysis, Havard University Press, Cambridge, 1947.

[73] **Samuelson P.A.,** *Consumption theory in terms of revealed preference*, Economica, vol. 15, 1948, 243-253.

[74] **Selod H.,** *Microéconomie 1 : Consommation, production et équilibre* Cours, 2006.

[75] **Varian H.R.,** *The Non-Parametric Approach to Demand Analysis*, Econometrica, vol. 50, 1982, 945-974.

[76] **Varian H.R.,** *Revealed preference*, Econometrica, 2006.

ملخص

دراستنا هذه تقدم إسهامات نظرية و خوارزماتية لحل مسألة المستهلك. وتهتم أساسا بإنشاء دالة المنفعة انطلاقا من عدد منته من الملاحظات حول اختيارات المستهلك. نبين أن المسألة هي مسألة مكاملة في الإيطار العام للتحدبية المعممة . نقدم عندئذ منهجية جديدة تعتمد على أحدث نتائج التحدبية المعممة والرتابة المعممة و ما بينهما من تداخلات. و للبرمجة الخطية و غير الخطية أيضا دور معتبر في الجوانب التقنية.

الكلمات المفتاحية : التحدبية المعممة، الرتابة المعممة، مسألة المستهلك، دالة المنفعة، دالة الطلب، الاختيارات المعلن عنها .

Abstract

Our study gives theoretical and algorithmic contributions to treat revealed preferences problem in consumer theory. We are essentially interested in the reconstruction of a utility function from a finite number of observations on choices made by the consumer. We show that it is about a problem of integration in the most general context of the generalized convexity. We develop then an original approach appealing recent investigations of generalized convex analysis and generalized monotonicity. Linear and nonlinear optimization are also fundamental to establish certain results. Numeric simulations are successfully realized showing the coherence of the established results.

Key words : Generalized convexity, Generalized monotonicity, Optimisation, Consumer problem, Utility function, Demand function, Revealed preferences.

Résumé

Notre étude apporte des contributions théoriques et algorithmiques pour traiter le problème des préférences révélées dans la théorie du consommateur. On s'intéresse essentiellement à la reconstruction d'une fonction d'utilité à partir d'un nombre fini d'observations sur les choix effectués par le consommateur. Nous montrons qu'il s'agit d'un problème d'intégration dans le contexte le plus général de la convexité généralisée. Nous développons alors une approche originale faisant appel aux investigations récentes liées à l'analyse convexe généralisée et la monotonie généralisée. L'optimisation linéaire et non linéaire sont également fondamentales pour établir certains résultats. Des simulations numériques sont réalisées avec succès mettant en évidence la cohérence des résultats établis.

Mots clés : Convexité généralisée, Monotonie généralisée, Optimisation, Problème du consommateur, Fonctions d'utilité, Fonction demande, Préférences révélées.