RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS-SÉTIF

THÉSE

Présenté à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Options : Mathématiques Appliquées

Présentée par

Madame Boukhatem Yamna

THÈME

Etude de quelques problèmes aux limites hyperboliques semi linéaires : Existence locale et globale, comportement asymptotique et explosion en temps fini des solutions

Soutenue le : 30/10/2014, devant le jury composé de :

Prof. B. MEROUANI	Universié Ferhat Abbas de Sétif	Président
Prof. B. BENYATTOU	Universié Mohamed Boudiafe de M'sila	Directeur de thèse
Prof. S. DRABLA	Universié Ferhat Abbas de Sétif	Examinateur
Prof. A. YOUKANA	Universié Hadj Lakhder de Batna	Examinateur
Prof. H. BENSERIDI	Universié Ferhat Abbas de Sétif	Examinateur
Prof. F. BENTALHA	Universié Hadj Lakhder de Batna	Examinatrice

Résumé

Considérons deux problèmes hyperboliques semi linéaire avec une source non linéaire de type polynomiale, le premier concerne un problème hyperbolique semi linéaire pour un opérateur fortement elliptique à coefficients variables et avec une dissipation forte et une dissipation non linéaire, tandis que le second est un problème aux limites acoustiques pour les équations des ondes viscoélastiques à coefficients variables. Sous certaines conditions sur les données initiales en se basant sur des techniques récentes d'analyse mathématique, des résultats importants sur l'existence locale et globale, l'unicité, comportement asymptotique et l'explosion en temps fini des solutions sont obtenus.

Abstract

In this work, we consider two semi linear hyperbolic problems with polynomial source term ; the first is a semi linear problem with nonlinear dissipative term for a strongly elliptic operator with variable coefficients. However, the second problem is concerned to the viscoelastic wave equations with variable coefficients and acoustic boundary conditions. Under some hypothesis on the initial data by using a recently results in mathematical analysis, then important results on local and global existence, uniqueness, asymptotic decay and below up in finite time of solutions are given.

Remerciements

J'adresse tout d'abord ma profonde gratitude et reconnaissance à mon directeur de thèse **Mr. Benabbderrahmane Benyattou** professeur à l'université de M'sila. Je vous remercie pour la confiance constante que vous m'avez accordée, votre disponibilité et vos encouragements pour me guider dans mes recherches. Je garde toujours votre générosité, votre compréhension et votre efficacité. Pour tout ce que vous m'avez donné, je vous remercie très sincèrement.

Je remercie professeur **Merouani Boubakeur**, pour l'honneur qu'il m'a fait d'avoir accepté de juger ce travail et d'en présider le jury de soutenance.

Un très grand merci aux professeurs : **Bentalha Fadhila, Derabla Salah, Bensiridie Hamid** et **Youkana Amar** qui ont accepté de participer à mon jury de thèse. Leur présence constitue un grand honneur. Merci pour vos remarques, vos critiques, vos conseils et simplement, pour l'intérêt que vous avez portés à mon travail.

Je voudrais également remerciée tous les membres de laboratoire d'Informatique et de Mathématiques (LIM) à l'université de Laghouat, et l'équipe de mathématiques appliquées et plus spécialement *Nouiri Brahim* et *Abita Rahmoune* pour avoir toujours été prêt à répondre a mes questions et pour leur aide et leur soutien avec mes sincères voeux de réussite. Je n'oublie pas d'exprimer particulièrement toute mon amitié à *Bendaoud Zohra* pour son aide et son soutien au courant de cette dernière année.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mes proches, mes chers parents, mon mari, mes filles *Nesrine* et *Nermine* et ma soeur pour leur soutien constant et encouragement. Et surtout de m'avoir supportés toutes ces années, et à qui je dédie ce travail.

Table des matières

Introduction générale

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles (E.D.P). C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes à travers des équations aux dérivées partielles, qui nous permettent de comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises. En particulier les équations d'ondes modélisent plusieurs phénomènes naturels en : Physique, Chimie, Biologie..

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de l'existence locale et globale, comportement asymptotique et explosion en temps fini de la solution de deux équations d'ondes semi linéaires pour un opérateur fortement elliptique à coefficients variables, en considérant les deux problèmes suivants :

*Problème hyperbolique semi linéaire pour un opérateur fortement elliptique avec termes source et dissipatifs ;

*Problème d'ondes viscoelastiques avec des conditions aux limites acoustiques pour un opérateur fortement elliptique à coefficients variables.

Plus précisément, ce travail est constitué de deux parties, dans la première nous allons considérer le premier problème suivant :

$$u_{tt} + Au - \alpha \Delta u_t + g(u_t) = \beta |u|^{p-2} u, \text{ dans } \Omega \times (0, T), \tag{1}$$

soumis à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, où $\alpha > 0,\ \beta > 0$, $p > 2$. A est un opérateur fortement elliptique d'ordre 2 où les coefficients dépendent de x et t et g est une fonction à préciser ultérieurement.

Les problèmes liés à la première équation (1) dans le cas où $A = -\Delta$ avec ou sans termes sources (non linéaire de type polynomial) ou dissipatifs ont été considérés par de nombreux auteurs (4; 19; 26; 29; 33; 35; 42; 46; 52; 53). Précisément, dans l'absence du terme dissipatif ($\alpha = 0, g(v) \equiv 0$), alors le terme source $\beta\,|u|^{p-2}\,u, p > 2$ dans le cas où l'énergie initiale est négative, provoque l'explosion de la solutions (voir (4; 29)). Dans le cas contraire, l'absence du terme source ($\beta = 0$), alors le terme dissipatif (avec $\alpha = 0$) assure l'existence globale de la solution pour des données initiales arbitraires dans l'espace $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ (voir (26; 30)). L'interaction entre l'amortissement et le terme source a été considérée, la première fois, par Levine (30; 33) en cas d'amortissement linéaire ($\alpha = 0, g(v) \cong v$), où il a montré que la solution avec énergie initiale négative s'explose en temps fini en se basant sur "la méthode de concavité".

Georgiev et Todorova dans (24) ont étendu le résultat de Levine pour le cas non linéaire, où le terme d'amortissement est donné par $g(u_t) = u_t|u_t|^{m-2},\ m > 2$. Précisément, ils ont montré que la solution existe globalement "dans le temps" si $m \geq p$ et s'explose en temps fini si $m < p$, où l'énergie initiale est suffisamment négative. Vitillaro dans (52) a étendu les résultats précédents aux cas où le terme d'amortissement est non linéaire et l'énergie initiale est positive.

Gazzola et Squassina dans (19) ont étudié l'existence globale et l'explosion en temps fini des solution pour les équations d'ondes semi linéaires, où les termes d'amortissement faibles et forts sont linéaires.

Aussi, Benaissa et Messaoudi dans (7; 35) ont prouvé l'existence globale et la décroissance exponentielle des solutions du problème suivant :

$$
\begin{gathered}
u_{tt} - \Delta u + a_0(1 + |u_t|^{m-2})u_t = bu|u|^{p-2}, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \\
u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\
u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega,
\end{gathered}
$$

où l'énergie initiale $E(0)$ est négative et $a_0 > 0,\ b > 0,\ p > 2,\ m > 2$.

Nous rappelons que la présence de la dissipation forte $-\Delta u_t$ dans le problème (1) rend le problème différent de celui considéré dans (24), qui a été largement étudié dans la littérature, voir par exemple (46; 19). Pour cette raison, moins des résultats ont été connus pour les équations d'ondes avec une dissipation forte et de nombreuses questions restent en suspens, en particulier l'explosion de la solutions en présence d'une dissipation forte et une dissipation linéaire en même temps. Dans ce travail, notre contribution consiste à donner une réponse partielle à ces questions.

Trois chapitres ont été considérés dans cette première partie. Dans le premier, sous certaines hypothèses sur les données en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, la méthode de compacité et le théorème du point fixe, nous allons prouver l'existence locale et l'unicité d'une solution.

Dans le second chapitre, nous allons voir que la technique introduite et développée par Sattinger (43), Payne et Sattinger (42) est efficace dans notre cas. En effet, en se basant sur cette technique nous allons démontrer que la solution existe globalement en temps. Ensuite, nous allons prouver que la solution est exponentiellement décroissante en se basant sur la construction d'une fonction de Lyapunov L, qui est équivalente à la fonctionnelle d'énergie du problème (1) et sans aucune relation entre les paramètres p et m. Cela se fait en suivant les mêmes démarches présentées dans (7; 35) avec quelques modifications nécessaires et convenables au problème traité ici.

Dans le dernier chapitre, en se basant sur les techniques de Vittilaro et W.J. Liu dans (46; 34) nous allons montrer que la solution s'explose en temps fini avec des données initiales assez petites et en présence du terme source non linéaire de type polynomial avec une dissipation forte. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans Electron. J. Qual. Theory Differ. Eqns (40) (2012), p.1–12. Sous le titre "Blow up of solutions for a semilineair hyperbolic equation".

Tandis que la deuxième partie est consacrée à l'étude du deuxième problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} + Lu - \displaystyle\int_0^t g(t-s)\, Lu(s)\, ds = |u|^{p-2}\, u, & \text{dans } \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_L} - \displaystyle\int_0^t g(t-s)\, \dfrac{\partial u}{\partial \nu_L}(s)\, ds = h(x)\, z_t, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u_t + f(x)\, z_t + m(x)\, z = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \;\; u_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \\ z(x,0) = z_0(x), & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases}$$

où $p > 2$ et L est un opérateur elliptique du deuxième ordre. Les fonctions f, m, h sont essentiellement bornées, et les fonctions $u_0, u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ et $z_0 : \Gamma_1 \to \mathbb{R}$ sont données.

Des applications physiques du système ci-dessus sont liées aux problèmes de contrôle du bruit et de la suppression dans les applications pratiques. Le bruit du son propage à travers un certain milieu acoustique, par exemple, dans l'air, dans une salle qui est caractérisée par un domaine borné Ω et dont les murs, le plafond et le plancher sont décrits par des conditions aux limites. C'est la description de Jieqiong Wu dans (49). Pour plus des explications physiques des équations d'ondes avec des conditions aux limites acoustiques lorsque $g = 0$, nous renvoyons le lecteur à (2; 6; 13; 27; 39; 41; 45).

Les conditions aux limites acoustiques ont été introduites par Beale et Rosencrans dans (6; 5), où les auteurs ont démontré l'existence globale et la régularité des solutions dans un espace de Hilbert en considérant le problème linéaire suivant

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = z_t, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u_t + m(x) z_{tt} + p(x) z_t + q(x) z = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \end{cases} \tag{2}$$

où m, p et q sont des fonctions positives sur la frontière. La solution $u(x,t)$ de l'équation d'ondes (la première équation) du système (2) représente le potentiel du vitesse d'un fluide soumis à un mouvement d'onde acoustique, tandis que $z(x,t)$ représente le déplacement normal à la frontière au temps t avec l'élément de surface x. Voir aussi l'étude (17) pour un modèle associé. En outre, l'auteur dans (5) a montré que lorsque la dérivée seconde z_{tt} est inclue dans la troisième équation du système (2), l'énergie associée n'est pas uniformément décroissante.

Frota et Larkin (18) ont éliminé le terme z_{tt} et ils ont établi la solvabilité globale et les estimations de décroissance pour le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha(x) u = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ u_t + p(x) z_t + q(x) z = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty). \end{cases}$$

La signification physique de ce problème est que le matériau de surface est beaucoup plus légé qu'un liquide s'écoulant le long de lui. Ils ont été observé que les parois poreuses de canaux ou profils de stabiliser les flux hydrodynamiques, (18). Cependant, ils ont affirmé que la méthode de Faedo Galerkin n'est pas applicable, car le système d'équations ordinaires correspondant n'est pas normal et ils ne peuvent pas appliquer directement le théorème Carathéodory. Pour surmonter cette difficulté, ils ont considéré la troisième équation comme une équation du second ordre dégénérée

$$u_t + \epsilon z_{tt} + f(x) z_t + m(x) z = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, \infty),$$

où $\epsilon \to 0$. C'est le cas de notre problème et le problème de Park et Ha, dans (40) qu'ils ont considéré l'équation d'ondes avec des conditions aux limites acoustiques, et ils ont étudié l'existence globale des solutions et le taux de décroissance uniforme de l'énergie.

En utilisant la théorie de semi-groupe non linéaire, Garber dans (22) a généralisé et prouvé l'existence locale et l'unicité d'une solution du problème de Frota et Larkin, dans lequel la première condition acoustique est remplacée par

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(x) \eta(z_t), \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, \infty),$$

où η est une fonction non linéaire.

Dans le cas $L = -\Delta$ et en absence du terme source $|u|^{p-2}\, u$, le problème (4.1) a été étudié dans (41), où les auteurs ont prouvé la décroissance sous l'hypothèse que la fonction g vérifie

$$l = 1 - \int_0^\infty g\,(s)\,ds < 1/2, \tag{3}$$

et $g'(t) \leq -\xi(t)g(t)$ où $\xi(t)$ est une fonction positive strictement décroissante et qui satisfait certaines conditions techniques. L'idée principale de la preuve de (41) est essentiellement basée sur le travail de (37) où les auteurs ont prouvé le même résultat pour les équations d'ondes viscoélastiques avec conditions aux limites de Dirichlet sur $\partial\Omega$. Il est maintenant bien connu que la décroissance dessolutions de (4.1) dépend fortement de la décroissante du noyau g. Les équations d'ondes viscoélastiques ont été étudiées par de nombreux auteurs. Par exemple, Berrimi et Messaoudi dans (8) ont considéré le problème de Dirichelet suivant

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g\,(t-s)\,\Delta u\,(s)\,ds = |u|^{p-2}\,u, \qquad \text{dans } \Omega.$$

Ils ont prouvé l'existence locale de la solution en utilisant les techniques de Georgiev et Todorova (20) et ils ont montré la décroissance exponentielle et polynômiale sous certaines conditions faibles sur g comme $g'(t) \leq -\xi g^{\lambda}(t)$ pour $1 \leq \lambda < 3/2$. Alabau-Boussouira et al. dans (3) ont considéré une équation intégro-différentielle abstraite. En utilisant les inégalités intégrales et les techniques de multiplicateurs, ils ont montré que la décroissance polynômiale et exponentielle de l'énergie de la solution dépend du comportement de la fonction noyau. Cavalcanti et al., dans (14) ont examiné le problème où l'amortissement induit par la viscosité agit sur le domaine et sur une partie de la frontière. L'existence et les résultats de la décroissance uniforme ont été établis sous des hypothèses très restrictives sur le terme d'amortissement et sur la fonction noyau g (voir aussi (38)).

Il n'y a pas beaucoup dans la littérature des papiers sur le modèle de frontière acoustique avec des coefficients variables car les coefficients variables apportent toujours beaucoup de peine et de difficulté. D'autre part, une forte motivation pour des problèmes bien posés et les résultats de stabilisation pour le modèle structurel acoustique à coefficient variable provient des applications pratiques. En général, les coefficients de la matrice $B = (b_{ij}(x))$ sont donnés par des matériaux dans les applications. On cite les travaux de Jieqiong Wu dans (49), il a prouvé que le problème est bien posé au sens d'Hadamard pour des solutions fortes et faibles en utilisant la théorie des semi-groupes non linéaires et dans (50), l'auteur a montré la décroissance uniforme de l'énergie sans aucunes conditions géométriques sur la forme de la portion de dissipation de la frontière. L'outil principal de la preuve est l'utilisation de la méthode de la géométrie Riemannien, qui a été introduite et développée dans (51), (28; 44), et d'autres.

En plus les matériaux viscoélastiques fournissent un amortissement naturel, qui est dû à la propriété particulière de ces matériaux à garder une certaine mémoire. Du point de vue mathématique, ces effets d'amortissement sont modélisés par des opérateurs intégro-différentiels $\int_0^t g(t-s)Lu(s)ds$, où g représente le noyau dans l'expression de la mémoire.

Le problème considéré dans cette partie n'a été jamais considéré auparavant, les outils mathématiques de la géométrie riemannienne ne seront pas prisent en compte pour montrer l'existence locale, globale et l'unicité de la solution. Il est important de signaler que les résultats trouvés dans les chapitres 4 et 5 sont obtenus sans aucune relation entre les éléments de la matrice B et la fonction noyau g.

Cette deuxième partie se décompose en trois chapitres. Dans le premier en utilisant les techniques de Georgiev et Todorova dans (20), basant sur les approximations de Faedo-Galerkin et le théorème du point fixe, et les techniques considérées par Frota et Lakrin dans (18), nous allons montrer que le problème considéré possède une seule solution locale.

Dans le deuxième chapitre, nous montrons d'abord que la solution locale obtenue dans le premier chapitre est globalement existe en temps dans un ensemble stable des données initiales et qu'elle est uniformément bornée. Les résultats obtenus dans la dernière section de ce chapitre concernant la décroissance exponentielle ont été publiés dans Nonlinear Analysis : TMA 97 (2014) 191–209. Sous le titre "*Existence and decay of solutions for a viscoelastic wave equation with acoustic boundary conditions*". Dans ce chapitre, nous allons étudier en plus le cas où la décroissance de noyau g est polynomiale, ce qui généralise aussi le travail de J. Y. Park et S. H. Park dans (41) où la condition (3) est éliminée.

Dans le dernier chapitre de cette partie, nous allons donner une condition suffisante d'explosion de la solution pour une énergie initiale assez grande. L'outil principal utilisé repose sur la méthode de Georgiev et Todorova.

Première partie

Problème hyperbolique semi linéaire pour un opérateur fortement elliptique avec termes sources et dissipatifs

Introduction

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière Γ. Dans cette première partie, on s'intéresse à l'existence locale et globale, comportement asymptotique et explosion en temps fini de la solution d'un problème hyperbolique semi linéaire pour un opérateur fortement elliptique à coefficients variables et avec une dissipation forte et une dissipation non linéaire :

$$u_{tt} + Au - \alpha\Delta u_t + g(u_t) = \beta\left|u\right|^{p-2}u, \text{ dans } \Omega \times (0,T), \tag{4}$$

où $\alpha > 0,\ \beta > 0$ et $p > 2$. A est un opérateur fortement elliptique d'ordre 2 où les coefficients dépendent de x et t et g est une fonction à déterminer ultérieurement. La fonction u cherchée doit vérifier en outre les conditions aux limites et les conditions initiales

$$u(x,t) = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ \text{dans } \Omega, \tag{6}$$

où les fonctions u_0 et u_1 sont données.

Les problèmes liés aux (4)-(6) dans le cas où $A = -\Delta$ avec ou sans termes sources (non linéaire de type polynomial) ou dissipatifs ont été étudiés par de nombreux auteurs (4; 19; 26; 29; 33; 35; 42; 46; 52; 53). Dans le premier chapitre de cette partie et sous certaines hypothèses sur les données en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, la méthode de compacité et le théorème du point fixe, nous allons démontrer l'existence locale et l'unicité d'une solution.

Dans le second chapitre, nous allons voir que la méthode introduite et développée par Sattinger (43), Payne et Sattinger (42) est efficace dans notre cas. En appliquant cette méthode, nous allons prouver l'existence globale. Puis nous allons démontrer, comme dans (7; 35), la décroissance exponentielle de la solution. Les techniques utilisées sont basées sur la construction d'une fonction de Lyapunov L, qui est équivalente à la fonctionnelle d'énergie du problème (4)-(6) et sans aucune condition entre les paramètres p et m. Dans le dernier chapitre, en se basant sur les arguments de Vittilaro et W.J. Liu, nous allons montrer que la solution s'explose en temps fini avec des données initiales assez petites et en présence du terme source non linéaire de type polynomial avec une dissipation forte. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans Electron. J. Qual. Differ. Eqns (40) (2012) 1–12. Sous le titre "*Blow up of solutions for a semilineair hyperbolic equation*".

Chapitre 1

Existence locale d'une solution faible

Dans ce chapitre, nous allons considérer un problème hyperbolique semi linéaire pour l'opérateur fortement elliptique avec un terme source non linéaire de type polynomial et deux termes dissipatifs l'un fort de la forme Δu_t et l'autre dépend d'une fonction continue g. Sous certaines hypothèses sur les données initiales, nous montrons l'existence locale et l'unicité d'une solution faible. La preuve est basée sur les approximations de Faedo-Galerkin, la méthode de compacité et le théorème du point fixe.

1.1 Notations et position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière Γ. On dénote par

$$u' = u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad u'' = u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance de la fonction u par rapport à x (parfois par rapport à t).
L'objet de ce chapitre est de chercher $u : Q = \Omega \times (0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ solution locale du problème

$$\begin{cases} u_{tt} + Au - \alpha\Delta u_t + g(u_t) = \beta \left|u\right|^{p-2} u, & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ u\left(x,t\right) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), \ u_t\left(x,0\right) = u_1\left(x\right), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $p > 2$ et $\alpha,\ \beta$ sont des constantes positives. $u_0,\ u_1$ sont des fonctions données.
A fin d'étudier le problème (1.1) et de formuler le théorème d'existence et d'unicité on aura besoin des hypothèses suivantes :

• **Hypothèses.**

(H_1) L'opérateur fortement elliptique A est défini comme suit :

$$A(t)\varphi = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right),$$

où les fonctions $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,\ \infty)) \quad \forall 1 \leq i,j \leq n$ sont symétriques et il existe une constante $a_0 > 0$ telle que :

$$a)\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2,$$

$$b)\ \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}a_{ij}(x,t)\right)\xi_i\xi_j \leq 0,$$

pour tout $(x,\ t) \in \overline{\Omega} \times (0,\ \infty)$ et $\xi = (\xi_1 \ldots \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

(H_2) On suppose que la fonction $g \in C^0(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}^*)$ est croissante . En outre, on suppose qu'il existe une constante positive k_0 telle que :

$$g(v)v \geq k_0|v|^m, \tag{1.2}$$

pour tout $v \in \mathbb{R}$ et $2 < m < \infty$.

1.2 Formulation variationnelle

Pour étudier l'existence locale, globale et la décroissance exponentielle de la fonctionnelle d'énergie, nous procédons à obtenir une formulation variationnelle du problème (1.1). Pour cela, on définit l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme fermeture de l'ensemble $D(\Omega)$, des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω, dans $H^1(\Omega)$. On peut le caractériser comme suit

$$H_0^1(\Omega) = \left\{v \in H^1(\Omega),\ v = 0 \text{ sur } \Gamma\right\}$$

muni du produit scalaire

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx,$$

la dérivation étant prise au sens des distributions.

L'inégalité de Poincaré est valable dans $H_0^1(\Omega)$ i.e.

$$\forall u(t) \in H_0^1(\Omega),\ \|u(t)\|_p \leq C_* \|\nabla u(t)\|_2\,,\ \text{où} \begin{cases} 2 \leq p \leq \frac{2n-2}{n-2} & \text{si } n \geq 3 \\ 2 \leq p \leq +\infty & \text{si } n = 1, 2. \end{cases} \tag{1.3}$$

où C_* est la constante de Poincaré.
Multiplions la première équation du (1.1) par un élément $v \in H_0^1(\Omega)$, intégrons le résultat obtenu sur Ω et utilisons le formule de Green, on obtient la formule variationnelle suivante

$$(u_{tt}, v) + a(u, v) + \alpha(\nabla u_t, \nabla v) + (g(u_t), v) = \beta(|u|^{p-2}u, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

où

$$a(u, v) = (Au, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx. \tag{1.4}$$

En utilisant l'hypothèse sur les fonctions a_{ij}, on vérifie facilement que la forme bilinéaire $a(.,.) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est symétrique et continue.
D'autre part, de $(H_1 : a)$ pour $\xi_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, on trouve

$$a(u, u) \geq a_0 \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx = a_0 \|\nabla u\|_2^2\,, \tag{1.5}$$

ce qui implique que $a(.,.)$ est coercive.

Remarque 1.2.1. *L'application $u \longmapsto (a(u, u))^{1/2}$ définit une semi norme sur $H_0^1(\Omega)$, de plus on a*

$$a_0 \|\nabla u\|_2^2 \leq a(u, u) \leq a_1 \|\nabla u\|_2^2\,, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

où a_1 est une constante positive.

1.3 Existence et unicité

Dans ce paragraphe et sous les hypothèses que nous avons cité précédemment, l'existence locale et l'unicité d'une solution faible seront obtenus en se basant sur les approximations de Faedo-Galarkin, méthode de compacité et le théorème du point fixe.

Théorème 1.3.1. *Supposons que les hypothèses (H_1), (H_2) sont vérifiées. Supposons que $m \geq 2$ et*

$$2 \leq p \leq 2\frac{n-1}{n-2}, \qquad \forall n \geq 3. \tag{1.6}$$

Si $u_0 \in H_0^1(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega)$, alors il existe $T > 0$ tel que le problème (1.1) a une unique solution locale (faible) u ayant les régularités suivantes :

$$u \in C\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left(0, T; L^2(\Omega)\right),$$
$$u_t \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \cap L^m\left(\Omega \times [0, T]\right).$$

Pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe sur une fonction convenablement choisie, nous allons commencer par examiner le problème relatif suivant :
Pour $u \in C\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$ donné, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} v_{tt} + Av - \alpha\Delta v_t + g(v_t) = \beta\left|u\right|^{p-2} u, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ v(x,\ t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ v\left(x, 0\right) = u_0\left(x\right), \qquad v_t\left(x, 0\right) = u_1\left(x\right), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.7}$$

Relativement à ce problème, nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Lemme 1.3.1. *Sous les hypothèses (H_1), (H_2), (1.6) et $m \geq 2$,si $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, alors il existe un $T > 0$ et une unique solution v du problème (1.7) dans $[0, T]$ tels que*

$$v \in C\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left(0, T; L^2(\Omega)\right),$$
$$v_t \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \cap L^m\left(\Omega \times [0, T]\right).$$

Pour des raisons techniques et pour démontrer le lemme 1.3.1, nous allons étudier pour $T > 0$ et $f \in H^1\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$ le problème suivant :

$$\begin{cases} v_{tt} + Av - \alpha\Delta v_t + g(v_t) = \beta f(x, t), & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ v(x,\ t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ v\left(x, 0\right) = u_0\left(x\right), \quad v_t\left(x, 0\right) = u_1\left(x\right), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1.8}$$

Théorème 1.3.2. *Supposons que les hypothèses (H_1), (H_2) sont vérifiées. Soit $m \geq 2$. Si $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H^2(\Omega)$ et $f \in H^1\left([0, T]; L^2(\Omega)\right)$, alors il existe $T > 0$ et une solution unique v du problème (1.8) sur $[0, T]$ tels que*

$$v \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right), \tag{1.9}$$
$$v_t \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \cap L^m\left(\Omega \times [0, T]\right), \tag{1.10}$$
$$v_{tt} \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right). \tag{1.11}$$

1.4 Preuve du Théorème 1.3.2

La démonstration de ce théorème est formée de trois étapes suivantes :
– On construit des solutions "approchées" par la méthode de Faedo-Galerkin,
– On établit, pour ces solutions approchées, des estimations à priori,
– On passe à la limite (dans les termes non linéaires) par la méthode de compacité.
Commençons par introduire la suite $(w_j)_j$ de fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} w_j \in H_0^1(\Omega), \forall j; \\ \forall j,\ w_1, \ldots, w_j \text{ sont linéairement indépendants;} \\ \text{ l'espace engendré par la famille } \{w_1, w_2, \ldots, w_k\} \text{ est dense dans } H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{1.12}$$

On cherche alors une suite $(v_k) = (v_k(t))$ sous la forme

$$v_k(x,t) = \sum_{j=1}^{k} h_{jk}(t) w_j(x), \qquad x \in \Omega, \qquad t \in [0, T_k]\,; \tag{1.13}$$

solution du problème variationnel approché, associé au problème (1.8), suivant :

$$(v_k''(t), w_j) + a(v_k(t), w_j) + \alpha(\nabla v_k'(t), \nabla w_j) + (g(v_k'(t)), w_j) = \beta(f(t), w_j), \quad j = 1, \cdots, k, \tag{1.14}$$

avec les conditions initiales

$$v_k(x,0) = u_{0k} = \textstyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_{jk} w_j \to u_0, \text{ dans } \ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \tag{1.15}$$
$$v_k'(x,0) = u_{1k} = \textstyle\sum_{j=1}^{k} \beta_{jk} w_j \to u_1, \text{ dans } \ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{1.16}$$

On obtient un système d'équations différentielles non linéaires du second ordre.
D'après le théorème de Carathéodorie, il existe une unique solution v_k dans l'intervalle $[0;\ T_k]$. Les estimations à priori qui suivent montrent que $T_k = T$.
On note par C_i les différentes constantes positives, dépendantes des données initiales mais pas de k.

1.4.1 Première estimation à priori.

Multiplions l'équation (1.14) par $h_k'(t)$ et sommons de $j = 1$ à k , il vient que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v_k'(t)\right\|_2^2 + a(v_k(t), v_k'(t)) + \alpha\left\|\nabla v_k'(t)\right\|_2^2 + \\ &+(g(v_k'(t)), v_k'(t)) = \beta(f(t), v_k'(t)). \end{aligned} \tag{1.17}$$

D'autre part, on a

$$\frac{d}{dt}a(v_k(t),v_k(t)) = \sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega a'_{ij}(x,t)\frac{\partial v_k(t)}{\partial x_j}\frac{\partial v_k(t)}{\partial x_i}dx + 2a(v_k(t),v'_k(t)).$$

D'où

$$a(v_k(t),v'_k(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(v_k(t),v_k(t)) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega a'_{ij}(x,t)\frac{\partial v_k(t)}{\partial x_j}\frac{\partial v_k(t)}{\partial x_i}dx. \tag{1.18}$$

Remplaçons (1.18) dans (1.17), intégrons sur $(0,t)$ et utilisons (1.5), $(H_2:a)$ on en déduit que

$$\begin{aligned}&\|v'_k(t)\|_2^2 + a_0\|\nabla v_k(t)\|_2^2 + 2\alpha\int_0^t \|\nabla v'_k(s)\|_2^2\,ds + 2k_0\int_0^t \|v'_k(s)\|_m^m\,ds \leq \\ &\leq \|v'_k(0)\|_2^2 + a_0\|\nabla v_k(0)\|_2^2 + 2\beta\int_0^t (f(s),v'_k(s))ds + \\ &\quad + \int_0^t \sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega a'_{ij}(x,s)\frac{\partial v_k(s)}{\partial x_j}\frac{\partial v_k(s)}{\partial x_i}dxds.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Par l'inégalité de Young , on a

$$\left|\int_0^t (f(s),v'_k(s))ds\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^t \left(\|f(s)\|_2^2 + \|v'_k(s)\|_2^2\right)ds. \tag{1.20}$$

Puisque, les fonctions $a_{ij}\in C^1(\overline{\Omega}\times[0,\ \infty))$, alors

$$\begin{aligned}&\int_0^t \sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega \left|a'_{ij}(x,s)\frac{\partial v_k(s)}{\partial x_j}\frac{\partial v_k(s)}{\partial x_i}\right| dxd\sigma \leq \\ &\leq \int_0^t \sum_{i,j=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega \left|a'_{ij}(x,t)\frac{\partial v_k(s)}{\partial x_i}\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\frac{\partial v_k(s)}{\partial x_j}\right|^2 dx\right] ds \leq \\ &\leq \frac{N}{2}\int_0^t ||\nabla v_k(s)||_2^2 ds + \max_{1\leq i\leq N}\left(\sum_{j=1}^{N}\sup_{(x,t)}|a'_{ij}(x,t)|^2\right)\int_0^t ||\nabla v_k(s)||_2^2 ds \leq \\ ,\quad &\leq C_1\int_0^t ||\nabla v_k(s)||_2^2 ds,\end{aligned} \tag{1.21}$$

où $C_1 = \max\left(n/2,\ \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sup_{(x,t)}|a'_{ij}(x,t)|^2\right)\right) = \max(n/2,\ C'_1).$

Moyennement à (1.15), (1.16), (1.20) et (1.21), de l'inégalité (1.19), il découle

$$\begin{aligned}
&\|v_k'(t)\|_2^2 + a_0 \|\nabla v_k(t)\|_2^2 + 2\alpha \int_0^t \|\nabla v_k'(s)\|_2^2 \, ds + 2k_0 \int_0^t \|v_k'(s)\|_m^m \, ds \leq \\
&\leq C_2 + \beta \int_0^t \|f(s)\|_2^2 \, ds + \int_0^t \left(C_1 \|\nabla v_k(s)\|_2^2 \, ds + \beta \|v_k'(s)\|_2^2 \right) ds, \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

où $C_2 = \|v_k'(0)\|_2^2 + a_0 \|\nabla v_k(0)\|_2^2$ est une constante positive.
L'hypothèse $f \in L^2\left([0,T]\,; L^2(\Omega)\right)$ donne

$$\int_0^t \|f(s)\|_2^2 \, ds \leq \text{constance}.$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Gronwall, on en déduit l'existence d'une constante positive C_T indépendante de k et $t \in [0, T_k]$ telle que

$$\begin{aligned}
&\|v_k'(t)\|_2^2 + a_0 \|\nabla v_k(t)\|_2^2 + 2\alpha \int_0^t \|\nabla v_k'(s)\|_2^2 \, ds \\
&\qquad + 2k_0 \int_0^t \|v_k'(s)\|_m^m \, ds \leq C_T. \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

De cette dernière estimation (1.23), on conclut que t est indépendant de k, et par conséquent $\forall k \in \mathbb{N},\ T_k = T$.

1.4.2 Seconde estimation à priori.

Nous commençons par estimer $\|v_k''(0)\|_2$. Pour cela, posant $t = 0$ et $w_j = v_k''(0)$ dans (1.14), on déduit que

$$\|v_k''(0)\|_2^2 = \left(\beta f(0) - Au_{0k} + \alpha \Delta u_{1k} - g(u_{1k})), v_k''(0)\right). \qquad (1.24)$$

Comme l'opérateur A est continu, alors de (1.16) on déduit que $Au_{0k} \leq$ constante et en utilisant le fait que $f(0) \in L^2(\Omega),\ g(v_k'(0)) \in C^0(\mathbb{R})$, il résulte qu'il existe une constante C_3 indépendante de $k \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\|v_k''(0)\|_2 \leq C_3. \qquad (1.25)$$

Dérivons l'équation (1.14) en t, multiplions le résultat obtenu par $2h_{jk}''(t)$, on obtient, après sommation en j :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \|v_k''(t)\|_2^2 + 2a(v_k'(t), v_k''(t)) + 2\alpha \|\nabla v_k''(t)\|_2^2 + 2 \int_\Omega g'\left(v_k'(t)\right) \left(v_k''(t)\right)^2 dx \\
&= 2\beta(f'(x,t), v_k''(t)) - 2 \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}'(x,t) \frac{\partial v_k(t)}{\partial x_j} \frac{\partial v_k''(t)}{\partial x_i} dx.
\end{aligned}$$

Étant donné que la fonction g est croissante, on en déduit

$$\frac{d}{dt}\left[\|v_k''(t)\|_2^2 + a_0\|\nabla v_k'(t)\|_2^2\right] + 2\alpha\|\nabla v_k''(t)\|_2^2 \leq$$
$$\leq 2\beta(f'(x,t), v_k''(t)) - \sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega a_{ij}'(x,t)\left(2\frac{\partial v_k(t)}{\partial x_j}\frac{\partial v_k''(t)}{\partial x_i} - \frac{\partial v_k'(t)}{\partial x_i}\frac{\partial v_k'(t)}{\partial x_j}\right)dx$$

En intégrant la dernière estimation de 0 à t, utilisons l'inégalité de Young et l'hypothèse $(H_1 : b)$, on obtient

$$\|v_k''(t)\|_2^2 + a_0\|\nabla v_k'(t)\|_2^2 + 2\alpha\int_0^t \|\nabla v_k''(s)\|_2^2\,ds \leq$$
$$\leq C_5 + \beta\int_0^t \|v_k''(s)\|_2^2\,ds - 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega a_{ij}'(x,s)\frac{\partial v_k(s)}{\partial x_j}\frac{\partial v_k''(s)}{\partial x_i}dxds, \tag{1.26}$$

où

$$C_5 = \|v_k''(0)\|_2^2 + a_0\|\nabla u_{1k}\|_2^2 + \beta\int_0^t \|f'(s)\|_2^2\,ds.$$

En utilisant (1.16), (1.25) et le fait que $f' \in L^2([0,T], L^2(\Omega))$, on déduit que C_5 est une constance positive. Par l'inégalité de Young, nous majorons le dernier terme du deuxième membre de l'inégalité (1.26) comme suit :

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega \left|a_{ij}'(x,s)\frac{\partial v_k(s)}{\partial x_j}\frac{\partial v_k''(s)}{\partial x_i}\right| dxds \leq$$
$$\leq \int_0^t \sum_{i,j=1}^{n}\left[\frac{1}{4\mu_1}\int_\Omega \left|\frac{\partial v_k(s)}{\partial x_j}\right|^2 dx + \mu_1\int_\Omega \left|a_{ij}'(x,t)\frac{\partial v_k''(s)}{\partial x_i}\right|^2 dx\right] ds$$
$$\leq \frac{n}{4\mu_1}\int_0^t ||\nabla v_k(s)||_2^2 ds + \mu_1 \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sup_{(x,t)}|a_{ij}'(x,t)|^2\right)\int_0^t ||\nabla v_k''(s)||_2^2 ds$$
$$\leq \frac{N}{4\mu_1}\int_0^t ||\nabla v_k(s)||_2^2 ds + \mu_1 C_1'\int_0^t ||\nabla v_k''(s)||_2^2 ds,$$

pour $\mu_1 > 0$.
En utilisant (1.23), alors, l'inégalité (1.26) donne

$$\|v_k''(t)\|_2^2 + a_0\|\nabla v_k'(t)\|_2^2 + (2\alpha - \mu_1 C_1')\int_0^t \|\nabla v_k''(s)\|_2^2\,ds \leq$$
$$\leq C_6 + \beta\int_0^t \|v_k''(s)\|_2^2\,ds, \tag{1.27}$$

où $C_6 = C_5 + \dfrac{N}{4\mu_1}TC_T$.
En choisissant $\mu_1 < \dfrac{2\alpha}{C_1'}$, on peut appliquer l'inégalité de Gronwall pour obtenir une constance $\tilde{C}_T$ indépendante de k et $t \in [0;T]$ telle que :

$$\|v_k''(t)\|_2^2 + a_0\|\nabla v_k'(t)\|_2^2 + 2\alpha\int_0^t \|\nabla v_k''(s)\|_2^2\,ds \leq \tilde{C}_T. \tag{1.28}$$

Par conséquent, à partir de (1.23) et (1.28), on déduit

$$\begin{cases} (v_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ demeure dans un borné de } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \\ (v_k')_{k\in\mathbb{N}} \text{ demeure dans un borné de} \\ \quad L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\cap L^m\left([0,T]\times\Omega\right), \\ (v_k'')_{k\in\mathbb{N}} \text{ demeure dans un borné de } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \end{cases} \tag{1.29}$$

1.4.3 Passage à la limite

On déduit de (1.29) qu'on peut extraire des sous-suites convergentes $(v_k), (v_k')$ et (v_k'') de $(v_k), (v_k'), (v_k'')$ respectivement et telles que, lorsque $k \longrightarrow +\infty$, on a

$$\begin{aligned} & v_k \longrightarrow v \quad \text{faiblement dans } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \\ & v_k' \longrightarrow v' \quad \text{faiblement dans} \\ & \quad L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\cap L^m\left([0,T]\times\Omega\right) \\ & v_k'' \longrightarrow v'' \quad \text{faiblement dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \end{aligned} \tag{1.30}$$

Par ailleurs, il résulte, en particulier, de (1.29) que

$$\begin{cases} (v_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \\ (v_k')_{k\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^2(Q)\cap L^m\left(Q\right), \\ (v_k'')_{k\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans} L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) = L^2(Q). \end{cases}$$

On sait, (cf. Lions-Magenés (32)), que l'injection $H^1(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$ est compacte. Donc

$$v_k \longrightarrow v \quad \text{fortement dans } L^2(Q). \tag{1.31}$$

Pour $j \in \mathbb{N}^*$ fixe quelconque et $\forall k > j$, on a

$$(v_k'', w_j) + a(v_k, w_j) + \alpha(\nabla v_k', \nabla w_j) + (g(v_k'), w_j) = \beta(f, w_j). \tag{1.32}$$

De la convergence faible (1.30), on déduit que

$$\begin{aligned} & a(v_k, w_j) \longrightarrow a(v, w_j) \text{ faiblement dans } L^\infty\left(0,T\right), \\ & (v_k', w_j) \longrightarrow (v', w_j) \text{ faiblement dans } L^\infty\left(0,T\right), \\ & (\nabla v_k', \nabla w_j) \longrightarrow (\nabla v', \nabla w_j) \text{ faiblement dans } L^\infty\left(0,T\right), \\ & (g(v_k'), w_j) \longrightarrow (g(v'), w_j) \text{ faiblement dans } L^\infty\left(0,T\right). \end{aligned} \tag{1.33}$$

Et par conséquent par passage à la limite de (1.32) il devient

$$(v'', w_j) + a(v, w_j) + \alpha(\nabla v', \nabla w_j) + (g(v'), w_j) = \beta(f, w_j),$$

comme $\langle w_1,\ w_2, \ldots, w_k\rangle$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on obtient pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$

$$(v'', w) + a(v, w) + \alpha(\nabla v', \nabla w) + (g(v'), w) = \beta(f, w). \tag{1.34}$$

D'où il résulte que v satisfait à la première équation de (1.8).

1.4.4 Unicité.

Soient v et w deux solutions du problème (1.8), au sens du Théorème 1.3.2. On pose $z = v - w$. Alors z satisfait

$$\begin{aligned}
&\|z'(t)\|_2^2 + a(z(t), z(t)) + 2\alpha \int_0^t \|\nabla z'(s)\|_2^2 \, ds + \\
&+2 \int_0^t \int_\Omega (g(v'(s)) - g(w'(s)))\,(v'(s) - w'(s))\, dx ds = \\
&+ \sum_{i,j=1}^N \int_0^t \int_\Omega a'_{ij}(x,s) \frac{\partial z(s)}{\partial x_j} \frac{\partial z(s)}{\partial x_i} dx ds.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Puisque, g est une fonction croissante alors

$$2 \int_0^t \int_\Omega (g(v'(s)) - g(w'(s)))\,(v'(s) - w'(s))\, dx ds \geq 0, \tag{1.36}$$

Encore, en utilisant (1.21) l' estimate (1.35) donne

$$\begin{gathered}
\|z'(t)\|_2^2 + a_0 \|\nabla z(t)\|_2^2 + 2\alpha \int_0^t \|\nabla z'(s)\|_2^2 \, ds \leq \\
0 + C_1 \int_0^t \|\nabla z(s)\|_2^2 \, ds.
\end{gathered}$$

Ainsi, en utilisant le lemme de Gronwall, nous obtenons $z = 0$. D'où l'unicité.

1.5 Preuve du Lemme 1.3.1

Par les mêmes procédés employés dans (21), (47) et (48), en utilisant les arguments standards de convolution, voir (12), nous approximons

$$u \in C\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$$

par une suite $(u_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ dans $C\left(0, T; C_0^\infty(\Omega)\right)$. De plus, nous approximons la condition initiale $u_1 \in L^2(\Omega)$ par une suite $(u_\mu^1)_{\mu\in\mathbb{N}}$ dans $C_0^\infty(\Omega)$. Puisque $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ pour la norme induite de H^1, nous approximons $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ par une suite $(u_\mu^0)_{\mu\in\mathbb{N}}$ dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Nous considérons alors le problème suivant

$$\begin{cases}
v''_\mu + Av_\mu - \alpha\Delta v'_\mu + g(v'_\mu) = \beta\,|u_\mu|^{p-2}\, u_\mu, & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\
v_\mu(x,t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\
v_\mu(x,0) = u_\mu^0(x), \; v'_\mu(x,0) = u_\mu^1(x), & \text{dans } \Omega.
\end{cases} \tag{1.37}$$

Il est clair que $f(u_\mu) = |u_\mu|^{p-2} u_\mu \in H^1(0,T; L^2(\Omega))$. Par conséquent, le théorème 1.3.2 assure l'existence unique d'une suite de solutions (v_μ) vérifiant (1.37).

• Maintenant, nous montrons que (v_μ) est une suite de Cauchy dans l'espace

$$Y_t = \left\{ (v, v')/ \begin{array}{l} v \in C\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left(0,T; L^2(\Omega)\right), \\ v' \in L^2\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right) \cap L^m(Q) \end{array} \right\},$$

muni de la norme

$$\|(v,v')\|_{Y_t}^2 = \max_{0 \le t \le T} \left[\|v'\|_2^2 + a_0 \|\nabla v\|_2^2 \right] + \int_0^t \|\nabla v'(s)\|_2^2 \, ds + \int_0^t \|v'(s)\|_m^m \, ds.$$

Pour cela, on pose $U = u_\mu - u_\tau,\ V = v_\mu - v_\tau$. Alors V satisfait

$$\begin{cases} V'' + AV - \alpha \Delta V' + g(V') == \beta |u_\mu|^{p-2} u_\mu - \beta |u_\tau|^{p-2} u_\tau, & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ V(x,t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ V(x,0) = V_0(x) = u_\mu^0 - u_\tau^0, & \text{dans } \Omega, \\ V'(x,0) = V_1(x) = u_\mu^1 - u_\tau^1, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.38}$$

Multiplions la première équation du (1.38) pat V', intégrons sur $(0,t) \times \Omega$ et utilisons la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} &\|V'(t)\|_2^2 + a_0 \|\nabla V(t)\|_2^2 + 2\alpha \int_0^t \|\nabla V'(s)\|_2^2 \, ds + 2k_0 \int_0^t \|V'(s)\|_m^m \, ds \le \\ &\le \|V'(0)\|_2^2 + a_0 \|\nabla V(0)\|_2^2 + \sum_{i,j=1}^N \int_0^t \int_\Omega a'_{ij}(x,s) \frac{\partial V(s)}{\partial x_j} \frac{\partial V(s)}{\partial x_i} dx ds \\ &\quad + 2\beta \int_0^t \int_\Omega \left[|u_\mu|^{p-2} u_\mu - |u_\tau|^{p-2} u_\tau \right] V' dx ds. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Estimons le dernier terme du deuxième membre de l'inégalité (1.39) (cf. (20)) comme suit

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega \left[|u_\mu|^{p-2} u_\mu - |u_\tau|^{p-2} u_\tau \right] V_t dx \right| \le \\ &\le (p-1) \int_\Omega \sup\left(|u_\mu|^{p-2}, |u_\tau|^{p-2} \right) |U| |V_t| dx. \end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité de Hölder avec $\dfrac{1}{n} + \dfrac{n-2}{2n} + \dfrac{1}{2} = 1$,

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega \left[|u_\mu|^{p-2} u_\mu - |u_\tau|^{p-2} u_\tau \right] V_t dx \right| \le \\ &\le (p-1) \left(\|u_\mu\|_{(p-2)n}^{p-2} + \|u_\tau\|_{(p-2)n}^{p-2} \right) \|U\|_{\frac{2n}{n-2}} \|V_t\|_2 . \end{aligned} \tag{1.40}$$

L'injection de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2n/(n-2)}(\Omega)$ donne

$$\|U\|_{\frac{2n}{n-2}} \leq C \|\nabla U\|_2 ,$$
$$\|u_\mu\|_{(p-2)n}^{p-2} + \|u_\tau\|_{(p-2)n}^{p-2} \leq C \left(\|\nabla u_\mu\|_2^{p-2} + \|\nabla u_\tau\|_2^{p-2} \right),$$

où C est une constante positive dépend seulement de Ω et p. Ensuite l'estimation (1.40) prend la forme

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega \left[|u_\mu|^{p-2} u_\mu - |u_\tau|^{p-2} u_\tau \right] V_t dx \right| \leq \\ &\leq C \|V_t\|_2 \|\nabla U\|_2 \left(\|\nabla u_\mu\|_2^{p-2} + \|\nabla u_\tau\|_2^{p-2} \right). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Moyennement à (1.21), (1.41), l'estimation (1.39) devient

$$\begin{aligned} &\|V'(t)\|_2^2 + a_0 \|\nabla V(t)\|_2^2 + 2\alpha \int_0^t \|\nabla V'(s)\|_2^2 ds 2k_0 \int_0^t \|V'(s)\|_m^m ds \leq \\ &\leq \|V'(0)\|_2^2 + a_0 \|\nabla V(0)\|_2^2 + C_1 \int_0^t \|\nabla V(s)\|_2^2 ds + \\ &\quad +2\beta K \int_0^t \|V_t(s)\|_2 \|\nabla U(s)\|_2 ds, \end{aligned}$$

où K est une constante positive dépend seulement de Ω, p et du diamètre de la boule $B_R(0) \subset C(0,T; H_0^1(\Omega))$ centrée à l'origine et contient les suites $(u_\mu), (u_\tau)$. Ensuite l'inégalité de Young et l'inégalité de Gronwall donnent

$$\|V\|_{Y_T} \leq K_1 \left(\|V'(0)\|_2^2 + a_0 \|\nabla V(0)\|_2^2 \right) + K_1 T \|\nabla U\|_{Y_T} . \tag{1.42}$$

Puisque la suite (u_μ^0) converge dans $H_0^1(\Omega)$, (u_μ^1) converge dans $L^2(\Omega)$ et (u_μ) converge dans $C(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T; L^2(\Omega))$ (donc aussi dans Y_T), on conclut que (v_μ, v'_μ) est une suite de Cauchy dans Y_T. Ainsi (v_μ, v'_μ) converge vers une limite (v, v') dans Y_T.

• Montrons maintenant que cette limite est une solution du problème (1.7) par la même technique utilisée par Georgiev et Todorova dans (20). Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega)$ l'équation

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_\Omega v_t(t) \psi dx + a(v(t), \psi) + \alpha \int_\Omega \nabla v_t(t) \nabla \psi dx + \\ &\int_\Omega g(v_t(t)) \psi dx = \beta \int_\Omega |u(t)|^{p-2} u(t) \psi dx, \end{aligned} \tag{1.43}$$

est satisfaite pour presque tout $t \in [0,T]$.

En effet, multiplions la première équation du problème (1.37) par ψ, intégrons sur Ω et utilisons la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_\Omega v'_\mu(t) \psi dx + a(v_\mu(t), \psi) + \alpha \int_\Omega \nabla v'_\mu(t) \nabla \psi dx + \\ &+ \int_\Omega g(v'_\mu(t)) \psi dx = \beta \int_\Omega |u_\mu(t)|^{p-2} u_\mu(t) \psi dx. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Faisant $\mu \to +\infty$, on constate que

$$\begin{aligned}
&a(v_\mu(t),\psi) \longrightarrow a(v(t),\psi)\\
&\int_\Omega \nabla v'_\mu(t)\nabla\psi dx \longrightarrow \int_\Omega \nabla v_t(t)\nabla\psi dx\\
&\int_\Omega g(v'_\mu(t))\psi dx \longrightarrow \int_\Omega g(v_t(t))\psi dx\\
&\int_\Omega |u_\mu(t)|^{p-2}\, u_\mu(t)\psi dx \longrightarrow \int_\Omega |u(t)|^{p-2}\, u(t)\psi dx,
\end{aligned}$$

dans $C\,(0,T)$. Donc l'équation (1.43) est vérifiée pour tout $t \in [0,T]$.

• Pour prouver l'unicité de la solution du problème (1.7), nous prenons $U, \bar{U}$ dans $C\,(0,T;V)$ et soit $V, \bar{V}$ les solutions correspondantes de (1.7). Notons $W = V - \bar{V}$. Alors W satisfait

$$\begin{aligned}
&\|W'(t)\|_2^2 + a\,(W(t),W(t)) + 2\alpha\int_0^t \|\nabla W'(s)\|_2^2\, ds +\\
&\quad +2\int_0^t\int_\Omega \left(g(V'(s)) - g(\bar{V}'(s))\right)\left(V'(s) - \bar{V}'(s)\right) dxds =\\
&= 2\beta\int_0^t\int_\Omega \left[|U|^{p-2}\, U - \left|\bar{U}\right|^{p-2}\bar{U}\right] W' dxds\\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega a'_{ij}(x,s)\frac{\partial W(s)}{\partial x_j}\frac{\partial W(s)}{\partial x_i} dxds.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Puisque, g est une fonction croissante alors

$$2\int_0^t\int_\Omega \left(g(V'(s)) - g(\bar{V}'(s))\right)\left(V'(s) - \bar{V}'(s)\right) dxds \geq 0, \tag{1.46}$$

Encore, en utilisant (1.21) l'estimation (1.45) donne

$$\begin{aligned}
&\|W'(t)\|_2^2 + a_0\,\|\nabla W(t)\|_2^2 + 2\alpha\int_0^t \|\nabla W'(s)\|_2^2\, ds \leq\\
&2\beta\int_0^t\int_\Omega \left[|U|^{p-2}\, U - \left|\bar{U}\right|^{p-2}\bar{U}\right] W' dxds + C_1\int_0^t \|\nabla W(s)\|_2^2\, ds.
\end{aligned}$$

Si $U = \bar{U}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\|W'(t)\|_2^2 + a_0\,\|\nabla W(t)\|_2^2 + 2\alpha\int_0^t \|\nabla W'(s)\|_2^2\, ds \leq\\
&+C_1\int_0^t \|\nabla W(s)\|_2^2\, ds.
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le lemme de Gronwall, nous obtenons $W = 0$. Cela complète la preuve du lemme 1.3.1. $\square$.

1.6 Preuve du Théorème 1.3.1

Pour $T \geq 0$, nous définissons le sous-ensemble convexe fermé de Y_T par

$$X_T = \{(v, v_t) \in Y_T \text{ tels que } v(0) = u_0, v_t(0) = u_1\}.$$

Notons

$$B_R(X_T) = \left\{v \in X_T \,;\, \|v\|_{Y_T} \leq R\right\}.$$

Alors, le lemme 1.3.1 implique que pour tout $u \in X_T$, on peut définir $v = \Phi(u)$ comme solution unique du problème (1.7) correspondante à u.

• **Φ est une application satisfaisant $\Phi(B_R(X_T)) \subset B_R(X_T)$.**
Soit $u \in B_R(X_T)$ et $v = \Phi(u)$. Alors pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned}
&\|v'(t)\|_2^2 + a_0 \|\nabla v(t)\|_2^2 + 2\alpha \int_0^t \|\nabla v'(s)\|_2^2 \, ds + 2k_0 \int_0^t \|v'(s)\|_m^m \, ds \leq \\
&\leq \|u_1\|_2^2 + a_0 \|\nabla u_0\|_2^2 + \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \int_\Omega a'_{ij}(x,s) \frac{\partial v(s)}{\partial x_j} \frac{\partial v(s)}{\partial x_i} dx ds \\
&\quad +2\beta \int_0^t \int_\Omega |u(s)|^{p-2} u(s) v_t(s) dx ds \leq \\
&\leq \|u_1\|_2^2 + a_0 \|\nabla u_0\|_2^2 + C_1 \int_0^t \|\nabla v(s)\|_2^2 \, ds \\
&\quad +2\beta \int_0^t \|v_t(s)\|_2 \|\nabla u(s)\|_2^{p-1} \, ds.
\end{aligned}$$

Cela conduit à

$$\|v\|_{Y_T}^2 \leq K_2 \left(\|u_1\|_2^2 + a_0 \|\nabla u_0\|_2^2\right) + K_2 R^{p-1} T \|v\|_{Y_T}^2,$$

où K_2 est une constante indépendante de R. En utilisant l'inégalité de Hölder, on arrive à

$$\|v\|_{Y_T}^2 \leq K_2 \left(\|u_1\|_2^2 + a_0 \|\nabla u_0\|_2^2\right) + R^{p-1} T \left[\frac{R^{p-1} T}{2} K_2^2 + \frac{1}{2T R^{p-1}} \|v\|_{Y_T}^2\right].$$

Ainsi, nous obtenons

$$\|v\|_{Y_T}^2 \leq K_2 \left(\|u_1\|_2^2 + a_0 \|\nabla u_0\|_2^2\right) + R^{2(p-1)} T^2 K_2^2. \tag{1.47}$$

Choisissons R suffisamment grand tel que

$$K_2 \left(\|v_1\|_2^2 + \|\nabla v_0\|_2^2\right) \leq \frac{1}{2} R^2,$$

puis T suffisamment petit de sorte que $R^{2(p-1)}T^2K_2^2 \leq \dfrac{1}{2}R^2$, (1.47) est satisfait, donc $v \in B_R(X_T)$.

• **Φ est contractante.**
On pose $U = u - \bar{u}$ et $V = v - \bar{v}$, où $v = \Phi(u), \bar{v} = \Phi(\bar{u})$ sont des solutions du problème (1.7). Il est facile de vérifier que V satisfait

$$\begin{cases} V_{tt} + AV - \alpha\Delta V_t(t) + g(V_t) = |u|^{p-2}u - |\bar{u}|^{p-2}\bar{u}, & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ V(x,t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ V(x,0) = V_t(x,0) = 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.48}$$

Multiplions la première équation du problème (1.48) par V_t, intégrons le résultat sur $(0,t) \times \Omega$ et utilisons la formule de Green pour obtenir

$$\begin{aligned} &\|V'(t)\|_2^2 + a_0\|\nabla V(t)\|_2^2 + 2\alpha\int_0^t \|\nabla V'(s)\|_2^2\,ds + 2k_0\int_0^t \|V'(s)\|_m^m\,ds \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \int_0^t\int_\Omega a'_{ij}(x,s)\frac{\partial V(s)}{\partial x_j}\frac{\partial V(s)}{\partial x_i}dxds + 2\beta\int_0^t\int_\Omega \left[|u|^{p-2}u - |\bar{u}|^{p-2}\bar{u}\right]V_t dxds. \end{aligned}$$

En utilisant (1.18), (1.41), on trouve

$$\begin{aligned} &\|V'(t)\|_2^2 + a_0\|\nabla V(t)\|_2^2 + 2\alpha\int_0^t \|\nabla V'(s)\|_2^2\,ds + 2k_0\int_0^t \|V'(s)\|_m^m\,ds \leq \\ &\leq C_1\int_0^t \|V(s)\|_2^2\,ds + 2\beta C\int_0^t \|V_t\|_2\|\nabla U\|_2\left(\|\nabla u\|_2^{p-2} + \|\nabla\bar{u}\|_2^{p-2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\|V\|_{Y_T} \leq K_3TR^{p-2}\|U\|_{Y_T}. \tag{1.49}$$

En choisissant T suffisamment petit pour avoir $K_3TR^{p-2} < 1$, l'estimation (1.49) montre que Φ est une contraction.
Par conséquent, le théorème du point fixe garantit l'existence d'un unique v satisfaisant $v = \Phi(v)$. Ainsi la preuve du théorème 1.3.1 est achevée.$\square$

Chapitre 2

Existence globale et comportement asymptotique

Ce chapitre est dédié à l'étude du l'existence globale et le comportement asymptotique de la solution locale trouvée dans le chapitre précédant. En appliquant la méthode du puits potentiel de Payne et Sattinger (42), nous montrons que la solution existe globalement en temps dans un ensemble stable et qu'elle est uniformément bornée. Sans aucune condition entre les paramètres p et m, nous prouvons dans la deuxième section la décroissance exponentielle de cette solution. Les techniques utilisées sont basées sur la construction d'une fonction de Lyapunov L, qui est équivalente à la fonctionnelle d'énergie du problème (1.1).

2.1 Existence globale

Pour étudier l'existence globale et le comportement asymptotique de la solution locale du problème (1.1) donnée par le théorème 1.3.1, on définit les fonctions suivantes :

$$I(u(t)) = I(t) = a(u(t), u(t)) - \beta \left\| u(t) \right\|_p^p ,$$

$$J(u(t)) = J(t) = \frac{1}{2} a(u(t), u(t)) - \frac{\beta}{p} \left\| u(t) \right\|_p^p ,$$

pour $u \in H_0^1(\Omega)$, nous définissons le puits du potentiel $\mathbb{H}$ par

$$\mathbb{H} = \{u \in H_0^1(\Omega),\ I(t) > 0\} \cup \{0\}.$$

Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, on introduit la fonctionnelle d'énergie totale associée au problème (1.1) par

$$E(u(t), u_t(t)) = E(t) = \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} a(u(t), u(t)) - \frac{\beta}{p} \|u(t)\|_p^p, \ \forall t \geq 0, \tag{2.1}$$

avec $E(0) = \frac{1}{2} \|u_1\|_2^2 + J(u_0)$ désigne l'énergie initiale.

Lemme 2.1.1. *Soit $u(x,t)$ solution du problème (1.1). Alors, la fonctionnelle d'énergie définie par (2.1) est strictement décroissante sur $[0, \infty)$. De plus*

$$\begin{aligned} E'(t) = -\alpha \|\nabla u_t(t)\|_2^2 - \int_\Omega g(u_t(t)) u_t(t) dx + \\ + \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a'_{ij}(x,t) \frac{\partial u(t)}{\partial x_j} \frac{\partial u(t)}{\partial x_i} dx, \ \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Démonstration. Multiplions la première équation du (1.1) par u_t, intégrons le résultat obtenu sur Ω et utilisons la formule de Green, on trouve l'équation (2.2). Comme $\alpha > 0$, de $(H_1 : b))$ et (1.2) on déduit que la fonctionnelle d'énergie est strictement décroissante. □

Lemme 2.1.2. *Supposons que*

$$2 < p \leq 2\frac{n-1}{n-2}, \quad n \geq 3. \tag{2.3}$$

Si $u_0 \in \mathbb{H}, \ u_1 \in L^2(\Omega)$ tels que

$$\theta = \beta C_*^p a_0^{-\frac{p}{2}} \left(\frac{2p}{p-2} E(0) \right)^{\frac{p-2}{2}} < 1, \tag{2.4}$$

alors $u(t) \in \mathbb{H}$, pour tout $t \in [0, T)$. C_* est la constante de Sobolev-Poincaré.

Démonstration. Puisque $u_0 \in \mathbb{H}$, alors $I(u_0) > 0$. Donc par continuité, il existe $T_j < T$ tel que $I(u(t)) \geq 0$, pour tout $t \in [0, T_j)$. Par la définition de I et J, on a la relation suivante

$$J(t) = \frac{p-2}{2p} a(u(t), u(t)) + \frac{1}{p} I(t),$$

Par conséquent on obtient

$$J(t) \geq \frac{p-2}{2p} a(u(t), u(t)) \quad \forall t \in [0, T_j).$$

Ou encore

$$a(u(t), u(t)) \leq \frac{2p}{p-2} J(t) \leq \frac{2p}{p-2} E(t), \quad \forall t \in [0, T_j). \tag{2.5}$$

Utilisons (1.5) et le résultat du lemme 2.1.1, on obtient :

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \frac{2p}{p-2}\frac{1}{a_0}E(0), \quad \forall t \in [0, T_j). \tag{2.6}$$

Exploitons (1.3), (2.4) et (2.6), il résulte que

$$\begin{aligned} \beta\|u(t)\|_p^p &\leq \beta C_*^p \|\nabla u(t)\|_2^p \leq \beta C_*^p \|\nabla u(t)\|_2^{p-2}\|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\leq \underbrace{\beta C_*^p a_0^{-\frac{p}{2}} \left(\frac{2p}{p-2}E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}}} a(u(t), u(t)) < \\ &< a(u(t), u(t)), \quad \forall t \in [0, T_j). \end{aligned} \tag{2.7}$$

D'où $\beta\|u(t)\|_p^p < a(u(t), u(t)),\ \forall t \in [0, T_j)$, ce qui implique que $u(t) \in \mathbb{H}$, pour tout $t \in [0, T_j)\,,\ \forall j$.
Puisque l'énergie E est strictement décroissante, on a les inégalités suivantes :

$$\lim_{t \longrightarrow T_j} \beta C_*^p a_0^{-\frac{p}{2}} \left(\frac{2p}{p-2}E(t)\right)^{\frac{p-2}{2}} < \beta C_*^p a_0^{-\frac{p}{2}} \left(\frac{2p}{p-2}E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}} < 1.$$

Ainsi, en répétant cette procédure, T_j est étendue à T. □

Théorème 2.1.1. *Supposons que (2.3) est vérifiée. Si $u_0 \in H$ et $u_1 \in L^2(\Omega)$ satisfaisant (2.4), alors la solution $u(x,t)$ du problème (1.1) est globale en temps.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\|u_t(t)\|_2^2 + a(u(t), u(t))$ est majorée par une constante indépendante de t.
Sous les hypothèses du Théorème 2.1.1, le lemme 2.1.2 assure que $u(t) \in \mathbb{H}$ sur $[0, T)$.
Par conséquent, en utilisant le Lemme 2.1.1, de (2.5), il s'en suit

$$\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{p-2}{2p}a(u(t), u(t)) \leq E(t) = \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + J(t) \leq E(0),$$

Ainsi, $\forall t \in [0, T)$, la norme $\|u_t(t)\|_2^2 + a(u(t), u(t))$ est uniformément majorée par une constante ne dépendant que de $E(0)$ et p. □

2.2 Décroissance exponentielle

Dans ce paragraphe, en utilisant la méthode de l'énergie avec un choix convenable de la fonction de Lyapunov et sans aucune relation entre les paramètres p et m, nous allons montrer que l'énergie associée au problème (1.1) décroit exponentiellement en temps au voisinage de l'infini. Pour cela, nous supposons, en plus de (H_2) que

$$|g(v)| \leq k_1|v|(1+|v|^{m-2}), \qquad \text{pour tout } \; v \in \mathbb{R} \; \text{ et } \; 2 \leq m < +\infty, \tag{2.8}$$

où k_1 est une constante positive.
Pour des raisons purement explicatives, nous allons commencer par démontrer les lemmes suivants :

Lemme 2.2.1. *Supposons que*

$$2 \leq m \leq \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3, \tag{2.9}$$

alors la solution $u(x,t)$ du problème (1.1) satisfait

$$\|u(t)\|_m^m \leq CE(t), \tag{2.10}$$

où C est une constante indépendante de t.

Démonstration. En utilisant (1.3), (2.5) et (2.6) pour tout $t \in [0,T)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_m^m &\leq C_*^m \|\nabla u(t)\|_2^m = C_*^m \|\nabla u(t)\|_2^{m-2} \|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \\
&\leq C_*^m \left(\frac{2p}{p-2} \frac{1}{a_0} E(0) \right)^{\frac{m-2}{2}} \|\nabla u(t)\|_2^2 \\
&\leq C_*^m a_0^{-\frac{m}{2}} \left(\frac{2p}{p-2} E(0) \right)^{\frac{m-2}{2}} \frac{2p}{p-2} E(t) = CE(t)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

où C est une constante indépendante de t. □

Pour $\varepsilon > 0$, à le choisir ultérieurement et $u(t) \in \mathbb{H}$, on définit la fonction de Lyapunov L comme suit

$$L(t) = E(t) + \varepsilon \int_\Omega u_t(t)u(t)dx + \frac{\varepsilon\alpha}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.12}$$

Lemme 2.2.2. *Les fonctionnelles L et E sont équivalentes*

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Schwarz, (1.3) et (1.5), on obtient

$$|L(t) - E(t)| \leq \varepsilon E(t) + \frac{\varepsilon}{2a_0}(\alpha + C_*^2) a(u(t), u(t)).$$

De (2.5), la dernière inégalité devient :

$$|L(t) - E(t)| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2a_0}(\alpha + C_*^2) \frac{2p}{p-2} \right) E(t).$$

Par conséquent, pour ε suffisamment petit, il existe deux constantes positives β_1 et β_2 telles que

$$\beta_1 E(t) \leq L(t) \leq \beta_2 E(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.13}$$

où

$$\beta_1 = 1 + \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2a_0}(\alpha + C_*^2)\right),$$
$$\beta_2 = 1 - \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2a_0}(\alpha + C_*^2)\right).$$

□

Théorème 2.2.1. *Si les hypothèses du Théorème 2.1.1 sont valides, et (2.9), (2.8) ont lieu. Alors, il existe deux constantes positives K et k telles que l'énergie associée au problème (1.1) satisfait*

$$E(t) \leq K \exp(-kt), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.14}$$

Démonstration. Dérivons par rapport à t la fonction L définie dans l'équation (2.12), utilisons la première équation du problème (1.1), après une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} L'(t) &= -\int_\Omega g(u_t(t))u_t(t)dx - \alpha\|\nabla u_t(t)\|_2^2 - \varepsilon a(u(t),u(t)) + \\ &\quad +\varepsilon \int_\Omega u_t^2(t)dx - \varepsilon \int_\Omega g(u_t(t))u(t)dx + \varepsilon \int_\Omega |u(t)|^p dx. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Les hypothèses (1.2) et (2.8) , nous permettent d'estimer le premier et le cinquième termes du deuxième membre de l'égalité précédente comme suit

$$\begin{aligned} -\int_\Omega g(u_t(t))u_t(t)dx &\leq -k_0\| \, u_t(t)\|_m^m. \qquad (2.16) \\ -\int_\Omega g(u_t(t))u(t)dx &\leq \left|\int_\Omega g(u_t(t))u(t)dx\right| \leq \\ &\leq k_1 \int_\Omega |u(t)||u_t(t)|dx + k_1 \int_\Omega |u(t)||u_t(t)|^{m-1}dx. \end{aligned}$$

Exploitons l'inégalité de Young suivante

$$XY \leq \frac{\delta^r}{r}X^r + \frac{\delta^{-s}}{s}Y^s, \quad X,Y \geq 0, \quad \delta > 0, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1,$$

avec $r = m$ et $s = m/m-1$ pour obtenir

$$k_1 \int_\Omega |u_t(t)|^{m-1}|u(t)|dx \leq k_1\mu \|u(t)\|_m^m + k_1 c(\mu) \|u_t(t)\|_m^m, \; \forall \mu > 0. \tag{2.17}$$

Moyennement à l'inégalité de Hölder, (1.3) et (1.5), on trouve

$$k_1 \int_\Omega |u_t(t)||u(t)|dx \leq k_1 \frac{C_*^2}{2a_0} a(u(t),u(t)) + \frac{k_1}{2} \|u_t\|_2^2. \tag{2.18}$$

Ce qui joint à (2.16) et (2.17), de (2.15), il résulte

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq -k_0\|u_t(t)\|_m^m + \varepsilon k_1\left(\mu\|u(t)\|_m^m + c(\mu)\|u_t(t)\|_m^m\right) - \\ &-\alpha\|\nabla u_t(t)\|_2^2 - \varepsilon a(u(t),u(t)) + \varepsilon\beta\|u(t)\|_p^p + \\ &+\varepsilon k_1\left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{C_*^2}{2a_0}a(u(t),u(t))\right). \end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq -(k_0 - k_1\varepsilon c(\mu))\|u_t(t)\|_m^m - \alpha\|\nabla u_t(t)\|_2^2 - \varepsilon E(t) + \\ &+\varepsilon k_1\mu\|u(t)\|_m^m + \frac{\varepsilon}{2}(3+k_1)\|u_t(t)\|_2^2 + \varepsilon\beta\left(1-\frac{1}{p}\right)\|u(t)\|_p^p - \\ &-\varepsilon\left(\frac{1}{2} - k_1\frac{C_*^2}{2a_0}\right)a(u(t),u(t)). \end{aligned}$$

En utilisant le résultat du lemme 2.2.1, (2.7) et l'inégalité de Poincaré suivante

$$\|u_t(t)\|_2^2 \leq C_1\|\nabla u_t(t)\|_2^2,$$

on trouve

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq -(k_0 - k_1\varepsilon c(\mu))\|u_t(t)\|_m^m - \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}C_1(3+k_1)\right)\|\nabla u_t(t)\|_2^2 - \\ &-\varepsilon\left[\frac{1}{2} - \theta\left(1-\frac{1}{p}\right) - k_1\frac{C_*^2}{2a_0}\right]a(u(t),u(t)) - \\ &-\varepsilon(1-k_1\mu C)E(t). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Notons qu'à partir de (2.4), le coefficient de $a(u(t),u(t))$ dans (2.19) est négatif

$$B_1 = \frac{1}{2} - \theta\left(1-\frac{1}{p}\right) - k_1\frac{C_*^2}{2a_0} < 0.$$

Par conséquent, en utilisant (2.5), l'inégalité (2.19) donne

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq -(k_0 - k_1\varepsilon c(\mu))\|u_t(t)\|_m^m - \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}C_1(3+k_1)\right)\|\nabla u_t(t)\|_2^2 - \\ &-\varepsilon\left(B_1\frac{2p}{p-2} + 1 - k_1\mu C\right)E(t). \end{aligned} \tag{2.20}$$

A ce point, on choisit μ de sorte que

$$B_2 = B_1\frac{2p}{p-2} + 1 - k_1\mu C > 0.$$

Lorsque μ est fixé, on choisit

$$\varepsilon = \min\left(\frac{k_0}{k_1 c(\mu)}, \frac{2\alpha}{C_1(3+k_1)}\right),$$

et que (2.13) reste valide, alors de (2.20) il résulte

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq -\varepsilon\left[B_1\frac{2p}{p-2}+1-k_1\mu C\right]E(t) \leq \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{\beta_2}\left[B_1\frac{2p}{p-2}+1-k_1\mu C\right]L(t), \end{aligned}$$

en vertu de (2.13).
Intégrons l'inégalité différentielle précédente entre 0 et t, on trouve l'estimation suivante

$$L(t) \leq L(0)e^{-kt}, \quad \forall t \geq 0,$$

où $k = \dfrac{\varepsilon}{\beta_2}(B_1\frac{2p}{p-2}+1-k_1\mu C)$.
Encore, en utilisant (2.13), on obtient

$$E(t) \leq \frac{L(0)}{\beta_1}e^{-kt} = Ke^{-kt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Ainsi, (2.14) est établie. □

Chapitre 3

Explosion de la solution en temps fini

Ce chapitre est consacré à l'étude du phénomène d'explosion. Pour des données initiales assez petites et en présence d'un source non linéaire de type polynomial malgré la présence d'une dissipation forte, en se basant sur les techniques de Vittilaro (46) et W.J. Liu dans (34), nous allons montrer que la solution locale obtenue par le théorème 1.3.1 s'explose en temps fini.

3.1 Résultat préliminaire

Pour démontrer le résultat désiré sur l'explosion de la solution en temps fini, moyennant des techniques similaires à celles utilisées par Vitillaro (46), nous commençons par prouver un résultat très important dans le lemme suivant. Pour cela, nous introduisons les constantes suivantes :

$$\lambda_0 = \left(\frac{a_0}{\beta} C_*^{-p}\right)^{\frac{1}{p-2}}, \quad E_0 = a_0\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\lambda_0^2. \tag{3.1}$$

Lemme 3.1.1. *Supposons que les données initiales vérifient :*

$$E(0) < E_0 \ ; \quad \|\nabla u_0\|_2 > \lambda_0. \tag{3.2}$$

Alors, il existe une constante $\lambda_1 > \lambda_0$ telle que

$$\|\nabla u(t)\|_2 > \lambda_1 \ ; \quad \|u(t)\|_p > C_* \lambda_1 \ , \quad \forall t \in [0,\ T]\,, \tag{3.3}$$

où u est la solution du problème (1.1).

Démonstration. De la définition de la fonctionnelle d'énergie (2.1) on déduit que

$$E(t) \geq \frac{1}{2}a(u(t), u(t)) - \frac{\beta}{p}\|u(t)\|_p^p. \tag{3.4}$$

Puis, utilisons (1.3) et (1.5) on trouve

$$E(t) \geq \frac{a_0}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{\beta}{p}C_*^p\|\nabla u(t)\|_2^p = Q(\|\nabla u(t)\|_2), \quad \forall t \geq 0,$$

ensuite
– Q a une seule valeur maximum $E_0 = Q(\lambda_0)$ en λ_0,
– Q est strictement croissante sur $[0, \ \lambda_0)$,
– Q est strictement décroissante sur $(\lambda_0, \ \infty)$ et $Q(s) \to -\infty$ lorsque $s \to +\infty$.
Par conséquent, comme $E(0) < E_0$, il existe $\lambda_1 > \lambda_0$ tel que $Q(\lambda_1) = E(0)$.
On choisit $\lambda_2 = \|\nabla u_0\|_2$, donc par (3.4) nous avons $Q(\lambda_2) \leq E(0) = Q(\lambda_1)$, ce qui implique que $\lambda_2 \geq \lambda_1$.
Pour montrer que $\|\nabla u(t)\|_2 > \lambda_1$, nous raisonnons par absurde en supposant que $\|\nabla u(t_0)\|_2 < \lambda_1$, pour un certain $t_0 > 0$. De la continuité de $\|\nabla u(.)\|_2$, on peut choisir t_0 tel que $\|\nabla u(t_0)\|_2 > \lambda_0$. Encore une fois l'utilisation de (3.4) donne

$$E(t_0) \geq Q(\|\nabla u(t_0)\|) > Q(\lambda_1) = E(0).$$

Ceci est impossible car $E(t) \leq E(0)$, pour tout $t \geq 0$.
Reste à prouver que $\|u(t)\|_p > C_*\lambda_1$. Exploitons (2.1) et que E est décroissante, on trouve

$$\frac{1}{2}a(u(t), u(t)) - \frac{\beta}{p}\|u(t)\|_p^p \leq E(t) \leq E(0).$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{p}\|u(t)\|_p^p &\geq \frac{a_0}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - E(0) \\ &\geq \frac{a_0}{2}\lambda_1^2 - Q(\lambda_1) = \frac{\beta}{p}C_*^p\lambda_1^p. \end{aligned}$$

□

3.2 Explosion en temps fini

En se basant sur les techniques utilisées par W.J. Liu dans (34), nous allons montrer un résultat d'explosion en temps fini de la solution du problème (1.1).

Théorème 3.2.1. *Supposons que*

$$2 \leq m < p \leq 2\frac{n-1}{n-2}, \quad n \geq 3. \tag{3.5}$$

Si en outre les conditions initiales (3.2) sont satisfaites, alors toute solution du (1.1) s'explose en temps fini, i.e., il existe $T^* < +\infty$ tel que

$$\lim_{t \to T^{*-}} \left[\|u(t)\|_p^p + \|\nabla u(t)\|_2^2 + H(t) + \|u_t(t)\|_2^2 \right] = +\infty.$$

Démonstration. Par absurde, on suppose que la solution du problème (1.1) est globale, alors pour tout $T > 0$ fixé, il existe une constante C telle que

$$\|u(t)\|_p^p + \|\nabla u(t)\|_2^2 + H(t) + \|u_t(t)\|_2^2 \leq C \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{3.6}$$

On pose

$$H(t) = E_0 - E(t), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.7}$$

Puisque la fonction E est strictement décroissante, on déduit que $H'(t) \geq 0$. Ainsi par (3.2), on obtient

$$H(t) \geq H(0) = E_0 - E(0) > 0. \tag{3.8}$$

De (3.7) et (2.1), on trouve

$$H(t) \leq E_0 - \frac{a_0}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{\beta}{p} \|u(t)\|_p^p.$$

Ensuite, d'après le lemme 3.1.1, il s'ensuit

$$H(t) \leq E_0 - \frac{a_0}{2} \lambda_0^2 + \frac{\beta}{p} \|u(t)\|_p^p.$$

Par conséquent

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{\beta}{p} \|u(t)\|_p^p, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.9}$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit à choisir ultérieurement, on définit la fonction auxiliaire G comme suit

$$G(t) = H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \int_\Omega u_t(t) u(t) dx + \frac{\varepsilon \alpha}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2, \tag{3.10}$$

où

$$0 < \sigma \leq \min \left\{ \frac{p-2}{2p}, \frac{p-m}{p(m-1)} \right\}. \tag{3.11}$$

Remarque 3.2.1. *La fonction auxiliaire G est une petite perturbation de la fonctionnelle d'énergie E.*

Lemme 3.2.1. *Sous les hypothèses du théorème 3.2.1, la fonction G est croissante et on a*

$$\frac{d}{dt}G(t) \geq K\varepsilon\left[H(t) + \|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_p^p + \|u_t(t)\|_2^2\right], \tag{3.12}$$

où K est une constante positive.

Démonstration du Lemme 3.2.1. Dérivons la fonction G définie par (3.10) par rapport à t et utilisons la formulation variationnelle, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}G(t) = (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H_t(t) + \varepsilon\|u_t(t)\|_2^2 - \varepsilon a(u(t),u(t)) + \\ + \varepsilon\beta\|u(t)\|_p^p - \varepsilon\int_\Omega g(u_t(t))u(t)dx.\end{aligned} \tag{3.13}$$

En ajoutant et en soustrayant le terme $\varepsilon pH(t)$, en utilisant (2.1) et (3.7), de (3.13), on en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}G(t) \geq (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H_t(t) + \varepsilon\left(\frac{p}{2}+1\right)\|u_t(t)\|_2^2 + \varepsilon pH(t) \\ + \varepsilon\left(\frac{p}{2}-1\right)a(u(t),u(t)) - \varepsilon\int_\Omega g(u_t(t))u(t)dx - \varepsilon pE_0.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Utilisons l'hypothèse $(H_2 : b)$, on obtient

$$\left|\int_\Omega g(u_t(t))u(t)dx\right| \leq k_1\int_\Omega |u_t(t)||u(t)|dx + k_1\int_\Omega |u_t(t)|^{m-1}|u(t)|dx.$$

Ensuite, nous exploitons l'inégalité de Young suivante

$$XY \leq \frac{\delta^r}{r}X^r + \frac{\delta^{-s}}{s}Y^s, \quad X,Y \geq 0, \quad \delta > 0, \quad \frac{1}{r}+\frac{1}{s} = 1,$$

avec $r = m$ et $s = \dfrac{m}{m-1}$ pour obtenir

$$k_1\int_\Omega |u_t(t)|^{m-1}|u(t)|dx \leq k_1\frac{\delta^m}{m}\|u(t)\|_m^m + k_1\frac{m-1}{m}\delta^{-\frac{m-1}{m}}\|u_t(t)\|_m^m, \tag{3.15}$$

pour toute constante positive δ.
Utilisons l'inégalité de Hölder et (1.3), on trouve

$$k_1\int_\Omega |u_t(t)||u(t)|dx \leq k_1c(\lambda)C_*^2\|\nabla u(t)\|_2^2 + k_1c_1(\lambda)\|u_t(t)\|_2^2, \tag{3.16}$$

où $c(\lambda)$, $c_1(\lambda)$ sont des constantes positives.
Insérant (3.15), (3.16) et (1.5) dans (3.14), on arrive à

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}G(t) \geq (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H_t(t) + \varepsilon pH(t) - \varepsilon pE_0 - \varepsilon k_1\frac{\delta^m}{m}\|u(t)\|_m^m \\ - \varepsilon k_1\frac{m-1}{m}\delta^{-\frac{m-1}{m}}\|u_t(t)\|_m^m + \varepsilon\left(\frac{p}{2}+1-k_1c_1(\lambda)\right)\|u_t(t)\|_2^2 + \\ + \varepsilon\left(a_0(\frac{p}{2}-1) - k_1c(\lambda)C_*^2\right)\|\nabla u(t)\|_2^2.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Observons que

$$a_0\left(\frac{p}{2}-1\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 - pE_0 = a_0\left(\frac{p}{2}-1\right)\frac{\lambda_1^2-\lambda_0^2}{\lambda_1^2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \\ + a_0\left(\frac{p}{2}-1\right)\lambda_0^2\frac{\|\nabla u(t)\|_2^2}{\lambda_1^2} - pE_0,$$

où λ_1 est donné dans le lemme 3.1.1. De (3.3), il résulte que :

$$a_0\left(\frac{p}{2}-1\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 - pE_0 \geq C_1\|\nabla u(t)\|_2^2 + C_2, \tag{3.18}$$

où $C_1 = a_0(\frac{p}{2}-1)\frac{\lambda_1^2-\lambda_0^2}{\lambda_1^2}$, utilisons le lemme 3.1.1, on a $C_1 > 0$ et par (3.7), on trouve que $C_2 = a_0(\frac{p}{2}-1)\lambda_0^2 - pE_0 > 0$.
Etant donné que $H_t(t) \geq k_0\|u_t\|_m^m$ et par (3.18), on obtient

$$\frac{d}{dt}G(t) \geq \left((1-\sigma)H^{-\sigma}(t) - \varepsilon\frac{k_1}{k_0}\frac{m-1}{m}\delta^{-\frac{m-1}{m}}\right)H_t(t) + \varepsilon pH(t) + \\ + \varepsilon\left(\frac{p}{2}+1-k_1c_1(\lambda)\right)\|u_t(t)\|_2^2 + \varepsilon\left(C_1 - k_1c(\lambda)C_*^2\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 - \\ - \varepsilon k_1\frac{\delta^m}{m}\|u(t)\|_m^m.$$

Nous pouvons donc choisir δ de sorte que $\delta^{-\frac{m-1}{m}} = MH^{-\sigma}(t)$, où M est une constante assez grande et à déterminer ultérieurement. Par substitution dans la dernière inégalité, il vient

$$\frac{d}{dt}G(t) \geq \left((1-\sigma) - \varepsilon\frac{k_1}{k_0}\frac{m-1}{m}M\right)H^{-\sigma}(t) + \varepsilon pH(t)H_t(t) + \\ + \varepsilon\left(\frac{p}{2}+1-k_1c_1(\lambda)\right)\|u_t(t)\|_2^2 + \varepsilon\left(C_1 - k_1c(\lambda)C_*^2\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 + \\ - \varepsilon\frac{k_1}{m}M^{1-m}H^{\sigma(m-1)}(t)\|u(t)\|_m^m. \tag{3.19}$$

Puisque $p > m$, on a

$$\int_\Omega |u(t)|^m dx \leq C_3\left[\int_\Omega |u(t)|^p dx\right]^{\frac{m}{p}},$$

où C_3 est une constante positive dépend seulement de Ω.
De (3.9), on a aussi

$$H^{\sigma(m-1)}(t)\int_\Omega |u(t)|^m dx \leq C_3\left(\frac{\beta}{p}\right)^{\sigma(m-1)}\left[\int_\Omega |u(t)|^p dx\right]^{\sigma(m-1)+\frac{m}{p}}.$$

Exploitons l'inégalité algébrique suivante

$$z^\tau \leq z+1 \leq \left(1+\frac{1}{d}\right)(z+d), \quad \forall z \geq 0, \quad 0 < \tau \leq 1, \quad d \geq 0,$$

avec $z = \|u(t)\|_p^p$, $e = 1 + \dfrac{1}{H(0)}$, $d = H(0)$ et $\tau = \sigma(m-1) + \frac{m}{p}$, alors la condition (3.11) implique que $0 < \tau \leq 1$ et par conséquent,

$$\left[\int_\Omega |u(t)|^p dx\right]^{\sigma(m-1)+\frac{m}{p}} \leq e\left(\|u(t)\|_p^p + H(0)\right) \tag{3.20}$$
$$\leq e\left(\|u(t)\|_p^p + H(t)\right), \quad \forall t \in [0,T].$$

Insérant l'estimation (3.20) dans (3.19), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}G(t) \geq & \left((1-\sigma) - \varepsilon\frac{k_1}{k_0}\frac{m-1}{m}M\right) H^{-\sigma}(t)H_t(t) + \\ & + \varepsilon\left(\frac{p}{2} + 1 - k_1 c_1(\lambda)\right)\|u_t(t)\|^2 + \varepsilon\left(C_1 - k_1 c(\lambda) C_*^2\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 + \\ & + \varepsilon\left[pH(t) - e\frac{k_1}{m}M^{1-m}C_3\left(\frac{\beta}{p}\right)^{\sigma(m-1)}\left(\|u(t)\|_p^p + H(t)\right)\right].\end{aligned} \tag{3.21}$$

A ce point, on choisit $\lambda > 0$, (c'est le cas où $k_1 \max\left(c(\lambda),\ c_1(\lambda)\right) < \min\left(1 + \frac{p}{2},\ \frac{C_1}{C_*^2}\right)$) de sorte que

$$\begin{cases} K_1 = \left(\frac{p}{2} + 1 - k_1 c_1(\lambda)\right) > 0, \\ K_2 = \left(C_1 - k_1 c(\lambda) C_*^2\right) > 0, \end{cases}$$

et on peut choisir $M > \left[\left(\frac{1}{c_0\beta} + \frac{1}{p}\right) e\frac{k_1}{m}C_3\right]^{\frac{1}{m-1}}\left(\frac{\beta}{p}\right)^{\sigma}$ suffisamment grand de sorte que (3.21) donne,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}G(t) \geq & \left((1-\sigma) - \varepsilon\frac{k_1}{k_0}\frac{m-1}{m}M\right) H^{-\sigma}(t)H_t(t) + \\ & + K_1\|u_t(t)\|^2 + K_2\|\nabla u(t)\|_2^2 + \varepsilon K_3\left(\|u(t)\|_p^p + H(t)\right).\end{aligned} \tag{3.22}$$

Lorsque M est fixé, on choisit ε assez petit de sorte que

$$\begin{cases} (1-\sigma) - \varepsilon\frac{k_1}{k_0}\frac{m-1}{m}M \geq 0, \\ G(0) = H^{1-\sigma}(0) + \varepsilon\int_\Omega u_1 u_0 dx + \frac{\varepsilon\alpha}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 > 0. \end{cases}$$

Alors, de (3.22) on conclut que :

$$\frac{d}{dt}G(t) \geq K\varepsilon\left[H(t) + \|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_p^p + \|u_t(t)\|_2^2\right],$$

où $K = \min\left(K_1,\ K_2,\ K_3\right)$. D'où $G(t) \geq G(0) > 0$, pour tout $t \in [0,T]$. $\square$

Lemme 3.2.2. *Sous les hypothèses du théorème 3.2.1, la fonction G satisfait*

$$G^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \leq K_1\left(\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_p^p + H(t) + \|u_t(t)\|_2^2\right), \quad \forall t \in [0,T], \tag{3.23}$$

où K_1 est une constante positive.

Démonstration du Lemme 3.2.2. On pose $r = \frac{1}{1-\sigma}$, exploitons l'inégalité suivante

$$(a+b)^r \leq 2^{r-1}(a^r + b^r) \text{ pour tout } a > 0,\ b > 0 \text{ et } r > 1,$$

pour obtenir de (3.10) que

$$\begin{aligned} G^r(t) &\leq \left(H^{1-\sigma}(t) + \epsilon \int_\Omega u_t(t)u(t)dx + \frac{\varepsilon\alpha}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2\right)^r \\ &\leq C_4\left(H(t) + \left|\int_\Omega u_t(t)u(t)dx\right|^r + \|\nabla u(t)\|)_2^{2r}\right), \end{aligned} \tag{3.24}$$

où $C_4 = 2^{2(r-1)} \max\left\{1,\ \varepsilon^r \max\left\{1,\ \left(\frac{\alpha}{2}\right)^r\right\}\right\}$.
Pour $p > 2$, en utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Young, on obtient

$$\left|\int_\Omega u(t)u_t(t)dx\right|^r \leq \|u(t)\|_2^r\|u_t(t)\|_2^r \leq C_5\left(\|u(t)\|_p^{\mu r} + \|u_t(t)\|_2^{\theta r}\right), \tag{3.25}$$

où $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$ et C_5 dépend seulement de $\Omega,\ \mu,\ \theta$.
On prend $\theta = 2(1-\sigma)$, on obtient alors $\mu r = \dfrac{2}{1-2\sigma}$ et par (3.11) on a $\mu r \leq p$. Par conséquent (3.25) devient

$$\left|\int_\Omega u(t)u_t(t)dx\right|^r \leq C_5\left(\|u(t)\|_p^{\frac{2}{1-2\sigma}} + \|u_t(t)\|_2^2\right).$$

Encore, en utilisant (3.11) et (3.20), on en déduit

$$\left(\|u(t)\|_p^p\right)^{\frac{2}{(1-2\sigma)p}} \leq e\left(\|u(t)\|_p^p + H(t)\right) \leq e\left(\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_p^p + H(t)\right),$$

ainsi

$$\left|\int_\Omega u(t)u_t(t)dx\right|^r \leq eC_5\left(\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_p^p + H(t) + \|u_t(t)\|_2^2\right). \tag{3.26}$$

De (3.6) et (3.8), on a

$$\|\nabla u(t)\|_2^{2r} \leq C^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq \frac{C^{\frac{1}{1-\sigma}}}{H(0)}H(t). \tag{3.27}$$

Il résulte de (3.26), (3.27) et (3.24) que

$$G^r(t) \leq K_1\left(\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_p^p + H(t) + \|u_t(t)\|_2^2\right), \quad \forall t \in [0,T],$$

où $K_1 = C_4\left(1 + eC_5 + \frac{C^{\frac{1}{1-\sigma}}}{H(0)}\right)$. □

Suite de la preuve du théorème 3.2.1. En vertu des résultats des lemmes 3.2.1 et 3.2.2, on obtient

$$\frac{d}{dt}G(t) \geq \frac{\varepsilon K}{K_1} G^{\frac{1}{1-\sigma}}(t), \quad \forall t \in [0, T]\,. \tag{3.28}$$

Une intégration simple de (3.28) sur $(0,\ t)$ donne

$$G^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) \geq \frac{1}{G^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(0) - K\varepsilon\sigma t/\left[K_1(1-\sigma)\right]}, \quad \forall t \in [0, T]\,. \tag{3.29}$$

Par conséquent G s'explose en temps fini

$$T^* \leq \frac{K_1(1-\sigma)}{K\varepsilon\sigma G^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)},$$

l'estimation (3.29) est valide sur $[0, T]$ pour tout $T > 0$ fixé, on peut choisir T tel que $T^* < T$. En outre, on obtient de (3.23) que

$$\lim_{t \to T^{*-}} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u\|_p^p + H(t) + \|u_t\|_2^2 = +\infty,$$

ce qui est en contradiction avec (3.6). Ainsi, la solution du problème (1.1) s'explose en temps fini. □

Deuxième partie

Problème d'ondes viscoélastiques avec des conditions aux limites acoustiques pour un opérateur fortement elliptique à coefficients variables.

Introduction

Dans cette partie, nous allons considérer un problème d'ondes viscoélastiques avec des coefficients variables et un terme source non linéaire de type polynomial et avec des conditions aux limites acoustiques. Ce problème n'a été jamais considéré auparavant, les outils mathématiques de la géométrie Riemannienne ne seront pas prisent en compte pour montrer l'existence locale, globale et l'unicité de la solution.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n,\ n \geq 1$ de frontière régulière Γ. Supposons que Γ est constituée de deux parties disjointes, $\Gamma_0,\ \Gamma_1$, d'intérieures non vides et $mes\Gamma_1 > 0$. Soit $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ la normale unitaire sortante de Γ. L'objet de cette partie est d'étudier le problème suivant :

$$u_{tt} + Lu - \int_0^t g\,(t-s)\,Lu\,(s)\,ds = |u|^{p-2}\,u,\ \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \tag{3.30}$$

où $p > 2$ et $Lu = -div\,(B\nabla u) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$ avec les conditions aux limites sur Γ_0 et Γ_1

$$u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty)\,, \tag{3.31}$$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial \nu_L} - \displaystyle\int_0^t g\,(t-s)\,\frac{\partial u}{\partial \nu_L}\,(s)\,ds = h\,(x)\,z_t, \\ u_t + f\,(x)\,z_t + m\,(x)\,z = 0, \end{array}\right\} \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty)\,, \tag{3.32}$$

où $\frac{\partial u}{\partial \nu_L} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i$. Les fonctions f, m, h sont essentiellement bornées, et les conditions initiales suivantes

$$\left\{\begin{array}{ll} u\,(x,0) = u_0\,(x)\,,\ u_t\,(x,0) = u_1\,(x)\,, & \text{dans } \Omega, \\ z\,(x,0) = z_0\,(x)\,, & \text{sur } \Gamma_1, \end{array}\right. \tag{3.33}$$

où les fonctions $u_0, u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ et $z_0 : \Gamma_1 \to \mathbb{R}$ sont des données. Le système (3.30)-(3.33) représente l'équation d'ondes viscoélastiques à coefficients variables avec des conditions aux limites acoustiques qui sont un couplage des équations hyperboliques/paraboliques, où le couplage est donné sur la partie Γ_1 de la frontière qui est habituellement appelée l'interface, tandis que le complément Γ_0 de Γ_1 dans Γ est appelé le mur dur. La partie Γ_1 présente certaine porosité, qui est, voir (18), donnée dans (3.32).

Des applications physiques du système ci-dessus sont liées aux problème du contrôle du bruit et de la suppression dans les applications pratiques. Le bruit du son propage à travers un certain milieu acoustique, par exemple, dans l'air, dans une salle qui est caractérisée par un domaine borné Ω et dont les murs, le plafond et le plancher sont décrits par des conditions aux limites. C'est la description de Jieqiong Wu dans (49). Pour plus des explications physiques des équations d'ondes avec des conditions aux limites acoustiques lorsque $g = 0$, nous renvoyons le lecteur à (2; 6; 13; 27; 39; 41; 45).

Cette deuxième partie se décompose en trois chapitres. Dans le premier en se basant sur les techniques de Georgiev et Todorova dans (20), basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, le théorème du point fixe, et les techniques considérées par Frota et Lakrin dans (18), nous montrons que le problème considéré possède une seule solution locale.

Dans le deuxième chapitre, nous montrons d'abord que la solution locale est globalement existe en temps dans un ensemble stable des données initiales et qu'elle est uniformément bornée. Les résultats obtenus dans la dernière section de ce chapitre concernant la décroissance exponentielle ont été publiés dans Nonlinear Analysis : TMA 97 (2014) 191–209. Sous le titre "*Existence and decay of solutions for a viscoelastic wave equation with acoustic boundary conditions*". Dans ce chapitre, nous allons étudier en plus le cas où la décroissance de noyau g est polynomiale, ce qui généralise aussi le travail de J. Y. Park et S. H. Park dans (41).

Dans le dernier chapitre de cette partie, nous donnons une condition suffisante d'explosion de la solution pour une énergie initial assez grande. L'outil principal utilisé repose sur la méthode de Georgiev et Todorova.

Il est important de signaler que les résultats trouvés dans les chapitres 4 et 5 sont obtenus sans aucune relation entre la matrice B et la fonction noyau g.

Chapitre 4

Existence locale de la solution

Dans ce chapitre, sous certaines conditions sur les données initiales et en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, méthode de compacité et le théorème du point fixe, nous montrons l'existence locale et l'unicité d'une solution du problème considéré.

4.1 Notations et position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n,\ n \geq 1$ de frontière régulière Γ. Supposons que Γ est constituée de deux parties disjointes, $\Gamma_0,\ \Gamma_1$, d'intérieures non vides et $mes\Gamma_1 > 0$. Soit $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ la normale unitaire sortante à Γ. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions u et z par rapport à x (et parfois par rapport à t).

Le problème considéré dans ce travail consiste à chercher le couple (u, z) tel que $u : \Omega \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R},\ z : \Gamma_1 \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\begin{cases} u_{tt} + Lu - \displaystyle\int_0^t g\,(t-s)\, Lu\,(s)\, ds = |u|^{p-2}\, u, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty)\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_L} - \displaystyle\int_0^t g\,(t-s)\, \dfrac{\partial u}{\partial \nu_L}\,(s)\, ds = h\,(x)\, z_t, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty)\,, \\ u_t + f\,(x)\, z_t + m\,(x)\, z = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty)\,, \\ u\,(x, 0) = u_0\,(x)\,, \qquad u_t\,(x, 0) = u_1\,(x)\,, & \text{dans } \Omega, \\ z\,(x, 0) = z_0\,(x)\,, & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $p > 2$, les fonctions $f,\ m,\ h : \bar{\Gamma}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont essentiellement bornées et

$u_0,\ u_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ z_0 : \Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données.
Dans l'étude du problème (4.1), nous aurons besoin de préciser quelques notations relatives au problème considéré et de supposer quelques hypothèses utiles pour obtenir les résultats visés.

• **Hypothèses.**

(G_1) L'opérateur fortement elliptique L est défini par

$$Lu = -div\,(B\nabla u) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

et $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_L} = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i$. La matrice $B = (b_{ij}(x))$, où $b_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, sont symétriques et il existe une constante $b_0 > 0$ telle que pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\zeta_j\zeta_i \geq b_0|\zeta|^2. \tag{4.2}$$

(G_2) La fonction noyau $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est de classe C^1, bornée et vérifie

$$g(0) > 0, \qquad 1 - \int_0^\infty g\,(s)\,ds = l > 0 \tag{4.3}$$

en plus il existe une constante positive ξ_1 telle que pour tout $t \geq 0$, on a

$$-\xi_1 g(t) \leq g'\,(t) \leq 0. \tag{4.4}$$

(G_3) Il existe trois constantes positives f_0, m_0 et h_0 telles que $f \geq f_0$, $m \geq m_0$ et $h \geq h_0$.

• **Notations.**

Les produits scalaires et les normes associées dans $L^2(\Omega)$ et sur $L^2(\Gamma_1)$, seront notés, respectivement par

$$(u,v)(t) = \int_\Omega u(x,t)v(x,t)dx, \qquad \|u(t)\|_2 = \left(\int_\Omega (u(x,t))^2dx\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$(\phi,\psi)(t) = \int_{\Gamma_1} \phi(x,t)\psi(x,t)d\Gamma, \quad \|\phi(t)\|_{2,\Gamma_1} = \left(\int_{\Gamma_1} (\phi(x,t))^2d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aussi, nous dénotons par $\|.\|_q$ la norme dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q \leq \infty$.
Soit $H(L,\Omega) = \{u(t) \in H^1(\Omega)/\ Lu(t) \in L^2(\Omega)\}$ l'espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{H(L,\Omega)} = \left(\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \|Lu(t)\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

où $H^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev réel du premier ordre. On dénote par $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ et $\gamma_1 : H(L,\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ l'application de trace d'ordre 0 et l'application de trace de Neumann sur $H(L,\Omega)$, respectivement, nous avons

$$\gamma_0(u) = u|_\Gamma \quad \text{et} \quad \gamma_1(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_L}\right)_\Gamma \quad \text{pour tout} \quad u \in D(\overline{\Omega}),$$

et la formule de Green généralisée

$$\int_\Omega (-div(B\nabla u(t))(v(t))dx = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega b_{ij}\frac{\partial u(t)}{\partial x_j}\frac{\partial v(t)}{\partial x_i}dxdx - \int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial \nu_L} v d\Gamma$$

est vérifiée pour tout $u(t) \in H(L,\Omega)$ et $v(t) \in H^1(\Omega)$.
On dénote par V la fermeture dans $H^1(\Omega)$ de $\left\{u(t) \in C^1(\bar{\Omega}); u = 0 \text{ on } \Gamma_0\right\}$. Puisque Γ_0 est d'intérieure non vide et Ω est un domaine régulier, alors

$$V = \left\{u(t) \in H^1(\Omega);\ \gamma_0(u) = 0 \text{ sur } \Gamma_0\right\}$$

est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$. On définit dans V le produit scalaire et la norme associée par

$$((u,v))(t) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u(t)}{\partial x_i}\frac{\partial v(t)}{\partial x_i}dx,$$
$$\|u(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}\right|^2 dx,$$

qui sont équivalentes au produit scalaire usuel et la norme usuelle dans $H^1(\Omega)$.
L'inégalité de Poincaré est applicable sur V, i.e. il existe une constante λ telle que :

$$\begin{aligned} &\forall u(t) \in V, \quad \|u(t)\|_p \leq \lambda \|\nabla u(t)\|_2, \quad 2 \leq p \leq \bar{p}, \\ &\text{où } \bar{p} = \begin{cases} \dfrac{2n-2}{n-2}, & \text{si } n \geq 3, \\ +\infty, & \text{si } n = 1,2. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Puisque $H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ et l'application de trace $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ est continue, alors il existe une constante $\bar{\lambda} > 0$ telle que

$$\|\gamma_0(u)\|_{2,\Gamma_1} \leq \bar{\lambda}\|\nabla u\|_2, \quad \text{pour tout} \quad u \in V.$$

En outre, nous introduisons la notation suivante

$$(g \diamond u)(t) = \int_0^t g(t-s) b\left(u(t) - u(s), u(t) - u(s)\right) ds, \tag{4.6}$$

où

$$b(u(t), v(t)) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega b_{ij}(x)\frac{\partial u(t)}{\partial x_j}\frac{\partial v(t)}{\partial x_i}dx = \int_\Omega B\nabla u(t)\nabla v(t)dx.$$

En utilisant l'hypothèse (G_1), on vérifie que la forme bilinéaire $b(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est symétrique et continue.
D'autre part, de (4.2) pour $\xi = \nabla u$, on trouve

$$b(u(t), u(t)) \geq b_0 \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx = b_0 \left\| \nabla u(t) \right\|_2^2 , \tag{4.7}$$

ce qui implique que $b(.,.)$ est coercive.
On a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(g \diamond u \right)(t) = \; & \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-s) b(u(t) - u(s), u(t) - u(s)) ds \\
& + \left(\frac{d}{dt} b(u(t), u(t)) \right) \int_0^t g(s) ds - 2 \int_\Omega \int_0^t g(t-s) B \nabla u(s) \nabla u'(t) ds dx \\
& = \frac{d}{dt} \left(g \diamond u \right)(t) - 2 \int_\Omega \int_0^t g(t-s) B \nabla u(s) \nabla u'(t) ds dx \\
& + \frac{d}{dt} \left[b(u(t), u(t)) \int_0^t g(s) ds \right] - g(t) b(u(t), u(t)).
\end{aligned}$$

Cette dernière identité implique

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \int_0^t g(t-s) B \nabla u(s) \nabla u'(t) ds dx = \\
& -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(g \diamond u \right)(t) + \frac{1}{2} \left(g' \diamond u \right)(t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[b(u(t), u(t)) \int_0^t g(s) ds \right] - \frac{1}{2} g(t) b(u(t), u(t)).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.2 Existence locale et unicité d'une solution régulière.

Notre but dans cette section est de montrer l'existence locale et l'unicité de la solution du problème (4.1). Les techniques utilisées dans la démonstration sont basées sur les approximations de Faedo-Galerkin, la méthode de compacité et le théorème du point fixe.
Pour démontrer l'existence locale de la solution du problème considéré, il très outil de commencer par étudier le problème suivant, en fixant le deuxième membre de la

première équation, suivant :

$$\begin{cases} v'' + Lv - \int_0^t g(t-s)\, Lv(s)\, ds = F, & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ v = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu_L} - \int_0^t g(t-s)\, \dfrac{\partial v}{\partial \nu_L}(s)\, ds = h(x)\, z', & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T), \\ h(x)v' + h(x)f(x)\, z' + h(x)m(x)\, z = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T), \\ v(x,0) = u_0(x), \quad v'(x,0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \\ z(x,0) = z_0(x), & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases} \tag{4.9}$$

où $T > 0$ et F est une fonction donnée sur $\Omega \times [0,T]$.

Théorème 4.2.1. *Supposons que (4.3), (4.4) sont vérifiées. Soit $F \in H^1(0,T; L^2(\Omega))$, $u_0 \in V \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in V$ et $z_0 \in L^2(\Gamma_1)$, alors pour tout $T > 0$ il existe une unique paire de fonctions (v,z) solution du problème (4.9) sur $[0,T]$ telles que*

$$v,\ v_t \in L^\infty(0,T;V),\ v_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\ v(t) \in H(L,\Omega) \text{ p.p. dans } [0,T] \tag{4.10}$$

$$h^{1/2} z \in L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)),\ h^{1/2} z_t \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{4.11}$$

Proof. Nous commençons par construire les solutions approchées (v,z) comme suit : Soit $\{w_j\}_{1\le j\le k}$ et $\{\xi_j\}_{1\le j\le k}$ des bases orthonormés de V et $L^2(\Gamma_1)$, respectivement. Pour chaque $\epsilon \in (0,1)$ et $k \in \mathbb{N}$, nous considérons

$$v_{k\epsilon}(x,t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{jk}(t) w_j(x), \qquad x \in \Omega,\ t \in (0,T); \tag{4.12}$$

$$z_{k\epsilon}(x,t) = \sum_{j=1}^{k} \beta_{jk}(t) \xi_j(x), \qquad x \in \Gamma_1,\ t \in (0,T); \tag{4.13}$$

solutions du problème variationnel approché perturbé, associé au problème (4.9), suivant :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega v''_{k\epsilon}(t) w_j dx + b(v_{k\epsilon}(t), w_j) - \int_{\Gamma_1} h z'_{k\epsilon}(t) \gamma_0(w_j) d\Gamma = \\ &= \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\, B\nabla v_{k\epsilon}(s) \nabla w_j ds dx + \int_\Omega F w_j dx, \\ &\epsilon \int_{\Gamma_1} z''_{k\epsilon}(t) \xi_j d\Gamma + \int_{\Gamma_1} h \left[\gamma_0(v'_{k\epsilon}) + f z'_{k\epsilon}(t) + m z_{k\epsilon}(t)\right] \xi_j d\Gamma = 0, \\ &v_{k\epsilon}(x,0) = v_{0k} = \textstyle\sum_{j=1}^k (u_0, w_j) w_j,\ \ v'_{k\epsilon}(x,0) = v_{1k} = \sum_{j=1}^k (u_1, w_j) w_j, \\ &z_{k\epsilon}(0) = z_{0k} = \textstyle\sum_{j=1}^k (z_0, \xi_j)\, \xi_j,\ \ z'_{k\epsilon}(0) = z_{1k} = -\left(\frac{v_{1k} + m z_{0k}}{f}\right) \end{aligned} \tag{4.14}$$

pour $j = 1, \cdots, k$. Comme (4.14) est un système d'équations différentielles ordinaires, alors il existe $(v_{k\epsilon}, z_{k\epsilon})$ solution du problème (4.14). Une solution (v, z) du problème (4.9) sera obtenue comme limite de $(v_{k\epsilon}, z_{k\epsilon})$ lorsque $k \to \infty$ et $\epsilon \to 0$. Par conséquent, des estimations uniformes par rapport à k et ϵ sont nécessaires. En effet, de la première et la deuxième équations dans (4.14), nous avons les équations approchées suivantes

$$\begin{aligned} & \int_\Omega v''_{k\epsilon}(t) w dx + b(v_{k\epsilon}(t), w) - \int_{\Gamma_1} h z'_{k\epsilon}(t) \gamma_0(w) d\Gamma \\ = \ & \int_\Omega \int_0^t g(t-s) B \nabla v_{k\epsilon}(s) \nabla w ds + \int_\Omega F(t) w dx \end{aligned} \tag{4.15}$$

et

$$\epsilon \int_{\Gamma_1} z''_{k\epsilon}(t) \xi d\Gamma + \int_{\Gamma_1} h \left[v'_{k\epsilon} + f z'_{k\epsilon}(t) + m z_{k\epsilon}(t) \right] \xi d\Gamma = 0, \tag{4.16}$$

qui sont vérifiées pour tout $w \in \langle \{w_1, \cdots, w_k\} \rangle$ et $\xi \in \langle \{\xi_1, \cdots, \xi_k\} \rangle$.

Les estimations à priori qui suivent montreront que pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $t_k = T$.

4.2.1 Estimate I.

Posons $w = 2v'_{k\epsilon}(t)$ dans (4.15), $\xi = 2z'_{k\epsilon}(t)$ dans (4.16) et substituons la deuxième équation dans la première, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[left \|v'_{k\epsilon}(t)\|_2^2 + b(v_{k\epsilon}(t), v_{k\epsilon}(t)) + \epsilon \left\|z'_{k\epsilon}(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \int_{\Gamma_1} hm \left|z_{k\epsilon}(t)\right|^2 d\Gamma + \right. \\ & + \int_{\Gamma_1} hf \left|z'_{k\epsilon}(t)\right|^2 d\Gamma = \int_\Omega F(t) v'_{k\epsilon}(t) dx + \int_\Omega \int_0^t g(t-s) B \nabla v_{k\epsilon}(s) \nabla v'_{k\epsilon}(t) ds dx \end{aligned} \tag{4.17}$$

Utilisons (4.8) et intégrons le résultat obtenu sur $(0, t)$, on trouve

$$\begin{aligned} & \|v'_{k\epsilon}(t)\|_2^2 + b_0 \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \|\nabla v_{k\epsilon}(t)\|_2^2 + \epsilon \left\|z'_{k\epsilon}(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \\ & \quad + \int_{\Gamma_1} hm \left|z_{k\epsilon}(t)\right|^2 d\Gamma + (g \diamond v_{k\epsilon})(t) + 2\int_0^t \int_{\Gamma_1} hf \left|z'_{k\epsilon}(\tau)\right|^2 d\Gamma d\tau \\ & \leq \|v_{1k}\|_2^2 + b_0 \|\nabla v_{0k}\|_2^2 + \epsilon \|z_{1k}\|_{2,\Gamma_1}^2 + \int_{\Gamma_1} hm z_{0k}^2(0) d\Gamma \\ & \quad + 2\int_0^t \int_\Omega F(\tau) v'_{k\epsilon}(\tau) dx d\tau + \int_0^t (g' \diamond v_{k\epsilon})(\tau) d\tau - \int_0^t g(\tau) b(v_{k\epsilon}(\tau), v_{k\epsilon}(\tau)) d\tau \end{aligned} \tag{4.18}$$

L'inégalité de Young donne

$$2\int_0^t \int_\Omega F(\tau) v'_{k\epsilon}(\tau) dx d\tau \leq \int_0^t \int_\Omega \left(|F(\tau)|^2 + |v'_{k\epsilon}(\tau)|^2\right) dx d\tau. \tag{4.19}$$

L'hypothèse (G_2) sur la fonction g nous assure que

$$(g \diamond v_{k\epsilon})(t) - \int_0^t (g' \diamond v_{k\epsilon})(\tau)d\tau + \int_0^t g(\tau)b(v_{k\epsilon}(\tau), v_{k\epsilon}(\tau))d\tau \geq 0. \tag{4.20}$$

Exploitons (4.20), (4.19), (4.14) et utilisons le fait que
$0 < \min_{x\in\Gamma_1} f(x),\ 0 < \min_{x\in\Gamma_1} m(x)$, l'estimation (4.18) donne

$$\begin{aligned}
\Phi(t) \quad &:= \|v'_{k\epsilon}(t)\|_2^2 + b_0 l \|\nabla v_{k\epsilon}(t)\|_2^2 + \epsilon \|z'_{k\epsilon}(t)\|_{2,\Gamma_1}^2 + \\
&\quad + \left\|h^{1/2} z_{k\epsilon}(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + 2\int_0^t \left\|h^{1/2} z'_{k\epsilon}(\tau)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 d\tau \\
&\leq C_1 + \int_0^t \|F(\tau)\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|v'_{k\epsilon}(\tau)\|_2^2 d\tau \\
&\leq C_1 + \int_0^t \|F(\tau)\|_2^2 d\tau + \int_0^t \Phi(\tau)\, d\tau,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

où

$$C_1 = \|v_{1k}\|_2^2 + b_0 \|\nabla v_{0k}\|_2^2 + \epsilon \|z_{1k}\|_{2,\Gamma_1}^2 + \max_{x\in\Gamma_1} |m(x)h(x)| \|z_{0k}\|_{2,\Gamma_1}^2 .$$

L'hypothèse $F \in H^1(0,T; L^2(\Omega))$, nous donne $\int_0^t \|F(\tau)\|_2^2 d\tau \leq C$. Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Gronwall, on en déduit qu'il existe une constante
$K = K(T) > 0$, indépendante de k, ϵ et de $t \in [0,T]$, telle que

$$\|v'_{k\epsilon}(t)\|_2^2 + \|\nabla v_{k\epsilon}(t)\|_2^2 + \epsilon \|z'_{k\epsilon}(t)\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\|h^{1/2} z_{k\epsilon}(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \int_0^t \left\|h^{1/2} z'_{k\epsilon}(\tau)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 d\tau \leq K. \tag{4.22}$$

4.2.2 Estimate II.

Nous commençons par estimer $\|v''_{k\epsilon}(0)\|_2^2$ et $\|z''_{k\epsilon}(0)\|_{2,\Gamma_1}^2$. Prenons $w = v''_{k\epsilon}(t)$ dans (4.15) et posons $t = 0$, on trouve

$$\|v''_{k\epsilon}(0)\|_2^2 = \left(F(x,0) + Lv_{0k} + hz_{1k}, v''_{k\epsilon}(0)\right). \tag{4.23}$$

Comme l'opérateur L est continu en on déduit de (4.14) et $u_0 \in V \cap H^2(\Omega))$ que

$$Lv_{0k} \leq \text{constance}. \tag{4.24}$$

Maintenant, en prenant $\xi = z''_{k\epsilon}(t)$ dans (4.16) et en posant $t = 0$, nous obtenons

$$\epsilon \|z''_{k\epsilon}(0)\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left(h\left(v_{1k} + fz_{1k} + mz_{0k}\right), z''_{k\epsilon}(0)\right) = 0. \tag{4.25}$$

Les estimations (4.23) , (4.24) et (4.25) ainsi que les hypothèses sur F, (4.14) et le fait que $(u_0, u_1) \in (V \cap H^2(\Omega)) \times V,\ z_0 \in L^2(\Gamma_1)$ impliquent l'existence d'une constance positive C_2 telle que

$$\|v''_{k\epsilon}(0)\|_2^2 \leq C_2 \ , \quad \|z''_{k\epsilon}(0)\|_{2,\Gamma_1}^2 = 0 \tag{4.26}$$

Dérivons la première et la deuxième équations dans (4.14), multiplions le résultat obtenu par $2\alpha''_{jk}$ et $2\beta''_{jk}$, respectivement et l'on somme sur j, il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\|v''_{k\epsilon}(t)\|_2^2 + b(v'_{k\epsilon}(t), v'_{k\epsilon}(t)) + \epsilon \left\|z''_{k\epsilon}(t)\right\|^2_{2,\Gamma_1} + \int_{\Gamma_1} m|h^{1/2}z'_{k\epsilon}(t)|^2 d\Gamma\right] + \\
&+2\int_{\Gamma_1} f|h^{1/2}z''_{k\epsilon}(t)|^2 d\Gamma = 2(F'(x,t), v''_{k\epsilon}(t)) + \\
&\quad +2\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega b_{ij}(x)\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s))\frac{\partial v_{k\epsilon}(s)}{\partial x_j}ds\right)\frac{\partial v''_{k\epsilon}(t)}{\partial x_i}dx.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Puisque

$$\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)\frac{\partial v_{k\epsilon}(t)}{\partial x_j}ds = g(t)\frac{\partial v_{k\epsilon}(0)}{\partial x_j} + \int_0^t g(t-s)\frac{\partial v'_{k\epsilon}(s)}{\partial x_j}ds,$$

alors, le dernier terme du seconde membre dans l'équation (4.27) donne

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega b_{ij}(x)\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s))\frac{\partial v_{k\epsilon}(s)}{\partial x_j}ds\right)\frac{\partial v''_{k\epsilon}(t)}{\partial x_i}dx = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega g(t)b_{ij}(x)\frac{\partial v_{k\epsilon}(0)}{\partial x_j}\frac{\partial v''_{k\epsilon}(t)}{\partial x_i}dx + \int_0^t g(t-s)b(v'_{k\epsilon}(s), v''_{k\epsilon}(t))ds \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega b_{ij}(x)\left[\frac{d}{dt}\left(g(t)\frac{\partial v'_{k\epsilon}(t)}{\partial x_i}\right) - g'(t)\frac{\partial v'_{k\epsilon}(t)}{\partial x_i}\right]\frac{\partial v_{k\epsilon}(0)}{\partial x_j}dx + \\
&\quad + \int_0^t g(t-s)b(v'_{k\epsilon}(s), v''_{k\epsilon}(t))ds \\
&= \int_\Omega B\nabla v_{0k}\left(\frac{d}{dt}\left(g(t)\nabla v'_{k\epsilon}(t)\right) - g'(t)\nabla v'_{k\epsilon}(t)\right)dx + \\
&\quad + \int_\Omega\int_0^t g(t-s)B\nabla v'_{k\epsilon}(s)\nabla v''_{k\epsilon}(t)dsdx.
\end{aligned}$$

Remplaçons l'estimation ci-dessus dans (4.27) et utilisons (4.8), intégrons le résultat obtenu sur $(0,t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\|v''_{k\epsilon}(t)\|_2^2 + b_0\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla v'_{k\epsilon}(t)\|_2^2 + \left(g\diamond v'_{k\epsilon}\right)(t) + \epsilon\left\|z''_{k\epsilon}(t)\right\|^2_{2,\Gamma_1} + \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} m|h^{1/2}z'_{k\epsilon}(t)|^2 d\Gamma + 2\int_0^t\int_{\Gamma_1} f|h^{1/2}z''_{k\epsilon}(\tau)|^2 d\Gamma d\tau \\
&\le C_3 + \int_0^t \left(g'\diamond v'_{k\epsilon}\right)(\tau)d\tau + 2\int_0^t\int_\Omega F'(x,\tau)v''_{k\epsilon}(\tau)dxd\tau + 2\int_\Omega g(t)B\nabla v_{0k}\nabla v'_{k\epsilon}(t)dx \\
&\quad - \int_0^t g(\tau)b(v'_{k\epsilon}(\tau), v'_{k\epsilon}(\tau))d\tau - 2\int_0^t\int_\Omega g'(\tau)B\nabla v_{0k}\nabla v'_{k\epsilon}(\tau)dxd\tau,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

où

$$C_3 = \|v''_{k\epsilon}(0)\|_2^2 + b_0\left\|\nabla v_{1k}\right\|_2^2 + \max_{x\in\Gamma_1}|m(x)h(x)|\left\|z_{1k}\right\|^2_{2,\Gamma_1}.$$

En utilisant (4.26) et (4.14), on en déduit que C_3 est une constante positive. Grâce à l'inégalité de Young, on conclut

$$2\int_0^t\int_\Omega F'(\tau)v''_{k\epsilon}(\tau)dxd\tau \leq \int_0^t\int_\Omega \left(\left|F'(\tau)\right|^2+\left|v''_{k\epsilon}(\tau)\right|^2\right)dxd\tau.$$

L'hypothèse (G_2) et les inégalités de Young et Hölder, nous permettent de majorer le quatrième et le dernier termes du seconde membre de l'inégalité (4.28) comme suit

$$\begin{aligned}
&2\int_\Omega g(t)B\nabla v_{0k}\nabla v'_{k\epsilon}(t)dx = \sum_{i,j=1}^n g(t)\int_\Omega b_{ij}(x)\frac{\partial v_{0k}}{\partial x_j}\frac{\partial v'_{k\epsilon}(t)}{\partial x_i}dx\\
&\leq \|g\|_\infty \sum_{i,j=1}^n\left[\frac{1}{2\mu}\int_\Omega\left|\frac{\partial v_{0k}}{\partial x_j}\right|^2dx + +2\mu\int_\Omega\left|b_{ij}(x)\frac{\partial v'_{k\epsilon}(t)}{\partial x_i}\right|^2dx\right]\\
&\leq \|g\|_\infty\frac{n}{2\mu}\|\nabla v_{0k}\|_2^2+2\mu\|g\|_\infty \max\nolimits_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^n\|b_{ij}\|_\infty^2\right)\sum_{i=1}^N\int_\Omega\left|\frac{\partial v'_{k\epsilon}(t)}{\partial x_i}\right|^2dx\\
&\leq \|g\|_\infty\frac{n}{2\mu}\|\nabla v_{0k}\|_2^2+2\mu\|g\|_\infty b_1\|\nabla v'_{k\epsilon}(t)\|_2^2,
\end{aligned}$$

pour $\mu>0$, l'hypothèse $b_{ij}\in C^1(\overline{\Omega})$ nous affirme que $b_1=\max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^n\|b_{ij}\|_\infty^2\right)$ est une constante positive et

$$\begin{aligned}
&-2\int_0^t\int_\Omega g'(\tau)B\nabla v_{0k}\nabla v'_{k\epsilon}(\tau)dxd\tau \leq\\
&\leq \sum_{i,j=1}^n\left[\int_\Omega\left|\frac{\partial v_{0k}}{\partial x_j}\right|^2dx+\int_\Omega\left|\int_0^t\xi_1 g(\tau)b_{ij}(x)\frac{\partial v'_{k\epsilon}(\tau)}{\partial x_i}d\tau\right|^2dx\right]\\
&\leq n\|\nabla v_{0k}\|_2^2+b_1\xi_1^2\left(\int_0^t g(\tau)d\tau\right)^2\int_0^t\|\nabla v'_{k\epsilon}(\tau)\|_2^2d\tau\\
&\leq n\|\nabla v_{0k}\|_2^2+b_1\xi_1^2(1-l)^2\int_0^t\|\nabla v'_{k\epsilon}(\tau)\|_2^2d\tau.
\end{aligned}$$

Remplaçant ces trois dernières inégalités dans (4.28), en utilisant le fait que $0<\min_{x\in\Gamma_1}f(x),\ 0<\min_{x\in\Gamma_1}m(x)$ et en observant que

$$\left(g\diamond v'_{k\epsilon}\right)(t)-\int_0^t\left(g'\diamond v'_{k\epsilon}\right)(\tau)d\tau+\int_0^t g(\tau)b(v'_{k\epsilon}(\tau),v'_{k\epsilon}(\tau))d\tau\geq 0,$$

on conclut

$$\begin{aligned}
&\|v''_{k\epsilon}(t)\|_2^2+\left[-2\mu b_1\|g\|_\infty+b_0\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\right]\|\nabla v'_{k\epsilon}(t)\|_2^2+\\
&\quad+\epsilon\|z''_{k\epsilon}(t)\|_{2,\Gamma_1}^2+\left\|h^{1/2}z'_{k\epsilon}(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2+2\int_0^t\left\|h^{1/2}z''_{k\epsilon}(\tau)\right\|_{2,\Gamma_1}^2\\
&\leq C_3+n\left(1+\frac{b_1\|g\|_\infty}{2\mu}\right)\|\nabla v_{0k}\|_2^2+\quad+\int_0^t\int_\Omega\left|F'(\tau)\right|^2dxd\tau+\\
&+\int_0^t\|v''_{k\epsilon}(\tau)\|_2^2d\tau+b_1\xi_1^2(1-l)^2\int_0^t\|\nabla v'_{k\epsilon}(\tau)\|_2^2.
\end{aligned}\tag{4.29}$$

En choisissant $\mu < (b_0 l)/(2b_1 \|g\|_\infty)$ et en utilisant l'hypothèse $F \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$, on peut appliquer l'inégalité de Gronwall pour obtenir une constante $K_1 = K_1(T) > 0$, indépendante de k, ϵ et $t \in [0,T]$, de sorte que

$$\begin{aligned} &\|v''_{k\epsilon}(t)\|_2^2 + \|\nabla v'_{k\epsilon}(t)\|_2^2 + \epsilon \|z''_{k\epsilon}(t)\|_{2,\Gamma_1}^2 + \\ &+ \left\|h^{1/2} z'_{k\epsilon}(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \int_0^t \left\|h^{1/2} z''_{k\epsilon}(\tau)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 d\tau \leq K_1. \end{aligned} \tag{4.30}$$

4.2.3 Passage à la limite.

De (4.22) et (4.30), on a
- $(v_{k\epsilon})$ et $(v'_{k\epsilon})$ sont bornées dans $L^\infty(0,T;V)$;
- $(v''_{k\epsilon})$ est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$;
- $(h^{1/2}z_{k\epsilon})$ et $(h^{1/2}z'_{k\epsilon})$ sont bornées dans $L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1))$;
- $(h^{1/2}z'_{k\epsilon})$ and $(h^{1/2}z''_{k\epsilon})$ sont bornées dans $L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$;
- $lim_{k\to\infty\epsilon\to 0}\epsilon \|z''_{k\epsilon}(t)\|_{2,\Gamma_1} = 0$, p.p. dans $[0,T]$.

Par conséquent, on en déduit qu'on peut extraire des sous-suites convergentes de $(v_{k\epsilon})$ et $(z_{k\epsilon})$, que nous noterons encore par $(v_{k\epsilon})$ and $(z_{k\epsilon})$, respectivement et telles que, lorsque $k \longrightarrow +\infty$, on a

$$v_{k\epsilon} \to v_\epsilon \quad \text{faible étoile dans } L^\infty(0,T;V), \tag{4.31}$$
$$v'_{k\epsilon} \to v'_\epsilon \quad \text{faible étoile dans } L^\infty(0,T;V), \tag{4.32}$$
$$v'_{k\epsilon} \to v'_\epsilon \quad \text{faible étoile dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{4.33}$$
$$v''_{k\epsilon} \to v''_\epsilon \quad \text{faible étoile dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{4.34}$$
$$h^{1/2}z_{k\epsilon} \to h^{1/2}z_\epsilon \quad \text{faible étoile dans } L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)), \tag{4.35}$$
$$h^{1/2}z'_{k\epsilon} \to h^{1/2}z'_\epsilon \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)), \tag{4.36}$$
$$h^{1/2}z''_{k\epsilon} \to h^{1/2}z''_\epsilon \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{4.37}$$

D'après le théorème de Aubin-Lions (see (32)), on déduit

$$\begin{aligned} v_{k\epsilon} &\to v_\epsilon \quad \text{fortement dans } L^2(0,T;V), \\ v'_{k\epsilon} &\to v'_\epsilon \quad \text{fortement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Les estimations (4.22) et (4.30) sont indépendantes de ϵ. Par conséquent, par le même argument précédent utilisé pour obtenir v_ϵ et z_ϵ de $v_{\epsilon k}$ et $z_{\epsilon k}$, nous pouvons passer à la limite quand $\epsilon \to 0$ dans v_ϵ et z_ϵ, on obtient v et z tels que

$$\begin{aligned} v_\epsilon \to v & \quad \text{faible étoile dans } L^\infty(0,T;V), \\ v'_\epsilon \to v' & \quad \text{faible étoile dans } L^\infty(0,T;V), \\ v'_\epsilon \to v' & \quad \text{faible étoile dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ v''_\epsilon \to v'' & \quad \text{faible étoile dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ h^{1/2}z_\epsilon \to h^{1/2}z & \quad \text{faible étoile dans } L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)), \\ h^{1/2}z'_\epsilon \to h^{1/2}z' & \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)), \\ h^{1/2}z''_\epsilon \to h^{1/2}z'' & \quad \text{faiblemente dans } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \end{aligned}$$

Ceci joint au fait que $lim_{k\to\infty\epsilon\to 0}\epsilon \, \|z''_{k\epsilon}(t)\|_{2,\Gamma_1} = 0$, p.p dans $[0,T]$, nous permettent de prouver l'existence des solutions de (4.9) vérifiant (4.10) er (4.11).

4.2.4 Unicité.

Soient (v_1, z_1), (v_2, z_2) deux paires de solutions du problème (4.9). On pose $\vartheta = v_1 - v_2$ et $z = z_1 - z_2$, alors (ϑ, z) satisfait le système suivant

$$\begin{cases} \vartheta'' + L\vartheta - \displaystyle\int_0^t g\left(t-s\right) L\vartheta\left(s\right) ds = 0, & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ \vartheta = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0,T)\,, \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \nu_L} - \displaystyle\int_0^t g\left(t-s\right) \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \nu_L}\left(s\right) ds = h(x)z', & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T)\,, \\ \vartheta' + f\left(x\right) z' + m\left(x\right) z = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T)\,, \\ \vartheta\left(x,0\right) = \vartheta'\left(x,0\right) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ z\left(x,0\right) = z'\left(x,0\right) = 0, & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \tag{4.38}$$

De (4.15) et (4.16), on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega \vartheta''(t) w dx + b(\vartheta(t), w) + \int_{\Gamma_1} h z'(t)\gamma_0(w) d\Gamma &= \int_\Omega \int_0^t g\left(t-s\right) B\nabla\vartheta\left(s\right)\nabla w ds dx, \\ \int_{\Gamma_1} h\left[\gamma_0(\vartheta') + f z'(t) + m z(t)\right]\xi d\Gamma &= 0, \end{aligned}$$

pour tout $w \in V$ et $\xi \in L^2(\Gamma_1)$. En remplaçant $w = 2\vartheta'(t)$ et $\xi = 2z'(t)$ dans les équations précédentes, et en exploitant (4.8), on trouve

$$\frac{d}{dt}\left[\|\vartheta'(t)\|_2^2 + \left(1 - \int_0^t g\left(s\right) ds\right) b(\vartheta(t), \vartheta(t)) + \int_{\Gamma_1} m|h^{1/2}z'_{k\epsilon}(t)|^2 d\Gamma + \left(g \diamond \vartheta\right)(t)\right]$$
$$+ \int_{\Gamma_1} f|h^{1/2}z'(t)|^2 d\Gamma = -g(t)b(\vartheta(t), \vartheta(t)) + \left(g' \diamond \vartheta\right)(t).$$

Intégrant l'équation ci-dessus sur $(0,t)$ et en utilisant (4.20), on obtient

$$0 \leq \|\vartheta'(t)\|_2^2 + b_0 l \|\nabla\vartheta(t)\|_2^2 + \int_{\Gamma_1} m|h^{1/2}z'_{k\epsilon}(t)|^2 d\Gamma + \int_0^t \int_{\Gamma_1} f|h^{1/2}z'(\tau)|^2 d\Gamma d\tau \leq 0.$$

Ensuite, cette dernière inégalité donne $\vartheta = z = 0$. Par conséquent, la preuve du lemme 4.2.1 est achevée.

Pour $u \in C(0,T;V) \cap C^1(0,T;L^2(\Omega))$ donné, nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} v_{tt} + Lv - \displaystyle\int_0^t g(t-s) Lv(s)\,ds = |u|^{p-2} u, & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ v = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu_L} - \displaystyle\int_0^t g(t-s) \dfrac{\partial v}{\partial \nu_L}(s)\,ds = h(x) z_t, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T), \\ v_t + f(x) z_t + m(x) z = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T), \\ v(x,0) = u_0(x), \qquad v_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \\ z(x,0) = z_0(x), & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \tag{4.39}$$

Relativement à ce problème, nous avons

Lemme 4.2.1. *Soit $2 \leq p \leq \bar{p}$ et supposons que (4.3), (4.4) sont vérifiées. Si $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ et $z_0 \in L^2(\Gamma_1)$, alors il existe $T > 0$ et une unique paire de solutions (v,z) du problème (4.39) telles que*

$$v \in C(0,T;V), \; v_t \in C(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$h^{1/2} z \in L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)), \; h^{1/2} z_t \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)).$$

4.3 Preuve du lemme 4.2.1.

Par les mêmes techniques utilisées dans le premier chapitre de la première partie, en utilisant les arguments standards de convolution, voir (12), nous approximons

$$u \in C(0,T;V) \cap C^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

muni de la norme $\|u\| = \max_{0\leq t\leq T}\left[\|u'\|_2^2 + b_0 l \|\nabla u\|_2^2\right]$, par une suite $(u_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ dans $C(0,T;C_0^\infty(\Omega))$. Ce type d'approximation a été également utilisé par Vitillaro dans (47; 48). Ensuite, nous approximons les conditions initiales $u_1 \in L^2(\Omega)$ par une suite $(u_\mu^1)_{\mu\in\mathbb{N}}$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ et $z_0 \in L^2(\Gamma_1)$ par une suite $(z_\mu^0)_{\mu\in\mathbb{N}}$ dans $C^\infty(\Gamma_1)$. Finalement, puisque l'espace $H^2(\Omega) \cap V$ est dense dans V pour la norme induite de H^1, nous approximons $u_0 \in V$ par une suite $(u_\mu^0)_{\mu \in \mathbb{N}}$ dans $H^2(\Omega) \cap V$. Nous considérons alors le problème linéaire suivant

$$\begin{cases} v_\mu'' + Lv_\mu - \int_0^t g\,(t-s)\,Lv_\mu\,(s)\,ds = |u_\mu|^{p-2}\,u_\mu, & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ v_\mu(x,t) = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0,T)\,, \\ \dfrac{\partial v_\mu}{\partial \nu_L} - \int_0^t g\,(t-s)\,\dfrac{\partial v_\mu}{\partial \nu_L}\,(s)\,ds = h\,(x)\,z_\mu', & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T)\,, \\ v_\mu' + f\,(x)\,z_\mu' + m\,(x)\,z_\mu = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T)\,, \\ v_\mu\,(x,0) = u_\mu^0\,(x)\,, \quad v_\mu'\,(x,0) = u_\mu^1\,(x)\,, & \text{dans } \Omega, \\ z_\mu\,(x,0) = z_\mu^0\,(x)\,, & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \tag{4.40}$$

Il facile de vérifier que $F(u_\mu) = |u_\mu|^{p-2}u_\mu \in H^1\,(0,T;L^2(\Omega))$. Par conséquent, le théorème 4.2.1 assure l'existence unique d'une suite de solutions (v_μ, z_μ) du (4.40) satisfaisante (4.10) et (4.11). Notre objectif maintenant est de montrer que la solution (v_μ, z_μ) converge vers la solution (v,z) du problème (4.39). En effet, il suffit de montrer que (v_μ, z_μ) est une suite de Cauchy dans l'espace

$$Y_T = \left\{ \begin{array}{ll} (v,z)/ & v \in C\,(0,T;V) \cap C^1\,(0,T;L^2(\Omega))\,, \\ & h^{1/2}z \in L^\infty\,(0,T;L^2(\Gamma_1))\,,\ h^{1/2}z' \in L^2\,(0,T;L^2(\Gamma_1)) \end{array} \right\},$$

muni de la norme

$$\|(v,z)\|_{Y_t}^2 = \max_{0 \le t \le T} \left[\|v'\|_2^2 + b_0 l\,\|\nabla v\|_2^2 + \left\|h^{1/2}z\right\|_{2,\Gamma_1}^2 \right] + \int_0^t \left\|h^{1/2}z'(s)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 ds.$$

Pour cela, on pose

$$U = u_\mu - u_\tau, \quad V = v_\mu - v_\tau, \quad Z = z_\mu - z_\tau.$$

Il est facile de voir que (V,Z) satisfait

$$\begin{cases} V_{tt} + LV - \int_0^t g\,(t-s)\,LV\,(s)\,ds = |u_\mu|^{p-2}\,u_\mu - |u_\tau|^{p-2}\,u_\tau, & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ V(x,t) = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0,T)\,, \\ \dfrac{\partial V}{\partial \nu_L} - \int_0^t g\,(t-s)\,\dfrac{\partial V}{\partial \nu_L}\,(s)\,ds = h\,(x)\,Z_t, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T)\,, \\ V_t + f\,(x)\,Z_t + m\,(x)\,Z = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T)\,, \\ V\,(x,0) = V_0(x) = u_\mu^0 - u_\tau^0, \quad V_t\,(x,0) = V_1(x) = u_\mu^1 - u_\tau^1, & \text{dans } \Omega, \\ Z\,(x,0) = Z_0(x) = z_\mu^0 - z_\tau^0\,(x)\,, & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \tag{4.41}$$

Multiplions la première équation par $2V_t$ et la troisième équation par $2Z_t$ dans (4.41), intégrons le résultat obtenu sur $(0,t)\times\Omega$ et utilisons la formule de Green et (4.8) pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\|V_t\|_2^2 + b_0\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla V\|_2^2 + \int_{\Gamma_1} m\left|h^{1/2}Z\right|^2 d\Gamma + \\
&\quad +2\int_0^t\int_{\Gamma_1} f\left|h^{1/2}Z_t(s)\right|^2 d\Gamma ds + (g\diamond V)(t) + \\
&\quad -\int_0^t (g'\diamond V)(s)ds + \int_0^t g(s)b\left(V(s),V(s)\right)ds \\
&\leq \|V_1\|_2^2 + b_0\|\nabla V_0\|_2^2 + \int_{\Gamma_1} m\left|h^{1/2}Z_0\right|^2 d\Gamma + \\
&\quad +2\int_0^t\int_\Omega\left[|u_\mu|^{p-2}u_\mu - |u_\tau|^{p-2}u_\tau\right]V_t dx ds.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Estimons le dernier terme du deuxième membre de l'inégalité (4.42) comme suit (see (20))

$$\left|\int_\Omega\left[|u_\mu|^{p-2}u_\mu - |u_\tau|^{p-2}u_\tau\right]V_t dx\right| \leq (p-1)\int_\Omega \sup\left(|u_\mu|^{p-2},|u_\tau|^{p-2}\right)|U||V_t|dx.$$

Utilisons l'inégalité de Hölder avec $\dfrac{1}{n}+\dfrac{n-2}{2n}+\dfrac{1}{2}=1$, il vient

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega\left[|u_\mu|^{p-2}u_\mu - |u_\tau|^{p-2}u_\tau\right]V_t dx\right| \leq \\
&\leq (p-1)\left(\|u_\mu\|_{(p-2)n}^{p-2} + \|u_\tau\|_{(p-2)n}^{p-2}\right)\|U\|_{2n/(n-2)}\|V_t\|_2 .
\end{aligned} \tag{4.43}$$

L'injection de Sobolev $V \hookrightarrow L^{2n/(n-2)}(\Omega)$ donne

$$\begin{aligned}
&\|U\|_{2n/(n-2)} \leq C\|\nabla U\|_2 \\
&\|u_\mu\|_{(p-2)n}^{p-2} + \|u_\tau\|_{(p-2)n}^{p-2} \leq C\left(\|\nabla u_\mu\|_2^{p-2} + \|\nabla u_\tau\|_2^{p-2}\right),
\end{aligned} \tag{4.44}$$

où C est une constante positive dépend seulement de Ω et p. Par conséquent (4.43) prend la forme

$$\left|\int_\Omega\left[|u_\mu|^{p-2}u_\mu - |u_\tau|^{p-2}u_\tau\right]V_t dx\right| \leq C\|V_t\|_2\|\nabla U\|_2\left(\|\nabla u_\mu\|_2^{p-2} + \|\nabla u_\tau\|_2^{p-2}\right). \tag{4.45}$$

En utilisant (4.20), (4.45) et le fait que $0<\min_{x\in\Gamma_1} f(x),\ 0<\min_{x\in\Gamma_1} m(x)$, l'estimation (4.42) donne

$$\begin{aligned}
&\|V_t\|_2^2 + \left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla V\|_2^2 + \int_{\Gamma_1} m\left|h^{1/2}Z\right|^2 d\Gamma + 2\int_0^t\int_{\Gamma_1} f\left|h^{1/2}Z_t(s)\right|^2 d\Gamma ds \\
&\leq \|V_1\|_2^2 + b_0\|\nabla V_0\|_2^2 + \max_{x\in\Gamma_1}|m(x)h(x)|\,\|Z_0\|_{2,\Gamma_1}^2 + \\
&\quad +C\int_0^t \|V_t(s)\|_2\|\nabla U(s)\|_2\left(\|\nabla u_\mu(s)\|_2^{p-2} + \|\nabla u_\tau(s)\|_2^{p-2}\right)ds.
\end{aligned}$$

De cette dernière inégalité, il résulte

$$\begin{aligned}
&\|V_t\|_2^2 + b_0 l \|\nabla V\|_2^2 + \left\|h^{1/2} Z\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \int_0^t \left\|h^{1/2} Z_t(s)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 ds \\
&\leq \frac{1}{C_5}\left(\|V_1\|_2^2 + b_0 \|\nabla V_0\|_2^2 + \max_{x\in\Gamma_1} |m(x)h(x)| \|Z_0\|_{2,\Gamma_1}^2\right) \\
&\quad + \frac{K_2}{C_5}\int_0^t \|V_t(s)\|_2 \|\nabla U(s)\|_2 \, ds,
\end{aligned}$$

où $C_5 = min\{1, 2f_0, m_0\}$ et K_2 est une constante positive dépend seulement de Ω, p et du diamètre de la boule $B_R(0) \subset C([0,T]\,; H_0^1(\Omega))$ centrée à l'origine et contient les suites $(u_\mu), (u_\tau)$. Le lemme de Gronwall entraîne que :

$$\|(V,Z)\|_{Y_T} \leq K_2 \left(\|V_1\|_2^2 + b_0 \|\nabla V_0\|_2^2 + \max_{x\in\Gamma_1} |m(x)h(x)| \|Z_0\|_{2,\Gamma_1}^2\right) + \frac{K_2}{C_5} T \|(U,Z)\|_{Y_T}. \tag{4.46}$$

Puisque (u_μ^0), (u_μ^1), (z_μ^0) sont des suites convergentes dans V, $L^2(\Omega)$, $L^2(\Gamma_1)$, respectivement et (u_μ) est une suite convergente dans $C([0,T]\,; V) \cap C^1([0,T]\,; L^2(\Omega))$, on conclut que (v_μ, z_μ) est une suite de Cauchy dans Y_T. Par conséquent (v_μ, z_μ) converge vers une limite (v,z) dans Y_T. Par les mêmes procédés utilisés dans le premier chapitre, on montre que cette limite est une solution du problème (4.39).

Théorème 4.3.1. *Soit $2 \leq p \leq \bar{p}$ et supposons que g satisfait (4.3), (4.4). Si $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ et $z_0 \in L^2(\Gamma_1)$, alors il existe $T > 0$ et une unique paire de solutions (u,z) du problème (4.1) telles que*

$$\begin{aligned}
u &\in C(0,T;V), \quad u_t \in C\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\
h^{1/2} z &\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right), \quad h^{1/2} z_t \in L^2\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right).
\end{aligned}$$

La démonstration de ce théorème est basée sur le théorème du point fixe, comme le montre le paragraphe suivant :

4.4 Preuve du théorème 4.3.1.

Pour $T \geq 0$, nous définissons le sous-ensemble convexe fermé de Y_T par

$$X_T = \{(v,z) \in Y_T \text{ tels que } v(0) = u_0, v_t(0) = u_1, z(0) = z_0\}.$$

Notons

$$B_R(X_T) = \left\{(v,z) \in X_T\,; \|(v,z)\|_{Y_T} \leq R\right\}.$$

Alors, le lemme 4.2.1 implique que pour tout $(u,z)\in X_T$, on peut définir $(v,z)=\Phi(u,z)$ comme solution unique du problème (4.39) correspondante à (u,z). On veut montrer que Φ est une application contractante sur $B_R(X_T)$ et telle que $\Phi\left(B_R(X_T)\right)\subset B_R(X_T)$.

• Premièrement, montrons que $\Phi\left(B_R(X_T)\right)\subset B_R(X_T)$.

Soit $(u,z)\in B_R(X_T)$ et $(v,z)=\Phi(u,z)$. Alors, pour tout $t\in[0,T]$ on a

$$\begin{aligned}
&C_5\left[\|v_t\|_2^2+b_0l\,\|\nabla v\|_2^2+\left\|h^{1/2}z\right\|_{2,\Gamma_1}^2+\int_0^t\left\|h^{1/2}z_t(s)\right\|_{2,\Gamma_1}^2ds\right]\\
&\leq \|v_t\|_2^2+\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)b(v,v)+\int_{\Gamma_1}m\left|h^{1/2}z\right|^2d\Gamma+2\int_0^t\int_{\Gamma_1}f\left|h^{1/2}z_t(s)\right|^2d\Gamma ds\\
&\leq \|v_1\|_2^2+b_0\,\|\nabla v_0\|_2^2+\max_{x\in\Gamma_1}|m(x)h(x)|\,\|z_0\|_{2,\Gamma_1}^2+\\
&\quad+2\int_0^t\int_\Omega\left||u(s)|^{p-2}u(s)v_t(s)\right|dxds.
\end{aligned}$$

Puisque $(u,z)\in B_R(X_T)$ et par l'inégalité de Hölder, on déduit que

$$\begin{aligned}
&C_5\left[\|v_t\|_2^2+b_0l\,\|\nabla v\|_2^2+\left\|h^{1/2}z\right\|_{2,\Gamma_1}^2+\int_0^t\left\|h^{1/2}z_t(s)\right\|_{2,\Gamma_1}^2ds\right]\\
&\leq \|v_1\|_2^2+a_0\,\|\nabla v_0\|_2^2+\max_{x\in\Gamma_1}|m(x)h(x)|\,\|z_0\|_{2,\Gamma_1}^2+2CR^{p-1}\int_0^t\|v_t(s)\|_2\,ds.
\end{aligned}$$

Cela conduit à

$$\begin{aligned}
\|(v,z)\|_{Y_T}^2\leq\ & K_3\left(\|v_1\|_2^2+b_0\,\|\nabla v_0\|_2^2+\max_{x\in\Gamma_1}|m(x)h(x)|\,\|z_0\|_{2,\Gamma_1}^2\right)+\\
&+K_3R^{p-1}T\,\|(v,z)\|_{Y_T}^2,
\end{aligned}\tag{4.47}$$

où $K_3=C/C_5$ est une constante indépendante de R.

En appliquant l'inégalité de Young pour le dernier terme du seconde membre de (4.47), on arrive à

$$\begin{aligned}
\|(v,z)\|_{Y_T}^2\ &\leq K_3\left(\|v_1\|_2^2+b_0\,\|\nabla v_0\|_2^2+\max_{x\in\Gamma_1}|m(x)h(x)|\,\|z_0\|_{2,\Gamma_1}^2\right)+\\
&\quad+R^{p-1}T\left[\frac{R^{p-1}T}{2}K_3^2+\frac{1}{2TR^{p-1}}\|(v,z)\|_{Y_T}^2\right].
\end{aligned}$$

Ainsi, on obient

$$\begin{aligned}
\|(v,z)\|_{Y_T}^2\ &\leq K_3\left(\|v_1\|_2^2+b_0\,\|\nabla v_0\|_2^2+\max_{x\in\Gamma_1}|m(x)h(x)|\,\|z_0\|_{2,\Gamma_1}^2\right)+\\
&\quad+\tfrac{1}{2}R^{2(p-1)}T^2K_3^2.
\end{aligned}\tag{4.48}$$

Choisissons R suffisamment grand tel que

$$K_3\left(\|v_1\|_2^2+b_0\,\|\nabla v_0\|_2^2+\max_{x\in\Gamma_1}|m(x)h(x)|\,\|z_0\|_{2,\Gamma_1}^2\right)\leq\frac{1}{2}R^2,$$

puis T suffisamment petit de sorte que $R^{2(p-1)}T^2K_3^2 \leq \frac{1}{2}R^2$, (4.48) est satisfait, donc $(v,z) \in B_R(X_T)$.

• Montrons que Φ est contractante.
Pour cela, on pose $U = u - \bar{u}$, $V = v - \bar{v}$ et $Z = z - \bar{z}$, où $(v,z) = \Phi(u,z)$ et $(\bar{v},\bar{z}) = \Phi(\bar{u},\bar{z})$. Alors (V,Z) satisfait le système suivant

$$\begin{cases} V_{tt} + LV - \displaystyle\int_0^t g\,(t-s)\,LV\,(s)\,ds = |u|^{p-2}\,u - |\bar{u}|^{p-2}\,\bar{u}, & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ V(x,t) = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0,T)\,, \\ \dfrac{\partial V}{\partial \nu_L} - \displaystyle\int_0^t g\,(t-s)\,\dfrac{\partial V}{\partial \nu_L}\,(s)\,ds = h\,(x)\,Z_t, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T)\,, \\ V_t + f\,(x)\,Z_t + m\,(x)\,Z = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T)\,, \\ V\,(x,0) = 0, \quad V_t\,(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ Z\,(x,0) = 0, & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \tag{4.49}$$

Multiplions la première équation du problème (4.49) par V_t et la troisième équation par Z_t, intégrons le résultat obtenu sur $(0,t) \times \Omega$ et utilisons la formule de Green pour obtenir

$$\begin{aligned} &\|V_t\|_2^2 + \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) b(V,V) + \int_{\Gamma_1} m\left|h^{1/2}Z\right|^2 d\Gamma + 2\int_0^t \int_{\Gamma_1} f\left|h^{1/2}Z_t(s)\right|^2 d\Gamma ds \\ &+(g \diamond V)(t) - \int_0^t (g' \diamond V)(s)ds + \int_0^t g(s) b\left(V(s),V(s)\right)ds = \\ &= 2\int_0^t \int_\Omega \left[|u(s)|^{p-2}\,u(s) - |\bar{u}(s)|^{p-2}\,\bar{u}(s)\right] V_t(s)dxds. \end{aligned}$$

Moyennement à (4.20), (4.45) et le fait que $0 < \min_{x\in\Gamma_1} f(x),\ 0 < \min_{x\in\Gamma_1} m(x)$, l'égalité précédente donne

$$\begin{aligned} &\|V_t\|_2^2 + b_0 l\,\|\nabla V\|_2^2 + \left\|h^{1/2}Z\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \int_0^t \left\|h^{1/2}Z_t\right\|_{2,\Gamma_1}^2 ds \\ &\leq \frac{C}{C_5}\int_0^t \|V_t\|_2\,\|\nabla U\|_2\left(\|\nabla u\|_2^{p-2} + \|\nabla \bar{u}\|_2^{p-2}\right) ds. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Ainsi, nous avons

$$\|(V,Z)\|_{Y_T} \leq K_3TR^{p-2}\,\|(U,Z)\|_{Y_T}\,. \tag{4.51}$$

En choisissant T suffisamment petit pour avoir $K_3TR^{p-2} < 1$, l'estimation (4.51) montre que Φ est une application contractante.
Le théorème du point fixe garantit l'existence d'une unique paire (v,z) satisfaisant $(v,z) = \Phi(v,z)$. Ainsi, la preuve du théorème 4.3.1 est achevée. □

Chapitre 5

Existence globale et comportement asymptotique de la solution

L'objet de ce chapitre est de montrer que la solution locale existe globalement en temps dans un ensemble stable de données initiales et qu'elle est uniformément bornée. A la fin de ce chapitre, nous prouvons la décroissance polynômiale et exponentielle de la fonctionnelle d'énergie dépend seulement du comportement de la fonction noyau g.

5.1 Résultats préliminaires

Afin d'étudier l'existence globale, décroissance exponentielle et polynomiale de la solution locale du problème (4.1) donnée par le théorème 4.3.1, nous définissons les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} I\left(u(t),z(t)\right)=I(t)= & \left(1-\int_0^t g\left(s\right)ds\right)b(u(t),u(t))+\left(g\diamond u\right)(t)+ \\ & +\int_{\Gamma_1} mhz^2\left(t\right)d\Gamma-\left\|u\left(t\right)\right\|_p^p, \\ J\left(u(t),z(t)\right)=J(t)= & \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g\left(s\right)ds\right)b(u(t),u(t))+\frac{1}{2}\left(g\diamond u\right)(t)+ \\ & +\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} mhz^2\left(t\right)d\Gamma-\frac{1}{p}\left\|u\left(t\right)\right\|_p^p. \end{aligned}$$

On introduit la fonctionnelle d'énergie E associée au problème (4.1) :

$$E\left(u(t),u_t(t),z(t)\right)=E\left(t\right)=\frac{1}{2}\|u_t\left(t\right)\|_2^2+J(t), \tag{5.1}$$

pour $(u(t), z(t)) \in V \times L^2(\Gamma)$, où
$E(0) = \dfrac{1}{2}\|u_1(t)\|_2^2 + \dfrac{1}{2}b(u_0, u_0) + \dfrac{1}{2}\int_{\Gamma_1} mhz_0^2 d\Gamma - \dfrac{1}{p}\|u_0\|_p^p$ désigne l'énergie initiale.

Lemme 5.1.1. *Soit (u, z) solution du système (4.1). Alors, la fonctionnelle d'énergie définie par (5.1) est strictement décroissante et on a*

$$\frac{dE}{dt}(t) = -\int_{\Gamma_1} fhz_t^2(t)d\Gamma + \frac{1}{2}(g' \diamond u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\, b(u(t), u(t)), \qquad \textit{pour tout } t > 0. \tag{5.2}$$

Démonstration. Multiplions la première équation dans (4.1) par u_t, intégrons le résultat obtenu sur Ω, utilisons la formule de Green et exploitons la troisième équation dans le système (4.1), on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}b(u(t), u(t)) - \frac{1}{p}\|u(t)\|_p^p\right\} - \int_{\Gamma_1} hu_t(t)\, z_t(t)\, d\Gamma \\ =\; &\int_\Omega \int_0^t g(t-s)\, B\nabla u(s)\, \nabla u_t(t)\, ds dx. \end{aligned} \tag{5.3}$$

D'autre part, de la quatrième équation du (4.1) il découle

$$-\int_{\Gamma_1} hu_t(t)\, z_t(t)\, d\Gamma = \int_{\Gamma_1} fhz_t^2(t)d\Gamma + \int_{\Gamma_1} hmz(t)z_t(t)d\Gamma. \tag{5.4}$$

Insérant (5.4) dans (5.3) et utilisons (4.8), on obtient alors (5.2) pour toute solution régulière. Ceci reste valable pour des solutions faibles par l'argument de densité simple comme dans le lemme 4.2.1 (voir (20) : Proposition 2.1 et aussi (37)). Ainsi, la preuve du Lemme 5.1.1 est terminée. $\square$

On définit l'ensemble stable $\mathbb{W}$ par

$$\mathbb{W} = \left\{(u(t), z(t)) \in V \times L^2(\Gamma_1),\ I(t) > 0,\ J(t) < d\right\} \cup \{0\},$$

où $d = \inf\{\sup_{\lambda>0} J(\lambda(u(t), z(t))),\ u(t) \in V/0\{0\},\ z \in L^2(\Gamma_1)\}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\lambda}(\lambda(u(t), z(t))) \;=\; &\lambda\left[\left(1 - \int_0^t g(s)\, ds\right) b(u(t), u(t)) + (g \diamond u)(t) + \int_{\Gamma_1} mhz^2(t)\, d\Gamma\right] \\ &-\lambda^{p-1}\|u(t)\|_p^p. \end{aligned}$$

Si $\dfrac{dJ}{d\lambda}(\lambda(u(t), z(t))) = 0$, alors on trouve

$$\lambda_1 = \left(\frac{\left(1 - \int_0^t g(s)\, ds\right) b(u(t), u(t)) + (g \diamond u)(t) + \int_{\Gamma_1} mhz^2(t)\, d\Gamma}{\|u(t)\|_p^p}\right)^{1/(p-2)}.$$

On vérifie facilement que $\left.\dfrac{d^2J}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda_1} < 0$, alors de (4.5) on tire

$$\sup_{\lambda>0} J(\lambda(u(t),z(t))) = J(\lambda_1(u(t),z(t)) =$$

$$= \frac{p-2}{2p}\left[\frac{\left(1-\int_0^t g\left(s\right)ds\right)b(u(t),u(t)) + \left(g\diamond u\right)(t) + \int_{\Gamma_1} mhz^2\left(t\right)d\Gamma}{\left\|u\left(t\right)\right\|_p^2}\right]^{\dfrac{p}{p-2}}$$

$$\geq \frac{p-2}{2p}(b_0 l)^{\dfrac{p}{p-2}}\left[\frac{\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2}{\left\|u\left(t\right)\right\|_p}\right]^{\dfrac{2p}{p-2}} \geq \frac{p-2}{2p}(b_0 l)^{\dfrac{p}{p-2}}\lambda^{\dfrac{2p}{p-2}} > 0,$$

de la définition de d on conclut que $d > 0$.

Lemme 5.1.2. *Soit $(u(t),z(t))$ solution du problème (4.1). Si $(u_0,z_0) \in \mathbb{W},\ u_1 \in L^2(\Omega)$ et $E(0) < d$, alors $(u(t),z(t)) \in \mathbb{W}$ pour tout $t \in [0,T)$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $T_j < T$ tel que $(u(t),z(t)) \in \mathbb{W}$ dans $[0,T_j)$ et $(u(T_j),z(T_j)) \notin \mathbb{W}$. Ensuite, la continuité de $(u(t),z(t))$, entraîne que $(u(T_j),z(T_j)) \in \partial\mathbb{W}$. De la définition de $\mathbb{W}$ et de la continuité de I et J par rapport à t, on obtient $I(T_j) = I\left(u(T_j),z(T_j)\right) = 0$ ou $J(T_j) = J\left(u(T_j),z(T_j)\right) = d$.
De (5.1) et du résultat du 5.1.1, il découle

$$J(T_j) \leq E(T_j) \leq E(0) < d. \tag{5.5}$$

Ce qui montre que le cas $J(T_j) = d$ est impossible.
Maintenant, supposons que $I(T_j) = I\left(u(T_j),z(T_j)\right) = 0$ est vérifié, alors

$$\frac{dJ}{d\lambda}\left(\lambda\left(u(T_j),z(T_j)\right)\right) = \lambda\left(1-\lambda^{p-2}\right)\left\|u\left(t\right)\right\|_p^p.$$

La valeur $\lambda = 1$ est une valeur maximum pour $J\left(\lambda\left(u(T_j),z(T_j)\right)\right)$. Donc, de (5.5) il résulte

$$\sup_{\lambda>0} J\left(\lambda\left(u(T_j),z(T_j)\right)\right) = J\left(u(T_j),z(T_j)\right) < d,$$

ce qui contredit la définition de d. Par conséquent, le cas $I(T_j) = 0$ est aussi impossible. Ainsi, on conclut que $(u(t),z(t)) \in \mathbb{W}$ pour tout $t \in [0,T)$. □

5.2 Existence globale de la solution

En se basant sur les résultats préliminaires cités auparavant, nous allons prouver un résultat très important sur l'existence globale de la solution, dans le théorème suivant :

Théorème 5.2.1. *Soit (u,z) solution du problème (4.1). Si $(u_0,z_0)\in\mathbb{W},\ u_1\in L^2(\Omega)$ et $E(0)<d$, alors la solution (u,z) est globale en temps.*

Démonstration. Il suffit de montrer que
$\|u_t(t)\|_2^2+b(u(t),u(t))+\int_{\Gamma_1} m\,(x)\,h\,(x)\,z^2\,(t)\,d\Gamma$ est majoré par une constante indépendante de t.
Sous les hypothèses du théorème 5.2.1, nous obtenons d'après le lemme 5.1.2 que $I(t)>0$ pour tout $t\geq 0$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
J(t) &= \frac{p-2}{2p}\left[\left(1-\int_0^t g\,(s)\,ds\right)b(u(t),u(t))+(g\diamond u)\,(t)+\int_{\Gamma_1} mhz^2\,(t)\,d\Gamma\right]\\
&\quad+\frac{1}{p}I(t)\\
&> \frac{p-2}{2p}\left[\left(1-\int_0^t g\,(s)\,ds\right)b(u(t),u(t))+(g\diamond u)\,(t)+\int_{\Gamma_1} mhz^2\,(t)\,d\Gamma\right].
\end{aligned}$$

Ainsi par (G_1) et le fait que $(g\diamond u)\,(t)\geq 0,\ \forall t\geq 0$, nous concluons

$$\begin{aligned}
&lb(u(t),u(t))+\int_{\Gamma_1} mhz^2\,(t)\,d\Gamma\leq\\
&\leq\left(1-\int_0^t g\,(s)\,ds\right)b(u(t),u(t))+\int_{\Gamma_1} mhz^2\,(t)\\
&<\frac{2p}{p-2}J(t),\quad \forall t\in[0,T)
\end{aligned}\tag{5.6}$$

En utilisant le lemme 5.1.1, de (5.6), il résulte

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2+\frac{p-2}{2p}\left[lb(u(t),u(t))+\int_{\Gamma_1} mhz^2\,(t)\,d\Gamma\right]<\\
&<\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2+J(t)=E(t)<E(0)
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante $C>0$ dépend seulement de p et l telle que

$$\|u_t(t)\|_2^2+b(u(t),u(t))+\int_{\Gamma_1} mhz^2\,(t)\,d\Gamma\leq CE(0)<+\infty.$$

D'où la démonstration du théorème 5.2.1. □

5.3 Comportement asymptotique de la solution

Dans cette section, nous allons étudier le comportement asymptotique de la fonction d'énergie E. Pour cela, nous supposons, en plus de (G_2) que,

$$g'\,(t)\leq-\xi g^{\rho}(t),\quad t\geq 0,\quad 1\leq\rho<\frac{3}{2}.\tag{5.7}$$

Remarque 5.3.1. *Dans (37), plusieurs exemples des fonctions vérifiant les hypothèses* (G_2) *et* (5.7) *ont été donnés. Nous citons les deux exemples suivants :*

$$g_1(t) = a(1+t)^{\beta}, \quad \beta < -1,$$
$$g_2(t) = \frac{ae^{-bt}}{(1+t)^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

où $a, \ b > 0$ *sont des constantes positives et convenablement choisies.*

5.3.1 Résultas préliminaires

Pour analyser le comportement asymptotique de la solution nous aurons besoins de quelques lemmes utiles.
Soit la fonction

$$L\,(t) = ME(t) + \epsilon\psi(t) + \phi(t), \tag{5.8}$$

où M et ϵ sont des constantes positives à choisir ultérieurement et

$$\psi(t) = \int_{\Omega} u(t)u_t(t)dx + \int_{\Gamma_1} h(x)u\,(t)\,z(t)d\sigma + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} h(x)f(x)z^2(t)d\sigma, \tag{5.9}$$

$$\phi(t) = -\int_{\Omega} u_t(t)\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx. \tag{5.10}$$

Lemme 5.3.1. *Pour* $\epsilon > 0$ *assez petit et* M *est suffisamment grand, alors il existe deux constantes positives* α_1 *et* α_2 *telles que*

$$\alpha_1 E(t) \leq L\,(t) \leq \alpha_2 E(t). \tag{5.11}$$

Démonstration. Utilisons les inégalités de Cauchy-Schwarz, de Hölder et de Poincaré, on conclut que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega} u_t\,(t)\,u\,(t)\,dx\right| &\leq \left(\int_{\Omega} |u_t\,(t)|^2\,(t)\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega} \left|u^2\,(t)\right|dx\right)^{1/2} \\
&\leq \lambda\left(\int_{\Omega} |u_t\,(t)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega} |\nabla u\,(t)|^2\,dx\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

où λ est la constante de Poincaré.
Aussi, grâce à l'inégalité de Young et (1.3), le deuxième membre de l'estimation précédente donne

$$\left|\int_{\Omega} u_t\,(t)\,u\,(t)\,dx\right| \leq \frac{1}{2}\left\|u_t\,(t)\right\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2b_0}b(u(t),u(t)). \tag{5.12}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de trace, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Gamma_1} h(x)u\left(t\right)z\left(t\right)d\Gamma\right| = \left|\int_{\Gamma_1} \frac{h(x)m(x)}{m(x)}u\left(t\right)z\left(t\right)d\Gamma\right| \\
&\leq \frac{\|h\|_\infty^{1/2}\|m\|_\infty^{1/2}}{m_0}\left(\int_{\Gamma_1} h(x)m(x)\left|z\left(t\right)\right|^2 d\Gamma\right)^{1/2}\left(\int_{\Gamma_1}\left|u\left(t\right)\right|^2 d\Gamma\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{\|h\|_\infty\|m\|_\infty}{2m_0^2}\int_{\Gamma_1} h(x)m(x)\left|z\left(t\right)\right|^2 d\Gamma + \frac{\bar{\lambda}^2}{2b_0}b(u(t),u(t))
\end{aligned} \tag{5.13}$$

et

$$\begin{aligned}
\left|\phi(t)\right| &\leq \frac{1}{2}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))ds\right)^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_2^2 + \frac{C_*^2}{2a_0}\int_\Omega\left(\int_0^t g(s)ds\right)\times \\
&\quad \times\left(\int_0^t g(t-s)B\left|\nabla u(t)-\nabla u(s)\right|^2 ds\right)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_2^2 + \frac{(1-l)\lambda^2}{2b_0}\left(g\diamond u\right)\left(t\right),
\end{aligned} \tag{5.14}$$

où la dernière inégalité est obtenue en remarquant que $\int_0^t g(s)ds \leq \int_0^\infty g(s)ds = 1-l$. Combinons (5.8), (5.12), (5.13) et (5.14), alors on obtient

$$\begin{aligned}
\left|L\left(t\right)-ME(t)\right| &\leq \left(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{2}\right)\left\|u_t\left(t\right)\right\|_2^2 + \frac{\epsilon}{2b_0}\left(\lambda+\bar{\lambda}^2\right)b(u(t),u(t)) + \\
&\quad + \frac{\epsilon}{2m_0}\left(\frac{\|h\|_\infty\|m\|_\infty}{m_0}+\|f\|_\infty\right)\int_\Gamma h(x)m(x)\left|z\left(t\right)\right|^2 d\Gamma \\
&\quad + \frac{(1-l)\lambda^2}{2b_0}\left(g\diamond u\right)\left(t\right) \\
&\leq CE(t),
\end{aligned}$$

où C est une constante positive dépend seulement de $\epsilon,\ \lambda$ et $\bar{\lambda}$. En choisissant $M>0$ assez grand, nous terminons la preuve du lemme 5.3.1. □

Lemme 5.3.2. *Pour $r>1$ et $0\leq\theta\leq 1$ on a*

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(t-s)\left|w(s)\right|ds \leq &\left(\int_0^t g^{1-\theta}(t-s)\left|w(s)\right|ds\right)^{1/r}\times \\
&\times\left(\int_0^t g^{(r-1+\theta)/(r-1)}(t-s)\left|w(s)\right|ds\right)^{(r-1)/r},
\end{aligned}$$

pour tout $w\in L^1_{loc}(0,\infty)$.

Démonstration. La démonstration est obtenue en notant

$$\int_0^t g(t-s)\left|w(s)\right|ds = \int_0^t g^{(1-\theta)/r}(t-s)\left|w(s)\right|^{1/r} g^{(r-1+\theta)/(r)}(t-s)\left|w(s)\right|^{(r-1)/r} ds$$

et en utilisant l'inégalité de Hölder. □

Lemme 5.3.3. *Supposons que $u \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ et g est une fonction continue. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\begin{aligned}&\int_0^t g(t-s)b\left(u(t)-u(s),u(t)-u(s)\right)ds \leq \\ &\leq C\left(tb(u(t),u(t))+\int_0^t b(u(s),u(s))ds\right)^{(\rho-1)/\rho}\times \\ &\quad\times\left(\int_0^t g^\rho(t-s)b\left(u(t)-u(s),u(t)-u(s)\right)ds\right)^{1/\rho}.\end{aligned}$$

De plus, s'il existe $0<\theta<1$ de sorte que

$$\int_0^\infty g^{1-\theta}(s)ds < +\infty,$$

alors nous avons

$$\begin{aligned}&\int_0^t g(t-s)b\left(u(t)-u(s),u(t)-u(s)\right)ds \leq \\ &\leq C\left(\sup\nolimits_{0<s<T} b(u(s),u(s))\int_0^t g^{1-\theta}(s)ds\right)^{\frac{\rho-1}{\theta+\rho-1}}\times \\ &\quad\times\left(\int_0^t g^\rho(t-s)b\left(u(t)-u(s),u(t)-u(s)\right)ds\right)^{\frac{\theta}{\theta+\rho-1}}.\end{aligned}$$

Démonstration. En utilisant le lemme 5.3.2 avec $r=(\theta+\rho-1)/(\rho-1)$ on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^t g(t-s)b\left(u(t)-u(s),u(t)-u(s)\right)ds \leq \\ &\leq\left(\int_0^\infty g^{1-\theta}(t-s)b(u(t)-u(s),u(t)-u(s))ds\right)^{\frac{\rho-1}{\theta+\rho-1}}\times \\ &\quad\times\left(\int_0^\infty g^\rho(t-s)b(u(t)-u(s),u(t)-u(s))ds\right)^{\frac{\theta}{\theta+\rho-1}}.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Pour $0<\theta<1$, on a

$$\int_0^\infty g^{1-\theta}(t-s)b(u(t)-u(s),u(t)-u(s))ds \leq C\sup_{0<s<T} b(u(s),u(s))\int_0^t g^{1-\theta}(s)ds,$$

ce qui montre la seconde inégalité du lemme 5.3.3.
Lorsque $\theta=1$, en utilisant la symétrie des fonctions b_{ij} on trouve

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty g^{1-\theta}(t-s)b(u(t)-u(s),u(t)-u(s))ds = \int_0^\infty b(u(t)-u(s),u(t)-u(s))ds = \\ &= tb(u(t),u(t))+\int_0^\infty b(u(s),u(s))ds - 2\sum_{i,j=1}^n\int_0^t\int_\Omega b_{ij}(x)\frac{\partial u(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u(s)}{\partial x_i}dxds \\ &\leq tb(u(t),u(t))+\int_0^\infty b(u(s),u(s))ds+ \\ &\quad+\sum_{i,j=1}^n\int_0^t\int_\Omega\left(b_{ij}(x)\frac{\partial u(t)}{\partial x_j}\right)^2dxds+\sum_{i,j=1}^n\int_0^t\int_\Omega\left|\frac{\partial u(s)}{\partial x_i}\right|^2dxds, \\ &\leq\left(1+\frac{b_1}{b_0}\right)tb(u(t),u(t))+\left(1+\frac{n}{b_0}\right)\int_0^\infty b(u(s),u(s))ds \\ &\leq C\left(tb(u(t),u(t))+\int_0^\infty b(u(s),u(s))ds\right),\end{aligned}$$

où $C = \max\left(b_1/b_0,\ n/b_0\right)$ avec $b_1 = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}\|b_{ij}\|_{\infty}^{2}\right)$.
Remplaçant cette dernière inégalité dans (5.15) pour obtenir la première inégalité du lemme 5.3.3. □

Lemme 5.3.4. *Soit (u,z) solution du (4.1). Sous les hypothèses (G_1), (G_3) et (4.3), la fonction*

$$\psi(t)=\int_{\Omega}u(t)u_t(t)dx+\int_{\Gamma_1}h(x)u\left(t\right)z(t)d\sigma+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}h(x)f(x)z^2(t)d\Gamma_1$$

satisfait,

$$\begin{aligned}\psi'(t)\ \ &\leq\ \ \|u_t\left(t\right)\|_2^2+\|u\left(t\right)\|_p^p-\frac{l}{4}b(u(t),u(t))\\&\quad-\int_{\Gamma_1}h(x)m(x)\left|z\left(t\right)\right|^2d\Gamma+\frac{4\|h\|_{\infty}\bar{C}_*^{\,2}}{b_0 l}\|h^{1/2}z_t\left(t\right)\|_{2,\Gamma_1}^2\\&\quad+\frac{nb_1}{b_0^2 l}\left(\int_0^t g^{2-\rho}\left(s\right)ds\right)\left(g^{\rho}\diamond u\right)\left(t\right).\end{aligned}\tag{5.16}$$

Démonstration. En utilisant la première et la troisième équations du système (4.1), nous obtenons

$$\begin{aligned}\psi'(t)\ &=\|u_t\left(t\right)\|_2^2-b(u(t),u(t))+\|u\left(t\right)\|_p^p+2\int_{\Gamma_1}h\left(x\right)u\left(t\right)z_t\left(t\right)d\Gamma\\&\quad-\int_{\Gamma_1}h\left(x\right)m\left(x\right)z^2\left(t\right)d\Gamma+\int_0^t g\left(t-s\right)\int_{\Omega}B\nabla u\left(t\right)\nabla u\left(s\right)dxds.\end{aligned}\tag{5.17}$$

Maintenant, nous estimons le dernier terme du seconde membre de (5.17) en utilisant l'inégalité de Young, (G_1), (G_3) et (4.3) comme suit

$$\begin{aligned}&\int_0^t g\left(t-s\right)\int_{\Omega}B\nabla u\left(t\right)\nabla u\left(s\right)dxds=\\&=\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t g\left(t-s\right)\int_{\Omega}b_{ij}(x)\frac{\partial u(t)}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u(s)}{\partial x_i}-\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}+\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}\right)dxds\\&=\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t g\left(t-s\right)\int_{\Omega}b_{ij}(x)\frac{\partial u(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}dxds\\&\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t g\left(t-s\right)\int_{\Omega}b_{ij}(x)\frac{\partial u(t)}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u(s)}{\partial x_i}-\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}\right)dsdx\\&\leq(1-l)a(u(t),u(t))+\mu\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left(b_{ij}(x)\frac{\partial u(t)}{\partial x_j}ds\right)^2dx+\\&\quad+\frac{1}{4\mu}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g\left(t-s\right)\left(\frac{\partial u(s)}{\partial x_i}-\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}\right)ds\right)^2dx\end{aligned}\tag{5.18}$$

pour tout $\mu > 0$.
En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\int_0^t g\,(t-s) \left(\frac{\partial u(s)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(t)}{\partial x_i} \right) ds \right)^2 dx \\
&\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\int_0^t g^{1-\frac{\rho}{2}+\frac{\rho}{2}}\,(t-s) \left(\frac{\partial u(s)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(t)}{\partial x_i} \right) ds \right)^2 dx \\
&\leq \int_0^t g^{2-\rho}\,(s)\,ds \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \int_0^t g^{\rho}\,(t-s) \left| \frac{\partial u(s)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(t)}{\partial x_i} \right|^2 dsdx \\
&\leq \frac{n}{b_0} \left(\int_0^t g^{2-\rho}\,(s)\,ds \right) (g^{\rho} \diamond u)\,(t)\,.
\end{aligned}$$

Alors, l'estimation (5.18) devient

$$\begin{aligned}
&\int_0^t g\,(t-s) \int_{\Omega} B \nabla u\,(t)\, \nabla u\,(s)\, dxds \leq \\
&\leq \left(1 - l + \frac{\mu b_1}{b_0} \right) b(u(t), u(t)) + \frac{n}{4\mu b_0} \left(\int_0^t g^{2-\rho}\,(s)\,ds \right) (g^{\rho} \diamond u)\,(t)\,.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

En utilisant l'inégalité de trace et l'inégalité de Young, pour $\mu_1 > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} h\,(x)\, u\,(t)\, z_t\,(t)\, d\Gamma &\leq \|h\|_{\infty}^{1/2} \left(\int_{\Gamma_1} h|z_t\,(t)\,|^2 d\Gamma \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_1} |u\,(t)\,|^2 d\Gamma \right)^{1/2} \\
&\leq \mu_1 \frac{\bar{\lambda}^2}{b_0} b(u(t), u(t)) + \frac{\|h\|_{\infty}}{4\mu_1} \|h^{1/2} z_t\,(t)\,\|_{2,\Gamma_1}^2 .
\end{aligned} \tag{5.20}$$

En combinant (5.17), (5.19) et (5.20), on conclut que

$$\begin{aligned}
\psi'(t) \leq\ & \|u_t\,(t)\|_2^2 + \|u\,(t)\|_p^p - \int_{\Gamma_1} h(x) m(x) z^2\,(t)\, d\Gamma + \\
& + \left[-1 + (1-l) + 2\mu_1 \frac{\bar{\lambda}^2}{b_0} + \frac{\mu b_1}{b_0} \right] b(u(t), u(t)) + \\
& + \frac{n}{4 b_0 \mu} \left(\int_0^t g^{2-\rho}\,(s)\,ds \right) (g^{\rho} \diamond u)\,(t) + \frac{\|h\|_{\infty}}{2\mu_1} \|h^{1/2} z_t\,(t)\,\|_{2,\Gamma}^2 .
\end{aligned}$$

En posant $\mu_1 = (b_0 l)/(8\bar{\lambda}^2) > 0$ et $\mu = (b_0 l)/(4b_1))$ dans l'inégalité ci-dessus, l'estimation (5.16) est etablie. □

Lemme 5.3.5. *Soit* (u, z) *solution du* (4.1)*. Sous les hypothèses* (G_1), (G_3) *et* (4.3), *la fonction*

$$\phi(t) = -\int_{\Omega} u_t(t) \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s)) dsdx$$

satisfait, pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}\phi'(t) \leq \; & \left(\delta - \int_0^t g(s)ds\right) \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\lambda^2 g(0)}{4\delta b_0} (-g' \diamond u)(t) + \frac{\|h\|_\infty}{4\delta} \left\| h^{1/2} z_t(t) \right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \\ & +\delta \left[\frac{b_1}{b_0} + \frac{2b_1}{b_0}(1-l)^2 + \left(\frac{\lambda^2}{b_0}\right)^{p-1} \left(\frac{2p}{(p-2)l} E(0)\right)^{p-2} \right] b(u(t), u(t)) + \\ & + \left(\int_0^t g^{2-\rho}(s)\, ds\right) \left[\frac{C_*^2}{4\delta b_0} + \frac{2\delta b_1}{b_0} + \frac{n}{2\delta b_0} + \frac{\bar{\lambda}^2}{b_0}\delta \right] (g^\rho \diamond u)(t).\end{aligned} \tag{5.21}$$

Démonstration. En utilisant (4.1) et la formule de Green, nous avons

$$\begin{aligned}\phi'(t) \; & = -\int_\Omega u_{tt}(t) \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \\ & \quad - \int_\Omega u_t(t) \int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))dsdx - \left(\int_0^t g(s)ds\right) \int_\Omega u_t^2(t)dx \\ & = \sum_{i,j=1}^n \int_0^t g(t-s) \int_\Omega b_{ij}(x) \frac{\partial u(t)}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(s)}{\partial x_i} \right) dxds \\ & \quad - \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\, b_{ij}(x) \frac{\partial u(s)}{\partial x_j} ds \right) \left(\int_0^t g(t-s) \left(\frac{\partial u(t)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(s)}{\partial x_i} \right) ds \right) dx \\ & \quad - \int_\Omega u_t(t) \int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))dsdx - \left(\int_0^t g(s)ds\right) \int_\Omega u_t^2(t)dx \\ & \quad - \int_{\Gamma_1} h z_t(t) \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsd\Gamma \\ & \quad - \int_\Omega |u(t)|^{p-2} u(t) \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx.\end{aligned} \tag{5.22}$$

De la même manière que dans (5.16), nous estimons chaque termes dans le seconde membre de (5.22).
En effet, en exploitant l'inégalité de Young, on obtient que, pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}& \sum_{i,j=1}^n \int_0^t g(t-s) \int_\Omega b_{ij}(x) \frac{\partial u(t)}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(s)}{\partial x_i} \right) dxds \leq \\ & \qquad \leq \frac{\delta b_1}{b_0} b(u(t), u(t)) + \frac{n}{4\delta b_0} \left(\int_0^t g^{2-\rho}(s)\, ds \right) (g^\rho \diamond u)(t).\end{aligned} \tag{5.23}$$

Les fonctions b_{ij} sont symétriques. Alors, le seconde terme dans le deuxième membre de l'inégalité (5.22) peut être estimée comme suit

$$\begin{aligned}
&\left|-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g\left(t-s\right)b_{ij}(x)\frac{\partial u(s)}{\partial x_j}ds\right)\left(\int_0^t g\left(t-s\right)\left(\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}-\frac{\partial u(s)}{\partial x_i}\right)ds\right)dx\right| \\
&\leq \delta\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\int_0^t g\left(t-s\right)b_{ij}(x))\frac{\partial u(s)}{\partial x_j}ds\right|^2 dx+ \\
&\quad +\frac{1}{4\delta}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\int_0^t g\left(t-s\right)\left(\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}-\frac{\partial u(s)}{\partial x_i}\right)ds\right|^2 dx \\
&\leq 2\frac{\delta b_1}{b_0}(1-l)^2 b(u(t),u(t))+\left(\int_0^t g^{2-\rho}\left(s\right)ds\right)\left[\frac{2\delta b_1}{b_0}+\frac{b}{4\delta b_0}\right]\left(g^{\rho}\diamond u\right)(t)\,.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

En utilisant l'hypothèse (G_2), on peut majorer le troisième terme dans le seconde membre dans (5.22), comme suit

$$\begin{aligned}
&\left|-\int_{\Omega}u_t(t)\int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))dsdx\right|\leq \\
&\leq \delta\left\|u_t(t)\right\|^2-\frac{g(0)\lambda^2}{4\delta b_0}\left(g'\diamond u\right)(t)\,.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré et (G_2), le cinquième terme est majoré par

$$\begin{aligned}
&\left|-\int_{\Gamma_1}h(x)z_t(t)\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))ds d\Gamma\right|\leq \\
&\leq \frac{\|h\|_\infty}{4\delta}\left\|h^{1/2}z_t\left(t\right)\right\|_{2,\Gamma_1}^2+\left(\int_0^t g^{2-\rho}\left(s\right)ds\right)\frac{\bar{\lambda}^2}{b_0}\delta\left(g^{\rho}\diamond u\right)(t)\,.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Le dernier terme dans le seconde membre de (5.22) peut être estimé par

$$\begin{aligned}
&\left|-\int_{\Omega}|u(t)|^{p-2}u(t)\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx\right|\leq \\
&\leq \delta\int_{\Omega}\left|u(t)\right|^{2(p-1)}dx+\left(\int_0^t g^{2-\rho}\left(s\right)ds\right)\frac{\lambda^2}{4\delta b_0}\left(g^{\rho}\diamond u\right)(t)\,.
\end{aligned}$$

Utilisons (1.3) et (5.2), on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}\left|u(t)\right|^{2(p-1)}dx &\leq \lambda^{2p-2}\left\|\nabla u(t)\right\|_2^{2p-2}\leq \\
&\leq \lambda^{2p-2}\left(\frac{2p}{(p-2)lb_0}E(0)\right)^{p-2}\left\|\nabla u(t)\right\|_2^2\,.
\end{aligned}$$

En combinant ces deux dernières inégalités, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left|-\int_{\Omega}|u(t)|^{p-2}u(t)\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx\right|\leq \\
&\leq \delta\left(\frac{\lambda^2}{b_0}\right)^{p-1}\left(\frac{2p}{(p-2)l}E(0)\right)^{p-2}b(u(t),u(t))+ \\
&\quad +\left(\int_0^t g^{2-\rho}\left(s\right)ds\right)\frac{\lambda^2}{4\delta b_0}\left(g^{\rho}\diamond u\right)(t)\,.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Moyennement à ces estimations (5.23)-(5.27), l'égalité (5.22) devient

$$\begin{aligned}
\phi'(t) \leq \quad & \left(\delta - \int_0^t g(s)ds\right) \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\lambda^2 g(0)}{4\delta b_0} \left(-g' \diamond u\right)(t) + \frac{\|h\|_\infty}{4\delta} \left\|h^{1/2} z_t\left(t\right)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \\
& + \delta \left[\frac{b_1}{b_0} + \frac{2b_1}{b_0}(1-l)^2 + \left(\frac{\lambda}{b_0}\right)^{p-1} \left(\frac{2p}{(p-2)l} E(0)\right)^{p-2}\right] b(u(t), u(t)) + \\
& + \left(\int_0^t g^{2-\rho}\left(s\right) ds\right) \left[\frac{\lambda^2}{4\delta b_0} + \frac{2\delta b_1}{b_0} + \frac{n}{2\delta b_0} + \frac{\bar{\lambda}^2}{b_0}\delta\right] \left(g^\rho \diamond u\right)(t).
\end{aligned}$$

□

Théorème 5.3.1. *Sous les hypothèses du théorème 5.2.1 et si (5.7) est vérifiée. Alors, pour tout $t_0 > 0$, il existe deux constantes positives K et k telles que, pour tout $t \geq t_0$*

$$\begin{aligned}
& E(t) \leq K e^{-kt}, \quad \rho = 1, \\
& E(t) \leq \frac{K}{(1+t)^{1/(\rho-1)}}, \quad 1 < \rho < \frac{3}{2}.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Démonstration. Puisque la fonction g est positive, alors il existe $t_0 > 0$ tel que

$$\int_0^t g(s)ds \geq \int_0^{t_0} g(s)ds := g_0, \quad \forall t \geq t_0.$$

En utilisant (5.8), (5.2), (5.16) et (5.21), on arrive à

$$\begin{aligned}
L'(t) \leq \quad & -\left(g_0 - \epsilon - \delta\right) \|u_t(t)\|_2^2 + \left(\frac{M}{2} - \frac{\lambda g(0)}{4\delta b_0}\right) \left(g' \diamond u\right)(t) + \\
& + \epsilon \|u(t)\|_p^p - \left[M - \epsilon \frac{4\|h\|_\infty \bar{\lambda}^2}{b_0 l} - \frac{\|h\|_\infty}{4\delta}\right] \left\|h^{1/2} z_t\left(t\right)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \\
& - \epsilon \int_{\Gamma_1} h(x) m(x) |z\left(t\right)|^2 d\Gamma - \left[\epsilon \frac{l}{2} - \delta \left(\frac{b_1}{b_0} + 2\frac{b_1}{b_0}(1-l)^2 + \right.\right. \\
& \left.\left. + \left(\frac{\lambda^2}{b_0}\right)^{p-1} \left(\frac{2p}{(p-2)l} E(0)\right)^{p-2}\right)\right] b(u(t), u(t)) + \\
& + \left(\int_0^t g^{2-\rho}\left(s\right) ds\right) \left[\epsilon \frac{b_1 n}{b_0^2} + \frac{\lambda^{2}}{2\delta b_0} + \frac{n}{2\delta b_0} + \right. \\
& \left. + 2\frac{b_1}{b_0} + \frac{\bar{\lambda}^2}{b_0}\delta\right] \left(g^\rho \diamond u\right)(t).
\end{aligned} \tag{5.29}$$

A ce stade, nous choisissons $\epsilon > 0$ assez petit pour que $g_0 - \epsilon > 0$ et (5.11) reste valable. Lorsque ϵ est fixé, nous prenons $\delta > 0$ suffisamment petit pour que

$$\begin{aligned}
k_1 = \quad & g_0 - \epsilon - \delta > 0, \\
k_2 = \quad & \epsilon \frac{l}{2} - \delta \left(\frac{b_1}{b_0} + 2\frac{b_1}{b_0}(1-l)^2 + \left(\frac{\lambda^2}{b_0}\right)^{p-1} \left(\frac{2p}{(p-2)l} E(0)\right)^{p-2}\right) > 0.
\end{aligned}$$

Ensuite, nous choisissons M assez grand tel que

$$\begin{aligned} k_3 = & \frac{M}{2} - \frac{\lambda g(0)}{4\delta b_0} - \frac{1}{\xi}\left(\int_0^t g^{2-\rho}(s)\,ds\right)\left[\epsilon\frac{b_1 n}{b_0^2} + \frac{\lambda^2}{2\delta b_0} + \frac{n}{2\delta b_0} + \right. \\ & \left. +2\frac{b_1}{b_0} + \frac{\bar{\lambda}^2}{b_0}\delta\right] > 0, \\ k_4 = & M - \epsilon\frac{4\|h\|_\infty \bar{\lambda}^2}{b_0 l} - \frac{\|h\|_\infty}{4\delta} > 0, \end{aligned}$$

et (5.11) reste valable.
Par conséquent, pour tout $t \geq t_0$, nous arrivons à

$$\begin{aligned} L'(t) & \leq -k_1 \|u_t(t)\|_2^2 - k_2 b(u(t), u(t)) + \epsilon \|u(t)\|_p^p \\ & -k_4 \left\|h^{1/2} z_t(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 - \epsilon \int_{\Gamma_1} h(x)m(x)|z(t)|^2 d\Gamma - k_3\xi\left(g^\rho \diamond u\right)(t). \end{aligned} \tag{5.30}$$

• **Premier cas :** $\rho = 1$.
De (5.30) et (5.11) il vient

$$L'(t) \leq -k_5 E(t) \leq -\frac{k_5}{\alpha_2} L(t),$$

où k_5 est une constante positive.
Par intégration de l'inégalité précédente entre t_0 et t, on obtient

$$L(t) \leq L(t_0) e^{\frac{k_5}{\alpha_2} t_0} e^{-\frac{k_5}{\alpha_2} t}, \quad \forall t \geq t_0. \tag{5.31}$$

De nouveau, en vertu de (5.11), la relation (5.31) donne

$$E(t) \leq \frac{L(t_0)}{\alpha_1} e^{\frac{k_5}{\alpha_2} t_0} e^{-\frac{k_5}{\alpha_2} t} = K e^{-kt}, \quad \forall t \geq t_0.$$

• **Deuxième cas :** $1 < \rho < 3/2$.
De l'hypothèse (5.7), on a $\left(g^{1-\rho}(t)\right)' \geq \xi(\rho - 1)$. Intégrons l'inégalité ci-dessus sur $[0, t]$, on obtient

$$g(t) < \frac{C_1}{(1+t)^{1/(\rho-1)}}, \qquad \text{où } C_1 \text{ est une constante positive.}$$

Fixons $\theta = \frac{1}{2}$, alors $(1-\theta)/(\rho - 1) > 1$, d'où il s'ensuit que

$$\int_0^t g^{1-\theta}(s)\,ds < C_1 \int_0^t \frac{1}{(1+s)^{\frac{1-\theta}{\rho-1}}} ds < +\infty, \quad \forall \theta < 2 - \rho.$$

Utilisons cette estimation dans la deuxième partie du lemme 5.3.3 et utilisons le lemme 5.1.1 on obtient

$$\left(g \diamond u\right)(t) \leq C_2 \left(E(0) \int_0^\infty g^{1-\theta}(s) ds\right)^{\frac{\rho-1}{\theta+\rho-1}} \left(\left(g^\rho \diamond u\right)(t)\right)^{\frac{\theta}{\theta+\rho-1}}.$$

Par conséquent, pour tout $\sigma > 1$, on obtient

$$\begin{aligned} E^{\sigma}(t) &\leq CE^{\sigma-1}(0)\left[\|u_t(t)\|_2^2 + b(u(t),u(t)) + \int_{\Gamma_1} h(x)m(x)|z\,(t)\,|^2 d\Gamma \right. \\ &\quad \left. - \|u(t)\|_p^p\right] + C\left[(g \diamond u)\,(t)\right]^{\sigma} \\ &\leq CE^{\sigma-1}(0)\left[\|u_t(t)\|_2^2 + b(u(t),u(t)) + \int_{\Gamma_1} h(x)m(x)|z\,(t)\,|^2 d\Gamma \right. \\ &\quad \left. - \|u(t)\|_p^p\right] + C\left(E(0)\int_0^{\infty} g^{1-\theta}(s)ds\right)^{\frac{\sigma(\rho-1)}{\theta+\rho-1}} \left((g^{\rho} \diamond u)\,(t)\right)^{\frac{\sigma\theta}{\theta+\rho-1}}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Choisissons $\theta = 1/2$ et $\sigma = 2\rho - 1$ (par conséquent $\sigma\theta/(\rho - 1 + \theta) = 1$), l'estimation (5.32) donne

$$\begin{aligned} E^{\sigma}(t) \leq \quad & C\left[\|u_t(t)\|_2^2 + b(u(t),u(t)) + \int_{\Gamma_1} h(x)m(x)|z\,(t)\,|^2 d\Gamma \right. \\ & \left. - \|u(t)\|_p^p + (g^{\rho} \diamond u)\,(t)\right]. \end{aligned} \tag{5.33}$$

En combinant (5.11), (5.30) et (5.33), on trouve

$$L'(t) \leq -\frac{k_6}{C}E^{\sigma}(t) \leq -\frac{k_6}{C\alpha_2^{\sigma}}L^{\sigma}(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

où $k_6 = \min\{k_1, k_2, k_3, k_4, \epsilon\}$. Une simple intégration de l'inégalité précédente entre t_0 et t conduit à

$$L(t) \leq \frac{k_7}{(1+t)^{1/(\sigma-1)}}, \quad \forall t \geq t_0, \tag{5.34}$$

où k_7 est une constante positive.
Puisque $\sigma > 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} L(s)ds &\leq \int_0^{\infty} \frac{k_7}{(1+s)^{1/(\sigma-1)}}ds < +\infty, \\ tL(t) &\leq \frac{k_7 t}{(1+t)^{1/(\sigma-1)}} < +\infty. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\int_0^{\infty} b(u(s),u(s))ds + \sup_{t\geq 0} tb(u(t),u(t)) \leq k_8\left(\int_0^{\infty} L(s)ds + \sup_{t\geq 0} tL(t)\right) < +\infty.$$

En utilisant le lemme 5.3.3, on conclut que

$$\begin{aligned} (g \diamond u)\,(t) &\leq C\left(tb(u(t),u(t)) + \int_0^t b(u(s),u(s))ds\right)^{(\rho-1)/\rho} \left\{(g^{\rho} \diamond u)\,(t)\right\}^{1/\rho} \\ &\leq k_8 C\left(\int_0^{\infty} L(s)ds + \sup_{t\geq 0} tL(t)\right)\left\{(g^{\rho} \diamond u)\,(t)\right\}^{1/\rho} \\ &\leq k_9\left\{(g^{\rho} \diamond u)\,(t)\right\}^{1/\rho}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\left(g^{\rho} \diamond u\right)(t) \geq k_9 \left\{(g \diamond u)(t)\right\}^{\rho}.$$

Moyennement à cette dernière inégalité et (5.30), nous obtenons pour tout $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} L'(t) \quad & \leq -k_1 \left\|u_t(t)\right\|_2^2 - k_2 b(u(t), u(t)) + \epsilon \left\|u(t)\right\|_p^p \\ & -k_4 \left\|h^{1/2} z_t\left(t\right)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 - \epsilon \int_{\Gamma_1} h(x)m(x)|z\left(t\right)|^2 d\Gamma \\ & -k_9 \xi \left\{(g \diamond u)(t)\right\}^{\rho}. \end{aligned}$$

D'autre part, de façon similaire à (5.32) et (5.33), on a

$$\begin{aligned} E^{\sigma}(t) \leq \quad & C \left[\left\|u_t(t)\right\|_2^2 + b(u(t), u(t)) + \int_{\Gamma_1} h(x)m(x)|z\left(t\right)|^2 d\Gamma \right. \\ & \left. - \left\|u(t)\right\|_p^p + \left(g^{\rho} \diamond u\right)(t) \right]. \end{aligned}$$

En combinant les deux dernières inégalités et (5.11), on obtient

$$L'(t) \leq -k_{10} L^{\rho}(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

où k_{10} est une constante positive. Une simple intégration de l'inégalité différentielle précédente entre t_0 et t conduit à

$$L(t) \leq \frac{K}{(1+t)^{1/(\rho-1)}}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Encore une fois en utilisant (5.11), l'estimation (5.28) est obtenue. Ceci achève la preuve. □

Chapitre 6

Explosion en temps fini

Nous donnons dans ce chapitre une conditions suffisante d'explosion de la solution pour une énergie initial assez grande. L'outil principal utilisé repose sur les techniques de Georgiev et Todorova.

6.1 Résultats préliminaires

Dans ce chapitre nous montrons que la solution du problème (4.1) s'explose en temps fini si l'énergie initiale est négative i.e.

$$E(0) = \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2}b(u_0, u_0) + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} mh\,|z_0|^2\, d\Gamma - \frac{1}{p}\,\|u_0\|_p^p < 0.$$

Nous commençons par démontrer les résultats préliminaires suivants :

Lemme 6.1.1. *Soit (u, z) solution du problème (4.1). Alors pour tout $t \in [0, T)$, on a*

$$\|u(t)\|_p^s \leq \; C\left(b(u(t), u(t)) + \|u(t)\|_p^p\right),$$

pour tout $2 \leq s \leq p$ et C est une constante positive.

Démonstration. Si $\|u(t)\|_p \leq 1$ alors, on en déduit de (4.5) et (4.7)

$$\|u(t)\|_p^s \leq \|u(t)\|_p^2 \leq \lambda^2\,\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq C\left(b(u(t), u(t)) + \|u(t)\|_p^p\right).$$

Si $\|u(t)\|_p > 1$, alors $\|u(t)\|_p^s \leq \|u(t)\|_p^p$. D'où la démonstration. □

Par ce lemme et (5.1), on a le résultat suivant :

Corollaire 6.1.1. *Soit (u,z) solution du problème (4.1). Alors pour tout $t \in [0,T)$, on a*

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_p^s \leq \quad & C(T)\Big(H(t) + \|u_t(t)\|_2^2 + b(u(t),u(t)) + \\ & + (g \diamond u)(t) + \int_{\Gamma_1} mh\,|z(t)|^2\, d\Gamma\Big),\end{aligned}$$

pour tout $2 \leq s \leq p$, où H est définie par (6.4) ci-dessous.

Théorème 6.1.1. *Soit (u,z) la solution de (4.1) donnée dans le théorème 4.3.1. Supposons en outre que g satisfait*

$$\int_0^\infty g(s)ds \leq \frac{(p/2)-1}{(p/2)-1+(N/(2pb_0))}, \tag{6.1}$$

et $E(0) < 0$. Alors, la solution de (4.1) s'explose en temps fini, i.e., il existe $T^* < \infty$ telle que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to T^{*-}} \quad & \Big[H(t) + \|u_t(t)\|_2^2 + b(u(t),u(t)) + \\ & (g \diamond u)(t) + \int_{\Gamma_1} mh\,|z(t)|^2\, d\Gamma\Big] = +\infty.\end{aligned}$$

6.2 Preuve du théorème 6.1.1

Par contradiction, nous supposons que la solution de (4.1) est globale en temps, alors pour chaque $T > 0$ fixé, il existe une constante C telle que pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$\begin{aligned}& H(t) + \|u_t(t)\|_2^2 + b(u(t),u(t)) + (g \diamond u)(t) + \\ & + \int_{\Gamma_1} mh\,|z(t)|^2\, d\Gamma \leq C.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Pour ε assez petit à choisir ultérieurement, on définit alors la fonction auxiliaire suivante

$$\begin{aligned}K(t) = \quad & H^{(1-\sigma)}(t) + \varepsilon\int_\Omega u(t)u_t(t)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Gamma_1} fhz^2(t)\,d\Gamma \\ & -\varepsilon\int_{\Gamma_1} huz(t)\,d\Gamma,\end{aligned} \tag{6.3}$$

où $0 < \sigma \leq \dfrac{p-2}{2p}$ et H est définie par

$$H(t) = -E(t). \tag{6.4}$$

Remarque 6.2.1. *La fonction K est une petite perturbation de l'énergie.*

De (5.1), (5.2) et (6.4) on en déduit que

$$0 < H\left(0\right) \leq H\left(t\right) = -E(t) \leq \frac{1}{p}\left\Vert u\left(t\right)\right\Vert_{p}^{p}, \qquad \forall t \geq 0. \tag{6.5}$$

Lemme 6.2.1. *Sous les hypothèses du théorème 6.1.1, on a*

$$\begin{aligned} K'\left(t\right) \geq \;& \varepsilon\kappa\Big[H(t) + \left\Vert u_t(t)\right\Vert_2^2 + b(u(t),u(t)) + \\ & + \left(g\diamond u\right)\left(t\right) + \int_{\Gamma_1} hm\left|z\left(t\right)\right|^2 d\Gamma\Big], \end{aligned} \tag{6.6}$$

où κ est une constante positive.

Démonstration. Dérivons (6.3) par rapport à t et utilisons le système (4.1), on obtient

$$\begin{aligned} K'\left(t\right) =\;& (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'\left(t\right) + \varepsilon\left\Vert u_t\right\Vert_2^2 - \varepsilon b(u(t),u(t)) \\ & + \varepsilon\left\Vert u\left(t\right)\right\Vert_p^p - \varepsilon\int_{\Gamma_1} hm\left|z\left(t\right)\right|^2 d\Gamma \\ & + \varepsilon\int_{\Omega} B\nabla u\left(t\right)\int_0^t g\left(t-s\right)\nabla u\left(s\right)dsdx. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Le dernier terme qui contient g du seconde membre de (6.7) peut être réécrit comme suit

$$\begin{aligned} & \int_0^t g\left(t-s\right)\int_{\Omega} B\nabla u\left(t\right)\nabla u\left(s\right)dxds \\ & = \sum_{i,j=1}^{N}\int_0^t g\left(t-s\right)\int_{\Omega} b_{ij}(x)\frac{\partial u(t)}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u(s)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(t)}{\partial x_i} + \frac{\partial u(t)}{\partial x_i}\right)dxds \\ & = \left(\int_0^t g\left(s\right)ds\right)b(u(t),u(t)) + \\ & \quad + \sum_{i,j=1}^{N}\int_0^t g\left(t-s\right)\int_{\Omega} b_{ij}(x)\frac{\partial u(t)}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u(s)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(t)}{\partial x_i}\right)dxds. \end{aligned} \tag{6.8}$$

En utilisant (G_1), les inégalités de Hölder et de Young, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^{N}\int_0^t g\left(t-s\right)\int_{\Omega} b_{ij}(x)\frac{\partial u(t)}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u(s)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(t)}{\partial x_i}\right)dxds \\ & \leq \frac{1}{4\delta}\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g\left(s\right)b_{ij}(x)\frac{\partial u(t)}{\partial x_j}ds\right)^2 dx + \\ & \quad + \delta\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g\left(t-s\right)\left(\frac{\partial u(s)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(t)}{\partial x_i}\right)ds\right)^2 dx \\ & \leq \int_0^t g\left(s\right)ds\frac{1}{4\delta b_0}\left(\max_{1\leq i\leq N}\sum_{j=1}^{N}\left\Vert b_{ij}\right\Vert_{\infty}^2\right)b(u(t),u(t)) + \delta\frac{N}{b_0}\left(g\diamond u\right)\left(t\right) \\ & \leq \frac{b_1}{4\delta b_0}\int_0^t g\left(s\right)dsb(u(t),u(t)) + \delta\frac{N}{b_0}\left(g\diamond u\right)\left(t\right), \end{aligned} \tag{6.9}$$

pour tout $\delta > 0$ et $b_1 = \max_{1\leq i\leq N} \sum_{j=1}^{N} \|b_{ij}\|_\infty^2$.

Insérons l'estimation (6.8) dans (6.7), en tenant compte de l'inégalité (6.9) et utilisons (5.1) pour remplacer $\|u(t)\|_p^p$. On en déduit de (6.7)

$$\begin{aligned} K'(t) \geq\ & \varepsilon\left(\frac{p}{2}+1\right)\|u_t(t)\|_2^2 + \varepsilon\left(\frac{p}{2}-1\right)\int_{\Gamma_1} hm\,|z(t)|^2\,d\Gamma \\ & +\varepsilon pH(t) + \varepsilon\left(\frac{p}{2}-\mu\frac{N}{b_0}\right)(g\diamond u)(t) \\ & +\varepsilon\left[\frac{p}{2}-1-\left(\frac{p}{2}-1+\frac{b_1}{4\delta b_0}\right)\int_0^t g(s)\,ds\right]b(u(t),u(t)). \end{aligned} \tag{6.10}$$

Utilisons (6.1) et prenons $0 < \delta < \dfrac{pb_0}{2N}$, on obtient

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{p}{2}-\mu\frac{N}{b_0} > 0, \\ c_2 &= \frac{p}{2}-1-\left(\frac{p}{2}-1+\frac{b_1}{b_0\mu}\right)\int_0^t g(s)\,ds > 0. \end{aligned}$$

On choisit ε assez petit de sorte que

$$K(0) = H^{(1-\sigma)}(0) + \varepsilon\int_\Omega u_0u_1dx - \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Gamma_1} fh\,|z_0|^2\,d\Gamma - \varepsilon\int_{\Gamma_1} hu_0z_0d\Gamma > 0.$$

Donc (6.10) prend la forme suivante

$$\begin{aligned} K'(t) \geq\ & \varepsilon\kappa\Big[H(t) + \|u_t(t)\|_2^2 + b(u(t),u(t)) + \\ & + (g\diamond u)(t) + \textstyle\int_{\Gamma_1} hm\,|z(t)|^2\,d\Gamma\Big], \end{aligned}$$

où $\kappa = \min\left\{c_1, c_2, p, \dfrac{p}{2}+1, \dfrac{p}{2}-1\right\}$. D'ou la fonction K est strictement positive et

$$K(t) \geq K(0) > 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{6.11}$$

□

Lemme 6.2.2. *Pour $\sigma > 1$ et sous les hypothèses du théorème 6.1.1, on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} K^{1/(1-\sigma)}(t) \leq\ & \tau\Big[H(t) + \|u_t(t)\|_2^2 + b(u(t),u(t)) + \\ & + (g\diamond u)(t) + \int_{\Gamma_1} hm\,|z(t)|^2\,d\Gamma\Big], \quad \forall t\in[0,T], \end{aligned} \tag{6.12}$$

où τ est une constante positive.

Démonstration. De la définition de K puisque les fonctions f, h sont strictement positives il vient

$$K(t) \leq H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \left| d \int_\Omega u(t) u_t(t)\, dx \right| + \varepsilon \left| \int_{\Gamma_1} hu(t)\, z(t)\, d\Gamma \right|.$$

Par conséquent, l'estimation ci-dessus conduit à

$$\begin{aligned} K^{1/(1-\sigma)}(t) \leq & \left[H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \left| \int_\Omega u(t) u_t(t)\, dx \right| + \varepsilon \left| \int_{\Gamma_1} hu(t)\, z(t)\, d\Gamma \right| \right]^{1/(1-\sigma)} \\ \leq & \; C_1 \left[H(t) + \left| \int_\Omega u(t) u_t(t)\, dx \right|^{1/(1-\sigma)} + \left| \int_{\Gamma_1} hu(t)\, z(t)\, d\Gamma \right|^{1/(1-\sigma)} \right] \end{aligned} \tag{6.13}$$

où C_1 est une constante positive.
Pour $p > 2$, en utilisant les inégalités de Hölder et de Young, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u(t) u_t(t) dx \right|^{1/(1-\sigma)} & \leq \| u(t) \|_2^{1/(1-\sigma)} \| u_t(t) \|_2^{1/(1-\sigma)} \\ & \leq C_2 \left(\| u(t) \|_p^{\mu/(1-\sigma)} + \| u_t(t) \|_2^{\theta/(1-\sigma)} \right), \end{aligned} \tag{6.14}$$

où $\dfrac{1}{\mu} + \dfrac{1}{\theta} = 1$ et C_2 dépend seulement de $\Omega,\ \mu,\ \theta$.
On prend $\theta = 2(1-\sigma)$, pour obtenir $\mu r = \dfrac{2}{1-2\sigma} \leq p$.
Par conséquent (6.14) devient

$$\left| \int_\Omega u(t) u_t(t) dx \right|^{1/(1-\sigma)} \leq C_2 \left(\| u(t) \|_p^s + \| u_t(t) \|_2^2 \right), \tag{6.15}$$

où $s = 2/(1-2\sigma) \leq p$.
Grâce au corollaire 6.1.1, on trouve pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u(t) u_t(t) dx \right|^{1/(1-\sigma)} \leq & \; C_3 \Big(H(t) + \| u_t(t) \|_2^2 + a(u(t), u(t)) + \\ & + (g \diamond u)(t) + \int_{\Gamma_1} hm \left| z(t) \right|^2 d\Gamma \Big). \end{aligned} \tag{6.16}$$

En outre, par le même procédé et en utilisant l'inégalité de trace, nous avons

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Gamma_1} hu(t)\, z(t)\, d\Gamma \right| \leq \\ & \leq \frac{\| h \|_\infty^{1/2} \| m \|_\infty^{1/2}}{m_0} \left(\int_{\Gamma_1} hm \left| z(t) \right|^2 d\Gamma \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_1} \left| u(t) \right|^2 d\Gamma \right)^{1/2} \\ & \leq \bar{C}_* \frac{\| h \|_\infty^{1/2} \| m \|_\infty^{1/2}}{m_0} \left(\int_{\Gamma_1} hm \left| z(t) \right|^2 d\Gamma \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left| \nabla u(t) \right|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young exactement comme dans (6.15), on en déduit

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Gamma_1} hu(t)\, z(t)\, d\Gamma \right|^{1/(1-\sigma)} \leq \\ & \leq C_4 \left[\| \nabla u(t) \|_2^{2/(1-2\sigma)} + \int_{\Gamma_1} hm \left| z(t) \right|^2 d\Gamma \right], \end{aligned} \tag{6.17}$$

où $C_4 = C_4(\bar{C}_*, \|h\|_\infty, \|m\|_\infty, m_0, \sigma)$. De (6.2) et (6.5), on a

$$\|\nabla u(t)\|_2^{2/(1-2\sigma)} \leq C^{2/(1-2\sigma)} \leq \frac{C^{2/(1-2\sigma)}}{H(0)} H(t).$$

Substituant l'inégalité ci-dessus dans (6.17), on trouve

$$\left| \int_{\Gamma_1} h(x) u(t) z(t) \, d\Gamma \right|^{1/(1-\sigma)} \leq C_5 \left[H(t) + \int_{\Gamma_1} hm \left| z(t) \right|^2 d\Gamma \right]. \tag{6.18}$$

Il résulte de (6.18), (6.16) et (6.13) que

$$\begin{aligned} K^{1/(1-\sigma)}(t) \leq \quad & \tau \Big[H(t) + \|u_t(t)\|_2^2 + b(u(t), u(t)) + \\ & + (g \diamond u)(t) + \int_{\Gamma_1} hm \left| z(t) \right|^2 d\Gamma \Big], \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

où τ est une constante positive. □

Suite de la preuve du théorème 3.2.1.
Par combinaison de (6.12) et (6.6), on arrive à

$$K'(t) \geq \frac{\varepsilon\kappa}{\tau} K^{1/(1-\sigma)}(t), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{6.19}$$

En intégrant l'inégalité (6.19) sur $(0,\ t)$ on obtient

$$K^{1/(1-\sigma)}(t) \geq \frac{1}{K^{1/(1-\sigma)}(0) - \kappa\varepsilon\sigma t / [\tau(1-\sigma)]}, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{6.20}$$

Ainsi K s'explose en temps fini

$$T^* \leq \frac{\tau(1-\sigma)}{\kappa\varepsilon\sigma K^{\sigma/(1-\sigma)}(0)}.$$

Comme l'estimation (6.20) est vérifiée sur $[0, T]$ pour tout $T > 0$ fixé, alors on peut choisir T de sorte que $T^* < T$.
De plus, on obtient de (6.12) que

$$\begin{aligned} \lim_{t \to T^{*-}} \quad & \Big[\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u\|_p^p + H(t) + \|u_t\|_2^2 + \\ & + (g \diamond u)(t) + \int_{\Gamma_1} hm \left| z(t) \right|^2 d\Gamma \Big] = +\infty, \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec (6.2). Ainsi, la solution du problème (4.1) s'explose en temps fini.

Conclusion et perspectives

Ce travail a permis d'apporter une contribution assez importante à l'étude qualitative des solutions de deux problèmes semi linéaires pour un opérateur fortement elliptique à coefficients variables. En se basant sur la méthode de point fixe et quelques techniques de compacité, nous avons analysé la question d'existence locale et l'unicité des solutions faibles pour un problème hyperbolique avec termes sources et dissipatifs dans la première partie de cette thèse et pour un problème d'ondes viscoelastiques avec des conditions aux limites acoustiques dans la seconde partie.

Ensuite, dans les seconds chapitres de chaque partie, moyennant la méthode du puits de potentiel, la méthode sur construction de la fonction Lyapunov équivalente à la fonctionnelle d'énergie, la méthode de Georgiev et Todorova et les techniques de Vittilaro et W.J. Liu, nous avons étudié l'existence globale des solutions et le comportement asymptotique de la fonctionnelle d'énergie associée aux problèmes considérés. Finalement, nous avons terminé par exhiber des conditions suffisantes garantissant l'explosion en temps fini des solutions.

Comme perspective, après la réalisation de ce travail, notre vision ultime est consacrée à la réalisation des objectifs suivants :

* Avoir les mêmes résultats obtenus en éliminant quelques hypothèses sur les données et sur l'énergie initiale qu'ont été considérées auparavant, en affaiblissant les conditions sur la fonction noyau g.

* Après avoir considéré d'autres problèmes intéressants en ajoutant des termes dissipatifs dans Ω ou sur la frontière, par exemple une dissipation fractionnaire faible, nous allons faire une étude complète sur l'existence locale et globale, comportement asymptotique de la fonctionnelle d'énergie et l'explosion des solutions en temps fini des solutions.

Bibliographie

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] G. Avalos, I. Lasiecka, and R. Rebarber, Uniform decay properties of a model in structural acoustics, *J. Math. Pures Appl. (9)*, 79 (10) (2000) 1057–1072.

[3] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa, D. Sforza, Decay estimates for second order evolution equations with memory, *J. Funct. Anal.* 254 (2008) 1342–1372.

[4] J. M. Ball, Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 28, no. 11 (1977) 473–486.

[5] J. T. Beale, Spectral properties of an acoustic boundary condition. *Indiana Univ. Math. J.*, 25 (9)(1976) 895–917.

[6] J. T. Beale and S. I. Rosencrans, Acoustic boundary conditions, *Bull. Amer. Math. Soc.* 80 (1974) 1276–1278.

[7] A. Benaissa and S. A. Messaoudi, Exponential decay of the solution of a nonlinearly damped wave equation, *Nonlinear Differ. Equ. Appl.* 12 (2005) 391–399.

[8] S. Berrimi, S. A. Messaoudi, Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source, *Nonlinear Analysis TMA* 64 (2006) 2314–331.

[9] Y. Boukhatem, B. Benabderrahmanne, Méthode de Faedo-Galerkin pour un problème aux limites non linéaires, *Anal. Univ. Oradea, fasc. Matematic* Tom XVI (2009) 167–181.

[10] Y. Boukhatem, B. Benabderrahmanne, Blow up of solutions for a semilineair hyperbolic equation, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Eqns* (40) (2012) 1–12.

[11] Y. Boukhatem, B. Benabderrahmanne, Existence and decay of solutions for a viscoelastic wave equation with acoustic boundary conditions, *Nonlinear Analysis : TMA* 97 (2014) 191–209.

[12] H. Brezis, Analyse fonctionelle, théorie et applications. *Masson, Paris*, 1983.

[13] F. Bucci and I. Lasiecka. Exponential decay rates for structural acoustic model with an over damping on the interface and boundary layer dissipation. *Appl. Anal.* 81 (4) (2002) 977–999.

[14] M. M. Cavalcanti, V .N . Domingos, J . S. Prates Filho, J. A . Soriano, Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping, *Differential Integral Equations* 14 (1) (2001) 85–116.

[15] M.M. Cavalcanti,

[16] A. T. Cousin, C. L. Frota, and N. A. Larkin, Global solvability and asymptotic behavior of a hyperbolic problem with acoustic boundary conditions, *Funkcial. Ekvac.* 44 (3) (2001) 471–485.

[17] C. L. Frota and J. A. Goldstein, Some nonlinear wave equations with acoustic boundary conditions, *J. Differential Equations* 164 (1) (2000) 92–109.

[18] C. L. Frota and N. A. Larkin, Uniform stabilization for a hyperbolic equation with acoustic boundary conditions in simple connected domains, *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications* 66 (2005) 297–312.

[19] F. Gazzola and M. Squassina, Global solutions and finite time blow up for damped semilinear wave equations, *Ann. I. H. Poincaré* 23 (2006) 185–207.

[20] V. Georgiev and G. Todorov, Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source term, *J. Differential Equations* 109 (1994) 295–308.

[21] S. Gerbi and B. Said-Houari, Local existence and exponential growth for a semilinear damped wave equation with dynamic boundary conditions, *Advances in Differential Equations* 13 (11–12) (2008) 1051–1074.

[22] P. J. Graber, Wave equation with porous nonlinear acoustic boundary conditions generates a well-posed dynamical system, *Nonlinear Anal.* 73 (2010) 3058–3068.

[23] P. J. Graber and B. Said-Houari, On the wave equation with semilinear porous acoustic boundary conditions, *Journal of Differential Equations* 252 (2012) 4898–4941.

[24] A. Haraux and E. Zuazua, Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems, *Arch. Rational Mech. Anal.* 150 (1988) 191–206.

[25] V. K. Kalantarov and O. A. Ladyzhenskaya, The ocurence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic type, *J. Soviet Math.* 10 (1978) 53–70.

[26] M. Kopackova, Remarks on bounded solutions of a semilinear dissipative hyperbolic equation, *Comment. Math. Univ. Carolin* 30 (4) (1989) 713–719.

[27] I. Lasiecka, Boundary stabilization of a 3-dimensional structural acoustic model, *J. Math. Pures Appl. (9)* 78(2) (1999) 203–232.

[28] I. Lasiecka, R. Triggiani, P.F. Yao, Inverse/observability estimates for second-order hyperbolic equations with variable coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* 235 (1999) 13–57.

[29] H. A. Levine, Instability and nonexistence of global solutions of nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = Au + F(u)$, *Trans. Amer. Math. Suc.* 192 (1974) 1–21.

[30] H. A. Levine, Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* vol. 5 (1974) 138–146.

[31] G. Li, Y. Sun, W. J. Liu, Global existence and blow-up of solutions for a strongly damped Petrovsky system with nonlinear damping, *Applicable Analysis* 91 (3) (2012) 575–586.

[32] J. L. Lions and E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1, 2, *Dunod* Paris (1968).

[33] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, *Dunod* Paris (1969).

[34] W. J. Liu, General decay and blow-up of solution for a quasilinear viscoelastic problem with nonlinear source, *Nonlinear Analysis* 73 6 (2010) 1890–1904.

[35] S. A. Messaoudi, Decay of the solution energy for a nonlinearly damped wave equation, *Arab. J. for Science and Engineering* 26 (2001) 75–93.

[36] S. A. Messaoudi, Global nonexistence in a nonlinearly damped wave equation, *Applicable Analysis* 80 (2001) 269–277.

[37] S . A. Messaoudi, General decay of solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source, *Nonlinear Analysis* 69 (2008) 2589–2598.

[38] S. A. Messaoudi, M. I. Mustafa, On the control of solutions of viscoelastic equations with boundary feedback, *Nonlinear Analysis : RWA* 10 (2009) 3132–3140.

[39] D. Mugnolo, Abstract wave equations with acoustic boundary conditions, *Math. Nachr.* 279 (3) (2006) 299–318.

[40] J. Y. Park and T. G. Ha, Well-posedness and uniform decay rates for the Klein-Gordon equation with damping term and acoustic boundary conditions, *J. Math. Phys.* 50 (1) :013506 18 (2009).

[41] J. Y. Park and S. H. Park, Decay rate estimates for wave equations of memory type with acoustic boundary conditions. *Nonlinear Analysis : TMA* 74 (3) (2011) 993–998.

[42] L. E. Payne and D. H. Sattinger, Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations, *Israel J. Math* 22 (3–4) (1975) 273–303.

[43] D. H. Sattinger, On global solutions for nonlinear hyperbolic equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* 30 (1968) 148–172.

[44] R. Triggiani and P. F. Yao, Carleman estimates with no lower-order terms for general Riemann wave equations, Global uniqueness and observability in one shot, *Appl. Math. Optim.* 46 (2–3) (2002) 331–375 (special issue dedicated to the memory of Jacques–Louis Lions).

[45] A. Vicente, Wave equation with acoustic/memory boundary conditions, *Bol. Soc. Parana. Mat.* (3) 27 (1) (2009) 29–39.

[46] E. Vitillaro, Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 149 2 (1999) 155–182.

[47] E. Vitillaro, Global existence for the wave equation with nonlinear boundary damping and source terms, *J. Differential Equations* 186 (1) (2002) 259–298.

[48] E. Vitillaro, A potential well theory for the wave equation with nonlinear source and boundary damping terms, *Glasg. Math. J.* 44 (3) (2002) 375–395.

[49] J. Q. Wu, Well-posedness for a variable-coefficient wave equation with nonlinear damped acoustic boundary conditions, *Nonlinear Anal. TMA* 75 (18) (2012) 6562–6569.

[50] J. Q. Wu, Uniform energy decay of a variable coefficient wave equation with nonlinear acoustic boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.* 399 (2013) 369–377.

[51] P. F. Yao, Observability inequality for exact controllability of wave equations with variable coefficients, *SIAM Journal on Control and Optimization* 37 (1999) 1568–1599.

[52] Y. Ye, Existence of global solutions for some nonlinear hyperbolic equation with a nonlinear dissipative term, *Journal of Zhengzhou University, Natural Science Edition* 29 3 (1997) 18–23.

[53] Y. Ye, On the decay of solutions for some nonlinear dissipative hyperbolic equations, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica. English Series* 20 1 (2004) 93–100.

[54] S. Q. Yu, On the strongly damped wave equation with nonlinear damping and source, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Eqns* 39 (2009) 1–18.