

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE FERHAT ABBAS – SETIF 1

MEMOIRE

**Présenté à la faculté de technologie
Département d'électronique**

Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

Option: communication

Par

KASMI HABIBA

THEME

**Développement d'une méthode de
déconvolution temporelle et récursive**

Soutenu le 12/ 11/2014 devant la commission d'examen :

M. Djahli F.	Professeur	à l'université de Sétif 1	Président
M. Belaala H.	M.C. B	à l'université de Sétif 1	Rapporteur
M. Boukezzoula N.	M.C. A	à l'université de Sétif 1	Examineur
M. Hassam A.	M.C. A	à l'université de Sétif 1	Examineur
M. Bartil A.	M.C. A	à l'université de Sétif 1	Examineur

Résumé

La déconvolution est la reconstruction d'un signal à partir de sa mesure via un système ayant une réponse impulsionnelle. Ce travail présente une nouvelle méthode de déconvolution temporelle et récursive qui s'appuie sur le choix d'une forme exponentielle de l'un des deux signaux convolués. Dans le sens physique cette méthode est parfaitement adaptée puisqu'en général les systèmes linéaires se modélisent bien par cette forme.

Si les conditions de convergences qui ont été développées et qui sont faciles à réaliser sont réunies, cette méthode de déconvolution présente des résultats satisfaisants.

Mots-clés :

Convolution, déconvolution, réponse impulsionnelle, méthode temporelle, méthode récursive,

Dédicaces

C'est avec un grand plaisir que je dédie ce modeste travail à la mémoire de tous les martyrs de la révolution algérienne et à celle de mon père.

Je le dédie aussi à toute personne qui m'est chère : famille, amis, voisins, collègues peu importe.

Kasmi Habiba épouse Thamri

Remerciements

Je tiens à remercier, mon encadreur, M. Belaala Hicham tout d'abord pour avoir proposé un sujet aussi intéressant et qui fait toujours partie des recherches récentes ensuite pour toute son énorme contribution où aucun mot ne sera en mesure de lui donner son véritable sens.

Mes remerciements vont à tous les membres du jury qui ont accepté de juger ce modeste travail. Ces membres sont :

- M. Djahli F. Professeur à l'université Sétif 1
- M. Boukezzoula N. M. C. A. à l'université Sétif 1
- M. Bertil A. M. C. A. à l'université Sétif 1
- M. Hassam A. M. C. A. à l'université Sétif 1

Comme je remercie toute personne ayant contribué à l'élaboration de ce travail.

Kasmi Thamri Habiba

SOMMAIRE

	<i>Pages</i>
Introduction	1
 CHAPITRE I Théorie de la déconvolution	
I. Introduction	3
II. Les Filtre	3
II-1 Généralités	3
II-2 Définition.....	4
II-3 Les filtres linéaires et invariants par translations dans le temps.....	4
II-3-1 Filtres linéaires	4
II-3-2 Filtres invariants par translation dans le temps	5
III. Convolution	5
III-1 Principe de convolution	6
III-2 Produit de convolution.....	8
III-2-1 Définition	8
III-2-2 Conséquence.....	8
III-2-3 Propriétés essentielles	9
III-2-3-1 commutativité du produit de convolution	9
III-2-3-2 Distribution du produit de convolution.....	9
III-2-3-3 Association du produit de convolution.....	9
III-2-3-4 Elément neutre du produit de convolution.....	9
III-2-3-5 Décalage en temps par convolution avec l'impulsion de Dirac.....	10
III-2-3-6 Périodisation par convolution avec le peigne de Dirac	10
III-3 Théorème de convolution.....	10
III-3-1 Transformation de Fourier.....	10
III-3-2 Enoncé du théorème	12
III-3-2 Application du théorème.....	12
III-3-2-1 Application Aux SLITT.....	12
III-3-2-2 Fonction de transfert.....	12
III-4 Equation de récurrence.....	13
III-4-1 Définition.....	13
III-4-2 Expression de l'équation de récurrence.....	13
III-4-3 Filtres temporels et récurrents.....	13
III-4-3-1 Définition	13
III-4-3-2 Types de filtres temporels et récurrents	14
III- 5 Matrice de convolution.....	15
III-6 Convolution en physique expérimentale	16

IV. Déconvolution	18
IV-1 Définition.....	18
IV-2 Solution de la déconvolution.....	18
IV-2-1 Solution dans l'espace-temps.....	19
IV-2-2 Solution dans l'espace fréquentiel.....	21
IV-2-2-1 Existence de la solution	22
IV-2-2-2 Unicité de la solution	23
V. conclusion	26

CHAPITRE II: Revue des méthodes de déconvolution existantes

I.Introduction	27
II. Méthodes directes	27
II-1 Méthodes opérant dans l'espace-temps.....	30
II-2 Méthodes opérant dans l'espace-fréquentiel	33
III. Méthodes paramétriques	36
IV. Méthodes à bande étendue	40
V. Conclusion	42

CHAPITRE III : Méthode de déconvolution développée

I. Introduction	43
II. Présentation de la méthode	43
II.1 Principe de la méthode.....	43
II-2 Développement de l'équation de récurrence.....	44
II-3 Discussion.....	48
III – Optimisation de la méthode	49
III –1 Etude de l'erreur.....	49
III-1-1 – Etude de l'erreur due au développement limité.....	50
III -1-2– Etude de l'erreur due à la structure récursive.....	56
III-2 – Interprétations.....	58
IV – Amélioration par un développement limité au second ordre	59
IV–1 Expression de l'équation de récurrence.....	59
IV –2 Discussion.....	62
IV – 3 Etude de l'erreur	62
IV-3-1-Erreur due au développement limité.....	62

IV-3-2- Discussion.....	64
V- Simulation	65
VI- Programme.....	69
VII- Résultats expérimentaux	69
VIII Conclusion.....	75
Conclusion générale.....	79
Bibliographie.....	82

Introduction

La déconvolution suscite, depuis plusieurs années, un intérêt renouvelé dans des techniques extrêmement variées, tel que l'automatique (représentation des processus), l'optique pour éliminer l'effet instrumental et l'effet atmosphérique (microscopie, télécopie, spectroscopie etc.), le radar, la radioastronomie et toute autre phénomène nécessitant une remonté à une grandeur $e(t)$ à par son observation $s(t)$ à travers un instrument h .

En traitement du signal ces trois grandeurs sont reliées entre elles par une équation dite de convolution qui permet d'exprimer l'observation $s(t)$ de n'importe quelle grandeur $e(t)$ en fonction d'un instrument h qui est un système linéaire utilisé pour transformer le signal $e(t)$ en un signal $s(t)$. La déconvolution est un procédé algorithmique destiné à inverser les effets de convolution et on dit que la déconvolution est un problème inverse.

D'une manière générale, le problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant les effets. Ainsi ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues.

Si le problème direct est la prédiction de l'état futur d'un système, connaissant son état actuel, on peut envisager deux types de problèmes inverses à savoir reconstituer l'état passé du système connaissant son état actuel ou déterminer les paramètres du système connaissant au moins une partie de son évolution. Si du point de vue physique le deuxième cas est connu sous le nom de l'identification de paramètres (du système), l'appellation de déconvolution par filtrage inverse est réservée au premier cas, en revanche du point de vue mathématique les deux cas sont identiques du fait de la commutativité de la convolution.

La déconvolution dite aveugle consiste à déterminer les paramètres d'un système et reconstituer son état passé connaissant l'état actuel.

L'étude des problèmes inverses demande souvent une bonne connaissance du problème direct, qui se traduit par le recours à une variété de notions tant physiques que mathématiques et la principale difficulté de cette étude consiste en la présence de plusieurs solutions et il est nécessaire de disposer d'informations supplémentaires pour discriminer entre elles. Par cette multitude de solutions, la déconvolution ne satisfait pas les conditions de Hadamard qui sont l'existence, l'unicité et la continuité de la solution donc elle fait partie des problèmes mal posés au sens de Hadamard.

De plus, dans les processus physiques, la mesure est souvent entachée d'un bruit de mesure donc l'opération de déconvolution sera rendu plus difficile par la présence de bruit et l'application de l'inverse analytique de déconvolution donnera un résultat médiocre. Il est alors nécessaire d'inclure la connaissance statistique du bruit et du signal pour améliorer l'optimisation de la solution recherchée.

L'existence et l'unicité de la solution n'étant pas assurées mathématiquement, il est significatif que ce soit des géophysiciens, des électroniciens, des radiologues, des opticiens etc. qui ont repris

l'étude de la déconvolution avec des hypothèses physiques et un grand nombre de méthodes de déconvolution a été développé. Elles sont basées sur différents types d'information a priori et donc adaptées à des applications variées.

Les principales techniques pour la mise en œuvre d'une méthode de déconvolution consistent en la régulation des problèmes dit mal posés et la méthode des moindres carrés répond le plus à ce type de techniques.

De notre côté, nous nous sommes intéressés à ce sujet et nous avons commencé à développer une méthode de déconvolution itérative dans l'espace-temps qui s'appuie sur le choix d'une forme exponentielle de l'un des deux signaux convolués. Dans le sens physique cette méthode est parfaitement adaptée puisqu'en général les systèmes linéaires se modélisent bien par cette forme. Le principe de la méthode peut s'appliquer aussi bien à l'identification du signal qu'à la méthode dite à filtrage inverse.

L'objectif de la méthode développée qui fait l'objet de cette thèse, est de déterminer de reconstruire un signal dont on connaît sa mesure qui est donné par un système ayant une réponse impulsionnelle de forme exponentielle.

Nous commençons notre étude par le rappel des notions fondamentales de la convolution puis définir la déconvolution et mettre en évidence les difficultés théoriques rencontrées pour résoudre l'équation de convolution telle que l'existence et l'unicité de la solution. Toutes ces notions feront l'objet d'un premier chapitre intitulé : Théorie de la déconvolution.

Le deuxième chapitre sera consacré à la présentation de quelques méthodes existantes pour résumer les différentes orientations utilisées dans la grande variété de méthodes développées jusqu'ici ainsi que leurs limitations. Si du point de vue théorique, la déconvolution ne peut se faire que par l'introduction d'information a priori, en pratique la résolution de l'équation de convolution est plus délicate par la présence du signal bruit. En effet, le filtre dont le gain est généralement important, peut sur amplifier le bruit, et le rendre prépondérant.

En raison de ces limitations, la conception d'autres méthodes de déconvolutions ou encore l'amélioration des méthodes existantes font partie de la recherche récente qui s'appuie sur l'évolution du traitement du signal.

Le troisième chapitre sera consacré à la méthode de déconvolution développée au cours de cette thèse. Nous aborderons tout d'abord le développement de l'approche fondamentale qui aboutit à la définition de la relation de base itérative qui relie les échantillons de la solution recherchée en fonction des échantillons mesurés (donc connus), puis nous définissons les caractéristiques fondamentales de cette méthode que nous appuyons par des résultats de simulation de cas réels.

Enfin une conclusion générale dresse un bilan de ce travail et propose quelques perspectives de recherche.

Chapitre I

THEORIE DE LA DECONVOLUTION

I. Introduction

L'objectif de cette étude est de présenter certains concepts fondamentaux de traitement du signal pouvant être utiles dans l'analyse et la représentation des phénomènes physiques.

La convolution est l'un des concepts les plus utilisés en physique, surtout avec la facilité des calculs qu'elle présente en exploitant certains outils mathématiques comme la transformée de Fourier par exemple. En effet, il est nécessaire de rappeler l'analogie entre systèmes physiques linéaires et équation de convolution et par la suite définir le terme déconvolution.

Une fois l'étude théorique de la déconvolution décrite, on montre les difficultés rencontrées lors de la résolution de l'équation de convolution, ce qui va expliquer pourquoi les méthodes de déconvolution ont des limitations, en effet, l'optimisation des solutions est possible par le choix de certains critères physiques qui font la différence entre les méthodes de déconvolution développées jusqu'à nos jours.

II Filtres

II-1 Généralités

Le traitement du signal désigne l'ensemble des opérations que l'on fait subir à un signal (analogique ou numérique) pour le transformer en un autre signal à travers un système.

Le système S est alors la partie qui relie le signal à transformer $x(t)$ au signal transformé $y(t)$ comme l'illustre la figure 1.

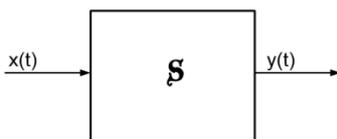


Figure 1 : Représentation schématique d'un système.

On distingue deux types de signaux :

- Les signaux analogiques qui sont représentés par des fonctions continues de type $x(t)$, où t est une variable continue.
- Les signaux numériques qui peuvent être représentés par des suites de nombres du type $x[n]$, où n représente le rang de l'échantillon.

II-2 Définition

Une définition intuitive de la notion filtre est d'adopter la vision entrée/sortie et de dire que le filtre est donc la partie qui relie la sortie d'un système à l'entrée.

En physique, tout système qui récupère une grandeur $s(t)$ (ou $s[n]$) à sa sortie à partir d'une grandeur $e(t)$ (ou $e[n]$) à son entrée est considéré comme filtre.

Autrement dit dans le schéma de la figure 1: $x(t) = e(t)$ et $y(t) = s(t)$.

Le filtre sera caractérisé par une fonction $h(t)$ appelée réponse impulsionnelle. La figure 2 représente le modèle élémentaire d'un filtre.

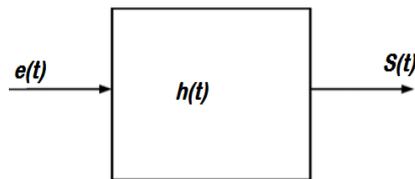


Figure 2 : Représentation schématique d'un filtre.

Donc le filtre est un système de mesure.

Les mesures physiques sont le plus souvent considérées comme des systèmes linéaires et invariants par translation dans le temps (généralement, en physique, seule la partie linéaire de la caractéristique des systèmes est prise en considération). On ne traite que ce type de filtre.

II-3 Les filtres linéaires et invariants par translations dans le temps

Les systèmes (ou filtres) linéaires invariants par translation dans le temps seront, dans la suite, notés SLITT.

Les SLITT sont caractérisés par les deux propriétés suivantes :

- Linéarité.
- Invariance par translation.

II-3-1 Filtres linéaires

On considère un filtre h qui fait correspondre à l'entrée $e(t)$ la sortie $s(t)$, on dira que le filtre h est linéaire si à l'entrée $\lambda e_1(t) + \mu e_2(t)$ correspond la sortie $\lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$ (où $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont les sorties correspondant respectivement aux entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$) comme l'illustre la figure 3.

Dans le cas des filtres numériques linéaires, à une combinaison linéaire en entrée $\lambda e_1[n] + \mu e_2[n]$, ils font correspondre une combinaison linéaire des signaux à la sortie $\lambda s_1[n] + \mu s_2[n]$.

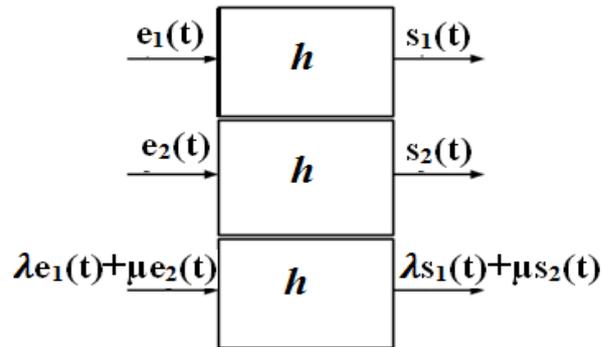


Figure 3: Représentation schématique d'un système linéaire.

II-3-2 Filtres invariants par translation dans le temps

Un filtre h est dit invariant par translation dans le temps si à l'entrée $e(t)$ correspond $s(t)$ et qu'à l'entrée $e(t-\tau)$ correspond la sortie $s(t-\tau)$, comme le montre la figure 4.

Cette propriété s'étend aux filtres numériques et on dira qu'un filtre numérique est invariant par translation dans le temps si pour une entrée $e[n]$ on a une sortie $s[n]$ avec n le numéro de l'échantillon, alors à l'entrée $e[n - n_0]$ on aura la sortie $s[n - n_0]$, c'est-à-dire si on décale l'entrée d'une quantité n_0 , la sortie de ce filtre subit le même décalage n_0 .

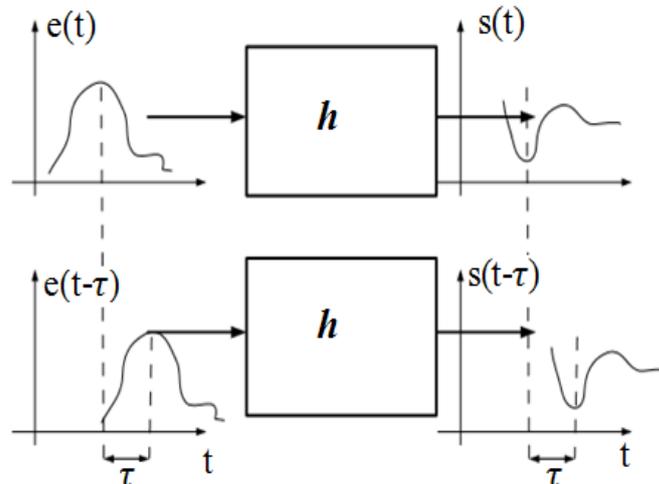


Figure 4: Représentation schématique d'un filtre invariant par translation dans le temps.

III- Convolution

La convolution est l'effet que produit un instrument de mesure qui donne à partir d'un phénomène physique non pas une réponse nette, mais un peu flou. Par exemple, dans le domaine de l'électronique, une impulsion infiniment brève, appliquée à l'entrée d'un amplificateur ne donne jamais en sortie une impulsion brève mais un signal de durée non nulle (d'autant plus étroite que la bande passante de l'appareil est plus élevée).

III-1 Principe de convolution

On considère un système h linéaire invariant par translation dans le temps.

La figure 5 représente le principe de convolution qui est répartie en quatre étapes :

- a) Si on suppose que le signal d'entrée est une impulsion d'amplitude unité à $t = 0$, on note ce signal $i(t)$. A ce signal d'entrée correspond une sortie, que l'on note $h(t)$ (figure 5.a).

$$i(t) \longrightarrow h(t)$$

On constate que $h(t)$ est la sortie d'un système lorsque le signal d'entrée est une impulsion d'amplitude unité. D'où son nom réponse impulsionnelle.

- b) Si on décale dans le temps d'une quantité τ l'impulsion en entrée, le système étant invariant par translation dans le temps, alors le motif $h(t)$ sera décalé dans le temps de la même quantité τ comme le montre la figure 5.b

$$i(t-\tau) \longrightarrow h(t-\tau)$$

- c) Si on considère deux impulsions d'amplitudes respectives A_1 et A_2 émises aux temps τ_1 et τ_2 , le système étant linéaire et invariant par translation dans le temps alors dans le premier cas le signal de sortie est $A_1 h(t-\tau_1)$ et dans le deuxième cas le signal de sortie est $A_2 h(t-\tau_2)$ comme le montre la figure 5.c

$$A_1 i(t-\tau_1) \longrightarrow A_1 h(t-\tau_1) \quad \text{et} \quad A_2 i(t-\tau_2) \longrightarrow A_2 h(t-\tau_2)$$

- d) On somme maintenant les deux signaux $A_1 i(t-\tau_1)$ et $A_2 i(t-\tau_2)$ en entrée du filtre, la sortie de ce dernier est $A_1 h(t-\tau_1) + A_2 h(t-\tau_2)$ comme l'illustre la figure 5.d

$$A_1 i(t-\tau_1) + A_2 i(t-\tau_2) \longrightarrow A_1 h(t-\tau_1) + A_2 h(t-\tau_2)$$

- e) On considère maintenant un signal quelconque $e(t)$, ce signal peut être vu comme la superposition d'impulsions d'amplitudes différentes et décalées dans le temps comme le montre la figure 5.e.

Donc si :

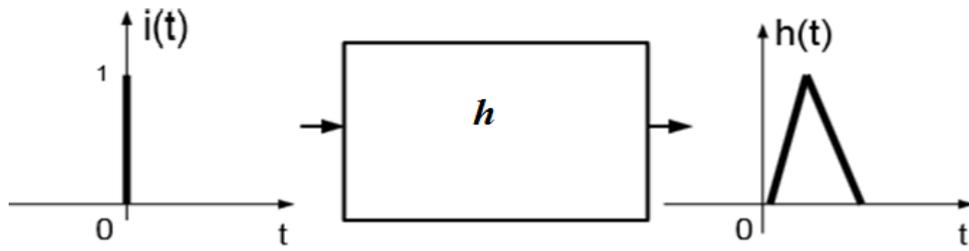
$$e(t) = \sum_i A_i i(t - \tau_i),$$

alors la sortie du filtre s'écrira :

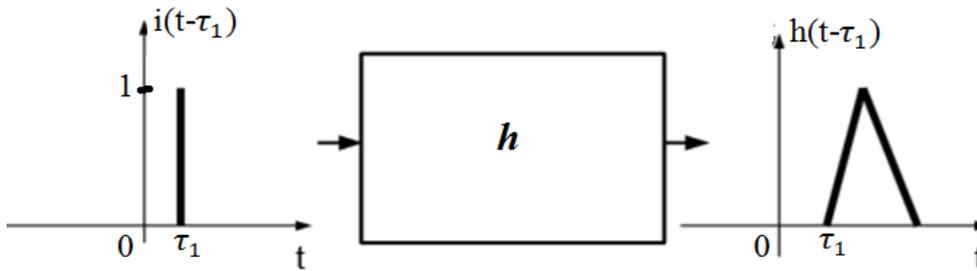
$$s(t) = \sum_i A_i h(t - \tau_i),$$

En passant à la limite continue, on trouve :

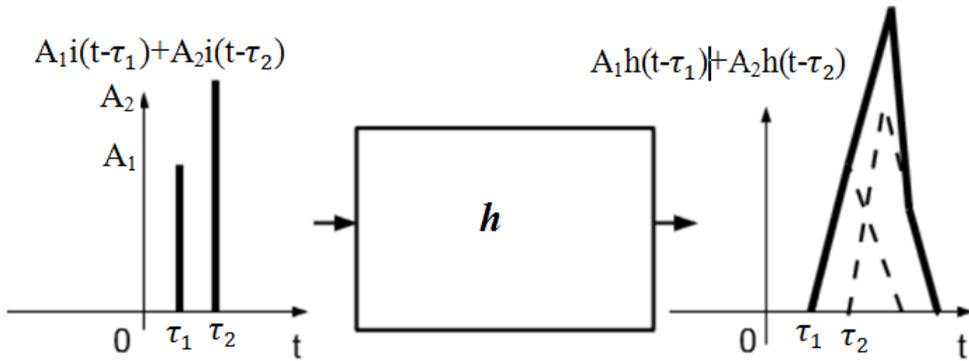
$$s(t) = \int e(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (1)$$



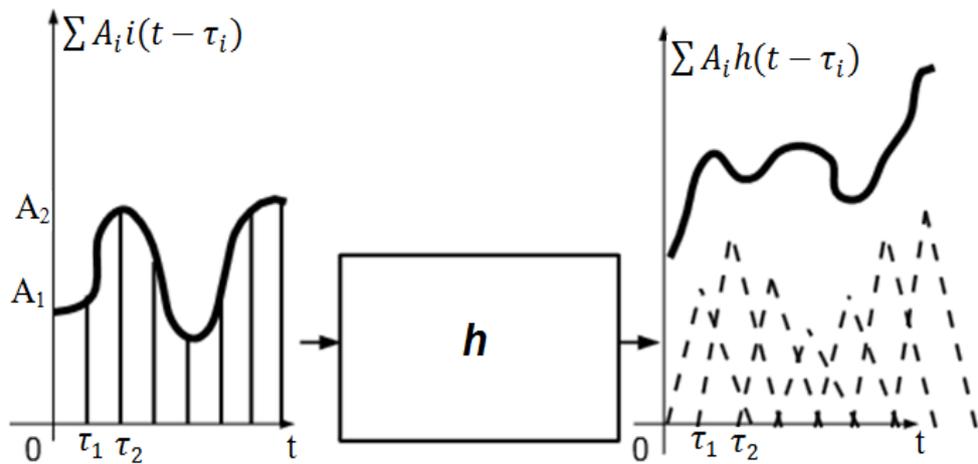
a) Réponse à une impulsion unité



b) Réponse à une impulsion unité décalée.



c) Réponse à deux impulsions décalées d'amplitudes A_1 et A_2



d) Réponse à plusieurs impulsions décalées d'amplitudes différentes

Figure 5 : Illustration du principe de convolution

La relation de l'équation (1) est la relation fondamentale des filtres linéaires et invariants par translation dans le temps, car elle permet de déterminer le signal de sortie $s(t)$ à partir d'un signal d'entrée quelconque $e(t)$ à condition de connaître la fonction $h(t)$ dite réponse impulsionnelle qui caractérise le filtre.

III-2 Produit de convolution

III-2-1 Définition

On appelle produit de convolution, noté $*$ ou \otimes , de deux signaux $e(t)$ et $h(t)$ l'opération suivante :

$$s(t) = e(t) * h(t) \quad (2)$$

Le produit de convolution détermine le signal de sortie, d'un filtre linéaire et invariant par translation dans le temps, en fonction de sa réponse impulsionnelle $h(t)$ et le signal d'entrée.

III-2-2 Conséquence

De l'équation (2) on déduit que le signal de sortie d'un filtre linéaire invariant par translation dans le temps caractérisé par la réponse impulsionnelle $h(t)$ ayant comme entrée le signal $e(t)$ est donné par le produit de convolution :

$$s(t) = e(t) * h(t)$$

Or la relation (1) exprime le signal de sortie d'un filtre linéaire et invariant par translation dans le temps :

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Donc

$$S(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3)$$

Dans le cas des filtres numériques, l'équation (3) devient :

$$S[n] = e[n] * h[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} e[m] h[n - m] \quad (4)$$

Où $e[n]$ et $s[n]$ sont respectivement l'entrée et la sortie du filtre numérique et $h[n]$ est sa réponse impulsionnelle.

Et on dit que le filtrage linéaire discret repose sur la convolution discrète de N échantillons du signal d'entrée (incident) $(e)_{i \in \{1, \dots, N\}}$, avec $h = (h_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ la réponse impulsionnelle discrète du filtre considéré. Le $k^{\text{ième}}$ élément de la sortie du filtre est

$$S_k = \sum_{i=1}^N e_i h_{k-i} \quad (5)$$

III-2-3 Propriétés essentielles

Nous avons jugé utile de mentionner ces propriétés puisqu'elles présentent une importance considérable dans notre thèse en particulier la commutativité.

(Toutes ces propriétés se démontrent facilement.)

Les différentes propriétés suivantes seront valables aussi bien pour les signaux continus que pour les signaux numériques.

III-2-3-2 commutativité du produit de convolution

Le produit de convolution est commutatif

Soient deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ alors :

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \quad (6)$$

III-2-3-2 Distribution du produit de convolution

Le produit de convolution est distributif :

Soient 3 fonctions $f(t)$ et $g(t)$ et $h(t)$ alors :

$$f(t) * (g(t) + h(t)) = (f(t) * g(t)) + (f(t) * h(t)) \quad (7)$$

III-2-3-3 Association du produit de convolution

Le produit de convolution est associatif :

Soient 3 fonctions $f(t)$ et $g(t)$ et $h(t)$ alors :

$$(f(t) * (g(t) * h(t))) = (f(t) * g(t)) * h(t) \quad (8)$$

III-2-3-4 Élément neutre du produit de convolution

La fonction de Dirac $\delta(t)$ est l'élément neutre du produit de convolution.

De ce fait le produit de convolution d'une fonction $f(t)$ et de la fonction de Dirac est la fonction $f(t)$ autrement dit :

$$f(t) * \delta(t) = \delta(t) * f(t) = f(t)$$

La réponse impulsionnelle $h(t)$ est définie par cette propriété à savoir :

Si $\delta(t)$ est le signal d'entrée d'un filtre caractérisé par la fonction $h(t)$ alors le signal de sortie

de ce filtre est :

$$\delta(t) * h(t) = h(t) * \delta(t) = h(t) \quad (9)$$

III-2-3-5 Décalage en temps par convolution avec l'impulsion de Dirac

Il est possible de décaler une fonction $f(t)$ d'une quantité t_0 en utilisant le produit de convolution de cette fonction par la fonction de Dirac :

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0) \quad (10)$$

III-2-3-6 Périodisation par convolution avec le peigne de Dirac

Si $\text{III}(t-T)$ symbolise la fonction d'un peigne de Dirac de période T alors le produit de convolution d'une fonction $f(t)$ par le peigne de Dirac est comme suit :

$$f(t) * \text{III}(t-T) = \sum_n f(t - nT) \quad (11)$$

Cette propriété montre que convoluer une fonction $f(t)$ avec un peigne de Dirac de période T revient à construire une fonction périodique de période T dont le motif élémentaire est donnée par la fonction de départ $f(t)$.

III-3 Théorème de convolution

Le théorème de convolution est défini dans le domaine des fréquences alors on présente un bref récapitulatif des transformations de Fourier utiles pour étudier les propriétés fréquentielles des signaux continus et discrets pour pouvoir énoncer le théorème de convolution.

III-3-1 Transformation de Fourier

Soit $g(t)$ une fonction périodique de période T

On appelle transformée de Fourier de la fonction $g(t)$, la fonction notée $\hat{g}(\omega)$ avec

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (12)$$

où $\omega = 2\pi f$ avec $f = \frac{1}{T}$ = la fréquence de la fonction $g(t)$

$\hat{g}(\omega)$ sera notée dans la suite par $G(\omega)$

d'où $F(g(t)) = \text{TF}(g(t)) = \hat{g}(\omega) = G(\omega)$

ou encore $g(t) \xrightarrow{\mathbf{TF}} G(\omega)$; TF étant la transformée de Fourier.

La transformée de Fourier a sa transformée de Fourier inverse notée \mathbf{TF}^{-1} qui permet de retrouver $g(t)$ connaissant sa transformée de Fourier $G(\omega)$. Elle est définie par cette équation

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (13)$$

$$G(\omega) \xrightarrow{\mathbf{TF}^{-1}} g(t) \quad (14)$$

On peut résumer la transformée de Fourier de la fonction $g(t)$ et sa transformée inverse comme suit :

$$g(t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{TF}} \\ \xleftarrow{\mathbf{TF}^{-1}} \end{array} G(\omega) \quad (15)$$

De la relation (15) on peut déduire une propriété très importante en traitement du signal à savoir : la transformée de Fourier permet le passage du domaine des temps aux domaines des fréquences ou l'inverse.

III-3-2 Enoncé du théorème

Soient $f(t)$ et $g(t)$, deux fonctions intégrables sur l'axe des réels alors la transformée de Fourier du produit de convolution de ces fonctions est le produit simple des transformées de Fourier de chacune d'elles :

$$\mathbf{TF}\{f(t) * g(t)\} = \mathbf{TF}(f(t)).\mathbf{TF}(g(t))$$

$$\mathbf{TF}\{f(t)*g(t)\} = F(\omega).G(\omega) \quad (16)$$

Cette relation qui est appelée théorème de convolution, est très importante du fait qu'elle peut transformer un produit de convolution (difficile à manipuler) en un produit simple. Elle justifie l'emploi intensif de la transformée de Fourier en traitement du signal.

III-3-2 Application du théorème de convolution

III-3-2-1 Application Aux SLITT

Dans le domaine des temps, nous avons vu qu'un filtre linéaire et invariant par translation dans le temps est caractérisé par le produit de convolution décrit par l'équation (2)

$$s(t) = e(t)*h(t)$$

où $s(t)$ et $e(t)$ sont respectivement le signal de sortie et le signal d'entrée du filtre alors que $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre.

D'après le théorème de convolution, la transformée de Fourier de cette relation devient :

$$S(\omega) = H(\omega).E(\omega) \quad (17)$$

Où $S(\omega)$ est la transformée de $s(t)$, $H(\omega)$ est la transformée de $h(t)$ et $E(\omega)$ est la transformée de $e(t)$.

D'après l'équation (17), on peut supposer qu'une fois $H(\omega)$ connue, la détermination de n'importe quelle sortie pour une entrée donnée se fait par une simple multiplication (entre ces deux grandeurs).

III-3-2-2 Fonction de transfert

Soient $h(t)$ la réponse impulsionnelle d'un SLITT et $H(\omega)$ sa transformée de Fourier

Avec :

$$h(t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{TF}} \\ \xleftarrow{\text{TF}^{-1}} \end{array} H(\omega) \quad (18)$$

On appelle fonction de transfert la fonction $H(\omega)$ reliant la sortie et l'entrée d'un SLITT dans le domaine fréquentiel.

De l'équation (17) on tire l'expression de la fonction de transfert :

$$\mathbf{H(\omega) = \frac{S(\omega)}{E(\omega)}} \quad (19)$$

La fonction de transfert caractérise entièrement un filtre, elle contient l'intégralité de ces propriétés physiques. En revanche du point de vue mathématique $H(\omega)$ ne peut exister que si $E(\omega)$ est non nulle.

On reviendra sur ce problème d'existence aux chapitres suivants vu son importance dans la mise en œuvre de la méthode de déconvolution.

L'information sur un filtre est contenue soit dans la réponse impulsionnelle $h(t)$, soit dans la fonction de transfert $H(\omega)$ qui sont deux représentations d'un même filtre, l'une dans l'espace des temps, l'autre dans l'espace des fréquences. Selon le problème, il est intéressant de travailler avec l'une ou l'autre représentation.

III-4 Equation de récurrence

III-4-1 Définition

On appelle équation de récurrence l'équation de convolution appliquée aux signaux discrets.

III-4-2 Expression de l'équation de récurrence

L'équation de convolution d'un filtre numérique est donnée par l'équation (4) et comme le produit de convolution est commutatif, alors on peut écrire :

$$S[n] = e[n] * h[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} e[m]h[n - m] = \sum_{-\infty}^{+\infty} h[m]e[n - m]$$

D'après la définition, cette équation exprime aussi l'équation de récurrence que l'on peut écrire sous sa forme générale comme suit:

$$S[n] + a_1 S[n-1] + \dots + a_N S[n-N] = h_0 e[n] + h_1 e[n-1] + \dots + h_P e[n-P] \quad (20)$$

L'équation de récurrence est une combinaison linéaire des échantillons d'entrée $e[n]$ et de sortie $s[n]$.

L'équation de récurrence simplifiée devient :

$$S[n] = h_0 e[n] + h_1 e[n-1] + \dots + h_p e[n-p] \quad (21)$$

On peut dire que l'équation de récurrence permet de déterminer la sortie d'un filtre numérique en appliquant un certain nombre de combinaisons linéaires.

III-4-3 Filtres temporels et récursifs

III-4-3-1 Définition

Les filtres caractérisés par une équation de récurrence sont appelés filtres temporels et récursifs.

III-4-3-2 Types de filtres temporels et récursifs

Il existe deux grandes catégories de filtres temporels et récursifs selon la particularité de l'équation de récurrence :

- Les filtres à réponse impulsionnelle finie (**RIF**)
- les filtres à réponse impulsionnelle infinie (**RII**)

III-4 -3-2-1 Filtre RIF

Le filtre **RIF** est caractérisé par une équation temporelle de type :

$$S[n] = h_0 e[n] + h_1 e[n-1] + \dots + h_p e[n-p]$$

Le nombre de termes correspond à l'ordre du filtre.

Par exemple, l'équation de récurrence d'un filtre RIF du premier ordre se simplifie et devient :

$$S[n] = h_0 e[n] + h_1 e[n - 1] \quad (22)$$

En revanche si l'équation de récurrence d'un filtre RIF prend cette forme :

$$S[n] = h_0 e[n] + h_1 e[n - 1] + h_2 e[n - 2] \quad (23)$$

il est du second degré.

III-4 -3-2-2 Filtre RII

Le filtre **RII** est caractérisé par l'équation de récurrence simplifiée suivante :

$$S[n] + a_1 S[n-1] + \dots + a_N S[n-N] = e[n]$$

Donc

$$S[n] = e[n] - a_1 S[n-1] - \dots - a_N S[n-N] \quad (24)$$

L'équation de récurrence d'un filtre **RII** du premier ordre est :

$$S[n] = e[n] - a_1 S[n - 1] \quad (25)$$

L'équation de récurrence d'un filtre **RII** du second ordre purement récursif prend cette forme :

$$S[n] = e[n] - a_1S[n - 1] - a_2S[n - 2] \tag{26}$$

III-5 Matrice de convolution

La matrice de convolution est une écriture de l'équation de récurrence (donc de l'équation de convolution) sous forme matricielle.

Si l'on considère l'équation de récurrence (21)

$$S[n] = h_0 e[n] + h_1 e[n-1] + \dots + h_p e[n-P]$$

Donc

$$S_1 = h_0 e_1$$

$$S_2 = h_0 e_2 + h_1 e_1$$

$$S_3 = h_0 e_3 + h_1 e_2 + h_2 e_1$$

$$S_4 = h_0 e_4 + h_1 e_3 + h_2 e_2 + h_3 e_1.$$

$$\dots = \dots\dots\dots$$

$$\dots = \dots\dots\dots$$

$$S_N = h_0 e_N + h_1 e_{N-1} + h_2 e_{N-2} + h_3 e_{N-3} \dots \dots h_p e_{N-P}$$

Ceci peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$\mathbf{S} = \mathbf{H.E} \tag{27}$$

Où $\mathbf{S} \in R^N$ et $\mathbf{E} \in R^M$

Avec :

$\mathbf{S} = [s_1, s_2, \dots, s_N]^t$ est le vecteur $N \times 1$ des échantillons du signal de sortie du filtre (échantillons du signal de mesure).

$\mathbf{E} = [e_1, e_2, \dots, e_M]^t$ est le vecteur de dimension $M \times 1$ des échantillons du signal d'entrée du filtre (échantillons du signal à mesurer).

\mathbf{H} est une matrice $N \times M$ faisant intervenir la réponse impulsionnelle \mathbf{h} du filtre.

\mathbf{H} est appelée matrice de convolution $N \times M$ associée à la réponse impulsionnelle finie h .

Où $\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_p]$ est un vecteur de dimension $P \times 1$

III-6 Convolution en physique expérimentale

Les mesures physiques sont, dans la grande majorité des cas, réalisées à l'aide de systèmes linéaires (ou parfois on ne considère que la partie linéaire de la caractéristique), La convolution est de ce fait omniprésente.

En réalité la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système physique \mathbf{h} soit défini par un opérateur de convolution est que ce système soit :

- Linéaire (au sens mathématique du terme),
- Continu,
- invariant par translation (stationnaire).

Alors Si $e(t)$ est l'entrée (la quantité à mesurer) d'un système \mathbf{h} et $s(t)$ est sa sortie (la mesure de $e(t)$), Les deux variables sont reliées par l'équation de convolution (3)

$$s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Si théoriquement l'équation de convolution paraît compliquée. La situation, en physique expérimentale peut être plus compliquée en présence du bruit d'entrée et de sortie qui introduisent un caractère aléatoire dans les signaux mesurés .

La figure 6 représente un système de mesure physique où l'on constate l'addition d'un signal bruit à l'entrée et d'un autre à la sortie.

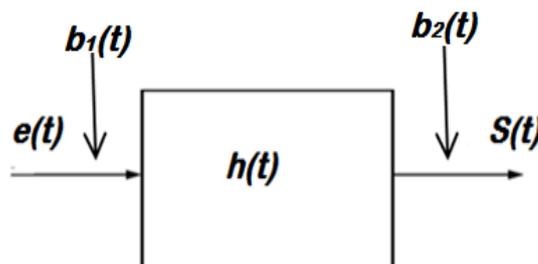


Figure 6 : Représentation général d'un système de mesure physique.

La grandeur d'entrée $e(t)$ peut être affectée d'un bruit $b_1(t)$, c'est le cas si un canal fluctuant s'interpose entre le signal d'entrée et le système physique h et la sortie $S(t)$ est toujours bruitée par le bruit propre $b_2(t)$ du système de mesure.

Les bruits $b_1(t)$ (bruit d'entrée) et $b_2(t)$ (bruit de sortie) sont souvent de types additifs dont les propriétés statistiques peuvent être connues ou non connues.

Dans le cas des signaux additifs, $b_1(t)$ et $b_2(t)$ peuvent être ramenés à un seul bruit $b(t)$ en sortie qui va représenter toutes les influences de la mesure qui seront dues aux différentes perturbations rencontrées, (exemple : erreur de transmission, bruit thermique, bruit de quantification etc.)

La figure 7 montre la représentation simplifiée d'un système physique.

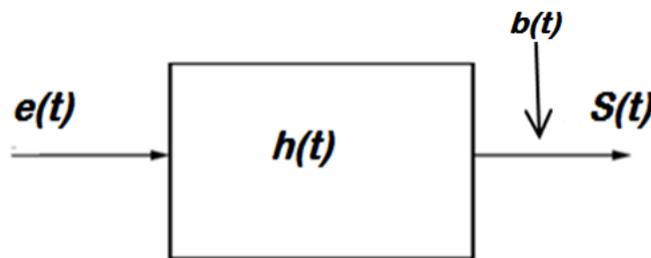


Figure 7 : Représentation simplifiée d'un système de mesure.

L'équation de convolution qui caractérise un système physique s'écrira alors :

- Dans l'espace-temps :

$$\text{En continu : } \mathbf{s}(t) = \mathbf{e}(t) * \mathbf{h}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (28)$$

$$\text{En discret : } \mathbf{S} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \quad (29)$$

Avec :

- \mathbf{S} un vecteur de dimension $N \times 1$ des échantillons de mesure.
- \mathbf{E} un vecteur de dimension $M \times 1$ des échantillons du signal à mesurer.
- \mathbf{B} le vecteur de dimensions $N \times 1$ des échantillons des perturbations.
- \mathbf{H} la matrice de convolution $M \times N$.

- Dans l'espace fréquentiel :

$$S(\omega) = H(\omega) \cdot E(\omega) + B(\omega) \quad (30)$$

Avec $B(\omega)$ la transformée de Fourier du signal bruit $b(t)$.

IV- Déconvolution

IV-1 Définition

On propose en général la définition suivante :

La déconvolution est la résolution de l'équation de convolution.

Donc la déconvolution consiste à résoudre les équations suivantes :

$$\text{Dans l'espace-temps :} \quad s(t) = e(t) * h(t)$$

$$S = E.H$$

$$\text{Dans l'espace fréquentiel :} \quad S(\omega) = E(\omega).H(\omega)$$

La déconvolution se présente comme étant le problème inverse de la convolution.

Dans les sciences appliquées l'équation de convolution donne lieu à deux problèmes inverses de grande importance.

- a. L'identification : c'est la détermination des paramètres d'un système dont on connaît le signal d'entrée et sa mesure.
- b. Le filtrage inverse : c'est la reconstruction d'un signal à partir de sa mesure via un système caractérisé par une réponse impulsionnelle parfaitement connue.

La déconvolution peut être un filtrage inverse ou une identification.

L'opération qui consiste à reproduire un signal à partir de sa mesure et déterminer les paramètres du système de mesure à la fois (identification + filtrage inverse) est appelée : déconvolution aveugle.

L'objectif de notre travail est la mise en œuvre d'une méthode de déconvolution qui repose sur le choix d'une forme exponentielle de l'un des deux signaux convolués.

Avec ce choix la déconvolution consiste à déterminer :

soit une estimation $\hat{e}(t)$ la plus proche possible à une grandeur $e(t)$ appliquée à l'entrée d'un système de mesure à réponse impulsionnelle $h(t)$ de forme exponentielle qui présente à sa sortie, la grandeur mesurée $s(t)$ (connue) donc c'est un filtrage inverse.

soit une estimation $\hat{h}(t)$ de la réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système attaqué par un signal $e(t)$ de forme exponentielle en se basant sur l'historique de son signal de sortie $s(t)$, dans ces conditions la déconvolution est une identification.

Pour le développement des calculs nous avons opté pour le deuxième cas et nous pouvons dire que le travail sera identique si l'on considère le premier cas puisque nous n'avons ajouté aucune condition supplémentaire lors du choix du signal pouvant prendre la forme exponentielle.

IV-2 Solution de la déconvolution

On suppose la déconvolution qui consiste à reconstituer un signal $e(t)$ à partir de sa mesure $s(t)$ via un système linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$ connue.

La déconvolution est donc la résolution de l'équation de convolution.

Or la forme de l'expression de l'équation de convolution dépend de l'espace de travail, le principe de la résolution peut ne pas être identique ;

IV-2-1 Solution dans l'espace-temps

a) Cas du domaine continu

L'équation de convolution en continu est :

$$s(t) = e(t) * h(t)$$

En effet pour que cette équation ait une solution il faut que la réponse impulsionnelle $h(t)$ possède un inverse de convolution qu'on note h_*^{-1} tel que :

$$h(t) * h_*^{-1}(t) = \delta(t) \quad (31)$$

Avec $\delta(t)$ l'impulsion de Dirac qui est l'élément neutre de l'opération de convolution.

Dans ce cas la résolution de l'équation de convolution est immédiate :

$$s(t) * h_*^{-1} = e(t) * h(t) * h_*^{-1}(t) = e(t) * \delta(t) = e(t).$$

Donc

$$e(t) = s(t) * h_*^{-1}(t) \quad (32)$$

Des études ont montré que $h_*^{-1}(t)$ n'existe pas toujours et dans le cas où elle existe elle ne peut pas être unique, car une division par zéro entraîne une infinité de solution qui se traduit par une instabilité considérable du signal.

Les problèmes rencontrés par les méthodes de déconvolution qui se basent sur l'inverse de la réponse impulsionnelle sont appelés problèmes inverses et ils font partis des problèmes inverses mal posés au sens de Hadamard

Un problème inverse est dit bien posé si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- L'existence de la solution.
- L'unicité
- La continuité.

Si une seule condition n'est pas satisfaite le problème inverse est dit mal posé.

Et la solution sera instable.

En pratique le problème devient plus compliqué encore. En effet, la mesure ne dépend que rarement rien que du signal à mesurer il y'a toujours l'addition du signal bruit.

Nous avons vu que l'équation de convolution d'un système réel est donnée par l'équation de la formule (28) :

$$s(t) = e(t)*h(t) + b(t)$$

$b(t)$ le signal bruit additionné.

On signale que le bruit est d'une importance considérable dans l'opération de déconvolution. Il constitue le plus souvent, la limitation d'un nombre significatif de méthodes de déconvolution proposées jusqu'à nos jours.

Les techniques utilisées pour résoudre les équations de convolution sont très difficiles à mettre en œuvre dans le domaine continu et depuis l'avènement de l'informatique, la déconvolution numérique est de plus en plus utilisée.

b) Cas du domaine discret :

L'équation de convolution en discret est :

sous la forme matricielle et dans le cas idéal, L'équation de convolution en discret est donnée par l'expression 27

$$\mathbf{S} = \mathbf{H.E}$$

Où \mathbf{H} est la matrice de convolution.

En présence du bruit l'équation 27 devient :

$$\mathbf{S} = \mathbf{H.E} + \mathbf{B}$$

Avec - \mathbf{S} un vecteur de dimension $N \times 1$ des échantillons de mesure.

- \mathbf{E} un vecteur de dimension $M \times 1$ des échantillons du signal à mesurer.

- \mathbf{B} le vecteur de dimensions $N \times 1$ des échantillons des perturbations.
- \mathbf{H} la matrice de convolution $M \times N$.

Pour reconstruire \mathbf{E} il suffit d'inverser la matrice \mathbf{H} du point de vue mathématique, mais en pratique le problème d'existence et d'unicité de la solution se pose.

En pratique, l'inversion numérique de cette matrice est conditionnée par le choix de certains critères. Le critère le plus utilisé dans les méthodes de déconvolution se basant sur l'inversion de la matrice est le critère des moindres carrés.

Certaines méthodes proposent de chercher la solution la plus proche en faisant intervenir la minimisation d'un critère de vraisemblance $J_H(\mathbf{E}, \mathbf{S})$ du signal estimé.

L'estimation $\hat{\mathbf{E}}$ retenue étant celle optimisant ce critère. Parmi les critères les plus utilisés dans les méthodes de déconvolution se trouve celui des moindres-carrés de l'erreur résiduelle :

$$J_H(\mathbf{E}, \mathbf{S}) = \|\mathbf{S} - \mathbf{H}\mathbf{E}\|^2 \quad (33)$$

Donc en utilisant la méthode de solution qui minimise la distance quadratique :

$$\|\mathbf{S} - \mathbf{H}\mathbf{E}\|^2$$

En pratique, l'inversion de cette matrice est conditionnée par le choix du critère des moindres carrés. Pour satisfaire la condition de minimisation de la distance quadratique, il faut apporter une information à priori sur la solution recherchée (ce type d'information sera fixée physiquement).

D'après la publication de travaux récents [24] ce type de méthode présente encore des limites malgré l'évolution de la technologie. Surtout par la présence du bruit en pratique.

On signale que le bruit est d'une importance considérable dans l'opération de déconvolution. Il constitue le plus souvent, la limitation d'un nombre significatif de méthodes de déconvolution proposées jusqu'à nos jours.

Ces limitations n'ont pas pu être résolues comme le précise l'évolution de la recherche. Par exemple on voit que vers les années soixante-dix, ces inconvénients ont été mis en évidence dans les travaux de Biraud, Y.G. [1] et que vers les années 2000 de nombreux travaux

précisent que les comme on le constate dans les travaux de O. Strauss et A. Rico [Francophonie] en 2009. méthodes de déconvolution présentent encore des limitations .

D'autres propositions sont apportées, pour éviter la méthode directe de la matrice inverse qui dans certains cas, ne répond pas aux exigences de la méthode (manque d'information à priori par exemple), on envisage la solution par procédure itérative en utilisant l'équation de convolution du $k^{\text{ième}}$ élément de la sortie du filtre (du signal mesuré ou encore connu) donné par l'expression 5 :

$$S_k = \sum_{i=1}^N e_i h_{k-i}$$

Des méthodes ont été développées et même publiées mais leurs applications est restreintes.

IV-2-2 Solution dans l'espace fréquentiel

Nous avons vu que l'équation de convolution (formule (17)) dans le domaine des fréquences peut s'écrire comme suit :

$$S(\omega) = E(\omega).H(\omega)$$

Où $\omega = 2\pi f$ avec f = fréquence alors:

$$S(f) = E(f).H(f) \quad (34)$$

On insiste sur l'importance de la transformée de Fourier, car en plus de constater que l'équation de convolution devient une simple opération de multiplication donc très simple à manipuler, elle présente d'autres avantages comme par exemple : dans le cas où $H(f)$ est infiniment dérivable, les fonctions propres des filtres linéaires ne peuvent être que des exponentielles complexes. D'où l'intérêt de "entrée et sortie" sur une base complète orthogonale qui se conserve lors du passage à travers un filtre.

La solution de l'équation (34) est :

$$E(f) = \frac{1}{H(f)} \cdot S(f) \quad (35)$$

Si du point de vue mathématique la solution de l'équation (34) paraît directe et ne pose aucun problème, en revanche en physique le problème d'existence et d'unicité de la solution se pose aussi.

En effet, pour que la solution (35) soit possible : il faut que $\frac{1}{H(f)}$ existe et soit unique.

Autrement dit il faut satisfaire les conditions suivantes :

- **Condition d'existence :**

Pour que $\frac{1}{H(f)}$ existe il faut que le terme $H(f)$ ne s'annule pour aucune valeur de f .

- **Condition d'unicité :**

Pour que $\frac{1}{H(f)}$ soit unique il faut que $H(f)$ ne tende pas vers zéro à l'infini plus vite qu'une puissance de $1/f$.

Ces conditions d'existence et d'unicité de la solution sont draconiennes et irréalisables pratiquement.

IV-2-2-1 Existence de la solution

Nous savons que tout système linéaire et causal est à réponse impulsionnelle bornée.

Donc il existe une fréquence de coupure f_0 pour laquelle la fonction de transfert $|H(f)|$ tend vers zéro lorsque f devient supérieure à la fréquence de coupure ($f > f_0$).

Même en présence d'un bruit de mesure n_a il existera une fréquence f_{x0} ($f_0 \approx f_{x0}$) au-delà de laquelle on aura

$$|H(f)| \text{ qui tend vers } \sigma_{na} \text{ (variance du bruit } n_a)$$

De ce fait :

$|H(f)|$ présentera de multiples passages par zéro et la division $\frac{1}{H(f)}$ est impossible lorsque f est supérieure à f_0 .

- IV-2-2-2 Unicité de la solution

En théorie, l'unicité des solutions n'est jamais démontrée.

En revanche, en pratique et si on néglige le bruit (cas idéal) et on suppose que :

Si on considère f_0 la fréquence de coupure du filtre alors on aura toujours (voir figure 8.a)

$$|H(f)| \equiv 0 \quad \forall |f| > f_0$$

Alors l'équation de convolution dans l'espace fréquentiel $S(f) = E(f) \cdot H(f)$

nous montre que si $|f| > f_0$, quelle que soit la forme de $E(f)$ on a :

$$S(f) = 0 \quad \forall |f| > f_0$$

Comme s'est illustré sur la figure 8.c.

On constate, sur la figure 8. b et c, qu'à partir de $f = f_0$, plusieurs signaux $E(f)$ ont une mesure identique $S(f)$.

Si on note $\hat{E}(f)$ la fonction estimée de $E(f)$, toutes les fonctions $\hat{E}_i(f)$ et $\hat{E}_j(f)$ telles que

$$\hat{E}_i(f) = \hat{E}_j(f) \quad \forall f \in [-f_0, f_0]$$

et
$$\hat{E}_i(f) \neq \hat{E}_j(f) \quad \forall f \notin [-f_0, f_0]$$

seront filtrées de la même manière par le filtre **h**.

D'après la figure 8.b, les signaux $\{\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4} \dots\}$ Peuvent tous être solution de l'équation de convolution.

En pratique, cette multitude de solution se traduit par de fortes oscillations.

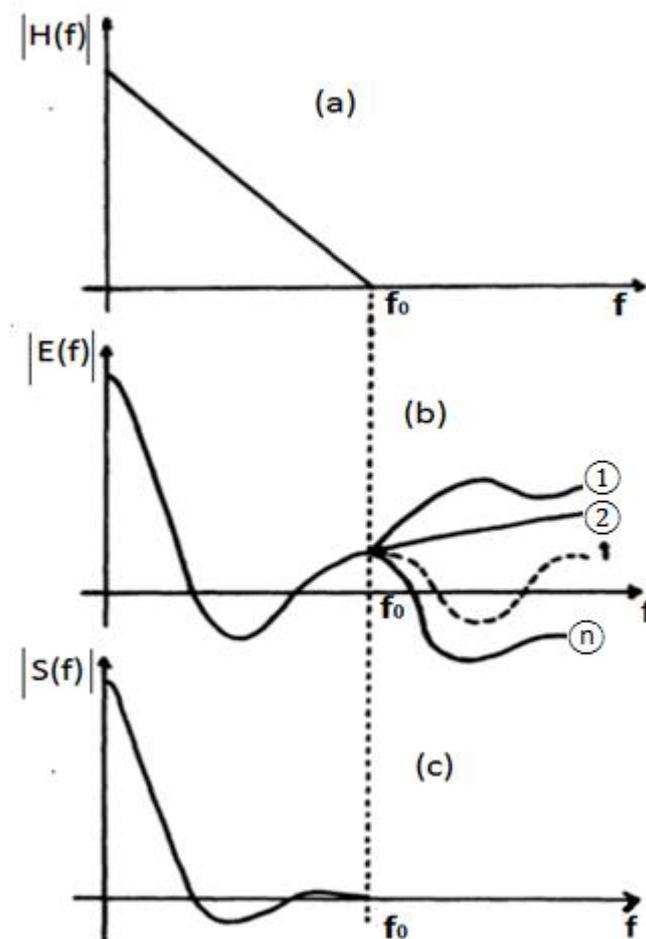


Figure 8 : Interprétation de la résolution de l'équation de convolution.

- a- La fonction de transfert s'annule pour $f > f_0$.
- b- Une infinité de signaux d'entrée filtrés de la même manière si $f > f_0$.
- c- Le signal de sortie n'existe que pour $f < f_0$

Nous sommes donc en présence d'une infinité de solutions de l'équation de convolution et il s'agit d'en choisir une.

Le problème peut être ramené à un problème de décision qui nécessite la définition d'un critère de choix. L'espace infini de décision peut être réduit si l'on dispose d'informations à priori sur le signal d'entrée et sur les propriétés statistiques du bruit de mesure.

C'est justement l'orientation qu'a pris la théorie de l'information du fait de la disponibilité d'informations importantes sur le couple de grandeurs entrée-sortie.

Ce sont ces contraintes qui limitent toutes les méthodes de convolutions développées jusqu'à nos jours [1] et [20].

V- conclusion

L'instabilité rencontrée dans la déconvolution est propre aux problèmes mal posés. Elle ne signifie nullement que le problème est mal formulé, mais ceci traduit le fait qu'une très faible perturbation des données entraîne une variation considérable de la solution qui risque même de lui enlever son caractère physique.

L'aperçu théorique que nous venons de donner sur la déconvolution montre bien l'extrême difficulté du problème. Il permet aussi de nous orienter sur les approches des différentes méthodes déjà développées.

L'aspect décisionnel du problème explique tout l'engouement des nouvelles théories sur la modélisation des signaux en utilisant des modèles du type AR et ARMA. Cependant, Il ne faut pas négliger les méthodes non paramétriques et donner tout le mérite à celles qui opèrent dans l'espace-temps et permettent ainsi la résolution directe de l'équation de convolution sous sa forme intégrale qui sera l'objet de notre travail.

Chapitre II

Revue des méthodes de déconvolution existantes

I-Introduction

La déconvolution est la résolution des problèmes inverses issus de la physique dont sa principale difficulté consiste en la présence de plusieurs solutions et pour en choisir une il est nécessaire de disposer d'informations supplémentaires. En effet, la déconvolution ne satisfait pas les conditions de Hadamard qui sont l'existence, l'unicité et la continuité de la solution donc elle fait partie des problèmes mal posés.

Plusieurs méthodes ont été développées et jusqu'il y'a peu, les résultats étaient décevant, la complexité des calculs et l'apparition des oscillations d'amplitudes trop élevées sur la solution ont diminué d'une manière considérable l'intérêt des différentes techniques.

Le développement de la déconvolution a suivi celui des ordinateurs et les domaines dans lesquels la déconvolution joue un rôle important deviennent de plus en plus nombreux, nous citons quelques-uns de la vie de tous les jours :

- L'imagerie médicale (échographie, scanner, rayons X...).
- L'ingénierie pétrolière (prospections par méthodes sismiques, magnétiques. identification des perméabilités dans un réservoir...).
- L'hydrogéologie (identification des perméabilités hydrauliques ...).
- La chimie (détermination des constantes de réaction).
- Le radar (détermination de la forme de l'obstacle).
- L'acoustique sous-marine (détermination d'obstacles).
- La mécanique quantique (détermination du potentiel).
- Le traitement de l'image (restauration d'images floues) etc...

En effet, la résolution approchée, notamment numérique, de l'équation de convolution a donné lieu, depuis plusieurs années, à une littérature variée. Suivant l'approche utilisée, les méthodes de déconvolution peuvent être regroupées en trois classes :

1. Les méthodes basées sur une exploitation directe de l'équation de convolution.
2. Les méthodes paramétriques utilisant un modèle de représentation.
3. Les méthodes à extension de bande utilisant des informations à priori sur la solution.

Dans notre travail, nous présentons une méthode paramétrique qui modélise un des deux signaux convolués .

II- Méthodes directes

Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'équation de convolution dans le cas réel peut s'écrire (équation (28))

$$s(t) = e(t) * h(t) + b(t)$$

Or les systèmes numériques sont de plus en plus utilisés donc on utilise l'équation de convolution des signaux discrets qui est donnée par l'expression suivante :

$$S[n] = e[n] * h[n] + b[n]$$

Deux possibilités sont envisageables :

1) Méthode itérative :

On utilise l'équation de convolution (5)

$$S_k = \sum_{i=1}^N e_i h_{k-i}$$

On détermine la solution par procédure d'itération.

2) Méthode par l'inversion de la matrice

Sous forme matricielle, l'équation de convolution est donnée par l'expression (32)

$$\mathbf{S} = \mathbf{H.E} + \mathbf{B}$$

Si on néglige le bruit elle devient : $\mathbf{S} = \mathbf{H.E}$

Avec H la matrice de convolution.

Pour reconstruire la solution \hat{E} il suffit d'inverser la matrice H donc cela revient à faire un filtrage inverse fait parti des problèmes inverses mal posés.

Deux approches de reconstitutions nous permettent de mieux appréhender ce caractère mal posé.

Le cadre de l'algèbre linéaire permet de résoudre facilement ce problème.

- Cas particulier de la matrice carrée

Si la matrice de convolution H est carrée inversible, la solution est immédiate :

$$\hat{E} = H^{-1} \hat{S} \quad (37)$$

avec

H^{-1} la matrice inverse de H .

Et \hat{E} est la solution estimée de E

Mais en pratique la matrice ne peut être carrée que dans des cas particuliers. Donc en général, elle ne l'est pas donc la solution ne peut être qu'un cas particulier.

- Cas où la matrice est quelconque

Dans ces conditions on cherche une solution optimale.

La méthode de minimisation la plus utilisée dans le filtrage inverse est celle des moindres-carrés donc c'est-à-dire la minimisation de la distance quadratique :

Suivante :

$$\|S - HE\|^2 \quad (38)$$

Cette minimisation ne peut se faire par un apport d'information a priori.

En effet toute tentative d'inversion n'apportant pas d'information a priori sur la solution recherchée conduira à des oscillations importantes qu'impose le caractère mal posé. et si on tient compte du bruit, la solution sera noyée dans le signal bruit qui est amplifié d'une manière considérable par le filtre.

Une approximation de la solution avec information a priori sera :

$$\hat{E} = H^+ S$$

Avec

H^+ est appelée pseudo matrice de H
 (H^+ est la matrice transposée conjuguée de H)
 Et si H est réelle alors $H^+ = H^T$, avec H^T la transposée de H .

Et la solution devient dans ces conditions :

$$\hat{E} = (H^T H)^{-1} H^+ S \quad (39)$$

Les deux approches de reconstitutions mentionnées ci-dessus montrent que malgré le nombre important de méthodes de déconvolution existantes leur principe de mise en œuvre est le même. La différence réside dans la disponibilité ou non d'information a priori sur le signal à reconstituer qui est défini généralement selon le domaine d'application.

Si l'application de la méthode n'est pas précise, on se fixe certains critères et la méthode sera proposée à des utilisations multiples sous conditions.

C'est le cas de la nouvelle méthode proposée dans ce travail.

Parmi le nombre important de méthode utilisant ce procédé nous présentons une des premières méthodes qui sera accompagnée d'une autre un peu plus récente.

II-1 Méthodes opérant dans l'espace-temps

L'une des premières méthodes de déconvolution inverses a été développée par Phillips, D. L. [10] où il a tenté une inversion sans apporter d'information a priori sur la solution recherchée. Or en physique, la matrice de convolution H n'est pas inversible.

La solution inverse donnée par cette méthode a tendance à produire de larges variations qui peuvent parfois la rendre inexploitable comme le montre la figure 9 où on constate que le signal reconstruit est affecté d'oscillations de grandes amplitudes.

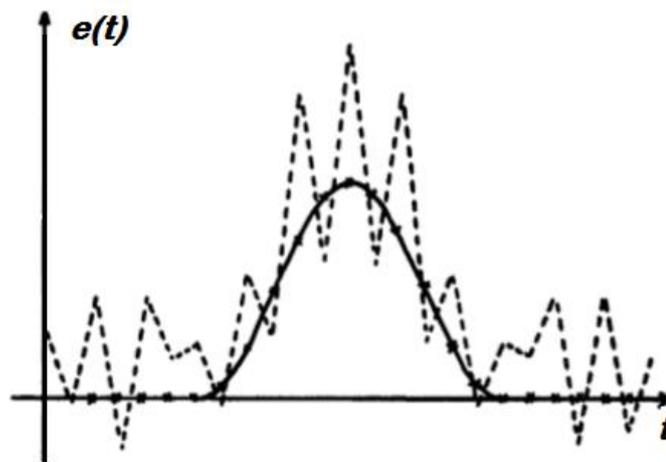


Figure 9 : Résolution par méthode d'inversion de matrice (d'après Phillips, D.L.)
 — L'entrée $e(t)$. - - - la restitution est affectée d'oscillations

En effet, l'importance de ces oscillations est due non seulement au bruit qui affectent les signaux (les petites variations des entrées conduisent à des variations considérables des sorties) mais essentiellement aux problèmes inverses mal posés.

L'atténuation des oscillations qui affectent la solution est impossible du point de vue théorique. En revanche, en physique, la minimisation des oscillations est possible comme indiqué ci-dessus.

En effet, Phillips, D.L [10] avait rapidement améliorée cette méthode en minimisant la distance quadratique $\|s - He\|^2$.

Alors si la sortie du $k^{\text{ième}}$ échantillon est donnée par l'expression

$$S_k = \sum_{i=1}^N e_i h_{k-i}$$

Cela revient à minimiser les différences secondes de la restitution en même temps que les carrés de différences entre la sortie et la restitution filtrée par un $h(t)$

Donc cela revient à trouver le minimum du terme :

$$\alpha \sum_n (\hat{e}_{n+1} - 2\hat{e}_n + \hat{e}_{n-1})^2 + \sum_n d_n^2 \quad (40)$$

Où $\hat{e}_n = \hat{e}(nh)$ est le $n^{\text{ième}}$ échantillon de restitution

et

$$d_k = S_k - \sum_n e_n h_{k-n} \quad (41)$$

Le problème qui se pose était le choix de α qui assure la régulation.

On procède en général par essais successifs.

Des expériences ont été réalisées et les résultats s'améliorent de plus en plus.

Parmi les expériences qui ont été faites nous citons les suivantes :

1- Twomey, S.[9] a montré :

- Qu'on peut minimiser toute quantité quadratique en \hat{e} .
- qu'on peut inclure la minimisation de la distance de \hat{e} à une courbe fixée m telle

que :

$$d = \sum_n (\hat{e}_n - m_n)^2 \quad (42)$$

- Ou qu'on peut minimiser une combinaison linéaire de ces deux quantités.

L'avantage dans ce type de méthodes est que la matrice de convolution \mathbf{H} peut ne pas être carrée. On a donc la possibilité de traiter des problèmes avec contraintes.

2- Van-Cittert, P. H. [10] avait utilisé le principe par itération en minimisant l'erreur quadratique moyenne de prédiction de la solution.

Donc par étape, il procède comme suit :

Etape k :

$$\hat{s}_k(t) = \hat{e}_k(t) * h(t)$$

$$\hat{e}_{k+1}(t) = \hat{e}_k(t) + [s(t) - \hat{s}_k(t)]$$

avec $\hat{e}_0(t) = s(t)$

et la méthode tend vers le filtrage inverse lorsque k tend vers l'infini (k très grand).

La méthode n'était pas fiable mais vue la simplicité du principe de la méthode et ses résultats encourageants, elle a été améliorée davantage dans le temps par d'autres auteurs comme :

- Bracewell, R.S., Roberts., J.A. [11]
- Jansson, P.A. [12] J. ewell, R.S., Roberts., J.A., [12] .
- Coupinot. G. [12].

En conclusion, on peut dire que d'une manière générale, la méthode du filtrage inverse consiste à inventer une condition possible pour les sorties en minimisant l'écart entre les entrées mesurées et les champs calculés correspondant à ces entrées.

Le principe des méthodes de filtrage inverse continue à être recommandé et utilisé dans bon nombre de problèmes d'expressions d'incertitudes de mesure.

L'application de l'approche proposée, il y'a trop longtemps montre qu'elle nécessitait un travail plus poussé tant mathématique que physique pour mieux l'exploiter et ceci dans tous les domaines qui nécessitent l'identification de l'information.

Aujourd'hui, on constate que plusieurs méthodes, basées sur le principe du filtrage inverse, ont été développées. Elles ne se différencient que sur le choix des conditions de minimisations qui doivent être adaptées aux applications de chacune d'elles.

Des mises en œuvre de plusieurs méthodes ont été publiées récemment et on constate que les résultats s'améliorent, et deviennent de plus en plus satisfaisants au point où ce type de méthode est très sollicité actuellement dans tous les domaines.

On cite par exemple :

1- En 2012 [14], Daniel Weisz-Patraut a présenté un travail très poussé sur les problèmes inverses et il a prouvé que cette technique est applicable dans le milieu industriel.

2 - En novembre 2009, [19], Strauss O. et Rico A. ont présenté une méthode de déconvolution par filtrage inverse. Ce travail a été le résultat de plusieurs travaux réalisés entre l'université de Montpellier II et l'université Claude Bernard de Lyon.

Cette méthode utilise le principe de la méthode directe en plus de la modélisation de l'un des deux signaux convolués elle sera reprise lors de la présentation des méthodes paramétriques.

II-2 Méthodes opérant dans l'espace-fréquentiel

Ce sera le principe de l'inversion de la matrice qui a été mentionné précédemment Avec la particularité du domaine des fréquences.

L'expression de l'équation de convolution dans l'espace fréquentiel est :

$$S(f) = E(f).H(f)$$

Avec la présence du bruit en physique, cette équation devient :

$$S(f) = E(f).H(f) + B(f)$$

Donc la solution peut être :

$$E(f) = \frac{S(f)}{H(f)} - \frac{B(f)}{H(f)} \quad \forall f \quad |H(f)| \neq 0 \quad (43)$$

Dans le cas non bruité on aura :

$$E(f) = \frac{S(f)}{H(f)} \quad \text{avec} \quad |H(f)| \neq 0$$

La solution est une division par la fonction de transfert c'est aussi un filtrage inverse qui fait partie des problèmes mal posés mais dans le domaine des fréquences la perte en pouvoir est considérable.

Notons que si le système présente une fréquence de coupure f_0 , la division (36) ne peut se faire que dans l'intervalle $[-f_u, +f_u]$ avec $f_u < f_0$ (f_u est la fréquence utile) comme cela est illustré par la figure 10.

Si la bande de fréquence passe de f_0 à f_u la fonction $H(f)$ perd un pouvoir de

$$\Delta f = (f_0 - f_u)$$

La bande de la résolution qui était $1/2f_0$ devient $1/2f_u$ se rétrécit et la perte en pouvoir de la résolution sera non négligeable.

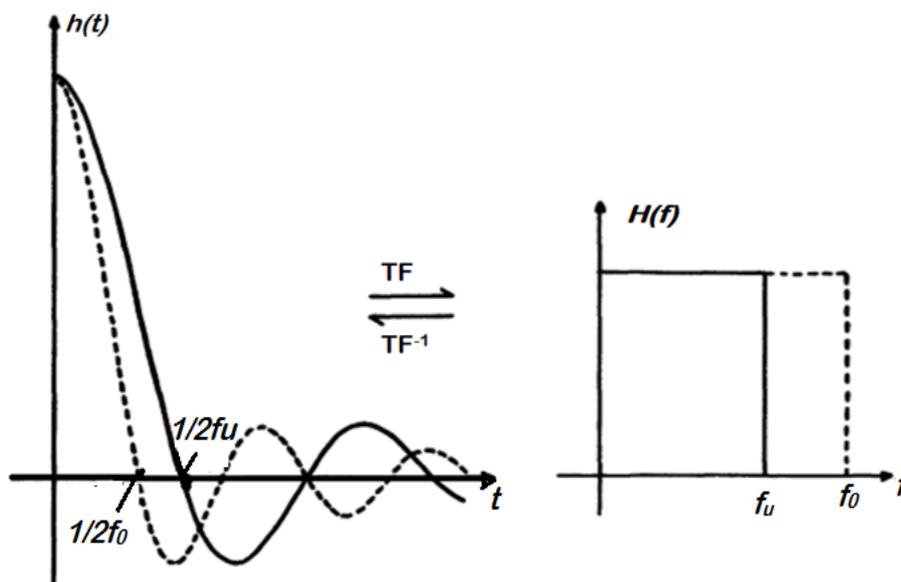


Figure 10 : Illustration de la perte en pouvoir de la solution.

(Si la bande de fréquence passe de f_0 à f_u la fonction $H(f)$ perd un pouvoir de $\Delta f = (f_0 - f_u)$)

- a) - - - - La fonction instrumentale correspondant au filtre inverse parfait de bande f_0 .
- b) ——— La fonction instrumentale correspondant au filtre inverse de bande restreinte f_u .

Les oscillations de la solution sont très importantes puisque dans le domaine fréquentiel, en plus de la solution qui n'existe pas toujours et dans le cas où elle existe elle n'est pas unique, d'autres parasites apparaissent et augmentent les oscillations. Sachant que l'équation de convolution, dans l'espace des fréquences, est obtenue en passant par des transformées de Fourier ce qui signifie qu'il existe, dans ce type de filtrage inverse, une convolution de l'entrée vraie $e(t)$ par $\frac{\sin k\pi t}{k\pi t}$ qui est une fonction très oscillante.

En tenant compte de tous ces inconvénients, plusieurs méthodes ont été mises au point dans des domaines qui travaillent dans l'espace fréquentiel. Les oscillations ont été amorties avec des degrés variables suivant la précision exigée.

Les méthodes sont réparties en deux catégories :

- Méthodes d'apodisation

Certaines méthodes développées sont dites d'apodisation et elles consistent à pondérer le filtrage inverse par une fonction $p(f)$ dite aussi fonction d'apodisation.

Le choix de $p(f)$ ne peut se faire que selon un critère donné (la solution ne peut être que physique en apportant une information a priori).

Parmi les méthodes de filtrage inverse dans l'espace des fréquences, basées sur des formes particulières de la fonction d'apodisation $p(f)$ on cite :

la méthode d'Arsac [15] et celle de Jacquinot, P. et Roizen-Dossier, B. [16] qui proposent une fonction $p(f)$ adaptée au cas particulier d'un satellite dans l'aile d'une raie.

- Méthodes statistiques

La méthode statistique consiste à trouver un filtre réalisant une approximation de $E(f)$ aux moindres carrés et une minimisation des oscillations dans $\hat{e}(t)$

Helstrom, C.W. [36] et [41] a réussi à trouver un filtre réalisant cette approximation mais la condition de minimisation se faisait par tâtonnement.

La méthode proposée par Fellgett, P. B. et Linfoot E.H. [17] introduit un traitement stochastique et montrent que le filtre optimal au sens des moindres-carrés est lié à la quantité suivante :

$$I(f) = \text{Log} \left[1 - \frac{\Gamma_e(f)}{\Gamma_b(f)} |H(f)|^2 \right] \quad (44)$$

Avec $\Gamma_e(f)$ et $\Gamma_b(f)$ les densités spectrales de puissance de l'entrée $e(t)$ et du bruit $b(t)$ exprimant la qualité de l'information transmise par le filtre optimal et observé par la sortie $s(t)$.

Si on note $F(f)$ le filtre optimal l'expression du filtre trouvé est :

$$F(f) = \frac{1}{H(f)} [1 - e^{-I(f)}] \quad (45)$$

$\frac{1}{H(f)}$ qui est le filtre inverse, n'est possible que si I tend vers l'infini.

Il montre que l'erreur commise pour que la solution soit possible est :

$$\epsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |e(t) - \hat{e}(t)|^2 dt \quad (46)$$

Et que cette erreur décroît exponentiellement avec I.

D'autres méthodes sont publiées récemment, comme par exemple :

Dahlia A.N.R. [37] en 2010 présente un travail dans le cadre d'une thèse de recherche qui consiste en la mise en œuvre de la reconstruction à bande spectrale limitée par des méthodes du type filtrage inverse à bande spectrale limitée, en tenant compte d'une contrainte du support dans le domaine de Fourier, décomposition tronquée en valeurs singulières, filtre de Wiener, pénalisation quadratique et méthodes itératives.

Ces différentes méthodes sont présentées et comparées entre elles dans un cadre général de déconvolution mais ne sont pas appliquées dans un domaine particulier.

Notons que la solution ne sera pas satisfaite dans le cas bruité,

On remarque facilement que les composantes hautes fréquences des données sont essentiellement dues au bruit puisque si l'on considère la solution inverse $\hat{e}(f) = \hat{s}(f) / \hat{h}(f)$ on constate que $\hat{h}(f)$

est faible (effet passe-bas de l'instrument) et que le bruit est largement amplifié lorsque l'on applique le filtre inverse (division par $\hat{h}(f)$ qui est faible).

III- Méthodes paramétriques

Le signal d'entrée $e(t)$ d'un filtre peut être dans certains cas, représenté par un modèle $e_m(t)$ dépendant d'un nombre limité de paramètres. Dans ce cas une minimisation de la différence entre la réponse réelle $s(t)$ et la réponse $s_m(t)$ au modèle $e_m(t)$ permet d'ajuster les différents paramètres du modèle.

En effet sachant que

$$S_m(t) = h(t) * e_m(t)$$

Les paramètres permettant de minimiser une distance entre $s(t)$ et $s_m(t)$ donnent le meilleur modèle $e_m(t)$ de $e(t)$.

La distance la plus utilisée est la distance quadratique donnée par

$$Q(P_1, P_2, \dots, P_i) = \sum_{n=1}^{+\infty} |s(nT) - s_m(nT)|^2 \quad (47)$$

Où les p_k ($k=1, 2, \dots, \theta$) sont les paramètres du modèle $e_m(t)$.

Les inconvénients majeurs de cette approche sont :

- La difficulté d'estimer la sensibilité du modèle aux différents paramètres.
- L'absence de sens physique des paramètres.
- La convergence, dans certains cas, vers un minimum local.

Plusieurs méthodes (anciennes et récentes) utilisant un modèle de référence ont été développées dont certaines ont été même appliquées chacune dans son domaine mais aucune expérience n'est parfaite par exemple :

- La méthode [19] développée par O. Strauss et A. Rico publiée en 2009.
- La méthode [21] d'Alberto Menendez Martinez développée vers les années 70.
- La méthode [24] de Ville, J. A c'est l'une des premières méthodes mises en œuvre vers les années 50.

a) Si on prend le dernier cas, en spectrométrie, on constate que la plupart des imperfections des spectres proviennent de déficience du spectromètre et certaines, comme le bruit, sont aléatoires, donc il est possible d'utiliser une référence interne au spectre pour identifier les distorsions puis les corriger.

Le moyen d'opérer cette correction est de :

- sélectionner une référence adéquate dans le spectre, pour laquelle la forme théorique est connue.
- Déconvoluer le spectre expérimental par la forme expérimentale de la raie de référence.
- Re-convoluer par la forme théorique (donc parfaite).

Ces anciennes méthodes ne sont pas très efficaces mais elles ont été améliorées par la suite

-b) La méthode récente d'O. Strauss et A. Rico, qui a fait l'objet d'une publication dans la série rencontres francophones sur la logique floue de l'année 2009, a utilisé le principe du filtrage inverse tout en faisant une modélisation. En effet la technique nouvelle est particulière, elle donne des résultats très satisfaisants et elle est destinée à la logique floue.

Notons que la déconvolution consiste en la reconstruction d'un signal à partir de sa mesure à travers un système cela revient à un filtrage inverse et nous avons vu précédemment que ce type de filtrage n'est possible que si la réponse impulsionnelle du filtre est parfaitement connue. Dans cette publication il présente une nouvelle technique de déconvolution pour la reconstruction d'un signal permettant de prendre en compte une mauvaise connaissance de la réponse impulsionnelle du filtre utilisé (c'est une déconvolution aveugle) ;

Cette technique s'appuie sur une modélisation du rapport entre la mesure et le signal à mesurer via une capacité concave qui étend la notion de convolution à un ensemble concave de réponses

impulsionnelles. Le signal reconstruit est de nature intervalliste. L'imprécision de ce signal quantifie l'erreur de reconstruction induite par la mauvaise connaissance de la réponse impulsionnelle du filtre.

On remarque que la méthode était un filtrage inverse avec l'utilisation de la minimisation de la distance quadratique.

La modélisation du rapport (mesure)/(signal à mesurer) était l'information a priori.

Ce travail a été l'objet d'une autre publication [20] mais avec d'autres informations

A priori nécessaire pour la minimisation de la distance quadratique.

Le procédé de la méthode de O. Strauss et A. Rico était le suivant

Si l'équation de convolution sous sa forme matricielle est la suivante

$$S = HE$$

la modélisation utilisée sur le rapport entre la mesure et le signal à mesurer via une capacité concave étend la notion de convolution à un ensemble concave de réponses impulsionnelles. Cette généralisation fait intervenir une mesure dite de confiance non additive concave ainsi qu'une équation non linéaire entre le vecteur de mesure S et le vecteur du signal à reconstruire E de la forme

$$|\underline{S}, \overline{S}| = \sigma H_f(E) \quad (48)$$

Avec \underline{S} (respectivement \overline{S}) la borne inférieure (respectivement la borne supérieure) de toutes les mesures obtenues à partir de l'ensemble des réponses impulsionnelles modélisées par la capacité a et σ un coefficient réel.

Le problème revient à trouver un ensemble convexe $|\underline{E}, \overline{E}|$ compatible avec la mesure S .

Les auteurs de la méthode qui n'ont considéré que les réponses impulsionnelles positives ont procédé comme suit :

- En exploitant la minimisation des moindres-carrés, on part d'une valeur approximative de la matrice de convolution H pour converger vers une solution plus précise.
- en utilisant la méthode itérative, on considère l'équation de convolution des signaux discrets c'est-à-dire pour

le $k^{\text{ième}}$ élément de la sortie du filtre s'écrit:

$$s_k = \sum_{i=1}^N e_i h_{k-1}$$

En faisant un changement de variable :

$$\sigma = \sum_{i \in \mathbb{Z}} h_i \quad \text{et} \quad \rho_i = \frac{h_i}{\sigma}$$

Donc $\rho = (\rho_i)_{i \in \mathbb{Z}}$

ρ peut être considéré comme une distribution de probabilité induisant une mesure de probabilité P sur l'ensemble des échantillons c'est-à-dire :

$$\rho^k = (\rho_i^k)_{i \in \mathbb{Z}} \text{ la distribution de probabilité définie par } \rho_i^k = \rho_{k-i}$$

Donc l'expression de l'équation de convolution des signaux discrets devient :

$$s_k = \sum_{i=1}^N e_i h_{k-1} = \sigma \sum_{i=1}^N e_i \rho_i^k = \sigma \mathbb{E} p_k \{e\} \quad (49)$$

P_k étant la mesure de probabilité définie par la distribution de probabilité traduite $(\rho_i^k)_{i \in \mathbb{Z}}$.
 $\mathbb{E} p_k$ étant l'espérance induite par p_k sur les valeurs des échantillons du signal.

Et comme la condition de départ de la méthode était de ne considérer que les réponses impulsionnelles positives, l'opération de filtrage peut être supposée comme une moyenne locale d'échantillons du signal.

Sous forme matricielle l'équation (42) peut s'écrire :

$$S = \sigma H_p . E \quad (50)$$

Où H_p est la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} \rho_0^0 & \rho_1^0 & \dots & \dots & \rho_N^0 \\ \rho_0^1 & \rho_1^1 & \dots & \dots & \rho_N^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_0^N & \rho_1^N & \dots & \dots & \rho_N^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_{-1} & \dots & \dots & \rho_{-N} \\ \rho_1 & \rho_0 & \dots & \dots & \rho_{-N+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_N & \rho_{N-1} & \dots & \dots & \rho_0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

La matrice (44) montre que la réponse impulsionnelle du filtre est définie par ρ .
 Alors une mauvaise connaissance de cette forme affectera ρ et non σ .

Et le résultat paraît parfait.

Pour montrer que la méthode paramétrique est très sollicitée on expose une autre méthode récente, elle est opérationnelle dans le domaine des antennes en France.

La technique de la méthode est mise au point pour le dimensionnement et l'optimisation des systèmes sans fils.

Il s'agit de la méthode de déconvolution conçue par Oussama Akhdar [32],[36] pour estimer les angles d'arrivée sur une antenne. Le principe repose sur l'identification des paramètres des sources rayonnantes qui se fait à travers des méthodes basées sur l'information contenue dans les valeurs et les vecteurs de la matrice inter-spatiale des signaux reçus par un capteur.

La nouvelle méthode consiste à effectuer une déconvolution entre le diagramme de rayonnement complexe de l'antenne de réception et la tension mesurée lors de la rotation de l'antenne. Les angles d'arrivée seront déduits ensuite du signal résultant de la déconvolution. Une formulation analytique suivie des mesures en chambre anéchoïque permettront de valider le principe proposé. Enfin la méthode a été renforcée par un algorithme d'extraction de sources inspiré de l'astronomie.

IV- Méthodes à bande étendue

Certaines méthodes s'appuient sur une certaine connaissance a priori de $e(t)$ pour accroître le pouvoir de résolution.

C'est ainsi que sur la base de l'analyticité de $E(f)$, c'est-à-dire :

$$e(t) \equiv 0 \quad \forall t \notin [-T, T]$$

Beaucoup d'auteurs ont essayé de tirer parti de cette information par exemple :

- En faisant un développement de $e(t)$ en série de Taylor, Mac Phie et R. H. [23], Ville, J. A. [24] et Wolter, H. [26] ont montré qu'il était nécessaire d'avoir un rapport signal/bruit de l'ordre de 1000 pour pouvoir prolonger la bande d'environ 0,01.
- En utilisant les polynômes de Bernstein, J. P. Scheidecker [27] a essayé de prolonger $E(f)$, il a pu atteindre dans un cas sans bruit, une fréquence d'extrapolation $f_{ex} \sim 1,5 f_0$ mais il s'est vite rendu compte que la méthode n'est que théorique car dans le cas pratique les bruits existent et la méthode leur est très sensible.

Dans cette approche, les meilleures méthodes disponibles se basent sur la positivité de $E(f)$. Plusieurs méthodes ont été développées comme le cas de :

- Schell A. C. [28] où il utilise un algorithme itératif qui cherche une fonction $p(f)$ telle que son carré de convolution $p(f)*p(f)$ approche la solution inverse $\frac{S(f)}{H(f)}$.

La récurrence est donnée par :

$$P_{k+1}(f) = cte \sum_{j=-\frac{(n+i)}{2}}^{\frac{(N-i)}{2}} \left[\frac{S(f_j)}{H(f_j)} - P(f)^{*2} \Big|_{f=f_j} \right] P_k(f_{i+j}) \quad (52)$$

On peut ainsi élargir la bande passante au-delà des $2N$ points connus sur $\frac{S(f_j)}{H(f_j)}$

Il reste à étudier l'effet du rapport signal sur bruit sur la bande.

Dans le temps, [29] et [30] Y. Biraud a exploité cette technique et a développé un algorithme itératif où il fait intervenir la minimisation de la distance quadratique du signal reconstruit Avec $J_H(E, S) = \|S - HE\|^2$

L'estimation \hat{E} à retenir sera celle optimisant ce critère.

Le critère qui a été utilisé dans cette méthode se trouve celui des moindres-carrés de l'erreur résiduelle.

Donc la solution analytique est donnée par :

$$\hat{E} = \frac{S(f)}{H(f)}$$

et la minimisation est réalisée par la procédure itérative.

La méthode tend à approximer le rapport $\frac{S(f)}{H(f)}$ par une fonction $G_n(f)$ qui est un carré de convolution. L'approximation se fait sur l'intervalle $[-f_u, f_u]$ et au sens des moindres carrés :

Posons

$$\frac{S(f)}{H(f)} = M(f)$$

On minimise donc :

$$P_n = \int_{-f_u}^{+f_u} |M(f) - G_n(f)|^2 df \quad (53)$$

Cette quantité P_n est comparée, à chaque étape de l'itération, à la puissance moyenne de bruit (sur la bande utile)

$$Q = \int_{-f_u}^{+f_u} |\eta(f)|^2 df \quad (54)$$

Ce n'est qu'à partir des années 80 que les mathématiciens et les théoriciens du traitement du signal ont repris les recherches sur la déconvolution.

Ils se sont orientés vers l'idée qui consiste en une régularisation du problème mal posé qu'introduit la déconvolution. Le but de cette régularisation est de remplacer l'équation de forme générale par un problème de minimisation stable d'une forme quadratique. On ramène ainsi le problème à une équation de deuxième espèce du type :

$$He - \lambda e = s \quad (55)$$

qui bénéficie d'une abondante étude notamment dans la théorie spectrale.

Et on remarque que ces dernières années un nombre important de méthodes de déconvolution a été développé. Le principe des méthodes n'a pas changé mais l'amélioration est remarquable par la rapidité des traitements et des calculs malgré la robustesse des algorithmes que nécessitent les opérations de la convolution et ceci par l'évolution rapide de la technologie.

V- Conclusion

La liste des méthodes présentées est non exhaustive. Elle permet essentiellement de dégager les différentes approches utilisées. La remarque importante que l'on peut tirer de cette étude bibliographique est la grande sensibilité des méthodes de déconvolution au bruit. Suivant que l'on dispose ou non d'informations a priori sur la solution, la bande de traitement est étendue ou réduite. Très peu de méthodes fonctionnent dans la bande réelle des signaux. Enfin, les techniques de toutes les méthodes sont très difficiles à mettre en œuvre et font appel des outils mathématiques très poussés. Certaines ne peuvent s'appliquer que dans des cas particuliers et ne sont pas transportables.

CHAPITRE III

Méthode de déconvolution développée

I. Introduction

De toutes les méthodes de déconvolution existantes, ce sont les méthodes qui opèrent dans l'espace-temps qui paraissent plus efficaces, nous avons vu lors des chapitres précédents que la perte en pouvoir est relativement minimale dans cette espace.

Nous présentons une nouvelle méthode de déconvolution temporelle et récursive qui s'appuie sur le choix d'une forme exponentielle de l'un des deux signaux convolués. Dans le sens physique cette méthode est parfaitement adaptée. Sous cette hypothèse, facile à réaliser, la méthode permet de développer l'intégrale en utilisant un développement limité à la fonction qu'on désire estimer et d'aboutir à une relation temporelle et récursive liant les échantillons de la solution recherchée aux échantillons mesurés.

Un des avantages de la méthode est qu'elle peut s'appliquer aussi bien à l'identification des paramètres du système qu'à la reconstruction du signal d'excitation.

Nous avons opté, dans notre méthode, pour la détermination de la réponse impulsionnelle d'un système excité par un signal de forme exponentielle et nous avons développé une relation itérative dans l'espace-temps qui exprime les échantillons de la réponse impulsionnelle en fonction des échantillons mesurés, il est évident que pour le deuxième cas les calculs seront identiques puisqu'au cours du développement de la relation itérative aucune hypothèse sur le choix de la forme exponentielle n'a été précisée.

Le choix de l'orientation de la méthode est du point de vue théorique, arbitraire en revanche dans le réel, il est fixé par les domaines de son application dans le futur comme la sismologie par exemple. La déconvolution qui est un problème inverse mal posé nécessite une optimisation de la solution. En effet, une condition de convergence de la solution, facile à réaliser, a été développée par l'étude des erreurs commises qui sont dues l'une à la structure de récursivité et l'autre au développement mathématique utilisé.

II. Présentation de la méthode

II.1- Principe de la méthode

Si on considère les signaux $e(t)$ et $s(t)$ respectivement le signal l'entrée et le signal de sortie d'un système linéaire et invariant dans le temps de réponse impulsionnelle $h(t)$, le signal $s(t)$ est relié au signal d'entrée par l'équation de convolution sous forme intégrale donnée par l'expression (1) du chapitre I :

$$e(t) \rightarrow s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Les systèmes physiques qui sont supposés linéaires et invariant par translation dans le temps sont causaux.

L'équation de convolution se simplifie et devient :

$$S(t) = \int_0^t e(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (56)$$

La déconvolution consiste à résoudre l'équation de convolution donc cela revient à résoudre l'équation (56)

Du point de vue mathématique l'équation peut être résolue par rapport à $e(t)$ ou $h(t)$ de la même manière puisque l'opération de convolution est commutative.

Nous proposons une méthode qui consiste en la résolution de l'équation ((56) par rapport à $h(t)$.

Posons l'hypothèse de la méthode qui à choisir la forme exponentielle pour le signal d'excitation donc :

$$e(t) = E e^{-\gamma t} \quad (57)$$

Avec E et γ des constantes positives non nulles ($E > 0$ et $\gamma > 0$).

La particularité de la méthode développée se trouve dans cette hypothèse.

Si on applique cette hypothèse dans l'équation (50), elle devient :

$$S(t) = \int_0^t E e^{-\gamma \tau} \cdot h(t - \tau)d\tau \quad (58)$$

Pour résoudre l'équation (58), on utilise des développements mathématiques. Dans notre méthode, nous avons choisi le développement limité de Taylor.

II.2- Développement de l'équation de récurrence

Sachant que la méthode est récursive, alors on introduit une période d'échantillonnage T avec $T \in]0, t[$.

L'équation (58) peut se décomposer en deux intégrales comme suit :

$$S(t) = \int_0^T E e^{-\gamma\tau} . h(t - \tau) d\tau + \int_T^t E e^{-\gamma\tau} . h(t - \tau) d\tau \quad (59)$$

Posons

$$J_1(t) = \int_0^T E e^{-\gamma\tau} . h(t - \tau) d\tau \quad (60)$$

$$J_2(t) = \int_T^t E e^{-\gamma\tau} . h(t - \tau) d\tau \quad (61)$$

Faisant le changement de variable suivant :

$$\tau' = \tau - T$$

Alors $\tau = \tau' + T$

Remplaçons τ en fonction de τ' dans l'équation (61)

On obtient :

$$\begin{aligned} J_2(t) &= \int_0^{t-T} E e^{-\gamma(\tau'+T)} . h(t - (\tau' + T)) d\tau' \\ &= E e^{-\gamma T} \int_0^{t-T} e^{-\gamma\tau'} . h((t - T) - \tau') d\tau' \end{aligned}$$

D'où :

$$J_2(t) = E e^{-\gamma T} s(t - T)$$

Donc

$$\int_T^t E e^{-\gamma\tau} . h(t - \tau) d\tau = E e^{-\gamma T} s(t - T) \quad (62)$$

Nous constatons que l'équation (62) ne dépend plus de l'intégrale.

Dans le cas où $t = nT$ avec $n = 1, 2, \dots, N$ et N est le nombre d'échantillons.

Alors (62) devient :

$$\int_T^t E e^{-\gamma\tau} . h(t - \tau) d\tau = E e^{-\gamma T} s((n - 1)T) \quad (63)$$

Remplaçons $t = nT$ dans l'autre terme de l'équation de convolution (53) on obtient alors :

$$\int_0^T E e^{-\gamma\tau} . h(t - \tau) d\tau = \int_0^T E e^{-\gamma\tau} . h(nT - \tau) d\tau \quad (64)$$

On représente $h(nT-\tau)$ sous une forme définie par un développement limité autour du point (nT) . Dans un premier temps on se limite au premier ordre :

Sachant que le développement limité d'ordre général de $h(nT + \tau)$ autour de (nT) est :

$$h(nT + \tau) \approx h(nT) + \frac{h'(nT)}{1!} \tau + \frac{h''(nT)}{2!} \tau^2 \dots + \frac{h^{(k)}(nT)}{k!} \tau^k + R_{k+1} \quad (65)$$

donc

$$h(nT - \tau) \approx h(nT) + \frac{(-\tau)}{1!} h'(nT) + \frac{(-\tau)^2}{2!} h''(nT) + \frac{(-\tau)^3}{3!} h^{(3)}(nT) + \dots,$$

Avec :

$$h'(nT) \approx \frac{h(nT) - h((n-1)T)}{T}$$

Et

$$h''(nT) \approx \left[\frac{h'(nT) - h'((n-1)T)}{T} \right]$$

donc

$$h''(nT) \approx \left[\frac{h(nT) - 2h((n-1)T) + h((n-2)T)}{T^2} \right]$$

Alors le développement limité au premier ordre de $h(nT - \tau)$ est :

$$h(nT - \tau) \approx h(nT) - \frac{h(nT) - h((n-1)T)}{T} \tau \quad (66)$$

Remplaçons (65) dans (66) on a :

$$\int_0^T E e^{-\gamma\tau} \cdot h(nT - \tau) d\tau \approx \int_0^T E e^{-\gamma\tau} \left[h(nT) - \frac{h(nT) - h((n-1)T)}{T} \tau \right] d\tau$$

Donc :

$$\int_0^T E e^{-\gamma\tau} \cdot h(nT - \tau) d\tau \approx h(nT) \int_0^T E e^{-\gamma\tau} d\tau - \left[\frac{h(nT) - h((n-1)T)}{T} \right] \int_0^T E e^{-\gamma\tau} \tau d\tau \quad (67)$$

Sachant que

$$\int_0^T E e^{-\gamma\tau} d\tau = -\frac{1}{\gamma} E e^{-\gamma\tau} \quad (68)$$

Et partons du principe :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

et En posant :

$$E e^{-\gamma\tau} d\tau = dv \quad \text{et} \quad \tau = u$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-\gamma\tau} \tau d\tau &= \left[-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau} \tau \right]_0^T - \left[\int_0^T -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau} d\tau \right] \\ &= -\frac{T}{\gamma} e^{-\gamma T} + \frac{1}{\gamma} \left[\int_0^T e^{-\gamma\tau} d\tau \right] \\ &= -\frac{T}{\gamma} e^{-\gamma T} + \frac{1}{\gamma} \left[-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau} \right]_0^T \\ &= -\frac{T}{\gamma} e^{-\gamma T} - \frac{1}{\gamma^2} (e^{-\gamma T} - 1) \end{aligned}$$

On obtient :

$$\int_0^T e^{-\gamma\tau} \tau d\tau = -\frac{T}{\gamma} e^{-\gamma T} - \frac{e^{-\gamma T} - 1}{\gamma^2} \quad (69)$$

Remplaçons (68) et (69) dans (67) on obtient :

$$\int_0^T E e^{-\gamma\tau} \cdot h(t - \tau) d\tau \approx \lambda \hat{h}(nT) + \mu \hat{h}((n-1)T) \quad (70)$$

Avec

$$\lambda = \frac{1}{\gamma} \left[1 - \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma T} \right] \quad (71)$$

et

$$\mu = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma T} - e^{-\gamma T} \right] \quad (72)$$

Où la notation $\hat{h}(nT)$ est l'estimation de $h(nT)$

Donc si dans l'équation (52) c'est - à -dire l'équation suivante

$$S(t) = \int_0^T E e^{-\gamma\tau} . h(t - \tau) d\tau + \int_T^t E e^{-\gamma\tau} . h(t - \tau) d\tau$$

On remplace les deux termes par leur équation respective suivante :

$$\int_0^T E e^{-\gamma\tau} . h(t - \tau) d\tau = \lambda \hat{h}(nT) + \mu \hat{h}((n-1)T)$$

Et

$$\int_T^t E e^{-\gamma\tau} . h(t - \tau) d\tau = E e^{-\gamma T} s(t - T)$$

On obtient en final

$$\hat{S}(nT) = E e^{-\gamma T} \hat{S}((n-1)T) + \lambda \hat{h}(nT) + \mu \hat{h}((n-1)T) \quad (73)$$

D'où l'on déduit l'équation de récurrence qui relie les échantillons de la réponse impulsionnelle $h(t)$ aux échantillons du signal mesuré $s(t)$:

En final, l'équation de convolution est résolue par rapport à $h(t)$, on écrit l'équation de récurrence sous sa forme qui exprime l'échantillon n de la réponse impulsionnelle.

D'où :

$$\hat{h}(nT) = \frac{1}{\lambda} [\hat{S}(nT) - E e^{-\gamma T} \hat{S}((n-1)T) - \mu \hat{h}((n-1)T)] \quad (74)$$

II-3 Discussion

La relation de l'équation de récurrence donnée en (74) permet de déterminer les échantillons de la réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système temporel en fonction des échantillons du signal de sortie $s(t)$ sachant que le signal d'entrée est supposé connu par hypothèse ($e(t) = E e^{-\gamma t}$).

Elle est récurrente et n'utilise que le dernier échantillon estimé, il n'est donc pas nécessaire de garder toute la trace du signal mesuré. Ces deux propriétés nous offrent la possibilité de traitement en temps réel.

La structure de la relation et surtout la présence du terme qui effectue la différence entre les deux échantillons successifs de $s(t)$ minimise l'effet du bruit.

La simplicité de son expression rend la mise en œuvre, sur calculateur, très facile.

N'étant pas tenu par l'échantillonnage au sens du théorème de Shannon, la période T devient un degré de liberté sur lequel on peut se baser pour optimiser la solution.

Il faut noter aussi que les échantillons $\hat{h}(nT)$ ainsi déterminés sont les échantillons de la représentation de $h(t)$ sous forme de développement limité au premier ordre. Il existe donc une erreur due à cette représentation. Cette erreur, comme nous allons le montrer dans la suite, est déterministe et tout à fait quantifiable et mesurable.

III – Optimisation de la méthode

Il s'agit d'une méthode de déconvolution donc nous sommes en présence d'un problème inverse mal posé qui signifie que la stabilité n'est pas assurée.

Afin d'assurer une stabilité et par conséquent éliminer les éventuelles oscillations sur la solution recherchée, nous allons voir comment minimiser les erreurs commises lors du développement de la méthode présentée.

La condition de minimisation sera la condition de l'optimisation de la solution, elle joue un rôle important dans la mise en œuvre de la méthode.

L'application de la méthode ne sera possible que si les conditions sont respectées.

Toutes les méthodes qui existent présentent des conditions de stabilité, l'avantage dans la nouvelle méthode que nous proposons, comme nous allons le voir dans la suite de ce travail, est le fait que les conditions sont faciles à réaliser. En revanche, la simplicité de la détermination de ces conditions dépend des exigences de la méthode.

III.1- Etude de l'erreur

Nous allons déterminer les expressions des erreurs commises lors du développement puis fixer les conditions de minimisation

Nous constatons qu'en plus de l'erreur due au développement limité, il existe un deuxième type d'erreur dû à la structure récursive de la relation de récurrence (74)

$$\hat{h}(nT) = \frac{1}{\lambda} [\hat{S}(nT) - E e^{-\gamma T} \hat{S}((n-1)T) - \mu \hat{h}((n-1)T)]$$

En effet, une erreur commise sur l'échantillon i se répercute automatiquement sur l'échantillon $(i+1)$.

Considérons les notations suivantes :

δ : L'erreur due à l'utilisation du développement limité

ε : L'erreur due à la structure récursive.

On cherche les expressions de ε et de δ

III.1-1- Etude de l'erreur due au développement limité

a) Cas d'un développement du premier ordre

Soit δ_n l'erreur commise par le développement limité d'ordre 1 Sur l'échantillon de rang n

Soit ε_n l'erreur commise par la convolution sur l'échantillon de rang n

Reprenons l'équation (73) :

$$\hat{S}(nT) = E e^{-\gamma T} \hat{S}((n-1)T) + \lambda \hat{h}(nT) + \mu \hat{h}((n-1)T)$$

On peut l'écrire sous cette forme :

$$S(nT) = E e^{-\gamma T} s((n-1)T) + \sigma_n \quad (75)$$

Avec

$$\sigma_n = \lambda h(nT) + \mu h((n-1)T)$$

C'est-à-dire

$$\sigma_n = \int_0^T E e^{-\gamma \tau} \cdot h(t - \tau) d\tau = \lambda h(nT) + \mu h((n-1)T)$$

Si on considère cette notation :

$$\hat{\sigma}_n \quad \text{l'estimé de } \sigma_n$$

Et

$$\hat{S}_n \quad \text{L'estimé de } S_n$$

On peut dire que :

$$\hat{S}(nT) = E e^{-\gamma T} \hat{S}((n-1)T) + \hat{\sigma}_n \quad (76)$$

Avec

$$\hat{\sigma}_n = \lambda \hat{h}(nT) + \mu \hat{h}((n-1)T)$$

Ou bien

$$\hat{\sigma}_n = \int_0^T E e^{-\gamma\tau} \cdot \hat{h}(t - \tau) d\tau = \lambda \hat{h}(nT) + \mu \hat{h}((n-1)T)$$

Donc l'erreur commise par le développement sur l'échantillon de rang n est :

$$\delta_n = | \sigma_n - \hat{\sigma}_n |$$

Et l'erreur commise par la récurrence sur l'échantillon de rang n est :

$$\varepsilon_n = | S_n - \hat{S}_n |$$

Par analogie aux équations (75) et (76) on peut écrire :

$$S((n+1)T) = E e^{-\gamma T} s((nT) + \sigma_{n+1}) \quad (77)$$

Et

$$\hat{S}((n+1)T) = E e^{-\gamma T} \hat{S}((nT) + \hat{\sigma}_{n+1}) \quad (78)$$

Avec :

$$\hat{\sigma}_{n+1} \text{ l'estimé de } \sigma_{n+1}$$

Et

$$\hat{S}_{n+1} \text{ l'estimé de } S_{n+1}$$

Si δ_{n+1} est l'erreur commise par le développement limité sur l'échantillon de rang (n+1) alors on a :

$$\delta_{n+1} = | \sigma_{n+1} - \hat{\sigma}_{n+1} |$$

Et si ε_{n+1} est l'erreur commise par la récurrence sur l'échantillon de rang (n+1) alors :

$$\varepsilon_{n+1} = | S_{n+1} - \hat{S}_{n+1} |$$

En déduit des équations (75), (76), (77) et (78) que :

$$S((n+1)T) - \hat{S}((n+1)T) = E e^{-\gamma T} s((nT) + \sigma_{n+1}) - [E e^{-\gamma T} \hat{S}((nT) + \hat{\sigma}_{n+1})]$$

donc

$$S((n+1)T) - \hat{S}((n+1)T) = E e^{-\gamma T} [s((nT)) - \hat{S}((nT))] + [\sigma_{n+1} - \hat{\sigma}_{n+1}]$$

Donc

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \mathbf{E} e^{-\gamma T} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \boldsymbol{\delta}_{n+1} \quad (79)$$

On constate que l'erreur de récurrence sur l'échantillon de rang n est liée directement à l'erreur due au développement limité sur l'échantillon de même rang. De même l'expression (69) montre que l'erreur de récurrence d'un échantillon se répercute d'une manière considérable (elle multipliée par $\mathbf{E} e^{-\gamma T}$) sur l'erreur de l'échantillon suivant.

La première déduction est quel que soit la valeur du produit γT (sauf l'infini), l'expression $\mathbf{e}^{-\gamma T}$ ne s'annulera jamais ($\mathbf{e}^{-\infty} \rightarrow \mathbf{0}$) donc l'effet de l'erreur commise par un échantillon sur le suivant existera toujours on essayera de la minimiser.

Dans le cas où $\gamma T = 0$, $e^{-\gamma T}$ tend vers 1 et l'effet de l'échantillon précédent sera multiplié par E . Une première solution est de fixer E à 1.

On va essayer de voir est ce qu'on peut minimiser cette erreur en poussant le développement limité à des ordre plus élevé.

b) Cas d'un développement limité d'ordre quelconque

On va étudier l'effet de cette erreur dans le cas général d'un développement limité d'ordre k .

Dans ces conditions :

Notons $(\boldsymbol{\delta}_n)_k$ l'erreur due au développement limité d'ordre k sur l'échantillon de rang n

Supposons que $h(t)$ est une fonction analytique qui possède des dérivées jusqu'à

l'ordre $k+1$ tel que :

si $h(t)^{(k+1)}$ est la dérivée $(k+1)^{\text{ième}}$

alors :

$$|h(t)^{(k+1)}| < M_{k+1} \quad \text{avec } M_{k+1} \text{ une constante positive.}$$

le développement limité d'ordre k de $h(nT + \tau)$ s'écrit :

$$h(nT + \tau) = h(nT) + \frac{h'(nT)}{1!} \tau + \frac{h''(nT)}{2!} \tau^2 \dots + \frac{h^{(k)}(nT)}{k!} \tau^k + R_{k+1}$$

Où R_{k+1} représente le reste du développement limité d'ordre k .

Donc :

$$R_{k+1} = |h(nT - \tau) - \hat{h}(nT - \tau)| \quad (80)$$

avec

$$R_{k+1} \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} \tau^{k+1} \quad (81)$$

Pour déterminer l'expression de $(\delta_n)_k$, on procède de la manière suivante :

Sachant que :

$$(\sigma_n)_k = \int_0^T E e^{-\gamma\tau} \cdot h(t - \tau) d\tau \quad \neq \lambda h(nT) + \mu h((n-1)T)$$

$$(\hat{\sigma}_n)_k = \int_0^T E e^{-\gamma\tau} \cdot \hat{h}(t - \tau) d\tau \quad \neq \lambda \hat{h}(nT) + \mu \hat{h}((n-1)T)$$

alors

$$|(\delta_n)_k| = |(\sigma_n)_k - (\hat{\sigma}_n)_k| = \int_0^T E e^{-\gamma\tau} [|h(nT - \tau) - \hat{h}(nT - \tau)|] d\tau \quad (82)$$

or

$$R_{k+1} = |\hat{h}(nT - \tau) - h(nT - \tau)|$$

Et

$$R_{k+1} \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} \tau^{k+1}$$

Donc :

$$|\hat{h}(nT - \tau) - h(nT - \tau)| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} \tau^{k+1}$$

Alors

$$|(\delta_n)_k| \leq \int_0^T E e^{-\gamma\tau} \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} |\tau|^{k+1} d\tau \quad (83)$$

Or

$\frac{M_{k+1}}{(k+1)!}$ est un terme constant.

Alors
$$|(\delta_n)_k| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} \int_0^T E e^{-\gamma\tau} |\tau|^{k+1} d\tau$$

D'où une majoration de δ_n donnée par la relation suivante :

$$|(\delta_n)_k| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} \int_0^T E e^{-\gamma\tau} |\tau|^{k+1} d\tau \quad (84)$$

Dans le cas particulier d'un développement limité du premier ordre où $k = 1$
 Cette erreur est majorée par :

$$|(\delta_n)_1| \leq \frac{M_2}{2!} \int_0^T E e^{-\gamma\tau} |\tau|^2 d\tau \quad (85)$$

Or
$$\int_0^T E e^{-\gamma\tau} |\tau|^2 d\tau = E \int_0^T e^{-\gamma\tau} |\tau|^2 d\tau$$

On calcul cette intégrale

$$\int_0^T e^{-\gamma\tau} \tau^2 d\tau$$

Faisons une intégrale par partie alors :

Partons du principe :

$$\int v du = uv - \int u dv$$

Posons

$$e^{-\gamma\tau} d\tau = du \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau}$$

Et

$$\tau^2 = v \quad \Rightarrow \quad dv = 2\tau d\tau$$

Donc

$$\int_0^T e^{-\gamma\tau} \tau^2 d\tau = \left[\left(-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau} \right) \tau^2 \right]_0^T - \left[\int_0^T \left(-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau} \right) (2\tau) d\tau \right]$$

D'où

$$\int_0^T e^{-\gamma\tau} \tau^2 d\tau = -\frac{1}{\gamma} T^2 e^{-\gamma T} + 2 \frac{1}{\gamma} \left[\int_0^T e^{-\gamma\tau} \tau d\tau \right] \quad (86)$$

Faisons le même calcul au deuxième terme de l'équation (86)

Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-\gamma\tau} \tau d\tau &= \left[-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau} \tau \right]_0^T - \left[\int_0^T -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau} d\tau \right] \\ &= \left(-\frac{1}{\gamma} T e^{-\gamma T} \right) + \frac{1}{\gamma} \left[\int_0^T e^{-\gamma\tau} d\tau \right] \\ &= -\frac{1}{\gamma} T e^{-\gamma T} + \frac{1}{\gamma} \left[-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau} \right]_0^T \\ &= -\frac{1}{\gamma} T e^{-\gamma T} - \frac{1}{\gamma^2} [e^{-\gamma T} - 1] \end{aligned}$$

On obtient :

$$\int_0^T e^{-\gamma\tau} \tau d\tau = -\frac{1}{\gamma} (T e^{-\gamma T} + \frac{1}{\gamma^2} [e^{-\gamma T} - 1]) \quad (87)$$

Remplaçons (77) dans (76) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-\gamma\tau} \tau^2 d\tau &= -\frac{1}{\gamma} T^2 e^{-\gamma T} + 2 \frac{1}{\gamma} \left[-\frac{1}{\gamma} T e^{-\gamma T} - \frac{1}{\gamma^2} [e^{-\gamma T} - 1] \right] \\ &= -\frac{1}{\gamma} T^2 e^{-\gamma T} - \frac{2}{\gamma^2} T e^{-\gamma T} + \frac{2}{\gamma^3} [1 - e^{-\gamma T}] \\ &= \frac{1}{\gamma} \left[-e^{-\gamma T} \left(T^2 + \frac{2T}{\gamma} \right) + \frac{2}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma T}) \right] \end{aligned}$$

D'où en final

$$\int_0^T e^{-\gamma\tau} \tau^2 d\tau = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{2}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma T}) - e^{-\gamma T} \left(T^2 + \frac{2T}{\gamma} \right) \right] \quad (88)$$

Donc

$$E \int_0^T e^{-\gamma\tau} \tau^2 d\tau = \frac{E}{\gamma} \left[\frac{2}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma T}) - e^{-\gamma T} \left(T^2 + \frac{2T}{\gamma} \right) \right] \quad (89)$$

Remplaçons (79) dans (75) on obtient :

$$|(\delta_n)_1| \leq \frac{M_2}{2!} \frac{E}{\gamma} \left| \left[\frac{2}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma T}) - e^{-\gamma T} \left(T^2 + \frac{2T}{\gamma} \right) \right] \right| \quad (90)$$

Pour optimiser la solution on doit minimiser l'erreur exprimée par l'équation (90)

On constate que la minimisation de cette erreur est obtenue pour γ grand et T petit. (γ est au dénominateur partout mais le premier terme est fonction de $\frac{2}{\gamma^2}$ et le deuxième terme est fonction de T^2)

Si E est différent de l'unité (on prend généralement cette hypothèse pour simplifier les calculs) il faut qu'il soit petit.

Il faut noter la compatibilité de cette condition avec celle de l'approximation de la dérivée de $h(t)$ sous forme :

$$\frac{h(nT) - h((n-1)T)}{T}$$

III.1-2- Etude de l'erreur due à la structure récursive

Soit l'équation récursive donnée par la relation (64)

$$\hat{h}(nT) = \frac{1}{\lambda} [\hat{S}(nT) - E e^{-\gamma T} \hat{S}((n-1)T) - \mu \hat{h}((n-1)T)]$$

La structure récursive nécessite la connaissance de l'échantillon $h(0)$ pour initialiser le processus.

En l'absence du bruit de cette information on peut partir de l'hypothèse suivante :

$$h(0) = h(T)$$

Si dans l'équation (70) on applique l'hypothèse : $h(0) = h(T)$

Donc :

$$\text{si } S(nT) = E e^{-\gamma T} s((n-1)T) + \lambda h(nT) + \mu h((n-1)T)$$

Alors :

$$h(0) = \frac{S(T) - S(0)}{\lambda + \mu} \quad (91)$$

Or l'erreur commise par la convolution est notée ϵ

Donc ϵ_1 est l'erreur commise sur l'échantillon $h(T)$.

Alors :

$$S(T) - S(0) = \lambda h(T) + \mu [h(T) + \epsilon_1]$$

$$S(T) - S(0) = \lambda h(T) + \mu h(0)$$

d'où

$$|\epsilon_1| = |h(T) - h(0)| \quad (92)$$

Cherchons l'effet de ϵ_1 sur les autres échantillons

si

Pour l'échantillon de rang 2 on a :

$$S(2T) - e^{-\gamma T} S(T) = \lambda h(2T) + \mu h(T)$$

$$\hat{S}(2T) - e^{-\gamma T} \hat{S}(T) = \lambda [\hat{h}(2T) + \epsilon_2] + \mu [\hat{h}(T) + \epsilon_1]$$

Pour $\hat{h}(2T)$ et $\hat{h}(T)$ estimés respectivement vers $h(2T)$ et $h(T)$, la différence entre ces deux équations nous donne :

$$\lambda [\hat{h}(2T) + \epsilon_2] + \mu [\hat{h}(T) + \epsilon_1] = \lambda h(2T) + \mu h(T)$$

$$\lambda [\hat{h}(2T) + \epsilon_2] - \lambda h(2T) = \mu h(T) - \mu [\hat{h}(T) + \epsilon_1]$$

$$\lambda [\hat{h}(2T) - h(2T) + \epsilon_2] = -\mu [\hat{h}(T) - h(T) + \epsilon_1]$$

Si $\hat{h} \rightarrow h$

Alors

$$\hat{h}(2T) - h(2T) = 0 \quad \text{et} \quad \hat{h}(T) - h(T) = 0$$

donc $\lambda \varepsilon_2 = -\mu \varepsilon_1$

d'où

$$\varepsilon_2 = -\frac{\mu}{\lambda} \varepsilon_1 \quad (93)$$

De même Pour l'échantillon de rang 3 on a :

$$\begin{aligned} S(3T) - e^{-\gamma T} S(2T) &= \lambda h(3T) + \mu h(2T) \\ \hat{S}(3T) - e^{-\gamma T} \hat{S}(2T) &= \lambda [\hat{h}(3T) + \varepsilon_2] + \mu [\hat{h}(2T) + \varepsilon_2] \end{aligned}$$

Pour $\hat{h}(3T)$ et $\hat{h}(2T)$ estimés respectivement vers $h(3T)$ et $h(2T)$, la différence entre ces deux équations nous donne :

$$\varepsilon_3 = -\frac{\mu}{\lambda} \varepsilon_2 = \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \varepsilon_1$$

D'après la théorie des suites on peut généraliser.

D'où l'on tire la relation générale :

$$\varepsilon_n = \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1} \varepsilon_1 \quad (94)$$

De l'expression (84) on peut dire que la condition de minimisation : pour que l'erreur soit minimisée il faut que :

$$\lambda > \mu$$

Si on remplace λ et μ par leurs expressions respectives :

$$\lambda = \frac{1}{\gamma} \left[1 - \frac{1-e^{-\gamma T}}{\gamma T} \right] \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{1-e^{-\gamma T}}{\gamma T} - e^{-\gamma T} \right]$$

On obtient :

$$\frac{1}{\gamma} \left[1 - \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma T} \right] > \frac{1}{\gamma} \left[\frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma T} - e^{-\gamma T} \right]$$

D'où $\gamma T > 2$ (95)

En l'absence de bruit cette condition, comme nous le verrons dans les résultats, constitue une condition nécessaire et suffisante pour éviter les oscillations.

III.2 - Interprétations

La caractéristique des deux erreurs déterministes définit deux conditions d'optimisations. La première condition, donnée par l'équation (90), exige un couple (γ, T) tel que γ Grand et T petit. Tandis que la seconde condition fixée par l'équation (95) nécessite un couple (γ, T) tel que leur produit doit être supérieur à 2. Il y'a donc une totale compatibilité entre les deux conditions. C'est une situation tout à fait intéressante dans le cas de l'identification où justement le couple (γ, T) fait partie du choix de l'opérateur.

Dans le cas du filtrage inverse, γ est fixé par le processus de la mesure, nous disposons d'un seul degré de liberté T pour se mettre dans les meilleures conditions de traitement au sens de nos conditions. (90) et (95)). Il est évident que l'erreur due au développement limité pourrait être minimisée d'avantage en faisant un développement d'ordre supérieur, au prix d'un alourdissement des calculs .

IV. Amélioration par un développement limité au second ordre

IV.1- Expression de l'équation de récurrence

Le principe est le même que précédemment.

Partons de l'équation de convolution donnée par l'équation (59)

$$S(t) = \int_0^T E e^{-\gamma \tau} . h(t - \tau) d\tau + \int_T^t E e^{-\gamma \tau} . h(t - \tau) d\tau$$

Cette équation est décomposée en deux termes qui sont exprimés par les relations (62) et (57) à savoir :

$$\int_T^t E e^{-\gamma\tau} \cdot h(t - \tau) d\tau = E e^{-\gamma T} s(t - T) \quad (62)$$

Et

$$\int_0^T E e^{-\gamma\tau} \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_0^T E e^{-\gamma\tau} \cdot h(nT - \tau) d\tau \quad (64)$$

Pour étudier l'intégrale de l'équation (57) nous avons eu recours à un développement limité de $h(nT - \tau)$ que nous avons limité au premier ordre. L'erreur ainsi introduite est donnée par la relation (80) qui est :

$$|(\delta_n)_1| \leq \frac{M_2}{2!} \frac{E}{\gamma} \left[+ \frac{2}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma T}) - e^{-\gamma T} \left(T^2 + \frac{2T}{\gamma} \right) \right]$$

Cette erreur est directement liée au reste du développement limité, en utilisant un développement au second ordre, on peut espérer une minimisation meilleur.. Il est évident que le gain en précision s'obtiendra au détriment de la simplicité des calculs et du temps de traitement (donc de la simplicité de la méthode)

Sachant que le développement limité d'ordre général de $h(nT - \tau)$ autour de (nT) est donnée par l'équation (58) :

Donc

$$h(nT - \tau) \approx h(nT) + \frac{(-\tau)}{1!} h'(nT) + \frac{(-\tau)^2}{2!} h''(nT) + \frac{(-\tau)^3}{3!} h^{(3)}(nT) + \dots,$$

Alors le développement limité au second ordre de $h(nT - \tau)$ est :

$$h(nT - \tau) \approx h(nT) - \frac{\tau}{1!} h'(nT) + \frac{\tau^2}{2!} h''(nT) \quad (96)$$

donc :

$$h(nT - \tau) \approx h(nT) - \tau h'(nT) + \frac{\tau^2}{2} h''(nT)$$

donc :

$$h(nT - \tau) \approx h(nT) - \tau \frac{h(nT) - h((n-1)T)}{T} - \frac{\tau^2}{2} \left[\frac{h'(nT) - h'((n-1)T)}{T} \right]$$

Où encore :

$$h(nT - \tau) \approx h(nT) - \tau \frac{h(nT) - h((n-1)T)}{T} - \frac{\tau^2}{2} \left[\frac{h(nT) - 2h((n-1)T) + h((n-2)T)}{T^2} \right] \quad (97)$$

Tout calcul fait on trouve :

$$h(nT - \tau) \approx A\tau^2 + B\tau + h(nT) \quad (98)$$

Avec

$$A = \frac{1}{2T^2} [h(nT) - 2h((n-1)T) + h((n-2)T)] \quad (99)$$

$$B = \frac{1}{T} [h((n-1)T) + h(nT)] \quad (100)$$

Pour calculer cette intégrale

$$\int_0^T Ee^{-\gamma\tau} . h(nT - \tau) d\tau$$

On remplace

$h(nT - \tau) d\tau$ par l'équation (98) on obtient :

$$\int_0^T Ee^{-\gamma\tau} . h(nT - \tau) d\tau \approx \int_0^T Ee^{-\gamma\tau} [A\tau^2 + B\tau + h(nT)] \quad (101)$$

On remplace A et B par leurs expressions respectives données par les relations (98) et (99) dans (100).

En faisant une double intégration par partie

On aboutit à la relation de récurrence suivante :

$$\hat{h}[(n)T] = \frac{1}{\alpha} [\hat{S}(nT) - Ee^{-\gamma T} \hat{S}[(n-1)T] - \xi \hat{h}[(n-1)T] - \beta \hat{h}[(n-2)T]] \quad (102)$$

Avec

$$\alpha = \frac{1}{\gamma} \left[\left(1 + \frac{e^{-\gamma T} - 3}{2\gamma T} \right) + \frac{1 - e^{-\gamma T}}{(\gamma T)^2} \right] \quad (103)$$

$$\xi = \frac{-2}{\gamma^2 T} \left[\left(1 - \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma T} \right) \right] - \frac{e^{-\gamma T}}{\gamma} \quad (104)$$

$$\beta = \frac{1}{\gamma^2 T} \left[\frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma T} - \frac{1 + e^{-\gamma T}}{2} \right] \quad (105)$$

IV.2 -Discussion

L'équation de récurrence (102), avec un développement limité au second ordre, permet de déterminer les échantillons $h(nT)$ en fonction des échantillons $S(nT)$. Nous constatons que pour chaque échantillon $h(nT)$, la connaissance des deux échantillons précédents est obligatoire. Ces informations supplémentaires qui sont nécessaires pour le traitement, justifient le gain en précision. La différence entre les deux relations de récurrences (avec un développement limité l'une au premier ordre l'autre au second ordre) se trouve dans un seul terme ($h[(n-2)]$). On peut conclure que le temps de traitement est relativement du même ordre. La différence se remarquera essentiellement au niveau de la caractéristique de l'erreur qui conditionne l'optimisation de la solution.

IV.3 -Etude de l'erreur

IV.3-1-Erreur due au développement limité

L'expression en générale de l'erreur pour un développement limité d'ordre k est donnée par l'expression (84)

$$|(\delta_n)_k| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} \int_0^T E e^{-\gamma \tau} |\tau|^{k+1} d\tau$$

Pour le cas particulier d'un développement limité du second ordre l'équation qui exprime l'erreur devient :

$$|(\delta_n)_2| \leq \frac{M_3}{3!} \int_0^T E e^{-\gamma \tau} |\tau|^3 d\tau$$

Donc :

$$|(\delta_n)_2| \leq \frac{M_3}{6} \int_0^T E e^{-\gamma\tau} |\tau|^3 d\tau$$

$$|(\delta_n)_2| \leq \frac{M_3}{6} E \int_0^T e^{-\gamma\tau} |\tau|^3 d\tau \quad (106)$$

La relation (106) exprime la minimisation de l'erreur due au développement limité qui nous permettra de fixer la condition d'optimisation autrement dit d'atténuation les oscillations éventuelles sur la solution recherchée.

On fait l'intégrale de la fonction suivante :

$$\int_0^T e^{-\gamma\tau} |\tau|^3 d\tau$$

On fait une triple intégration par partie (même principe que précédemment).

Posons

$$e^{-\gamma\tau} d\tau = du \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau}$$

Et

$$\tau^3 = v \quad \Rightarrow \quad dv = 3\tau^2 d\tau$$

Donc

$$\int_0^T e^{-\gamma\tau} |\tau|^3 d\tau = \left[\left(-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau} \right) (|\tau|^3) \right]_0^T - \left[\int_0^T \left(-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau} \right) (3\tau^2) d\tau \right]$$

$$\int_0^T e^{-\gamma\tau} |\tau|^3 d\tau = \left(-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma T} \right) (|T|^3) + \frac{3}{\gamma} \int_0^T e^{-\gamma\tau} |\tau|^2 d\tau \quad (107)$$

On doit encore intégrer deux fois pour calculer le deuxième terme de l'équation ci-dessus : c'est -à-dire :

$$\int_0^T e^{-\gamma\tau} |\tau|^2 d\tau$$

Cette deuxième intégrale a été calculée pour le développement d'ordre 1 et elle est donnée par l'expression (89) à savoir :

$$\int_0^T e^{-\gamma\tau} |\tau|^2 d\tau = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{2}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma T}) - e^{-\gamma T} \left(T^2 + \frac{2T}{\gamma} \right) \right]$$

Donc on remplace le terme $\int_0^T e^{-\gamma\tau} |\tau|^2 d\tau$, par l'expression ci-dessus, dans l'équation suivante :

$$\int_0^T e^{-\gamma\tau} |\tau|^3 = \left(-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma T} \right) (|T|^3) + \frac{3}{\gamma} \int_0^T e^{-\gamma\tau} |\tau|^2 d\tau$$

On obtient alors :

$$\int_0^T e^{-\gamma\tau} |\tau|^3 = \left(-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma T} \right) (|T|^3) + \frac{3}{\gamma} \left[\frac{1}{\gamma} \left[\frac{2}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma T}) - e^{-\gamma T} \left(T^2 + \frac{2T}{\gamma} \right) \right] \right]$$

$$\int_0^T e^{-\gamma\tau} |\tau|^3 = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{3}{\gamma} \left[\frac{2}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma T}) - e^{-\gamma T} \left(T^2 + \frac{2T}{\gamma} \right) \right] - e^{-\gamma T} T^3 \right] \quad (108)$$

Et la condition de minimisation devient :

$$|(\delta_n)_2| \leq \frac{M_3}{6} E \frac{1}{\gamma} \left[\frac{3}{\gamma} \left[\frac{2}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma T}) - e^{-\gamma T} \left(T^2 + \frac{2T}{\gamma} \right) \right] - e^{-\gamma T} T^3 \right] \quad (109)$$

IV. 3-2 Discussion

D'après l'équation (109) on constate que l'expression de la minimisation est plus complexe que celle trouvée avec un développement limité au premier ordre mais la précision est meilleure, en comparant les deux expressions (109) et (90), on constate qu'il y'a déjà une diminution remarquable de l'erreur dans l'équation (109) avec la division de M_3 par 6 au lieu de 2 comme c'est le cas dans l'équation (90), en plus de l'introduction du terme en fonction de T^3 avec un signe moins qui signifie que si T diminue légèrement la minimisation peut diminuer considérablement.

La condition dans ce cas est toujours γ grand mais pas aussi grand que le développement du premier ordre du moment que le γ qui se trouve au dénominateur est élevé à la puissance 4.

Et en conclusion on peut dire que si une application exige une bonne précision, la méthode a l'air de répondre à la demande, nous sommes en présence d'une orientation, il faut la vérifier. Un travail dans ce sens est souhaitable.

V. Simulation

Nous avons développé une méthode de déconvolution temporelle et récursive ; Cette méthode consiste à déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système qui peut être excité par un signal de forme exponentielle ($e^{-\gamma t}$ ou une combinaison de plusieurs exponentielles). La méthode est caractérisée par l'utilisation du développement limité. Pour déterminer l'équation de récurrence qui permet de trouver les échantillons de la réponse impulsionnelle du système que l'on cherche en fonction des échantillons du signal mesuré. Théoriquement, nous avons proposé une équation de récurrence avec un développement limité au premier ordre et une autre avec un développement au second ordre. En effet, avec le deuxième cas, on gagne en précision au détriment de la simplicité de la méthode donc suivant le domaine de son éventuelle application l'une ou l'autre équation sera prise en considération.

V.1- Hypothèses de simulation

Pour tester la méthode nous avons simulé un système du deuxième ordre défini par sa réponse impulsionnelle $h(t)$

Soit $H(p)$ la fonction de transfert d'un système du second ordre.

D'une manière générale la fonction de transfert d'un polynôme peut se mettre sous la forme d'un quotient de polynômes en p alors :

$$H(P) = \frac{N(P)}{D(p)} \quad (110)$$

Le système est d'une manière générale d'ordre m , $m \geq 1$.

Soit : P_k avec $k = 1, 2 \dots m$ les pôles de la fonction de transfert $H(P)$

Alors les P_k sont les solutions de l'équation :

$$D(p_k) = 0 \quad (111)$$

On suppose que les P_k sont des pôles simples c'est-à-dire $\forall i \neq j : P_i \neq P_j$

Alors la fonction $H(P)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$H(P) = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{D'(p_k)} \frac{1}{P - p_k} \quad (112)$$

Avec $D'(p_k)$ la dérivée de $D(p)$ au point k

$$D(p) = \prod_{i=1}^m (p + p_i) \quad \text{et} \quad D'(p_k) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m (p_k + p_i)$$

La réponse impulsionnelle du système choisi pour la simulation peut s'écrire comme suit

$$h(t) = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{D'(p_k)} e^{p_k t} \quad (113)$$

avec, pour assurer la stabilité :

$$p_k \leq 0$$

$$\text{ou } \operatorname{Re}(p_k) \leq 0$$

Le système est excité par un signal $e(t)$ tel que

$$e(t) = E e^{-\gamma t} \quad \text{avec } \gamma > 0$$

La méthode se caractérise par le choix du signal d'excitation de forme exponentielle.

L'équation de convolution donne

$$s(t) = E e^{-\gamma t} * h(t)$$

$$s(t) = E e^{-\gamma t} * \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{D'(p_k)} e^{p_k t} \quad (114)$$

L'opération de convolution étant distributive par rapport à l'addition alors :

$$s(t) = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{D'(p_k)} (E e^{-\gamma t} * e^{p_k t})$$

D'où

$$s(t) = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{D'(p_k)} \frac{E}{\gamma + P_k} (e^{P_k t} - e^{-\gamma t}) \quad (115)$$

Pour la simulation, nous avons considéré un système du deuxième ordre et pour simplifier les calculs on a supposé

$$N(p) = A_0 = \text{constante.}$$

Faisant un échantillonnage de $s(t)$ avec une période d'échantillonnage T , on aura un signal à la sortie $s(nT)$ où $n = 1, 2, \dots, N$ avec N le nombre des échantillons et n le rang d'un échantillon.

Alors :

$$S(nT) = \sum_{k=1}^2 \frac{A_0}{D'(p_k)} \frac{E}{\gamma + P_k} (e^{P_k nT} - e^{-\gamma nT}) \quad (116)$$

L'équation de convolution a été résolue par rapport à $h(t)$ (ou après échantillonnage $h(nT)$)

Si on considère, pour l'estimation de $h(nT)$, l'équation de récurrence avec un développement limité du premier ordre alors la condition de stabilité sera :

$$\gamma T > 2$$

avec γ grand et T petit.

V.2 - Algorithme de simulation :

Simulation de $s(nt)$

$$S(nT) = E e^{-\gamma nT} * h(nT)$$

Calcul de $h(nT)$

$$h(nT) = \sum_{k=1}^2 \frac{A_0}{D'(p_k)} e^{P_k nT}$$

avec pour assurer la stabilité :

$$p_k \leq 0$$

$$\text{ou } \text{Re}(p_k) \leq 0$$

Calcul de $D'(p_k)$

$$D(p) = \prod_{i=1}^m (p + p_i)$$

$$\text{Donc } D'(p_k) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m (p_k + p_i)$$

Calcul de $s(nT)$

$$S(nT) = \sum_{k=1}^2 \frac{A_o}{D'(p_k)} \frac{E}{\gamma + p_k} (e^{p_k nT} - e^{-\gamma nT})$$

Calcul de $\hat{h}(nT)$

Deux cas de figures sont à utiliser (mais pas en même temps) :

Soit on considère un développement limité du premier ordre , soit du Deuxième ordre .

a) Cas du premier ordre

$$\hat{h}((n+1)T) = \frac{1}{\lambda} [\hat{S}((n+1)T) - E e^{-\gamma T} \hat{S}(nT) - \mu \hat{h}(nT)]$$

Avec :

$$\lambda = \frac{1}{\gamma} \left[1 - \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma T} \right]$$

et

$$\mu = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma T} - e^{-\gamma T} \right]$$

b) Cas du deuxième ordre

$$[\hat{h}(n)T] = \frac{1}{\alpha} [\hat{S}(nT) - E e^{-\gamma T} \hat{S}[(n-1)T] - \xi \hat{h}[(n-1)T] - \beta \hat{h}[(n-2)T]]$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{\gamma} \left[\left(1 + \frac{e^{-\gamma T} - 3}{2\gamma T} \right) + \frac{1 - e^{-\gamma T}}{(\gamma T)^2} \right]$$

$$\xi = \frac{-2}{\gamma^2 T} \left[\left(1 - \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma T} \right) \right] - \frac{e^{-\gamma T}}{\gamma}$$

$$\beta = \frac{1}{\gamma^2 T} \left[\frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma T} - \frac{1 + e^{-\gamma T}}{2} \right]$$

Comparaison de $\hat{h}(nT)$ avec $h(nT)$.

VI. Programmation

Pour la simulation nous avons développé un programme assez volumineux ceci démontre encore une fois que les méthodes de convolution doivent être traitées en numérique .

VII- Résultats expérimentaux

Le programme développé est fonctionnel.

Nous avons simulé un système du deuxième ordre défini par sa réponse impulsionnelle qui est contrôlable dans le programme en jouant sur ses pôles.

Le système simulé est supposé excité par un signal $e(nT) = Ee^{-\gamma(nT)}$ dont tous ces paramètres sont contrôlables par l'opérateur. La stabilité de la solution est assurée par le bon choix de γ et de T qui vérifie les conditions de stabilité ($(\gamma T) > 2$ avec γ grand et T petit).

L'opérateur peut contrôler aussi le nombre d'échantillons.

Nous avons fait plusieurs tests en faisant varier les différents degrés de libertés et nous avons obtenus des résultats que nous jugeons satisfaisants.

Notons qu'une procédure de production de bruit a été développée mais les tests ont été faits et les résultats (nous ne les avons pas présentés dans ce travail) montrent qu'une recherche approfondie est sollicitée.

Si on néglige le bruit les résultats obtenus concordent avec ceux déterminés théoriquement. Et nous jugeons que la méthode est à encourager. D'ailleurs nous l'avons proposée pour une publication.

En effet, d'après la théorie, la stabilité est assurée par la condition $(\gamma T) > 2$.

Donc dans les simulations nous avons choisi des couples (γ, T) de telle sorte à vérifier toutes les situations possibles, c'est-à-dire les cas suivants :

$$\gamma T < 2, \quad \gamma T = 2 \quad \text{et} \quad \gamma T > 2.$$

Dans les figures que nous proposons nous avons vérifié les trois possibilités en gardant les mêmes pôles du système choisi pour la simulation afin que la vérification de la condition de convergence soit évidente..

Dans les exemples que nous présentons dans ce travail nous avons choisi :

$$P_1 = -0,6$$

$$P_2 = -0,4.$$

$$E = 1$$

Les résultats sont répartis en trois parties :

1°) Condition non vérifiée : $\gamma T < 2$

La figure 11 montre des oscillations amorties de $\hat{h}(t)$ mais ces oscillations restent bien autour de $h(t)$ réelle.

Nous avons remarquer que les oscillations augmentent quand le produit γT diminue et s'éloigne de la conditon.

2°) Condition limite : $\gamma T = 2$ cas limite :

la figure 13 montre que les oscillations diminuent déjà notablement .

3°) Condition vérifiée : $\gamma T > 2$

Sur les figures 13 et 14,et 15 où la condition de stabilité est assurée , on constate que les oscillations ont disparu .

L'estimation de la réponse impulsionnelle $\hat{h}(t)$ est convergente et il n'y a d'écart que sur les premiers échantillons . Cet écart est du à la condition initiale qui est supposée nul alors qu'en réalité elle ne l'est pas. Elle peut être fixée selon l'application.

_ Sur les figures 13 et 14 la condition est vérifiée avec un T identique et un γ différent le résultat est plus ou moins le même .

_ Dans la figure 15 , la condition est vérifiée mais nous avons diminué le T et le résultat s'est amélioré d'une manière considérable. Sachant que ce degré de liberté est contrôlable et il n'est pas conditionné par la théorie (Théorème de Shannon) donc c'est un autre avantage pour la méthode.

En conclusion pour que la solution converge complètement il faut que les deux conditions soient assurées et en même temps.

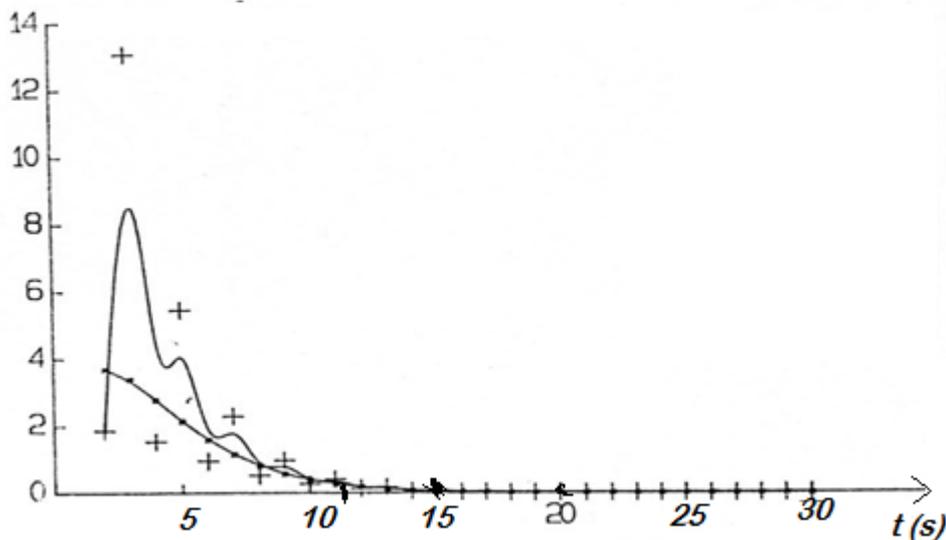


Figure 11 : Représentation de $h(t)$ et de $\hat{h}(t)$: $h(t)$ et +++ $\hat{h}(t)$
 la condition est non vérifiée : $T = 1, \gamma = 1$ ($\gamma T < 2$)

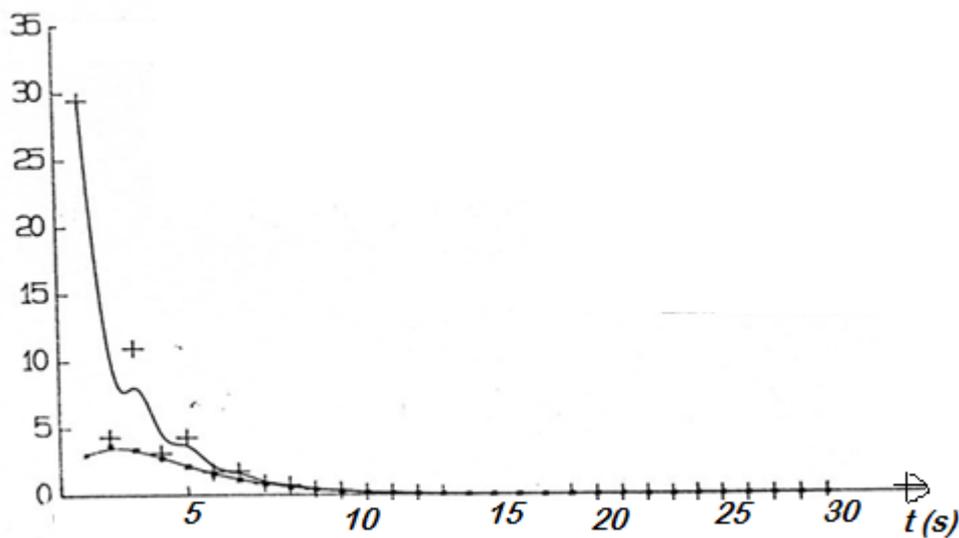


Figure 12: Représentation de $h(t)$ et de $\hat{h}(t)$: $h(t)$ et +++ $\hat{h}(t)$
 la condition est limite : $T = 1, \gamma = 2$ ($\gamma T = 2$)

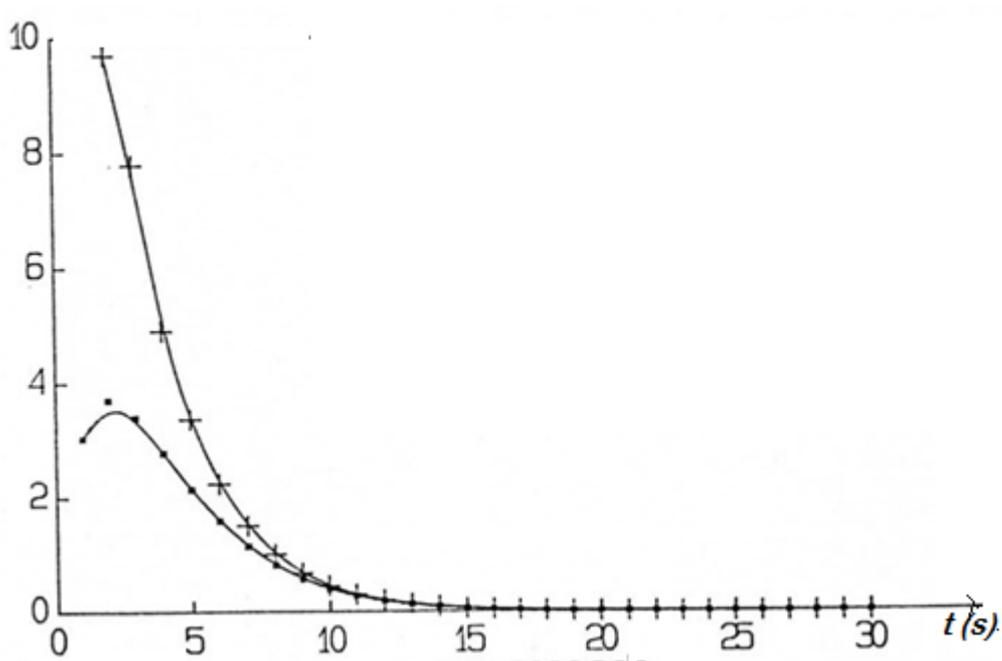


Figure 13 : Représentation de $h(t)$ et de $\hat{h}(t)$: $h(t)$ et +++ $\hat{h}(t)$
 la condition est vérifiée : $T = 1, \gamma = 5$ ($\gamma T > 2$)

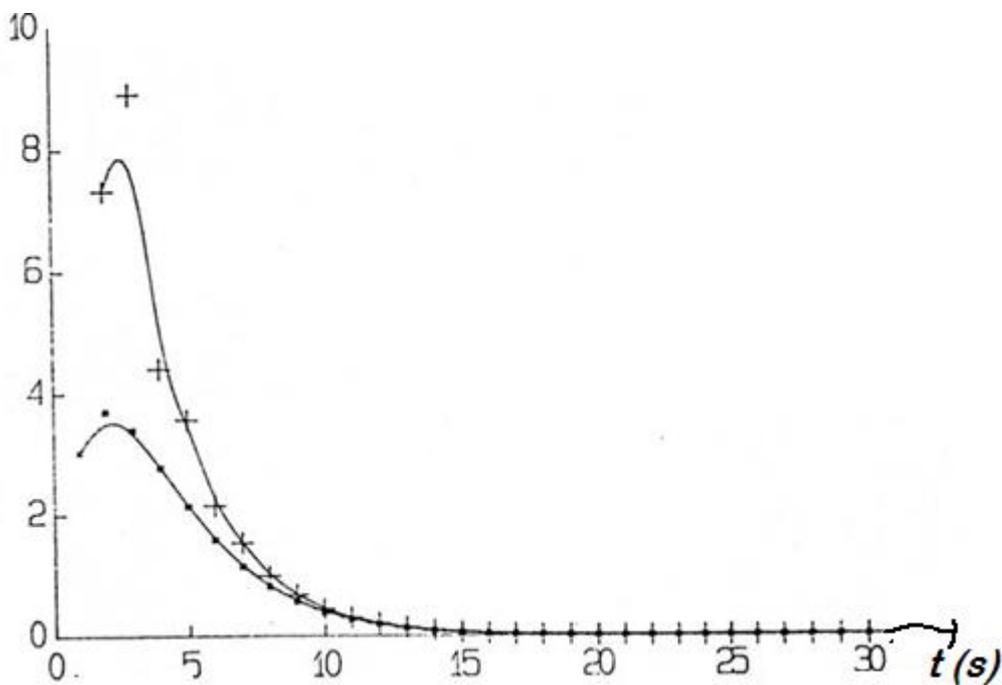


Figure 14 : Représentation de $h(t)$ et de $\hat{h}(t)$: $h(t)$ et +++ $\hat{h}(t)$
 la condition est vérifiée : $T = 1, \gamma = 3$ ($\gamma T < 2$)

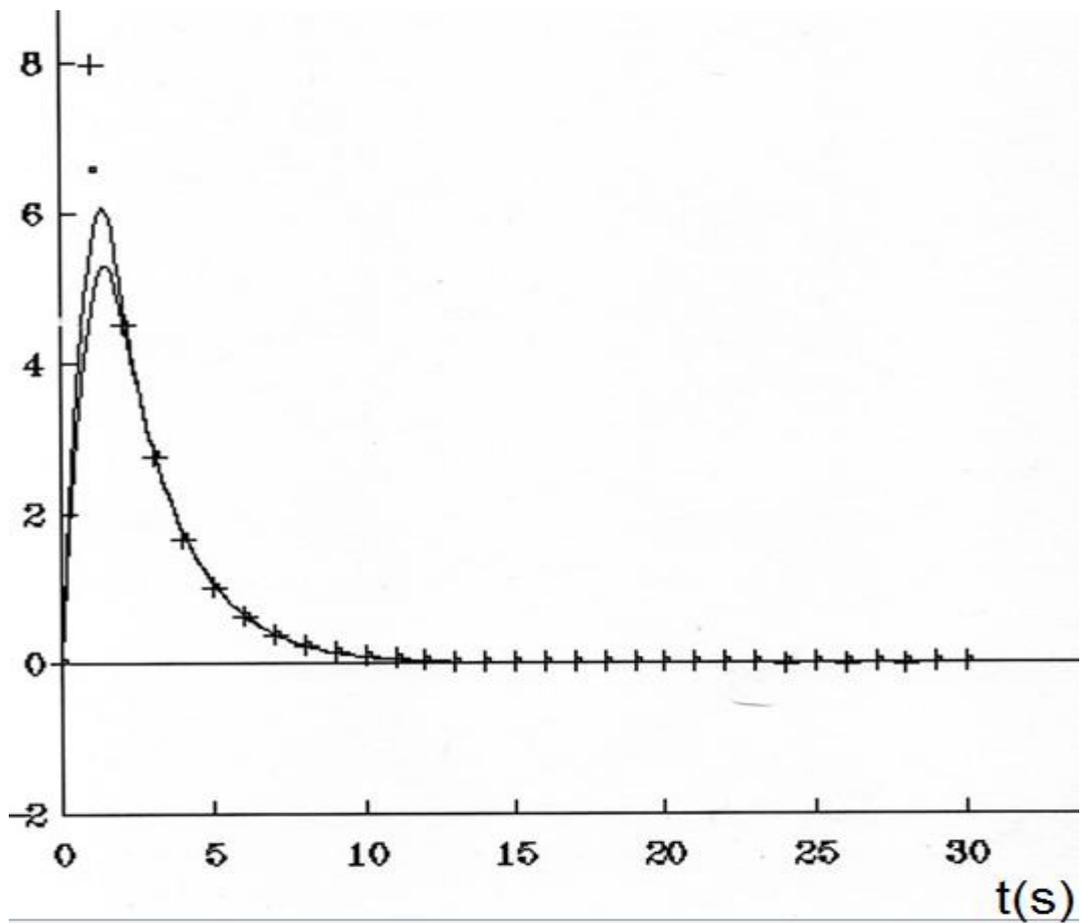


Figure 15 : Représentation de $h(t)$ et de $\hat{h}(t)$: ••• $h(t)$ et +++ $\hat{h}(t)$
 la condition est vérifiée : $(\gamma T > 2)$ $T=0,8$, $\gamma = 5$

VIII. Conclusion

La méthode de déconvolution développée est une méthode temporelle et récursive. Elle permet d'estimer la réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système et elle nécessite une forme exponentielle pour le signal connu qui est le signal d'entrée.

La méthode est acceptable en la comparant à d'autres méthodes qui existent surtout que la condition de convergence est facile à réaliser. En plus la période T n'est pas conditionnée par le théorème de Shanon donc sa modification pour satisfaire l'optimisation de la solution n'est pas conditionnée par d'autres facteurs.

Les résultats de simulations ont montré qu'il y'a toujours un certain écart sur les premiers échantillons quand la condition est vérifiée. Une réduction de l'erreur est possible en utilisant un développement limité de $h(t)$ d'ordre supérieur (le deuxième ordre est largement suffisant). Tous les calculs pour le second ordre ont été faits et présentés dans ce travail mais ils sont tellement lourds qu'on les a pas encore testés surtout que nous avons remarqué dans les calculs que la récursivité dépend de plus en plus des échantillons passés.

Nous signalons que la méthode est très simple donc pas très coûteuse .

Suivant ses éventuelles applications ,on peut s'intéresser davantage à améliorer la précision qui, comme nous l'avons mentionnée, est possible.

L'application de la méthode est destinée au traitement des signaux sismiques . Sachant qu'en sismologie l'opération de déconvolution est fondamentale par exemple lors d'un séisme , la déconvolution est utilisée pour connaître le mouvement du sol. Des études approfondies sont souhaitables pour améliorer la méthode surtout vis à vis du bruit.

Conclusion générale

L'étude de la déconvolution nous a montré que la conception des méthodes de déconvolution et leurs applications en physique nécessitent des traitements de plus en plus sophistiqués qui bénéficient des progrès réalisés en recherche par les spécialistes du traitement du signal.

Dans notre travail, nous n'avons présenté que les notions fondamentales et essentielles du traitement du signal nécessaires au développement de notre méthode et nous avons vite constaté que théoriquement les méthodes de déconvolution ne donnent pas de résultats précis et que le traitement du signal des problèmes inverses est une discipline en plein essor et la conception de méthodes de déconvolution fait partie de la recherche récente.

Pour mieux comprendre le développement de méthodes de déconvolution et leur mise en œuvre, nous avons présenté le principe d'un certain nombre de méthodes existantes et la remarque majeure que l'on peut tirer de cette bibliographie est la grande sensibilité de ces méthodes au bruit.

En effet, l'opération de déconvolution est rendue plus difficile par la présence du bruit qui entache souvent les mesures puisque les filtres, utilisés pour la déconvolution, peuvent parfois présenter des gains infinis qui risquent de sur-amplifier le signal bruit et le rendre prépondérant. L'application de l'inverse analytique de déconvolution donnera des résultats médiocres, Il est alors nécessaire d'inclure la connaissance statistique du bruit et du signal pour améliorer le résultat.

Enfin ces méthodes sont souvent très difficiles à mettre en œuvre et font appel à des développements mathématiques poussés. Certaines ne s'appliquent qu'à des cas particuliers et ne sont pas donc transportables.

Nous présentons, dans ce travail, une méthode de déconvolution simple, temporelle et récursive donc pas coûteuse. Elle permet d'estimer la réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système excité par un signal de forme exponentielle.

Dans le sens physique cette méthode est parfaitement adaptée. Sous cette hypothèse, facile à réaliser, la méthode permet de développer l'intégrale de l'équation de convolution en utilisant un développement limité et d'aboutir à une relation temporelle et récursive liant les

échantillons de la solution recherchée aux échantillons mesurés. Dans un premier temps, nous avons utilisé un développement limité au premier ordre et on a abouti à une équation de récurrence simple à traiter et la stabilité de la méthode est obtenue sous une condition facile à réaliser. C'est une condition sur le choix de la période d'échantillonnage T qui peut, en général, être contrôlée.

La condition de convergence a été développée par l'étude des erreurs commises qui sont dues l'une à la structure de récursivité et l'autre au développement mathématique utilisé. Les résultats de la simulation obtenus ont montré que si la condition de convergence n'est pas respectée, les oscillations sont remarquables en revanche si la condition est satisfaite, les faibles oscillations ne sont présentes que sur les premiers échantillons.

Une réduction de l'erreur est possible en utilisant un développement limité de $h(t)$ d'ordre supérieur (le deuxième ordre est largement suffisant) puisque les calculs ont été faits et nous avons constaté, d'après la nouvelle équation de récurrence qui dépend des échantillons précédents donc un apport supplémentaire d'information, que l'optimisation de la solution peut s'améliorer mais ce sera au détriment de la simplicité de la méthode donc automatiquement au détriment du prix.

Suivant ses éventuelles applications, on peut s'intéresser davantage à améliorer la précision qui, comme nous l'avons mentionnée, est possible.

La méthode est acceptable surtout que la condition de convergence dépend des paramètres contrôlables comme la période d'échantillonnage T qui n'est pas conditionnée par le théorème de Shannon donc sa modification, pour satisfaire l'optimisation de la solution n'est pas conditionnée par d'autres facteurs.

L'application de la méthode est destinée au traitement des signaux sismiques. Sachant qu'en sismologie l'opération de déconvolution est fondamentale par exemple lors d'un séisme, la déconvolution est utilisée pour connaître le mouvement du sol.

Nous travaillons actuellement sur une forme adaptative de la méthode pour une amélioration en présence du bruit.

Bibliographie

- [1] Bellanger, M. , Analyse des signaux et filtrage numérique adaptatif, édition Masson Paris 1989.
- [2] Picinbono , B. , Théorie des signaux et des systèmes , Dunod (1993)
- [3] Belaala, H. : Horloge pour acquisition du temps international, Méthode d'identification paramétrique, Application à l'instrumentation sismologique. Thèse de Docteur ingénieur de l'université de Rennes I mention T.S.T (1987).
- [4] Collet, F. , Traitement des signaux et acquisition des données , Dunod , (1997)
- [5] Biraud, Y. G., les méthodes de déconvolution et leurs limites fondamentales, Revue de physique appliquée mars 76, tome 11, N°2, pp.203-214. (IEEE)

- [8] Vav-Cittert, P. H., *Z.phys.*69(1931) 298 IEEE.
- [9] Twomey, S., *J. Franklin Inst.*279(1965)95.]
- [10] Phillips, D. L., *J.ACM*9(1962) 84 IEEE .
- [11] Bracewell, R.S. , Roberts., J.A., *Aust . J. phys.*7(1954)615640.
- [12] Jansson, P.A. *et al.*, J. ewell, R.S. , Roberts., J.A., *Aust . J. Opt. Soc. Am.* 58(1968)1665]
- [13] Coupinot, G., Thèse, Université P. et M. Curie, Paris, 1974 .]
- [14] Daniel Weisz-Patraut, Recherche et utilisation de solution analytiques pour des problèmes inverses couplés thermoélastiques, thèse de doctorat de l'université Paris-Est, école doctorale science ingénierie et environnement.
- [15] Arzac, J., Transformation de Fourier et théorie des distributions , (Dunod, Paris) 196.
- [16] Jacquinot, P. et Roizen-Dossier, B. *prog. opt.* 3(1964) 31.

- [17] Fellgett, P. B. et Linfoot E.H., *Phil. Trans. R. Soc.* A247(1955)369.
- [19] Strauss, O., et Rico, A. , Vers une déconvolution intervalliste: un usage détourné des mesures non-additives, Rencontres francophones sur la logique floue et ses application 2009. Cépaduès-Edition.
- [20] O. Strauss et A. Rico., Imprecise expectations for imprecise linear filtering, LIRMM RR- 09011, Université de Montpellier II (2008)
- [21] Alberto Menendez Martinez, Identification de la réponse impulsionnelle d'un système par intercorrélation au moyen de séquences binaires pseudo-aléatoires, Thèse de doctorat, Faculté des sciences de l'université de Grenoble, 1970.
- [22] Emmanuel Barbier, Thèse de master 2 Recherche – PPI 2003-2004 65
- [23] Mac Phie et R. H. , tech. Report. n°58, EER, university of Illinois (Urbana, III.) 1962.
- [24] Ville, J. A. , Câbles et Transmissions (1956) 1- 44)

- [25] Y. Emcellen, G. De Marsily, D. Poihinal , M.Ratsimielo , Déconvolution et identification automatique de paramètres en hydrologie Edition 2008.
- [26] Wolter, H. *progr.opt .I*(1964° 202 .)
- [27] Scheidecker J. P. Thèse de spécialité, Paris, 1968.
- [28] Schell A. C., *The Radio and Electronic Engineer* 29 (1965) 21 .
- [29] Biraud, Y.G., C. R., 2^{ème} Colloque National GRETSI, Nice (1965) 21.
- [30] Biraud, Y.G., *Astron. Astrophys.*1(1969) 124 .
- [31] Démoment , G. et Reymont, R. Fast minimum deconvolution, *IEEEtrans.*,vol.ASSP-33, N°4, octobre 1985,pp.1324-1326.
- [32] Oussama Akhdary , La conception d'une méthode de déconvolution pour l'estimation des angles d'arrivée sur une antenne application au sondage spatio-temporel du canal de propagation. Thèse de doctorat (2009)
- [33] Quiquis André, *Le traitement du signal sous Matlab pratique et application*, Hermes sciences (2003)
- [34] Yvon Mori, *Electronique pour traitement du signal, Volume 1, Outils mathématiques et espaces transformationnels*, Lavoisier (2006).
- [35] J. Capon, High resolution frequency –wave number sepectrum analysis , in *proc. IEEE*, Vol 57, PP.1408-1418 august 1969.

Quelques sites Web :

- [36] WWW.hermessciences
- [37] <http://scholab.lib.vbetu/theses/index.html>
- [38] [http:// modle.insa-rouen.fr](http://modle.insa-rouen.fr) UV traitement du signal cours 7.

ملخص:

الالتواء المعاكس هو إعادة بناء إشارة انطلاقاً من قياسها عن طريق نظام له استجابة دافع. نعرض في هذا العمل طريقة جديدة لعملية الالتواء المعاكس، هو أن تكون إحدى الإشارتين المستعملتين في عملية الالتواء ذات شكل أسي. يعتبر هذا الاختيار مناسباً جداً في الفيزياء التجريبية ما دامت الأنظمة الخطية تتشكل جيداً من قبل هذا النموذج. بعد دراسة الخطأ في غياب الضوضاء تم إيجاد شروط التقارب، وهي شروط سهلة التطبيق.

الكلمات الرئيسية:

الالتواء، الالتواء المعاكس، استجابة الدافع، الالتواء المعاكس الزمني، الالتواء المعاكس المتكرر.

Résumé :

La déconvolution est la reconstruction d'un signal à partir de sa mesure Via un système ayant une réponse impulsionnelle parfaitement connue. Ce travail présente une nouvelle méthode de déconvolution temporelle et récursive qui s'appuie sur le choix d'une forme exponentielle de l'un des deux signaux convolués. Dans le sens physique cette méthode est parfaitement adaptée puisqu'en général les systèmes linéaires se modélisent bien par cette forme. A partir de l'étude de l'erreur, en l'absence de bruit, des conditions de convergence ont été développées mais ces conditions sont faciles à réaliser.

Mots-clés :

Convolution, déconvolution, réponse impulsionnelle, méthode temporelle, méthode récursive,

Abstract :

Deconvolution is the reconstruction of a signal from its measurement through a system having an impulse response . This work presents a new temporal recursive deconvolution method Which relies on the choice a form of an exponential signals convolved. In the physical sense, this method is well suited since in general linear systems are modeled well by this form. From the study of the error, in the absence of noise, convergence conditions have been developed but these conditions are easy to perform.

Keywords:

Convolution, deconvolution, impulse response, temporal method, recursive method.