REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE.

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF.

Université Ferhat Abbas - Setif

MEMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour L'Obtention du Diplôme de

MAGISTER

OPTION : Mathématiques Fondamentales

Par

Mr : BOUKHETOUTA Mohamed-Nadir

THEME

Prolongement des applications holomorphes

Soutenue le 18 Décembre 2014 devant le jury

Président : Mr. KADEM Abdelouahab Prof UFA Sétif 1
Encadreur : Mr. KRACHNI Mostapha MCA UFA Sétif 1
Examinateur : Mr. BADREDINE Toufik MCA UFA Sétif 1

§ Remerciments §

Je suis très heureux d'exprimer ici mes sincères remerciements au Monsieur ***Mostapha Krachni,*** *Maitre de Conférence à l'université FARHAT ABBES-Sétif qui a dirigé ce travail, et je lui exprime ma profonde gratitude pour les conseils et les encouragements qu'il m'a donné.*

Je remercie Monsieur ***Kadem Abdalouahab,*** *Professeur à l'université FARHAT ABBES-Sétif, d'avoir accepté de juger ce travail et d'en être président.*

Je remercie également Monsieur ***Badredine Toufik****, Maitre de Conférence à l'université FARHAT ABBES-Sétif, d'avoir accepté de juger ce travail et d'en être examinateur.*

Je profite aussi de cette occasion pour remercie Monsieur ***N. Hemci,*** *Professeur à l'université FARHAT ABBES-Sétif, pour tous les encouragements qu'il m'a donné.*

Je remercie mon ami Monsieur ***Boucherit Amine,*** *Enseignant à l'université MENTOURI Mohamed-Constantine, pour tous les encouragements et les conseils qu'il m'a donné.*

§ Dédicaces §

Je dédis le fruit de mon modeste travail a ma famille, qui était toujours a mes côtés et qui ma beaucoup encouragé surtout ma mère et mon père, et bien sûr mes frères : Khaled et Yacine, mes sœurs : Ahlem et Imène et ma femme Hadjar sans oublier tous mes amis.

Table des matières

Introduction

Avant plus de 100 ans et jusqu'à nos jours, il y a le problème d'existence d'applications holomorphes ou méromorphes pour certains ouverts complexes. Alors il s'agit de prolonger des applications holomorphes ou méromorphes défini sur cette ouvert.

Il existe plusieurs études et recherches menées sur ce sujet, en raison de son importance en géométrie complexe. Par exemple dans [8] Ivashkovich montre qu'une variété kählérienne X est holomorphiquement extensifère si et seulement si X ne contient pas des courbes rationnelles. Dans [4] Dloussky montre qu'un groupe de Lie complexe connexe et simplement connexe est une variété de Stein, et donc les variétés parallélisables compactes sont holomorphiquement extensifères.

Dans ce mémoire, on va essayer de faire une synthèse générale sur l'un des aspects importants de la question de prolongement des applications holomorphes. C'est le phénomène de Hartogs pour le prolongement des applications holomorphes, le théorème de Hartogs affirme que toute application holomorphe de T dans $\mathbb{C}$ se prolonge holomorphiquement à Δ^net par conséquent l'enveloppe d'holomorphie de T est égale Δ^n, le théorème reste vrai pour les fonctions méromorphes par le théorème de Levi-Oka.

Le mémoire se compose de trois chapitres. Dans le premier chapitre, on fournit un résumé des points les plus importants de l'analyse complexe, la géométrie Riemannienne et la géométrie complexe, alors on donne des définitions et des résultats d'analyse complexe pour une seule variable, puis pour plusieurs variables. Dans la partie de géométrie Riemannienne et la géométrie complexe on donne un bref résumé des définitions et des exemples importants sur le sujet.

Dans le second chapitre, on commence par un théorème de prolongement des applications holomorphes, c'est le théorème de Riemann [*voir* 13]. Après on va donner un bref historique du sujet, et on le soutenons par la démonstration de théorème de Hartogs avec $T \subset \mathbb{C}^2$ [*voir* 13], puis on donne quelques exemples des études et des recherches menées pour le prolongement des applications holomorphes ou méromorphes.

Dans le troisième chapitre, on va traiter un cas particulier sur ce sujet. C'est le cas de prolongement des applications holomorphes sur des variétés homogènes et des surfaces presque homogènes, et pour cela on va donner un résumé des travaux était fait déjà par M. Krachni sur ce cas [*voir* 9].

Chapitre 1

Notions de base d'analyse complexe et de géométrie

Dans ce chapitre on rassemble quelques résultats et notions de base d'analyse complexe et de géométrie.
Ce chapitre se compose de deux parties, la première partie traite l'analyse complexe d'une seule variable et de plusieurs variables, alors on donne la définition des fonctions holomorphes d'une seule variables [*voir Déf* 1.3] puis de plusieurs variables [*voir Déf* 1.7] ainsi que quelques propriétés. Aussi on donne la définition des fonctions analytiques complexes d'une seule variable [*voir Déf* 1.6] puis de plusieurs variables [*voir Déf* 1.9] et on va donner la démonstration d'équivalence entre l'holomorphie et l'analycité [12].
Dans la deuxième partie, on va donner la définitions des variétés dans le cas générale [*voir Déf* 1.12] puis dans le cas de géométrie complexe [*voir Déf* 1.16], et on va donner aussi des exemples sur les variétés complexes, comme : la surface de Riemann, les variétés de Stein, et la surface de Hopf etc."[*voir Section*1.4.1].

1.1 Notions de base d'analyse complexe d'une seul variable

1.1.1 Définitions et préliminaires

- On désigne par $\mathbb{C}$ le corps des complexes. Soit z un élément du corps des complexes $\mathbb{C}$, et $U \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble ouvert. On pose $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) et on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ par l'isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels : $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$

$$z \to (x, y)$$

- L'ensemble $\mathbb{C}$ sera muni de la topologie définie par la norme $z \to |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $\mathbb{C}$ est complet c'est à dire toute suite de Cauchy à valeur complexe converge dans $\mathbb{C}$.
- La boule ouverte du centre z_0 et de rayon r :

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} :\ |z - z_0| < r\}$$

Dans le plan, une boule à la forme d'un disque. On emploi donc souvent le terme disque ouvert du centre z_0 et de rayon r lorsque l'on fait de la topologie dans $\mathbb{C}$, et on note $D(z_0, r)$ au lieu de $B(z_0, r)$.

- La boule fermée (ou le disque fermé) du centre z_0 et de rayon r :

$$\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} :\ |z - z_0| \leq r\}$$

- Un ouvert de $\mathbb{C}$ est une réunion de boules ouvertes de $\mathbb{C}$. Par exemple :
  - Le premier quadrant $\{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}(z) > 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) > 0\}$
  - La couronne $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$
- Un fermé de $\mathbb{C}$ est le complémentaire d'un ouvert de $\mathbb{C}$.
- Adhérence et intérieur d'une partie A de $\mathbb{C}$:
  - $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés de $\mathbb{C}$ contenant A.
  - $\mathring{A}$ est la réunion de tous les ouverts de $\mathbb{C}$ inclus dans A.

- Une partie compacte de $\mathbb{C}$ est une partie à la fois fermée bornée de $\mathbb{C}$.

1.1.2 Fonctions holomorphes

On va commencer cette Section par la définition des fonctions holomorphes d'une seul variable, après on va donner quelques propriétés de ces fonctions.

Définition 1.1 (fonction holomorphe au sens complexe) U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$. Soit z_0 dans U. On dit que f est dérivable en z_0 si la limite $\underset{h\to 0}{Lim}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ existe.
Dans ce cas, on note $f'(z_0)$ cette limite.

Définition 1.2 (fonction holomorphe) U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe sur U si f est dérivable en tout point z de U et si la dérivée f' est continue sur U.
- f est dérivable en z_0 si et seulement si :

$$f(z_0+h) = f(z_0) + h \cdot f'(z_0) + h \cdot \alpha(h) \qquad ou \qquad \underset{h\to 0}{Lim}\alpha(h) = 0$$

Définition 1.3 Une fonction $f(z) = u(z) + iv(z)$ est holomorphe dans U, si u et v sont continûment différentiable et satisfont les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ ; \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad dans\ U$$

On pose :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) \ , \ \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$$

Alors il est facile de vérifier que les conditions de Cauchy-Riemann sont équivalentes à l'équation unique :

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

Proposition 1.1 U est un ouvert de $\mathbb{C}$, f et g deux fonctions holomorphe sur $\mathbb{C}$.

1- $(\forall \lambda \in \mathbb{C})$ $(\lambda.f)' = \lambda.f'$

2- $(f+g)' = f' + g'$

3- $(f.g)' = f'.g + f.g'$

4- Si f ne s'annule pas sur U, $1/f$ est holomorphe sur U et $(1/f)' = -f/f^2$.

5- Si h est une fonction d'un ouvert V de $\mathbb{C}$ à valeurs dans U qui soit holomorphe sur V, et g holomorphe sur U, alors $g \circ h$ est holomorphe sur V et $(g \circ h)' = (g' \circ h).h'$

Corollaire 1.1 L'ensemble des fonctions holomorphes sur U est une $C - alg\grave{e}bre$. (pour $+$ et $\times$). Et on la note $\theta(U)$.

1.1.3 Fonctions analytiques

Le but de cette Section est d'étudié les fonctions analytiques d'une seul variable.

Définition 1.4 (série entière) On appelle série entière $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ la série de fonction $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ où $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de complexes.

Définition 1.5 (rayon de convergence) On appelle rayon de convergence de la série entière $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ la quantité :

$$\rho = \sup \{r \in [0, +\infty[\text{ : la série entière } (|a_n|\, r^n)_{n\geq 0} \text{ converge}\}$$

ρ est le sup d'une partie non vide de $\mathbb{R}$, réel si cette partie est majorée, égal à $+\infty$ sinon.

Lemme 1.1 (Lemme d'Abel) Soient deux réels $r_0 > 0$ et $M > 0$ tels que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad |a_n|\, r_0^n \leq M$$

Alors, pour tout $r < r_0$, la série $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$.

Proposition 1.2 Soit une série entière $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ de rayon de convergence ρ.

1- pour tout $r < \rho$, la série $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ converge normalement sur le disque $\overline{D}(0, r)$.

2- la série $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ diverge pour tout $z \notin \overline{D}(0, \rho)$.

3- Si $|a_{n+1}/a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, le rayon de convergence de $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ est $1/l$.

4- Soient deux séries $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ et $(b_n z^n)_{n\geq 0}$ de rayon de convergence ρ_1 et ρ_2.

Si $|a_n| \leq |b_n|$, alors $\rho_2 \leq \rho_1$.

Proposition 1.3 (somme et produit de séries entières) Soient $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ et $(b_n z^n)_{n\geq 0}$ deux séries entières de rayon de convergence respectif ρ_1 et ρ_2.

Soit $s_n = a_n + b_n$ et $p_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$. Alors les séries entières $(s_n z^n)_{n\geq 0}$ et $(p_n z^n)_{n\geq 0}$ ont un rayon de convergence au moins égal à $min\{\rho_1, \rho_2\}$ et pour tout $|z| < \min\{\rho_1, \rho_2\}$ on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n$$

$$(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$$

Définition 1.6 (Fonction analytique) Soit z_0 dans $\mathbb{C}$. Soit U un voisinage de z_0 et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$. On dit que f est analytique en z_0 si f est développable en série entière au voisinage de z_0, i.e. s'il existe un $r > 0$ et une série entière $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ de rayon de convergence $\rho \geq r$ telle que :

$$(\forall z \in \overline{D}(z_0, r)) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

On dit que f est analytique sur U si elle est analytique en tout point de U.

Proposition 1.4 L'ensemble des fonctions analytiques sur l'ouvert U est une algèbre sur $\mathbb{C}$. Et on la note $\theta(U)$.

Proposition 1.5 (principe des zéros isolés, version série entière) Soit $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$ et de somme $f(z)$. Si au moins un des coefficients a_n est non nul, il existe un $r > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $D(0, r) \setminus \{0\}$.

Corollaire 1.2 Une fonction analytique sur un ouvert U a un unique développement en série entière au voisinage de chaque point de U.

Proposition 1.6 (série dérivée) Soit $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ une série entière de somme $f(z)$ et de rayon de convergence $\rho > 0$. On appelle série dérivée de $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ la série entière $(na_n z^{n-1})_{n\geq 0}$, et dérivée de f la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n z^{n-1}$. Son rayon de convergence est ρ aussi.

Une fonction analytique sur U admet des dérivées de tout ordre.

On note $f'(z)$ la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n z^{n-1}$.

f est la somme d'une série entière de rayon de convergence ρ. Pour tout z dans $D(0, \rho)$, on a :

$$f'(z) = \underset{h\to 0}{Lim} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Théorème 1.1 (analycité des séries entières) La somme d'une série entière est analytique à l'intérieur de son disque de convergence. Plus précisément, soit $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ une série entière de rayon de convergence ρ et de somme $f(z)$. Soit z_0 dans $D(z_0, \rho)$. Alors :

$$\forall z \in D(z_0, \rho - |z_0|) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

En particulier, la série $(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z)^n)_{n\geq 0}$ a un rayon de convergence au moins égal à $\rho - |z_0|$.

1.1.4 Formule intégral de Cauchy

Avant de démontrer l'équivalence entre l'holomorphie et l'analycité, on va mentionner le théorème de Cauchy pour les fonctions holomorphes.

Théorème 1.2 Une fonction f est holomorphe dans U si et seulement si pour tout disque

D avec $\overline{D} \subset U$ et tout $z \in D$, f vérifie la formule suivante :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\omega)d\omega}{\omega - z}$$

Preuve. [5]

Afin de voir l'équivalence, nous fixons un point $z \in D$ et choisissons un petit disque $D_\varepsilon = D_{\varepsilon(z)}$ est suffisamment petit. Considère la 1-forme :

$$\varphi = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\omega)d\omega}{\omega - z} \quad défini\ dans\ \overline{D} \diagdown D_\varepsilon.$$

Si f est holomorphe alors $d\varphi = 0$. Donc par la formule de Stokes :

$$\int_{\overline{D} \setminus D_\varepsilon} d\varphi = \int_{\partial D} \varphi - \int_{\partial D_\varepsilon} \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D} \varphi = \int_{\partial D_k} \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta$$

Donc :

$$f(z + \varepsilon e^{i\theta}) \to f(z) \text{ lorsque } \varepsilon \to 0$$

Alors toute fonction holomorphe satisfait la formule intégrale de Cauchy.

Inversement, l'argument ci-dessus montre que pour toute fonction $f \in C(\overline{D})$, la formule suivante vérifiée :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\omega)d\omega}{\partial \omega} + \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{\partial f}{\partial \overline{\omega}} \frac{d\omega \wedge d\overline{\omega}}{\omega - z}$$

Si la formule de Cauchy pour f vérifie en U. L'intégrale de la deuxième à droite s'annule pour tout disque D avec $\overline{D} \subset U$. Car $\frac{\partial f}{\partial \overline{\omega}} = 0$ dans U.

Théorème 1.3 Une fonction f est holomorphe si et seulement si f est analytique complexe.

Preuve. [5]

Pour une fonction holomorphe dans U, si on fixe un z_0 et on considère un petit disque $D = D_\varepsilon(z_0)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\omega)d\omega}{\omega - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\omega)d\omega}{(\omega - z_0)(1 - \frac{z-z_0}{\omega-z_0})}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\sum\frac{(z-z_0)^n}{(\omega-z_0)^{n+1}}f(\omega)d\omega = \sum a_n(z-z_0)^n$$

$$\text{Si } a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\omega)d\omega}{(\omega-z_0)^{n+1}}$$

f peut être développé en série absolument convergente de puissance prés de z_0.

Inversement, étant donné une série entière absolument convergente :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$$

puisque chaque terme est holomorphe, dans la partie droite de la formule généralisée de Cauchy pour f est égal à zéro. Donc f satisfait la formule de Cauchy. Donc f est holomorphe si elle est analytique complexe, et ces deux termes seront utilisés indifféremment

Corollaire 1.3 (Inégalité de Cauchy) Soit f holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Soit z_0 dans U et $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Alors, pour tout entier n on a :

$$\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{\underset{t\in[0,\,2\pi]}{Sup}|f(z_0+re^{it})|}{r^n}$$

Corollaire 1.4 (Egalité de Cauchy) Soit f holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, soit z_0

dans U et $\overline{B}(z_0, r) \subset U$. Alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{it}) \right|^2 dt$$

Théorème 1.4 (Liouville) Une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ borné est constante sur $\mathbb{C}$.

Théorème 1.5 (D'Alembert Gauss) Soit P un polynôme à coefficient complexe. Si P n'a pas de racine dans $\mathbb{C}$, il est constant.

1.2 Analyse complexe de plusieurs variables

1.2.1 Définitions et préliminaires

On munit $\mathbb{C}^n$ des coordonnées z_j , $j = 1, ..., n$; on pose :

$$x_j = \operatorname{Re} z_j \quad ; \quad y_j = \operatorname{Im} z_j \quad \text{alors} \quad z_j = x_j + iy_j \quad \text{avec } (x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$$

L'isomorphisme de $\mathbb{R}-$espace vectoriel : $i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$

$$(z_1, ..., z_n) \mapsto (x_1, y_1, ..., x_n, y_n)$$

Permet d'identifier $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$. $\mathbb{R}$ est muni de la topologie habituelle définie par la valeur absolue, $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la topologie produit et $\mathbb{C}^n$ muni de la topologie transportée par i^{-1}.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ considéré aussi comme un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$, on étudiera des fonctions : $\Omega \to \mathbb{C}$.

Les fonctions coordonnées complexes z_j et leurs imaginaires $\overline{z_j}$ ont pour différentielles dans $\mathbb{R}^{2n}$, $dz_j = dx_j + idy_j$; $d\overline{z}_j = dx_j - idy_j$, alors :

$$dx_j = \frac{1}{2}(dz_j + d\overline{z}_j) \quad , \quad dy_j = \frac{i}{2}(d\overline{z}_j - dz_j)$$

Et tout point $z \in \mathbb{C}^n$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $T_z^*(\mathbb{C}^n)$ a pour base $(dx_j, dy_j)_{j=1,\dots,n}$ les différentielles $(dz_j, d\overline{z}_j)_{j=1,\dots,n}$ constituent aussi une base, car la matrice de passage a pour déterminant $(-2i)^n$. Toute forme différentielle de degré (p,q) sur Ω s'écrit donc de façon unique, comme une somme de forme différentielles :

$$\omega = \sum a_{j_1,\dots,j_p,k_1,\dots,k_q} dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge \dots \wedge d\overline{z}_{k_q}$$

Soit $f \in C^1(\Omega)$ une fonction continûment différentiable dans Ω, on a :

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k$$

avec :

$$(1.1)\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}) \qquad \text{et} \qquad (1.2)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k})$$

Il faut noter que $\frac{\partial}{\partial z_k}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}$ signifient seulement les opérateurs différentiels définis en (1.1) et (1.2), ce ne sont pas en général des dérivations partielles par rapport aux variables $z_k, \overline{z}_k$. Alors $df = d'f + d''f$ avec :

$$d'f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k \quad , \quad d''f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k$$

Les formes différentielles $d'f$ et $d''f$ sont respectivement de type (1,0) et (0,1).
Si u une forme différentielle, de classe C^1, de degré (p,q), alors :

$$d'u = \sum d'a_{j_1,\dots,j_p,k_1,\dots,k_q} \wedge dz_{j_1} \wedge \dots \wedge d\overline{z}_{k_q} \text{ est de type } (p+1,q)$$

et

$$d''u = \sum d''a_{j_1,\dots,j_p,k_1,\dots,k_q} \wedge dz_{j_1} \wedge \dots \wedge d\overline{z}_{k_q} \text{ est de type } (p,q+1).$$

Si u est de classe C^2, alors l'identité $ddu = 0$ entraîne que les trois composantes de $ddu = 0$, de type respectif $(p+2,q), (p,q+2), (p+1,q+1)$ sont nulles, d'où par linéarité, les identités $d'd' = 0$; $d''d'' = 0$; $d'd'' + d''d' = 0$.

1.2.2 Fonctions holomorphes

Dans cette Section, on va rappeler la définition et les propriétés des fonctions holomorphes de plusieurs variables.

Définition 1.7 Une fonction $f \in C^1(\Omega)$ est dite holomorphe dans Ω si $d''f = 0$ dans Ω. La condition $d''f = 0$ est dite condition de Cauchy-Riemann, elle équivaut à : $df = d'f$. L'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω sera désigné par $\theta(\Omega)$.

Proposition 1.7

1-L'ensemble $\theta(\Omega)$ est une $C - alg\grave{e}bre$ par l'addition, la multiplication des fonctions et la multiplication par les constantes complexes.

2-Si $f \in \theta(\Omega)$ et si pour tout $z \in \Omega$, $f(z) \neq 0$; alors $\frac{1}{f} = f^{-1} \in \theta(\Omega)$.

3-Si Ω est connexe et si f est à valeur réelle ou si $|f|$ est constante, alors f est constante.

Preuve. [12]

d'' est $\mathbb{C}$-antilinéaire et est une dérivation, i.e. si $f, g \in C^1(\Omega)$, alors : $d''(fg) = gd''f + fd''g$ d'où la structure de $C - -alg\grave{e}bre$. Si, pour tout $z \in \Omega, f(z) \neq 0$, $\frac{1}{f}$ est continûment différentiable et $d''(\frac{1}{f}) = -f^{-2}$.

Si f est réelle, pour tout $k = 1, ..., n$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ et $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ sont réelles, la condition de Cauchy entraîne : $\frac{\partial f}{\partial x_k} = -i(\frac{\partial f}{\partial y_k})$, donc $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y_k}$, i.e. f est constante sur l'ouvert connexe Ω. Si $|f| = C^{ste}$ constante, on a : $f = C^{ste}e^{i\theta(z)}$ avec $d''f = C^{ste}e^{i\theta(z)}id''\theta(z) = 0$ donc f est holomorphe et réelle sur Ω, alors d'après ce qui précède, f est constante sur $\theta(\Omega)$.

Définition 1.8 Soient Ω, Ω' deux ouverts de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^m$ respectivement. Une application $g : \Omega \to \Omega'$ est dite holomorphe s'il existe m fonctions holomorphes $g_1, ..., g_m$ sur Ω telle que : $z' = g(z) = (g_1(z), ..., g_m(z)) \in \Omega'$

Proposition 1.8 Si f est une fonction holomorphe sur Ω' et si g est une application holomorphe : $\Omega \to \Omega'$, alors $f \circ g$ est une fonction holomorphe sur Ω.

Preuve. [12]
On vérifie, à partir des définitions (1.1) et (1.2) que $\frac{\partial}{\partial z_k}$ et $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}$ satisfont au règles des dérivations partielles, alors :

$$(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k})(f(g(z)) = \sum_{l=1}^{m}(\frac{\partial f}{\partial z'_l})(\frac{\partial g_l}{\partial \overline{z}_k}) + \sum_{l=1}^{m}(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}'_l})(\frac{\partial \overline{g}_l}{\partial \overline{z}_k}) \quad ; \quad k = 1, ..., n$$

mais $\frac{\partial g_l}{\partial \overline{z}_k} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}'_l} = 0$ pour $k = 1, ..., n$ et $l = 1, ..., m$, donc $d"(f \circ g) = 0$. Alors $f \circ g$ est holomorphe sur Ω.

Corollaire 1.5 La composée de deux applications holomorphes est holomorphe.

Proposition 1.9 (Théorème des fonctions implicites)
Soient $f_j : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $j = 1, ..., m$

$$(w, z) \longmapsto f_j(w, z)$$

des fonctions holomorphes dans un voisinage d'un point (w^0, z^0) et telle que :

$$f_j(w^0, z^0) = 0 \quad , \quad j = 1, ..., m \quad \text{et} \quad \det\left(\frac{\partial f_j}{\partial w_k}\right)_{j,k=1}^{m}(w^0, z^0) \neq 0$$

Alors les équations $f_j(w, z) = 0$, $j = 1, ..., m$, ont une solution holomorphe unique $w(z)$, au voisinage de z_0 telle que $w(z^0) = w^0$.

Corollaire 1.6 Une application holomorphe d'ouverts de $\mathbb{C}^n$ a une application réciproque holomorphe au voisinage de tout point où le jacobien de l'application ne s'annule pas.

1.2.3 Fonctions analytiques

Dans cette Section, on va définir les fonctions analytiques de plusieurs variables, ensuite on va donner quelques propriétés de ces fonctions.

Définition 1.9 (Fonctions analytique) On dit que $f(z_1, ..., z_n)$ définie sur un voisinage $(z_1^0, ..., z_n^0)$ est développable en série entière au point $(z_1^0, ..., z_n^0)$ s'il existe une série entière :

$$\sum_{p,q \geq 0} a(z_1 - z_1^0)^p ... (z_n - z_n^0)^q$$

telle que :

$$f(z_1, ..., z_n) = \sum_{p,q \geq 0} a(z_1 - z_1^0)^p ... (z_n - z_n^0)^q \quad \text{avec} \quad \left|z_1 - z_1^0\right| < \zeta_1, ..., \left|z_n - z_n^0\right| < \zeta_n$$

Alors f est dite analytique.

Propriétés des fonctions analytiques :

1/ Les fonctions analytiques sur U ouvert de $\mathbb{C}^n$ forment une algèbre c'est à dire :

a/ Si f est analytique g est analytique alors : $f + g$ et $f.g$ sont analytiques.

b/ Si f est analytique alors λf est analytique $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

2/ Si f est analytique sur $U \subset \mathbb{C}^n$ alors $\frac{1}{f}$ est analytique sur $U \setminus \{z \in \mathbb{C}^n, f(z) = 0\}$.

3/ Si f est analytique alors f est C^∞ est ses dérivées sont des fonctions analytiques.

4/ La composée de deux fonctions analytiques est une fonction analytique.

5/ La somme d'une série multiple est analytique dans son domaine de convergence.

6/ Si f et g deux fonctions analytiques et $f.g = 0$ alors $f \equiv 0$ et $g \equiv 0$.

1.2.4 La formule de Cauchy dans un polydisque

Dans $\mathbb{C}^n$, on appelle polydisque (ouvert) un produit $D = \Pi_{j=1}^n D_j$ de disque D_j de $\mathbb{C}$ c'est-à-dire un ouvert de $\mathbb{C}^n$ de la forme :

$$D = \left\{ z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n \text{ tels que } \forall j, \ \left| z_j - z_j^0 \right| < r_j \right\} = \Pi_{j=1}^n D(z_j^0, r_j)$$

$$\text{où } \ z_j^0 \in \mathbb{C} \ \text{ et } \ r_j > 0, 1 \leq j \leq n.$$

Le fermé :

$$\partial_0 D = \left\{ z = (z_1, ...z_n) \in \mathbb{C}^n \text{tels que } \forall j, \left| z_j - z_j^0 \right| = r_j \right\}$$

S'appelle la frontière distinguée de D. Le point $z^0 = (z_1^0, ..., z_n^0)$ s'appelle le centre du polydisque et les nombres r_j sont parfois appelés les multi-rayons du polydisque.

Proposition 1.10 (Formule de Cauchy dans un polydisque) Soit D un polydisque de $\mathbb{C}^n$ et $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ une fonction continue qui est holomorphe par rapport à chaque variable les autres étant fixées. Alors, pour tout $z \in D$ on a :

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\partial_0 D} \frac{f(\xi_1, ..., \xi_n)}{\Pi_{j=1}^n (\xi_j - z_j)} d\xi_1 \wedge ... \wedge d\xi_n$$

En particulier $f \in C^\infty(D)$ est holomorphe.

Cette formule est une conséquence immédiate de la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes d'une variable complexe.

Corollaire 1.7 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Soit $f \in C^1(\Omega)$ une fonction holomorphe. Alors $f \in C^\infty(\Omega)$ et toutes les dérivées de f sont holomorphes.

Preuve. [12]

En effet, il suffit de dériver la formule de la Proposition précédente pour obtenir une formule analogue pour les dérivées de f, et le membre de droite de la formule obtenue, est clairement holomorphe.

Corollaire 1.8 Soit $(f_k)_k$ une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ qui converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction f. Alors f est holomorphe dans Ω.

Preuve. [12]
En effet, par passage à la limite, la fonction f vérifie la formule de Cauchy dans tout polydisque relativement compact dans Ω, ce qui montre qu'elle est holomorphe dans ce polydisque.

Lemme 1.2 (d'Osgood) Si une fonction f continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ est holomorphe par rapport à chacune des variables $z_1, ..., z_n$, alors f est holomorphe sur Ω.

Corollaire 1.9 (Formule de la moyenne) Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. Soit $z \in \Omega$, notons $\delta(z)$ la distance de z au complémentaire de Ω et soit $0 < \delta < \delta(z)$, de sorte que la boule $B(z, \delta)$ de centre z et de rayon δ est contenue dans Ω. Soit ω_{2n} le volume d'une boule de rayon 1 dans $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Alors :

$$f(z) = \frac{1}{2n\omega_{2n}\delta^{2n-1}} \int_{\partial B(z,\delta)} f(\xi) d\sigma = \frac{1}{\omega_{2n}\delta^{2n}} \int_{B(z,\delta)} f(\xi) d\lambda(z).$$

En particulier, pour $p \in [1, +\infty[$, on a :

$$|u(z)| \leq \frac{1}{(\omega_{2n}\delta^{2n})^{1/p}} \|u\|_{L^p(B(z,\delta))}$$

Preuve. [12]
En effet, puisque f est C^∞, elle est harmonique, et les fonctions harmoniques sont caractérisées par la propriété de la moyenne.

Proposition 1.11 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$, K un compact de Ω et ω un voisinage ouvert de K dans Ω. Alors pour tout multi-indice α il existe une constante C_α telle que, pour toute fonction $f \in \theta(\Omega)$, on a :

$$sup_{z\in K} |\partial^\alpha u(z)| \leq C_\alpha \|u\|_{L^1(\omega)} .$$

Preuve. [12]
En effet, ceci résulte de la Proposition appliquée à un polydisque coordonnées par coordonnées puis en recouvrant K par un nombre fini de polydisques contenus dans ω.

Corollaire 1.10 Soit $(f_k)_k$ une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. Si la suite $(|f_k|)_k$ est uniformément bornée sur les compacts de Ω alors il existe une sous-suite $(f_{k_p})_p$ de la suite $(f_k)_k$ qui converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction de $\theta(\Omega)$.

Preuve. [12]
C'est une conséquence immédiate de la Proposition qui montre que la suite $(f_k)_k$ est équicontinue sur tout compact de Ω et du théorème d'Ascoli.

Proposition 1.12 Soit f une fonction holomorphe dans le polydisque $D = \{|z_j| < r_j, 1 \leq j \leq n\}$. Alors f se développe en série entière, la convergence étant uniforme sur tout compact de D :

$$f(z) = \sum_{\alpha\in N^n} \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!} z^\alpha, z \in D$$

Preuve. [12]
On peut supposer f continue sur $\overline{D}$ de sorte que l'on peut écrire la formule de Cauchy de la Proposition. Alors, il suffit de développer en série entière $\frac{1}{\Pi_j(\zeta_j - z_j)}$ et de remarquer que la convergence est normale dans $(\partial_0 D) \times rD, 0 < r < 1$. Les coefficients $\frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!}$ s'obtiennent aussitôt en dérivant la formule de Cauchy.

Corollaire 1.11 Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}^n$. Si f est une fonction holomorphe dans Ω qui est nulle sur un ouvert non vide de Ω alors f est identiquement nulle.

Preuve. [12]
En effet l'ensemble des points de Ω au voisinage desquels f est nulle est à la fois ouvert (par définition) et fermé dans Ω (par la Proposition, puisque toutes les dérivées de f sont holomorphes donc continues).

Lemme 1.3 Si f est localement bornée alors elle est continue, et par suite holomorphe.

Preuve. [12]
L'énonce étant local il suffit de montrer que f est continue sur un polydisque contenu dans Ω, et par translation, on peut supposer que ce polydisque est $D = \Pi_{j=1}^{n} D(0, r_j)$. On suppose donc f définie au voisinage de $\overline{D}$ avec les propriétés de l'énoncé et que $|f| \leq M$ sur D. Écrivons alors, pour z et ζ deux points de D on a :

$$f(z) - f(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_1, ..., \zeta_{j-1}, z_j, ..., z_n) - f(\zeta_1, ..., \zeta_j, z_{j+1}, ..., z_n)$$

La fonction

$$U_j(\zeta) = f(\zeta_1, ..., \zeta_{j-1}, \zeta, ..., z_n) - f(\zeta_1, ..., \zeta_j, z_{j+1}, ..., z_n)$$

est en module majorée par $2M$, et le Lemme de Schwarz appliqué à la fonction :

$$V(\omega) = \frac{1}{2M} U_j(\phi_j^{-1}(\omega)) \;\; où \;\; \phi_j(v) = r_j \frac{v - \zeta j}{r_j^2 - v\overline{\zeta_j}}$$

Donne

$$|V(\phi(z_j))| = \frac{1}{2M} |U_j(z_j)| \leq r_j \frac{zj - \zeta j}{r_j^2 - z_j\overline{\zeta_j}}$$

et montre la continuité de f dans D.

On fait maintenant la démonstration du Théorème par récurrence sur la dimension n. On suppose donc le Théorème vrai dans C_p avec $p \leq n-1$ et on le démontre pour un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$.

Lemme 1.4 Soit $D = \Pi_j^n D_j$ un polydisque fermé (i.e. les disques D_j sont fermés) contenu dans Ω. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant les hypothèses du Théorème. Alors il existe des disques $\partial Dj \subset Dj, 1 \leq j \leq n$, de rayon $s > 0$ tel que u est bornée dans $D' = (\Pi_{j=1}^{n-1} D'_j) \times D_n$.

En particulier f est holomorphe dans $D\prime$.

Preuve. [12]

Pour tout entier M posons :

$$E_M = \left\{ z' \in \Pi_{j=1}^{n-1} D_j \text{ tels que} : |f(z', z_n)| \leq M \text{ pour tout } z_n \in D_n \right\}$$

L'hypothèse de récurrence montre que E_M est une intersection de fermés donc E_M est fermé. De plus, comme $z_n \longmapsto f(z\prime, z_n)$ est holomorphe au voisinage de D_n, elle est bornée, donc on a :

$$\cup_{M=1}^{\infty} E_M = \Pi_{j=1}^{n-1} D_j$$

Le Théorème de Baire implique alors que l'un des E_M est d'intérieur non vide ce qui prouve le Lemme.

Proposition 1.13 (Inégalités de Cauchy) Soit f une fonction holomorphe dans le polydisque $D = \{|z_j| < r_j, 1 \leq j \leq n\}$. Si $|f| \leq M$ dans D alors, pour tout multi indice α, on a :

$$|\partial^\alpha f(0)| \leq \frac{M}{\alpha!} r^{-\alpha}$$

C'est une conséquence immédiate de la formule de Cauchy.

Preuve. [12]

On considère $\partial^\alpha U(0)$ dans un polydisque $D' = D(0; r')$ concentrique à D, relativement compact dans D ; alors f est continue sur $\overline{D}'$ et $|f| \leq M$ sur $\overline{D}'$.

On a $r' < r$, soit :

$$\zeta_k = r'_k e^{i\theta_k}, d\zeta_k = ir'_k e^{i\theta_k} d\theta_k \quad , \quad \frac{d\zeta_k}{\zeta_k^{\alpha_k+1}} = \frac{i}{r'^{\alpha_k}_k} e^{-i\alpha_k\theta_k} d\theta_k$$

alors :

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha f(0)| &= \frac{1}{(2\pi)^n} \alpha! \left| \int_{bD'} f(\zeta_1, ..., \zeta_n) \ \Pi_{j=1}^n \zeta_j^{-\alpha_k - 1} d\zeta_1 ... d\zeta_n \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \alpha! M (2\pi)^n r'^{-\alpha_1}_1 ... r'^{-\alpha_n}_n \end{aligned}$$

L'inégalité étant valable pour tout $r' < r$, on a :

$$|\partial^\alpha f(0)| \leq \alpha! M r^{-\alpha}$$

Théorème 1.6 (d'identité) Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}^n$, alors s'il existe un ouvert non vide U de Ω tel que $f \mid U = g \mid U$, alors $f = g$.

Ensuite, on va rappeler des définitions sur la géométrie Riemannienne.

1.3 Variété différentielle

1.3.1 Variété

Une variété C^1 est un objet sur lequel on souhaite pouvoir faire les mêmes calculs différentiels que sur $\mathbb{R}^n$. Pour calculer une dérivée, il suffit de connaître la fonction dans un voisinage du point considéré, donc on va munir une variété d'une structure locale héritée de celle de $\mathbb{R}^n$. Par exemple, une courbe se recoupe en point p ce n'est pas une variété : en effet, un voisinage même petit du point double p n'a pas la topologie d'un intervalle de $\mathbb{R}$. Par contre une courbe est une variété si tout point admet un petit voisinage qu'on peut identifier avec un intervalle de $\mathbb{R}$ (remarquer à cette occasion que ceci n'est plus vérifié pour les grands voisinages : il y a toujours une dialectique entre phénomènes locaux et aspects globaux qui font apparaître la topologie ou la géométrie de la variété).

Définition 1.10 Étant donné un espace topologique M une carte (ou application de coordonnées locales)est la donnée d'un ouvert $U \subset M$, d'un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ et d'un homéomorphisme $\varphi : U \to V$. L'application réciproque s'appelle une paramétrisation de U. Un atlas est une collection de cartes $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ qui recouvrent M. La régularité de l'atlas est donnée par la régularité des applications de recollement (ou changement de cartes). Formellement, on donne la

Définition 1.11 Un atlas de classe C^p de M est un recouvrement de M par des ouverts U_α sur lesquels sont définies des cartes φ_α telles que :
1- $M \subset \cup_\alpha U_\alpha$ (les U_α recouvrent M) ;
2- $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ est un homéomorphisme de U_α sur un ouvert V_α de $\mathbb{R}^n$;
3- Si $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$, alors $\varphi_{\alpha\beta} = (\varphi_\beta \circ {\varphi_\alpha}^{-1})_{|\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})}$ est un difféomorphisme de classe C^p sur $\varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ (ce qui a bien un sens car $\varphi_{\alpha\beta}$ est définie d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans un autre ouvert de $\mathbb{R}^n$).
Deux atlas sont équivalents si leur réunion produit un nouvel atlas de même classe, ce qui revient à les changements de cartes d'une carte d'un atlas vers une carte de l'autre atlas est régulière.

Définition 1.12 Une variété (C^∞) de dimension n est la donnée d'un espace topologique M, et d'une classe d'équivalence d'atlas (de classe C^∞).

Exemple 1.1

1- Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une variété de dimension n, avec comme atlas l'application identitée définie sur l'ouvert Ω.

2- $\mathbf{S}^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ le cercle est une variété de dimension 1, avec comme atlas

$$U_0 = \{ \ \theta \neq 0 \, [2\pi] \ \} \ \ et \ \ U_\pi = \{ \ \theta \neq \pi \, [2\pi] \ \},$$

les applications φ_α consistantes à prendre la détermination de l'angle respectivement dans les intervalles $]0, 2\pi[$ et $]-\pi, \pi[$. Le changement de carte est une application affine, donc C^1.

3- Le tore $\mathbf{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est une variété de dimension 2, avec par exemple comme atlas :

$$U_{--} = \{(x,y) : x \neq 0 \, [1] \, , y \neq 0 \, [1]\} \quad U_{-+} = \{(x,y) : x \neq 0 \, [1] \, , y \neq 0,5 \, [1]\}$$

$$U_{+-} = \{(x,y) : x \neq 0,5 \, [1] \, , y \neq 0 \, [1]\} \quad U_{++} = \{(x,y) : x \neq 0,5 \, [1] \, , y \neq 0,5 \, [1]\}$$

les applications φ consistent à prendre le représentant de la classe d'équivalence de (x, y) respectivement dans les intervalles

$$]0,1[\times]0,1[\quad , \quad]0,1[\times]0,5,1,5[\quad , \quad]0,5,1,5[\times]0,1[\quad , \quad]0,5,1,5[\times]0,5,1,5[$$

donc les changements de cartes sont des translations. En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, on constate que $\mathbf{T}^2$ admet une structure complexe car les similitudes de $\mathbb{R}^2$ (ici des translations) sont évidemment holomorphes.

1.3.2 Applications C^∞

On peut étendre la notion d'application C^∞ ou holomorphe à des variétés en regardant l'expression de l'application dans les coordonnées locales données sur toute carte de l'atlas. En d'autres termes, on considère que les applications de coordonnées locales sont des difféomorphismes locaux, et que les théorèmes de composition restent valides dans ce contexte.

Définition 1.13 Soient M et N deux variétés de dimension m et n, munies d'atlas respectifs ϕ_α et φ_β.
Une application f de M dans N est dite C^∞ si et seulement si les applications $\varphi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ sont C^∞ lorsqu'elles ont un sens (rappelons que ces applications sont définies d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$).
Une bijection f entre M et N est un difféomorphisme C^∞ si f et f^{-1} sont des applications C^∞. En particulier, s'il existe un difféomorphisme entre M et N alors $m = n$.
On note $C^\infty(M, N)$ (resp. $C^\infty(M)$) l'ensemble des applications C^∞ de M à valeur dans N (resp. $\mathbb{R}$).
Deux atlas sont compatibles si et seulement si l'application identité est un difféomorphisme de M muni d'un des deux atlas sur elle-même muni de l'autre.

1.3.3 Fibré tangent

Espace tangent

On va donner une définition abstraite de l'espace tangent à une variété en commençant par interpréter les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ comme des dérivations de fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ dans un voisinage de $m \in \mathbb{R}^n$ et soit $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur, on leur associe la dérivée de f selon v en m :

$$v(f) = \lim_{t \to 0} \frac{f(m + tv) - f(m)}{t},$$

soit, en coordonnées locales :

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(m) = d_m f(v).$$

On peut voir l'action de v comme celle d'une fonctionnelle (que l'on note encore v) de f (en fait sur les germes de fonctions C^∞ au point m), qui vérifie les propriétés de linéarité et de Leibniz (au point m) :

$$v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g) \tag{2}$$

$$v(fg) = f(m)v(g) + g(m)v(f). \tag{3}$$

On appelle dérivation une telle fonctionnelle. Réciproquement, si une dérivation φ vérifie les propriétés (2) et (3), alors on montre que φ s'interprète comme l'action d'un vecteur v.

On observe d'abord que $\varphi(1^2) = 2\varphi(1)$ donc $\varphi(1) = 0$ puis par linéarité φ est nulle sur les constantes. Soit maintenant $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ dans un voisinage $V = B(m_0, \varepsilon)$ de $m_0 \in \mathbb{R}^n$, posons pour $m \in V$: $g(t) = f(m_0 + t(m - m_0))$.

La fonction g est C^∞ sur $[0, 1]$, donc

$$\begin{aligned} f(m) = g(1) = g(0) + \int_0^1 g\prime(t)dt \\ = f(m_0) + \sum_{i=1}^n (m - m_0)_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(m_0 + t(m - m_0))dt. \end{aligned}$$

Donc, par linéarité et en appliquant Leibniz :

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^n \varphi((m - m_0)i)\{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(m_0 + t(m - m_0))dt\}|_{m=m_0}.$$

Finalement :

$$\varphi(f)(m_0) = \sum_{i=1}^n \varphi(m_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(m_0) = v(f),$$

où v a pour coordonnées $\varphi(m_i)$ dans la base canonique.

Définition 1.14 L'espace tangent T_mM en un point m de M est l'ensemble des dérivations au point m sur $C_m^\infty\ (M)$.

Proposition 1.14 T_mM est un espace vectoriel de dimension $n = dimM$. De plus le fibré tangent $TM = \cup_{m\in M}\{m\} \times\ T_mM$, est muni canoniquement d'une structure de variété de dimension $2n$.

Définition 1.15 Soient X et Y deux variétés, soit $f : X \to Y$ une application C^∞ dans un voisinage de $x \in X$ et soit $y = f(x)$. On définit l'application linéaire tangente à f en $x : T_xf : T_xX \to T_yY$ en posant pour $v \in T_xX$ et $g \in C_y^\infty(Y) : (T_xf(v))(g) = v(g\circ f)$. On vérifie en effet aisément que $T_xf(v) \subset T_yY$.

Proposition 1.15 T_xf est une application linéaire de T_xX dans T_yY. Lorsque f est C^∞ de $X \to Y$, on peut définir l'application tangente $Tf : TX \to TY$ par :

$$Tf : (x, v) \in TX \to (f(x), T_xf(v)) \in TY$$

La linéarité est évidente et le caractère C^∞ se montre en coordonnées locales. Signalons la propriété suivante qui résulte trivialement de la définition.

Proposition 1.16 Si X, Y et Z sont trois variétés, et $f : X \to Y, g : Y \to Z$ deux applications C^∞, on a :

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_xf.$$

1.4 Définitions et exemples de variétés complexes

On rappelle la définition des variétés complexes. Grosso modo, une variété complexe est un espace topologique qui ressemble localement à un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$ pour être précis, on a :

Définition 1.16 Soit M un espace topologique connexe séparé possédant une base dénombrable. On dit que M est une variété complexe de dimension n, s'il existe un recouvrement $\{U_a\}$ indexée par un ensemble A, pour chaque $a \in A$ un homéomorphisme f_a de U_a sur un ouvert de $D_a \subset \mathbb{C}^n$, tel que pour tout couple a, b dans A avec $U_{a,b} = U_a \cap U_b \neq \phi$, le changement de carte $f_a \circ f_b$ est un biholomorphe (i.e : homéomorphisme et son inverse holomorphe) entre $f_b(U_{a,b})$ et $f_b(U_{a,b})$.
Soit $z = (z_1, ..., z_n)$ la coordonnée standard de $\mathbb{C}^n$, et on note l'ensemble U_a un voisinage. Nous appellerons $z_a = z \circ f_a$ l'application holomorphe locale dans le voisinage U_a.
Une application $\varphi : M_1^n \to M_2^m$ entre deux variétés complexes est holomorphe (où analytique complexe) au point $p \in M_1$, s'il existe un voisinage holomorphe (U_a, f_a) de p dans M_1 et (V_b, g_b) de $\varphi(p)$ dans M_2, telle que l'application $g_b \circ \varphi \circ f_a^{-1}$ à partir d'un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}^n$ dans un sous-ensemble de $\mathbb{C}^m$ est holomorphe a $f_a(p)$. φ est dit holomorphe sur M si elle est holomorphe en tout point de M_1.
Une application holomorphe d'une variété complexe M en $\mathbb{C}$ est appelée une fonction holomorphe sur M, et on note $\theta(M)$ l'ensemble de toutes les fonctions holomorphes sur M.
Si M est compact alors toute fonction holomorphe sur M est constante, puisque nous pouvons appliquer le principe de maximum à la restriction de la fonction f à un petit voisinage d'un point maximum de $|f|$, alors $\theta(M) = \mathbb{C}$ si M est compact.
D'après la définition, il est clair que le produit de deux variétés complexes, un sous-ensemble ouvert et connexe d'une variété complexe, sont aussi des variétés complexes.

1.4.1 Exemples des variétés complexes

Dans la partie suivante, on donne quelques exemples de variétés complexes.

Exemple 1.2 (Surface de Riemann)
Une surface de Riemann est une variété complexe de dimension 1, on dit aussi une courbe complexe. Une surface de Riemann est donc un espace topologique séparé M, admettant qu'un atlas modelé sur le plan complexe $\mathbb{C}$ dont les applications de changements de cartes

sont des applications biholomorphes.

La plus simple des surfaces de Riemann compactes est la sphère de Riemann, conformément équivalente à la droite projective complexe $P^1(\mathbb{C})$, quotient de $\mathbb{C}^2 \diagdown \{(0,0)\}$ par l'action (holomorphe) du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ par multiplication. Sa topologie est celle du compactifié d'Alexandroff du plan complexe, à savoir $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Elle est recouverte par deux cartes holomorphes, définies respectivement sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ par l'identité $z \longmapsto z$ et l'inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$.

Exemple 1.3 (Domaine dans $\mathbb{C}^n$)

L'espace euclidien complexe $\mathbb{C}^n$ est une variété complexe de dimension n; le sous-ensemble ouvert connexe $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ est aussi une variété complexe de dimension n. Il offre une classe riche d'exemples non-compactes. La boule unité :

$$B^n = \left\{(z_1, ..., z_n) \diagup |z_1|^2 + ... + |z_n|^2 < 1\right\}$$

est un exemple important de cette classe.

Exemple 1.4 (Sous-variété complexe)

Une sous-variété complexe d'une variété M est sous-variété différentiable $N \subset M$ tel que pour chaque $p \in N$, il existe des coordonnées locales holomorphes $z = (z_1, ..., z_n)$ dans un voisinage $p \in N \subset M$, avec la propriété que :

$$N \cap U = \{z \in U \ \setminus \ z_{k+1} = ... = z_n = 0\}$$

Pour chaque $p \in N$, il existe un voisinage $p \in U \subset M$ et des fonctions holomorphe $\{f_1, ..., f_l\}$ sur U tel que $N \cap U$ est à $\cap_{i=1}^{l} \{f_i = 0\}$.

Une sous-variété complexe fermée de P^n est appelée une variété complexe projective. Il s'avère qu'une telle variété est en fait les zéros communs d'un ensemble fini de polynômes homogène dans les coordonnées homogènes de P^n. Alors toutes variétés projectives est algébrique.

Exemple 1.5 (L'espace projectif complexe)
L'espace projectif complexe $P^n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des droites complexes passant par l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$. Ce qui est l'ensemble de tous les sous-ensembles de 1-dimensionnels complexes linéaires de $\mathbb{C}^{n+1}$.
Il est également l'espace quotient de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence :

$$(z_0, ..., z_n) \sim (\lambda z_0, ..., \lambda z_n) \quad / \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

La classe d'équivalence $(z_0, z_1, ..., z_n)$ sera notée $[z_0; ...; z_n]$ ce qui est appelé coordonnées homogènes de P^n.
Afin de voir la structure complexe, définir les sous-ensemble $U_0, ..., U_n$ de P^n par :

$$U_i = \{[z_0; ...; z_n] \quad / \quad z_i \neq 0\}$$

Géométriquement, U_i est l'ensemble des droites complexes dans $\mathbb{C}^{n+1}$ qui passent par l'origine et sauf $\{z \in \mathbb{C}^n : z_i \neq 0\}$.
On définit $\varphi_i : \mathbb{C}^n \to U_i \subset P^n$ bijective par :

$$\varphi_i(U_1, ..., U_n) = [U_0 : ... : U_{i-1} : 1 : U_{i+1} : ... : U_n]$$

alors il est facile de voir que cela donne une structure complexe sur P^n.

Exemple 1.6 (Le tore complexe)
On considère l'espace Euclidien complexe $\mathbb{C}^n$. Si $\{v_1, ..., v_{2n}\}$ l'ensemble des vecteurs dans $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ linéairement indépendant sur $\mathbb{R}$, et notons par $\Lambda = \mathbb{Z}\{v_1, ..., v_{2n}\}$ le réseaux. Les éléments de Λ agissent sur $\mathbb{C}^n$ par translation, biholomorphe sur $\mathbb{C}^n$. Le quotient $T^n_\Lambda := \mathbb{C}^n/\Lambda$ est une variété complexe compacte de dimension n, qui s'appelle le Tore

complexe.

Notons que pour un tel réseau Λ, la variété lisse sous-jacente de T^n_Λ est la même ; c'est le tore réel $T^{2n}_{\mathbb{R}}$, qui est le produit de $2n$ exemplaires de cercle S^1. Cependant, les structures complexes de T^n_Λ dépend du choix de Λ, et pourrait être tout a fait différent.

Exemple 1.7 (Variété de Stein)

Une variété de Stein est une sous variété complexe fermée de $\mathbb{C}^n$, ce qui est équivalent à M, est une variété de Stein si M est une variété complexe analytique qui possède les propriétés suivantes :

a|Si pour tout compact $K \subset M$, on désigne par $\widehat{K}$ l'ensemble des points $z \in M$ tels que :

$$|f(z)| \leq Sup_{t\in K} |f(t)| .$$

Pour toute fonction f holomorphe sur M, alors $\widehat{K}$ est compact.

b|Si x et y sont deux points distincts de M. Il existe une fonction f holomorphe sur M qui sépare x et y c'est à dire : $f(x) \neq f(y)$.

c|Pour tout point $z_0 \in M$ il existe des coordonnées locales données par des fonctions holomorphes dans M, tout entier, c'est a dire qu'il existe un voisinage de z_0 et des fonctions $f_1, f_2, ..., f_n$ holomorphes dans M telle que $z \longmapsto (f_1(z), f_2(z), ..., f_n(z))$ soit un isomorphisme analytique de ce voisinage sur un ouvert de l'espace $\mathbb{C}^n$.

Exemple 1.8 (Surface de Hopf)

Une surface de Hopf est une surface compacte complexe obtenu sous forme d'un quotient de $\mathbb{C}^{\,2} \setminus \{0\}$ par une action libre d'un groupe discret. Le premier exemple a été trouvé par Hopf(1948), avec le groupe isomorphe discret pour les entiers, avec un générateur agissant sur $\mathbb{C}^{\,2}$ par la multiplication par 2, ce qui a été le premier exemple d'une surface compacte complexe sans métrique kählérienne.

Chapitre 2

Prolongement d'applications holomorphes

Dans cette partie, on essaye d'examiner le problème de prolongement des applications holomorphes. Puis on va donner quelques exemples.
Notre objectif est d'étudier le prolongement des applications holomorphes sur l'ouvert de Hartogs dans une variété complexe compacte. Par exemple dans [4] Dloussky montre qu'un groupe de lie complexe connexe et simplement connexe est une variété de Stein, et donc les variétés parallélisables compactes sont holomorphiquement extensifères.
L'étude de prolongement des applications holomorphes a fait beaucoup d'études, on va commencer par le théorème de prolongement de Riemann pour les fonctions holomorphes. Puis on va mentionner le théorème de Hartogs et on le soutenons par la démonstration de prolongement des applications holomorphes définis sur un ouvert A dans $\mathbb{C}^2$ [13] . Aussi on va définir le domaine étalé au dessus d'une variété de Stein [*voir déf* 2.2]. Et on termine avec un exemple particulier sur le phénomène de Hartogs, c'est le cas de prolongement des applications holomorphes à valeurs dans des variétés extensifères.

2.1 Théorème de prolongement de Riemann

Dans la suite, on appellera domaine de $\mathbb{C}^n$ tout ouvert connexe de $\mathbb{C}^n$.
Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$, une partie X de Ω est dite mince si pour tout $z \in \Omega$, il existe un polydisque $D(z;r) \subset \Omega$ et une fonction holomorphe f dans $D(z;r)$ non nulle telle que :

$$X \cap D(z;r) \subset Z(f) = \{y \in D(z;r), f(y) = 0\}$$

$Z(f)$ est fermé dans $D(z;r)$ et d'intérieur vide.
Soit Y une partie de Ω, une fonction f définie sur $\Omega \setminus Y$ est dite localement bornée dans Ω si, pour tout $z \in \Omega$, il existe un polydisque $D(z;r) \subset \Omega$ tel que la fonction f soit bornée sur $D_Y = D(z;r) \cap (\Omega \setminus Y)$, cela signifie : qu'il existe une constante $A > 0$ telle que $|f(y)| \leq A$ pour tout $y \in D_Y$.

Théorème 2.1 Soit X un ensemble mince d'un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$ et f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus X$, localement bornée dans Ω. Alors, il existe une fonction unique $\widetilde{f}$ holomorphe sur Ω qui prolonge f.

Pour la démonstration on va utiliser la notion et les lemmes suivantes :
Définition 2.1 Une fonction holomorphe f sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ est dite régulière d'ordre k en z_n au point $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ si la fonction de z_n, $f(\omega_1, ..., \omega_{n-1}, z_n)$ holomorphe en z_n, à un zéro d'ordre k au point $z_n = \omega_n$.

Lemme 2.1 Si $f \in \theta(U)$ est d'ordre $k < \infty$ au point ω, alors après un changement linéaire convenable de coordonnées dans $\mathbb{C}^n$, la fonction f est régulière d'ordre k en z_n au point $z_n = \omega_n$.

Lemme 2.2 Si $f \in \theta(D(\omega;r))$ est régulière d'ordre k en z_n au point ω, alors il existe $D(\omega;\delta) \subset D(\omega;r)$ tel que :

Pour tout $a' = (a_1, ..., a_{n-1}) \in D(\omega'; \delta_1; ...; \delta_{n-1})$ avec $\omega' = (\omega_1, ..., \omega_{n-1})$.
La fonction de z_n, $l_a(z_n) = f(a_1, ..., a_{n-1}, z_n)$ est exactement k zéros, compté avec leurs multiplicités, dans $D(\omega_n; \delta_n)$.

Preuve du théorème 2.1 [13]
Il suffit de prouver pour $\Omega = D(\omega; r)$, $X = Z(g)$, avec $g \in \theta(D(\omega; r))$ non nulle.
Soit $\omega \in X$, on choisit les coordonnées pour que g soit régulière, d'un certain ordre k en z_n au point ω(Lemme 2.1). D'après (Lemme 2.2) ; il existe $D(\omega; \delta) \subset D(\omega; r)$ tel que, pour $(z_1, ..., z_{n-1}) \in D(\omega'; \delta')$, $g(z_1, ..., z_n)$ ait k zéros dans $|z_n - \omega_n| \prec \delta_n$ et ne s'annule pas sur $|z_n - \omega_n| = \delta_n$. On considère :

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_n - \omega_n| = \delta_n} (\zeta_n - z_n)^{-1} f(z_1, ..., z_{n-1}, \zeta_n) d\zeta_n$$

dans $D(\omega'; \delta')$, pour $\zeta_n \in bD(\omega_n; \delta_n), (\zeta_n - z_n)^{-1} f(z_1, ..., z_{n-1}, \xi)$, donc aussi $\widetilde{f}$ est holomorphe en $(z_1, ..., z_{n-1})$ dans $D(\omega'; \delta')$, mais $\widetilde{f}$ est holomorphe en z_n, car $d''_{z_n} f = 0$, enfin $\widetilde{f}$ est continue dans $D(\omega; \delta)$, d'après le lemme d'Osgood $\widetilde{f} \in \theta(D(\omega; r))$.
Pour $z' = (z_1, ..., z_{n-1})$ fixé, f est holomorphe en z_n dans $|z_n - w_n| < \delta_n$, sauf en un nombre fini de points d'après les propriétés de g, mais f est localement bornée dans $|z_n - w_n| < \delta_n$, alors d'après le théorème de prolongement en une variable, $f(z', z_n)$ a une extension qui ne peut être que $\widetilde{f}(z', z_n)$ d'après le théorème d'identité en z_n.

2.2 Le phénomène de Hartogs

2.2.1 Définitions et préliminaires

Soit $z = (z_1, ..., z_n)$ un point de $\mathbb{C}^n$.
On note T l'ouvert de $\mathbb{C}^n$ défini par :

$$T = T_{\rho,\tau} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_i| < \rho, i = 1, ..., n-1; |z_n| < 1\}$$

$$\cup \{z \in \mathbb{C}^n : |z_i| < \tau, i = 1, ..., n-1, \tau < |z_n| < 1\}$$

avec $0 < \rho < 1$ et $0 < \tau < 1$.
On appellera un tel ouvert une marmite.
Le théorème de Hartogs prouve que si f est une fonction holomorphe sur l'ouvert T alors f a une prolongement holomorphe sur l'enveloppe d'holomorphie de T.
L'enveloppe d'holomorphie de T, notée $\widetilde{T}$ est égale au polydisque unité Δ^n tel que :

$$\Delta^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1; 1 \leq j \leq n\}$$

2.2.2 Historique

Presque un siècle de la découverte par Hartogs d'un phénomène d'extension forcée des fonctions holomorphes d'au moins deux variables complexes. Et à cette occasion, il nous parait utile d'en évoquer l'histoire. Si celle-ci débute sans doute quand Hurwitz annonça en 1897 qu'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C}^2$, c'est seulement dans sa thèse en 1903 que Hartogs décrivit le phénomène général et en donna une démonstration rigoureuse pour ses « marmites » devenues célèbres. Poincaré donna en 1907 une autre démonstration pour les fonctions holomorphes au voisinage de la sphère unitée de $\mathbb{C}^2$, Levi produisit en 1910 une version du théorème de Hartogs pour les fonctions méromorphes (invalidant ainsi l'affirmation faite par Weierstrass en 1879 que tout domaine de $\mathbb{C}^n$, n quelconque, était un domaine de méromorphie) et en 1924

Osgood énonça et démontra partiellement le théorème sous sa forme classique.
La démonstration d'Osgood achoppait en fait sur un problème de monodromie et c'est seulement en 1936 que le théorème fut entièrement justifié par Brown grâce à des considérations topologiques. En 1939 Fueter donna une autre démonstration lorsque $n = 2$ puis dans le cas général en 1942 avec, ses arguments, très différents de ceux de Brown, étaient fondés sur une formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes d'une variable quaternionique ou hypercomplexe, formule obtenue en 1931 par Moisil et qu'il redécouvrit en 1935. C'est à partir de celle-ci que Martinelli écrivit sa formule et simplifia la démonstration de Fueter. Dans la même période, Bochner donna une autre démonstration du théorème de Hartogs, le généralisant même à des fonctions continues sur $b\Omega$ qu'on pourrait qualifier de « holomorphes par morceaux ».

Maintenant on va donner un cas particulier d'un ouvert de Hartogs lorsque $n \geq 2$.
Théorème 2.2 Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage connexe U du bord de $D(0, r)$ dans $\mathbb{C}^n$. Alors pour $n \geq 2$, il existe une unique fonction holomorphe $\widetilde{f}$ dans $D(0, r)$ qui prolonge f.
C'est un cas particulier de théorème de Hartogs. Le domaine de définition U de f présente un trou, le théorème signifie que le domaine de f peut être étendu en bouchant ce trou.

Preuve. [13]
On a $bD(0, r) \subset U$, pour $z \in D(0, r)$, soit :

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_n} (w - z_n)^{-1} f(z_1, ..., z_{n-1}, w) dw$$

cette intégrale a un sens parce que $f(z_1, ..., z_{n-1}, w)$ est définie pour $|z_k| < r_k$, avec $k = 1, ..., n-1$ et $|w| = r_n$, car $bD(0, r) = D(0, r') \times bD(0, r_n)$, où $D(0, r')$ est le polydisque de centre 0 et de rayon $r' = (r_1, ..., r_{n-1})$, en outre f est holomorphe en z_n pour $|z_n|$ voisin de r_n, $\widetilde{f}$ est holomorphe en $(z_1, ..., z_{n-1})$ pour z_n fixé et elle est holomorphe en

z_n, dans $D(0, r_n)$ pour $z_1, ..., z_{n-1}$ fixés, en outre, elle est continue dans $D(0, r)$, donc $\widetilde{f}$ est holomorphe dans $D(0, r)$.

Si $(z_1, ..., z_{n-1})$ est fixé, de sorte que $|z_k|$ soit assez voisin de r_k, pour $k = 1, ..., n-1$, le disque fermé $|z_n| \leq r_n$ est contenu dans U, alors d'après la formule de Cauchy en z_n, f et $\widetilde{f}$ coïncident pour $|z_n| \leq r_n - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit, donc sur un ouvert de $U \cap D(0, r)$ qui est connexe, d'après le théorème d'identité,$\widetilde{f}$ est unique et prolonge f dans $D(0, r)$.

Théorème 2.3 On considère les deux ouverts de $\mathbb{C}^2$.

$$A_1 = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < r_1; |z_2| < \varepsilon\right\} \text{ avec } 0 < \varepsilon < r_1$$

$$A_2 = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : r_1 - \varepsilon < |z_1| < r_1; |z_2| < r_2\right\} \text{ avec } r_2 > \varepsilon$$

Soit f une fonction continue dans $A = A_1 \cup A_2$ holomorphe en z_1 dans A_1 et holomorphe en z_2 dans A_2. Alors f se prolonge en une fonction holomorphe $\widetilde{f}$ dans le polydisque $D(0, r)$ avec $z = (z_1, z_2)$ et $r = (r_1, r_2)$.

On appelle le domaine A de $\mathbb{C}^2$ une marmite de Hartogs, à cause de sa forme dans l'espace $\mathbb{R}^3$ des points $(z_1, |z_2|)$. Le théorème signifie que le domaine de définition de f peut être étendu à la marmite remplie.

Preuve. [13]

Soient $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ tels que : $r_1 - \varepsilon < \delta_1 < r_1$ et $\varepsilon < \delta_2 < r_2$.

Pour $|z_2| < \varepsilon$, la fonction $f(z_1, z_2)$ est holomorphe dans le polydisque $|z_1| < r_1$; d'après la formule de Cauchy en z_1,

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1| = \delta_1} (\zeta_1 - z_1)^{-1} f(\zeta_1, z_2) d\zeta_1 \quad \text{pour} \quad |z_1| < \delta_1$$

Pour $r_1 - \varepsilon < |\zeta_1| < r_1$, la fonction $f(\zeta_1, z_2)$ est holomorphe en z_2 dans le disque $|z_2| < r_2$, d'après la formule de Cauchy en z_2,

$$f(\zeta_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_2|=\delta_2} (\zeta_2 - z_2)^{-1} f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_2 \quad \text{pour} \quad |z_2| < \delta_2$$

D'autre part,

$$\widetilde{f}(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta_1|=\delta_1} \int_{|\zeta_2|=\delta_2} (\zeta_1 - z_1)^{-1} (\zeta_2 - z_2)^{-1} f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2$$

est une fonction holomorphe dans $D(0, \delta)$.
Alors $\widetilde{f}$ est égale à f dans l'ouvert $|z_1| < \delta_1, |z_2| < \delta_2$.

2.2.3 Le domaine étalé

Avant d'examiner des cas sur le phénomène de Hartogs, il faut toucher un point très important pour le sujet. C'est le domaine étalé au dessus d'une variété de Stein.

Définition 2.2 Soient Ω et M deux variétés complexes et $\pi : \Omega \to M$ une application holomorphe. On appelle (Ω, π) le domaine étalé au dessus de M, si Ω est connexe et π est localement biholomorphe. Soit une variété complexe X et une variété de Stein M. Pour le domaine étalé (Ω, π) au dessus de M et l'application $f : \Omega \to X$ nous appelons le triple (Ω, π, f) un élément de carte à X au dessus de M.

Définition 2.3 (Prolongement). Nous considérons l'élément de carte $(\Omega_\alpha, \pi_\alpha, f_\alpha)$ et $(\Omega_\beta, \pi_\beta, f_\beta)$ au dessus d'une variété de Stein M. On dit que $(\Omega_\beta, \pi_\beta, f_\beta)$ est un prolongement de $(\Omega_\alpha, \pi_\alpha, f_\alpha)$ au dessus de M, s'il existe une application $\lambda_{\beta\alpha} : \Omega_\alpha \to \Omega_\beta$ telle que :

$$f_\alpha = f_\beta \circ \lambda_{\beta\alpha} \quad \text{et} \quad \pi_\alpha = \pi_\beta \circ \lambda_{\beta\alpha}$$

On note le prolongement $(\Omega_\beta, \pi_\beta, f_\beta)$ avec $(\Omega_\beta, \pi_\beta, \lambda_{\beta\alpha}; f_\beta)$.
On dit que le prolongement $(\Omega, \pi, \lambda_\alpha; f)$ de $(\Omega_\alpha, \pi_\alpha, f_\alpha)$ est maximal au dessus de M, si

pour chaque prolongement $(\Omega_\beta, \pi_\beta, \lambda_{\beta\alpha}; f_\beta)$ de $(\Omega_\alpha, \pi_\alpha, f_\alpha)$ au dessus de M, il existe une application $\lambda_\beta : \Omega_\beta \to \Omega$ telle que :

$$\lambda_\alpha = \lambda_\beta \circ \lambda_{\beta\alpha} \quad \text{et} \quad \pi_\beta = \pi \circ \lambda_\beta \quad \text{et} \quad f_\beta = f \circ \lambda_\beta$$

Théorème 2.4 (Malgrange). Soient X et M deux variétés complexes. Alors pour chaque prolongement $(\Omega_\alpha, \pi_\alpha, f_\alpha)$ à X au dessus de M, il existe un prolongement maximal de f_α au dessus de M qui est unique à un isomorphisme.

Preuve. $[voir 11]$

Définition 2.4 Soit M une variété complexe. Si un prolongement $(\Omega, \pi, \lambda_\alpha; f)$ pour l'élément de carte $(\Omega_\alpha, \pi_\alpha, f_\alpha)$ au dessus de M est maximal, l'application holomorphe (resp méromorphe) $f : \Omega \to X$ est appelée le prolongement maximal de f_α, et Ω est appelé le domaine maximal de la définition de f_α au dessus de M.
Soit $(\Omega_\alpha, \pi_\alpha)$ un domaine étalé au dessus d'une variété de Stein M. Soit $F_\alpha = \{f_\alpha^i\}_{i\in I}$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω_α. On dit que $(\Omega_\beta, \pi_\beta, \lambda_{\beta\alpha}; F_\beta)$ est un prolongement de $(\Omega_\alpha, \pi_\alpha, F_\alpha)$, s'il existe une application $\lambda_{\beta\alpha} : \Omega_\alpha \to \Omega_\beta$ et une fonction holomorphe $F_\beta = \left\{f_\beta^i\right\}_{i\in I}$ sur Ω_β tel que : pour chaque $i \in I$, $f_\alpha = f_\beta \circ \lambda_{\beta\alpha}$ et
$\pi_\alpha = \pi_\beta \circ \lambda_{\beta\alpha}$.
Dans ce cas. On dit que $(\Omega_\beta, \pi_\beta, \lambda_{\beta\alpha}; F_\beta)$ est un prolongement simultané de F_α pour $(\Omega_\alpha, \pi_\alpha, F_\alpha)$ au dessus de M.
Soit F_α l'ensemble des fonctions holomorphes sur un domaine étalé $(\Omega_\alpha, \pi_\alpha)$ sur M. Le prolongement maximal de F_α est un prolongement simultané de $(\Omega_\alpha, \pi_\alpha, F_\alpha)$ tel que si $(\Omega_\beta, \pi_\beta, \lambda_{\beta\alpha}; F_\beta)$ et chaque prolongement simultané de $(\Omega_\alpha, \pi_\alpha, F_\alpha)$, alors il existe une application $\lambda_\beta : \Omega_\beta \to \Omega$ telle que pour chaque $i \in I$, $f_\beta = f \circ \lambda_\beta$ et $\lambda_\alpha = \lambda_\beta \circ \lambda_{\beta\alpha}$. Il s'ensuit que $\pi_\beta = \pi \circ \lambda_\beta$.

Définition 2.5 Soit (Ω, π) un domaine étalé au dessus d'une variété de Stein M. Le prolongement maximal simultané $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\pi}, \lambda)$ $(\lambda : \Omega \to \widetilde{\Omega}\ ,\ \pi = \widetilde{\pi} \circ \lambda)$ pour chaque fonction holomorphe dans (Ω, π) est appelé l'enveloppe d'holomorphie de Ω au dessus de M.

Remarque 2.1 L'application $\lambda : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ n'est pas forcement injective.

Proposition 2.1 Soient $(\Omega_\alpha, \pi_\alpha)$ et $(\Omega_\beta, \pi_\beta)$ deux domaines étalés au dessus d'une variété de Stein. Soient $(\widetilde{\Omega}_\alpha, \widetilde{\pi}_\alpha, \lambda_\alpha)$ et $(\widetilde{\Omega}_\beta, \widetilde{\pi}_\beta, \lambda_\beta)$ sont enveloppes d'holomorphie resp.
Soit $\mu_{\beta\alpha} : \Omega_\alpha \to \Omega_\beta$ une application étalée.
Alors il existe une application étalée $\widetilde{\mu}_{\beta\alpha} : \widetilde{\Omega}_\alpha \to \widetilde{\Omega}_\beta$ telle que :

$$\lambda_\beta \circ \mu_{\beta\alpha} = \widetilde{\mu}_{\beta\alpha} \circ \lambda_\alpha.$$

Preuve. [11]
L'ensemble $F_\alpha = \mu^*_{\beta\alpha} O_\beta$, avec O_β est l'ensemble des fonctions holomorphes dans Ω_β. alors $(\widetilde{\Omega}_\alpha, \widetilde{\pi}_\alpha, \lambda_\alpha, \widetilde{F}_\alpha)$ est un prolongement simultané de $(\Omega_\alpha, \pi_\alpha, F_\alpha)$, avec $F_\alpha = \lambda^{*-1}_\alpha (F_\alpha)$. Noter ici que $\lambda^*_\alpha : \widetilde{F}_\alpha \to F_\alpha$ et $\mu^*_{\beta\alpha} : O_\beta \to F_\alpha$ sont bijective. Etant donner que $(\widetilde{\Omega}_\alpha, \widetilde{\pi}_\alpha, \lambda_\alpha \circ \mu_{\beta\alpha})$ de $(\Omega_\alpha, \pi_\alpha, F_\alpha)$ est maximal. Donc il ya une fonction étalée $\widetilde{\mu}_{\beta\alpha}$: $\widetilde{\Omega}_\alpha \to \widetilde{\Omega}_\beta$ avec les propriétés exigées.

2.3 Prolongement des applications holomorphes

2.3.1 Variétés extensifères

Au début on va définir les variétés extensifères, après on va résumer des travaux déjà fait sur ce cas particulier de prolongement des applications holomorphes.
Définition 2.6 On dit qu'une variété complexe M est holomorphiquement extensifère, si toute application holomorphe de T dans M se prolonge holomorphiquement à Δ^n.

Définition 2.7 Si toute application holomorphe de T dans M se prolonge holomorphiquement au complémentaire dans Δ^n d'un sous-ensemble analytique de Δ^n de codimension au moins 2. On dit que M est holomorphiquement extensifère en dehors de la codimension au moins 2.

Proposition 2.2 Soit M une variété complexe. Les trois relations suivantes sont équivalentes :
i ׀ M est holomorphiquement extensifère.
ii ׀ Pour tout domaine étalé (Ω, π) au dessus d'une variété de Stein M, toute application holomorphe de Ω dans M se prolonge holomorphiquement à l'enveloppe d'holomorphie $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{\Omega}, \widetilde{\pi})$ de (Ω, π).
iii ׀ Pour tout domaine étalé (Ω, π) au dessus d'une variété de Stein M, le domaine d'existence holomorphe de toute application holomorphe de Ω dans M est de Stein.

Preuve. $[voir 10]$

Proposition 2.3 Soit M une variété holomorphiquement extensifère, si U est un ouvert d'une variété de Stein V, et K un compact de U tel que $U \diagdown K$ soit connexe, alors toute application holomorphe $f : U \setminus K \to M$ se prolonge holomorphiquement à U.

Preuve. [10]
Par le théorème de Hartogs l'enveloppe d'holomorphie de $U \setminus K$ contient U.

Proposition 2.4 Si M est holomorphiquement extensifère, alors toute application méromorphe $f : T \to M$ est en fait holomorphe, et se prolonge holomorphiquement à Δ^n.

Preuve. [10]
f est holomorphe de $T \setminus Z$ dans M où Z est la singularité de f, et se prolonge holomorphiquement à l'enveloppe d'holomorphie de $T \setminus Z$ qui est égal à Δ^n.

Maintenant on va donner un cas de variétés extensifères, c'est les variétés parallélisables.

Les variétés parallélisables

Avant de traiter le prolongement des applications holomorphes à valeurs dans des variétés parallélisables, on va commencer par la définition des variétés parallélisables.

Définition 2.8 Une variété complexe X est dite parallélisable si son fibré tangent holomorphe est trivial. Ce qui revient à dire qu'il existe au dessus de X n champs de vecteurs holomorphes linéairement indépendants en tout points de X où $dimX = n$.

Proposition 2.5 Soit M une variété complexe parallélisable compacte alors M est isomorphe au quotient d'un groupe de Lie G par un sous groupe discret D.

Il est évident que le quotient d'un groupe de Lie complexe par un sous groupe discret est parallélisable.

Proposition 2.6 Un groupe de Lie complexe connexe et simplement connexe est une variété de Stein.

Proposition 2.7 Soient X et Y deux variétés complexes et (X, π, Y) un revêtement non ramifié alors X est holomorphiquement extensifère si et seulement si Y est holomorphiquement extensifère.

Preuve. [10]

Soit f une application holomorphe de T dans Y, T étant simplement connexe, il existe une application holomorphe g de T dans X tel que $\pi \circ g = f$, g se prolonge holomorphiquement à Δ^n en $\widetilde{g}$ et $\pi \circ \widetilde{g}$ est un prolongement holomorphe de f à Δ^n.

Inversement, soit f une application holomorphe de T dans X, $\pi \circ f$ se prolonge holomorphiquement en $\widetilde{g}$ de Δ^n dans Y et puisque Δ^n est simplement connexe, il existe une application holomorphe $\widetilde{f}$ qui prolonge f à Δ^n.

Corollaire 2.1 Une variété parallélisable compacte est holomorphiquement extensifère.

Proposition 2.8 Un groupe de Lie complexe est holomorphiquement extensifère.

Preuve. [10]

Le revêtement universel d'un groupe de Lie complexe est un groupe de Lie complexe simplement connexe et on conclut par la proposition 2.7.

Chapitre 3

Prolongement d'applications holomorphes à valeurs dans des variétés homogènes et des surfaces presque homogènes

Dans le chapitre précédent on a étudié le problème du prolongement des applications holomorphes pour quelques cas particuliers.

Dans ce chapitre, on va voir que si X est une variété complexe homogène compacte, alors toute application holomorphe $f : T \to X$ se prolonge holomorphiquement à $\Delta^n \setminus Z$ en X, où Z est un sous-ensemble analytique de Δ^n de codimension au moins 2.

Le but de ce mémoire c'est d'étudier le prolongement d'application holomorphe de T à valeurs dans une surface presque homogène compacte. et pour cela on va utiliser la classification de Potters pour arriver a démontré que si X une surface presque homogène compacte, alors toute application holomorphe de T dans X se prolonge méromorphiquement a $\Delta^n \setminus Z$ où Z est un sous-ensemble analytique de Δ^n de codimension 2 à valeurs dans X.

Avant de commencer notre travail sur les variétés homogènes et les surfaces presque homogènes, on va rappeler quelques points sur les espaces homogènes.

3.1 Espaces homogènes quotients

Si H est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie G complexe, alors H agit librement et proprement par translation à gauche sur G par difféomorphismes analytiques complexes. L'ensemble quotient H\G admet une unique structure de variété analytique complexe telle que $\pi : G \to H\backslash G$ soit une submersion analytique complexe. Le but du résultat suivant est d'étendre ceci au cas où H est seulement supposé être un sous-groupe de Lie fermé de G.

Théorème 3.1 Soit G un groupe de Lie complexe, H un sous groupe de Lie fermé de G, et $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Il existe une et une seule structure de variété analytique complexe sur l'espace topologique quotient G/H, telle que π soit une submersion analytique complexe. De plus,

i) l'action de G par translation à gauche sur G/H est lisse ;

ii) si en outre H est distingué, alors G/H, muni de ses structures de variété quotient et de groupe quotient, est un groupe de Lie, la projection canonique $\pi : G \to G/H$ est un morphisme de groupes de Lie, l'algèbre de Lie $\hbar$ de H est un idéal de l'algèbre de Lie $\mathbf{g}$ de G, et l'application linéaire de T_eG/T_eH dans $T_{eH}(G/H)$ induite par $T_e\pi$ est un isomorphisme de l'algèbre de Lie quotient $\mathbf{g}/\hbar$ dans l'algèbre de Lie de G/H.

Nous avons donc

iii) $dim(G/H) = dimG - dimH$;

iv) pour tout g dans G, l'application $T_g\pi : T_gG \to T_{gH}(G/H)$ induit un isomorphisme linéaire $(T_gG)/(T_g(gH)) \simeq T_{gH}(G/H)$.

v) pour toute variété N de classe analytique complexe où $k \in N \cup \{\infty\}$, une application $f : G/H \to N$ est de classe analytique complexe si et seulement si $f \circ \pi$ l'est. La structure (de variété munie d'une action lisse de G) sur G/H construite dans ce théorème13 s'appelle la structure d'espace homogène quotient sur G/H. C'est un espace homogène, car par l'assertion (i), l'action de G par translation à gauche sur G/H est lisse et transitive. En particulier, l'application $T_e\pi$ induit un isomorphisme linéaire de T_eG/T_eH sur $T_{eH}(G/H)$. La condition que H, est plongé, et cruciale.

Remarque 3.1 Soit G un groupe de Lie complexe, agissant transitivement sur un ensemble E, tel que le stabilisateur G_x d'un point x de E soit un sous-groupe de Lie fermé de G. Alors il existe sur E une et une seule structure de variété analytique complexe telle que

$i)$ l'action de G sur E soit de classe analytique complexe,

$ii)$ la bijection canonique $G/G_x \to E$ soit un difféomorphisme analytique complexe.

3.1.1 Actions transitives de groupes de Lie

La partie précédente montre en particulier qu'une variété homogène quotient G/H d'un groupe de Lie G par un sous-groupe de Lie fermé H est une variété homogène. Le but de cette partie est de montrer que, à difféomorphisme près, toute variété homogène est de cette forme. Le résultat suivant donne en plus une condition nécessaire et suffisante pour qu'une orbite d'une action lisse d'un groupe de Lie soit une sous-variété, auquel cas cette orbite est un espace homogène.

Théorème 3.2 Soit M une variété analytique complexe, munie d'une action lisse d'un groupe de Lie complexe G, et $x \in M$.

(**1**) L'application canonique $\ominus x : G/G_x \to M$ définie par $\ominus_x(gG_x) = gx$ est une immersion analytique complexe injective, d'image l'orbite $G \cdot x$ de x par G.

(**2**) L'orbite $G \cdot x$ est une sous-variété analytique complexe si et seulement si elle est localement fermée.

(**3**) Si $G{\cdot}x$ est localement fermée, alors l'application canonique $\ominus_x$ est un difféomorphisme analytique complexe de G/G_x dans la sous-variété $G \cdot x$.

(**4**) Si l'action est transitive, alors l'application canonique $\ominus_x$ est un difféomorphisme analytique complexe.

En particulier, si une orbite est fermée, alors c'est une sous-variété.

En appliquant ceci à M un groupe de Lie et G un sous-groupe de Lie immergé de M, un sous-groupe de Lie immergé fermé est plongé.

3.2 Prolongement à valeurs dans des variétés Homogènes et des surfaces presque Homogènes

Au début, on va définir les variétés homogènes et les variétés presque homogènes.

Définition 3.1 Une variété X est dite presque homogène si son groupe de Lie G possède une orbite ouverte. Ce qui est équivalent à G opère transitivement sur X en dehors d'un sous-ensemble analytique S.

Si le sous ensemble S est vide alors X est une variété homogène.

Surface signifie une variété complexe de dimension 2.

Noter que si X est compacte G est un groupe de Lie complexe.

Avant de traiter le prolongement des applications holomorphes à valeurs dans des variétés homogènes et des surfaces presque homogènes. Il faut mentionner les deux théorème de Mr M.Krachni.

Théorème 2.5 Soient X et Y deux variétés complexes et $\varphi : X \to Y$ une application holomorphe. On suppose :

$a\backslash$ Y est holomorphiquement extensifère.

$b\backslash$ il existe un recouvrement $U = (U_i)_{i\in I}$ de Y tel que : $\varphi^{-1}(U_i)$ est holomorphiquement extensifère (resp. méromorphiquement extensifère). Alors X est holomorphiquement extensifère (resp. méromorphiquement extensifère).

Preuve. [10]

Soit (Ω, π) un domaine étalé au dessus d'une variété de Stein M et soit $f : \Omega \to X$ une application holomorphe.

Posons $g := \varphi \circ f$, g étant à valeurs dans Y elle se prolonge holomorphiquement en $\widetilde{g}$ à l'enveloppe d'holomorphie $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{\Omega}, \widetilde{\pi})$ de (Ω, π). Le morphisme de domaine étalé λ permet de considérer Ω comme domaine étalé au dessus de la variété de Stein $\widetilde{\Omega}$. L'application f possède un domaine d'existence holomorphe au dessus de $\widetilde{\Omega}$. Il suffit de montrer que ce domaine est de Stein et donc $\widetilde{\Omega} = \Omega$.

En utilisant le théorème de Docquier-Grauert, il suffit de montrer que $(\Omega, \widetilde{\lambda})$ est localement pseudoconvexe au dessus de $\widetilde{\Omega}$.

Soit $z \in \widetilde{\Omega}$, par hypothèse il existe un voisinage U de $\widetilde{g}(z)$ tel que : $\varphi^{-1}(U)$ est holomorphiquement extensifère. Soit $B(z)$ une boule centrée en z telle que : $\widetilde{g}(B(z)) \subset U$ il suffit de montrer que $\widetilde{\lambda}(B(z))$ est de Stein. On a :

$$f(\widetilde{\lambda}^{-1}(B(z))) \subset \varphi^{-1}(U)$$

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \Omega & \longrightarrow & X \\ \widetilde{\lambda}\downarrow & & \downarrow\varphi \\ \widetilde{\Omega} & \longrightarrow & Y \\ & \widetilde{g} & \end{array}$$

Si $\widetilde{\lambda}^{-1}(B(z)) \neq \varphi$ on se restreint à $\widetilde{\lambda}^{-1}(B(z))$ on à le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \widetilde{\lambda}^{-1}(B(z)) & \longrightarrow & \varphi^{-1}(U) \\ \widetilde{\lambda}\downarrow & & \downarrow\varphi \\ B(z) & \longrightarrow & U \\ & \widetilde{g} & \end{array}$$

$\widetilde{\lambda}^{-1}(B(z))$ est étalé au dessus de $B(z)$, or $\varphi^{-1}(U)$ est holomorphiquement extensifère, donc d'après la proposition le domaine d'existence holomorphe $f \setminus \widetilde{\lambda}^{-1}(B(z))$ du dessus de $B(z)$ est de Stein, notons ce domaine $(\Psi, \Omega', \pi', f')$.
On a $\Omega' \approx \widetilde{\lambda}^{-1}(B(z))$. En effet, Ω' est étalé de $\widetilde{\Omega}$ par π et puisque le domaine d'existence holomorphe au dessus de $\widetilde{\Omega}$ de $f \setminus \widetilde{\lambda}^{-1}(B(z))$ est $(i, \Omega, \widetilde{\lambda}, f)$ où i est l'injection
$i : \widetilde{\lambda}^{-1}(B(z)) \to \Omega$, il existe un morphisme de domaine étalé $\phi : \Omega' \to \Omega$ tel que : $\phi \circ \Psi = i$, ϕ étant un morphisme de domaine étalé.
On a : $\widetilde{\lambda} \circ \phi = \pi'$ et donc si $x \in \Psi(\widetilde{\lambda}^{-1}(B(z)))$ on a : $\Psi \circ \phi(x) = x$ car $\Psi \circ \phi \circ \Psi = \Psi$, donc : $\Psi \circ \phi : \Omega \to \Omega'$ est $\widetilde{\lambda}^{-1}(B(z)) \approx \Omega'$ d'où $\widetilde{\lambda}^{-1}(B(z))$ est de Stein. Et finalement Ω est localement pseudoconvexe au dessus de Ω.

Théorème 2.6 Soit $\varphi : X \to Y$ une application holomorphe. On suppose :
$a\backslash$ Y projective.
$b\backslash$ Il existe un recouvrement $U = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de Y tel que $\varphi^{-1}(U_\alpha)$ est holomorphiquement extensifère (resp. méromorphiquement extensifère) pour tout $\alpha \in I$.
Alors toute application holomorphe de T dans X se prolonge holomorphiquement (resp. méromorphiquement) au complémentaire dans Δ^n d'un sous-ensemble analytique Z de Δ^n tel que $\mathrm{codim} Z \geq 2$.

Preuve. [10]

3.2.1 Prolongement à valeurs dans des variétés homogènes

On va commencer par le cas des variétés Homogènes.
Proposition 3.1 Toute variété homogène compacte est une fibration localement triviale à base projective et à fibres parallélisables.

Théorème 3.3 Soit M une variété homogène compacte alors toute application holomorphe de T dans M se prolonge holomorphiquement au complémentaire dans Δ^n d'un sous-ensemble analytique Z de Δ^n tel que $\text{codim} Z \geq 2$.

Preuve. [10]
D'après la proposition 3.1, M est un fibré localement trivial (M, π, B) à base projective et à fibres connexes parallélisables F.
B peut être recouvrement par des ouverts de Stein U_i tel que : $\pi^{-1}(U_i) \approx U_i \times F$ et donc du corollaire $\pi^{-1}(U_i)$ est holomorphiquement extensifère et on conclut par ce résultat.
L'exemple suivant montre que sous les hypothèses du théorème le résultat obtenu ne peut être amélioré.

Exemple 3.1 Soit M une surface de Hopf, $M = \mathbb{C}^2 \setminus_{\{0\}} \diagup G$, ou G est engendré par la contraction γ.

$$\gamma(z_1, z_2) = (\alpha z_1, \alpha z_2) \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{C}^* : |\alpha| < 1.$$

M est homogène compacte et la projection canonique $p : \mathbb{C}^2 \setminus_{\{0\}} \to M$ ne se prolonge pas en 0 puisque l'hadérence $\widetilde{G}_p$ du graphe de p dans $\mathbb{C}^2$ contient $\{0\} \times M$.

3.2.2 Prolongement à valeurs dans des surfaces presque homogènes compactes

Pour démontrer le prolongement des applications holomorphes de T à valeurs dans des surfaces presque homogènes compactes, on va utiliser le théorème de Potters pour la classification des surfaces presque homogènes.
Théorème 3.4 (La classification de Potters) Soit X une surface presque homogène compacte, alors X est isomorphe à l'un des cas suivants :
i ׀ X est une surface rationnelle.
ii ׀ X est isomorphe à $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ ou X est obtenu par une fibration à fibre $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ au dessus de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$.

iii | X est topologiquement isomorphe au fibré trivial à fibre $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ au dessus de T_1.

iv | X est isomorphe à une surface de Hopf.

v | X est isomorphe a T_2.

Preuve. [14]

Il reste d'étudier cas par cas la classification de Potters pour arriver au résultat sur les surfaces presque homogènes.

Proposition 3.2 Soit X une fibration à fibre $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ au dessus de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$. Alors toute application holomorphe définie sur T à valeurs dans X se prolonge méromorphiquement à $\Delta^n \setminus Z$ à valeurs dans X où Z est un sous-ensemble analytique de Δ^n de codimension au plus 2.

Preuve.

On pose : $H_1 = \{[z_1 : z_2], z_1 = 0\}$ et $H_2 = \{[z_1 : z_2], z_2 = 0\}$ nous avons $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \setminus H_1$ est isomorphe avec $\mathbb{C}$ par $[z_1 : z_2] \to \frac{z_2}{z_1}$ et $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \setminus H_2$ est isomorphe avec $\mathbb{C}$ par $[z_1 : z_2] \to \frac{z_1}{z_2}$.

On désigne par $\phi : X \to \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ la projection canonique de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$.

Soit $f : T \to X$ holomorphe, puisque $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \setminus H_i$ $(i = 1, 2)$ est holomorphiquement extensifère et la fibre de X sont $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$. $f : T \setminus f^{-1}(\phi^{-1}(H_i)) \to X \setminus \phi^{-1}(H_i)$ se prolonge méromorphiquement à $T \setminus \widetilde{f^{-1}(\phi^{-1}}(H_i))$ l'enveloppe d'holomorphie de $T \setminus f^{-1}(\phi^{-1}(H_i))$.

Soit E_i et F_i les parties de $f^{-1}(\phi^{-1}(H_i))$ de $\mathrm{codim} E_i = 1$ et $\mathrm{codim} F_i \geq 2$.

On a :

$$T \setminus \widetilde{f^{-1}(\phi^{-1}}(H_i)) \cong T \setminus E_i$$

Mais E_i est une hypersurface, par [2] : $\widetilde{T \setminus E_i} \cong \Delta^n \setminus \widetilde{E_i}$ où E_i est une hypersurface de Δ^n tel que : $E_i = \widetilde{E_i} \cap T$.

On pose $Z = E_1 \cap E_2$. f se prolonge méromorphiquement à $\Delta^n \setminus Z$.

On a : $Z \cap T = E_1 \cap E_2 \subset f^{-1}(\phi^{-1}(H_1 \cap H_2))$. Mais $H_1 \cap H_2 = \phi$, donc T ne rencontre pas Z et alors $co\dim Z \geq 2$.

Proposition 3.3 Soit X une surface de Hopf, alors toute application holomorphe de T dans X se prolonge holomorphiquement au complémentaire d'un sous-ensemble analytique de Δ^n de codimension au moins 2 à valeurs dans X.

Preuve.

Soit $f : T \to X$ holomorphe, le revêtement universel de X est $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, on pose : $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to X$ la projection canonique, T est simplement connexe donc il existe une fonction holomorphe $g : T \to \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ tel que : $\pi \circ g = f$, g se prolonge à une fonction holomorphe $\widetilde{g} : \Delta^n \to \mathbb{C}^n$, on pose $Z := \widetilde{g^{-1}}(0)$, Z est un sous-ensemble analytique de Δ^n. Mais $T \cap \widetilde{g^{-1}}(0) = \phi$ donc codim$Z \geq 2$ et $\pi \circ (\widetilde{g} / \Delta^n \diagdown Z)$ est un prolongement holomorphe de f à $\Delta^n \diagdown Z$.

Proposition 3.4 Si X est une fibration à fibre $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ et à base T_1 alors toute application holomorphe de T dans X se prolonge holomorphiquement a Δ^n à valeurs dans X.

Preuve.

La base T_1 est holomorphiquement extensifère alors le fibre $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ est méromorphiquement extensifère.

Définition 3.2 Une application rationnelle d'une variété X complexe à un espace projectif complexe $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$, une application $\varphi : Z \to [1 : \varphi_1(z) : ... : \varphi_n(z)]$ donnée par n méromorphe fonction sur X, et on dit que l'application rationnelle
$\varphi : X \to \mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ est birationnelle s'il existe une application rationnelle $\psi : \mathbf{P}^n(\mathbb{C}) \to X$ tel que $\varphi \circ \psi$ est l'identité.

Les surfaces rationnelles sont des surfaces algébriques birationnelles isomorphes à $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$.

Proposition 3.5 Si X est une surface rationnelle alors toute application holomorphe de T dans X se prolonge méromorphiquement à Δ^n à valeurs dans X.

Preuve.

Soit $f : T \to X$ une application holomorphe, il existe deux fonctions méromorphes φ_1, φ_2 sur X telle que : $g : Z \to [1 : \varphi_1 \circ f(z) : \varphi_2 \circ f(z)]$ a partir de $T \to \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ est méromorphe, alors il existe un sous-ensemble analytique Z de T de codimension 2 telle que : $g : T\diagdown_Z \to \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ est holomorphe.

g se prolonge à une application méromorphe $\widetilde{g}$ à partir Δ^n en $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ (car $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ est méromorphiquement extensifère et $\widetilde{T \setminus Z} = \Delta^n$).

De plus, il existe $\psi : \mathbf{P}^2(\mathbb{C}) \to X$ tel que $\varphi \circ \psi$ est l'identité. Soit $\Gamma_{\psi \circ \widetilde{g}} \subset \Delta^n \times X$ le graphe de $\psi \circ \widetilde{g}$ et soit $\Gamma_f \subset T \times X$ être le graphe de f, par définition des applications rationnelles il existe un sous-ensemble analytique S de $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ tel que $\varphi : X\backslash_{\varphi^{-1}(S)} \to \mathbf{P}^2(\mathbb{C}) \setminus S$ est biholomorphe.

On pose : $U = \mathbf{P}^2(\mathbb{C})\backslash S$, on a $\Gamma_{\psi \circ \widetilde{g}} \mid g^{-1}(U) = \Gamma_f \mid g^{-1}(U)$, mais ce graphe est irréductible alors $\Gamma_{\psi \circ \widetilde{g}} = \Gamma_f$, enfin l'application $\psi \circ \widetilde{g}$ est le prolongement méromorphe de f à partir Δ^n en X.

Proposition 3.6 Un tore T_2 est holomorphiquement extensifère (car le revêtement universel est $\mathbb{C}^2$) et $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ est méromorphiquement extensifère.

Corollaire 3.1 Soit X une surface presque homogène compacte, alors toute application holomorphe de T dans X se prolonge méromorphiquement a $\Delta^n \setminus Z$ où Z est un sous-ensemble analytique de Δ^n de codimension 2 à valeurs dans X.

Bibliographie

[1] BARTH (W.), PETERS (G.) and VAN DE VAN (A.). : Compact complex surfaces. Spriger - Verlag Berlin , Heidelberg, New - York , Tokyo , 1984.

[2] BLANCHARD (A.) . : Sur les variétés analytiques complexes, Ann.Sci. Ec.Norm.Sup 73, 1956.

[3] DLOUSSKY. : Enveloppes d'holomorphie et prolongements d'hypersurfaces, Séminaire Pierre lelong. 215-235, 1975-76, Lec. Notes in math. 578, Springer 1977.

[4]DLOUSSKY. : Prolongement d'applications holomorphes, Séminaire Pierre lelong. 42-95, 1975-76, Lec. Notes in math. 694, Springer 1978.

[5] FANGYANG ZHENG. : Complex Differential Geometry. AMS /IP. : Studies in Advanced Mathematics, vol. 18.

[6] FEDERIC PAULIN. : Groupes et Géométrie. Département de Mathématiques d'Orsay (2013-2014).

[7] HUCKELBERRY.A., OELJEKLAUSS.A. : Classification theorems for almost homogeneous spaces. Institue Elie Carton janvier 1984.

[8] IVASHKOVICH(S.M.). : The Hartogs phenomen for holomorphically convex Kähler manifolds, Math. USSR Izvestiya, Vol 29(1987), n°1, 225-232.

[9] KRACHNI MOSTAPHA. : Hartogs Extension. International journal of contemporary mathematical sciences. Vol. 3(2008), no. 11, 545-550.

[10] KRACHNI MOSTAPHA. : Prolongement d'applications holomorphes, Bull. Soc. Math. France, 118(1990), 229-240.

[11] MASAHIDE KATO et NOBORU OKADA. : On holomorphic maps into compact non-kahler manifolds. Ann. Inst. Fourier. Grenoble 54,6(2004), 1827-1854.

[12] PHILIPPE CHARPENTIER. : Introduction à L'analyse Complexe à plusieurs variables. Bordeaux 1. 351, Cours de la libération, 33405 Talence (2009).

[13] PIERRE DOLBEAUT : Analyse Complexe. 2-225-81425-2. Paris, Milan, Barcelone (1990).

[14] POTTERS (J.) . : On almost homogeneous compact complex surfaces, Invent. Math 8, 1969.

[15] THIERRY BOUCHE. : Introduction différentielle des variétés analytiques complexes. Joseph Fourier (1996).

[16] VARADARAJAN (V.S.). : Lie groups, Lie algebras and their representations. Printice Hall series in modern analysis (1974).

[17] WANG (H.C.). : Complex parallelisable manifolds. Procedings of the A.M.S. 5.(1954).

الملخص : مسالة تواجد التوابع الهولومورفية لم يعالج جيدا الى غاية ايامنا هذه, لهذا وجب تمديد توابع هولومورفية معرفة على مفتوح Hartogs ذات متغيرات في متنوعة عقدية متراصة.
في هذه المذكرة, سنعالج حالة سطوح تقريبا متجانسة, اين سنستخدم تصنيف Potters لنصل في الاخير الى البرهنة ان جميع التوابع الهولومورفية ذات متغيرات في متنوعة تقريبا متجانسة متراصة تتمدد ميرومورفيا خارج *codimension 2*.

Résumé : *Le problème du domaine d'existence d'applications holomorphes n'est pas bien traiter jusqu'à nos jours. Il s'agit de prolonger des applications holomorphes définies sur l'ouvert de Hartogs à valeurs dans une variété complexe compacte.*

Dans ce mémoire, on traite le cas des surfaces presque homogènes, ou on utilise la classification de Potters pour arriver finalement à montrer que toute applications holomorphes à valeurs dans une variété presque homogène compacte se prolonge méromorphiquement en dehors de la codimension 2.

Mots clés : *Prolongement d'applications holomorphes, variété homogène, Surface presque homogène,*

Abstract: *The problem of existence of holomorphic field of applications is not well treated until today. This extension of holomorphic mappings defined on the open Hartogs values in a variety compact complex.*

In this paper, we deal with the case almost homogeneous surfaces, or is used Potters classification to finally get to show that any holomorphic mappings with values in an almost homogeneous compact manifold extends méromorphiquement outside the codimension 2.

Keywords : Extension of holomorphic maps, homogeneous manifolds, Almost homogeneous surface.