REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la

Recherche scientifique

Université FERHAT ABBAS DE SETIF

THESE

Présentée à la faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT SCIENCES

Option : Mathématiques Appliquées

Par

MEROUANI ABDELBAKI

THEME

Etude mathématique des problèmes viscoplastiques à variable interne d'état avec conditions aux limites de contact avec et sans frottement

soutenu le : 12/10/ 2008

Devant le Jury :

A. AYADI	Professeur.	Université Oum El Bouaghi.	Président
S. DJABI	Professeur.	Université de Sétif.	Encadreur
N. HAMRI	Professeur.	Université de Constantine.	Examinateur
N. BENHAMIDOUCHE	M.C.	Université de M'sila.	Examinateur
N. HEMICI	M.C.	Université de Sétif	Examinateur
T. SERRAR	M.C.	Université de Sétif	Examinateur

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE III: Problème de contact unilatéral sans frottement

CHAPITRE IV: Problèmes d'èvolution

ANNEXE

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

INTRODUCTION

Le développement de l'intérét porté à la viscoplasticité a été favorisé par l'investigation des propriétés mécaniques du matériau.Plus tard, des modéles viscoplastiques ont été appliqués à différents matériaux tels que les métaux, les polymères et les caoutchoucs.

la diversité des lois de comportement utilisées en viscoplasticité ainsi que leurs applications en ingénierie ont donné naissance à de nouvelles approches mathématiques pour l'étude de l'existence, du comportement et l'approximation numérique de la solution pour une grande classe de problèmes aux limites. L'utilisation des méthodes fonctionnelles et des méthodes numériques pour l'étude des problèmes aux limites en viscoplasticité s'est ainsi rapidement développée dans différentes directions durant les dernières décennies.

Le but de cette thèse est de fournir une contribution à l'étude de deux catégories de ces problèmes aux limites. La première concerne des problèmes avec des conditions aux limites déplacement-traction et la seconde porte sur les problèmes de contact sans frottement suivant des conditions aux limites de contact du type Signorini.

Nous considérons des lois de comportement viscoplastiques ou viscoplastiques avec paramétres qui peuvent être interprétées comme la température; l'humidité, l'intensité du champ magnétique ou tout autre paramètre qui peut influencer sur les propriétés mécaniques du matériau.

Différents outils fonctionnels sont utilisés pour l'étude des problèmes mécaniques présentés dans cette thèse.A titre d'exemple, on peut citer des résultats sur les équations différentielles ordinaires ainsi que sur les inéquations variationnelles, le théorème du point fixe de Banach ainsi que les opérateurs monotones,

Notre étude se présente en quatre parties:

- Dans la première partie, après des rappels de mécanique des milieux continus, on établira le système d'équations non linéaires aux dérivées partielles qui fera l'objet de notre étude dans les parties suivantes.

Dans le seconde partie, on s'intéresse à la première catégorie de problèmes mécaniques étudiés dans cette thése.L'étude porte sur un problème aux limites concernant un corps viscoplastique soumis à des conditions aux limites déplacement traction.

Ce problème est étudié dans un premier temps dans le cas où la loi de comportement est de la forme $\dot{\sigma} = \mathcal{E}(\dot{\varepsilon}, \theta, \kappa) + G(\sigma, \varepsilon, \theta, \kappa)$,

Où u est le vecteur déplacement, $\dot{\varepsilon} = \varepsilon(\dot{u})$ est le tenseur des déformation linéarisées, σ est le tenseur des contraintes, θ, κ deux paramètres et G une fonction donnée. Dans un second temps, le cas où la loi de comportement est de la forme:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \mathcal{E}(\dot{\varepsilon}) + G(\sigma, \varepsilon(u), \kappa, \theta) \\ \dot{\kappa} = \varphi(\sigma, \varepsilon(u), \kappa, \theta) \end{cases}$$

où θ est un paramètre et κ une variable interne d'état.

Aussi bien dans le cas de la première loi de comportement que dans le cas de la deuxième, on donne des résultats d'existence et d'unicité de la solution en utilisant la même méthode de monotonie.

Dans le cas de la première loi de comportement et où $\mathcal{E}$ est une fonction tensorielle non linéaire dépendant de $\varepsilon(\dot{u})$ des résultats d'existence et d'unicité de la solution ont été obtenus par S.Djabi et M.Sofonea[2] en utilisant une méthode de monotonie

Dans le cas de la deuxième loi de comportement où φ et G ne dépendant que de σ, ε ,κ, des résultats d'existence et d'unicité ont été obtenus par S.Djabi[2] .

Dans cette thèse, notre but est l'étude quasistatique de ces mêmes problèmes viscoplastique ou viscoplastiques à variable interne d'état mais pour $\mathcal{E}$ et G dépendant aussi d'un paramètre θ (le cas de la première loi de comportement).et aussi pour $\mathcal{E}$ et G

dépendant aussi d'un paramètre θ (le cas de la deuxième loi de comportement). Cette partie contient des résultats originaux de l'auteur publiés en collaboration avec S.Djabi (Théorème 2.1) et S.Djabi et T.Serrar (Théorème 2.2).

La troisième partie est consacrée à l'étude du problème de contact sans frottement d'un corps déformable avec une base rigide.

Notre objet est l'étude quasistatique de ce problème connu sous le nom de "Signorini" pour des matériaux viscoplastiques.

On commence par donner une formulation variationnelle pour le problème mécanique considéré. On poursuit avec un résultat d'existence et d'unicité pour la formulation faible, en utilisant la théorie des inéquations variationnelles suivie d'une technique de point fixe ou de Cauchy Lipschitz simplifiée.

On s'intérese aussi à quelques propriétés de la solution du problème viscoplastique.

Dans la quatrième partie, on donne une application de la méthode de monotonie à deux problèmes d'évolution dans un cadre Hilbertien général.

On termine cette thèse par un annexe résumant les principaux outils mathématiques utilisés.

NOTATIONS

Si Ω **est un domaine de** IR^N**, on note par**

Γ : **la frontière de** Ω **supposée souvent régulière**

Γ_1, Γ_2 : **les parties de la frontière** Γ;

$mes\Gamma_1$: **la mesure de Lebesgue superficielle de** Γ_1;

ν : **la normale extérieure unitaire à** Γ;

$\mathcal{D}(\Omega)$: **espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans** Ω

$\mathcal{D}'(\Omega)$: **l' espace des distributions sur** Ω

$\mathbf{D} = [\mathcal{D}(\Omega)]^N$;

$\mathbf{D}' = [\mathcal{D}'(\Omega)]^N$;

$\mathbf{D} = [\mathcal{D}(\Omega)]_S^{N\times N}$;

$\mathbf{D}' = [\mathcal{D}'(\Omega)]_S^{N\times N}$;

$H = [L^2(\Omega)]^N$;

$\mathcal{H} = [L^2(\Omega)]_S^{N\times N}$

$H_1 = \{u \in H \mid \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}$

$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \mid Div\sigma \in H\}$

$Div\sigma$:**divergence de l'application** f

$\dot{f}$, $\ddot{f}$: **dérivée première et seconde de** f **par rapport au temps;**

(u, σ) : **paire d'un couple produit** $X \times Y$

X^N : **espace défini par** $X^N = \{x = (x_i) \,/\, x_i \in X \;, i = 1, 2, 3, ..., N\}$;

$X_s^{N\times N}$: **espace défini par** $X_s^{N\times N} = \{x = (x_{ij}) \,/\, x_{ij} = x_{ji} \in X \;, i, j = 1, 2, 3, ..., N\}$;

S_N : **espace des tenseurs d'orde deux symétriques sur** IR^N;

M^N : **espace des matrices N×N aux élements réels;**

0_N : **élément zéro de** S_N,

$|.|_X$: **norme sur l'espace** X;

$\langle .,. \rangle_X$: **produit scalaire sur** X;

$\langle .,. \rangle_{X'\times X}$: **produit de dualité entre** X' **et** X;

$L(X,Y)$; **espace des opérateurs linéaires continus de** X **dans** Y ;

$\mathbf{L(X) = L(X,X)}$;

$D(A)$:**domaine de l'opérateurA**

$R(A)$: **image de l'opérateur A ;**

A^* : **adjoint de l'opérateur A ;**

$p.p$: **presque partout:**

$L^\infty(\Omega)$: **espace des fonctions mesurables sur** Ω **tel qu'il existe** $C > 0$ **;** $|u(x)| \leq C\ P.P.sur\ \Omega$;

$H^1(\Omega)$: **espace de Sobolev ;**

$H_0^1(\Omega)$: **adhérence de** $D(\Omega)$ **dans** $H^1(\Omega)$;

$H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$: **espace de Sobolev d'ordre** $\frac{1}{2}$ **sur** Ω;

$\mathbf{H = H^1(\Omega)}^N$;

H_Γ=$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^N$;

H_Γ' = **dual de** H_Γ;

$\gamma : H_1 \to H_\Gamma = \left[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right]^N$ **l'application trace pour les fonctions vectorielles**

$Z : H_\Gamma \to H_1$ **l'inverse à droite de l'application** γ

$\gamma_\nu : \mathcal{H}_1 \to H_\Gamma'$ **l'application trace pour les fonctions tensorielles**

$Z_\nu : H_\Gamma' \to \mathcal{H}_1$**l'inverse à droite de l'application** γ_ν

$\mathbf{V} = \{u \in H_1\ /\ \gamma u = 0\ sur\ \Gamma_1\}$;

$\boldsymbol{\vartheta} = \{\sigma \in \mathcal{H}_1\ /Div\sigma = 0\ dans\ \Omega,\ \sigma.\nu = 0\ sur\ \Gamma_2\}$;

$\mathbf{W} = \{\sigma \in \mathcal{H}_1\ /\ \sigma.\nu = 0\ sur\ \Gamma_2\}$;

$C^0(0,T,X)$: **espace des fonctions continues de (0.T)** $\grave{a}$ **valeurs dans X ;**

$C^1(0,T,X)$: **espace des fonctions continument dérivables de (0,T)** $\grave{a}$ **valeurs dans X ;**

$|X|_{0,T,X}$: **norme sur l'espace** $C^0(0,T,X)$

$|X|_{1,T,X}$: **norme sur l'espace** $C^1(0,T,X)$

$|X|_{\infty,X}$: **norme sur l'espace** $L^\infty(0,T,X)$

CHAPITRE I

MODELISATION ET FORMULATION DES PROBLEMES

-Dans ce premier chapitre, nous présentons le système d'équations aux dérivées partielles qui fera l'objet de notre étude en précisant le cadre de celle-ci.

Pour cela, nous rappelons les principes et les résultats essentiels de la théorie des milieux continus , en donnant une idée de leur signification physique. Ces rappels porteront sur le tenseur des contraintes,le tenseur des déformations , les équations du mouvement et les lois de comportement.
De même nous présentons les différents types de conditions aux limites notamment les conditions aux limites déplacement traction et de contact sans frottement. Ceci nous permettera de formuler les problèmes mécaniques qui feront l'objet de notre étude dans les chapitres suivants.

1-1 Géométrie de la déformation

Soit un corps déformable occupant un domaine borné connexe de $IR^N, (N = 1, 2, 3)$ ayant une frontière Γ supposée assez régulière . L'objet du problème, du point de vue mécanique, est l'étude dans un intervalle de temps $[0, T]$ de l'évolution du corps matériel, résultant de l'application des forces extérieures sur l'intérieur du corps et sur sa frontière. Les inconnues du problème sont le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \to IR^N$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \to S_N$ où $S_N = IR_s^{N \times N}$.

La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus, exprimant l'équivalence entre le tenseur des forces extérieures et le tenseur des accélérations pour un système matériel quelconque, conduit aux équations du mouvement suivantes:

$(\mathbf{1.1})$ $Div\sigma + f = \rho\ddot{u}$

Où $f : \Omega \times [0, T] \to IR^N$ représente le champs des densité des forces volumiques appliqueés sur le corps et $Div\sigma$ $\left(Div\sigma = \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)$, est la divergence du champ des contraintes.

Le processus d'évolution modélisé par l'équation (1.1) s'appelle processus dynamique .

Dans certaines situations, l'équation (1.1) peut encore se simplifier, par exemple, dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie trés lentement, le terme $\rho\ddot{u}$ peut être négligé et l'équation (1.1) devient:

$$(\mathbf{1.2}) \qquad Div\sigma + f = 0 \qquad dans\ \Omega \times]0, T[$$

Dans la suite, on va appeler (1.1) équation de mouvement et (1.2) équation d'équilibre. Donc, on va considérer des solides dans le cadre des hypothèses des petites transformations (H.P.T) c'est à dire le vecteur u(x.t) varie lentement avec x Dans ce cas, on a besoin du tenseur des déformations linéaires $\varepsilon : \ \Omega \rightarrow S_N$ défini par:

$$(\mathbf{1.3}) \qquad \varepsilon = (\ \varepsilon_{ij}) \ \ ; \ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_j u_i + \partial_i u_j\right)$$

Où ∂_i, ∂_j réprésentent les opérateurs de dérivation partielle, respectivement par rapport aux variables x_i, x_j .On va appeler dans la suite ε champ des déformations. En conclusion, les inconnues du problème sont les fonctions u et σ qui satisfont à (1.2). Compte, tenu de la symetrie du tenseur des contraintes, l'équation (1.2) ne suffit pas pour décrire le mouvement car:

-Du point de vue mathématique, dans IR^3 par exemple il manque 6 équations reliant u et σ.

-Du point de vue physique, si l'équation (1.2) suffit pour décrire le mouvement, cela signifiera que, soumis à des conditions identiques, les divers milieux continus auraient des comportements identiques; ce qui est absurde. D'où la nécessité de compléter le système d'équations, c'est l'objet du paragraphe suivant:

1.2-Lois de comportement.

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quelques exemples.

1.2.1 Exemple d'essais

Considérons une barre de section S, de longueur ℓ_0 ,à laquelle on applique une force $F(t)$ à une extrémité, tandis que l'autre est fixée. On mesure l'allongement $\ell(t)$ de la barre, on définit la contrainte σ et la déformation ε par les égalités:

$$\sigma\ (t) = \frac{F(t)}{S} \quad ;\ \varepsilon\,(t) = \frac{\ell\,(t) - \ell_0}{\ell_0}$$

On peut imaginer les essais suivants:

a-Essai de chargement monotone

On augemente progressivement la force $F(t)$ et on mesure $\ell(t)$; on calcule σ et ε et on dessine, la courbe de variation $\sigma = \sigma\,(\varepsilon)$; cet essai permet de mettre en évidence les phénomènes suivants:

1-La non-linéarité éventuelle de la courbe $\sigma = \sigma\,(\varepsilon)$;

2-L'adoucissement éventuel (la non-monotonie de la courbe $\sigma = \sigma\,(\varepsilon)$);

3-La viscosité (en changeant $\dot{\varepsilon}$ =constante on peut obtenir des courbes $\sigma = \sigma\,(\varepsilon)$ différentes ce qui met en évidence le rôle de l'échelle de temps) .

b-Essai de fluage

On comence par un essai de chargement monotone tel qu'à un instant t (considéré désormais l'instant initial $t = 0$) on a:

$\sigma(0) = \sigma_0$, $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et $f(0)=F_0$ .On maintient F constante au cours du temps. La containte reste constante pour $t > 0$. Généralement, la déformation augemente avec le temps: c'est le fluage .

Si cette déformation reste limitée lorsque t tend vers l'infini, ,le milieu a un comportement de type solide. Si elle n'est pas limitée, il est du type fluide.

c- Essai de relaxation

On maintient la déformation constante dans le temps. Généralement, les contraintes se relâchent au cours du temps; c'est la relaxation .

Si la relaxation est totale $\lim\limits_{t \to \infty} \sigma(t) = 0$, le matériau est de type fluide

Si $\lim\limits_{t \to \infty} \sigma(t) = \overline{\sigma}$, $\overline{\sigma} > 0$ le matériau est du type solide.

d-Essai de charge -décharge

On augmente la force F puis on la ramène à zéro. Cet essai permet de mettre en évidence le comportement élastique ou anélastique du corps.Si les courbes de charge -décharge $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ coincident, le milieu est élastique ;dans le cas contraire il est anélastique .

De ces expériences, on établit des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations linéairisées. Celles ci sont appelées lois de comportement.

1.2.2-Lois de compotement élastiques

La loiconstitutive proposée ici est de la forme :

$$\mathbf{(1.4)} \qquad \sigma = F(\varepsilon)$$

Où F est un opérateur linéaire ou non linéaire. Cette loi peut modéler les propriétés de chargement monotone. La linéarité ou non linéarité de la courbe $\sigma = F(\varepsilon)$, adoucissement ou durcissement de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. Par contre ni le fluage, ni la relaxation ne peuvent être décrits par la loi (1.4) comme le montre les considérations ci-dessus. Soit $t = 0$, $\sigma(0) = \sigma_0$, $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et soit également $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$; $\forall t > 0$; alors la loi (1.4) entraîne que

$\sigma(t) = F(\varepsilon) = F(\varepsilon_0) = \sigma_0$; par conséquent, le phénomène de relaxation n'est pas décrit par la lois (1.4) .D'où, l'introduction d'autres lois constitutives.

1.2.3 lois de comportement viscoplastiques

Pour les matériaux viscoplastiques la loi de comportement est de la forme

$$\textbf{(1.5)} \qquad \dot{\sigma} = \mathcal{E}\left(\varepsilon(\dot{u})\right) + G\left(\sigma, \varepsilon\right)$$

Où $\dot{\sigma} = \dfrac{\partial \sigma}{\partial t}$, $\dot{\varepsilon} = \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t}$, $\mathcal{E}$ est un tenseur d'ordre quatre et G est une fonction constitutive donnée.

On peut prendre en considération les lois de comportement de la forme:

$$\textbf{(1.6)} \qquad \dot{\sigma} = \mathcal{E}\left(\dot{\varepsilon}\right) + G\left(\sigma, \varepsilon\right)$$

Où ξest une fonction non linéaire.

Dans certaines situations, on peut prendre en considération la dépendance des fonctions ξ

et G d'un paramètre χ (la température ou une variable d'état); on peut donc considérer au lieu de (1.6) le cas suivant:

$$\textbf{(1.7)} \qquad \dot{\sigma} = \mathcal{E}\left(\kappa\right)\varepsilon(\dot{u}) + G\left(\sigma, \varepsilon, \kappa\right)$$

où κ est un paramètre de IR^M $(M \in IN)$.

Si κ est une variable interne d'état on complète (1.7) par une équation d'évolution de la forme :

$$\textbf{(1.8)} \qquad \dot{\kappa} = \varphi\left(\sigma, \varepsilon, \kappa\right)$$

Dans d'autres situations, on peut prendre en considération la dépendance des fonctions $\mathcal{E}\ et\ \ G\ \ de\ \varepsilon(u)$ et d'autres paramètres $\kappa,\ \theta$;

Du point de vue physique, les paramètres θ, κ peuvent représenter la température, l'humidité, l'intensité du champ magnétique ou tout autre paramètre qui peut influencer sur les propriétés mécaniques du matériau.

Remarque1.1 Dans le deuxième chapitre de cette thèse nous allons considérer des lois de comportement viscoplastique avec paramètres de la forme:

$$(\mathbf{1.9}) \qquad \dot{\sigma} = \mathcal{E}\left(\dot{\varepsilon}, \theta, \kappa\right) + G\left(\sigma, \varepsilon, \theta; \kappa\right)$$

où θ, κ sont deux paramètre

et vicoplastique à variable interne d'état de la forme:

$$(\mathbf{1.10}) \begin{cases} \dot{\sigma} = \mathcal{E}\left(\dot{\varepsilon}\right) + G\left(\sigma, \varepsilon(u), \kappa, \theta\right) \\ \dot{\kappa} = \varphi\left(\sigma, \varepsilon(u), \kappa, \theta\right) \end{cases}$$

où θ est un paramètre et κ inconnue.

où ξ est une fonction tensorielle non léniaire dependant de $\dot{\varepsilon}, \kappa, \theta$.

Où θ, κ sont des paramètres

Précisons maintenant les conditions aux limites que nous imposons au systéme sur la frontière

1.3 Conditons aux limites

Afin de compléter le système (1.2),(1.4) ou (1.2),(1.5); il faut encore donner des conditions aux limites qu'on impose sur la frontière.

1.3.1 conditions aux limites déplacement traction

Soit un corps déformable occupant un domaine Ω de IR^N et ayant une frontière Γ.On suppose que Γ est de la forme $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$ soit ν le vecteur normal unitaire extérieur à Γ

On considère les conditions aux limites suivantes:

$$(\mathbf{1.12}) \qquad u = g \quad sur \quad \Gamma_1 \times]0.T[$$

$$(\mathbf{1.13}) \qquad \sigma.\nu = h \quad sur \quad \Gamma_2 \times]0.T[$$

La condition (1.12) est appelée condition aux limites de déplacement. Sa signification consiste a ce que le champ des déplacement est imposé sur la partie Γ_1 de la frontière Γ, la fonction g étant une donnée du problème. La condition (1.13) est appelée condition au limites de traction, h représentant la densité des forces appliquées sur la surface et constituant une donnée du problème.

Si $\Gamma_1 = \phi$, le problème aux limites est un problème de traction pure et si $\Gamma_2 = \phi$ le problème aux limites est un problème de déplacement pur.

Les problèmes déplacement traction sont rencontrés plus fréquemment dans les applications pratiques bien qu'ils soient loin de couvrir toutes les situations réelles.

Considèrons maintenant un autre type de conditions aux limites.

1.3.2 Les conditions aux limites de contact sans frottement:

Suposons que la frontière Γ de Ω est partitionneé en trois parties disjointes et mesurables $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$;

Sur $\Gamma_1$et Γ_2 on impose les conditions aux limites de déplacement traction.

Sur Γ_3 nous supposons que le corps élastique est en contact avec une base rigide S.

La distance de chaque point x$\in \Gamma_3$ à S dans la direction de la normale v(x) est connue et notée par s(x) voir fig 1-5 .

Ce contact se produit sans frottement, c'est-à-dire les mouvemen,ts tangentelle sans complétement libre.

puisque S représente une base rigide; elle ne subira pas de déformation donc le corps ne poura pas le pénétrer, cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité suivante:

$$(1.14)\ U\nu \leq S \quad Sur\Gamma_3$$

Dans les points de Γ_3 tels que $U_\nu \ = S$; il n'existe pas de contact entre Ω et S, et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy s'annule donc on a $\sigma_\nu = 0$. Par conséquent, on a:

$$(1.15) \quad U_\nu \prec S \ \Rightarrow \sigma_\nu = 0; \ \sigma_\tau = 0 \ sur \ \Gamma_3$$

Dans les points de Γ_3 tels que $U_\nu = s$, le contact entre Ω et S se produit .

Nous supposons que dans ces points la base rigide S exerce une pression inconnue sur la direction de la normale et orientée vers Ω ;on a:

$$(1.16)\ U_\nu = s \ \Rightarrow \sigma_\nu \leq 0;\ \sigma_\tau = 0\ Sur\Gamma_3$$

Pour résumer les conditions de contact(1.14)-(1.16) s'écrivent de la manière suivante:

$$(1.17)\ U_\nu \leq s \ \Rightarrow \sigma_\nu \leq 0;\ \sigma_\tau = 0\ ,\ \ \sigma_\nu(\ U_\nu - s) = 0\ \ Sur\Gamma_3$$

Les problèmes élastiques où viscoplastiques comprenant dans conditions aux limites de la forme (1.17) sont appelés prblèmes de type Signorini

Nous allons maintenant compléter le modèle mathématique, on donne la formulation des différents problémes:

1.4-Formulations des problémes .

L'évolution d'un corps déformable sous l'action des efforts extérieurs est modélisée mathématiquement par un système d'équations non linéaires aux dérivées partielles, posé sur un domaine $\Omega \in IR^N$. Ce système comprend l'équation de mouvement ou d'équilibre du corps, la loi de comportement du matériau ainsi que les conditions initiales et aux limites de déplacement-traction

Les problème mécaniques qu'on va étudier sont les suivants:

Probléme 1.1.((le cas des matériaux viscoplastiques avec paramètres)

Notre problème peut se formuler de la manière suivante:

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \to IR^M$ et le champ des contraintes $\sigma\ :\ \Omega \times [0, T] \to S_N$ tels que :

$$
\begin{array}{llcl}
(\mathbf{1.2}) & Div\sigma + f & = & 0 \qquad dans \quad \Omega \times]0,T[\\
(\mathbf{1.9}) & \dot{\sigma} & = & \mathcal{E}(\dot{\varepsilon},\theta,\kappa) + G(\sigma,\varepsilon,\theta,\kappa) \;\; dans \quad \Omega \times]0,T[\\
(\mathbf{1.12}) & u & = & g \quad sur \quad \Gamma_1 \times]0.T[\\
(\mathbf{1.13}) & \sigma.\nu & = & h \quad sur \quad \Gamma_2 \times]0.T[\\
(\mathbf{1.18}) & u(0) & = & u_0 \; ; \; \sigma(0) = \sigma_0 \quad dans \quad \Omega
\end{array}
$$

où θ, κ sont deux paramètre

Problème 1.2 (le cas des matériaux viscoplastiques à variable interne d'état et avec paramètre)

Notre problème peut se formuler de la manière suivante:
Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0,T] \to IR^N$ et le champ des contraintes $\sigma \; : \; \Omega \times [0,T] \to S_N$ et le champ de variable interne d'état $\chi : \Omega \times [0,T] \to IR^M \; M \in IN$ qui satisfont à :

$$
\begin{array}{ll}
(\mathbf{1.2}) & Div\sigma + f \;= 0 \qquad dans \quad \Omega \times]0.T[\\
(\mathbf{1.10}) & \left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma} = \mathcal{E}(\dot{\varepsilon}) + G(\sigma,\varepsilon,\kappa,\theta) \\ \dot{\kappa} = \varphi(\sigma,\varepsilon,\kappa,\theta) \end{array} \right. \\
(\mathbf{1.12}) & u = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times]0.T[\\
(\mathbf{1.13}) & \sigma.\nu = h \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times]0.T[\\
(\mathbf{1.19}) & u(0) = u_0 \; ; \; \sigma(0) = \sigma_0 \; \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{0}) = \kappa_0 \;\; dans
\end{array}
$$

Probléme .1-3 (le cas des matériaux viscoplastiques de contact)

Notre problème peut se formuler de la manière suivante:

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times]0,T[\; \to IR^N$ et le champ des contraintes $\sigma \; : \; \Omega \times]0,T[\; \to S_N$ tels que:

$$
\begin{array}{llcl}
(\mathbf{1.2}) & Div\sigma + f & = & 0 \qquad dans \quad \Omega \times]0,T[\\
(\mathbf{1.5}) & \dot{\sigma} & = & \mathcal{E}\left(\varepsilon(\dot{u})\right) + G(\sigma, \varepsilon) \qquad dans \quad \Omega \times]0,T[\\
(\mathbf{1.12}) & u & = & g \qquad sur \quad \Omega \times]0,T[\\
(\mathbf{1.3}) & \sigma.\nu & = & h \qquad sur \quad \Gamma_2 \times]0.T[\\
(\mathbf{1.17}) & u_\nu & \leq & 0 \ \sigma_\nu \leq 0 \quad \sigma_{\tau i} = 0 \ .\sigma_\nu u_\nu = 0 \ \ sur \quad \Gamma_3 \times]0.T[\\
(\mathbf{1.18}) & u(0) & = & u_0 \ ; \ \sigma(0) = \sigma_0 \quad dans \quad \Omega
\end{array}
$$

L'étude de ces problèmes fera l'objet des chapitres 2 et 3 de cette thèse.

CHAPITRE II

Problèmes avec conditions aux limites déplacement traction

Nous proposons dans cette partie une étude de l'existence et de l'unicité de la solution des problèmes aux limites non homogènes avec (avec paramètres, à variable interne d'état et paramètre),dans le cas quasistatique. Pour l'éxistence on présente une méthode de monotonie. Ces problèmes ont été étudiés par S.Djabi et M.Sofenea[2] dans le cas des matériaux viscoplastiques et par S.Djabi [2],[3] dans le cas des materiaux viscoplastiques à variable interne d'état . Notre but est l'étude de ces mêmes problèmes pour des matériaux viscoplastiques dépendant d'autre paramètres (la tempérérature, l'humidité, l'intensité du champ magnétique ou tout autre paramètre qui peut influencer sur les propriétés mécaniques du matériau), et pour des matériaux viscoplastiques à variable interne d'état et dépendant d'un paramètre.

Commencons tout dabord par le cas des materiaux viscoplastiques avec paramètres:

2.1 Le cas des materiaux viscoplastiques avec paramètres

Rappelons le problème 1.1énoncé dans la première partie

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0,T] \to IR^N$ et le champ des contraintes $\sigma \ : \ \Omega \times [0,T] \to S_N$ tels que:

$$
\begin{array}{lrcl}
(\mathbf{2.1}) & Div\sigma + f & = & 0 \qquad\qquad dans \quad \Omega \times [0,T] \\
(\mathbf{2.2}) & \dot{\sigma} & = & \mathcal{E}\left(\dot{\varepsilon}, \theta, \kappa\right) + G\left(\sigma, \varepsilon, \theta, \kappa\right) \qquad dans \quad \Gamma_1 \times [0,T] \\
(\mathbf{2.3}) & u & = & g \qquad\qquad sur \quad \Gamma_1 \times [0,T] \\
(\mathbf{2.4}) & \sigma.\nu & = & h \qquad\qquad sur \quad \Gamma_2 \times \ [0,T] \\
(\mathbf{2.5}) & u\left(0\right) & = & u_0 \ ; \ \sigma\left(0\right) = \sigma_0 \quad dans \quad \Omega
\end{array}
$$

Où θ, κ des paramètres

Des résultats d'existence et d'unicité pour le problème (2.1)-(2.5) ont été obtenus par S.Djabi et M.Sofonea[2] dans le cas où $\mathcal{E}$ est une fonction tensorielle ne dépendant que de $\varepsilon(\dot{u})$ et par S.Djabi[3] dans le cas où $\mathcal{E}$ est une fonction nonlinéaire dépendant à la fois de $\varepsilon(\dot{u})$ et κ. Dans ces situations, les auteurs cités ci-dessus ont pris en considération la dépendance des fonctios $\mathcal{E}$ et G d'un seul paramètre κ et de σ et de $\varepsilon(\dot{u})$.

L'originalité des travaux sur le problème 1.1 tient à la considération du cas où $\mathcal{E}$ et G dépendant ausi d'un autre paramètre θ; c'est à dire on considère une loi de comportement de la forme :

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}\left(\dot{\varepsilon}, \theta, \kappa\right) + G\left(\sigma, \varepsilon, \theta, \kappa\right)$$

à la place de:

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}\left(\dot{\varepsilon}, \kappa\right) + G\left(\sigma, \varepsilon, \kappa\right)$$

et on a obtenu un résultat d'existence et unicité de la solution en utilisant la même méthode de monotonie suivie d'une technique de Cauchy Lipschtiz.

Existence et unicité de la solution

Ce résultat a été obtenu en calloboration avec S.Djabi

Les hypothèses du travail sont:

$$(2.6)\begin{cases} \mathcal{E}:\Omega\times S_N\times L^2(\Omega)^p\times L^2(\Omega)^M\rightarrow S_N \text{ et} \\ \text{(a) il existe } \ m>0 \text{ tel que } \ <\mathcal{E}(\varepsilon_1,\theta,\kappa)-\mathcal{E}(\varepsilon_2,\theta,\kappa),\varepsilon_1-\varepsilon_2>\geq \\ \geq m|\varepsilon_1-\varepsilon_2|^2 \text{ pour tout } \varepsilon_1,\varepsilon_2\in S_N,\ \theta\in L^2(\Omega)^p,\kappa\in L^2(\Omega)^M\ p.p.dans\ \ \Omega, \\ \text{(b) il existe } \ L'>0 \text{ tel que} \\ \ |\mathcal{E}(\varepsilon_1,\theta_1,\kappa_1)-\mathcal{E}(\varepsilon_2,\theta_2,\kappa_2)|\leq L('|\varepsilon_1-\varepsilon_2|+|\theta_1-\theta_2|+|\kappa_1-\kappa_2|) \\ \text{pour tout } \varepsilon_1,\varepsilon_2\in S_N,\ \theta_1,\theta_2\in L^2(\Omega)^p,\kappa_1,\kappa_2\in L^2(\Omega)^M p.p.\,\text{dans}\,\Omega, \\ \text{(c) } x\rightarrow\mathcal{E}(x,\varepsilon,\theta,\kappa) \text{ est une fonction mesurable de lesbesgue} \\ \ \text{dans}\,\Omega \text{ pour tout } \ \varepsilon\in \mathrm{S}_N\ ,\theta\in L^2(\Omega)^p,\kappa\in L^2(\Omega)^M \\ \text{(d) } x\rightarrow\mathcal{E}(x,0,0,0)\in\mathcal{H} \end{cases}$$

$$(2.7)\begin{cases} G:\Omega\times S_N\times S_N\times\mathbb{R}^P\times\mathbb{R}^M\rightarrow S_N\,\text{et} \\ \text{a)}\,il\ existeL>0\text{tel que} \\ \qquad |G(x,\sigma_1,\varepsilon_1,\theta_1,\kappa_1)-G(x,\sigma_2,\varepsilon_2,\theta_2,\kappa_2)|\leq \\ \quad\leq\ L\left(|\sigma_1-\sigma_2|+|\varepsilon_1-\varepsilon_2|+|\theta_1-\theta_2|+|\kappa_1-\kappa_2|\right) \\ \qquad \text{pour tout } \sigma_1,\sigma_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2\in S_N,\kappa_1,\kappa_2\in\mathbb{R}^M,\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}^P,p.p.\text{in}\,\Omega, \\ \text{(b)}\,x\rightarrow G(x,\sigma,\varepsilon,\kappa,\theta)\ \text{ est une fonction mesurable pour la mesure de lebesgue} \\ \text{dans}\,\Omega,\ \text{pour tout}\,\sigma,\varepsilon\in S_N,\kappa\in\mathbb{R}^M,\theta\in\mathbb{R}^P, \\ \text{(c)}\,x\rightarrow G(x,0,0,0,0)\in\mathcal{H}. \end{cases}$$

(2.8) $\qquad f\ \in C^1\left(0,T,H\right),\qquad g\in C^1\left(0,T,H_\Gamma\right),\qquad h\in C^1\left(0,T,E'\right)$

(2.9) $\qquad u_0\in H,\qquad \sigma_0\in\mathcal{H}_1$

(2.10) $\ Div\ \sigma_0+f\left(0\right)=0\ $ dans $\ \Omega,\ \ u_0=g\left(0\right)\ $ sur $\ \Gamma_1,\ \ \sigma_0\nu=h\left(0\right)\ $ sur $\ \Gamma_2.$

(2.11) $\qquad \theta\in C^0\left(0,T,L^2\left(\Omega\right)^P\right).\ \ \kappa\in C^0\left(0,T,L^2\left(\Omega\right)^M\right).$

L'existence et l'unicité de la solution est donnée par le résultat suivant;

Theorème 2.1.Sous les hypothèses (2.6)-(2.11) le problème (2.1)-(2.5) admet une solution unique $u\in C^1\left(0,T,H_1\right),\sigma\in C^1\left(0,T,\mathcal{H}_1\right)$

Démonstration.

L'utilisation des applications traces donne l'existence d'un unique $(\tilde{u},\tilde{\sigma})$ tel que $\tilde{u}\in C^1\left(0,T,H_1\right),\tilde{\sigma}\in C^1\left(0,T,\mathcal{H}_1\right)$deux fonctions telles que

(2.12) $$Div\ \tilde{\sigma}+f=0 \quad dans\ \ \Omega\times(0,T)$$

(2.13) $$\tilde{u}=g \quad sur\ \ \Gamma_1\times(0,T)$$

(2.14) $$\tilde{\sigma}\nu=h\ \ sur\ \Gamma_2\times(0,T)$$

(l' existence de ce couple provient des propriétés des applications traces)

Considérons les fonctions définies par

(2.15) $$\bar{u}=\ u-\tilde{u}, \qquad \bar{\sigma}=\sigma-\tilde{\sigma},$$

(2.16) $$\bar{u}_0=\ u_0-\tilde{u}_0, \qquad \bar{\sigma}_0=\sigma_0-\tilde{\sigma}_0,$$

Il est facile de voir que $(u,\sigma)\in C^1\left(0,T,H\times\mathcal{H}_1\right)$ est une solution du problème(2.1)-(2.5)

si et seulement si

(2.17) $$(\bar{u},\bar{\sigma})\in C^1\left(0,T,V\times\mathcal{V}\right)\cdot$$

(2.18) $$\dot{\bar{\sigma}}\ =\mathcal{E}(\varepsilon(\bar{u})+\varepsilon(\tilde{u}),\theta,\kappa)+G(\bar{\sigma}+\tilde{\sigma},\varepsilon(\bar{u})+\varepsilon(\tilde{u}),\theta,\kappa)-\tilde{\sigma}$$

(2.19) $$\bar{u}(0)=\ \bar{u}_0, \qquad \bar{\sigma}(0)=\bar{\sigma}_0\ \ dans\ \ \Omega$$

Ainsi, on peut écrire (2.17)-(2.19) sous la forme:

$(\mathbf{2.20})$ $\dot{y}(t)=G(\theta(t),\kappa(t),x(t),y(t),\dot{x}(t))$

$(\mathbf{2.21})$ $x(0)=x_0\ \ ,y(0)=y_0$

dont les inconnues sont les fonctions x: $[0,T]\rightarrow X$ et y: $[0,T]\rightarrow Y$ où $\mathcal{G}$: $L^2(\Omega)^p\times L^2(\Omega)^M\times X\times Y\times H\rightarrow H$ est un opérateur non linéaire et κ:$[0,T]\rightarrow$

$L^2(\Omega)^p$ et $\theta : [0,T] \rightarrow L^2(\Omega)^M$ sont deux paramètres, où H est un espace de Hilbert; X,Y deux sous espaces orthogonaux de H tels que $H = X \oplus Y$ et $L^2(\Omega)^M$, $L^2(\Omega)^p$ sont des espaces réels normés .

Ainsi (2.17)-(2.19) peut s'écrire sous forme (2.20)-(2.21) où $y = \bar{\sigma}$, $x = \varepsilon(\bar{u})$, $\dot{x} = \varepsilon(\dot{\bar{u}})$

Et en remplaçant les espaces $\varepsilon(V)$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$ par X, Y, H respectivement

Pour résoudre le problème (2.17)-(2.19), on considère l'espace de HILBERT produit $Z = \varepsilon(V) \times \mathcal{V}$ qui est en fait isomorphe avec $\mathcal{H} = \varepsilon(V) \oplus \mathcal{V}$

et l'opérateur $\mathcal{G}$ définie par $\mathcal{G} : L^2(\Omega)^p \times L^2(\Omega)^M \times \varepsilon(V) \times \mathcal{V} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

(**2.22**) $\mathcal{G}(t, \theta, \kappa, x, y, q) = \mathcal{E}(q + \varepsilon(\dot{\tilde{u}}(t)), \theta(t), \kappa(t)) + G(y + \tilde{\sigma}(t), x + \varepsilon(\tilde{u}(t)), \theta(t), \kappa(t)) - \dot{\tilde{\sigma}}(t)$

Lemme 2.1 **Soit** $\theta(t) \in L^2(\Omega)^p$, $\kappa(t) \in L^2(\Omega)^M$ **,** $x \in X, y \in Y$ $, t \in [0,T]$ alors il existe un unique élément $z = (\varepsilon(v), \tau) \in Z$ tel que

$$\tau = \mathcal{G}(t, \theta, \kappa, x, y, \varepsilon(v)) \text{ où}$$

$$(\mathbf{2.23}) \quad \tau = \mathcal{E}(\varepsilon(v) + \varepsilon(\dot{\tilde{u}}(t)), \theta(t), \kappa(t)) + G(y + \tilde{\sigma}(t), x + \varepsilon(\tilde{u}(t)), \theta(t), \kappa(t)) - \dot{\tilde{\sigma}}(t)$$

Démonstration du lemme 2.1

L'unicité . si $z_1 = (\varepsilon(v_1), \tau_1), z_2 = (\varepsilon(v_2), \tau_2) \in Z$ tels que

$$\tau_1 = \mathcal{E}(\varepsilon(v_1) + \varepsilon(\dot{\tilde{u}}(t)), \theta(t), \kappa(t)) + G(y + \tilde{\sigma}(t), x + \varepsilon(\tilde{u}(t)), \theta(t), \kappa(t)) - \dot{\tilde{\sigma}}(t)$$
$$\tau_2 = \mathcal{E}(\varepsilon(v_2) + \varepsilon(\dot{\tilde{u}}(t)), \theta(t), \kappa(t)) + G(y + \tilde{\sigma}(t), x + \varepsilon(\tilde{u}(t)), \theta(t), \kappa(t)) - \dot{\tilde{\sigma}}(t)$$

En utilisant (2.6) nous avons

$$\langle \tau_1 - \tau_2, \varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2) \rangle_{\mathcal{H}} =$$
$$= \Big\langle \mathcal{E}(\varepsilon(v_1) + \varepsilon(\dot{\tilde{u}}(t)), \theta(t), \kappa(t)) - \xi(\varepsilon(v_2) + \varepsilon(\dot{\tilde{u}}(t)), \theta(t), \kappa(t)),\ \varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2) \Big\rangle_{\mathcal{H}} \geq$$

$\geq m\,|\varepsilon(v_1)-\varepsilon(v_2)|^2_{\mathcal{H}}$

En utilsant l'orthogonalité dans $\mathcal{H}$ de $(\tau_1-\tau_2)\in\mathcal{V}$ *et* $(\,\varepsilon(v_1)-\varepsilon(v_2))\in\varepsilon(V)$ on déduit que $\varepsilon(v_1)=\ \varepsilon(v_2)$ ce qui implique $\tau_1=\tau_2$ Pour l'existence on considère l'application:

$\mathcal{G}(\theta,\kappa,x,y,.,):\varepsilon(V)\to\mathcal{H}$ définie par :

$(\mathbf{2.24})$ $\mathcal{G}(t,\theta,\kappa,x,y,q.)=\mathcal{E}(q+\varepsilon(\dot{\tilde{u}}(t)),\theta(t),\kappa(t))+G\,(y+\tilde{\sigma}(t),x+\varepsilon(\tilde{u}(t)),\theta(t),\kappa(t))-\dot{\tilde{\sigma}}(t)$

et soit $S(t,\theta,\kappa,x,y,).:\varepsilon(V)\to\varepsilon(V)$ donné par S=P$\circ F$ ou P:$\mathcal{H}\to\varepsilon(V)$ est l'application projecteur sur $\varepsilon(V)$ .En utilisant (2.6),(2.7) et les propriétés des projecteurs on trouve que l'opérateur $S(t,\theta,\kappa,x,y,.):\varepsilon(V)\to\varepsilon(V)$ est fortement monotone et de lipschitz.En effet d'après (2.6) et les propriétés des projecteurs, pour tout q$_1$,q$_2\in\varepsilon(V)$ on trouve

$$(\mathbf{2.25})\ \langle S(t,\theta,\kappa,x,y,q_1-S(t,\theta,\kappa,x,y,q_2,q_1-q_2\rangle_{\mathcal{H}}=$$
$$=\langle\mathcal{G}(t,\theta,\kappa,x,y,q_1)-\mathcal{G}(t,\theta,\kappa,x,y,q_2),q_1-q_2\rangle_{\mathcal{H}}\geq m\,|q_1-q_2|^2_{\mathcal{H}}$$
$$(\mathbf{2.26})\ |S(t,\theta,\kappa,x,y,\grave{q}_1-S(t,\theta,\kappa,x,y,\grave{q}_2|=|\mathcal{G}(t,x,y,\grave{q}_1)-\mathcal{G}(t,x,y,\grave{q}_2)|_{\mathcal{H}}\leq\acute{L}\,|\grave{q}_1-\grave{q}_2|_{\mathcal{H}}$$

Ainsi $S(t,\theta,\kappa,x;y,.):\varepsilon(V)\to\varepsilon(V)$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz . En utilisant maintenant le théorème de surjectivité de Browder on trouve qu'il existe $\varepsilon(v)\in\varepsilon(V)$ tel que $S(t,\theta,\kappa,x,y,\varepsilon(v))=0_{\varepsilon(V)}$.ll résulte que l'élément $\mathcal{G}(t,\theta,\kappa,x,y,\varepsilon(v))\in\mathcal{V}$ et on finit la preuve, en prenant $z=(\varepsilon(v),\tau)$ *où* $\tau=\mathcal{G}(t,\theta,\kappa,x;y,\varepsilon(v))=\mathcal{E}(\varepsilon(v),\varepsilon(\dot{\tilde{u}}(t)),\theta(t),\kappa(t)$ $G\left(y+\tilde{\sigma}(t),x+\varepsilon(\dot{\tilde{u}}(t)),\theta(t),\kappa(t)\right)-\dot{\tilde{\sigma}}(t)$

Soit maintenant A: $[0.T]\times L^2(\Omega)^p\times L^2(\Omega)^M\times Z\to Z$ l'opérateur défini comme suit

$$\textbf{(2.27)}\begin{cases} A(t,\theta,\kappa,w)=z \text{ si et seulement si } w=(x,y),z=(\varepsilon(v),\tau)\\ \qquad\qquad\tau=\mathcal{G}(t,\theta,\kappa,x,y,\varepsilon(v))\end{cases}$$

Nous avons:

lemme 2.2. Pour tout $\theta\ \in L^2(\Omega)^p,\kappa\in L^2(\Omega)^M,\ w_1,w_2\in Z.$

L'opérateur $A : [0.T] \times L^2(\Omega)^p \times L^2(\Omega)^M \to Z \times Z$ est continu et il existe c>0 tel que

(2.28) $|A(t,\theta,\kappa,w_1) - A(t,\theta,\kappa,w_2|_Z \leq C\,|w_1 - w_2|_Z$ pour $w_1, w_2 \in Z$,
$\theta \in L^2(\Omega)^p, \kappa \in L^2(\Omega)^M$

Démonstration du lemme2.2

soit $\theta_i \ \in L^2(\Omega)^p, \kappa_i \in L^2(\Omega)^M$, w$_i$=(x$_i$,y$_i$)$\in Z$ *et* z$_i$=$(\varepsilon(v_i),\tau_i) = A(\theta_i,\kappa_i,w_i)$, $i =$ 1.2

En utilisant (2.27) on trouve

(2.29) $\tau_i = \mathcal{E}(\varepsilon(v_i) + \varepsilon(\dot{\tilde{u}}(t_i)), \theta_i(t), \kappa_i(t)) \ + G\,(y_i + \tilde{\sigma}(t_i), x + \varepsilon(\tilde{u}(t_i)), \theta_i(t), \kappa_i(t)) - \dot{\tilde{\sigma}}(t_i)\ \ i = 1.2$

Ce qui implique (2.29) $S(\theta_i, \kappa_i, x_i; y_i, \varepsilon(v_i)) = 0_{\varepsilon(V)} \quad i = 1.2$

D'après (2.25) et (2.29) on trouve

$m\,|\varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2)|^2_{\mathcal{H}} \leq \langle S(t_1,\theta_1,\kappa_1,x_1,y_1,\varepsilon(v_1)) - S(t_1,\theta_1,\kappa_1,x_1,y_1,\varepsilon(v_2)), \varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2)\rangle_{\mathcal{H}} \leq$
$\langle S(t_2,\theta_2,\kappa_2,x_2,y_2,\varepsilon(v_2)) - S(t_1,\theta_1,\kappa_1,x_1,y_1,\varepsilon(v_2)), \varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2)\rangle_{\mathcal{H}}$

$\leq |\mathcal{G}(t_2,\theta_2,\kappa_2,x_2,y_2,\varepsilon(v_2)) - \mathcal{G}(t_1,\theta_1,\kappa_1,x_1,y_1,\varepsilon(v_2))|_{\mathcal{H}}\,|\varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2)|_{\mathcal{H}}$
Donc

(2.30) $|\varepsilon(v_1)) - \varepsilon(v_2)|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{m}\,|\mathcal{G}(t_2,\theta_2,\kappa_2,x_2,y_2,\varepsilon(v_2)) - \mathcal{G}(t_1,\theta_1,\kappa_1,x_1,y_1,\varepsilon(v_2))|_{\mathcal{H}}$

En utilisant maintenant (2.29) et (2.30) on trouve

(2.31) $|\tau_1 - \tau_2|_{\mathcal{H}} \quad \leq$
$|\mathcal{G}(t_2,\theta_2,\kappa_2,x_2,y_2,\varepsilon(v_2)) - \mathcal{G}(t_1,\theta_1,\kappa_1,x_1,y_1,\varepsilon(v_2))|_{\mathcal{H}} + |\mathcal{G}(t_1,\theta_1,\kappa_1,x_1,y_1,\varepsilon(v_1)) - \mathcal{G}(t_1,\theta_1,\kappa_1,x_1$
$\leq \quad \acute{L}\ |\varepsilon(v_1)) - \varepsilon(v_2)|_{\mathcal{H}} + |\mathcal{G}(t_2,\theta_2,\kappa_2,x_2,y_2,\varepsilon(v_2)) - \mathcal{G}(t_1,\theta_2,\kappa_2,x_1,y_1,\varepsilon(v_2))|_{\mathcal{H}}$

et d'apres (2.30), il résulte

(2.32) $|\tau_1 - \tau_2|_{\mathcal{H}} \leq (\frac{\acute{L}}{m}+1)\ |\mathcal{G}(t_1,\theta_1,\kappa_1,x_1,y_1,\varepsilon(v_2)) - \mathcal{G}(t_2,\theta_2,\kappa_2,x_2,y_2,\varepsilon(v_2))|_{\mathcal{H}}$

En utilisant maintenant (2.24) il vient

(2.33) $|\mathcal{G}(t_1,\theta_1,\kappa_1,x_1,y_1,\varepsilon(v_2)) - \mathcal{G}(t_2,\theta_2,\kappa_2,x_2,y_2,\varepsilon(v_2))|_{\mathcal{H}} \leq$
$L(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|)+|\mathcal{G}(\theta_2,\kappa_2,x_2,y_2,\varepsilon(v_2)) - \mathcal{G}(\theta_1,\kappa_1,x_2;y_2,\varepsilon(v_2))|_{\mathcal{H}}$

En utilisant (2.30) et (2.32) on trouve

(2.34) $|A(t_1,\theta_1,\kappa_1,w_1) - A(t_2,\theta_2,\kappa_2,w_2|_Z \leq C\,|\mathcal{G}(t_1,\kappa_1,x_1,y_1,\varepsilon(v_2)) - \mathcal{G}(t_2,\kappa_2,x_2,y_2,\varepsilon(v_2))|_{\mathcal{H}}$

Een plus d'après (2.24) (2.33) (2.6),(2.7) et les régularités $\tilde{u} \in C^1(0.T,V)$, $\tilde{\sigma} \in C^1(0,T,\mathcal{V}\ )$

on a $|\mathcal{G}(t_1,\theta_1,\kappa_1,x_1,y_1,\varepsilon(v_2)) - \mathcal{G}(t_2,\theta_2,\kappa_2,x_2,y_2,\varepsilon(v_2))|_{\mathcal{H}} \to 0$ quand $t_1 \to t_2$

$\theta_1 \to \theta_2$ dans $L^2(\Omega)^P$, $\kappa_{1\to}\kappa_2$ dans$L^2(\Omega)^M$, x$_1 \to x_2, y_1 \to y_2$ dans $\mathcal{H}$.Par concéquent d'après (2.34) il vient que A est un opérateur continu.En prenant $t_1 = t_2, \theta_1 = \theta_2$, $\kappa_1 = \kappa_2$ dans (2.34) on obtient (2.32)

Démonstration de théorème 2.1

Soit B: $[0,T] \times Z \to Z$ définie par:

(2.35) $B(t,z) = A(\theta(t),\kappa(t),z)$ *pourtoutt* $\in [0,T]$ *etz* $\in Z$
(2.36) $z_0 = (x_0,y_0) = (\varepsilon(\bar{u}_0),\bar{\sigma}_0)$

En utilisant la définition de l'opérateur A on trouve que $x \in C^1(0,T,\varepsilon(V))$, $y \in C^1(0,T,\mathcal{V})$ est solution de (2.15)-(2.16) si et seulement si $z = (x,y) \in C^1(0,T,Z)$ est solution du problème

(2.37)$\dot{z} = (x,y) = B(t,z(t))$ pour tout t$\in$ $[0.T]$

$(2.38) z(0)=(x(0), y(0))$

Dans l'ordre d'étudier(2.37),(2.38) on remarque que par le lemme 2.1 on trouve que B est un opérateur continu et

$$|B(t,z_1)-B(t,z_2)|_Z \leq C\,|z_1-z_2|_Z \quad pour \quad tout \quad t \in [0.T]\ z_1, z_2 \in Z$$

Cependant,par(2.12),(2.13), $\tilde{u} \in C^1(0.T, H_1)$, $\tilde{\sigma} \in C^1(0,T,\mathcal{H}_1)$ on trouve que z_0 appartient à Z, par le lemme2.2 et le théorème classique de Cauchy Lipschitz on trouve que (2.37),(2.38) a une unique solution z$\in C^1(0,T,Z)$ et,en utlisant (2.16),(2.23) on termine la démonstration du théorème2.1.

Passons maintenant au cas où κ est une variable interne d'état.

2.2. Le cas des matériaux viscoplastiques à variable interne d'état.

Rappelons le problème 1.2 énoncé dans la première partie:

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega\times[0,T] \to IR^N$ et le champ des contraintes $\sigma :\ \Omega \times [0,T] \to S_N$ et le champ de variable interne d'état $\chi : \Omega \times [0,T] \to IR^M\ M \in IN$ qui satisfont à :

$$(\mathbf{1.2}) \qquad Div\sigma + f = 0 \qquad dans \qquad \Omega \times]0.T[$$

$$(\mathbf{1.12}) \qquad \begin{cases} \dot{\sigma} = \mathcal{E}(\dot{\varepsilon}) + G(\sigma, \varepsilon, \kappa, \theta) \\ \dot{\kappa} = \varphi(\sigma, \varepsilon, \kappa, \theta) \end{cases}$$

$$(\mathbf{1.13}) \qquad u = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times]0.T[$$

$$(\mathbf{1.14}) \qquad \sigma.\nu = h \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times]0.T[$$

$$(\mathbf{1.15}) \qquad u(0) = u_0\ ;\ \sigma(0) = \sigma_0\ \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{0}) = \kappa_0\ \ dans \quad \Omega$$

Des résultats d'existence et unicité pour le problème 1.2 on éte obtenu par S.Djabi dans le cas où G et φ dépendent que de $\varepsilon(\dot{u}), \sigma, \kappa$.

L'originalité des travaux sur le problème1.2 tient à la considération du cas où φ et G dépendent aussi d'un paramètre θ ; c'est à dire on considère une loi de comportement de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \mathcal{E}\left(\dot{\varepsilon}\right) + G\left(\sigma, \varepsilon, \kappa, \theta\right) \\ \dot{\kappa} = \varphi\left(\sigma, \varepsilon, \kappa, \theta\right) \end{cases}$$

à la place de :

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \mathcal{E}\left(\dot{\varepsilon}\right) + G\left(\sigma, \varepsilon, \kappa\right) \\ \dot{\kappa} = \varphi\left(\sigma, \varepsilon, \kappa\right) \end{cases}$$

et on a obtenu un résultat d'éxistence et unicité de la solution en utilisant la même méthode de monotonie suivie d'une technique de cauchy lipschitz :

Existence et unicité de la solution.

Ce résultat a été obtenu en collaboration avec T.Serrar et S.Djabi.

Les hypothèses du travail sont :

$$(2.39) \begin{cases} \mathcal{E} : \Omega \times S_N \to S_N \text{ et} \\ \text{(a) il existe } m > 0 \text{ tel que } < \mathcal{E}(\varepsilon_1) - \mathcal{E}(\varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2 >\geq \\ \qquad \geq m|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \text{ pour tout } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N, p.p.dans\ \Omega, \\ \text{(b) il existe } L' > 0 \text{ tel que } |\mathcal{E}(\varepsilon_1) - \mathcal{E}(\varepsilon_2)| \leq L'|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \text{porr tout } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N, p.p. \text{ dans}\, \Omega, \\ \text{(c) } x \to \mathcal{E}(x, \varepsilon) \text{ est une fonction mesurable de lesbesgue} \\ \text{dans}\, \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathrm{S}_N\ , \\ \text{(d) } x \to \mathcal{E}(x, 0) \in \mathcal{H} \end{cases}$$

$$
(2.40)\begin{cases}
G:\Omega\times S_N\times S_N\times\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^P\to S_N\,\text{et}\\
\text{a)}\,il\ existe L>0\text{tel que}\\
\qquad |G(x,\sigma_{1,}\varepsilon_{1,}\kappa_1,\theta_1)-G(x,\sigma_{2,}\varepsilon_{2,}\kappa_2,\theta_2)|\le\\
\quad\ \le\ L\left(|\sigma_1-\sigma_2|+|\varepsilon_1-\varepsilon_2|+|\kappa_1-\kappa_2|+|\theta_1-\theta_2|\right)\\
\qquad \text{pour tout }\sigma_1,\sigma_2,\varepsilon_{1,}\varepsilon_2\in S_N,\kappa_1,\kappa_2\in\mathbb{R}^M,\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}^P,p.p.\text{in}\,\Omega,\\
\text{(b)}\,x{\to}G(x,\sigma,\varepsilon,\kappa,\theta)\ \text{ fonction mesurable pour la mesure de lebesgue}\\
\text{dans}\,\Omega,\ \text{pour tout}\,\sigma,\varepsilon\in S_N,\kappa\in\mathbb{R}^M,\theta\in\mathbb{R}^P,\\
\text{(c)}\,x\to G(x,0,0,0,0)\in\mathcal{H}.
\end{cases}
$$

$$
(2.41)\begin{cases}
\varphi:\Omega\times S_N\times S_N\times\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^P\to\mathbb{R}^M\text{et}\\
\text{(a)il existe }L'>0\text{ tel que}\\
\qquad |\varphi(x,\sigma_{1,}\varepsilon_{1,}\kappa_1,\theta_1)-\varphi(x,\sigma_{2,}\varepsilon_{2,}\kappa_2,\theta_2)|\le\\
\quad\ \le\ L'\left(|\sigma_1-\sigma_2|+|\varepsilon_1-\varepsilon_2|+|\kappa_1-\kappa_2|+|\theta_1-\theta_2|\right)\\
\text{pour tout }\sigma_1,\sigma_2,\varepsilon_{1,}\varepsilon_2\in S_N,\kappa_1,\kappa_2\in\mathbb{R}^M,\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}^P,p.p.\text{dans}\,\Omega,\\
\text{(b)}\,x{\to}\varphi(x,\sigma,\varepsilon,\kappa,\theta)\,\text{est une fonction mesurable pour la mesure de lebesgue dans}\\
\Omega,\ \text{pour tout}\,\sigma,\varepsilon\in S_N,\kappa\in\mathbb{R}^M,\theta\in\mathbb{R}^P,\\
\text{(c)}\,x\to\varphi(x,0,0,0,0)\in Y.
\end{cases}
$$

(2.42) $\qquad f\ \in C^1(0,T,H)\,,\qquad g\in(0,T,H_\Gamma)\,,\qquad h\in C^1(0,T,E')$

(2.43) $\qquad \mathcal{K}_0\in Y$

où $Y=L^2(\Omega)^M$

(2.44) $\quad u_0\in H_1,\quad \sigma_0\in\mathcal{H}_1$

(2.45) $Div\ \sigma_0+f(0)=0$ dans Ω, $u_0=g(0)$ sur Γ_1, $\sigma_0\nu=h(0)$ sur Γ_2.

(2.46) $\qquad \theta\in C^0\left(0,T,L^2(\Omega)^P\right).$

L'existence et l'unicité de la solution et donnée par le résultat suivant :

Théorème 2.2. Sous les hypothèses (2.39)-(2.46) le problème1.2 admet une solution unique $u \in C^1(0, T, H_1)$, $\sigma \in C^1(0, T, \mathcal{H}_1)$, $\kappa \in C^1(0, T, Y)$.

Démonstration. Pour la démonstration du théorème 2.1, on utilise la même technique que dans la preuve du théorème 2.2.

On commence par l'homogénisation des conditions aux limites; l'utilisation des applications traces nous donne l'existence et l' unicité des fonctions $\tilde{u} \in C^1(0.T, H_1), \tilde{\sigma} \in C^1(0, T, \mathcal{H}_1)$, solution du problème :

(2.47) $$Div\ \tilde{\sigma} + f = 0 \quad dans \quad \Omega \times (0, T)$$

(2.48) $$\tilde{u} = g \quad sur \quad \Gamma_1 \times (0, T)$$

(2.49) $$\tilde{\sigma}\nu = h \quad sur\ \Gamma_2 \times (0, T)$$

(l' existence de ce couple provient de (2.42) et des propriétés des applications traces).

Considérons maintenant les fonctions définies par :

(2.50) $$\bar{u} = u - \tilde{u}, \qquad \bar{\sigma} = \sigma - \tilde{\sigma},$$

(2.51) $$\bar{u}_0 = u_0 - \tilde{u}_0, \qquad \bar{\sigma}_0 = \sigma_0 - \tilde{\sigma}_0,$$

Il est facile de voir que le triplet $(u, \sigma, \kappa) \in C^1\left(0, T, H_1 \times \mathcal{H}_1 \times L^2(\Omega)^M\right)$ est une solution du problème 1.2 si et seulement si :

(2.52) $$(\bar{u}, \bar{\sigma}, \kappa) \in C^1\left(0, T, V \times \mathcal{V} \times L^2(\Omega)^M\right).$$

(2.53) $$\dot{\bar{\sigma}} = \mathcal{E}(\varepsilon(\dot{\bar{u}}) + \varepsilon(\dot{\tilde{u}})) + G(\bar{\sigma} + \tilde{\sigma}, \varepsilon(\bar{u}) + \varepsilon(\tilde{u}), \kappa), \theta) - \dot{\tilde{\sigma}} \text{ dans } \Omega \times (0, T)$$

(2.54) $$\bar{u}(0) = \bar{u}_0, \qquad \bar{\sigma}(0) = \bar{\sigma}_0 \quad dans \quad \Omega$$

(2.55) $$\dot{\kappa} = \varphi(\bar{\sigma} + \tilde{\sigma}, \varepsilon(\bar{u}) + \varepsilon(\tilde{u}), \kappa, \theta) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T)$$

(2.56) $$\kappa(0) = \kappa_0 \text{ dans } \Omega$$

Pour résoudre le problème (2.52)-(2.56), on considère les espaces produit de Hilbert

$X = \varepsilon(V) \times \left\{0_{L^2(\Omega)}\right\}, \quad Z = \mathcal{V} \times L^2(\Omega)^P,\ H = \mathcal{H} \times L^2(\Omega)^M, Z' = X \times Z$

et les opérateurs $S, G, \mathcal{F}$ définis par :

$$S : L^2(\Omega)^P \times \varepsilon(V) \times \mathcal{V} \times \mathcal{H} \times L^2(\Omega)^M \to \varepsilon(V) \times \left\{\circ_{L^2(\Omega)^M}\right\},$$
$$S = P \circ \mathcal{F},$$

Où P est l'application projecteur dans $\varepsilon(V) \times \left\{\circ_{L^2(\Omega)^M}\right\}$ et

(2.57) $\quad \mathcal{F}(\theta, x', y', z') = [F(\theta, x, y, z, r), \tilde{\varphi}(\theta, x, y, r)]$pour tout $x' = (x, 0) \in X,$
$y' = (y, r) \in Z, \quad z' = (z, \mu) \in \mathcal{H} \times L^2(\Omega)^M, \theta \in L^2(\Omega)^P,$

où

(2.58)$F(\theta, x, y, z, r) = \mathcal{E}(z + \varepsilon(\tilde{u}(t)) + G(y + \tilde{\sigma}(t), x + \varepsilon(\tilde{u}(t)), r(t), \theta(t)) - \dot{\tilde{\sigma}}(t)$

(2.59) $\tilde{\varphi}(\theta, x, y, r) = \varphi(y + \tilde{\sigma}(t), x + \varepsilon(\tilde{u}(t)), r(t), \theta(t))$

on a le résultat suivant :

Lemme 2.3. Soit $\theta \in L^2(\Omega)^P$, $x' \in X$ et $y' \in Z$.Alors il existe un élément unique $z' = (q', r') \in Z'$ tel que:

(2.60) $\quad \tau' = \mathcal{F}(\theta, x', y', z')$

Démonstration du lemme 2.3 .

l'unicité est une conséquence de (2.42); en effet si

$z'_1 = (q'_1, \tau'_1), \quad z'_2 = (q'_2, \tau'_2) \in Z'$ sont tels que :

$\tau'_1 = \mathcal{F}(\theta, x', y', z'_1) = [F(\theta, x, y, z_1, r), \tilde{\varphi}(\theta, x, y, r)]$

$\tau'_2 = \mathcal{F}(\theta, x', y', z'_2) = [F(\theta, x, y, z_2, r), \tilde{\varphi}(\theta, x, y, r)],$

où

$F(\theta, x, y, z_i, r) = \mathcal{E}(z_i + \varepsilon(\tilde{u}(t))) + G(y + \tilde{\sigma}(t), x + \varepsilon(\tilde{u}(t)), r(t), \theta(t)) - \dot{\tilde{\sigma}}(t)$;i =1,2.

Alors en utilisant (2.42.a), on a :

$\langle \tau_1' - \tau_2',\ z_1 - z_2 \rangle_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M} =$

$\langle \mathcal{E}(z_1 + \varepsilon(\tilde{u}(t))) - \mathcal{E}(z_2 + \varepsilon(\tilde{u}(t))), z_1 - z_2 \rangle_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M} \geq m \left| z_1 - z_2 \right|^2_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M}$.

En utilisant maintenant l'orthogonalité dans $\mathcal{H} \times L^2(\Omega)^M$ de $(\tau_1' - \tau_2') \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)^M$ et $(z_1 - z_2) \in \varepsilon(V) \times L^2(\Omega)^M$,on déduit que $z_1 = z_2$, ce qui implique $\tau_1' = \tau_2'$.

Pour l'existence: en utilisant les hypothèses sur $\mathcal{E}$,G, φ et les propriétes des projecteurs , on peut montrer pour t, x', y' fixés les inégalités suivantes :

$$(2.61)\begin{cases} \langle S(\theta, x', y', z_1') - S(\theta, x', y', z_2'), z_1' - z_2' \rangle_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M} \geq \\ \geq \langle \mathcal{F}(\theta, x', y', z_1') - \mathcal{F}(\theta, x', y', z_2'), z_1' - z_2' \rangle_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M} \geq \\ \geq m \left| z_1' - z_2' \right|^2_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M}. \end{cases}$$

De plus,de (2.39),(2.40),(2.41) et les propriétes des projecteurs,on obtient :

$$(2.62)\begin{cases} \langle S(\theta, x', y', z_1') - S(\theta, x', y', z_2'), z_1' - z_2' \rangle_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M} \leq \\ \leq \left| \mathcal{F}(\theta, x', y', z_1') - \mathcal{F}(\theta, x', y', z_2') \right|_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M} \leq \\ \leq L' \left| q_1 - q_2 \right|^2_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M}. \end{cases}$$

Ainsi $S(\theta, x', y', .) : \varepsilon(V) \times \left\{ 0_{L^2(\Omega)^M} \right\} \rightarrow \varepsilon(V) \times \left\{ 0_{L^2(\Omega)^M} \right\}$ est un opérateur de lipshitz fortement monotone. En utilisant maintenant le théorème de la surjectivité de Browder, on conclut qu' il existe $q' \in \varepsilon(V) \times \{0_{L^2(\Omega)^M}\}$ $S(\theta, x', y', q') = 0_{\varepsilon(V)\times\{0_{L^2(\Omega)^M}\}}$.

Il resulte que l' élément $\mathcal{F}(\theta, x', y', q')$ appartient à $\mathcal{V} \times L^2(\Omega)^M$ et on finit la démonstration en utilisant $z' = (q', \tau')$ où

$$\tau' = \mathcal{F}(\theta, x', y', q') = [F(\theta, x, y, z, r), \tilde{\varphi}(\theta, x, y, r)].$$

On considère maintenant l'opérateur $A : L^2(\Omega)^P \times Z' \to Z'$ défini par :

$$(2.63)\begin{cases} A(\theta,\omega') = z' \\ \omega' = (x',y'), z' = (q',\tau') \\ \tau' = \mathcal{F}(\theta,x',y',q'). \end{cases}$$

On a :

Lemme2.4. Pour tout $\theta \in L^2(\Omega)^P$et $\omega'_1, \omega'_2 \in Z'$, l'opérateur $A : L^2(\Omega)^P \times Z' \to Z'$est continu et il existe $C > 0$ tel que:

$$(2.64)\quad |A(\theta,\omega'_1) - A(\theta,\omega'_2)|_{Z'} \leq C|\omega'_1 - \omega'_2|_{Z'} \quad \text{pour tout } \theta \in L^2(\Omega)^P \ ,\ \omega'_1,\ \omega'_2 \in Z' \ .$$

Démonstration du lemme2.4. Soit $\theta_i \in L^2(\Omega)^P$, $\omega'_i = (x'_i, y'_i) \in Z'$ et $z'_i = (q'_i, \tau'_i) = A(\theta_i, \omega'_i)$, $i = 1, 2$. Alors (2.57) implique:

$$(2.65)\qquad S(\theta_i, x'_i, y'_i, q'_i) = 0_{\varepsilon(V)} \times \{0_{L^2(\Omega)^M}\}\ ,\ i = 1, 2.$$

En utilisant les hypothèses sur $\mathcal{E}$, F, φ et les propriétés des projecteurs, on trouve:

$$m|q'_1 - q'_2|^2_{\mathcal{H}} \leq < S(\theta_1, x_1, y_1, q'_1) - S(\theta_1, x_1, y_1, q'_2), \varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2) >_{\mathcal{H}} =$$

$$= < S(\theta_2, x'_2, y'_2, q'_2) - S(\theta_1, x'_1, y'_1, q'_1), q'_1 - q'_2 >^2_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M} \leq$$

$$\leq |\mathcal{F}(\theta_2, x'_2, y'_2, q'_2) - \mathcal{F}(\theta_1, x'_1, y'_1, q'_1)|_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^{M2}} \times |q'_1 - q'_2|^2_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M}$$

ce qui implique:

$$(2.66)\ |q'_1 - q'_2|_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M} \leq \frac{1}{m} \times |\mathcal{F}(\theta_1, x'_1, y'_1, q'_2) - \mathcal{F}(\theta_2, x'_2, y'_2, q'_2)|_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M}\ .$$

En utilisant maintenant (2.57),(2.58),(2.59),(2.60) on trouve :

$$(2.67)\ |\tau'_1 - \tau'_2|_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M} = |\mathcal{F}(\theta_1, x'_1, y'_1, q'_1) - \mathcal{F}(\theta_2, x'_2, y'_2, q'_2)|_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M}$$

Par conséquent :

$$(2.68) \begin{cases} \ \ |\tau'_1 - \tau'_2|_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M} \leq L'|q'_1 - q'_2|_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M} + \\ |\mathcal{F}(\rightarrow, x'_1, y'_1, q'_1) - \mathcal{F}(\theta_2, x'_2, y'_2, q'_2)|_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M} \end{cases}$$

Il résulte :

$$(2.69) \begin{cases} |\tau'_1 - \tau'_2|_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M} \leq \\ \qquad \leq (\frac{L'}{m} + 1)|\mathcal{F}(\theta_1, x'_1, y'_1, q'_1) - \mathcal{F}(\theta_2, x'_2, y'_2, q'_2)|_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M} \end{cases}$$

En utilisant (2.62), on trouve :

$$|\mathcal{F}(\theta_1, x'_1, y'_1, q'_1) - \mathcal{F}(\theta_2, x'_2, y'_2, q'_2)|_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M} \leq L(|x'_1 - x'_2| + |y'_1 - y'_2|) + \\ + |\mathcal{F}(\theta_1, x'_1, y'_1, q'_1) - \mathcal{F}(\theta_2, x'_2, y'_2, q'_2)|_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M}.$$

En utilisant (2.68), on a :

$$(2.70) \qquad |A(\theta_1, \omega'_1) - A(\theta_2, \omega'_2)|_Z \leq \tfrac{1}{m}|\mathcal{F}(\theta_1, x'_1, y'_1, q'_1) - \mathcal{F}(\theta_2, x'_2, y'_2, q'_2)|_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M} + \\ + (\tfrac{L'}{m} + 1)|\mathcal{F}(\theta_1, x'_1, y'_1, q'_1) - \mathcal{F}(\theta_2, x'_2, y'_2, q'_2)|_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M}$$

Du fait que $\theta \rightarrow \mathcal{F}(\theta, x', y', q'); L^2(\Omega)^p \rightarrow X \oplus Y$ est un opérateur continu pour tout $x' \in X,\ \ y' \in Y,\ \ z' \in H$, on obtient :

$|\mathcal{F}(\theta_1, x'_1, y'_1, q'_1) - \mathcal{F}(\theta_2, x'_2, y'_2, q'_2)|_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)^M}. \to 0$quand $\theta_1 \to \theta_2$dans $L^2(\Omega)^P$, $x'_1 \to x'_2$ dans X,

$y'_1 \to y'_2$ dans Z. Ainsi on conclut que A est un opérateur continu .

En prenant $\theta_1 = \theta_2$ dans (2.69), il résulte:

$$(2.71) \qquad \begin{cases} |A(\theta_1, \omega'_1) - A(\theta_2, \omega'_2)|_Z \leq C|\omega'_1 - \omega'_2| \, pour\ tout\ \theta_1, \theta_2 \in L^2(\Omega)^P, \\ \omega'_1, \omega'_2 \in Z'. \end{cases}$$

Démonstration du théorème 2.2.

En utilisant la définition de l'opérateur A, on trouve que $\bar{u}, \bar{\sigma}, k$ est solution de (2.52)-(2.56) si et

seulement si :

$z = ((\varepsilon(\bar{u}), 0), (\bar{\sigma}, k)) \in C^1(0, T, Z')$ et

$$(2.72) \qquad \dot{z}' = (\dot{x}', \dot{y}') = A(\theta, z'(\theta)) \text{ pour tout } \theta_2 \in L^2(\Omega)^P$$

$$(2.73) \qquad z'(0) = z_0 = ((\varepsilon(\bar{u}_0), 0), (\bar{\sigma}_0, k_0)).$$

Pour étudier le problème (2.72)-(2.73), remarquons que par le lemme 2.4, A est un opérateur continu et

$|A(\theta_1, z'_1) - A(\theta_2, z'_2)|_{Z'} \leq C|z'_1 - z'_2|_{Z'}$, pour tout $\theta \in L^2(\Omega)^P$et $z'_1, z'_2 \in Z'$.

Soit maintenat $B : [0.T] \times Z' \to Z'$ et z'_0 défini par :

$$(2.74) \qquad \begin{cases} B(t, z') = A(\theta(t), z') \ \ pour\, tout\ \ t \in [0.T]\, et z' \in Z'. \\ z'_0 = (x'_0, y'_0) \end{cases}$$

$z'(0) = (x'(0), y'(0)) = ((x(0), 0), (y(0), 0))$

$= ((\varepsilon(\bar{u}_0), 0), (\bar{\sigma}_0, k_0)) \in X \times Y = Z'.$

En utilisant la définition de A, on trouve que :

$x' \in C^1(0, T, X)$ et $y' \in C^1(0, T, Y)$ est solution de (2.52)-(2.56) si et seulement si :

$z' = (x', y') \in C^1(0, T, X \times Y)$est solution du problème :

$$\dot{z}'(t) = B(t, z'(t)) \text{ pour tout } t \in [0, T] \tag{2.75}$$

$$z'(0) = z_0^{'} \tag{2.76}$$

où

$$B(t, z^{'}(t)) = A(\theta(t), z^{'}(t)\ ),\ z^{'} = (x^{'}, y^{'})\,.$$

Pour étudier le problème (2.75)-(2.76), remarquons que par le lemme 2.4 et $\theta \in C^1(0, T, L^2(\Omega)^P)$, on trouve que B est un opérateur continu et :

$|B(t, z_1') - B(t, z_2')|_{Z'} \leq C|z_1' - z_2'|_{Z'}$ pour tout $t \in [0.T]$ et $z_1', z_2' \in Z'$.

De plus par (2.49)- (2.50), $\tilde{u} \in C^1(0, T, H_1)$ et $\tilde{\sigma} \in C^1(0, T, \mathcal{H}_1)$;on trouve que $z_0^{'}$ appartient a Z' et par le lemme 2.3 et le classique théorème de Cauchy lipshitz on trouve que (2.75)-(2.76) a une unique solution
$\acute{z} \in C^1(0.T.\acute{Z})$ ce qui termine la démonstration du théorème 2.2

Commentaires du chapitreII

Nous avons présenté dans le chapitreII, une méthode de monotonie en l'appliquant aux milieux viscoplastiques ayant des lois de comportement de la forme

$$\textbf{(1.9)} \qquad \dot{\sigma} = \xi\left(\dot{\varepsilon}, \theta, \kappa\right) + G\left(\sigma, \varepsilon, \theta; \kappa\right)$$

et des lois de comportement de la forme:

$$(\mathbf{1.10})\quad \begin{cases} \dot{\sigma} = \xi\left(\dot{\varepsilon}\right) + G\left(\sigma, \varepsilon(u), \kappa, \theta\right) \\ \dot{\kappa} = \varphi\left(\sigma, \varepsilon(u), \kappa, \theta\right) \end{cases}$$

pour les quels la vitesse de déformation plastique G dépend aussi de la température θ; Ce sont les milieux thermo élasto-viscoplastiques, Les problèmes gouvernés par ces lois sont des problèmes thermomécaniques non couples. Dans ces lois de comportement, θ, joue le rôle de paramètre. Pour le déterminer, on peut considèrer le problème purement thermique:

$$\begin{array}{lrcll}
(\mathbf{2.77}) & \dot{\boldsymbol{\theta}} & = & Div\sigma + r & dans \quad \Omega \times [0,T] \\
(\mathbf{2.78}) & q & = & K\nabla\theta & dans \quad \Omega \times [0,T] \\
(\mathbf{2.79}) & \theta & = & \theta & sur \quad \Gamma_1 \times [0,T] \\
(\mathbf{2.80}) & q.\nu & = & Q & sur \quad \Gamma_2 \times \ [0,T] \\
(\mathbf{2.81}) & \theta\left(0\right) & = & \theta_0 \quad dans \quad \Omega &
\end{array}$$

Où q:$\Omega \times [0,T] \ \rightarrow \ IR^M$ est le flux de la chaleur, (2.77) représente l'équation de conductivité thermique où r est la densité des sources de radiation thermique, (2.78) est la loi de propagation de chaleur de Fourier où K tenseur symétrique $\nabla\theta$ le gradient de la température; enfin θ et Q sont les données aux limites et θ_0 la donnée initiale

Remarque 2.2.

Dans ce chapitre, on s'est intéressé à la méthode de monotonie pour l'étude des problèmes mécaniques en viscoplasticité avec des conditions aux limites déplacement-traction qui sont rencontrées plus fréquemment dans les applications pratiques.

Le chapitre suivant traite des conditions deux limites de contact sans frottement d'un corps viscoplastiques avec une base rigide.

CHAPITRE 3

Problème de contact unilatéral sans frottement

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un problème de contact sans frottement d'un corps déformable avec une base rigide. Notre objet est l'étude quasistatique de ce preoblème pour les matériaux viscoplastique de la forme (1.5).

On donne la formulation variationnelle (en déplacements), du problème considèré et un résultat d'existence et unicité de la solution faible. L'existence est obtenue en utilisant deux méthodes différentes:une méthode de point fixe et une méthode de Cauchy Lipschitz sinplifieé.

On présente aussi quelques propriétés de la solution du problème viscoplastique à savoir un résultat de convergence uniforme qui montre l'approche de la solution du problème par un problème élastique pour $\mu \to 0$.

3-1 Formulation variationnelle

Résultat D'existence et d'unicité

Dans ctte section, on va formuler le problème quasistatique de contact unilatéral sans frottement d'un corps déformable avec une base rigide pour lequel on établira une formulation variationnelle en déplacement, ainsi q'un résultat d'existence et d'unicité.

Rappelons le problème 3.1 énoncé dans la premiére partie:

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \to IR^N$ et le champ des contrainte $\sigma : \Omega \times [0, T] \to S_N$ tels que:

$(\mathbf{3.1}) \quad Div\sigma + f = 0 \quad dans \quad \Omega\times]0, T[$

$(\mathbf{3.2}) \quad \dot{\sigma} = \mathcal{E}\left(\varepsilon(\dot{u})\right) + G\left(\sigma, \varepsilon\right) \quad dans \quad \Omega\times]0, T[$

$(\mathbf{3.3}) \quad u = 0 \quad sur \quad \Gamma_1\times]0, T[$

$(\mathbf{3.4}) \quad \sigma.\nu = g \quad sur \quad \Gamma_2 \times]0.T[$

$(\mathbf{3.5}) \quad u_\nu \leq 0 \ \sigma_\nu \leq 0 \quad \sigma_\tau = 0 \ .\sigma_\nu u_\nu = 0 \ \ sur \quad \Gamma_3 \times]0.T[$

$(\mathbf{3.6}) \quad u\left(0\right) = u_0 \ ; \ \sigma\left(0\right) = \sigma_0 \ \ dans \quad \Omega$

L'équation (3.1) repésente l'équation d'équilibre où f la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable, (3.2) représente la loi de comportement viscoplastique introduite dans le premier chapitre.(3.3) et (3.4) sont les conditions aux limites de déplacement -traction. les conditions aux limites (3.5) représente les conditions de cantact sans frotement de signorini sur la patie Γ_3 de la frontière.

.Finalement (3.6) représentent les conditionns initiales

Dans l'étude du problème (3.1)-(3.6),on fait deux types d' hypothèses:

-Hypothèse sur les fonctions constitutives:

$$(\mathbf{3.7})\begin{cases} \mathcal{E} : \Omega \times S_N \to S_N \text{ tels que :} \\ a)\ \ \mathcal{E}.\sigma.\tau = \xi.\tau.\sigma\ \forall \tau, \sigma \in S_N\ ; \\ b)\ \ \exists\, a > 0/\ \ \xi\sigma.\sigma \geq a\left|\sigma\right|^2\ \ \forall \sigma \in S_N\ ; \end{cases}$$

$$(\mathbf{3.8})\ \begin{cases} G : \Omega \times S_N \to S_N \ \text{ tels que} \\ a)\ \ \exists\, L > 0\ :\left|G(\sigma_1, \varepsilon_1) - G(\sigma_2 - \varepsilon_{2)}\right| \leq L\left|(\sigma_1 - \sigma_2\right| + \left|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right|\ \forall \sigma_i, \varepsilon_i \in S_N \\ b)\ \ G(0.0) \in \mathcal{H} \end{cases}$$

-Hypothèses sur les données:

$(\mathbf{3.9})\quad f \in W^{1,\infty}(0.T, H)$

$(\mathbf{3.10})\quad g \in W^{1,\infty}(0.T, L^2(\Gamma_2)^N)$

Ces hypothèses, on a le résultat suivant:

Lemme 3.1. Si $(u,\ \sigma)$ est solution régulière du problème (3.1)-(3.6), alors

$(\mathbf{3.11})\ \mathbf{u(t)} \in \mathbf{U}_{ad}\ , \langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t))\rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle F(t); v - u(t)\rangle_{\mathcal{H}}$

$(\mathbf{3.12})\quad \dot{\sigma}(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}(t))\ + G\left(\sigma(t), \varepsilon(u(t))\right)\ \ dans\ \Omega \times]0, T[$

$(\mathbf{3.13})\qquad \bar{u}(0) = \bar{u}_0\ \ , \bar{\sigma}(0) = \bar{\sigma}_0\ \ dans\ \Omega$

Où

$\langle F(t); v-u(t)\rangle_{\mathcal{H}} = \langle f(t),v\rangle_H + \langle g(t),\nu v\rangle_{L^2}(\Omega)^M$

U$_{ad}$= $\{v \in H_1 / v = 0 \ sur \ \Gamma_1 \ , \ v_\nu \leq 0 \ Sur \ \Gamma_3\}$

Démonstration du lemme 3.1 (voir par exemple ""Rochdi et Sofonea [6]

On remarque que la réciproque du lemme 3.1 est aussi satisfaite.En effet, si $(u,\ \sigma)$ est solution régulie de (3.11)-(3.13), alors on peut prouver que $(u,\ \sigma)$ est solution de (3.1)-(3.6). Pour cette raison, on peut considérer que (3.11)-(3.13) est la formulation variationnelle du problème mécanique (3.1)-(3.6)

Remarque 3.1

Compte tenu du lemme 3.1; nous sommes conduits à étudier l'inéquation variationnelle(3.11) que nous considérons comme la formulation variationnelle du problème aux limites (3.1)-(3.6). Un résultat d'éxistence pour cette formulation variationnelle en déplacements est présenté dans la section suivante:

3-2 Résultat d'existence et d'unicité

Sous les hypothèses (3.7)-(3.10) et l'hypothèse supplémentaire

(3.14) $u_0 \in U_{ad}$ $,\sigma_0 \in$ $\Sigma_{ad}(0) = \{\tau \in \mathcal{H} \ / \ <\sigma_0, \varepsilon(u_0)>_{\mathcal{H}} = <F(0), \varepsilon(u_0)>_H\}$

Où

$\Sigma_{ad}(t) = \{\tau \in \mathcal{H} \ / \ <\tau, \varepsilon(v)>_{\mathcal{H}} \geq <l(t), v>_V \quad \forall v \in U_{ad}(t) \ t \in [0,T]\}$,

On a le résultat d'existence et unicité suivant:

Théorème 3.1

Sous les hypothèses (3.7)-(3.10),(3.14), le problème variationnel (3.11)-(3.13) admet une solution unique $(u,\ \sigma)$ ayant la régularité $u \in W^{1,\infty}(0,T,H_1), \sigma \in W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H}_1)$.

Ce théorème a été obtenu par M.Rochdi et M.Sofonea(1997) en utilisant la théorie des inéquations variationnelles suivie d'une technique de point fixe.

L'idée de la démonstration se résume en trois étapes :

a) étape 1

L'utilisation des arguments standards de la théorie des inéquations variationnelles donne:

$\forall \eta \in W^{\infty}(0,T,H_1)$, il existe une solution unique $u_\eta \in W^{1,\infty}(0,T,H_1), \sigma_\eta W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H}_1)$ du problème variationnel suivant:

(3.15) $u_\eta \in U_{ad}(t), \sigma_\eta \in \Sigma_{ad}(t), \langle\ \sigma_\eta(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\eta)\rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle F(t); v - u_\eta(t)\rangle_{\mathcal{H}}$

(3.16) $\sigma_\eta(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)) + z_\eta(t), \quad \forall t \in [0,T]$

Où

(3.17) $z_\eta(t) = \int\limits_0^t \eta(s)ds + \sigma_0 - \mathcal{E}(\varepsilon(u_0) \qquad \forall t \in [0,T]$

b) étape2

On définit l'opérateur $\Lambda : L^{\infty}(0,T,\mathcal{H}) \to L^{\infty}(0,T,\mathcal{H})$

(3.18) $\Lambda(t,\eta) = G(\sigma_\eta(t), \varepsilon(u_\eta(t))), \forall t \in [0,T]\,.,\eta \in L^{\infty}(0,T,\mathcal{H})$ *où*

pour tout $\eta \in L^{\infty}(0,T,\mathcal{H}), (u_\eta, \sigma_\eta)$ représente la solution du problème (3.15)-(3.17)

On peut prouver que pour p assez grand, Λ^p est une contraction dans $L^{\infty}(0,T,\mathcal{H})$ L'application du théorème du point fixe donne l'existence d'un unique élement $\overset{*}{\eta} \in L^{\infty}(0,T,\mathcal{H})$. Tel que $\Lambda^p\ \overset{*}{\eta} = \overset{*}{\eta}$

Moyennant les égalités $\Lambda^p\ (\Lambda\ \overset{*}{\eta}) = \Lambda^{p+1}\ \overset{*}{\eta} = \Lambda(\ \Lambda^p\ \overset{*}{\eta}) = \Lambda\ \overset{*}{\eta}$ ainsi que l'unicité du point fixe de Λ^p, il vient que $\overset{*}{\eta}$ est l'unique point fixe de l'opérateur Λ.

c) étape 3

On peut prouver que le couple $(u_{\overset{*}{\eta}}, \sigma_{\overset{*}{\eta}})$ est l'unique solution du problème (3.11)-(3.13).En fait;

$$\begin{cases} \sigma_{\underset{\eta}{*}}(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u_{\underset{\eta}{*}}(t)) + z_{\underset{\eta}{*}}(t) \\ \dot{\sigma}_{\underset{\eta}{*}}(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}_{\underset{\eta}{*}}(t)) + \overset{*}{\eta}(t) \\ \dot{\sigma}_{\underset{\eta}{*}}(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}_{\underset{\eta}{*}}(t)) + \Lambda\overset{*}{\eta} \\ \dot{\sigma}_{\underset{\eta}{*}}(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}_{\underset{\eta}{*}}(t)) + G(\sigma_{\underset{\eta}{*}}(t), \varepsilon(u_{\underset{\eta}{*}}(t))) \end{cases}$$

et par conséquent $(u_{\underset{\eta}{*}}, \sigma_{\underset{\eta}{*}})$ est l'unique solution du problème (3.11) (3.13)

Dans la suite, on donne une autre démonstration du théorème 3.1

On a repris le problème (3.11)-(3.13) et j'ai redémontré le théorème 3.1 en utilisant une autre technique basée sur la théorie des inéquations variationnelles suivie d'une technique de Cauchy Lipschiz simplifiée. Elle se fait aussi en trois étapes et se résume en ce qui suit:

étape 1:

l'utilisation des arguments de la théorie des s variationnelles donne l'existence et l'unicité de $u_\eta \in W^{1,\infty}(0,T,H_1)$, $\sigma_\eta \in W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H}_1)$ du problème variationnel suivant:

(3.15) $u_\eta \in U_{ad}(t), \sigma_\eta \in \Sigma_{ad}(t, u_\eta(t))), \langle\ \sigma_\eta(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\eta)\rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle F(t); v - u_\eta(t)\rangle_{\mathcal{H}}$

(3.19) $\sigma_\eta(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)) + \eta(t);\ \forall t \in [0,T]$ *Où*

(3.20) $\quad \eta \in L^\infty(0,T,\mathcal{H})$

étape 2:

On définit l'opérateur $\quad F : L^\infty(0,T,\mathcal{H}) \to L^\infty(0,T,\mathcal{H})$

(3.21) $F(t,\eta) = G(\sigma_\eta(t), \varepsilon(u_\eta(t))), \forall t \in [0,T] ., \eta \in L^\infty(0,T,\mathcal{H})$ où

pour Tout $, \eta \in L^\infty(0,T,\mathcal{H})$, (u_η, σ_η) reprsente la solution du problème (3.15),(3.19)-(3.20)

On peut prouver que F est une application continue et de lipschitz par rapport au deuxième argument.L'application du théorème de Cauchy lipschitz donne l'existence d'un élément $\dot{\eta} \in L^\infty(0,T,\mathcal{H})$ solution du problème de Cauchy suivant:

$$\dot{\eta}(t) = F(t,\eta) \quad \forall t \in [0,T\ ]$$

$$\eta(0) = \sigma_0 \; - \mathcal{E}\varepsilon(u_0)$$

étape 3:

On peut prouver que le couple (u_η, σ_η) est l'unique solution du problème variationnel (3.15),(3.19)-(3.20).En fait,

$$\begin{cases} \sigma_{\overset{*}{\eta}}(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u_{\overset{*}{\eta}}(t)) + \overset{*}{\eta}(t) \\ \text{En dérivant parapport à t on obtient} \\ \dot{\sigma}_{\overset{*}{\eta}}(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}_{\overset{*}{\eta}}(t)) + \dot{\overset{*}{\eta}}(t) \\ \dot{\sigma}_{\overset{*}{\eta}}(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}_{\overset{*}{\eta}}(t)) + F(t, \overset{*}{\eta}(t)) \\ \dot{\sigma}_{\overset{*}{\eta}}(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}_{\overset{*}{\eta}}(t)) + G(\sigma_{\overset{*}{\eta}}(t), \varepsilon(u_{\overset{*}{\eta}}(t))) \end{cases}$$

et par conséquent $(u_{\overset{*}{\eta}}, \sigma_{\overset{*}{\eta}})$ est l'unique solution du problème (3.11) (3.13)

Remarque 3.2

Le théorème précédent représente un résultat d'existence et unicité pour la formulation variationnelle (3.11)-(3.13) du problème mécanique (3.1)-(3.6).

On peut donner une autre formulation variationnelle(en contraintes) dont l'inconnue principale est la containte σ.Le résultat conduisant à cette formulation variationnelle est le suivant:

Lemme 3.2. Si $(u,\ \sigma)$ est solution régulière du problème (3.1)-(3.6), alors

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{t}) \in \boldsymbol{\Sigma}_{ad}\ , \langle \tau - \sigma(t), \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \ \forall \tau \in \boldsymbol{\Sigma}_{ad}(t)$$

$(\mathbf{3.12})$ $\quad \dot{\sigma}(t) = \xi\varepsilon(\dot{u}(t)) \ + G\left(\sigma(t), \varepsilon(u(t))\right) \quad dans\ \Omega \times]0, T[$

$(\mathbf{3.13})$ $\qquad \bar{u}(0) = \bar{u}_0 \ \ , \bar{\sigma}(0) = \bar{\sigma}_0 \quad dans\ \Omega$

Nous allons maintenant présenter quelques propriétés de la solution du problème viscoplastique.

3-3 Propriétés de la solution

3.3.1 Un résultat de convergence uniforme

Cette section est destinée à l'étude de la dépendence de la solution du problème (3.11)-(3.13) par rapport à une perturbation de la fonction constituvie G de la loi de comportement viscoplastique (1.6). Pour cela, supposons que les conditions(3.7)-(3.10) et (3.14) sont remplies. Pour tout $\mu \ \geq 0$, soit G_μ une perturbation de G satisfaisant à l'hypothèse (3.8) relativement à la constante de Lipschitz L_μ. Dans ces conditions, on considère le problème mécanique P^μ qui n'est autre que le problème (3.1)-(3.6) où on a remplacé la fonction constitutive G par la fonction constitutive G_μ.Sachant que ce problème dépend du paramètre $\mu \ \geq 0$, on notera sa solution (u_μ, σ_μ). On peut donc aisément moyennant le lemme 3.2, donner la formulation variationnelle pour le problème P^μ

Problème P^μ : Trouver le champ des déplacements $u_\mu : \Omega \times]0, T[\ \rightarrow H_1$ et le champ des contraintes $\sigma_\mu : \ \Omega \times]0, T[\ \rightarrow \mathcal{H}_1$ tels que:

(3.22) $\dot{\sigma}_\mu(t) = \mathcal{E}(\varepsilon(\dot{u}_\mu(t))) + G_\mu(\sigma_\mu(t), \varepsilon(u_\mu(t)) \ PP.t \in [0, T]$

$$(3.23) \begin{cases} u_\mu \in U_{ad}, < \sigma_\mu(t), \varepsilon(v) -, \varepsilon(u_\mu(t)) >_{\mathcal{H}} \geq < F(t), v - u_\mu(t) >_v \\ \qquad\qquad\qquad \forall v \in U_{ad}, \ t \in [0, T] \end{cases}$$

(3.24) $u_\mu(0) = u_0, \sigma_\mu(0) = \sigma_0.$

En utilisant le théorème 3.1, on obtient que le problème P^μ admet une solution (u_μ, σ_μ) avec la régularité $u_\mu \in W^{1,\infty}(0, T, H_1), \sigma_\mu \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1)$.

On introduit à présent l'hypothèse suivante:

$$(3.25) \begin{cases} Il \ existe \ une \ fonction \quad \mathcal{G}{:}\mathrm{IR}_+ \rightarrow \mathrm{IR}_+, M > 0 \ tels \ que \\ \quad \text{a-} \ |G_\mu(., \sigma, \varepsilon) - G(., \sigma, \varepsilon)| \leq \mathcal{G}_\mu, \forall \ \sigma, \varepsilon \in S_N \\ \qquad b - \lim\limits_{\mu \rightarrow 0} \mathcal{G}(\mu) = 0 \\ c - \quad G_\mu \leq M \end{cases}$$

On va maintenant établir un résultat donnant le comportement de la solution (u_μ, σ_μ) quand le paramètre $\mu \ \geq 0$ tend vers zéro.

Théorème3.2 Sous l'hypothèse (3.25), la solution (u_μ, σ_μ) du problème P^μ converge uniformément vers la solution (u, σ) du problème variationnel (3.1)-(3.6)

$(u_\mu \to u$ dans $\mathrm{C}(0,T,H_1)$, $\sigma \to \sigma$ dans $\mathrm{C}(0,T,\mathcal{H}_1)$ qund $\mu \to 0$

Démonstration. Soients t$\in [0,T]$ *et* $\mu \geq 0$. Comme résultats du théorème 3.1 il vient que (u,σ) est la solution du problème elliptique (3.15)-(3.17) pour $\eta = \overset{*}{\eta}$ où $\overset{*}{\eta}$est le point fixe de l'opérateur $\Lambda : L^\infty(0,T,\mathcal{H}) \to L^\infty(0,T,\mathcal{H})$ *alors* que (u_μ, σ_μ) est la solution du même problème elliptique (3.15)-(3.17) pour $\eta = \overset{*}{\eta}_\mu$ où $\overset{*}{\eta}_\mu$ est le point fixe de l'opérateur $\Lambda_\mu : L^\infty(0,T,\mathcal{H}) \to L^\infty(0,T,\mathcal{H})$ défini par (3.18)

(3.26) $\Lambda_\mu \eta(t) = G_\mu(\sigma_\eta(t), \varepsilon(u_\eta(t)) \ \forall \eta \in L^\infty(0,T,\mathcal{H})$, t$\in [0,T]$.

En prenant maintenant (3.1è) pour $\left\{\eta = \overset{*}{\eta}_\mu, v = u_{\overset{*}{\eta}}(t)\right\}$ puis pour $\left\{\eta = \overset{*}{\eta}, v = u_{\overset{*}{\eta}_\mu}(t)\right\}$ et en faisant la différence entre les deux expressions obtenues, on obtient compte tenu (3.6)(3.17) et (A2.7)

$|u_\mu(t) - u(t)|_{H_1} + |\sigma_\mu(t) - \sigma(t)|_{\mathcal{H}_1} \leq C \left| z_{\overset{*}{\eta}_\mu}(t) - z_{\overset{*}{\eta}}(t) \right|_{\mathcal{H}}$

En utilisant (3.17) cette inégalité devient

(3.27) $|u_\mu(t) - u(t)|_{H_1} + |\sigma_\mu(t) - \sigma(t)|_{\mathcal{H}_1} \leq C \int\limits_0^t \left| \overset{*}{\eta}_\mu(s) - \overset{*}{\eta}(s) \right|_{\mathcal{H}} ds.$

Sachant d'autre par que $\overset{*}{\eta}_\mu = \Lambda_\mu \overset{*}{\eta}_\mu(t)$ *et* $\overset{*}{\eta} = \Lambda \overset{*}{\eta}$ il result de (3.26)

$\left| \overset{*}{\eta}_\mu(s) - \overset{*}{\eta}(s) \right|_{\mathcal{H}} = |G_\mu(\sigma_\mu(s), \varepsilon(u_\mu(s)) - G(\sigma(s), \varepsilon(u(s))|_{\mathcal{H}}$

L'inégalité triangulaire implique alors

$\left| \overset{*}{\eta}_\mu(s) - \overset{*}{\eta}(s) \right|_{\mathcal{H}} \leq |G_\mu(\sigma(s), \varepsilon(u(s)) - G(\sigma(s), \varepsilon(u(s))|_{\mathcal{H}} + |G_\mu(\sigma_\mu(s), \varepsilon(u_\mu(s)) - G_\mu(\sigma(s), \varepsilon(u(s))|$

Cette inégalité devient alors compte tenu (3.25),(3.8)

(3.28)$\left| \overset{*}{\eta}_\mu(s) - \overset{*}{\eta}(s) \right|_{\mathcal{H}} \leq \mathcal{G}_\mu + M(|u_\mu(s) - u(s)|_{H_1} + |\sigma_\mu(s) - \sigma(s)|_{\mathcal{H}_1})$

On déduit de (3.27),(3.28)

(3.29) $|u_\mu(t) - u(t)|_{H_1} + |\sigma_\mu(t) - \sigma(t)|_{\mathcal{H}_1} \leq C\mathcal{G}(\mu) + M \int\limits_0^t (|u_\mu(s) - u(s)|_{H_1} + |\sigma_\mu(s) - \sigma(s)|_{\mathcal{H}_1}) ds$

le théorème3.2 est maintenant une conséquence de (3.29) et (3.25) et A7-2

Remarque3.3. L'interprétation mécanique du résultat précédent est la suivante:

Sous les hypothèses du théorème 3.1, pour un petit paramètre μ, l'étude du problème de contact sans frottement d'un corps viscoplastique ayant une loi de comportement donnée par

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}(\dot{\varepsilon}) + G_{\mu}(\sigma, \varepsilon)$$

peut être remplacée par l'étude du problème de contact sans frottement d'un corps vicoplastique ayant une loi de comportement donnée par

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}(\dot{\varepsilon}) + G(\sigma, \varepsilon)$$

En particulier, si la fonction F:$S_N \rightarrow S_N$ est de Lipschitz alors l'étude du contact sans frottement d'un corps viscoélastique $\dot{\sigma} = \mathcal{E}(\dot{\varepsilon}) + \mu(\sigma - F(\varepsilon))$ avec une base rigide peut être remplacée l'étude du contact d'un corps élastique $\sigma = \mathcal{E}(\varepsilon)$ avec cette même base, μ pour assez petit.

Remarque 3.4

Dans le chapitre 2, on s'est intéressé à la méthode de monotonie pour l'étude des problèmes mécaniques en viscoplasticité, les questions qu'on pourrait se poser sont les suivantes:

-peut-on appliquer cette méthode dans un cadre plus général? Si oui, à quel types de problèmes les appliquer?

-Le chapitre suivant fournit donc des éléments de réponse à ces deux questions.

CHAPITRE 4

PROBLEMMES D'EVOLUTION.

Dans ce chapitre nous allons appliquer la méthode de monotonie et à deux problèmes d'évolution dans un cadre hibertien général. Aprés avoir donné la formulation du problème d'évolution concernant les conditions aux limites déplacement traction, on donne des résultats d'existence et d'unicité en utilisant une méthode de monotonie.Finalement, pour faire le lien avec le chapitre 2, on donne une application des résultats obtenus à des problèmes mécaniques étudiés dans ces chapitres.

4.1. Problème d'évolution correspondant au problème viscoplastique avec paramètres:

Existence et unicité de la solution.

Dans cette section nous proposons une étude de l'existence et l'unicité de la solution des problèmes d'évolution correspondant au problème 1.1 par une méthode de monotonie .On y donnera les hypothèses sous les quelles sera faite la démonstration

4.1.1-Formulation du problème-Hypothèses

Soient H , Λ et V trois espaces de Hilbert réels, H=X $\oplus$Y une décomposition orthogonale de H et F:$\Lambda \times V \times X \times Y \times H \to H$, un opérateur non linéaires.

Soit T $\rangle$0, on considère alors le problème de Cauchy suivant:

a) Trouver les fonctions x: $[0,T] \to X$et y: $[0,T] \to Y$ telles que:

(4.1) $\dot{y}(t) = F(\lambda(t), \mu(t), x(t), y(t), \dot{x}(t))$ pour tout $t \in [0,T]$

(4.2) $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$

où λ:$[0.T] \to \Lambda, \mu : [0.T] \to V$ étant deux paramètres

Le problème (4.1)-(4.2) représente une version abstaite du problème 1.2 dans le cas f=0, g=0 .

Dans l'étude du problème de Cauchy ci-dessus,on considère les hypothèses suivantes:

Pour le problème (4.1)-(4.2), on considère les hypothèses suivantes :

$$\textbf{(4.3)}\begin{cases} \langle F(\lambda, \mu, x, y, z_1 - F(\lambda, \mu, x, y, z_2, z_1 - z_2\rangle_H \geq \\ \geq m\,|z_1 - z_2|_H^2\,; pour\ tout\ \lambda \in \Lambda, \mu, \in V x \in X, y \in Y, z_1, z_2 \in X \end{cases}$$

(4.4)$|F(\lambda,\mu,x_1,y_1,z_1 - F(\lambda,\mu,x_2,y_2,z_2|_H \leq M(|x_1-x_2|_H + |y_1-y_2|_H + |z_1-z_2|_H)$

pour tout $\lambda \in \Lambda, \mu \in V;\;\; x_i \in X, y_i \in Y, z_i \in H.$

(4.5) $\lambda \to F(\lambda, x; y, z) est$ un opérateur continu, pour tout $x \in X, y \in Y, z \in H$.

(4.6) $\lambda \in C^0(0,T,\Lambda)$

(4.7) $\mu \in C^0(0,T,V)$

(4.8) $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{X}$, $\mathrm{y}_0 \in \mathrm{Y}$.

Sous les hypothèses (4.3)-(4.8), on donne un résultat d'existence et d'unicité

4.1.2- Existence et unicité de la solution

Le résultat est le suivant:

Théorème 4.1. Sous les hypothèses (4.3)-(4.8), le problème (4.1)-(4.2) possède une solution unique ayant la régularité $x \in C^1(0,T,X)$, $y \in C^1(0,T,Y)$.

Pour la démonstration du théorème 4.1,on utilise la monotonie forte de F donnée par (4.3) suivie d'arguments de type Cauchy -Lypschitz.

Démonstration du théorème 4.1.

*Afin de prouver le **théorème 4.1** ,on considère l'espace de Hilbert produit Z=$X \times \mathcal{Y}$ (qui est en fait isomorphe à $\mathcal{H}$ =$X \oplus \mathcal{Y}$)

On a le lemme suivant:

Lemme 4.1. Soit $x \in X, y \in Y$ *et* $\lambda \in \Lambda, \mu \in V$. Alors il existe un unique élément $z = (u, v) \in Z$ tel que: $v = F(\lambda, \mu, x, y, u)$

Démonstration .

L'unicité est une conséquence de (4.3).En effet :

si $z_1 = (u_1, v_1), z_2 = (u_2, v_2) \in Z$ *sont tels que*

$v_1 = F(\lambda, \mu, x, y, u_1)$

$v_2 = F(\lambda, \mu, x, y, u_2)$

En utilisant (4.3), nous avons:

$\langle v_1 - v_2, u_1 - u_2 \rangle_{\mathcal{H}} \geq m \, |u_1 - u_2|_{\mathcal{H}}^2$

En utilisant l'orthogonalité dans $\mathcal{H}$, on deduit que

$u_1 = u_2$, ce qui implique $v_1 = v_2$.

Pour l'existence, on considère l'application projecteur Q:$\mathcal{H} \to X$.

En utilisant (4.3),(4.8) et les propriétés des projecteurs, on trouve que l'opérateur $QF(\lambda, \mu, x; y, .) : X \to X$ est fortement monotone et de lipschitz.

En utilisant maintenant le théorème de surjectivité de Minty Browder on trouve qu'il existe $u \in X$ tel que $QF(\lambda, \mu, x; y, u) = 0_X$. Il résulte que l'élément $F(\lambda, \mu, x; y, u) \in \mathcal{Y}$ et on finit la preuve en prenant $z = (u, v) \in Z$ où $v = F(\lambda, \mu, x, y, u.)$

Soit maintenant B: $\Lambda \times Z \to Z$ l'opérateur défini comme suit :

$$\begin{cases} B(\lambda, \mu, w) = z \text{ si et seulement si } w = (x, y), z = (u, v) \\ \qquad\qquad v = F(\lambda, \mu, x, y, u) \end{cases}$$

Nous avons:

lemme 4.2. L'opérateur B est continu et il existe L>0 tel que:

$|B(\lambda, \mu, w_1) - B(\lambda, \mu, w_2|_Z \leq L \, |w_1 - w_2|_Z$ pour tout $\lambda \in \Lambda, \mu \in V, w_1, w_2 \in Z$.

Démonstration .

soit $\lambda_i \in \Lambda$,$\mu_i \in V$, , w$_i$= (x$_i$,y$_i$)$\in Z$ *et* , z$_i$= $(u_i, v_i) = B(\lambda_i, \mu_i, w_i),\ i = 1, 2$

En utilisant la définition de B, on trouve

$v_i = F(\lambda_i, \mu_i, x_i; y_i, u_i);\ i = 1, 2$

ce qui implique Q$F(\lambda_i, \mu_i, x_i; y_i, u_i) = 0_X\ \ ;\ i = 1, 2.$

D'après (4.3) et la dernière égalité, on trouve:

$m\,|u_1 - u_2|^2_{\mathcal{H}} \leq \langle F(\lambda_1, \mu_1, x_1; y_1, u_1) - F(\lambda_1, \mu_1, x_1; y_1, u_2), u_1 - u_2\rangle_{\mathcal{H}} =$

$$\langle QF(\lambda_2, \mu_1, x_2; y_2, u_2) - QF(\lambda_1, \mu_1, x_1; y_1, u_2), u_1 - u_2\rangle_{\mathcal{H}} \leq$$
$$\leq |F(\lambda_2, \mu_2, x_2; y_2, u_2) - F(\lambda_1, \mu_1, x_1; y_1, u_2)|_{\mathcal{H}}\,|u_1 - u_2|_{\mathcal{H}}$$

qui implique :

(*) $|u_1 - u_2|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{m}\,|F(\lambda_1, \mu_1, x_1; y_1, u_2) - F(\lambda_2, \mu_2, x_2; y_2, u_2)|_{\mathcal{H}}$

en utilisant maintenant (4.4) et le fait que $v_i = F(\lambda_i, \mu_i, x_i; y_i, u_i);\ i = 1, 2$;on trouve:

(**) $|v_1 - v_2)|_{\mathcal{H}} \leq (\frac{M}{m} + 1)\ |F(\lambda_1, \mu_1, x_1; y_1, u_2) - F(\lambda_2, \mu_2, x_2; y_2, u_2)|_{\mathcal{H}}$

en utilisant de nouveau (4.4), il vient :

(***) $|F(\lambda_1, \mu_1, x_1; y_1, u_2) - F(\lambda_2, \mu_2, x_2; y_2, u_2)|_{\mathcal{H}} \leq$
$$M(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) + |F(\lambda_1, \mu_1, x_2; y_2, u_2) - F(\lambda_2, \mu_2, x_2; y_2, u_2)|_{\mathcal{H}}$$

En utilisant le fait que $\lambda \to F(\lambda, \mu, x; y, z) est$ un opérateur continu, on obtient :

$|F(\lambda_1, \mu_1, x_1; y_1, u_2) - F(\lambda_2, \mu_2, x_2; y_2, u_2)|_{\mathcal{H}} \to 0$ quand $\lambda_1 \to \lambda_2\ dans\ \Lambda, \mu_1 \to \mu_2\ dans\ V$, x$_1 \to x_2, dansX$,

$y_1 \to y_2$ dans $\mathcal{Y}$.

Par conséquent d'après (*) et (**) il vient que B est un opérateur continu et en prenant $\lambda_1 = \lambda_2,\ \mu_1 = \mu_2 dans\ (*), (**)$ et (***), on trouve la lipschitzianité de B; d'où la preuve du lemme 4.2.

Démonstration de théorème 4.1.

Soit l'opérateur $A : [0.T] \times Z \to Z$ et z_0 défini par :

$$\begin{cases} A(t,z) = B(\lambda(t), \mu(t), z) \text{ pour tout } \ t \in [0.T] \ \ et \ z \in Z \\ z_0 = (x_0, y_0) \end{cases}$$

En utilisant (4.3) on trouve que x$\in$ $C^1(0,T,\mathcal{X}\ )$, y $\in$ $C^1(0,T,\mathcal{Y}\ )$est solution de (4.1)-(4.2) si et seulement si z=(x,y)$\in$ $C^1(0,T,Z)$est solution du problème :

$\dot{z} = (\dot{x}, \dot{y}) = A(t, z(t))$ pour tout t$\in$ $[0.T]$

$z(0) = (x(0), y(0))$

Dans l'ordre d'étudier le problème de Cauchy ci dessus, on remarque que par le lemme 4.2 et

$\lambda \in C^0(0,T,\Lambda), \mu \in C^0(0,T,V)$,on trouve que Aest un opérateur continu et

$$|A(t,z_1) - A(t,z_2)|_Z \le L\,|z_1 - z_2|_Z\, pourtout\ t \in [0.T]\ z_1, z_2 \in Z.$$

Cependant par (4.5), $z_0 = (x_0, y_0)$, on trouve que z_0 appartient à Z; par application du théorème classique de Cauchy Lipschitz au problème de Cauchy on termine la démonstration du théorème 4.1.

Remarque 4.1- Le problème (4.1)-(4.2) représente une version abstraite du problème viscoplastique problème 1.2. Le problème (4.1)-(4.2) est de la forme (2.1)-(2.5) où:$\varepsilon(V) = X,\ \mathcal{V} = Y;\ \ \sigma = y,\ \varepsilon(u) = x,\ \sigma_0 = y_0,\ \varepsilon(u_0) = x_0$, et F définie par

Pour résoudre le problème (2.51)-(2.53), on considère l'espace de HILBERT produit $Z = \varepsilon(V) \times \mathcal{V}$ qui est en fait isomorphe avec $\mathcal{H}$ =$\varepsilon(V) \oplus \mathcal{V}$

et l'opérateur G définie par $\mathcal{G} : L^2(\Omega)^p \times L^2(\Omega)^M \times \varepsilon(V) \times \mathcal{V} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

$F(\theta, \kappa, x, y, q) = \mathcal{E}(q + +\varepsilon(\dot{\tilde{u}}(t)), \theta(t), \kappa(t))\ + G\,(y + \tilde{\sigma}(t), x + \varepsilon(\tilde{u}(t)), \theta(t), \kappa(t)) - \dot{\tilde{\sigma}}(t)$

.Ainsi,sous les hypothèses faites sur F,λ, μ, x_0, y_0, et d'apres le théorème 2.2, on obtient l'existence et l'unicité du problème (4.1)-(4.2) par une méthode de monotonie.

Passons maintenant à:

4.2 Problème d'évolution correspondant au problème viscoplastiqueà variable interne d'état:

Existence et unicité de la solution.

Dans cette partie nous proposons une étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème d'évolution correspondant au problème 1.2 par une méthode de monotonie. On y donnera les hypothèses sous les quelles sera faite la démonstration.

4.2.1-Formulation des problèmes-Hypothèses

Soient H et Λ deux espaces de Hilbert réels, H=X $\oplus$Y une décomposition orthogonale de H et F:$\Lambda \times X \times Y \times H \rightarrow H$, K:$\Lambda \times X \times Y \rightarrow H$ deux opérateurs non linéaires. Soit T $\rangle$0.

On considère alors les problèmes de Cauchy suivants:

Trouver les fonctions x: $[0, T] \rightarrow X$ et y: $[0, T] \rightarrow Y$ et λ: $[0, T] \rightarrow \Lambda$ telles que:

(4.9) $\dot{y}$(t)=F$(\lambda(t), x(t), y(t), \dot{x}(t))$

(4.10) $\dot{\lambda}(t)$=K$(\lambda(t), x(t), y(t))$

(4.11) x(0)=x_0 ,   y(0)=y_0 , $\lambda(0) = \lambda_0$.

Le problème (4.9)-(4.11) représente une version abstraite du problème 1.2 dans le cas f=0, g=0, on considère les hypothèses suivantes:

Dans l'étude des problèmes de Cauchy ci-dessus,on considère les hypothèses suivantes:

$$\textbf{(4.12)}\begin{cases} \langle F(\lambda,x,y,z_1 - F(\lambda,x,y,z_2,z_1-z_2\rangle_H \geq \\ \geq m\,|z_1-z_2|_H^2\,; pourtout \lambda \in \Lambda, x \in X, y \in Y, z_1, z_2 \in X \end{cases}$$

(4.13) $x_0 \in$ X, $y_0 \in$ Y.

on a le résultat suivant :

(4.14) $|F(\lambda_1,x_1,y_1,z_1 - F(\lambda_2,x_2,y_2,z_2|_H \leq M(|x_1-x_2|_H + |y_1-y_2|_H + |z_1-z_2|_H)$
pour tout $\lambda_i \in \Lambda,\ x_i \in X, y_i \in Y, z_i \in H.$

(4.15) $|K(\lambda_1,x_1,y_1) - K\,(\lambda_2,x_2,y_2)|_\Lambda \leq L(|x_1-x_2|_H + |y_1-y_2|_H + |\lambda_1-\lambda_2|_\Lambda)$
pour tout $\lambda_i \in \Lambda,\ \ x_i \in X, y_i \in Y.$

(4.16) $\lambda_0 \in \Lambda$

on a le résultat suivant :

Théorème 4.2. Sous les hypothèses (4.12)-(4.16)**,** le problème (4.9)-(4.11) possède une solution unique ayant la régularité $x \in C^1(0,T,X)$, $y \in C^1(0,T,Y)$, $\lambda \in C^1(0,T,\Lambda)$.

Pour la démonstration du théorème 4.2, on considère l'espace de Hilbert produit $\mathcal{H}$=H×Λ.

Démonstration de théorème 4.2.

On considère les espaces de hilbert produits $\mathbf{H} = H\times\Lambda$, $\mathbf{X}$=$X\times\{0_\Lambda\}$, $\mathbf{Y} = Y\times\Lambda$ et l'opérateur **F;**

$\mathcal{F} : \mathbf{X}\times\ \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ défini par :

$\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (F(\lambda, x; y, z)$,K$(\lambda, x, y))$ pour tout $\mathbf{x}$=(x,0_Λ)$\in \mathbf{X}, \mathbf{y} = (y, \lambda) \in \mathbf{Y},\ \mathbf{z} = (z.\mu) \in \mathbf{H}$

On note aussi :

$\mathbf{x}_0 = (x_0, 0_\Lambda),\ \ \mathbf{y}_0 = (y_0, \lambda)$.

L'utilisation de (4.12), la lipschitzianité de $\mathcal{F}$ et de K nous donne :

$$\begin{cases} \langle \mathcal{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1\right) - \mathcal{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}_2\right), \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\rangle_{\mathbf{H}} \geq \\ \geq m\left|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\right|^2_{\mathbf{H}}; pourtout \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{y} \in \mathbf{Y}, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbf{X} \end{cases}$$

et

$$|\mathcal{F}(\mathbf{x}_1; \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)|_{\mathbf{H}} \leq\ L(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|_{\mathbf{H}} + |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|_{\mathbf{H}} + |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2|_{\mathbf{H}})$$

et d'après (4.12),(4.16) et $\mathbf{x}_0 = (x_0, 0_\Lambda),\ \ \mathbf{y}_0 = (y_0, \lambda)$;on obtient $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$,$\mathbf{y}_0\ \in \mathbf{Y}$.

On à l'opérateur $\mathcal{F} : \mathbf{X}\times\ \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ fortement monotone, de Lipschitz et tel que $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$,$\mathbf{y}_0\ \in \mathbf{Y}$, on obtient l'existence et l'unicité de $\mathbf{x}$=(x,0_Λ)$\in C^1(0, T, \mathbf{X}), \mathbf{y} = (y, \lambda) \in C^1(0, T, \mathbf{Y}\ )$
solution du problème :

$\dot{\mathbf{y}}$(t)=$\mathcal{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$ pour tout $t \in [0, T]$

$\mathbf{x}$(0)=$\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}$(0)=$\mathbf{y}_0$.

L'utilisation de $\mathcal{F} : \mathbf{X}\times\ \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ défini par $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (F(\lambda, x; y, z)$,K$(\lambda, x, y))$ et le fait que $\mathbf{x}_0 = (x_0, 0_\Lambda),\ \ \mathbf{y}_0 = (y_0, \lambda)$;nous donne la preuve du théorème 4.2.

Remarque 4.2: On peut considèrer un cas particulier du problème (4.1)-(4.2);

Trouver les fonctions x: $[0,T] \to X$ et y: $[0,T] \to Y$ telles que:

(4.17) $\dot{y}(t) = A\dot{x}(t) + B(\lambda(t), x(t), y(t))$ pour tout $t \in [0.T]$

(4.18) $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, $\lambda(0) = \lambda_0$.

Où A est un opérateur symétrique positivement défini et B:$[0.T] \times Y \to H$ est un opérateur de Lipschitz

De même on peut considérer un cas particulier du problème (4.9)-(4.11) :

Trouver les fonctions x:$[0.T] \to X$et y:$[0.T] \to Y$ etλ:$[0.T] \to \Lambda$ telles que:

(4.19)$\dot{y}(t) = A\dot{x}(t) + B(A(t), x(t), y(t))$ pour tout $t \in [0.T]$

(4.20)$\dot{\lambda}(t) = K(\lambda(t), x(t), y(t))$

(4.21)$x(0)=x_0$ $y(0)=y_0$ $\lambda(0) = \lambda_0$.

Pour faire le lien entre les différents problèmes, la section suivante est destinée à l'application des résultats obtenus à des problèmes mécaniques.

4.3 Quelques exemples mécaniques:

Le but de cette section est de présenter quelques exemples de problèmes mécaniques qui peuvent servir comme champ d'applications pour les résultats de ce chapitre obtenus dans un cadre hilbertien abstrait.

Ces problèmes mécaniques modélisent l'évolution quasistatique d'un corps déformable occupant un domaine (N=1,2,3) et ayant une loi de comportement viscoplastique de la forme $\dot{\sigma} = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}) + G(\sigma, \varepsilon(u), \kappa)$ où κ paramètre ou variable interne d'état sous l'action de forces extérieures.

Dans la suite,on va constater que tous les problèmes mécaniques qu'on va citer comme exemples peuvent se mettre sous la forme (4.17)-(4.19) où(4.19)-(4.21) avec certaines considérations communes à tous ces problèmes.

En effet, les inconnues x , y et λ sont respectivement le champ des déformatins $\varepsilon(u)$, le champ des contraintes σ et le champ de variable interne d'état κ.D'autre part, les équations d'évolution (4.17)-(4.19)_(4.20) jouent le role de la loi de comportement $\dot{\sigma} = \xi\varepsilon(\dot{u}) + G(\sigma, \varepsilon(u), \kappa)$ où κparamètre et respectivement κ variable interne d'état et pour cela, on a A=ξ , B=G. Finalement les espaces X ,Y, H , Λ sont respectivement les espaces $V, \mathcal{V}, \mathcal{H}$,$\mathbb{R}$.

ANNEXE

Nous présentons dans cet annexe des résultats de base sur les espaces fonctionnels utilisés dans l'étude des problèmes en élasticité-viscoplasticité. On étudie ici des espaces de type Sobolev associés à l'opérateur déformation et à l'opérateur divergence et on présente leurs principales propriétés, notamment les traces. On donne aussi des résultats de base sur les opérateurs monotones et les équations d'évolution dans les espaces de Hilbert faisant introduire les opérateurs monotones.

Rappelons tout d'abord quelques notations et résultats d'analyse fonctionnelle.

A 1. Notations-Espaces fonctionnels.

Nous donnons les notations que nous adopterons dans notre étude sur les espaces de distributions sur un ouvert Ω de IR^N. Soit

(A1.1) $\qquad D = [\mathcal{D}(\Omega)]^N \quad ; \quad \mathfrak{D} = [\mathcal{D}(\Omega)]_S^{N\times N}$

où $\mathcal{D}(\Omega)$: espace des fonctions indéfiniment dérivables, à valeurs réelles et à support compact inclus dans un ouvert Ω de IR^N $(N = (1, 2, 3)$ et (s) désigne la restriction aux éléments symétriques de l'espace considéré.

Soit également

(A1.2) $H = [L^2(\Omega)]^N \quad ; \mathcal{H} = [L^2(\Omega)]_S^{N\times N}$

où $(L^2\Omega)$: espace des fonctions mesurables, de carré intégrables sur Ω.

Les espace H, $\mathcal{H}$ sont des espaces de Hilbert munis des produits scalaires suivants:

(A1.3) $\qquad \langle u, v\rangle_H = \int\limits_\Omega u_i v_i dx; \quad \forall u, v \in H$

(A1.4) $\qquad \langle \sigma, \tau\rangle_{\mathcal{H}} = \int\limits_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij} dx \quad ; \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}$

Leurs normes sont définies de la façon suivante :

$$|u|_H = \left[\int_\Omega |u|^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H \ ; \ |\sigma|_H = \left[\int_\Omega |\sigma|^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}$$

Nous avons les inclusions et relations suivantes :

(A1.5) $D \subset H \subset D'$; $\mathfrak{D} \subset \mathcal{H} \subset \mathfrak{D}'$

(A1.6) $\langle u, v\rangle_H = \langle u, v\rangle_{D' \times D} \quad \forall u \in H; \ \forall v \in D$

(A1.7) $\langle \sigma, \tau\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \sigma, \tau\rangle_{\mathfrak{D}' \times \mathfrak{D}} \quad \forall \sigma \in; \ \forall \tau \in \mathfrak{D}$

où $\langle ., .\rangle_{D' \times D}$ et $\langle ., .\rangle_{\mathfrak{D}' \times \mathfrak{D}}$ *représentent* la dualité entre D', D(respectivement $\mathfrak{D}', \mathfrak{D}$)

On définit les opérateurs de déformation et de divergence pour les distributions par :

(A1.8) $\varepsilon : D' \to \mathfrak{D}'$ $, \varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \ \varepsilon_{ij}(u) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i})$

(A1.9) $Div : D' \to \mathfrak{D}'$ $, Div(\sigma) = (\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j})$

Rappelons maintenant quelques résultats concernant les espaces liés aux opérateurs déformations et divergence et leurs propriétés principales .

A 2-Espaces liés à l'opérateur déformation et divergence.

a) Espaces liés à l'opérateur déformation

Pour l'opérateur déformation défini par (A1.8), on introduit l'espace H_1 défini par

(A2.1) $H_1 = \{u \in H \ / \ \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}$

on le munit du produit scalaire et de la norme :

(A2.2) $\langle u, v\rangle_{H_1} = \langle u, v\rangle_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}}, \ \forall u, v \in H_1$

(A2.3) $|u|^2_{H_1} = |u|^2_H + |\varepsilon(u)|^2_{\mathcal{H}}, \ \forall u \in H_1$

Nous avons les inclusions suivantes:

(A2.4) $\quad D \subset H_1 \subset H \subset D'$

et

(A2.5) $(H_1, \langle .,. \rangle_{H_1})$ est un espace de Hilbert.

Enonçons maintenant quelques résultats sur les traces qui nous permettent d'étudier les conditions aux limites.

Soit Ω un ouvert de IR^N $(N = 1.2.3)$,de frontière Γ lipschitzienne et $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2; \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$.

Alors l'application $\gamma : H_1 \to H_\Gamma = \left[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right]^N$ *est* linéaire continue, surjective et il existe une constante C>0 ne dépendant que de Ω telle que :

(A2.6) $\quad |\gamma u|_{H_\Gamma} \leq C\, |u|_{H_1} \quad ; \forall u \in H_1.$

En plus, il existe une application inverse linéaire continue Z telle que :

$Z : H_\Gamma \to H_1$ telle que $\gamma(Z(\zeta) = \zeta \; ; \;\; \forall \zeta \in H_\Gamma$

et

$|Z(\zeta)|_{H_1} \leq C\, |\zeta|_{H_\Gamma}$

Soit maintenant V l'espace défini par $V = \{u \in H_1 /\ \gamma u = 0 \; p.p \; sur \; \Gamma_1\}$

V est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle_{H_1}$.La norme sur V est la norme de H_1.

Rappelons aussi le résultat technique suivant (l'inégalité de Korn):

Si $mes\Gamma_1 > 0$, alors il existe une constante C>0 ne dépendant que $\Omega; \Gamma_1$ telle que:

(A2.7) $\quad |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \geq C\, |u|_{H_1} ; \forall u \in V$

Passons maintenant à :

b) Espaces liés à l'opérateur Divergence.

Soit l'espace fonctionnel associé à l'opérateur divergence défini par

(A2.8) $\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \ / \ Div\sigma \in H\}$

on le munit du produit scalaire et de la norme :

(A2.9) $\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, Div\tau \rangle_H, \ \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}_1$

(A2.10) $|\sigma|^2_{\mathcal{H}_1} = |\sigma|^2_{\mathcal{H}} + |Div\sigma|^2_H, \ \forall \sigma \in \mathcal{H}_1$

Nous avons les inclusions suivantes:

(A2.11) $\mathfrak{D} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathfrak{D}'$

et

(A2.12) $(\mathcal{H}_1, \langle ., . \rangle_{\mathcal{H}_1})$, est espace de Hilbert.

* Comme dans l*e cas* de l'espace $\mathcal{H}_1$; il existe une application linéaire continue et surjective $\gamma_\nu : \mathcal{H}_1 \to H'_\Gamma$

En plus, il existe une application inverse linéaire continue Z_ν telle que :

$Z_\nu : H'_\Gamma \to \mathcal{H}_1$ telle que $\gamma_\nu(\ Z_\nu(\Sigma) = \Sigma \ \ \forall \Sigma \in H'_\Gamma$

En utilisant les définitions des normes des espaces H_1 et $\mathcal{H}_1$, on obtient :

(A2.13) $|u|_H \leq |u|_{H_1}$; $|\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \leq |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}_1} \quad \forall u \in H_1$

(A2.14) $|\sigma|_{\mathcal{H}} \leq |\sigma|_{\mathcal{H}_1}$; $|Div(\sigma)|_H \leq |Div(\sigma)|_{H_1} \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1$

Aussi compte tenu des relations **(A2.4) et (A2.11)**, nous avons :

(A2.15) $\langle \varepsilon(u), \Phi \rangle_{D' \times D} + \langle u, Div\Phi \rangle_H = 0 \ \ \forall u \in H, \forall \Phi \in D$

(A2.16) $\langle \Phi, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\Phi, u \rangle_{D' \times D} = 0 \ \ \forall u \in D, \forall \Phi \in \mathcal{H}$

(A2.17) $\langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} = 0 \;\; \forall \varphi \in D, \forall \sigma \in \mathcal{H}$

(A2.18) $\langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} = 0 \;\; \forall \varphi \in D, \forall \sigma \in \mathcal{H}_1$

On considère maintenant les espaces fonctionnels suivants :

$$\vartheta = \{\sigma \in \mathcal{H}_1 / Div(\sigma) = 0, \sigma\nu = 0 \; sur \; \Gamma_2\} \subset \mathcal{H}_1$$

$$W = \{\sigma \in \mathcal{H}_1 \; / \; \sigma\nu = 0 \; sur \; \Gamma_2\} \subset \mathcal{H}_1$$

ϑet W sont des espaces de Hilbert munis du produit scalaire$\langle ., . \rangle_{\mathcal{H}_1}$.

En notant l'image $\gamma_\nu \sigma$ par le vecteur $\sigma\nu = (\sigma_{ij}\nu_j) \quad i = 1, ..., N$,nous avons les relations suivantes :

(A2.19) $\langle \sigma\nu, \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div(\sigma), u \rangle_H \;;\; \forall u \in H_1, \sigma \in \mathcal{H}_1$

(A2.20) $\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div(\sigma), u \rangle_H = 0; \; \forall u \in V, \sigma \in W$

(A2.19) $\langle \sigma\nu, \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div(\sigma), u \rangle_H \;;\; \forall u \in V, \sigma \in \vartheta$

Introduisons maintenant d'autres espaces fonctionnels dont nous aurons besoin.

A3-Espaces des fonctions à valeurs vectorielles.

Soit $|.|_X$ et $\langle ., . \rangle_X$ la norme et le produit scalaire d'un espace de Hilbert X et $T > 0$.
On définit les espaces $C^j(0.T.X), (\; j = 0, 1, 2, 3, ..)$ par :

$$C^0(0, T, X) = \{x : [0, T] \to X \; / \; x \; est \; continue\}$$

$$C^1(0, T, X) = \{x : [0, T] \to X \; / \; x \; est \; dérivable, \dot{x} \in C^0(0.T.X) \; \}$$

$C^j(0,T,X) = \{x : [0,T] \to X \ / \ x \ est \ dérivable, \dot{x} \in C^{j-1}(0.T.X) \ \}$
où $\dot{x}$ dénote la dérivée de la fonction x.

Alors $C^0(0,T,X)$ et $C^1(0,T,X)$ munis respectivement des normes suivantes, sont des espaces de Banach :

(A3.1) $|X|_{0,T,X} = \max_{t\in[0,T]} |X(t)|_X$

(A3.2) $|X|_{1,T,X} = |X|_{0.T.X} + \left|\dot{X}\right|_{0,T,X}$

Donnons maintenant des résultats de base sur les opérateurs monotones et les équations d'évolution dans les espaces de Hilbert faisant introduire les opérateurs monotones.

A4-Opérateurs monotones.

Soit X un espace de Hilbert ; on note par 2^X l'ensemble des parties de X .On considère les opérateurs multivalents A :X→ 2^X .Alors :

- L'opérateur A⊂X×X et dit monotone si :
$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle_X \geq 0$ pour tout (x_1,y_1)$, (x_2, y_2) \in A$

-Un opérateur monotone est dit maximal monotone si n'est pas continu dans un autre sous ensemble monotone de X×X .

D'après cette définition , on trouve que : A⊂X×X et un opérateur maximal monotone si seulement si A et monotone et :

$\forall \ (x, f) \in X \times X \ tel \ que \ \langle f - g, x - y\rangle_X \ \geq 0 \ \forall \ (y, g) \in A$, il resulte $(x, f) \in A$

Donnons maintenant un résultat fondamantal :

Théorème A 4.1.

Soit A:X→ 2^X un opérateur monotone .Alors A *est* maximal monotone si et sulement si : $R(I_X + \lambda A) = X$;pour tout $\lambda > 0$ *où* $R(I_X + \lambda A)$ représente l'image de X par l'opérateur multivoque $I_X + \lambda A$.

D'après ce théorème, il est facile d'obtenir le résultat suivant :

Lemme A 4.1. Soit A:X$\rightarrow 2^X$ un opérateur monotone *et* $\lambda > 0$. Alors pour tout opérateur f$\in X$, *il* existe un élement unique x$\in D(A)tel$ que $x + \lambda Ax = f$.

- On définit pour tout $\lambda > 0$, $J_\lambda : X \rightarrow X$ par:

$J_\lambda = (I_X + \lambda A)^{-1}$;pour tout $x, f \in X$,
On a :

x=$J_\lambda f$ si seulement si $x + \lambda Ax = f$.

J_λ *est* appelé opérateur resolvant de A; il est un opérateur monotone et non expansive
.

-On définit aussi l'approximante de Yoshida $A_\lambda de\ A$ par :
$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I_X\text{-}J_\lambda)$, *pour tout* $\lambda > 0$.
A_λ et un opérateur monotone et de lipschitz

Enonçons quelques propriétés sur les opérateurs monotones:

- la somme de 2 opérateurs maximaux monotones et monotone, mais pas toujours maximal .

une condition sufisantte pour la maximalité est :

Théorème A4.2 . Si A :X$\rightarrow 2^X$ un opérateur rmaximal monotone et $B : X \rightarrow X$ opérateur monotone et de lipschitiz, alors A+B : X$\rightarrow 2^X$est un opérateu rmaximal monotone

Considérons maintenant le cas des opérateurs univalents ;
un opérateur univalent A:D(A)$\subset$X$\rightarrow X$ est dit :
$-$ monotone si $\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle_X \geq 0$; *pour tout* $x_1, x_2 \in D(A)$

$-$fortement monotone s'il existe m>0 telle que :

$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle_X \geq m\,|x_1 - x_2|_X^2 \quad \forall x_1, x_2 \in D(A)$

On a le résultat suivant :

Théorème A4.3.(Minty-Browder):

Soit X un espace de Hilbert et soit $A : X \to X$ une application non linéaire fortement monotone et de lipschitz

c'est à dire qu'il existe deus constantes $M,\ m$ stictement positives telles que :

$$\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle_X \geq m\,|u_1 - u_2|_X^2\,; \quad \forall u_1, u_2 \in X$$

$$|Au_1 - Au_2|_{X'} \leq M\,|u_1 - u_2|_X \quad ; \quad \forall u_1, u_2 \in X$$

Alors pour $f \in X'$, il existe $u \in X$, unique tel que :$Au = f$

(pour des détails sur les opérateurs monotones voir par exemple H.Brezis).

Donnons maintenant les principaux résultats sur les équations d'évolution

A5-Equations d'évolution.

a) Equations d'évolution en utilisant une technique de Cauchy Lipschitz.

Commençons par rappeler un résultat classique:

Théorème A 5.1(Cauchy Lipschitz). Soit X un espace de Banach et soit $F : [0.T] \times X \to X$

une application continue et telle que

$$\begin{cases} |F(t,x_1) - F(t,x_2)|_X < L(|x_1, -x_2|_X\,; \\ \quad \forall x_1, x_2 \in X \ et \ \ \forall t \in [0.T] \ \ L \geq 0 \end{cases}$$

Alors, *pour tout* $x_0 \in X$, il existe $x \in C^1(0.T.X)$, unique telle que :

(A5.1) $\dot{x}(t) = F(t, x(t));\ \forall t \in [0, T]$

(A5.2)$x\,(0) = x_0$

Ce théorème rend de grands services dans l'étude des équations différentielles ordinaires mais il est pratiquement inutilisable pour résoudre les équations aux dérivées partielles.

Les résultats qui suivent sont, par contre, des outils trés efficaces pour la résolution des équations aux dérivées partielles d'évolution.

b) Equations d'évolution en utilisant les opérateurs monotones.

Théorème A 5.2. Soit X un espace de Hilbert et $A : D(A) \to X$

un opérateur linéaire et maximal monotone, $B : X \to X$un opérateur linéaire et continu .

Alors, pour tout $x_0 \in D(A)$et pour tout a $\in C^1(0, T, X)$, il existe une fonction unique

$x \in C^1(0, T, X) \cap C^0(0, T, [D(A)])$,telle que :

(A5.3) $\dot{x}(t) + Ax(t) = Bx(t) + \alpha(t);\ \forall t \in [0, T]$

(A5.4)$x\,(0) = x_0$

Théorème A 5.3. Soit X un espace de Hilbert et $A : [0.T] \times D(A) \to X$ un opérateur satisfaisant

aux conditions:

(A5.5) A(t): D(A)$\to X$ est un opérateur non linéaire, maximal monotone , pour tout $t \in [0, T]$

$$\textbf{(A5.6)} \quad \begin{array}{c} |J_\lambda(t)x - J_\lambda(s)x|_X < L.\lambda(1 + |x|_X + |A_\lambda(t)x|_X) \\ \forall x \in X \ et \ \forall s \in [0.T] \ , \lambda\rangle 0 \end{array}$$

Alors, pour tout $x_0 \in D$et b$\in W^{1,1}(0, T, X)$, il existe $x \in W^{1,\infty}(0, T, X)$, unique telle que

(A5.7) $\dot{x}(t) + A(t)x(t) = b(t); \ \forall t \in [0, T]$

(A5.8)$x\,(0) = x_0$

Donnons maintenant des compléments divers sur les inéquations variationnelles.

A.6 Inéquations variationnelles elliptiques

Soient $A : H \to H$ un opérateur non linéaire, $\varphi : \ H \to]-\infty, +\infty[$ une fonction propre de $f \ \in H$. un bon nombre de problèmes aux limites en équations aux dérivées partielles ainsi qu'en mécanique des milieux continus ont un rapport avec des problèmes mathématiques de la forme suivante :

$$(A.6.1) \quad u \in H \ , \ \langle Au, u - v\rangle_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle\ f, v - u\rangle_H \quad \forall v \in H$$

Le problème A.6.1 est appele inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur H. D'autres problèmes rencontrés ont un rapport avec des problèmes mathématiques similaires de la forme suivante:

Trouver u telque:

(A.6.2) $u \in K\ ,\ \langle Au, u-v\rangle_H \geq \langle\ f, v-u\rangle_H \quad \forall v \in K$

Ou K est un sous-ensemble non vide de H. Le problème A.6.2 est appelé inéquation variationnelle elliptique de première espèce sur H.

Remarquons que si $\varphi = 0$ $(ou\ K = H)$, alors A.6.1 (resp. A.6.2) est équivalente au problème suivant:

Trouver u telque:

(A.6.3) $u \in H\ ,\ \langle Au, v\rangle_H = \langle\ f, v\rangle_H \quad \forall v \in H$

On obtient ainsi une équation variationnelle.

A.7-Compléments divers .

On présente ici quelques lemmes du type de Gronwall

Lemme A 7.1. Soient $m, n \in C^0(0.T.X)$ telles que $m(t) \geq 0,\ n(t) \geq 0;\ \forall t \in [0, T]$

et $a > 0$.Soit également $\Psi : [0.T] \to IR$ une fonction continue telle que:

$$\Psi(s) \leq a + \int_0^s m(t)dt + \int_0^s n(t)\Psi(t)dt \ \ \forall s \in [0.T]$$

Alors $\Psi(s) \leq (a + \int_0^s m(t)dt)e^{\int_0^s n(t)dt} \quad \forall s \in [0.T]$.

Lemme A7.2. Soient $m, n \in C^0(0, T, X)$ telles que $m(t) \geq 0,\ n(t) \geq 0\ ; \forall t \in [0, T]$

et $a > 0$.Soit également $\Psi : [0.T] \to IR$ une fonction continue telle que:

$$\frac{1}{2}\Psi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int\limits_0^s m(t)dt + \int\limits_0^s n(t)\Psi^2(t)dt \ \ \forall s \in [0.T]$$

Alors $\mid \Psi(s)| \leq (a + \int\limits_0^s m(t)dt)e^{\int\limits_0^s n(t)dt} \ \ \forall s \in [0.T]$.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

R.S. ADAMS

[1] Sobolev spaces- Academic Press, New York, (1975).

H. BREZIS

[1] Opérateurs maximaux monotones et semi groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. North-Holland, Amsterdam, 1973.

[2] Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson, Paris, 1987.

P.CIARLET

[1] Elasticité tridimensionnelle. Masson, Paris, 1986

S. DJABI

[1] A Cauchy Lipschitz method in quasistatic rate type viscoplasticity. Bulletin technique et scientifique, Roumanie, tome 39 (53), p.p 36-44 (1994).

[2] A monotony method in quasistatic process for viscoplastic materials with internal state variables. Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées, 42 (1997), 5-6, p.p 401-408.

[3] A monotony method in quasistatic process for viscoplastic materials with Mathematical Reports (S. C. M) vol. 2 (52), n° 1, (2000).

S. DJABI et M. SOFONEA

[1] A fixed point method in quasistatic rate-type viscoplasticity. Appl. Math .and. Comp. Sci. V 3, n° 2, p.p 269-279 (1993)

[2] A monotony method in quasistatic rate-type viscoplsticity Theoritical and Applied Mechanics, n° 19/93, p.p 39-46 (1993)

M. DJAOUA et P. SUQUET

[1] Evolution quasistatique des milieux viscoplastiques de Maxwell Northon. Math. Meth. Appl. Sci. Vol. 6 , p.p 192-205 (1984)

G. DUVAUT et J.L. LIONS

[1] Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris, (1972)

P. GERMAIN et P. MULLER

[1] Introduction à la mécanique des milieux continus. Masson, Paris, (1980)

I. R. IONESCU et M. SOFONEA

[1] Quasistatic process for elastic-viscoplastic materials. Quart.Appl. Maths, n°2, p.p 229-243, (1988)

[2] Functional and numerical methods in viscoplsticity. Oxford University Press, (1993).

J.L. LIONS

[1] Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Gauthiers-Villars, Paris, (1969).

A.MEROUANI et S.DJABI

[1] Amonotony method in quasistatic processes for viscoplastic materials. Studia. Univ. Babes Bolyai Mathematica, . Vol. III, Number 1 p.p 25-33, (2008).

[2] A Cauchy-Lipschitz method for existence and an Euler method for numerical approch in quasiqtatic contact problems in rate-type viscoplasticity;Far East J. Appl. Math.(2008)

A. MEROUANI, T. SERRAR et S. DJABI

[3] A monotony method in quasistatic process for viscoplastic materials with $\mathcal{E}$ a non linear function, Proceedings of the first conference on mathematical sciences zarqaprivate university;April 18-20,2006, Jordan, p.p 245-254

T. SERRAR et S. DJABI

[1] Mixed methods in quasistatic rate-type viscoplasticity. Accepté pour publication dans Far East J. Math. Sci. (FJMS).

T. SERRAR

[1] Analyse variationnelle de quelques problèmes viscoplastiques, thèse de doctorat d'état, Univ ferhat abbas.Sétif; (2006).

M. ROCHEDI

[1] On rate-type viscoplastic problems with linear boundary conditions. Mathematische Nachrichten. 193 (1998), p.p 119-135.

M. ROCHEDI et M. SOFONEA

[1] On existence and behaviour of the solution for a class of nonlinear systems, Rev.Roum.Math.Pures et Appl,42, 7-8,P.659-667, 1997

[2] On frictionless contact between two elastic-viscoplastic bodies, Quart. J.Mech Appl. Math. 50,3, p. 481-496, (1998)

M. SOFONEA

[1] Quasistatic process for elastic-viscoplastic materials with internal state variables. Ann. Sci. Univ. Blaise Pascal (Clermont II), Série Math. vol. 25, p.p 47-60, (1989).

[2] Problèmes mathématiques en élasticité et viscoplasticité . Cours de DEA de Mathématiques Appliquées à l'Université Blaise Pascal (Clermont II), (1991).

[3] On existence and behaviour of the solution of two uncopled therme elaste-viscoplastic problems, Ann.Univ.Bucarest,Math,38;1,pp.56-65,(1989)

[4] On existence and behaviour of the solution in the quasistatic processes foa rate-type viscoplastic models, Ann. Sci. Univ. Blaise Pascal , Série Math. Fax.28;pp25-271,(1992)

[5] Problème Non-linéaire dans la Théorie de l'Elasticité, Cours de Magister de Mathématique Appliques, Université de Sétif, Algérie (1993)

P. SUQUET

[1] Plasticité et homogénisation. Thèse, Université de Paris VI, 1982.

R. TEMAM

[1] Problèmes mathématiques en plasticité. Méthodes mathématiques de l'informatique, 12, Gauthiers Villars, Paris, 1983.

K. YOSIDA

[1] Functional Analysis. Springer, Verlag, Berlin, 1971.