**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF 1**

# THESE

**Présentée à la Faculté des Sciences**
**Département de Mathématiques**
**Pour l'obtention du diplôme de**

## DOCTORAT $3^{ième}$ CYCLE

Domaine : Mathématiques et Informatique
Spécialité : Mathématiques
Option : Mathématiques Appliquées

Par

**BOULANOUAR Fairouz**

## THEME

**Stabilisation frontière et distribuée de quelques problèmes en thermoélasticité**

Soutenu le : 11/06/2015, devant le jury composé de :

| | | |
|---|---|---|
| Prof. A. KADEM | Université Ferhat Abbas de Setif 1 | Président |
| Prof. S. DRABLA | Université Ferhat Abbas de Setif 1 | Rapporteur |
| Prof. S. A. MESSAOUDI | Université KFUPM de Saudi Arabia | Co-rapporteur |
| Prof. B. BENABDERRAHMANE | Université Mohamed Boudiaf de M'sila | Examinateur |
| Prof. A. YOUKANA | Université Hadj Lakhder de Batna | Invité |

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier **ALLAH** le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Mes premiers et particuliers remerciements vont, et c'est bien normal, à mon directeur de thèse : Monsieur **DRABLA Salah**, Professeur à l'université **Ferhat Abbas** de **Setif**, pour sa patience, ses encouragements ainsi que pour sa rigueur intransigeante qui m'a beaucoup appris. Je remercie en lui l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui cette thèse n'aurait jamais vu le jour. Merci beaucoup Monsieur **Drabla**.

Mes remerciements particuliers iront tout naturellement à mon co-encadreur : Monsieur **MESSAOUDI Salim**, Professeur à l'université **KFUPM** de **Saudi Arabia**, de m'avoir proposé ce thème. Je tiens à le remercier pour son orientation, sa confiance, sa patience, qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené à bon terme. Merci pour tout Monsieur **Messaoudi**.

Je remercie vivement Monsieur **KADEM Abdelouahab**, Professeur à l'université **Ferhat Abbas** de **Setif**, de me faire l'honneur de présider le jury de cette thèse.

J'adresse mes remerciements à Monsieur : **BENABDERRAHMANE Benyattou**, Professeur à l'université **Mohamed Boudiaf** de **M'sila**, d'évaluer ce travail et de participer au jury de soutenance.

J'oublie pas aussi de remercier Monsieur **YOUKANA Amar**, Professeur à l'université **Hadj Lakhder** de **Batna**, d'accepter l'invitation pour participer à ma soutenance.

Un remerciement spécial pour tous les **membres** de l'équipe du **Laboratoire Mathématiques Appliquées** LaMA de **Setif**.

Je terminerais en rendant hommage à tous les enseignants des départements de mathématiques de l'université de **M'sila** et de **Setif** et plus particulièrement, les Professeurs : **MEROUANI Boubakeur**, **HEMICI Nacerdine**, **BENSERIDI Hamid**, **NADIR Mostefa** et **GAGUI Bachir**.

A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.

## ***Dédicaces***

*Je dédie ce modeste travail à :*

***Mes parents**. Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler. Qu'**ALLAH** leur procure bonne santé et longue vie.*

*A celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au long de ce projet. A mes Frères : **Soufiane**, **Aissa** et **Ameur**. A mes Soeurs : **Nadjia**, **Sara**, **Ouafa** et **Soad**.*

*Un remerciement spécial à mon oncle **Mohamed** et sa femme **Fadila**, sans oublié mes **grands-mères**. Qu'**ALLAH** leur procure bonne santé et longue vie.*

*A mes **tantes** et mes **oncles**.*

*A mes **cousins** et **cousines**.*

*A tous les membres de ma **famille**, **petits** et **grands**. Veuillez trouver dans ce modeste travail l'expression de mon affection la plus sincère.*

*A toutes mes **amies**, notamment, **Ouafa, Salima, Ibtissem, Meriem** et **Fahima**.*

*Je n'oublie pas d'exprimer particulièrement toute mon amitié à **Madame BOUDIAF Amel** pour son aide et son soutien.*

*Merci à tous **mes collègues** pour tous les bons moments passés, pour leur gentillesse, leur disponibilité et leurs compétences, notamment, **DAHEL Manel** et **HADI Sarra** de **Setif**, **SIDIALI Fatima** et **HENINE Safia** de **Batna**, et **BELYACINE Zahia** de **Annaba**.*

# Table des matières

# Introduction

## 0.1 La thermoélasticité

Une déformation d'un corps est inséparablement reliée à un changement de sa quantité de chaleur et donc avec un changement de la distribution de température dans le corps. Une déformation d'un corps qui varie dans le temps conduit à des changements de température, et inversement. L'énergie interne du corps dépend de la température et de la déformation. La science qui traite des processus couplés ci-dessus, est appelé thermoélasticité. La thermoélasticité, généralisation de l'élasticité des déformations non isothermes, a fait des progrès considérables au cours des dernières décennies. Sa théorie de base est maintenant bien établie, et de nombreuses applications aux problèmes en ingénierie ont été réalisées avec succès.

La thermoélasticité contient la théorie générale de la conduction de chaleur, la théorie générale des contraintes thermiques, décrit la distribution de température produite par la déformation et enfin elle contient une description du phénomène de dissipation thermoélastique. En dépit de sa complexité mathématique, la thermoélasticité nous permet d'examiner plus profondément que précédemment, le mécanisme de la déformation et les procédés thermiques se produisant dans les corps élastiques. La thermoélasticité était l'un des premiers domaines en théorie des champs couplés qui a attiré l'attention des mathématiciens ; l'intérêt pour les modèles caractérisant le couplage thermomécanique a été motivé par de nouveaux problèmes pratiques importants, y compris ceux qui sont à la fine pointe des innovations technologiques actuelles. Malgré plus d'un siècle de recherches sur la thermoélasticité, de nombreux problèmes d'actualité restent difficiles à résoudre analytiquement et de fait la simulation numérique sera l'ultime moyen d'y parvenir.

Notre propos concerne :

• **Les systèmes thermoélastiques classiques :**

Un système de thermoélasticité classique est un couplage de deux systèmes, un système hyperbolique d'élasticité et une équation parabolique classique de la conduction de chaleur, ce qui nous donne un système hyperbolique-parabolique qui possède les propriétés des deux systèmes dont le transfert de chaleur est généralement décrit en utilisant la loi de Fourier :

$$q = -\kappa \nabla \theta. \tag{1}$$

En conséquence, cette théorie prédit une vitesse infinie de transfert de chaleur, qui signifie que toute perturbation thermique à un point a un effet instantané dans le reste du corps.

• **Les systèmes thermoélastiques non-classiques :**

Bien que la loi de Fourier donne une description de la diffusion de chaleur, des expériences sur certains cristaux diélectriques isolants à très basse température est libre de ce paradoxe et les perturbations qui sont presque entièrement thermiques, peuvent se propager à une vitesse finie, ce qui a conduit à la création de la théorie de thermoélasticité non-classique où l'équation parabolique, de la conduction de chaleur, est remplacée par une équation hyperbolique de la diffusion de chaleur. Elle présume que la diffusion de chaleur se propage sous forme d'ondes. Ce phénomène ondulatoire de la conduction de chaleur porte le nom de second son (second sound : voir [13]). Ce phénomène a d'abord été détecté dans le **He**, dans des cristaux de floride de sodium **Naf** et dans le bismuth **Bi**.

A la place de loi de Fourier, cette théorie suggère l'utilisation de la loi de Maxwell-Cattaneo (Maxwell [26] et Cattaneo [8]) suivante

$$\tau_0 q_t + q = -\kappa \nabla \theta \tag{2}$$

où $\tau_0$ est le temps de relaxation dépendant de la température absolue, il est lié à la réponse du système étudié à une perturbation thermique instantanée, il caractérise alors l'ordre de grandeur du temps au bout duquel le nouvel équilibre est atteint.

Avant d'introduire la description générale de nos résultats on va donner quelques types d'amortissement utilisés dans notre travail :

• Un amortissement produit par la viscosité. Il a plusieurs formes comme par exemple l'amortissement produit par le modèle de Boltzmann. Si on met par exemple le matériau élastique dans un fluide viscoélastique, ce fluide fournit un amortissement naturel. Du point de vue mathématique, ces effets d'amortissement sont modélisés par un terme sous forme d'intégral (comme dans les systèmes étudiés dans le premier et le deuxième chapitre de cette thèse).

• Un amortissement dû à la friction, il s'exprime en fonction des vitesses $u_t,\ \theta_t$ (comme dans le système étudié dans le dernier chapitre de cette thèse).

## 0.2 Description des sections et résultats principaux

Cette thèse est consacrée à l'étude de comportement asymptotique des certains systèmes thermoélastiques. On généralise et on améliore divers résultats antérieurs qui seront mentionnés un peu plus tard.

Plus précisément, on étudie trois problèmes thermoélastiques. Le but est d'améliorer les résultats de [38, 39] et de généraliser les résultats de [41] en additionnant un terme d'amortissement interne non linéaire.

Dans la suite, on donnera une brève analyse du contenu de la thèse.

Dans le **premier chapitre**, on considère le système thermoélastique classique suivant, au moyen d'un amortissement de type mémoire agissant sur une partie de la frontière,

$$
\begin{array}{c}
u_{tt} - \mu \triangle u - (\mu + \lambda) \nabla (divu) + \beta \nabla \theta = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\
c\theta_t - \kappa \triangle \theta + \beta divu_t = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\
u(.,0) = u_0, \quad u_t(.,0) = u_1, \quad \theta(.,0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega \\
u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times [0, +\infty) \\
u(x,t) = -\int_0^t g(t-s) \left( \mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu + \lambda)(divu)\nu \right)(s)\, ds \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, +\infty) \\
\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times [0, +\infty),
\end{array}
\tag{3}
$$

où le corps $\Omega$ est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, avec une frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^n$, $c, \kappa, \mu, \lambda$ sont des constantes positives, $\beta \neq 0$ est un nombre réel, le vecteur $\nu$ est la normale extérieure unitaire à $\Gamma$ et la fonction $g$ est une fonction positive et différentiable. On va trouver un résultat de décroissance explicite et générale de l'énergie de la solution.

Ce travail peut être considéré comme une extension de celle de [39], qui a étudié la stabilisation de (3) avec $u_0 = 0$ sur $\Gamma_1$.

Le **deuxième chapitre** est consacré à l'étude du deuxième problème suivant :

$$
\begin{array}{c}
u_{tt} - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} u) + \beta \nabla \theta = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\
c\theta_t + \kappa \operatorname{div} q + \beta \operatorname{div} u_t = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\
\tau_0 q_t + q + \kappa \nabla \theta = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\
u(.,0) = u_0, \quad u_t(.,0) = u_1, \quad \theta(.,0) = \theta_0, \quad q(.,0) = q_0 \quad \text{dans } \Omega \\
u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times [0, +\infty) \\
u(x,t) = -\int_0^t g(t-s)(\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu + \lambda)(\operatorname{div} u)\nu)(s) ds \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, +\infty) \\
\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times [0, +\infty).
\end{array}
\tag{4}
$$

C'est un système thermoélastique avec second son sous l'action d'un amortissement de type mémoire, où le corps $\Omega$ est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ avec une frontière $\Gamma$, telle que $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ est une partition de $\Gamma$, $\nu$ est la normale extérieure unitaire à $\Gamma$, $u = u(x,t)$, $q = q(x,t) \ \in \mathbb{R}^n$ et la fonction de relaxation $g$ est une fonction positive et différentiable. Les coefficients $c, \kappa, \mu, \lambda$, $\tau_0$ sont des constantes positives et $\beta \neq 0$ est un nombre réel.

On va étudier le système (4) sous les mêmes hypothèses qui ont été proposées dans [38] où, cette fois-ci, le cas $u_0 \neq 0$ sur $\Gamma_1$ sera pris en compte, et démontrer, comme dans [38], une forme explicite de décroissance de la solution qui n'est pas nécessairement exponentielle ou polynômiale.

En l'absence du terme d'amortissement frontière dans le système (4), on va étudier, dans **le dernier chapitre,** le nouveau système, stabilisé par un terme d'amortissement interne, suivant

$$\begin{gathered} u_{tt} - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div} u) + \beta\nabla\theta + \alpha(t)\mathrm{g}(u_t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\ c\theta_t + \kappa \operatorname{div} q + \beta \operatorname{div} u_t = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\ \tau_0 q_t + q + \kappa\nabla\theta = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\ u(.,0) = u_0, \quad u_t(.,0) = u_1, \quad \theta(.,0) = \theta_0, \quad q(.,0) = q_0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0,+\infty), \end{gathered} \tag{5}$$

tels que $\Omega$ est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière $\partial\Omega$, $u = u(x,t)$, $q = q(x,t) \in \mathbb{R}^n$, les fonctions $\alpha$ et g sont des fonctions positives particulières et les coefficients $c, \kappa, \mu, \lambda$, $\tau_0$ sont des constantes positives et $\beta \neq 0$ est un nombre réel.

On obtient un résultat de décroissance en fonction de g et $\alpha$ pour lesquels les deux taux de décroissance exponentielle et polynômiale ne sont que des cas particuliers. Plus précisément, nous allons obtenir une relation entre le taux de décroissance de l'énergie (lorsque $t$ tend vers l'infini) et les fonctions g et $\alpha$ sans faire des hypothèses plus restrictives sur le terme d'amortissement frictionnel $\alpha(t)\mathrm{g}(u_t)$. Ainsi, on trouve un résultat de décroissance générale et explicite de l'énergie qui permet d'utiliser une plus grande classe de fonctions g et $\alpha$.

## 0.3 Méthodologie

Pour atteindre les résultats souhaités, on se base principalement sur quelques propriétés des fonctions convexes, l'inégalité de Jensen, l'inégalité de Poincaré et essentiellement sur la construction des fonctionnelles de

Lyapunov appropriées qui sont équivalentes à l'énergie des solutions.

Pour traiter le système (3), on suit les mêmes techniques présentées dans [39] avec quelques modifications et hypothèses additionnelles nécessaires et convenables telle si $k$ est le noyau résolvant de $(-g'/g(0))$, on suppose qu'il vérifie :

$$k(0) > 0, \quad \lim_{t\to\infty} k(t) = 0, \quad k'(t) \leq 0 \tag{6}$$

$$k''(t) \geq H(-k'(t)), \quad \forall t > 0, \tag{7}$$

telles que $H$ est une fonction positive, linéaire ou strictement croissante, strictement convexe de classe $C^2$ sur $(0, r]$, $r < 1$, $H(0) = 0$, de plus, la fonction $H'$ est convexe et de classe $C^2$ sur $(0, r]$.

Les techniques utilisées sont basées sur la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov $L$ équivalente à la fonctionnelle d'énergie $E$ du problème (3). Après quelques étapes, en construisant une autre fonction de Lyapunov $F$ qui est également équivalente à $E$, on arrive à l'inégalité suivante

$$F'(t) \leq -mE(t) - c\int_{t_1}^{t} k'(s) \int_{\Gamma_1} |u(t) - u(t-s)|^2 \, d\Gamma_1 ds + Ck^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1. \tag{8}$$

A ce stade, nous allons considérer un cas particulier dans lequel on suppose que $H(t) = ct^p, \ 1 \leq p < 3/2$, en exploitant les conditions (6) et (7), on va donner une preuve simple afin d'obtenir l'estimation de décroissance de l'énergie et on va passer ensuite au cas général. On termine ce chapitre par un exemple pour montrer comment appliquer notre résultat principal.

Pour traiter le système (4) dans le deuxième chapitre, on suit les mêmes techniques présentées dans [38] avec quelques modifications nécessaires et convenables telle si $k$ est le noyau résolvant de $(-g'/g(0))$, on suppose qu'il vérifie (6) et (7), telles que $H$ est une fonction positive, linéaire ou strictement croissante, strictement convexe de classe $C^2$ sur $(0, r]$, $r < 1$ et $H(0) = 0$.

Ensuite, on construit une fonction de Lyapunov $L$ équivalente à la somme de première et deuxième énergie de la solution $E = E_1 + E_2$, après quelques manipulations en exploitant les hypothèses (6) et (7) et en construisant une autre fonction de Lyapunov $F(t) = L(t) + cE_1(t)$, qui est clairement équivalente aussi à $E$, on arrive à l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
&\Big[tH_1\Big(\frac{E_1(t) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big)\Big]' \\
&\leq H_1\Big(\frac{E_1(t) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big) \\
&\leq -\frac{1}{\ell}F_1'(t) + \frac{C}{\ell}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)H_0(k(t)), \qquad (9)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
F_1(t) = {} & H_0'\Big(\varepsilon_0\frac{E_1(t) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big)F(t) \\
&+ c_0\Big(E_1(t) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big),
\end{aligned}$$

$$H_1(t) = tH_0'(\varepsilon_0 t)\,,\ \text{pour } \varepsilon_0 > 0,\ H_0(t) = H(D(t)),$$

où $D$ est une fonction positive de classe $C^1$. Une simple intégration de (9) sur $(t_1, t)$ nous donne le résultat de décroissance générale. On va donner aussi lors de ce travail, comme le chapitre précédent, un cas particulier de la fonction $H$ dans lequel on va trouver une estimation explicite de taux de décroissance de la première énergie $E_1$. A la fin de ce chapitre, on va donner un exemple explicite pour illustrer notre résultat.

Ce résultat a fait l'objet d'une publication dans Electron. J. Differ .Equ. Vol. 2014 (2014), No. 202, 1-18. Sous le titre "General boundary stabilization result of memory-type thermoelasticity with second sound".

Tandis que, dans la dernier chapitre, pour trouver le taux de décroissance de l'énergie de la solution du système (5), on utilise principalement les propriétés des fonctions convexes et quelques inégalités telles que l'inégalité de Young généralisée et l'inégalité de Jensen. Ces propriétés ont été introduites par Lasiecka ([9], [18]-[20]) et ont été utilisées par Liu et Zuazua [22] et Alabau-Boussouira [2].

On va considérer les hypothèses suivantes :
– (1) $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante et différentiable.

– (2) g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante dans $C^0$ et il existe des constantes positives $\varepsilon, c_1, c_2$ et une fonction croissante $G \in C^1([0, +\infty))$, avec $G(0) = 0$, où $G$ est une fonction linéaire ou strictement convexe dans $C^2$ sur $(0, \varepsilon]$ telles que

$$c_1 |s| \leq |\mathrm{g}(s)| \leq c_2 |s|^p \quad \text{si } |s| \geq \varepsilon$$

$$s^2 + \mathrm{g}^2 (s) \leq G^{-1} (s\mathrm{g} (s)) \quad \text{si } |s| \leq \varepsilon$$

et $p$ vérifie

$$1 \leq p \leq \frac{n+2}{n-2} \quad \text{si } n > 2$$

$$1 \leq p < \infty \quad \text{si } n \leq 2.$$

Notons ici que la condition (2), avec $\varepsilon = 1$ et $p = 1$, a été introduite et utilisée par Lasiecka et Tataru [18] dans leur étude du comportement asymptotique des solutions des équations des ondes non linéaires avec un amortissement frontière non linéaire, où les auteurs ont obtenu des estimations sur le taux de décroissance de l'énergie dépendantes explicitement de la solution d'une équation différentielle ordinaire non linéaire. Ils ont montré aussi que la monotonicité et la continuité de la fonction g garantissent l'existence de la fonction $G$ avec les propriétés indiquées dans (2).

Pour aboutir à notre résultat, on introduit une fonction de Lyapunov $F$ équivalente à l'énergie de la solution $E$, en utilisant les propriétés de $\alpha$ et g, après quelques techniques et quelques passages intéressants on obtient un résultat de décroissance générale et explicite. A la fin de ce chapitre, nous illustrons notre résultat par des exemples qui ont été déjà considérés par Messaoudi et Mustafa [31].

## 0.4 Aperçu historique

### 0.4.1 Problèmes thermoélastiques classiques

Au cours des dernières décennies, il y a eu plusieurs travaux intéressants sur l'existence, le comportement asymptotique et l'explosion des solutions des problèmes thermoélastiques unidimensionnels et multidimensionnels, ainsi beaucoup d'articles ont été publiés.

On commence par le travail pionnier de Slemrod [45], où il a considéré un problème thermoélastique unidimensionnel non-linéaire et a établi l'existence globale et la décroissance de la solution classique, pour des données initiales petites, où la frontière est sans traction et à température constante ou rigidement maintenu et isolée thermiquement (c'est-à-dire des conditions aux limites de type Neumann-Dirichlet ou de type Dirichlet-Neumann).

Pour des conditions aux limites de type Dirichlet-Dirichlet, le problème d'existence globale des solutions régulières est resté en suspens pendant une longue période. En 1991, Racke et Shibata [43] ont utilisé les méthodes d'analyse spectrale et ont prouvé la décroissance polynômiale de la solution dans le cas linéaire et non-linéaire. Ils ont montré aussi que le taux de décroissance dépend de la régularité des données initiales et ont prouvé que le résultat d'existence globale dépend de la petitesse des données initiales dans l'espace $H^m(0, L)$, où $m$ est un grand nombre.

Dans [35], Muñoz Rivera a prouvé la décroissance exponentielle des solutions des problèmes aux limites de type Dirichlet-Dirichlet en thermoélasticité linéaire, en utilisant la méthode d'énergie, d'une manière unique et originale. Plus tard, Racke, Shibata et Zheng [44] ont étendu les résultats de [35] aux systèmes thermoélastiques non-linéaires et ont amélioré le résultat de Racke et Shibata [43] pour des données initiales $(u_0, u_1)$ dans $H^3(0, L) \times H^2(0, L)$. Rivera et Barreto [36] ont amélioré les résultats de [43], ils ont montré qu'il est possible d'utiliser la méthode d'énergie uniquement pour des données initiales $(u_0, u_1)$ dans $H^2(0, L) \times H^1(0, L)$.

Le problème de Cauchy où le corps thermoélastique occupe la ligne réelle toute entière a été traité par Zheng et Shen [47] et Hrusa et Tarabek [16], ils ont montré l'existence globale dans le temps. En particulier, Hrusa et Tarabek [16] ont combiné certaines estimations de Slemrod [45] qui sont restées valables pour les intervalles non bornés, où l'inégalité de Poincaré n'est plus utilisable, avec quelques estimations supplémentaires pour obtenir l'estimation de l'énergie avec des limites très petites.

Pour le cas multidimensionnel, la situation est différente que celle dans le cas unidimensionnel. Dans le cas multidimensionnel, il a été prouvé que la dissipation donnée par la variation de température n'est pas assez forte pour obtenir un taux de décroissance uniforme des solutions. Cela a été confirmé par le travail pionnier de Dafermos [14], dans lequel il a démontré un résultat de stabilité asymptotique. Il a également indiqué qu'il n'a pas de décroissance de solution si le domaine est une boule. Plus tard, Lebeau et Zuazua [21] ont amélioré le travail de [14], où les auteurs ont prouvé que le taux de décroissance n'était jamais uniforme lorsque le domaine est convexe. Ainsi, des mécanismes d'amortissement supplémentaires sont nécessaires pour obtenir la décroissance uniforme.

En particulier, Jian, Muñoz Rivera et Racke [17] ont montré la décroissance uniforme de la solution à symétrie radiale dans un espace de deux ou trois dimensions.

En outre, Pereira et Menzala [40] ont introduit un amortissement linéaire interne et ont établi également la décroissance uniforme de la solution. Un résultat similaire a été obtenu par Liu [23] pour un système avec un amortissement frontière linéaire dépendant de la vitesse agissant sur le composant élastique du système et par Liu et Zuazua [24] au moyen d'un amortissement frontière non linéaire.

Rivera et Racke [37] ont considéré un modèle magnéto-thermoélastique au moyen d'un amortissement de type mémoire agissant sur la frontière. Si $g$ est la fonction de relaxation et $k$ est le noyau résolvant de $(-g'/g(0))$, ils ont montré que l'énergie associée à la solution décroît de façon exponentielle (polynômiale) si $k$ et $(-k')$ décroissent de façon exponentielle (polynômiale). Messaoudi et Al-Shehri [28] ont considéré le système suivant

$$\begin{gathered}
u_{tt} - \mu \triangle u - (\mu + \lambda) \nabla (divu) + \beta \nabla \theta = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\
c\theta_t - \kappa \triangle \theta + \beta divu_t = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\
u(.,0) = u_0, \quad u_t(.,0) = u_1, \quad \theta(.,0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega \\
u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times [0, +\infty) \\
u(x,t) = -\int_0^t g(t-s) \left( \mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu + \lambda)(divu)\nu \right)(s)\, ds \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, +\infty) \\
\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times [0, +\infty),
\end{gathered} \tag{10}$$

où le corps $\Omega$ est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, avec une frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$,

$u = u(x,t) \in \mathbb{R}^n$, $c, \kappa, \beta, \mu, \lambda$ sont des constantes positives, et ils ont trouvé un résultat de décroissance générale si la fonction $k$ décroît d'une manière générale.

Récemment, Mustafa [39] a traité le système (10) pour $k$ vérifie l'hypothèse suivante :
(A)

$$k(0) > 0, \quad \lim_{t\to\infty} k(t) = 0, \quad k'(t) \leq 0$$
$$k''(t) \geq H(-k'(t)), \quad \forall t > 0,$$

telles que $H$ est une fonction positive, linéaire ou strictement croissante, strictement convexe de classe $C^2$ sur $(0, r]$, $r < 1$, $H(0) = 0$.

Il a prouvé, pour $u_0 = 0$ sur $\Gamma_1$, une décroissance explicite de l'énergie où la décroissance exponentielle et la décroissance polynômiale sont seulement des cas particuliers.

### 0.4.2 Problèmes thermoélastiques avec second son

Au cours des quatre dernières décennies, de nombreux chercheurs se sont intéressés à la thermoélasticité avec second son et plusieurs résultats concernant l'existence, l'explosion et le comportement asymptotique des solutions ont été établis.

Nous commençons avec le travail pionnier de Tarabek [46], où il a traité des problèmes liés au système

$$\begin{aligned} u_{tt} - a(u_x, \theta, q)u_{xx} + b(u_x, \theta, q)\theta_x &= \alpha_1(u_x, \theta)qq_x \\ \theta_t + g(u_x, \theta, q)q_x + d(u_x, \theta, q)u_{tx} &= \alpha_2(u_x, \theta)qq_t \\ \tau(u_x, \theta)q_t + q + k(u_x, \theta)\theta_x &= 0, \end{aligned} \tag{11}$$

dans des domaines bornés et non bornés et pour lesquels il a établi des résultats d'existence globale pour des petites données initiales. Il a également montré que ces solutions "classiques" tendent vers l'équilibre quand $t$ tend vers l'infini, mais pas de taux de décroissance a été donné. Dans son travail, Tarabek a utilisé l'argument de l'énergie et a exploité certaines relations de la seconde loi de la thermodynamique pour surmonter la difficulté résultante de l'absence de l'inégalité de Poincaré dans les domaines non bornés. En ce qui concerne le comportement asymptotique, Racke [42] a discuté (11) et a établi des résultats de décroissance exponentielle pour plusieurs problèmes aux limites linéaires et non linéaires. En particulier, il a étudié (11) pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$,

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad \theta(t,0) = \theta(t,1) = \bar{\theta}, \quad t \geq 0$$

et il a montré, pour des données initiales suffisamment petites, que la solution décroit d'une manière exponentielle vers l'état d'équilibre. Messaoudi et Said-Houari [32] ont étendu le résultat de [42] au cas où $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$.

Pour le cas multidimensionnel ($n = 2, 3$), Racke [41] a établi un résultat d'existence pour le problème

$$\begin{gathered}
u_{tt} - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div} u) + \beta\nabla\theta = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\
\theta_t + \gamma \operatorname{div} q + \delta \operatorname{div} u_t = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\
\tau q_t + q + \kappa\nabla\theta = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\
u(.,0) = u_0, \quad u_t(.,0) = u_1, \quad \theta(.,0) = \theta_0, \quad q(.,0) = q_0 \quad \text{dans } \Omega \\
u = \theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times [0,+\infty),
\end{gathered} \tag{12}$$

où $\Omega$ est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\Gamma$, $u = u(x,t)$, $q = q(x,t) \in \mathbb{R}^n$, $\mu, \lambda, \beta, \gamma, \delta, \tau, \kappa$ sont des constantes positives, $\mu$, $\lambda$ étant respectivement les modules de Lamé, $\tau$ est le temps de relaxation, un petit paramètre par rapport aux autres. En particulier, si $\tau = 0$, (12) se réduit au système thermoélastique classique dans lequel le flux de chaleur est donné par la loi de Fourier au lieu de la loi de Cattaneo. Il a aussi prouvé, sous la condition $rotu = rotq = 0$, un résultat de décroissance exponentielle pour (12). Ce résultat s'applique automatiquement à la solution à symétrie radiale comme un cas particulier. Messaoudi [27] a considéré (12) en présence d'un terme source dans la première équation et a prouvé que la solution existe localement et explose dans le cas où l'énergie initiale est négative. Ces résultats ont ensuite été étendu dans le cas où l'énergie initiale est positive par Messaoudi et Said-Houari [33].

Messaoudi et Al-Shehri [29] ont traité le système thermoélastique (12) au moyen d'une condition de type mémoire sur une partie de la frontière $\Gamma$, ils ont montré, si $k$ est le noyau résolvant de $(-g'/g(0))$, que l'énergie décroît à un taux polynômial dans le cas où $(-k')$ décroît d'une manière exponentielle. Récemment, Mustafa dans [38] a traité aussi le système (12) au moyen d'une condition au bord de type mémoire pour $k$ vérifie l'hypothèse (A) et il a prouvé, pour $u_0 = 0$ sur $\Gamma_1$, une décroissance explicite de l'énergie qui n'est pas nécessairement exponentielle ou polynômiale.

## 0.5 Notations, rappels et quelques inégalités utiles

Cette section est consacrée à un rappel général qui consiste à choisir le cadre fonctionnel. On introduit les espaces fonctionnels nécessaires à l'étude de nos problèmes, ainsi quelques inégalités et notions élémentaires qui seront très utiles par la suite.

On note

1. $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ la norme euclidienne de $x,\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
2. $\overrightarrow{\nu} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ le vecteur normal unitaire extérieur en un point du bord de $\Omega$.

Pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ régulière, on note :

1. $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|$.
2. $\nabla u = \left( \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right) = \text{grad } u$ : Le gradient de $u$.
3. $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ : Laplacien de $u$.

Pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ régulière avec $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, on note :

1. $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, ..., \Delta u_n)$.
2. $\operatorname{div} u = \nabla . u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$ : La divergence de $u$.
3. Si $n = 2,\ rot\ u = \nabla \wedge u = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}$.

4. Si $n=3,\ rot\ u = \nabla \wedge u = \left( \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$.

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $\partial\Omega$ la frontière de $\Omega$.

1. $C(\Omega)$ ou $C^o(\Omega)$ : Ensemble des fonctions continues dans $\Omega$.
2. $C_c^o(\Omega)$ : Ensemble des fonctions continues dans $\Omega$ à support compact.
3. $C^k(\Omega)$ : Ensemble des fonctions de classe $k$ dans $\Omega$.
4. $C_c^k(\Omega)$ : Ensemble des fonctions de $C^k(\Omega)$ à support compact.
5. $C^\infty(\Omega)$ : Ensemble des fonctions indéfiniment différentiables.
6. $D(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ : Ensemble des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact.

### 1. Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Soit $p \in \mathbb{R},\ 1 \leq p < \infty$, et $\Omega$ un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$, on définit

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{telle que } u \text{ mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty \right\}.$$

Muni de la norme suivante

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |u(x)|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$ :

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ u \text{ mesurable et il existe une constante } c$$

$$\text{telle que } |u(x)| \leq c,\ \text{pp sur } \Omega \}.$$

Muni de cette norme :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ c,\ |u(x)| \leq c,\ \text{pp sur } \Omega \}.$$

Soit $1 \leq \sigma \leq \infty$, on désigne par $\sigma'$ l'exposant conjugué de $\sigma$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma'} = 1.$$

### 2. Inégalité de Hölder

Soient $u$ et $v$ deux fonctions respectivement dans $L^{\sigma}(\Omega)$ et $L^{\sigma'}(\Omega)$, alors le produit $uv$ est dans $L^1(\Omega)$ avec

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L^{\sigma}(\Omega)} \|v\|_{L^{\sigma'}(\Omega)} .$$

**3. Inégalité de Young**

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2,\ \forall \varepsilon > 0,\ ab \leq \frac{\varepsilon}{\sigma} a^{\sigma} + \frac{1}{\sigma' \varepsilon^{\frac{\sigma'}{\sigma}}} b^{\sigma'}.$$

Dans le cas particulier $\sigma = 2$, on a

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2,\ \forall \varepsilon > 0,\ ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2.$$

**4. Les espaces de Sobolev**

Les espaces de Sobolev sont un outil essentiel pour l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, les solutions de ces équations appartiennent plus naturellement à un espace de Sobolev qu'à un espace de fonctions continues partiellement dérivables au sens classique. Pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, ou pour la démonstration des résultats que nous annonçons ici, on pourra consulter par exemple ([6] (chapitres 8 et 9) et [1]).

Notons que dans toute la suite de cette section, $\Omega$ désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega = \Gamma$.

Soit $m > 1$ un entier et $p$ un réel tel que $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) :\ D^{\alpha} u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq m \} .$$

Bien entendu, la dérivation est à prendre au sens de distribution.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est de Banach pour la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Pour $p = 2$, on pose $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, ce dernier est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

et il est un espace de Banach pour la norme associée

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

On désigne par $W_0^{m,p}(\Omega)$, l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Pour $p = 2$ et $m = 1$, l'espace $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme et le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Maintenant, on désigne par $W^{-m,q}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ et par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$, de plus, on a

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

avec injections continues.

### 5. Injections de Sobolev

Les injections de Sobolev sont très utilisées lorsqu'on étudie les équations aux dérivées partielles. Elle fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes des espaces de Lebesgue.

**Théorème 0.5.1** *(Rellich-Kondrachov)*
*On suppose que $\Omega$ est borné de classe $C^1$. On a*

1. *Si* $p < n$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega),\ \forall q \in [1, p^*)$, *où* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.
2. *Si* $p = n$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega),\ \forall q \in [1, +\infty)$.
3. *Si* $p > n$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,

*avec injections compactes.*

Notons que le Théorème précédent est vrai pour $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $\Omega$ ouvert borné quelconque.

**6. Inégalité de Poincaré**

On suppose que $\Omega$ est un ouvert borné. Alors il existe une constante $c_p$ (dépendant de $\Omega$ et $p$ seulement) telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},\ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ (1 \leq p < \infty). \tag{13}$$

**Proposition 0.5.2** *Si $\Omega$ est de classe $C^2$, alors $(-\Delta)^{-1}\left(L^2(\Omega)\right) \subset H^2(\Omega)$ et l'application linéaire $(-\Delta)^{-1}$ de $L^2(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$ est aussi bornée.*

**7. Notions de trace au bord**

Il n'est pas nécessaire qu'une fonction $u$ de l'espace $L^2(\Omega)$ ait un représentant continu pour que l'on puisse considérer sa restriction à $\Gamma$. C'est ce que nous appellerons la trace de $u$ sur le bord.

**Théorème 0.5.3** *Soit $\Omega$ un ouvert de classe $C^1$, alors il existe un opérateur linéaire continu, appelé opérateur trace et noté $\gamma_0$ de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ qui coïncide avec l'opérateur de restriction usuel pour les fonctions continues. En particulier, il existe une constante $c_1$ qui ne dépend que de $\Omega$, telle que :*

$$\|\gamma_0 u\|_{L^2(\Gamma)} \leq c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)},\ \forall u \in H^1(\Omega).$$

Si on suppose que $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ constitue une partition de $\Gamma$, avec $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$, on définit alors

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega) :\ u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_0\right\}.$$

Cet espace est fermé dans $H^1(\Omega)$ comme noyau de l'application (linéaire) continue $r \circ \gamma_0$ où $r : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma_0)$ est l'application restriction. Donc $\left(H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \|.\|_{H_1(\Omega)}\right)$ est un Hilbert, avec

$$\forall u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega),\ \|u\|_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

De plus, on a l'injection continue $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow L^m(\Gamma_1),\ 1 \leq m < \dfrac{2(n-1)}{n-2}$, c'est-à-dire il existe une constante $c_0$, telle que

$$\|u\|_{L^m(\Gamma_1)} \leq c_0 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{14}$$

**8. Formule de Green**

Maintenant que nous somme en mesure de donner un sens à la restriction d'une fonction d'un espace de Sobolev sur le bord d'un ouvert.

**Proposition 0.5.4** *Soit $\Omega$ un ouvert de classe $C^1$, alors :*

1. *Pour toutes fonctions $u,\ v \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma uv\nu_i d\Gamma,$$

*où $\nu_i = \nu e_i$. Noter que l'intégrale de surface a un sens puisque $u, v \in L^2(\Gamma)$.*

2. *Pour toutes fonctions $u \in H^2(\Omega)$, et $v \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega \Delta uv dx = -\int_\Omega \nabla u . \nabla v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\Gamma, \tag{15}$$

*où*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \nu_i.$$

**9. Equations intégrales de Volterra**

Si on définit le produit $*$ par

$$(u * v)(t) = \int_0^t u(t-s)v(s)ds. \tag{16}$$

Alors, l'équation suivante

$$\varphi(t) = f(t) + (R * \varphi)(t) \tag{17}$$

est une équation intégrale de Volterra de seconde espèce, telles que $f$ et $R$ sont des fonctions connues et $\varphi$ est la fonction inconnue. La fonction $R$ s'appelle le noyau de l'équation intégrale de Volterra. Sa solution est donnée par la formule suivante

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t k(t-s)f(s)ds = f(t) + (k * f)(t). \tag{18}$$

Où la fonction $k$ est le noyau résolvant de $R$, qui est définie par

$$k(t) = R(t) + (R * k)(t). \tag{19}$$

**10. La règle de Leibniz**

Elle donnée par la formule

$$\frac{d}{dt}\int_{A(t)}^{B(t)} f(t,s)ds = \int_{A(t)}^{B(t)} \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}ds + f(t,B(t))\frac{dB(t)}{dt} - f(t,A(t))\frac{dA(t)}{dt}. \tag{20}$$

**11. Inégalité de Jensen**

L'inégalité de Jensen aura un rôle très important dans la démonstration de notre résultat principal.

Si $F$ est une fonction convexe sur $[a,b]$, $f : \Omega \to [a,b]$ et $h$ sont des fonctions intégrables sur $\Omega$, $h(x) \geq 0$, et $\int_\Omega h(x)dx = \ell > 0$, alors l'inégalité de Jensen affirme que

$$F\left[\frac{1}{\ell}\int_\Omega f(x)h(x)dx\right] \leq \frac{1}{\ell}\int_\Omega F[f(x)]h(x)dx. \tag{21}$$

N'importe quelle autre notion sera énoncée dans le chapitre où elle ira apparaître.

Dans toute la suite, $c$ et $C$ désignent des constantes génériques qui peuvent changer d'une ligne à une autre.

# Chapitre 1

# Stabilisation frontière d'un problème thermoélastique classique de type mémoire

Dans ce chapitre, nous allons considérer un système thermoélastique classique avec un amortissement frontière qui décrit un modèle de vibration dans un corps thermoélastique, où la conduction de la chaleur est donnée par la loi de Fourier (1) ce qui signifie que les perturbations thermiques se propagent avec une vitesse infinie. Autrement dit, on va considérer le système suivant :

$$\begin{gathered}
u_{tt}-\mu\triangle u-(\mu+\lambda)\nabla(divu)+\beta\nabla\theta=0 \quad \text{dans } \Omega\times(0,+\infty)\\
c\theta_t-\kappa\triangle\theta+\beta divu_t=0 \quad \text{dans } \Omega\times(0,+\infty)\\
u(.,0)=u_0,\quad u_t(.,0)=u_1,\quad \theta(.,0)=\theta_0 \quad \text{dans } \Omega\\
u=0 \quad \text{sur } \Gamma_0\times[0,+\infty)\\
u(x,t)=-\int_0^t g(t-s)\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\nu}+(\mu+\lambda)(divu)\nu\right)(s)\,ds \quad \text{sur } \Gamma_1\times[0,+\infty)\\
\theta=0 \quad \text{sur } \Gamma\times[0,+\infty),
\end{gathered}\tag{1.1}$$

où le corps $\Omega$ est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ ($n\geq 2$) avec une frontière suffisamment régulière $\Gamma$, tels que $\{\Gamma_0,\Gamma_1\}$ est une partition de $\Gamma$, $\nu$ est la normale extérieure unitaire à $\Gamma$, $u=u(x,t)\in\mathbb{R}^n$ est le vecteur de déplacement, $\theta=\theta(x,t)$ est la température absolue. Le noyau $g$ est la fonction de relaxation qui est positive et différentiable avec $g(0)\neq 0$. Les coefficients $c, \kappa, \mu, \lambda$ sont des constantes positives où $\mu, \lambda$ sont des modules de Lamé et $\beta \neq 0$ est un nombre réel. La condition au bord sur $\Gamma_1$ désigne une équation intégrale qui exprime l'amortissement non local de l'effet de certaine mémoire, en fait, les conditions aux limites non locale apparaissent principalement lorsque les données sur la frontière ne peuvent pas êtres mesurées directement, mais seulement leurs valeurs moyennes sont connues. D'un point de vue physique, cette condition et la condition $u = 0$ sur $\Gamma_0$ signifient que le domaine $\Omega$ est maintenu par un corps solide sur la première partie de sa frontière $\Gamma_0$ et par un corps viscoélastique sur l'autre partie $\Gamma_1$. On va voir que la dissipation donnée par ce terme de type mémoire est suffisamment forte pour obtenir la stabilisation du système (1.1).

Le présent chapitre est organisé comme suit :
Dans la section 1.1 on va donner quelques notations et les hypothèses nécessaires. Notre résultat et sa démonstration seront présentés respectivement dans les sections 1.2 et 1.3 et on termine par un exemple explicite pour illustrer notre résultat principal.

## 1.1 Notations et hypothèses

Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance de la fonction $u$ par rapport à $x$ où par rapport à $t$.

Afin d'établir notre résultat, on aura besoin des hypothèses suivantes :
(A1) Fixons un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et posons $m(x) = x - x_0$. Supposons que les partitions $\Gamma_0$ et $\Gamma_1$ sont fermées, disjointes et $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$, telles que

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : \; m(x).\nu \leq 0\}, \quad \Gamma_1 = \{x \in \Gamma : \; m(x).\nu \geq \delta > 0\}.$$

Pour estimer le terme $\left(\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu+\lambda)(\operatorname{div} u)\nu\right)$, on dérive la troisième équation du système (1.1) par rapport à $t$, en utilisant la formule de Leibniz (20) et le produit de convolution qui est défini dans (16), nous obtenons

$$\left(\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu+\lambda)(\operatorname{div} u)\nu\right) + \frac{1}{g(0)}\left(g' * \left(\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu+\lambda)(\operatorname{div} u)\nu\right)\right) = -\frac{1}{g(0)}u_t.$$

L'équation ci-dessus est une forme d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce (17), dont sa solution est donnée comme suit (voir (18))

$$\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu+\lambda)(\operatorname{div} u)\nu = -\frac{1}{g(0)}(u_t + k * u_t), \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, +\infty),$$

où la fonction $k$ est le noyau résolvant (voir (19)) de $(-g'/g(0))$. Autrement dit,

$$k + \frac{1}{g(0)}(g' * k) = -\frac{1}{g(0)}g'.$$

En Posant $\eta = 1/g(0)$ et en utilisant l'intégration par parties, nous arrivons à

$$\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu+\lambda)(\operatorname{div} u)\nu = -\eta(u_t + k(0)u - k(t)u_0 + k' * u), \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, +\infty). \tag{1.2}$$

Puisque nous nous sommes intéressés par les fonctions de relaxation à décroissance plus générale, il est important de savoir si la fonction $k$ hérite de quelques propriétés de la fonction de relaxation $g$. Le lemme suivant répond à cette question.

Soit $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$, une fonction continue et $k$ son noyau de résolvant, c'est-à-dire :

$$k(t) = h(t) + (k * h)(t).$$

Il est évident que la fonction $k$ est continue et positive (voir [12, 37]).

**Lemme 1.1.1** *Supposons que*

$$h(t) \leq c_0 e^{-\int_0^t \gamma(\zeta) d\zeta}$$

*où* $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ *est une fonction décroissante et vérifiant, pour certaine constante positive* $\varepsilon < 1$,

$$c_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^s (1-\varepsilon)\gamma(\zeta) d\zeta} ds < \frac{1}{c_0}.$$

*Alors, la fonction* $k$ *satisfait*

$$k(t) \leq \frac{c_0}{1 - c_0 c_1} e^{-\epsilon \int_0^t \gamma(\zeta) d\zeta}.$$

**Preuve.** voir ([34]). ■

**Remarque 1.1.2** *Le résultat du Lemme 1.1.1 n'est qu'un cas particulier, voir [34] pour plus de détails.*

En se basant sur le lemme 1.1.1, dans toute la suite on va utiliser l'équation (1.2) à la place de la troisième équation du système (1.1). De plus, supposons que la fonction $k$ vérifie l'hypothèse suivante :
(B1) $k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe $C^2$ telles que

$$k(0) > 0, \quad \lim_{t\to\infty} k(t) = 0, \quad k'(t) \leq 0$$

et il existe une fonction positive $H \in C^1(\mathbb{R}^+)$ avec $H(0) = 0$, $H$ linéaire ou strictement croissante et $H$ strictement convexe de classe $C^2$ sur $(0, r]$, $r < 1$, telle que

$$k''(t) \geq H(-k'(t)), \quad \forall t > 0$$

et la fonction $H'$ est également convexe et de classe $C^2$ sur $(0, r]$.
Définissons maintenant :

$$(\varphi \circ \psi)(t) = \int_0^t \varphi(t-s)|\psi(t) - \psi(s)|^2 ds.$$

**Lemme 1.1.3 ([37])** *Si $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R}^+)$, alors*

$$\begin{aligned}(\varphi * \psi)(t)\psi_t(t) = &-\frac{1}{2}\varphi(t)|\psi(t)|^2 + \frac{1}{2}\left(\varphi' \circ \psi\right)(t)\\ &- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big( \left(\varphi \circ \psi\right)(t) - \Big(\int_0^t \varphi(s)ds\Big)|\psi(t)|^2\Big).\end{aligned} \tag{1.3}$$

Avant de définir la solution du système (1.1), on considère l'espace suivant :

$$V = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \; v = 0 \;\text{ sur }\; \Gamma_0\}.$$

En appliquant la méthode de Galerkin comme dans [11], on montre que notre système (1.1) est bien posé au sens suivant :

**Théorème 1.1.4** *Soient $k \in W^{2,1}(\mathbb{R}^+) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)$, $u_0 \in (H^2(\Omega) \cap V)^n$, $\theta_0 \in (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$ et $u_1 \in V^n$, avec*

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \eta u_0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1. \tag{1.4}$$

*Alors, le système (1.1) admet une seule solution forte $(u, \theta)$ vérifiant*

$$\begin{aligned} u &\in C\left(\mathbb{R}^+; \left(H^2(\Omega) \cap V\right)^n\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}^+; V^n\right) \cap C^2\left(\mathbb{R}^+; \left(L^2(\Omega)\right)^n\right),\\ \theta &\in C\left(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}^+; H^1_0(\Omega)\right).\end{aligned}$$

On introduit la fonctionnelle d'énergie totale associée au problème (1.1) par

$$
\begin{aligned}
E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ |u_t|^2 + \mu |\nabla u|^2 + (\mu + \lambda) (divu)^2 + c\theta^2 \right] dx \\
- \frac{\eta}{2} \int_{\Gamma_1} (k' \circ u)(t) d\Gamma_1 + \frac{\eta}{2} \int_{\Gamma_1} k(t) |u|^2 d\Gamma_1.
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

## 1.2 La décroissance générale de l'énergie de la solution

Dans cette section on va énoncer notre résultat principal.

**Théorème 1.2.1** *Soit* $(u_0, u_1, \theta_0) \in \left( V^n \times (L^2(\Omega))^n \times H_0^1(\Omega) \right)$. *Supposons que les hypothèses* $(A1)$ *et* $(B1)$ *sont satisfaites. Alors, il existe des constantes positives* $k_1,\ k_2,\ k_3,\ c_1,\ c_2,\ t_1$ *et* $\varepsilon_0$ *telles que :*

*(I) Dans le cas particulier* $H(t) = ct^p$, *tel que* $1 \leq p < \frac{3}{2}$, *la solution du problème* (1.1) *satisfait*

$$
\begin{aligned}
E(t) \leq k_3 G^{-1}(k_1 t + k_2) \Big[ c_1 - c_2 \left( \textstyle\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 \right) \\
\times \textstyle\int_t^{\infty} \frac{H(k^2(s))}{G^{-1}(k_1 s + k_2)} ds \Big] \\
- \tfrac{\eta}{2} \left( \textstyle\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 \right) \textstyle\int_t^{\infty} k^2(s) ds, \quad \text{pour tout } t \geq t_1,
\end{aligned}
$$

*où* $G(t) = \int_t^1 \frac{1}{sH'(\varepsilon_0 s)} ds.$

*(II) Dans le cas général, la solution du problème* (1.1) *vérifie*

$$
\begin{aligned}
E(t) \leq k_3 H_1^{-1}(k_1 t + k_2) \Big[ c_1 - c_2 \left( \textstyle\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 \right) \\
\times \textstyle\int_t^{\infty} \frac{H_0(k^2(s))}{H_1^{-1}(k_1 s + k_2)} ds \Big] \\
- \tfrac{\eta}{2} \left( \textstyle\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 \right) \textstyle\int_t^{\infty} k^2(s) ds, \quad \text{pour tout } t \geq t_1,
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

*telles que*

$$
H_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{sH_0'(\varepsilon_0 s)} ds, \quad H_0(t) = H(D(t)),
$$

*où $D$ est une fonction positive de classe $C^2$, avec $D(0) = 0$, pour laquelle la fonction $H_0$ est une fonction strictement croissante, strictement convexe de classe $C^2$ sur $(0, r]$, sa dérivée $H_0'$ est une fonction convexe de classe $C^2$ sur $(0, r]$ et*

$$\int_0^{+\infty} \frac{-k'(s)}{H_0^{-1}(k''(s))} ds < +\infty. \tag{1.7}$$

**Remarque 1.2.2** ***1.*** *Si $u_0 = 0$ sur $\Gamma_1$, on obtient alors les mêmes résultats de Mustafa [39].*
***2.*** *En utilisant les propriétés de la fonction $H$, on peut montrer facilement que la fonction $H_1$ est strictement décroissante et convexe sur $(0, 1]$, avec $\lim_{t\to 0} H_1(t) = +\infty$. Ainsi, le Théorème 1.2.1 assure que*

$$\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0.$$

***3.*** *Les estimations de la décroissance usuelle ont été déjà montrées lorsque le noyau $k$ vérifie la condition $k'' \geq d(-k')^p$, $1 \leq p < 3/2$, elles deviennent simplement des cas particuliers de notre travail pour lesquelles on va fournir une preuve.*
***4.*** *Puisque $\lim_{t\to+\infty} k(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty}(-k'(t))$ ne peut pas être égale à un nombre positif, ce qui signifie clairement que $\lim_{t\to+\infty}(-k'(t)) = 0$. On suit la même technique, on déduit également que $\lim_{t\to+\infty} k''(t) = 0$. Donc, il existe $t_1 > 0$ suffisamment grand tels que $k'(t_1) < 0$ et*

$$\max\{k(t), -k'(t), k''(t)\} < \min\{r, H(r), H_0(r)\}, \quad \forall t \geq t_1. \tag{1.8}$$

*Par suite, puisque la fonction $k'$ est croissante, $k'(0) < 0$ et $k'(t_1) < 0$, on a : $k'(t) < 0$ pour tout $t \in [0, t_1]$ et*

$$0 < -k'(t_1) \leq -k'(t) \leq -k'(0), \quad \forall t \in [0, t_1].$$

*Ainsi, puisque la fonction $H$ est positive et continue, nous avons*

$$a \leq H(-k'(t)) \leq b, \quad \forall t \in [0, t_1],$$

*où $a$ et $b$ sont des constantes positives. Par conséquent, pour tout $t \in [0, t_1]$, on a*

$$k''(t) \geq H(-k'(t)) \geq a = \frac{a}{k'(0)} k'(0) \geq \frac{a}{k'(0)} k'(t)$$

*ce qui implique que*

$$k''(t) \geq d(-k'(t)), \quad \forall t \in [0, t_1], \tag{1.9}$$

*où $d$ est une constante positive.*

**Lemme 1.2.3** *Si les hypothèses du Théorème 1.2.1 sont vérifiées, alors l'énergie associée au problème* (1.1) *satisfait*

$$E'(t) \leq -\kappa \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx - \frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma_1 + \frac{\eta}{2} k'(t) \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 \\ - \frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} (k'' \circ u)(t)\, d\Gamma_1 + \frac{\eta}{2} k^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1. \tag{1.10}$$

**Preuve.** On multiple l'équation $(1.1)_1$ par $u_t$ et $(1.1)_2$ par $\theta$ et on intègre sur $\Omega$, en utilisant (1.2), (1.3) et la formule de Green (15), nous obtenons

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\kappa \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx - \eta \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma_1 + \eta k(t) \int_{\Gamma_1} (u_0.u_t)\, d\Gamma_1 \\ &\quad + \frac{\eta}{2} k'(t) \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 - \frac{\eta}{2} \int_{\Gamma_1} (k'' \circ u)(t)\, d\Gamma_1. \end{aligned}$$

Ensuite, l'inégalité de Young implique que

$$\int_{\Gamma_1} k(t)(u_0.u_t)\, d\Gamma_1 \leq \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma_1 + \frac{1}{2} k^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1$$

et par conséquent, on obtient (1.10). ■

**Remarque 1.2.4** *(a) Si* $u_0 = 0$ *sur* $\Gamma_1$, *alors* $E'(t) \leq 0$, *d'où* $E(t) \leq E(0)$.
*(b) Si* $u_0 \neq 0$ *sur* $\Gamma_1$, *alors*

$$E(t) \leq E(0) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\right) \int_0^t k^2(s)\, ds \leq A, \tag{1.11}$$

*pour une certaine constante* $A > 0$.

**Lemme 1.2.5** *Sous les hypothèses (A1) et (B1), la solution de* (1.1) *vérifie, pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t.[M + (n-1)u]\, dx \\ &\leq -\int_\Omega |u_t|^2 dx - \mu \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\mu+\lambda}{2}\int_\Omega (divu)^2 dx \\ &+ C\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx - \frac{\mu\delta}{2}\int_{\Gamma_1} |\nabla u|^2 d\Gamma_1 - (\mu+\lambda)\delta \int_{\Gamma_1} (divu)^2 d\Gamma_1 \\ &+ \frac{C}{\mu}\int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma_1 + Ck^2(t)\int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 + Ck^2(t)\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 \\ &- \frac{C\mu}{\varepsilon}\int_{\Gamma_1} (k' \circ u)(t)\, d\Gamma_1 + \varepsilon \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1, \end{aligned} \tag{1.12}$$

*où*

$$M = (M_1, M_2, ..., M_n)^T, \quad \textit{tel que} \;\; M_i = 2m.\nabla u^i$$

*et $C$ est une constante positive.*

Pour la preuve du lemme ci-dessus, voir [28, 39].

## 1.3 Preuve du Théorème 1.2.1

Dans cette section, on va prouver notre résultat principal.
On définit la fonction de Lyapunov $L$ comme suit

$$L(t) = NE(t) + \int_\Omega u_t.\left[M + (n-1)u\right] dx,$$

pour $N > 0$ à choisir ultérieurement. Ensuite, à partir de (1.10) et (1.12), nous avons

$$\begin{aligned}
L'(t) \;\; \leq \;\; & -(N\kappa - C)\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx - \frac{N}{2}\eta\int_{\Gamma_1}|u_t|^2 dx - \frac{N}{2}\eta\int_{\Gamma_1}(k'' \circ u)\, d\Gamma_1 \\
& + \frac{N}{2}\eta k^2(t)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1 - \int_\Omega |u_t|^2 dx - \mu\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
& - \frac{\mu\delta}{2}\int_{\Gamma_1}|\nabla u|^2 d\Gamma_1 - \frac{1}{2}(\mu+\lambda)\int_\Omega (divu)^2 dx \\
& -(\mu+\lambda)\int_{\Gamma_1}(divu)^2 d\Gamma_1 + \frac{C}{\mu}\int_{\Gamma_1}|u_t|^2 d\Gamma_1 + \frac{C}{\varepsilon}k^2(t) \\
& \times\left[\int_{\Gamma_1}|u|^2 d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\right] - \frac{C\mu}{\varepsilon}\int_{\Gamma_1}(k' \circ u)\, d\Gamma_1 \\
& + \varepsilon\int_{\Gamma_1}|u|^2 d\Gamma_1.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de trace (14), on arrive à

$$\begin{aligned}
L'(t) \;\; \leq \;\; & -\int_\Omega |u_t|^2 dx - (N\kappa - C)\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx - \left(\mu - \varepsilon c_0 - \frac{C}{\varepsilon}k^2(t)\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
& - \frac{1}{2}(\mu+\lambda)\int_\Omega (divu)^2 dx - \left(\frac{N}{2}\eta - \frac{C}{\mu}\right)\int_{\Gamma_1}|u_t|^2 d\Gamma_1 \\
& - \frac{N}{2}\eta\int_{\Gamma_1}(k'' \circ u)\, d\Gamma_1 - \frac{C\mu}{\varepsilon}\int_{\Gamma_1}(k' \circ u)(t)\, d\Gamma_1 - (\mu+\lambda)\int_{\Gamma_1}(divu)^2 d\Gamma_1 \\
& + \left(\frac{N}{2}\eta + \frac{C}{\varepsilon}\right)k^2(t)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1. \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

A ce stade, on fixe $\varepsilon$ suffisamment petit de sorte que $\varepsilon c_0 = \frac{1}{2}\mu$ et on choisit $N$ assez grand tels que

$$L \sim E \tag{1.14}$$

et

$$a_1 = \frac{N}{2}\eta - \frac{C}{\mu} > 0,\ \ a_2 = N\kappa - C > 0 \text{ et } a_3 = \frac{N}{2}\eta + \frac{C}{\varepsilon}.$$

Ainsi, (1.13) se réduit à

$$\begin{aligned} L'(t) \quad \leq & \quad -\int_{\Omega} |u_t|^2\, dx - \left(\frac{\mu}{2} - \frac{C}{\varepsilon}k^2(t)\right)\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{2}(\mu+\lambda)\int_{\Omega} (divu)^2\, dx \\ & -a_1 \int_{\Gamma_1} |u_t|^2\, d\Gamma_1 - a_2 \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2\, dx - 2c_0 C \int_{\Gamma_1} (k' \circ u)\, d\Gamma_1 \\ & +a_3 k^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2\, d\Gamma_1. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\lim_{t\to+\infty} k(t) = 0$ et l'inéglité de Poincaré (13), il résulte, pour $t_1$ suffisamment grand, que

$$L'(t) \leq -mE(t) + c'k^2(t)\int_{\Gamma_1} |u_0|^2\, d\Gamma_1 - c\int_{\Gamma_1} (k' \circ u)(t)\, d\Gamma_1, \quad \forall t \geq t_1 \tag{1.15}$$

où $m,\ c'$ et $c$ sont des constantes positives.

On utilise maintenant (1.9) pour conclure que, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned} & -\int_0^{t_1} k'(s)\int_{\Gamma_1} |u(t) - u(t-s)|^2\, d\Gamma_1 ds \\ \leq & \quad \frac{1}{d}\int_0^{t_1} k''(s)\int_{\Gamma_1} |u(t) - u(t-s)|^2\, d\Gamma_1 ds, \end{aligned} \tag{1.16}$$

d'une part. D'autre part, de (1.10) il vient

$$\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} (k'' \circ u)(t)\, d\Gamma_1 \leq -E'(t) + \frac{\eta}{2}k^2(t)\int_{\Gamma_1} |u_0|^2\, d\Gamma_1. \tag{1.17}$$

Par conséquent, (1.16) devient

$$-\int_0^{t_1} k'(s)\int_{\Gamma_1} |u(t) - u(t-s)|^2\, d\Gamma_1 ds \leq -c\left[E'(t) - \frac{\eta}{2}k^2(t)\int_{\Gamma_1} |u_0|^2\, d\Gamma_1\right]. \tag{1.18}$$

Ensuite, en prenant $F(t) = L(t) + cE(t)$, on peut facilement déduire que

$$\alpha_1 F(t) \leq E(t) \leq \alpha_2 F(t) \tag{1.19}$$

pour deux constantes positives $\alpha_1$ et $\alpha_2$ convenablement choisies. En utilisant ensuite (1.15) et (1.18), on obtient, pour tout $t \geq t_1$ et pour une certaine constante positive $C$,

$$F'(t) \leq -mE(t) - c\int_{t_1}^{t} k'(s) \int_{\Gamma_1} |u(t) - u(t-s)|^2 \, d\Gamma_1 ds + Ck^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1. \tag{1.20}$$

On considère maintenant un exemple de la fonction $H$ et on passe, après l'obtention de l'estimation de décroissance de l'énergie, au cas général.

**(I)** $H(t) = ct^p$ tel que $1 \leq p < 3/2$ :

***Cas 1.*** $p = 1$ :

En tenant compte de l'hypothèse (B1) et (1.17), l'inégalité (1.20) donne, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -mE(t) + c\int_{\Gamma_1} (k'' \circ u)(t) \, d\Gamma_1 + Ck^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \\ &\leq -mE(t) + c\left[-E'(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) k^2(t)\right] \\ &\quad + C\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) k^2(t), \end{aligned}$$

ce qui implique, en ajoutant et en soustrayant le terme $\left[\alpha_1 m \frac{\eta}{2} \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s) \, ds\right]$ et en sachant que $\left[\left(\int_t^\infty k^2(s) \, ds\right)' < 0\right]$, que

$$\begin{aligned} &\left[\alpha_1 F(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s) \, ds\right]' \\ \leq \; & \alpha_1 F'(t) \\ \leq \; & -\alpha_1 m \left[E(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s) \, ds\right] \\ & + \alpha_1 c\left[-E'(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) k^2(t)\right] \\ & + \alpha_1 C\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) k^2(t) \\ & + \alpha_1 m \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s) \, ds, \end{aligned}$$

pour tout $t \geq t_1$, d'où, on trouve l'estimation suivante, pour deux constantes positives $C$ et $m'$ convenablement choisies,

$$\begin{aligned} F_0'(t) &\leq -m'\left[E(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds\right] \\ &\quad + C\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\left[k^2(t) + \int_t^\infty k^2(s)\,ds\right], \end{aligned} \tag{1.21}$$

avec

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \left[\alpha_1 F(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds\right] \\ &\quad + \alpha_1 c\left[E(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds\right]. \end{aligned}$$

De $(1.19)$, il s'ensuit

$$F_0(t) \sim E(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds \tag{1.22}$$

par suite (1.21) devient, pour $a > 0$,

$$F_0'(t) \leq -aF_0(t) + C\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\left[k^2(t) + \int_t^\infty k^2(s)\,ds\right],\ \forall t \geq t_1. \tag{1.23}$$

*1)* Si $u_0 = 0$ sur $\Gamma_1$, alors l'inégalité (1.23) se réduit à

$$F_0'(t) \leq -aF_0(t), \quad \forall t \geq t_1,$$

dans ce cas

$$F_0 = \alpha_1 F + \alpha_1 cE \sim E.$$

Une simple intégration de l'inégalité précédente conduit à

$$F_0(t) \leq c' \exp(-at), \quad \forall t \geq t_1.$$

Par suite, nous obtenons, pour une certaine constante positive $c$,

$$E(t) \leq c \exp(-at), \quad \forall t \geq t_1.$$

*2)* Si $u_0 \neq 0$ sur $\Gamma_1$, on construit la fonction suivante

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= F_0(t) \\ &\quad + C\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\exp(-at)\int_t^\infty\left[k^2(s) + \int_s^\infty k^2(v)\,dv\right]\exp(as)\,ds. \end{aligned}$$

On dérive cette fonction en utilisant (1.23) , on obtient

$$\Psi'(t) \leq -a\ \Psi(t), \quad \forall t \geq t_1.$$

Encore une fois, une simple intégration donne, pour une certaine constante positive $c$,

$$\Psi(t) \leq c \exp(-at), \quad \forall t \geq t_1,$$

ce qui implique que, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned} F_0(t) \leq & \exp(-at) \left[ c - C \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \right. \\ & \left. \times \int_t^\infty \left[ k^2(s) + \int_s^\infty k^2(v) \, dv \right] \exp(as) \, ds \right] \\ \leq & \exp(-at) \left[ c - C \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \right. \\ & \left. \times \int_t^\infty k^2(s) \exp(as) \, ds \right]. \end{aligned}$$

En utilisant (1.22) , on trouve pour tout $t \geq t_1$ et pour des constantes positives $c_1,\ c_2$ et $k_3$ convenablement choisies

$$\begin{aligned} E(t) \leq & \ k_3 \exp(-at) \left[ c_1 - c_2 \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \right. \\ & \left. \times \int_t^\infty k^2(s) \exp(as) \, ds \right] \\ & - \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s) \, ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit finalement que

$$\begin{aligned} E(t) \leq & \ k_3 G^{-1}(t) \left( c_1 - c_2 \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \right. \\ & \left. \times \int_t^\infty \frac{H(k^2(s))}{G^{-1}(s)} ds \right) \\ & - \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s) \, ds. \end{aligned}$$

***Cas 2.*** $1 < p < \frac{3}{2}$ :

On peut facilement montrer que

$$\int_0^{+\infty}[-k'(s)]^{1-\delta_0}ds < +\infty, \quad \text{pour tout } \delta_0 < 2-p.$$

Ce qui joint à (14), (1.5) et (1.11), en choisissant $t_1$ assez grand s'il est nécessaire, on conclut, pour tout $t \geq t_1$, que

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \int_{t_1}^{t}[-k'(s)]^{1-\delta_0}\int_{\Gamma_1}|u(t)-u(t-s)|^2\,d\Gamma_1 ds \\ &\leq 2\int_{t_1}^{t}[-k'(s)]^{1-\delta_0}\int_{\Gamma_1}\left(|u(t)|^2+|u(t-s)|^2\right)\,d\Gamma_1 ds \\ &\leq CA\int_{t_1}^{t}[-k'(s)]^{1-\delta_0}ds < 1. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Ensuite, grâce à l'inégalité de Jensen (21), l'hypothèse (B1), (1.10) et (1.24), on déduit que, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned} &-\int_{t_1}^{t}k'(s)\int_{\Gamma_1}|u(t)-u(t-s)|^2\,d\Gamma_1 ds \\ &= \int_{t_1}^{t}\left[-k'(s)\right]^{\delta_0}\left[-k'(s)\right]^{1-\delta_0}\int_{\Gamma_1}|u(t)-u(t-s)|^2\,d\Gamma_1 ds \\ &= \int_{t_1}^{t}\left[-k'(s)\right]^{p-1+\delta_0\left(\frac{\delta_0}{p-1+\delta_0}\right)}\left[-k'(s)\right]^{1-\delta_0}\int_{\Gamma_1}|u(t)-u(t-s)|^2\,d\Gamma_1 ds \\ &\leq \eta(t)\left[\frac{1}{\eta(t)}\int_{t_1}^{t}\left[-k'(s)\right]^{(p-1+\delta_0)}\left[-k'(s)\right]^{1-\delta_0}\int_{\Gamma_1}|u(t)-u(t-s)|^2\,d\Gamma_1 ds\right]^{\frac{\delta_0}{p-1+\delta_0}} \\ &\leq \left[\int_{t_1}^{t}\left[-k'(s)\right]^{p}\int_{\Gamma_1}|u(t)-u(t-s)|^2\,d\Gamma_1 ds\right]^{\frac{\delta_0}{p-1+\delta_0}} \\ &\leq c\left[\int_{t_1}^{t}k''(s)\int_{\Gamma_1}|u(t)-u(t-s)|^2\,d\Gamma_1 ds\right]^{\frac{\delta_0}{p-1+\delta_0}} \\ &\leq c\left[-E'(t)+\frac{\eta}{2}k^2(t)\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\right]^{\frac{\delta_0}{p-1+\delta_0}}. \end{aligned}$$

Prenons $\delta_0 = 1/2$, on trouve que (1.20) devient

$$\begin{aligned} \alpha_1 F'(t) \leq\; & -\alpha_1 mE(t)+\alpha_1 c\left[-E'(t)+\frac{\eta}{2}k^2(t)\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\right]^{\frac{1}{2p-1}} \\ & +\alpha_1 C\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)k^2(t), \end{aligned} \tag{1.25}$$

pour tout $t \geq t_1$.

En sachant que

$$\left(\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds\right)' \leq 0$$

et en utilisant la formule (1.25), il est aisé de vérifier qu'on a

$$\begin{aligned}
&\left(\alpha_1 F(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds\right)' \\
\leq\; & -\alpha_1 m \left[E(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds\right] \\
& +\alpha_1 c \left[-E'(t) + \frac{\eta}{2} k^2(t) \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right)\right]^{\frac{1}{2p-1}} + \alpha_1 C \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) k^2(t) \\
& +\alpha_1 m \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds, \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

pour tout $t \geq t_1$.

Ainsi, (1.26) se réduit, pour $C > 0$, à

$$\begin{aligned}
&\left(\alpha_1 F(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds\right)' \\
\leq\; & -\alpha_1 m \left[E(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds\right] \\
& +\alpha_1 c \left[-E'(t) + \frac{\eta}{2} k^2(t) \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right)\right]^{\frac{1}{2p-1}} \\
& +C \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \left[k^2(t) + \int_t^\infty k^2(s)\, ds\right].
\end{aligned}$$

Multiplions membre à membre l'estimation précédente par $\left[E(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds\right]^\alpha$, avec $\alpha = 2p - 2$, en utilisant le fait que

$$E'(t) \leq \frac{\eta}{2} k^2(t) \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right),$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
& \left(\left[\alpha_1 F(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}\left|u_0\right|^2 d\Gamma_1\right)\int_t^{\infty} k^2(s)\, ds\right]\right. \\
& \left.\times\left[E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}\left|u_0\right|^2 d\Gamma_1\right)\int_t^{\infty} k^2(s)\, ds\right]^{\alpha}\right)^{\prime} \\
\leq\; & \left(\alpha_1 F(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}\left|u_0\right|^2 d\Gamma_1\right)\int_t^{\infty} k^2(s)\, ds\right)^{\prime} \\
& \times\left[E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}\left|u_0\right|^2 d\Gamma_1\right)\int_t^{\infty} k^2(s)\, ds\right]^{\alpha} \\
\leq\; & -\alpha_1 m\left[E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}\left|u_0\right|^2 d\Gamma_1\right)\int_t^{\infty} k^2(s)\, ds\right]^{\alpha+1} \\
& +\alpha_1 c\left[-E^{\prime}(t)+\frac{\eta}{2} k^2(t)\left(\int_{\Gamma_1}\left|u_0\right|^2 d\Gamma_1\right)\right]^{\frac{1}{\alpha+1}} \\
& \times\left[E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}\left|u_0\right|^2 d\Gamma_1\right)\int_t^{\infty} k^2(s)\, ds\right]^{\alpha} \\
& +C\left(\int_{\Gamma_1}\left|u_0\right|^2 d\Gamma_1\right)\left[k^2(t)+\int_t^{\infty} k^2(s)\, ds\right] \\
& \times\left[E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}\left|u_0\right|^2 d\Gamma_1\right)\int_t^{\infty} k^2(s)\, ds\right]^{\alpha} .
\end{aligned}
$$

Ensuite, appliquons l'inégalité de Young, avec $\sigma=\alpha+1$ et $\sigma^{\prime}=\frac{\alpha+1}{\alpha}$, pour

$$
\left[-E^{\prime}(t)+\frac{\eta}{2} k^2(t)\left(\int_{\Gamma_1}\left|u_0\right|^2 d\Gamma_1\right)\right]^{\frac{1}{\alpha+1}}\left[E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}\left|u_0\right|^2 d\Gamma_1\right)\int_t^{\infty} k^2(s)\, ds\right]^{\alpha}
$$

et

$$
\left[k^2(t)+\int_t^{\infty} k^2(s)\, ds\right]\left[E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}\left|u_0\right|^2 d\Gamma_1\right)\int_t^{\infty} k^2(s)\, ds\right]^{\alpha},
$$

on arrive, pour $C>0$, à

$$
\begin{aligned}
&\left(\left[\alpha_1 F(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds\right]\right.\\
&\left.\left[E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds\right]^\alpha\right)'\\
\leq\ & -\alpha_1 m\left[E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds\right]^{\alpha+1}\\
&+\varepsilon\left[1+\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\right]\left[E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds\right]^{\alpha+1}\\
&+C_\varepsilon\left[-E'(t)+\frac{\eta}{2}k^2(t)\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\right]\\
&+C\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\left[k^2(t)+\int_t^\infty k^2(s)\,ds\right]^{\alpha+1}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, si on prend $\varepsilon\left[1+\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\right]<\alpha_1 m$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
F_0'(t)\ \leq\ & -m'\left[E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds\right]^{\alpha+1}\\
&+C\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\left[k^2(t)+\int_t^\infty k^2(s)\,ds\right]^{\alpha+1},
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

où $m'$ est une constante positive et

$$
\begin{aligned}
F_0(t)\ =\ & \left[\alpha_1 F(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds\right]\\
&\times\left[E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds\right]^\alpha\\
&+C_\varepsilon\left[E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds\right].
\end{aligned}
$$

En vertu de $(1.19)$, on aura

$$
F_0\sim E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds \tag{1.28}
$$

et l'estimation (1.27) devient, pour tout $t\geq t_1$ et pour $a>0$

$$
F_0'(t)\leq -aF_0^{\alpha+1}(t)+C\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\left[k^2(t)+\int_t^\infty k^2(s)\,ds\right]^{\alpha+1}. \tag{1.29}
$$

*1)* Si $u_0 = 0$ sur $\Gamma_1$, alors (1.29) se réduit à

$$F_0'(t) \leq -aF_0^{1+\alpha}(t),$$

avec $F_0 = \alpha_1 F E^\alpha + C_\varepsilon E \sim E$. Une simple intégration implique, pour deux constantes positives $c$ et $a'$ convenablement choisies,

$$F_0(t) \leq \frac{c}{(at+a')^{\frac{1}{\alpha}}},$$

ce qui signifie clairement, pour $a'' > 0$, que

$$E(t) \leq \frac{a''}{(at+a')^{\frac{1}{\alpha}}},$$

et par suite on conclut, pour une certaine constante positive $c$, que

$$E(t) \leq cG^{-1}(at+a').$$

*2)* Si $u_0 \neq 0$ sur $\Gamma_1$, alors (1.29) prend la forme suivante

$$F_0'(t) \leq -aF_0^{\alpha+1}(t) + C_0\left[k^2(t) + \int_t^\infty k^2(s)\,ds\right]^{\alpha+1}, \tag{1.30}$$

où

$$C_0 = C\int_{\Gamma_1} |u_0|^2\, d\Gamma_1.$$

On construit la fonction suivante

$$\begin{aligned}\Psi(t) \quad = \quad & F_0(t) + C_0\left(\int_t^\infty \left[k^2(s) + \int_s^\infty k^2(v)\,dv\right]^{\alpha+1} (as+a')^{\frac{1}{\alpha}}\,ds\right) \\ & \times (at+a')^{\frac{-1}{\alpha}}.\end{aligned}$$

La dérivation de cette fonction, en utilisant (1.30), donne

$$\begin{aligned}\Psi'(t) \quad \leq \quad & -aF_0^{\alpha+1}(t) + aC_0\left(-\frac{1}{\alpha}\right) \\ & \times\left(\int_t^\infty \left[k^2(s) + \int_s^\infty k^2(v)\,dv\right]^{\alpha+1} (as+a')^{\frac{1}{\alpha}}\,ds\right) \\ & \times\left[(at+a')^{\frac{-1}{\alpha}}\right]^{\alpha+1}.\end{aligned}$$

Mais $0 < 2p-2 < 1 \Rightarrow \alpha < 1$, d'où

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &\leq -a\left[F_0^{\alpha+1}(t) + C_0\left(\int_t^\infty \left[k^2(s) + \int_s^\infty k^2(v)\,dv\right]^{\alpha+1}(as+a')^{\frac{1}{\alpha}}\,ds\right)\right. \\ &\quad \left.\times\left[(at+a')^{\frac{-1}{\alpha}}\right]^{\alpha+1}\right] \\ &\leq -a\left[F_0(t) + C_0\left(\int_t^\infty \left[k^2(s) + \int_s^\infty k^2(v)\,dv\right]^{\alpha+1}(as+a')^{\frac{1}{\alpha}}\,ds\right)\right. \\ &\quad \left.(at+a')^{\frac{-1}{\alpha}}\right]^{\alpha+1}.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\Psi'(t) \leq -a\ (\Psi(t))^{\alpha+1}.$$

De nouveau, une simple intégration implique

$$\Psi(t) \leq \frac{a''}{(at+a')^{\frac{1}{\alpha}}},$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned}F_0(t) &\leq \frac{a''}{(at+a')^{\frac{1}{\alpha}}} - C_0\left(\int_t^\infty \left[k^2(s) + \int_s^\infty k^2(v)\,dv\right]^{\alpha+1}(as+a')^{\frac{1}{\alpha}}\,ds\right) \\ &\quad \times(at+a')^{\frac{-1}{\alpha}}.\end{aligned}$$

En utilisant $(1.28)$, on aura pour $c > 0$

$$\begin{aligned}E(t) &\leq c\left[\frac{a''}{(at+a')^{\frac{1}{\alpha}}} - C_0\left(\int_t^\infty \left[k^2(s) + \int_s^\infty k^2(v)\,dv\right]^{\alpha+1}(as+a')^{\frac{1}{\alpha}}\,ds\right)\right. \\ &\quad \left.\times(at+a')^{\frac{-1}{\alpha}}\right] - \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds.\end{aligned}$$

Par suite, on a

$$E(t) \leq \frac{ca''}{(at+a')^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{1.31}$$

En rappelant que $\alpha < 1$ et en utilisant $(1.31)$, on déduit que

$$\int_0^\infty E(s)\,ds < \infty.$$

Sachant que

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} |u(t) - u(t-s)|^2 \, d\Gamma_1 ds \le c \int_0^t E(s)\, ds$$

et en utilisant l'hypothèse $(B1)$, l'inégalité de Jensen (21) et (1.17), l'estimation (1.20) donne

$$\begin{aligned} F'(t) &\le -mE(t) + c\int_{\Gamma_1} \left( [-k']^{p.\frac{1}{p}} \circ u \right)(t) d\Gamma_1 + Ck^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \\ &\le -mE(t) + c\left[ \int_{\Gamma_1} \left( [-k']^{p} \circ u \right)(t) d\Gamma_1 \right]^{1/p} + Ck^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \\ &\le -mE(t) + c\left[ \int_{\Gamma_1} (k'' \circ u)(t) d\Gamma_1 \right]^{1/p} + Ck^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \\ &\le -mE(t) + c\left[ -E'(t) + \frac{\eta}{2} k^2(t) \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \right]^{1/p} \\ &\quad + Ck^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 . \end{aligned}$$

Ainsi, en répétant les mêmes étapes que ci-dessus, avec $\alpha = p - 1$, on obtient

$$\begin{aligned} E(t) &\le c\left[ \frac{a''}{(at+a')^{\frac{1}{p-1}}} - C_0 \left( \int_t^\infty \left[ k^2(s) + \int_s^\infty k^2(v)\, dv \right]^p (as+a')^{\frac{1}{p-1}} ds \right) \right. \\ &\quad \left. \times (at+a')^{\frac{-1}{p-1}} \right] - \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds. \end{aligned}$$

Alors, on trouve pour $c_1,\ c_2 > 0$

$$\begin{aligned} E(t) &\le \frac{c}{(at+a')^{\frac{1}{p-1}}} \left[ c_1 - c_2 \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left( \int_t^\infty \left[ k^2(s) + \int_s^\infty k^2(v)\, dv \right]^p (as+a')^{\frac{1}{p-1}} ds \right) \right] \\ &\quad - \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds \\ &\le \frac{c}{(at+a')^{\frac{1}{p-1}}} \left[ c_1 - c_2 \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left( \int_t^\infty \left[ k^2(s) \right]^p (as+a')^{\frac{1}{p-1}} ds \right) \right] \\ &\quad - \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds. \end{aligned}$$

On arrive finalement à l'estimation

$$\begin{aligned} E(t) &\leq cG^{-1}(at+a')\left[c_1 - c_2\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\right. \\ &\quad \left.\times\int_t^\infty \frac{H\left(k^2(s)\right)}{G^{-1}\left(as+a'\right)}ds\right] \\ &\quad -\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds. \end{aligned}$$

**(II) Le cas général :**

On suppose que la condition (1.7) est satisfaite et on définit la fonction suivante

$$I(t) = \int_{t_1}^t \frac{-k'(s)}{H_0^{-1}\left(k''(s)\right)}\int_{\Gamma_1}|u(t)-u(t-s)|^2\,d\Gamma_1 ds.$$

On peut vérifier facilement, comme dans (1.24), que

$$I(t) < 1, \quad \text{pour tout } t \geq t_1. \tag{1.32}$$

On suppose également sans perte de généralité que $I(t) \geq \beta_0 > 0$, pour tout $t \geq t_1$; sinon (1.20) donne une forme explicite de décroissance.

De plus, on définit une nouvelle fonction $\lambda(t)$ par

$$\lambda(t) = \int_{t_1}^t k''(s)\frac{-k'(s)}{H_0^{-1}\left(k''(s)\right)}\int_{\Gamma_1}|u(t)-u(t-s)|^2\,d\Gamma_1 ds,$$

ensuite, grâce à l'hypothèse $(B1)$ et les propriétés des fonctions $H_0$ et $D$, il découle

$$\frac{-k'(s)}{H_0^{-1}\left(k''(s)\right)} \leq \frac{-k'(s)}{H_0^{-1}\left(H\left(-k'(s)\right)\right)} = \frac{-k'(s)}{D^{-1}\left(-k'(s)\right)} \leq k_0,$$

pour une certaine constante positive $k_0$. Ainsi, moyennant l'inégalité de trace (14), (1.8), (1.5) et (1.11), on peut montrer facilement que la fonction $\lambda(t)$ vérifie, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &\leq k_0 \int_{t_1}^{t} k''(s) \int_{\Gamma_1} |u(t) - u(t-s)|^2 \, d\Gamma_1 ds \\
&\leq 2k_0 \int_{t_1}^{t} k''(s) \int_{\Gamma_1} \left(|u(t)|^2 + |u(t-s)|^2\right) d\Gamma_1 ds \\
&\leq cA \int_{t_1}^{t} k''(s) ds \\
&\leq cA\left(-k'(t_1)\right) \\
&< \min\{r, H(r), H_0(r)\}, \qquad (1.33)
\end{aligned}$$

pour $t_1$ suffisamment grand (si nécessaire). De plus, de (1.17), on remarque que

$$\lambda(t) \leq -c\left[E'(t) - \frac{\eta}{2} k^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right], \quad \forall t \geq t_1. \qquad (1.34)$$

En utilisant le fait que $H_0$ est strictement convexe sur $(0, r]$, et $H_0(0) = 0$, on aura

$$H_0(\theta x) \leq \theta H_0(x),$$

tels que $0 \leq \theta \leq 1$ et $x \in (0, r]$. En vertu de l'estimation précédente, (1.32), (1.33) et l'inégalité de Jensen (21), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \frac{1}{I(t)} \int_{t_1}^{t} I(t) H_0\left[H_0^{-1}(k''(s))\right] \frac{-k'(s)}{H_0^{-1}(k''(s))} \int_{\Gamma_1} |u(t) - u(t-s)|^2 \, d\Gamma_1 ds \\
&\geq \frac{1}{I(t)} \int_{t_1}^{t} H_0\left[I(t) H_0^{-1}(k''(s))\right] \frac{-k'(s)}{H_0^{-1}(k''(s))} \int_{\Gamma_1} |u(t) - u(t-s)|^2 \, d\Gamma_1 ds \\
&\geq H_0\left(\frac{1}{I(t)} \int_{t_1}^{t} I(t) H_0^{-1}(k''(s)) \frac{-k'(s)}{H_0^{-1}(k''(s))} \int_{\Gamma_1} |u(t) - u(t-s)|^2 \, d\Gamma_1 ds\right) \\
&= H_0\left(-\int_{t_1}^{t} k'(s) \int_{\Gamma_1} |u(t) - u(t-s)|^2 \, d\Gamma_1 ds\right), \quad \forall t \geq t_1.
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$-\int_{t_1}^{t} k'(s) \int_{\Gamma_1} |u(t) - u(t-s)|^2 \, d\Gamma_1 ds \leq H_0^{-1}(\lambda(t)), \quad \forall t \geq t_1.$$

Substituant l'inégalité ci-dessus dans (1.20), on trouve

$$F'(t) \leq -mE(t) + cH_0^{-1}(\lambda(t)) + Ck^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1, \quad \forall t \geq t_1. \qquad (1.35)$$

Maintenant, pour $\varepsilon_0 < r$ et $c_0 > 0$, en utilisant $(1.19)$, le fait que $H_0' > 0,\ H_0'' > 0$ sur $(0, r]$ et

$$E'(t) \leq \frac{\eta}{2} k^2(t) \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right),$$

on déduit que la fonctionnelle

$$\begin{aligned} F_1(t) &= H_0' \left( \varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s) \, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_0^\infty k^2(s) \, ds} \right) \\ & \quad \times \left( \alpha_1 F(t) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s) \, ds \right) \\ & \quad + c_0 \left( E(t) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s) \, ds \right), \end{aligned}$$

vérifie pour $\beta_1,\ \beta_2 > 0$,

$$\beta_1 F_1(t) \leq \left[ E(t) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s) \, ds \right] \leq \beta_2 F_1(t) \tag{1.36}$$

et

$$
\begin{aligned}
F_1'(t) &= \left(\varepsilon_0 \frac{E'(t) - \frac{\eta}{2} k^2(t) \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right)}{E(0) + \frac{\eta}{2} \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds}\right) \\
&\quad \times H_0'' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2} \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2} \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds}\right) \\
&\quad \times \left(\alpha_1 F(t) + \frac{\eta}{2} \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds\right) \\
&\quad + H_0' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2} \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2} \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds}\right) \\
&\quad \times \left[\alpha_1 F'(t) - \frac{\eta}{2} k^2(t) \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right)\right] \\
&\quad + c_0 \left[E'(t) - \frac{\eta}{2} k^2(t) \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right)\right] \\
&\leq \alpha_1 H_0' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2} \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2} \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds}\right) F'(t) \\
&\quad - \frac{\eta}{2} k^2(t) \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \times H_0' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2} \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2} \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds}\right) \\
&\quad + c_0 \left[E'(t) - \frac{\eta}{2} k^2(t) \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right)\right], \quad \forall t \geq t_1.
\end{aligned}
$$

Ainsi, en vertu de $(1.35)$, on trouve pour tout $t \geq t_1$

$$
\begin{aligned}
F_1'(t) &\leq -\alpha_1 m E(t) H_0' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2} \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2} \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds}\right) \\
&\quad + \alpha_1 C k^2(t) \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \times H_0' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2} \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2} \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds}\right) \\
&\quad + \alpha_1 c H_0^{-1}(\lambda(t)) H_0' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2} \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2} \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds}\right) \\
&\quad + c_0 \left[E'(t) - \frac{\eta}{2} k^2(t) \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right)\right]. \qquad (1.37)
\end{aligned}
$$

Soit $H_0^*$ la fonction convexe conjuguée de $H_0$ au sens de Young (voir [4, p.

61-64]), on a donc

$$H_0^*(s) = s\left(H_0'\right)^{-1}(s) - H_0\left[\left(H_0'\right)^{-1}(s)\right], \quad \text{si } s \in (0, H_0'(r)] \tag{1.38}$$

et $H_0^*$ vérifie l'inégalité de Young généralisée suivante

$$AB \leq H_0^*(A) + H_0(B), \quad \text{si } A \in (0, H_0'(r)],\ B \in (0, r], \tag{1.39}$$

avec

$$A = H_0'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds}\right), \quad B = H_0^{-1}(\lambda(t)).$$

Moyennant $(1.33)$, $(1.37)$ et $(1.39)$, il vient

$$\begin{aligned}
F_1'(t) \leq\ & -\alpha_1 m E(t) H_0'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds}\right) \\
& +\alpha_1 C k^2(t) \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\right) \\
& \times H_0'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds}\right) \\
& +\alpha_1 c \lambda(t) + \alpha_1 c H_0^*\left(H_0'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds}\right)\right) \\
& +c_0\left[E'(t) - \frac{\eta}{2} k^2(t) \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\right)\right].
\end{aligned}$$

Par suite, en utilisant (1.34) et (1.38), on obtient pour tout $t \geq t_1$

$$\begin{aligned} F_1'(t) \leq\ & -\alpha_1 m E(t) H_0' \left( \varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds} \right) \\ & + \alpha_1 C k^2(t) \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \\ & \times H_0' \left( \varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds} \right) \\ & - \alpha_1 c \left[ E'(t) - \frac{\eta}{2} k^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right] \\ & + \alpha_1 c \left( \varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds} \right) \\ & \times H_0' \left( \varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds} \right) \\ & + c_0 \left[ E'(t) - \frac{\eta}{2} k^2(t) \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent, avec un choix convenable de la constante $c_0$ et pour une certaine constante positive $m'$, on déduit, pour tout $t \geq t_1$, que

$$\begin{aligned}
F_1'(t) \leq\ & -\alpha_1 m' \left( \frac{E(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds} \right) \\
& \times H_0'\left( \varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds} \right) \\
& + \alpha_1 m \left( \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds \right) \\
& \times H_0'\left( \varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds} \right) \\
& + \alpha_1 C \left( k^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \\
& \times H_0'\left( \varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds} \right) \\
& + \alpha_1 c \left( \varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds} \right) \\
& \times H_0'\left( \varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds} \right). \qquad (1.40)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour une certaine constante positive $C$, (1.40) devient

$$\begin{aligned} F_1'(t) \leq\ & -m'\alpha_1 \left( \frac{E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds}{E(0)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_0^\infty k^2(s)\,ds} \right) \\ & \times H_0'\left( \varepsilon_0 \frac{E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds}{E(0)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_0^\infty k^2(s)\,ds} \right) \\ & + C\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\left(k^2(t)+\int_t^\infty k^2(s)\,ds\right) \\ & \times H_0'\left( \varepsilon_0 \frac{E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds}{E(0)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_0^\infty k^2(s)\,ds} \right) \\ & + \alpha_1 c\left( \varepsilon_0 \frac{E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds}{E(0)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_0^\infty k^2(s)\,ds} \right) \\ & \times H_0'\left( \varepsilon_0 \frac{E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds}{E(0)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_0^\infty k^2(s)\,ds} \right). \end{aligned} \tag{1.41}$$

De la même manière, en utilisant (1.38) et (1.39) on trouve, pour $t_1$ assez grand (si nécessaire), que

$$\begin{aligned} & \left(k^2(t)+\int_t^\infty k^2(s)\,ds\right)\left[ H_0'\left( \varepsilon_0 \frac{E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds}{E(0)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_0^\infty k^2(s)\,ds} \right)\right] \\ \leq\ & \left( \varepsilon_0 \frac{E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds}{E(0)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_0^\infty k^2(s)\,ds} \right) \\ & \times H_0'\left( \varepsilon_0 \frac{E(t)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds}{E(0)+\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_0^\infty k^2(s)\,ds} \right) \\ & + H_0\left(k^2(t)+\int_t^\infty k^2(s)\,ds\right), \quad \forall t \geq t_1. \end{aligned}$$

Par substitution dans (1.41), avec un choix convenable de $\varepsilon_0$, on obtient

$$\begin{aligned} F_1'(t) &\leq -\ell \left( \frac{E(t) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds} \right) \\ &\quad \times H_0' \left( \varepsilon_0 \frac{E(t) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds} \right) \\ &\quad + C \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) H_0 \left( k^2(t) + \int_t^\infty k^2(s)\, ds \right), \end{aligned}$$

pour tout $t \geq t_1$.

Posons $H_2(t) = tH_0'(\varepsilon_0 t)$, la dernière inégalité peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} F_1'(t) \leq -\ell H_2 \left( \frac{E(t) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds}{E(0) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds} \right) \\ + C \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) H_0 \left( k^2(t) + \int_t^\infty k^2(s)\, ds \right), \quad \forall t \geq t_1. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Puisque $H_2'(t) = H_0'(\varepsilon_0 t) + \varepsilon_0 t H_0''(\varepsilon_0 t)$, utilisons alors la stricte convexité de $H_0$ sur $(0, r]$, on trouve que $H_2'(t)$, $H_2(t) > 0$ sur $(0, 1]$.

En tenant compte de (1.36) et (1.42), on déduit que la fonction suivante

$$R(t) = \epsilon \frac{\beta_1 F_1(t)}{E(0) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_0^\infty k^2(s)\, ds}, \quad 0 < \epsilon < 1$$

vérifie pour tout $t \geq t_1$, tel que $t_1$ est suffisamment grand,

$$R(t) \sim E(t) + \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_t^\infty k^2(s)\, ds \tag{1.43}$$

et pour deux constantes $c$ et $\ell_0 > 0$ convenablement choisies

$$R'(t) \leq -\epsilon \ell_0 H_2(R(t)) + \epsilon c \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) H_0 \left( k^2(t) + \int_t^\infty k^2(s)\, ds \right). \tag{1.44}$$

*1)* Si $u_0 = 0$ sur $\Gamma_1$, alors (1.44) se réduit à

$$R'(t) \leq -\epsilon \ell_0 H_2(R(t)).$$

Une simple intégration et un choix convenable de $\epsilon$ implique pour $k_1,\ k_2 > 0$

$$R(t) \leq H_1^{-1}(k_1 t + k_2), \quad \forall t \geq t_1, \tag{1.45}$$

où

$$H_1(\xi) = \int_\xi^1 \frac{1}{H_2(s)} ds.$$

Ici on a utilisé, à partir des propriétés de $H_2$, le fait que $H_1$ est strictement décroissante sur $(0,1]$ et $\lim_{t\to 0} H_1(t) = +\infty$.

*2)* Si $u_0 \neq 0$ sur $\Gamma_1$, alors l'inégalité (1.44) prend la forme suivante

$$R'(t) \leq -k_1 H_2(R(t)) + C_0 H_0\left(k^2(t) + \int_t^\infty k^2(s)\, ds\right), \quad \forall t \geq t_1, \tag{1.46}$$

telle que

$$C_0 = \epsilon c\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2\, d\Gamma_1\right).$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \frac{1}{2}R(t) + \frac{1}{2}C_0\left(\int_t^\infty \frac{H_0\left(k^2(s) + \int_s^\infty k^2(v)\, dv\right)}{H_1^{-1}(k_1 s + k_2)} ds\right) \\ &\quad \times H_1^{-1}(k_1 t + k_2).\end{aligned}$$

Ainsi, la dérivation de cette fonction, en utilisant (1.46), donne

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &\leq -k_1\left[\frac{1}{2}H_2(R(t)) + \frac{1}{2}C_0\left(\int_t^\infty \frac{H_0\left(k^2(s) + \int_s^\infty k^2(v)\, dv\right)}{H_1^{-1}(k_1 s + k_2)} ds\right)\right. \\ &\quad \left. \times H_2\left(H_1^{-1}(k_1 t + k_2)\right)\right],\end{aligned}$$

pour tout $t \geq t_1$.

De plus, prenons $t_1 > 0$ suffisamment grand tel que

$$0 \leq C_0\left(\int_t^\infty \frac{H_0\left(k^2(s) + \int_s^\infty k^2(v)\, dv\right)}{H_1^{-1}(k_1 s + k_2)} ds\right) \leq 1, \quad \forall t \geq t_1.$$

En utilisant la stricte convexité de $H_0$ et $H_0'$ sur $(0,r]$, on conclut que $H_2$ est strictement convexe sur $(0,r]$, et le fait que $H_2(0) = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &\leq -k_1 H_2\left[\frac{1}{2}R(t) + \frac{1}{2}C_0\left(\int_t^\infty \frac{H_0\left(k^2(s) + \int_s^\infty k^2(v)\, dv\right)}{H_1^{-1}(k_1 s + k_2)} ds\right)\right. \\ &\quad \left. \times H_1^{-1}(k_1 t + k_2)\right].\end{aligned}$$

Ce qui signifie que

$$\Psi'(t) \leq -k_1 H_2(\Psi(t)).$$

Alors, une simple intégration donne

$$\Psi(t) \leq H_1^{-1}(k_1 t + k_2),$$

ce qui implique

$$R(t) \leq H_1^{-1}(k_1 t + k_2)\left(2 - C_0 \int_t^\infty \frac{H_0\left(k^2(s) + \int_s^\infty k^2(v)\,dv\right)}{H_1^{-1}(k_1 s + k_2)} ds\right).$$

Utilisons (1.43) et le fait que $H_0$ est strictement croissante, on arrive, pour des constantes positives $k_3$, $c_1$ et $c_2$ convenablement choisies, à

$$\begin{aligned} E(t) &\leq k_3 H_1^{-1}(k_1 t + k_2)\left(c_1 - c_2\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty \frac{H_0(k^2(s))}{H_1^{-1}(k_1 s + k_2)} ds\right) \\ &\quad -\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2(s)\,ds. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 1.2.1.

## 1.4 Exemple explicite

Soit

$$k'(t) = -\exp(-\sqrt{t}),$$

alors $k''(t) = H(-k'(t))$ où

$$H(t) = \frac{t}{2\ln(1/t)},\ t \in (0, r],\ r < 1.$$

Puisque

$$\begin{aligned} H'(t) &= \frac{1 + \ln(1/t)}{2[\ln(1/t)]^2}, \quad H''(t) = \frac{\ln(1/t) + 2}{2t[\ln(1/t)]^3} \\ \text{et } H'''(t) &= \frac{6 - [\ln(1/t)]^2}{2t^2[\ln(1/t)]^4}, \end{aligned}$$

alors, la fonction $H$ vérifie l'hypothèse (B1) sur l'intervalle $(0, r]$ pour tout $0 < r < 1$.

De plus, si on prend $D(t) = t^{\alpha}$, les fonctions $H_0$ et $H_0'$ sont clairement des fonctions convexes sur $(0, r]$ et la condition (1.7) est satisfaite pour tout $\alpha > 2$. Par conséquent, un taux de décroissance d'une forme explicite peut être obtenu grâce au Théorème 1.2.1.

La dérivée de la fonction $H_0(t) = H(t^{\alpha})$ est donnée par

$$H_0'(t) = \frac{\alpha t^{\alpha-1}\left[1 + \ln\left(1/t^{\alpha}\right)\right]}{2\left[\ln\left(1/t^{\alpha}\right)\right]^2}.$$

Ainsi, en posant $w = \ln\left(\dfrac{1}{(\varepsilon_0 s)^{\alpha}}\right)$, on a

$$\begin{aligned} H_1(t) &= \int_t^1 \frac{2\left[\ln(\frac{1}{(\varepsilon_0 s)^{\alpha}})\right]^2}{\alpha\varepsilon_0^{\alpha-1}s^{\alpha}\left[1+\ln(\frac{1}{(\varepsilon_0 s)^{\alpha}})\right]}ds \\ &= \frac{2}{\alpha^2}\int_{\ln[\varepsilon_0^{-\alpha}]}^{\ln[(\varepsilon_0 t)^{-\alpha}]} \frac{w^2 e^{(1-\frac{1}{\alpha})w}}{1+w}dw. \end{aligned}$$

Utilisons le fait que $(1+w) > 1$ et que la fonction $f(w) = w^2$ est croissante sur $(0, +\infty)$, on obtient

$$\begin{aligned} H_1(t) &\leq \frac{2[-\alpha\ln\varepsilon_0 t]^2}{\alpha^2}\int_{-\alpha\ln\varepsilon_0}^{-\alpha\ln(\varepsilon_0 t)} e^{(1-\frac{1}{\alpha})w}dw \\ &= \frac{2[-\alpha\ln\varepsilon_0 t]^2[t^{1-\alpha}-1]}{\alpha(\alpha-1){\varepsilon_0}^{\alpha-1}} \\ &\leq \frac{2t^{1-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)\left(\varepsilon_0 t\right)^{2\alpha}{\varepsilon_0}^{\alpha-1}} \\ &\leq \frac{2}{\alpha(\alpha-1){\varepsilon_0}^{3\alpha-1}}\frac{1}{t^{3\alpha-1}} = \frac{C_{\alpha}}{t^{3\alpha-1}}, \end{aligned}$$

où $C_{\alpha} = \dfrac{2}{\alpha(\alpha-1)\varepsilon_0^{3\alpha-1}}$.

D'où,

$$H_1^{-1}(t) \leq \left(\frac{C_{\alpha}}{t}\right)^{1/(3\alpha-1)}.$$

Ainsi, en utilisant (1.6), on déduit que l'énergie décroît au taux suivant

$$
\begin{aligned}
E(t) \leq k_3 \left(\frac{c}{k_1 t + k_2}\right)^{1/(3\alpha-1)} & \left[c_1 - c_2 \left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right)\right. \\
& \left. \times \int_t^{\infty} H_0\left(k^2(s)\right)(k_1 s + k_2)^{1/(3\alpha-1)} \, ds\right] \\
& - \frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1\right) \int_t^{\infty} k^2(s) \, ds
\end{aligned}
$$

pour tout $t \geq t_1$ et pour tout $\alpha > 2$, avec

$$
H_0\left(k^2(s)\right) = \frac{\left(k^2(s)\right)^{\alpha}}{2\ln(1/\left(k^2(s)\right)^{\alpha})}.
$$

# Chapitre 2

# Stabilisation frontière d'un problème thermoélastique avec second son de type mémoire

Ce chapitre concerne l'étude de comportement asymptotique d'un système thermoélastique non classique avec second son, qui décrit un modèle de vibration dans un corps thermoélastique où la conduction de la chaleur est donnée par la loi de Cattaneo (2) au lieu de la loi de Fourier (1), ce qui signifie que les perturbations thermiques se propagent avec une vitesse finie.

On considère le système suivant

$$\begin{gathered}
u_{tt} - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div} u) + \beta\nabla\theta = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\
c\theta_t + \kappa \operatorname{div} q + \beta \operatorname{div} u_t = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\
\tau_0 q_t + q + \kappa\nabla\theta = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\
u(.,0) = u_0, \quad u_t(.,0) = u_1, \quad \theta(.,0) = \theta_0, \quad q(.,0) = q_0 \quad \text{dans } \Omega \\
u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times [0,+\infty) \\
u(x,t) = -\int_0^t g(t-s)(\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu+\lambda)(\operatorname{div} u)\nu)(s)ds \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0,+\infty) \\
\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times [0,+\infty),
\end{gathered} \tag{2.1}$$

où le corps $\Omega$ est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) avec une frontière suffisamment régulière $\Gamma$, tels que $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ est une partition de $\Gamma$, $\nu$ est la normale extérieure unitaire à $\Gamma$, $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de déplacement, $q = q(x,t) \in \mathbb{R}^n$ est le flux de la chaleur, $\theta = \theta(x,t)$ est la température absolue et la fonction de relaxation $g$ est une fonction positive et différentiable avec $g(0) \neq 0$. Les coefficient $c, \kappa, \mu, \lambda$, $\tau_0$ sont des constantes positives, où $\mu, \lambda$ sont des modules de Lamé, $\tau_0$ est le temps de relaxation, un petit paramètre par rapport aux autres et $\beta \neq 0$ est un nombre réel

Ce chapitre est organisé de la façon suivante :
Dans la section 2.1 on va donner quelques notations et les hypothèses nécessaires, notre résultat principal et sa démonstration seront présentés respectivement dans les sections 2.2 et 2.3 et on termine par un exemple explicite comme illustration.

## 2.1 Notations et hypothèses

On suppose que l'hypothèse (A1) de chapitre précédent est vérifiée.

Comme dans le chapitre précédent, en se basant sur le lemme 1.1.1, on va utiliser l'équation (1.2) à la place de la quatrième équation du système (2.1).

De plus, supposons que la fonction $k$ vérifie l'hypothèse suivante :

(B2) $k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe $C^2$ telle que

$$k(0) > 0, \quad \lim_{t\to\infty} k(t) = 0, \quad k'(t) \leq 0$$

et il existe une fonction positive $H \in C^1(\mathbb{R}^+)$ avec $H(0) = 0$, $H$ linéaire ou strictement croissante et strictement convexe de classe $C^2$ sur $(0, r]$, $r < 1$, telle que

$$k''(t) \geq H(-k'(t)), \quad \forall t > 0.$$

En appliquant la méthode de Galerkin comme dans [3, 10], on montre que notre système (2.1) est bien posé au sens suivant :

**Théorème 2.1.1** *Supposons que $k \in W^{2,1}(\mathbb{R}^+) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)$ et la condition* (1.4) *est vérifiée, alors pour toutes données initiales $u_0 \in (H^2(\Omega) \cap V)^n$, $\theta_0 \in H_0^1(\Omega)$, $q_0 \in (H^1(\Omega))^n$ et $u_1 \in V^n$, le système* (2.1) *admet une solution forte $(u, \theta, q)$ vérifiant*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega) \cap V)^n) \cap C^1(\mathbb{R}^+; V^n),$$
$$\theta \in C(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)),$$
$$q \in C(\mathbb{R}^+; (H^1(\Omega))^n) \cap C^1(\mathbb{R}^+; (L^2(\Omega))^n).$$

On introduit les deux fonctions d'énergie du premier et second ordre du système (2.1) :

$$
\begin{aligned}
E_1(t) = & \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[|u_t|^2 + \mu|\nabla u|^2 + (\mu+\lambda)(\operatorname{div} u)^2 + c\theta^2 + \tau_0 q^2\Big]\,dx \\
& - \frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} (k' \circ u)(t)d\Gamma_1 + \frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} k(t)|u|^2 d\Gamma_1.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
E_2(t) = & \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[|u_{tt}|^2 + \mu|\nabla u_t|^2 + (\mu+\lambda)(\operatorname{div} u_t)^2 + c\theta_t^2 + \tau_0 q_t^2\Big]dx \\
& - \frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} (k' \circ u_t)(t)d\Gamma_1 + \frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} k(t)|u_t|^2 d\Gamma_1.
\end{aligned}
$$

## 2.2 La décroissance générale de l'énergie de la solution

On a le résultat de stabilité suivant :

**Théorème 2.2.1** *Soient* $(u_0, u_1, \theta_0, q_0) \in (H^2(\Omega)\cap V)^n \times V^n \times H_0^1(\Omega) \times (H^1(\Omega))^n$, *supposons que les hypothèses* (A1) *et* (B2) *sont vérifiées. Alors il existe des constantes positives* $c_1$, $c_2$, $k_1$, $k_2$, $k_3$, $\varepsilon_0$ *et* $t_1$ *telles que :*

*(I) Dans le cas particulier* $H(t) = ct^p$, *avec* $1 \le p < 3/2$, *la solution de* (2.1) *satisfait*

$$
\begin{aligned}
E_1(t) \le & \left(\frac{c_1 + c_2\int_{t_1}^t \Big[k(s)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big]^{2p-1} ds}{t}\right)^{\frac{1}{2p-1}} \\
& - \frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

*pour tout* $t \ge t_1$.

*(II) Dans le cas général, la solution de* (2.1) *satisfait*

$$
\begin{aligned}
E_1(t) \le & k_1 H_1^{-1}\Big(\frac{k_2 + k_3(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_{t_1}^t H_0(k(s))ds}{t}\Big) \\
& - \frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds, \quad \textit{pour tout } t \ge t_1,
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

*telles que*

$$H_1(t) = tH_0'(\varepsilon_0 t), \quad H_0(t) = H(D(t)),$$

*où $D$ est une fonction positive de classe $C^1$, avec $D(0) = 0$, pour laquelle la fonction $H_0$ est une fonction strictement croissante, strictement convexe de classe $C^2$ sur $(0, r]$ et*

$$\int_0^{+\infty} \frac{-k'(s)}{H_0^{-1}(k''(s))} ds < +\infty. \tag{2.5}$$

**Remarque 2.2.2** ***1.*** *Si $u_0 = 0$ sur $\Gamma_1$, on obtient alors les mêmes résultats de Mustafa [38].*

***2.*** *Si $\int_0^\infty H_0(k(s))ds < +\infty$, alors (2.4) se réduit à*

$$E_1(t) \leq k_1 H_1^{-1}(\frac{c}{t}) - \frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\Big) \int_t^\infty k^2(s)ds,$$

*ce qui montre clairement que $\lim_{t\to\infty} E_1(t) = 0$.*

***3.*** *Les estimations de décroissance usuelle, ont été déjà montrées lorsque le noyau $k$ vérifie la condition $k'' \geq d(-k')^p$, $1 \leq p < 3/2$, elles deviennent simplement des cas particuliers de notre travail pour lesquelles on va fournir une preuve.*

***4.*** *On remarque que la fonction $k$ vérifie également (1.8) et (1.9) pour tout $t \geq t_1$ où $t_1$ est suffisamment grand.*

**Lemme 2.2.3** *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.1, les énergies de la solution de (2.1) vérifient*

$$\begin{aligned} E_1'(t) \leq & -\int_\Omega |q|^2 dx - \frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma_1 + \frac{\eta}{2}k'(t)\int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 \\ & - \frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} (k'' \circ u)(t) d\Gamma_1 + \frac{\eta}{2}k^2(t)\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$E_2'(t) \leq -\int_\Omega |q_t|^2 dx \leq 0. \tag{2.7}$$

**Preuve.** On multiplie $(2.1)_1$ par $u_t$, $(2.1)_2$ par $\theta$ et $(2.1)_3$ par $q$ et on intègre sur $\Omega$, en utilisant (1.2), (1.3) et la formule de Green (15), on peut facilement conclure que

$$E_1'(t) = -\int_\Omega |q|^2 dx - \eta \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma_1 + \frac{\eta}{2} k'(t) \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 \\ - \frac{\eta}{2} \int_{\Gamma_1} (k'' \circ u)(t) d\Gamma_1 + \eta \int_{\Gamma_1} k(t)(u_0.u_t) d\Gamma_1$$

ensuite, nous utilisons l'inégalité de Young, pour obtenir

$$\int_{\Gamma_1} k(t)(u_0.u_t) d\Gamma_1 \leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma_1 + \frac{1}{2} k^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1,$$

par conséquent, on trouve (2.6).

La dérivation de (2.1), par rapport à $t$, donne

$$\begin{aligned} u_{ttt} - \mu \Delta u_t - (\mu + \lambda) \nabla (\operatorname{div} u_t) + \beta \nabla \theta_t = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\ c\theta_{tt} + \kappa \operatorname{div} q_t + \beta \operatorname{div} u_{tt} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\ \tau_0 q_{tt} + q_t + \kappa \nabla \theta_t = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty). \end{aligned} \tag{2.8}$$

On dérive également l'équation (1.2), on trouve

$$\mu \frac{\partial u_t}{\partial \nu} + (\mu + \lambda)(\operatorname{div} u_t)\nu = -\eta(u_{tt} + k(0)u_t + k' * u_t), \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+. \tag{2.9}$$

On multiplie $(2.8)_1$ par $u_{tt}$, $(2.8)_2$ par $\theta_t$ et $(2.8)_3$ par $q_t$ et on intègre sur $\Omega$ et on répète les mêmes étapes que ci-dessus, on arrive à (2.7). ∎

**Remarque 2.2.4** Si $u_0 = 0$ sur $\Gamma_1$, alors $E_1'(t) \leq 0$, d'où $E_1(t) \leq E_1(0)$.
Si $u_0 \neq 0$ sur $\Gamma_1$, alors

$$E_1(t) \leq E_1(0) + \frac{\eta}{2} \Big( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 \Big) \int_0^t k^2(s) ds \leq B, \tag{2.10}$$

pour $B > 0$.

**Lemme 2.2.5** *Supposons que* (A1) *et* (B2) *sont vérifiées, la solution de* (2.1) *satisfait, pour tout* $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t.[M+(n-1)u]dx \\
&\leq -\int_\Omega |u_t|^2dx - \mu\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \frac{\mu+\lambda}{2}\int_\Omega (\operatorname{div} u)^2dx + C\int_\Omega |\nabla\theta|^2dx \\
&\quad - \frac{\mu\delta}{2}\int_{\Gamma_1}|\nabla u|^2d\Gamma_1 - (\mu+\lambda)\delta\int_{\Gamma_1}(\operatorname{div} u)^2d\Gamma_1 + C\left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)\int_{\Gamma_1}|u_t|^2d\Gamma_1 \\
&\quad + Ck^2(t)\int_{\Gamma_1}|u|^2d\Gamma_1 - \frac{C}{\epsilon}\int_{\Gamma_1}(k'\circ u)(t)d\Gamma_1 \\
&\quad + \epsilon\int_{\Gamma_1}|u|^2d\Gamma_1 + C\left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)k^2(t)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

*où*

$$M = (M_1, M_2, ..., M_n)^T, \quad \textit{tel que } M_i = 2m.\nabla u^i$$

*et la constante* $C$ *est indépendante de* $\epsilon$.

Pour la preuve du lemme ci-dessus, nous renvoyons le lecteur à [29, 38].

## 2.3 Preuve du Théorème 2.2.1

Posons $E(t) = E_1(t) + E_2(t)$, pour $N > 0$ à choisir ultérieurement et introduisons la fonctionnelle :

$$L(t) = NE(t) + \int_\Omega u_t.[M+(n-1)u]dx. \tag{2.12}$$

A partir de (2.6), (2.7) et (2.11), nous obtenons

$$\begin{aligned}
L'(t) \leq & -N\int_\Omega |q|^2dx - N\int_\Omega |q_t|^2dx - \frac{N\eta}{2}\int_{\Gamma_1}|u_t|^2d\Gamma_1 - \frac{N}{2}\eta\int_{\Gamma_1}(k''\circ u)(t)d\Gamma_1 \\
& - \int_\Omega |u_t|^2dx - \mu\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \frac{\mu+\lambda}{2}\int_\Omega (\operatorname{div} u)^2dx \\
& - \frac{\mu\delta}{2}\int_{\Gamma_1}|\nabla u|^2d\Gamma_1 - (\mu+\lambda)\delta\int_{\Gamma_1}(\operatorname{div} u)^2d\Gamma_1 + C\int_{\Gamma_1}|u_t|^2d\Gamma_1 \\
& + \frac{C}{\epsilon}k^2(t)\int_{\Gamma_1}|u|^2d\Gamma_1 - \frac{C}{\epsilon}\int_{\Gamma_1}(k'\circ u)(t)d\Gamma_1 + \epsilon\int_{\Gamma_1}|u|^2d\Gamma_1 + C\int_\Omega |\nabla\theta|^2dx \\
& + C\left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)k^2(t)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1 + N\frac{\eta}{2}k^2(t)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1.
\end{aligned}$$

Puis, en utilisant $(2.1)_3$, l'inégalité de trace (14) pour $\int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1$ et l'inégalité de Poincaré (13) pour $\int_\Omega |\theta|^2 dx$, on déduit que

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -(N - C_1) \int_\Omega |q|^2 dx - (N - C_1) \int_\Omega |q_t|^2 dx - \int_\Omega |u_t|^2 dx \\ & - k(t) \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 - \left(\mu - \epsilon c_0 - \frac{C}{\epsilon} k^2(t) - c_0 k(t)\right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ & - \frac{\mu + \lambda}{2} \int_\Omega (\operatorname{div} u)^2 dx - \left(\frac{N}{2}\eta - C\right) \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma_1 \\ & - C \int_{\Gamma_1} (k' \circ u)(t) d\Gamma_1 - \int_\Omega |\theta|^2 dx \\ & + \left[\frac{N}{2}\eta + C\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)\right] k^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Fixons $\epsilon$ suffisamment petit tel que $\epsilon c_0 = \frac{1}{2}\mu$, et on choisit $N$ suffisamment grand de sorte que :

$$L \sim E, \quad a_1 = \frac{N}{2}\eta - C \geq 0 \quad \text{et} \quad a_2 = N - C_1 > 0.$$

Ainsi, (2.13) devient

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & - \int_\Omega |u_t|^2 dx - \left(\frac{\mu}{2} - \frac{C}{\epsilon} k^2(t) - c_0 k(t)\right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ & - \frac{\mu + \lambda}{2} \int_\Omega (\operatorname{div} u)^2 dx - k(t) \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 - a_2 \int_\Omega |q|^2 dx - \int_\Omega |\theta|^2 dx \\ & - C \int_{\Gamma_1} (k' \circ u)(t) d\Gamma_1 + C k^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\lim_{t \to +\infty} k(t) = 0$, nous obtenons

$$L'(t) \leq -m E_1(t) + C k^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 - c \int_{\Gamma_1} (k' \circ u)(t) d\Gamma_1, \ \forall t \geq t_1, \tag{2.14}$$

pour $t_1$ suffisamment grand et deux constantes positives $m$ et $c$ convenablement choisies.

Maintenant, moyennant (1.9) et (2.6), il vient, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned} & - \int_0^{t_1} k'(s) \int_{\Gamma_1} |u(t) - u(t-s)|^2 d\Gamma_1 ds \\ & \leq \frac{1}{d} \int_0^{t_1} k''(s) \int_{\Gamma_1} |u(t) - u(t-s)|^2 d\Gamma_1 ds \\ & \leq -c \left[E_1'(t) - \frac{\eta}{2} k^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\right], \end{aligned} \tag{2.15}$$

et la fonctionnelle $F$, définie par $F(t) = L(t) + cE_1(t)$, est clairement équivalente à $E(t)$, de plus, on vertu de (2.14) et (2.15), on arrive, pour tout $t \geq t_1$ avec une nouvelle constante positive $C > 0$, à

$$F'(t) \leq -mE_1(t) + Ck^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 - c \int_{t_1}^{t} k'(s) \int_{\Gamma_1} |u(t) - u(t-s)|^2 d\Gamma_1 ds. \tag{2.16}$$

On considère maintenant un exemple de la fonction $H$ et on passe, après l'obtention de l'estimation de décroissance de l'énergie, au cas général.

**(I)** $H(t) = ct^p$ tel que $1 \leq p < 3/2$ :

Si $1 < p < 3/2$, on peut facilement montrer que

$$\int_0^{+\infty} [-k'(s)]^{1-\delta_0} ds < +\infty, \text{ pour tout } \delta_0 < 2 - p.$$

Ce qui joint à (2.2), (2.10) et l'inégalité de trace (14), en choisissant $t_1$ suffisamment grand si nécessaire, on trouve, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \int_{t_1}^{t} [-k'(s)]^{1-\delta_0} \int_{\Gamma_1} |u(t) - u(t-s)|^2 \, d\Gamma_1 ds \\ &\leq 2 \int_{t_1}^{t} [-k'(s)]^{1-\delta_0} \int_{\Gamma_1} (|u(t)|^2 + |u(t-s)|^2) \, d\Gamma_1 ds \\ &\leq cB \int_{t_1}^{t} [-k'(s)]^{1-\delta_0} ds < 1. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ensuite, l'inégalité de Jensen (21), (2.6), l'hypothèse (B2) et (2.17) conduisent à

$$
\begin{aligned}
& -\int_{t_1}^{t} k'(s) \int_{\Gamma_1} |u(t)-u(t-s)|^2 \, d\Gamma_1 ds \\
& = \int_{t_1}^{t} [-k'(s)]^{\delta_0} [-k'(s)]^{1-\delta_0} \int_{\Gamma_1} |u(t)-u(t-s)|^2 \, d\Gamma_1 ds \\
& = \int_{t_1}^{t} [-k'(s)]^{p-1+\delta_0 (\frac{\delta_0}{p-1+\delta_0})} [-k'(s)]^{1-\delta_0} \int_{\Gamma_1} |u(t)-u(t-s)|^2 \, d\Gamma_1 ds \\
& \leq \eta(t) \Big[ \frac{1}{\eta(t)} \int_{t_1}^{t} [-k'(s)]^{(p-1+\delta_0)} [-k'(s)]^{1-\delta_0} \int_{\Gamma_1} |u(t)-u(t-s)|^2 \, d\Gamma_1 ds \Big]^{\frac{\delta_0}{p-1+\delta_0}} \\
& \leq \Big[ \int_{t_1}^{t} [-k'(s)]^{p} \int_{\Gamma_1} |u(t)-u(t-s)|^2 \, d\Gamma_1 ds \Big]^{\frac{\delta_0}{p-1+\delta_0}} \\
& \leq c \Big[ \int_{t_1}^{t} k''(s) \int_{\Gamma_1} |u(t)-u(t-s)|^2 \, d\Gamma_1 ds \Big]^{\frac{\delta_0}{p-1+\delta_0}} \\
& \leq c \Big[ - E_1'(t) + \frac{\eta}{2} k^2(t) \Big( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 \Big) \Big]^{\frac{\delta_0}{p-1+\delta_0}}.
\end{aligned}
$$

D'où, particulièrement pour $\delta_0 = 1/2$, (2.16) devient

$$
F'(t) \leq -mE_1(t) + c\Big[ -E_1'(t) + \frac{\eta}{2} k^2(t) (\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \Big]^{\frac{1}{2p-1}} + Ck^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1,
$$

pour tout $t \geq t_1$.

En sachant que,

$$
\left( \frac{\eta}{2} \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 \, d\Gamma_1 \right) \int_{t}^{\infty} k^2 (s) \, ds \right)' \leq 0,
$$

On trouve

$$
\begin{aligned}
& \Big( F(t) + \frac{\eta}{2} \Big( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 \Big) \int_{t}^{\infty} k^2(s) ds \Big)' \\
& \leq F'(t) \\
& \leq -mE_1(t) + c\Big[ - E_1'(t) + \frac{\eta}{2} k^2(t) \Big( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 \Big) \Big]^{\frac{1}{2p-1}} + Ck^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1,
\end{aligned}
$$

ensuite, en ajoutant et en soustrayant le terme

$\left[m\frac{\eta}{2}\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2\,d\Gamma_1\right)\int_t^\infty k^2\,(s)\,ds\right]$, on aura, pour tout $t\geq t_1$,

$$\begin{aligned}
&\left(F(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\right)'\\
&\leq -m\Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big]\\
&\quad+c\Big[-E_1'(t)+\frac{\eta}{2}k^2(t)\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\Big]^{\frac{1}{2p-1}}+Ck^2(t)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\\
&\quad+m\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse $(B2)$, on déduit, pour tout $t\geq t_1$, que

$$\int_t^\infty k^2(s)ds\leq k(t)\int_t^\infty k(s)ds\leq k(t)\int_0^\infty k(s)ds \quad \text{et} \quad k^2(t)\leq c'k(t). \qquad (2.19)$$

Insérant (2.19) dans (2.18), on arrive, pour une certaine constante positive $C$, à

$$\begin{aligned}
&\left(F(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\right)'\\
&\leq -m\Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big]\\
&\quad+c\Big[-E_1'(t)+\frac{\eta}{2}k^2(t)\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\Big]^{\frac{1}{2p-1}}+Ck(t)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1.
\end{aligned}$$

Maintenant, multiplions membre à membre l'estimation précédente par

$$\Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big]^{2p-2},$$

en utilisant le fait que

$$E_1'(t)\leq\frac{\eta}{2}k^2(t)\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\right),$$

nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\bigg(\Big[F(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big]\Big[E_1(t)\\
&+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big]^{2p-2}\bigg)'\\
&\leq\Big(F(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big)'\\
&\quad\times\Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big]^{2p-2}\\
&\leq -m\Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big]^{2p-1}\\
&\quad+c\Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big]^{2p-2}\\
&\quad\times\Big[-E_1'(t)+\frac{\eta}{2}k^2(t)\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\Big]^{\frac{1}{2p-1}}\\
&\quad+C\Big[k(t)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big]\Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big]^{2p-2}.
\end{aligned}
$$

Puis, en appliquant l'inégalité de Young, avec $\sigma=2p-1$ et $\sigma'=\frac{2p-1}{2p-2}$, pour

$$
\Big[-E_1'(t)+\frac{\eta}{2}k^2(t)\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\Big]^{\frac{1}{2p-1}}\Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big]^{2p-2}
$$

et

$$
\Big[k(t)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big]\Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big]^{2p-2}
$$

on arrive à, pour $C>0$,

$$
\begin{aligned}
&\bigg(\Big[F(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big]\\
&\times\Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big]^{2p-2}\bigg)'\\
&\leq -m\Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big]^{2p-1}\\
&\quad+2\varepsilon\Big[E_1\Big(t\Big)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big]^{2p-1}\\
&\quad+C_\varepsilon\Big[-E_1'(t)+\frac{\eta}{2}k^2(t)\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\Big]+C\Big[k(t)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big]^{2p-1}.
\end{aligned}
$$

Alors, pour $2\varepsilon < m$, on obtient

$$F_0'(t) \leq -m'\Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_t^{\infty}k^2(s)ds\Big]^{2p-1}+C\Big[k(t)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big]^{2p-1},$$

tels que $m'$ est une constante positive et

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \Big[F(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_t^{\infty}k^2(s)ds\Big] \\ &\quad\times\Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_t^{\infty}k^2(s)ds\Big]^{2p-2} \\ &\quad+C_\varepsilon\Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_t^{\infty}k^2(s)ds\Big]. \end{aligned}$$

Par ailleurs, il est facile de montrer que cette inégalité reste vraie pour $p = 1$.

De nouveau, on utilise le fait que

$$E_1'(t) \leq \frac{\eta}{2}k^2(t)(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)$$

pour déduire que

$$\begin{aligned} &\Big(t\Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_t^{\infty}k^2(s)ds\Big]^{2p-1}\Big)' \\ &\leq \Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_t^{\infty}k^2(s)ds\Big]^{2p-1} \\ &\leq -\frac{1}{m'}F_0'(t)+\frac{C}{m'}\Big[k(t)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big]^{2p-1}, \end{aligned}$$

pour tout $t \geq t_1$.

Une simple intégration sur $(t_1, t)$ donne

$$\begin{aligned} &t\Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_t^{\infty}k^2(s)ds\Big]^{2p-1} \\ &\leq \frac{1}{m'}F_0(t_1)+\frac{C}{m'}\int_{t_1}^{t}\Big[k(s)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big]^{2p-1}ds \\ &\quad+t_1\Big[E_1(t_1)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_{t_1}^{\infty}k^2(s)ds\Big]^{2p-1} \\ &\leq c_1+\frac{C}{m'}\int_{t_1}^{t}\Big[k(s)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big]^{2p-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$\Big[E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big]^{2p-1}$$
$$\leq \frac{c_1}{t}+\frac{C}{m't}\int_{t_1}^t\Big[k(s)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big]^{2p-1}ds.$$

Enfin, on arrive à l'estimation suivante

$$E_1(t)\leq\Big(\frac{c_1+c_2\int_{t_1}^t[k(s)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1]^{2p-1}ds}{t}\Big)^{\frac{1}{2p-1}}$$
$$-\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds.$$

**(II) Le cas général :**

On définit

$$I(t)=\int_{t_1}^t\frac{-k'(s)}{H_0^{-1}(k''(s))}\int_{\Gamma_1}|u(t)-u(t-s)|^2d\Gamma_1ds$$

où $H_0$ est telle que (2.5) soit vérifiée. De la même manière que dans (2.17), nous observons que, pour tout $t\geq t_1$, $I(t)$ satisfait

$$I(t)<1. \tag{2.20}$$

On suppose aussi, sans perte de généralité que $I(t)\geq\beta_0>0$, pour tout $t\geq t_1$ ; sinon (2.16) donne une forme explicite de décroissance. De plus, on définit $\lambda(t)$ par

$$\lambda(t)=\int_{t_1}^t k''(s)\frac{-k'(s)}{H_0^{-1}(k''(s))}\int_{\Gamma_1}|u(t)-u(t-s)|^2d\Gamma_1ds,$$

ainsi, de l'hypothèse (B2) et les propriétés des fonctions $H_0$ et $D$, on conclut que

$$\frac{-k'(s)}{H_0^{-1}(k''(s))}\leq\frac{-k'(s)}{H_0^{-1}(H(-k'(s)))}=\frac{-k'(s)}{D^{-1}(-k'(s))}\leq k_0,$$

pour une certaine constante positive $k_0$. Ensuite, en utilisant l'inégalité de trace (14), (1.8), (2.2) et (2.10), on peut facilement voir, pour tout $t\geq t_1$, que $\lambda(t)$ satisfait

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &\leq k_0 \int_{t_1}^{t} k''(s) \int_{\Gamma_1} |u(t)-u(t-s)|^2 d\Gamma_1 ds \\
&\leq 2k_0 \int_{t_1}^{t} k''(s) \int_{\Gamma_1} \left(|u(t)|^2 + |u(t-s)|^2\right) d\Gamma_1 ds \\
&\leq cB \int_{t_1}^{t} k''(s) ds \\
&\leq cB(-k'(t_1)) \\
&< \min\{r, H(r), H_0(r)\}, \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

pour $t_1$ suffisamment grand (si nécessaire). De plus, en vertu de (2.15), on remarque que

$$\lambda(t) \leq -c\Big[E_1'(t) - \frac{\eta}{2} k^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\Big], \quad \forall t \geq t_1. \qquad (2.22)$$

Etant donné que la fonction $H_0$ est strictement convexe sur $(0, r]$ et $H_0(0) = 0$, on a

$$H_0(\theta x) \leq \theta H_0(x),$$

tels que $0 \leq \theta \leq 1$ et $x \in (0, r]$. En utilisant cette dernière estimation, (2.20) ,(2.21) et l'inégalité de Jensen (21), il vient

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \frac{1}{I(t)} \int_{t_1}^{t} I(t) H_0[H_0^{-1}(k''(s))] \frac{-k'(s)}{H_0^{-1}(k''(s))} \int_{\Gamma_1} |u(t)-u(t-s)|^2 d\Gamma_1 ds \\
&\geq \frac{1}{I(t)} \int_{t_1}^{t} H_0[I(t) H_0^{-1}(k''(s))] \frac{-k'(s)}{H_0^{-1}(k''(s))} \int_{\Gamma_1} |u(t)-u(t-s)|^2 d\Gamma_1 ds \\
&\geq H_0\Big(\frac{1}{I(t)} \int_{t_1}^{t} I(t) H_0^{-1}(k''(s)) \frac{-k'(s)}{H_0^{-1}(k''(s))} \int_{\Gamma_1} |u(t)-u(t-s)|^2 d\Gamma_1 ds\Big) \\
&= H_0\Big(-\int_{t_1}^{t} k'(s) \int_{\Gamma_1} |u(t)-u(t-s)|^2 d\Gamma_1 ds\Big), \quad \forall t \geq t_1.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$-\int_{t_1}^{t} k'(s) \int_{\Gamma_1} |u(t)-u(t-s)|^2 d\Gamma_1 ds \leq H_0^{-1}(\lambda(t)), \quad \forall t \geq t_1.$$

Remplaçons l'estimation ci-dessus dans (2.16), on obtient

$$F'(t) \leq -mE_1(t) + Ck^2(t) \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 + cH_0^{-1}(\lambda(t)), \quad \forall t \geq t_1. \qquad (2.23)$$

Maintenant, en utilisant le fait que $H_0' > 0$, $H_0'' > 0$, $\varepsilon_0 < r$, $c_0 > 0$ et

$$E_1'(t) \leq \frac{\eta}{2} k^2(t) \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 \right),$$

on trouve que la fonctionnelle

$$\begin{aligned} F_1(t) = H_0'\Big( \varepsilon_0 \frac{E_1(t) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_t^\infty k^2(s) ds}{E_1(0) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_0^\infty k^2(s) ds} \Big) F(t) \\ + c_0 \Big( E_1(t) + \frac{\eta}{2} ( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_t^\infty k^2(s) ds \Big) \end{aligned}$$

satisfait

$$\begin{aligned} F_1'(t) = & \Big( \varepsilon_0 \frac{E_1'(t) - \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) k^2(t)}{E_1(0) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_0^\infty k^2(s) ds} \Big) \\ & \times H_0''\Big( \varepsilon_0 \frac{E_1(t) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_t^\infty k^2(s) ds}{E_1(0) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_0^\infty k^2(s) ds} \Big) F(t) \\ & + H_0'\Big( \varepsilon_0 \frac{E_1(t) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_t^\infty k^2(s) ds}{E_1(0) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_0^\infty k^2(s) ds} \Big) F'(t) \\ & + c_0 \Big[ E_1'(t) - \frac{\eta}{2} k^2(t) ( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \Big] \\ \leq & H_0'\Big( \varepsilon_0 \frac{E_1(t) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_t^\infty k^2(s) ds}{E_1(0) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_0^\infty k^2(s) ds} \Big) F'(t) \\ & + c_0 \Big[ E_1'(t) - \frac{\eta}{2} k^2(t) \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 \right) \Big], \quad \forall t \geq t_1. \end{aligned}$$

Puis, de (2.23), il découle, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned} F_1'(t) \leq & -m E_1(t) H_0'\Big( \varepsilon_0 \frac{E_1(t) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_t^\infty k^2(s) ds}{E_1(0) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_0^\infty k^2(s) ds} \Big) \\ & + C \Big( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 \Big) k^2(t) H_0'\Big( \varepsilon_0 \frac{E_1(t) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_t^\infty k^2(s) ds}{E_1(0) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_0^\infty k^2(s) ds} \Big) \\ & + c H_0^{-1}(\lambda(t)) H_0'\Big( \varepsilon_0 \frac{E_1(t) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_t^\infty k^2(s) ds}{E_1(0) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_0^\infty k^2(s) ds} \Big) \\ & + c_0 \Big[ E_1'(t) - \frac{\eta}{2} k^2(t) \left( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 \right) \Big]. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Soit $H_0^*$ la fonction convexe conjuguée de $H_0$ au sens de Young, alors, on a

$$H_0^*(s) = s(H_0')^{-1}(s) - H_0[(H_0')^{-1}(s)], \quad \text{si } s \in (0, H_0'(r)], \tag{2.25}$$

de plus, $H_0^*$ vérifie l'inégalité de Young généralisée :

$$AB \leq H_0^*(A) + H_0(B), \quad \text{si } A \in (0, H_0'(r)],\ B \in (0, r]. \tag{2.26}$$

En utilisant (2.21), (2.24) et (2.26), avec

$$A = H_0'\Big(\varepsilon_0 \frac{E_1(t) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_0^\infty k^2(s)ds}\Big), \quad B = H_0^{-1}(\lambda(t))$$

on arrive à

$$\begin{aligned}
F_1'(t) \leq & -mE_1(t)H_0'\Big(\varepsilon_0 \frac{E_1(t) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_0^\infty k^2(s)ds}\Big) \\
& + C\left(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\right) k^2(t) H_0'\Big(\varepsilon_0 \frac{E_1(t) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0) + \frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\Big) \int_0^\infty k^2(s)ds}\Big) \\
& + c\lambda(t) + cH_0^*\Big(H_0'\Big(\varepsilon_0 \frac{E_1(t) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0) + \frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_0^\infty k^2(s)ds}\Big)\Big) \\
& + c_0\Big[E_1'(t) - \frac{\eta}{2} k^2(t)\Big(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Ainsi, de (2.22) et (2.25), nous avons, pour tout $t \geq t_1$,

$$
\begin{aligned}
F_1'(t) \leq & -mE_1(t)H_0'\Big(\varepsilon_0\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big) \\
& + Ck^2(t)\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)H_0'\Big(\varepsilon_0\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big) \\
& - c\Big[E_1'(t)-\frac{\eta}{2}k^2(t)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big] \\
& + c\Big(\varepsilon_0\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big) \\
& \times H_0'\Big(\varepsilon_0\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big) \\
& + c_0\Big[E_1'(t)-\frac{\eta}{2}k^2(t)\left(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\right)\Big].
\end{aligned}
$$

Par conséquent, avec un choix convenable de $c_0$, nous obtenons, pour tout $t \geq t_1$,

$$
\begin{aligned}
F_1'(t) \leq & -m\Big(\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big) \\
& \times H_0'\Big(\varepsilon_0\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big) \\
& + m\Big(\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds\Big) \\
& \times H_0'\Big(\varepsilon_0\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big) \\
& + C\left(k^2(t)\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\right)H_0'\Big(\varepsilon_0\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big) \\
& + c\Big(\varepsilon_0\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big) \\
& \times H_0'\Big(\varepsilon_0\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big).
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Nous utilisons (2.19), pour une certaine constante positive $C$, nous observons que (2.27) devient

$$\begin{aligned}
F_1'(t) \leq & -m\Big(\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big)\\
& \times H_0'\Big(\varepsilon_0\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big)\\
& + C\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1\Big)k(t)H_0'\Big(\varepsilon_0\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big)\\
& + c\left(\varepsilon_0\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\right)\\
& \times H_0'\Big(\varepsilon_0\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big).
\end{aligned}\tag{2.28}$$

De nouveau, on utilise (2.25) et (2.26), pour obtenir, pour $t_1$ suffisamment grand (si nécessaire),

$$\begin{aligned}
& k(t)\Big[H_0'\Big(\varepsilon_0\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big)\Big]\\
& \leq \left(\varepsilon_0\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\right)\\
& \quad \times H_0'\Big(\varepsilon_0\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big)\\
& \quad + H_0(k(t)), \quad \forall t \geq t_1.
\end{aligned}$$

Donc, avec un choix convenable de $\varepsilon_0$, (2.28) devient

$$\begin{aligned}
F_1'(t) \leq & -\ell\Big(\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big)\\
& \times H_0'\Big(\varepsilon_0\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big)\\
& + C(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2d\Gamma_1)H_0(k(t)),
\end{aligned}$$

pour tout $t \geq t_1$.

D'où,

$$\begin{aligned} F_1'(t) \leq & -\ell H_1\Big(\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big) \\ & + C\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)H_0(k(t)), \quad \forall t \geq t_1, \end{aligned} \tag{2.29}$$

telle que $H_1(t) = tH_0'(\varepsilon_0 t)$.

Puisque $H_1'(t) = H_0'(\varepsilon_0 t) + \varepsilon_0 t H_0''(\varepsilon_0 t)$, en utilisant la stricte convexité de la fonction $H_0$ sur $(0, r]$, on déduit que $H_1'(t)$ et $H_1(t) > 0$ sur $(0, 1]$.

Ainsi, en tenant compte de

$$E_1'(t) \leq \frac{\eta}{2}k^2(t)\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)$$

et (2.29), on arrive, pour tout $t \geq t_1$, à

$$\begin{aligned} & \Big[tH_1\Big(\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big)\Big]' \\ & \leq H_1\Big(\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big) \\ & \leq -\frac{1}{\ell}F_1'(t) + \frac{C}{\ell}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)H_0(k(t)). \end{aligned}$$

Une simple intégration sur $(t_1, t)$ donne

$$\begin{aligned} & tH_1\Big(\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big) \\ & \leq t_1 H_1\Big(\frac{E_1(t_1)+\frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_{t_1}^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big) \\ & \quad + \frac{1}{\ell}F_1(t_1) + \frac{C}{\ell}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_{t_1}^t H_0(k(s))ds. \end{aligned}$$

Ceci implique, pour une certaine constante positive $k_2$ et pour tout $t \geq t_1$,

$$H_1\Big(\frac{E_1(t)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_t^\infty k^2(s)ds}{E_1(0)+\frac{\eta}{2}(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1)\int_0^\infty k^2(s)ds}\Big) \leq \frac{k_2}{t} + \frac{C}{\ell t}\Big(\int_{\Gamma_1}|u_0|^2 d\Gamma_1\Big)\int_{t_1}^t H_0(k(s))ds.$$

Par conséquent, pour deux constantes positives $k_1$ et $k_3$ convenablement choisies, on trouve l'estimation suivante

$$E_1(t) \leq k_1 H_1^{-1}\Big(\frac{k_2 + k_3(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_{t_1}^t H_0(k(s))ds}{t}\Big) \\ - \frac{\eta}{2}\Big(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1\Big) \int_t^\infty k^2(s)ds.$$

Ce qui achève la démonstration du Théorème 2.2.1.

## 2.4 Exemple illustratif

La condition

$$k'' \geq d(-k')^p, \quad 1 \leq p < 3/2,$$

présume que :

$$-k'(t) \leq \omega e^{-dt} \quad \text{si} \;\; p = 1$$

et

$$-k'(t) \leq \omega / t^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{si} \;\; 1 < p < 3/2,$$

où $\omega \in \mathbb{R}^+$.

On peut utiliser des noyaux qui n'ont pas nécessairement des dérivées de taux de décroissance exponentielle ou polynômiale, on prend par exemple :

$$k'(t) = -\exp(-\sqrt{t}),$$

alors $k''(t) = H(-k'(t))$, avec

$$H(t) = \frac{t}{2\ln(1/t)} \quad \text{pour} \;\; t \in (0, r], \;\; r < 1.$$

Or

$$H'(t) = \frac{1 + \ln(1/t)}{2[\ln(1/t)]^2} \quad \text{et} \quad H''(t) = \frac{\ln(1/t) + 2}{2t[\ln(1/t)]^3},$$

donc, il est clair que la fonction $H$ vérifie l'hypothèse (B2) sur $(0, r]$ pour tout $0 < r < 1$.

On outre, si on prend $D(t) = t^\alpha$, on voit que (2.5) est vérifiée pour tout $\alpha > 1$. Par conséquent, le Théorème 2.2.1 donne un taux de décroissance explicite.

En effet, la dérivée de la fonction $H_0(t) = H(t^\alpha)$ est donnée comme suit :

$$H_0'(t) = \frac{\alpha t^{\alpha-1}[1 + \ln(1/t^\alpha)]}{2[\ln(1/t^\alpha)]^2}.$$

En utilisant (2.4), nous pouvons déduire que

$$\begin{aligned} E_1(t) \le k_1 \Big( & \frac{k_2 + k_3\Big( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 \Big) \int_{t_1}^t H_0(k(s))ds}{t} \Big)^{1/(2\alpha)} \\ & - \frac{\eta}{2}\Big( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 \Big) \int_t^\infty k^2(s)ds, \quad \forall t \ge t_1, \end{aligned}$$

pour tout $\alpha > 1$, où

$$H_0(k(s)) = \frac{(k(s))^\alpha}{2\ln(1/(k(s))^\alpha)}.$$

Faisant $\alpha \to 1$, on obtient

$$\begin{aligned} E_1(t) \le k_1 \Big( & \frac{k_2 + k_3(\int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1) \int_{t_1}^t H(k(s))ds}{t} \Big)^{1/2} \\ & - \frac{\eta}{2}\Big( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 \Big) \int_t^\infty k^2(s)ds, \quad \forall t \ge t_1. \end{aligned} \tag{2.30}$$

De plus, si $\int_0^\infty H(k(s))ds < +\infty$, alors (2.30) se réduit à

$$E_1(t) \le \frac{C}{\sqrt{t}} - \frac{\eta}{2}\Big( \int_{\Gamma_1} |u_0|^2 d\Gamma_1 \Big) \int_t^\infty k^2(s)ds, \quad \forall t \ge t_1.$$

# Chapitre 3

# Résultat de décroissance générale pour un système thermoélastique avec second son et un terme amortissant distribué

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$. L'objet de ce chapitre est d'étudier le système suivant :

$$\begin{gathered} u_{tt} - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div} u) + \beta\nabla\theta + \alpha(t)\mathrm{g}(u_t) = 0 \quad \text{dans } \Omega\times(0,+\infty) \\ c\theta_t + \kappa \operatorname{div} q + \beta \operatorname{div} u_t = 0 \quad \text{dans } \Omega\times(0,+\infty) \\ \tau_0 q_t + q + \kappa\nabla\theta = 0 \quad \text{dans } \Omega\times(0,+\infty) \\ u(.,0) = u_0, \quad u_t(.,0) = u_1, \quad \theta(.,0) = \theta_0, \quad q(.,0) = q_0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times[0,+\infty), \end{gathered} \tag{3.1}$$

avec les même notations qu'au chapitre précédent, où $\alpha$ et g sont des fonctions positives particulières. Dans la section 3.1, on donne quelques hypothèses nécessaires dans le présent chapitre. Quelques lemmes techniques et notre résultat avec la preuve sont présentés respectivement dans les sections 3.2 et 3.3. Finalement, nous donnons des exemples explicites comme application.

## 3.1 Hypothèses

Afin d'obtenir le comportement asymptotique de la solution du problème (3.1), on va présenter dans cette section, quelques hypothèses requises, à savoir :

(H1) $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante et différentiable.

(H2) $\mathrm{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante dans $C^0$ de sorte qu'il existe des constantes $\varepsilon, c_1, c_2 > 0$ et une fonction croissante $G \in C^1([0, +\infty))$, avec $G(0) = 0$, où $G$ est une fonction linéaire ou strictement convexe dans $C^2$ sur $(0, \varepsilon]$, telles que

$$c_1 |s| \leq |\mathrm{g}(s)| \leq c_2 |s|^p \quad \text{si } |s| \geq \varepsilon$$

$$s^2 + \mathrm{g}^2(s) \leq G^{-1}(s\mathrm{g}(s)) \quad \text{si } |s| \leq \varepsilon$$

et $p$ vérifiant

$$1 \leq p \leq \frac{n+2}{n-2} \quad \text{si } n > 2$$

$$1 \leq p < \infty \quad \text{si } n \leq 2.$$

**Remarque 3.1.1** *L'hypothèse (H2) implique que* $s\mathrm{g}(s) > 0$*, pour tout* $s \neq 0$.

On définit l'espace de Hilbert suivant

$$W = \{v \in \left(L^2(\Omega)\right)^n : \operatorname{div} v \in L^2(\Omega)\}.$$

Dans la suite, on suppose que le système (3.1) admet une solution forte $(u, \theta, q)$ vérifiant, pour
$(u_0, u_1, \theta_0, q_0) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n \times H_0^1(\Omega) \times W$,

$$u \in C\left([0, +\infty); (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n\right) \cap C^1\left([0, +\infty); (H_0^1(\Omega))^n\right),$$

$$\theta \in C\left([0, +\infty); H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0, +\infty); L^2(\Omega)\right),$$

$$q \in C\left([0, +\infty); W\right) \cap C^1\left([0, +\infty); (L^2(\Omega))^n\right)$$

et on prouve un résultat de décroissance générale. L'existence d'une telle solution forte est assurée par la méthode de Galerkin standard.

**Lemme 3.1.2 ([30])** *Supposons que* $v \in [L^2(\Omega)]^n$ *. Alors*

$$\|\operatorname{div} v\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|v\|_{(L^2(\Omega))^n}.$$

On introduit maintenant la fonctionnelle d'énergie totale associée au problème (3.1)

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + \frac{\mu}{2}\|\nabla u\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + \frac{(\mu+\lambda)}{2}\|(\operatorname{div} u)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ \frac{c}{2}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\tau_0}{2}\|q\|^2_{(L^2(\Omega))^n}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

## 3.2 Lemmes techniques

Dans cette section, on va établir quelques lemmes nécessaires pour pouvoir démonter notre résultat principal.

**Lemme 3.2.1** *Soit* $u(x,t)$ *solution du problème* (3.1)*. Alors la fonctionnelle d'énergie définie par* (3.2) *est décroissante sur* $[0,\infty)$*. De plus*

$$E'(t) = -\|q\|^2_{(L^2(\Omega))^n} - \alpha(t)\int_\Omega u_t \mathrm{g}(u_t)dx \leq 0. \tag{3.3}$$

**Preuve.** Multiplions l'équation $(3.1)_1$ par $u_t$, $(3.1)_2$ par $\theta$ et $(3.1)_3$ par $q$ et intégrons sur $\Omega$, en utilisant la formule de Green (15), nous obtenons facilement (3.3). En utilisant aussi l'hypothèse $(H1)$ et la remarque (3.1.1), on déduit que la fonctionnelle $E$ est décroissante. ■

**Lemme 3.2.2** *Soit* $u(x,t)$ *solution du problème* (3.1)*. Alors, la fonctionnelle définie par*

$$\Psi(t) = \int_\Omega u.\left(u_t - \frac{\beta\tau_0}{\kappa}q\right)dx,$$

*vérifie*

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &\leq 2\int_\Omega |u_t|^2 dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - (\mu+\lambda)\int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 dx \\ &\quad + C\int_\Omega |q|^2 dx - \alpha(t)\int_\Omega u\mathrm{g}(u_t)\,dx, \end{aligned} \tag{3.4}$$

*où* $C$ *est une constante positive.*

**Preuve.** Utilisons (3.1), la formule de Green (15), l'inégalité de Poincaré (13) et l'inégalité de Young, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &= \int_\Omega |u_t|^2 \, dx - \mu \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - (\mu+\lambda) \int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 \, dx \\
&\quad -\beta \int_\Omega u.\nabla\theta dx - \alpha(t) \int_\Omega ug(u_t) \, dx + \frac{\beta}{\kappa} \int_\Omega (u.q) dx \\
&\quad +\beta \int_\Omega u.\nabla\theta dx - \frac{\beta\tau_0}{\kappa} \int_\Omega (u_t.q) dx \\
&\leq 2 \int_\Omega |u_t|^2 \, dx - \frac{\mu}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - (\mu+\lambda) \int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 \, dx \\
&\quad +C \int_\Omega |q|^2 \, dx - \alpha(t) \int_\Omega ug(u_t) \, dx.
\end{aligned}$$

■

Soit $\varphi$ la solution du problème suivant

$$\Delta\varphi = \theta \quad \text{dans } \Omega, \quad \varphi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Puisque

$$\theta \in C^1\left([0,+\infty) ; L^2(\Omega)\right)$$

alors

$$\varphi \in C^1\left([0,+\infty) ; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)$$

et on aura grâce à la proposition (0.5.2)

$$\|\varphi(.,t)\|_{H^2(\Omega)} \leq c_0 \|\theta(.,t)\|_{L^2(\Omega)} . \tag{3.5}$$

**Lemme 3.2.3** *Soit $u(x,t)$ la solution du problème* (3.1). *Alors la fonctionnelle suivante*

$$\Phi(t) = -\tau_0 \int_\Omega q.\nabla\varphi dx$$

*satisfait*

$$\Phi'(t) \leq -\frac{\kappa}{2} \int_\Omega \theta^2 dx + c_3 \int_\Omega |q|^2 \, dx + c_4 \int_\Omega |u_t|^2 \, dx \tag{3.6}$$

*telles que $c_3$ et $c_4$ sont des constantes positives.*

**Preuve.** On dérive la fonction $\Phi$ par rapport à $t$, en utilisant $(3.1)_2$, $(3.1)_3$, la formule de Green (15) et l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &= -\tau_0 \int_\Omega q_t.\nabla\varphi dx - \tau_0 \int_\Omega q.\nabla\varphi_t dx \\
&= \int_\Omega (q+\kappa\nabla\theta).\nabla\varphi dx - \tau_0 \int_\Omega q.\nabla\left(\Delta^{-1}\theta_t\right) dx \\
&= -\kappa \int_\Omega \theta^2 dx + \int_\Omega q.\nabla\varphi dx - \tau_0 \int_\Omega q.\nabla\left(\Delta^{-1}\left(-\frac{\kappa}{c}\operatorname{div} q - \frac{\beta}{c}\operatorname{div} u_t\right)\right) dx \\
&\leq -\kappa \int_\Omega \theta^2 dx + \frac{\kappa}{2c_0}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx + \frac{c_0}{2\kappa}\int_\Omega |q|^2 dx \\
&\quad + \frac{\tau_0}{2}\int_\Omega |q|^2 dx + \frac{\tau_0}{2}\int_\Omega \left|\nabla\left(\Delta^{-1}\left(\operatorname{div}\left(-\frac{\kappa}{c}q - \frac{\beta}{c}u_t\right)\right)\right)\right|^2 dx.
\end{aligned}$$

Sachant que $\left(-\frac{\kappa}{c}q - \frac{\beta}{c}u_t\right) \in \left(L^2(\Omega)\right)^n$ et en utilisant le résultat du Lemme 3.1.2, on déduit que

$$\operatorname{div}\left(-\frac{\kappa}{c}q - \frac{\beta}{c}u_t\right) \in H^{-1}(\Omega).$$

Ainsi

$$\Delta^{-1}\left(\operatorname{div}\left(-\frac{\kappa}{c}q - \frac{\beta}{c}u_t\right)\right) \in H^1(\Omega).$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta^{-1}\left(\operatorname{div}\left(-\frac{\kappa}{c}q - \frac{\beta}{c}u_t\right)\right)\right\|_{H^1(\Omega)} &\leq c_0 \left\|\operatorname{div}\left(-\frac{\kappa}{c}q - \frac{\beta}{c}u_t\right)\right\|_{H^{-1}(\Omega)} \\
&\leq c_0 \left\|\frac{\kappa}{c}q + \frac{\beta}{c}u_t\right\|_{(L^2(\Omega))^n} \\
&\leq c_1 \|q\|_{(L^2(\Omega))^n} + c_2 \|u_t\|_{(L^2(\Omega))^n}
\end{aligned}$$

pour deux constantes positives $c_1$ et $c_2$ convenablement choisies.

Ainsi, on aura

$$\int_\Omega \left|\nabla\left(\Delta^{-1}\left(\operatorname{div}\left(-\frac{\kappa}{c}q - \frac{\beta}{c}u_t\right)\right)\right)\right|^2 dx \leq c_1 \|q\|_{(L^2(\Omega))^n} + c_2 \|u_t\|_{(L^2(\Omega))^n}.$$

Par suite, en utilisant (3.5), on arrive à

$$\Phi'(t) \leq -\frac{\kappa}{2}\int_\Omega \theta^2 dx + c_3 \int_\Omega |q|^2 dx + c_4 \int_\Omega |u_t|^2 dx.$$

Ceci termine la preuve. ■

**Lemme 3.2.4** *Supposons que les hypothèses* (H1) *et* (H2) *sont vérifiées. Soit* $u(x,t)$ *la solution du problème* (3.1)*, alors pour des constantes positives* $N$*,* $m$ *et* $c$ *convenablement choisies, la fonctionnelle* $F$ *définie par*

$$F(t) = NE(t) + \Psi(t) + \Phi(t)$$

*vérifie*

$$F'(t) \leq -mE(t) + c\int_{\Omega}(|u_t|^2 + |u\mathrm{g}(u_t)|)dx. \tag{3.7}$$

**Preuve.** Moyennant (3.3), (3.4) et (3.6), il découle

$$\begin{aligned} F'(t) \quad \leq \quad & -(N - C - c_3)\|q\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + (2 + c_4)\|u_t\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \\ & -\frac{\mu}{2}\|\nabla u\|^2_{(L^2(\Omega))^n} - (\mu+\lambda)\|\operatorname{div} u\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\kappa}{2}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & -\alpha(t)\int_{\Omega} u\mathrm{g}(u_t)dx, \end{aligned}$$

en choisissant $N$ assez grand tels que

$$(N - C - c_3) > 0 \quad \text{et} \quad F \sim E,$$

nous obtenons

$$F'(t) \leq -mE(t) + c\int_{\Omega}(|u_t|^2 + |u\mathrm{g}(u_t)|)dx.$$

■

Maintenant, on choisit $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ de sorte que

$$s\mathrm{g}(s) \leq \min\{\varepsilon, G(\varepsilon)\} \quad \text{pour tout } |s| \leq \varepsilon_1. \tag{3.8}$$

Ceci montre clairement que

$$\begin{cases} c_1'|s| \leq |\mathrm{g}(s)| \leq c_2'|s|^p \quad \text{si } |s| \geq \varepsilon_1, \\ s^2 + \mathrm{g}^2(s) \leq G^{-1}(s\mathrm{g}(s)) \quad \text{si } |s| \leq \varepsilon_1. \end{cases} \tag{3.9}$$

En considérant maintenant la partition de $\Omega$ suivante

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : |u_t| \leq \varepsilon_1\}, \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega : |u_t| > \varepsilon_1\}$$

et en utilisant l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ (voir le Théorème (0.5.1)) et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2} |u\mathrm{g}(u_t)|\, dx &\leq \left(\int_{\Omega_2} |u|^{p+1}\, dx\right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\int_{\Omega_2} |\mathrm{g}(u_t)|^{1+\frac{1}{p}}\, dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \\ &\leq c\,\|u\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^n} \left(\int_{\Omega_2} |\mathrm{g}(u_t)|^{1+\frac{1}{p}}\, dx\right)^{\frac{p}{p+1}}.\end{aligned}$$

Par suite, grâce à (3.2), (3.9) et l'inégalité de Poincaré (13), on conclut

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2} (|u_t|^2 + |u\mathrm{g}(u_t)|)dx &\leq c\int_{\Omega_2} u_t\mathrm{g}(u_t)dx + c\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_2} u_t\mathrm{g}(u_t)dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \\ &\leq -cE'(t) + cE(t)^{\frac{1}{2}}\left(-E'(t)\right)^{\frac{p}{p+1}},\end{aligned}$$

en utilisant ensuite l'inégalité de Young, avec $\sigma = p+1$ et $\sigma' = \dfrac{p+1}{p}$ pour

$$E(t)^{\frac{1}{2}}\left(-E'(t)\right)^{\frac{p}{p+1}}$$

et le fait que la fonctionnelle d'énergie $E$ est bornée, on arrive à

$$\int_{\Omega_2} (|u_t|^2 + |u\mathrm{g}(u_t)|)dx \leq c\varepsilon E(t)^{\frac{p+1}{2}} - C_\varepsilon E'(t) \leq c\varepsilon E(t) - C_\varepsilon E'(t). \tag{3.10}$$

D'autre part, par (3.2) et l'inégalité de Young, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} (|u_t|^2 + |u\mathrm{g}(u_t)|)dx &\leq \int_{\Omega_1} |u_t|^2\, dx + \varepsilon\int_{\Omega_1} |u|^2\, dx + C_\varepsilon\int_{\Omega_1} (\mathrm{g}(u_t))^2\, dx \\ &\leq \int_{\Omega_1} |u_t|^2\, dx + c\varepsilon E(t) + C_\varepsilon\int_{\Omega_1} (\mathrm{g}(u_t))^2\, dx.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Insérant (3.10) et (3.11) dans (3.7) et en choisissant $\varepsilon$ suffisamment petit, on déduit que la fonctionnelle

$$\mathcal{L} = F + C_\varepsilon E$$

satisfait

$$\mathcal{L}'(t) \leq -dE(t) + c\int_{\Omega_1} (|u_t|^2 + (\mathrm{g}(u_t))^2)dx \tag{3.12}$$

et

$$\mathcal{L}(t) \sim E(t). \tag{3.13}$$

## 3.3 Résultat de décroissance générale

Nous pouvons maintenant énoncer et prouver notre résultat principal.

**Théorème 3.3.1** *Supposons que les hypothèses* $(H1)$ *et* $(H2)$ *sont vérifiées. Alors, il existe des constantes positives* $k_1$*,* $k_2$*,* $k_3$ *et* $\varepsilon_0$ *telle que l'énergie associée au problème* (3.1) *satisfait*

$$E(t) \leq k_3 G_1^{-1}(k_1 \int_0^t \alpha(s)ds + k_2), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.14}$$

*où*

$$G_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{G_2(s)} ds \quad et \quad G_2(t) = tG'(\varepsilon_0 t).$$

Notons ici, à partir de propriétés de la fonction $G$, que la fonction $G_1$ est strictement décroissante et convexe sur $(0, 1]$, avec $lim_{t \longrightarrow 0} G_1(t) = +\infty$, ainsi, le Théoréme précédent assure que

$$\lim_{t \to +\infty} E(t) = 0.$$

**Preuve.** Multiplions (3.12) par $\alpha(t)$, il vient

$$\alpha(t)\mathcal{L}'(t) \leq -d\alpha(t)E(t) + c\alpha(t) \int_{\Omega_1} (|u_t|^2 + \mathrm{g}(u_t)^2)dx. \tag{3.15}$$

Distinguons deux cas :

• **Cas 1.** $G$ est linéaire sur $[0, \varepsilon]$ :

Ainsi, on déduit que

$$\alpha(t)\mathcal{L}'(t) \leq -d\alpha(t)E(t) + c\alpha(t) \int_{\Omega_1} u_t \mathrm{g}(u_t)dx = -d\alpha(t)E(t) - cE'(t),$$

ce qui donne, en utilisant l'hypothèse $(H1)$,

$$(\alpha\mathcal{L} + cE)'(t) \leq -d\alpha(t)E(t).$$

Par conséquent, en utilisant le fait que $\alpha\mathcal{L} + cE \sim E$, on arrive à

$$E(t) \leq c' exp\left(-c'' \int_0^t \alpha(s)ds\right) = c' G_1^{-1}\left(c'' \int_0^t \alpha(s)ds\right).$$

• **Cas 2.** $G$ est non-linéaire sur $[0,\varepsilon]$ :

Pour estimer le dernier terme du second membre de (3.12), on utilise, pour $I(t)$ définit par

$$I(t)=\frac{1}{|\Omega_1|}\int_{\Omega_1}u_t\mathrm{g}(u_t)dx,$$

l'inégalité de Jensen pour obtenir

$$G^{-1}(I(t))\geq c\int_{\Omega_1}G^{-1}(u_t\mathrm{g}(u_t))dx. \tag{3.16}$$

De (3.9) et (3.16), il résulte que

$$\begin{aligned}\alpha(t)\int_{\Omega_1}(|u_t|^2+\mathrm{g}(u_t)^2)dx &\leq \alpha(t)\int_{\Omega_1}G^{-1}(u_t\mathrm{g}(u_t))dx\\ &\leq c\alpha(t)G^{-1}(I(t)).\end{aligned}$$

D'où, (3.15) devient

$$R_0'(t)\leq -d\alpha(t)E(t)+c\alpha(t)G^{-1}(I(t)), \tag{3.17}$$

tel que $R_0=\alpha\mathcal{L}+E$, de plus on a $R_0\sim E$ en vertu de (3.13).

Maintenant, pour $\varepsilon_0<\varepsilon$ et $c_0>0$, en utilisant (3.17) et le fait que $E'\leq 0$, $G'>0$, $G''>0$ sur $(0,\varepsilon]$, nous constatons que la fonctionnelle $R_1$, qui est définie par

$$R_1(t)=G'(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)})R_0(t)+c_0E(t)$$

satisfait, pour $a_1,a_2>0$,

$$a_1R_1(t)\leq E(t)\leq a_2R_1(t) \tag{3.18}$$

et

$$\begin{aligned}R_1'(t)&=\varepsilon_0\frac{E'(t)}{E(0)}G''(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)})R_0(t)+G'(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)})R_0'(t)+c_0E'(t)\\ &\leq -d\alpha(t)E(t)G'(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)})+c\alpha(t)G'(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)})G^{-1}(I(t))+c_0E'(t).\end{aligned} \tag{3.19}$$

Soit $G^*$ la fonction convexe conjuguée de $G$ au sens de Young, d'où

$$G^*(s)=s(G')^{-1}(s)-G[(G')^{-1}(s)],\quad \text{si } s\in(0,G'(\varepsilon)], \tag{3.20}$$

et $G^*$ satisfait l'inégalité de Young généralisée

$$AB \leq G^*(A) + G(B), \quad \text{si } A \in (0, G'(\varepsilon)],\ B \in (0, \varepsilon]. \tag{3.21}$$

Prenons $A = G'\left(\varepsilon_0 \dfrac{E(t)}{E(0)}\right)$ et $B = G^{-1}(I(t))$ alors, moyennant (3.3), (3.8) et (3.19)-(3.21), on trouve

$$\begin{aligned} R_1'(t) &\leq -d\alpha(t)E(t)G'(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}) + c\alpha(t)G^*\left(G'(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)})\right) + c\alpha(t)I(t) + c_0E'(t) \\ &\leq -d\alpha(t)E(t)G'(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}) + c\varepsilon_0\alpha(t)\frac{E(t)}{E(0)}G'(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}) - cE'(t) + c_0E'(t). \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons pour un choix convenable de $\varepsilon_0$ et $c_0$

$$R_1'(t) \leq -k\alpha(t)\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right)G'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) = -k\alpha(t)G_2(\frac{E(t)}{E(0)}), \tag{3.22}$$

où $G_2(t) = tG'(\varepsilon_0 t)$.

Puisque

$$G_2'(t) = G'(\varepsilon_0 t) + \varepsilon_0 t G''(\varepsilon_0 t),$$

en utilisant donc la stricte convexité de $G$ sur $(0, \varepsilon]$, on déduit que $G_2'(t), G_2(t) > 0$ sur $(0, 1]$.

Ainsi, en posant

$$R(t) = \frac{a_1 R_1(t)}{E(0)}$$

et en utilisant (3.18) et (3.22), on aura

$$R(t) \sim E(t) \tag{3.23}$$

et

$$R'(t) \leq -k_1\alpha(t)G_2(R(t))$$

pour $k_1 > 0$.

Par suite, une simple intégration donne, pour $k_2 > 0$

$$R(t) \leq G_1^{-1}(k_1\int_0^t \alpha(s)ds + k_2), \tag{3.24}$$

où $G_1(t)=\int_t^1 \frac{1}{G_2(s)}ds$.

Nous avons utilisé les propriétés de $G_2$ et le fait que $G_1$ est strictement décroissante sur $(0,1]$.

Finalement, en utilisant (3.23) et (3.24), on obtient (3.14).

■

**Remarque 3.3.2** *Liu et Zuazua [22] et Alabau-Boussouira [2] ont proposé les hypothèses suivantes sur la fonction* g *:*

$$\begin{cases} \mathrm{g}_0(|s|) \leq |\mathrm{g}(s)| \leq \mathrm{g}_0^{-1}(|s|) & \textit{pour tout } |s| \leq \varepsilon \\ c_1\,|s| \leq |\mathrm{g}(s)| \leq c_2\,|s| & \textit{pour tout } |s| \geq \varepsilon \end{cases} \tag{3.25}$$

*pour une certaine fonction strictement croissante* $\mathrm{g}_0 \in C^1([0,+\infty)$*, avec* $\mathrm{g}_0(0)=0$*, où* $c_1$*,* $c_2$*,* $\varepsilon$ *sont des constantes positives et la fonction* $G$ *définie par*

$$G(s)=\sqrt{\frac{s}{2}}\mathrm{g}_0\left(\sqrt{\frac{s}{2}}\right)$$

*est strictement convexe dans* $C^2$ *sur* $(0,\varepsilon]$ *si la fonction* $\mathrm{g}_0$ *est non-linéaire.*

Notons ici que si ces hypothèses sont vérifiées alors l'hypothèse $(H2)$ est également vérifiée.

## 3.4 Exemples

On donne des exemples afin d'illustrer le taux de décroissance donné par le Théorème 3.3.1.

On suppose que la fonction g vérifie (3.25) près de l'origine.

(**1**) Si $\mathrm{g}_0(s)=cs^q$ et $q\geq 1$, alors

$$G(s)=cs^{\frac{q+1}{2}}$$

satisfait à l'hypothèse $(H2)$. En utilisant le Théorème 3.3.1, nous obtenons sans peine

$$E(t)\leq c\ exp\left(-c'\int_0^t \alpha(s)ds\right) \quad \text{si } q=1,$$

$$E(t)\leq c\left(c'\int_0^t \alpha(s)ds+c''\right)^{-\frac{2}{q-1}} \quad \text{si } q>1.$$

$(\mathbf{2})$ Si $g_0(s) = exp\left(\frac{-1}{s}\right)$, alors $(H2)$ est satisfaite pour

$$G(s) = \sqrt{\frac{s}{2}}exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s}}\right)$$

près de zéro. Ainsi, on aura

$$E(t) \leq c\left(ln(c'\int_0^t \alpha(s)ds + c'')\right)^{-2}.$$

$(\mathbf{3})$ Si $g_0(s) = \frac{1}{s}exp\left(\frac{-1}{s^2}\right)$, alors $(H2)$ est satisfaite pour

$$G(s) = exp\left(\frac{-2}{s}\right)$$

près de zéro. Ainsi, on trouve

$$E(t) \leq c\left(ln(c'\int_0^t \alpha(s)ds + c'')\right)^{-1}.$$

$(\mathbf{4})$ Si $g_0(s) = \frac{1}{s}exp\left(-(lns)^2\right)$, alors $(H2)$ est satisfaite pour

$$G(s) = exp\left(-\frac{1}{4}\left(ln\frac{s}{2}\right)^2\right)$$

près de zéro. Par suite, nous obtenons le taux de décroissance suivant

$$E(t) \leq c\ exp\left(-2\left(ln(c'\int_0^t \alpha(s)ds + c'')\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

# Conclusion et perspectives

A l'issue de cette thèse, trois points principaux ont été abordés en ce qui concerne la stabilisation des problèmes thermoélastiques en se basant sur des techniques récentes d'analyse mathématique :

• Nous avons trouvé l'estimation de décroissance de la solution d'un système de thermoélasticité classique sous l'action d'un amortissement frontière de type mémoire, qui a déjà été étudié auparavant, et en particulier dans [39], on a éliminé la condition $u_0 = 0$ sur $\Gamma_1$ et on a ajouté des hypothèses nécessaires.

• Nous avons étudié le comportement asymptotique de la solution d'un système de thermoélasticité avec second son soumis à un terme d'amortissement frontière de type mémoire, qui a déjà été étudié précédemment, notamment dans [38], on a utilisé les mêmes hypothèses sans poser $u_0 = 0$ sur $\Gamma_1$ et sans faire aucune hypothèse additionnelle.

• Enfin, on a remplacé le terme d'amortissement frontière dans notre second système par un terme amortissant distribué de la forme $\alpha(t)\mathrm{g}(u_t)$, et on a obtenu un résultat de décroissance générale de l'énergie de la solution.

Nous comptons dans le futur généraliser nos résultats aux problèmes en viscoélasticité, de plus il sera intéressant de faire des simulations numériques des différents problèmes étudiés dans ce manuscrit.

# Bibliographie


[1] Adams, R. A. ; Fournier J. J. F. ; *Sobolev spaces*, Academic Press. (2003).

[2] Alabau-Boussouira, F. ; *Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems*, Appl. Math. Optim. 51 (2005), 61-105.

[3] Andrade, D. ; Muñoz Rivera, J. E. ; *Exponential decay of non-linear wave equation with viscoelastic boundary condition*, Math. Meth. Appl. Sci. 23. (2000), 41-61.

[4] Arnold, V. I. ; *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag. New York. (1989).

[5] Boulanouar, F. ; Drabla, S. ; *General boundary stabilization result of memory-type thermoelasticity with second sound*, Electron. J. Differ. Equ. Vol. 2014 No. 202 (2014), 1-18.

[6] Brézis, H. ; *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Masson. Paris (1983).

[7] Burton, T. A. ; *Volterra integral and differential equations*, Second Edition, Elsevier, (2005).

[8] Cattaneo, C. ; *Sulla Condizione Del Calore*, Atti Del Semin. Matem. E Fis. Della Univ. Modena, Vol. 3 (1948), 83-101.

[9] Cavalcanti, M. M. ; Domingos Cavalcanti, V. N. ; and Lasiecka, I. ; *Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction*, J. Diff. Equ. 236 (2007), 407-459.

[10] Cavalcanti, M. M. ; Domingos Cavalcanti, V. N. ; and Soriano, J. A. ; *Existence and boundary stabilization of a nonlinear hyperbolic equation with time dependent coefficients*, Electron. J. Differ. Equ. 8 (1998), 1-21.

[11] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Soriano, J. A.; and Souza, J. S.; *Homogenization and uniform stabilization for a nonlinear hyperbolic equation in domains with holes of small capacity*, Electron. J. Differ. Equ. Vol. 2004, No. 55 (2004), 1-19.

[12] Cavalcanti, M. M.; Guesmia, A.; *General decay rates of solutions to a nonlinear wave equation with boundary conditions of memory type*, Diff. Integral Equ. 18. 5 (2005), 583-600.

[13] Coleman, B. D.; Hrusa, W. J.; and Owen, D. R.; *Stability of equilibrium for a nonlinear hyperbolic system describing heat propagation by second sound in solids*, Arch. Ration. Mech. Anal. 94 (1986), 267-289.

[14] Dafermos, C. M.; *On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. 29 (1968), 241-271.

[15] Greenberg, M. D.; *Foundations of Applied Mathematics*, Prentice-Hall. (1978).

[16] Hrusa, W. J.; Tarabek, M. A.; *On smooth solutions of the Cauchy problem in one-dimensional nonlinear thermoelasticity*, Quart. Appl. Math. 47 (1989), 631-644.

[17] Jian, S.; Muñoz Rivera, J. E.; and Racke, R.; *Asymptotic stability and global existence in thermoelasticity with symmetry*, Quart. Appl. Math. 56#2 (1998), 259-275.

[18] Lasiecka, I.; Tataru, D.; *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping*, Diff. Integral Eq. 8 (1993), 507-533.

[19] Lasiecka, I.; Toundykov, D.; *Energy decay rates for the semilinear wave equation with nonlinear localized damping and source terms*, Nonlinear Anal. 64 (2006), 1757-1797.

[20] Lasiecka, I.; Toundykov, D.; *Regularity of higher energies of wave equation with nonlinear localized damping and a nonlinear source*, Nonlinear Anal. 69 (2008), 898-910.

[21] Lebeau, G.; Zuazua, E.; *Sur la décroissance non uniforme de l'énergie dans le système de la thermoélasticité linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 324 (1997), 409-415.

[22] Liu, W. J.; Zuazua, E.; *Decay rates for dissipative wave equations*, Ricerche Mat. 48 (1999), 61-75.

[23] Liu W. J. ; *Partial exact controllability and exponential stability of the higher-dimensional linear thermoelasticity*, ESAIM. Control. Optm. Calc. Var. 3 (1998), 23-48.

[24] Liu, W. J. ; Zuazua, E. ; *Uniform stabilization of the higher dimensional system of thermoelasticity with a nonlinear boundary feedback*, Quart. Appl. Math. 59#2 (2001), 269-314.

[25] Madani, B. ; *Etude de quelques problèmes de thermoélasticité avec deuxième son*, Thèse de Magister, Département de Mathématiques et informatiques, Université de Ouargla (2013).

[26] Maxwell, J. C. ; *On the Dynamical Theory of Gases*, The Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol. 157 (1867), 49-88.

[27] Messaoudi, S. A. ; *Local Existence and blow up in thermoelasticity with second sound*, Comm. Partial Diff. Eqns. 26#8 (2002), 1681-1693.

[28] Messaoudi, S. A. ; Al-Shehri, A. ; *General boundary stabilization of memory-type thermoelasticity*, J. Math. Phys. 51, 103514 (2010).

[29] Messaoudi, S. A ; Al-Shehri, A. ; *General boundary stabilization of memory-type thermoelasticity with second sound*, Z. Anal. Anwend. 31, doi : 10.4171/ZAA/1468 (2012), 441-461.

[30] Messaoudi, S. A. ; Madani, B. ; *A general decay result for a memory-type thermoelasticity with second sound*, Applicable Analysis. (2013), 1-11.

[31] Messaoudi, S. A. ; Mustafa, M. I. ; *General energy decay rates for a weakly damped wave equation*, Commun. Math. Anal. (2010), 67-76.

[32] Messaoudi, S. A. ; Said-Houari, B. ; *Exponential Stability in one-dimensional nonlinear thermoelasticity with second sound*, Math. Meth. Appl. Sci. 28 (2005), 205-232.

[33] Messaoudi, S. A. ; Said-Houari, B. ; *Blow up of solutions with positive energy in nonlinear thermoelasticity with second sound*, J. Appl. Math. 2004#3 (2004), 201-211.

[34] Messaoudi, S. A. ; Soufyane, A. ; *General decay of solutions of a wave equation with a boundary control of memory type*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 11 (2010), 2896-2904.

[35] Muñoz Rivera, J. E. ; *Energy decay rates in linear thermoelasticity*, Funkcial Ekvac. 35 (1992), 19-30.

[36] Muñoz Rivera, J. E. ; Barreto, R. K. ; *Existence and exponential decay in nonlinear thermoelasticity*, Nonlinear Analysis 31 (1998), 149-162.

[37] Muñoz Rivera, J. E. ; Racke, R. ; *Magneto-thermo-elasticity-Large time behavior for linear systems*, Adv. Differential Equations 6 (3) (2001), 359-384.

[38] Mustafa, M. I. ; *Boundary stabilization of memory-type thermoelasticity with second sound*, Z. Angew. Math. Phys. 63 (2012), 777-792.

[39] Mustafa, M. I. ; *Boundary stabilization of memory-type thermoelastic systems*, Electron. J. Differ. Equ. 2013 No. 52 (2013), 1-16.

[40] Pereira, D.C. ; Menzala G.P. ; *Exponential stability in linear thermoelasticity : the inhomogeneous case*, Appl. Anal. 44 (1992), 21-36.

[41] Racke, R. ; *Asymptotic behavior of solutions in linear 2- or 3-d thermoelasticity with second sound*, Quart. Appl. Math. 61 no. 2 (2003), 315-328.

[42] Racke, R. ; *Thermoelasticity with second sound-exponential stability in linear and nonlinear 1-d*, Math. Meth. Appl. Sci. 25 (2002), 409-441.

[43] Racke, R. ; Shibata, Y. ; *Global smooth solutions and asymptotic stability in one-dimensional nonlinear thermoelasticity*, Arch. Rational. Mech. Anal. 116 (1991), 1-34.

[44] Racke, R. ; Shibata, Y. ; and Zheng, S. ; *Global solvability and exponential stability in one dimensional nonlinear thermoelasticity*, Quart. Appl. Math. 51 (1993), 751-763.

[45] Slemrod, M. ; *Global existence, uniqueness, and asymptotic stability of classical solutions in one-dimensional non-linear thermoelasticity*, Arch. Rational. Mech. Anal. 76 (1981), 97-133.

[46] Tarabek, M. A. ; *On the existence of smooth solutions in one-dimensional thermoelasticity with second sound*, Quart. Appl. Math. 50 (1992), 727-742.

[47] Zheng, S. ; Shen, M. ; and Wei Xi ; *Global solutions to the Cauchy problem of quasilinear hyperbolic parabolic coupled systems*, Sci. Sinica Ser. A 30 (1987), 1133-1149.

## *Résumé*

Cette thèse est dévouée à l'étude de comportement asymptotique de trois systèmes thermoélastiques. Le premier système est un système thermoélastique classique, le deuxième et le troisième sont des systèmes thermoélastiques avec second son.
Les deux premiers systèmes sont perturbés avec un amortissement frontière de type viscoélastique, tandis que le troisième l'est avec un terme amortissant distribué.
Plusieurs résultats de décroissance générale ont été démontrés, sous certaines hypothèses convenables sur les noyaux résolvants et les paramètres des équations.
Pour obtenir les résultats, différentes méthodes ont été utilisées avec les modifications nécessaires imposées par la nature de nos problèmes telles que la méthode de l'énergie, la fonctionnelle de Lyapunov et les propriétés des fonctions convexes.
**Mots clés :** Thermoélasticité, amortissement, noyau résolvant, décroissance générale, convexité.

## *الملخص*

في هذه الأطروحة، تمت دراسة ثلاثة أنظمة للمرونة الحرارية، النظام الأول يمثل مرونة حرارية كلاسيكية، أمّا النظام الثاني والثالث فيمثلان أنظمة مرونية حرارية مع الموجة الثانية.
ويعطى التبديد لكل من النظامين الأولين على صورة حد لزوجة مرنة ويؤثر على جزء من الحدود، في حين يعطى التبديد بواسطة حد الإحتكاك في النظام الثالث.
لقد تمّ اثبات عدة نتائج إضمحلال عامة باتباع مختلف الطرق الموجودة، كطريقة الطاقة، تابعي ليابونوف وخاصية التحدب، مع ادخال بعض التغييرات الملائمة لنوعية مسائلنا.
**الكلمات المفتاحية :** المرونة الحرارية، مخمد، الإضمحلال العام، التحدب.

## *Abstract*

In this dissertation, we study the asymptotic behavior of three thermoelastic problems. The first system is concerned with classical thermoelasticity, the second and the third are concerned with thermoelasticity with second sound.
In the first and the second systems, the dissipation is given by a boundary viscoelastic term, while in the third is given by a weak frictional damping.
In this regard, we prove several general decay results under appropriate assumptions on the resolvent kernels and the structural parameters of the equations. We use the multiplier method, Lyapunov functional and convexity argument to establish the desired results.
**Key words**: Thermoelasticity, viscoelastic damping, resolvent kernel, weak frictional damping, general decay, convexity.