

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS SETIF

THESE

Présenté à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'Obtention du Diplôme de

DOCTORAT D'ETAT

Option: Mathématiques Appliquées

Par

Mr Abdelkader GASMI

Thème

L'EFFET DE LA TENSION DE SURFACE SUR
LE COEFFICIENT DE CONTRACTION D'UN JET

Soutenue le : 15/12/2007

Devant la commission d'examen composée de :

| | | | |
|---------------------|----------------|-------------------|----------------------|
| Président : | Dr A. KHELLADI | Professeur | USTHB Bab-Ezzouar |
| Rapporteur : | Dr H. MEKIAS | Professeur | Univesité UFAS Sétif |
| Examineurs : | Dr N. BENSALAM | Professeur | Univesité UFAS Sétif |
| | Dr B. BOUDERAH | M. de Conférences | Univesité de M'sila |
| | Dr D. BENTERKI | M. de Conférences | Univesité UFAS Sétif |

ملخص

في هذا البحث، نعتبر مسألتين لتدفق ذو سطح حر لسائل غير قابل للانضغاط وغير لزج في مستو مع تأثير قوى التوتر السطحي. لإيجاد الحل وشكل السطح الحر للتدفق عدديا نستعمل تقنية السلاسل والتي تعتمد على التحويلات المتطابقة. المسألة الأولى تتعلق بتدفق ينفذ عبر ثقب لخزان ذو جدران مائلة. النتائج التي تم التوصل إليها تؤكد وتحسن نتائج أكربارج وليو (Ackerberg et Lui). أما المسألة الثانية التي تم معالجتها في هذا البحث هي مسألة تدفق داخل قناة ذات نهاية ضيقة. الحلول المتحصل عليها تعتبر تمديد لحلول المسألة الأولى في حالة جدران عمودية. عند انعدام قوى التوتر السطحي نجد توافق بين نتائج المسألة و نتائج فون ميس و قريفش (Von Mises et Gurevich).

الكلمات المفاتيح: سطح حر، تدفق كموني، توتر سطحي، عدد ويبر.

ABSTRACT

In this thesis, we consider two problems of a jet flow of an incompressible and inviscid fluid. The effect of the surface tension is taken into account. The shape of the free surface and the flow of the fluid are determined numerically via a series truncation. First we treat the problem of flow emerging from an opening of a container with inclined walls. The results obtained confirm and extend the results of Ackerberg and Liu[1].

The second problem considered in this thesis is the problem of a jet from a container. The solutions obtained here confirm and extend the first problem for vertical walls. If the surface tension is neglected the calculated results confirm those of Von Mises and Gurevich[18].

Key words: Free surface, Potential flow, Jet, Surface tension, Weber number.

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous considérons deux problèmes d'écoulement de type jet d'un fluide incompressible et non visqueux. L'effet de la tension de surface est pris en considération. La forme de la surface libre et l'écoulement du fluide sont déterminés numériquement par troncation de série.

Nous traitons tout d'abord le problème d'un écoulement issu d'un orifice d'un réservoir avec des parois inclinée. Les résultats obtenues confirment et améliorent les résultats de Ackerberg et Liu[1].

Le deuxième problème est le problème d'un écoulement en sortie de buse. Les solutions obtenues valident et étendent ceux du premier problème pour des parois verticales. Quand la tension de surface est négligée les résultats sont conformes aux résultats de Von Mises et Gurevich[18].

Mots clés: Surface libre, écoulement potentiel, jet, tension de surface, nombre de Weber.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon Professeur Hocine MEKIAS qui a suivi ce travail avec grand intérêt, l'a guidé tout au long de ses conseils et ses remarques avisées et l'a éclairé de son vaste champ de connaissance en mécanique des fluides. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude pour son soutien.

Je remercie également les membres du jury:

Monsieur A KHELLADI, Professeur à l'université USTHB de Bab Ezzouar, directeur de centre de recherche sur l'information scientifique et technique (CERIST) de m'avoir fait l'honneur d'être président de ce jury.

Monsieur N. BENSALÉM, Professeur, Chef de Département de Mathématiques à l'U.F.A de Sétif, d'avoir accepté de participer à l'évaluation de ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur B. BOUDERAH, Docteur et Maître de conférence à l'Université de M'sila qui a accepté de participer à l'évaluation de ce travail, y portant un éclairage différent.

Monsieur D. BENTERKI, Docteur et Maître de conférence à l'U. F. A de Sétif d'être un examinateur de cette thèse.

Je remercie tout les enseignants de département de mathématiques de l'UFA de Sétif pour leur soutien moral et pour leur réconfort.

Je tiens aussi à remercier Mme Fernini enseignante à l'université de m'sila pour la lecture de cette thèse.

Pour finir, je remercie ma mère, mes frères et ma petite famille qui m'ont encouragé chaque jour et redonné confiance dans les moments de doute.

GASMI Abdelkader

DEDICACE

Je dédie ce travail à
mes parents,
mes beaux parents,
ma soeur Fatima,
mes frères, Ali, Said, Mustapha et Mohamed Tayeb,
mes beaux soeurs et frères,
et à ma petite famille, Souhila, Oumaima et Aiman.

GASMI Abdelkader

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|-------------|
| RÉSUMÉ | ii |
| ABSTRACT | iii |
| REMERCIEMENTS | iv |
| TABLE DES MATIÈRES | vi |
| NOTATION | viii |
| CHAPITRE 1 : INTRODUCTION GENERALE | 1 |
| CHAPITRE 2 : EFFET DE LA TENSION DE SURFACE SUR UN JET | 5 |
| 2.1 Introduction | 6 |
| 2.2 Position et formulation du problème | 7 |
| 2.3 Procédure numérique | 13 |
| 2.3.1 Comportement de la vitesse au voisinage des points critiques . . | 16 |
| 2.3.2 Comportement de la vitesse au voisinage du point de séparation (point de contact surface libre-paroi) | 17 |
| 2.3.3 Formulation de la série | 17 |
| 2.3.4 Coefficient de contraction | 19 |
| 2.3.5 Forme de la surface libre | 22 |
| 2.4 Résultats et discussions. | 22 |

| | | |
|--|---|------------|
| 2.4.1 | Solution avec tension de surface : | 22 |
| 2.4.2 | Solution sans tension de surface : | 25 |
| CHAPITRE 3 : ECOULEMENT A SURFACE LIBRE EN SORTIE DE BUSE | | 36 |
| 3.1 | Introduction | 37 |
| 3.2 | Formulation du problème | 40 |
| 3.3 | Méthode computationnelle | 43 |
| 3.3.1 | Comportement asymptotique de la vitesse au points critiques . . | 45 |
| 3.4 | Forme de la surface libre | 47 |
| 3.5 | Discussion et présentation des résultats | 48 |
| 3.5.1 | Solution sans tension de surface ($T = 0$). | 48 |
| 3.5.2 | Solution avec tension de surface ($T \neq 0$) | 49 |
| CHAPITRE 4 : CONCLUSION | | 58 |
| BIBLIOGRAPHIE | | xxv |

NOTATION

| | |
|----------------|---|
| C | degré de contraction. |
| f | potentiel complexe de la vitesse. |
| H, L | diamètre, longueur. |
| K | courbure de surface. |
| P | pression. |
| P_0 | pression au dessus de la surface libre. |
| q | module de la vitesse. |
| R | rayon de courbure de la surface. |
| T | tension de surface. |
| \vec{u}_η | vecteur normal. |
| \vec{u}_T | vecteur tangentiel. |
| ρ | densité. |
| ζ | vitesse complexe. |
| U | vitesse à l'infini. |
| u, v | composantes du vecteur vitesse du fluide. |
| ϕ | fonction potentielle. |
| ψ | fonction de courant. |
| α | nombre de Weber. |
| β | angle d'inclinaison. |
| γ | angle de séparation. |
| z | variable complexe. |

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GENERALE

Les écoulements à surface libre de type jet sont présents dans beaucoup d'applications industrielles et urbaines : les chambres de combustion des moteurs, les pompes à jet, les réservoirs et l'architecture des barrages. Compte tenu de son importance pratique, ce type d'écoulement fait l'objet d'un grand nombre d'études théoriques, expérimentales et numériques. Comme exemple, on peut citer le problème d'un écoulement issu d'un orifice d'un réservoir. Ce type de problèmes est difficile à résoudre explicitement à cause de la condition non linéaire sur la frontière libre de forme inconnue. Cette difficulté augmente selon la complexité de la géométrie du domaine de l'écoulement d'une part, et aux propriétés du fluide et les conditions de l'écoulement d'autre part.

Lors du 19^{ème} siècle, la théorie de la variable complexe a rendu possible l'étude théorique d'écoulement bidimensionnel à surface libre, sous réserve que le domaine d'écoulement soit polygonal et que le fluide soit irrotationnel, incompressible et non visqueux et les effets de gravité soient négligés. Ces hypothèses ont en effet permis d'utiliser la théorie du potentiel complexe pour résoudre les problèmes d'écoulement bidimensionnel dans un domaine polygonal.

En 1868, Kirchoff développa la théorie des lignes de courant libre basée sur l'intro-

duction de la variable complexe

$$f(\omega) = \log\left(\frac{dz}{df}\right)$$

qui transforme le domaine de l'écoulement du plan complexe D_Z de frontière rectiligne par morceau et libre, en un domaine polygonal, noté D_ω .

Pour obtenir $\omega(f)$ on transforme conformément les deux domaines D_ω et D_f par la transformation de Schwartz-Christoffel sur un domaine auxiliaire D_λ . Ainsi on obtient un système d'équations non linéaires en $f(\lambda)$ et $\omega(\lambda)$. En éliminant la variable auxiliaire λ , une relation entre f et ω sera obtenue.

Dans le cas où les effets de la tension de surface ou de gravité sont considérés, le problème devient difficile analytiquement et seules des solutions asymptotiques sont obtenues au voisinage d'un petit paramètre (le nombre de Froude ou bien le nombre de Weber, ou bien le nombre de Reynolds, etc...). Il y a peu de publication théorique sur l'existence et l'unicité de la solution. L'étude numérique pour une solution préalable est incontournable pour le moment. Différents modèles de ce problème sont considérés. On peut considérer l'effet de la tension de surface et négliger l'effet de gravité, comme on peut considérer la gravité et négliger la tension de surface, ou bien considérer les deux effets combinés. Chaque modèle a ces difficultés. Nous pouvons citer ici les travaux dans le domaine de Elcrat et Trefethen[15] qui ont développé une méthode basée sur la transformation de Schwartz-Christoffel. Cette méthode permet de traiter le cas de frontières solides constituées d'un grand nombre de segments rectilignes. Elle a été appliquée aux

écoulements autour d'obstacles polygonaux, puis aux écoulements issus de buses à parois polygonales. Bloor[9] a présenté une méthode, utilisant aussi la transformation de Schwartz-Christoffel, pour calculer des écoulements autour d'un solide ayant un rayon de courbure. Une méthode similaire a été employée par Peng et Parker[23] pour étudier l'impact d'un jet sur une paroi. Vanden-Broeck[26] a résolu numériquement le cas de l'écoulement au dessus d'un radier. Dias et Vanden-Broeck[14] ont étendus ces résultats sur un écoulement autour d'un obstacle triangulaire immergé au fond d'un canal et sous l'effet de gravité. La même méthode a été employée pour étudier le cas du déversoir avec Dias, Keller et Tuck[24].

Ackerberg et Liu [1] ont traité le cas d'un jet issu d'un réservoir dans le cas où l'effet de gravité est négligé et l'effet de la tension de surface est considéré. La méthode employée est celle des différences finies qui consiste à discrétiser tout le domaine occupé par le fluide. Leurs résultats de calcul ont été présentés pour tout nombre de Weber $\alpha \geq \tilde{\alpha} = 6\,801\,483$ mais ils n'ont pas pu calculer la solution pour $\alpha < \tilde{\alpha} = 6\,801\,483$.

Le présent travail est divisé en quatre chapitres. Le premier chapitre est introduction générale.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons le problème traité par Ackerberg et Liu[1] formulant le problème d'une manière différente qui nous permet d'utiliser une discrétisation sur la surface libre uniquement. Cette méthode consiste à écrire la vitesse complexe ou bien la fonction potentielle complexe en série analytique. Les coefficients de la série sont calculés numériquement par troncature. Cette méthode nous a permis de discrétiser uniquement la surface libre. On a pu déterminer avec précision la nature de

singularité de la vitesse complexe au point de contact de la surface libre avec la paroi rigide. Nos résultats trouvés montrent qu'il existe pour chaque angle d'inclinaison β une valeur critique du nombre de Weber, α^* . Si $\alpha < \alpha^*$ notre procédure numérique diverge. Pour $\alpha \rightarrow \infty$ les résultats numériques obtenus sont comparés aux résultats expérimentaux de Birkhoff et Zarantonello[8] et à ceux analytiques de Kirchoff[4]. Si $\alpha \geq 6\,801\,483$, nos résultats confirment ceux de Ackerberg et Liu[1].

Dans le troisième chapitre on traite le cas d'un écoulement d'un fluide incompressible et non visqueux entre deux plateaux horizontaux semi-infinis, de distance $2H_0$ et au bout un orifice d'ouverture $2L$ ($L > H_0$) en considérant l'effet de la tension de surface. Le problème est gouverné par trois paramètres : le nombre de Weber α , l'ouverture de l'orifice et l'angle au point de raccordement paroi-surface libre γ . Ce problème a été considéré par différents auteurs : Gurevich[18], Budden et Norbury[11], Benjamin[5], Vanden-Broeck et Keller[31] Asavanant et Vanden-Broeck[2] et autres. Gurevich[18] a employé la théorie des lignes de courant libres pour obtenir des solutions en l'absence de gravité et de tension de surface. Budden et Norbury[11] ont calculé une solution asymptotique pour des grandes valeurs du nombre de Froude. Vanden-Broeck[25] a obtenu des solutions numériques pour des valeurs arbitraires du nombre de Froude dans le cas d'un écoulement sous un barrage. La méthode utilisée dans ce chapitre est la même que celle utilisée dans le deuxième chapitre. En négligeant les tensions de surface, on a retrouvé les solutions analytiques de Von Mises et Guervich[18].

Dans la conclusion générale, nous résumons les résultats de notre contribution et nous donnons quelques perspectives d'une future recherche.

CHAPITRE 2

EFFET DE LA TENSION DE SURFACE SUR UN JET

Résumé. Dans ce chapitre, on s'intéresse au calcul numérique de la solution d'un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide issu d'un orifice d'un réservoir avec des parois inclinées. L'écoulement est irrotationnel et le fluide est considéré incompressible et non visqueux et les tensions de surface non négligeables. La technique de résolution utilisée est celle de Vanden-Broeck et Keller. On montre numériquement que pour chaque angle d'inclinaison β des parois du réservoir, il existe une valeur critique du nombre de Weber $\tilde{\alpha}$ tel que la solution du problème existe seulement pour $\alpha > \tilde{\alpha}$. Lorsque la tension de surface est négligée, les résultats calculés confirment ceux de Von Mises et Gurevich [1].

2.1 Introduction

On considère un écoulement potentiel bidimensionnel à surface libre d'un fluide issu d'un orifice d'un réservoir. Le fluide est considéré comme incompressible et non visqueux. L'écoulement est supposé irrotationnel et uniforme à l'infini. On néglige l'effet de gravité et on considère l'effet de tension de surface. D'une manière générale, ce type de problème est difficile à résoudre, d'une part à cause de la présence d'une surface libre qui est de forme inconnue, et d'autre part en raison de la singularité au point de raccordement de la paroi solide et la surface libre.

Ce problème a été étudié par plusieurs chercheurs : Ackerberg et Liu[1], E.O Tuck[24], J-M Vanden-Broeck[25], [28], J Lee et J-M Vanden-Broeck[20] et autres. Tuck[24] a considéré le cas d'un jet issu d'un orifice d'une paroi verticale avec effet de gravité. Le problème est modélisé par une équation intégral-différentielle avec des conditions aux limites. Utilisant le théorème de Cauchy, la discretisation numérique est seulement nécessaire sur les frontières du domaine de l'écoulement. Ackerberg et Liu[1] ont traité le cas d'un jet issu d'un réservoir dans le cas où l'effet de gravité est négligé et l'effet de la tension de surface est considéré. la méthode employée est celle des différences finies qui consiste à discrétiser tout le domaine occupé par le fluide. Leurs résultats de calcul ont été présentés pour tout nombre de Weber $\alpha \geq \tilde{\alpha} = 6.801483$ mais ils n'ont pas pu calculer la solution pour $\alpha < \tilde{\alpha} = 6.801483$. F. Dias, Keller et Tuck[13] ont considéré un écoulement avec un obstacle triangulaire ou semi-circulaire au fond d'un canal.

Dans notre travail, nous considérons le problème traité par Ackerberg et Liu[1] en utilisant une autre méthode qui nécessite la discretisation uniquement sur la surface libre.

En écrivant la vitesse complexe ou bien la fonction potentielle complexe en série analytique, les coefficients de la série sont calculés numériquement par troncature. Nos résultats montrent qu'il existe pour chaque angle d'inclinaison β une valeur critique du nombre de Weber α^* . L'algorithme numérique converge et donne une solution unique pour tout $\alpha > \alpha^*$ et tout angle d'inclinaison des parois du réservoir. Mais si $\alpha < \alpha^*$ la procédure numérique diverge. Les résultats sont comparés aux résultats expérimentaux de Birkhoff et Zarantonello[8] et à ceux analytiques de Kirchoff[4].

2.2 Position et formulation du problème

Considérons un écoulement potentiel, bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux issu d'un orifice de largeur $2L$ d'un réservoir avec des parois inclinées (voir figure 2.1). On considère que l'écoulement est symétrique. On prend comme repère de coordonnées la ligne de courant EOF sur l'axe $\tilde{x}' \tilde{o} \tilde{x}$ et la paroi AB fait un angle β avec l'axe $\tilde{y}' \tilde{o} \tilde{y}$. Notons que lorsque $\tilde{x} \rightarrow -\infty$, la vitesse tend vers zéro. Lorsque $\tilde{x} \rightarrow +\infty$, nous supposons que l'écoulement est uniforme de vitesse U et d'élévation $2H$. Le plan $\tilde{x}\tilde{o}\tilde{y}$ est identifié au plan de la variable complexe $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$.

Notons par $\tilde{\zeta} = \tilde{u} - i\tilde{v}$ la vitesse complexe, où \tilde{u} et \tilde{v} sont respectivement les composantes cartésiennes du vecteur vitesse et par $\tilde{f} = \tilde{\phi} + i\tilde{\psi}$ la fonction potentielle complexe, où $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ désignent respectivement la fonction potentielle et la fonction de courant.

Sans perte de généralité, nous choisissons $\tilde{\phi} = 0$ au point $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, L)$ et $\tilde{\psi} = 0$ sur la ligne de courant ABC (figure.1.2). Il s'ensuit que $\tilde{\psi} = -HU$ sur la ligne de courant EOC . En admettant que l'écoulement soit potentiel, les composantes du vecteur vitesse

sont alors données en fonction de $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ par les relations :

$$\begin{cases} \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} \\ \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \end{cases} \quad (2.1)$$

Les relations ci-dessus - (conditions de Cauchy-Riemann) - montrent que la vitesse complexe $\tilde{\zeta}$ et la fonction potentielle \tilde{f} sont des fonctions analytiques en $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$.

On note par P_0 la pression atmosphérique qui est constante au dessus de la surface libre et \bar{P} la pression du fluide sur la surface libre. Lorsque $\tilde{x} \rightarrow +\infty$ la surface libre est une droite parallèle à $x'ox$ donc $\bar{P} = P_0$, Dans ces conditions, l'équation de Bernoulli sur la surface libre est donnée par :

$$\tilde{P} + \frac{1}{2}\rho\tilde{q}^2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \quad \text{sur } \tilde{\psi} = 0, \quad \tilde{\phi} > 0, \quad (2.2)$$

\tilde{q} désigne le module de la vitesse. Le membre de droite de l'équation (2.2) est évalué selon les conditions de l'écoulement à l'infini ($\tilde{x} \rightarrow +\infty$).

La relation entre \bar{P} et P_0 est donnée par la loi de Laplace :

$$\bar{P} - P_0 = TK. \quad (2.3)$$

Où T et K désignent respectivement la tension de surface et la courbure de la surface libre, avec la convention que le rayon de courbure est positif si le centre de courbure est à l'intérieur du fluide, si non est négatif.

Dans notre problème, le centre de courbure est en dehors du domaine de l'écoulement.

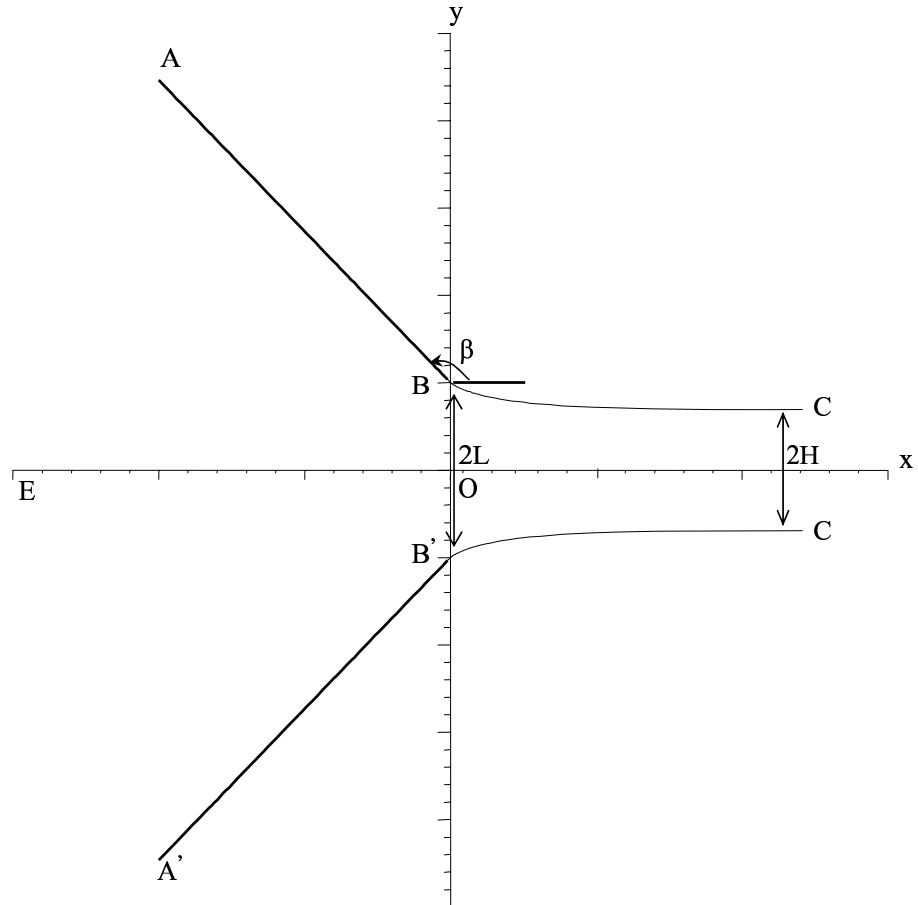


Fig. 2.1: schéma de l'écoulement et des coordonnées. La largeur de l'orifice est $2L$ et la profondeur du fluide à la fin de l'écoulement est $2H$. L'axe des x est le long de la ligne de courant EOF et la paroi AB fait un angle β avec l'axe des y . la figure est un calcul effectif de la forme de la surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{3}$ et le nombre de Weber $\alpha = 100$.

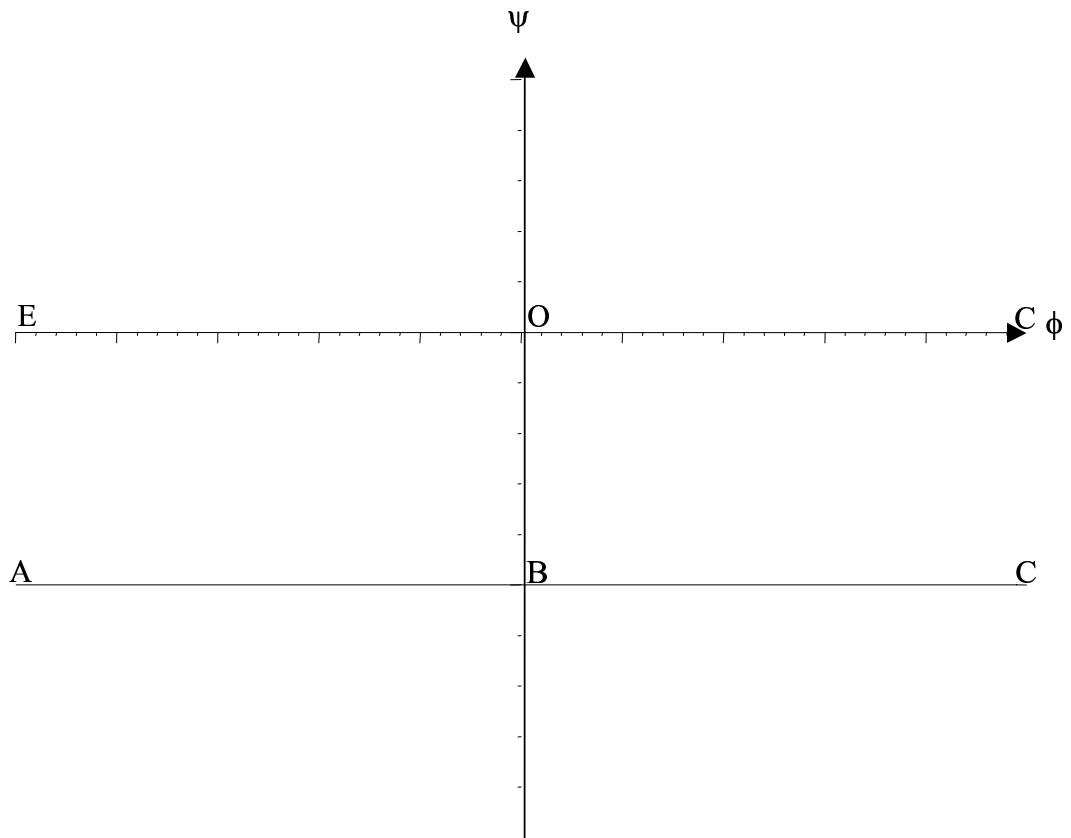


Fig. 2.2: Le plan du potentiel complexe f .

ment, alors K est de signe négatif.

En substituant (2.3) dans (2.2), on trouve :

$$\frac{1}{2}\bar{q}^2 - \frac{T}{\rho}K = \frac{1}{2}U^2. \quad (2.4)$$

Pour des raisons de simplification de l'équation ci-dessus, on est conduit à choisir certaines grandeurs, à partir desquelles, on peut exprimer (2.4) en variables non dimensionnelles, nous choisissons L et U comme étant respectivement des références de la longueur et de la vitesse. On pose :

$$x = \tilde{x}/L, \quad y = \tilde{y}/L, \quad u = \tilde{u}/U, \quad v = \tilde{v}/U, \quad K = \tilde{K}L,$$

$$q = \tilde{q}/U, \quad \phi = \tilde{\phi}/CLU, \quad \psi = \tilde{\psi}/CLU$$

où $C = \frac{H}{L}$ désigne le degré de contraction de l'écoulement.

Les nouvelles variables x, y, K, q, ϕ et ψ sont adimensionnelles, alors l'équation (2.4) devient :

$$\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{\alpha}K = \frac{1}{2}, \quad (2.5)$$

où $\alpha = \frac{\tilde{\rho} \tilde{H} U^2}{\tilde{T}}$ désigne le nombre de Weber.

On note par $\zeta = u - iv$ la vitesse complexe et puisque $u - iv$ est analytique on définit la fonction $\tau - i\theta$ par la relation

$$\zeta = u - iv = e^{\tau - i\theta}. \quad (2.6)$$

Où θ est l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizontale.

Evaluons maintenant la courbure K . On désigne par le vecteur vitesse de composante (u, v) , alors on a :

$$\vec{V} = e^\tau (\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j})$$

veci et les vecteurs unitaires des coordonnées cartésiennes.

En coordonnées intrinsèques

$$\vec{V} = |\vec{V}| \vec{u}_T,$$

ici $\vec{u}_T = \cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}$ est le vecteur unitaire tangentiel.

$$\begin{aligned} \vec{u}_\eta &= R \frac{d\vec{u}_T}{ds} = R \frac{d\vec{u}_T}{dt} \frac{dt}{ds} \\ &= R e^{-\tau} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{d\vec{u}_T}{d\theta} \\ &= R e^\tau \frac{\partial \theta}{\partial \phi} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \end{aligned}$$

\vec{u}_η est le vecteur unitaire normal et ds désigne l'élément de longueur sur la surface libre.

La normalisation de la dernière équation nous donne :

$$K = \frac{1}{R} = e^\tau \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|.$$

On remplace K par sa valeur dans l'équation (2.5) on trouve

$$\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{\alpha}q \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| = \frac{1}{2} \quad 0 < \phi < \infty. \quad (2.7)$$

D'autre part, on admet que $\theta(\phi)$ est une fonction croissante lorsque $0 \leq \phi < +\infty$ sur la surface libre BC (surface sans ondes capillaires), alors l'équation de Bernoulli dans le plan f s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{2}{\alpha}(e^\tau - e^{-\tau}) \quad 0 < \phi < \infty, \quad (2.8)$$

avec les conditions

$$|Re(\zeta)/Im(\zeta)| = -\cot \beta \quad \text{on } \psi = 0 \quad -\infty < \phi < 0. \quad (2.9)$$

$$Im(\zeta) = 0 \quad \text{on } \psi = -1, \quad -\infty < \phi < \infty. \quad (2.10)$$

Ainsi, la formulation du problème est complète. Notre but est de déterminer la fonction $\tau - i\theta$ qui est analytique dans la bande $-1 < \psi < 0$ voir figure 1.2 et qui vérifie les conditions (2.8), (2.9) et (2.10)

2.3 Procédure numérique

Pour résoudre le problème numériquement, on applique la technique de troncature de la série utilisée par Vanden-Broeck et Keller. On transforme le domaine occupé par le fluide dans le plan f en un quart de disque unité dans le plan de la variable auxiliaire t

par la transformation :

$$f = \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{-2it}{1-t^2}\right). \quad (2.11)$$

Les points A , B , C et E dans le plan z sont transformés respectivement aux points : $t = 0$, $t = i$, $t = 1$ et $t = 0$. La surface libre BC est transformée en une circonférence de cercle (figure 2.3). Les points de la surface libre dans le plan t sont donnés par la relation :

$$t = |t| e^{i\sigma} = e^{i\sigma} \text{ tel que } 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}, \quad (2.12)$$

et dans le plan f par la relation :

$$f = \phi \text{ tel que } \phi \geq 0 \quad \text{sur la surface libre.}$$

Pour résoudre le problème, on écrit l'équation (2.8) dans le plan t . Pour cela, on évalue $\frac{\partial \theta}{\partial \phi}$ dans le plan t .

En substituant (2.12) dans l'équation (2.11) on trouve :

$$f = \phi = \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{-2ie^{i\sigma}}{1-e^{2i\sigma}}\right) = \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{1}{\sin \sigma}\right),$$

ce qui implique que

$$df = d\phi = \frac{2}{\pi} \cot \sigma d\sigma,$$

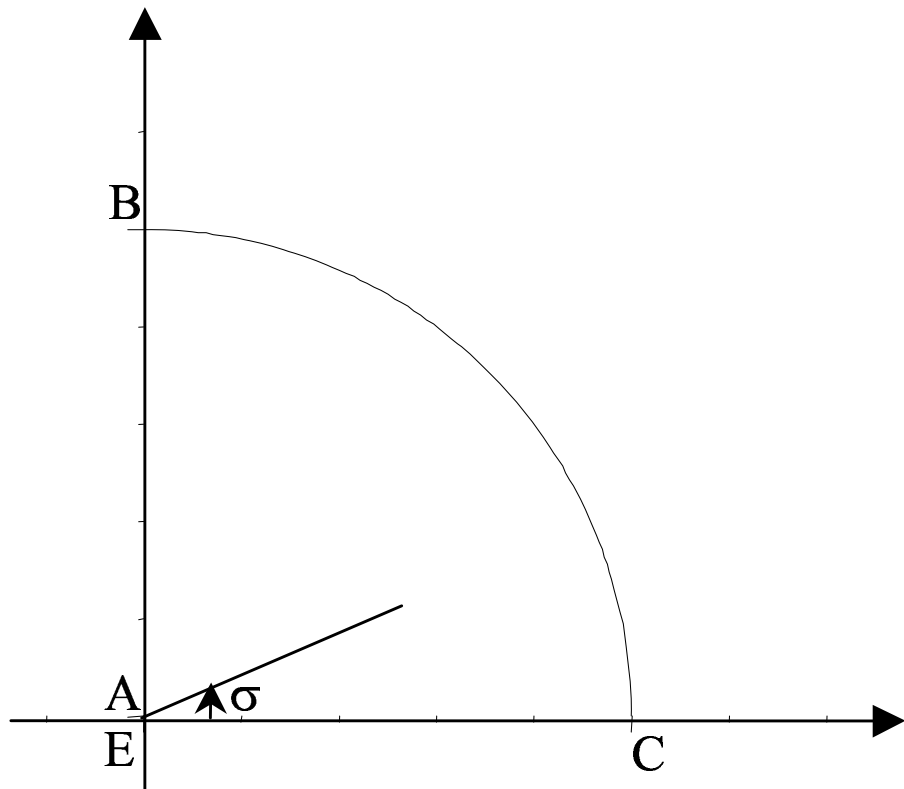


Fig. 2.3: Le plan de la variable complexe t .

d'où

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \phi} = -\frac{2}{\pi} \tan \sigma.$$

D'autre part, on a sur la surface libre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} &= \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} \\ &= -\frac{2}{\pi} \tan \sigma \frac{\partial \theta}{\partial \sigma}. \end{aligned}$$

L'équation de Bernoulli devient alors :

$$e^{2\tau} + \frac{2}{\pi} e^{\tau} \tan \sigma \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = 1 \quad 0 < \phi < \infty. \quad (2.13)$$

Avant de formuler la série, il est nécessaire de faire une étude asymptotique au voisinage de quelques points singuliers de l'écoulement. L'écoulement admet deux points singuliers, l'origine de l'écoulement qui correspond à $t = 0$ et le point de séparation B qui correspond à $t = i$.

2.3.1 Comportement de la vitesse au voisinage des points critiques

A l'origine de l'écoulement, l'ouverture du barrage BO apparaît comme un puit.

Alors l'écoulement asymptotiquement est caractérisé par la fonction potentielle :

$$f \sim \frac{1}{\pi - \beta} \log(z) \quad \text{lorsque } |z| \rightarrow \infty \text{ et } \arg z < \beta,$$

ce qui donne

$$z \sim e^{(\pi-\beta)f} \text{ lorsque } \phi \rightarrow -\infty \text{ et } 0 < \psi < 1.$$

En utilisant la transformation (2.11), cette condition devient :

$$\zeta = \mathcal{O}(t)^{2-\frac{2\beta}{\pi}} \text{ lorsque } t \rightarrow 0. \quad (2.14)$$

2.3.2 Comportement de la vitesse au voisinage du point de séparation (point de contact surface libre-paroi)

Localement au point de séparation, nous avons un écoulement dans un angle γ , donc l'écoulement est caractérisé par la fonction potentielle :

$$f \sim Uz^{\frac{\pi}{\gamma}} \text{ lorsque } z \rightarrow i,$$

U est une constante. Dans le plan de la variable t cela devient :

$$\zeta = \mathcal{O}(t^2+1)^{2-\frac{2\gamma}{\pi}} \text{ lorsque } t \rightarrow i. \quad (2.15)$$

2.3.3 Formulation de la série

Après avoir déterminé le comportement asymptotique de la vitesse au voisinage des singularités et les zéro et suivant H. Mekias et J-M vanden-broeck[21], nous définissons la fonction $\Omega(t)$ comme suit :

$$\zeta(t) = t^{2-\frac{2\beta}{\pi}} (t^2 + 1)^{2-\frac{2\gamma}{\pi}} \Omega(t),$$

où $\Omega(t)$ est analytique à l'intérieur du premier quart de disque unité et n'admettant aucun zero. Alors elle se développe en exponentielle d'une série entière.

$$e^{\tau-i\theta} = \zeta(t) = t^{2-\frac{2\beta}{\pi}} (t^2 + 1)^{2-\frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{2n}\right). \quad (2.16)$$

En utilisant les conditions aux limites (2.9) et (2.10), l'équation (2.16) devient :

$$e^{\tau-i\theta} = \zeta(t) = t^{2-\frac{2\beta}{\pi}} (t^2 + 1)^{2-\frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{2n}\right), \quad (2.17)$$

où les a_n et γ sont des constantes réelles à déterminer. L'équation (2.17) vérifie toutes les conditions aux limites sauf la condition de Bernoulli (2.13). On détermine a_n et γ de sorte que cette dernière soit vérifiée .

En substituant l'équation (2.12) dans (2.17) on obtient :

$$\exp(\tau(\sigma)) = (2 \cos \sigma)^{2-\frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2(n-1)\sigma)\right). \quad (2.18)$$

$$\theta(\sigma) = -\left(3\sigma - \frac{2\gamma}{\pi}\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2(n-1)\sigma)\right). \quad (2.19)$$

En substituant (2.18) et (2.19) dans l'équation (2.13) on trouve :

$$(2 \cos \sigma)^{2-\frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2(n-1)\sigma)\right) - \frac{\pi}{2\alpha} \tan(\sigma) (2 \cos \sigma)^{2-\frac{2\gamma}{\pi}} \times \quad (2.20)$$

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2(n-1)\sigma)\right) \left(3 - \frac{2\gamma}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n(n-1) \cos(2(n-1)\sigma)\right) = 1.$$

Pour déterminer les coefficients a_n et l'angle γ , nous tronquons la série après N termes.

Ainsi, on introduit la discrétisation de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ en $N + 1$ points :

$$\sigma_i = \frac{\pi}{2(N+2)} \left(i - \frac{1}{2}\right), \quad i = 1, \dots, N+1. \quad (2.21)$$

Satisfaisant l'équation de Bernoulli en ces $n + 1$ points. On obtient un système de $N + 1$ équations à $N + 1$ inconnues a_n et l'angle γ .

$$(2 \cos \sigma_i)^{2-\frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{n=1}^N a_n \cos(2(n-1)\sigma_i)\right) - \frac{\pi}{2\alpha} \tan(\sigma_i) (2 \cos \sigma_i)^{2-\frac{2\gamma}{\pi}} \times \quad (2.22)$$

$$\exp\left(\sum_{n=1}^N a_n \cos(2(n-1)\sigma_i)\right) \left(3 - \frac{2\gamma}{\pi} + \sum_{n=1}^N 2a_n(n-1) \cos(2(n-1)\sigma_i)\right) = 1.$$

Nous résolvons le système par la méthode de Newton.

2.3.4 Coefficient de contraction

De la relation (2.1), on tire $\zeta = C \frac{df}{dz}$, où C est le degré de contraction de l'écoulement, d'où

$$dz = dx + idy = C \exp(-\tau + i\theta)(d\phi + id\psi),$$

comme $d\psi = 0$ sur la surface libre ; il devient :

$$\begin{cases} dx = C \exp(-\tau) \cos \theta d\phi \\ dy = C \exp(-\tau) \sin \theta d\phi \end{cases}$$

par suite

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = C \exp(-\tau) \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} = C \exp(-\tau) \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{cases} \quad (2.23)$$

En substituant (2.18) et (2.19) dans (2.23) on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = -\frac{2C}{\pi} \cot \sigma (\cos \sigma)^{2-\frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{n=1}^N a_n \cos(2(n-1)\sigma)\right) \times \\ \quad \cos\left(3\sigma - \frac{2\gamma}{\pi}\sigma + \sum_{n=1}^N a_n \sin(2(n-1)\sigma)\right) \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{2C}{\pi} \cot \sigma (\cos \sigma)^{2-\frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{n=1}^N a_n \cos(2(n-1)\sigma)\right) \times \\ \quad \sin\left(3\sigma - \frac{2\gamma}{\pi}\sigma + \sum_{n=1}^N a_n \sin(2(n-1)\sigma)\right). \end{cases} \quad (2.24)$$

Pour déterminer le degré de contraction C on procède comme suit :

On remplace approximativement la dérivée continue dans l'équation (2) de (2.24)

par

$$\frac{\partial y(\sigma_I)}{\partial \sigma} = -\frac{y(\sigma_I) - y(\sigma_{I-1})}{h} \quad I = 2, N+1,$$

$$\text{où } h = \frac{\pi}{2(N+1)}$$

alors :

$$y(\sigma_{I-1}) = y(\sigma_I) - h \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma_{I-1}) \quad I = 2, N+1,$$

$$\text{pour } I = N+1, \text{ on a } y(\sigma_N) = y(\sigma_{N+1}) - h \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma_N)$$

par récurrence on trouve

$$y(\sigma_I) = y(\sigma_{N+1}) - h_{I=1}^N \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma_I),$$

comme $y(\sigma_{N+1}) = 1$ au point B et $y(\sigma_1) = \frac{H}{L} = C$, on a :

$$C = \frac{H}{L} = 1 - h \sum_{I=1}^N \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma_I). \quad (2.25)$$

En substituant l'équation (2) du système (2.24) dans (2.25) on trouve :

$$C = 1 - h_{I=1}^N \frac{2C}{\pi} \cot \sigma_I (\cos \sigma_I)^{2 - \frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{n=1}^N a_n \cos(2(n-1)\sigma_I)\right) \times \quad (2.26)$$

$$\sin\left(3\sigma - \frac{2\gamma}{\pi}\sigma + \sum_{n=1}^N a_n \sin(2(n-1)\sigma)\right) \quad (2.27)$$

Cette valeur exprime le degré de contraction de l'écoulement.

2.3.5 Forme de la surface libre

On remplace C donné par la relation (2.26) dans (2.24) ; puis on résout le système par la méthode d'Euler, on trouve les valeurs de x et y en chaque point σ_I , pour $I = 1, N + 1$, avec les conditions initiales $x(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

2.4 Résultats et discussions.

2.4.1 Solution avec tension de surface :

Lorsque l'effet de la tension de surface est inclu dans la condition de la surface libre, la procédure numérique précédente montre qu'il existe une valeur $\alpha = \alpha^*$ pour chaque angle d'inclinaison β , et pour laquelle la solution existe pour tout $\alpha \geq \alpha^*$ (voir figure 2.4)

Dans le tableau 2.1, nous donnons une comparaison des coefficients de la série (2.17) avec les coefficients de la série $\sum_n (\frac{5}{6})^n$ pour $\beta = \frac{\pi}{4}$ et la valeur de nombre de Weber $\alpha = 100$. Ici, on remarque que la convergence absolue de la série (2.17) dans le domaine de l'écoulement dans plan t est évidente.

Le tableau 2.2 présente quelques valeurs des coefficients a_n . Ces résultats ont été trouvés pour $N = 60$.

Comme il apparaît dans le tableau (2.2) les coefficients a_n sont décroissants.

On remarque que lorsque $\alpha \rightarrow \alpha^*$, le coefficient de contraction $C \rightarrow 1$, c'est à dire que la surface libre tend vers une ligne horizontale (voir la figure 2.5). La figure 2.6 représente la variation de l'angle de séparation γ en fonction de $\frac{1}{\alpha}$ on remarque aussi que lorsque $\alpha \rightarrow \alpha^*$, $\gamma \rightarrow 2\pi - \beta$. Pour ce cas limite, toutes les frontières du domaine

| n | a_n | $(\frac{5}{6})^n$ | n | a_n | $(\frac{5}{6})^n$ |
|-----|--------------------------|-------------------------|-----|--------------------------|-------------------------|
| 1 | 0.6042 10 ⁻² | 83000 10 ⁻¹ | 31 | -1.2274 10 ⁻⁴ | 3.1004 10 ⁻³ |
| 2 | 3.0906 10 ⁻² | 68890 10 ⁻¹ | 32 | 1.1077 10 ⁻⁴ | 2.5733 10 ⁻³ |
| 3 | -1.3031 10 ⁻² | 57178 10 ⁻¹ | 33 | -1.1228 10 ⁻⁴ | 2.1358 10 ⁻³ |
| 4 | 6.4597 10 ⁻³ | 47458 10 ⁻¹ | 34 | 1.0083 10 ⁻⁴ | 1.7727 10 ⁻³ |
| 5 | -4.3688 10 ⁻³ | 39390 10 ⁻¹ | 35 | -9.2787 10 ⁻⁵ | 1.4714 10 ⁻³ |
| 6 | 2.8169 10 ⁻³ | 32694 10 ⁻¹ | 36 | 8.4350 10 ⁻⁵ | 1.2212 10 ⁻³ |
| 7 | -2.1999 10 ⁻³ | 27136 10 ⁻¹ | 37 | -8.6357 10 ⁻⁵ | 1.0136 10 ⁻³ |
| 8 | 1.5894 10 ⁻³ | 22522 10 ⁻¹ | 38 | 7.5967 10 ⁻⁵ | 8.4133 10 ⁻⁴ |
| 9 | -1.3373 10 ⁻³ | 18694 10 ⁻¹ | 39 | -6.9277 10 ⁻⁵ | 6.9830 10 ⁻⁴ |
| 10 | 1.0330 10 ⁻³ | 15516 10 ⁻¹ | 40 | 6.5308 10 ⁻⁵ | 5.7959 10 ⁻⁴ |
| 11 | -9.0997 10 ⁻⁴ | 12878 10 ⁻¹ | 41 | -6.5805 10 ⁻⁵ | 4.8106 10 ⁻⁴ |
| 12 | 7.3324 10 ⁻⁴ | 1.0689 10 ⁻¹ | 42 | 5.4764 10 ⁻⁵ | 3.9928 10 ⁻⁴ |
| 13 | -6.6272 10 ⁻⁴ | 8.8718 10 ⁻² | 43 | -5.1874 10 ⁻⁵ | 3.3140 10 ⁻⁴ |
| 14 | 5.4637 10 ⁻⁴ | 7.3636 10 ⁻² | 44 | 5.0852 10 ⁻⁵ | 2.7506 10 ⁻⁴ |
| 15 | -5.0093 10 ⁻⁴ | 6.1118 10 ⁻² | 45 | -4.6757 10 ⁻⁵ | 2.2830 10 ⁻⁴ |
| 16 | 4.2159 10 ⁻⁴ | 5.0728 10 ⁻² | 46 | 3.8070 10 ⁻⁵ | 1.8949 10 ⁻⁴ |
| 17 | -3.9608 10 ⁻⁴ | 4.2104 10 ⁻² | 47 | -4.0232 10 ⁻⁵ | 1.5727 10 ⁻⁴ |
| 18 | 3.4414 10 ⁻⁴ | 3.4946 10 ⁻² | 48 | 3.6172 10 ⁻⁵ | 1.3054 10 ⁻⁴ |
| 19 | -3.2892 10 ⁻⁴ | 2.9005 10 ⁻² | 49 | -2.9708 10 ⁻⁵ | 1.0834 10 ⁻⁴ |
| 20 | 2.8609 10 ⁻⁴ | 2.4074 10 ⁻² | 50 | 2.8354 10 ⁻⁵ | 8.9930 10 ⁻⁵ |
| 21 | -2.6874 10 ⁻⁴ | 1.9982 10 ⁻² | 51 | -2.8629 10 ⁻⁵ | 7.4641 10 ⁻⁵ |
| 22 | 2.3299 10 ⁻⁴ | 1.6585 10 ⁻² | 52 | 2.0371 10 ⁻⁵ | 6.1952 10 ⁻⁵ |
| 23 | -2.2517 10 ⁻⁴ | 1.3765 10 ⁻² | 53 | -2.0208 10 ⁻⁵ | 5.1420 10 ⁻⁵ |
| 24 | 2.0392 10 ⁻⁴ | 1.1425 10 ⁻² | 54 | 1.9774 10 ⁻⁵ | 4.2679 10 ⁻⁵ |
| 25 | -1.9777 10 ⁻⁴ | 9.4831 10 ⁻³ | 55 | -1.3587 10 ⁻⁵ | 3.5423 10 ⁻⁵ |
| 26 | 1.7245 10 ⁻⁴ | 7.8710 10 ⁻³ | 56 | 1.1867 10 ⁻⁵ | 2.9401 10 ⁻⁵ |
| 27 | -1.6306 10 ⁻⁴ | 6.5329 10 ⁻³ | 57 | -1.3004 10 ⁻⁵ | 2.4403 10 ⁻⁵ |
| 28 | 1.4820 10 ⁻⁴ | 5.4223 10 ⁻³ | 58 | 6.1854 10 ⁻⁶ | 2.0254 10 ⁻⁵ |
| 29 | -1.4793 10 ⁻⁴ | 4.5005 10 ⁻³ | 59 | -5.6912 10 ⁻⁶ | 1.6811 10 ⁻⁵ |
| 30 | 1.3172 10 ⁻⁴ | 3.7354 10 ⁻³ | 60 | 6.0389 10 ⁻⁶ | 1.3953 10 ⁻⁵ |

Tab. 2.1: Comparaison de quelques valeurs de coefficients de la série (2.17) avec la série $\sum_n (\frac{5}{6})^n$.
Cas $\alpha = 100$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$.

| β | α | a_1 | a_{20} | a_{40} | a_{60} |
|------------------|-----------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 0 | 1.91689 | 1.059 | $-0.4444 \cdot 10^{-3}$ | $-0.7871 \cdot 10^{-4}$ | $-0.4200 \cdot 10^{-5}$ |
| | 30 | 0.1722 | $0.2535 \cdot 10^{-3}$ | $0.3034 \cdot 10^{-4}$ | $0.3596 \cdot 10^{-5}$ |
| | $\alpha \rightarrow \infty$ | -0.794210^{-9} | $0.1539 \cdot 10^{-15}$ | $0.3917 \cdot 10^{-16}$ | $-0.3717 \cdot 10^{-17}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | 1.29999 | 0.8876 | $-0.1198 \cdot 10^{-3}$ | $-0.1914 \cdot 10^{-4}$ | $-0.1003 \cdot 10^{-5}$ |
| | 30 | 0.1296 | $0.1937 \cdot 10^{-3}$ | $0.2271 \cdot 10^{-4}$ | $0.2680 \cdot 10^{-5}$ |
| | $\alpha \rightarrow \infty$ | 0.798110^{-13} | $-3.854 \cdot 10^{-13}$ | $-1.181 \cdot 10^{-13}$ | $-0.1030 \cdot 10^{-15}$ |
| $\frac{2\pi}{3}$ | 1.25085 | 0.3995 | $0.3916 \cdot 10^{-4}$ | $0.7293 \cdot 10^{-5}$ | $0.3978 \cdot 10^{-6}$ |
| | 30 | $0.7972 \cdot 10^{-1}$ | $0.6997 \cdot 10^{-4}$ | $0.3167 \cdot 10^{-5}$ | $0.1053 \cdot 10^{-5}$ |
| | $\alpha \rightarrow \infty$ | $0.6264 \cdot 10^{-8}$ | $0.3123 \cdot 10^{-15}$ | $0.9756 \cdot 10^{-16}$ | $0.1275 \cdot 10^{-16}$ |

Tab. 2.2: Quelques valeurs des coefficients a_n de la series (2.17) pour différentes valeurs de β , et pour différents nombres de Weber α .

de l'écoulement sont rectilignes, donc la solution exacte peut être calculé en utilisant la transformation de Schwartz-Crhistofel. Les formes de la surface libre sont présentées dans les figures, figure 2.7 pour $\beta = \frac{\pi}{2}$, figure 2.8 pour $\beta = \frac{2\pi}{3}$ et figure 2.9 pour $\beta = 0$.

Pour tout angle d'inclinaison $0 \leq \beta < \pi$, et tout nombre de Weber $\alpha \geq \tilde{\alpha} = 6.801483$, nos résultats confirment et améliorent ceux de Ackerberg et Liu[1]. Dans les figures (2.10) et (2.11) nous avons comparé les valeurs numériques des coordonnées x et y données par Ackerberg et Liu[1] pour $\alpha = 32$ et les valeurs numériques calculées par notre procédure.

Pour $\alpha < \alpha^*$ notre procédure numérique diverge. On peut conjecturer que pour des valeurs $\alpha < \alpha^*$ des ondes capillaires apparaissent sur la surface libre. Vanden-Breock[25] a montré qu'en présence des tensions de surface, un écoulement avec une singularité admet toujours des ondes capillaires d'amplitudes exponentiellement petites à toute ordre. Notre formulation par la série ne tient pas compte de ces ondes capillaires. Nous conjecturons pour que $\alpha < \alpha^*$ les ondes capillaires deviennent importantes et par conséquent,

notre schéma numérique diverge. Pour bien comprendre le comportement pour $\alpha < \alpha^*$, on doit reformuler le problème par un schéma numérique capable de reproduire les ondes surfaciques. Pour les problèmes à surface libre, on utilise une formulation par intégrale curviligne où le contour d'intégration est uniquement sur la surface libre. Cette méthode a été utilisée avec succès pour ce problème et dont des résultats seront publiés prochainement dans une revue scientifique.

2.4.2 Solution sans tension de surface :

Pour $\alpha \rightarrow \infty$ et pour tout angle d'inclinaison β , la solution exacte peut être calculée en utilisant la théorie des lignes de courant libre donnée dans Batchelor[4]. Les solutions confirment les résultats donnés dans Birkhoff et Zarantonello[8] voir figure(2.12).

Pour $\beta = \frac{\pi}{2}$, les coefficients $a_n \sim 0$ et l'angle $\gamma = 3.1415$. Alors la solution est :

$$\zeta(t) = (t)^{2 - \frac{2\beta}{\pi}}$$

Cette solution est la même obtenue par la méthode de Kirchoff (Batchelor 1967)[4].

Pour $\alpha \rightarrow \infty$, $C = 0.61$. La comparaison des formes de la surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ et $\beta = \pi$ obtenue en utilisant notre méthode avec les solutions théoriques est présentée dans la figure(2.13)

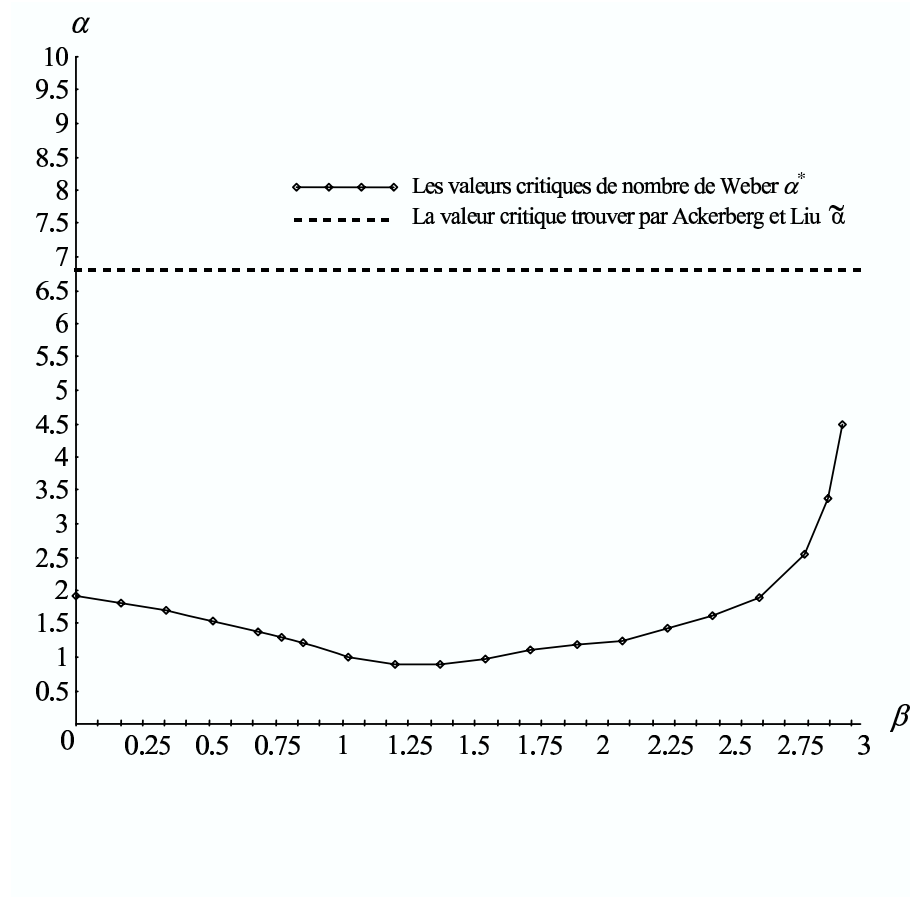


Fig. 2.4: Courbe des variations de la valeur critique α^* du nombre de Weber en fonction de l'angle d'inclinaison β , au-dessous duquel notre procédure numérique diverge. $\tilde{\alpha}$ est la valeur critique trouvée par Ackerberg et Liu^[1].

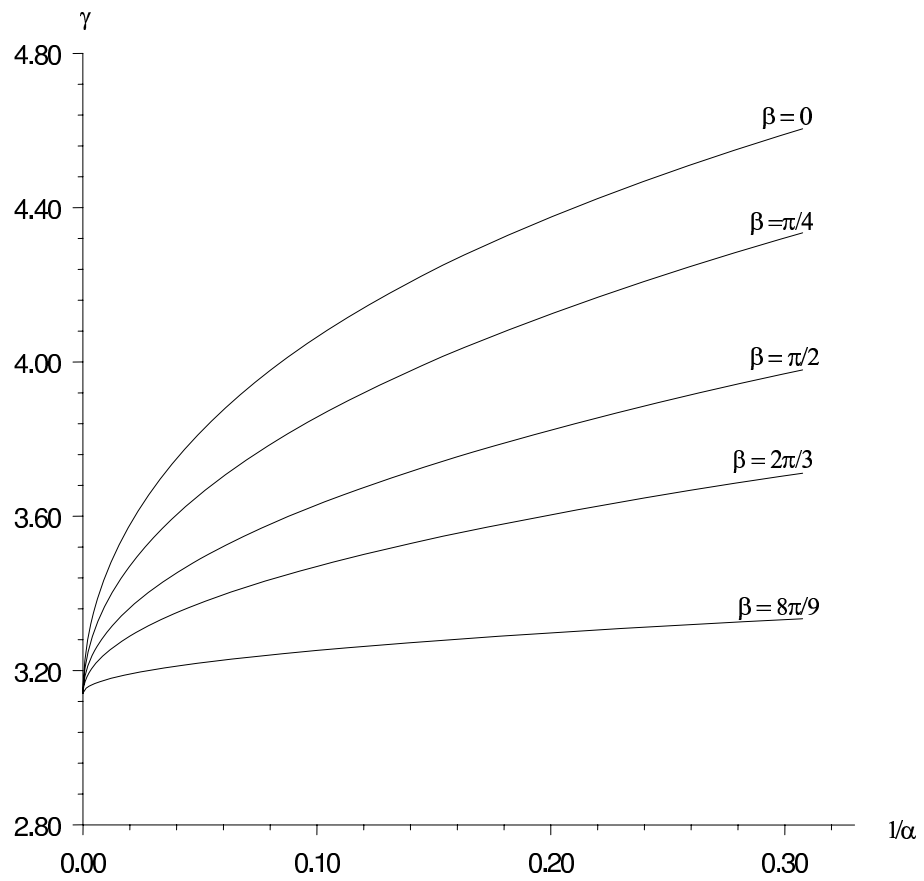


Fig. 2.5: la variation de l'angle de séparation γ en fonction $\frac{1}{\alpha}$.

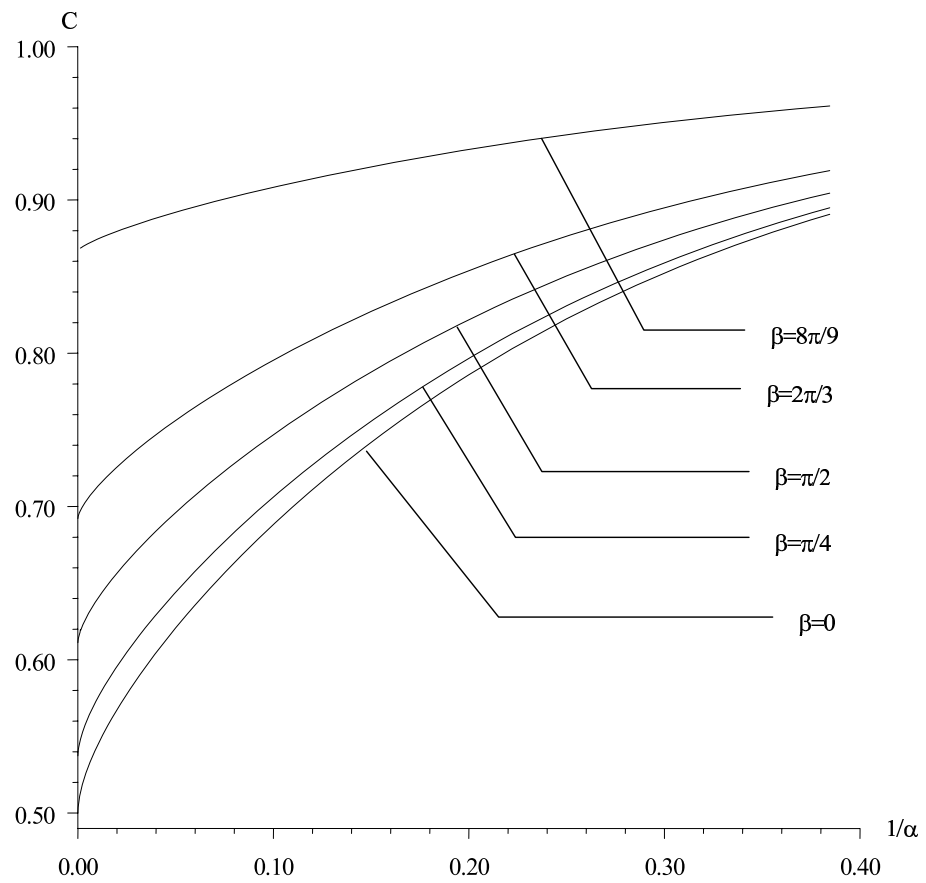


Fig. 2.6: la variation du coefficient de contraction C en fonction de $\frac{1}{\alpha}$.

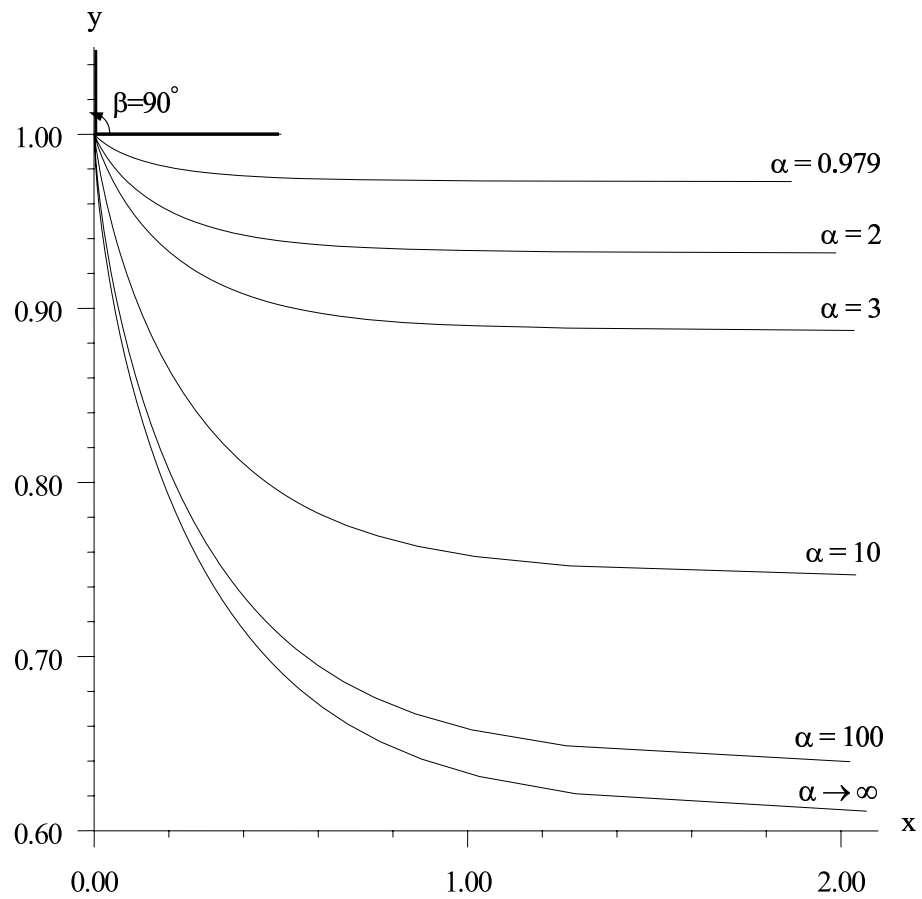


Fig. 2.7: Forme de la surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ et pour différentes valeurs du nombre de Weber α .

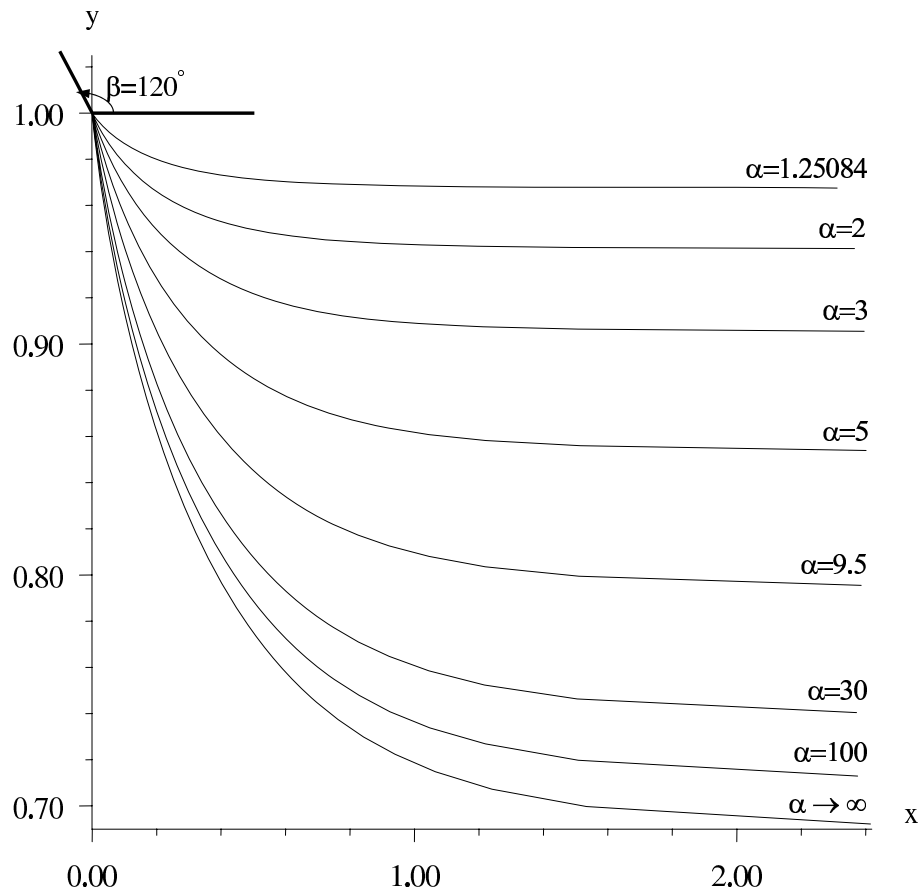


Fig. 2.8: Forme de la surface libre pour $\beta = \frac{2\pi}{3}$ et pour différentes valeurs du nombre de Weber α .

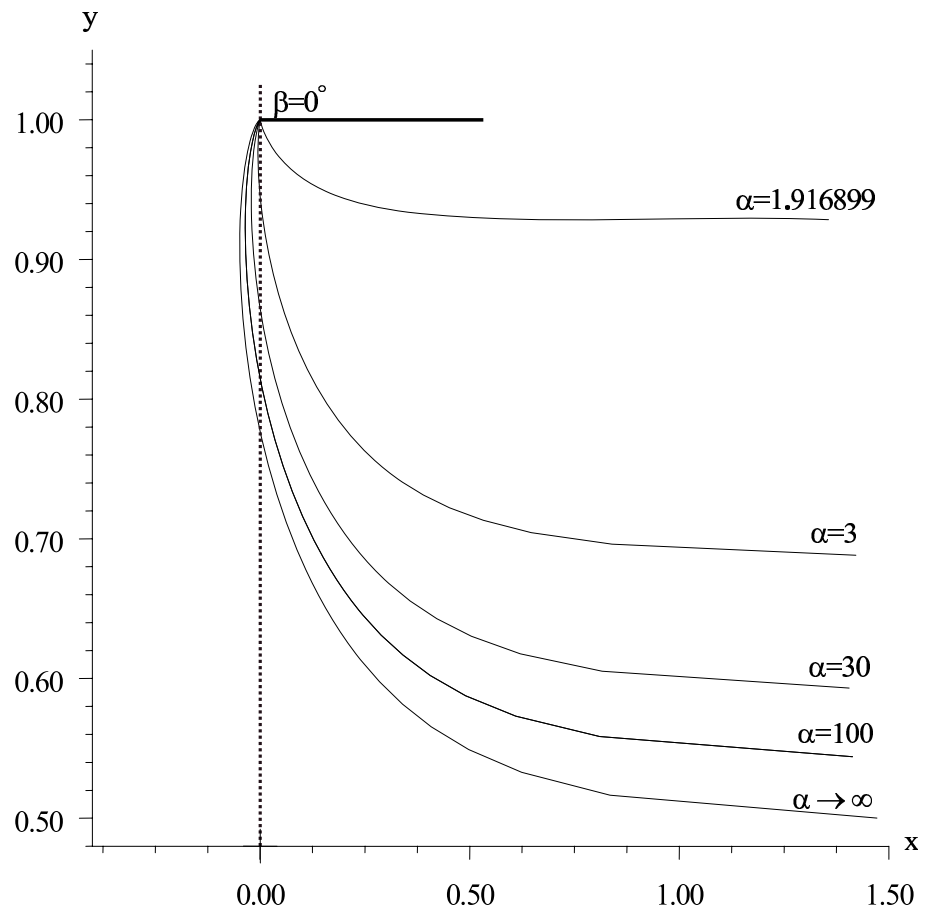


Fig. 2.9: Forme de la surface libre pour $\beta = 0$ et pour différentes valeurs du nombre de Weber α .

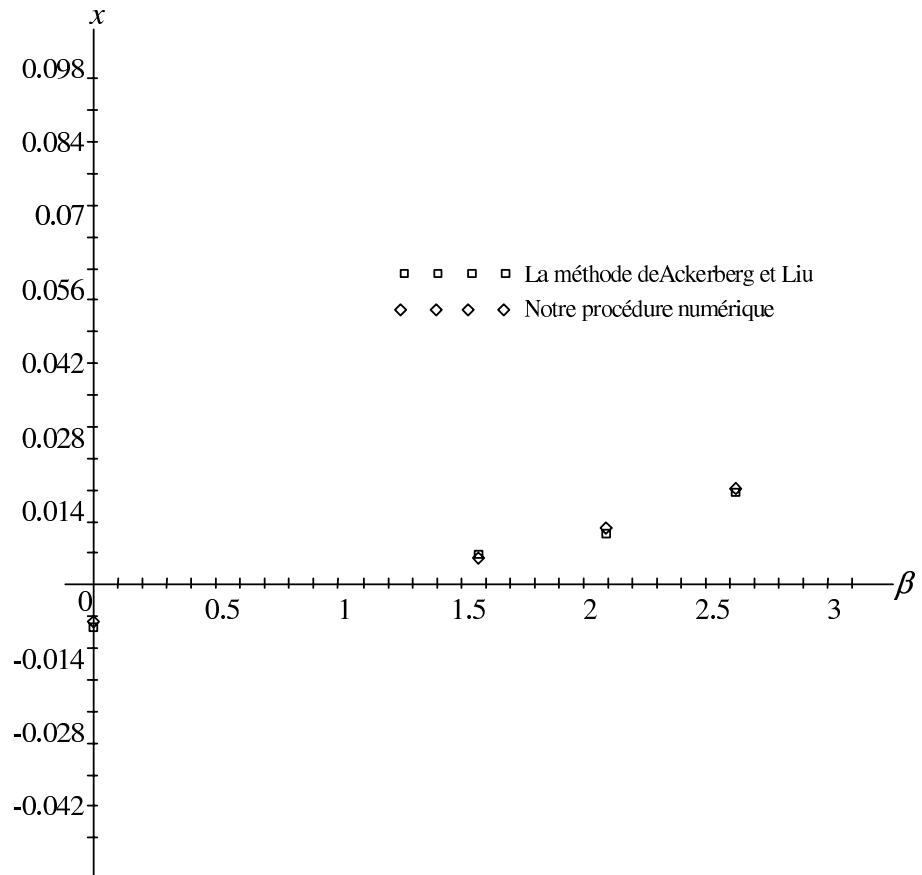


Fig. 2.10: Comparaisons de nos résultats avec ceux donnés par Ackerberg et Liu[1] de quelques valeurs de la coordonné x pour $\alpha = 32$ par rapport à β .

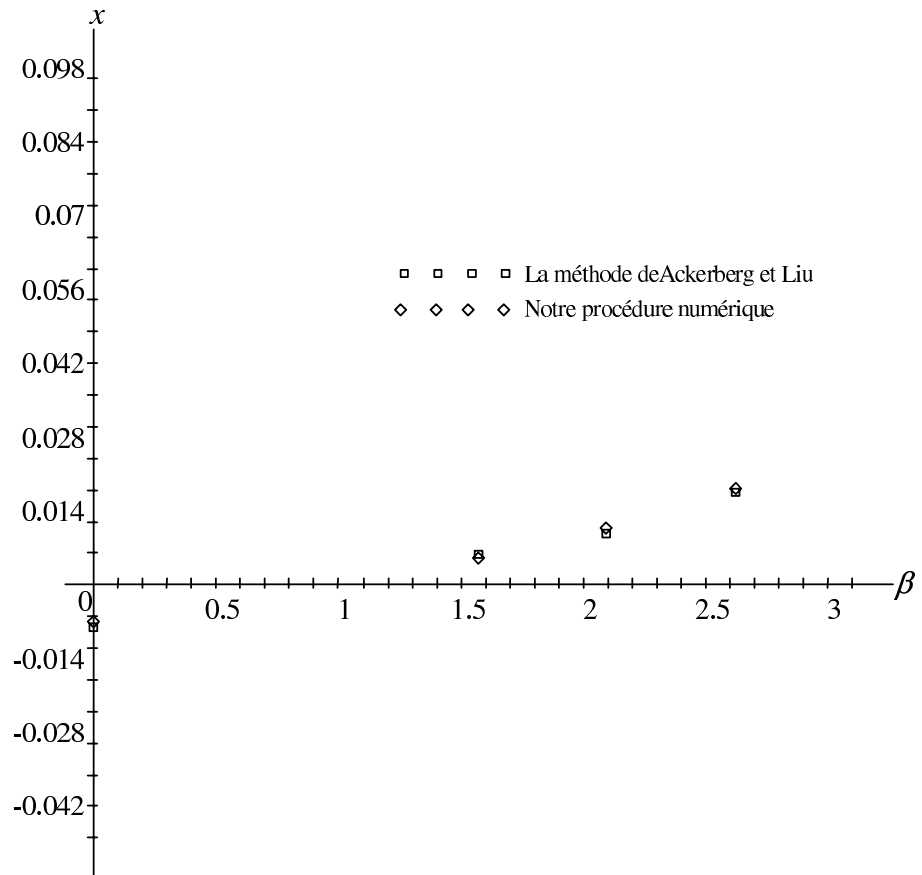


Fig. 2.11: Comparaisons de nos résultats avec ceux donnés par Ackerberg et Liu[1] de quelques valeurs de la coordonné y pour $\alpha = 32$ par rapport à β .

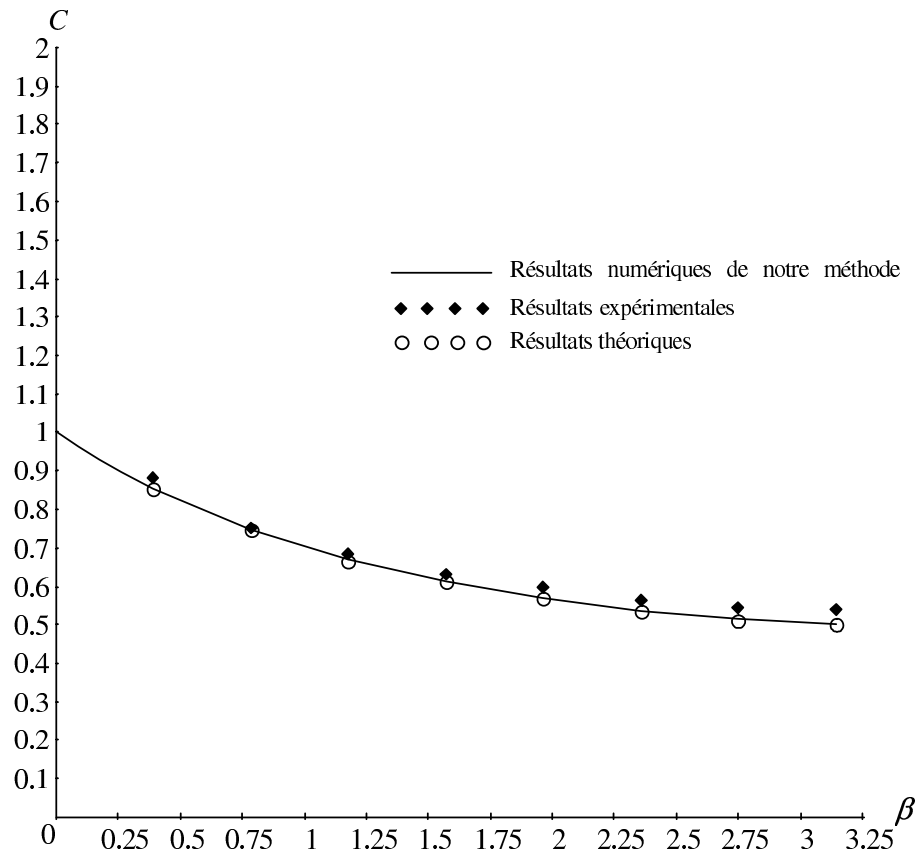


Fig. 2.12: Comparaison des valeurs du coefficient de contraction obtenues C avec les résultats théoriques donnés dans Birkhoff et Zarantonello[8].

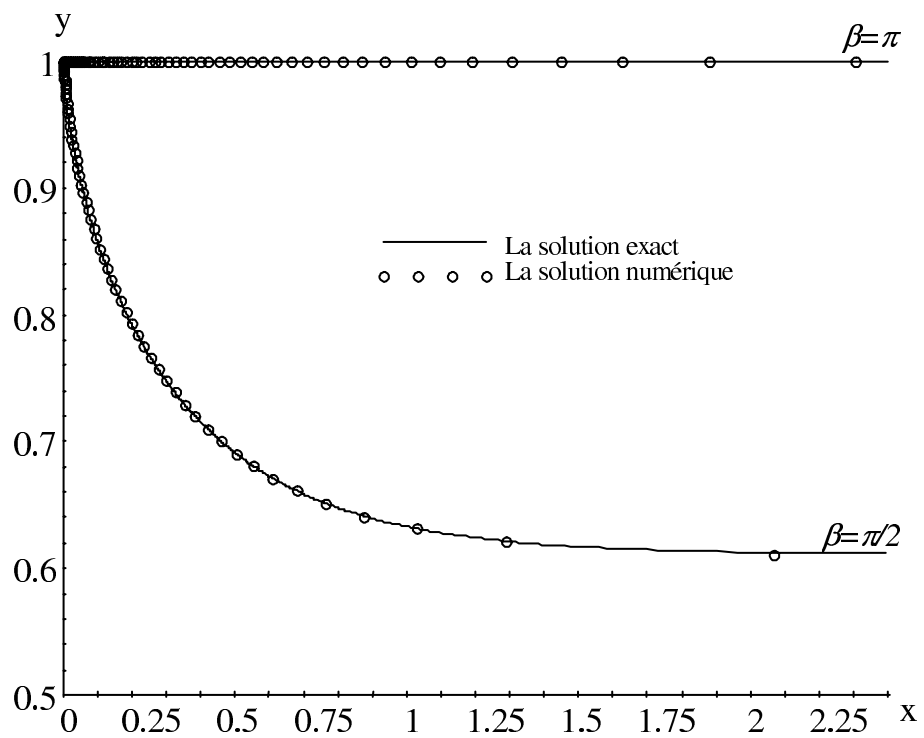


Fig. 2.13: Comparaison des formes de la surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ et $\beta = \pi$ avec les solutions exactes données dans Batchelor[4]

CHAPITRE 3

ÉCOULEMENT A SURFACE LIBRE EN SORTIE DE BUSE

Résumé. Dans le présent travail, on considère un écoulement bidimensionnel potentiel d'un fluide issue d'un orifice au bout d'une buse semi infinie. Le fluide est considéré incompressible et non visqueux et en absence de force de gravité. Loin de l'orifice et au début, l'écoulement est considéré uniforme entre deux plateaux parallèles de vitesse constante U . Le fluide sort de l'orifice comme un jet et s'étend à l'infinie entre deux surfaces libres de distance $2H_0$. Le problème mathématique est caractérisé par la condition non linéaire donnée par l'équation de Bernoulli sur la surface libre et la singularité au voisinage du point de contact paroi-surface libre. La méthode de troncature de la série est adaptée pour la résolution numérique de ce problème. Les résultats obtenues valident et apportent une extension à celles du chapitre 2 pour $\beta = \frac{\pi}{2}$.

3.1 Introduction

On se propose d'étudier un écoulement potentiel bidimensionnel dans une conduite semi-infinie de forme rectangulaire et de largeur $2H_0$. Le fluide est considéré comme incompressible et non visqueux, et l'écoulement est irrotationnel. On néglige l'effet de gravité mais on prend en considération l'effet de tension de surface. A l'origine, l'écoulement à l'intérieur de la conduite est supposé uniforme de vitesse U_0 . Le fluide sort d'un orifice de largeur $2L$ comme un jet et s'étend à l'infini entre deux surfaces libres de distance $2H_0$ (voir figure 3.1). Le problème mathématique est caractérisé par trois paramètres, la longueur $H_0 - L$ de la paroi verticale, l'angle γ au point de séparation entre la paroi et la surface libre, et le nombre de Weber α défini par :

$$\alpha = \frac{\rho U^2 L}{T}, \quad (3.1)$$

où T est la tension de surface et ρ est la densité du fluide.

Ce problème a été considéré par Gurevich[18], Birkhof et Zarantonello[8]. Batchelor[4] utilisant la méthode des lignes de courant libre et la transformation conforme a donné une solution exacte dans le cas où $T = 0$.

Asavanant & Vanden-Breock[2] et Naghdi & Vangsrnpigoon[22] ont traité le même problème avec l'effet de gravité.

La configuration de l'écoulement dans la figure 3.1 peut également servir à un mo-

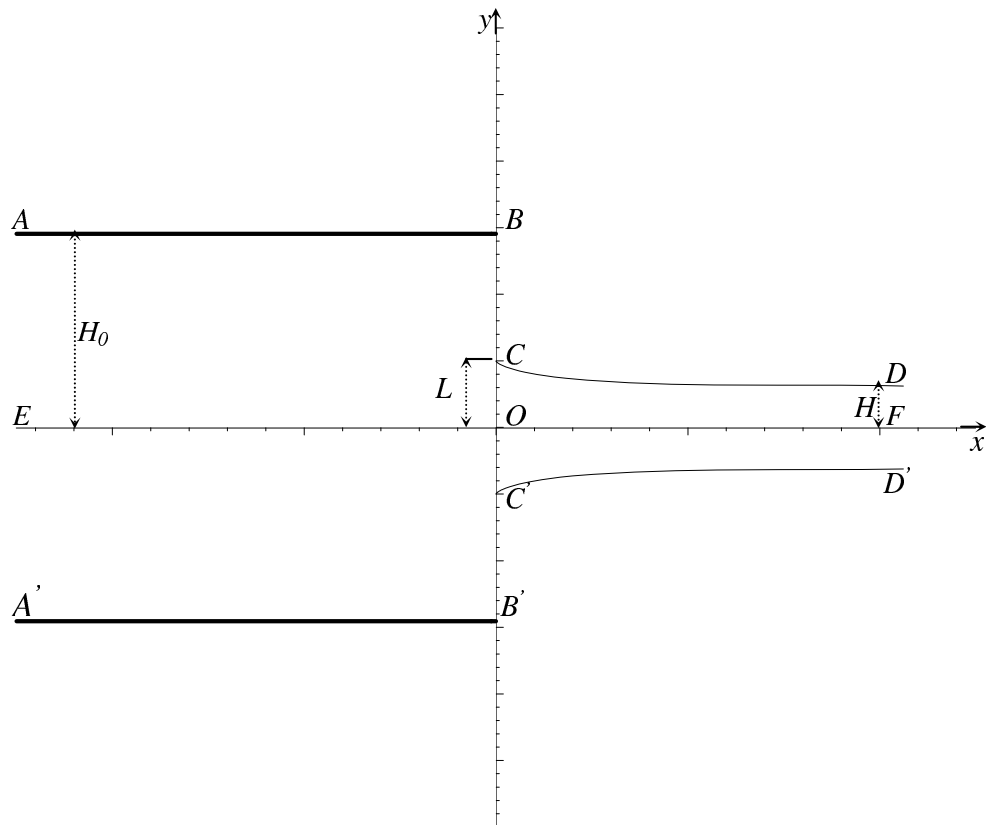


Fig. 3.1: schéma de l'écoulement et des coordonnées. La largeur de l'orifice est $2L$ et la largeur de buse est $2H_0$. L'axe des x est le long de la ligne de courant et de symétrie EOF et l'axe des y est le long de la paroi BC . La figure est un calcul effectif de la forme de la surface libre pour $H_0 - L = 2.91$ et le nombre de Weber $\alpha = 1000$.

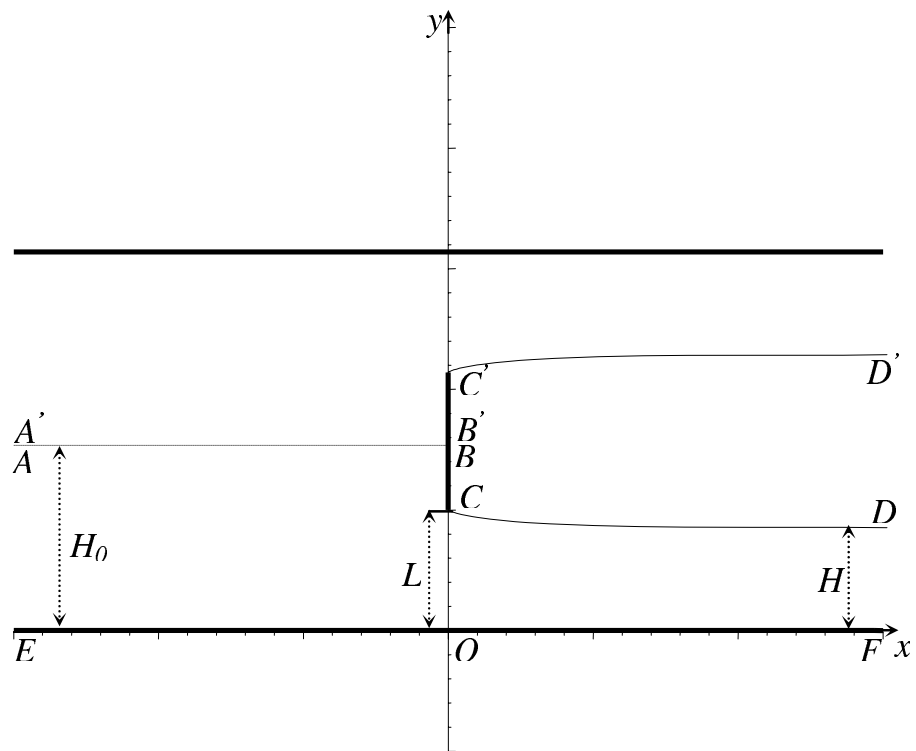


Fig. 3.2: schéma de l'écoulement équivalent à l'écoulement étudié

dèle d'écoulement dans un canal de largeur $2H_0$ devant une plaque verticale (voir figure 3.2). Il découle de la symétrie de l'écoulement que la surface libre du jet dans la figure 3.1 est identique à celle de l'écoulement dans la figure 3.2 pour la même valeur de $H_0 - L$. Par conséquent, nos résultats pour l'écoulement d'un jet impliquent celle de l'écoulement devant une plaque verticale dans un canal. Le problème du chapitre 2 est un cas particulier de ce problème dans le cas où $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Dans ce chapitre, nous utilisons la même méthode que dans le chapitre 2 pour la résolution de ce problème. Nous avons trouvé la solution pour chaque valeur de longueur $H_0 - L$ et pour toutes les valeurs de nombre de Weber $\alpha \geq 0$.

Le problème est présenté dans la section 3.2. La procédure numérique est décrite dans la section 3.3 la formulation de la série est donnée dans la section 3.4. La forme de la surface libre et la discussion des résultats sont présentées respectivement dans la section 3.5 et la section 3.6.

3.2 Formulation du problème

Nous considérons un écoulement bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux issu d'une buse rectangulaire de largeur $2H_0$ et de longueur infinie. L'ouverture de la buse est de largeur $2L$ (voir figure 3.1). Dans l'absence de gravité et de la symétrie de l'écoulement, la ligne de symétrie EOF est considérée comme ligne de courant. On prend comme axes de coordonnées la ligne de courant EOF sur l'axe des abscisses x et la paroi BC sur l'axe des ordonnées y . Lorsque $x \rightarrow -\infty$, l'écoulement est considéré uniforme de vitesse constante U_0 . Nous supposons que le jet à l'infini est uniforme de

vitesse constante U et de largeur $2H$.

D'après la section 2.3, on introduit la fonction potentiel de la vitesse $f = \phi + i\psi$ et la vitesse complexe $\zeta = u - iv = C \frac{df}{dz}$. Ici $C = \frac{H}{L}$ est le degré de contraction du jet. Pour rendre les variables adimensionnelles, on peut choisir respectivement L et U comme unité de longueur et unité de vitesse respectivement

Sans perte de généralité, on choisit $\phi = 0$ au point de raccordement $(x, y) = (0, 1)$. La fonction de courant $\psi = 0$ sur la ligne de courant $ABCD$. D'après la loi de conservation de la masse il s'ensuit que $\psi = -1$ sur EOF . Alors dans le plan f , la région de l'écoulement est une bande infinie $-\infty < \phi < +\infty, -1 < \psi < 0$, (figure 3.3). La condition sur la surface libre CD est donnée par l'équation de Bernoulli :

$$P + \frac{1}{2}\rho q^2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \quad \text{on } \psi = 0, \phi > 0. \quad (3.2)$$

En variables non-dimensionnelles, l'équation (3.2) devient :

$$\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{\alpha}K = \frac{1}{2}, \quad (3.3)$$

où α désigne le nombre de Weber défini en (3.1).

Pour que la courbure soit bien déterminée nous introduisons la fonction $\tau - i\theta$ par :

$$\zeta = u - iv = e^{\tau - i\theta}. \quad (3.4)$$

Avec ses nouvelles variables les conditions aux limites deviennent :

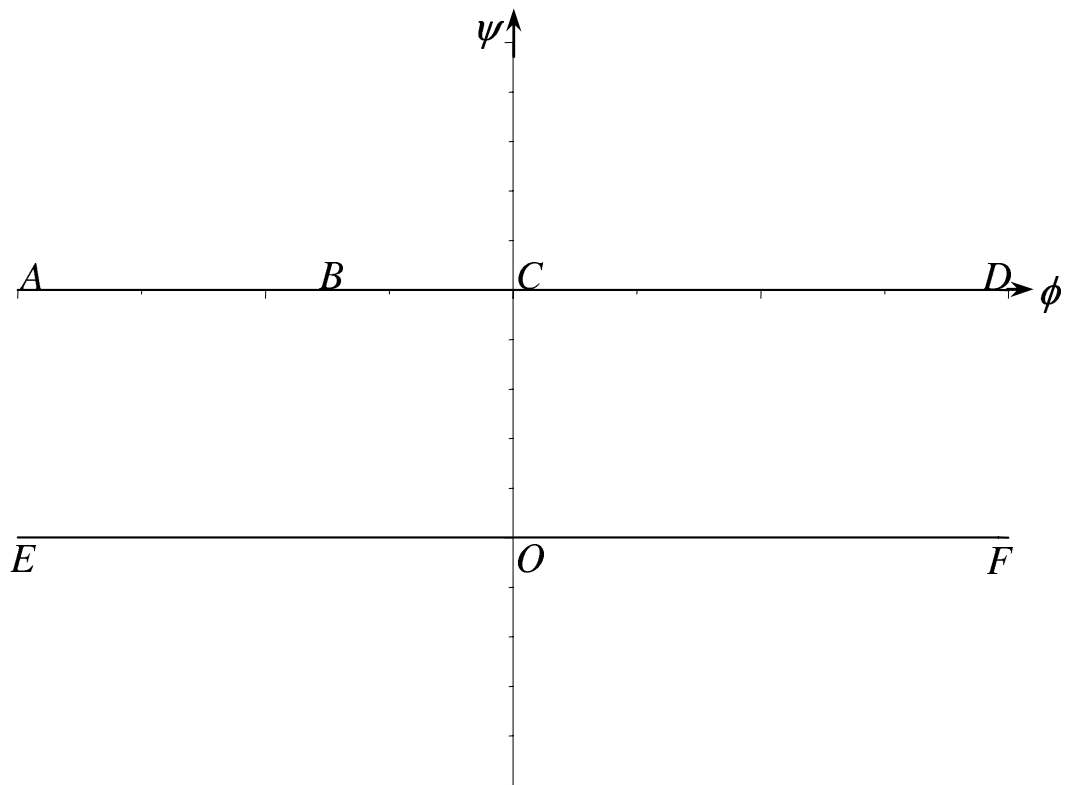


Fig. 3.3: Plan de la variable complexe f

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{2}{\alpha} (e^\tau - e^{-\tau}) \quad 0 < \phi < \infty, \quad (3.5)$$

$$\text{Im} \zeta = 0 \quad \text{pour} \quad \psi = 0, \quad -\infty < \phi < \phi_B. \quad (3.6)$$

$$\text{Re} \zeta = 0 \quad \text{pour} \quad \psi = 0, \quad \phi_B < \phi < 0. \quad (3.7)$$

$$\text{Im} \zeta = 0 \quad \text{pour} \quad \psi = -1, \quad -\infty < \phi < \infty. \quad (3.8)$$

Le problème consiste maintenant à chercher la fonction $\tau - i\theta$ analytique en $f = \phi + i\psi$ dans la bande $-1 < \psi < 0$, et qui vérifie les conditions (3.5), (3.6), (3.7) et (3.8).

3.3 Méthode computationnelle

Suivant Birkhoff et Zarantonello[8], on introduit une nouvelle variable t définie par la relation

$$f = \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{2t}{1+t^2}\right). \quad (3.9)$$

Cette relation transforme le domaine de l'écoulement ($-\infty < \phi < \infty, -1 < \psi < 0$) du plan f en un quart de disque unité dans le plan de la variable t . Les parois horizontales et verticales AB et BC sont transformées sur la partie positive du diamètre réel. La surface libre est transformée sur la circonférence de quart de cercle unité voir figure 3.4.

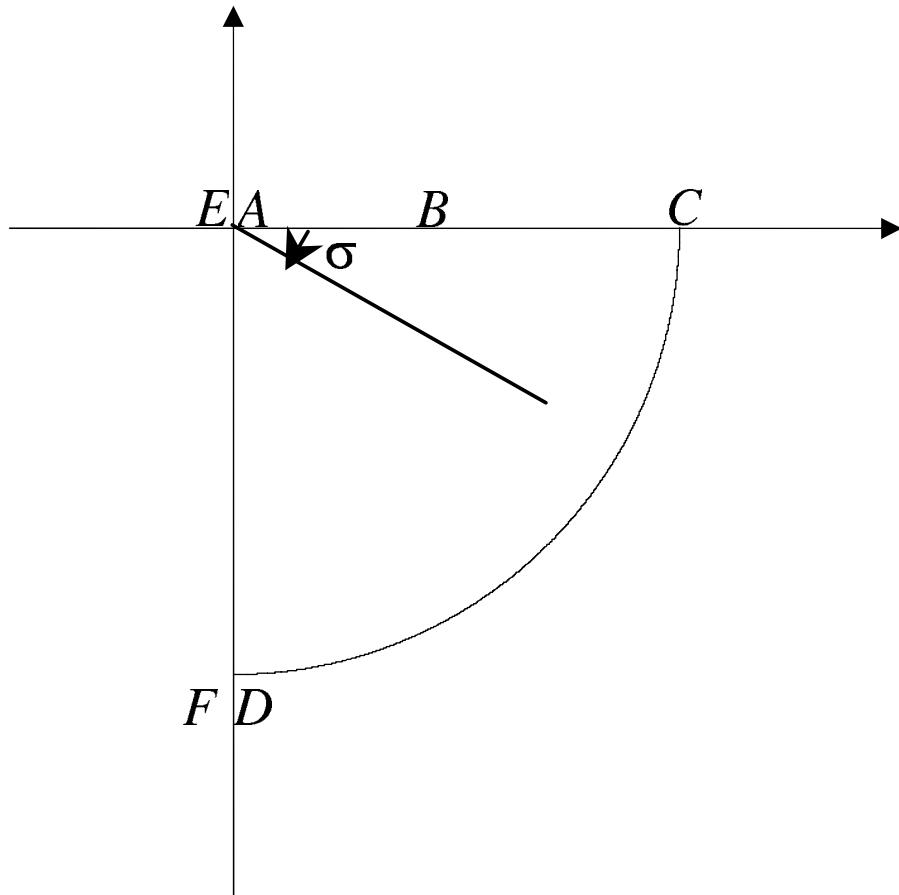


Fig. 3.4: Plan de la variable complexe t

3.3.1 Comportement asymptotique de la vitesse au points critiques

Les points critiques de l'écoulement sont $z = iH_0$, et $z = iL$. qui correspondent dans le plan auxilliaire à $t = 1$ et $t = b$. L'écoulement est potentiel partout dans le domaine sauf en $t = 1$ et $t = b$, où nous avons un écoulement autour d'un angle en $t = 1$ et un point de stagnation en $t = b$. Par conséquent l'analyse locale est exigée.

3.3.1.1 Comportement asymptotique au voisinage de $t = b$.

Puisqu'au point $t = b$, on a un écoulement dans un angle, donc l'écoulement est caractérisé par la fonction potentielle complexe donnée dans le plan z par :

$$f \sim az^2 \quad \text{lorsque } z \rightarrow iH_0 \quad (3.10)$$

En utilisant la transformation (3.9), cette condition devient :

$$\zeta = \mathcal{O}((b^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}) \quad \text{lorsque } t \rightarrow b. \quad (3.11)$$

3.3.1.2 Comportement asymptotique au point de séparation $t = 1$.

Localement au point de raccordement de la paroi verticale avec la surface libre, nous avons un écoulement autour d'un angle γ , ainsi :

$$f \sim az^{\frac{\pi}{\gamma}} \quad \text{lorsque } z \rightarrow i, \quad (3.12)$$

En fonction de la variable t , la condition précédente s'écrit sous la forme :

$$\zeta = \mathcal{O}((t^2 - 1)^{2 - \frac{2\gamma}{\pi}}) \text{ lorsque } t \longrightarrow 1. \quad (3.13)$$

Après avoir déterminé le comportement local de la vitesse au voisinage de point de stagnation et au point singulier et suivant H. Mekias et J. M. Vanden-Broeck, on cherche la vitesse $\zeta(t)$ sous la forme :

$$\zeta(t) = g(t) \Omega(t).$$

Où $g(t)$ contient les singularités et les zéros montrés précédemment, et la fonction $\Omega(t)$ est bornée et continue sur le cercle d'unité $|t| = 1$ et analytique à l'intérieur. Les conditions (3.6), (3.7) et (3.8) montrent que $\Omega(t)$ peut être développée en série entière en t . Par conséquent,

$$e^{\tau - i\theta} = \zeta(t) = \sqrt{(b^2 - t^2)} (1 - t^2)^{2 - \frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{2n}\right). \quad (3.14)$$

Les coefficients a_n sont des inconnus à déterminer. En choisissant les coefficients a_n réels, la vitesse donnée par la relation (3.14) satisfait toutes les conditions (3.6), (3.7) et (3.8). On détermine les coefficients a_n et l'angle γ de tel sorte que l'équation de Bernoulli (2.5) soit satisfaite.

On introduit la notation $t = |t| e^{i\sigma}$ de sorte que les points sur BC sont donnés par $t = e^{i\sigma}$, $-\frac{\pi}{2} < \sigma < 0$. En utilisant (3.14) l'équation (3.5) devient :

$$e^{2\bar{\tau}} + \frac{\pi}{\alpha} e^{\bar{\tau}} \tan(\sigma) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \sigma} = 1. \quad (3.15)$$

Ici $\bar{\tau}(\sigma)$ et $\bar{\theta}(\sigma)$ dénotent respectivement les valeurs des fonctions τ et θ sur la surface libre CD .

Pour la résolution numérique du problème nous faisons une troncature de la série définie dans (3.14) après N termes. On détermine les N coefficients a_n et l'angle de séparation γ par collocation. Ainsi, on introduit la discrétisation de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ en $N + 1$ points σ_I par

$$\sigma_I = -\frac{\pi}{2(N+1)}\left(I - \frac{1}{2}\right), \quad I = 1, \dots, N+1 \quad (3.16)$$

Les deux équations (3.14) et (3.16) nous permettent de trouver les expressions $[\bar{\tau}(\sigma)]_{\sigma=\sigma_I}$, $[\bar{\theta}(\sigma)]_{\sigma=\sigma_I}$ et $[\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \sigma}]_{\sigma=\sigma_I}$ en termes de γ et les coefficients a_n , lesquelles, une fois substitués dans l'équation (3.16), deviennent en chaque point σ_I .

On obtient $(N+1)$ équations algébriques non linéaires pour $(N+1)$ inconnus a_n , $n=1, \dots, N$, et γ . Le système de $(N+1)$ équations non linéaires à $(N+1)$ inconnues est résolu par la méthode de Newton.

3.4 Forme de la surface libre

Une fois les coefficients a_n et l'angle de séparation γ sont calculés, on peut déterminer la forme de la surface libre.

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{2C}{\pi} \cot(\sigma) e^{\bar{\tau}} \cos(\bar{\theta}) \quad (3.17)$$

et

$$\frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{2C}{\pi} \cot(\sigma) e^{\bar{\tau}} \sin(\bar{\theta}). \quad (3.18)$$

Et par suite, on obtient la longueur de paroi verticale AB par

$$H_0 - L = \int_b^1 \frac{\partial f}{\partial t} \frac{1}{\zeta} dt. \quad (3.19)$$

3.5 Discussion et présentation des résultats

Nous utilisons la procédure numérique décrite en section (3.3) pour calculer les solutions du problème pour plusieurs mesures de la paroi verticale BC et pour différentes valeurs du nombre de Weber α .

La plupart des calculs ont été faits avec $N = 60$.

3.5.1 Solution sans tension de surface ($T = 0$).

Pour $\alpha \rightarrow \infty$ et pour toute valeur de la longueur de la paroi verticale $H_0 - L$, la solution exacte peut être calculée en utilisant la méthode des lignes des courants libres introduite par Kirchoff[4]. Nous avons calculé numériquement ces solutions en utilisant la procédure décrite ci-dessus. Le coefficient C de contraction est défini comme le rapport de la largeur d'écoulement à l'infini à la largeur de l'ouverture de buse. Les valeurs correspondantes du coefficient de contraction C calculées par notre procédure peuvent être comparées aux résultats obtenus par Gurevich (voir figure 3.5).

Pour $H_0 - L \rightarrow \infty$, les coefficients de la série (3.14) $a_n \sim 0$ et l'angle de séparation $\gamma = 3.1415$, par conséquent la solution s'écrit :

$$\zeta(t) = t \quad (3.20)$$

qui est la solution classique de Kirchoff (Batchelor 1967)[4].

De l'équation (2.18) on obtient $C = \frac{\pi}{\pi+2} = 0.611$.

La figure 3.6 montre la comparaison pour les deux valeurs $H_0 - L \rightarrow \infty$ et $H_0 - L = 1$ entre la forme de la surface libre calculée par notre procédure et la solution exacte.

3.5.2 Solution avec tension de surface ($T \neq 0$).

Nous utilisons encore notre procédure pour calculer la solution quand l'effet de la tension de surface est inclus dans la condition sur la surface libre, les calculs numériques montrent qu'il existe une solution pour chaque valeur de nombre de Weber $\alpha > 0$ et pour chaque valeur de la longueur du mur vertical $0 \leq H_0 - L < \infty$. Dans le tableau 3.1, nous donnons une comparaison des coefficients de la série (3.14) avec les coefficients de la série $\sum_n (\frac{5}{6})^n$, ce qui montre la convergence absolue de la série (3.14) dans le quatrième quart du disque unité du plan t . Les coefficients de la série trouvés sont rapidement décroissants et l'angle γ croît lorsque α décroît. Le tableau 3.2 présente quelques valeurs des coefficients de la série (3.14) et les nombres de Weber correspondants et pour plusieurs valeurs de la longueur $H_0 - L$.

On note que lorsque le nombre de Weber α décroît, le coefficient de contraction C et l'angle de séparation croient. La figure 3.7 montre la variation de C en fonction de $\frac{1}{\alpha}$.

Dans la figure 3.8 on présente les valeurs de l'angle de séparation entre la surface libre et la paroi verticale γ en fonction de $\frac{1}{\alpha}$. On constate que la solution numérique

| n | a_n | $(\frac{5}{6})^n$ | n | a_n | $(\frac{5}{6})^n$ |
|-----|--------------------------|-------------------------|-----|--------------------------|-------------------------|
| 1 | 5.5629 10 ⁻² | 83000 10 ⁻¹ | 31 | -6.4262 10 ⁻⁵ | 3.1004 10 ⁻³ |
| 2 | -4.6018 10 ⁻² | 68890 10 ⁻¹ | 32 | 5.2368 10 ⁻⁵ | 2.5733 10 ⁻³ |
| 3 | -1.1210 10 ⁻² | 57178 10 ⁻¹ | 33 | -5.2014 10 ⁻⁵ | 2.1358 10 ⁻³ |
| 4 | 9.1337 10 ⁻³ | 47458 10 ⁻¹ | 34 | 4.0809 10 ⁻⁵ | 1.7727 10 ⁻³ |
| 5 | -6.9716 10 ⁻³ | 39390 10 ⁻¹ | 35 | -4.6583 10 ⁻⁵ | 1.4714 10 ⁻³ |
| 6 | 4.3053 10 ⁻³ | 32694 10 ⁻¹ | 36 | 3.1586 10 ⁻⁵ | 1.2212 10 ⁻³ |
| 7 | -3.2974 10 ⁻³ | 27136 10 ⁻¹ | 37 | -3.8216 10 ⁻⁵ | 1.0136 10 ⁻³ |
| 8 | 2.1809 10 ⁻³ | 22522 10 ⁻¹ | 38 | 2.8702 10 ⁻⁵ | 8.4133 10 ⁻⁴ |
| 9 | -1.7944 10 ⁻³ | 18694 10 ⁻¹ | 39 | -2.9082 10 ⁻⁵ | 6.9830 10 ⁻⁴ |
| 10 | 1.2560 10 ⁻³ | 15516 10 ⁻¹ | 40 | 2.5105 10 ⁻⁵ | 5.7959 10 ⁻⁴ |
| 11 | -1.0877 10 ⁻³ | 12878 10 ⁻¹ | 41 | -2.5020 10 ⁻⁵ | 4.8106 10 ⁻⁴ |
| 12 | 7.8256 10 ⁻⁴ | 1.0689 10 ⁻¹ | 42 | 1.8547 10 ⁻⁵ | 3.9928 10 ⁻⁴ |
| 13 | -7.0350 10 ⁻⁴ | 8.8718 10 ⁻² | 43 | -2.3257 10 ⁻⁵ | 3.3140 10 ⁻⁴ |
| 14 | 5.2337 10 ⁻⁴ | 7.3636 10 ⁻² | 44 | 1.3901 10 ⁻⁵ | 2.7506 10 ⁻⁴ |
| 15 | -4.9224 10 ⁻⁴ | 6.1118 10 ⁻² | 45 | -1.9076 10 ⁻⁵ | 2.2830 10 ⁻⁴ |
| 16 | 3.6887 10 ⁻⁴ | 5.0728 10 ⁻² | 46 | 1.2938 10 ⁻⁵ | 1.8949 10 ⁻⁴ |
| 17 | -3.4765 10 ⁻⁴ | 4.2104 10 ⁻² | 47 | -1.3592 10 ⁻⁵ | 1.5727 10 ⁻⁴ |
| 18 | 2.6533 10 ⁻⁴ | 3.4946 10 ⁻² | 48 | 1.2213 10 ⁻⁵ | 1.3054 10 ⁻⁴ |
| 19 | -2.6431 10 ⁻⁴ | 2.9005 10 ⁻² | 49 | -1.0379 10 ⁻⁵ | 1.0834 10 ⁻⁴ |
| 20 | 2.0016 10 ⁻⁴ | 2.4074 10 ⁻² | 50 | 9.2350 10 ⁻⁵ | 8.9930 10 ⁻⁵ |
| 21 | -1.9534 10 ⁻⁴ | 1.9982 10 ⁻² | 51 | -9.7253 10 ⁻⁵ | 7.4641 10 ⁻⁵ |
| 22 | 1.5362 10 ⁻⁴ | 1.6585 10 ⁻² | 52 | 5.4680 10 ⁻⁵ | 6.1952 10 ⁻⁵ |
| 23 | -1.5739 10 ⁻⁴ | 1.3765 10 ⁻² | 53 | -8.9881 10 ⁻⁵ | 5.1420 10 ⁻⁵ |
| 24 | 1.1655 10 ⁻⁴ | 1.1425 10 ⁻² | 54 | 3.4131 10 ⁻⁵ | 4.2679 10 ⁻⁵ |
| 25 | -1.2156 10 ⁻⁴ | 9.4831 10 ⁻³ | 55 | -6.4800 10 ⁻⁵ | 3.5423 10 ⁻⁵ |
| 26 | 9.7167 10 ⁻⁵ | 7.8710 10 ⁻³ | 56 | 3.3305 10 ⁻⁵ | 2.9401 10 ⁻⁵ |
| 27 | -9.6595 10 ⁻⁵ | 6.5329 10 ⁻³ | 57 | -3.1105 10 ⁻⁵ | 2.4403 10 ⁻⁵ |
| 28 | 7.4207 10 ⁻⁵ | 5.4223 10 ⁻³ | 58 | 3.4525 10 ⁻⁶ | 2.0254 10 ⁻⁵ |
| 29 | -8.2434 10 ⁻⁵ | 4.5005 10 ⁻³ | 59 | -7.3274 10 ⁻⁶ | 1.6811 10 ⁻⁵ |
| 30 | 5.9664 10 ⁻⁵ | 3.7354 10 ⁻³ | 60 | 2.2868 10 ⁻⁶ | 1.3953 10 ⁻⁵ |

Tab. 3.1: Comparaison de quelques valeurs de coefficients de la série (3.14) avec la série $\sum_n (\frac{5}{6})^n$.
Cas $\alpha = 50$ et $H_0 - L = 1.39$.

| $H_0 - L$ | α | a_1 | a_{20} | a_{40} | a_{60} |
|-----------|-----------------------------|------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1.26 | 0.1 | 2.194×10^{-1} | 2.308×10^{-6} | 3.833×10^{-7} | 2.049×10^{-8} |
| | 10 | 1.158×10^{-1} | 9.558×10^{-5} | 1.078×10^{-5} | 1.270×10^{-6} |
| | $\alpha \rightarrow \infty$ | 1.681×10^{-7} | -4.704×10^{-7} | -2.304×10^{-12} | -4.195×10^{-19} |
| 5.76 | 0.1 | 6.839×10^{-1} | 6.825×10^{-7} | 1.889×10^{-7} | 1.098×10^{-8} |
| | 10 | 2.021×10^{-1} | 6.127×10^{-5} | -1.163×10^{-6} | 1.341×10^{-6} |
| | $\alpha \rightarrow \infty$ | 8.117×10^{-9} | -9.345×10^{-9} | -2.943×10^{-9} | -2.320×10^{-10} |

Tab. 3.2: Quelques valeurs des coefficients a_n de la série (3.14) pour différentes valeurs de longueur $H_0 - L$ et différentes valeurs du nombre de Weber α .

existe pour toute valeur $\alpha > 0$. Lorsque $\alpha \rightarrow 0$, la surface libre tend vers une demi droite $y = 1$, le degré de contraction $C \rightarrow 1$ et l'angle de séparation $\gamma \rightarrow 3\pi/2$.

Des profils typiques de la surface libre pour différents nombres de Weber sont présentés dans la figure 3.9 pour $H_0 - L = 1.21$ et dans la figure 3.10 pour $H_0 - L = 10.61$.

Pour $H_0 - L \rightarrow \infty$, et pour différents nombres de Weber $\alpha \geq 0.95$, on trouve les mêmes résultats que dans le second chapitre.

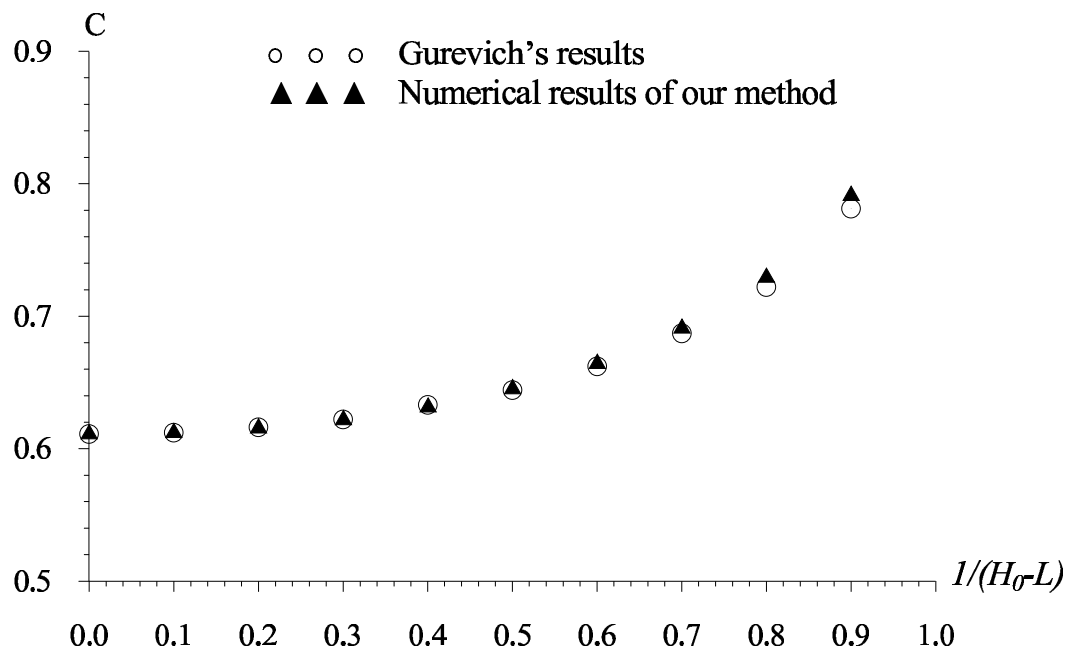


Fig. 3.5: Comparaison des valeurs du coefficient de contraction obtenues avec les résultats de Gurevich[18].

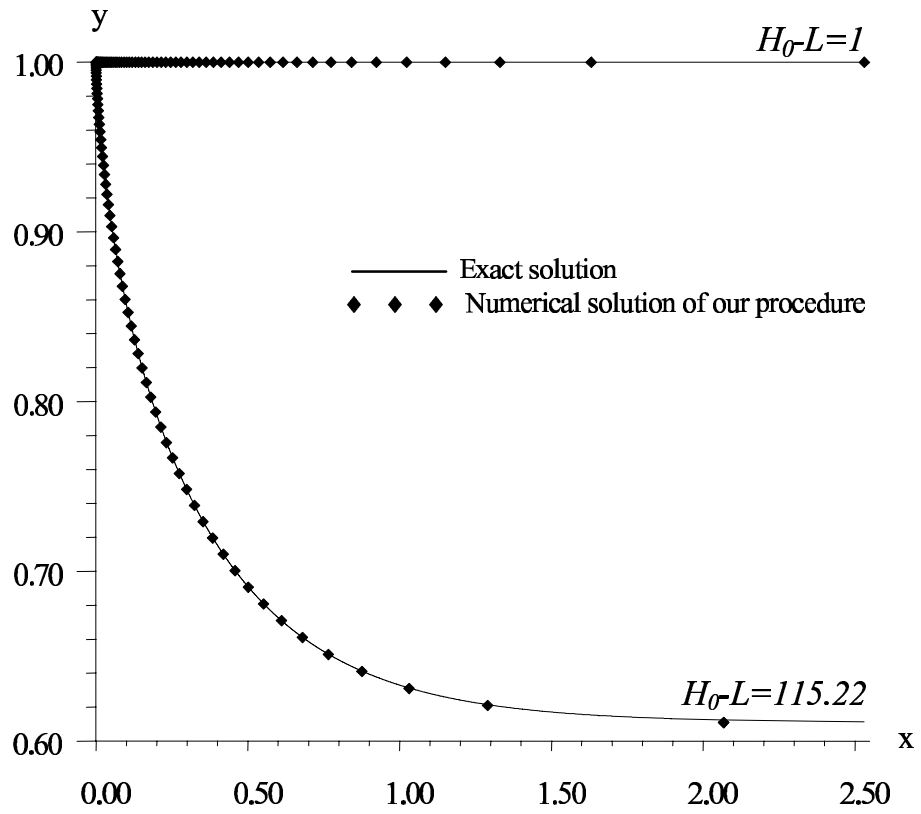


Fig. 3.6: La comparaison des solutions numériques trouvées pour $H_0 - L = 1$ et $H_0 - L = 115.22$ avec les solutions exactes correspondantes.

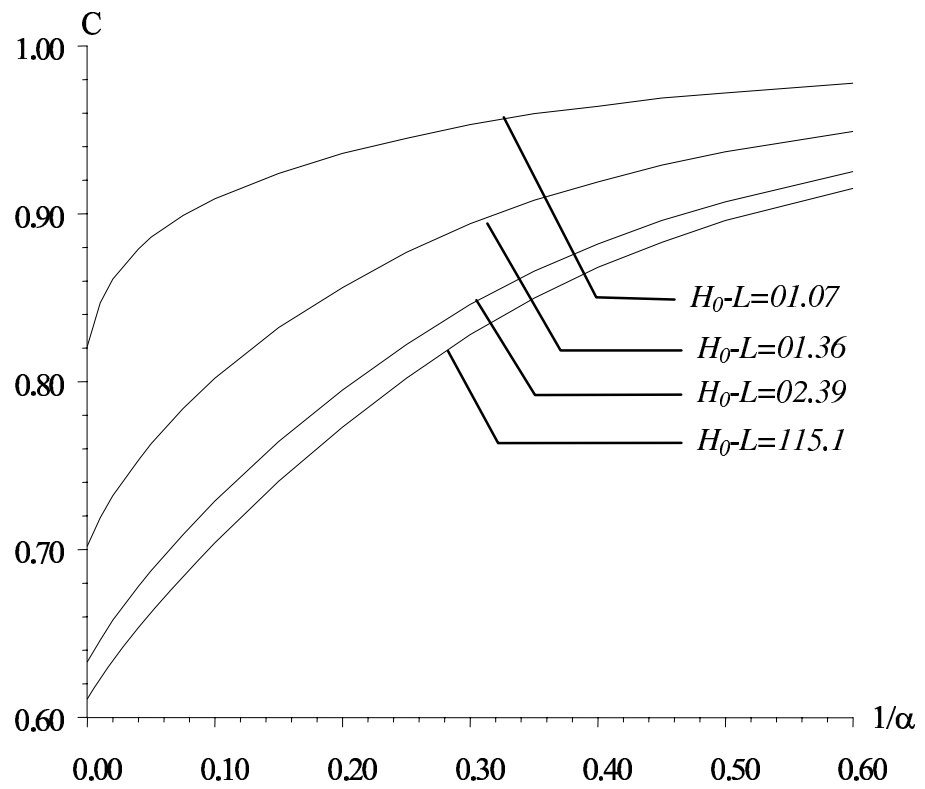


Fig. 3.7: Le coefficient de contraction C en fonction de $1/\alpha$.

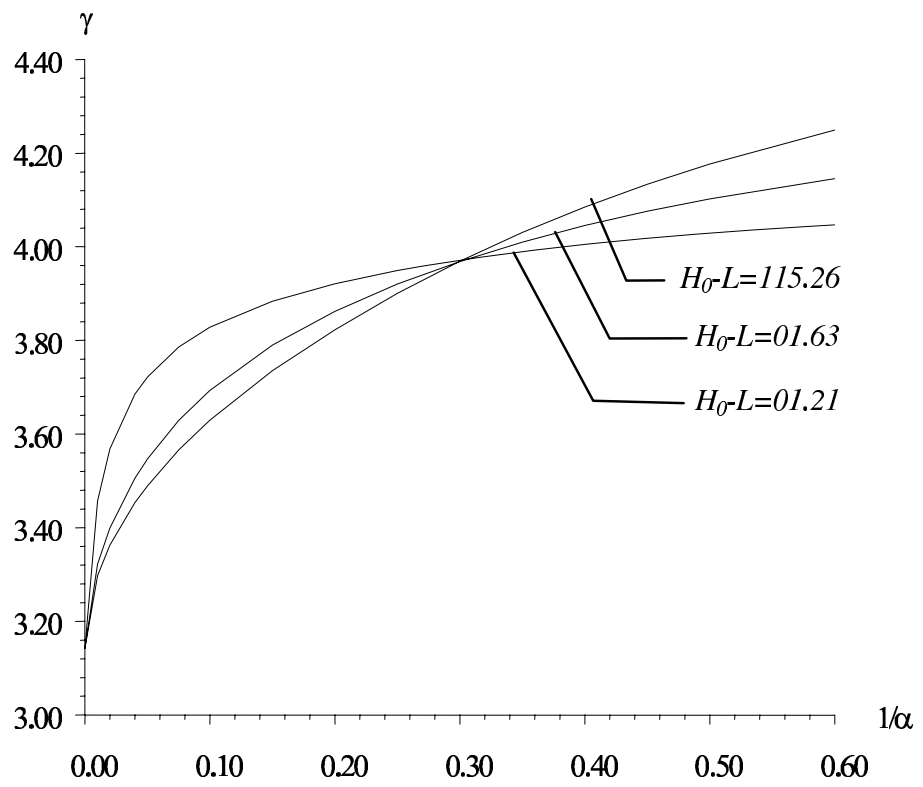


Fig. 3.8: L'angle de séparation γ vs $1/\alpha$.

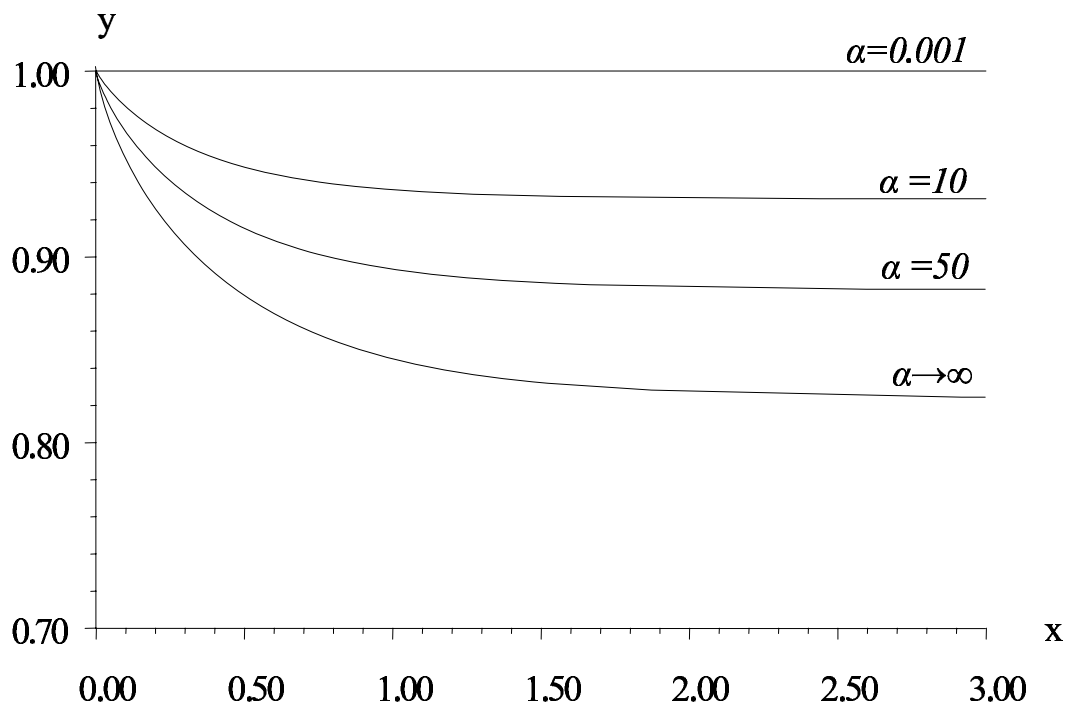


Fig. 3.9: Forme de la surface libre pour $H_0 - L = 1.21$ et pour différents nombres de Weber α .

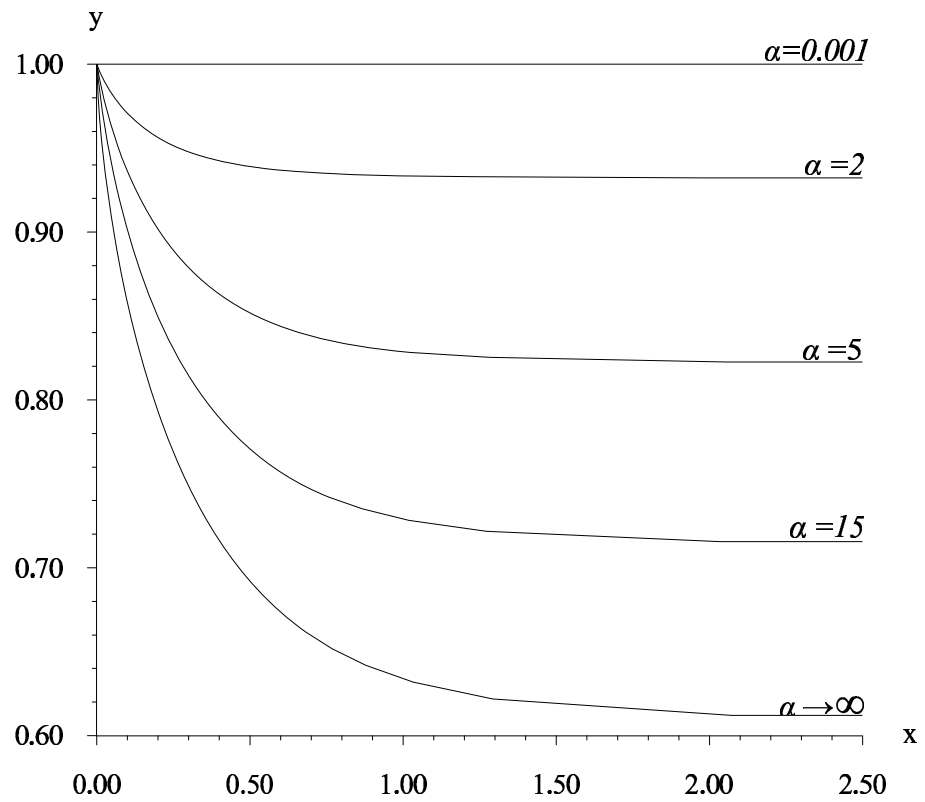


Fig. 3.10: Forme de la surface libre pour $H_0 - L = 10.61$ et pour différents nombres de Weber α .

CHAPITRE 4

CONCLUSION

Les problèmes des écoulements de type jet apparaissent dans de nombreuses situations d'intérêt pratique : Les problèmes liés à l'industrie tel que les chambres des combustions des moteurs, les pompes à jet, ou bien ceux en relation avec l'urbanisme comme l'architecture des barrages. Ces problèmes deviennent très difficiles à résoudre explicitement, surtout si on prend en considération les effets de la tension de surface, de gravité ou de viscosité, car ces derniers ont une grande influence sur la condition non linéaire donnée par l'équation de Bernoulli sur la surface libre.

Dans notre travail la supposition de l'effet de la tension de surface fait intervenir le paramètre de Weber.

Dans le chapitre II une numérisation d'un problème d'écoulement issu d'un orifice d'un réservoir avec des parois inclinées a été exposé. Les résultats nous ont montré qu'il existe une solution pour tout angle d'inclinaison β de la paroi du réservoir avec l'horizontal et pour différentes valeurs du nombre de Weber $\alpha > \alpha^*$ (α^* est une valeur critique). Une comparaison des résultats calculés avec ceux obtenus par Ackerberg et Liu nous permet de conclure que l'emploi de la méthode de troncation de la série que nous avons utilisée est très puissante relativement à l'emploi de la méthode des différences finies utilisées par ces auteurs. Ils ont trouvé la solution que pour $\alpha \geq \tilde{\alpha} = 6.801483$. Par contre nous avons pu trouver la solution pour chaque angle β et pour différents valeurs du nombre de Weber $\alpha \geq \alpha^*$ avec $\alpha^* < \tilde{\alpha}$ (α^* valeur critique).

Le troisième chapitre traite le cas d'un écoulement d'un fluide incompressible et non visqueux dans une conduite semi infinie de forme rectangulaire avec l'effet de la tension de surface. Le problème est aussi gouverné par trois paramètres : le nombre de Weber α ,

la longueur de la paroi verticale, l'angle au point de raccordement paroi surface libre γ , nous utilisons la même méthode que dans le chapitre 2 pour la résolution de ce problème. Nous avons trouvé la solution pour chaque valeur de longueur $H_0 - L$ et pour toutes les valeurs de nombre de Weber $\alpha \geq 0$. En négligeant les tensions de surface, on a retrouvé les solutions analytiques de Von Mises et Guerville, notamment en ce qui concerne la valeur du coefficient de contraction de l'écoulement.

A la lumière des résultats obtenus, plusieurs remarques sont à apporter.

- Nous avons vu que par la méthode utilisée on a amélioré les résultats de Ackerberg et Liu.

- La deuxième remarque concerne le type de singularité au voisinage du point de raccordement de la paroi rectiligne avec la surface libre, on a déterminé avec précision ce type de singularité.

- L'influence de la tension de surface apparaît visiblement par le fait que la surface libre s'aplatit lorsque $T \rightarrow \infty$.

L'approche utilisée est basée sur les transformations conformes qui réduisent le problème bidimensionnel à un problème unidimensionnel.

Malgré le succès que la méthode a montré dans notre problème, elle s'avère insuffisante lorsque $\alpha < \alpha^*$. Des calculs asymptotiques ont montré que les comportements de la solution du problème sont différents pour $\alpha > \alpha^*$ et $\alpha < \alpha^*$.

Notre projet de recherche actuel consiste à l'application d'autres techniques plus efficaces dans ce domaine, comme par exemple la méthode intégral-différentielle qui nous détecte les ondes de capillarité. ainsi que la méthode des éléments finis et autres.

Quelques travaux futurs sont en cours de réalisation, comme Le calcul de la forme de la surface libre d'un jet avec tension de surface par la methode intégro-différentielle.

L'étude d'autres problèmes des écoulements des fluides compressibles sous l'effet de tension de surface, nous parait intéressante. Le cas tridimensionnel, est également digne d'intérêt.

Annexe I

QUELQUES NOTIONS PRELIMINAIRES

1. Définitions :

- On appelle écoulement bidimensionnel un écoulement où le vecteur vitesse est parallèle à un plan fixe (O,x, y) c'est à dire les champs vectoriels des vitesses \vec{V} à deux composantes (u, v) .
- Un écoulement est dit irrotationnel si $rot\vec{V} = 0$
- Un écoulement est dit potentiel s'il existe une fonction ϕ tel que

$$\vec{V} = \overrightarrow{grad}\phi = \nabla\phi.$$

2. Equation de continuité (conservation de la masse) :

En faisant balance entre la masse qui entre (sort) et le changement de la masse à l'intérieur du volume, on obtient :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\rho\vec{V} = 0.$$

Cette équation est connue sous le nom " équation de continuité ".

Dans le cas des fluides incompressibles on a $\rho = cte$. L'équation de continuité se réduit alors à :

$$div\rho\vec{V} = 0.$$

Si l'écoulement est potentiel, on a :

$$\Delta\phi = 0.$$

3. Fonction des lignes de courant et fonction potentielle

La ligne de courant est une courbe tangente en chacun de ces points au vecteur vitesse en ce point. La définition d'une ligne de courant est donnée par l'équation :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}.$$

Où u et v sont les composantes du vecteur vitesse \vec{V} .

Si $\phi(x,y)$ est une fonction potentielle à deux variables (x,y) vérifiant l'équation de Laplace donc il existe une autre fonction potentielle $\psi(x,y)$ dite fonction potentielle conjuguée à ϕ et tel que :

$$\begin{cases} u = \phi_x = \psi_y \\ v = \phi_y = -\psi_x \end{cases}$$

Ces relations sont reconnues par les conditions de Cauchy-Riemann.

La différentielle exacte de ψ nous donne :

$$d\psi = -vdx + udy$$

alors si $\psi = cte$ on retrouve l'équation du ligne de courant.

On introduit une fonction holomorphe $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$ appelée le potentiel complexe de vitesse :

$$f = \phi + i\psi.$$

De plus

$$\begin{aligned}\frac{df}{dz} &= \phi_x + i\psi_x \\ &= u - iv\end{aligned}$$

est appelée vitesse complexe de l'écoulement qui est aussi analytique.

4. Les équations de mouvement :

4.1 Equation d'Euler :

La loi fondamentale de la dynamique appliquée à une particule nous donne :

"la variation de la quantité de mouvement = la résultante des forces extérieures",

c'est à dire :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}P} + \vec{F}_{\text{champ}}$$

4.2 Equation de Bernoulli

Sous les conditions suivantes :

- Fluide incompressible : $\text{div}\vec{v} = 0$.
- Fluide homogène : $\rho = \text{cte}$.

L'intégration de l'équation d'Euler le long d'une ligne de courant donne :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gy = \text{cte} \quad \text{sur toute ligne de courant.}$$

En général, la constante change avec la ligne de courant.

Annexe II

ALGORITHMES ET PROGRAMMES

1. Algorithme de Newton pour la résolution de systèmes non linéaires $f(x)=0$

Etant donné

Données initiales $A^{(0)}, \beta, \alpha, n, \varepsilon, K_{\max}$

1. Calculer : $A = (a_i)_{i=1,n}$

$$\left. \begin{aligned} E_{ij}^{(k)} &= \frac{\partial f_i(A)}{\partial a_j} \Big|_{A=A^{(k)}} \Big\} j = 1, \dots, n \\ f_i^{(k)} &= (2 \cos \sigma_I)^{2 - \frac{2\gamma}{\pi}} \exp(a_k \cos(2(k-1)\sigma_I)) - \frac{\pi}{2\alpha} \tan(\sigma_I) \times \\ &\quad (2 \cos \sigma_I)^{2 - \frac{2\gamma}{\pi}} \exp(a_k \cos(2(k-1)\sigma_I)) \left(3 - \frac{2\gamma}{\pi} + \right. \\ &\quad \left. 2a_k(k-1) \cos(2(k-1)\sigma_I) - 1 \right) \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, n$$

2. Résoudre le système linéaire

$$\sum_{k=1}^n E_{ij}^{(k)} \Delta A_i^{(k)} = f_i^{(k)} \Big\} i = 1, 2, \dots, n$$

3. Calculer

$$A_i^{(k+1)} = A_i^{(k)} + \Delta A_i^{(k)} \Big\} i = 1, 2, \dots, n$$

4. Si

$$\left| f_i(A^{(k+1)}) \right| < \varepsilon \Big\} i = 1, 2, \dots, n$$

est vérifié, arrêter.

2. Algorithme de Jordan avec pivotation totale implicite

choix du pivot

$$p_k = a_{l_k c_k} \text{ où } a_{l_k c_k} = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad i \neq l_1, l_2, \dots, l_{k-1}$$

$$j = 1, 2, \dots, n \quad j \neq c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$$

Normalisation

$$a_{l_k j} = \frac{a_{l_k j}}{p_k} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Réduction

$$w = a_{i c_k}$$

$$a_{ij} = a_{ij} - w \cdot a_{l_k j} \quad j = 1, \dots, n+1$$

Remise en ordre

$$x_{c_k} = a_{l_k n+1}$$

} $k = 1, \dots, n$

} $i = 1, \dots, n \text{ et } i \neq l_k$

Le programme suivant écrit en fortran 77, nous a permis de résoudre le système non linéaire du chapitre II.

3. Programme de Newton

```
EXTERNAL sum1, sum2, sum3, sum4
```

```
PARAMETER (n=51, nmaxb=200, h2=31415.D-4 / (2.*n))
```

```
PARAMETER (Epsilon=1.D-5, Pivotmin=1.D-3)
```

```
DOUBLE PRECISION A(n-1), sum1, sum2, sum3, sum4, h, F, alpha, t(n), h1(n-1)
```

```
1, deltaA(n, 1), y(n+1), sa(n), EF(n, n+1), f1(n), f2(n), x(n+1),
```

```
1A1(n-1), lamda, lamda1
```

```
OPEN(7, file='res2.dat', status='old')
```

```
READ(7, *) lamda, (A(i), i=1, 50)
```

```

CLOSE(7)

c READ(*,*) (A(i), i=1, n-1), lamda
DATA pi, alpha/31415.D-4, 1000.d0/
x(n+1)=0.
y(n+1)=1.
WRITE(*,*) 'APRES QUELQUES INSTANTS LES RESULTATS SERONT AFFICHES'
DO 400 nbiteration=1, nmaxb
WRITE(*, '(/1X, 80(1h*)/1x, A, I3)') 'iteration : ', nbiteration
c -----
c *****LA FORMULE QUI EXPRIME LES ANGLE SIGMA*****
c -----
DO 1 i=1, n
t(i)=pi/(2*n)*(float(i)-5.D-1)
1 CONTINUE
c -----
c *****EVALUATION DE LA FONCTION F*****
c -----
DO 51 i=1, n
51 EF(i, n+1)=F(A, t(i), n-1, alpha, lamda)
c -----
c *****EVALUATION DE LA JACOBienne E*****
c -----

```

```
DO 40 i=1,n
DO 41 j=1,n-1
DO 42 k=1,n-1
h1(k)=0.001
42 CONTINUE
DO 43 k=1,n-1
IF(k.NE.j) THEN
h1(k)=0.
END IF
43 CONTINUE
DO 44 k=1,n-1
44 A1(k)=A(k)+h1(k)
lamda1=lamda+0.001
EF(i,j)=(F(A1,t(i),n-1,alpha,lamda)-F(A,t(i),n-1,alpha,lamda))/
10.001
41 CONTINUE
EF(i,n)=(F(A,t(i),n-1,alpha,lamda1)-F(A,t(i),n-1,alpha,lamda))/
10.001
40 CONTINUE
C -----
C *****CALCUL DE LA VITESSE*****
C -----
```

```
DO 3 i=1,n
sa(i)=(DCOS(t(i)))**(2*(1-lamda/3.1415))*DEXP(sum2(A,t(i),n-1))
3 CONTINUE
CALLJORDAN(EF,n,deltaA,pivotmin)
c -----
c REACTUALISATION DU VECTEUR X
c -----
DO 8 i=1,n-1
A(i)=A(i)-deltaA(i,1)
8 CONTINUE
lamda=lamda-deltaA(n,1)
c -----
c CALCULE DE LA NORME DE F
c -----
h=0.
DO 9 i=1,n
IF(DABS(F(A,t(i),n-1,alpha,lamda)).gt.DABS(h))THEN
h=F(A,t(i),n-1,alpha,lamda)
END IF
9 CONTINUE
WRITE(*,*)'h=',h
IF(DABS(h).LT.Epsilon) GO TO 100
```



```
400 CONTINUE

100 CONTINUE

OPEN(7,file='res2.dat',status='old')

WRITE7,*) lamda, (A(i),i=1,n-1)

CLOSE(7)

DO10 i=1,n

f1(i)=-2./(pi*DTAN(t(i)))*(DCOS(t(i)))**(2*(-1+lamda/
13.1415))*DEXP(-sum2(A,t(i),n-1))*DCOS(3*t(i)-2*t(i)*
1lamda/3.1415+sum1(A,t(i),n-1))

f2(i)=2./(pi*DTAN(t(i)))*(DCOS(t(i)))**(2*(-1+lamda/
13.1415))*DEXP(-sum2(A,t(i),n-1))*DSIN(3*t(i)-2*t(i)*
1lamda/3.1415+sum1(A,t(i),n-1))

10 CONTINUE

sk1=0.

DO 111 j=1,n

111 sk1=sk1+h2*f2(j)

c=1./(1.+sk1)

DO11 j=0,n-1

x(n-j)=x(n-j+1)-h2*c*f1(n-j)

y(n-j)=y(n-j+1)-h2*c*f2(n-j)

11 CONTINUE

c=1./(1.+sk1)
```

```

OPEN(6,file='res.dat',status='old')

WRITE(6,*)c

WRITE(6,*)lamda

WRITE(6,*)'alpha=',alpha

WRITE(6,105)'les resultas'

105 FORMAT(1x,80(1h*)/,A,I3)

WRITE(6,107)'i','T','A','X','Y','speed'

DO 12 i=1,n

WRITE(6,106)i,t(i),A(i),x(i),y(i),sa(i)

12 CONTINUE

106 FORMAT(i5,5E12.4)

107 FORMAT(A,T11,A,T23,A,T35,A,T48,A,T59,A,T65,A/)

CLOSE(6)

STOP'FIN DU PROGRAMME'

END

c -----

c *RESOLUTION DE LA N*N+1 SYSTEME LINEAIRE PAR LA METHODE DE
JORDAN AVEC PIVOTATION TOTAL IMPLICIT*

c -----

SUBROUTINE JORDAN(EF,n,deltaA,pivotmin)

PARAMETER(Nmax=81)

INTEGER c(Nmax),l(Nmax),s

```

```
DOUBLE PRECISION EF(n,n+1), deltaa(n,1)
DOUBLE PRECISION p(Nmax), w
DO 8 k=1,n
p(k)=0.
DO 3 i=1,n
DO 2 j=1,n
IF(k.GT.1) THEN
DO 1 s=1,k-1
IF(i.EQ.l(s)) GO TO 3
IF(j.EQ.c(s)) GO TO 2
1 CONTINUE
ENDIF
IF(DABS(EF(i,j)).GT.DABS(p(k))) then
p(k)=EF(i,j)
l(k)=i
c(k)=j
ENDIF
2 CONTINUE
3 CONTINUE
IF(DABS(p(k)).EQ.pivotmin) THEN
WRITE(*,*) 'pivot petitmatrice DSINGuli679re'
RETURN
```

```

ENDIF

DO 4 j=1,n+1
EF(l(k),j)=EF(l(k),j)/p(k)
4 CONTINUE

DO 6 i=1,n
IF(i.NE.l(k)) THEN
w=EF(i,c(k))
DO 7 j=1,n+1
EF(i,j)=EF(i,j)-w*EF(l(k),j)
7 CONTINUE
ENDIF

6 CONTINUE

8 CONTINUE

DO 9 k=1,n
DO 9 j=n+1,n+1
deltaA(c(k),j-n)=EF(l(k),j)
9 CONTINUE

RETURN

END

c -----
DOUBLE PRECISION function sum1(c,s,m)
DOUBLE PRECISION c(81)

```

```
DOUBLE PRECISION s

sum1=0.

DO 1 k=1,m

sum1=sum1+c(k)*DSIN(2.*(k-1)*s)

1 CONTINUE

RETURN

END

c -----

DOUBLE PRECISION function sum2(c,s,m)

DOUBLE PRECISION c(81)

DOUBLE PRECISION s

sum2=0.

DO 1 k=1,m

1 sum2=sum2+c(k)*DCOS(2.*(k-1)*s)

RETURN

END

c -----

DOUBLE PRECISION function sum3(c,s,m)

DOUBLE PRECISION c(81)

DOUBLE PRECISION s

sum3=0.

DO 1 k=1,m
```

```
1 sum3=sum3+2.*(k-1)*c(k)*DSIN(2.*(k-1)*s)
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
c -----
```

```
DOUBLE PRECISION function sum4(c,s,m)
```

```
DOUBLE PRECISION c(81)
```

```
DOUBLE PRECISION s
```

```
sum4=0.
```

```
DO 1 k=1,m
```

```
1 sum4=sum4+2.*(k-1)*c(k)*DCOS(2.*(k-1)*s)
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
c -----
```

```
DOUBLE PRECISION function F(c,s,m,alpha,r)
```

```
DOUBLE PRECISION c(81)
```

```
DOUBLE PRECISION s,alpha,sum2,sum4,r
```

```
F=-1.+(2*DCOS(s))**(4*(1-r/3.1415))*DEXP(2.*(sum2(c,s,m)))
```

```
1-3.1415D0/alpha*DTAN(s)*(2*DCOS(s))**(2*(1-r/3.1415))*
```

```
1DEXP(sum2(c,s,m))*DABS((3-2*r/3.1415+sum4(c,s,m)))
```

```
RETURN
```

```
END
```

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ACKERBERG R. C. AND LIU TA-JO, The effects of capillarity on the contraction coefficient of a jet emanating from a slot, *Phys. Fluids* **30(2)** (Februray 1987), 289–296.
- [2] ASAVANAT J and VANDEN-BROECK JEAN-MARC , Nonlinear free-surface flow emerging from vessels and flows under a sluice gate, *J. Austral. Mat. Soc* **B 38** (1996), 63–86.
- [3] ASAVANAT J and VANDEN-BROECK JEAN-MARC , Free-surface supercritical splashless lows past a two-dimensional symmetrical rectilinear body, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **117** (1998), 811–822.
- [4] BATCHELOR G. K, An introduction to fluid dynamics, *Cambridge* (1967).
- [5] BENJAMIN T. B, On the flow in channels when rigid obstacles are placed in the stream, *J. Fluid Mech* **1** (1956), 227–248.
- [6] BENJAMIN T. B, Gravity currents and related phenomena, *J. Fluid Mech* **31** (1968), 209–248.
- [7] BINNI A. M, The flow of the water under a sluice gate, *Quart. J. Mech. and Applied Math.* **5** (1952), 395–414.
- [8] BIRKHOFF G and ZARANTONELLO E. H, Jet, Wakes and Cavities, *academie, New York* (1957).
- [9] BLOOR M. I. G, Large amplitude surface waves, *J. Fluid Mech* **84** (1978), 167–179.

-
- [10] BOUDERAH B and MEKIAS H, A cybernetic approach to the problem of cusp free-surface flow caused by a line sink on a sloping bottom, *Kybernetes* **31(2)** (2002), 305 - 316.
- [11] BUDDEN P and NORBURY J, Uniqueness of free-boundary flow under gravity, *Arch. Rat. Math. Math* **78** (1982), 361–380.
- [12] DAGAN G and TULIN M. P., Two-dimensional free-surface gravity flow past blunt bodies, *J. Fluid. Mech* **51** (1968), 153–176.
- [13] DIAS F and VANDEN-BROECK JEAN-MARC, Flows emerging from nozzle and falling under gravity, *J. Fluid. Mech* **213** (1990), 465–477.
- [14] DIAS F and VANDEN-BROECK JEAN-MARC, Open channel flows with submerged obstructions, *J. Fluid. Mech* **206** (1989), 155–170.
- [15] ELCRAT A. R and TREFTHEN L. N, Classical free-streamline flows over a polygonal obstacle, *J. Comp and Applied Math.* **14** (1986), 256–265.
- [16] GASMI A and MEKIAS H, The effect of surface tension on the contraction coefficient of a jet, *J. Phys. A : Math. Gen* **36** (2003), 851–862.
- [17] GASMI A and MEKIAS H, A jet from container and flow past a vertical flat plate, *Appl. Math. Sci* **1** (2007), 2687–2698.
- [18] GUREVICH M. I, Theory of Jets in Ideal Fluids, *Academic Press, New York and London* (1965).
- [19] HUREAU J and WEBER R, Impinging free jets of ideal fluid, *J. Fluid. Mech* **372** (1998), 357–374.

-
- [20] LEE J and VANDEN-BROECK JEAN-MARC, Two-dimensional jets falling from funnels and nozzles, *Phys. Fluids* **A(5)** (1993), 2454–2460.
- [21] MEKIAS H, Two dimensionnal free surface flow due to a point singularity, *Ph. D. Thesis, Wisconsin-Madison U* (August 1991).
- [22] NAGHDI P. M and VONGSARNPIGOON L, Steady flow past a sluice gate, *Phys. Fluids* **29(12)** (December 1986), 3962–3970.
- [23] PENG W and PARKER D. F, An idealfluid jet impinpingon an unneven wall, *J. Fluid Mech.* **333** (December 1997), 231–255.
- [24] TUCK E O, Efflux from a slit in vertical wall, *J. Fluid Mech* **176** (1987), 253–264.
- [25] VANDEN-BROECK JEAN-MARC, Flow under a gate, *Phys. Fluids* **29(10)** (October 1986), 3148–3151.
- [26] VANDEN-BROECK JEAN-MARC, Free-surface flow over an obstruction in channel, *J. Phys. Fluids* **31(8)** (1987), 2315–2317.
- [27] VANDEN-BROECK JEAN-MARC, Bubbles rising in a tube and jets falling from a nozzle, *Phys. Fluids* **27(5)** (May 1984), 1090–1093.
- [28] VANDEN-BROECK JEAN-MARC, Numerical calculations of the free-surface flow under a sluice gate, *J. Fluid Mech* **330** (1997), 339–347.
- [29] VANDEN-BROECK JEAN-MARC, Free streamline model for a rising bubble, *Phys. Fluids* **29(9)** (September 1986), 2798–2801.

-
- [30] VANDEN-BROECK JEAN-MARC, The influence of surface tension on cavitating flow past a curved obstacle, *J. Fluid Mech* **133** (1983), 255–264.
- [31] VANDEN-BROECK JEAN-MARC and KELLER J. B, Weir flows, *J. Fluid Mech* **176** (1987), 283–293.
- [32] VANDEN-BROECK JEAN-MARC and TUCK E. O, Flow near the intersection of a free surface with a vertical wall, *SIAM J. Appl. Math* **54** (1994), 1–13.

ملخص: في هذا البحث، نعتبر مسألتين لتدفق ذو سطح حر لسائل غير قابل للانضغاط وغير لزج في مستو مع تأثير قوى التوتر السطحي. لإيجاد الحل وشكل السطح الحر للتدفق عدديا نستعمل تقنية السلاسل والتي تعتمد على التحويلات المتطابقة. المسألة الأولى تتعلق بتدفق ينفذ عبر ثقب لخزان ذو جدران مائلة. النتائج التي تم التوصل إليها تؤكد وتحسن نتائج أكربراج وليو (Ackerberg et Lui). أما المسألة الثانية التي تم معالجتها في هذا البحث هي مسألة تدفق داخل قناة ذات نهاية ضيقة. الحلول المتحصل عليها تعتبر تمديد لحلول المسألة الأولى في حالة جدران عمودية. عند انعدام قوى التوتر السطحي نجد توافق بين نتائج المسألة و نتائج فون ميس و قريفش (Von Mises et Gurevich).

الكلمات المفاتيح: سطح حر، تدفق كموني، توتر سطحي، عدد ويبر.

Abstract: *In this thesis, we consider two problems of a jet flow of an incompressible and inviscid fluid. The effect of the surface tension is taken into account. The shape of the free surface and the flow of the fluid are determined numerically via a series truncation.*

First we treat the problem of flow emerging from an opening of a container with inclined walls. The results obtained confirm and extend the results of Ackerberg and Liu.

The second problem considered in this thesis is the problem of a jet from a container. The solutions obtained here confirm and extend the first problem for vertical walls. If the surface tension is neglected the calculated results confirm those of Von Mises and Gurevich.

Key words: *Free surface, Potential flow, Jet, Surface tension, Weber number.*

Résumé: *Dans cette thèse, nous considérons deux problèmes d'écoulement de type jet d'un fluide incompressible et non visqueux. L'effet de la tension de surface est pris en considération. La forme de la surface libre et l'écoulement du fluide sont déterminés numériquement par troncation de série.*

Nous traitons tout d'abord le problème d'un écoulement issu d'un orifice d'un réservoir avec des parois inclinées. Les résultats obtenus confirment et améliorent les résultats de Ackerberg et Liu.

Le deuxième problème est le problème d'un écoulement en sortie de buse. Les solutions obtenues valident et étendent ceux du premier problème pour des parois verticales. Quand la tension de surface est négligée les résultats sont conformes aux résultats de Von Mises et Gurevich.

Mots clés: *Surface libre, écoulement potentiel, jet, tension de surface, nombre de Weber.*
