

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF

THESE

Présentée à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour L'Obtention du Diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématiques appliquées

**Par
Lamia CHOUCANE**

THEME

**ETUDE VARIATIONNELLE DE QUELQUES PROBLEMES EN
ELASTO-VISCO-PLASTICITE**

Soutenu le : 02 / 07 /2008

Devant le jury :

Président :	Dr. S. Djabi	Prof. Université Ferhat Abbas-Sétif
Rapporteurs :	Dr. L. Selmani	M.C. Université Ferhat Abbas-Sétif
Examineurs :	Dr. A. L. Marhoune	Prof. Université Mentouri-Constantine
	Dr. S. Djeddar	M.C. Université Mentouri-Constantine
	Dr. S. M. SAID	Prof. Université Kasdi Merbah-Ouargla
	Dr. T. Serrar	M.C. Université Ferhat Abbas-Sétif

Remerciements

J'adresse mes remerciements les plus sincères à Mme L. Selmani qui a bien voulu diriger le travail que je présente dans cette thèse, d'avoir la patience nécessaire pour m'apprendre beaucoup de choses qui permettront d'aller de l'avant dans la recherche en Mathématiques et plus particulièrement dans le domaine de la mécanique du contact, de m'avoir accordé beaucoup de son temps précieux pour que je puisse arriver à bon port, d'être toujours là à chaque fois que j'avais besoin de son aide, d'être à mon écoute quand c'était nécessaire.

J'exprime mes vifs remerciements à Monsieur le Professeur S. Djabi d'avoir accepté de présider le jury.

Je remercie également Monsieur le Professeur A. L. Marhoune, Messieurs les Docteurs Maîtres de Conférences S. Djezzar, S. M. Said et T. Serrar qui, avec simplicité, ont bien voulu examiner mon travail.

Je tiens également à remercier Mr le Professeur M. Sofonea de m'avoir accueillie dans son laboratoire, de m'avoir donné l'occasion de compléter mes connaissances et d'apprécier d'avantage cet axe de recherche. Ainsi, j'ai eu le plaisir et l'honneur de traiter quelques problèmes sous ses instructions.

Je n'oublie pas de remercier profondément l'équipe du laboratoire de Théorie des Systèmes (université de Perpignan-France) qui m'ont mise à l'aise lors de mon stage, en particulier l'aide précieuse de Mr. Yves Maurissen.

TABLE DES MATIERES

Notations.....	iii
Introduction.....	1
1. Préambule	
1.1 Introduction à la mécanique du contact.....	10
1.1.1. Cadres physiques-modèles mathématiques	10
1.1.2. Lois de comportement.....	18
1.1.3. Conditions aux limites.....	24
1.2. Espaces fonctionnels.....	31
1.2.1. Cadre fonctionnel « scalaire »	31
1.2.2. Cadre fonctionnel « vectoriel »	34
1.2.3. Espace des fonctions à valeurs vectorielles.....	38
1.3. Eléments d'analyse non linéaires dans les espaces de Hilbert.....	40
1.3.1. Inéquations variationnelles elliptiques.....	40
1.3.2. Equations et inéquations variationnelles d'évolution.....	42
1.3.3. Lemmes de type Gronwall.....	44
2. Problème viscoélastique avec compliance normale, adhésion et endommagement.	
2.1. Formulation du problème.....	48
2.2. Résultat d'existence et d'unicité.....	56
<i>3.Problèmes viscoplastiques avec adhesion et endommagement</i>	
3.1. Problème avec compliance normale.....	70
3.1.1. Formulation du problème	70
3.1.2. Résultat d'existence et d'unicité	77
3.2. Problème avec la condition de contact de Signorini.....	89
3.2.1. Formulation du problème.....	89
3.2.2. Résultat d'existence et d'unicité	97

4. Problème antiplan de contact sans frottement	
4.1. Formulation du problème	116
4.2. Résultat d'existence et d'unicité	125
Références.....	133

Notations

Si Ω est un domaine de $(d = 1; 2; 3)$, on note par

$\partial\Omega$	la frontière de Ω - supposée souvent régulière.
$\partial\Omega_i (i = \overline{1; 3})$	une partie de la frontière $\partial\Omega$.
$m_{\partial\Omega_i}$	la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de $\partial\Omega_i$.
ν	la normale unitaire sortante à $\partial\Omega$.
$\nu_0; \nu_i$	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v définies sur $\partial\Omega$.
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$.
$H = L^2(\Omega)^d$	
$H = L^2(\Omega)^{d \times d}$	
$H_1 = H^1(\Omega)^d$	
$H_1 = f^{3/2} H = \text{Div } f^{3/2} Hg$	
$H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Ω .
$H_i = H^{\frac{1}{2}}(\Omega)^N$	
H_i^0	l'espace dual de H_i .
$\gamma : H_1(\Omega) \rightarrow H_i$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si X est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes

$$X^d = \bigotimes_{i=1}^d X = (x_i)_{i=1}^d : x_i \in X; i = \overline{1; d} :$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ le produit scalaire de X .

$\|\cdot\|_X$ la norme de X .

X^0 l'espace dual de X :

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^0 \times X}$ le produit de dualité entre X^0 et X :

$\tilde{A}_K$ la fonction indicatrice de $K \subset X$:

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \geq 2$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$C(0, T; X)$ l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans X :

$C^1(0, T; X)$ l'espace des fonctions continûment différentiables sur $[0, T]$ dans X :

$L^p(0, T; X)$ l'espace des fonctions mesurables de $[0, T]$ dans X telles que
$$\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt < +\infty$$
 avec les modifications usuelles si $p = +\infty$:

$W^{k,p}(0, T; X)$ l'espace de Sobolev de paramètres k et p :

Pour une fonction f , on note par

$\partial_i f$ la dérivée partielle de f par rapport à la $i^{\text{ème}}$ composante x_i :

∇f le gradient de f :

$\operatorname{Div} f$ la divergence de f (page 36).

$\operatorname{div} f$ la divergence de f (page 117).

∂f le sous-différentiel (classique) de f :

Autres notations

S_d l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}_s^{d \times d}$.

I_d le tenseur identité du second ordre sur $\mathbb{R}^d$.

C une constante générique strictement positive.

$p.p.$ presque partout.

Introduction

Depuis la nuit des temps, l'homme s'est intéressé aux problèmes de contact entre deux corps. Ces problèmes de contact, avec ou sans frottement, entre deux corps déformables ou entre un corps déformable et une fondation rigide, abondent en industrie et dans la vie de tous les jours. Le simple contact du sabot de frein avec la roue, d'une roue de voiture avec la route, du piston avec la chemise, l'enfoncement progressif dans un pouf ou un fauteuil lors d'une posture assise, les multiples frottements entre plaques tectoniques ou encore l'écoulement de la lave lors d'une éruption volcanique, ne sont que quelques exemples qui font partie d'une liste non exhaustive de problèmes de contact. Vu l'importance du phénomène, des efforts considérables ont été consacrés à la modélisation, l'analyse ainsi que l'approximation numérique des processus physiques provenant des contacts entre des corps déformables. Par conséquent, une théorie mathématique générale de la mécanique du contact (Mathematical Theory of Contact Mechanics: MTCM) a fait récemment un progrès impressionnant, voir par exemple [23, 34, 35, 47] et les références qui y sont incluses.

L'objectif de cette thèse est de proposer une certaine contribution à l'étude de quelques problèmes aux limites en mécanique du contact. La modélisation des problèmes de contact d'un corps déformable avec une base dépend essentiellement des propriétés mécaniques du matériau considéré, ainsi que des conditions aux limites de contact. Dans des processus quasistatiques ou dynamiques, nous considérons ici des lois de comportement non linéaires pour des matériaux viscoélastiques et viscoplastiques prenant en considération l'influence de l'endommagement interne du matériau.

Nous considérons également des lois de comportement pour des matériaux ayant des propriétés mécaniques ainsi que des propriétés électriques (matériaux piézoélectriques). L'adhésion entre les surfaces de contact, lorsqu'une colle est ajoutée pour éviter aux surfaces un mouvement relatif, est prise en considération dans tous les problèmes étudiés dans ce mémoire. Nous envisageons aussi l'étude de la déformation antiplane. Ce type de déformations est rencontré lorsqu'on étudie le contact entre un corps cylindrique et une fondation rigide. Les conditions aux limites sont des conditions de compliance normale, de Signorini et le contact est supposé sans frottement. Chacun des problèmes est étudié selon le formalisme général suivant. Nous commençons par décrire le problème mécanique de départ, et après avoir précisé les hypothèses sur les données, nous présentons une analyse variationnelle du problème mécanique.

Le sujet de l'endommagement est extrêmement important dans les conceptions en ingénierie puisqu'il influence directement sur la vie usuelle de la structure ou la composante conçue. Il existe une littérature très riche sur ce sujet. Les modèles prenant en considération l'influence de l'endommagement interne du matériau sur le processus de contact ont été étudiés mathématiquement. L'analyse mathématique des problèmes unidimensionnels peut être trouvée dans [20]. Les premiers modèles de l'endommagement mécanique provenant des considérations thermodynamiques sont apparus dans [12, 13]. Des modèles généraux récents dans [18, 19] sont issus du principe de la puissance virtuelle. Dans tous ces travaux, l'endommagement du matériau est décrit par une fonction d'endommagement ω , ayant des valeurs entre zéro et un. Lorsque $\omega = 1$, il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, lorsque $\omega = 0$, le matériau

est complètement endommagé et lorsque $0 < \alpha < 1$, il y a un endommagement partiel et le système a une capacité réduite. Certains problèmes quasistatiques de contact avec endommagement ont été étudiés dans [22, 23, 38].

Les matériaux piézoélectriques sont extrêmement utilisés comme interrupteurs et actuateurs dans beaucoup de systèmes d'ingénierie, en radioélectronique, l'électroacoustique et la mesure des équipements. Ils sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique suite à une déformation mécanique et, inversement, une déformation mécanique est générée lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Les matériaux piézoélectriques, pour lesquelles les propriétés mécaniques sont élastiques, sont appelés "matériaux électroélastiques" et ceux pour lesquelles les propriétés mécaniques sont viscoélastiques sont appelés "matériaux électro-viscoélastiques". Des modèles généraux pour des matériaux élastiques ayant un effet piézoélectrique peuvent être trouvés dans [3, 26, 31, 36, 59] et plus récemment dans [58]. Des problèmes de contact statiques avec frottement pour des matériaux électroélastiques ont été étudiés dans [4, 29, 30, 52], sous l'hypothèse que la fondation est isolante. Un problème de contact avec "Slip-dependant" pour les matériaux électroélastiques a été étudié dans [52] et des problèmes pour les matériaux électro-viscoélastiques ont été considérés dans [49, 53]. Actuellement, un intérêt considérable est porté aux problèmes de contact avec frottement impliquant les matériaux piézoélectriques (voir par exemple [4, 29] et les références qui y sont incluses). Cependant, il n'existe virtuellement pas de résultats mathématiques à propos des problèmes de contact pour de tels matériaux et on a besoin de développer la théorie mathématique du contact mécanique (MTCT) pour

inclure le couplage entre les propriétés mécaniques et électriques.

Les processus d'adhésion sont importants en industrie lorsque des parties, souvent non métalliques, sont collées ensemble. Pour cette raison, le contact adhésif entre les corps, lorsqu'une colle est ajoutée pour empêcher les surfaces d'un mouvement relatif, a récemment reçu, de plus en plus, une grande attention dans la littérature. Des modèles généraux avec adhésion peuvent être trouvés dans [15, 17, 37, 40]. Des résultats sur l'analyse mathématiques de plusieurs problèmes de contact avec adhésion peuvent être trouvés dans [12, 43, 45, 46, 47, 54]. Récemment, les matériaux composites ont atteint le sommet, puisqu'ils sont très solides et très légers, et par conséquent, une importance considérable en aviation et en industrie automobile. Cependant, les matériaux composites peuvent subir, sous des contraintes, une délamination dans laquelle plusieurs couches se décolent et se déplacent relativement les unes par rapport aux autres. Pour modéliser le processus lorsque le collage n'est pas permanent et un décolage peut avoir lieu, nous avons besoin de décrire l'adhésion et le contact ensemble. Un nombre de publications récentes traite de tels modèles, voir par exemple [9, 10, 11, 15, 16, 37, 39] et les références comprises. L'idée est d'introduire une variable de surface interne, le champ d'adhésion $\gamma \in [0; 1]$, qui décrit la densité fractionnelle des adhésifs actifs sur la surface de contact. En un point de la surface de contact adhésive, lorsque $\gamma = 1$, l'adhésion est complète et tous les adhésifs sont actifs ; lorsque $\gamma = 0$ tous les adhésifs sont inactifs, sévères et il n'y a pas d'adhésion. Lorsque $0 < \gamma < 1$ l'adhésion est partielle et seulement une fraction γ des adhésifs est active.

La déformation antiplane est l'une des déformations les plus simples que les solides

peuvent subir : dans une déformation antiplane d'un corps cylindrique, le déplacement est parallèle aux génératrices du cylindre et il est indépendant de la coordonnée axiale. Pour cette raison, les problèmes antiplans jouent un rôle très important comme problèmes de pilotage, prévoyant aux différents aspects de solutions dans la mécanique des solides d'être examinés dans des positions simples. Une attention considérable a été destinée à l'analyse de tels types de problèmes, voir par exemple [5, 24, 25, 51, 56, 60]. En particulier, les références [5, 51, 60] traitent des problèmes antiplans pour des matériaux piézoélectriques.

Cette thèse comporte quatre chapitres et est structurée de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, le but est d'introduire les éléments nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités. Nous commençons par décrire les deux cadres physiques dans lesquels nous travaillons ainsi que les modèles mathématiques correspondants, tout en donnant les différentes lois de comportement et conditions aux limites qui apparaissent dans cette thèse. Ensuite, nous aborderons les cadres fonctionnels permettant l'analyse mathématique des problèmes ainsi considérés. Nous terminerons ce chapitre en passant en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle concernant les inéquations variationnelles, équations et inéquations variationnelles d'évolution et enfin les lemmes de Gronwall.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons un problème de contact sans frottement, avec adhésion et endommagement pour des matériaux viscoélastiques. Le contact est modélisé par une compliance normale. Nous établissons une formulation variationnelle du problème et démontrons l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel résultant. Les démonstrations sont basées sur les équations

variationnelles dépendant du temps, un résultat classique d'existence et d'unicité pour les inéquations paraboliques, les équations différentielles et les arguments de point fixe.

Dans le troisième chapitre, composée de deux paragraphes, nous traitons deux problèmes de contact sans frottement pour des matériaux viscoplastiques. Le contact est de nouveau supposé avec adhésion et endommagement. Dans le premier paragraphe de ce troisième chapitre, nous supposons que la fondation est déformable et, par conséquent, nous modélisons le contact par une compliance normale. Nous présentons un nouveau résultat concernant l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème considéré. Les démonstrations s'inspirent de celles utilisées dans le travail qui a fait l'objet du deuxième chapitre et sont basées sur les mêmes arguments. Dans le deuxième paragraphe, la fondation est supposée rigide et donc le contact est modélisé par la condition de Signorini. Le problème est formulé en un système constitué d'une inéquation variationnelle pour les déplacements, d'une inclusion de type parabolique pour le champ de l'endommagement et d'une équation intégral-différentielle pour le champ d'adhésion. Nous dérivons la formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution faible. La démonstration est basée sur des résultats classiques sur les inéquations variationnelles elliptiques et les inéquations variationnelles d'évolution, une version du théorème de Cauchy-Lipschitz et des arguments de point fixe.

Dans le quatrième chapitre, nous considérons un modèle mathématique décrivant la déformation antiplane d'un cylindre qui entre en contact sans frottement avec une base rigide. Le cylindre est supposé piézoélectrique et l'adhésion entre les surfaces

de contact est prise en considération. Nous dérivons la formulation variationnelle du problème qui se formule comme un système d'une équation variationnelle d'évolution pour le champ de déplacement, d'une équation variationnelle dépendant du temps pour le champ électrique et d'une équation intégrale-différentielle pour le champ d'adhésion. Ensuite, nous présentons un nouveau résultat d'existence et d'unicité d'une solution du problème variationnel. La démonstration est basée sur un résultat classique des équations variationnelles d'évolution, une version du théorème de Cauchy-Lipschitz et des arguments de point fixe dans les espaces de Banach.

Chapitre 1

Préambules

Afin de faciliter la lecture de cet ouvrage, il nous a paru utile de présenter dans ce premier chapitre les cadres physiques et fonctionnels dans lesquels nous travaillerons. Nous commençons par décrire les cadres physiques et les modèles mathématiques "généraux" utilisés, ensuite nous précisons les lois de comportement, les conditions aux limites et les conditions de contact sans frottement.

Nous complétons ce bref rappel sur la mécanique des milieux continus par l'introduction d'espaces fonctionnels de type Sobolev associés aux opérateurs divergence et déformations utilisés en mécanique. Nous rappelons leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. Nous rappelons davantage les propriétés des fonctions à valeurs vectorielles $L^p(0; T; X)$ et $W^{k,p}(0; T; X)$, où $T > 0$, $k = 1; 2; \dots$, $1 \leq p \leq \infty$ et X est un espace de Banach réel.

Ensuite, nous citons quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert, des résultats sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz, les inéquations variationnelles elliptiques et les équations et les in-

équations variationnelles d'évolution.

1.1 Introduction à la mécanique du contact

L'objectif des problèmes de contact, du point de vue mécanique, est d'étudier le nouvel état d'un corps matériel déformable considéré, résultant de l'application de forces volumiques dans le domaine qu'occupe ce corps et de forces de traction sur une partie de la frontière de ce domaine dans un intervalle de temps donné.

Ce paragraphe introduit les cadres physiques et par la suite mathématiques utilisés dans cette thèse. Nous décrivons également les lois de comportement viscoélastiques et viscoplastiques ainsi que les conditions aux limites de contact sans frottement.

1.1.1 Cadres physiques-modèles mathématiques

Dans ce paragraphe nous allons introduire les deux cadres physiques des problèmes mécaniques intervenant dans cette thèse.

Cadre no. 1. Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^d$, $d = 1; 2$ ou 3 , de frontière régulière $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^3 \Gamma_j$ partitionnée en trois parties mesurables et disjointes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 telles que $\text{mes} \Gamma_1 > 0$. Notons par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur la partie Γ_1 dans une structure fixe. Sur la partie Γ_2 nous appliquons des forces surfaciques de densité f_2 et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0 (voir Fig. 1.1). Soit $T > 0$ et soit $[0; T]$ l'intervalle de temps en question. Le corps est ou peut être en contact adhésif avec un obstacle sur la partie Γ_3 . Nous supposons que le matériau peut être endommagé durant le contact.

Nous assumons aussi que f_0 et f_2 varient très lentement par rapport au temps; c-à-d. nous nous plaçons dans l'hypothèse des petites déformations.

Nous utiliserons ce cadre physique dans les chapitres II et III de cette thèse.

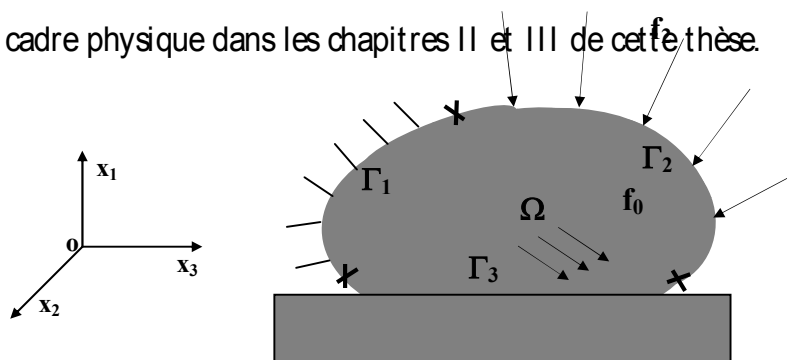


Fig. 1.1 – Cadre physique no. 1

Cadre no. 2 (Problème antiplan). Soit un corps piézoélectrique qui occupe un domaine cylindrique B rapporté à un système cartésien orthogonal $Ox_1x_2x_3$ (voir Fig. 1.2). Nous considérons que les génératrices sont parallèles à l'axe Ox_3 et nous notons par ω le domaine borné de $\mathbb{R}^2$ qui représente la section transversale du cylindre. Nous supposons que le cylindre est suffisamment long et, par conséquent, nous considérons $B = \omega \times]-1; +1[$. Des forces volumiques de densité f_0 agissent sur le cylindre et ce dernier a des charges électriques de forces de volume de densité q_0 . Soit $\mathbf{e}_i = \delta_{ij} \mathbf{e}_j$ et nous assumons une partition de la surface frontière régulière $\partial\omega$ en trois zones mesurables et disjointes $\partial\omega_1$, $\partial\omega_2$ et $\partial\omega_3$, d'une part et une partition en deux parties $\partial\omega_a$ et $\partial\omega_b$ d'une autre part (voir Fig. 1.3.). Nous assumons également que les mesures unidimensionnelles de $\partial\omega_1$ et $\partial\omega_a$ notées $\text{mes}\partial\omega_1$ et $\text{mes}\partial\omega_a$ sont

positives. On note par $\mathbf{n}_i$ la normale unitaire sortante à Γ_i . Le cylindre est encastré dans une structure fixe sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Des tractions surfaciques de densité $\mathbf{f}_2$ agissent sur $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Nous supposons aussi que le potentiel électrique s'annule sur $\Gamma_a \cup \Gamma_b$ et que des charges électriques surfaciques de densité q_2 sont prescrites sur $\Gamma_b \cup \Gamma_3$. Sur la partie Γ_3 le cylindre entre en contact sans frottement et avec adhésion avec un obstacle conducteur que nous appelons fondation. Nous nous intéressons à la déformation du cylindre dans un intervalle de temps $[0; T]$. Nous supposons aussi que le processus est mécaniquement dynamique et électriquement statique.

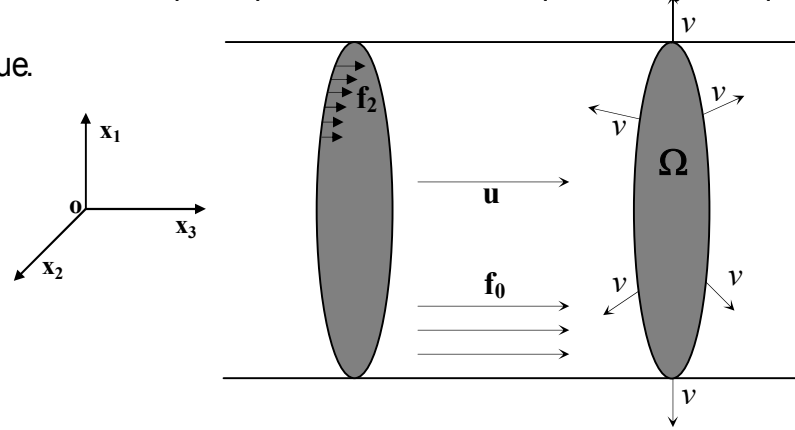


Fig. 1.2 – Cadre physique no. 2

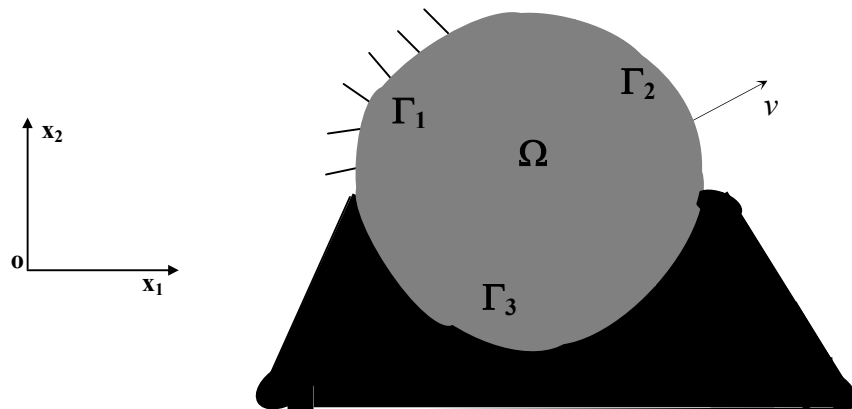


Fig. 1.3 – Cadre physique no. 2 – section transversale

Nous utiliserons ce cadre physique dans le chapitre IV de cette thèse.

Afin d'obtenir les modèles mathématiques correspondant aux cadres physiques présentés, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de cette thèse.

Nous désignons par S_d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$); " $\cdot$ " et $|\cdot|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et S_d . Ainsi,

$$u \cdot v = u_i v_i; \quad |v| = (v \cdot v)^{1/2}; \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d;$$

$$\frac{1}{4}\dot{\epsilon} = \frac{1}{4j} \dot{\epsilon}_{ij}; \quad |\dot{\epsilon}| = (\dot{\epsilon} \cdot \dot{\epsilon})^{1/2}; \quad \forall \frac{1}{4}\dot{\epsilon} \in S_d;$$

avec la convention de l'indice muet.

Pour un vecteur v nous désignons par v_n et v_t ses composantes normale et tangentielle à la frontière, c'est à dire

$$v_n = v \cdot n; \quad v_t = v_j n_j \cdot n; \quad (1.1.1)$$

Nous notons par $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}(x; t)$ le champ des contraintes, par $u = u(x; t)$ le champ de déplacement, par $\epsilon(u)$ le champ des déformations linéarisées et par $\frac{1}{4}^0$ le vecteur contrainte de Cauchy. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \Omega$ et $t \in [0; T]$:

Pour le champ des contraintes $\frac{1}{4}$ nous dénotons par $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}_t$ les composantes normale et tangentielle à la frontière, à savoir

$$\frac{1}{4} = (\frac{1}{4}^0) \cdot n; \quad \frac{1}{4}_t = \frac{1}{4}^0_j \cdot n_j; \quad (1.1.2)$$

En utilisant (I.1.1) et (I.1.2) nous obtenons la relation

$$(\frac{\partial}{\partial t}) : v = \frac{\partial}{\partial t} v_0 + \frac{\partial}{\partial t} : v_i ; \quad (I.1.3)$$

qui va intervenir tout au long de cette thèse a. n. d'obtenir les formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact.

En outre, les points au dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps; par exemple

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}; \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2};$$

où $\dot{u}$ désigne le champ des vitesses et $\ddot{u}$ désigne le champ des accélérations.

Nous rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites déformations

$$\epsilon(u) = (\epsilon_{ij}(u)); \quad \epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad 1 \leq i, j \leq d; \quad (I.1.4)$$

Nous notons qu'ici et tout au long de cette thèse, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante de la variable.

Passons maintenant à la description des modèles mathématiques associés aux cadres physiques ci-dessus.

Modèle mathématique no. 1. Nous commençons par le modèle mathématique du cadre physique no. 1. Les fonctions $u :]0; T[\rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\frac{\partial}{\partial t} :]0; T[\rightarrow \mathbb{R}^d$ sont les inconnues du problème.

Nous savons qu'en général, l'évolution d'un corps matériel dans un intervalle de temps $[0; T]$; est décrite par l'équation de mouvement de Cauchy

$$\text{Div } \frac{3}{4} + f_0 = \frac{1}{2} \ddot{u} \quad \text{dans } - \mathcal{E} (0; T); \quad (I.1.5)$$

où les fonctions densité de masse $\frac{1}{2} : - \rightarrow \mathbb{R}^+$ et densité des forces appliquées de volume $f_0 : - \mathcal{E} [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ sont des données du problème.

Le processus d'évolution défini par (I.1.5) est un processus dynamique. Dans certaines situations, l'équation (I.1.5) peut encore se simplifier. Par exemple dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ est nul quand il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statique) ou bien dans le cas où $\dot{u}$ varie très lentement par rapport au temps donc le terme $\frac{1}{2} \ddot{u}$ peut être négligé (processus quasistatique). Dans ces deux cas, l'équation (I.1.5) devient

$$\text{Div } \frac{3}{4} + f_0 = 0 \quad \text{dans } - \mathcal{E} (0; T): \quad (I.1.6)$$

Dans la suite, nous allons appeler simplement (I.1.5) équation du mouvement et (I.1.6) équation d'équilibre.

L'équation (I.1.6) modélise le processus des problèmes rencontrés dans les chapitres II et III, tandis que l'équation (I.1.5) sera utilisée dans le chapitre IV.

Puisque le corps est encasté sur Γ_1 , le champ de déplacement est par conséquent nul sur cette partie de la frontière:

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \mathcal{E} (0; T): \quad (I.1.7)$$

La condition aux limites de traction est

$$\frac{3}{4}^o = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \mathcal{E} (0; T); \quad (I.1.8)$$

f_2 étant une donnée du problème.

Les équations (I.1.6)-(I.1.8) sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui-même: c'est l'objet des lois de comportement que nous décrirons par la suite. Finalement, afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur la partie Γ_3 de la frontière, destinée à entrer en contact avec la fondation. Ceci est l'objet des conditions aux limites de contact que nous décrirons ultérieurement.

Modèle mathématique no.2. nous nous plaçons maintenant dans le cadre physique no.2. Nous supposons que

$$f_0 = (0; 0; f_0) \text{ avec } f_0 = f_0(x_1; x_2; t) : -\infty [0; T] \rightarrow \mathbb{R}; \quad (\text{I.1.9})$$

$$f_2 = (0; 0; f_2) \text{ avec } f_2 = f_2(x_1; x_2; t) : \Gamma_2 \times [0; T] \rightarrow \mathbb{R}; \quad (\text{I.1.10})$$

$$q_0 = q_0(x_1; x_2; t) : -\infty [0; T] \rightarrow \mathbb{R}; \quad (\text{I.1.11})$$

$$q_2 = q_2(x_1; x_2; t) : \Gamma_b \times [0; T] \rightarrow \mathbb{R}; \quad (\text{I.1.12})$$

Les forces (I.1.9), (I.1.10) et les charges électriques (I.1.11), (I.1.12) produisent une évolution des déformations ainsi que des charges électriques du cylindre piézoélectrique; ceci correspond à un déplacement u et à un champ de potentiel électrique ϕ qui sont indépendants de x_3 et qui ont la forme

$$u = (0; 0; u) \text{ avec } u = u(x_1; x_2; t) : -\infty [0; T] \rightarrow \mathbb{R}; \quad (\text{I.1.13})$$

$$\phi = \phi(x_1; x_2; t) : -\infty [0; T] \rightarrow \mathbb{R}; \quad (\text{I.1.14})$$

Soit ${}^0(u)$ le tenseur des déformations linéarisées. En utilisant (I.1.13) et (I.1.4) nous obtenons

$${}^0(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & {}^1u_{;1} \\ 0 & 0 & {}^1u_{;2} \\ {}^1u_{;1} & {}^1u_{;2} & 0 \end{pmatrix} : \quad (I.1.15)$$

Nous supposons que le processus décrivant le mouvement du corps est dynamique. Par conséquent, nous utiliserons l'équation (I.1.5). Pour le processus électrique, nous supposons qu'il est statique, c-à-d gouverné par l'équation

$$D_{i;j} - q_0 = 0 \quad \text{dans } B \times (0; T); \quad (I.1.16)$$

où $D = (D_i)$ est le champ de déplacement électrique défini par

$$D = E^0(u) + mE^1 : \quad (I.1.17)$$

E représente le tenseur piézoélectrique d'ordre trois, m est le coefficient de la perméabilité électrique et E^1 est le champ électrique défini par

$$E^1 = (E_i^1); \quad E_i^1 = {}^1e_{i;j}; \quad i = 1, \dots, d; \quad (I.1.18)$$

Puisque le cylindre est encastré sur $\partial_1 \times (0; T)$, le champ de déplacement s'annulera sur cette partie. Ainsi, (I.1.13) implique

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial_1 \times (0; T); \quad (I.1.19)$$

Soit ν la normale extérieure à $\partial_1 \times (0; T)$: Nous avons

$$\nu = (\nu_1; \nu_2; 0) \quad \text{avec } \nu_i = \nu_i(x_1; x_2); \quad i = 1, 2; \quad (I.1.20)$$

En utilisant (I.1.1), (I.1.13) et (I.1.20) nous déduisons

$$u_0 = 0; \quad u_{i_2} = (0; 0; u) : \quad (I.1.21)$$

En outre, de (I.1.2) et (I.1.20) nous déduisons

$$\frac{3}{4} = 0; \quad \frac{3}{4}_{i_2} = (0; 0; \frac{3}{4}) = \frac{3}{4}^0 : \quad (I.1.22)$$

Par conséquent, en utilisant (I.1.10) et (I.1.22), on obtient la condition aux limites en traction suivante

$$\frac{3}{4} = f_2 \quad \text{sur} \quad i_2 \in (0; T) : \quad (I.1.23)$$

En ajoutant aux équations (I.1.5), (I.1.6), (I.1.19) et (I.1.23) une loi de comportement et des conditions aux limites de contact sans frottement sur i_3 , nous obtenons un deuxième modèle mathématique qui va être étudié dans le quatrième chapitre de cette thèse.

1.1.2 Lois de comportement

Chacune des équations (I.1.5) et (I.1.6) équivaut à d relations scalaires; il est évident du point de vue mathématique que cette équation ne suffit pas à modéliser le problème d'équilibre, par exemple, les d composantes u_i du champ de déplacement ne figurent pas dans ces équations. Du point de vue physique par ailleurs, il faut remarquer que chacune des équations (I.1.5) et (I.1.6) exprime une loi universelle valable pour tous les solides. Donc si l'équation du mouvement suffisait à déterminer tous les paramètres, cela signifierait que, soumis à des conditions identiques, les divers milieux continus auraient des comportements identiques. Ceci est naturellement absurde.

L'équation d'équilibre est donc insuffisante, à elle seule, pour décrire l'équilibre des corps matériels; elle doit être complétée par d'autres relations que l'on désigne sous le vocable général de lois de comportement, caractérisant le comportement de chaque type de solides. Ces lois, bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, sont souvent d'origine expérimentale. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement; comme exemples d'essais qui peuvent être exercés sur les solides on cite: les essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la suite, nous entendons par loi de comportement toute relation entre le tenseur des contraintes σ , le tenseur des déformations linéarisées ϵ et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}$ et $\dot{\epsilon}$. Nous présentons dans la suite les lois de comportement qui interviennent dans cette thèse, lois qui correspondent à deux catégories de matériaux: matériaux viscoélastiques et matériaux visoplastiques.

Lois de comportement viscoélastique avec endommagement

L'investigation des propriétés mécaniques des matériaux tels que les pâtes, les huiles et les cires, a mis en évidence que certains phénomènes, tels que le fluage et la relaxation, ne peuvent être décrits par les lois de comportement élastique. C'est pour cela que les lois viscoélastiques ont été introduites. Elles décrivent le comportement des matériaux comme les métaux, les polymères, les caoutchoucs et les roches.

Nous envisageons ici des matériaux qui ont des propriétés élastiques, mais en même temps, les essais de chargement monotone indiquent que la courbe $\sigma = \sigma(\epsilon)$ dépend de $\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$. Ce sont les matériaux viscoélastiques. Parmi les lois viscoélastiques, nous citons la loi viscoélastique de Kelvin-Voigt qui s'écrit

$$\dot{\gamma}_4 = A'' \dot{u}^\phi + G''(u); \quad (I.1.24)$$

où A représente l'opérateur de viscosité et G est l'opérateur d'élasticité.

Si nous prenons en considération l'effet de l'endommagement du matériau durant le contact, nous arrivons à une généralisation de la loi (I.1.24) qui est la loi de comportement viscoélastique avec endommagement ayant la forme

$$\dot{\gamma}_4 = A'' \dot{u}^\phi + G''(u); \mathbb{R}; \quad (I.1.25)$$

La fonction $\mathbb{R}$ représente la fonction d'endommagement dont l'évolution est décrite par l'inclusion différentielle suivante :

$$\dot{\mathbb{R}} \in k \mathbb{R} + \partial_K(\mathbb{R}) \ni \dot{\gamma}_4 \in \dot{\gamma}_4 \quad \text{dans } -; \quad (I.1.26)$$

où K est l'ensemble des fonctions admissibles d'endommagement défini par

$$K = \{ \mathbb{R} \in H^1(-) = 0 \leq \mathbb{R} \leq 1 \text{ p.p. dans } -^a; \quad (I.1.27)$$

k est une constante positive, ∂_K représente le sous-différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble K et $\dot{\gamma}_4$ est une fonction constitutive donnée qui décrit les sources de l'endommagement dans le système.

Notons que les valeurs de la fonction d'endommagement $\mathbb{R}$ sont comprises entre zéro et un. Quand $\mathbb{R} = 1$ il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, quand $\mathbb{R} = 0$, le matériau est complètement endommagé, quand $0 < \mathbb{R} < 1$ il y a un endommagement partiel et le système a une capacité de résistance réduite. Des problèmes

de contact pour des matériaux viscoélastiques sont envisagés dans [8, 22, 28, 38, 44, 45, 46].

La loi viscoélastique (I.1.25) sera utilisée dans le chapitre II de cette thèse.

Lois de comportement électrique-viscoélastique

Nous citons également parmi les lois viscoélastiques, la loi viscoélastique linéaire à mémoire courte qui est donnée par

$$\mathbf{\sigma} = \mathbf{A} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{G}(\mathbf{u}); \quad (\text{I.1.28})$$

$\mathbf{A}$ représente l'opérateur de viscosité et $\mathbf{G}$ est l'opérateur d'élasticité.

Pour des raisons de symétrie, nous envisageons des cas avec différentes symétries matérielles qui réduisent le nombre des coefficients distincts intervenant dans la loi de comportement (I.1.28). Ainsi, on peut prouver que, dans le cas isotrope (c'est à dire dans le cas où toutes les directions autour d'un point sont matériellement équivalentes), la loi de comportement pour un matériau viscoélastique linéaire à mémoire courte isotrope est donnée par

$$\mathbf{\sigma} = 2\mu \dot{\mathbf{u}} + \lambda \text{tr}(\dot{\mathbf{u}}) \mathbf{I} + 2\nu(\mathbf{u}) + \lambda(\text{tr}(\mathbf{u})) \mathbf{I}; \quad (\text{I.1.29})$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé, μ et λ représentent les coefficients de viscosité satisfaisant $\mu > 0$ et $\lambda \geq 0$, $\text{tr}(\mathbf{u}) = \text{tr}(\mathbf{u})$ et $\mathbf{I}$ est le tenseur unitaire dans $\mathbb{R}^3$:

Si le matériau est piézoélectrique, il est donc caractérisé par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique lors de l'application des contraintes mécaniques, et, inversement, des contraintes mécaniques sont générées lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Un

matériau piézoélectrique dont les propriétés mécaniques sont viscoélastiques est appelé matériau électrique-viscoélastique. Ainsi, le comportement d'un matériau viscoélastique linéaire isotrope et piézoélectrique sera modélisé par la loi de comportement électrique-viscoélastique isotrope donnée par

$$\dot{\sigma} = 2\mu \dot{\epsilon} + \lambda \text{tr}(\dot{\epsilon}) \mathbf{I} + 2^1 \epsilon(u) + \lambda \text{tr}(\epsilon(u)) \mathbf{I} - E^p E^e; \quad (I.1.30)$$

$$D = E^p(u) + m E^e; \quad (I.1.31)$$

où λ et μ sont les coefficients de viscosité, λ et μ sont les coefficients de Lamé, $\text{tr}(\epsilon(u)) = \epsilon_{ii}(u)$, $\mathbf{I}$ est le tenseur unitaire dans $\mathbb{R}^3$, m est la constante de perméabilité électrique, E représente le tenseur piézoélectrique d'ordre trois et E^p son transposé. Aussi, $D = (D_i); i = 1, 2, 3$ est le champ de déplacement électrique et E^e est le champ électrique défini par (I.1.18).

La loi électrique-viscoélastique isotrope (I.1.30)-(I.1.31) sera envisagée dans le chapitre IV de cette thèse.

Lois de comportement viscoplastique avec endommagement

Les lois de comportement viscoplastiques sont des lois constitutives qui peuvent modéliser en même temps les phénomènes décrits par les essais de charge-décharge et les phénomènes dépendant du temps (relaxation et fluage). Ces lois sont appelées en réalité lois élasto-viscoplastiques mais, pour simplifier la terminologie, nous les appellerons viscoplastiques. Une loi de comportement viscoplastique s'écrit

$$\dot{\epsilon} = E^{-1} \dot{\sigma} + G(\dot{\epsilon})$$

ou d'une façon équivalente

$$\dot{\varepsilon} = E'' \dot{\varepsilon}^p + G(\varepsilon''(u)); \quad (1.1.32)$$

où E est un tenseur d'ordre quatre et G est une fonction constitutive donnée.

Si nous envisageons un endommagement mécanique du matériau durant le contact alors nous obtenons la loi viscoplastique avec endommagement suivante :

$$\dot{\varepsilon} = E'' \dot{\varepsilon}^p + G(\varepsilon''(u); \omega); \quad (1.1.33)$$

avec E un tenseur d'ordre quatre, G une fonction constitutive et ω la fonction d'endommagement dont l'évolution est décrite par l'inclusion

$$\dot{\omega} \in k \omega + @_K(\omega) \dot{A}(\varepsilon''(u); \omega) \quad \text{dans } - ;$$

où K est l'ensemble des fonctions admissibles d'endommagement défini par

$$K = \left\{ \omega \in H^1(-) = 0 \cdot \omega \cdot 1 \text{ p.p. dans } -^a ; \right.$$

k est une constante positive, $@_K$ représente le sous-différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble K et $\dot{A}$ est une fonction constitutive donnée qui décrit les sources de l'endommagement dans le système.

Des modèles mathématiques récents avec endommagement pour des matériaux viscoplastiques peuvent être trouvés dans [10, 11, 43].

La loi de comportement viscoplastique (1.1.33) sera utilisée dans le chapitre III de cette thèse.

1.1.3 Conditions aux limites de contact

Dans ce paragraphe, nous décrivons les conditions aux limites de contact considérées dans cette thèse.

Par condition de contact nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ de déplacement, des vitesses ou des contraintes. Pour le frottement, nous utilisons la contrainte tangentielle. Les égalités et les inégalités qui suivent sont considérées vraies partout sur $\Gamma_3 \in (0; T)$:

Condition de contact avec adhésion

Le contact avec adhésion entre les corps, lorsque une colle est ajoutée pour empêcher les surfaces d'un mouvement relatif, a reçu une grande importance dans la littérature mathématique. L'analyse de différents modèles de contact avec adhésion peut être trouvée dans [8, 9, 10, 11, 12, 14, 21, 28, 55]. Ceci conduit à l'introduction d'une variable interne de surface, le champ d'adhésion noté dans cette thèse par $\bar{\alpha}$ exprimant l'intensité de l'adhésion. Suivant [18, 19], le champ d'adhésion satisfait les restrictions $0 \leq \bar{\alpha} \leq 1$; quand $\bar{\alpha} = 1$ en un point de la surface de contact, l'adhésion est complète et tous les joints adhésifs sont actifs; quand $\bar{\alpha} = 0$ tous les joints adhésifs sont inactifs et il n'y a pas d'adhésion; quand $0 < \bar{\alpha} < 1$ l'adhésion est partielle et seulement une fraction $\bar{\alpha}$ des joints adhésifs est active. Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à consulter [37, 39, 47].

Le champ d'adhésion évolue selon une équation différentielle du premier ordre donnée par :

$$\dot{u}_i = \frac{h}{\rho} - \frac{f}{\rho} (i R(u_0))_+^2 \frac{1}{2a_+} ; \quad (I.1.34)$$

avec $r_+ = \max(f; 0)$ et $2a_+$ sont des coefficients d'adhésion donnés et R est l'opérateur de troncature défini par

$$R(s) = \begin{cases} s & \text{si } |s| \leq L; \\ L & \text{si } |s| > L; \end{cases} \quad (I.1.35)$$

Ici, $L > 0$ est la longueur caractéristique du joint adhésif, au-delà de laquelle il n'y a plus d'autres tractions. L'introduction de R est motivée par les arguments mathématiques mais elle n'est pas restreinte du point de vue physique, puisque il n'y a pas de restriction de la valeur du paramètre L dans ce qui suit.

L'équation (I.1.34) sera utilisée dans le deuxième chapitre et dans le premier paragraphe du troisième chapitre de cette thèse pour décrire l'évolution du champ d'adhésion.

Pour décrire cette évolution, nous pouvons également utiliser l'équation suivante

$$\dot{u}_i = \frac{h}{\rho} - \frac{f}{\rho} (u_0)^2 \frac{1}{2a_+} ; \quad (I.1.36)$$

où ρ et $2a_+$ sont des coefficients d'adhésion.

Si R est l'opérateur de troncature défini par

$$R(s) = R_L(s) = \begin{cases} s & \text{si } |s| \leq L; \\ L & \text{si } |s| > L; \end{cases} \quad (I.1.37)$$

alors l'opérateur de troncature $\mathcal{R}$ est donné par

$$\mathcal{R}(u_0) = (\mathcal{R}_i(u_0))_+ :$$

Donc,

$$\mathcal{R}(s) = \mathcal{R}_L(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L; \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0; \\ 0 & \text{si } s > 0; \end{cases} \quad (I.1.38)$$

Notons que, dans cette thèse, nous utilisons $\mathcal{R}(s)^2$, où

$$\mathcal{R}(s)^2 = \mathcal{R}_L(s)^2 = \begin{cases} L^2 & \text{si } s < -L; \\ s^2 & \text{si } -L \leq s \leq 0; \\ 0 & \text{si } s > 0; \end{cases}$$

L'équation (I.1.36) sera utilisée dans le deuxième paragraphe du troisième chapitre de cette thèse.

Un troisième modèle des équations différentielles décrivant l'évolution du champ de l'adhésion est le suivant :

$$\dot{u}_i = -\dot{u}_i - \alpha_0 \mathcal{R}_0(u_0)^2 + \alpha_i k \mathcal{R}_i(u_i) k^2 \dot{u}_i^2 \alpha_a \quad (I.1.39)$$

où α_0 , α_i et α_a sont des paramètres positifs et $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_i$ sont les opérateurs de troncature définis par

$$\mathcal{R}_0(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L; \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0; \\ 0 & \text{si } s > 0; \end{cases}$$

$$\mathcal{R}_i(v) = \begin{cases} v & \text{si } |v| \leq L; \\ L \frac{v}{|v|} & \text{si } |v| > L; \end{cases}$$

avec $L > 0$ étant toujours une longueur caractéristique du joint adhésif, au-delà de laquelle il n'y a plus d'autres tractions (voir, e.x. [37]).

Si nous nous plaçons dans le cadre physique no. 2 conduisant au modèle mathématique no. 2, il serait nécessaire de rappeler (I.1.21) et la définition de l'opérateur R_0 pour voir que l'équation (I.1.39) sera réduite à l'équation suivante.

$$\dot{u} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\int_0^L R(u) j^2 dx \right) \quad (I.1.40)$$

Signalons que le paramètre $\frac{1}{2}$ sera tout simplement noté $\frac{1}{2}$ et l'opérateur $R_{\frac{1}{2}}$ sera défini pour les scalaires et noté R :

L'équation différentielle (I.1.40) sera utilisée dans le quatrième chapitre de cette thèse.

Condition de compliance normale avec adhésion

Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connu à priori. La contrainte normale $\frac{3}{4}$ satisfait la condition dite de compliance normale avec adhésion

$$j \frac{3}{4} = p_0(u_0) \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\int_0^L R(u_0) dx \right)_+ \quad (I.1.41)$$

où p_0 est une fonction positive donnée, $\frac{1}{2}$ est un coefficient d'adhésion donné et R est l'opérateur de troncature défini par (I.1.35), voir par exemple [8, 9].

Comme exemple de fonction p_0 nous pouvons citer

$$p_0(r) = c_0 (r_+)^{m_0},$$

avec $m_0 \in]0; 1]$, c_0 une constante positive et $r_+ = \max\{0; r\}$:

La compliance normale avec adhésion sera exploitée dans le chapitre II et le premier paragraphe du chapitre III de cette thèse.

Condition de contact de Signorini avec adhésion

Dans ce cas, la fondation est rigide et, en prenant en considération l'adhésion des surfaces de contact, ceci sera modélisé par la condition dite de Signorini avec adhésion suivante :

$$\begin{aligned} u_0 &\cdot 0; \quad \frac{3}{4} \cdot \alpha_0^{-2} \mathbb{R}(u_0) \\ &\quad \frac{3}{4} \cdot \alpha_0^{-2} \mathbb{R}(u_0) \cdot u_0 = 0; \end{aligned} \quad (I.1.42)$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} u_0 &\cdot 0; \quad \frac{3}{4} + \alpha_0^{-2} \mathbb{R}(u_0) \cdot 0 \\ &\quad \int \left(\frac{3}{4} + \alpha_0^{-2} \mathbb{R}(u_0) \right)^\phi u_0 = 0; \end{aligned}$$

où $u_0, \frac{3}{4}$ sont les composantes normales des champs de déplacement et des contraintes respectivement, α_0 est un coefficient d'adhésion et $\mathbb{R}$ est l'opérateur de troncature défini à partir de l'opérateur R ci-dessus et donné dans (I.1.38).

L'introduction de l'opérateur de troncature R est motivée principalement par des raisons mathématiques. Puisque $u_0 \cdot 0$ sur ${}_3 \mathcal{E}(0; T)$, il vient que $\mathbb{R}(u_0) = \int R(u_0)$ sur ${}_3 \mathcal{E}(0; T)$. Rappelons que la définition de ces opérateurs implique un paramètre positif L qui est la longueur caractéristique de l'adhésion, et au-delà duquel l'adhésif n'exerce plus aucune traction. En choisissant L très grand, nous pouvons assumer que $R(u_0) = u_0$ et, par conséquent, nous récupérons la condition de contact

$$u_0 \cdot 0; \quad \frac{3}{4} + \alpha_0^{-2} u_0 \cdot 0; \quad \int \left(\frac{3}{4} + \alpha_0^{-2} u_0 \right)^\phi u_0 = 0;$$

Cette condition a été utilisée dans [37] dans l'étude des problèmes de contact avec adhésion pour les matériaux élastiques linéaires. Aussi, notons que lorsque le champ d'adhésion s'annule, alors (I.1.42) devient la condition de Signorini classique avec la fonction de saut zéro, c'est à dire

$$u_0 \cdot 0; \frac{3}{4} \cdot 0; \frac{3}{4} u_0 = 0;$$

Conditions de contact sans frottement

Plusieurs problèmes en mécanique du contact prennent en considération le frottement entre les surfaces de contact. Dans ce cas, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement. Des modèles mathématiques avec frottement peuvent être trouvés dans [4, 12, 22, 32, 37, 38, 39, 40, 42] et plus récemment dans [30, 51, 52, 53]. Dans le cas de contact sans frottement, les mouvements tangentiels sont libres, ce qui se traduit par

$$\frac{3}{4}_t = 0; \quad (I.1.43)$$

La condition de contact sans frottement (I.1.43) sera utilisée dans le chapitre II et le premier paragraphe du chapitre III de cette thèse.

Dans le cas d'un contact avec adhésion, les tractions tangentielles de frottement sur les surfaces de contact sont négligeables par rapport aux tractions d'adhésion. Par conséquent, la contrainte tangentielle sur la surface de contact est générée uniquement par la colle, et elle est supposée dépendre du champ d'adhésion et du déplacement tangentiel. Alors,

$$i \frac{3}{4}_t = p_i(\bar{\cdot}) R^a(u_i); \quad (I.1.44)$$

où p_i est une fonction positive donnée et l'opérateur de troncature R^α est défini par

$$R^\alpha(v) = R_L^\alpha(v) = \begin{cases} v & \text{si } |v| \leq L; \\ L \frac{v}{|v|} & \text{si } |v| > L; \end{cases} \quad (I.1.45)$$

Notons qu'en considérant la condition de contact (I.1.44), nous assumons que la traction tangentielle de frottement est négligeable. Pour cette raison, nous nous référons à (I.1.44) comme condition de contact sans frottement et les processus gouvernés par (I.1.44) sont des processus de contact sans frottement. Lorsque la traction tangentielle de frottement n'est pas négligeable, nous devons prendre en considération, comme ça a été fait dans [37, 39], là où le processus de contact avec frottement et adhésion a été considéré.

La condition de contact sans frottement (I.1.44) sera utilisée dans le deuxième paragraphe du chapitre III de cette thèse.

Si nous nous plaçons dans le cadre physique no. 2 conduisant au modèle mathématique no. 2, il serait nécessaire de rappeler (I.1.21) pour voir que la condition (I.1.44) sera réduite à la condition suivante.

$$i \frac{3}{4} \bar{u}_i = p(\bar{u}) R(u); \quad (I.1.46)$$

Signalons que le paramètre $\bar{u}_i$ sera tout simplement noté $\bar{u}$ et l'opérateur R^α sera défini pour les scalaires et noté R :

La condition de contact sans frottement (I.1.46) sera utilisée dans le chapitre IV de cette thèse.

1.2 Espaces fonctionnels

Nous introduisons dans ce chapitre des espaces de type Sobolev utilisés en mécanique du contact, à savoir les espaces de fonctions à valeurs vectorielles. Nous présentons de plus les principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. Précisons aussi que toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans cette thèse sont introduits dans ce paragraphe. Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev et les espaces des distributions, on renvoie par exemple .

1.2.1 Cadre fonctionnel " scalaire "

Dans ce paragraphe, nous décrivons le cadre fonctionnel dans lequel nous travaillerons dans le chapitre IV du mémoire, où les fonctions inconnues sont des fonctions scalaires définies à chaque moment du temps sur Ω , un domaine borné de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, partout dans ce paragraphe nous considérons $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

Nous commençons par rappeler brièvement quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in L^2(\Omega) \right\}; \quad i = 1, 2 : \quad a$$

D'abord, nous notons par $\mathbf{u}$ le vecteur de composantes u_i . Nous avons $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$. Nous savons que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u; v)_{H^1(\Omega)} = (u; v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u; \nabla v)_{L^2(\Omega)};$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\cdot)} = (u; u)_{H^1(\cdot)}^{1/2} :$$

Nous avons les résultats suivants.

$$C^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega);$$

$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection compacte (Théorème de Rellich),

Il existe une application linéaire et continue $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$

telles que $\gamma u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\bar{\Omega})$ (Théorème de trace de Sobolev).

Remarque 1.2.1. L'espace $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représente l'espace des fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle $d\sigma$. L'application γ s'appelle application de trace; elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \mapsto u|_{\Gamma}$ définie pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Nous notons que l'application de trace $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.

L'application de trace $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ n'est pas surjective. L'image de $H^1(\Omega)$ par cette application notée $H^{1/2}(\Gamma)$ est un sous-espace de $L^2(\Gamma)$ qui est de Hilbert pour la structure transportée par γ : Nous avons

$$H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma) \text{ avec injection continue,}$$

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma) \text{ est une application linéaire continue et surjective.}$$

Afin de définir des produits scalaires sur les espaces fonctionnels dans lesquels nous travaillerons dans le chapitre IV, nous avons besoin du théorème suivant.

Théorème 1.2.2. Soit Γ_1 une portion de la frontière de Ω telle que $\text{mes } \Gamma_1 > 0$. Alors il existe une constante C_p (dépendant de Ω et Γ_1) telle que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|v\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \|v\|_{H^1(\Omega)}^2; \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma \setminus \Gamma_1;$$

où

$$r v = (v_{;1} + v_{;2}) \quad \text{pour} \quad v = v(x_1; x_2):$$

Maintenant, nous pouvons préciser le cadre fonctionnel utilisé dans le quatrième chapitre de cette thèse.

Nous introduisons les sous-espaces fermés de $H^1(-)$ définis par

$$V = \bigoplus_{j=1}^a H^1(-) = v = 0 \text{ sur } j_1^a; \quad W = \bigoplus_{j=a+1}^n \tilde{H}^1(-) = \tilde{A} = 0 \text{ sur } j_a^a; \quad (1.2.1)$$

ici et dans ce qui suit, nous écrivons $\int$ pour la trace $\int$ d'une fonction $\in H^1(-)$ sur j : Notons $H = L^2(-)$ et utilisons un produit scalaire modifié donné par

$$((u;v))_H = (\frac{1}{2}u;v)_H^1 \quad \forall u,v \in H; \quad (1.2.2)$$

où $\frac{1}{2}$ représente la densité de masse du cylindre vérifiant

$$\frac{1}{2} \in L^1(-); \quad \text{il existe } \frac{1}{2} > 0 \text{ tel que } \frac{1}{2}(x) \leq \frac{1}{2} \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}; \quad (1.2.3)$$

La norme $k:k_H$ associée au produit scalaire (1.2.2) est donnée par

$$k v k_H = (\frac{1}{2}v;v)_H^1 \quad \forall v \in H; \quad (1.2.4)$$

Il vient de l'hypothèse (1.2.3) que $k:k_H$ et $j:j_H$ sont des normes équivalentes sur H .

En outre, l'inclusion de $(V; j:j_V)$ dans $(H; k:k_H)$ est continue et dense. Nous notons par la suite par V' l'espace dual de V : En identifiant H avec son propre dual, nous pouvons écrire

$$V \subset H \subset V'.$$

Nous utilisons la notation $(::)_{V' \otimes V}$ pour représenter la dualité entre V' et V : Nous avons

$$(u;v)_{V' \otimes V} = ((u;v))_H \quad \forall u \in H; \quad v \in V; \quad (1.2.5)$$

et nous notons par $\|\cdot\|_V$ la norme sur l'espace dual V' .

D'autre part, puisque $\text{mes } \Omega_1 > 0$, $\text{mes } \Omega_a > 0$; il s'en suit du Théorème 1.2.2 que l'application $(u; v) \mapsto \int_{\Omega} r u : r v \, dx$ est un produit scalaire sur V qui induit la norme $\|r u\|_{L^2(\cdot)^2}$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1(\cdot)}$. Par conséquent, V et W sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires

$$(u; v)_V = \int_{\Omega} r u : r v \, dx \quad \forall u, v \in V; \quad (\tilde{r} ; \tilde{A})_W = \int_{\Omega} r \tilde{r} : r \tilde{A} \, dx \quad \forall \tilde{r} ; \tilde{A} \in W; \quad (1.2.6)$$

et soient $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W$ les normes associées

$$\|v\|_V = \|r v\|_{L^2(\cdot)^2} \quad \forall v \in V; \quad \|\tilde{A}\|_W = \|r \tilde{A}\|_{L^2(\cdot)^2} \quad \forall \tilde{A} \in W; \quad (1.2.7)$$

De plus, du Théorème de trace de Sobolev nous déduisons qu'il existent des constantes positives $\alpha_V > 0$; $\alpha_W > 0$ telles que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \alpha_V \|v\|_V \quad \forall v \in V; \quad \|\tilde{A}\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \alpha_W \|\tilde{A}\|_W \quad \forall \tilde{A} \in W; \quad (1.2.8)$$

Finalement, pour le champ d'adhésion nous utilisons l'ensemble

$$Z = \{f \in L^1(\Gamma_3) : f = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3^g\}; \quad (1.2.9)$$

1.2.2 Cadre fonctionnel "vectoriel"

Dans ce paragraphe, nous décrivons le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler dans les chapitres II, et III de la thèse. Pour plus de détails, voir [7, 13].

Nous introduisons les espaces suivants.

$$H = L^2(\cdot)^d = \{u = (u_i) : u_i \in L^2(\cdot)\} = L^2(\cdot)^d;$$

$$H = f^{\frac{3}{4}} = (f^{\frac{3}{4}}_i) = f^{\frac{3}{4}}_j = f^{\frac{3}{4}}_i \otimes L^2(-)g = L^2(-) \frac{d\mathbf{x}}{S};$$

$$H_1 = f u = (u_i) \otimes H = "(u) \otimes Hg;$$

$$H_1 = f^{\frac{3}{4}} \otimes H = \text{Div } f^{\frac{3}{4}} \otimes Hg;$$

Les espaces $H; H; H_1$ et H_1 sont des espaces de Hilbert réels munis respectivement des produits scalaires suivants:

$$(u; v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx \quad \forall u; v \in H;$$

$$(f^{\frac{3}{4}}; \zeta)_H = \int_{\Omega} f^{\frac{3}{4}}_i \zeta_{ij} dx \quad \forall f^{\frac{3}{4}}; \zeta \in H;$$

$$(u; v)_{H_1} = (u; v)_H + ("(u); "(v))_H \quad \forall u; v \in H_1;$$

$$(f^{\frac{3}{4}}; \zeta)_{H_1} = (f^{\frac{3}{4}}; \zeta)_H + (\text{Div } f^{\frac{3}{4}}; \text{Div } \zeta)_H \quad \forall f^{\frac{3}{4}}; \zeta \in H_1;$$

respectivement, où $" : H_1 \rightarrow H$ et $\text{Div} : H_1 \rightarrow H$ sont les opérateurs de déformation et de divergence définis par

$$"(u) = ("_{ij}(u)); \quad "_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i;j} + u_{j;i}); \quad \text{Div } f^{\frac{3}{4}} = (f^{\frac{3}{4}}_{;j}):$$

Les normes sur les espaces $H; H; H_1$ et H_1 sont notées par $\| \cdot \|_H; \| \cdot \|_H; \| \cdot \|_{H_1}$ et $\| \cdot \|_{H_1}$, respectivement.

Comme la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $v \in H_1$ nous utilisons la notation v_Γ pour désigner la trace γv de v sur Γ .

Nous rappelons que l'application $\text{trace } \gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par H_Γ , ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H_Γ' le dual de H_Γ et $h; \cdot : H_\Gamma' \times H_\Gamma$ le produit de dualité entre H_Γ' et H_Γ . Pour tout $v \in H_1$, il existe un élément noté $v_\Gamma^\circ \in H_\Gamma'$ tel que

$$h; \cdot : v_\Gamma^\circ \in H_\Gamma' = (\gamma(v))_\Gamma + (\text{Div } \gamma v)_\Gamma \quad \forall v \in H_1;$$

En outre, si γ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule de Green suivante

$$h; \cdot : v_\Gamma^\circ \in H_\Gamma' = \sum_i \gamma_i^\circ : v \, da \quad \forall v \in H_1;$$

Donc, pour γ assez régulier nous avons la formule suivante.

$$(\gamma_i^\circ : v)_\Gamma + (\text{Div } \gamma v)_\Gamma = \sum_i \gamma_i^\circ : v \, da \quad \forall v \in H_1; \quad (I.2.10)$$

Nous définissons l'espace des déplacements admissibles V défini comme étant un sous-espace fermé de l'espace H_1

$$V = \{v \in H_1 \mid v_\Gamma = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}; \quad (I.2.11)$$

Puisque $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V : il existe une constante $C_K > 0$, dépendant uniquement de γ et Γ_1 telle que

$$j''(v)j_H \leq C_K jv j_{H_1} \quad \forall v \in V: \quad (1.2.12)$$

Une démonstration de cette inégalité peut être trouvée dans [41], p. 79.

Sur V , nous considérons le produit scalaire donné par

$$(u; v) = (j''(u); j''(v))_H \quad \forall u, v \in V; \quad (1.2.13)$$

et soit $j \cdot j_V$ la norme associée, c'est à dire

$$jv j_V = j''(v)j_H \quad \forall v \in V: \quad (1.2.14)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $jv j_V$ et $jv j_{H_1}$ sont des normes équivalentes sur V et donc $(V; j \cdot j_V)$ est un espace de Hilbert.

En outre, d'après le Théorème de trace de Sobolev, il existe une constante C_0 dépendant uniquement de Ω , γ_1 et γ_3 telle que

$$jv j_{L^2(\gamma_3)^d} \leq C_0 jv j_V \quad \forall v \in V: \quad (1.2.15)$$

Pour les problèmes de contact avec la condition de Signorini, nous avons besoin de l'ensemble convexe des déplacements admissibles défini par

$$U = \{v \in V \mid v_\nu \leq 0 \text{ sur } \gamma_3\}$$

Finalement, pour le champ d'adhésion nous considérons l'ensemble

$$Z = \left\{ \frac{a}{2} \in L^2(\gamma_3) \mid 0 \leq \frac{a}{2} \leq 1 \text{ p.p. sur } \gamma_3 \right\} \quad (1.2.16)$$

1.2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel.

Soit $0 < T < +\infty$ et soit $(X; j_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $C_c(0; T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0; T)$ à valeurs dans X :

Définition 1.2.3. une fonction $f : [0; T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0; T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0; T; X)$ telle que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t \in [0; T] \setminus E$:

Définition 1.2.5. une fonction $f : [0; T] \rightarrow X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0; T; X)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|f_n(t) - f(t)\|_X dt = 0:$$

Théorème 1.2.6. (Bochner) Une fonction $f : [0; T] \rightarrow X$ mesurable est intégrable si et seulement si $x \mapsto \|f(x)\|_X : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est intégrable. Dans ce cas,

$$\int_0^T f dt = \int_0^T \|f\|_X dt \cdot \int_0^T \|f\|_X dt^{-1} \int_0^T f dt:$$

Soit $1 \leq p < +\infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0; T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $f : (0; T) \rightarrow X$ mesurables, telles que l'application $t \mapsto \|f(t)\|_X$ appartient à $L^p(0; T)$: Nous savons que $L^p(0; T; X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\|f\|_{L^p(0; T; X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty;$$

$$\|f\|_{L^1(0; T; X)} = \int_0^T \|f(t)\|_X dt \quad \text{si } p = 1:$$

Par ailleurs, nous avons les résultats suivants.

Proposition.I.2.7. $L^p(0; T; X)$, $1 \leq p \leq +\infty$ est un espace de Banach.

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$. Nous rappelons que $W^{k,p}(0; T; X)$ est l'espace des distributions vectorielles $u \in \mathcal{D}'(0; T; X)$ telles que $D_j u \in L^p(0; T; X)$ pour $j = 0, \dots, k$, D_j désigne la dérivée d'ordre j au sens des distributions.

Si $1 \leq p < +\infty$, $W^{k,p}(0; T; X)$ est un espace de Banach réel pour la norme définie par

$$\|u\|_{W^{k,p}(0;T;X)} = \left(\sum_{j=0}^k \int_0^T \|D_j u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} \quad \forall u \in W^{k,p}(0; T; X):$$

En particulier, $W^{k,2}(0; T; X)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire défini par

$$(u, v)_{W^{k,2}(0;T;X)} = \sum_{j=0}^k \int_0^T (D_j u(t), D_j v(t))_X dt \quad \forall u, v \in W^{k,2}(0; T; X):$$

D'autre part, $W^{k,1}(0; T; X)$ est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\|u\|_{W^{k,1}(0;T;X)} = \sum_{j=0}^k \sup_{t \in [0;T]} \|D_j u(t)\|_X \quad \forall u \in W^{k,1}(0; T; X):$$

Pour le cas particulier $k = 0$, nous remarquons que

$$W^{k,0}(0; T; X) = L^p(0; T; X):$$

Nous définissons également, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'espace $C^k(0; T; X)$ des fonctions $u : [0; T] \rightarrow X$ telles que pour tout $j = 0, \dots, k$, les dérivées $\frac{d^j u}{dt^j}$ existent et sont continues sur $[0; T]$:

En particulier, nous notons $C^0(0; T; X)$ par $C(0; T; X)$:

L'espace $C^k(0; T; X)$ est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\|u\|_{C^k(0;T;X)} = \sum_{j=0}^k \max_{t \in [0;T]} \left\| \frac{d^j u}{dt^j}(t) \right\|_X; \quad \forall u \in C^k(0; T; X):$$

En particulier, les normes sur les espaces $C(0; T; X)$ et $C^1(0; T; X)$ sont données par

$$\begin{aligned} \|u\|_{C(0;T;X)} &= \max_{[0;T]} \|u(t)\|_X; \quad \forall u \in C(0;T;X); \\ \|u\|_{C^1(0;T;X)} &= \|u\|_{C(0;T;X)} + \|\dot{u}\|_{C(0;T;X)}; \quad \forall u \in C^1(0;T;X); \end{aligned}$$

1.3 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les inéquations variationnelles elliptiques ainsi que les équations et inéquations variationnelles d'évolution intervenant dans l'étude des problèmes considérés dans cette thèse. Nous terminerons ce paragraphe par énoncer les lemmes de type Gronwall utilisés.

1.3.1 Inéquations variationnelles elliptiques

Ce paragraphe est consacré à donner quelques propriétés et résultats fondamentaux concernant les opérateurs monotone, fortement monotone et de Lipschitz, ainsi que des théorèmes d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles elliptiques. Pour plus de détails sur cette partie, nous renvoyons aux ouvrages [6, 32, 33, 48]. Un résultat récent d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles a été considéré, pour plus de détails voir [32].

Considérons un espace de Hilbert V muni du produit scalaire $(\cdot; \cdot)_V$ et de la norme

associée j_V et $A : V \rightarrow V$ un opérateur non linéaire.

L'opérateur A est dit:

(a) monotone si

$$(Au - Av; u - v)_V \geq 0 \quad \forall u, v \in V;$$

(b) fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av; u - v)_V \geq m \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V;$$

(c) de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_V \leq M \|u - v\|_V \quad \forall u, v \in V;$$

Proposition 1.3.1. Soit $A : V \rightarrow V$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors A est inversible et son inverse $A^{-1} : V \rightarrow V$ est également un opérateur fortement monotone et de Lipschitz.

Nous utiliserons ce résultat dans les chapitres II et III de ce mémoire.

Nous allons à présent rappeler un résultat d'existence et d'unicité de la solution des inéquations variationnelles. Soit $A : V \rightarrow V$, $K \subset V$ et $f \in V'$. Plusieurs problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles en mécanique des milieux continus conduisent à des problèmes mathématiques ayant la forme suivante.

Problème I. Trouver u tel que

$$u \in K; \quad (Au; v - u)_V \leq (f; v - u)_V \quad \forall v \in K;$$

Ce problème est appelé inéquation variationnelle elliptique de première espèce sur V :

En ce qui concerne le Problème I nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 1.3.2. Soit $A : V \rightarrow V$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et K un convexe fermé non-vide de V . Alors, l'inéquation variationnelle de première espèce admet une solution unique.

1.3.2 Equations et inéquations variationnelles d'évolution

Nous allons rappeler dans ce paragraphe un résultat sur les inéquations d'évolution et deux résultats sur les équations variationnelles d'évolution.

Soient V et H deux espaces de Hilbert réels tels que V est dense dans H et l'application d'injection est continue. L'espace H est identifié avec son propre dual et avec un sous-espace du dual V' de V . Nous écrivons

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

Notons par $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_H$ et $\|\cdot\|_{V'}$ les normes sur les espaces V , H et V' respectivement, et utilisons $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V', V}$ pour le produit de dualité entre V' et V . Notons que si $f \in H$ alors

$$\langle f, v \rangle_{V', V} = (f, v)_H \quad \forall v \in V.$$

Dans le deuxième et le troisième chapitre de la thèse, nous aurons besoin du résultat suivant concernant l'existence et l'unicité de la solution d'une inéquation variationnelle parabolique intervenant dans l'étude des problèmes de contact avec endommagement.

Théorème 1.3.3. Soit $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ et soit K un ensemble non-vide, fermé et convexe de V . Assumons que $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique

telle que pour une constante $\alpha > 0$ et c_0 ,

$$a(v; v) + c_0 |v|_H^2 \leq \alpha |v|_V^2 \quad \forall v \in V;$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0; T; H)$, il existe une fonction unique $u \in H^1(0; T; H) \cap L^2(0; T; V)$ telle que $u(0) = u_0$, $u(t) \in K$ pour tout $t \in [0; T]$, et presque pour tout $t \in (0; T)$,

$$-\dot{u}(t); v - u(t) \Big|_{V \times V}^{\mathcal{R}} + a(u(t); v - u(t)) \leq (f(t); v - u(t))_H \quad \forall v \in K;$$

Dans le quatrième chapitre de cette thèse, nous allons étudier un problème de contact dans un processus dynamique. Pour cela, nous aurons besoin du résultat suivant concernant l'existence et l'unicité de la solution d'une équation variationnelle d'évolution.

Théorème I.3.4. Soit $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$. Assumons que $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur hemicontinu et monotone satisfaisant

$$\langle Au; v \rangle_{V' \times V} \leq |v|_V^2 + \hat{A} \quad \forall v \in V;$$

$$|Av|_{V'} \leq C(|v|_V + 1) \quad \forall v \in V;$$

pour certaines constantes $\beta > 0$, $C > 0$ et $\hat{A} \in \mathbb{R}$. Alors, étant donnés $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0; T; V')$, il existe une fonction unique u qui satisfait

$$u \in L^2(0; T; V) \cap C(0; T; H); \quad \dot{u} \in L^2(0; T; V');$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \quad \text{p.p. } t \in (0; T);$$

$$u(0) = u_0;$$

Aussi, dans tous les chapitres de cette thèse, pour résoudre le problème de Cauchy concernant le champ d'adhésion, nous utiliserons la version suivante du Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 1.3.5. Soit $(X; j_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t; \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $(0; T)$, qui satisfait les propriétés suivantes:

il existe $L_F > 0$ tel que

$$\|F(t; x) - F(t; y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X; \text{ p.p. } t \in (0; T);$$

il existe $1 < p < +\infty$ tel que $F(\cdot; x) \in L^p(0; T; X)$:

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0; T; X)$ telle que

$$\dot{x}(t) = F(t; x(t)) \quad \text{p.p. } t \in (0; T);$$

$$x(0) = x_0;$$

Pour des détails sur ce théorème, nous pouvons envoyer le lecteur par exemple, p. 60.

1.3.3 Lemmes de type Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques de type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration; en particulier, pour établir l'unicité de la solution. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans ce paragraphe, nous proposons par exemple [27] et [48].

Lemme 1.3.6. Soient $m, n \in C(0; T; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0; T]$ et soit $a \geq 0$ et $\tilde{A} \in C(0; T; \mathbb{R})$:

(1) Si

$$\tilde{A}(t) \cdot a + \int_0^{Z_t} m(s) ds + \int_0^{Z_t} n(s) \tilde{A}(s) ds \quad \forall t \in [0; T];$$

alors

$$\tilde{A}(t) \cdot \exp\left(a + \int_0^{Z_t} m(s) ds + \int_0^{Z_t} n(s) \tilde{A}(s) ds\right) \quad \forall t \in [0; T];$$

(2) Si

$$\tilde{A}(t) \cdot m(t) + a \int_0^{Z_t} \tilde{A}(s) ds \quad \forall t \in [0; T];$$

alors

$$\int_0^{Z_t} \tilde{A}(s) ds \cdot e^{Ta} = \int_0^{Z_t} m(s) ds;$$

Pour le cas particulier $m = 0$, ce lemme devient

Corollaire I.3.7. Soit $n \in C(0; T; \mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0; T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\tilde{A} \in C(0; T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\tilde{A}(t) \cdot a + \int_0^{Z_t} n(s) \tilde{A}(s) ds \quad \forall t \in [0; T];$$

alors

$$\tilde{A}(t) \cdot \exp\left(a + \int_0^{Z_t} n(s) ds\right) \quad \forall t \in [0; T];$$

Lemme I.3.8. Soient $m, n \in C(0; T; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0; T]$ et $a \geq 0$. Soit également $\dot{A} : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2} \dot{A}^2(t) \cdot \frac{1}{2} a^2 + \int_0^{Z_t} m(s) \dot{A}(s) ds + \int_0^{Z_t} n(s) \dot{A}^2(s) ds \quad \forall t \in [0; T];$$

alors

$$|\dot{A}(t)| \cdot \exp\left(a + \int_0^{Z_t} m(s) ds + \int_0^{Z_t} n(s) |\dot{A}(s)| ds\right) \quad \forall t \in [0; T];$$

Chapitre 2

Problème viscoélastique avec compliance normale, adhésion et endommagement

Dans ce chapitre, nous considérons un problème quasistatique de contact avec endommagement pour un matériau viscoélastique non-linéaire. Le contact est modélisé par une compliance normale. L'adhésion de la surface de contact est considérée et elle est modélisée par une variable de surface, le champ d'adhésion, dont l'évolution est décrite par une équation différentielle du premier ordre. Nous écrivons le problème mécanique et nous précisons les hypothèses adéquates sur les données a. n. d'obtenir la formulation variationnelle. Ensuite, nous énonçons et démontrons notre résultat d'existence et d'unicité. La démonstration s'appuie sur des propriétés des opérateurs monotones, un résultat classique d'existence et d'unicité sur les inéqua-

tions paraboliques, une version du Théorème de Cauchy-Lipschitz et des arguments de point fixe. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de la publication [45].

2.1 Formulation du problème

Nous nous plaçons dans le cadre physique no. 1 et nous considérons que le corps est viscoélastique, plus exactement nous utilisons une loi de comportement de type Kelvin-Voigt. Le contact est supposé avec adhésion et endommagement et il est modélisé par une compliance normale.

Ce modèle mathématique nous conduit au problème mécanique suivant.

Problème P: Trouver un champ de déplacement $u :]0; T[\rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ de contraintes $\sigma :]0; T[\rightarrow S_d$, un champ d'endommagement $\omega :]0; T[\rightarrow \mathbb{R}$ et un champ d'adhésion $\gamma : \Gamma_3 \times]0; T[\rightarrow [0; 1]$ tels que

$$\sigma = A''(\dot{u}) + G''(u; \omega) \quad \text{dans }]0; T[; \quad (II.1.1)$$

$$\dot{\omega} \leq \kappa + \alpha_K(\omega) \leq \dot{A}''(u; \omega) \quad \text{dans }]0; T[; \quad (II.1.2)$$

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans }]0; T[; \quad (II.1.3)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times]0; T[; \quad (II.1.4)$$

$$\sigma^0 = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times]0; T[; \quad (II.1.5)$$

$$i \frac{3}{4} = p_0(u_0) i \cdot \omega^{-2} (i R(u_0))_+ \quad \text{sur } i_3 \mathcal{L}(0; T); \quad (\text{II.1.6})$$

$$\frac{3}{4}_i = 0 \quad \text{sur } i_3 \mathcal{L}(0; T); \quad (\text{II.1.7})$$

$$\frac{\partial \mathbb{R}}{\partial} = 0 \quad \text{sur } i \mathcal{L}(0; T); \quad (\text{II.1.8})$$

$$\dot{i} = i \cdot \omega^{-\frac{h}{2}} \mathcal{L}(i R(u_0))_+^{\frac{\alpha_2}{2}} i^{\frac{i}{2}} a_+ \quad \text{sur } i_3 \mathcal{L}(0; T); \quad (\text{II.1.9})$$

$$u(0) = u_0; \quad \mathbb{R}(0) = \mathbb{R}_0 \quad \text{dans } -; \quad (\text{II.1.10})$$

$$\bar{\cdot}(0) = \bar{\cdot}_0 \quad \text{sur } i_3; \quad (\text{II.1.11})$$

La relation (II.1.1) représente la loi de comportement nonlinéaire viscoélastique avec endommagement; l'évolution du champ d'endommagement est gouvernée par l'inclusion donnée par la relation (II.1.2), où $\dot{A}$ est la source mécanique d'endommagement, ∂_K est le sous différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble des fonctions admissibles d'endommagement K ; (II.1.3) représente l'équation d'équilibre, (II.1.4) et (II.1.5) sont les conditions aux limites de déplacement-traction, respectivement. (II.1.6) représente la condition de compliance normale avec adhésion. Dans cette condition, l'interpénétration entre le corps et la fondation se produit, ce qui veut dire que u_0 peut être positif sur i_3 . La condition (II.1.7) représente la condition

de contact sans frottement et montre que la contrainte tangentielle s'annule sur la surface de contact durant le processus. (II.1.8) représente une condition aux limites homogène de Newman où $\frac{\partial \sigma}{\partial n}$ représente la dérivée normale de σ . Ensuite, l'équation (II.1.9) représente l'équation différentielle ordinaire qui décrit l'évolution du champ d'adhésion et elle est déjà utilisée dans [8], voir aussi [47] pour plus de détails. Ici, α_0 et α_a sont des coefficients d'adhésion donnés qui peuvent dépendre de $x \in \mathbb{R}_+$ et R est l'opérateur de troncature donné par (I.1.35). Dans (II.1.10), u_0 est le déplacement initial et σ_0 est l'endommagement initial. Finalement, (II.1.11) est la condition initiale où σ_0 est le champ d'adhésion initial.

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème mécanique (II.1.1)-(II.1.11), nous avons besoin d'hypothèses supplémentaires sur les données. Nous supposons que l'opérateur de viscosité $A : \mathbb{R} \times S_d \rightarrow S_d$ satisfait

- (a) Il existe une constante $L_A > 0$ telle que
- $$|A(x; \gamma_1) - A(x; \gamma_2)| \leq L_A |\gamma_1 - \gamma_2| \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in S_d, \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}_+;$$
- (b) Il existe une constante $m_A > 0$ telle que
- $$(A(x; \gamma_1) - A(x; \gamma_2)) : (\gamma_1 - \gamma_2) \geq m_A |\gamma_1 - \gamma_2|^2 \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in S_d, \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}_+;$$
- (c) L'application $x \mapsto A(x; \gamma)$ est Lebesgue mesurable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $\gamma \in S_d$;
- (d) L'application $x \mapsto A(x; 0) \in H$:
- (II.1.12)

L'opérateur d'élasticité $G : \mathbb{R} \times S_d \rightarrow S_d$ satisfait

8

~~~~~

(a) Il existe une constante  $L_G > 0$  telle que

$$|G(x; \gamma_1; \mathbb{R}_1) - G(x; \gamma_2; \mathbb{R}_2)| \leq L_G (|\gamma_1 - \gamma_2| + |\mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2|)$$

~~~~~

$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in S_d, \mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^d :$

(b) Pour tout $\gamma \in S_d$ et $\mathbb{R} \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d$! $G(x; \gamma; \mathbb{R})$ est Lebesgue mesurable sur $\mathbb{R}^d$:

(c) L'application $x \in \mathbb{R}^d \mapsto G(x; 0; 0) \in \mathbb{H}$:

(II.1.13)

La fonction source d'endommagement $\hat{A} : \mathbb{R}^d \times S_d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

8

~~~~~

(a) Il existe une constante  $L > 0$  telle que

$$|\hat{A}(x; \gamma_1; \mathbb{R}_1) - \hat{A}(x; \gamma_2; \mathbb{R}_2)| \leq L^2 (|\gamma_1 - \gamma_2| + |\mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2|)$$

~~~~~

$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in S_d, \mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^d :$

(b) Pour tout $\gamma \in S_d$ et $\mathbb{R} \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d$! $\hat{A}(x; \gamma; \mathbb{R})$ est Lebesgue mesurable sur $\mathbb{R}^d$:

(c) L'application $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \hat{A}(x; 0; 0) \in \mathbb{H}$:

(II.1.14)

La fonction de compliance normale $p_\circ : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait

8

~~~~~

(a) Il existe  $L_\circ > 0$  telle que

$$|p_\circ(x; r_1) - p_\circ(x; r_2)| \leq L_\circ |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}^d; \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^d :$$

(II.1.15)

~~~~~

(b) L'application $x \in \mathbb{R}^d \mapsto p_\circ(x; r)$ est mesurable, sur $\mathbb{R}^d$; $\forall r \in \mathbb{R}^d$:

(c) L'application $x \in \mathbb{R}^d \mapsto p_\circ(x; r) = 0$ pour tout $r \in \mathbb{R}^d$ p.p. $x \in \mathbb{R}^d$:

Les coefficients d'adhésion satisfont

$$a_\circ \in L^1(\mathbb{R}^d); a_\circ \geq 0, a_a \in L^1(\mathbb{R}^d); a_a \geq 0: \quad (II.1.16)$$

Nous supposons aussi que les forces surfaciques et volumiques ont la régularité

$$f_0 \in C(0; T; H); \quad f_2 \in C^3(0; T; L^2(\Gamma_2)^d); \quad (II.1.17)$$

Finalement, on assume que les données initiales satisfont les conditions suivantes

$$u_0 \in V; \quad (II.1.18)$$

$$\theta_0 \in K; \quad (II.1.19)$$

$$\bar{u}_0 \in Z; \quad (II.1.20)$$

On définit la forme bilinéaire $a : H^1(\cdot) \times H^1(\cdot) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$a(u; v) = k \int_{\Gamma} r \cdot r' \, dx; \quad (II.1.21)$$

Par la suite, on note par $f : [0; T] \rightarrow V$ la fonction définie par

$$(f(t); v)_V = \int_{\Gamma_2} f_0(t) : v \, dx + \int_{\Gamma_3} f_2(t) : v \, da \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0; T); \quad (II.1.22)$$

La fonction d'adhésion $j_{ad} : L^1(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$j_{ad}(\bar{u}; u; v) = \int_{\Gamma_3} | \sigma \cdot \nu - R(u_0) |_+ \, v_0 \, da; \quad (II.1.23)$$

En plus de la fonction (II.1.23), nous avons besoin de la fonction de compliance normale $j_{nc} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$j_{nc}(u; v) = \int_{\Gamma_3} p_0(u_0) v_0 \, da; \quad (II.1.24)$$

En observant (II.1.16)-(II.1.17), nous constatons que les intégrales données dans (II.1.23) et (II.1.24) sont bien définies et notons que les conditions (II.1.17) donnent

$$f \in C(0; T; V); \quad (II.1.25)$$

En utilisant des arguments standards basés sur la formule de Green (I.2.10), nous pouvons considérer la formulation variationnelle du problème sans frottement et avec compliance normale (II.1.1)-(II.1.11).

Problème PV: Trouver un champ de déplacement $u :]0; T[\rightarrow V$, un champ des contraintes $\sigma :]0; T[\rightarrow H$, un champ d'endommagement $\phi : [0; T] \rightarrow H^1(-)$ et un champ d'adhésion $\bar{\gamma} : [0; T] \rightarrow L^1(\Gamma_3)$ tels que

$$\sigma(t) = A'' \dot{u}(t)^\phi + G''(u(t); \phi(t)); \quad \text{p.p. } t \in (0; T); \quad (II.1.26)$$

$$\phi(t) \in K \quad \text{pour tout } t \in [0; T], \quad (\dot{\phi}(t); \eta)_{L^2(-)} + a(\phi(t); \eta) \leq 0$$

$$, \quad (A''(u(t); \phi(t)); \eta)_{L^2(-)} \leq 0 \quad \forall \eta \in K; \quad (II.1.27)$$

$$(\sigma(t); v)_H + j_{ad}(\bar{\gamma}(t); u(t); v) + j_{nc}(u(t); v)$$

$$= (f(t); v)_V \quad \forall v \in V; \quad \forall t \in [0; T]; \quad (II.1.28)$$

$$\dot{\bar{u}}(t) = \bar{u}_0 - \int_{\Gamma_3} (R(u_0))_+^{\alpha_2} \bar{u}_a^i \quad \text{p.p. } t \in (0; T); \quad (\text{II.1.29})$$

$$u(0) = u_0; \bar{u}(0) = \bar{u}_0; \bar{u}'(0) = \bar{u}'_0; \quad (\text{II.1.30})$$

Notons que le problème variationnel PV est formulé en fonction du champ de déplacement, du champ des contraintes, du champ d'endommagement et du champ d'adhésion. L'existence de l'unique solution du problème PV est citée et prouvée dans le paragraphe suivant. Pour cela, nous considérons la remarque suivante qui va être utilisée en différents emplacements de la démonstration.

Remarque II.1.1. De (II.1.29) nous obtenons que $\bar{u}'(x; t) \leq \bar{u}'_0(x)$, et puisque $\bar{u}'_0(x) \in \mathbb{R}$ alors $\bar{u}'(x; t) \leq 1$ pour tout $t \geq 0$, p.p. sur Γ_3 . Si $\bar{u}'(x; t_0) = 0$ pour tout $t = t_0$ nous pouvons déduire de (II.1.29) que $\dot{\bar{u}}(x; t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$, et par conséquent, $\bar{u}'(x; t) = 0$ quelque soit $t \geq t_0$. Nous concluons que $0 \leq \bar{u}'(x; t) \leq 1$ $\forall t \in [0; T]$; p.p. $x \in \Gamma_3$.

Dans ce qui suit, nous considérons que C est une constante positive dépendant de $\bar{u}; \bar{u}_1; \bar{u}_3; \bar{u}_0; L$ et qui peut changer d'un endroit à l'autre. Premièrement, nous remarquons que j_{ad} et j_{nc} sont linéaires par rapport au dernier argument et par conséquent

$$j_{ad}(\bar{u}; u; \bar{u} v) = \bar{u} j_{ad}(\bar{u}; u; v); \quad j_{nc}(u; \bar{u} v) = \bar{u} j_{nc}(u; v); \quad (\text{II.1.31})$$

Ensuite, en utilisant (II.1.23) ainsi que les propriétés de l'opérateur R donné par (I.1.35), on trouve

$$\begin{aligned}
& \|j_{ad}(\bar{u}_1; u_1; v) - j_{ad}(\bar{u}_2; u_2; v)\| \\
&= \int_{\Gamma_3} \left(\frac{1}{2} \left[(j'(\bar{u}_1; u_1; v))_+ - (j'(\bar{u}_2; u_2; v))_+ \right] v \right) da \\
&+ \int_{\Gamma_3} \left(\frac{1}{2} \left(\bar{u}_1^2 - \bar{u}_2^2 \right) (j'(\bar{u}_1; u_1; v))_+ \right) v da \\
&= C \int_{\Gamma_3} |\bar{u}_1 - \bar{u}_2| |j'(\bar{u}_1; u_1; v)| da;
\end{aligned}$$

et de (I.2.15) on obtient

$$\begin{aligned}
& \|j_{ad}(\bar{u}_1; u_1; v) - j_{ad}(\bar{u}_2; u_2; v)\| \\
&= C \|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|j'(\bar{u}_1; u_1; v)\|_V; \quad (II.1.32)
\end{aligned}$$

Maintenant, nous utilisons (II.1.24) pour remarquer que

$$\|j_{nc}(u_1; v) - j_{nc}(u_2; v)\| = \int_{\Gamma_3} |j'(\bar{u}_1; u_1; v) - j'(\bar{u}_2; u_2; v)| |v| da;$$

et alors (II.1.15) (a) et (I.2.15) donnent

$$\|j_{nc}(u_1; v) - j_{nc}(u_2; v)\| = C \|u_1 - u_2\|_V \|j'(\bar{u}_1; u_1; v)\|_V; \quad (II.1.33)$$

Les inégalités (II.1.32)-(II.1.33) combinées avec les égalités (II.1.31) vont être utilisées souvent dans la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel PV.

2.2 Résultat d'existence et d'unicité

Théorème II.1.2. Supposons que (II.1.12)-(II.1.20) sont vérifiées. Alors, le problème PV a une solution unique $(u; \gamma; \bar{\gamma}; \mathbb{R})$ qui satisfait

$$u \in C^1(0; T; V);$$

$$\gamma \in C(0; T; H_1);$$

$$\bar{\gamma} \in W^{1,1}(0; T; L^1(\Gamma_3));$$

$$\mathbb{R} \in W^{1,2}(0; T; L^2(\Gamma) \setminus L^2(0; T; H^1(\Gamma))) : \quad (\text{II.1.34})$$

Un quadruplet $(u; \gamma; \bar{\gamma}; \mathbb{R})$ qui satisfait (II.1.26)-(II.1.30) est appelé une solution faible du problème de contact avec compliance normale P . Nous concluons que, sous les hypothèses citées, le problème (II.1.1)-(II.1.11) a une solution faible unique satisfaisant (II.1.34). Nous nous intéressons à présent à la démonstration du Théorème II.1.2 qui est établie en plusieurs étapes. Pour cela, nous supposons dans ce qui suit que (II.1.12)-(II.1.20) sont satisfaites. Dans tout ce qu'on va élaborer dans la suite, nous notons par C une constante positive qui peut dépendre de $\mu; \gamma_1; \gamma_3; A; \sigma; L$ et T mais qui ne dépend pas de ε et non plus des autres données, et dont la valeur peut changer de place en place. De plus, pour raison de simplicité, nous supprimons, dans ce qui suit, l'explicite dépendance des différentes fonctions de $x \in \Gamma_1$. La démonstration du Théorème II.1.2 se fera en plusieurs étapes. Dans la première étape, nous résolvons l'équation différentielle (II.1.29) concernant le champ d'adhésion, où u est donné,

et nous étudions la dépendance continue de la solution du problème d'adhésion par rapport à u :

Lemme II.1.3. Pour tout $u \in C(0; T; V)$, il existe une solution unique

$$\bar{u} \in W^{1;1}(0; T; L^1(\Gamma_3))$$

satisfaisant

$$\dot{\bar{u}}(t) = \frac{h}{\rho} \circ \bar{u}(t) \otimes (R(u_0(t)))_+^{\alpha_2} \frac{i}{z_a} \quad \text{p.p. } t \in (0; T);$$

$$\bar{u}(0) = \bar{u}_0.$$

De plus, $\bar{u}(t) \in Z$ pour $t \in [0; T]$, p.p. sur Γ_3 , et il existe une constante $C > 0$, telle que, pour tout $u_1, u_2 \in C(0; T; V)$;

$$\|\bar{u}_{u_1}(t) - \bar{u}_{u_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \quad \forall t \in [0; T];$$

Démonstration. Considérons l'application $F : [0; T] \times L^1(\Gamma_3) \rightarrow L^1(\Gamma_3)$ définie par

$$F(t; \bar{u}) = \frac{h}{\rho} \circ \bar{u}(t) \otimes (R(u_0))_+^{\alpha_2} \frac{i}{z_a};$$

$\forall t \in [0; T]$ et $\bar{u} \in L^1(\Gamma_3)$: Il vient des propriétés de l'opérateur de troncature R donné par (I.1.35) que F est uniformément continue par rapport au temps, elle est de Lipschitz par rapport au second argument. De plus, pour tout $\bar{u} \in L^1(\Gamma_3)$, l'application $t \mapsto F(t; \bar{u})$ appartient à $L^1(0; T; L^1(\Gamma_3))$. Alors, l'existence et l'unicité de la solution $\bar{u}$ découle du théorème classique de Cauchy-Lipschitz donné dans le

Théorème I.3.5. Notons aussi que les arguments utilisés dans la Remarque II.1.1 montrent que $0 \leq \bar{u}_i(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0; T]$, p.p. sur Ω_3 : Par conséquent, de (I.2.16), on trouve que $\bar{u}_i(t) \in Z$ quelque soit $t \in [0; T]$, ce qui achève la démonstration du Lemme. Maintenant, soient $u_1, u_2 \in C(0; T; V)$ et soit $t \in [0; T]$: Nous avons, pour $i = 1, 2$;

$$\bar{u}_i(t) = \bar{u}_i(0) + \int_0^t h_{\circ} \bar{u}_i(s) \mathcal{F}_i(R(u_{i\circ}(s)))_+^{\alpha_2} \bar{u}_i(s)_{\mathcal{A}_+}^i ds;$$

et alors

$$\begin{aligned} & \|\bar{u}_1(t) - \bar{u}_2(t)\|_{L^2(\Omega_3)} \\ & \leq C \int_0^t \|\bar{u}_1(s) \mathcal{F}_1(R(u_{1\circ}(s)))_+^{\alpha_2} \bar{u}_1(s) - \bar{u}_2(s) \mathcal{F}_1(R(u_{2\circ}(s)))_+^{\alpha_2} \bar{u}_2(s)\|_{L^2(\Omega_3)} ds. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de l'opérateur de troncature R donnée dans (I.1.35) et en considérant $\bar{u}_1 = \bar{u}_1 \vee \bar{u}_2 + \bar{u}_2$ on trouve

$$\|\bar{u}_1(t) - \bar{u}_2(t)\|_{L^2(\Omega_3)} \leq C \int_0^t \|\bar{u}_1(s) \vee \bar{u}_2(s)\|_{L^2(\Omega_3)} ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Omega_3)^d} ds.$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall (Lemme I.3.6 (2)), il vient que

$$\|\bar{u}_1(t) - \bar{u}_2(t)\|_{L^2(\Omega_3)}^2 \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Omega_3)^d}^2 ds;$$

et en utilisant (I.2.15) nous obtenons la seconde partie du Lemme II.1.3. ■

Maintenant, nous considérons le problème viscoélastique suivant et nous prouvons un résultat d'existence et d'unicité pour (II.1.26), (II.1.27) et (II.1.28) avec les conditions initiales correspondantes.

Problème QV. Trouver un champ de déplacement $u : [0; T] \rightarrow V$, un champ d'endommagement $\phi : [0; T] \rightarrow H^1(\cdot)$ et un champ de contraintes $\sigma : [0; T] \rightarrow H$ satisfaisant (II.2.28), (II.2.29) et

$$(\frac{3}{4}(t); " (v))_H + j_{ad}(\bar{u}_u(t); u(t); v) + j_{nc}(u(t); v)$$

$$= (f(t); v)_V \quad \forall v \in V; \quad \forall t \in [0; T]; \quad (II.1.35)$$

$$u(0) = u_0; \quad \bar{u}(0) = \bar{u}_0; \quad (II.1.36)$$

Soit $\gamma \in C(0; T; H)$ et considérons le problème variationnel suivant.

Problème QV: Trouver un champ de déplacement $u : [0; T] \rightarrow V$ et un champ de contraintes $\frac{3}{4} : [0; T] \rightarrow H$ tels que

$$\frac{3}{4}(t) = A'' \dot{u}(t)^\phi + \gamma(t); \quad (II.1.37)$$

$$(\frac{3}{4}(t); " (v))_H + j_{ad}(\bar{u}_u(t); u(t); v) + j_{nc}(u(t); v)$$

$$= (f(t); v)_V \quad \forall v \in V; \quad \forall t \in [0; T]; \quad (II.1.38)$$

$$u(0) = u_0; \quad (II.1.39)$$

Pour résoudre le problème QV; nous considérons $\mu \in C(0; T; V)$ et nous construisons le problème intermédiaire suivant.

Problème QV _{μ} : Trouver un champ de déplacement $u_\mu : [0; T] \rightarrow V$ et un champ de contraintes $\frac{3}{4}_\mu : [0; T] \rightarrow H$ tels que

$$\frac{3}{4}u_\mu(t) = A'' \dot{u}_\mu(t)^\phi + f(t); \quad (\text{II.1.40})$$

$$(\frac{3}{4}u_\mu(t); u(v))_H + (\mu(t); v)_V$$

$$= (f(t); v)_V \quad \forall v \in V; \quad \forall t \in [0; T]; \quad (\text{II.1.41})$$

$$u_\mu(0) = u_0; \quad (\text{II.1.42})$$

Lemme II.1.4. Il existe une solution unique $(u_\mu; \frac{3}{4}u_\mu)$ du problème QV_μ satisfaisant $u_\mu \in C^1(0; T; V)$, $\frac{3}{4}u_\mu \in C(0; T; H_1)$:

Démonstration. Nous définissons l'opérateur $A : V \rightarrow V$ par

$$(A u; v)_V = (A''(u); u(v))_H \quad \forall u, v \in V; \quad (\text{II.1.43})$$

En utilisant (II.1.12), il vient que A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, alors A est inversible et $A^{-1} : V \rightarrow V$ est également un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Par conséquent, il existe une fonction unique v_μ qui satisfait

$$v_\mu \in C(0; T; V); \quad (\text{II.1.44})$$

$$A v_\mu = h_\mu(t); \quad (\text{II.1.45})$$

où $h_\mu \in C(0; T; V)$ est tel que

$$(h_{\mu}(t); v)_V = (f(t); v)_V - (\dot{\mu}(t); v)_H - (\mu(t); v)_V - 8v^2 V; 8t^2 [0; T]: \quad (II.1.46)$$

Soit $u_{\mu} : [0; T] \rightarrow V$ la fonction définie par

$$u_{\mu}(t) = \int_0^t v_{\mu}(s) \, ds + u_0 - 8t^2 [0; T]: \quad (II.1.47)$$

Il vient de (II.1.47), (II.1.44) et (II.1.45) que $u_{\mu} \in C^1(0; T; V)$. Considérons $\frac{3}{4}\mu$ défini dans (II.1.40), puisque, $\dot{\mu} \in C(0; T; H)$; $u_{\mu} \in C^1(0; T; V)$ et de la relation (II.1.12) nous concluons que $\frac{3}{4}\mu \in C(0; T; H)$. Comme $\text{Div} \frac{3}{4}\mu = -f_0 \in C(0; T; H)$, nous obtenons que $\frac{3}{4}\mu \in C(0; T; H_1)$. Ceci achève la partie existence du Lemme II.1.4. L'unicité de la solution découle de l'unicité de la solution de l'équation dépendant du temps (II.1.45). Finalement, $(u_{\mu}; \frac{3}{4}\mu)$ est l'unique solution du problème QV_{μ} obtenue dans le Lemme II.1.4, ce qui conclut la démonstration. ■

Notons par $\alpha_{\mu}(t)$ l'élément de V défini par

$$(\alpha_{\mu}(t); v)_V = j_{ad}(\dot{u}_{\mu}(t); u_{\mu}(t); v) + j_{nc}(u_{\mu}(t); v) - 8v^2 V; 8t^2 [0; T]: \quad (II.1.48)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme II.1.5. Pour tout $\mu \in C(0; T; V)$; la fonction $\alpha_{\mu} : [0; T] \rightarrow V$ appartient à $C(0; T; V)$. De plus, il existe un unique élément $\mu^{\alpha} \in C(0; T; V)$ tel que $\alpha_{\mu^{\alpha}} = \mu^{\alpha}$.

Démonstration. Soit $\mu \in C(0; T; V)$ et soient $t_1, t_2 \in [0; T]$. En utilisant

(II.1.32), (II.1.33) et (II.1.48) on obtient

$$|j_{\mu}(t_1) - j_{\mu}(t_2)|_V \leq C \left(\overline{|u_{\mu}(t_1) - u_{\mu}(t_2)|}_{L^2(I_3)} + |ju_{\mu}(t_1) - ju_{\mu}(t_2)|_V \right); \quad (\text{II.1.49})$$

par le Lemme II.1.4, $u_{\mu} \in C^1(0; T; V)$, alors nous déduisons de l'inégalité (II.1.49) que $\mu \in C(0; T; V)$. Soient maintenant $\mu_1, \mu_2 \in C(0; T; V)$ et utilisons les notations $u_{\mu_i} = u_i$; $\dot{u}_{\mu_i} = v_{\mu_i} = v_i$, et $\overline{u_{\mu_i}} = \overline{u_i}$ pour $i = 1, 2$. Exploitions encore une fois les relations (II.1.32), (II.1.33) et (II.2.48) pour trouver

$$|j_{\mu_1}(t) - j_{\mu_2}(t)|_V^2 \leq C \left(\overline{|u_1(t) - u_2(t)|}_{L^2(I_3)}^2 + |ju_1(t) - ju_2(t)|_V^2 \right); \quad (\text{II.1.50})$$

Donc, du Lemme II.1.3, on obtient

$$\begin{aligned} |j_{\mu_1}(t) - j_{\mu_2}(t)|_V^2 &\leq C |ju_1(t) - ju_2(t)|_V^2 + \int_0^t |ju_1(s) - ju_2(s)|_V^2 ds \\ &\leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \quad t \in [0; T]; \end{aligned} \quad (\text{II.1.51})$$

de plus, de (II.1.40)-(II.1.41) il vient que

$$(A''(v_1) - A''(v_2); (v_1) - (v_2))_H + (\mu_1 - \mu_2; v_1 - v_2)_V = 0 \text{ sur } (0; T); \quad (\text{II.1.52})$$

d'où

$$|v_1(s) - v_2(s)|_V \leq C |\mu_1(s) - \mu_2(s)|_V \quad s \in [0; T]; \quad (\text{II.1.53})$$

Maintenant des inégalités (II.2.51) et (II.2.53) on trouve

$$\| \mu_1(t) - \mu_2(t) \|_V^2 \leq C \int_0^t \| \mu_1(s) - \mu_2(s) \|_V^2 ds \quad \forall t \in [0; T]:$$

La répétition de cette inégalité n fois donne

$$\| \mu_1 - \mu_2 \|_{C(0;T;V)}^2 \leq \frac{(CT)^n}{n!} \| \mu_1 - \mu_2 \|_{C(0;T;V)}^2;$$

ce qui implique que pour n suffisamment grand, α^n est une contraction dans l'espace de Hilbert $C(0;T;V)$. Alors, il existe un unique $\mu^\alpha \in C(0;T;V)$ tel que $\alpha^n \mu^\alpha = \mu^\alpha$ et μ^α est aussi l'unique point fixe de α : ■

Lemme II.1.6. Il existe une solution unique du problème QV $_\mu$ satisfaisant

$$u \in C^1(0;T;V); \quad \gamma \in C(0;T;H_1):$$

Démonstration. Soit $\mu^\alpha \in C(0;T;V)$ le point fixe de α , le Lemme II.1.4 implique que $(u_{\mu^\alpha}; \gamma_{\mu^\alpha}) \in C^1(0;T;V) \times C(0;T;H_1)$ est l'unique solution de QV $_{\mu^\alpha}$ pour $\mu = \mu^\alpha$. Comme $\alpha \mu^\alpha = \mu^\alpha$ et des relations (II.2.48), (II.2.40), (II.2.41) et (II.2.42), nous obtenons que $(u; \gamma) = (u_{\mu^\alpha}; \gamma_{\mu^\alpha})$ est l'unique solution de QV $_\mu$. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur α donné dans (II.2.48). ■

Soit $\ell \in C(0;T;L^2(-))$. On suppose que les hypothèses du Théorème II.1.2 sont satisfaites et on considère le problème intermédiaire suivant pour le champ d'endommagement.

Problème PV $_\ell$. Trouver un champ d'endommagement $\mathcal{R} : [0;T] \rightarrow H^1(-)$ tel que $\mathcal{R}(t) \in K$, pour tout $t \in [0;T]$ et

$$(\mathbb{R}_i(t); \gg_i \mathbb{R}_i(t))_{L^2(-)} + a(\mathbb{R}_i(t); \gg_i \mathbb{R}_i(t))$$

$$, (\mathbb{R}_i(t); \gg_i \mathbb{R}_i(t))_{L^2(-)} \gg 2K; p. p. t^2(0; T); \quad (II.1.54)$$

$$\mathbb{R}(0) = \mathbb{R}_0: \quad (II.1.55)$$

Lemme II.1.7. Le problème PV_i a une solution unique $\mathbb{R}_i$ telle que

$$\mathbb{R}_i \in W^{1;2}_i(0; T; L^2(-)) \setminus L^2_i(0; T; H^1(-))^\phi: \quad (II.1.56)$$

Démonstration. Nous utilisons (II.1.19), (II.1.21) et un résultat classique d'existence et d'unicité sur les inéquations paraboliques donné dans le théorème I.3.3 (voir par exemple [2 p. 124]). ■

Comme conséquence des problèmes QV_i et PV_i , on peut définir l'opérateur L : $C(0; T; H \otimes L^2(-)) \rightarrow C(0; T; H \otimes L^2(-))$ par

$$L(\cdot; \cdot) = (G(\cdot(u\cdot); \mathbb{R}_i); \dot{A}(\cdot(u\cdot); \mathbb{R}_i)); \quad (II.1.57)$$

pour tout $(\cdot; \cdot) \in C(0; T; H \otimes L^2(-))$. Alors, nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.2.8. L'opérateur L a un point fixe unique

$$(\cdot^{\alpha}; \cdot^{\alpha}) \in C_i(0; T; H \otimes L^2(-))^\phi:$$

Démonstration. Soient $(\cdot_1; \cdot_1), (\cdot_2; \cdot_2) \in C(0; T; H \otimes L^2(-))$, soit $t \in [0; T]$

et utilisons les notations $u_{\cdot i} = u_i$; $\dot{u}_{\cdot i} = v_{\cdot i} = v_i$, et $\mathbb{Q}_{\cdot i} = \mathbb{Q}_i$ pour $i = 1, 2$. En prenant en considération les relations (II.1.13), (II.1.14) et (II.2.57), on déduit que

$$jL(\cdot_1; \cdot_1) \in L(\cdot_2; \cdot_2)_{H \otimes L^2(\cdot)}$$

$$\cdot C \int_0^T j u_1(t) \cdot u_2(t) j_V + j \mathbb{Q}_1(t) \cdot \mathbb{Q}_2(t) j_{L^2(\cdot)} : \quad (II.1.58)$$

De plus, en utilisant (II.1.38) nous obtenons

$$\begin{aligned} & (A''(v_1) \cdot A''(v_2); (v_1) \cdot (v_2))_H = \\ & j_{ad} \int_{u_2; u_2; v_1} v_2 \cdot j_{ad} \int_{u_1; u_1; v_1} v_2 \\ & + j_{nc}(u_2; v_1 \cdot v_2) \cdot j_{nc}(u_1; v_1 \cdot v_2) \\ & + (\cdot_2 \cdot \cdot_1; (v_1) \cdot (v_2))_H \text{ p.p. } t \in (0; T): \end{aligned} \quad (II.1.59)$$

Rappelons nous de (II.1.32), (II.1.33) et (II.1.12) pour trouver

$$j v_1(t) \cdot v_2(t) j_V^2 \cdot C \int_0^T \int_{u_1} \int_{u_2} \int_{L^2(i_3)} + j u_1(t) \cdot u_2(t) j_V^2 + j \cdot_1(t) \cdot \cdot_2(t) j_H^2 : \quad (II.1.60)$$

Du Lemme II.1.3, on obtient

$$\begin{aligned} & j v_1(t) \cdot v_2(t) j_V^2 \cdot C(j \cdot_1(t) \cdot \cdot_2(t) j_H^2 + j u_1(t) \cdot u_2(t) j_V^2 \\ & + \int_0^T j u_1(s) \cdot u_2(s) j_V^2 ds) \cdot C(j \cdot_1(t) \cdot \cdot_2(t) j_H^2 + \int_0^T j v_1(s) \cdot v_2(s) j_V^2 ds): \end{aligned} \quad (II.1.61)$$

L'application de l'inégalité de Gronwall (Lemme I.3.6 (1)) produit

$$\|v_1(t) - v_2(t)\|_V^2 \leq C \|j'_1(t) - j'_2(t)\|_H^2 : \quad (\text{II.1.62})$$

Comme $u_1(0) = u_2(0)$; nous obtenons

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq C \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V \, ds:$$

Des deux inégalités précédentes on trouve

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq C \int_0^t \|j'_1(t) - j'_2(t)\|_H \, ds: \quad (\text{II.1.63})$$

De (II.1.54) on déduit que

$$(\dot{\mathbb{R}}_1; \mathbb{R}_2 - \mathbb{R}_1)_{L^2(-)} + a(\mathbb{R}_1; \mathbb{R}_2 - \mathbb{R}_1)$$

$$\leq (\dot{\mathbb{I}}_1; \mathbb{R}_2 - \mathbb{R}_1)_{L^2(-)} \text{ p.p. } t \in (0; T);$$

et

$$(\dot{\mathbb{R}}_2; \mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2)_{L^2(-)} + a(\mathbb{R}_2; \mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2)$$

$$\leq (\dot{\mathbb{I}}_2; \mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2)_{L^2(-)} \text{ p.p. } t \in (0; T):$$

La sommation des deux dernières inégalités donne

$$(\dot{\mathbb{R}}_1 - \dot{\mathbb{R}}_2; \mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2)_{L^2(-)} + a(\mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2; \mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2)$$

$$\leq \|\dot{\mathbb{I}}_1 - \dot{\mathbb{I}}_2\|_{L^2(-)} \|\mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2\|_{L^2(-)} \text{ p.p. } t \in (0; T):$$

En intégrant l'inégalité précédente sur l'intervalle $[0; t]$, et après quelques manipulations on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|j^{\otimes_1}(t) - j^{\otimes_2}(t)\|_{L^2(-)}^2 &\leq C \int_0^t \|j^{\otimes_1}(s) - j^{\otimes_2}(s)\|_{L^2(-)} \|j^{\otimes_1}(s) - j^{\otimes_2}(s)\|_{L^2(-)} ds \\ &\quad + C \int_0^t \|j^{\otimes_1}(s) - j^{\otimes_2}(s)\|_{L^2(-)}^2 ds. \end{aligned}$$

L'application de l'inégalité de Gronwall (Lemme I.3.8) à la dernière inégalité produit

$$\|j^{\otimes_1}(t) - j^{\otimes_2}(t)\|_{L^2(-)} \leq C \int_0^t \|j^{\otimes_1}(s) - j^{\otimes_2}(s)\|_{L^2(-)} ds. \quad (\text{II.1.64})$$

Substituons (II.1.63) et (II.1.64) dans (II.1.58) pour avoir

$$\begin{aligned} &\|L(j^{\otimes_1} - j^{\otimes_2})\|_{H^1 L^2(-)} \\ &\leq C \int_0^t \|j^{\otimes_1}(s) - j^{\otimes_2}(s)\|_{H^1 L^2(-)} ds. \end{aligned} \quad (\text{II.1.65})$$

Le Lemme II.1.8 est alors une conséquence du résultat (II.1.65) et du Théorème du point fixe de Banach. ■

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour résoudre QV:

Lemme II.1.9. Il existe une solution unique $f \in \mathcal{C}^0([0; T]; V)$, $g \in \mathcal{C}^0([0; T]; H_1)$, $u \in W^{1,2}([0; T]; L^2(-)) \cap L^2([0; T]; H^1(-))$:

Démonstration. soit $(f^\mu, g^\mu) \in \mathcal{C}^0([0; T]; H^1 L^2(-))$ le point fixe de l'opérateur L défini dans (II.1.57), du Lemme II.1.6, nous déduisons que $f^\mu, g^\mu = f^\mu, g^\mu$

$C^1(0; T; V) \cap C(0; T; H_1)$ est l'unique solution de QV. Puisque $L(u'; t) = (u'; t)$, des relations (II.1.37), (II.1.38), (II.1.39) et du Lemme II.1.7 nous obtenons que $fu; \frac{3}{4}; @g = fu; \frac{3}{4}; @g$ est la solution unique de QV. La régularité de la solution découle du Lemme II.1.7. L'unicité de la solution résulte de l'unicité du point fixe de l'opérateur L :

Le Théorème II.1.2 est à présent une conséquence du Lemme II.1.3 et du Lemme II.1.9. ■

Chapitre 3

Problèmes viscoplastiques avec adhésion et endommagement

Dans le troisième chapitre de cette thèse, nous proposons certaines innovations et prolongements des travaux pour des problèmes quasistatiques de contact sans frottement entre un corps viscoplastique avec endommagement et une fondation. Le contact est supposé avec adhésion. L'adhésion des surfaces de contact est modélisée par une variable de surface, le champ d'adhésion, dont l'évolution est décrite par une équation différentielle ordinaire du premier ordre. L'endommagement mécanique du matériau, causé par des déformations plastiques, est décrit par une inclusion de type parabolique. Ce chapitre est composé de deux paragraphes.

Dans le premier paragraphe, nous étudions le problème décrit ci-dessus dans le cas où la fondation est déformable et le corps peut, par conséquent, pénétrer dans la fondation; ceci sera modélisé par une compliance normale. Ce travail a fait l'objet de la publication [10].

Dans le deuxième paragraphe, nous considérons toujours un problème viscoplastique de contact avec adhésion et endommagement mais dans le cas où la fondation est rigide de telle sorte qu'il ne peut y avoir une interpénétration des corps; ceci sera modélisé par la condition de Signorini. Aussi, nous utilisons une autre équation différentielle pour décrire l'évolution du champ d'adhésion. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de la publication [11].

3.1 Problème avec compliance normale

Nous considérons ici un problème de contact sans frottement avec compliance normale, adhésion et endommagement entre un corps viscoplastique et une fondation dans un processus quasistatique. L'objectif est de formuler le problème variationnel et de prouver l'existence et l'unicité de sa solution. La démonstration est basée sur les équations variationnelles dépendant du temps, des résultats classiques sur les inéquations variationnelles elliptiques et paraboliques, les équations différentielles et des arguments de point fixe.

3.1.1 Formulation du problème

Nous reprenons le cadre physique no. 1 décrit dans le premier chapitre de cette thèse. Nous considérons que le corps est viscoplastique, plus exactement nous utilisons la loi constitutive viscoplastique avec endommagement (I.1.33). Le contact est modélisé par une compliance normale avec adhésion et sans frottement. Ceci nous conduit au problème mécanique suivant.

Problème P: Trouver un champ de déplacement $u : - \mathcal{E} [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\mathcal{S} : - \mathcal{E} [0; T] \rightarrow \mathbb{S}_d$, un champ d'endommagement $\mathcal{R} : - \mathcal{E} [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$ et un champ d'adhésion $\gamma : \Gamma_3 \mathcal{E} [0; T] \rightarrow [0; 1]$ tels que

$$\dot{\mathcal{S}} = E'' \dot{u}^\phi + G(\mathcal{S}; u; \mathcal{R}); \quad (\text{III.1.1})$$

$$\dot{\mathcal{R}} \leq \kappa \mathcal{R} + \mathcal{Q}_K(\mathcal{R}) \mathcal{A}(\mathcal{S}; u; \mathcal{R}); \quad (\text{III.1.2})$$

$$\text{Div } \mathcal{S} + f_0 = 0 \quad \text{dans } - \mathcal{E} (0; T); \quad (\text{III.1.3})$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \mathcal{E} (0; T); \quad (\text{III.1.4})$$

$$\mathcal{S}^\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \mathcal{E} (0; T); \quad (\text{III.1.5})$$

$$\gamma \mathcal{S} = p_\nu(u_0) \gamma^\circ \gamma^{-2} (\gamma R(u_0))_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \mathcal{E} (0; T); \quad (\text{III.1.6})$$

$$\mathcal{S}_t = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \mathcal{E} (0; T); \quad (\text{III.1.7})$$

$$\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \mathcal{E} (0; T); \quad (\text{III.1.8})$$

$$\dot{\gamma} = \gamma^\circ \gamma^{-\frac{h}{2}} (\gamma R(u_0))_+^{\frac{\alpha_2}{2}} \gamma^{\frac{i}{2}} \gamma_a \quad \text{sur } \Gamma_3 \mathcal{E} (0; T); \quad (\text{III.1.9})$$

$$u(0) = u_0; \mathcal{S}(0) = \mathcal{S}_0; \mathcal{R}(0) = \mathcal{R}_0 \quad \text{dans } -; \quad (\text{III.1.10})$$

$$\gamma(0) = \gamma_0 \quad \text{sur } \Gamma_3; \quad (\text{III.1.11})$$

La relation (III.1.1) représente la loi de comportement viscoplastique avec endommagement. L'évolution du champ d'endommagement est gouvernée par l'inclusion (III.1.2) et (III.1.3) représente l'équation d'équilibre. (III.1.4) et (III.1.5) sont les conditions aux limites de déplacement-traction, respectivement. (III.1.6) représente la condition de compliance normale avec adhésion. La condition de contact sans frottement est donnée par (III.1.7) et elle montre que les contraintes tangentielles

s'annulent sur la surface de contact durant le processus. (III.1.8) est la condition aux limites homogène de Newman où $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial n}$ représente la dérivée normale de $\mathcal{R}$. Ensuite, l'équation (III.1.9) représente l'équation différentielle ordinaire qui décrit l'évolution du champ de l'adhésion et qui est déjà utilisée dans [8], voir également [47] pour plus de détails. Rappelons que α_0 et α_a sont des coefficients d'adhésion donnés qui peuvent dépendre de x_2, x_3 et que R est l'opérateur de troncature donné dans (I.1.35). Notons que, dans ce modèle, une fois qu'un décollement a lieu le collage ne peut pas être rétabli car, comme on le constate dans (III.1.9), $\dot{\alpha} \leq 0$. Dans (III.1.10), on considère les conditions initiales où u_0 est le déplacement initial, σ_0 est la contrainte initiale et $\mathcal{R}_0$ est l'endommagement initial. Finalement, (III.1.11) est la condition initiale concernant le champ d'adhésion dans laquelle α_0 est le champ d'adhésion initial.

Dans l'étude du problème mécanique (III.1.1)-(III.1.11), nous avons besoin des hypothèses suivantes. L'opérateur $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfait

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } E = (e_{ijkh}) = e_{ijkh} \, 2 \, L^1(\cdot); \\
 & \text{(b) } E \, \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot E \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \, 8 \, \frac{\partial}{\partial x_j} \, 2 \, S_d, \text{ p.p. dans } \cdot; \\
 & \text{(c) } E \, \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}, m_E \, j \, \frac{\partial}{\partial x_j}^2 \, 8 \, \frac{\partial}{\partial x_j} \, 2 \, S_d, \text{ pour } m_E > 0:
 \end{aligned} \tag{III.1.12}$$

L'opérateur $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfait

- 8
- (a) Il existe une constante $L_G > 0$ telle que
- $$|G(x; \frac{3}{4}_1; " _1; \mathbb{R}_1) - G(x; \frac{3}{4}_2; " _2; \mathbb{R}_2)| \leq L_G (|\frac{3}{4}_1 - \frac{3}{4}_2| + |" _1 - " _2| + |\mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2|)$$
- $\frac{3}{4}_1, \frac{3}{4}_2, " _1, " _2 \in S_d, \mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2 \in \mathbb{R}$, p.p. $x \in \mathbb{R}^d$;
- (b) $x \mapsto G(x; \frac{3}{4}; " ; \mathbb{R})$ est une fonction Lebesgue mesurable dans -
- $\frac{3}{4}; " \in S_d, \mathbb{R} \in \mathbb{R}$;
- (c) $x \mapsto G(x; 0; 0; 0) \in H$:
- (III.1.13)

La fonction source d'endommagement $\hat{A} : \mathbb{R}^d \times S_d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

- 8
- (a) Il existe une constante $L > 0$ telle que
- $$|\hat{A}(x; \frac{3}{4}_1; " _1; \mathbb{R}_1) - \hat{A}(x; \frac{3}{4}_2; " _2; \mathbb{R}_2)| \leq L (|\frac{3}{4}_1 - \frac{3}{4}_2| + |" _1 - " _2| + |\mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2|)$$
- $\frac{3}{4}_1, \frac{3}{4}_2, " _1, " _2 \in S_d, \mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2 \in \mathbb{R}$, p.p. $x \in \mathbb{R}^d$;
- (b) $x \mapsto \hat{A}(x; \frac{3}{4}; " ; \mathbb{R})$ est une fonction Lebesgue mesurable dans -
- $\frac{3}{4}; " \in S_d, \mathbb{R} \in \mathbb{R}$;
- (c) $x \mapsto \hat{A}(x; 0; 0; 0) \in H$:
- (III.1.14)

La fonction de compliance normale $p_\circ : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait

- 8
- (a) Il existe une constante $L_\circ > 0$ telle que
- $$|p_\circ(x; r_1) - p_\circ(x; r_2)| \leq L_\circ |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+; \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^d;$$
- (b) $(p_\circ(x; r_1) - p_\circ(x; r_2)) : (r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+; \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^d$; (III.1.15)
- (c) $r \mapsto p_\circ(\cdot; r)$ est Lebesgue mesurable sur $\mathbb{R}_+$; $\forall r \in \mathbb{R}_+$;
- (d) L'application $p_\circ(\cdot; r) = 0$ pour tout $r = 0$;

Les coefficients d'adhésion satisfont

$$\sigma_0 \in L^1(\Gamma_3); \quad \sigma_0|_{\Gamma_2} = 0, \quad \sigma_a \in L^1(\Gamma_3); \quad \sigma_a|_{\Gamma_2} = 0: \quad (\text{III.1.16})$$

Nous supposons également que les forces volumiques et surfaciques ont la régularité

$$f_0 \in C(0; T; H); \quad f_2 \in C(0; T; L^2(\Gamma_2)^d): \quad (\text{III.1.17})$$

Finalement, nous assumons que les données initiales vérifient les conditions

$$u_0 \in V; \quad \sigma_0 \in H_1; \quad (\text{III.1.18})$$

$$\theta_0 \in K; \quad (\text{III.1.19})$$

$$\bar{u}_0 \in Z: \quad (\text{III.1.20})$$

Nous définissons la forme bilinéaire $a : H^1(\cdot) \times H^1(\cdot) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$a(u; v) = k \int_{\Gamma} r \cdot r' \, dx: \quad (\text{III.1.21})$$

Ensuite, nous notons par $f : [0; T] \rightarrow V$ la fonction définie par

$$(f(t); v)_V = \int_{\Gamma_2} f_0(t) : v \, dx + \int_{\Gamma_3} f_2(t) : v \, da \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0; T): \quad (\text{III.1.22})$$

Nous introduisons la fonction d'adhésion $j_{ad} : L^1(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$j_{ad}(\sigma; u; v) = \int_{\Gamma_3} \sigma_0 \cdot \sigma^{-2} (j R(u_0))_+ v_0 \, da: \quad (\text{III.1.23})$$

En plus de la fonction (III.1.23), nous avons besoin de la fonction de compliance

normale $j_{nc} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$j_{nc}(u; v) = \int_{\Gamma_3} p_0(u_0) v_0 \, da: \quad (\text{III.1.24})$$

En se rappelant de (III.1.15)-(III.1.16), nous observons que les intégrales dans (III.1.23) et (III.1.24) sont bien définies et notons que les conditions (III.1.17) donnent

$$f \in C(0; T; V): \quad (\text{III.1.25})$$

Finalement, nous assumons la condition de compatibilité suivante

$$(\gamma_0; \gamma(v))_H + j_{ad}(\gamma_0; u_0; v) + j_{nc}(u_0; v) = (f(0); v)_V \quad \forall v \in V: \quad (\text{III.1.26})$$

En utilisant des arguments standards basés sur la formule de Green (I.2.10), nous pouvons dériver une formulation variationnelle du problème sans frottement et avec compliance normale (III.1.1)-(III.1.11) qui est la suivante.

Problème PV: Trouver un champ de déplacement $u : [0; T] \rightarrow V$, un champ des contraintes $\gamma : [0; T] \rightarrow H$; un champ d'endommagement $\mathbb{R} : [0; T] \rightarrow H^1(-)$ et un champ d'adhésion $\gamma^- : [0; T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que

$$\dot{\gamma}_4(t) = E^i \dot{u}(t)^\phi + G(\gamma_4(t); \gamma(u(t)); \mathbb{R}(t)); \quad p.p: t \in (0; T); \quad (\text{III.1.27})$$

$$\mathbb{R}(t) \in K \quad \text{pour tout } t \in [0; T], (\dot{\mathbb{R}}(t); \gamma_i \mathbb{R}(t))_{L^2(-)} + a(\mathbb{R}(t); \gamma_i \mathbb{R}(t))$$

$$, (\dot{A}(\gamma_4(t); \gamma(u(t)); \mathbb{R}(t)); \gamma_i \mathbb{R}(t))_{L^2(-)} \geq 2K; \quad (\text{III.1.28})$$

$$\begin{aligned} & (\gamma_4(t); \gamma(v))_H + j_{ad}(\gamma^-(t); u(t); v) + j_{nc}(u(t); v) \\ & = (f(t); v)_V \quad \forall v \in V; \quad \forall t \in [0; T]; \end{aligned} \quad (\text{III.1.29})$$

$$\dot{\gamma}^-(t) = \gamma_0 - \gamma^-(t) - \sum_{i=1}^n R(u_0(t))_+^{\alpha_2} \gamma_i^{\alpha_2} \gamma_a^i \quad p.p: t \in (0; T); \quad (\text{III.1.30})$$

$$u(0) = u_0; \gamma_4(0) = \gamma_0; \mathbb{R}(0) = \mathbb{R}_0; \gamma^-(0) = \gamma_0^-: \quad (\text{III.1.31})$$

Notons que le problème variationnel PV est formulé en fonction du champ de déplacement, des contraintes, de l'endommagement et de l'adhésion. Nous allons dans

ce qui suit prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème PV. Pour cela, nous considérons la remarque suivante dont les estimations sont utilisées à plusieurs niveaux de la démonstration.

Remarque III.1.1. De (III.1.30), nous obtenons que $\bar{u}(x; t) \leq \bar{u}_0(x)$, et puisque $\bar{u}_0(x) \geq 0$ alors $\bar{u}(x; t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, p.p. sur Ω . Si $\bar{u}(x; t_0) = 0$ pour tout $t = t_0$, il vient de (III.1.30) que $\dot{\bar{u}}(x; t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$, et par conséquent, $\bar{u}(x; t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$. Nous concluons que $0 \leq \bar{u}(x; t) \leq 1$ $\forall t \in [0; T]$; p.p. $x \in \Omega$:

Dans ce qui suit, nous considérons que C est une constante positive qui dépend de $\bar{u}; \bar{u}_1; \bar{u}_2; \bar{u}_0; L$ et qui peut changer d'une place à l'autre. Premièrement, nous remarquons que les fonctions j_{ad} et j_{nc} sont linéaires par rapport au dernier argument et par conséquent

$$j_{ad}(\bar{u}; u; jv) = j j_{ad}(\bar{u}; u; v); \quad j_{nc}(u; jv) = j j_{nc}(u; v); \quad (\text{III.1.32})$$

Ensuite, en utilisant (III.1.23) ainsi que les propriétés de l'opérateur R donné par (I.1.35), nous trouvons

$$\begin{aligned} & j_{ad}(\bar{u}_1; u_1; v) - j_{ad}(\bar{u}_2; u_2; v) \\ &= \int_{\Omega} \bar{u}_0 \left[(j R(u_2))_+ - (j R(u_1))_+ \right] v_0 \, da \\ & \quad + \int_{\Omega} (\bar{u}_2 - \bar{u}_1) (j R(u_2))_+ v_0 \, da \\ & \quad + C \int_{\Omega} |j_1 - j_2| |v| \, da; \end{aligned}$$

et de (I.2.15) nous obtenons

$$j_{ad}(\bar{u}_1; u_1; v) - j_{ad}(\bar{u}_2; u_2; v)$$

$$\cdot c \int_{\Gamma_3} j_1^- \cdot j_2^- j_V j_V : \quad (\text{III.1.33})$$

Maintenant, nous utilisons (III.1.24) pour voir que

$$\int_{\Gamma_3} j_{nc}(u_1; v) \cdot j_{nc}(u_2; v) \cdot \int_{\Gamma_3} (p^0(u_1^0) \cdot p^0(u_2^0)) j_V j_V \, da;$$

et donc (III.1.15) (a) et (I.2.15) fournissent

$$\int_{\Gamma_3} j_{nc}(u_1; v) \cdot j_{nc}(u_2; v) \cdot C \int_{\Gamma_3} u_1 \cdot u_2 j_V j_V \, da : \quad (\text{III.1.34})$$

Nous utilisons encore une fois (III.1.24) pour trouver

$$\int_{\Gamma_3} j_{nc}(u_1; u_2 \cdot u_1) + j_{nc}(u_2; u_1 \cdot u_2) = \int_{\Gamma_3} (p^0(u_1^0) \cdot p^0(u_2^0)) (u_2^0 \cdot u_1^0) \, da;$$

et par conséquent (III.1.15) (b) donne

$$\int_{\Gamma_3} j_{nc}(u_1; u_2 \cdot u_1) + j_{nc}(u_2; u_1 \cdot u_2) \cdot 0 : \quad (\text{III.1.35})$$

Les inégalités (III.1.33)-(III.1.35) combinées avec les égalités (III.1.32) seront utilisées à plusieurs reprises dans la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution du problème PV:

3.1.2 Résultat d'existence et d'unicité

Concernant l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel (III.1.27)-(III.1.31), nous avons le théorème suivant.

Théorème III.1.2. Assumons que les hypothèses (III.1.12)-(III.1.20) et (III.1.26) sont vérifiées. Alors le problème PV admet une solution unique $u \in W^{1,2}_0(\Omega; \mathbb{R}^3)$ satisfaisant

$$u \in C(0; T; V);$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{4} \mathbf{2} \, C(0; T; H_1); \\
& \mathbf{-} \, \mathbf{2} \, W^{1;1} \, \mathbf{i} \, 0; T; L^2(\mathbf{i} \, \mathbf{3})^\phi; \\
& \mathbf{\otimes} \, \mathbf{2} \, W^{1;2} \, \mathbf{i} \, 0; T; L^2(-)^\phi \setminus L^2 \mathbf{i} \, 0; T; H^1(-)^\phi: \quad (\text{III.1.36})
\end{aligned}$$

Le quadriplet $(u; \frac{3}{4}; \mathbf{-}; \mathbf{\otimes})$ satisfaisant (III.1.27)-(III.1.31) est appelé solution faible du problème de contact avec compliance normale P . Nous concluons que, sous les hypothèses citées, le problème (III.1.1)-(III.1.11) admet une solution faible unique ayant la régularité (III.1.36).

Nous nous intéressons à présent à la démonstration du Théorème III.1.2 qui sera établie en plusieurs étapes. Pour cette fin, nous assumons que (III.1.12)-(III.1.20) et (III.1.26) sont satisfaites. C dénotera une constante générique positive qui peut dépendre de $-; \mathbf{i} \, \mathbf{1}; \mathbf{i} \, \mathbf{3}; E; \mathbf{o}; L$ et T mais qui ne dépend pas de t ; ni des autres données, et dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Cependant, pour simplifier, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance des différentes fonctions de $x \mathbf{2} - [\mathbf{i}]$.

La première étape de la démonstration du Théorème III.1.2 consiste à résoudre l'équation différentielle donnée dans (III.1.30) pour le champ d'adhésion, où u est donné. Nous étudions également la dépendance continue de la solution du problème d'adhésion par rapport à u :

Lemme III.1.3. Pour tout $u \mathbf{2} C(0; T; V)$, il existe une solution unique

$$\mathbf{-}_u \mathbf{2} W^{1;1} \mathbf{i} \, 0; T; L^2(\mathbf{i} \, \mathbf{3})^\phi$$

satisfaisant

$$\mathbf{-}_u(t) = \mathbf{i} \mathbf{o} \mathbf{o} \mathbf{-}_u(t) \mathbf{\mathcal{E}}_{(\mathbf{i} \, R(u \mathbf{o}(t)))_+} \mathbf{\alpha}_2 \mathbf{i} \mathbf{2}_a \mathbf{i} \quad \text{p.p: } t \mathbf{2} (0; T);$$

$$\bar{u}(0) = \bar{u}_0.$$

De plus, $\bar{u}(t) \in Z$ pour $t \in [0; T]$, p.p. sur $\mathbb{R}^3$, et il existe une constante $C > 0$, telle que, pour tout $u_1, u_2 \in C(0; T; V)$;

$$\|\bar{u}_1(t) - \bar{u}_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \quad \forall t \in [0; T]:$$

Démonstration. Considérons l'application $F : [0; T] \times L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ définie par

$$F(t; \bar{u}) = \bar{u} \circ h_{\bar{u}}(t) \mathcal{F}_{(i R(u_{i^0}))_+}^{\alpha_2} \bar{u} \circ i_a^{-1};$$

$\forall t \in [0; T]$ et $\bar{u} \in L^2(\mathbb{R}^3)$: Il découle des propriétés de l'opérateur de troncature R que F est uniformément continue par rapport au temps, elle est de Lipschitz par rapport au second argument. De plus, pour tout $\bar{u} \in L^2(\mathbb{R}^3)$, l'application $t \mapsto F(t; \bar{u})$ appartient à $L^1(0; T; L^2(\mathbb{R}^3))$. Donc, l'existence et l'unicité de la solution $\bar{u}$ vient du Théorème classique de Cauchy-Lipchitz (Théorème I.3.5) donné dans Le chapitre I. Notons aussi que l'argument utilisé dans la Remarque III.1.1 montre que $0 < \bar{u}(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0; T]$, p.p. sur $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, de la définition de l'ensemble Z (I.2.16), nous trouvons que $\bar{u}(t) \in Z$ pour tout $t \in [0; T]$, ce qui achève la démonstration du lemme. Maintenant, soit $u_1, u_2 \in C(0; T; V)$ et soit $t \in [0; T]$:

Nous avons, pour $i = 1, 2$;

$$\bar{u}_i(t) = \bar{u}_i \circ h_{\bar{u}_i}(t) \mathcal{F}_{(i R(u_{i^0}(t)))_+}^{\alpha_2} \bar{u}_i \circ i_a^{-1} ds;$$

et donc

$$\begin{aligned} & \|\bar{u}_1(t) - \bar{u}_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ & \leq C \int_0^t \|\bar{u}_1(s) \mathcal{F}_{(i R(u_{1^0}(s)))_+}^{\alpha_2} - \bar{u}_2(s) \mathcal{F}_{(i R(u_{2^0}(s)))_+}^{\alpha_2}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds: \end{aligned}$$

En utilisant la définition de l'opérateur de troncature R donnée par (I.1.35) et en

considérant $\bar{u}_1 = \bar{u}_1 \wedge \bar{u}_2 + \bar{u}_2$; nous trouvons

$$\bar{u}_1(t) \wedge \bar{u}_2(t)_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \bar{u}_1(s) \wedge \bar{u}_2(s)_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t |j_{u_1}(s) \wedge u_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds \quad (1)$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall (Lemme I.3.6 (1)), il vient que

$$\bar{u}_1(t) \wedge \bar{u}_2(t)_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t |j_{u_1}(s) \wedge u_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)^d}^2 ds;$$

et en utilisant (I.2.15) nous obtenons la deuxième partie du Lemme III.1.3. ■

Dans la deuxième étape de la démonstration du Théorème III.1.2, nous considérons le problème viscoplastique suivant et nous prouvons un résultat d'existence et d'unicité pour (III.1.27), (III.1.29) et (III.1.31) avec les conditions initiales correspondantes.

Problème QV. Trouver un champ de déplacement $u : [0; T] \rightarrow V$, un champ d'endommagement $\phi : [0; T] \rightarrow H^1(-)$ et un champ des contraintes $\sigma : [0; T] \rightarrow H$ satisfaisant (III.1.27) et

$$\begin{aligned} & (\phi(t); v)_H + j_{ad}(\bar{u}(t); u(t); v) + j_{nc}(u(t); v) \\ & = (f(t); v)_V - \int_V \delta v \cdot 2V; \quad \forall t \in [0; T]; \end{aligned} \quad (III.1.37)$$

$$u(0) = u_0; \phi(0) = \phi_0; \sigma(0) = \sigma_0; \quad (III.1.38)$$

Soit $(f; \phi) \in C(0; T; H \times L^2(-))$ et soit $Z(t) = \int_0^t \phi'(s) ds + \phi_0 \in E''(u_0)$, alors

$$Z \in C^1(0; T; H); \quad (III.1.39)$$

et considérons le problème variationnel suivant.

Problème QV : Trouver un champ de déplacement $u \cdot : [0; T] \rightarrow V$ et un champ des contraintes $\frac{3}{4} : [0; T] \rightarrow H$ tels que

$$\frac{3}{4}(t) = E''(u \cdot(t)) + Z \cdot(t); \quad 8t \in [0; T]; \quad (\text{III.1.40})$$

$$\begin{aligned} & (\frac{3}{4}(t); \cdot''(v))_H + j_{ad}(\bar{u} \cdot(t); u \cdot(t); v) + j_{nc}(u \cdot(t); v) \\ & = (f(t); v)_V \quad 8v \in 2V; \quad 8t \in [0; T]; \end{aligned} \quad (\text{III.1.41})$$

$$u \cdot(0) = u_0; \quad \frac{3}{4}(0) = \frac{3}{4}_0; \quad (\text{III.1.42})$$

Pour résoudre le problème QV ; nous considérons $\mu \in C(0; T; V)$ et nous construisons le problème intermédiaire suivant.

Problème QV_μ : Trouver un champ de déplacement $u \cdot_\mu : [0; T] \rightarrow V$ et un champ des contraintes $\frac{3}{4}_\mu : [0; T] \rightarrow H$ tels que

$$\frac{3}{4}_\mu(t) = E''(u \cdot_\mu(t)) + Z \cdot(t); \quad (\text{III.1.43})$$

$$(\frac{3}{4}_\mu(t); \cdot''(v))_H + (\mu(t); v)_V = (f(t); v)_V \quad 8v \in 2V; \quad 8t \in [0; T]; \quad (\text{III.1.44})$$

$$u \cdot_\mu(0) = u_0; \quad \frac{3}{4}_\mu(0) = \frac{3}{4}_0; \quad (\text{III.1.45})$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème QV_μ est assurée par le lemme suivant.

Lemme III.1.4. Il existe une solution unique $(u \cdot_\mu; \frac{3}{4}_\mu)$ du problème QV_μ qui satisfait $u \cdot_\mu \in C(0; T; V)$, $\frac{3}{4}_\mu \in C(0; T; H_1)$:

Démonstration. Nous définissons l'opérateur $A : V \rightarrow V$ par

$$(A u; v)_V = (E''(u); \cdot''(v))_H; \quad 8u; v \in 2V; \quad (\text{III.1.46})$$

En utilisant (III.1.12), il s'en suit que A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, donc il est inversible et son inverse $A^{-1} : V \rightarrow V$ est aussi un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Nous déduisons qu'il existe une fonction unique u_μ qui vérifie

$$u_\mu \in C(0; T; V); \quad (\text{III.1.47})$$

$$A u_\mu(t) = h_\mu(t); \quad (\text{III.1.48})$$

où $h_\mu \in C(0; T; V)$ est tel que

$$(h_\mu(t); v)_V = (f(t); v)_V + (Z_\mu(t); (v))_H + (\mu(t); v)_V \quad \forall v \in V; \quad \forall t \in [0; T]; \quad (\text{III.1.49})$$

Il vient de (III.1.48) que $u_\mu \in C(0; T; V)$. Considérons $\frac{3}{4}\mu$ défini dans (III.1.43), puisque $Z_\mu \in C^1(0; T; H)$ et $u_\mu \in C(0; T; V)$; nous concluons que $\frac{3}{4}\mu \in C(0; T; H)$. Sachant que $\text{Div} \frac{3}{4}\mu = -f_0 \in C(0; T; H)$, nous aurons davantage $\frac{3}{4}\mu \in C(0; T; H_1)$. Ceci achève la partie d'existence du Lemme III.1.4. L'unicité de la solution découle de l'unicité de la solution de l'équation dépendant du temps (III.1.48). Finalement, $(u_\mu; \frac{3}{4}\mu)$ est la solution unique du problème QV_μ obtenue dans le Lemme III.1.4, ce qui achève la démonstration. ■

Nous considérons $\pi_\mu(t)$ l'élément de l'espace V défini par

$$(\pi_\mu(t); v)_V = j_{ad}(\bar{u}_\mu(t); u_\mu(t); v) + j_{nc}(u_\mu(t); v) \quad \forall v \in V; \quad \forall t \in [0; T]; \quad (\text{III.1.50})$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme III.1.5. Pour tout $\mu \in C(0; T; V)$; la fonction $\pi_\mu : [0; T] \rightarrow V$ appartient à $C(0; T; V)$. De plus, il existe un unique élément $\mu^\pi \in C(0; T; V)$ tel que

$$\alpha \mu^\alpha = \mu^\alpha.$$

Démonstration. Soit $\mu \in C(0; T; V)$ et soient $t_1, t_2 \in [0; T]$. En utilisant (III.1.33), (III.1.34) et (III.1.50) nous obtenons

$$|j_{\alpha\mu}(t_1) - j_{\alpha\mu}(t_2)|_V \leq C \left\| \overline{u_\mu}(t_1) - \overline{u_\mu}(t_2) \right\|_{L^2(I_3)}^2 + |j_{u_\mu}(t_1) - j_{u_\mu}(t_2)|_V : \quad (III.1.51)$$

Du Lemme III.1.4 nous avons $u_\mu \in C(0; T; V)$ et du Lemme III.1.3 nous avons $\overline{u_\mu} \in W^{1,1}(0; T; L^2(I_3))$, donc nous déduisons de l'inégalité (III.1.51) que $\alpha\mu \in C(0; T; V)$. Soit maintenant $\mu_1, \mu_2 \in C(0; T; V)$ et utilisons les notations $u_{\mu_i} = u_i$ et $\overline{u_{\mu_i}} = \overline{u_i}$ pour $i = 1, 2$. En exploitant encore une fois les relations (III.1.33), (III.1.34) et (III.1.50) nous trouvons

$$|j_{\alpha\mu_1}(t) - j_{\alpha\mu_2}(t)|_V^2 \leq C \left\| \overline{u_1}(t) - \overline{u_2}(t) \right\|_{L^2(I_3)}^2 + |j_{u_1}(t) - j_{u_2}(t)|_V^2 : \quad (III.1.52)$$

Ensuite, par le Lemme III.1.3, nous aurons

$$\left\| \overline{u_1}(t) - \overline{u_2}(t) \right\|_{L^2(I_3)}^2 \leq C \int_0^t |j_{u_1}(s) - j_{u_2}(s)|_{L^2(I_3)}^2 ds;$$

et de (I.2.15) nous obtenons

$$\left\| \overline{u_1}(t) - \overline{u_2}(t) \right\|_{L^2(I_3)}^2 \leq C \int_0^t |j_{u_1}(s) - j_{u_2}(s)|_V^2 ds;$$

Nous utilisons l'inégalité précédente dans (III.1.52) pour avoir

$$|j_{\alpha\mu_1}(t) - j_{\alpha\mu_2}(t)|_V^2 \leq C |j_{u_1}(t) - j_{u_2}(t)|_V^2 + \int_0^t |j_{u_1}(s) - j_{u_2}(s)|_V^2 ds : \quad (III.1.53)$$

De plus, de (III.1.44) il provient que

$$(E''(u_1) - E''(u_2); (u_1) - (u_2))_H + (\mu_1 - \mu_2; u_1 - u_2)_V = 0 \text{ sur } (0; T) : \quad (III.1.54)$$

D'où

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds \quad \forall t \in [0; T]: \quad (\text{III.1.55})$$

Maintenant, les inégalités (III.1.53) et (III.1.55) fournissent

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|f(s)\|_V^2 ds \quad \forall t \in [0; T]:$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall (Lemme I.3.6 (1)) nous aurons

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|f(s)\|_V^2 ds \quad \forall t \in [0; T]:$$

La réitération de cette inégalité n fois produit

$$\|u_1 - u_2\|_{C(0;T;V)}^2 \leq \frac{(CT)^n}{n!} \|f\|_{C(0;T;V)}^2;$$

ce qui implique que, pour n suffisamment grand, α^n est une contraction dans l'espace de Hilbert $C(0;T;V)$. Alors, il existe un unique $\mu^n \in C(0;T;V)$ tel que $\alpha^n \mu^n = \mu^n$ et μ^n est aussi l'unique point fixe de α . ■

Lemme III.1.6. Il existe une solution unique du problème QV satisfaisant $u \in C(0;T;V)$, $\frac{3}{4}u \in C(0;T;H_1)$.

Démonstration. Soit $\mu^n \in C(0;T;V)$ le point fixe de α^n , le Lemme III.1.4 implique que $(u(\cdot; \mu^n; \frac{3}{4}\mu^n)) \in C(0;T;V) \cap C(0;T;H_1)$ est l'unique solution de QV_μ pour $\mu = \mu^n$. Puisque $\alpha \mu^n = \mu^n$ et des relations (III.1.50), (III.1.53), (III.1.54) et (III.1.45), nous obtenons que $(u(\cdot; \cdot; \frac{3}{4}\cdot)) = (u(\cdot; \mu^n; \frac{3}{4}\mu^n))$ est l'unique solution de QV . L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur α donné dans (III.1.50). ■

Maintenant pour $(\cdot; \cdot) \in C(0;T;H) \times L^2(-)$, nous supposons que les hypothèses du

Théorème III.1.2 sont vérifiées et nous considérons le problème intermédiaire suivant pour le champ de l'endommagement.

Problème PV_I . Trouver un champ d'endommagement $\mathbb{R}_I : [0; T] \rightarrow H^1(-)$ tel que $\mathbb{R}_I(t) \in K$, pour tout $t \in [0; T]$ et

$$(\dot{\mathbb{R}}_I(t); \gamma_I \mathbb{R}_I(t))_{L^2(-)} + a(\mathbb{R}_I(t); \gamma_I \mathbb{R}_I(t))$$

$$, (\dot{\mathbb{R}}_I(t); \gamma_I \mathbb{R}_I(t))_{L^2(-)} \leq 0 \text{ p.p. } t \in (0; T); \quad (\text{III.1.56})$$

$$\mathbb{R}_I(0) = \mathbb{R}_0; \quad (\text{III.1.57})$$

Lemme III.1.7. Le problème PV_I admet une solution unique $\mathbb{R}_I$ telle que

$$\mathbb{R}_I \in W^{1,2}(0; T; L^2(-)) \cap L^2(0; T; H^1(-)); \quad (\text{III.1.58})$$

Démonstration. Nous utilisons (III.1.19), (III.1.21) et un résultat classique d'existence et d'unicité sur les inégalités paraboliques qui est donné dans le Théorème I.3.3. Pour plus de détails, voir par exemple [2 p. 124]. ■

Comme conséquence des problèmes QV_I et PV_I , nous pouvons définir l'opérateur $L : C(0; T; H \otimes L^2(-)) \rightarrow C(0; T; H \otimes L^2(-))$ par

$$L(\gamma; \dot{\mathbb{R}}) = (G(\gamma; \gamma_I(u \cdot); \mathbb{R}_I); \dot{A}(\gamma; \gamma_I(u \cdot); \mathbb{R}_I)); \quad (\text{III.1.59})$$

pour tout $(\gamma; \dot{\mathbb{R}}) \in C(0; T; H \otimes L^2(-))$. Alors nous avons le lemme suivant.

Lemme III.2.8. L'opérateur L admet un point fixe unique

$$(\gamma^*; \dot{\mathbb{R}}^*) \in C(0; T; H \otimes L^2(-));$$

Démonstration. Soit $(\gamma_1; \beta_1), (\gamma_2; \beta_2) \in C(0; T; H \times L^2(-))$, soit $t \in [0; T]$ et utilisons les notations $u_i = u_i; \beta_i = \beta_i, Z_i = Z_i$ et $\beta_i = \beta_i$ pour $i = 1, 2$. En prenant en considération les relations (III.1.13), (III.1.14) et (III.1.59), nous concluons que

$$\begin{aligned} & \|L(\gamma_1; \beta_1) - L(\gamma_2; \beta_2)\|_{H \times L^2(-)} \\ & \leq C \|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(-)} + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_H : \quad (III.1.60) \end{aligned}$$

En utilisant (III.1.41) nous obtenons

$$\begin{aligned} (E''(u_1) - E''(u_2); (u_1) - (u_2))_H &= j_{ad}(\bar{u}_2; u_2; u_1 - u_2) - j_{ad}(\bar{u}_1; u_1; u_1 - u_2) \\ &+ j_{nc}(u_2; u_1 - u_2) - j_{nc}(u_1; u_1 - u_2) + (Z_2 - Z_1; (u_1) - (u_2))_H \text{ p.p. } t \in (0; T): \end{aligned} \quad (III.1.61)$$

En prenant en considération (III.1.33), (III.1.35) et (III.1.12) on trouve

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq C \|\bar{u}_1(t) - \bar{u}_2(t)\|_{L^2(i_3)} + \|Z_1(t) - Z_2(t)\|_H; \quad (III.1.62)$$

et

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq C \|\bar{u}_1(t) - \bar{u}_2(t)\|_{L^2(i_3)}^2 + \|Z_1(t) - Z_2(t)\|_H^2;$$

Du Lemme III.1.3, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq C \left(\|Z_1(t) - Z_2(t)\|_H^2 + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \right) \\ & \leq C \left(\int_0^t \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\|_H^2 ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \right); \end{aligned} \quad (III.1.63)$$

L'application de l'inégalité de Gronwall (Lemme I.3.6 (1)) donne

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\|_H^2 ds; \quad (III.1.64)$$

ce qui implique

$$|j u_1(t) - u_2(t)|_{j_V} \leq C \int_0^t |j'_{-1}(s) - j'_{-2}(s)|_{j_H} ds \quad (\text{III.1.65})$$

De plus, de (III.1.40) on trouve

$$|j^{3/4_1}(t) - j^{3/4_2}(t)|_{j_H} \leq C (|j u_1(t) - u_2(t)|_{j_V} + |j Z_1(t) - Z_2(t)|_{j_H}) :$$

En substituant (III.1.65) dans l'inégalité précédente nous obtenons

$$|j^{3/4_1}(t) - j^{3/4_2}(t)|_{j_H} \leq C \int_0^t |j'_{-1}(s) - j'_{-2}(s)|_{j_H} ds \quad (\text{III.1.66})$$

De (III.1.56) nous déduisons que

$$(\dot{\mathbb{R}}_1; \mathbb{R}_2 - \mathbb{R}_1)_{L^2(-)} + a(\mathbb{R}_1; \mathbb{R}_2 - \mathbb{R}_1)$$

$$\leq (\dot{\mathbb{I}}_1; \mathbb{R}_2 - \mathbb{R}_1)_{L^2(-)} \text{ p.p. } t \in (0; T);$$

et

$$(\dot{\mathbb{R}}_2; \mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2)_{L^2(-)} + a(\mathbb{R}_2; \mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2)$$

$$\leq (\dot{\mathbb{I}}_2; \mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2)_{L^2(-)} \text{ p.p. } t \in (0; T);$$

La sommation des deux inégalités précédentes nous fournit

$$(\dot{\mathbb{R}}_1 - \dot{\mathbb{R}}_2; \mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2)_{L^2(-)} + a(\mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2; \mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2)$$

$$\leq |\dot{\mathbb{I}}_1 - \dot{\mathbb{I}}_2|_{L^2(-)} |\mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2|_{L^2(-)} \text{ p.p. } t \in (0; T);$$

Nous intégrons l'inégalité précédente sur $[0; t]$, après quelques manipulations nous

obtenons

$$\frac{1}{2} |j \mathbb{R}_1(t) - \mathbb{R}_2(t)|_{L^2(-)}^2 \leq C \int_0^t |\dot{\mathbb{I}}_1(s) - \dot{\mathbb{I}}_2(s)|_{L^2(-)} |j \mathbb{R}_1(s) - \mathbb{R}_2(s)|_{L^2(-)} ds$$

$$+ C \int_0^{Z_t} |j_{\mathbb{R}_1}(s) - j_{\mathbb{R}_2}(s)|_{L^2(-)}^2 ds:$$

Nous appliquons l'inégalité de Gronwall (Lemme I.3.8) à l'inégalité précédente pour avoir

$$|j_{\mathbb{R}_1}(t) - j_{\mathbb{R}_2}(t)|_{L^2(-)} \leq C \int_0^{Z_t} |j_{\mathbb{R}_1}(s) - j_{\mathbb{R}_2}(s)|_{L^2(-)} ds: \quad (\text{III.1.67})$$

En substituant (III.1.65), (III.1.66) et (III.1.67) dans (III.1.60), nous aurons

$$\begin{aligned} & |L(\gamma_1; \gamma_1) - L(\gamma_2; \gamma_2)|_{H \otimes L^2(-)} \\ & \leq C \int_0^{Z_t} |j(\gamma_1; \gamma_1)(s) - j(\gamma_2; \gamma_2)(s)|_{H \otimes L^2(-)} ds: \end{aligned} \quad (\text{III.1.68})$$

Le Lemme III.1.8 est alors une conséquence du résultat (III.1.68) et du Théorème du point fixe de Banach. ■

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour résoudre QV:

Lemme III.1.9. Il existe une solution unique $(u; \gamma; \mathbb{R})$ du problème PV satisfaisant $u \in C(0; T; V)$, $\gamma \in C(0; T; H_1)$, $\mathbb{R} \in W^{1,2}(0; T; L^2(-)) \cap L^2(0; T; H^1(-))$:

Démonstration. Soit $(\gamma^m; \gamma^m) \in L^2(0; T; H \otimes L^2(-))$ le point fixe de l'opérateur L défini dans (III.1.59), du Lemme III.1.6, nous déduisons que $(u^m; \gamma^m) = (u^m; \gamma^m) \in C(0; T; V) \otimes C(0; T; H_1)$ est l'unique solution de QV. Puisque $L(\gamma^m; \gamma^m) = (\gamma^m; \gamma^m)$, des relations (III.1.40), (III.1.41), (III.1.42) et du Lemme III.1.7 nous obtenons que $(u; \gamma; \mathbb{R}) = (u^m; \gamma^m; \mathbb{R}^m)$ est l'unique solution de QV. La régularité de la solution vient du Lemme III.1.7. Son unicité résulte de l'unicité du point fixe de l'opérateur L :

Le Théorème III.1.2 est à présent une conséquence du Lemme III.1.3 et du Lemme III.1.9. ■

3.2 Problème avec la condition de contact de Signorini

Dans ce paragraphe, nous étudions un problème de contact sans frottement entre un corps viscoplastique avec endommagement et une base rigide dans un processus quasistatique. Ce dernier est modélisé par la condition de Signorini avec adhésion. Notre objectif est de donner une analyse variationnelle du problème mécanique et de montrer l'existence et l'unicité de la solution faible. Ceci conduit à une inéquation variationnelle pour le champ de déplacement, une inclusion du type parabolique pour le champ d'endommagement et une équation intégral-différentielle pour le champ d'adhésion.

3.2.1 Formulation du problème

Nous reprenons le cadre physique no. 1 décrit dans le premier chapitre. Ici, nous considérons un corps viscoplastique suivant la loi constitutive (I.1.33). Nous modélisons le contact par la condition de Signorini décrite dans (I.1.42). La condition de contact sans frottement est modélisée par la relation (I.1.44). Le problème mécanique est formulé de la manière suivante.

Problème P: Trouver un champ de déplacement $u :]0; T[\rightarrow R^d$, un champ des contraintes $\sigma :]0; T[\rightarrow S_d$, un champ d'endommagement $\phi :]0; T[\rightarrow R$ et un champ d'adhésion $\gamma :]0; T[\rightarrow [0; 1]$ tels que

$$\dot{\sigma} = E'' \dot{u} + G(\dot{\sigma}; u; \phi) \quad \text{dans }]0; T[; \quad (\text{III.2.1})$$

$$\dot{\mathbb{R}}_i \leq k_4 \mathbb{R} + \mathbb{D}_K(\mathbb{R}) \leq \dot{\mathbb{A}}(\mathbb{R})^{3/4}(u); \quad (III.2.2)$$

$$\text{Div } \mathbb{R}^{3/4} + f_0 = 0 \quad \text{dans } - \mathbb{E}(0; T); \quad (III.2.3)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \mathbb{I}_1 \mathbb{E}(0; T); \quad (III.2.4)$$

$$\mathbb{R}^{3/4}_0 = f_2 \quad \text{sur } \mathbb{I}_2 \mathbb{E}(0; T); \quad (III.2.5)$$

$$\begin{aligned} u_0 \cdot 0; \mathbb{R}^{3/4}_0 \cdot \mathbb{R}^{-2}(u_0) \\ \text{sur } \mathbb{I}_3 \mathbb{E}(0; T); \quad (III.2.6) \\ \mathbb{R}^{3/4}_i \cdot \mathbb{R}^{-2}(u_0) \cdot u_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbb{I} \mathbb{R}^{3/4}_i = p_i(\mathbb{R}) R^a(u_i) \quad \text{sur } \mathbb{I}_3 \mathbb{E}(0; T); \quad (III.2.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= 0 \quad \text{sur } \mathbb{I} \mathbb{E}(0; T); \quad (III.2.8) \\ \mathbb{D} & \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbb{A}} = \mathbb{I}^h \mathbb{R}^{-2}(u_0)^2 \mathbb{I}^i_{2a} \quad \text{sur } \mathbb{I}_3 \mathbb{E}(0; T); \quad (III.2.9)$$

$$u(0) = u_0; \mathbb{R}^{3/4}(0) = \mathbb{R}^{3/4}_0; \mathbb{R}(0) = \mathbb{R}_0 \quad \text{dans } -; \quad (III.2.10)$$

$$\mathbb{R}^{-}(0) = \mathbb{R}^{-}_0 \quad \text{sur } \mathbb{I}_3; \quad (III.2.11)$$

La relation (III.2.1) représente la loi constitutive élastique-viscoplastique avec endommagement. L'évolution du champ de l'endommagement est gouvernée par l'induction du type parabolique donnée par la relation (III.2.2). (III.2.3) représente l'équation d'équilibre et (III.2.4)-(III.2.5) sont les conditions aux limites de déplacement-traction, respectivement. (III.2.6) représente la condition de Signorini avec adhésion. (III.2.7) est la condition aux limites tangentielle tandis que (III.2.8) est la condition aux limites homogène de Newman où $\mathbb{D}$ représente la dérivée normale de $\mathbb{R}$. Ensuite, l'équation (III.2.9) représente l'équation différentielle ordinaire qui décrit l'évolution du champ de l'adhésion. Dans (III.2.10)-(III.2.11), u_0 , $\mathbb{R}^{3/4}_0$, $\mathbb{R}_0$, et $\mathbb{R}^{-}_0$ représentent

le déplacement initial, la contrainte initiale, l'endommagement initial et l'adhésion initiale, respectivement.

Dans l'étude du problème mécanique (III.2.1)-(III.2.11), nous assumons que l'opérateur de viscosité $E : - \mathcal{E} S_d \rightarrow S_d$ satisfait

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } E = (e_{jkh}) = e_{jkh} \in L^1(-); \quad 1 \leq i, j, k, h \leq d: \\
 & \text{(b) } E^{3/4} \cdot \zeta = 3/4 \cdot E \cdot \zeta \quad 8^{3/4} \zeta \in 2S_d, \text{ p.p. dans } - : \\
 & \text{(c) Il existe une constante } m_0 > 0 \text{ telle que} \\
 & \quad E \zeta \cdot \zeta, m_0 \int \zeta^2 \in 8\zeta \in 2S_d, \text{ p.p. dans } - :
 \end{aligned} \tag{III.2.12}$$

La fonction constitutive $G : - \mathcal{E} S_d \times S_d \times R \rightarrow S_d$ satisfait

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) Il existe une constante } L_G > 0 \text{ telle que} \\
 & \quad |G(x; \zeta_1; \eta_1; \theta_1) - G(x; \zeta_2; \eta_2; \theta_2)| \leq L_G (|\zeta_1 - \zeta_2| + |\eta_1 - \eta_2| \\
 & \quad + |\theta_1 - \theta_2|) \quad 8^{3/4} \zeta, \zeta_2, \eta_1, \eta_2 \in S_d, \theta_1, \theta_2 \in R, \text{ p.p. } x \in - : \\
 & \text{(b) } x \mapsto G(x; \zeta; \eta; \theta) \text{ est une fonction mesurable dans } - \\
 & \quad 8^{3/4} \zeta \in 2S_d, \theta \in R: \\
 & \text{(c) L'application } x \mapsto G(x; 0; 0; 0) \in H:
 \end{aligned} \tag{III.2.13}$$

La fonction source d'endommagement $\dot{A} : - \mathcal{E} S_d \times S_d \times R \rightarrow R$ satisfait

- (a) Il existe une constante $L_{\hat{A}} > 0$ telle que
- $$| \hat{A}(x; \frac{3}{4}; \tau_1; \mathbb{R}_1) - \hat{A}(x; \frac{3}{4}; \tau_2; \mathbb{R}_2) | \leq L_{\hat{A}} (| \tau_1 - \tau_2 | + | \mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2 |)$$
- $$+ | \mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_2 | \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in S_d, \mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^3 \quad (III.2.14)$$
- (b) La fonction $x \mapsto \hat{A}(x; \frac{3}{4}; \tau; \mathbb{R})$ est mesurable dans -
- $$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \in S_d, \mathbb{R} \in \mathbb{R}:$$
- (c) La fonction $x \mapsto \hat{A}(x; 0; 0; 0) \in L^2(\mathbb{R}^3):$

La fonction tangentielle de contact $p_{\ell} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait

- (a) Il existe une constante $L_{\ell} > 0$ telle que
- $$| p_{\ell}(x; d_1) - p_{\ell}(x; d_2) | \leq L_{\ell} | d_1 - d_2 | \quad \forall d_1, d_2 \in \mathbb{R}; \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^3:$$
- (b) Il existe une constante $M_{\ell} > 0$ telle que
- $$| p_{\ell}(x; d) | \leq M_{\ell} \quad \forall d \in \mathbb{R}; \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^3:$$
- (c) $x \mapsto p_{\ell}(x; d)$ est mesurable sur $\mathbb{R}^3; \forall d \in \mathbb{R}:$
- (d) L'application $x \mapsto p_{\ell}(x; 0) \in L^2(\mathbb{R}^3):$

Nous supposons que les forces volumiques et les tractions surfaciques satisfont

$$f_0 \in W^{1,1}(0; T; H); \quad f_2 \in W^{1,1}(0; T; L^2(\mathbb{R}^2)^d); \quad (III.2.16)$$

Finalement, nous assumons que les données initiales satisfont les conditions

$$u_0 \in U; \quad \frac{3}{4} \in H; \quad (III.2.17)$$

$$\mathbb{R}_0 \in K; \quad (III.2.18)$$

$$\tau_0 \in L^2(\mathbb{R}^3); \quad 0 \leq \tau_0 \leq 1 \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^3; \quad (III.2.19)$$

$$(\frac{3}{4}; \tau_0 (v \cdot u_0))_H + \int (\tau_0; u_0; v \cdot u_0)_V, (f(0); v \cdot u_0)_V \quad \forall v \in U: \quad (III.2.20)$$

Nous définissons la forme bilinéaire $a : H^1(-) \times H^1(-) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$a(u; v) = k \int_Z r \cdot r' \, dx \quad (III.2.21)$$

Ensuite, nous notons par $f : [0; T] \rightarrow V$ la fonction définie par

$$(f(t); v)_V = \int_{i=1}^Z f_0(t) : v \, dx + \int_{i=2}^Z f_2(t) : v \, da - 8v^2 \, V, \quad t \in [0; T] \quad (III.2.22)$$

La fonction d'adhésion $j : L^1(i_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$j(\bar{\cdot}; u; v) = \int_{i=3}^Z p_i \cdot \nabla^2 \mathbb{R}(u_i) \cdot v_i \, da + \int_{i=3}^Z p_i(\bar{\cdot}) R^a(u_i) \cdot v_i \, da \quad (III.2.23)$$

En se rappelant de (III.2.15), nous observons que l'intégrale (III.2.23) est bien définie et notons que les conditions (III.2.16) impliquent

$$f \in W^{1;1}(0; T; V) \quad (III.2.24)$$

Finalement, pour le champ d'adhésion nous considérons l'ensemble Z défini dans (I.2.16).

En utilisant des arguments standards basés sur la formule de Green (I.2.10), nous obtenons une formulation variationnelle du problème mécanique (III.2.1)-(III.2.11).

Problème PV: Trouver un champ de déplacement $u : [0; T] \rightarrow V$, un champ des contraintes $\mathbb{S} : [0; T] \rightarrow H$; un champ d'endommagement $\mathbb{R} : [0; T] \rightarrow H^1(-)$ et un champ d'adhésion $\bar{\cdot} : [0; T] \rightarrow L^1(i_3)$ tels que

$$\dot{\mathbb{S}}(t) = E'' \dot{u}(t) + G(\mathbb{S}(t); u(t); \mathbb{R}(t)); \quad p, p : t \in (0; T); \quad (III.2.25)$$

$$\mathbb{R}(t) \in K \text{ pour tout } t \in [0; T], \quad (\dot{\mathbb{R}}(t); \mathbb{R}(t))_{L^2(-)} + a(\mathbb{R}(t); \mathbb{R}(t))$$

$$\int_0^T (\dot{\varphi}_4(t); (u(t)); \mathbb{R}(t)); \rangle_{\mathbb{H}} \mathbb{R}(t))_{L^2(-)} \leq 2K; \quad (\text{III.2.26})$$

$$u(t) \in U; (\varphi_4(t); (v - u(t)))_{\mathbb{H}} + j(\bar{v}(t); u(t); v - u(t))$$

$$\int_0^T (f(t); v - u(t))_{\mathbb{V}} \leq 8v \in U; p.p: t \in (0; T); \quad (\text{III.2.27})$$

$$\dot{\bar{v}}(t) = \int_0^h \bar{v}^\circ(t) \mathbb{R}(u^\circ(t))^2 \int_a^i p.p: t \in (0; T); \quad (\text{III.2.28})$$

$$u(0) = u_0; \varphi_4(0) = \varphi_0; \mathbb{R}(0) = \mathbb{R}_0; \bar{v}(0) = \bar{v}_0; \quad (\text{III.2.29})$$

Notons que dans les problèmes P et PV, nous n'avons pas besoin d'imposer explicitement les restrictions $0 \leq \bar{v} \leq 1$. En effet, l'équation (III.2.28) garantit que $t \mapsto \bar{v}(x; t)$ est une fonction décroissante, puisque $\dot{\bar{v}}(x; t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$. Par conséquent, si nous choisissons $\bar{v}_0$ tel que $0 \leq \bar{v}_0(x) \leq 1$ nous obtenons $\bar{v}(x; t) \leq 1$ pour tout $t \geq 0$. D'autre part, s'il existe $t_1 > 0$ tel que $\bar{v}(x; t_1) < 0$, alors il existe $0 \leq t_0 < t_1$ tel que $\bar{v}(x; t_0) = 0$. Il s'en suit que $\bar{v}(x; t) = 0$ pour tout $t \leq t_0$ et (III.2.28) montre que $\dot{\bar{v}}(x; t) = 0$ pour tout $t \leq t_0$; ce qui implique que $\bar{v}(x; t) = 0$ pour tout $t \leq t_0$. Nous déduisons que $\bar{v}(x; t_1) = 0$, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse $\bar{v}(x; t_1) < 0$. Nous concluons que $\bar{v}(x; t) \geq 0$ pour tout $t \in [0; T]$, i.e. $0 \leq \bar{v}(x; t) \leq 1$ pour tout $t \in [0; T]$ et $x \in \mathbb{I}_3$.

Dans ce qui suit, nous dérivons des inégalités impliquant la fonctionnelle j et qui vont être utilisées dans la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution du

problème variationnel PV.

Ici, $\bar{\cdot}$, $\bar{\cdot}_1$ et $\bar{\cdot}_2$ dénotent des éléments de $L^1(\Gamma_3)$ tels que $0 \leq \bar{\cdot}; \bar{\cdot}_1; \bar{\cdot}_2 \leq 1$ p.p. sur Γ_3 , u_1, u_2 and v représentent des éléments de V , et C représente une constante générique positive qui peut dépendre de $\bar{\cdot}, \bar{\cdot}_1, \bar{\cdot}_3, p_\ell$ et L . Rappelons aussi que $u_{i\circ}$ et $u_{i\ell}$ dénotent les composantes normales et tangentielles de u_i respectivement pour $i = 1, 2$:

Premièrement, nous notons que la fonctionnelle j est linéaire par rapport au dernier argument et par conséquent

$$j(\bar{\cdot}; u; i \cdot v) = i \cdot j(\bar{\cdot}; u; v): \quad (\text{III.2.30})$$

Ensuite, en utilisant (III.2.23) on trouve

$$\begin{aligned} & j(\bar{\cdot}_1; u_1; u_2 \cdot u_1) + j(\bar{\cdot}_2; u_2; u_1 \cdot u_2) \\ &= \int_{\Gamma_3} \bar{\cdot}_1^2 \mathbb{R}(u_{1\circ}) \cdot \mathbb{R}(u_{2\circ}) (u_{1\circ} \cdot u_{2\circ}) \, da \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} (\bar{\cdot}_1^2 \cdot \bar{\cdot}_2^2) \mathbb{R}(u_{2\circ}) (u_{1\circ} \cdot u_{2\circ}) \, da \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} p_\ell(\bar{\cdot}_1) (\mathbb{R}^\square(u_{1\ell}) \cdot \mathbb{R}^\square(u_{2\ell})) : (u_{2\ell} \cdot u_{1\ell}) \, da \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} (p_\ell(\bar{\cdot}_1) \cdot p_\ell(\bar{\cdot}_2)) \mathbb{R}^\square(u_{2\ell}) : (u_{2\ell} \cdot u_{1\ell}) \, da; \end{aligned}$$

et puisque

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_3} \mathbb{R}(u_{1\circ}) \cdot \mathbb{R}(u_{2\circ}) (u_{1\circ} \cdot u_{2\circ}) \, da \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3; \\ & (\mathbb{R}^\square(u_{1\ell}) \cdot \mathbb{R}^\square(u_{2\ell})) : (u_{2\ell} \cdot u_{1\ell}) \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3; \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} & j(\bar{\cdot}_1; u_1; u_2 \mid u_1) + j(\bar{\cdot}_2; u_2; u_1 \mid u_2) \\ & \cdot \int_{\mathbb{Z}} \circ (\bar{\cdot}_1^{-2} \mid \bar{\cdot}_2^{-2}) \mathbb{R}(u_2^\circ)(u_1^\circ \mid u_2^\circ) \, da \\ & + \int_{\mathbb{Z}^{i_3}} (p_\ell(\bar{\cdot}_1) \mid p_\ell(\bar{\cdot}_2)) R^\pi(u_{2_\ell}) : (u_{2_\ell} \mid u_{1_\ell}) \, da : \end{aligned}$$

En utilisant à présent les inégalités $\|\mathbb{R}(u_2^\circ)\| \leq L$, $\|j R^\pi(u_{2_\ell})\| \leq L$, $\|j^{-1}_1\| \leq 1$, $\|j^{-1}_2\| \leq 1$, valides p.p. sur $\mathbb{Z}^{i_3}$, et la propriété (III.2.15) (b) de la fonction p_ℓ nous déduisons que

$$\begin{aligned} & j(\bar{\cdot}_1; u_1; u_2 \mid u_1) + j(\bar{\cdot}_2; u_2; u_1 \mid u_2) \\ & \cdot C \int_{\mathbb{Z}^{i_3}} j^{-1}_1 \mid \bar{\cdot}_2 j u_1 \mid u_2 \, da : \end{aligned}$$

Ensuite, nous combinons l'inégalité précédente avec (I.2.15) pour avoir

$$\begin{aligned} & j(\bar{\cdot}_1; u_1; u_2 \mid u_1) + j(\bar{\cdot}_2; u_2; u_1 \mid u_2) \\ & \cdot C j^{-1}_1 \mid \bar{\cdot}_2 j_{L^2(\mathbb{Z}^{i_3})} j u_1 \mid u_2 j_V : \end{aligned} \quad (\text{III.2.31})$$

Nous choisissons maintenant $\bar{\cdot}_1 = \bar{\cdot}_2 = \bar{\cdot}$ dans (III.2.31) pour trouver

$$j(\bar{\cdot}; u_1; u_2 \mid u_1) + j(\bar{\cdot}; u_2; u_1 \mid u_2) \leq 0: \quad (\text{III.2.32})$$

Des manipulations similaires basées sur les propriétés des opérateurs $\mathbb{R}$ et R^π et sur les propriétés de la fonction p_ℓ montrent que

$$j j(\bar{\cdot}; u_1; v) \mid j(\bar{\cdot}; u_2; v) j \leq C j u_1 \mid u_2 j_V j v j_V : \quad (\text{III.2.33})$$

Nous choisissons $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans (III.2.32) et utilisons les inégalités $\mathbb{R}(0) = 0$; $R^\pi(0) = 0$ et (III.2.30) pour avoir

$$j(\bar{\cdot}; v; v) \leq 0: \quad (\text{III.2.34})$$

Les inégalités (III.2.31)-(III.2.34) et l'égalité (III.2.30) seront utilisées dans plusieurs endroits dans le reste de ce paragraphe.

3.2.2 Résultat d'existence et d'unicité

Dans ce qui suit, nous proposons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution du problème variationnel PV, c'est à dire une solution faible du problème P. Ce résultat est le suivant.

Théorème III.2.1. Assumons que les hypothèses (III.2.12)-(III.2.20) sont vérifiées. Alors, il existe une solution unique $u; \frac{3}{4}; \otimes; \bar{g}$ du problème PV. De plus, la solution satisfait

$$\begin{aligned} u &\in W^{1;1}(0;T;V); \quad \frac{3}{4} \in W^{1;1}(0;T;H_1); \\ \otimes &\in W^{1;2}(\dot{0};T;L^2(-)^{\phi} \setminus L^2(\dot{0};T;H^1(-)^{\phi}); \\ \bar{g} &\in W^{1;1}(\dot{0};T;L^2(i_3)^{\phi} \setminus Z); \end{aligned} \quad (\text{III.2.35})$$

La démonstration du Théorème III.2.1 est établie en plusieurs étapes qui vont être prouvées dans ce qui suit. Nous supposons tout au long de cette démonstration que les hypothèses du Théorème III.2.1 sont satisfaites et nous considérons que C est une constante générique positive qui dépend de $\cdot, i_1, i_3, L$ et qui peut changer d'un endroit à l'autre.

Soit Z le sous-ensemble fermé de $C(0;T;L^2(i_3))$ défini par

$$Z = \bigoplus_{\mu \in C(\dot{0};T;L^2(i_3)^{\phi} \setminus Z)} \mu(0) = \mu(0) = \mu(0)^a; \quad (\text{III.2.36})$$

Soit $\bar{\gamma} \in Z$ et soit $\gamma' = (\gamma'^1; \gamma'^2) \in C(0; T; H) \times L^2(0; T; H)$: Nous définissons la fonction $z_\gamma \in C^1(0; T; H)$ par

$$z_\gamma = \int_0^t \gamma'^1(s) \, ds + z_0; \quad (III.2.37)$$

où

$$z_0 = \frac{1}{4} \int_0^1 E''(u_0); \quad (III.2.38)$$

et dans la première étape nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème PV $_{\gamma}$: Trouver un champ de déplacement $u_{\gamma} : [0; T] \rightarrow V$ tel que pour tout $v \in U$ et $t \in [0; T]$

$$u_{\gamma}(t) \in U; \quad (E''(u_{\gamma}(t)); (v - u_{\gamma}(t)))_H + (z_\gamma(t); (v - u_{\gamma}(t)))_H$$

$$+ j(\bar{\gamma}(t); u_{\gamma}(t); v - u_{\gamma}(t)) \leq (f(t); v - u_{\gamma}(t))_V; \quad (III.2.39)$$

Pour ce problème, nous avons le résultat suivant.

Lemme III.2.2. Il existe une solution unique du problème PV $_{\gamma}$. La solution satisfait $u_{\gamma} \in C(0; T; V)$ et

$$u_{\gamma}(0) = u_0; \quad (III.2.40)$$

Démonstration. Soit $t \in [0; T]$ et soit $A_t : V \rightarrow V$ l'opérateur donné par

$$(A_t u; v)_V = (E''(u); (v))_H + j(\bar{\gamma}(t); u; v) - \delta u; v \in V;$$

Nous utilisons (III.2.12) et les propriétés (III.2.32) et (III.2.33) sur la fonctionnelle d'adhésion j pour montrer que l'opérateur A_t est fortement monotone et de Lipschitz.

De plus, en utilisant le Théorème de représentation de Riesz, nous pouvons définir un

élément $f \cdot : [0; T] \rightarrow V$ par

$$(f \cdot(t); v)_V = (f(t); v)_V + (z \cdot(t); \nabla(v))_H :$$

Puisque U est un sous ensemble fermé convexe de V , il vient d'un résultat classique sur les inéquations variationnelles elliptiques (Théorème I.3.2), voir par exemple [13], qu'il existe un unique élément $u \cdot(t)$ qui résoud

$$i \int_0^t A_t u \cdot(t); v + \int_0^t u \cdot(t) \phi_v, (f \cdot(t); v + u \cdot(t))_V \leq 8v \in U; t \in (0; T) :$$

De plus, nous utilisons les hypothèses (III.2.17) et (III.2.20) pour prouver que la solution vérifie la condition (III.2.40). Soient $t_1, t_2 \in [0; T]$ et utilisons les notations $u \cdot(t_i) = u_i; z \cdot(t_i) = z_i; \bar{\cdot}(t_i) = \bar{\cdot}_i$ et $f(t_i) = f_i$ pour $i = 1; 2$. Des arguments standards dans (III.2.39) donnent

$$\begin{aligned} (E''(u_1 + u_2); \nabla(u_1 + u_2))_H &= (z_1 + z_2; \nabla(u_2 + u_1))_H + (f_1 + f_2; u_1 + u_2)_V \\ &+ j(\bar{\cdot}_1; u_1; u_2 + u_1) + j(\bar{\cdot}_2; u_2; u_1 + u_2); \end{aligned}$$

et en utilisant (III.2.12) et (III.2.31) nous obtenons

$$j(u_1 + u_2)_V \leq C \left(j(z_1 + z_2)_H + j(f_1 + f_2)_V + j(\bar{\cdot}_1 + \bar{\cdot}_2)_{L^2(I_3)} \right) : \quad (\text{III.2.41})$$

Cette inégalité et les régularités des fonctions $\bar{\cdot}, f$ et $z \cdot$ montrent que $u \cdot \in C(0; T; V)$.

Ainsi, nous concluons la partie d'existence du Lemme III.2.2 et notons que l'unicité de la solution découle de l'unicité de la solution de (III.2.39) pour tout $t \in [0; T]$. Ensuite, pour prouver (III.2.40), nous écrivons (III.2.39) en $t = 0$ et nous utilisons les valeurs initiales $z \cdot(0) = z_0 + E''(u_0), \bar{\cdot}(0) = \bar{\cdot}_0$ pour obtenir

$$(E''(u \cdot(0)); \nabla(v + u \cdot(0)))_H + (z_0 + E''(u_0); \nabla(v + u \cdot(0)))_H$$

$$+ j(\bar{\epsilon}_0; u^{\cdot}(0); v)_V + j(u^{\cdot}(0); v)_V \quad \forall v \in U: \quad (\text{III.2.42})$$

Nous choisissons à présent $v = u_0$ dans (III.2.42) et $v = u^{\cdot}(0)$ dans (III.2.20) et nous sommes les inégalités correspondantes pour déduire

$$(E''(u^{\cdot}(0); u_0); (u_0; u^{\cdot}(0)))_H$$

$$+ j(\bar{\epsilon}_0; u^{\cdot}(0); u_0; u^{\cdot}(0)) + j(\bar{\epsilon}_0; u_0; u^{\cdot}(0); u_0) \leq 0:$$

Dans cette inégalité, nous utilisons la propriété (III.2.32) sur la fonctionnelle j et nous obtenons

$$(E''(u^{\cdot}(0); u_0); (u^{\cdot}(0); u_0))_H \leq 0:$$

Cette inégalité combinée avec l'hypothèse (III.2.12) sur l'opérateur d'élasticité impliquent (III.2.40), ce qui achève la démonstration. ■

Ensuite, pour $\bar{\epsilon} \in Z$ donné et pour tout $\epsilon' = (\epsilon'^1; \epsilon'^2) \in C(0; T; H \times L^2(-))$, nous dénotons par $u^{\cdot}$ la solution du problème $PV^{\cdot}$ obtenue dans le Lemme III.2.2 et nous définissons une fonction $\frac{3}{4}\epsilon' \in C(0; T; H)$ par

$$\frac{3}{4}\epsilon'(t) = E''(u^{\cdot}(t)) + z^{\cdot}(t) \quad \forall t \in [0; T]: \quad (\text{III.2.43})$$

Nous supposons que les hypothèses du Théorème III.2.1 sont satisfaites et nous considérons le problème intermédiaire suivant pour le champ de l'endommagement.

Problème $PV_{\mathbb{R}}$. Trouver un champ d'endommagement $\mathbb{R}^{\cdot} : [0; T] \rightarrow H^1(-)$ tel que $\mathbb{R}^{\cdot}(t) \in K$, pour tout $t \in [0; T]$ et

$$(\dot{\mathbb{R}}^{\cdot}(t); \epsilon^{\cdot}(t))_{L^2(-)} + a(\mathbb{R}^{\cdot}(t); \epsilon^{\cdot}(t))$$

$$\leq \epsilon^{\cdot}(t); \epsilon^{\cdot}(t)_{L^2(-)}^{\phi} \quad \forall t \in [0; T]; \quad (\text{III.2.44})$$

$$\mathbb{R}^\cdot(0) = \mathbb{R}_0 \quad (\text{III.2.45})$$

Lemme III.2.3. Le problème $PV_{\mathbb{R}}$ admet une solution unique $\mathbb{R}^\cdot$ telle que

$$\mathbb{R}^\cdot \in W^{1;2}(\mathbb{R}^\cdot; L^2(-)) \cap L^2(\mathbb{R}^\cdot; H^1(-)) : \quad (\text{III.2.46})$$

Démonstration. Nous utilisons (III.2.18), (III.2.21) et un résultat classique d'existence et d'unicité sur les inéquations paraboliques (Théorème I.3.3, voir par exemple [54]). ■

Nous utilisons également les propriétés (III.2.13) de la fonction constitutive G et (III.2.14) de la fonction $\hat{A}$ pour définir l'opérateur $\alpha^\cdot : C(0; T; H \times L^2(-)) \rightarrow C(0; T; H \times L^2(-))$ par

$$\alpha^\cdot = (G(\frac{3}{4}^\cdot; \cdot(u^\cdot); \mathbb{R}^\cdot); \hat{A}(\frac{3}{4}^\cdot; \cdot(u^\cdot); \mathbb{R}^\cdot)); \quad (\text{III.2.47})$$

pour tout $\cdot \in C(0; T; H \times L^2(-))$. Alors nous avons le résultat suivant.

Lemme III.2.4. L'opérateur $\alpha^\cdot$ admet un point fixe unique

$$\cdot^\sharp \in C(0; T; H \times L^2(-)):$$

Démonstration. Soient $\cdot_i = (\cdot_i^1; \cdot_i^2) \in C(0; T; H \times L^2(-))$, soit $t \in [0; T]$ et utilisons les notations $u^\cdot_i = u_i$, $\frac{3}{4}^\cdot_i = \frac{3}{4}_i$, $z_i = z_i$ et $\mathbb{R}^\cdot_i = \mathbb{R}_i$ pour $i = 1; 2$. En prenant en considération les relations (III.2.13), (III.2.14) et (III.2.47), nous concluons que

$$\begin{aligned} & \|j_{\alpha^\cdot_1}(t) - j_{\alpha^\cdot_2}(t)\|_{H \times L^2(-)} \\ & \leq C \|j_{\frac{3}{4}_1}(t) - j_{\frac{3}{4}_2}(t)\|_H + \|j_{u_1}(t) - j_{u_2}(t)\|_V + \|j_{\mathbb{R}_1}(t) - j_{\mathbb{R}_2}(t)\|_{L^2(-)} : \quad (\text{III.2.48}) \end{aligned}$$

En utilisant (III.2.39) nous obtenons

$$\begin{aligned} & (E''(u_1; u_2); (u_1; u_2))_H \cdot j(\bar{\cdot}; u_2; u_1; u_2) + j(\bar{\cdot}; u_1; u_1; u_2) \\ & + (z_2; z_1; (u_1; u_2))_H \text{ p.p. } t \in (0; T): \end{aligned} \quad (\text{III.2.49})$$

En prenant en considération (III.2.12), (I.2.13)-(I.2.14) et (III.2.32) on trouve

$$j u_1(t); u_2(t) j_V \cdot C j z_1(t); z_2(t) j_H; \quad (\text{III.2.50})$$

Nous utilisons (III.2.43) et (III.2.50) pour avoir

$$j^{3/4}_1(t); j^{3/4}_2(t) j_H \cdot C j z_1(t); z_2(t) j_H; \quad (\text{III.2.51})$$

Nous sommions les deux inégalités précédentes et nous utilisons (III.2.37) et (III.2.38) pour trouver

$$j u_1(t); u_2(t) j_V + j^{3/4}_1(t); j^{3/4}_2(t) j_H \cdot C \int_0^t \left(j^{1/2}_1(s); j^{1/2}_2(s) j_H \right) ds; \quad (\text{III.2.52})$$

De (III.2.44) nous déduisons que

$$(\dot{\mathbb{R}}_1; \mathbb{R}_2; \mathbb{R}_1)_{L^2(-)} + a(\mathbb{R}_1; \mathbb{R}_2; \mathbb{R}_1)$$

$$\leq j^{1,2}_{1, \mathbb{R}_2; \mathbb{R}_1} \phi_{L^2(-)} \text{ p.p. } t \in (0; T);$$

et

$$(\dot{\mathbb{R}}_2; \mathbb{R}_1; \mathbb{R}_2)_{L^2(-)} + a(\mathbb{R}_2; \mathbb{R}_1; \mathbb{R}_2)$$

$$\leq j^{1,2}_{2, \mathbb{R}_1; \mathbb{R}_2} \phi_{L^2(-)} \text{ p.p. } t \in (0; T);$$

La sommation des deux inégalités précédentes nous fournit

$$(\dot{\mathbb{R}}_1; \dot{\mathbb{R}}_2; \mathbb{R}_1; \mathbb{R}_2)_{L^2(-)} + a(\mathbb{R}_1; \mathbb{R}_2; \mathbb{R}_1; \mathbb{R}_2)$$

$$\|\dot{\mathbb{R}}_1\|_{L^2(-)}^2 + \|\dot{\mathbb{R}}_2\|_{L^2(-)}^2 \leq C \|\mathbb{R}_1\|_{L^2(-)}^2 + C \|\mathbb{R}_2\|_{L^2(-)}^2 \quad \text{p.p. } t \in (0; T);$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} & (\|\dot{\mathbb{R}}_1\|_{L^2(-)}^2 + \|\dot{\mathbb{R}}_2\|_{L^2(-)}^2) + a(\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2; \mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2) \\ & \leq \|\dot{\mathbb{R}}_1\|_{L^2(-)}^2 + \|\dot{\mathbb{R}}_2\|_{L^2(-)}^2 + j(\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2)_{L^2(-)} \quad \text{p.p. } t \in (0; T): \end{aligned}$$

Nous intégrons l'inégalité précédente sur $[0; t]$, après quelques manipulations nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} j(\mathbb{R}_1(t), \mathbb{R}_2(t))_{L^2(-)} & \leq C \int_0^t \|\dot{\mathbb{R}}_1(s)\|_{L^2(-)}^2 + \|\dot{\mathbb{R}}_2(s)\|_{L^2(-)}^2 + j(\mathbb{R}_1(s), \mathbb{R}_2(s))_{L^2(-)} ds \\ & + C \int_0^t j(\mathbb{R}_1(s), \mathbb{R}_2(s))_{L^2(-)}^2 ds: \end{aligned}$$

Nous appliquons l'inégalité de Gronwall (Lemme I.3.8) à l'inégalité précédente pour avoir

$$j(\mathbb{R}_1(t), \mathbb{R}_2(t))_{L^2(-)} \leq C \int_0^t \|\dot{\mathbb{R}}_1(s)\|_{L^2(-)}^2 + \|\dot{\mathbb{R}}_2(s)\|_{L^2(-)}^2 ds: \quad (\text{III.2.53})$$

En substituant (III.2.53), (III.2.52) dans (III.2.48), nous aurons

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{R}_1^{(m)}(t) - \mathbb{R}_2^{(m)}(t)\|_{H^1 L^2(-)} \\ & \leq C \int_0^t \|\mathbb{R}_1^{(m-1)}(s) - \mathbb{R}_2^{(m-1)}(s)\|_{H^1 L^2(-)} ds: \end{aligned}$$

La réitération de cette inégalité m fois implique

$$\|\mathbb{R}_1^{(m)} - \mathbb{R}_2^{(m)}\|_{C(0;T;H^1 L^2(-))} \leq \frac{C^m T^m}{m!} \|\mathbb{R}_1' - \mathbb{R}_2'\|_{C(0;T;H^1 L^2(-))}; \quad (\text{III.2.54})$$

ce qui implique que, pour m suffisamment grand, $\mathbb{R}^{(m)}$ est une contraction dans l'espace de Banach $C(0;T;H^1 L^2(-))$. Par conséquent, du Théorème du point fixe de Banach, $\mathbb{R}^{(m)}$ admet un unique point fixe $\mathbb{R}^* \in C(0;T;H^1 L^2(-))$. ■

Dans l'étape suivante, pour $\bar{\gamma} \in Z$ donné, nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème PV-: Trouver un champ de déplacement $u^- : [0; T] \rightarrow V$, un champ des contraintes $\gamma^- : [0; T] \rightarrow H$ et un champ d'endommagement $\mathbb{R}^- : [0; T] \rightarrow H^1(\cdot)$ tels que pour tout $t \in [0; T]$

$$\gamma^-(t) = E''(u^-(t)) + \int_0^t G(\gamma^-(s); u^-(s); \mathbb{R}^-(s)) ds + \gamma_0; E''(u_0); \quad (\text{III.2.55})$$

$$\mathbb{R}^-(t) \in K \text{ pour tout } t \in [0; T], \quad (\dot{\mathbb{R}}^-(t); \gamma^-)_{L^2(\cdot)} + a(\mathbb{R}^-(t); \gamma^-) \leq 0$$

$$, \quad (\dot{\gamma}^-(t); u^-(t); \mathbb{R}^-(t); \gamma^-)_{L^2(\cdot)} \leq 0; \quad (\text{III.2.56})$$

$$u^-(t) \in U; (\gamma^-(t); (v \rceil u^-(t)))_H + j(\bar{\gamma}(t); u^-(t); v \rceil u^-(t))$$

$$, \quad (f(t); v \rceil u^-(t))_V \leq 0 \quad \forall v \in U; \quad (\text{III.2.57})$$

$$u^-(0) = u_0; \gamma^-(0) = \gamma_0; \mathbb{R}^-(0) = \mathbb{R}_0; \quad (\text{III.2.58})$$

Nous avons le résultat suivant concernant ce problème.

Lemme III.2.5. Il existe une solution unique du problème PV- et elle satisfait $u^- \in C(0; T; V)$, $\gamma^- \in C(0; T; H)$ et $\mathbb{R}^- \in W^{1;2}(0; T; L^2(\cdot)) \cap L^2(0; T; H^1(\cdot))$:

Démonstration. Existence. Soit $\gamma^- = \gamma_0 + \int_0^\cdot \dot{\gamma}^- ds \in C(0; T; H \otimes L^2(\cdot))$ le point fixe de l'opérateur $\mathfrak{A}^-$ et utilisons les notations $u^- = u^{\gamma^-}$; $\gamma^- = \gamma^{\gamma^-}$, $z^- = z^{\gamma^-}$ et $\mathbb{R}^- = \mathbb{R}^{\gamma^-}$. Posons $\gamma' = \gamma^-$ dans (III.2.43) et (III.2.44) pour avoir

$$\gamma^-(t) = E''(u^-(t)) + z^-(t) \quad \forall t \in [0; T]; \quad (\text{III.2.59})$$

$$(\dot{\mathbb{R}}^-(t); \gamma^-)_{L^2(\cdot)} + a(\mathbb{R}^-(t); \gamma^-) \leq 0$$

$$, \quad \dot{\gamma}^-(t); \gamma^- \in L^2(\cdot) \quad \forall t \in (0; T); \quad (\text{III.2.60})$$

et utilisons (III.2.37) et (III.2.38) pour trouver

$$\frac{3}{4}(t) = E''(u^-(t)) + \int_0^t \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{3}{4}(s) \right) ds + \frac{3}{4}(0) \quad \forall t \in [0; T]; \quad (\text{III.2.61})$$

puisque

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{4}(t) \right) &= (G(\frac{3}{4}; u^-); \mathbb{R}^-); \dot{A}(\frac{3}{4}; u^-); \mathbb{R}^-)) \\ &= (G(\frac{3}{4}; u^-); \mathbb{R}^-); \dot{A}(\frac{3}{4}; u^-); \mathbb{R}^-)); \end{aligned}$$

nous constatons que (III.2.61) implique (III.2.55) et (III.2.60) implique (III.2.56).

Ensuite, soit $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{4}(t) \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{4}(t) \right)$ dans (III.2.39) et utilisons (III.2.59) pour obtenir (III.2.57)

et, finalement, (III.2.58) découle de (III.2.40), (III.2.45) et (III.2.61). Ceci achève

la partie d'existence du Lemme III.2.5 puisque les fonctions u^- , $\frac{3}{4}$ et $\mathbb{R}^-$ satisfont

$u^- \in C(0; T; V)$, $\frac{3}{4} \in C(0; T; H)$ et $\mathbb{R}^- \in W^{1,2}(0; T; L^2(\cdot)) \cap L^2(0; T; H^1(\cdot))$:

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur $\mathfrak{M}^-$ défini dans (III.2.47). En effet, soit $(u^-; \frac{3}{4}; \mathbb{R}^-)$ la solution du problème PV satisfaisant $u^- \in C(0; T; V)$, $\frac{3}{4} \in C(0; T; H)$ et $\mathbb{R}^- \in W^{1,2}(0; T; L^2(\cdot)) \cap L^2(0; T; H^1(\cdot))$ et soit $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{4}(t) \right) \in C(0; T; H \otimes L^2(\cdot))$ la fonction donnée par

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{4}(t) \right) = (G(\frac{3}{4}; u^-); \mathbb{R}^-); \dot{A}(\frac{3}{4}; u^-); \mathbb{R}^-); \quad (\text{III.2.62})$$

Nous notons par z la fonction définie par (III.2.37)-(III.2.38). Nous utilisons (III.2.55)

et (III.2.62) pour trouver

$$\frac{3}{4}(t) = E''(u^-(t)) + z(t) \quad \forall t \in [0; T]; \quad (\text{III.2.63})$$

Nous utilisons (III.2.56) et (III.2.62) pour obtenir

$$(\dot{\mathbb{R}}^-(t); \mathbb{R}^-(t))_{L^2(\cdot)} + a(\mathbb{R}^-(t); \mathbb{R}^-(t))$$

$$\|i\|_{L^2(\cdot)}^2(t) \ll \|i\|_{\mathbb{R}^+}(t) \ll 2K; \quad (\text{III.2.64})$$

et en substituant l'inégalité (III.2.63) dans (III.2.57) nous déduisons que u^- est la solution du problème PV^- . De la partie de l'unicité dans le Lemme III.2.2, il vient que ce problème admet une solution, notée u^- et, par conséquent, $u^- = u^-$. De plus, (III.2.63)-(III.2.64) et (III.2.43)-(III.2.44) impliquent que $\frac{3}{4}^- = \frac{3}{4}^-$ et $\mathbb{R}^- = \mathbb{R}^-$. Nous utilisons à présent (III.2.62) et (III.2.47) pour obtenir $\dot{\gamma}^- = \dot{\gamma}^-$. Ensuite, de l'unicité du point fixe de l'opérateur $\mathfrak{M}^-$, garantie par le Lemme III.2.4, il vient que $\dot{\gamma}^- = \dot{\gamma}^-$. Donc, $u^- = u^-$, $\frac{3}{4}^- = \frac{3}{4}^-$ et $\mathbb{R}^- = \mathbb{R}^-$. Nous concluons que toute solution $(u^-; \frac{3}{4}^-; \mathbb{R}^-)$ du problème PV^- coïncide avec la solution $(u^-; \frac{3}{4}^-; \mathbb{R}^-)$ obtenue dans la partie existence, ce qui implique l'unicité de la solution du problème PV^- . ■

Dans l'étape suivante, nous exploitons le champ de déplacement u^- obtenu dans le Lemme III.2.5 et nous considérons le problème de Cauchy suivant.

Problème PV_μ : Trouver un champ d'adhésion $\mu^- : [0; T] \rightarrow L^2(\mathbb{I}_3)$ tel que

$$\mu^-(t) = \int_0^h \mu^-(t) \mathbb{R}(u^-(t))^2 \, \mathbb{I}_a + \dots \quad \text{p.p. } t \in (0; T); \quad (\text{III.2.65})$$

$$\mu^-(0) = \mu_0^-; \quad (\text{III.2.66})$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme III.2.6. Il existe une solution unique du problème PV_μ et elle satisfait $\mu^- \in W^{1;1}(0; T; L^2(\mathbb{I}_3)) \setminus Z$:

Démonstration. Pour simplifier, nous supprimons la dépendance des différentes fonctions de $\mathbb{I}_3$, et notons que les équations et les inéquations ci dessous sont valides

p.p. sur j_3 . Considérons l'application $F^- : [0; T] \times L^2(j_3) \rightarrow L^2(j_3)$ définie par

$$F^-(t; \mu) = j_1 \circ \mu(t) \mathbb{R}(u \circ (t))^2 j_1^{-2} a_+ : \quad (\text{III.2.67})$$

Il est simple de vérifier que F^- est uniformément continue par rapport au temps, elle est de Lipschitz par rapport au second argument, uniformément dans le temps. De plus, pour tout $\mu \in L^2(j_3)$, l'application $t \mapsto F^-(t; \mu)$ appartient à $L^1(0; T; L^2(j_3))$. Donc, en utilisant une version du Théorème de Cauchy Lipschitz (Théorème I.3.5), nous déduisons qu'il existe une unique fonction $\mu^- \in W^{1;1}(0; T; L^2(j_3))$ solution du problème PV_μ . La régularité $\mu^- \in Z$ vient de (III.2.65), (III.2.66) et de l'hypothèse $0 \leq \mu^-_0 \leq 1$ p.p. sur j_3 . En effet, l'équation (III.2.65) implique que, pour p.p. $x \in j_3$, la fonction $t \mapsto \mu^-(x; t)$ est décroissante et sa dérivée s'annule lorsque $j_1 \circ \mu^-(t) \mathbb{R}(u \circ (t))^2 \leq a_+$. En combinant ces propriétés avec l'inégalité $0 \leq \mu^-(0) \leq 1$ nous déduisons que $0 \leq \mu^-(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0; T]$, p.p. sur j_3 , ce qui montre que $\mu^- \in Z$: ■

Il vient du Lemme III.2.6 que pour tout $\mu^- \in Z$, la solution μ^- du problème PV_μ appartient à Z . Par conséquent, nous pouvons considérer l'opérateur $\alpha : Z \rightarrow Z$ donné par

$$\alpha \mu^- = \mu^- : \quad (\text{III.2.68})$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme II.2.7. Il existe un unique élément $\mu^- \in Z$ tel que $\alpha \mu^- = \mu^-$.

Démonstration. Nous montrons que, pour un entier positif m , l'application α^m est une contraction sur Z : Pour cela, nous supposons que μ^-_1 et μ^-_2 sont deux fonctions dans Z et dénotons par $u^-_i = u_i$, $\frac{3}{4}\mu^-_i = \frac{3}{4}\mu_i$, $\mathbb{R}^-_i = \mathbb{R}_i$ et $\mu^-_i = \mu_i$ les fonctions obtenues

dans les Lemmes III.2.5 et III.2.6, respectivement, pour $\bar{u} = \bar{u}_i$, $i = 1, 2$. Nous déduisons également, pour $i = 1, 2$; la fonction z_i

$$z_i(t) = \int_0^t G(\frac{3}{4}(s); u_i(s); \bar{u}_i(s)) ds + \frac{3}{4} \int_0^t E''(u_0) \bar{u}_i(s) ds \quad [0; T]; \quad (III.2.69)$$

nous utilisons (III.2.55) et (III.2.69) pour obtenir

$$\frac{3}{4}(t) = E''(u_i(t)) + z_i(t) \quad i = 1, 2; \quad (III.2.70)$$

Nous insérons l'inégalité (III.2.70) dans (III.2.57) et nous utilisons des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration de (III.2.41) pour déduire

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq C \|z_1(t) - z_2(t)\|_H + \|\bar{u}_1(t) - \bar{u}_2(t)\|_{L^2(I_3)}; \quad (III.2.71)$$

Nous utilisons (III.2.69) pour trouver

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_H \leq \int_0^t C \left[\|\frac{3}{4}(s) - \frac{3}{4}(s)\|_H + \|u_1(s) - u_2(s)\|_V + \|\bar{u}_1(s) - \bar{u}_2(s)\|_{L^2(I_3)} \right] ds; \quad (III.2.72)$$

Nous substituons (III.2.72) dans (III.2.71) pour obtenir

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq C \|\bar{u}_1(t) - \bar{u}_2(t)\|_{L^2(I_3)} + \int_0^t C \left[\|\frac{3}{4}(s) - \frac{3}{4}(s)\|_H + \|u_1(s) - u_2(s)\|_V + \|\bar{u}_1(s) - \bar{u}_2(s)\|_{L^2(I_3)} \right] ds; \quad (III.2.73)$$

Nous utilisons (III.2.70), (III.2.72) et (III.2.73) pour trouver

$$\|\frac{3}{4}(t) - \frac{3}{4}(t)\|_H \leq C \|\bar{u}_1(t) - \bar{u}_2(t)\|_{L^2(I_3)} + \int_0^t C \left[\|\frac{3}{4}(s) - \frac{3}{4}(s)\|_H + \|u_1(s) - u_2(s)\|_V + \|\bar{u}_1(s) - \bar{u}_2(s)\|_{L^2(I_3)} \right] ds; \quad (III.2.74)$$

Nous utilisons à présent des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration de (III.2.53) et les propriétés de la fonction $\tilde{A}$ pour trouver

$$\begin{aligned} & j_{\mathbb{R}_1}(t) - j_{\mathbb{R}_2}(t) j_{L^2(-)} \\ & \cdot C \int_0^t j_{\mathbb{R}_1}^{3/4}(s) - j_{\mathbb{R}_2}^{3/4}(s) j_H + j_{u_1}(s) - j_{u_2}(s) j_V + j_{\mathbb{R}_1}(s) - j_{\mathbb{R}_2}(s) j_{L^2(-)} ds: \quad (\text{III.2.75}) \end{aligned}$$

Nous sommes les trois inégalités précédentes pour obtenir

$$\begin{aligned} & j_{\mathbb{R}_1}^{3/4}(t) - j_{\mathbb{R}_2}^{3/4}(t) j_H + j_{u_1}(t) - j_{u_2}(t) j_V + j_{\mathbb{R}_1}(t) - j_{\mathbb{R}_2}(t) j_{L^2(-)} \\ & \cdot C j_{\mathbb{R}_1}^-(t) - j_{\mathbb{R}_2}^-(t) j_{L^2(i_3)} \\ & + C \int_0^t j_{\mathbb{R}_1}^{3/4}(s) - j_{\mathbb{R}_2}^{3/4}(s) j_H + j_{u_1}(s) - j_{u_2}(s) j_V + j_{\mathbb{R}_1}(s) - j_{\mathbb{R}_2}(s) j_{L^2(-)} ds: \quad (\text{III.2.76}) \end{aligned}$$

Ensuite, en appliquant l'inégalité de Gronwall donnée dans le Lemme I.3.6 à (III.2.76)

nous aurons

$$\begin{aligned} & j_{\mathbb{R}_1}^{3/4}(t) - j_{\mathbb{R}_2}^{3/4}(t) j_H + j_{u_1}(t) - j_{u_2}(t) j_V + j_{\mathbb{R}_1}(t) - j_{\mathbb{R}_2}(t) j_{L^2(-)} \\ & \cdot C j_{\mathbb{R}_1}^-(t) - j_{\mathbb{R}_2}^-(t) j_{L^2(i_3)} + \int_0^t j_{\mathbb{R}_1}^-(s) - j_{\mathbb{R}_2}^-(s) j_{L^2(i_3)} ds^A; \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\int_0^t j_{u_1}(s) - j_{u_2}(s) j_V ds \cdot C \int_0^t j_{\mathbb{R}_1}^-(s) - j_{\mathbb{R}_2}^-(s) j_{L^2(i_3)} ds: \quad (\text{III.2.77})$$

D'autre part, du problème de Cauchy (III.2.65)-(III.2.66), nous pouvons écrire

$$\mu_i(t) = \int_0^t \int_0^h \mu_i(s) \Re(u_{i^0}(s))^2 \int_a^i ds; \quad i = 1, 2: \quad (\text{III.2.78})$$

Alors

$$j_{\mu_1}(t) - j_{\mu_2}(t) j_{L^2(i_3)} \cdot C \int_0^t \int_0^h \mu_1(s) \Re(u_{1^0}(s))^2 \int_a^i \mu_2(s) \Re(u_{2^0}(s))^2 ds: \quad L^2(i_3)$$

En utilisant la définition de $\mathbb{R}$ et en écrivant $\mu_1 = \mu_1^- + \mu_2 + \mu_2^-$ nous aurons

$$\begin{aligned} & \| \mu_1(t) - \mu_2(t) \|_{L^2(I_3)} \\ & \leq C \int_0^t \| \mu_1(s) - \mu_2(s) \|_{L^2(I_3)} ds + C \int_0^t \| u_{1^0}(s) - u_{2^0}(s) \|_{L^2(I_3)} ds; \end{aligned} \quad (\text{III.2.79})$$

De l'inégalité de Gronwall (Lemme I.3.6 (1)), il vient que

$$\begin{aligned} & \| \mu_1(t) - \mu_2(t) \|_{L^2(I_3)} \\ & \leq C \int_0^t \| u_{1^0}(s) - u_{2^0}(s) \|_{L^2(I_3)} ds; \end{aligned} \quad (\text{III.2.80})$$

et en utilisant (I.2.15) nous obtenons

$$\begin{aligned} & \| \mu_1(t) - \mu_2(t) \|_{L^2(I_3)} \\ & \leq C \int_0^t \| u_1(s) - u_2(s) \|_V ds; \end{aligned} \quad (\text{III.2.81})$$

La relation (III.2.68) et l'estimation (III.2.81) mènent à

$$\| \mu_1^-(t) - \mu_2^-(t) \|_{L^2(I_3)} \leq C \int_0^t \| u_1(s) - u_2(s) \|_V ds; \quad (\text{III.2.82})$$

Nous combinons (III.2.77) et (III.2.82) pour voir que

$$\| \mu_1^-(t) - \mu_2^-(t) \|_{L^2(I_3)} \leq C \int_0^t \| \mu_1^-(s) - \mu_2^-(s) \|_{L^2(I_3)} ds;$$

et en réitérant cette inégalité m fois nous obtenons

$$\| \mu_1^{m-}(t) - \mu_2^{m-}(t) \|_{L^2(I_3)} \leq \frac{C^m T^m}{m!} \| \mu_1^-(t) - \mu_2^-(t) \|_{L^2(I_3)}; \quad (\text{III.2.83})$$

Rappelons que Z est un ensemble fermé non vide dans l'espace de Banach $C(0; T; L^2(I_3))$

et notons que (III.2.83) montre que, pour m suffisamment grand, l'opérateur $\mu^m : Z \rightarrow Z$

Z est une contraction. Donc, du Théorème du point fixe de Banach, il vient que π admet un point fixe unique $\bar{u} \in Z$: ■

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour prouver le Théorème III.2.1.

Démonstration. Existence. Soit $\bar{u} \in Z$ le point fixe de l'opérateur π et soit $(u^\pi; \frac{3}{4}^\pi; \mathbb{R}^\pi)$ la solution du problème PV- pour $\bar{u} = \bar{u}^\pi$, càd $u^\pi = u^{-\pi}$, $\frac{3}{4}^\pi = \frac{3}{4}^{-\pi}$ et $\mathbb{R}^\pi = \mathbb{R}^{-\pi}$. Considérons la fonction z^π donnée par

$$z^\pi(t) = \int_0^t G(\frac{3}{4}^\pi(s); u^\pi(s); \mathbb{R}^\pi(s)) ds + \frac{3}{4}_0 \in E''(u_0) \quad \forall t \in [0; T]; \quad (\text{III.2.84})$$

et notons que des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration de (III.2.41) donnent

$$\begin{aligned} \|u^\pi(t_1) - u^\pi(t_2)\|_V &\leq C(\|z^\pi(t_1) - z^\pi(t_2)\|_H \\ &+ \|f(t_1) - f(t_2)\|_V + \|\bar{u}^\pi(t_1) - \bar{u}^\pi(t_2)\|_{L^2(I_3)}); \end{aligned} \quad (\text{III.2.85})$$

pour tout $t_1, t_2 \in [0; T]$. Nous utilisons à présent (III.2.55) et (III.2.84) pour trouver que

$$\frac{3}{4}^\pi(t) = E''(u^\pi(t)) + z^\pi(t) \quad \forall t \in [0; T]; \quad (\text{III.2.86})$$

et par (III.2.86) et les propriétés (III.2.12) de la fonctionnelle E nous obtenons

$$\|\frac{3}{4}^\pi(t_1) - \frac{3}{4}^\pi(t_2)\|_H \leq C(\|u^\pi(t_1) - u^\pi(t_2)\|_V + \|z^\pi(t_1) - z^\pi(t_2)\|_H); \quad (\text{III.2.87})$$

pour tout $t_1, t_2 \in [0; T]$. Puisque $\bar{u}^\pi = \mu^{-\pi}$, il vient du Lemme III.2.6 que $\bar{u}^\pi \in W^{1;1}(0; T; L^2(I_3))$, rappelons également que $f \in W^{1;1}(0; T; V)$ et la régularité $z \in C^1(0; T; H)$. Nous utilisons maintenant (III.2.85) et (III.2.87) pour déduire que $u^\pi \in W^{1;1}(0; T; V)$ et $\frac{3}{4}^\pi \in W^{1;1}(0; T; H)$. Ensuite, posons $\bar{u} = \bar{u}^\pi$ dans l'égalité

(III.2.55) et puis la différentier par rapport au temps pour obtenir (III.2.25). Nous posons $\bar{u} = \bar{u}^\alpha$ dans les problèmes PV-, PV_μ et utilisons l'égalité $\bar{u}^\alpha = \mu^\alpha$ et, par conséquent, nous obtenons que $(u^\alpha; \frac{3}{4}; \mathbb{R}^\alpha; \bar{u}^\alpha)$ satisfait (III.2.26), (III.2.27), (III.2.28) et (III.2.29).

En choisissant à présent $v = \xi!$ dans (III.2.27) où $! \in C_0^1(-)^d$ nous aurons

$$\text{Div} \frac{3}{4}(t) + f_0(t) = 0 \quad \forall t \in [0; T];$$

et, par l'hypothèse (III.2.16), nous obtenons que $\text{Div} \frac{3}{4} \in W^{1;1}(0; T; H)$ et, par conséquent $\frac{3}{4} \in W^{1;1}(0; T; H_1)$. Nous concluons que $(u^\alpha; \frac{3}{4}; \mathbb{R}^\alpha; \bar{u}^\alpha)$ est une solution du problème PV et elle satisfait la régularité (III.2.35), ce qui achève la preuve de la partie d'existence du Théorème III.2.1.

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur α défini par (III.2.68) combinée avec l'unicité de la solution du problème PV-. En effet, soit $(u; \frac{3}{4}; \mathbb{R}; \bar{u})$ une solution du problème PV qui satisfait (III.2.35). En utilisant (III.2.36) nous déduisons que $\bar{u} \in Z$, et il vient aussi de (III.2.25), (III.2.26) et (III.2.27) que $(u; \frac{3}{4}; \mathbb{R})$ est une solution du problème PV-; et puisque, par le Lemme III.2.5, ce problème admet une solution unique notée $(u^-; \frac{3}{4}; \mathbb{R}^-)$ nous obtenons

$$u = u^-; \frac{3}{4} = \frac{3}{4}^-; \mathbb{R} = \mathbb{R}^-; \quad (\text{III.2.88})$$

Nous remplaçons $u = u^-$ dans (III.2.28) et utilisons la condition initiale $\bar{u}(0) = \bar{u}_0$ dans (III.2.29) pour déduire que $\bar{u}$ est une solution du problème PV_μ . Du Lemme III.2.6, nous savons que ce dernier problème admet une solution unique notée μ^- et,

par conséquent,

$$\bar{\mu} = \mu: \quad (\text{III.2.89})$$

Nous utilisons maintenant (III.2.68) et (III.2.89) pour voir que $\alpha \bar{\mu} = \bar{\mu}$, c-à-d. $\bar{\mu}$ est un point fixe de l'opérateur α . Du Lemme III.2.7, il vient que

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}^\alpha: \quad (\text{III.2.90})$$

La partie de l'unicité du théorème est à présent une conséquence des inégalités (III.2.88) et (III.2.90). ■

Chapitre 4

Problème antiplan de contact sans frottement

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux problèmes antiplans de contact sans frottement. Ce type de problèmes est rencontré dans l'étude d'un contact entre un corps cylindrique et une fondation rigide. Le cylindre est supposé électrique-viscoélastique et la fondation est supposée électriquement conductive. L'adhésion des surfaces de contact, causée par la colle, est prise en considération. Nous dérivons une formulation variationnelle du modèle qui est un système constitué d'une équation variationnelle d'évolution pour le champ de déplacement, d'une équation variationnelle dépendant du temps pour le champ électrique et d'une équation intégral-différentielle pour le champ d'adhésion. Ensuite, nous prouvons l'existence d'une solution du problème variationnel correspondant au problème mécanique considéré. Ce travail a fait l'objet de la publication [50].

Tout au long de ce chapitre, nous nous plaçons dans le cadre fonctionnel "scalaire"

décrit au premier chapitre. Par conséquent, l'espace V est donné par (I.2.1); il est un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire (I.2.6).

4.1 Formulation du problème

Dans ce qui suit, nous nous plaçons dans le cadre physique no. 2 présenté dans le premier chapitre de cette thèse et par conséquent nous utilisons le modèle mathématique no. 2. Pour que le modèle soit complet, nous devons préciser la loi de comportement et les conditions aux limites et donner leurs nouvelles formes dans le cadre "antiplan".

Explicitement, pour modéliser le comportement du matériau, nous utiliserons dans ce chapitre une loi de comportement élasto-viscoélastique isotrope de la forme

$$\frac{3}{4} = 2\mu'' \dot{\mathbf{u}} + \lambda'' \text{tr}''(\dot{\mathbf{u}}) \mathbf{I} + 2\lambda'' (\mathbf{u}) + \lambda'' \text{tr}''(\mathbf{u}) \mathbf{I} - \mathbf{E}^T \mathbf{E}(\cdot); \quad (\text{IV.1.1})$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}''(\mathbf{u}) + m \mathbf{E}(\cdot); \quad (\text{IV.1.2})$$

où λ'' et μ'' sont les coefficients de viscosité, λ' et μ' sont les coefficients de Lamé, $\text{tr}''(\mathbf{u}) = \text{tr}''_{ii}(\mathbf{u})$, $\mathbf{I}$ est le tenseur unitaire dans $\mathbb{R}^3$, m est la constante de perméabilité électrique, $\mathbf{E}$ représente le tenseur piézoélectrique d'ordre trois et $\mathbf{E}^T$ son transposé. Nous assumons que

$$\mathbf{E}'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e''_{13} + e''_{31} & 0 & 0 \\ e''_{23} + e''_{32} & 0 & 0 \\ e''_{33} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}'' = (\mathbf{e}''_{ij})_{2 \times 3}; \quad (\text{IV.1.3})$$

où e est un coefficient piézoélectrique. Nous assumons aussi que les coefficients μ' , λ' , λ'' et e dépendent des variables spatiales x_1, x_2 , mais sont indépendantes de la variable

spatiale x_3 . Puisque $E^a v = {}^a E^a v$ pour tout ${}^a \in S^3$, $v \in \mathbb{R}^3$, il vient de (IV.1.3) que

$$E^a v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ev_1 \\ 0 & 0 & ev_2 \\ ev_1 & ev_2 & ev_3 \end{pmatrix} \quad 8v = (v_i) \in \mathbb{R}^3: \quad (IV.1.4)$$

Dans le contexte antiplan (I.1.13), (I.1.14), en utilisant les équations constitutives (IV.1.1), (IV.1.2) et les égalités (IV.1.3), (IV.1.4) il vient que le champ des contraintes et le champ des déplacements électriques sont donnés respectivement par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu u_{;1} + {}^1 u_{;1} + e'_{;1} \\ 0 & 0 & \mu u_{;2} + {}^1 u_{;2} + e'_{;2} \\ {}^1 u_{;1} + e'_{;1} & {}^1 u_{;2} + e'_{;2} & 0 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} eu_{;1} + m'_{;1} \\ eu_{;2} + m'_{;2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (IV.1.5)$$

Nous assumons que le processus est mécaniquement dynamique et électriquement statique et, par conséquent, il est gouverné par les équations

$$\text{Div} \mathcal{I}_4 + f_0 = \frac{1}{2} \ddot{u}; \quad D_{i;j} - q_0 = 0 \quad \text{dans } B \times (0; T); \quad (VI.1.6)$$

où $\text{Div} \mathcal{I}_4 = (\mathcal{I}_{4;j}^i)$ représente la divergence du tenseur $\mathcal{I}_4$. En prenant en considération (IV.1.5), (I.1.13), (I.1.14), (I.1.9) et (I.1.11), les équations de (IV.1.16) sont réduites aux équations scalaires suivantes

$$\text{div} \left(\mu r_{;1} + {}^1 r_{;1} + e r'_{;1} \right) + f_0 = \frac{1}{2} \ddot{u} \quad \text{dans } - \times (0; T); \quad (IV.1.7)$$

$$\text{div} (e r_{;1} + m r'_{;1}) = q_0 \quad \text{dans } - \times (0; T); \quad (IV.1.8)$$

où

$$\text{div} \mathcal{I} = \mathcal{I}_{1;1} + \mathcal{I}_{2;2} \quad \text{pour} \quad \mathcal{I} = (\mathcal{I}_1(x_1; x_2); \mathcal{I}_2(x_1; x_2));$$

De (IV.1.5) et (I.1.20) nous déduisons que le vecteur contrainte de Cauchy et la composante normale du champ des déplacements électriques sont donnés par

$$\mathcal{C}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu @ \dot{u} + \mathcal{C} @ u + e @ \phi \end{pmatrix}; \quad D :^0 = e @ u \quad m @ \phi; \quad (IV.1.9)$$

avec

$$@^0 = v_{;1}^0 \mathbf{e}_1 + v_{;2}^0 \mathbf{e}_2 \quad \text{pour} \quad v = v(x_1; x_2):$$

En prenant en considération (I.1.10), (I.1.12) et (IV.1.9), la condition de traction sur $\Gamma_2 \times (0; T)$ et les conditions électriques sur $\Gamma_b \times (0; T)$ sont données par

$$\mu @ \dot{u} + \mathcal{C} @ u + e @ \phi = f_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0; T); \quad (IV.1.10)$$

$$e @ u \quad m @ \phi = q_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0; T): \quad (IV.1.11)$$

Nous décrivons à présent la condition aux limites tangentielle sur $\Gamma_3 \times (0; T)$. D'abord, de (I.1.13) et (I.1.20) nous déduisons que le déplacement normal s'annule, $u_n = 0$, ce qui montre que le contact est bilatéral, c-à-d que le contact est maintenu durant tout le processus. Aussi, en utilisant (I.1.13), (IV.1.5), (I.1.20)-(I.1.22) nous concluons que

$$u_i = (0; 0; u); \quad \mathcal{C}_i^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu @ \dot{u} + \mathcal{C} @ u + e @ \phi \end{pmatrix}; \quad (IV.1.12)$$

La condition aux limites tangentielle est donc modélisée par

$$\mathcal{C}_i^0 = p(\bar{\gamma}) R_i(u_i) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0; T): \quad (IV.1.13)$$

Ici p est une fonction donnée, $\bar{\gamma}$ est le champ d'adhésion et R_i est l'opérateur de

troncature défini par

$$R_i(v) = \begin{cases} v & \text{si } |v| \leq L; \\ L \frac{v}{|v|} & \text{si } |v| > L; \end{cases}$$

avec $L > 0$ étant une longueur caractéristique de l'adhésion, au delà de laquelle il n'y a aucune traction (voir, ex. [37]). Il vient de (IV.1.13) que la contrainte tangentielle dépend du champ d'adhésion et du déplacement tangentiel. La traction tangentielle de frottement est assumée beaucoup plus petite que la traction adhésive et, par conséquent, elle est négligée. En utilisant maintenant (IV.1.12), il est facile de voir que la condition aux limites tangentielle (IV.1.13) implique

$$i \mu \frac{\partial}{\partial t} u + e \phi = p(\cdot) R(u); \quad (\text{IV.1.14})$$

où l'opérateur R sera noté R car il est défini pour les scalaires.

Ensuite, notons qu'en utilisant (IV.1.12), l'équation différentielle (I.1.39) décrivant l'évolution du champ d'adhésion et présentée dans le premier chapitre de cette thèse sera réduite à l'équation suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi = i \omega - j R(u)^2 \quad \text{sur } i \in \mathbb{R} (0; T):$$

Aussi, puisque la fondation est électriquement conductive et le contact est bilatéral, nous assumons que la composante normale du champ des déplacements électriques ou la charge libre est proportionnelle à la différence entre le potentiel sur la fondation et sur la surface du corps. alors,

$$D \phi = k(\phi - \phi_F) \quad \text{sur } i \in \mathbb{R} (0; T);$$

où φ_F représente le potentiel électrique sur la fondation et k est le coefficient de conductivité électrique. Nous utilisons (IV.1.9) et l'égalité précédente pour obtenir

$$e @ u_j m @' = k (\varphi_j - \varphi_F) \quad \text{sur } j_3 \times \mathbb{R}^+ (0; T); \quad (\text{IV.1.15})$$

Finalement, nous prescrivons les données initiales et notons qu'en plus du déplacement initial u_0 et du champ d'adhésion initial $\bar{\gamma}_0$; nous avons besoin de prescrire la vitesse initiale v_0 , également, puisque le processus est dynamique; donc

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega;$$

$$\dot{u}(0) = v(0) = v_0 \quad \text{dans } \Omega;$$

$$\bar{\gamma}(0) = \bar{\gamma}_0 \quad \text{dans } j_3;$$

Nous collectons les équations et les conditions ci-dessus pour obtenir le modèle mathématique suivant qui décrit un problème dynamique antiplan de contact sans frottement et avec adhésion entre un cylindre électro-viscoélastique et une fondation conductive.

Problème P. Trouver un champ de déplacement $u : \Omega \times \mathbb{R}^+ [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$, un potentiel électrique $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^+ [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$ et un champ d'adhésion $\bar{\gamma} : j_3 \times \mathbb{R}^+ [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\text{div} (\mu \nabla u + \gamma \nabla \varphi) + f_0 = \frac{1}{2} \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ (0; T);$$

$$\text{div} (\epsilon \nabla \varphi) = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ (0; T);$$

$$u = 0 \quad \text{sur } j_1 \times \mathbb{R}^+ (0; T);$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } j_a \times \mathbb{R}^+ (0; T);$$

$$\mu @ \dot{u} + \gamma @ u + e @ \varphi = f_2 \quad \text{sur } j_2 \times \mathbb{R}^+ (0; T);$$

$$\varepsilon_{ij} u_{j,i} - m_{ij} \dot{u}_{j,i} = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0; T);$$

$$\int_{\Gamma_3} \mu_{ij} \dot{u}_{j,i} + \int_{\Gamma_3} \varepsilon_{ij} u_{j,i} + \int_{\Gamma_3} e_{ij} \dot{u}_{j,i} = p(\bar{\varphi}) R(u) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0; T);$$

$$\varepsilon_{ij} u_{j,i} - m_{ij} \dot{u}_{j,i} = k(\varphi - \varphi_F) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0; T);$$

$$\dot{\varphi} = \int_{\Gamma_3} \dot{\varphi}_0 - k R(u) k^2 \int_{\Gamma_3} \varphi_a^2 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0; T);$$

$$u(0) = u_0; \quad v(0) = v_0 \quad \text{dans } \Omega;$$

$$\bar{\varphi}(0) = \bar{\varphi}_0 \quad \text{sur } \Gamma_3;$$

Notons qu'une fois le champ de déplacement u et le potentiel électrique φ qui résolvent le problème P sont connus, alors le tenseur des contraintes σ et le champ des déplacements électriques D peuvent être obtenus en utilisant la loi constitutive (IV.1.5).

Afin de dériver une formulation variationnelle du problème P, nous citons les hypothèses sur les données du problème. Supposons que le coefficient de viscosité et le coefficient de perméabilité électrique satisfont

$$\mu \in L^1(\Omega) \text{ et il existe } \mu^* > 0 \text{ tel que } \mu(x) \geq \mu^* \text{ p.p. } x \in \Omega; \quad (\text{IV.1.16})$$

$$m \in L^1(\Omega) \text{ et il existe } m^* > 0 \text{ tel que } m(x) \geq m^* \text{ p.p. } x \in \Omega; \quad (\text{IV.1.17})$$

Nous supposons également que le coefficient de Lamé et le coefficient piézoélectrique satisfont

$$\lambda \in L^1(\Omega) \text{ et } \lambda(x) > 0 \text{ p.p. } x \in \Omega; \quad (\text{IV.1.18})$$

$$e \in L^1(\Omega); \quad (\text{IV.1.19})$$

La fonction tangentielle p satisfait

$$\begin{aligned}
 & \text{a/ } p : j_3 \rightarrow \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+; \\
 & \text{b/ Il existe } L > 0 \text{ tel que} \\
 & \quad |p(x; \bar{1}) - p(x; \bar{2})| \leq L |\bar{1} - \bar{2}| \\
 & \quad \bar{1}, \bar{2} \in \mathbb{R}; \text{ p.p. } x \in j_3; \\
 & \text{c/ Il existe } M > 0 \text{ tel que } |p(x; \bar{1})| \leq M \\
 & \quad \bar{1} \in \mathbb{R}; \text{ p.p. } x \in j_3; \\
 & \text{d/ L'application } x \mapsto p(x; \bar{1}) \text{ est mesurable sur } j_3; \\
 & \quad \text{pour tout } \bar{1} \in \mathbb{R}; \\
 & \text{e/ L'application } x \mapsto p(x; 0) \text{ appartient à } L^2(j_3):
 \end{aligned} \tag{IV.1.20}$$

Les coefficients d'adhésion σ et σ_a satisfont les conditions

$$\sigma \in L^1(j_3); \sigma_a \in L^2(j_3); \sigma, \sigma_a \geq 0 \text{ p.p. sur } j_3: \tag{IV.1.21}$$

Les forces, les tractions, les densités des charges libres de volume et de surface ont les régularités

$$f_0 \in L^2(\Omega; T; L^2(-)^{\mathcal{C}}); f_2 \in L^2(\Omega; T; L^2(j_2)^{\mathcal{C}}); \tag{IV.1.22}$$

$$q_0 \in C^1(\Omega; T; L^2(-)^{\mathcal{C}}); q_2 \in C^1(\Omega; T; L^2(j_b)^{\mathcal{C}}); \tag{IV.1.23}$$

Le coefficient de la conductivité électrique satisfait

$$k \in L^1(j_3) \text{ et } k(x) \geq 0 \text{ p.p. } x \in j_3: \tag{IV.1.24}$$

Finalement, nous assumons que le potentiel électrique de la fondation et les données initiales sont tels que

$$\varphi_F \in C^1(\Omega; T; L^2(j_3)^{\mathcal{C}}); \tag{IV.1.25}$$

$$u_0 \in V; v_0 \in L^2(\cdot); \bar{u}_0 \in L^2(i_3); 0 \leq \bar{u}_0 \leq 1; \quad (\text{IV.1.26})$$

Ensuite, nous définissons les formes bilinéaires $a_\mu : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $a_\nu : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $a_e : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$, $a_e^\pi : W \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et $a_m : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ par les égalités

$$a_\mu(u; v) = \int_\Omega \mu(x) u(x) v(x) dx; \quad (\text{IV.1.27})$$

$$a_\nu(u; v) = \int_\Omega \nu(x) u(x) v(x) dx; \quad (\text{IV.1.28})$$

$$a_e(u; v) = \int_\Omega e(x) u(x) v(x) dx = a_e^\pi(v; u); \quad (\text{IV.1.29})$$

$$a_m(v; \tilde{A}) = \int_\Omega m(x) v(x) \tilde{A}(x) dx + \int_{i_3} k(x) v(x) \tilde{A}(x) dx; \quad (\text{IV.1.30})$$

pour tout $u, v \in V$, $v \in W$. Les hypothèses (IV.1.16)-(IV.1.19), (IV.1.24) impliquent que les intégrales ci-dessus sont bien définies et, en utilisant (I.2.7) et (I.2.8), il vient que les formes a_μ , a_ν , a_e , a_e^π et a_m sont continues; de plus, les formes a_μ , a_ν et a_m sont symétriques et, d'ailleurs, la forme a_μ est V -élliptique et la forme a_m est W -élliptique, puisque

$$a_\mu(v; v) = \int_\Omega \mu(x) v(x)^2 dx \geq \alpha \int_\Omega v(x)^2 dx \quad \forall v \in V; \quad (\text{IV.1.31})$$

$$a_m(\tilde{A}; \tilde{A}) = \int_\Omega m(x) \tilde{A}(x)^2 dx + \int_{i_3} k(x) \tilde{A}(x)^2 dx \geq \alpha \int_{i_3} \tilde{A}(x)^2 dx \quad \forall \tilde{A} \in W; \quad (\text{IV.1.32})$$

Les hypothèses (IV.1.22) nous permettent, pour p.p. $t \in (0; T)$, de définir $f(t) \in V'$ par

$$(f(t); v)_{V', V} = \int_\Omega f_0(t) v(x) dx + \int_{i_2} f_2(t) v(x) dx \quad \forall v \in V; \quad (\text{IV.1.33})$$

et nous aurons

$$f \in L^2(0; T; V') \quad (\text{IV.1.34})$$

Nous définissons également les applications $q : [0; T] \rightarrow W$ et $j : L^2(\Gamma_3) \rightarrow V \times V \rightarrow R$, respectivement, par

$$(q(t); \tilde{A})_W = \int_{\Gamma_2} q_0(t) \tilde{A} \, dx + \int_{\Gamma_3} q_0(t) \tilde{A} \, da + \int_{\Gamma_3} k' \tilde{A} \, da; \quad (IV.1.35)$$

$$j(\bar{\cdot}; u; v) = \int_{\Gamma_3} p(\bar{\cdot}) R(u) v \, da; \quad (IV.1.36)$$

pour tout $v \in V$, $\tilde{A} \in W$ et $t \in [0; T]$: La définition de q est basée sur le Théorème de représentation de Riesz; de plus, il vient des hypothèses (IV.1.23)-(IV.1.24) que l'intégrale (IV.1.35) est bien définie et

$$q \in C^1(0; T; W); \quad (IV.1.37)$$

Enfin, pour le champ d'adhésion nous considérons l'ensemble Z défini dans (I.2.9).

En performant des intégrations par partie, en utilisant les notations (IV.1.27)-(IV.1.30), (IV.1.35)-(IV.1.36) et en rappelant les définitions (I.2.2), (I.2.5) et (IV.1.33) nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème dynamique P.

Problème PV: Trouver un champ de déplacement $u : [0; T] \rightarrow V$; un champ de potentiel électrique $\phi : [0; T] \rightarrow W$ et un champ d'adhésion $\bar{\cdot} : [0; T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que

$$\begin{aligned} & \int_{V \times V} \ddot{u}(t); \dot{\phi} + a_\mu \int_{V \times V} \dot{u}(t); \dot{\phi} + a_\nu (u(t); \dot{\cdot}) + a_e(\phi(t); \dot{\cdot}) \\ & + j(\bar{\cdot}(t); u(t); \dot{\cdot}) = (f(t); \dot{\cdot})_{V \times V} \quad \forall \dot{\cdot} \in V; t \in [0; T]; \end{aligned} \quad (IV.1.38)$$

$$a_m(\phi(t); \tilde{A}) + a_e(u(t); \tilde{A}) = (q(t); \tilde{A})_W \quad \forall \tilde{A} \in W; t \in [0; T]; \quad (IV.1.39)$$

$$\dot{\bar{\cdot}}(t) = \int_{\Gamma_3} i_0 \bar{\cdot}(t) - jR(u)^2 \int_{\Gamma_3} \phi_a^2; \quad (IV.1.40)$$

$$\bar{\cdot}(0) = \bar{\cdot}_0; u(0) = u_0; v(0) = v_0; \quad (IV.1.41)$$

4.2 Résultat d'existence et d'unicité

Théorème VI.2.1. Supposons que (VI.1.16)-(VI.1.26), (VI.1.31)-(VI.1.32) sont vérifiées. Alors, il existe une solution unique du problème (VI.1.38)-(VI.1.41). De plus, la solution satisfait

$$u \in H^1(0; T; V) \cap C^1(0; T; H); \quad \ddot{u} \in L^2(0; T; V^{\phi}); \quad (\text{IV.2.1})$$

$$\gamma \in C^1(0; T; W); \quad (\text{IV.2.2})$$

$$\gamma \in W^{1,1}(0; T; L^2(I_3))^{\phi}; \quad (\text{IV.2.3})$$

Nous concluons que sous les hypothèses citées, le problème P admet une solution faible unique satisfaisant (IV.2.1)-(IV.2.3).

La démonstration du Théorème IV.2.1 sera établie en plusieurs étapes. Nous supposons dans ce qui suit que les conditions du Théorème VI.2.1 sont satisfaites et que C dénote une constante générique positive qui peut dépendre de γ ; i_1 ; i_2 ; i_3 ; p ; L et T , mais ne dépend pas de t ; ni du reste des données citées, et dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre.

Soit $\gamma \in L^2(0; T; V^{\phi})$ donné. Dans la première étape, nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème PV¹: Trouver un champ de déplacement $u : [0; T] \rightarrow V$ tel que

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}(t); \cdot)_{V^{\phi}} + a_{\mu}(\dot{u}(t); \cdot) + (\gamma(t); \cdot)_{V^{\phi}} \\ & = (f(t); \cdot)_{V^{\phi}} \quad \text{p.p. } t \in (0; T); \end{aligned} \quad (\text{IV.2.4})$$

$$u(0) = u_0; \quad \dot{u}(0) = v(0) = v_0; \quad (\text{IV.2.5})$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme VI.2.2. Il existe une solution unique du problème PV.¹ et elle satisfait $u \in H^1(0; T; V) \cap C^1(0; T; H)$; $\ddot{u} \in L^2(0; T; V)^\phi$:

Démonstration. Nous définissons l'opérateur $A_\mu : V \rightarrow V^\phi$ par

$$(A_\mu v; \cdot)_{V^\phi V} = a_\mu(v; \cdot) - \delta v; \cdot \in 2V; \quad (\text{IV.2.6})$$

Il vient de (IV.2.6), de la continuité de la forme bilinéaire a_μ et de (IV.1.31) que l'opérateur linéaire A_μ est continu et par conséquent hemicontinu. Aussi, il est monotone et il satisfait

$$(A_\mu j; j)_{V^\phi V} \leq -\beta \|j\|_V^2 + \hat{A} \|\delta\|_V; \quad (\text{IV.2.7})$$

$$\|A_\mu j\|_{V^\phi} \leq C(\beta \|j\|_V + 1) \|\delta\|_V; \quad (\text{IV.2.8})$$

pour certaines constantes $\beta > 0$; $C > 0$ et $\hat{A} \in \mathbb{R}$. Alors, il vient d'un résultat classique sur les équations différentielles ordinaires dans les espaces abstraits (Théorème I.3.4) que pour $v_0 \in H$ et $f \in L^2(0; T; V)^\phi$ donnés, il existe une fonction unique $v \cdot$ qui satisfait

$$v \cdot \in L^2(0; T; V) \cap C(0; T; H); \dot{v} \cdot \in L^2(0; T; V)^\phi; \quad (\text{IV.2.9})$$

$$\dot{v} \cdot(t) + A_\mu v \cdot(t) = f \cdot(t) \text{ p.p. } t \in (0; T); \quad (\text{IV.2.10})$$

$$v \cdot(0) = v_0; \quad (\text{IV.2.11})$$

où $f \cdot = f \cdot j \cdot$ et soit $u \cdot : [0; T] \rightarrow V$ une fonction définie par

$$u \cdot(t) = \int_0^t v \cdot(s) ds + u_0 \quad \forall t \in [0; T]; \quad (\text{IV.2.12})$$

Il vient de (IV.2.6) et (IV.2.9)-(IV.2.12) que $u_\cdot$ est une solution du problème variationnel PV.¹ et elle satisfait la régularité exprimée dans (IV.2.1). Ceci achève la partie d'existence du Lemme IV.2.2. L'unicité de la solution découle de l'unicité de la solution du problème (IV.2.9)-(IV.2.11). ■

Dans la deuxième étape, nous utilisons le champ de déplacement $u_\cdot$ obtenu dans le Lemme IV.2.2 pour définir le problème variationnel suivant concernant le potentiel électrique.

Problem PV.²: Trouver un potentiel électrique $\varphi_\cdot : [0; T] \rightarrow W$ tel que

$$a_m(\dot{\varphi}_\cdot(t); \dot{\varphi}_\cdot(t)) + a_e(u_\cdot(t); \dot{\varphi}_\cdot(t)) = (q(t); \dot{\varphi}_\cdot(t))_W \quad \forall t \in [0; T]; \quad (IV.2.13)$$

Ci-après un résultat d'existence et d'unicité pour le problème PV.².

Lemme VI.2.3. Il existe une solution unique $\varphi_\cdot \in C^1(0; T; W)$ qui satisfait (IV.2.13). De plus, si $\varphi_{\cdot 1}$ et $\varphi_{\cdot 2}$ sont les solutions de (IV.2.13) correspondant à $f_1, f_2 \in L^2(0; T; V)$ alors, il existe $C > 0$; tel que

$$\|\varphi_{\cdot 1} - \varphi_{\cdot 2}\|_W \leq C \|\varphi_{\cdot 1} - \varphi_{\cdot 2}\|_V \quad \forall t \in [0; T]; \quad (IV.2.14)$$

Démonstration. Soit $t \in [0; T]$: Nous utilisons les propriétés de la forme bilinéaire a_m et le Lemme de Lax-Milgram pour voir qu'il existe un unique élément $\varphi_\cdot(t) \in W$ qui résout (IV.2.13) en tout moment $t \in [0; T]$: Considérons maintenant $t_1, t_2 \in [0; T]$; en utilisant (IV.2.13) et (IV.1.32) nous trouvons que

$$\begin{aligned} m^a \|\varphi_{\cdot}(t_1) - \varphi_{\cdot}(t_2)\|_W^2 &= j_{L^1(-)}(u_\cdot(t_1) - u_\cdot(t_2)) + j_V(\varphi_{\cdot}(t_1) - \varphi_{\cdot}(t_2))_W \\ &\quad + j_W(q(t_1) - q(t_2))(\varphi_{\cdot}(t_1) - \varphi_{\cdot}(t_2))_W; \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\bar{v}'(t_1) - \bar{v}'(t_2) = C \int_{\Gamma} [u_\nu(t_1) - u_\nu(t_2)]_V + j q(t_1) - q(t_2) d\Gamma \quad (IV.2.15)$$

Nous dérivons à présent (IV.2.13) par rapport au temps pour avoir

$$a_m \bar{v}'(t); \tilde{A}^\phi = a_e \bar{u}'(t); \tilde{A}^\phi = \int_{\Gamma} \dot{q}(t) d\Gamma \quad \forall t \in [0; T] \quad (IV.2.16)$$

Pour $t_1, t_2 \in [0; T]$ et en utilisant (IV.2.16) et (IV.1.32) nous obtenons

$$\begin{aligned} m \bar{v}'(t_1) - \bar{v}'(t_2) &= \int_{\Gamma} [\bar{u}'(t_1) - \bar{u}'(t_2)]_V + \int_{\Gamma} [\bar{q}(t_1) - \bar{q}(t_2)]_W \\ &+ \int_{\Gamma} [\bar{q}(t_1) - \bar{q}(t_2)]_W \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\bar{v}'(t_1) - \bar{v}'(t_2) = C \int_{\Gamma} [\bar{u}'(t_1) - \bar{u}'(t_2)]_V + \int_{\Gamma} [\bar{q}(t_1) - \bar{q}(t_2)]_W \quad (IV.2.17)$$

Notons que la régularité $\bar{u} \in C^1(0; T; H)$ combinée avec (IV.1.37), (IV.2.15) et (IV.2.17) impliquent que $\bar{v}' \in C^1(0; T; W)$. Maintenant, pour $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in L^2(0; T; V)^\phi$ et en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés pour avoir (IV.2.15) nous trouvons (IV.2.14), ce qui achève la démonstration. ■

Nous utilisons encore une fois la solution u_ν obtenue dans le Lemme IV.2.2 pour construire le problème de Cauchy suivant pour le champ d'adhésion.

Problem PV³: Trouver un champ d'adhésion $\bar{v} : [0; T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que

$$\bar{v}(t) = \bar{v}_0 - \int_0^t j R(u_\nu)^2 d\Gamma_a \quad (IV.2.18)$$

$$\bar{v}(0) = \bar{v}_0 \quad (IV.2.19)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme.VI.2.4. Il existe une solution unique du problème PV.³ et elle satisfait $\bar{u} \in W^{1;1}(0;T;L^2(\mathbb{R}_+)) \cap Z$:

Démonstration. Pour simplifier, nous évitons de noter la dépendance des différentes fonctions de $x \in \mathbb{R}_+$. Considérons l'application

$$F(t; \bar{u}) = \dot{\bar{u}}(t) - jR(u)^2 \bar{u}^2_a \phi;$$

pour $t \in [0;T]$ et $\bar{u} \in L^2(\mathbb{R}_+)$: Il vient que F est uniformément continue par rapport au temps, elle est de Lipschitz par rapport au second argument. De plus, pour tout $\bar{u} \in L^2(\mathbb{R}_+)$, l'application $t \mapsto F(t; \bar{u})$ appartient à $L^1(0;T;L^2(\mathbb{R}_+))$: Donc, en utilisant une version du Théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème I.3.5), nous obtenons qu'il existe une fonction unique $\bar{u} \in W^{1;1}(0;T;L^2(\mathbb{R}_+))$ qui satisfait (IV.2.18)-(IV.2.19). La régularité $\bar{u} \in Z$ vient de (IV.2.18)-(IV.2.19) et de l'hypothèse $0 < \bar{u}_0 < 1$ p.p. sur $\mathbb{R}_+$: En effet, l'équation (IV.2.18) implique que pour p.p. $x \in \mathbb{R}_+$ la fonction $t \mapsto \bar{u}(x;t)$ est décroissante et sa dérivée s'annule lorsque $\bar{u}(t) - jR(u)^2 \bar{u}^2_a = 0$: En combinant ces propriétés avec l'inégalité $0 < \bar{u}(0) < 1$ nous déduisons que $0 < \bar{u}(t) < 1$ pour tout $t \in [0;T]$, p.p. sur $\mathbb{R}_+$, ce qui montre que $\bar{u} \in Z$: ■

Maintenant, pour $\bar{u} \in L^2(0;T;V^{\phi})$ nous dénotons par u la solution du problème PV.¹ obtenue dans le Lemme IV.2.2, par v la solution du problème PV.² obtenue dans le Lemme IV.2.3 et par $\bar{u}$ la solution du problème PV.³ donnée par le Lemme IV.2.4. Dénotons par $\alpha'(t)$ l'élément de V^{ϕ} défini par

$$\begin{aligned} (\alpha'(t); \cdot)_{V^{\phi}} &= a(\dot{u}(t); \cdot) + a_e \dot{v}(t); \cdot \phi \\ &+ j \dot{\bar{u}}(t); u(t); \cdot \phi; \forall t \in [0;T]; \end{aligned} \quad (IV.2.20)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme VI.2.5. Pour $\gamma \in L^2(0; T; V^{\phi})$ nous avons $\alpha\gamma \in C^1(0; T; V^{\phi})$ et l'opérateur $\alpha : L^2(0; T; V^{\phi}) \rightarrow L^2(0; T; V^{\phi})$ admet un point fixe unique γ^{α} :

Démonstration. Soit $\gamma \in L^2(0; T; V^{\phi})$ et soient $t_1, t_2 \in [0; T]$: En utilisant (IV.2.20), la continuité des formes bilinéaires a_{γ} et a_{γ}^{α} et (IV.1.36) nous obtenons

$$\begin{aligned} | \alpha\gamma(t_1) - \alpha\gamma(t_2) |_{V^{\phi}} &\leq C(|u(t_1) - u(t_2)|_V + \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|_W \\ &+ \int_0^{t_1} p(\gamma(t_1)) |R(u(t_1)) - R(u(t_2))|_{L^2(I_3)} \| \gamma(t_1) - \gamma(t_2) \|_{L^2(I_3)}) \end{aligned}$$

Maintenant, en se rappelant de (I.2.8), des hypothèses sur la fonction p , de l'inégalité $0 < \gamma \leq 1$; et des propriétés de l'opérateur R on trouve

$$\begin{aligned} | \alpha\gamma(t_1) - \alpha\gamma(t_2) |_{V^{\phi}} &\leq C(|u(t_1) - u(t_2)|_V + \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|_W \\ &+ \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|_{L^2(I_3)}) \end{aligned} \quad (IV.2.21)$$

Etant donné que $u \in C^1(0; T; V)$, $\gamma \in C^1(0; T; W)$ et $\gamma \in W^{1,1}(0; T; L^2(I_3))$ nous déduisons de l'inégalité (IV.2.21) que $\alpha\gamma \in C^1(0; T; V^{\phi})$:

Soient maintenant $\gamma_1, \gamma_2 \in L^2(0; T; V^{\phi})$ et $t \in [0; T]$: Nous utilisons les notations $u_i = u_{\gamma_i}$; $v_i = v_{\gamma_i} = \dot{u}_{\gamma_i}$, $\gamma_i = \gamma_{\gamma_i}$ et $\bar{\gamma}_i = \bar{\gamma}_{\gamma_i}$ pour $i = 1, 2$: Les arguments utilisés dans la preuve de (IV.2.21) impliquent

$$\|\bar{\gamma}_1(t) - \bar{\gamma}_2(t)\|_{L^2(I_3)} \leq C \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V ds \quad (IV.2.22)$$

D'autre part, en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration de (IV.2.21) nous trouvons que

$$| \alpha\gamma_1(t) - \alpha\gamma_2(t) |_{V^{\phi}} \leq C(|u_1(t) - u_2(t)|_V + | \gamma_1(t) - \gamma_2(t) |_W$$

$$+ j_1^-(t) - j_2^-(t) j_{L^2(i_3)}): \quad (IV.2.23)$$

Nous combinons (IV.2.23), (IV.2.14) et (IV.2.22) pour obtenir

$$j_1^{\alpha'}(t) - j_2^{\alpha'}(t) j_{V^1} \cdot C j_{u_1}(t) - j_{u_2}(t) j_V + C \int_0^t j_{u_1}(s) - j_{u_2}(s) j_V ds:$$

Ensuite, de (IV.2.12) vient que

$$j_1^{\alpha'}(t) - j_2^{\alpha'}(t) j_{V^1} \cdot C \int_0^t j_{v_1}(s) - j_{v_2}(s) j_V^2 ds: \quad (IV.2.24)$$

Puis, nous obtenons de (IV.1.38)

$$i \cdot \dot{v}_1 - \dot{v}_2; v_1 - v_2 \Big|_{V^1 \times V}^\phi + a_\mu(v_1 - v_2; v_1 - v_2) + (j_1^{\alpha'} - j_2^{\alpha'}; v_1 - v_2)_{V^1 \times V} = 0;$$

p.p. sur $(0; T)$: Nous intégrons cette relation par rapport au temps et nous utilisons

la condition initiale $v_1(0) = v_2(0) = v_0$ et (IV.1.31) pour trouver

$$C \int_0^t j_{v_1}(s) - j_{v_2}(s) j_V^2 ds \cdot i \int_0^t (j_1^{\alpha'}(s) - j_2^{\alpha'}(s); v_1(s) - v_2(s))_{V^1 \times V} ds:$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} & i \int_0^t (j_1^{\alpha'}(s) - j_2^{\alpha'}(s); v_1(s) - v_2(s))_{V^1 \times V} ds \\ & \cdot \int_0^t j_1^{\alpha'}(s) - j_2^{\alpha'}(s) j_{V^1} j_{v_1}(s) - j_{v_2}(s) j_V ds \\ & \cdot C \int_0^t j_1^{\alpha'}(s) - j_2^{\alpha'}(s) j_{V^1}^2 ds + C \int_0^t j_{v_1}(s) - j_{v_2}(s) j_V^2 ds; \end{aligned}$$

donc nous obtenons de l'inégalité précédente

$$\int_0^t j_{v_1}(s) - j_{v_2}(s) j_V^2 ds \cdot C \int_0^t j_1^{\alpha'}(s) - j_2^{\alpha'}(s) j_{V^1}^2 ds; \quad (IV.2.25)$$

et de (IV.2.24), (IV.2.25) nous déduisons que

$$|j^{\alpha'}_1(t) - j^{\alpha'}_2(t)|_{V^1} \leq c \int_0^t |j^{\alpha'}_1(s) - j^{\alpha'}_2(s)|_{V^1}^2 ds.$$

En réitérant cette inégalité m fois, nous aurons

$$|j^{\alpha^m}_1 - j^{\alpha^m}_2|_{C(0;T;V^1)} \leq \frac{c^m}{m!} |j^{\alpha'}_1 - j^{\alpha'}_2|_{C(0;T;V^1)},$$

ce qui implique que, pour m suffisamment grand, α^m est une contraction dans l'espace de Banach $C^1[0;T;V^1]$; par conséquent, il existe un unique élément $\alpha^* \in C^1[0;T;V^1]$ tel que $\alpha^{\alpha^*} = \alpha^*$. ■

Démonstration du Théorème IV.2.1.

Existence. Soit $\alpha^* \in C^1[0;T;V^1]$ le point fixe de l'opérateur α et soient $u; u', u''$ les solutions des problèmes $PV^1; PV^2$ et PV^3 respectivement avec $\alpha' = \alpha^*$; c-à-d. $u = u_{\alpha^*}$, $u' = u'_{\alpha^*}$; $u'' = u''_{\alpha^*}$. Clairement, les égalités (IV.1.39)-(IV.1.41) sont vérifiées de PV et $PV^2; PV^3$. De plus, puisque $\alpha^* = \alpha^{\alpha^*}$ il vient de (IV.2.4) et (IV.2.20) que (IV.1.38) est aussi vérifiée. La régularité de la solution exprimée dans (IV.2.1)-(IV.2.3) découle des Lemmes IV.2.2, IV.2.3 et IV.2.4. Nous concluons que $(u; u'; u'')$ est une solution du problème PV et elle vérifie (IV.2.1)-(IV.2.3).

Unicité. L'unicité de la solution vient de l'unicité du point fixe de α et de l'unicité de la solution des problèmes $PV^1; PV^2$ et PV^3 . ■

REFERENCES

- [1] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and differential Equations in Banach Spaces*, Editura Academiei, Bucharest-Noordhoff, Leyden (1976).
- [2] V. Barbu, *Optimal control of variational inequalities*, Pitman, Boston, 1984.
- [3] R.C. Batra and J.S. Yang, Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity, *Journal of Elasticity* 38 (1995), 209-218.
- [4] P. Bisenga, F. Lebon and F. Maceri, The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support, in *Contact Mechanics*, J.A.C. Martins and Manuel D.P. Monteiro Marques (Eds), Kluwer, Dordrecht, 2002, 347-354.
- [5] A. Borelli, C.O. Horgan and M.C. Patria, Saint-Venant's principle for antiplane shear deformations of linear piezoelectric materials, *SIAM J. Appl. Math.* 62 (2002), 2027-2044.
- [6] H. Br  sis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et application*, Masson (1987).
- [7] H. Br  sis, Equations et Inéquations non linéaires dans les Espaces Vectoriels en dualité, *Ann. Inst. Fourier*, 18 (1968), 115-175.
- [8] O. Chau, J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion, *J. Comput. Math.* 159 (2003), 431-465.
- [9] O. Chau, M. Shillor and M. Sofonea, Dynamic frictionless contact with adhesion, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* 55 (2004), 32-47.
- [10] L. Chouchane and L. Selmani, A frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with normal compliance, adhesion and damage, Submitted.
- [11] L. Chouchane and L. Selmani, On a viscoplastic model coupling adhesion and damage, To appear in *Annals of Oradea University-Mathematics Fascicola*.
- [12] M. Cocu and R. Rocca, Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion, *Math. Model. Num. Anal.* 34 (2000), 981-1001.
- [13] G. Duvaut and J. L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*; Springer-Verlag, Berlin (1976).
- [14] J. R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, Analysis and numerical simulations of a dynamic contact problem with adhesion, *Math. Comput. Modelling* 37 (2003), 1317-1333.
- [15] M. Frémond, Equilibre des structures qui adh  rent    leur support, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II* 295 (1982), 913-916.

- [16] M. Frémond, Adhérence des solides, J. Mécanique Théorique et Appliquée 6 (1987), 383-407.
- [17] M. Frémond, Non-smooth Thermomechanics, Springer, Berlin, 2002.
- [18] M. Frémond and B. Nedjar, Damage in concrete: the unilateral phenomenon, Nuclear Engng. Design, 156, 323-335. (1995).
- [19] M. Frémond and B. Nedjar, Damage, gradient of damage and principle of virtual work, Int. J. Solids structures, 33 (8), 1083-1103. (1996).
- [20] M. Frémond, K. L. Kuttler, B. Nedjar and M. Shillor, One-dimensional models of damage, Adv. Math. Sci. Appl. 8 (2), 541-570. (1998).
- [21] W. Han, K. L. Kuttler, M. Shillor and M. Sofonea, Elastic beam in adhesive contact, Int. J. Solids structures 39 (2002), 1145-1164.
- [22] W. Han, M. Shillor and M. Sofonea, Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic problem with normal compliance, friction and damage, J. Comput. Appl. Math. 137, 377-398. (2001).
- [23] W. Han and M. Sofonea, Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity, Studies in Advanced Mathematics 30, American Mathematical Society and International Press, 2002.
- [24] C. O. Horgan, Anti-plane shear deformation in linear and nonlinear solid mechanics, SIAM Rev. 37 (1995), 53-81.
- [25] C.O. Horgan and K.L. Miller, Anti-plane shear deformation for homogeneous and inhomogeneous anisotropic linearly elastic solids, J. Appl. Mech. 61 (1994), 23-29.
- [26] T. Ikeda, Fundamentals of piezoelectricity, Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [27] I. R. Ionescu et M. Sofonea, Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity, Oxford University press, Oxford, 1993.
- [28] L. Jianu, M. Shillor and M. Sofonea, A viscoelastic bilateral frictionless contact problem with adhesion, Applic. Anal. 80 (2001), 233-255.
- [29] F. Maceri and P. Bisegna, The unilateral frictionless contact of a piezoelectric body with a rigid support, Math. Comp. Modelling 28 (1998), 19-28.
- [30] S. Migórski, Hemivariational inequality for a frictional contact problem in elasto-piezoelectric, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B6 (2006), 1339-1356.
- [31] R. D. Mindlin, Polarisation gradient in elastic dielectrics, Int. J. Solids Structures 4 (1968), 637-663.

- [32] D. Motreanu and M. Sofonea, Quasivariational inequalities and applications in frictional contact problems with normal compliance, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 10, 1 (2000), 103-118.
- [33] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris (1967).
- [34] J. Nečas and I. Hlaváček, *Mathematical theory of elastic and elastoplastic bodies: "an introduction"*, Elsevier, Amsterdam, 1981.
- [35] P. D. Panagiotopoulos, *Inequality problems in mechanical and applications*, Birkhauser, Basel, 1985.
- [36] V. Z. Patron and B. A. Kudryavtsev, *Electromagnetoelasticity, piezoelectrics and electrically conductive solids*, Gordon & Breach, London, 1988.
- [37] M. Raous, L. Cangémi and M. Cocu, A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact, *Comput. Math. Appl. Mech. Engng.* 177 (1999), 383-399.
- [38] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, Analysis of a quasistatic viscoelastic problem with friction and damage, *Adv. Math. sci. Appl.* 10, 173-189. (2002).
- [39] J. Rojek and J. J. Telega, Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics. I: General developments, *J. Theor. Appl. Mech.* 39 (2001), 655-677.
- [40] J. Rojek, J. J. Telega and S. Stupkiewicz, Contact problems with friction, adherence and wear in orthopaedic biomechanics. II: Numerical implementation and application to implanted knee joints, *J. Theoretical and Applied Mechanics*, 39 (2001).
- [41] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris (1979).
- [42] L. Selmani, B. Awbi and M. Sofonea, Variational analysis of a friction contact problem for the Bingham Fluid, *Int. J. Appl. Math. and Comp. Sci.* 9, 2 (1999), 101-115.
- [43] L. Selmani and N. Bensebaa, A frictionless contact problem with adhesion and damage in elastic-viscoplasticity, To appear in *Rendiconti del seminario Matematico della Università di Padova*.
- [44] L. Selmani, O. Chau and M. Sofonea, Analysis of a quasistatic displacement-traction problem for viscoelastic materials, *Mathematical and Computer Modelling*, 32 (2000), 453-464.
- [45] L. Selmani and L. Chouchane, A frictionless contact problem with adhesion and damage, *Annals of the University of Craiova, Math. Cop. Sci. Ser.* 33 (2006), 94-107.

- [46] M. Selmani and M. Sofonea, Viscoelastic frictionless contact problems with adhesion, *Journal of Inequalities and Applications* (2006), 1-22.
- [47] M. Shillor, M. Sofonea and J. J. Telega, *Models Variational Analysis of Quasistatic Contact*, Lect. Notes Phys. 655 Springer, Berlin heidelberg, (2004).
- [48] M. Sofonea, On a contact problem for elastic-viscoplastic bodies, *Nonlin. TMA* 29 (1997), 1037-1050.
- [49] M. Sofonea and R. Arhab, An Electro-viscoelastic contact problem with adhesion, To appear in *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*.
- [50] M. Sofonea, L. Chouchane and L. Selmani, Analysis of an antiplane contact problem with adhesion for electro-viscoelastic materials, Submitted.
- [51] M. Sofonea, M. Dalah and A. Ayadi, Analysis of an antiplane electro-elastic contact problem, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 14, (2007), 25-40.
- [52] M. Sofonea and El H Essou..., A piezoelectric contact problem with slip-dependent coefficient of friction, *Mathematical Modelling and Analysis* 9 (2004), 229-242.
- [53] M. Sofonea and El H Essou..., Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body, *Adv. Math. Sci. Appl.*, 14, (2004) 613-631.
- [54] M. Sofonea, W. Han and M. Shillor, Analysis and approximation of contact problems with adhesion or damage, *Pure and Applied Mathematics* 276, Chapman-Hall/ CRC Press, New York, 2006.
- [55] M. Sofonea and A. Matei, Elastic antiplane contact problem with adhesion, *J. of Appl. Math. Phys. (ZAMP)* 53 (2002), 962-972.
- [56] M. Sofonea and A. Matei, *Variational Inequalities with Applications. A study of Antiplane Frictional Contact Problems*, Springer, New York, to appear.
- [57] P. Suquet, *Plasticité et homogénéisation*, Thèse de doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6 (1982).
- [58] B. Tengiz and G. Tengiz, Some dynamic problems of the theory of electroelasticity, *Mem. Differential Equations Math. Phys.* 10 (1997), 1-53.
- [59] R. A. Toupin, A dynamical theory of elastic dielectrics, *Int. J. Engng. Sci.* 1 (1963), 101-126.
- [60] Z.-G. Zhou, B. Wang and S.-Y. Du, Investigation of antiplane shear behavior of two colinear permeable cracks in a piezoelectric material by using the nonlocal theory, *Journal of Applied mechanics* 69 (2002), 1-3.

Résumé :

Dans cette thèse, nous allons proposer une certaine contribution à l'étude de quelques problèmes aux limites en mécanique du contact. Nous considérons des lois de comportement non linéaires pour des matériaux viscoélastiques et viscoplastiques prenant en considération l'influence de l'endommagement interne du matériau. Nous considérons également une loi de comportement pour des matériaux ayant des propriétés mécaniques ainsi que des propriétés électriques (matériaux piézoélectriques). L'adhésion entre les surfaces de contact est prise en considération dans tous les problèmes étudiés dans cette thèse. Finalement, nous envisageons aussi l'étude de la déformation antiplane. Les conditions aux limites sont des conditions de compliance normale, de Signorini et le contact est supposé sans frottement. Chacun des problèmes est étudié selon le formalisme suivant. Nous commençons par décrire le problème mécanique de départ, et après avoir précisé les hypothèses sur les données, nous présentons une analyse variationnelle du problème mécanique tout en démontrant l'existence et l'unicité de la solution des problèmes variationnels correspondants.

Mots clés : Viscoplasticité, Viscoélasticité, Formulation variationnelle, Solution faible, Point fixe, Adhésion, Endommagement.

Abstract:

In this paper, we consider a contribution in the study of some boundary problems in contact mechanics. We consider nonlinear constitutive laws for viscoelastic and viscoplastic materials taking into account the effect of the internal damage of the material. Also, We consider a constitutive law for materials which have mechanic and electric properties (piezoelectric materials). The adhesion between contact surfaces is taken into account in all the problems studied in this thesis. Finally, we study an antiplane shear deformation. The boundary conditions are normal compliance and Signorini conditions and the contact is supposed frictionless. Each problem is studied as follows. We give the mechanical problem and, after imposing hypothesis on the data, we give a variational analysis of the mechanical problem by proving the existence of a unique solution of corresponding variational problems.

Key words: Viscoplasticity, Viscoelasticity, Variational Formulation, Weak solution, Fixed point, Adhesion , Damage.

ملخص:

في هذه الأطروحة، سوف نقترح بعض الإضافات في دراسة المسائل الحدية في ميكانيك التلامس. نعتبر قوانين سلوك غير خطية من أجل مواد لزجة مرنة و لزجة لدنة مع الأخذ بعين الاعتبار تأثير الإلتلاف الداخلي للمادة. نعتبر أيضاً قانون سلوك من أجل مواد ذات خواص ميكانيكية و خواص كهربائية. الإلتصاق بين أسطح التلامس مأخوذ بعين الاعتبار في كل المسائل المدروسة في هذه الأطروحة. وفي الأخير، نعتبر كذلك دراسة التشوه الأفقي. الشروط الحدية عبارة عن شروط "La compliance normale" و شروط "Signorini" و التلامس يكون بدون احتكاك. كل من المسائل مدروس وفق المراحل التالية: نبدأ بتوصيف المسألة الميكانيكية الأصلية، و بعد أن نضع فرضيات على المعطيات، نقوم بتحليل شكلي للمسألة الميكانيكية مع برهان وجود حل وحيد للمسألة الشكلية الموافقة.

كلمات مفتاحية: مسألة لزجة لدنة، مسألة لزجة مرنة، التحليل الشكلي، حل ضعيف، نقطة ثابتة، الإلتصاق، الإلتلاف.