

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS-SÉTIF



THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Options : Mathématiques Appliquées

Par

Chougui Nadhir

THÈME

**Analyse Mathématique de Quelques Problèmes de Contact
en Electro-élasticité et en Electro-viscoélasticité**

Soutenue le : 13 / 06 / 2015, devant le jury composé de :

Prof. N. BENSALÉM	Université Ferhat Abbas de Sétif	Président
Prof. S. DRABLA	Université Ferhat Abbas de Sétif	Directeur de thèse
Prof. M. DENCHE	Université de Constantine	Examineur
Prof. M. Z. AISSAOUI	Université de Guelma	Examineur

Dédicaces

À mes parents

À ma femme

À mes enfants

Remerciements

Je remercie dieu le tout puissant de m'avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance envers mon directeur de thèse, le Professeur DRABLA SALAH du Laboratoire de Mathématiques à l'Université de Sétif, pour sa confiance et pour son aide inestimable, ses qualités pédagogiques, sa patience conjuguée à une rigueur scientifique d'exception ainsi que ses qualités humaines ont contribué de manière décisive à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie tout particulièrement le professeur N. BENSALEM, Président du Conseil Scientifique de la Faculté des Sciences à l'Université de Sétif, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Je suis très honoré par la présence dans le jury des Messieurs : M.DENNECH et M. Z. AISSAOUI qui ont bien voulu être juges de cette thèse. Je leur adresse toute ma reconnaissance.

Je voudrais également remercier tous les membres de laboratoire LaMA à l'université Ferhat Abbas de Sétif.

Enfin que tous ceux qui n'ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail reçoivent mes remerciements.

Nadhir CHOUGUI

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	vi
Notations principales	xii
Liste des figures	xv
I Modélisation et Outils Mathématiques	1
1 Modélisation	4
1.1 Cadre physique	4
1.2 Modèle mathématique du cadre physique	8
1.3 Lois de comportements	10
1.3.1 Lois de comportement des matériaux électro-élastiques .	11
1.3.2 Lois de comportement des matériaux électro-viscoélastiques	12
1.4 Conditions aux limites de contact	13
1.4.1 Contact bilatérale.	14
1.4.2 Contact unilatérale.	14
1.4.3 Contact avec compliance normale	16
1.4.4 Contact avec adhésion	17

1.5 Lois de contact avec ou sans frottement	17
1.5.1 Contact sans frottement	17
1.5.2 Contact avec frottement	18
1.6 Lois de contact avec frottement et adhésion	21
1.7 Conditions de contact de type Signorini avec adhésion.	26
2 Outils Mathématiques	28
2.1 Espaces fonctionnels	28
2.1.1 Espaces de fonctions continues et continûments diffé- rentiables	29
2.1.2 Les espaces $L^p(\Omega)$	30
2.1.3 Espaces de Sobolev	31
2.2 Espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence . .	33
2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	37
2.4 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert . .	41
2.4.1 Rappel sur les espaces de Hilbert	42
2.4.2 Fonctions convexes et semi-continuité inférieure	44
2.4.3 Différentiabilité et sous différentiabilité	45
2.4.4 Inclusions différentielles	47
2.4.5 Opérateurs non-linéaires et formes bilinéaires dans un espace de Hilbert	49
2.5 Inéquations variationnelles elliptiques et d'évolution	51
2.6 Compléments divers	55
II Problème électro-élastique	59
3 Problème électro-élastique avec frottement et adhésion	62
3.1 Formulation du problème	62
3.2 Formulation variationnelle	64

3.3	Résultat d'existence et d'unicité	70
4	Problème électro-élastique avec compliance normale, frottement et adhésion	85
4.1	Formulation du problème	85
4.2	Formulation variationnelle	87
4.3	Résultat d'existence	93
III	Problèmes Electro-viscoélastique	110
5	Problème électro-viscoélastique avec adhésion	113
5.1	Formulation du problème	113
5.2	Formulation variationnelle	115
5.3	Résultat d'existence et d'unicité	121
5.3.1	Démonstration du Théorème 5.3.1	122
6	Problème électro-viscoélastique avec adhésion et frottement	133
6.1	Formulation du problème	133
6.2	Formulation variationnelle	135
6.3	Démonstration du Théorème 6.2.1	143
	Bibliographie	156

INTRODUCTION

Le contact entre les matériaux est un phénomène très fréquent et important dans notre vie quotidienne et il a attiré l'attention de l'être humain depuis les anciens temps, c'est pourquoi les scientifiques ont essayé de l'étudier et le modéliser. La connaissance et la maîtrise de ce phénomène confèrent aux scientifiques et aux industriels la possibilité d'élaborer des matériaux aux propriétés et aux performances voulues. De ce fait un grand nombre de formation en école d'ingénieur ou bien à l'université est tourné vers les sciences des matériaux et les travaux sur ces sujets se sont considérablement multipliés au cours des derniers temps.

L'étude mathématique et la modélisation du phénomène de contact sont plus récent et cela est dû au fait que la modélisation mathématique de ce dernier, mène souvent à des problèmes aux limites de contact non linéaire qui sont difficiles à étudier. Parmi les premiers publications mathématiques concernant ce sujet est celle de *Signorini* [67], où le problème de contact unilatéral entre un corps linéairement élastique et une fondation rigide est formulé. Ce dernier a été résolu par *Fichera* [34], en se basant sur des arguments des inéquations variationnelles de type elliptique. Notons ici que l'étude mathématique des problèmes de contact ont commencés avec la mo-

nographie de Duvaut et Lions [32], qui ont présenté la formulation variationnelle de plusieurs problèmes de contact, accompagnée de résultats d'existence et d'unicité de la solution. Après ces travaux et du fait de l'importance de ce phénomène un effort considérable a été fait pour leur modélisation et la littérature sur ce sujet devient très exhaustive, on cite à titre d'exemple les travaux [40, 66, 78].

Comme le contact frottant est très important dans l'industrie, il est nécessaire de l'introduire dans les modèles mathématiques et de prévoir avec précision ses effets sur les corps en contact, car le principal besoin industriel est de contrôler efficacement le processus de ce type de contact. Actuellement, il y a un intérêt considérable à étudier des problèmes de contact frottant impliquant des matériaux élastiques, visco-élastiques, électro-élastiques, électroviscoélastique. Parmi les publications qui traitent ces sujets on peut citer par exemple [2, 3, 5, 7, 26, 28, 87] et aussi [43, 44, 57, 77, 80]. Si un corps entre en contact frottant avec une base rigide on tombe sur des conditions de contact de type *Signorini* avec frottement, comme dans [18, 26, 34], par contre si la base est déformable on tombe sur des conditions de contact frottant avec compliance normale, comme dans [4, 47, 48, 56, 65].

En mécanique et en physique, l'adhésion est l'ensemble des phénomènes physico-chimiques qui se produisent lorsque l'on met en contact intime deux matériaux, dans le but de créer une résistance mécanique à la séparation. Une fois le contact établi, l'énergie nécessaire pour éviter la séparation s'appelle énergie d'adhésion. Elle ne doit pas être confondue avec l'adhérence, qui est au contraire la force nécessaire pour réaliser cette même séparation. L'adhésion est soit directe (elle a lieu uniquement pour des matériaux très lisses et extrêmement propres (mica ou silicium par exemple), soit médiée par un matériau intermédiaire. L'importance accrue des processus d'adhésion dans les montages industriels a attiré l'attention des chercheurs ces

derniers temps, ce qui enrichit les études et la littérature mathématique sur ce sujet. Pour modéliser le phénomène d'adhésion, quand l'assemblage n'est pas permanent et les matériaux composites pouvant subir un décollement sous l'effet des tensions, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact. En se basant sur les idées de M. Frémond [35, 36]; l'idée est d'introduire une variable interne de surface appelée champ d'adhésion, qui prend ses valeurs entre zéro et un et qui décrit la densité fractionnaire des liens actifs sur la surface de contact. On peut trouver ces modèles dans un grand nombre de publications récentes, voir par exemple [23, 46, 49, 51] où des problèmes de contact avec adhésion et sans frottement ont été étudiés et [21] où des traitements numériques appliqués à l'interface ont été élaborés. On peut trouver une application de la théorie de contact adhésif dans [62, 63] où l'importance de l'adhésion entre l'os implanté et le tissu a été décrite.

Un matériau piézoélectrique est celui qui produit une charge électrique quand une contrainte mécanique est appliquée (le matériau est pressé ou étiré). A l'inverse, une déformation mécanique (le matériau se dilate ou se contracte) est produite, quand un champ électrique est appliqué. Ce type de matériau apparaît généralement dans l'industrie comme dans les commutateurs radiotroniques, l'électroacoustique et les équipements de mesure.

La première démonstration de l'effet piézoélectrique direct est due à *Pierre* et *Jacques Curie* en 1880 qui prédirent et vérifièrent l'existence de la piézoélectricité sur des cristaux de quartz, de tourmaline, de topaze, de sucre et de sel de Rochelle. L'existence de l'effet inverse fut prédit l'année suivante par *Gabriel Lippmann* sur la base de calculs thermodynamiques

Les matériaux piézoélectriques dont les propriétés mécaniques sont élastiques, sont appelés matériaux électro-élastique et ceux dont les propriétés mécaniques sont viscoélastique, sont également appelés matériaux électro-

viscoélastique. Différents modèles ont été mis au point pour décrire l'interaction entre les champs électriques et mécaniques, on cite à titre d'exemple [52, 53, 54, 83, 85] qui décrivent les premiers modèles impliquant l'effet piézoélectrique. Du fait de l'importance de la piézoélectricité, la recherche sur ce phénomène se poursuit et des études mathématiques récentes sur des problèmes électromécaniques ont été effectuées, voir par exemple [71, 72, 73, 74, 79]. On peut aussi trouver des simulations numériques dans [10, 11, 59].

Les matériaux présentant des propriétés piézoélectriques sont très nombreux ; il est impossible d'en faire un inventaire exhaustif. Le plus connu est sans doute le quartz, toujours utilisé aujourd'hui dans les montres pour générer des impulsions d'horloge. Mais ce sont des céramiques synthétiques, les PZT qui sont le plus largement utilisées aujourd'hui dans l'industrie. On peut les classer en grandes familles selon leur composition chimique, leur structure cristallographique ou leur intérêt scientifique ou industriel

1. les cristaux, dont le plus connu est le quartz ;
2. les polymères, à base de fibres de caoutchouc, laine, cheveux, bois et soie ou bien le polymère Poly-Vinyl-DiFluoridène (PVDF) ;
3. les céramiques, qui comportent de nombreux éléments, citons entre autres, les titanates de barym, les titanates de plomb et la famille des PZT (plomb, zirconate, titanate) qui offre le plus de possibilités au niveau industrialisation.

Puisque ces matériaux sont des matériaux intelligents (adaptatifs), ils sont devenus très utilisés et on peut les trouver dans plusieurs applications comme l'allume gaz, l'informatique (buses d'imprimante à jet d'encre), les oscillateurs à quartz des horloges électriques, le contrôle des vibrations dans les domaines de l'automobile (injecteurs), l'aérospatiale, le contrôle de forme (ailes d'avion, miroirs des télescopes) et le contrôle en acoustique des

nuisances sonores. Au cours de ces dernières années, il y a de nouvelles applications dans le domaine de la médecine, du suivi de grossesse aux problèmes cardiaques en passant par l'examen du tube digestif. D'autres applications sont données dans [8, 42, 82].

Cette thèse représente une contribution à l'analyse de quelques problèmes de contact entre un corps déformable et une fondation, en tenant compte de l'effet piézoélectrique du matériau. Sous l'hypothèse des petites transformations, nous étudions des processus quasistatiques pour des matériaux électro-élastiques et électro-viscoélastiques. Les conditions aux limites sont de type compliance normale ou de Signorini avec adhésion. Les lois de frottement utilisées sont des versions quasistatiques de la loi de Coulomb avec adhésion. Les conditions électriques sont introduites dans les cas où la fondation est isolatrice. Notre étude des phénomènes de contact comprend les étapes suivantes : la modélisation mathématique, l'analyse variationnelle incluant des résultats d'existence et d'unicité de la solution.

Cette thèse se compose de trois parties que nous allons brièvement décrire.

La première partie comprend les outils nécessaire pour une bonne compréhension des problèmes traités et elle est divisée en deux chapitres. Le premier a pour objet la présentation du cadre physique et les modèles mathématique utilisés. Le deuxième est consacré aux espaces fonctionnels et les principales notations utilisées. Ensuite, nous rappelons quelques résultats fondamentaux d'analyse non linéaire, concernant les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz, les inéquations variationnelles, les inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolutions et les lemmes de Gronwall.

Dans la deuxième partie de cette thèse nous étudions deux problèmes de contact électro-élastique avec adhésion et frottement. Le premier chapitre

est consacré à l'analyse d'un problème de contact avec frottement et adhésion entre un corps ayant une loi constitutive linéaire électro-élastique et une base rigide où les contraintes normales sont données et le processus est quasistatique. Nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution faible en utilisant des techniques de point fixe et de monotonie. Dans le deuxième chapitre nous donnons le même problème, la nouveauté ici, consiste dans le fait que les contraintes normales ne sont pas connues auparavant et une condition de compliance normale est ajoutée. Nous dérivons une formulation variationnelle et établissons un résultat d'existence d'une solution faible. Donc, on remarque d'après l'étude de ces deux problèmes que si les contraintes normales ne sont pas données on perd l'unicité de la solution faible. Le contenu du deuxième chapitre a fait l'objet de la publication [24].

Dans la troisième partie, composée de deux chapitres, nous présentons deux problèmes de contact électro-viscoélastique. Dans le premier chapitre on considère un problème quasistatique avec adhésion et sans frottement. Nous obtenons une formulation variationnelle au problème mécanique puis nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution pour le modèle mécanique que nous démontrons en utilisant des techniques des inéquations variationnelles elliptiques et de point fixe. Dans le deuxième chapitre nous proposons l'analyse d'un problème électro-viscoélastique. La condition de contact employée est une condition de contact bilatéral avec adhésion et frottement de Coulomb. Nous décrivons une formulation variationnelle du problème mécanique et nous établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible en utilisant des résultats sur les inéquations variationnelles d'évolution et des arguments de point fixe. Le contenu du premier chapitre de cette partie est accepté pour publication [25].

NOTATIONS PRINCIPALES

Si Ω est un domaine de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω ;
Γ	la frontière de Ω , supposée souvent assez régulière,
Γ_i ($i = \overline{1, 3}$)	une partition de la frontière Γ ;
$mes\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ_1 ,
ν	la normale extérieure unitaire à Γ ,
v_ν, v_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v ,
σ_ν, σ_τ	les composantes normale et tangentielle du champ tensoriel σ ,
$\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$	espace des fonctions continûment différentiable sur $\overline{\Omega}$,
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions réelles sur Ω indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans Ω ,
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$,
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$,
\mathcal{H}	l'espace $L^2(\Omega)_s^{d \times d}$,
\mathcal{H}_1	l'espace $\{\sigma \in \mathcal{H} \text{ tel que } Div\sigma = (\sigma_{ij,j}) \in H\}$,
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$,
H'_Γ	l'espace dual de H_Γ ,
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles;

Si H est un espace de *Hilbert* réel, on utilise les notations suivantes :

$(\cdot, \cdot)_H$	le produit scalaire de H ,
$(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$	le produit de dualité entre H' et H ,
$\ \cdot\ _H$	La norme de H ,
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H ,
$x_n \rightarrow x$	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H ,
$\mathcal{L}(H)$	l'espace des applications linéaires continues de H dans H .

Si de plus $[0, T]$ est un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note

par :

$\mathcal{C}(0, T; H)$	l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans H ,
$\mathcal{C}^1(0, T; H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
$L^p(0, T; H)$	l'espace des fonctions fortement mesurables sur $[0, T]$ dans H ;
$\ \cdot\ _{L^p(0, T; H)}$	la norme de $L^p(0, T; H)$,
$W^{k,p}(0, T; H)$	l'espace de <i>Sobolev</i> de paramètres k et p ,
$\ \cdot\ _{W^{k,p}(0, T; H)}$	la norme de $W^{k,p}(0, T; H)$.

Pour une fonction f ; on note par

\dot{f}, \ddot{f}	les dérivées première et seconde de f par rapport au temps,
$\partial_i f, f_{,i}$	la dérivée partielle de f par rapport à la i ème composante x_i ,
∇f	le gradient de f ;
$\text{Div } f$	la divergence de f ;
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de f ,
$\text{div } f$	la divergence de f .

Autre notations :

\liminf	la limite inférieure,
\limsup	la limite supérieure,
\mathbb{S}^d	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d ,
"."	produit scalaire sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d ,
$ \cdot $	norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d ,
I_d	le tenseur identité du second ordre sur \mathbb{R}^d ,
Λ^p	puissance p de l'opérateur Λ ,
C	des constantes génériques strictement positives,
$p.p.$	presque partout

LISTE DES FIGURE

1. Cadre physique.
2. Représentation graphique de la loi de Signorini et la loi de compliance normale .
3. Représentation graphique de la loi de Coulomb et sa régularisation .
4. Représentation graphique de l'opérateur de troncation R_ν .

Première partie

Modélisation et Outils

Mathématiques

PARTIE I

MODÉLISATION ET OUTILS

MATHÉMATIQUES

Dans le souci de rendre cet ouvrage facile à lire, il nous est paru nécessaire de présenter dans la première partie le cadre physique et le cadre fonctionnel dans lesquels on va travailler. Nous précisons d'abord le cadre physique et les modèles mathématiques correspondants utilisés dans cette thèse, ensuite nous décrivons les lois de comportement, les conditions de contact et les différentes lois de frottement qui interviennent dans le document.

Après un bref rappel de la mécanique des milieux continus, nous introduisons quelques préliminaires mathématiques qui seront utilisés partout dans cette thèse. Nous commençons d'abord par les espaces de type *Sobolev* associés aux opérateurs divergence et déformation utilisés en mécanique, ainsi que leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. Nous rappelons ensuite les propriétés des espaces des fonctions à valeurs vectorielles et les espaces liés à l'effet piézoélectrique.

Enfin, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert, quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz, les inéquations variationnelles et dévolution.

Les références bibliographiques seront ultérieurement spécifiées dans chacun des paragraphes suivants.

CHAPITRE 1

MODÉLISATION

Dans ce chapitre nous allons donner un petit rappel sur la mécanique des milieux continus où nous présentons le cadre physique étudié dans cette thèse. Nous rappellerons notamment de l'équation de mouvement de *Cauchy* et l'équation de la conservation de la charge. Nous décrirons les différentes lois de comportement des corps étudiés dans cette thèse (électro-élastique, électro-viscoélastique). Finalement, nous précisons les conditions aux limites de contact avec frottement et adhésion où seulement avec adhésion.

1.1 Cadre physique

Cette section est consacrée à la présentation du cadre physique général étudié dans cette thèse et les formulations mathématiques appropriées à l'étude des problèmes de contacts, avec adhésion ou avec adhésion et frottement, entre un corps piézoélectrique et une fondation correspondant à ce cadre physique.

Le cadre physique considéré dans cette thèse est le suivant :

Soit un corps piézoélectrique qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ avec une surface frontière régulière Γ , partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , correspondant aux conditions aux limites mécanique, d'une part, et en trois parties mesurables Γ_a, Γ_b et Γ_3 correspondant aux conditions aux limites électrique, d'autre part, telles que $mes \Gamma_1 > 0$ et mes

Le cadre physique

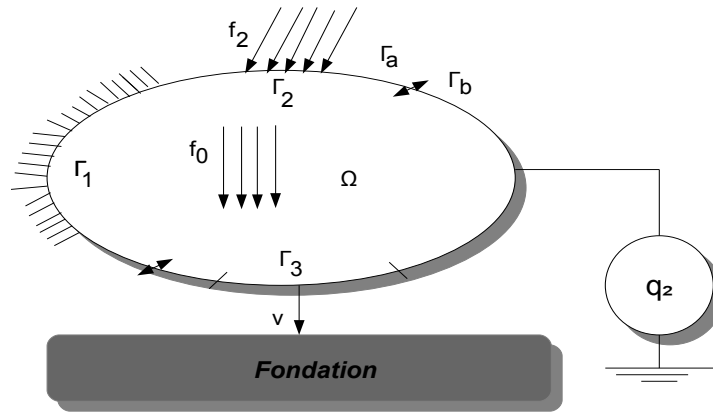


Fig. 1 – Corps piézoélectrique en contact avec un isolateur.

FIGURE 1.1 – Corps piézoélectrique en contact avec un isolateur.

$\Gamma_a > 0$. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe et en contact (avec frottement, frottement et adhésion ou adhésion seulement) avec une base isolatrice sur la partie Γ_3 . Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 . De plus, ce milieu est soumis à l'action de potentiel électrique fixé φ_0 sur la partie Γ_a de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2 sur la partie Γ_b . Nous nous intéressons à l'étude de l'évolution du corps matériel sous l'action des forces volumiques de densité f_0 et des charges électriques de densité volumiques q_0 dans Ω (Voir Fig 1.1). Nous supposons que f_0 et f_2 varient très lentement par rapport au temps. Finalement, soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Avant la description des modèles ma-

thématiques associées au cadre physique présenté ci-dessus, nous donnons quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de cette thèse.

Nous notons par \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$); "." et $\|\cdot\|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d tels que :

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_i v_i, \quad \|v\| = (v \cdot v)^{1/2} \quad \forall u = (u_i), v = (v_i) \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma \cdot \tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad \|\sigma\| = (\sigma \cdot \sigma)^{1/2} \quad \forall \sigma = (\sigma_{ij}), \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

avec la convention de l'indice muet.

Nous notons par $\sigma = \sigma(x, t)$ le champ des contraintes, par $D = D(x, t)$ le vecteur des déplacements électriques, par $u = u(x, t)$ le champ des déplacements, par $\varphi = \varphi(x, t)$ le potentiel électrique tels que $x \in \bar{\Omega}$ et $t \in [0, T]$. Nous notons aussi par $\varepsilon(u)$ le champ des déformations infinitésimales et par $E(\varphi)$ le champ électrique.

Nous désignons par u_ν, u_τ les composantes normale et tangentielle d'un vecteur u à la frontière tels que

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} u_\nu &= u \cdot \nu, \\ u_\tau &= u - u_\nu \nu. \end{cases}$$

Nous notons par σ_ν, σ_τ les composantes normale et tangentielle d'un champ des contraintes à la frontière tels que

$$(1.1.2) \quad \begin{cases} \sigma_\nu &= (\sigma \nu) \cdot \nu, \\ \sigma_\tau &= \sigma \nu - \sigma_\nu \nu. \end{cases}$$

Les relations (1.1.1) et (1.1.2) nous permettent d'écrire la relation suivante

$$(1.1.3) \quad (\sigma \nu) \cdot v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau \cdot v_\tau,$$

qu'on va l'utiliser tout au long de cette thèse et surtout dans l'établissement des formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact.

Les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, c'est à dire

$$(1.1.4) \quad \dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2},$$

où \dot{u} désigne le champ des vitesses et \ddot{u} désigne le champ des accélérations. Nous notons par \dot{u}_ν , \dot{u}_τ les composantes normale et tangentielle du vecteur de vitesse \dot{u} à la frontière tels que

$$(1.1.5) \quad \begin{cases} \dot{u}_\nu &= \dot{u} \cdot \nu, \\ \dot{u}_\tau &= \dot{u} - \dot{u}_\nu \nu. \end{cases}$$

La relation entre le champ des déplacements u et le champ des déformations ε dans l'hypothèse des petites transformations est donnée par

$$(1.1.6) \quad \varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

En outre, le champ électrique est défini par la relation suivante

$$(1.1.7) \quad \mathbf{E}(\varphi) = -\nabla\varphi = -(\varphi_{,i}),$$

où l'indice qui suit la virgule indique la dérivation partielle par rapport à la composante correspondantes de la variable et çà sera le cas tout au long de cette thèse.

Nous allons maintenant décrire le modèle mathématique associé au cadre physique que nous avons vu à la section précédente.

1.2 Modèle mathématique du cadre physique

Le modèle mathématique qu'on va étudier dans cette thèse, décrit l'évolution du corps dans le cadre physique de la figure 1.1.

Dans le cas générale, on décrit l'évolution d'un corps matériel par l'équation de mouvement de *Cauchy* suivante :

$$(1.2.1) \quad \text{Div } \sigma(t) + f_0(t) = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse et " *Div* " désigne l'opérateur divergence des tenseurs tel que

$$\text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Les inconnues du problème dans ce cas sont le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$. Les processus d'évolution définis par (1.2.1) s'appellent processus dynamiques. On remarque que dans le cas où le champ de vitesse \dot{u} varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho \ddot{u}$ peut être négligé et l'équation (1.2.1) devient

$$(1.2.2) \quad \text{Div } \sigma(t) + f_0(t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T).$$

Cette dernière équation s'appelle l'équation d'équilibre et les processus d'évolution définis par cette équation s'appellent processus quasistatiques. Dans le cadre physique décrit ci-dessus (dans la section précédente) on a supposé que f_0 et f_2 varient très lentement par rapport au temps. Par conséquent, si nous supposons que les accélérations dans le milieu sont négligeables nous nous plaçons dans le cas quasistatique et nous utilisons l'équation (1.2.2).

Dans cette thèse le corps étudié est piezoélectrique, donc aux inconnues

mécaniques du problème se rajoutent les inconnues électriques qui sont le champ des déplacements électrique $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, ce qui nécessite une autre équation d'équilibre pour gérer cette situation ; c'est l'équation de *Maxwell-Gauss* ou équation de conservation de la charge qui décrit l'évolution du corps dans ce cas

$$(1.2.3) \quad \operatorname{div} D = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

où " *div* " est l'opérateur divergence pour les vecteurs, $\operatorname{div} D = (D_{i,i})$ et q_0 est la densité volumique de charge au sein du matériau.

La condition aux limites des déplacements sur la partie Γ_1 est

$$(1.2.4) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T),$$

qui exprime que le corps est encastré sur cette partie

La condition aux limites de traction est

$$(1.2.5) \quad \sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T),$$

où f_2 représente la densité des forces surfacique appliquées sur Γ_2 et constitue une donnée du problème.

Les conditions aux limites électriques sont

$$(1.2.6) \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T),$$

$$(1.2.7) \quad D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T),$$

où φ_0 et q_2 étant des données des problème.

Pour compléter le modèle mathématique (1.2.2) – (1.2.7), nous précisons ultérieurement les conditions aux limites de contact sur la partie Γ_3 .

Du point de vue mathématique l'équation (1.2.2) ne suffit pas à modé-

liser le problème d'équilibre précédent car, par exemple, les d composantes u_i du champ des déplacements ne figurent pas dans cette équation. Par ailleurs, du point de vue physique, nous remarquons que l'équation (1.2.2) exprime une loi universelle valable pour tous les solides. Donc, soumis à des conditions identiques les divers milieux continus auraient des comportements identiques. Ceci est naturellement absurde. Par conséquent, il faut lui ajouter d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de solide. C'est l'objet des lois de comportements que nous décrirons dans la section suivante.

1.3 Lois de comportements

Les lois de comportements caractérisent ce qui est propre à chaque type de matériau. Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement; on cite à titre d'exemple les quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement mécaniques, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ , le tenseur des déformations infinitésimales ε et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$. Cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électro-mécanique, car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique $D = (D_i)$ ainsi que le champ électrique $E(\varphi) = -\nabla\varphi = -(\varphi_{,i})$. Nous présentons par la suite les lois de comportement qui interviennent dans cette thèse.

1.3.1 Lois de comportement des matériaux électro-élastiques

Le tenseur des contraintes σ et le vecteur des déplacements électriques D dans ces matériaux sont données par la formule (la loi de comportement) suivante

$$(1.3.1) \quad \begin{cases} \sigma &= \mathcal{F}\varepsilon(u) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi), \\ D &= \mathcal{B}\mathbf{E}(\varphi) + \mathcal{E}\varepsilon(u), \end{cases}$$

ou \mathcal{F} est l'opérateur d'élasticité, non forcément linéaire, à champ électrique nul (matériau piézoélectrique de court-circuité), $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul, $\mathcal{E}^* = (e_{ijk}^*)$ est le transposé du tenseur \mathcal{E} , tel que

$$(1.3.2) \quad \begin{cases} e_{ijk}^* &= e_{kij}, \\ \mathcal{E}\sigma.v &= \sigma.\mathcal{E}^*v \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}^d, v \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

et $\mathcal{B} = (b_{ij})$ est le tenseur de la primitivité électrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif.

Si nous supposons dans (1.3.1) que le tenseur des contraintes σ est une fonction linéaire du tenseur des petites déformations ε et du gradient du potentiel électrique ou le champ électrique E nous nous plaçons dans le cas électro-élastique linéaire, on écrit

$$(1.3.3) \quad \sigma_{ij} = \mathcal{F}_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u) - e_{ijk}^*\mathbf{E}_k(\varphi),$$

où \mathcal{F}_{ijkh} , qui s'appellent les coefficients d'élasticité, sont les composantes du tenseur d'ordre quatre \mathcal{F} et elles sont indépendantes du tenseur des déformations en élasticité pure. Notons ici que dans le cas homogène \mathcal{F}_{ijkh} et e_{ijk} sont des constantes et dans le cas non homogène \mathcal{F}_{ijkh} et e_{ijk} dépendent du point $x \in \Omega$.

Dans (1.3.1), si nous prenons

$$(1.3.4) \quad \mathcal{F}(\xi) = \mathcal{A}\xi + \frac{1}{\alpha}(\xi - P_K\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{S}^d,$$

nous obtenons un exemple de loi de comportement électro-élastique non linéaire, où α est une constante strictement positive. $\mathcal{A} : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ est un tenseur d'ordre quatre symétrique, défini positif; $K \in \mathbb{S}^d$ est un convexe fermé tel que $0_d \in K$ et P_K est l'opérateur de projection sur K . Ce convexe est défini par

$$K = \left\{ \xi \in \mathbb{S}^d / G(\xi) \leq k \right\},$$

où $G : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe est continue telle que $G(0) = 0$ et $k > 0$. Pour plus de détaille sur la loi de comportement (1.3.1), nous renvoyons le lecteur à voir par exemple [18, 17].

1.3.2 Lois de comportement des matériaux électro-viscoélastiques

Toute loi de comportement de la forme suivante

$$(1.3.5) \quad \begin{cases} \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{F}\varepsilon(u) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi), \\ D = \mathcal{B}\mathbf{E}(\varphi) + \mathcal{E}\varepsilon(u), \end{cases}$$

est dite loi de comportement électro-viscoélastique. Dans (1.3.5) l'opérateur \mathcal{A} est l'opérateur de viscosité a champ électrique nul, \mathcal{F} est l'opérateur d'élasticité, non forcément linéaire, à champ électrique nul, $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ est le tenseur piézoélectrique à champ constant ou nul, $\mathcal{B} = (b_{ij})$ est le tenseur diélectrique. Les lois de comportement pour les matériaux électro-viscoélastiques sont utilisées pour d'écrire le comportement des différents matériaux comme les métaux, les polymères et les roches.

En visco-élasticité linéaire de type *Kelevin-Voigt* (Voir par exemple [40]) le

tenseur des contraintes est donné par

$$(1.3.6) \quad \sigma_{ij} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\dot{u}) + \mathcal{F}_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) - e_{ijk}^* \mathbf{E}_k(\varphi),$$

où a_{ijkh} sont les coefficients de viscosité.

La relation suivante

$$(1.3.7) \quad \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \frac{1}{\alpha}(\varepsilon - P_K\varepsilon) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi),$$

est un exemple de loi électro-viscoélastique non linéaire. Ici, $\mathcal{A} = (a_{ijkh})$ est le tenseur des coefficients viscoélastiques, $K \in \mathbb{S}^d$ est un convexe fermé tel que $0_d \in K$ et $P_K : \mathbb{S}^d \rightarrow K$ est l'opérateur de projection sur K . L'opérateur d'élasticité est donné par

$$(1.3.8) \quad \mathcal{F}(\varepsilon) = \frac{1}{\alpha}(\varepsilon - P_K\varepsilon),$$

et $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ est le tenseur des coefficients piézoélectriques.

Finalement, afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur la partie Γ_3 ; c'est l'objet des conditions de contact et lois de frottement que nous décrivons dans la section suivantes.

1.4 Conditions aux limites de contact

Nous nous plaçons dans le cadre physique de la FIGURE 1.1 et nous présentons en détails les conditions de contact sur la surface Γ_3 avec une description de l'aspect mathématique et mécanique de ces conditions .

1.4.1 Contact bilatérale.

Quand le contact entre le corps et la base est maintenue en tout temps on dit que c'est un contact bilatéral. C'est généralement le cas dans de nombreuses machines et entre les pièces et composants d'équipement ou de machines mobiles. Comme il n'y a pas d'écart entre le corps et la base, nous avons

$$(1.4.1) \quad u_\nu = 0.$$

La condition de contact bilatéral (1.4.1) a été utilisé dans un certain nombre de documents, pour plus de détails voir par exemple [39, 66]. On note ici que dans le dernier chapitre de cette thèse nous nous plaçons dans ce type de contact.

1.4.2 Contact unilatérale.

Dans ce cas nous supposons que le corps est susceptible d'entrer en contact avec une base rigide. Par conséquent, le mouvement des particules matérielles de Γ_3 est restreint de la présence du solide rigide de telle sorte que, avant l'application des forces externes, la distance de chaque point $x \in \Gamma_3$ à la base rigide dans la direction de la normale $\nu(x)$ est connue et notée par $g(x)$.

Nous supposons aussi que le contact entre le corps et la base rigide se produit si et seulement si $u_\nu = g$. Puisque la base est considérée rigide, elle ne subira pas de déformations donc le corps Ω ne pourra pas le pénétrer ; cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité

$$(1.4.2) \quad u_\nu \leq g \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

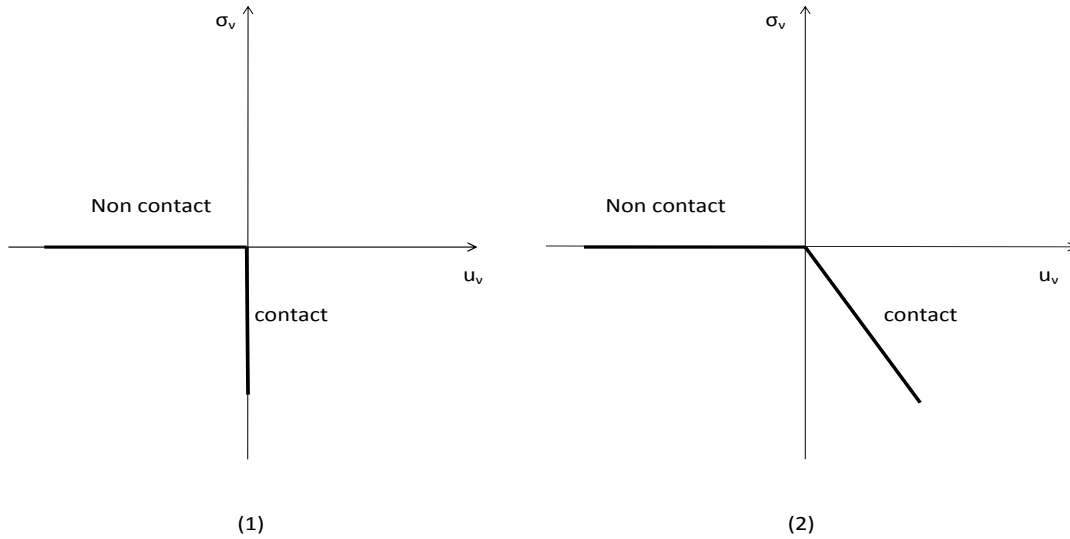


FIGURE 1.2 – Loi de Signorini (1) et loi de compliance normale (2) pour $g=0$.

Dans les points de Γ_3 tels que $u_\nu < g$, il n'existe pas de contact entre Ω et la base rigide donc le vecteur des contraintes de *Cauchy* s'annule, c-à-d

$$(1.4.3) \quad u_\nu < g \implies \sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Pour les points de Γ_3 tels que $u_\nu = g$, le contact entre le corps Ω et la base rigide se produit ; nous supposons pour ces points que la base rigide exerce une pression inconnue suivant la direction de la normale et orientée vers Ω ; on à

$$(1.4.4) \quad u_\nu = g \implies \sigma_\nu \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

On peut résumer les conditions (1.4.2)–(1.4.4) de la manière condensée suivante

$$(1.4.5) \quad u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu(u_\nu - g) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Les conditions (1.4.5) s'appellent les conditions de contact unilatéral ou conditions de contact de type *Signorini*.

1.4.3 Contact avec compliance normale

C'est le cas où la fondation est supposée légèrement déformable et la contrainte normale σ_ν satisfait

$$(1.4.6) \quad -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g),$$

où u_ν le déplacement normal, g est l'interstice entre le corps et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée, appelée *fonction de compliance normale*. La relation (1.4.6) est dite *condition de compliance normale* et signifie que la fondation exerce une pression inconnue suivant la normale sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - g$. Des conditions de contact avec compliance normale ont été utilisées par exemple dans [38, 41, 56].

Remarque 1.4.1. *Dans le cas où l'interstice entre le corps et la fondation est nul on prend $g = 0$.*

Pour la fonction de compliance normale p_ν on prend comme exemple la fonction suivante

$$(1.4.7) \quad p_\nu = c_\nu r_+,$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est la fonction donnée par

$$(1.4.8) \quad p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha, \end{cases}$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. La condition

de contact (1.4.8) dit que si la pénétration est trop profonde, c-à-d. quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

1.4.4 Contact avec adhésion

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact. En se basant sur les idées de *M. Frémond* [35, 36], on introduit une variable interne de surface appelée *champ d'adhésion* et notée par $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$; qui représente l'intensité des couches actives d'adhésion sur la surface de contact telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion et quand $0 < \beta < 1$, l'adhésion est partielle et mesure la fraction des liens actifs sur la surface de contact. Pour plus de détails concernant la modélisation du contact adhésif, nous référons aux livres [37, 66, 78].

Dans ce qui suit nous présentons les lois de contact qu'on va utiliser dans cette thèse.

1.5 Lois de contact avec ou sans frottement

1.5.1 Contact sans frottement

Dans un contact parfait, où sans frottement, l'action mécanique transmissible par obstacle entre deux solides ne peut être en tout point que normale au contact (perpendiculaire au plan tangent commun du contact). Ceci se traduit par la relation

$$\sigma_\tau = 0,$$

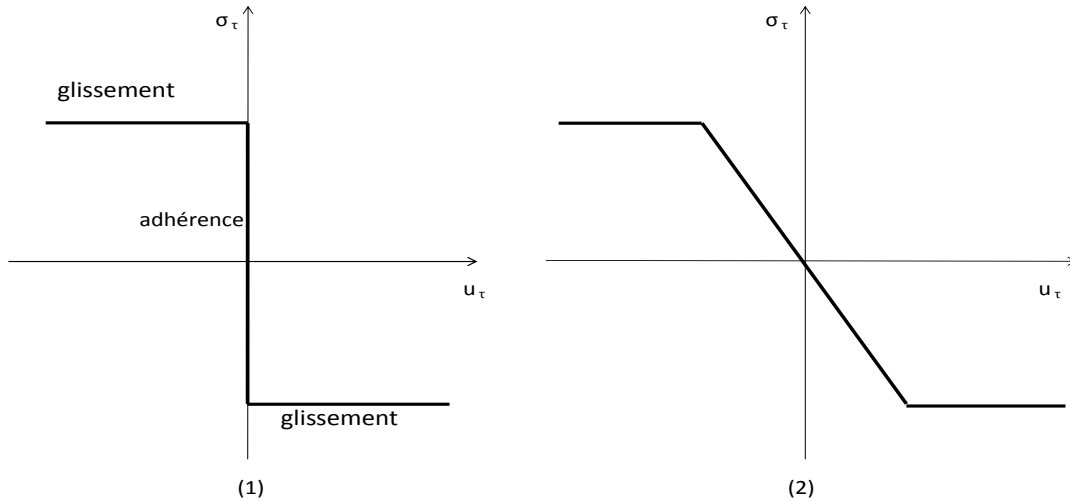


FIGURE 1.3 – Loi de Coulomb (1) et sa régularisation (2)

qui signifie que la contrainte tangentielle est nulle. Si ce n'est pas le cas, on dit que le mouvement tangentielle se produit avec frottement ce qui nous oblige à introduire une loi de frottement qui prend en considération la composante tangentielle avec les autres variables du système.

1.5.2 Contact avec frottement

1) Loi de frottement de type Coulomb. C'est une des lois de frottement les plus répandues et elle est plus réaliste. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer sous la forme :

$$(1.5.1) \quad \begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu|\sigma_\nu|, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow u_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau, \end{cases}$$

ou sous la forme :

$$(1.5.2) \quad \begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu|\sigma_\nu|, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda\dot{u}_\tau, \end{cases}$$

où $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement.

La loi de *Coulomb* est souvent utilisée pour les corps rigide ou élastique. On remarque également qu'il s'agit d'une loi à seuil, tant que la seuil n'est pas atteint, il n'y a pas de glissement (le déplacement tangentiel ou la vitesse tangentielle s'annule). Quand ce seuil est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement tangentielle (voir figure 1.3).

2) Loi de Coulomb avec seuil de type Stromberg. Cette loi de frottement est une version de la loi de *Coulomb*. On peut supposer que le contact est bilatéral ou unilatéral. On remplace dans la loi précédent le seuil de frottement $|\sigma_\nu|$ par le seuil de type $p(|\sigma_\nu|) = |\sigma_\nu|(1 - |\alpha\sigma_\nu|)_+$ où α est un un petit coefficient relatif à la dureté de la surface de contact. La considération de ce seuil de frottement est faite à partir des principes de la thermodynamique. En résumé, cette loi s'énonce sous la forme :

$$(1.5.3) \quad \begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu p(|\sigma_\nu|), \\ \|\sigma_\tau\| < \mu p(|\sigma_\nu|) \Rightarrow u_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu p(|\sigma_\nu|) \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau, \end{cases}$$

ou sous la forme :

$$(1.5.4) \quad \begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu p(|\sigma_\nu|), \\ \|\sigma_\tau\| < \mu p(|\sigma_\nu|) \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu p(|\sigma_\nu|) \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau, \end{cases}$$

3) Loi de Coulomb non locale généralisée. Finalement, on présente la loi de frottement qui fait l'objet de notre étude et qui généralise la loi précédente. Soit l'opérateur R une régularisant normale, c'est à dire un opérateur linéaire continu $R : H^{-\frac{1}{2}} \rightarrow L^2(\Gamma)$. Le régularisant R est introduit pour des raisons techniques car la trace du tenseur des contraintes sur la frontière est très irrégulière. Cette loi s'énonce sous la forme :

$$(1.5.5) \quad \begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu p|R\sigma_\nu|, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu p|R\sigma_\nu| \Rightarrow u_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu p|R\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau, \end{cases}$$

ou sous la forme :

$$(1.5.6) \quad \begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu p|R\sigma_\nu|, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu p|R\sigma_\nu| \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu p|R\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau, \end{cases}$$

où $p : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est le seuil de frottement vérifiant les conditions suivantes :

$$(1.5.7) \quad \begin{cases} \text{(a) Il existe } M > 0 \text{ tel que :} \\ \quad |p(x, r_1) - p(x, r_2)| \leq M |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) } x \rightarrow P(x, r) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \quad \forall r \in R_+. \\ \text{(c) } p(x, 0) = 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{cases}$$

En remplaçant le seuil de frottement σ_ν de la loi (1.5.1) et (1.5.2) par la condition de compliance normale (1.4.6) on obtient les lois de frottement avec compliance normale suivantes :

$$(1.5.8) \quad \begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu p_\nu(u_\nu - g),, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu p_\nu(u_\nu - g), \Rightarrow u_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu p_\nu(u_\nu - g), \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau, \end{cases}$$

$$(1.5.9) \quad \begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu p_\nu(u_\nu - g),, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu p_\nu(u_\nu - g), \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu p_\nu(u_\nu - g), \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau, \end{cases}$$

Dans (1.5.8) et (1.5.9) la contrainte tangentielle ne peut pas excéder le seuil de frottement $\mu p_\nu(u_\nu - g)$. De plus, quand la seuil n'est pas atteint, il n'y a pas de glissement (le déplacement tangentiel ou la vitesse tangentielle s'annule). Quand ce seuil est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement tangentielle.

1.6 Lois de contact avec frottement et adhésion

Pour décrire les conditions aux limites correspondantes, nous supposons que le vecteur de contrainte de *Cauchy* σ_ν a une décomposition de la forme

$$(1.6.1) \quad \sigma_\nu = (\sigma_\nu)^{ad} + (\sigma_\nu)^{fc},$$

où $(\sigma_\nu)^{ad}$ et $(\sigma_\nu)^{fc}$ dénotent les parties de σ_ν associées à l'adhésion et au frottement, respectivement. Nous dénotons par σ_ν , σ_ν^{ad} , σ_ν^{fc} les composantes

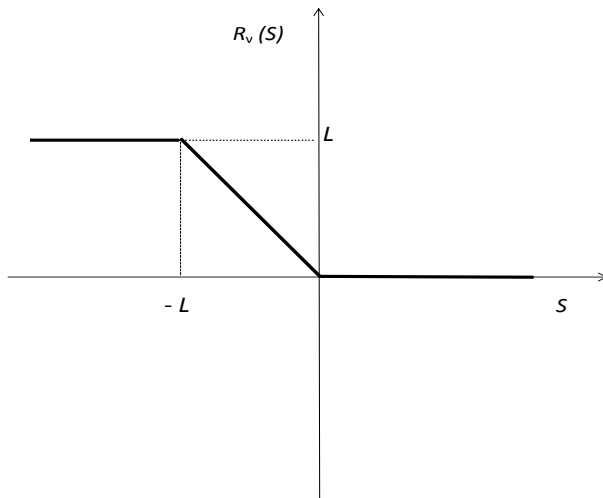


FIGURE 1.4 – Représentation graphique de l'opérateur de troncation R_ν .

normales des vecteurs σ_ν , $(\sigma_\nu)^{ad}$ et $(\sigma_\nu)^{fc}$ qui sont données par

$$(1.6.2) \quad \sigma_\nu = \sigma_\nu \cdot \nu, \quad \sigma_\nu^{ad} = (\sigma_\nu)^{ad} \cdot \nu, \quad \sigma_\nu^{fc} = (\sigma_\nu)^{fc} \cdot \nu,$$

et par σ_τ , σ_τ^{ad} , σ_τ^{fc} les composantes tangentielles des mêmes vecteurs qui sont données par

$$(1.6.3) \quad \sigma_\tau = \sigma_\nu - \sigma_\nu \nu, \quad \sigma_\tau^{ad} = (\sigma_\nu)^{ad} - \sigma_\nu^{ad} \nu, \quad \sigma_\tau^{fc} = (\sigma_\nu)^{fc} - \sigma_\nu^{fc} \nu,$$

Nous supposons que la composante normale du vecteur $(\sigma_\nu)^{ad}$ satisfait la condition

$$(1.6.4) \quad \sigma_\nu^{ad} = \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)$$

dans laquelle γ_ν est un coefficient positif et $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'opérateur de troncation défini par

$$(1.6.5) \quad R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases}$$

Ici $L > 0$ est la longueur caractéristique du lien, au delà de laquelle il s'étire sans offrir aucune résistance complémentaire. L'introduction de l'opérateur R_ν , ensemble avec l'opérateur R_τ défini ci-dessous, est motivée par les arguments mathématiques mais ce n'est pas restrictif du point de vue physique, puisqu'aucune restriction de la taille du paramètre L n'est faite que dans ce qui suit (voir figure 1.4). Ainsi, en choisissant L très grand, nous pouvons assumer que $R_\nu(u_\nu) = -u_\nu$ et, donc, nous obtenons la condition de compliance normale

$$\sigma_\nu^{ad} = \begin{cases} -\gamma_\nu \beta^2 u_\nu & \text{si } u_\nu \leq 0, \\ 0 & \text{si } u_\nu > 0. \end{cases}$$

Aussi, nous supposons que la composante normale du vecteur $(\sigma_\nu)^{fc}$ satisfait la condition de contact avec compliance normale

$$(1.6.6) \quad -\sigma_\nu^{fc} = p_\nu(u_\nu),$$

où u_ν est le déplacement normal et p_ν est la fonction positive prescrite telle que $p_\nu(r) = 0$ pour $r \leq 0$. Combinons les égalités (1.6.1), (1.6.2), (1.6.4) et (1.1.2), nous dérivons la condition de contact de compliance normale avec adhésion,

$$(1.6.7) \quad -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

La contribution de l'adhésion à la traction normale est donnée par le terme $\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)$. Ainsi, la traction adhésive est nonnegative et proportionnelle, avec un coefficient de proportionnalité γ_ν , par rapport au carré de l'intensité d'adhésion et le déplacement normal, mais tant que u_ν n'excède pas la longueur du lien L .

Ensuite, nous supposons que la composante tangentielle du vecteur $(\sigma_\nu)^{ad}$ satisfait la condition

$$(1.6.8) \quad \sigma_\tau^{ad} = -\gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau),$$

où, encore, γ_τ est un coefficient positif et $R_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est l'opérateur de troncation défini par

$$(1.6.9) \quad R_\tau(v) = \begin{cases} v & \text{si } \|v\| \leq L, \\ L \frac{v}{\|v\|} & \text{si } \|v\| > L. \end{cases}$$

Cette condition montre que la contrainte tangentielle adhésive sur la surface de contact est proportionnelle au déplacement tangentiel, mais tant qu'il n'excède pas la longueur du lien L .

Le frottement est modélisé par une version statique de la loi de frottement de Coulomb. Pour cela, considérons la décomposition (1.6.1) du vecteur de Cauchy et supposons que

$$(1.6.10) \quad \begin{cases} \|\sigma_\tau^{fc}\| \leq -\mu \sigma_\nu^{fc}, \\ \|\sigma_\tau^{fc}\| < -\mu \sigma_\nu^{fc} \Rightarrow u_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau^{fc}\| = -\mu \sigma_\nu^{fc} \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ telle que } u_\tau^{fc} = -\lambda u_\tau, \end{cases}$$

où μ est le coefficient de frottement, supposé être positif. Combinons les relations (1.6.1), (1.6.2), (1.6.4), (1.6.6) et (1.6.8) nous obtenons la loi de

frottement avec adhésion,

$$(1.6.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| \leq \mu p_\nu(u_\nu), \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| < \mu p_\nu(u_\nu) \Rightarrow u_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| = \mu p_\nu(u_\nu) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) = -\lambda u_\tau \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (1.6.7) a été déjà utilisée dans [78] et les conditions de frottement similaires à ceux dans (1.6.11) ont été considérées dans [49] et dans [61] dans le cas particulier $R_\tau(u_\tau) = u_\tau$ et $R_\nu(u_\nu) = -u_\nu$, pour L très grand. Dans la deuxième partie de cette thèse on va utiliser une loi de frottement couplée avec adhésion de la forme suivante :

$$(1.6.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| \leq \mu p_\nu(u_\nu), \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| < \mu p_\nu(u_\nu) \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| = \mu p_\nu(u_\nu) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

Pour compléter le modèle, nous supposons que l'évolution du champ d'adhésion est gouvernée par une équation différentielle ordinaire

$$(1.6.13) \quad \dot{\beta}(t) = - \left(\beta(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau)\|^2) - \epsilon_a \right)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

A celle-ci, nous rajoutons la condition initiale

$$(1.6.14) \quad \beta(0) = \beta_0.$$

Ici et ci-dessous, en plus des paramètres positives γ_ν et γ_τ déjà introduits

dans (1.6.4) et (1.6.8), ϵ_a est un paramètre positif et $r_+ = \max\{0, r\}$. Notons que le processus adhésif est irréversible, en effet, une fois que le décollement se passe le collage ne peut pas être rétabli, puisque $\dot{\beta} \leq 0$. Pour plus de détails concernant la modélisation du contact adhésif, nous référons aux livres [37, 66, 78].

Finalement, notons qu'aux lois de frottement (1.5.5) et (1.5.6) on peut introduire le champ d'adhésion pour obtenir les lois de frottement avec adhésion suivantes

$$(1.6.15) \left\{ \begin{array}{l} \| \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) \| \leq \mu p(| R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) |), \\ \| \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) \| < \mu p(| R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) |) \implies u_\tau = 0, \\ \| \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) \| = \mu p(| R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) |) \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que :} \\ \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) = -\lambda u_\tau, \end{array} \right.$$

ou

$$(1.6.16) \left\{ \begin{array}{l} \| \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) \| \leq \mu p(| R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) |), \\ \| \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) \| < \mu p(| R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) |) \implies \dot{u}_\tau = 0, \\ \| \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) \| = \mu p(| R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) |) \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que :} \\ \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) = -\lambda \dot{u}_\tau, \end{array} \right.$$

On note ici que dans la troisième partie de cette thèse nous nous plaçons dans ce type de loi de frottement.

1.7 Conditions de contact de type Signorini avec adhésion.

Dans cette thèse l'évolution du champ d'adhésion sur la partie Γ_3 est gouverné par l'équation différentielle ordinaire

$$(1.7.1) \quad \dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu)^2 + \gamma_\tau \| R_\tau(u_\tau) \|^2) - \epsilon_a)_+ \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

où γ_ν , γ_τ et ε_a sont des coefficients positifs, $r_+ = \max\{0, r\}$ et $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $R_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, sont les opérateurs de troncation donnés par (1.6.5) et (1.6.9).

Maintenant, pour modéliser le contact adhésif avec une fondation rigide nous utilisons les relations suivantes :

$$(1.7.2) \quad u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \leq 0, \quad u_\nu (\sigma_\nu - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

qui sont les conditions de contact de type *Signorini* avec adhésion. Pour L très grand, on peut supposer que $R_\nu(u_\nu) = -u_\nu$, d'où les conditions de contact (1.7.2) deviennent :

$$(1.7.3) \quad u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu + \gamma_\nu u_\nu \beta^2 \leq 0, \quad u_\nu (\sigma_\nu + \gamma_\nu u_\nu \beta^2) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

Ces conditions ont été utilisées dans [27, 61], pour modéliser le contact adhésif unilatéral. Quand le champ d'adhésion est nul, les conditions (1.7.3) deviennent

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

qui sont les conditions de contact classiques de *Signorini*, sans adhésion (voir (1.4.5)).

CHAPITRE 2

OUTILS MATHÉMATIQUES

Ce chapitre est consacré à la description des espaces fonctionnels utilisés dans cette thèse. Nous supposons dans ce chapitre que Ω est un domaine borné et de *Lipschitz* de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), c'est-à-dire que sa frontière Γ est représentable localement comme le graphe d'une fonction Lipschitzienne sur un ouvert de \mathbb{R}^{d-1} , Ω étant situé localement d'un seul côté de Γ . Par ailleurs, nous considérons une partition de Γ en trois parties mesurables disjointes Γ_1 , Γ_2 , et Γ_3 d'un côté et une partition de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ en deux parties ouvertes Γ_a et Γ_b d'un autre côté, telles que $mes \Gamma_1 > 0$ et $mes \Gamma_a > 0$.

2.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section nous donnons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles qui nous aident à comprendre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Nous allons définir les espaces de fonctions continues, continûment différentiables, les fonctions p -intégrables et les espaces de *Sobolev*. Pour plus de détails sur ce sujet nous renvoyons le lecteur, par exemple, aux références [1, 19, 64].

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ d'entiers positifs ou nuls on désigne par

$$(2.1.1) \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$ est la longueur de α . Dans cette thèse, on va désigner par $\frac{\partial u}{\partial x_i}, \partial_{x_i} u, \partial_i u, u_{x_i}$ ou $u_{,i}$, les dérivées partielles d'une fonction u .

2.1.1 Espaces de fonctions continues et continûments différentiables

L'espace des fonctions uniformément continues sur Ω est noté par $C(\bar{\Omega})$ et il est un espace de *Banach* pour la norme donnée par

$$|v|_{C(\bar{\Omega})} = \sup \{ |v(x)|, x \in \bar{\Omega} \}.$$

Toute fonction uniformément continue est bornée et possède une unique extension continue sur $\bar{\Omega}$. Pour tout entier m , l'espace $C^m(\bar{\Omega})$ donné par

$$C^m(\bar{\Omega}) = \left\{ v \in C(\bar{\Omega}) / D^\alpha v \in C(\bar{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leq m \right\}$$

est l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ dont les dérivées d'ordre au plus m sont également continues sur $\bar{\Omega}$. Il est aussi un espace de *Banach* s'il est muni de la norme

$$|v|_{C^m(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{C(\bar{\Omega})}.$$

L'espace $C^\infty(\bar{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\bar{\Omega}).$$

Nous pouvons maintenant parler de l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur l'ensemble Ω à support inclus dans Ω , défini par

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) / \text{supp } v \subset \Omega\},$$

où $\text{supp } v = \overline{\{v \in C^\infty(\Omega) / v(x) \neq 0\}}$ est le support de la fonction v . Si $\text{supp } v$ est un sous ensemble propre de Ω , on dit que v est une fonction à support compact dans Ω .

2.1.2 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 2.1.1. (Espace de Lebesgue). Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / v \text{ Lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ et } |v|^p \text{ Lebesgue intégrable sur } \Omega \}.$$

C'est un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$ et $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, alors on définit $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ par

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{supess}(v) = \inf \{c : |v(x)| \leq c\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

Définition 2.1.2. Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, on dit qu'une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $u \circ I_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$, où I_K représente l'application identité de K .

Remarque 2.1.3. Soit $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, si on a

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

alors $u = 0$ p.p dans Ω .

Dans ce qui suit nous allons rappeler quelques propriétés des espaces

$L^p(\Omega)$. Soit $1 < p < \infty$ un réel. On pose $q = \frac{p}{p-1}$ et on dit que q est l'exposant conjugué de p . L'exposant q est caractérisé par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour $p = 1$ (res. $p = +\infty$) nous poserons naturellement $q = +\infty$ (res $q = 1$).

Théorème 2.1.4. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, les espaces $L^p(\Omega)$ vérifient les assertions suivantes*

1) *Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach.*

2) *Toute suite de Cauchy de $L^p(\Omega)$ possède une sous-suite convergente ponctuellement sur Ω .*

3) *Pour toute fonction $u \in L^p(\Omega)$, toute $v \in L^q(\Omega)$ l'inégalité de Hölder est vérifiée, i.e.*

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} .$$

4) *Les duaux des espaces $L^p(\Omega)$, pour $p \in [1, +\infty[$, vérifient $(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega)$.*

5) *Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces réflexifs pour $]1, +\infty[$.*

6) *Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces séparables pour $[1, +\infty[$.*

L'espace $L^2(\Omega)$ munit du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega),$$

est un espace de Hilbert. De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspondant à l'inégalité de Hölder est vérifiée, i.e.

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} .$$

2.1.3 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles sans réponse jusque là. Nous nous limiterons aux espaces les plus utiles en gardant bien à l'esprit que la théorie sous-jacente

est beaucoup plus vaste.

Dans ce qui suit, sauf mention explicite du contraire, on suppose l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ borné.

Définition 2.1.5. Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On dit que la fonction $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ est la dérivée faible d'ordre α de u si

$$\int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

En utilisant la remarque (2.1.3) nous déduisons que la dérivée faible, si elle existe, est unique dans $L^1_{loc}(\Omega)$.

Définition 2.1.6. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_{\alpha} \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_{\alpha} = D^{\alpha}u\},$$

Remarque 2.1.7. Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^{\alpha}u$ et v_{α} .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Théorème 2.1.8. Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, munis de la norme $\|\cdot\|$, sont des espaces de Banach. De plus, les espaces $H^k(\Omega)$, pour tout k entier, sont des espaces de Hilbert.

Pour modéliser un problème mécanique, il nous faudra introduire des conditions aux limites, ce qui nous amène à parler de la restriction à la frontière Γ d'une fonction. Bien que cela semble tout-à-fait naturel de le faire, il faut s'assurer que cette restriction au bord ait un sens du point de vue mathématique. Pour cela nous introduisons la notion d'application trace γ des fonctions des espaces de *Sobolev*.

Théorème 2.1.9. *Soit Ω un domaine de Lipschitz de \mathbb{R}^d de frontière Γ et $1 \leq p < \infty$. Il existe une application linéaire continue $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma)$ possédant les propriétés suivantes :*

- 1) $\gamma v = v|_{\Gamma}$ si $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,
- 2) l'application γ est une application compact,
- 3) il existe une constante $k > 0$, provenant de la continuité de l'application γ , telle que

$$\|\gamma v\|_{L^p(\Gamma)} \leq k \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté, nous remplaçons γv (la trace de la fonction $v \in W^{1,p}(\Omega)$) par v .

2.2 Espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence

Dans cette section nous introduisons les espaces de *Hilbert* suivants, associés aux inconnues mécaniques u et σ :

$$\begin{aligned} H &= \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\}, \\ \mathcal{H} &= \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}, \\ H_1 &= \{u = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega)\}, \\ \mathcal{H}_1 &= \{\sigma \in \mathcal{H} \mid \sigma_{ij,j} \in H\}. \end{aligned}$$

Les espaces H , \mathcal{H} , H_1 et \mathcal{H}_1 sont des espaces réels de *Hilbert* munis des produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned} (u, v)_H &= \int_{\Omega} u_i v_i dx, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ (u, v)_{H_1} &= (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} &= (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, Div \tau)_H. \end{aligned}$$

respectivement, où $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$ et $Div : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$ sont respectivement les opérateurs de *déformation* et de *divergence*, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad Div \sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces H , \mathcal{H} , H_1 et \mathcal{H}_1 sont notées par $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$, respectivement.

Pour tout champ de vecteurs $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ . Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par H_{Γ} ; ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H'_{Γ} le dual de H_{Γ} et $(\cdot, \cdot)_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}}$ le produit de dualité entre H'_{Γ} et H_{Γ} . Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, il existe un élément $\sigma \nu \in H'_{\Gamma}$ tel que :

$$(2.2.1) \quad (\sigma \nu, \gamma v)_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}} = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, v)_H \quad \forall v \in H_1.$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(2.2.2) \quad (\sigma \nu, \gamma v)_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}} = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1.$$

Donc, pour σ assez régulier nous avons la formule de *Green* suivante :

$$(2.2.3) \quad (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v \, da \quad \forall v \in H_1.$$

Nous définissons le sous-espace fermé de H_1

$$(2.2.4) \quad V = \{v \in H_1 \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

Puisque $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, l'inégalité de *Korn* s'applique sur V ; alors, il existe une constante $C_K > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$(2.2.5) \quad \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \geq C_K \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V.$$

Une preuve de cette inégalité peut être trouvée dans [58] p.79.

Nous considérons sur l'espace V , le produit scalaire donné par

$$(2.2.6) \quad (u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée, telle que

$$(2.2.7) \quad \|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V.$$

Par l'inégalité de *Korn*, il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert. De plus, en utilisant le Théorème de trace de Sobolev, (2.2.3) et (2.2.4), il existe une constante c_0 dépendant uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_3 telle que

$$(2.2.8) \quad \|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Pour une fonction scalaire β , qui représente le champ d'adhésion sur la

surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble

$$(2.2.9) \quad \mathcal{Q} = \{\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid 0 \leq \beta(t) \leq 1 \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de *Sobolev* associés aux inconnues électriques (Le champ des déplacements électriques D et le potentiel électrique φ) des problèmes électro-mécaniques qui vont être introduits dans cette thèse. Soit les espaces

$$(2.2.10) \quad \mathcal{W} = \{D = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega)\} = L^2(\Omega)^d,$$

$$(2.2.11) \quad \mathcal{W}_1 = \{D = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega), D_{i,i} \in L^2(\Omega)\}.$$

munis des produits scalaires

$$(D, E)_{\mathcal{W}} = \int_{\Omega} D_i E_i dx, \quad (D, E)_{\mathcal{W}_1} = (D, E)_{\mathcal{W}} + (\operatorname{div} D, \operatorname{div} E)_{L^2(\Omega)},$$

et leurs normes associées $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_1}$, respectivement. Le champ du potentiel électrique va être trouvé dans l'espace

$$(2.2.12) \quad W = \{\xi \in H^1(\Omega) \mid \xi = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}.$$

Puisque $\operatorname{mes}(\Gamma_a) > 0$, l'inégalité de *Friedrichs-Poincaré* est satisfaite, ainsi,

$$(2.2.13) \quad \|\nabla \xi\|_{\mathcal{W}} \geq c_F \|\xi\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \xi \in W,$$

où $c_F > 0$ est une constante qui dépend uniquement de Ω et Γ_a et $\nabla \xi = (\xi_{,i})$.

Sur l'espace W , nous considérons le produit scalaire donné par

$$(2.2.14) \quad (\varphi, \xi)_W = (\nabla \varphi, \nabla \xi)_W,$$

et soit $\|\cdot\|_W$ la norme associée. Il s'ensuit de (2.2.13) que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_W$ sont des normes équivalentes sur W et donc $(W, \|\cdot\|_W)$ est un espace réel de *Hilbert*. De plus, par le théorème de trace de *Sobolev*, il existe une constante \tilde{c}_0 dépendant uniquement de Ω , Γ_a et Γ_3 , telle que

$$(2.2.15) \quad \|\xi\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0 \|\xi\|_W \quad \forall \xi \in W.$$

Aussi, rappelons que lorsque $D \in \mathcal{W}_1$ est une fonction régulière, la formule de *Green* est satisfaite :

$$(2.2.16) \quad (D, \nabla \xi)_W + (\operatorname{div} D, \xi)_W = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \xi \, da \quad \forall \xi \in H^1(\Omega).$$

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de *Sobolev* nous renvoyons le lecteur par exemple à [1, 19, 32].

2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de *Banach* réel. Bien que le contenu de ce paragraphe est standard et peut être trouvé dans un grand nombre d'ouvrages, une revue d'ensemble sur ce sujet nous a paru utile. Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de *Banach* réel. Nous notons par $C_c(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X .

Définition 2.3.1. Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t \in [0, T] \setminus E$.

Définition 2.3.2. Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite fortement dérivable dans

$t_0 \in (0, T)$ s'il existe un élément $\frac{df}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de f dans t_0 , tel que

$$\left\| \frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0)) - \frac{df}{dt}(t_0) \right\|_X = 0.$$

Définition 2.3.3. Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|f_n(t) - f(t)\|_X dt = 0.$$

Théorème 2.3.4. (Bochner) : Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ mesurable est intégrable si et seulement si $x \mapsto \|f(x)\|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est intégrable. Dans ce cas,

$$\left\| \int_0^T f dt \right\|_X \leq \int_0^T \|f\|_X dt.$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $f : (0, T) \rightarrow X$ mesurables, telles que l'application $t \rightarrow \|f(t)\|_X$ appartient à $L^p(0, T)$. On sait que $L^p(0, T; X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(0, T; X)} &= \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_{L^\infty(0, T; X)} &= \inf \{ c > 0 \mid \|f(t)\|_X \leq c, \quad t \in (0, T) \} \quad p = \infty. \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons les résultats suivants :

Proposition 2.3.5. (1) $L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p \leq \infty$) est un espace de Banach.

(2) Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$, alors $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

(3) $L^r(0, T; X) \subseteq L^q(0, T; X)$, avec injection continue, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

(4) Si X est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' = L^q(0, T; X), \quad 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' = L^\infty(0, T; X),$$

où $L^p(0, T; X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 2.3.6. Soit $u, w \in L^1(0, T; X)$. La fonction w s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0, T)$ si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)w(t)dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, T),$$

$C_c^\infty(0, T)$ étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans $(0, T)$. Nous écrivons $w = \dot{u}$ pour $n = 1$ et $w = u^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ est l'espace des fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$ telles que $u \in L^p(0, T; X)$ et $\dot{u} \in L^p(0, T; X)$. L'espace $W^{1,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Définition 2.3.7. Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite absolument continue si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_j, b_j) disjoints, inclus dans $[0, T]$, tels que $\sum_j (b_j - a_j) < \delta$ on a $\sum_j \|f(b_j) - f(a_j)\|_X \leq \varepsilon$.

Maintenant nous rappelons le lien entre les fonctions absolument continues et les fonctions de l'espace $W^{1,p}(0, T; X)$.

Théorème 2.3.8. Soit $1 \leq p \leq \infty$, X un espace de Banach réflexif et soit $u \in L^p(0, T; X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $u \in W^{1,p}(0, T; X)$.

(2) u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans $L^p(0, T; X)$.

(3) Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^p(0, T; X)$, telles que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Il découle de la démonstration du théorème précédent que, si X est un espace réflexif, alors toute fonction $u \in W^{1,p}(0, T; X)$ est fortement dérivable p.p. sur $(0, T)$ et $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ p.p. sur $(0, T)$. Par ailleurs, $W^{1,1}(0, T; X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$ absolument continues et $W^{1,\infty}(0, T; X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions lipschitziennes $u : [0, T] \rightarrow X$. Étant donné un entier $k \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$ on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0, T; X) = \{u \in W^{k-1,p}(0, T; X); \dot{u} \in W^{k-1,p}(0, T; X)\}.$$

On vérifie aisément que $u \in W^{k,p}(0, T; X)$ si et seulement s'il existe k fonctions $g_1, \dots, g_k \in L^p(0, T; X)$ telles que

$$\int_0^T u(t)\varphi^{(j)}(t)dt = (-1)^j \int_0^T g_j(t)\varphi(t), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I) \quad \forall j = 1, 2, \dots, k,$$

où $\varphi^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j de φ . On peut donc considérer les dérivées successives $\dot{u} = g_1$, $u^{(2)} = g_2$, ..., $u^{(k)} = g_k$. L'espace $W^{k,p}(0, T; X)$ est un espace de *Banach* muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^k \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Nous avons alors les résultats suivants :

Théorème 2.3.9. *Si la fonction $u \in W^{k,p}(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$. Nous avons alors*

$$1) \|u(t) - u(s)\|_X \leq \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

2) Si de plus $p < \infty$, on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X^p \leq (t - s)^{p-1} \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X^p dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

3) Si $p = \infty$, on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X \leq \|\dot{u}(r)\|_{L^\infty(0,T;X)} \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Théorème 2.3.10. Dans le cas où l'espace $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ est un espace de Hilbert et si la fonction u appartient à l'espace $H^1(0, T; X)$, alors

1) la fonction $t \rightarrow \frac{1}{2}\|u(t)\|_X^2$ est une fonction absolument continue sur l'intervalle $]0, T[$,

2) $\frac{d}{dt} \frac{1}{2}\|u(t)\|_X^2 = (\dot{u}(t), u(t))_X$ p.p. $t \in]0, T[$,

3) $\frac{1}{2}\|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2}\|u(0)\|_X^2 + \int_0^t (\dot{u}(s), u(s))_X ds \quad \forall t \in]0, T[$.

Finalement, nous dénotons aussi par $C([0, T]; X)$ et $C^1([0, T]; X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ à valeurs dans X , respectivement, avec les normes

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X,$$

$$\|u\|_{C^1([0,T];X)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X + \max_{t \in [0,T]} \|\dot{u}(t)\|_X.$$

Pour plus de détails sur les résultats résumés dans cette section nous renvoyons par exemple aux références [15, 19].

2.4 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Cette section comporte des rappels de quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats sur les inéquations

variationnelles elliptiques, les inéquations variationnelles d'évolution et les inclusions différentielles qu'on va utiliser dans cette thèse. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurants dans cette section, nous renvoyons par exemple aux références [20, 69, 70].

2.4.1 Rappel sur les espaces de Hilbert

Soit X un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_X$ un produit scalaire sur X . La norme induite sur l'espace X par le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ est définie par :

$$\|u\|_X = (u, u)_X^{1/2}.$$

Cette norme vérifie l'inégalité de *Cauchy-Schwarz*

$$| (u, v)_X | \leq \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

On dit que X est un espace de *Hilbert* si X est complet pour la norme définie ci-dessus. Dans la suite, on va supposer que X est un espace de *Hilbert* et la convergence forte dans l'espace X sera notée par une flèche

$$u_n \rightarrow u \iff \|u_n - u\|_X \rightarrow 0.$$

On note par X' l'espace dual de X et par $\|\cdot\|_{X' \times X}$ la dualité entre X et X' . La norme sur l'espace X' est définie par

$$\|\eta\|_{X'} = \sup_{\substack{v \in X \\ v \neq 0_X}} \frac{|(\eta, v)_{X' \times X}|}{\|v\|_X}$$

On a les résultats suivants :

Théorème 2.4.1. (*Théorème de représentation de Riesz-Fréchet*). Etant donné

$\eta \in X'$, il existe $f \in X$ unique tel que

$$(\eta, v)_{X' \times X} = (f, v)_X \quad \forall v \in X.$$

On a de plus

$$\|\eta\|_{X'} = \|f\|_X.$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur X peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire. L'application $\eta \rightarrow f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier X et son dual X' .

On dit que la suite (u_n) de X est faiblement convergente vers l'élément $u \in X$ et on note $u_n \rightharpoonup u$ si

$$(\eta, u_n)_X \rightarrow (\eta, u)_X \quad \forall \eta \in X'.$$

Dans ce cas, u s'appelle *limite faible* de la suite (u_n) . En utilisant l'inégalité de *Cauchy-Schwarz*, il résulte que si $u_n \rightarrow u$ dans X alors $u_n \rightharpoonup u$ dans X . La réciproque n'est pas en général vraie. De plus, puisque tout espace de *Hilbert* est réflexif, on a le résultat suivant :

Théorème 2.4.2. *Soit (u_n) une suite bornée de X . Il existe alors un élément $u \in X$ et une sous-suite de (u_n) encore notée (u_n) telles que $u_n \rightharpoonup u$.*

Un élément $u \in X$ qui est la limite faible d'une sous suite de la suite (u_n) s'appelle *point faiblement adhérent* de la suite (u_n) . On prouve que :

Théorème 2.4.3. *Si la suite $(u_n) \subset H$ possède un unique point faiblement adhérent $u \in H$, alors $u_n \rightharpoonup u$.*

Autrement dit, le théorème précédent affirme que si toutes les sous-suites faiblement convergentes d'une suite (u_n) ont la même limite faible u , alors la suite (u_n) converge faiblement vers u .

2.4.2 Fonctions convexes et semi-continuité inférieure

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et à valeur dans $] -\infty, +\infty]$. Une telle fonction est dite *propre* si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, c'est à dire s'il existe $u_0 \in X$ tel que $\varphi(u_0) < +\infty$. La fonction φ est dite *convexe* si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \quad \forall u, v \in X, t \in [0, 1].$$

La fonction φ est dite *strictement convexe* si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in X$ tel que $u \neq v$.

Pour toute fonction $\varphi : X \rightarrow] -\infty, +\infty]$, on définit le domaine et l'épigraphe de φ respectivement par :

$$(2.4.1) \quad \text{dom } \varphi = \{u \in X \mid \varphi(u) < +\infty\},$$

$$\text{epi } \varphi = \{(u, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(u) \leq \alpha\}.$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants :

- 1) φ est propre si et seulement si $\text{dom } \varphi \neq \emptyset$.
- 2) Le domaine de φ est un ensemble convexe de X si φ est convexe.
- 3) φ est convexe si et seulement si $\text{epi } \varphi$ est un ensemble convexe de $X \times \mathbb{R}$.

Nous supposons maintenant l'espace vectoriel X muni d'une topologie (en général X sera un espace vectoriel normé ou encore plus particulièrement un espace de *Hilbert*). Une fonction $\varphi : X \rightarrow] -\infty, +\infty]$ est dite *semi-continue inférieurement* (s.c.i) si

$$\liminf_n \varphi(u_n) \geq \varphi(u),$$

pour tout $u \in X$ et $u_n \rightarrow u$ dans X . La propriété de semi-continuité inférieurement peut être caractérisée par :

Lemme 2.4.4. *Soit $\varphi : X \rightarrow] -\infty, +\infty]$, alors Les propriétés suivantes sont*

équivalentes :

- 1) φ est semi-continue inférieurement.
- 2) L'épigraphe de φ est fermée dans $X \times \mathbb{R}$.

Puisque dans un espace vectoriel normé tout ensemble convexe est simultanément fermé pour la topologie forte et la topologie faible, le lemme précédent conduit au résultat suivant :

Théorème 2.4.5. Soit X un espace de Hilbert et $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et propre. Alors φ est semi-continue inférieurement si et seulement si φ est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie faible de X .

Soit maintenant $K \subset X$. On appelle fonction indicatrice de K , la fonction $\psi_K : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ définie par :

$$(2.4.2) \quad \psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K. \end{cases}$$

En utilisant cette définition, on peut facilement prouver le résultat suivant :

Lemme 2.4.6. K est un ensemble convexe, fermé et non vide de X si et seulement si la fonction indicatrice ψ_K est convexe, s.c.i et propre.

2.4.3 Différentiabilité et sous différentiabilité

Soit X un espace Hilbert réel muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$. On note à présent par 2^X l'ensemble de toutes les parties de X . Une fonction $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite *Gâteaux-différentiable* au point $u \in X$ s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in X$ tel que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = (\nabla\varphi(u), v)_X \quad \forall v \in X.$$

L'élément $\nabla\varphi(u)$ s'appelle la différentielle au sens de *Gâteaux de φ* en u . La fonction φ est dite *Gâteaux-différentiable* si elle est *Gâteaux-différentiable* en tout point de X ; dans ce cas l'opérateur $u \rightarrow \nabla\varphi(u)$ de X dans X s'appelle le gradient de φ .

La convexité des fonctions *Gâteaux-différentiable* peut être caractérisée comme suit :

Lemme 2.4.7. *Soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentiable. Alors φ est une fonction convexe si et seulement si*

$$(2.4.3) \quad \varphi(v) - \varphi(u) \geq (\nabla\varphi(u), v - u)_X \quad \forall u, v \in X.$$

L'inégalité (2.4.3) suggère une généralisation de la notion de *gradient* aux fonctions convexes. On dit que la fonction $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est *sous-différentiable* en un point $u \in X$ s'il existe $f \in X$ tel que :

$$(2.4.4) \quad \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X.$$

L'élément f est alors appelé un *sous-gradient* de φ en u et l'ensemble des sous-gradients de φ en u est appelé le *sous-différentiel* de φ en u et est noté $\partial\varphi(u)$:

$$(2.4.5) \quad \partial\varphi(u) = \{f \in X \mid \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X\}.$$

On note par $\text{dom}(\partial\varphi)$ l'ensemble défini par :

$$(2.4.6) \quad \text{dom}(\partial\varphi) = \{u \in X \mid \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}.$$

En utilisant (2.4.6) et (2.4.5) et (2.4.1), il résulte

$$(2.4.7) \quad \text{dom}(\partial\varphi) \subset \text{dom}\varphi$$

L'opérateur multivoque $u \rightarrow \partial\varphi(u) : X \rightarrow 2^X$ s'appelle le sous-différentiel de φ . La fonction φ est dite *sous-différentiable* si elle est *sous-différentiable en tout point de X* , c'est à dire si $\text{dom}(\partial\varphi) = X$.

En utilisant l'inégalité (2.4.4), on obtient :

Lemme 2.4.8. *Soit $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction sous-différentiable, Alors φ est convexe, propre et semi-continue inférieurement.*

Lemme 2.4.9. *Soit $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. Alors φ est sous-différentiable et $\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\}$ pour tout $u \in X$.*

Remarque 2.4.10. *Explicitons le sous-différentiel de la fonction indicatrice d'un ensemble $K \subset \mathbb{R}^N$; en utilisant (2.4.7), (2.4.1) et (2.4.2), il résulte $\text{dom}(\partial\psi_K) \subset K$ et d'après (2.4.5) il vient*

$$(2.4.8) \quad f \in \partial\psi_K \iff u \in K \text{ et } f \cdot (v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K.$$

En utilisant cette relation, il résulte que si u se trouve à l'intérieur de K , alors $\partial\psi_K(u) = \{0_{\mathbb{R}^N}\}$

2.4.4 Inclusions différentielles

Soit X un espace Hilbert et $A : D(A) \subset X \rightarrow 2^X$ un opérateur multivoque, où $D(A)$ est le domaine de A défini par

$$(2.4.9) \quad D(A) = \{x \in X : Ax \neq \emptyset\},$$

Le graphe de A dénoté par $Gr(A)$ est défini par

$$Gr(A) = \{(x, y) \in X \times X : y \in Ax\}.$$

Définition 2.4.11. *L'opérateur $A : X \rightarrow 2^X$ est dit*

(i) *monotone si*

$$\forall (x_1, y_1) \in Gr(A), \forall (x_2, y_2) \in Gr(A) : (y_1 - y_2, x_1 - x_2)_X \geq 0.$$

(ii) *maximal monotone si A est monotone et n'existe aucun opérateur monotone $B : X \rightarrow 2^X$ tel que $Gr(A)$ est un ensemble propre de $Gr(B)$, ce qui est équivalent à l'implication*

$$[(y_1 - y_2, x_1 - x_2)_X \geq 0, \forall (x_1, y_1) \in Gr(A)] \Rightarrow (x_2, y_2) \in Gr(A).$$

Proposition 2.4.12. *Le sous-différentiel $\partial\psi_K : X \rightarrow 2^X$ de la fonction indicatrice d'un ensemble convexe fermé K de l'espace X est un opérateur maximal monotone.*

Proposition 2.4.13. *La somme d'un opérateur maximal monotone et un opérateur monotone et de Lipschitz est un opérateur maximal monotone.*

Finalement, nous rappelons un résultat abstrait portant sur l'existence et l'unicité d'une solution d'une certaine classe d'inclusion différentielles qui sera utiliser dans le premier chapitre de la troisième partie de cette thèse.

Théorème 2.4.14. *Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow 2^X$ un opérateur multivoque tel que $A + \omega I_X$ est un opérateur maximal monotone pour certains réels ω . Alors, pour toute $f \in W^{1,1}(0, T; X)$ et $u_0 \in D(A)$, il existe une unique fonction $u \in W^{1,\infty}(0, T; X)$, vérifiant*

$$(2.4.10) \quad \dot{u}(t) + Au(t) \ni f(t) \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

$$(2.4.11) \quad u(0) = u_0.$$

Pour la démonstration de ce théorème voir [14], page 32.

2.4.5 Opérateurs non-linéaires et formes bilinéaires dans un espace de Hilbert

Nous donnons dans ce paragraphe quelques définitions et propriétés sur les opérateurs non linéaire et les formes bilinéaires dans un espaces de *Hilbert* muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$.

Définition 2.4.15. Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non-linéaire. L'opérateur A est dit

1) *monotone si*

$$(2.4.12) \quad (Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X;$$

2) *fortement monotone si*

$$(2.4.13) \quad \begin{array}{l} \text{il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ (Au - Av, u - v)_X \geq m\|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X; \end{array}$$

3) *de Lipschitz si*

$$(2.4.14) \quad \begin{array}{l} \text{il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ \|Au - Av\|_X \leq M\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \end{array}$$

Théorème 2.4.16. Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et $K \subset X$ un ensemble convexe, fermé non vide. Alors pour tout $f \in X$ il existe un unique élément u tel que

$$(2.4.15) \quad u \in K, (Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K.$$

L'inéquation précédente s'appelle inéquation variationnelle de première espèce sur X .

Si on prend $K = X$ dans le théorème précédent on obtient le résultat

suivant

Corollaire 2.4.17. *Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout $f \in X$ il existe un unique élément $u \in X$ tel que $Au = f$.*

Le corollaire précédent représente un cas particulier du Théorème de *Minty-Browder* (voir par exemple [19] p.88). Ce théorème nous prouve que tout opérateur $A : X \rightarrow X$ fortement monotone et de Lipschitz est inversible. Donc, on a le résultat suivant qu'on va utiliser dans le premier chapitre de la troisième partie de cette thèse.

Lemme 2.4.18. *Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors son inverse A^{-1} est également fortement monotone et de Lipschitz.*

Le résultat suivant sera aussi utiliser dans le premier chapitre de la troisième partie de cette thèse.

Lemme 2.4.19. *Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et $B : X \rightarrow X$ un opérateur monotone. Alors, $A + B$ est fortement monotone.*

Maintenant, soit $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

Définition 2.4.20. *La forme bilinéaire a est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que*

$$(2.4.16) \quad |a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 2.4.21. *La forme bilinéaire a est X -elliptique s'il existe un réel $m > 0$ tel que*

$$(2.4.17) \quad |a(u, u)| \geq m \|u\|_X^2 \quad \forall u \in X.$$

2.5 Inéquations variationnelles elliptiques et d'évolution

Soit X un espace *Hilbert* réel muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$, $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire et $f \in X$. La modélisation de plusieurs classes de problèmes physiques conduit à un problème mathématique de la forme suivante

(2.5.1) Trouver u tel que

$$u \in X, \quad (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X,$$

où $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, ou à un problème de la forme

(2.5.2) Trouver u tel que

$$u \in X, \quad (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X,$$

où $j : X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Les problèmes (2.5.1) et (2.5.2) sont appelés inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce et inéquation quasi-variationnelle de type elliptique sur X , respectivement. Dans le problème (2.5.2) la fonctionnelle j dépend de la solution elle-même. Nous donnons par la suite un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (2.5.1).

Théorème 2.5.1. *Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle propre, convexe et semi-continue inférieurement. Alors le problème (2.5.1) admet une solution unique.*

Notons que ce résultat sera utilisé dans le deuxième chapitre de la troisième partie de cette thèse. Les démonstration des théorèmes (2.4.16) et (2.5.1) peuvent être trouvées dans [20, 33]

Dans le deuxième chapitre de la deuxième partie de cette thèse, nous utiliserons un résultat abstrait d'existence et d'unicité sur les inéquations

quasi-variationnelles d'évolution. Ce résultat concerne les problèmes du type suivant :

Trouver $u : [0, T] \rightarrow X$ tel que

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X$$

$$(2.5.3) \quad \forall v \in X, \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

$$(2.5.4) \quad u(0) = u_0.$$

où $j : X \times X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ et $f : [0, T] \rightarrow X$. La différence entre le problème (2.5.2) et le problème (2.5.3)–(2.5.4) consiste dans le fait que le dernier problème est évolutif. En effet, f et u dépendent maintenant du temps, la dérivée \dot{u} apparaît dans la formulation du problème et par conséquent, une condition initiale, (2.5.4), est rajoutée.

Pour étudier le problème (2.5.3)–(2.5.4), nous introduisons les hypothèses suivantes :

$$(2.5.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est une forme bilinéaire symétrique et} \\ (a) \text{ il existe } M > 0 \text{ telle que} \\ |a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X. \\ (b) \text{ il existe } m > 0 \text{ telle que} \\ a(v, v) \geq m \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X. \end{array} \right.$$

$$(2.5.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \zeta \in X, j(\zeta, \cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonctionnelle positive} \\ \text{homogène et sous-additive, c'est-à-dire} \\ (a) \quad j(\zeta, \lambda u) = \lambda j(\zeta, u) \quad \forall u \in X, \lambda \in \mathbb{R}_+; \\ (b) \quad j(\zeta, u + v) \leq j(\zeta, u) + j(\zeta, v) \quad \forall u, v \in X. \end{array} \right.$$

$$(2.5.7) \quad f \in W^{1,\infty}(0, T; X).$$

$$(2.5.8) \quad u_0 \in X.$$

$$(2.5.9) \quad a(u_0, v) + j(u_0, v) \geq (f(0), v)_X \quad \forall v \in X.$$

Gardant à l'esprit (2.5.6), il en résulte que pour tout $\zeta \in X$, La fonctionnelle $j(\zeta, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe. Par conséquent, cette fonctionnelle possède une dérivée directionnelle j'_2 donnée par :

$$(2.5.10) \quad j'_2(\zeta, u; v) = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{1}{\lambda} [j(\zeta, u + \lambda v) - j(\zeta, u)] \quad \forall \zeta, u, v \in X.$$

Nous considérons aussi les hypothèses supplémentaires suivantes sur la fonctionnelle j .

$$(2.5.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (u_n) \subset X \text{ avec } \|u_n\|_X \rightarrow \infty, \\ \text{toute suite } (t_n) \subset [0, 1] \text{ et pour tout } \bar{u} \in X \text{ on a} \\ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\|u_n\|_X^2} j'_2(t_n u_n, u_n - \bar{u}; -u_n) \right] < m. \end{array} \right.$$

$$(2.5.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (u_n) \subset X \text{ avec } \|u_n\|_X \rightarrow \infty, \\ \text{toute suite bornée } (\zeta_n) \subset X \text{ et tout } \bar{u} \in X \text{ on a} \\ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\|u_n\|_X^2} j'_2(\zeta_n, u_n - \bar{u}; -u_n) \right] < m. \end{array} \right.$$

$$(2.5.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (u_n) \subset X \text{ and } (\zeta_n) \subset X \text{ telles que} \\ u_n \rightharpoonup u \in X, \zeta_n \rightharpoonup \zeta \in X \text{ et pour tout } v \in X, \text{ on a} \\ \limsup_{n \rightarrow +\infty} [j(\zeta_n, v) - j(\zeta_n, u_n)] \leq j(\zeta, v) - j(\zeta, u). \end{array} \right.$$

$$(2.5.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } k_0 \in (0, m) \text{ telle que} \\ j(u, v - u) - j(v, v - u) \leq k_0 \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X. \end{array} \right.$$

$$(2.5.15) \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe deux fonctions } a_1 : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ et } a_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \text{qui mènent des sous-ensembles bornés de } X \text{ dans} \\ \text{des sous-ensembles bornés de } \mathbb{R} \text{ tels que} \\ |j(\zeta, u)| \leq a_1(\zeta)\|u\|_X^2 + a_2(\zeta) \quad \forall \zeta, u \in X, \\ \text{et } a_1(0_X) < m - k_0. \end{array} \right.$$

$$(2.5.16) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (\zeta_n) \subset X \text{ avec } \zeta_n \rightharpoonup \zeta \in X \\ \text{et pour toute suite bornée } (u_n) \subset X, \text{ on a} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} [j(\zeta_n, u_n) - j(\zeta, u_n)] = 0. \end{array} \right.$$

$$(2.5.17) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } s \in (0, T] \text{ et pour toute fonction} \\ u, v \in W^{1,\infty}(0, T; X) \text{ avec } u(0) = v(0), u(s) \neq v(s), \\ \text{l'inégalité ci-dessous vérifiée.} \\ \int_0^s [j(u(t), \dot{v}(t)) - j(u(t), \dot{u}(t)) + j(v(t), \dot{u}(t)) \\ - j(v(t), \dot{v}(t))] dt < \frac{m}{2} \|u(s) - v(s)\|_X^2. \end{array} \right.$$

$$(2.5.18) \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } \alpha \in (0, \frac{m}{2}) \text{ telle que pour tout } s \in (0, T] \text{ et toutes} \\ \text{fonctions } u, v \in W^{1,\infty}(0, T; X) \text{ avec } u(s) \neq v(s), \text{ on a} \\ \int_0^s [j(u(t), \dot{v}(t)) - j(u(t), \dot{u}(t)) + j(v(t), \dot{u}(t)) \\ - j(v(t), \dot{v}(t))] dt < \alpha \|u(s) - v(s)\|_X^2. \end{array} \right.$$

Pour l'étude du problème de l'évolution (2.5.3)–(2.5.4), nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.5.2. *Supposons que les conditions (2.5.5)–(2.5.9) sont vérifiées.*

Alors

(i) *Sous les hypothèses (2.5.11)–(2.5.16), le problème (2.5.3)–(2.5.4) possède au moins une solution $u \in W^{1,\infty}(0, T; X)$.*

(ii) *Sous les hypothèses (2.5.11)–(2.5.17)), le problème (2.5.3)–(2.5.4) possède une solution unique $u \in W^{1,\infty}(0, T; X)$.*

(iii) *Sous les hypothèses (2.5.11)–(2.5.16) et (2.5.18), le problème (2.5.3)–(2.5.4) possède une solution unique u telle que $(f, u_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction*

lipschitzienne de $W^{1,\infty}(0, T; X) \times X$ à valeurs dans $L^\infty(0, T; X)$.

Le corollaire suivant découle du théorème précédent et sera utilisé dans le premier chapitre de la deuxième partie de cette thèse.

Corollaire 2.5.3. *Soit $j : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une semi-norme continue. Nous supposons que les hypothèses (2.5.5), (2.5.7) et (2.5.8) sont vérifiées et que u_0 satisfait la condition*

$$(2.5.19) \quad a(u_0, v) + j(v) \geq (f(0), v)_X \quad \forall v \in X.$$

Alors, il existe une fonction unique $u \in W^{1,\infty}(0, T; X)$ telle que

$$(2.5.20) \quad \begin{aligned} a(u(t), v - \dot{u}(t))_{\mathcal{H}} + j(v) - j(\dot{u}(t)) &\geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \\ \forall v \in V, \text{ p.p.t } t \in (0, T), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

En outre, l'application $(f, u_0) \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne de $W^{1,\infty}(0, T; X) \times X$ à valeurs dans $L^\infty(0, T; X)$.

La démonstration du théorème (2.5.2) et du corollaire (2.5.3) qui peut être trouver dans [57] est obtenue en plusieurs étapes et il est basé sur des arguments des inégalités quasivariational elliptiques et une méthode de discrétisation en temps.

2.6 Compléments divers

Dans cette section, nous allons rappeler une version du théorème de *Cauchy-Lipschitz*, le théorème de point fixe et les lemmes de type *Gronwal*.

Théorème 2.6.1. *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow$*

X un opérateur défini p.p. sur $(0, T)$, qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X, \text{ p.p. } t \in (0, T); \\ \text{il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que } F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ telle que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t, x(t)) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Pour des détails sur ce théorème on peut renvoyer le lecteur par exemple à [81] p.60.

Théorème 2.6.2. (Théorème de point fixe de Banach) Soit K un sous-ensemble fermé et non-vidé de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in [0, 1)$ telle que

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_X \leq c \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda u = u$.

Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \rightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}) \quad m \geq 2,$$

nous avons la version suivante du théorème de point fixe

Théorème 2.6.3. Soit K un sous-ensemble fermé et non-vidé de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ et soit $\Lambda : K \rightarrow K$. Supposons que $\Lambda^m : K \rightarrow K$ est une contraction pour m un entier positif. Alors, Λ a un point fixe unique dans K .

A la fin, nous passons en revue les lemmes de *Gronwall* qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans ce paragraphe, le lecteur pourra consulter par exemple [45, 70]. Notons par ailleurs que dans certains paragraphes de ce mémoire, nous allons utiliser des versions "presque partout" de ces lemmes.

Lemme 2.6.4. *Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante, et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$.*

(1) Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s)ds.$$

Dans le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient :

Corollaire 2.6.5. *Soit $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Le Corollaire précédent est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. En supposant qu'il existe deux solutions, en

notant par ψ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ψ sous la forme

$$\psi(t) \leq \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de ψ .

Lemme 2.6.6. Soient $m, n \in C([0, T], \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0, n(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$ et $a \geq 0$. Soit également $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t)dt + \int_0^s n(t)\phi^2(t)dt \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors,

$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t)dt \right) e^{\int_0^s n(t)dt} \quad \forall s \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $n = 0$, le Lemme précédent devient :

Corollaire 2.6.7. Soit $m \in C([0, T], \mathbb{R})$ tel que $m(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Soit également $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t)dt \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors,

$$|\phi(s)| \leq a + \int_0^s m(t)dt \quad \forall s \in [0, T].$$

Deuxième partie

Problème électro-élastique

PARTIE II

PROBLÈMES

ELECTRO-ÉLASTIQUE

La deuxième partie de cette thèse est consacrée à l'étude de deux problèmes de contact quasi-statiques pour des corps piézoélectriques. Le premier problème est un problème de contact avec frottement et adhésion tel que les contraintes normales sur la partie Γ_3 sont données et le second est modélisé par une conditions de compliance normale avec adhésion et frottement. Dans les deux problèmes le comportement du matériau est électro-élastique. Pour ces deux problèmes le contact entre le corps et l'obstacle est modélisé par une variable de surface appelée champ d'adhésion dont l'évolution est décrite par une équation différentielle ordinaire du premier ordre. On établit pour le premier problème une formulation variationnelle et un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible et une formulation variationnelle et un résultat d'existence de la solution faible pour le deuxième problème, d'où on remarque que si les contraintes normales sur la partie Γ_3 ne sont pas données on perd l'unicité de la solution faible. Les démonstra-

tions sont basées sur des arguments d'inéquations variationnelles dépendant du temps, d'équations différentielles, ainsi que sur des arguments de point fixe.

CHAPITRE 3

PROBLÈME ÉLECTRO-ÉLASTIQUE AVEC FROTTEMENT ET ADHÉSION

Dans ce chapitre, nous étudions un problème quasistatique de contact avec frottement et adhésion entre un corps ayant une lois constitutive électro-élastique linéaire et une base rigide. Le frottement est modélisé par une version de la loi de Coulomb et l'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Notre objectif est de formuler le problème variationnel et de prouver l'existence et l'unicité de la solution en utilisant un résultat abstrait pour les inéquations quasivariationnelles elliptiques et le théorème de point fixe.

3.1 Formulation du problème

Nous nous plaçons dans le cadre physique que nous avons présenté dans la première partie de cette thèse (Figure 1.1). Nous considérons que le corps ayant une loi de comportement électro-élastique et que les contraintes normales sont connues sur la partie Γ_3 . Nous modélisons le contact par une version de la loi de Coulomb avec adhésion.

Avec ces considérations, le modèle électro-mécanique est le suivant :

Problème \mathcal{P}_1 . Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, un potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow$

\mathbb{R} , un champ des déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ d'adhésion $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$(3.1.1) \quad \sigma = \mathcal{F}\varepsilon(u) - \mathcal{E}^*E(\varphi) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(3.1.2) \quad D = \mathcal{B}E(\varphi) + \mathcal{E}\varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(3.1.3) \quad \text{Div}\sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(3.1.4) \quad \text{div}D = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(3.1.5) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T),$$

$$(3.1.6) \quad \sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$(3.1.7) \quad \sigma_\nu = S \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(3.1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| \leq \mu |S| \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| < \mu |S| \implies \dot{u}_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| = \mu |S| \implies \exists \lambda \geq 0 \\ \text{tel que } \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(3.1.9) \quad \dot{\beta}(t) = -\left(\gamma_\tau \beta(t) \|R_\tau(u_\tau(t))\|^2 - \varepsilon_a\right)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(3.1.10) \quad \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T),$$

$$(3.1.11) \quad D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T),$$

$$(3.1.12) \quad D \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(3.1.13) \quad u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(3.1.14) \quad \beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Dans ce qui suit, nous fournissons quelques commentaires sur les conditions (3.1.1)–(3.1.14). Les équations (3.1.1) et (3.1.2) représentent la loi de

comportement électro-élastique, les équations (3.1.3) et (3.1.4) sont les équations d'équilibre mécanique et électrique qui figurent dans (1.2.2) et (1.2.3). Les équations (3.1.5) et (3.1.6) sont respectivement, les conditions aux limites en déplacements et en tractions, tandis que les équations (3.1.10) et (3.1.11) sont les conditions aux limites électriques que nous avons définies dans (1.2.6) et (1.2.7). Notons que nous avons imposé la condition (3.1.12) pour des raisons physiques ; en effet, la fondation est supposée être isolatrice. La condition (3.1.7) indique que la contrainte normale σ_ν est prescrite sur la surface de contact et les conditions (3.1.8) sont les conditions de frottement avec adhésion qui figurent dans (1.6.12). L'équation (3.1.9) est l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion, déjà introduite par (1.7.1) avec la condition initiale (3.1.14), où β_0 est un champ d'adhésion donné. Finalement, u_0 est la condition initiale des déplacements.

3.2 Formulation variationnelle

Dans cette section, nous listons les hypothèses sur les données du problème de contact (\mathcal{P}_1). Supposons que l'opérateur d'élasticité \mathcal{F} , satisfait :

$$(3.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \mathcal{F} = (\mathcal{F}_{ijkl}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b)} \quad \mathcal{F}_{ijkl} = \mathcal{F}_{klij} = \mathcal{F}_{jikl} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(c)} \quad \text{Il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que } \mathcal{F}_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq m_{\mathcal{F}}\|\varepsilon\|^2 \\ \quad \quad \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Le tenseur piézoélectrique \mathcal{E} , satisfait :

$$(3.2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b)} \quad \mathcal{E}(x, \tau) = (e_{ijk}(x)\tau_{jk}) \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(c)} \quad e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right.$$

Le tenseur du permittivité électrique \mathcal{B} , satisfait

$$(3.2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b)} \quad \mathcal{B}(x, E) = (b_{ij}(x)E_j) \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(c)} \quad b_{ij} = b_{ji} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(d)} \quad \text{Il existe } m_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \quad b_{ij}(x)E_iE_j \geq m_{\mathcal{B}}\|E\|^2 \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Nous supposons aussi que les forces volumique f_0 et les tractions surfacique f_2 satisfont les régularités

$$(3.2.4) \quad f_0 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^d), \quad f_2 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_2)^d),$$

la contrainte normale donnée satisfait

$$(3.2.5) \quad S \in L^\infty(\Gamma_3),$$

et les charges électriques volumiques q_0 et surfaciques q_2 satisfont

$$(3.2.6) \quad q_0 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_b)).$$

Nous supposons également que

$$(3.2.7) \quad D \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \quad \forall t \in [0, T].$$

Le théorème de représentation de *Riesz* nous permet de définir les fonctions $f : [0, T] \rightarrow V$ et $q : [0, T] \rightarrow W$ comme suit :

$$(3.2.8) \quad (f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot \nu \, da + \int_{\Gamma_3} S \nu \, da,$$

$$(3.2.9) \quad (q(t), \psi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \psi \, dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \psi \, da,$$

pour tout $v \in V$, $\psi \in W$ et $t \in [0, T]$. Notons que les conditions (3.2.4)–(3.2.6) implique que

$$(3.2.10) \quad f \in W^{1,\infty}(0, T; V),$$

$$(3.2.11) \quad q \in W^{1,\infty}(0, T; W).$$

Les coefficients d'adhésion γ_ν , γ_τ et ϵ_a satisfont les conditions

$$(3.2.12) \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \epsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \epsilon_a \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3,$$

le coefficient de frottement μ satisfait

$$(3.2.13) \quad \mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

et la condition initiale d'adhésion β_0 satisfait

$$(3.2.14) \quad \beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

Ensuite, nous définissons la fonctionnelle d'adhésion $j_{ad} : L^2(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$(3.2.15) \quad j_{ad}(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) \cdot v_\tau \, da,$$

et la fonctionnelle de frottement $j_{fr} : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$(3.2.16) \quad j_{fr}(v) = \int_{\Gamma_3} \mu |S| \|v_\tau\| \, da,$$

pour tout $u, v \in V$ et $t \in [0, T]$. Compte tenu des hypothèses (3.2.4)–(3.2.6), (3.2.12), (3.2.13) et la définition de l’opérateur R_τ , il resulte que les intégrales figurant dans (3.2.8), (3.2.9), (3.2.15) et (3.2.16) sont bien définies.

Finalement, nous considérons pour les données initiales les hypothèses suivantes :

$$(3.2.17) \quad u_0 \in V,$$

$$(3.2.18) \quad (\mathcal{F}\varepsilon(u_0), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_0, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta_0, u_0, v) \\ + j_{fr}(v) \geq (f(0), v)_V \quad \forall v \in V,$$

$$(3.2.19) \quad j_{ad}(\beta_0, u_0, v) = 0 \quad \forall v \in V,$$

$$(3.2.20) \quad (\mathcal{B}\nabla\varphi_0, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = (\mathcal{E}\varepsilon(u_0), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} + (q(0), \psi)_W \quad \forall \psi \in W.$$

Retournons maintenant à établir une formulation variationnelle du problème (\mathcal{P}_1) . En utilisant la formule de *Green* (2.2.3) combinée avec les conditions (3.1.3), (3.1.5)–(3.1.7) et la décomposition du tenseur de *Cauchy* (1.1.3) on obtient

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v \, da \\ + \int_{\Gamma_3} S v_\nu \, da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot v_\tau \, da \quad \forall v \in V.$$

Gardant à l’esprit (3.2.8), on peut écrire l’inégalité précédente comme suit :

$$(3.2.21) \quad (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} = (f(t), v)_V + \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))) \cdot v_\tau \, da \\ - \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t)) \cdot v_\tau \, da \quad \forall v \in V.$$

Maintenant, en utilisant (3.1.8) on trouve

$$(3.2.22) \quad \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))) \cdot v_\tau da \geq - \int_{\Gamma_3} \mu |S| \|v_\tau\| da.$$

Alors, de (3.2.15), (3.2.16), (3.2.21) et (3.2.22) on obtient

$$(3.2.23) \quad (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta, u(t), v) + j_{fr}(v) \geq (f(t), v)_V \quad \forall v \in V.$$

De plus, notons que (3.1.8) et (3.2.16) implique que

$$(3.2.24) \quad \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))) \cdot \dot{u}_\tau da = -j_{fr}(\dot{u}(t)).$$

Donc, en prenant $v = \dot{u}(t)$ dans (3.2.21) et en utilisant (3.2.15), (3.2.16) et (3.2.24), nous déduisons que

$$(3.2.25) \quad (\sigma(t), \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta, u(t), \dot{u}(t)) + j_{fr}(\dot{u}(t)) = (f(t), \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V.$$

Combinons cette dernière égalité avec l'inégalité (3.2.23) pour obtenir

$$(3.2.26) \quad \begin{aligned} & (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta, u(t), v - \dot{u}(t)) \\ & + j_{fr}(v) - j_{fr}(\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \\ & \forall v \in V \text{ a.e. } t \in [0, T], \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la formule de *Green* (2.2.16) pour les inconnues électriques du problème ainsi que les conditions (3.1.4), (3.1.10), (3.1.11) et (3.1.12) nous obtenons

$$(D(t), \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} + \int_{\Omega} q_0(t) \psi dx = \int_{\Gamma_b} \psi q_2 da \quad \forall \psi \in W,$$

gardant à l'esprit (3.2.9) on obtient

$$(3.2.27) \quad (D(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} + (q(t), \psi)_W = 0.$$

Combinons cette dernière égalité avec (1.1.7) et (3.1.2) pour obtenir

$$(3.2.28) \quad (\mathcal{B}\nabla\varphi(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = (q(t), \psi)_W \\ \forall \psi \in W, \quad \forall t \in [0, T],$$

Finalement, en utilisant (3.2.26) (3.1.1) et (3.2.28) nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème électro-élastique \mathcal{P}_1

Problème \mathcal{P}_1^V . *Trouver un champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, un potentiel électrique $\varphi : [0, T] \rightarrow W$ et un champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que*

$$(3.2.29) \quad (\mathcal{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + \\ + j_{ad}(\beta, u(t), v - \dot{u}(t)) + j_{fr}(v) - j_{fr}(\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \\ \forall v \in V \text{ a.e. } t \in [0, T],$$

$$(3.2.30) \quad (\mathcal{B}\nabla\varphi(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = (q(t), \psi)_W \\ \forall \psi \in W \text{ a.e. } t \in [0, T],$$

$$(3.2.31) \quad \dot{\beta}(t) = - \left(\gamma_\tau \beta(t) \| R_\tau(u_\tau(t)) \|^2 - \varepsilon_a \right)_+ \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(3.2.32) \quad u(0) = u_0,$$

$$(3.2.33) \quad \beta(0) = \beta_0.$$

Ci-dessous dans cette section, β_1 et β_2 dénotent les éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tel que $0 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 1$ p.p. sur Γ_3 , u_1, u_2, v_1, v_2 , u et v représentent des éléments de V et c est une constante positive générique qui peut dépendre de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \gamma_\tau$ et L , dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la raison de simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite des diverses fonctions sur $x \in \Omega \cup \Gamma_3$.

Finalement, en utilisant (2.2.8), (3.2.15), et les inégalités $\|R_\tau(u_\tau)\| \leq L, |\beta_1| \leq 1, |\beta_2| \leq 1$, nous obtenons

$$(3.2.34) \quad |j_{ad}(\beta_1, u_1, \omega) - j_{ad}(\beta_2, u_2, \omega)| \leq c(\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|u_1 - u_2\|_V)\|\omega\|_V.$$

3.3 Résultat d'existence et d'unicité

Dans ce qui suit, nous présentons notre résultat principal qui énonce l'unique solvabilité du problème (\mathcal{P}_1^V) .

Théorème 3.3.1. *Supposons que (3.2.1)-(3.2.3), (3.2.4)-(3.2.7), (3.2.12)-(3.2.14) et (3.2.17)-(3.2.20) sont vérifiées. Alors le problème (\mathcal{P}_1^V) admet une solution unique (u, φ, β) qui satisfait :*

$$(3.3.1) \quad u \in W^{1,\infty}(0, T; V),$$

$$(3.3.2) \quad \varphi \in W^{1,\infty}(0, T; W).$$

$$(3.3.3) \quad \beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}.$$

De plus, la fonction $(f, u_0) \rightarrow u$ est une fonction lipschitzienne de $W^{1,\infty}(0, T; V) \times V$ à valeurs dans $L^\infty(0, T; V)$.

Un "quintuple" des fonctions $(u, \sigma, \varphi, D, \beta)$ qui satisfait (3.1.1), (3.1.2), (3.2.29)–(3.2.33) est appelée solution faible du Problème (\mathcal{P}_1) . Nous concluons par le Théorème 3.3.1 que, sous les hypothèses (3.2.1)-(3.2.3), (3.2.4)-(3.2.7),

(3.2.12)-(3.2.14) et (3.2.17)-(3.2.20), le problème (\mathcal{P}_1) possède une solution faible unique. Pour préciser la régularité de la solution faible, nous notons que les relations constitutives (3.1.1) et (3.1.2), les hypothèses (3.2.1)-(3.2.3) et les régularités (3.3.1)-(3.3.2) montrent que $\sigma \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathcal{H})$, $D \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega)^d)$. Mettant $v = \dot{u}(t) \pm \xi$, où $\xi \in C_0^\infty(\Omega)^d$ dans (3.2.26) et $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ dans (3.2.27) et en utilisant les notations (3.2.8), (3.2.9), (3.2.15), (3.2.16) on obtient

$$\text{Div}\sigma(t) + f_0(t) = 0, \quad \text{div}D(t) = q_0(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Maintenant, de (3.2.4) et (3.2.6) il vient que $\text{Div}\sigma \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^d)$ et $\text{div}D \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$, ce qui montre que

$$(3.3.4) \quad \sigma \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{H}_1),$$

$$(3.3.5) \quad D \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{W}_1).$$

Nous concluons que la solution faible $(u, \sigma, \varphi, D, \beta)$ du problème piézoélectrique de contact avec adhésion (\mathcal{P}_1) , possède la régularité (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4) et (3.3.5).

La preuve du théorème 3.3.1 est effectuée en plusieurs étapes et est basée sur le résultat abstrait donné par le corollaire (2.5.3).

Retournons maintenant à la démonstration du théorème 3.3.1. A cette fin, nous supposons dans la suite que (3.2.1)-(3.2.3), (3.2.4)-(3.2.7), (3.2.12)-(3.2.14) et (3.2.17)-(3.2.20) sont satisfaites; ci-après, c est une constante positive générique qui peut dépendre de Ω , Γ_1 , Γ_3 , \mathcal{F} , γ_τ et L dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite des diverses fonctions de $x \in \Omega \cup \Gamma_3$.

Comme dans [59], le théorème de représentation de *Riesz* nous permet

de définir les opérateurs $\mathcal{G} : W \rightarrow W$ et $\mathcal{R} : V \rightarrow W$, respectivement, par

$$(3.3.6) \quad (\mathcal{G}\varphi(t), \psi)_W = (\mathcal{B}\nabla\varphi(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall \varphi, \psi \in W,$$

$$(3.3.7) \quad (\mathcal{R}v, \varphi)_W = (\mathcal{E}\varepsilon(v), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall \varphi \in W, v \in V.$$

On peut montrer que \mathcal{G} est un opérateur linéaire, symétrique et positivement défini. Donc, \mathcal{G} est inversible et continu sur W . On peut aussi montrer que \mathcal{R} est linéaire et continu sur V . Par conséquent, \mathcal{R} admet un opérateur adjoint $\mathcal{R}^* : W \rightarrow V$. La relation (1.3.2) nous permet de écrire

$$(3.3.8) \quad (\mathcal{R}^*\varphi, v)_V = (\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall \varphi \in W, v \in V.$$

Combinons l'égalité (3.2.30) avec les égalités (3.3.6)-(3.3.7) pour obtenir

$$(\mathcal{G}\varphi(t), \psi)_W = (\mathcal{R}u(t), \psi)_W + (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W,$$

et par conséquent

$$\mathcal{G}\varphi(t) = \mathcal{R}u(t) + q(t).$$

Puisque \mathcal{G} est inversible on obtient

$$(3.3.9) \quad \varphi(t) = \mathcal{G}^{-1}\mathcal{R}u(t) + \mathcal{G}^{-1}q(t).$$

Mettant (3.3.8) et (3.3.9) dans (3.2.29) on trouve

$$(3.3.10) \quad \begin{aligned} & (\mathcal{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{R}^*\mathcal{G}^{-1}\mathcal{R}u(t), v - \dot{u}(t))_V + \\ & + j_{ad}(\beta, u(t), v - \dot{u}(t)) + j_{fr}(v) - j_{fr}(\dot{u}(t)) \geq \\ & (f(t) - \mathcal{R}^*\mathcal{G}^{-1}q(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V, \text{ a.e. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Soit maintenant l'opérateur $L : V \rightarrow V$ défini par

$$(3.3.11) \quad L(v) = \mathcal{R}^* \mathcal{G}^{-1} \mathcal{R}(v), \quad \forall v \in V.$$

En utilisant les propriétés des opérateurs \mathcal{G} , \mathcal{R} et \mathcal{R}^* , nous déduisons que L est linéaire, symétrique et positivement défini sur V . De plus, on a

$$\begin{aligned} (Lu, v)_V &= (\mathcal{R}^* \mathcal{G}^{-1} \mathcal{R}u, v)_V \\ &= (\mathcal{G}^{-1} \mathcal{R}u, \mathcal{R}v)_W \\ &= (\mathcal{R}u, \mathcal{G}^{-1} \mathcal{R}v)_W \\ &= (u, \mathcal{R}^* \mathcal{G}^{-1} \mathcal{R}v)_V \\ &= (u, Lv)_V \quad \forall u, v \in V \\ (Lv, v)_V &= (\mathcal{R}^* \mathcal{G}^{-1} \mathcal{R}v, v)_V, \end{aligned}$$

$$(3.3.12) \quad (Lv, v)_V = (\mathcal{G}^{-1} \mathcal{R}v, \mathcal{R}v)_W \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Maintenant, nous définissons la forme bilinéaire $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit

$$(3.3.13) \quad a(u, v) = (\mathcal{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Lu, v)_V \quad \forall u, v \in V.$$

En utilisant (3.2.1), (2.2.6) et (3.3.12), on peut montrer que la forme bilinéaire a est continue et coercive sur V . De plus, nous avons :

$$(3.3.14) \quad |a(u, v)| \leq (M + \|L\|) \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V,$$

$$(3.3.15) \quad a(v, v) \geq m \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V,$$

De la symétrie de \mathcal{F} et L nous déduisons la symétrie de la forme bilinéaire a .

Soit la fonction fonction $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V$ définie par

$$(3.3.16) \quad \mathbf{f}(t) = f(t) - \mathcal{R}^* \mathcal{G}^{-1} q(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Puisque $\mathcal{R}^* \mathcal{G}^{-1}$ est un opérateur linéaire et continu, en utilisant (3.2.10) et (3.2.11) nous obtenons

$$(3.3.17) \quad \mathbf{f} \in W^{1, \infty}(0, T, V).$$

En se basant sur les relations (3.3.10), (3.3.13), (3.3.16), (3.2.31), (3.2.32) et (3.2.33) on peut considérer le problème variationnelle suivant :

Problème \mathcal{P}_1^{V1} . *Trouver un champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, et un champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que*

$$(3.3.18) \quad \begin{aligned} & a(u(t), v - \dot{u}(t))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta, u(t), v - \dot{u}(t)) \\ & + j_{fr}(v) - j_{fr}(\dot{u}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), v - \dot{u}(t))_V \\ & \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

$$(3.3.19) \quad \begin{aligned} & \dot{\beta}(t) = -(\gamma_\tau \beta(t) \| R_\tau(u_\tau(t)) \|^2 - \varepsilon_a)_+ \\ & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \end{aligned}$$

$$(3.3.20) \quad u(0) = u_0, \quad \beta(0) = \beta_0.$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.3.2. *Supposons que (3.2.1)-(3.2.3), (3.2.4)-(3.2.7), (3.2.12)-(3.2.14) et (3.2.17)-(3.2.20) sont vérifiées. Alors, le problème (\mathcal{P}_1^{V1}) possède une solution unique (u, β) qui satisfait :*

$$(3.3.21) \quad u \in W^{1,\infty}(0, T; V),$$

$$(3.3.22) \quad \beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}.$$

De plus, la fonction $(f, u_0) \rightarrow u$ est une fonction Lipschitzienne de $W^{1,\infty}(0, T; V) \times V$ à valeurs dans $L^\infty(0, T; V)$.

Nous supposons dans ce qui suit que les conditions du Théorème (3.3.2) sont vérifiées et soit l'ensemble

$$(3.3.23) \quad \mathcal{Z} = \left\{ \eta \in W^{1,\infty}(0, T; V) / \eta(0) = 0_V \right\}.$$

Soit $\eta \in \mathcal{Z}$ donnée et nous considérons le problème variationnelle intermédiaire suivant :

Problème $\mathcal{P}_1^{V^2}$. Trouver un champ des déplacements $u_\eta : [0T] \rightarrow V$ tels que

$$(3.3.24) \quad \begin{aligned} a(u_\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t)) + j_{fr}(v) - j_{fr}(\dot{u}_\eta(t)) &\geq (\mathbf{f}_\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t))_V \\ \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

$$(3.3.25) \quad u_\eta(0) = u_0,$$

$$(3.3.26) \quad \mathbf{f}_\eta(t) = \mathbf{f}(t) - \eta(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Remarque 3.3.3. De (3.3.17) et la régularité de η nous déduisons que

$$(3.3.27) \quad \mathbf{f}_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, V).$$

Remarque 3.3.4. De (3.2.18) et (3.2.20), nous déduisons que (2.5.19) est vérifiée.

Théorème 3.3.5. Supposons que (3.2.1)-(3.2.3), (3.2.4)-(3.2.7), (3.2.12)-(3.2.14) et (3.2.17)-(3.2.20) sont vérifiées. Alors, le problème $\mathcal{P}_1^{V^2}$, possède une solution unique $u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, V)$. De plus, la fonction $(f, u_0) \rightarrow u$ est une fonction lipschitzienne de $W^{1,\infty}(0, T; V) \times V$ à valeurs dans $L^\infty(0, T; V)$.

Nous allons utiliser le corollaire (2.5.3) dans le cas où $X = V$, pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution du problème ($\mathcal{P}_1^{V^2}$).

On a vu ci-dessus que la fonctionnelle j_{fr} , définie par (3.2.16) est bien définie. De plus, nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.3.6. La fonctionnelle $j_{fr} : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ est un semi-norme continue.

Démonstration. En utilisant (3.2.16) on obtient :

$$\begin{aligned}
 1) \quad j_{fr}(v) &\geq 0 \quad \forall v \in V. \\
 2) \quad j_{fr}(\alpha v) &= \int_{\Gamma_3} \mu |S| \|\alpha v_\tau\| da \\
 &= |\alpha| \int_{\Gamma_3} \mu |S| \|v_\tau\| da \\
 &= |\alpha| j_{fr}(v) \quad \forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}. \\
 3) \quad j_{fr}(u + v) &= \int_{\Gamma_3} \mu |S| \|u_\tau + v_\tau\| da \\
 &\leq \int_{\Gamma_3} \mu |S| \|u_\tau\| da + \int_{\Gamma_3} \mu |S| \|v_\tau\| da \\
 &= j_{fr}(u) + j_{fr}(v) \quad \forall u, v \in V.
 \end{aligned}$$

Alors, j_{fr} est un semi-norme sur V .

Maintenant, soit la suites $(v_n) \subset V$, telle que

$$v_n \rightarrow v \text{ dans } V,$$

d'une part on a

$$\|v_n - v\|_V \rightarrow 0.$$

D'autre part on a

$$|j_{fr}(v_n) - j_{fr}(v)| \leq c_0 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} |S|_{L^\infty(\Gamma_3) \text{ meas}(\Gamma_3)} \|v_n - v\|_V,$$

et puisque $\|v_n - v\|_V \rightarrow 0$ on obtient :

$$|j_{fr}(v_n) - j_{fr}(v)| \rightarrow 0,$$

ce qui montre que j_{fr} est une semi-norme continue sur V . ■

Démonstration du Théorème (3.3.5). On a vu ci-dessus que $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique. Maintenant, en utilisant (3.3.14), (3.3.15), (3.3.26), (3.2.17), la remarque (3.3.4) et le lemme (3.3.6) ainsi que le Corollaire (2.5.3), il vient que le problème $\mathcal{P}_1^{V^2}$ possède une solution unique u_η de régularité $u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, V)$. De plus, la fonction $(f, u_0) \rightarrow u$ est une fonction lipschitzienne de $W^{1,\infty}(0, T; V) \times V$ à valeurs dans $L^\infty(0, T; V)$. ■

Dans l'étape suivante, nous utilisons le champ de déplacement u_η obtenu dans le théorème (3.3.5), et nous considérons le problème de Cauchy suivant :

Problème $\mathcal{P}_1^{\beta_\eta}$. Trouver un champ d'adhésion $\beta_\eta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que

$$(3.3.28) \quad \begin{aligned} \dot{\beta}_\eta(t) &= -(\gamma_\tau \beta_\eta(t) \|R_\tau(u_{\eta\tau}(t))\|^2 - \varepsilon_a)_+ \\ &\text{a.e. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

$$(3.3.29) \quad \beta_\eta(0) = \beta_0.$$

On a le résultat suivant :

Lemme 3.3.7. Le problème \mathcal{P}^{β_η} admet une solution unique β_η qui satisfait

$$\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}.$$

Démonstration. Nous considérons l'application $F : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ défini par

$$F(t, \beta_\eta) = -(\gamma_\tau \beta_\eta(t) \| R_\tau(u_{\eta\tau}(t)) \|^2 - \varepsilon_a)_+.$$

Soit $t \in [0, T]$ et $\beta_\eta \in L^2(\Gamma_3)$. Il s'ensuit d'après les propriétés de l'opérateur de troncation R_τ que F est de Lipschitz par rapport à la seconde variable, uniformément en temps. De plus, pour tout $\beta_\eta \in L^2(\Gamma_3)$ l'application $t \mapsto F(t, \beta_\eta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$. Moyennant maintenant le Théorème (2.6.1), nous obtenons l'existence d'une fonction unique $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ qui résout le problème $\mathcal{P}_1^{\beta_\eta}$. Notons que la restriction $0 \leq \beta_\eta \leq 1$ est incluse implicitement dans le problème variationnel \mathcal{P}_1^{V1} . En effet, les conditions (3.3.28) et (3.3.29) nous garantissent que $\beta_\eta(t) \leq \beta_0$ et donc l'hypothèse (3.2.14) montre que $\beta_\eta(t) \leq 1$ pour $t \geq 0$, p.p. sur Γ_3 . D'un autre côté, si $\beta_\eta(t_0) = 0$ à $t = t_0$, alors il s'ensuit de (3.3.28) et (3.3.29) que $\dot{\beta}_\eta(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ et donc, $\beta_\eta(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. sur Γ_3 . Nous concluons que $0 \leq \beta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. sur Γ_3 . Il résulte de la définition de l'ensemble \mathcal{Q} (voir (2.2.9)), que $\beta \in \mathcal{Q}$, ce qui conclut la preuve du lemme (3.3.7). ■

Maintenant, soit $\eta \in \mathcal{Z}$ donnée et u_η, β_η la solution du problème (\mathcal{P}_1^{V2}) et $(\mathcal{P}_1^{\beta_\eta})$, respectivement. Le théorème de représentation *Riesz* nous permet de définir la fonction $\Lambda\eta : [0, T] \rightarrow V$ par

$$(3.3.30) \quad (\Lambda\eta(t), \omega)_V = j_{ad}(\beta_\eta(t), u_\eta(t), \omega).$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.3.8. *Pour tout $\eta \in \mathcal{Z}$ la fonction $\Lambda\eta : [0, T] \rightarrow V$ appartient à \mathcal{Z} . De plus, il existe un unique élément $\eta^* \in \mathcal{Z}$ tel que*

$$(3.3.31) \quad \Lambda\eta^* = \eta^*.$$

Démonstration. Soit $\eta \in \mathcal{Z}$ et $t_1, t_2 \in [0, T]$. D'une part, en utilisant (3.2.15), (3.2.19) et (3.3.30) on obtient

$$(\Lambda\eta(0), \omega)_V = j_{ad}(\beta_0, u_0, \omega) = 0 \quad \forall \omega \in V,$$

ce qui montre que

$$(3.3.32) \quad \Lambda\eta(0) = 0_V.$$

D'autre part, en utilisant (3.3.30) nous obtenons

$$|(\Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2), \omega)_V| = |j_{ad}(\beta_\eta(t_1), u_\eta(t_1), \omega) - j_{ad}(\beta_\eta(t_2), u_\eta(t_2), \omega)|.$$

Maintenant, à l'aide de (3.2.15), (3.2.16) et (3.2.34) nous obtenons

$$(3.3.33) \quad |(\Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2), \omega)_V| \leq c(\|\beta_\eta(t_1) - \beta_\eta(t_2)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_V) \|\omega\|_V.$$

Mettons $\omega = \Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2)$ dans (3.3.33) pour trouver

$$(3.3.34) \quad \|\Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2)\|_V \leq c(\|\beta_\eta(t_1) - \beta_\eta(t_2)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_V).$$

Par conséquent, puisque $u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ et $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}$ nous déduisons de (3.3.34) que

$$(3.3.35) \quad \Lambda\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V).$$

De (3.3.32) et (3.3.35) on conclut que $\Lambda\eta \in \mathcal{Z}$

Soit maintenant $\eta_1, \eta_2 \in W^{1,\infty}(0, T; V)$, et soit $\beta_{\eta_1} = \beta_1, \beta_{\eta_2} = \beta_2, u_{\eta_1} = u_1$ et $u_{\eta_2} = u_2$, pour tout $t \in [0, T]$. Nous intégrons (3.3.28) avec la condition initiale

(3.3.29) pour obtenir

$$\beta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t (\gamma_\tau \beta_i(s) \| R_\tau(u_{i\tau}(s)) \|^2 - \varepsilon_a)_+ ds$$

avec $i = 1, 2$.

De l'égalité précédente nous trouvons

$$\begin{aligned} & \| \beta_1(t) - \beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \\ & + c \int_0^t \| \beta_2(s) \| R_\tau(u_{2\tau}(s)) \|^2 - \beta_1(s) \| R_\tau(u_{1\tau}(s)) \|^2 \|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de l'opérateur R_τ donnés par (1.6.9), et en écrivant

$\beta_1 = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2$, on obtient

$$\begin{aligned} & \| \beta_1(t) - \beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| \beta_1(s) - \beta_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \\ & + c \int_0^t \| u_1(s) - u_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds. \end{aligned}$$

Moyennant une version des lemmes de Gronwall (Lemmes (2.6.5)), il s'ensuit que

$$\| \beta_1(t) - \beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| u_1(s) - u_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds.$$

Ensuite, nous utilisons (2.2.8) pour trouver

$$(3.3.36) \quad \| \beta_1(t) - \beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| u_1(s) - u_2(s) \|_V ds.$$

Par ailleurs, en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés pour la démonstration de l'inégalité (3.3.34) nous obtenons

$$(3.3.37) \quad \| \Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t) \|_V \leq c (\| \beta_1(t) - \beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} + \| u_1(t) - u_2(t) \|_V).$$

Combinons l'inégalité (3.3.36) avec (3.3.37), pour obtenir

$$\| \Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t) \|_V \leq c \| u_1(t) - u_2(t) \|_V + c \int_0^t \| u_1(s) - u_2(s) \|_V ds.$$

En appliquant l'inégalité

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

il vient que

$$(3.3.38) \quad \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V^2 \leq c\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds.$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité (3.3.24) pour $u = u_1$ et $u = u_2$, on obtient

$$\begin{aligned} a(u_1, v - \dot{u}_1) + j_{fr}(v) - j_{fr}(\dot{u}_1) &\geq (\mathbf{f} - \eta_1, v - \dot{u}_1)_V, \\ a(u_2, v - \dot{u}_2) + j_{fr}(v) - j_{fr}(\dot{u}_2) &\geq (\mathbf{f} - \eta_2, v - \dot{u}_2)_V, \end{aligned}$$

pour tout $v \in V$. Choisissons $v = \dot{u}_2$ dans la première inégalité et $v = \dot{u}_1$ dans la deuxième inégalité ; par addition des résultats obtenus nous obtenons

$$a(u_1 - u_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) \leq -(\eta_1 - \eta_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2)_V,$$

d'où nous déduisons que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq -(\eta_1 - \eta_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2)_V,$$

Soit $t \in [0, T]$ fixée. Nous Intégrons l'inégalité précédente de 0 à t et nous utilisons (3.3.25) pour trouver

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a(u_1(t) - u_2(t), u_1(t) - u_2(t)) &\leq -(\eta_1(t) - \eta_2(t), u_1(t) - u_2(t))_V \\ &\quad + \int_0^t (\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s), u_1(s) - u_2(s))_V ds \end{aligned}$$

Il s'ensuit maintenant de (3.3.15) que

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 &\leq \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V \|u_1(t) - u_2(t)\|_V \\ &\quad + \int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_V \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité

$$ab \leq \frac{a^2}{2\delta} + 2\delta b^2 \quad \forall a, b, \delta > 0,$$

avec un choix convenable de δ , nous trouvons

(3.3.39)

$$\|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V^2 \leq c \left(\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \right).$$

Maintenant, puisque

$$\eta_1(t) - \eta_2(t) = \int_0^t (\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)) ds,$$

nous déduisons que

$$\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V^2 \leq c \int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_V^2 ds.$$

En substituant cette inégalité dans (3.3.39), nous obtenons

$$\|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V^2 \leq c \left(\int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \right).$$

Appliquons maintenant une version des lemmes de Gronwall pour avoir

$$(3.3.40) \quad \|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V^2 \leq c \int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_V^2 ds,$$

ce qui implique que

$$(3.3.41) \quad \int_0^t \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_V^2 ds \leq c \int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_V^2 ds.$$

Combinons l'inégalité (3.3.38) avec les inégalités (3.3.40) et (3.3.41) pour obtenir

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V^2 \leq c \int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_V^2 ds$$

Finalement, la réitération de cette dernière inégalité n fois nous permette d'écrire

$$\|\Lambda^m \eta_1(t) - \Lambda^m \eta_2(t)\|_V^2 \leq c^m \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{m-1}} \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_V^2 ds_m \dots ds_1,$$

où Λ^m désigne le $m^{\text{ième}}$ puissance de l'opérateur Λ . La dernière inégalité implique que

$$\|\Lambda^m \eta_1 - \Lambda^m \eta_2\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)}^2 \leq \frac{c^m T^m}{m!} \|\eta_1 - \eta_2\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)}^2,$$

d'où nous déduisons que

$$\|\Lambda^m \eta_1 - \Lambda^m \eta_2\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)} \leq \left(\frac{c^m T^m}{m!} \right)^{\frac{1}{2}} \|\eta_1 - \eta_2\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)},$$

Maintenant, puisque $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c^m T^m}{m!} = 0$, l'inégalité précédente implique que pour m suffisamment grand l'opérateur Λ^m est une contraction dans l'espace de Banach \mathcal{Z} (puisque \mathcal{Z} est sous espace fermé de l'espace de Banach $W^{1,\infty}(0, T; V)$). Donc, il possède un point fixe unique $\eta^* \in \mathcal{Z}$, c-à-d $\Lambda^m \eta^* = \eta^*$ et par conséquent η^* est l'unique point fixe l'opérateur Λ , c-à-d $\Lambda \eta^* = \eta^*$, ce qui termine la preuve du lemme (3.3.8). ■

Démonstration du Théorème 3.3.2. Soit $\eta^* \in \mathcal{Z}$ le point fixe de l'opérateur Λ et soient u, β les fonctions qu'on a obtenue dans le théorème (3.3.5) et le lemme (3.3.7), respectivement, pour $\eta = \eta^*$, c-à-d $u = u_{\eta^*}$, $\beta = \beta_{\eta^*}$.

Existence. Il est claire que le couple (u, β) est une solution du problème \mathcal{P}_1^{V1} qui satisfait les régularités.(3.3.21)-(3.3.22) et la fonction $(f, u_0) \rightarrow u$ est une fonction *Lipschitzienne* de $W^{1,\infty}(0, T; V) \times V$ à valeurs dans $L^\infty(0, T; V)$, d'après (3.3.31), (3.3.30), (3.3.24)–(3.3.26), le théorème (3.3.5), (3.3.28)–(3.3.29) et le lemme (3.3.7).

Unicité. L'unicité de la solution resulte de l'unicité du point fixe de l'opé-

rateur Λ et la partie de d'unicité dans le théorème (3.3.5) et le lemme (3.3.7).

■

Démonstration du Théorème 3.3.1. Soit $(u, \beta) \in W^{1,\infty}(0, T; V) \times (W^{1,\infty}(0, T, L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q})$ la solution du problème \mathcal{P}_1^{V1} et φ définie par (3.3.9). Il résulte des relations (3.3.18)–(3.3.20), (3.3.16), (3.3.13), (3.3.11), (3.3.7) (3.3.6) que (u, β, φ) est une solution unique du problème \mathcal{P}_1^V qui satisfait les régularités (3.3.1)–(3.3.3). ■

CHAPITRE 4

PROBLÈME ÉLECTRO-ÉLASTIQUE AVEC COMPLIANCE NORMALE, FROTTEMENT ET ADHÉSION

Dans ce chapitre on considère un modèle mathématique qui décrit le processus quasistatique d'un contact avec frottement et adhésion entre un corps ayant une loi de comportement électro-élastique linéaire et une base déformable. Le contact est décrit par une condition de compliance normale et le frottement est modélisé par une version de la loi de *Coulomb*. En se basant sur la formule de Green, nous dérivons une formulation variationnelle pour le problème mécanique. Ensuite, nous fournissons l'existence d'une solution faible du problème. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de la publication [24].

4.1 Formulation du problème

On prend le même cadre physique qu'on a vu dans le premier chapitre (voir figur1.1). La loi de comportement du corps est considérée électro-élastique. Le frottement est modélisé par une version de loi de Coulomb avec adhésion et le contact est décrit par une condition de compliance normale sur la partie Γ_3 . Sous ces considérations, le problème électro-mécanique peut

se formuler de la manière suivante :

Problème \mathcal{P}_2 . Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, un potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ des déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ d'adhésion $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$(4.1.1) \quad \sigma = \mathcal{F}\varepsilon(u) - \mathcal{E}^*E(\varphi) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(4.1.2) \quad D = \mathcal{B}E(\varphi) + \mathcal{E}\varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(4.1.3) \quad \text{Div}\sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(4.1.4) \quad \text{div}D = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(4.1.5) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T),$$

$$(4.1.6) \quad \sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$(4.1.7) \quad -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(4.1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)\| \leq \mu p_\nu(u_\nu) \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)\| < \mu p_\nu(u_\nu) \implies \dot{u}_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)\| = \mu p_\nu(u_\nu) \implies \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau) = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(4.1.9) \quad \dot{\beta}(t) = -[\beta(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau(t))\|^2) - \varepsilon_a]_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(4.1.10) \quad \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T),$$

$$(4.1.11) \quad D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T),$$

$$(4.1.12) \quad D \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(4.1.13) \quad u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(4.1.14) \quad \beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Dans ce qui suit, nous fournissons quelques commentaires sur les conditions (4.1.1)–(4.1.14). Les équations (4.1.1) et (4.1.2) représentent la loi de comportement électro-élastique, les équations (4.1.3) et (4.1.4) sont les équations d'équilibre mécanique et électrique qui figurent dans (1.2.2) et (1.2.3). Les équations (4.1.5) et (4.1.6) sont respectivement, des conditions aux limites en déplacements et en tractions, tandis que les équations (4.1.10) et (4.1.11) sont les conditions aux limites électriques que nous avons définies dans (1.2.6) et (1.2.7). Notons que nous avons imposé la condition (4.1.12) pour des raisons physiques ; en effet, la fondation est supposée être isolatrice et par conséquent nous employons cette condition. La condition (4.1.7) décrit le contact avec compliance normale et adhésion et les conditions (4.1.8) sont les conditions de frottement avec adhésion qui figurent dans (1.6.7) et (1.6.12), respectivement. L'équation (4.1.9) est l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion, déjà introduite par (1.6.13) avec la condition initiale (4.1.14), dont β_0 est un champ d'adhésion donné. Finalement, u_0 est la condition initiale des déplacements.

4.2 Formulation variationnelle

Dans cette section nous avons besoin d'introduire quelques hypothèses sur les données pour obtenir la formulation variationnelle du problème électromécanique \mathcal{P}_2 . Nous supposons que l'opérateur d'élasticité \mathcal{F} , satisfait :

$$(4.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} = (\mathcal{F}_{ijkl}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{F}_{ijkl} = \mathcal{F}_{klij} = \mathcal{F}_{jikl} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que } \mathcal{F}_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq m_{\mathcal{F}}\|\varepsilon\|^2 \\ \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. dans } \Omega. \end{array} \right.$$

le tenseur piézoélectrique \mathcal{E} , satisfait :

$$(4.2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{E}(x, \tau) = (e_{ijk}(x)\tau_{jk}) \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(c) } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right.$$

le tenseur diélectrique \mathcal{B} , satisfait

$$(4.2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{B}(x, E) = (b_{ij}(x)E_j) \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(c) } b_{ij} = b_{ji} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(d) Il existe } m_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que } b_{ij}(x)E_iE_j \geq m_{\mathcal{B}}\|E\|^2 \\ \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Nous remarquons que l'opérateur d'élasticité est supposé être linéaire.

De même, nous supposons que la fonction de compliance normale satisfait les conditions suivantes :

$$(4.2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) } \exists L_\nu > 0 \text{ telle que} \\ \quad \| p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2) \| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(c) } x \longrightarrow p_\nu(x, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \\ \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } x \longrightarrow p_\nu(x, r) = 0, \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right.$$

Nous supposons que les forces volumiques, les tractions surfaciques et les densités des charges électriques volumiques et surfaciques vérifient :

$$(4.2.5) \quad f_0 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^d), \quad f_2 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_2)^d),$$

$$(4.2.6) \quad q_0 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_b)).$$

Nous supposons aussi que

$$(4.2.7) \quad D \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \quad \forall t \in [0, T].$$

Notons ici que l'hypothèse (4.2.7) est itroduite pour des raisons physique et elle modélise le cas où la base est supposée être isolatrice.

Le théorème de représentation de *Riesz* nous permet de définir les fonctions $f : [0, T] \rightarrow V$ et $q : [0, T] \rightarrow W$ comme suit :

$$(4.2.8) \quad (f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v \, da,$$

$$(4.2.9) \quad (q(t), \psi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \psi \, dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \psi \, da,$$

pour tout $v \in V$, $\psi \in W$ et $t \in [0, T]$. Notons que les conditions (4.2.5) et (4.2.6)

impliquent que

$$(4.2.10) \quad f \in W^{1,\infty}(0, T; V) ,$$

$$(4.2.11) \quad q \in W^{1,\infty}(0, T; W) .$$

Les coefficients d'adhésion γ_ν , γ_τ et ϵ_a satisfont les conditions

$$(4.2.12) \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \epsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \epsilon_a \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3,$$

et le coefficient de frottement μ satisfait

$$(4.2.13) \quad \mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

Le champ initial d'adhésion β_0 vérifie

$$(4.2.14) \quad \beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

Ensuite, nous définissons la fonctionnelle d'adhésion $j_{ad} : L^2(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit

$$(4.2.15) \quad j_{ad}(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} \left(-\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) \cdot v_\tau \right) da,$$

la fonctionnelle de compliance normale $j_{nc} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$(4.2.16) \quad j_{nc}(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu(t)) v_\nu da,$$

et la fonctionnelle de frottement $j_{fr} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$(4.2.17) \quad j_{fr}(u, v) = \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(u_\nu) \|v_\tau\| da.$$

Les conditions (4.2.1)-(4.2.7) et (4.2.12)-(4.2.13) entraînent que les inté-

grales dans (4.2.8)-(4.2.9) et (4.2.15)-(4.2.17) sont bien définies.

Finalement, nous considérons pour les données initiales les hypothèses suivantes :

$$(4.2.18) \quad u_0 \in V,$$

$$(4.2.19) \quad (\mathcal{F}\varepsilon(u_0), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_0, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta_0, u_0, v) \\ + j_{nc}(u_0, v) + j_{fr}(u_0, v) \geq (f(0), v)_V \quad \forall v \in V,$$

$$(4.2.20) \quad (\mathcal{B}\nabla\varphi_0, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = (\mathcal{E}\varepsilon(u_0), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} + (q(0), \psi)_W \quad \forall \psi \in W.$$

Supposons que $(\sigma, u, \beta, \varphi, D)$ sont des fonctions régulières satisfaisant (4.1.3)–(4.1.12). Selon une procédure standard basée sur les formules de *Green* (2.2.3) et (2.2.16) combinées avec les conditions (4.1.3)–(4.1.12) et les définitions de f et q données par (4.2.8)–(4.2.9), respectivement, nous avons

$$(4.2.21) \quad (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta, u(t), v - \dot{u}(t)) + j_{nc}(u(t), v - \dot{u}(t)) \\ + j_{fr}(u(t), v) - j_{fr}(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V,$$

$$(4.2.22) \quad (D(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} + (q(t), \psi)_W = 0.$$

pour tout $\forall v \in V$, $\psi \in W$ et $t \in [0, T]$. Combinons (4.2.21) et (4.2.22) avec (4.1.1), (4.1.2), respectivement, et gardant à l'esprit (1.1.7) ainsi que les conditions initiales (4.1.13) et (4.1.14), nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème \mathcal{P}_2 .

Problème \mathcal{P}_2^V . Trouver un champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, un potentiel électrique $\varphi : [0, T] \rightarrow W$ et un champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels

que

$$\begin{aligned}
 (4.2.23) \quad & (\mathcal{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} \\
 & + j_{ad}(\beta, u(t), v - \dot{u}(t)) + j_{nc}(u(t), v - \dot{u}(t)) + \\
 & + j_{fr}(u(t), v) - j_{fr}(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \\
 & \forall v \in V \text{ p.p. } t \in [0, T],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.2.24) \quad & (\mathcal{B}\nabla\varphi(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = (q(t), \psi)_W \\
 & \forall \psi \in W \text{ p.p. } t \in [0, T],
 \end{aligned}$$

$$(4.2.25) \quad \dot{\beta}(t) = -(\beta(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau(t))\|^2) - \varepsilon_a)_+ \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(4.2.26) \quad u(0) = u_0, \beta(0) = \beta_0.$$

Dans le reste de ce chapitre, nous présentons quelques inégalités concernant les fonctionnelles j_{ad} , j_{nc} et j_{fr} , qui seront utilisées dans les sections suivantes. Ci-dessous dans cette section, β_1 et β_2 dénotent les éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tel que $0 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 1$ p.p. sur Γ_3 , u_1, u_2, v_1, v_2, u et v représentent des éléments de V et c est une constante positive générique qui peut dépendre de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, p_\nu, \gamma_\nu, \gamma_\tau$ et L , dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la raison de simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite des diverses fonctions sur $x \in \Omega \cup \Gamma_3$.

En utilisant (2.2.8), (4.2.4), (4.2.15), (4.2.16) et les inégalités $|R_\nu(u_\nu)| \leq L, \|R_\tau(u_\tau)\| \leq L, |\beta_1| \leq 1, |\beta_2| \leq 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
 (4.2.27) \quad & |j_{ad}(\beta_1, u_1, \omega) - j_{ad}(\beta_2, u_2, \omega) + j_{nc}(u_1, \omega) - j_{nc}(u_2, \omega)| \leq \\
 & c(\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|u_1 - u_2\|_V)\|\omega\|_V.
 \end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons (4.2.17), (4.2.4) et (2.2.8) pour trouver

$$(4.2.28) \quad \begin{aligned} j_{fr}(u, v - u) - j_{fr}(v, v - u) &\leq \\ c_0^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V. \end{aligned}$$

$$(4.2.29) \quad \begin{aligned} j_{fr}(u_1, v_1) - j_{fr}(u_1, v_2) + j_{fr}(u_2, v_2) - j_{fr}(u_2, v_1) &\leq \\ c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u_1 - u_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V. \end{aligned}$$

Les inégalités (4.2.27)–(4.2.29) vont être utilisées dans des places diverses dans le reste du chapitre.

4.3 Résultat d'existence

Notre intérêt principal dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence de la solution pour le problème variationnel (\mathcal{P}_2^V) .

Théorème 4.3.1. *Supposons que les hypothèses (4.2.1)–(4.2.3), (4.2.4)–(4.2.7), (4.2.12)–(4.2.14) et (4.2.18)–(4.2.20) sont vérifiées. Alors, il existe $\mu_0 > 0$ dépendant uniquement de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_a, \mathcal{F}, \mathcal{B}$ et \mathcal{E} telle que, si $(L_\nu + L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) < \mu_0$, alors le Problème (\mathcal{P}_2^V) possède au moins une solution (u, φ, β) . En outre, la solution satisfait*

$$(4.3.1) \quad u \in W^{1,\infty}(0, T; V),$$

$$(4.3.2) \quad \varphi \in W^{1,\infty}(0, T; W).$$

$$(4.3.3) \quad \beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}.$$

Un "quintuple" des fonctions $(u, \sigma, \varphi, D, \beta)$ qui satisfait (4.1.1), (4.1.2), (4.2.23)–(4.2.26) est appelée solution faible du Problème (\mathcal{P}_2) . Nous concluons par le Théorème (4.3.1) que, sous les hypothèses (4.2.1)–(4.2.3), (4.2.4)–(4.2.7), (4.2.12)–(4.2.14) et (4.2.18)–(4.2.20) le problème (\mathcal{P}_2) possède au moins

une solution faible qui satisfait (4.2.23)–(4.2.26). Pour préciser la régularité de la solution faible, nous notons que les relations constitutives (4.1.1) et (4.1.2), les hypothèses (4.2.1)–(4.2.3) et les régularités (4.3.1), (4.3.2) montrent que $\sigma \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathcal{H})$, $D \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega)^d)$. Mettant $v = \dot{u}(t) \pm \xi$, où $\xi \in C_0^\infty(\Omega)^d$ dans (4.2.23) et $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ dans (4.2.24) on obtient

$$\text{Div}\sigma(t) + f_0(t) = 0, \quad \text{div}D(t) = q_0(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Maintenant, de (4.2.5), (4.2.6) il vient que $\text{Div}\sigma \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^d)$ et $\text{div}D \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$, ce qui montre que

$$(4.3.4) \quad \sigma \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{H}_1),$$

$$(4.3.5) \quad D \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{W}_1).$$

Nous concluons que la solution faible $(u, \sigma, \varphi, D, \beta)$ du problème piézoélectrique de contact avec adhésion (\mathcal{P}_2) possède la régularité (4.3.1), (4.3.2), (4.3.3), (4.3.4) et (4.3.5).

La démonstration du théorème 4.3.1 sera effectuée en plusieurs étapes et elle est basée sur le résultat abstrait donné par le théorème 2.5.2. A cet fin, nous supposons dans la suite que (4.2.1)–(4.2.3), (4.2.4)–(4.2.7), (4.2.12)–(4.2.14) et (4.2.18)–(4.2.20) sont satisfaites; ci-après, c est une constante positive générique qui peut dépendre de Ω , Γ_1 , Γ_3 , \mathcal{F} , p_ν , γ_ν , γ_τ et L dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite des diverses fonctions sur $x \in \Omega \cup \Gamma_3$.

Le théorème de représentation de *Riesz* nous permet de définir les opérateurs $\mathcal{G} : W \rightarrow W$ et $\mathcal{R} : V \rightarrow W$, respectivement, par

$$(4.3.6) \quad (\mathcal{G}\varphi(t), \psi)_W = (\mathcal{B}\nabla\varphi(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall \varphi, \psi \in W,$$

$$(4.3.7) \quad (\mathcal{R}v, \varphi)_W = (\mathcal{E}\varepsilon(v), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall \varphi \in W, v \in V.$$

On peut montrer que \mathcal{G} est un opérateur linéaire, symétrique et positivement défini. Donc, \mathcal{G} est inversible sur W . On peut aussi montrer que \mathcal{R} est linéaire et continu sur V . Par conséquent, \mathcal{R} admet un opérateur adjoint $\mathcal{R}^* : W \rightarrow V$. La relation (1.3.2) nous permet de écrire

$$(4.3.8) \quad (\mathcal{R}^*\varphi, v)_V = (\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall \varphi \in W, v \in V.$$

Combinons l'égalité (4.2.24) avec les égalités (4.3.6), (4.3.7) pour obtenir

$$(4.3.9) \quad (\mathcal{G}\varphi(t), \psi)_W = (\mathcal{R}u(t), \psi)_W + (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W,$$

et par conséquent

$$(4.3.10) \quad \mathcal{G}\varphi(t) = \mathcal{R}u(t) + q(t).$$

Puisque \mathcal{G} est inversible on obtient

$$(4.3.11) \quad \varphi(t) = \mathcal{G}^{-1}\mathcal{R}u(t) + \mathcal{G}^{-1}q(t).$$

Mettant 4.3.8 et (4.3.11) dans (4.2.23) on trouve

$$(4.3.12) \quad \begin{aligned} & (\mathcal{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{R}^*\mathcal{G}^{-1}\mathcal{R}u(t), v - \dot{u}(t))_V + \\ & + j_{ad}(\beta, u(t), v - \dot{u}(t)) + j_{nc}(u(t), v - \dot{u}(t)) + \\ & + j_{fr}(u(t), v) - j_{fr}(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t) - \mathcal{R}^*\mathcal{G}^{-1}q(t), v - \dot{u}(t))_V \\ & \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Soit maintenant l'opérateur $L : V \rightarrow V$ défini par

$$(4.3.13) \quad L(v) = \mathcal{R}^*\mathcal{G}^{-1}\mathcal{R}(v), \quad \forall v \in V.$$

En utilisant les propriétés des opérateurs \mathcal{G} , \mathcal{R} et \mathcal{R}^* , nous déduisons que L est linéaire, symétrique et positivement défini sur V . De plus, on a

$$\begin{aligned}
 (Lu, v)_V &= (\mathcal{R}^* \mathcal{G}^{-1} \mathcal{R}u, v)_V \\
 &= (\mathcal{G}^{-1} \mathcal{R}u, \mathcal{R}v)_W \\
 &= (\mathcal{R}u, \mathcal{G}^{-1} \mathcal{R}v)_W \\
 &= (u, \mathcal{R}^* \mathcal{G}^{-1} \mathcal{R}v)_V \\
 &= (u, Lv)_V \quad \forall u, v \in V \\
 (Lv, v)_V &= (\mathcal{R}^* \mathcal{G}^{-1} \mathcal{R}v, v)_V,
 \end{aligned}$$

$$(4.3.14) \quad (Lv, v)_V = (\mathcal{G}^{-1} \mathcal{R}v, \mathcal{R}v)_W \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Maintenant, nous définissons la forme bilinéaire $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit

$$(4.3.15) \quad a(u, v) = (\mathcal{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Lu, v)_V \quad \forall u, v \in V.$$

En utilisant (4.2.1), (2.2.6) et (4.3.14), on peut montrer que la forme bilinéaire a est continue et coercive sur V . De plus, nous avons

$$(4.3.16) \quad |a(u, v)| \leq (M + \|L\|) \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V,$$

$$(4.3.17) \quad a(v, v) \geq m \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V,$$

De la symétrie de \mathcal{F} et L nous déduisons la symétrie de la forme bilinéaire a .

Soit la fonction $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V$ définie par

$$(4.3.18) \quad \mathbf{f}(t) = f(t) - \mathcal{R}^* \mathcal{G}^{-1} q(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

De (4.2.10) et (4.2.11) on obtient

$$(4.3.19) \quad \mathbf{f} \in W^{1,\infty}(0, T, V).$$

En se basant sur les relations (4.3.12), (4.3.15), (4.3.18), (4.2.25) et (4.2.26) on peut considérer le problème variationnelle suivant :

Problème \mathcal{P}_2^{V1} . *Trouver un champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, et un champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que*

$$(4.3.20) \quad \begin{aligned} & a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j_{ad}(\beta, u(t), v - \dot{u}(t)) + j_{nc}(u(t), v - \dot{u}(t)) \\ & + j_{fr}(u(t), v) - j_{fr}(u(t), \dot{u}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), v - \dot{u}(t))_V \\ & \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

$$(4.3.21) \quad \begin{aligned} \dot{\beta}(t) = & -(\beta(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau(t))\|^2) - \varepsilon_a)_+ \\ & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \end{aligned}$$

$$(4.3.22) \quad u(0) = u_0, \beta(0) = \beta_0.$$

Théorème 4.3.2. *Supposons que les hypothèses (4.2.1)–(4.2.3), (4.2.4)–(4.2.7), (4.2.12)–(4.2.14) et (4.2.18)–(4.2.20) sont vérifiées. Alors, il existe $\mu_0 > 0$ dépendant uniquement de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_a, \mathcal{F}, \mathcal{B}$ et \mathcal{E} telle que, si $L_\nu + L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$, alors le Problème (\mathcal{P}_2^{V1}) possède au moins une solution (u, β) . De plus, la solution satisfait*

$$(4.3.23) \quad u \in W^{1,\infty}(0, T; V),$$

$$(4.3.24) \quad \beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}.$$

Nous supposons dans ce qui suit que les conditions du Théorème (4.3.2)

sont vérifiées. Soit $\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}$ données et $j_\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(4.3.25) \quad \begin{aligned} j_\beta(u, v) &= \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu(t)) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(u_\nu) \|v_\tau\| da \\ &+ \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) \cdot v_\tau) da. \end{aligned}$$

Maintenant, nous considérons le problème intermédiaire suivant :

Problème $\mathcal{P}_2^{V^2}$. Trouver un champ des déplacements $u_\beta : [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$(4.3.26) \quad \begin{aligned} a(u_\beta(t), v - \dot{u}_\beta(t)) + j_\beta(u_\beta(t), v) - j_\beta(u_\beta(t), \dot{u}_\beta(t)) &\geq (\mathbf{f}(t), v - \dot{u}_\beta(t))_V \\ \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

$$(4.3.27) \quad u_\beta(0) = u_0,$$

Remarque 4.3.3. A partir de (4.2.19) et (4.2.20), nous déduisons que (5.2.16) est vérifiée.

Théorème 4.3.4. Supposons que (4.2.1)–(4.2.3), (4.2.4)–(4.2.7), (4.2.12)–(4.2.14) et (4.2.18)–(4.2.20) sont vérifiées. Alors, il existe $\mu_0 > 0$ dépendant uniquement de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_a, \mathcal{F}, \mathcal{B}$ et \mathcal{E} telle que, si $L_\nu + L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$, alors le Problème $\mathcal{P}_2^{V^2}$ possède au moins une solution $u_\beta \in W^{1,\infty}(0, T, V)$.

Pour démontrer ce théorème nous allons appliquer le Théorème 2.5.2 dans le cas de l'espace de Hilbert $X = V$ muni du produit scalaire $(\cdot)_V$ et de la norme associée $\|\cdot\|_V$ définies par (2.2.6) et (2.2.7) dans le deuxième chapitre de la première partie de cette thèse. On remarque que la fonctionnelle j_β , définie dans (4.3.25), satisfait la condition (2.5.6). En plus, nous avons le résultat suivant :

Lemme 4.3.5. La fonctionnelle j_β satisfait les hypothèses (2.5.11) et (2.5.12).

Démonstration. Soient $\zeta, u, \bar{u} \in V$ et soit $\lambda \in]0, 1]$. En utilisant (4.2.17), il

vient que j_β satisfait

$$\begin{aligned} j_\beta(\zeta, u - \bar{u} - \lambda u) - j_\beta(\zeta, u - \bar{u}) &\leq -\lambda \int_{\Gamma_3} p_\nu(\zeta_\nu) u_\nu da \\ &- \lambda \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(\zeta_\nu) \|u_\tau - \bar{u}_\tau\| da + \lambda \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(\zeta_\nu) \|\bar{u}_\tau\| da \\ &+ \lambda \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(\zeta_\nu) u_\nu da - \lambda \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(\zeta_\tau) \cdot u_\tau da, \end{aligned}$$

et comme $\mu \geq 0$, $p_\nu \geq 0$ p.p. sur Γ_3 , nous obtenons

$$\begin{aligned} j_\beta(\zeta, u - \bar{u} - \lambda u) - j_\beta(\zeta, u - \bar{u}) &\leq -\lambda \int_{\Gamma_3} p_\nu(\zeta_\nu) u_\nu da \\ &+ \lambda \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(\zeta_\nu) \|\bar{u}_\tau\| da + \lambda \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(\zeta_\nu) u_\nu da \\ &- \lambda \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(\zeta_\tau) \cdot u_\tau da, \quad \forall \zeta, u, \bar{u} \in V. \end{aligned}$$

En plus, nous déduisons de (2.5.10) que

$$\begin{aligned} (4.3.28) \quad j'_2(\zeta, u - \bar{u}; -u) &\leq - \int_{\Gamma_3} p_\nu(\zeta_\nu) u_\nu da + \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(\zeta_\nu) \|\bar{u}_\tau\| da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(\zeta_\nu) u_\nu da - \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(\zeta_\tau) \cdot u_\tau da \quad \forall \zeta, u, \bar{u} \in V. \end{aligned}$$

Soient maintenant les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ et l'élément $\bar{u} \in V$. En utilisant (2.2.8), (4.2.4), (4.2.13) et (4.3.28), nous trouvons

$$\begin{aligned} (4.3.29) \quad j'_2(t_n u_n, u_n - \bar{u}; -u_n) &\leq - \int_{\Gamma_3} p_\nu(t_n u_{n\nu}) u_{n\nu} + \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(t_n u_{n\nu}) \|\bar{u}_\tau\| da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(t_n u_{n\nu}) u_{n\nu} da - \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(t_n u_{n\tau}) \cdot u_{n\tau} da \quad \forall \zeta, u, \bar{u} \in V \end{aligned}$$

Gardant à l'esprit que $0 \leq \beta \leq 1$ p.p. sur Γ_3 et en utilisant (4.2.4), (1.6.9) and (4.2.12) on obtient $p_\nu(t_n u_{n\nu}) u_{n\nu} \geq 0$ et $\gamma_\tau \beta^2 R_\tau(t_n u_{n\tau}) \cdot u_{n\tau} \geq 0$ p.p sur Γ_3 . Donc, l'inéquation (4.3.29) implique que

$$j'_2(t_n u_n, u_n - \bar{u}; -u_n) \leq \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(t_n u_{n\nu}) \|\bar{u}_\tau\| da + \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(t_n u_{n\nu}) u_{n\nu} da.$$

Maintenant, en utilisant (4.2.4)(b), (2.2.8) et le fait que $|R_\nu(t_n u_{n\nu})| \leq L$ nous

obtenons

$$\begin{aligned}
 j_2'(t_n u_n, u_n - \bar{u}; -u_n) &\leq \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu \int_{\Gamma_3} |u_{n\nu}| |\bar{u}_\tau| da + \\
 &\quad L \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_{\Gamma_3} |u_{n\nu}| da. \\
 &\leq c_0^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu \|u_n\|_V \|\bar{u}\|_V + \\
 &\quad c_0 L \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \text{meas}(\Gamma_3) \|u_n\|_V.
 \end{aligned}$$

Il vient de l'inégalité précédente que si $\|u_n\|_V \rightarrow +\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \left[\frac{1}{\|u_n\|_V^2} j_2'(t_n u_n, u_n - \bar{u}; -u_n) \right] \leq 0,$$

d'où nous concluons que la fonctionnelle j_β satisfait la condition (2.5.11).

Considérons maintenant les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$, $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ telles que

$$(4.3.30) \quad \|u_n\|_V \rightarrow +\infty,$$

$$(4.3.31) \quad \|\zeta_n\|_V \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

où $C > 0$. Let $\bar{u} \in V$. En utilisant (2.2.8), (4.2.4), (4.2.13), (4.3.28) et (4.3.31)

$$\begin{aligned}
 (4.3.32) \quad j_2'(\zeta_n, u_n - \bar{u}; -u_n) &\leq c_0^2 L_\nu \|\zeta_n\|_V \|u_n\|_V + c_0^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu \|\zeta_n\|_V \|\bar{u}\|_V \\
 &\quad + c_0 L \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \text{meas}(\Gamma_3) \|u_n\|_V \\
 &\quad + c_0 L \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \text{meas}(\Gamma_3) \|u_n\|_V \quad \forall n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Des relations (4.3.30) et (4.3.32), nous déduisons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \left[\frac{1}{\|u_n\|_V^2} j_2'(\zeta_n, u_n - \bar{u}; -u_n) \right] \leq 0.$$

Ce qui montre que la fonctionnelle j_β satisfait (2.5.12). ■

Lemme 4.3.6. *La fonctionnelle j_β satisfait les conditions (2.5.13) et (2.5.16).*

Démonstration. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$, $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ deux suites telles que $u_n \rightharpoonup u \in V$ et $\zeta_n \rightharpoonup \zeta \in V$. En utilisant la propriété de compacité de l'application de trace et la relation (4.2.4), on obtient

$$(4.3.33) \quad p_\nu(\zeta_{n\nu}) \longrightarrow p_\nu(\zeta_\nu) \text{ dans } L^2(\Gamma_3),$$

$$(4.3.34) \quad u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^2(\Gamma_3)^d.$$

$$(4.3.35) \quad \begin{aligned} R_\nu(\zeta_{n\nu}) &\longrightarrow R_\nu(\zeta_\nu) \text{ dans } L^2(\Gamma_3). \\ R_\tau(\zeta_{n\tau}) &\longrightarrow R_\tau(\zeta_\tau) \text{ dans } L^2(\Gamma_3)^d \end{aligned}$$

Par conséquent, de (4.3.33), (4.3.34) et (4.3.35) nous concluons que

$$\begin{aligned} j_\beta(\zeta_n, v) &\longrightarrow j_\beta(\zeta, v) \quad \forall v \in V, \\ j_\beta(\zeta_n, u_n) &\longrightarrow j_\beta(\zeta, u), \end{aligned}$$

d'où on déduit que j_β satisfait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup [j_\beta(\zeta_n, v) - j_\beta(\zeta_n, u_n)] \leq j_\beta(\zeta, v) - j_\beta(\zeta, u).$$

Donc, la fonctionnelle j_β satisfait (2.5.13). Considérons maintenant la suite bornée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ telle que

$$(4.3.36) \quad \|u_n\|_V \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

où $C > 0$. Nous avons

$$\begin{aligned}
 |j_\beta(\zeta_n, u_n) - j_\beta(\zeta, u_n)| &\leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu(\zeta_{n\nu}) - p_\nu(\zeta_\nu)| |u_{n\nu}| da \\
 &+ \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_{\Gamma_3} |p_\nu(\zeta_{n\nu}) - p_\nu(\zeta_\nu)| |u_{n\tau}| da \\
 &+ \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_{\Gamma_3} |R_\nu(\zeta_{n\nu}) - R_\nu(\zeta_\nu)| |u_{n\nu}| da \\
 &+ \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_{\Gamma_3} |R_\tau(u_{n\tau}) - R_\tau(u_{n\tau})| |u_{n\tau}| da,
 \end{aligned}$$

En utilisant (2.2.8), nous obtenons

(4.3.37)

$$\begin{aligned}
 |j_\beta(\zeta_n, u_n) - j_\beta(\zeta, u_n)| &\leq c_0(\|p_\nu(\zeta_{n\nu}) - p_\nu(\zeta_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \\
 &\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|p_\nu(\zeta_{n\nu}) - p_\nu(\zeta_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \\
 &\|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|R_\nu(\zeta_{n\nu}) - R_\nu(\zeta_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \\
 &\|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|R_\tau(u_{n\tau}) - R_\tau(u_{n\tau})\|_{L^2(\Gamma_3)}) \|u_n\|_V,
 \end{aligned}$$

Donc, de (4.3.33), (4.3.35), (4.3.36) et (4.3.37), on peut conclure que j_β satisfait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [j_\beta(\zeta_n, u_n) - j_{fr}(\zeta, u_n)] = 0.$$

d'où, la fonctionnelle j_β vérifie (2.5.16). ■

Lemme 4.3.7. *La fonctionnelle j_β satisfait la conditions (2.5.15) pour tout $k_0 \in (0, m)$. En outre*

$$\begin{aligned}
 (4.3.38) \quad &j_{fr}(u, v - u) - j_{fr}(v, v - u) \leq \\
 &c_0^2 \left(L_\nu + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu + \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \right) \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V
 \end{aligned}$$

Démonstration. Soient $\zeta, u \in V$. En utilisant (4.2.4), (4.2.13) et (4.2.17), nous avons

$$\begin{aligned}
 |j_\beta(\zeta, u)| &\leq L_\nu \|\zeta_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} + \\
 &\quad \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu \|\zeta_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d} + \\
 &\quad \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|R_\nu(\zeta_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} + \\
 &\quad \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|R_\tau(\zeta_\tau)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \|u_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d}.
 \end{aligned}$$

Gardant à l'esprit (2.2.8) et le fait que R_τ, R_ν sont des opérateurs de Lipschitz on trouve

$$\begin{aligned}
 |j_\beta(\zeta, u)| &\leq c_0^2 L_\nu \|\zeta_\nu\|_V \|u\|_V + \\
 &\quad c_0^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu \|\zeta\|_V \|u\|_V + \\
 &\quad c_0^2 \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\zeta\|_V \|u\|_V + \\
 &\quad c_0^2 \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\zeta\|_V \|u\|_V,
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$|j_\beta(\zeta, u)| \leq c_0^2 \left(L_\nu + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu + \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \right) \|\zeta\|_V \|u\|_V.$$

D'où nous concluons que la condition (2.5.15) est vérifiée, pour tout $k_0 \in (0, m)$.

Soient maintenant $u, v \in V$. En se basant encore une fois sur (4.2.4), (4.2.13) et (4.3.25) nous trouvons

$$\begin{aligned}
 j_\beta(u, v - u) - j_\beta(v, v - u) &= \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_\nu) - p_\nu(v_\nu))(v_\nu - u_\nu) da + \\
 &\quad \int_{\Gamma_3} \mu (p_\nu(u_\nu) - p_\nu(v_\nu)) \|v_\tau - u_\tau\| da + \\
 &\quad \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 (R_\nu(u_\nu) - R_\nu(v_\nu))(v_\nu - u_\nu) da + \\
 &\quad \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 (R_\tau(u_\tau) - R_\tau(v_\tau)) \cdot (v_\tau - u_\tau) da.
 \end{aligned}$$

Grâce à (2.2.8) et (4.2.4), et la Lipschitzialité des opérateurs R_τ et R_ν on obtient

$$\begin{aligned}
 j_\beta(u, v - u) - j_\beta(v, v - u) &\leq L_\nu \int_{\Gamma_3} |v_\nu - u_\nu|^2 da + \\
 &\quad \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu \int_{\Gamma_3} |v_\nu - u_\nu| \|v_\tau - u_\tau\| da + \\
 &\quad \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_{\Gamma_3} |v_\nu - u_\nu|^2 da + \\
 &\quad \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_{\Gamma_3} \|v_\tau - u_\tau\|^2 da,
 \end{aligned}$$

ce qui mène vers l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
 j_{fr}(u, v - u) - j_{fr}(v, v - u) &\leq \\
 c_0^2 \left(L_\nu + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu + \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \right) &\|u - v\|_V^2
 \end{aligned}$$

Donc, l'inégalité (4.3.38) est vérifiée. ■

Démonstration du Théorème (4.3.4). En utilisant la symétrie de \mathcal{F} et L et l'inégalité (4.3.17), nous remarquons que la forme bilinéaire a définie par (4.3.15) est symétrique et coercive.

Soit $\mu_0 = \frac{m}{c_0^2}$. Il est évident que, μ_0 dépend seulement de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_a, \mathcal{F}, \mathcal{E}$ et \mathcal{B} . Supposons que

$$L_\nu + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu + \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0,$$

d'où, nous déduisons que

$$c_0^2 \left(L_\nu + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu + \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \right) < m.$$

Alors, il existe un réel k_0 tel que

$$c_0^2 \left(L_\nu + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu + \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \right) \leq k_0 < m.$$

L'inégalité (4.3.38) nous permet de déduire que (2.5.14) est vérifiée.

Finalement, en utilisant (4.2.18), les lemmes (4.3.5)-(4.3.7), la remarque 4.3.3

et le théorème 2.5.2 **(i)**, nous déduisons que le problème $\mathcal{P}_2^{V^2}$ possède au moins une solution $u_\beta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$. ■

Comme dans [27], nous adoptons la discrétisation en temps suivante. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous mettons $t_i = i\Delta t$, $0 \leq i \leq n$, et $\Delta t = T/n$. On note respectivement par u^i et β^i l'approximation de u et β au temps t_i et $\Delta u^i = u^{i+1} - u^i$, $\Delta \beta^i = \beta^{i+1} - \beta^i$. Pour une fonction continue $w(t)$, nous utilisons la notation $w^i = w(t_i)$. Donc, on obtient une suite de problèmes discrétisés en temps P_n^i du problème $\mathcal{P}_2^{V^1}$ définés pour $u(0) = u_0$ et $\beta^0 = \beta_0$ par :

Problème P_n^i . Pour $u^i \in V$, $\beta^i \in L^2(\Gamma_3)$, trouver $u^{i+1} \in V$, $\beta^{i+1} \in L^2(\Gamma_3)$ tels que
(4.3.39)

$$\begin{aligned} & a(u^{i+1}, w - u^{i+1}) + j_{ad}(\beta^{i+1}, u^{i+1}, w - u^{i+1}) + j_{nc}(u^{i+1}, w - u^{i+1}) \\ & + j_{fr}(u^{i+1}, w - u^{i+1}) - j_{fr}(u^{i+1}, \Delta u^i) \geq (\mathbf{f}^{i+1}, w - u^{i+1})_V \quad \forall w \in V, \end{aligned}$$

$$\frac{\beta^{i+1} - \beta^i}{\Delta t} = -[\beta^{i+1}(\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu^{i+1}))^2 + \gamma_\tau(|R_\tau(u_\tau^{i+1})|^2) - \varepsilon_a)_+ \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

Nous avons le résultats suivant.

Proposition 4.3.8. *Il existe $\mu_c > 0$ telle que si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_c$, le problème P_n^i admet une solution unique.*

Démonstration. Il suffit de voir ([86], Proposition 3.1) ■

Dans l'étape suivante nous utilisons le champ de déplacement u_β obtenu dans le théorème 4.3.4. Soit $u = u_\beta$ et notons par u_ν , u_τ ses composantes normales et tangentielles, et nous considérons le problème de valeur initiale suivant :

Problème. \mathcal{P}^{β_u} Trouver un champ d'adhésion $\beta_u : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que :

$$(4.3.40) \quad \begin{aligned} \dot{\beta}_u(t) &= -[\beta_u(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau(t))\|^2) - \varepsilon_a]_+ \\ & \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

$$(4.3.41) \quad \beta_u(0) = \beta_0.$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 4.3.9. *Il existe une unique solution β_u au problème une unique solution au \mathcal{P}^{β_u} qui satisfait $\beta_u \in W^{1,\infty}(0, T, L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}$.*

Démonstration. . Nous considérons l'application $F : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ défini par

$$(4.3.42) \quad F(t, \beta_u) = - \left(\beta_u(t) (\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau(t))\|^2) - \epsilon_a \right)_+.$$

Soit $t \in [0, T]$ et $\beta \in L^2(\Gamma_3)$. Il s'ensuit d'après les propriétés des opérateurs de troncation R_ν et R_τ que F est de Lipschitz par rapport à la seconde variable, uniformément en temps. De plus, pour tout $\beta_u \in L^2(\Gamma_3)$ l'application $t \mapsto F(t, \beta_u)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$. Moyennant maintenant le Théorème 2.6.1, nous obtenons l'existence d'une fonction unique $\beta_u \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ qui résout le problème \mathcal{P}^{β_u} . Notons que la restriction $0 \leq \beta_u \leq 1$ est incluse implicitement dans le problème variationnel \mathcal{P}^{β_u} . En effet, les conditions (4.3.40) et (4.3.41) nous garantissent que $\beta_u(t) \leq \beta_0$ et donc l'hypothèse (4.2.14) montre que $\beta_u(t) \leq 1$ pour $t \geq 0$, p.p. sur Γ_3 . D'un autre côté, si $\beta_u(t_0) = 0$ à $t = t_0$, alors il s'ensuit de (4.3.40) et (4.3.41) que $\dot{\beta}_u(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ et donc, $\beta_u(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. sur Γ_3 . Nous concluons que $0 \leq \beta_u(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. sur Γ_3 . Il résulte de la définition de l'ensemble \mathcal{Q} , que $\beta_u \in \mathcal{Q}$. Donc, $\beta_u \in W^{1,\infty}(0, T, L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}$ ce qui conclut la preuve du lemme 4.3.9. ■

Maintenant, nous introduisons les suites de fonctions $\beta^n(t)$ et $u^n(t)$ définies sur $[0; T]$ par $\beta^n(t) = \beta^{i+1}$, $u^n(t) = u^{i+1} = u(t_{i+1})$, $\tilde{u}^n(t) = u^i + \frac{(t - t_i)}{\Delta t} \Delta u^i$ et $f^n(t) = f^{i+1} = f(t_{i+1})$ pour tout $t \in]t_i, t_{i+1}[$; $i = 0, \dots, n - 1$; et $\beta^n(0) = \beta_0$, $u^n(0) = u_0$, $f^n(0) = f_0$. Nous avons le résultats suivant :

Lemme 4.3.10. *Soient u et β les solutions de problèmes \mathcal{P}_2^{V2} et \mathcal{P}^{β_u} , respectivement. Alors, nous avons :*

i) $u^n \rightarrow u$ et $\tilde{u}^n \rightarrow \dot{u}$ fortement dans $L^\infty(0, T; V)$, pour $t \in (t_i, t_{i+1})$,

ii) $\beta^n \rightarrow \beta$ fortement dans $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$, pour $t \in (t_i, t_{i+1})$.

Démonstration. i) Puisque $u \in W^{1,\infty}(0, T; V)$, nous déduisons que $u^n \rightarrow u$ et $\tilde{u}^n \rightarrow \dot{u}$ fortement dans $L^\infty(0, T; V)$, pour $t \in (t_i, t_{i+1})$.

ii) Pour $t \in (t_i, t_{i+1})$ nous avons

$$\|\beta^n(t) - \beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \|\beta^n(t) - \beta(t_{i+1})\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\beta(t_{i+1}) - \beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)},$$

et comme $\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$, on obtient

$$\|\beta(t_{i+1}) - \beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \frac{T}{n} \|\dot{\beta}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))}.$$

En utilisant les propriétés de R_ν et R_τ , on obtient aussi (voir [27])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i=0, \dots, n} \|\beta^i - \beta(t_i)\|_{L^2(\Gamma_3)} = 0.$$

d'où nous déduisons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|\beta^n(t) - \beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} = 0.$$

■

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour prouver la proposition suivante

Proposition 4.3.11. (u, β) est une solution du Problème \mathcal{P}_2^{V1} .

Démonstration. Dans l'inégalité (4.3.39), pour $v \in V$, nous posons $w = u(t_i) + v\Delta t$ et nous dévisons par Δt ; pour obtenir l'inégalité suivantes :

$$\begin{aligned} a(u(t_{i+1}), v - \frac{\Delta u(t_i)}{\Delta t}) + j_{nc}(u(t_{i+1}), v - \frac{\Delta u(t_i)}{\Delta t}) + j_{fr}(u(t_{i+1}), v) - j_{fr}(u(t_i), \frac{\Delta u(t_i)}{\Delta t}) \\ + j_{ad}(\beta^{i+1}, u(t_{i+1}), v - \frac{\Delta u(t_i)}{\Delta t}) \geq (f^{i+1}, v - \frac{\Delta u(t_i)}{\Delta t})_V. \end{aligned}$$

D'où pour tout $v \in L^2(0, T; V)$, nous avons

$$a(u(t_{i+1}), v - \frac{\Delta u(t_i)}{\Delta t}) + j_{nc}(u(t_{i+1}), v - \frac{\Delta u(t_i)}{\Delta t}) + j_{fr}(u(t_{i+1}), v) - j_{fr}(u(t_{i+1}), \frac{\Delta u(t_i)}{\Delta t}) \\ + j_{ad}(\beta^{i+1}, u(t_{i+1}), v - \frac{\Delta u(t_i)}{\Delta t}) \geq (f^{i+1}, v - \frac{\Delta u(t_i)}{\Delta t})_V.$$

L'intégration des deux côtés de l'inégalité ci-dessus sur $(0, T)$, nous mène à l'inégalité

$$(4.3.43) \quad \int_0^T a(u^n(t), v(t) - \tilde{u}^n) dt + \int_0^T j_{fr}(u^n(t), v(t)) dt - \int_0^T j_{fr}(u^n(t), \tilde{u}^n(t)) dt \\ + \int_0^T j_{nc}(u^n(t), v(t) - \tilde{u}^n(t)) dt + \int_0^T j_{ad}(\beta^n(t), u^n(t), v(t) - \tilde{u}^n(t)) dt \geq \int_0^T (f^n(t), v(t) - \tilde{u}^n(t)) dt.$$

■

Pour passer à la limite dans cette inégalité, nous devons établir les propriétés suivantes :

Lemme 4.3.12. *Pour $v \in L^2(0, T; V)$ nous avons les propriétés suivantes*

$$(4.3.44) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T a(u^n(t), v(t) - \tilde{u}^n) dt = \int_0^T a(u(t), v(t) - \dot{u}(t)) dt,$$

$$(4.3.45) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T j_{fr}(u^n(t), \tilde{u}^n(t)) dt \geq \int_0^T j_{fr}(u(t), \dot{u}(t)) dt,$$

$$(4.3.46) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T j_{fr}(u^n(t), v(t)) dt = \int_0^T j_{fr}(u(t), v(t)) dt,$$

$$(4.3.47) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T j_{nc}(u^n(t), v(t) - \tilde{u}^n(t)) dt \geq \int_0^T j_{nc}(u(t), v(t) - \dot{u}(t)) dt,$$

$$(4.3.48) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (f^n(t), v(t) - \tilde{u}^n(t))_V dt = \int_0^T (f(t), v(t) - \dot{u}(t))_V dt,$$

$$(4.3.49) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T j_{ad}(\beta^n(t), u^n(t), v(t) - \tilde{u}^n(t)) dt = \int_0^T j_{ad}(\beta(t), u(t), v(t) - \dot{u}(t)) dt.$$

Démonstration. Pour la preuve de (4.3.44) et (4.3.48) nous renvoyons le lecteur à [88, Lemme 4.6]. Pour prouver (4.3.45) et (4.3.46) il suffit de voir [57, Lemme 3.5]. Pour prouver (4.3.47), il suffit d'utiliser le lemme 4.3.10(i). Enfin, pour la preuve de (4.3.49) nous renvoyons le lecteur à [27, Lemme 3.8] et utiliser les propriétés des opérateurs R_τ, R_ν .

Maintenant, en utilisant le lemme 4.3.10 (ii) et le lemme 4.3.12 et nous passons à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité (4.3.43) pour obtenir

$$\begin{aligned} & \int_0^T a(u(t), v(t) - \dot{u}(t))dt + \int_0^T j_{fr}(u(t), v(t))dt - \int_0^T j_{fr}(u(t), \dot{u}(t))dt \\ & + \int_0^T j_{nc}(u(t), v(t) - \dot{u}(t))dt + \int_0^T j_{ad}(\beta(t), u(t), v(t) - \dot{u}(t))dt \\ & \geq \int_0^T (f(t), v(t) - \dot{u}(t))_V dt, \end{aligned}$$

à partir de laquelle on déduit l'inégalité (4.3.20) et que β est l'unique solution de l'équation différentielle (4.3.21). ■

Démonstration du Théorème (4.3.1). Soit (u, β) la solution du problème \mathcal{P}_2^{V1} . Il résulte de (4.3.18), (4.3.15), (4.3.13), (4.3.11), (4.3.8), (4.3.7) et (4.3.6) que (u, φ, β) est, au moins, une solution du problème \mathcal{P}_2^V . Les propriétés (4.3.1), (4.3.2) et (4.3.3) résultent du théorème 4.3.2 et (4.3.11). ■

Troisième partie

Problèmes Electro-viscoélastique

PARTIE III

PROBLÈMES

ELECTRO-VISCOÉLASTIQUE

Dans la troisième partie de cette thèse nous allons étudier deux problèmes de contact avec adhésion ou frottement, entre un corps ayant une loi de comportement électro-viscoélastique et une fondation supposée rigide. Elle est composée deux chapitres.

Le premier chapitre est destiné à l'étude d'un problème de contact avec adhésion et sans frottement entre un corps électro-viscoélastique et une base rigide et isolatrice. Les conditions aux limites de contact sur la partie Γ_3 sont de type *Signorini* et l'adhésion sur cette partie est modélisé par une variable de surface appelée champ d'adhésion dont l'évolution est décrite par une équation différentielle ordinaire du premier ordre. On va dériver une formulation variationnelle en termes de déplacements et de potentiel électrique et établir un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible pour cette formulation. Les démonstrations sont basées sur un résultat abstrait portant sur les inclusions différentielles et les opérateurs maximaux mono-

tones et des techniques de point fixe pour des opérateurs construits dans des espaces de *Banach* appropriés.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un problème de contact avec frottement et adhésion entre un corps électro-viscoélastique et une base rigide et isolatrice. Dans ce chapitre les déplacements suivant la normale sont considérés nuls. Donc, le contact est bilatéral. Le frottement dans ce problème est modélisé par une loi de *Coulomb* non local couplée avec l'adhésion. Nous dérivons une inégalité variationnelle couplée avec une égalité impliquant le champ du potentiel électrique. En utilisant des résultats sur les inéquations variationnelles elliptiques suivis par des arguments de point fixe, nous établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible pour le problème piézoélectrique..

CHAPITRE 5

PROBLÈME

ÉLECTRO-VISCOÉLASTIQUE AVEC

ADHÉSION

Dans ce chapitre, nous étudions un problème de contact avec adhésion et sans frottement d'un corps déformable ayant une loi de comportement électro-viscoélastique non linéaire, avec une base rigide. Les conditions aux limites de contact sont de type *Signorini* couplées avec l'adhésion et le processus est quasistatique. Le contact adhésif lorsque la colle est ajoutée pour éviter le mouvement relatif des surfaces a été étudié dans [27, 35, 36, 46, 61]. Des conditions de type *Signorini* ont été utilisés dans [34] pour les matériaux ayant une loi de comportement élastique et dans [12, 13] pour les matériaux vicoélastique. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet d' un papier accepté [25].

5.1 Formulation du problème

Le cadre physique de notre problème a été décrit dans la partie I et schématisé à la figure 1.1. La loi de comportement est électro-viscoélastique non linéaire de type (1.3.5). Ici, le contact est modélisé par une condition de type *Signorini* couplée avec adhésion.

De ces considérations, le problème physique peut se formuler de la façon suivante :

Problème \mathcal{P}_3 . *Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, un potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ des déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ d'adhésion $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que*

$$\begin{aligned}
 (5.1.1) \quad & \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{F}\varepsilon(u) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi) && \text{dans} && \Omega \times (0, T), \\
 (5.1.2) \quad & D = \mathcal{B}\mathbf{E}(\varphi) + \mathcal{E}\varepsilon(u) && \text{dans} && \Omega \times (0, T), \\
 (5.1.3) \quad & \text{Div}\sigma + f_0 = 0 && \text{dans} && \Omega \times (0, T), \\
 (5.1.4) \quad & \text{div}D = q_0 && \text{dans} && \Omega \times (0, T), \\
 (5.1.5) \quad & u = 0 && \text{sur} && \Gamma_1 \times (0, T), \\
 (5.1.6) \quad & \sigma\nu = f_2 && \text{sur} && \Gamma_2 \times (0, T), \\
 (5.1.7) \quad & \begin{cases} u_\nu \leq 0, \\ \sigma_\nu - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu) \leq 0, \\ (\sigma_\nu - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu))u_\nu = 0 \end{cases} && \text{sur} && \Gamma_3 \times (0, T), \\
 (5.1.8) \quad & -\sigma_\tau = p_\tau(\beta)R_\tau(u_\tau) && \text{sur} && \Gamma_3 \times (0, T), \\
 (5.1.9) \quad & \dot{\beta}(t) = -(\gamma_\nu\beta(t)R_\nu(u_\nu(t))^2 - \varepsilon_a)_+ && \text{sur} && \Gamma_3 \times (0, T), \\
 (5.1.10) \quad & \varphi = 0 && \text{sur} && \Gamma_a \times (0, T), \\
 (5.1.11) \quad & D \cdot \nu = q_2 && \text{sur} && \Gamma_b \times (0, T), \\
 (5.1.12) \quad & D \cdot \nu = 0 && \text{sur} && \Gamma_3 \times (0, T), \\
 (5.1.13) \quad & u(0) = u_0 && \text{dans} && \Omega, \\
 (5.1.14) \quad & \beta(0) = \beta_0 && \text{sur} && \Gamma_3.
 \end{aligned}$$

Nous donnons maintenant quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites (5.1.1)–(5.1.14). Les équations (5.1.1) et (5.1.2) représentent la loi de comportement électro-viscoélastique que nous avons déjà

définie dans (1.3.5). Les équations (5.1.3) et (5.1.4) sont les équations d'équilibre mécanique et électrique qui figurent dans (1.2.2) et (1.2.3), respectivement, tandis que les conditions (5.1.5) et (5.1.6) sont respectivement, des conditions en déplacement et en traction. La condition (5.1.7) représente les conditions aux limites de contact avec adhésion de type *Signorini* que nous avons déjà introduite dans (1.7.2). La condition (5.1.8) signifie que la résistance au mouvement tangentiel est générée par la colle et que la traction tangentielle de frottement est négligeable. Ainsi, elle dépend seulement de l'intensité d'adhésion et du déplacement tangentiel, mais tant qu'il n'exède pas la longueur du lien L rappelées dans la première partie de cette thèse. L'équation (5.1.9) est l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion, avec la condition initiale (5.1.14) où β_0 est un champ d'adhésion donné. Les conditions (5.1.10) et (5.1.11) sont les conditions aux limites électriques que nous avons définies dans (1.2.6) et (1.2.7). Notons que nous avons imposé la condition (5.1.12) pour des raisons physiques ; en effet, la fondation est supposée être isolatrice et par conséquent nous employons cette condition. Finalement, l'expression (5.1.13) représente la condition initiale de déplacement.

5.2 Formulation variationnelle

Pour avoir la formulation variationnelle du problème mécanique \mathcal{P}_3 , nous supposons que l'opérateur de viscosité \mathcal{A} , l'opérateur d'élasticité \mathcal{F} , le tenseur piézoélectrique \mathcal{E} , le tenseur diélectrique \mathcal{B} et la fonction de raideur tangentielle p_τ satisfont les propriétés suivantes :

$$(5.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{A}(x, \tau) = (a_{ijkl}(x)\tau_{kl}) \quad \forall \tau \in \mathbb{S}^d \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(c) } a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(d) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad a_{ijkl} \tau_{ij}\tau_{kl} \geq m_{\mathcal{A}}\|\tau\|^2, \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right.$$

$$(5.2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{F}(x, \tau_1) - \mathcal{F}(x, \tau_2)\| \leq L_{\mathcal{F}}\|\tau_1 - \tau_2\| \\ \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{S}^d, \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(c) La fonction } x \mapsto \mathcal{F}(x, \tau) \text{ est Lebesgue mesurable} \\ \quad \text{sur } \Omega, \quad \text{pour tout } \tau \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) La fonction } x \mapsto \mathcal{F}(x, \mathbf{0}) \in \mathcal{H}. \end{array} \right.$$

$$(5.2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{E}(x, \tau) = (e_{ijk}(x)\tau_{jk}) \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(c) } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right.$$

$$(5.2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{B}(x, \mathbf{E}) = (\mathcal{B}_{ij}(x)E_j) \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(c) } \mathcal{B}_{ij} = \mathcal{B}_{ji} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(d) Il existe } m_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que } \mathcal{B}_{ij}(x)E_iE_j \geq m_{\mathcal{B}}\|\mathbf{E}\|^2 \\ \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right.$$

$$(5.2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Il existe } L_\tau > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\tau(x, \beta_1) - p_\tau(x, \beta_2)| \leq L_\tau |\beta_1 - \beta_2| \\ \quad \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(c) Il existe } M_\tau > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\tau(x, \beta)| \leq M_\tau \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(d) Pour tout } \beta \in \mathbb{R}, x \mapsto p_\tau(x, \beta) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3. \\ \text{(e) La fonction } x \mapsto p_\tau(x, \beta) \in L^2(\Gamma_3). \\ \text{(f) } p_\tau(x, 0) = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \end{array} \right.$$

Nous supposons aussi que les forces volumiques f_0 , les tractions surfaciques f_2 , les charges électriques volumiques q_0 et les charges électriques surfaciques q_2 satisfont

$$(5.2.6) \quad f_0 \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega)^d), \quad f_2 \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Gamma_2)^d),$$

$$(5.2.7) \quad q_0 \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Gamma_b)).$$

Les coefficients d'adhésion γ_ν , γ_τ et ϵ_a satisfont les conditions

$$(5.2.8) \quad \gamma_\nu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \epsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \epsilon_a \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3,$$

tandis que le champ initial d'adhésion vérifie

$$(5.2.9) \quad \beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \text{ p.p. sur } \Gamma_3.$$

Puisque $meas(\Gamma_1) > 0$ et l'opérateur de viscosité satisfait la condition (5.2.1), il vient que l'espace V donné par (2.2.4) est un espace de *Hilbert* muni du produit scalaire

$$(5.2.10) \quad (u, v)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}.$$

Notons que la norme induite sur V par le produit scalaire précédent est équivalent à celle de $H^1(\Omega)^d$.

Pour les problèmes de type *Signorini* nous introduisons l'ensemble des déplacements admissibles donné par

$$(5.2.11) \quad U_{ad} = \{v \in V \mid v_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\},$$

qui est un ensemble convexe. Pour finir les hypothèses sur les données du problème mécanique, nous supposons que

$$(5.2.12) \quad u_0 \in U_{ad}$$

Par la suite, nous considérons l'espace

$$(5.2.13) \quad W = \{\psi \in H^1(\Omega) \mid \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_a\},$$

et l'ensemble

$$(5.2.14) \quad Q = \{\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid 0 \leq \beta(t) \leq 1 \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

Le théorème de représentation de *Riesz*, entraîne l'existence de $f : [0, T] \rightarrow V$ et $q : [0, T] \rightarrow W$, telles que

$$(5.2.15) \quad (f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v da,$$

$$(5.2.16) \quad (q(t), \psi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \psi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \psi da,$$

pour tout $v \in V$, $\psi \in W$ et $t \in [0, T]$. De plus, il vient de (5.2.6) and (5.2.7) que

$$(5.2.17) \quad f \in W^{1,1}(0, T; V),$$

$$(5.2.18) \quad q \in W^{1,1}(0, T; W).$$

Finalement, nous définissons la fonctionnelle $j : L^2(\Gamma_3) \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$(5.2.19) \quad j(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} -\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta) R_\tau(u_\tau) \cdot v_\tau da.$$

Compte tenu des hypothèses (5.2.5)–(5.2.8), il s’ensuit que les intégrales que nous venons de voir dans (5.2.15), (5.2.16) et (5.2.19) sont bien définies.

Supposons que (u, σ, φ, D) sont des fonctions régulières satisfaisant (5.1.3)–(5.1.12). D’une part, selon une procédure standard basée sur la formule de *Green* (2.2.3) combinée avec les conditions (5.1.3), (5.1.4), (5.1.5) et la définition de f , nous avons

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} = (f(t), v - u(t))_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu \cdot (v - u(t)) da, \quad \forall v \in V,$$

et compte tenu la décomposition du tenseur de *Cauchy* (1.1.3), nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} &= (f(t), v - u(t))_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t) (v_\nu - u_\nu(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau - u_\tau(t)) da \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant (5.1.7) et (5.1.8) on trouve

$$\begin{aligned} u(t) \in U_{ad}, \quad (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} &\geq (f(t), v - u(t))_V + \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) (v_\nu - u_\nu(t)) da \\ &- \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta) R_\tau(u_\tau) \cdot (v_\tau - u_\tau(t)) da \quad \forall v \in U_{ad}. \end{aligned}$$

Combinons cette dernière inégalité avec (5.2.19) pour obtenir

(5.2.20)

$$\begin{aligned} u(t) \in U_{ad}, \quad (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v - u(t)) &\geq (f(t), v - u(t))_V \\ &\forall v \in U_{ad}. \end{aligned}$$

Gardant à l’esprit (1.1.7) et (5.1.1) on peut écrire

$$(5.2.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(t) \in U_{ad}, (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + \\ (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v - u(t)) \\ \geq (f(t), v - u(t))_V \quad \forall v \in U_{ad}, \end{array} \right.$$

D'autre part, en utilisant la formule de *Green* (2.2.16) pour les inconnues électriques du problème ainsi que les conditions (5.1.4), (5.1.10), et (5.1.11) nous obtenons

$$(D(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} + \int_{\Omega} q_0(t)\psi dx = \int_{\Gamma_b} \psi q_2 da \quad \forall \psi \in W,$$

gardant à l'esprit (5.2.16) on obtient

$$(5.2.22) \quad (D(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} + (q(t), \psi)_W = 0.$$

Combinons cette dernière égalité avec (1.1.7) et (5.1.2) pour obtenir

$$(5.2.23) \quad (\mathcal{B}\nabla\varphi(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = (q(t), \psi)_W \\ \forall \psi \in W, \quad \forall t \in [0, T],$$

De (5.2.21) et (5.2.23) nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème électro-viscoélastique \mathcal{P}_3

Problème (\mathcal{P}_3^V). *Trouver un champ des déplacements* $u : [0, T] \rightarrow V$, *un potentiel électrique* $\varphi : [0, T] \rightarrow W$ *et un champ d'adhésion* $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ *tels que*

$$(5.2.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(t) \in U_{ad}, (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + \\ (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v - u(t)) \\ \geq (f(t), v - u(t))_V \quad \forall v \in U_{ad}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{array} \right.$$

$$(5.2.25) \quad (\mathcal{B}\nabla\varphi(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = (q(t), \psi)_W \\ \forall \psi \in W, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(5.2.26) \quad \dot{\beta}(t) = -(\gamma_\nu\beta(t)R_\nu(u_\nu(t))^2 - \varepsilon_a)_+ \text{ .p.p. } t \in (0, T),$$

$$(5.2.27) \quad u(0) = u_0,$$

$$(5.2.28) \quad \beta(0) = \beta_0.$$

5.3 Résultat d'existence et d'unicité

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 5.3.1. *Sous les hypothèses (5.2.1)–(5.2.9) et (5.2.12), le problème variationnel (\mathcal{P}_3^V) possède une solution unique (u, φ, β) ayant la régularité suivante :*

$$(5.3.1) \quad \mathbf{u} \in W^{1,\infty}(0, T; V),$$

$$(5.3.2) \quad \varphi \in W^{1,\infty}(0, T; W).$$

$$(5.3.3) \quad \beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}.$$

Un "quintuple" de fonctions $(u, \sigma, \varphi, D, \beta)$ qui satisfait (5.1.1), (5.1.2) et (5.2.24)–(5.2.28) est appelée solution faible du problème mécanique (\mathcal{P}_3) . Nous concluons par le Théorème 5.3.1 que, sous les hypothèses (5.2.1)–(5.2.9) et (5.2.12), le problème (\mathcal{P}_3) possède une solution faible unique.

Pour préciser la régularité de la solution faible, nous notons que les relations constitutives (5.1.1) et (5.1.2), les hypothèses (5.2.1)–(5.2.4) et les ré-

gularités (5.3.1)–(5.3.2) implique que $\sigma \in L^\infty(0, T; \mathcal{H})$, $D \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^d)$. En prenant maintenant $v = u(t) \pm \xi$, où $\xi \in C_0^\infty(\Omega)^d$, dans (5.2.20) et $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ dans (5.2.22) et en utilisant (5.2.15), (5.2.16), (5.2.19) nous obtenons

$$\operatorname{Div} \sigma(t) + f_0(t) = 0, \quad \operatorname{div} D(t) = q_0(t),$$

pour tout $t \in [0, T]$. Maintenant, de (5.2.6), (5.2.7) il vient que $\operatorname{Div} \sigma \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d)$ et $\operatorname{div} D \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$, ce qui montre que

$$(5.3.4) \quad \sigma \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}_1),$$

$$(5.3.5) \quad D \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{W}).$$

Finalement, nous concluons que la solution faible $(u, \sigma, \varphi, D, \beta)$ du problème piézoélectrique de contact avec adhésion of (\mathcal{P}_3) possède la régularité (5.3.1)–(5.3.5).

La démonstration du théorème 5.3.1 sera effectuée en plusieurs étapes et elle est basée sur le résultat abstrait donné par le théorème 2.4.14.

5.3.1 Démonstration du Théorème 5.3.1

Nous assmons dans ce qui suit que les hypothèses (5.2.1)–(5.2.9) et (5.2.12) sont satisfaites et que c est une constante positive générique qui peut dépendre de Ω , Γ_1 , Γ_3 , p_τ et L dont la valeur

peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite des diverses fonctions sur $x \in \Omega \cup \Gamma_3$.

Comme dans [59], en utilisant le théorème de représentation de *Riesz* on peut définir les opérateurs $\mathcal{G} : W \rightarrow W$ et $\mathcal{R} : V \rightarrow W$ par

$$(5.3.6) \quad (\mathcal{G}\varphi, \psi)_W = (\mathcal{B}\nabla\varphi, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall \varphi, \psi \in W,$$

$$(5.3.7) \quad (\mathcal{R}v, \varphi)_W = (\mathcal{E}\varepsilon(v), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall \varphi \in W, v \in V.$$

En utilisant (2.2.14), (2.2.13) et (5.2.4), nous pouvons montrer que \mathcal{G} est un opérateur linéaire continu, symétrique et positivement défini. Alors, \mathcal{G} possède un inverse sur W . En utilisant (2.2.14) et (5.2.3), nous pouvons montrer aussi que \mathcal{R} est un opérateur linéaire et continu sur V . Soit \mathcal{R}^* l'adjoint de \mathcal{R} . Donc, de (1.3.2) on peut écrire

$$(5.3.8) \quad (\mathcal{R}^*\varphi, v)_V = (\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall \varphi \in W, v \in V.$$

Soit $t \in [0, T]$. En introduisant (5.3.6), (5.3.7) dans (5.2.25), on obtient

$$(5.3.9) \quad (\mathcal{G}\varphi(t), \psi)_W = (\mathcal{R}u(t), \psi)_W + (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W,$$

d'où nous déduisons que

$$(5.3.10) \quad \mathcal{G}\varphi(t) = \mathcal{R}u(t) + q(t),$$

pour tout $t \in [0, T]$. Comme \mathcal{G} est inversible on obtient

$$(5.3.11) \quad \varphi(t) = \mathcal{G}^{-1}\mathcal{R}u(t) + \mathcal{G}^{-1}q(t).$$

Combinons l'inégalité (5.2.24) avec (5.3.6), (5.3.7), (5.3.8) et (5.3.11) pour trouver

$$(5.3.12) \quad \begin{aligned} & u(t) \in U_{ad}, (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + \\ & (\mathcal{R}^*\mathcal{G}^{-1}\mathcal{R}u(t), v - u(t))_V + j(\beta(t), u(t), v - u(t))_V \\ & \geq (f(t) - \mathcal{R}^*\mathcal{G}^{-1}q(t), v - u(t))_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Maintenant, soit $\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ donnée. Dans la première étape, nous prouvons l'existence d'une solution unique pour le problème variationnelle intermédiaire suivant.

Problème (\mathcal{P}_3^{V1}) Trouver un champ des déplacements $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$, tel que

(5.3.13)

$$\begin{aligned} u_\eta(t) \in U_{ad}, & \quad (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\eta(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\eta(t)))_{\mathcal{H}} + \\ & (\mathcal{R}^*\mathcal{G}^{-1}\mathcal{R}u_\eta(t), v - u_\eta(t))_V + (\eta(t), v - u_\eta(t))_V \\ & \geq (f(t) - \mathcal{R}^*\mathcal{G}^{-1}q(t), v - u_\eta(t))_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

(5.3.14)
$$u_\eta(0) = u_0.$$

Lemme 5.3.2. *Le problème \mathcal{P}_1^{V1} admet une solution unique u_η qui satisfait*

(5.3.15)
$$u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$$

Démonstration. Soit l'opérateur $L : V \rightarrow V$ défini par

(5.3.16)
$$L(v) = \mathcal{R}^*\mathcal{G}^{-1}\mathcal{R}(v), \quad \forall v \in V.$$

En utilisant les propriétés des opérateurs \mathcal{G} , \mathcal{R} et \mathcal{R}^* , nous déduisons que L est un opérateur linéaire et continu sur V . Donc, nous avons

(5.3.17)
$$\|Lu_1 - Lu_2\|_V \leq \|L\| \|u_1 - u_2\|_V \quad \forall u_1, u_2 \in V.$$

Le théorème de représentation de *Riesz* nous permet de définir l'opérateur $\mathbf{G} : V \rightarrow V$ par

(5.3.18)
$$(\mathbf{G}u, v)_V = (\mathcal{F}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Lu, v)_V \quad \forall u, v \in V.$$

Maintenant, en utilisant (5.2.1), (5.2.2), (5.2.10) et (5.3.18) on obtient

(5.3.19)
$$\|\mathbf{G}u_1 - \mathbf{G}u_2\|_V \leq \left(\frac{L_{\mathcal{F}}}{m_{\mathcal{A}}} + \|L\| \right) \|u_1 - u_2\|_V \quad \forall u_1, u_2 \in V,$$

ce qui montre que \mathbf{G} est un opérateur de *Lipschitz*. De plus, l'opérateur

$$(5.3.20) \quad \mathbf{G} + \left(\frac{L_{\mathcal{F}}}{m_{\mathcal{A}}} + \|L\| \right) I_V : V \rightarrow V,$$

est un opérateur monotone et de *Lipschitz* sur V .

Soit la fonction $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V$ donnée par

$$(5.3.21) \quad \mathbf{f}(t) = f(t) - \mathcal{R}^* \mathcal{G}^{-1} q(t) - \eta(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Gardant à l'esprit que $\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ et $\mathcal{R}^* \mathcal{G}^{-1}$ est linéaire et continu, en utilisant (5.2.17), (5.2.18), il vient de (5.3.21) que

$$(5.3.22) \quad \mathbf{f} \in W^{1,1}(0, T; V).$$

Soit $\psi_{U_{ad}} : V \rightarrow]-\infty, +\infty]$ la fonction indicatrice de l'ensemble U_{ad} et $\partial\psi_{U_{ad}}$ son sous-différentiel. Puisque $U_{ad} \subset V$ est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe, alors $\partial\psi_{U_{ad}}$ est un opérateur maximal monotone sur l'espace V et $D(\partial\psi_{U_{ad}}) = U_{ad}$. De plus, la somme

$$\partial\psi_{U_{ad}} + \mathbf{G} + \left(\frac{L_{\mathcal{F}}}{m_{\mathcal{A}}} + \|L\| \right) I_V : U_{ad} \subset V \rightarrow 2^V,$$

est un opérateur maximal monotone. Maintenant, les hypothèses (5.3.22) et (5.2.12) nous permettent d'utiliser le théorème 2.4.14 avec

$$X = V, \quad A = \partial\psi_{U_{ad}} + \mathbf{G} : D(A) = U_{ad} \subset V \rightarrow 2^V \quad \text{et} \quad \omega = \frac{L_{\mathcal{F}}}{m_{\mathcal{A}}} + \|L\|.$$

Donc, il existe un unique élément $u_{\eta} \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ tel que

$$(5.3.23) \quad \dot{u}_{\eta}(t) + \partial\psi_{U_{ad}}(u_{\eta}(t)) + \mathbf{G}u_{\eta}(t) \ni \mathbf{f}(t) \quad \text{a.e. } t \in (0, T),$$

$$(5.3.24) \quad u_{\eta}(0) = u_0.$$

On a pour tout $u, g \in V$, l'équivalence suivante est vérifiée

$$g \in \partial\psi_{U_{ad}}(u) \Leftrightarrow u \in U_{ad}, \quad (g, v - u)_V \leq 0 \quad \forall v \in U_{ad},$$

d'où l'inclusion différentielle (5.3.23) est équivalente à l'inéquation variationnelle suivante :

$$(5.3.25) \quad \begin{aligned} u_\eta(t) \in U_{ad}, \quad (\dot{u}_\eta(t), v - u_\eta(t))_V + (\mathbf{G}u_\eta(t), v - u_\eta(t))_V \\ \geq (\mathbf{f}(t), v - u_\eta(t))_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant (5.3.25), (5.3.18) et (5.2.10), nous déduisons que u_η satisfait

$$(5.3.26) \quad \begin{aligned} u_\eta(t) \in U_{ad}, \quad (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\eta(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\eta(t)))_{\mathcal{H}} + \\ (Lu_\eta(t), v - u_\eta(t))_V \geq (\mathbf{f}(t), v - u_\eta(t))_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Finalement, des relations (5.3.26), (5.3.21), (5.3.16) et (5.3.24) on conclut que u_η satisfait (5.3.13) et (5.3.14), ce qui termine la démonstration du 5.3.2.

■

Dans la deuxième étape on utilisera le champ de déplacement u_η obtenu dans le lemme 5.3.2 pour obtenir le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Lemme 5.3.3. *Il existe un unique élément $\varphi_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; W)$ tel que*

$$(5.3.27) \quad \begin{aligned} (\mathcal{B}\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = (q(t), \psi)_W \\ \forall \psi \in W, \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ la fonction définie dans le lemme 5.3.2. En utilisant (5.3.11), l'existence et l'unicité de u_η nous garantie l'existence et l'unicité de la fonction φ_η . Maintenant, en utilisant (5.3.9), (5.3.7) et (5.3.6), nous concluons que φ_η vérifie l'égalité (5.3.27). De plus, puisque $u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ il vient de (5.3.11) et (5.2.18) que $\varphi_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; W)$. ■

Dans la troisième étape nous utilisons la solution $u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ obtenue dans le lemme 5.3.2 et nous considérons le problème de Cauchy suivant :

Problem \mathcal{P}^{β_η} . *Trouver un champ d'adhésion $\beta_\eta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que*

$$(5.3.28) \quad \dot{\beta}_\eta(t) = -(\gamma_\nu \beta_\eta(t) R_\nu(u_{\eta\nu}(t))^2) - \varepsilon_a)_+ \text{ a.e. } t \in (0, T),$$

$$(5.3.29) \quad \beta_\eta(0) = \beta_0.$$

We obtain the following result.

Lemme 5.3.4. *Le problème \mathcal{P}^{β_η} admet une solution unique β_η qui satisfait*

$$(5.3.30) \quad \beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}.$$

Démonstration. Nous considérons l'application $F : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ défini par

$$F(t, \beta_\eta) = -(\gamma_\nu \beta_\eta(t) R_\nu(u_{\eta\nu}(t))^2) - \varepsilon_a)_+.$$

Soit $t \in [0, T]$ et $\beta_\eta \in L^2(\Gamma_3)$. Il s'ensuit d'après les propriétés des opérateurs de troncation R_ν et R_τ que F est de Lipschitz par rapport à la seconde variable, uniformément en temps. De plus, pour tout $\beta_\eta \in L^2(\Gamma_3)$ l'application $t \mapsto F(t, \beta_\eta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$. Moyennant maintenant le Théorème 2.6.1, nous obtenons l'existence d'une fonction unique $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ qui résout le problème \mathcal{P}^{β_η} . Notons que la restriction $0 \leq \beta_\eta \leq 1$ est incluse implicitement dans le problème variationnel \mathcal{P}_3^V . En effet, les conditions (5.2.26) et (5.2.28) nous garantissent que $\beta_\eta(t) \leq \beta_0$ et donc l'hypothèse (5.2.9) montre que $\beta_\eta(t) \leq 1$ pour $t \geq 0$, p.p. sur Γ_3 . D'un autre côté, si $\beta_\eta(t_0) = 0$ à $t = t_0$, alors il s'ensuit de (5.2.26) et (5.2.28) que $\dot{\beta}_\eta(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ et donc, $\beta_\eta(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. sur Γ_3 . Nous concluons que $0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. sur Γ_3 . Il résulte de la définition de

l'ensemble \mathcal{Q} , que $\beta_\eta \in \mathcal{Q}$, ce qui conclut la preuve du lemme 5.3.4. ■

Maintenant, soit $\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ et u_η and β_η les solutions obtenues dans les lemmes 5.3.2 et 5.3.4, respectivement. En utilisant le théorème de représentation de *Riesz-Fréchet* on peut définir l'opérateur $\Lambda\eta : [0, T] \rightarrow V$ par

$$(5.3.31) \quad (\Lambda\eta(t), v)_V = j(\beta_\eta(t), u_\eta(t), v),$$

pour tout $v \in V$ et $t \in [0, T]$. Nous avons le résultat suivant :

Lemme 5.3.5. *Pour tout $\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ on a $\Lambda\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$. De plus, il existe un unique élément $\eta^* \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ tel que*

$$(5.3.32) \quad \Lambda\eta^* = \eta^*.$$

Démonstration. Soit $\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ et $t_1, t_2 \in [0, T]$. En utilisant (5.3.31) et (5.2.19), on obtient

$$\begin{aligned} & \| \Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2) \|_V \leq c \| \beta_\eta^2(t_1)R_\nu(u_{\eta\nu}(t_1)) - \beta_\eta^2(t_2)R_\nu(u_{\eta\nu}(t_2)) \|_{L^2(\Gamma_3)} + \\ & c \| p_\tau(\beta_\eta(t_1))R_\tau(u_{\eta\tau}(t_1)) - p_\tau(\beta_\eta(t_2))R_\tau(u_{\eta\tau}(t_2)) \|_{L^2(\Gamma_3)}. \end{aligned}$$

Gardant à l'esprit (5.2.5), (2.2.8), l'inégalité $0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1$ et les propriétés des opérateurs R_ν et R_τ , nous trouvons

$$(5.3.33) \quad \begin{aligned} & \| \Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2) \|_V \leq c \| u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2) \|_V + \\ & c \| \beta_\eta(t_1) - \beta_\eta(t_2) \|_{L^2(\Gamma_3)}. \end{aligned}$$

Puisque $u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ et $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}$, nous déduisons de l'inégalité (5.3.33) que $\Lambda\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$.

Soit maintenant $\eta_1, \eta_2 \in W^{1,\infty}(0, T; V)$, et soit $u_i = u_{\eta_i}$, $\dot{u}_i = \dot{u}_{\eta_i}$, $\beta_i = \beta_{\eta_i}$ pour $i = 1, 2$. Pour $t \in [0, T]$, nous intégrons (5.3.28) avec la condition initiale

(5.3.29) pour obtenir

$$\beta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t (\gamma_\nu \beta_i(s) R_\nu(u_{i\nu}(s))^2 - \varepsilon_a)_+ ds.$$

En utilisant les propriétés de l'opérateur R_ν , l'inégalité $|R_\nu(u_\nu)| \leq L$, et écrivant $\beta_1 = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2$, nous arrivons à

$$\begin{aligned} \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \\ &\quad c \int_0^t \|u_{1\nu}(s) - u_{2\nu}(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \end{aligned}$$

Moyennant une version des lemmes de Gronwal (Corollaire (2.6.5)), il s'ensuit que

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|u_{1\nu}(s) - u_{2\nu}(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds,$$

combinons cette dernière inégalité avec (2.2.8), pour obtenir

$$(5.3.34) \quad \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds.$$

D'autre part, en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés pour la preuve de (5.3.33), nous obtenons

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V \leq c \|u_1(t) - u_2(t)\|_V + c \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}$$

Donc, en utilisant (5.3.34) on trouve

$$(5.3.35) \quad \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V \leq c \|u_1(t) - u_2(t)\|_V + c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds.$$

Ensuite, nous utilisons (5.3.25) et (5.3.21) pour obtenir

$$\begin{aligned} (\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t), u_1(t) - u_2(t))_V &\leq (\eta_2(t) - \eta_1(t), u_1(t) - u_2(t))_V \\ &\quad + (\mathbf{G}u_2(t) - \mathbf{G}u_1(t), u_1(t) - u_2(t))_V \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* et (5.3.19), nous obtenons

$$\begin{aligned} (\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t), u_1(t) - u_2(t))_V &\leq \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V \|u_1(t) - u_2(t)\|_V \\ &\quad + \left(\frac{L_{\mathcal{F}}}{m_{\mathcal{A}}} + \|L\|\right) \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2. \end{aligned}$$

Nous intégrons l'inégalité précédente avec les conditions initiales $u_1(0) = u_2(0) = u_0$, pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 &\leq \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds \\ &\quad + \left(\frac{L_{\mathcal{F}}}{m_{\mathcal{A}}} + \|L\|\right) \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité suivante

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \quad a, b \in \mathbb{R},$$

on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \\ &\quad + \left(\frac{L_{\mathcal{F}}}{m_{\mathcal{A}}} + \|L\|\right) \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds, \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V^2 ds + c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds,$$

Ensuite, moyennant une version des lemmes de Gronwal (Corollaire (2.6.5)), il s'ensuit que

$$(5.3.36) \quad \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V^2 ds.$$

Maintenant, en utilisant (5.3.35), l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* et après

quelques manipulations algébriques nous arrivons à l'inégalité

$$(5.3.37) \quad \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V^2 \leq c \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds.$$

Combinons maintenant (5.3.36) et (5.3.37) pour trouver

$$(5.3.38) \quad \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V^2 \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V^2 ds \quad \forall t \in [0, T].$$

L'itération de cette dernière inégalité n fois entraîne l'inégalité suivante :

$$(5.3.39) \quad \|\Lambda^m\eta_1(t) - \Lambda^m\eta_2(t)\|_{L^\infty(0, T; V)}^2 \leq \frac{c^m T^m}{m!} \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{L^\infty(0, T; V)}^2,$$

ce qui implique pour m suffisamment grand, l'application $\Lambda^m : L^\infty(0, T; V) \rightarrow L^\infty(0, T; V)$ est une contraction dans l'espace de Banach $L^\infty(0, T; V)$. Donc, d'après le théorème du point fixe il existe un unique élément $\eta^* \in L^\infty(0, T; V)$ tel que $\Lambda^m\eta^* = \eta^*$, et par conséquent η^* est l'unique point fixe de l'opérateur Λ . La régularité $\eta^* \in W^{1, \infty}(0, T; V)$ découle de la régularité $\Lambda\eta^* \in W^{1, \infty}(0, T; V)$, ce qui termine la démonstration du lemme 5.3.5. ■

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du Théorème 5.3.1.

Démonstration. Existence. Soit $\eta^* \in W^{1, \infty}(0, T; V)$ le point fixe de l'opérateur Λ et soient (u, φ, β) les solutions définies dans les lemmes 5.3.2, 5.3.3 et 5.3.4, respectivement, pour $\eta = \eta^*$, c'est-à-dire $u = u_{\eta^*}$, $\varphi = \varphi_{\eta^*}$, et $\beta = \beta_{\eta^*}$. Il est évident que les égalités (5.2.25), (5.2.26) and (5.2.28) sont vérifiées des lemmes 5.3.3 and 5.3.4. De plus, puisque $\Lambda\eta^* = \eta^*$, de (5.3.14), (5.3.13), (5.3.11), (5.3.8), (5.3.7) (5.3.6) et (5.3.31) il vient que (5.2.24) et (5.2.27) sont vérifiées. Les régularités des solutions données par (5.3.1), (5.3.2) et (5.3.3) découlent des lemmes 5.3.2, 5.3.3 et 5.3.4, respectivement.

Unicité : L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du

point fixe de l'opérateur Λ et l'unique solvabilité des problèmes \mathcal{P}^{β_η} et \mathcal{P}_3^{V1} . ■

CHAPITRE 6

PROBLÈME

ÉLÉCTRO-VISCOÉLASTIQUE AVEC ADHÉSION ET FROTTEMENT

Dans ce chapitre, on va étudier un modèle mathématique qui décrit le contact bilatéral entre un corps piézoélectrique et une base rigide. Les propriétés mécaniques et électriques du corps sont décrit par une loi constitutive de comportement électro-viscoélastique non linéaire et le processus est quasistatique. Le contact est modélisé par une condition de contact bilatéral et le frottement est formulé par une version de la loi de *Coulomb* couplée avec adhésion. Nous établissons un résultats d'existence et d'unicité d'une solution faible pour ce modèle.

6.1 Formulation du problème

Nous nous plaçons dans le même cadre physique des deux chapitres précédents et nous considérons que la loi constitutive du corps est électro-viscoélastique. Le problème mécanique se formule comme suit :

Problem \mathcal{P}_4 *Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, un potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ des déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ*

d'adhésion $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$(6.1.1) \quad \sigma = \mathcal{F}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) - \mathcal{E}^* \mathbf{E}(\varphi) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(6.1.2) \quad D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + \mathcal{B}\mathbf{E}(\varphi) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(6.1.3) \quad \text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(6.1.4) \quad \text{div } D = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(6.1.5) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T),$$

$$(6.1.6) \quad \sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T),$$

et sur $\Gamma_3 \times (0, T)$

$$(6.1.7) \quad u_\nu = 0,$$

$$(6.1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)| \leq \mu p(|\mathcal{R}(\sigma_\nu)|), \\ |\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)| < \mu p(|\mathcal{R}(\sigma_\nu)|) \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)| = \mu p(|\mathcal{R}(\sigma_\nu(u))|) \\ \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) = -\lambda \dot{u}_\tau, \end{array} \right.$$

$$(6.1.9) \quad \dot{\beta} = -(\gamma_\tau \beta \|R_\tau(u_\tau)\|^2) - \epsilon_a)_+,$$

$$(6.1.10) \quad \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T),$$

$$(6.1.11) \quad D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T),$$

$$(6.1.12) \quad D \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(6.1.13) \quad \beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

$$(6.1.14) \quad u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Les équations (6.1.1) et (6.1.2) représentent la loi de comportement électro-viscoélastique que nous avons introduite dans (1.3.5), les équations (6.1.3)

et (6.1.4) représentent les équations d'équilibre, tandis que les équations (6.1.5) et (6.1.6) sont respectivement, des conditions aux limites en déplacements et en tractions. La condition (6.1.7) décrit le cas où le contact se fait de façon belaterale c'est-à-dire le contact est maintenu pendant le mouvement et il n'ya pas de séparation entre le corps et la fondation. Les conditions (6.1.8) sont les conditions de frottement avec adhésion. L'équation (6.1.9) est l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion, avec la condition initiale (6.1.13) où β_0 est un champ d'adhésion donné, tandis que (6.1.10) et (6.1.11) représentent les conditions aux limites électriques sur Γ_a et Γ_b , respectivement. La condition (6.1.12) signifie que la base est isolatrice. Finalement (6.1.13) et (6.1.14) sont les conditions initiales.

6.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème mécanique \mathcal{P}_4 consiste à supposer que l'opérateur de viscosité \mathcal{F} , l'opérateur d'élasticité \mathcal{G} , le tenseur piézoélectrique \mathcal{E} , le tenseur diélectrique \mathcal{B} et La fonction p (le seuil de frottement) satisfont les propriétés suivantes :

$$(6.2.1) \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)) \cdot (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \mathcal{H}. \end{array} \right.$$

$$(6.2.2) \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b)} \quad \text{Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)\| \leq L_{\mathcal{G}} \|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c)} \quad \text{L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d)} \quad \text{L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \mathcal{H}. \end{array} \right.$$

$$(6.2.3) \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b)} \quad \mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = (e_{ijk}(\mathbf{x})\tau_{jk}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c)} \quad e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right.$$

$$(6.2.4) \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b)} \quad \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{E}) = (\beta_{ij}(\mathbf{x})E_j) \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c)} \quad \mathcal{B}_{ij} = \mathcal{B}_{ji} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(d)} \quad \text{Il existe } m_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que } \beta_{ij}(\mathbf{x})E_iE_j \geq m_{\mathcal{B}}\|\mathbf{E}\|^2 \\ \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right.$$

$$(6.2.5) \left\{ \begin{array}{l} p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ satisfait} \\ \text{(a)} \quad \text{Il existe } L_p > 0 \text{ telle que :} \\ \quad |p(x, r_1) - p(x, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \text{ pour tout} \\ \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b)} \quad \text{L'application } (b) \quad x \mapsto p(x, r) \text{ est mesurable sur} \\ \quad \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(c)} \quad p(x, 0) = 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right.$$

En utilisant la continuité de l'opérateur de régularisation $\mathcal{R} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$ et la continuité de la fonction de trace $\sigma \rightarrow \sigma_\nu : \mathcal{H}_1 \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, nous déduisons l'existence d'une constante $C_{\mathcal{R}}$, dépend seulement de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3$ et \mathcal{R} telle que

$$(6.2.6) \quad \|\mathcal{R}(\sigma_\nu)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_{\mathcal{R}} \|\sigma\|_{\mathcal{H}_1} \cdot \forall \sigma \in \mathcal{H}_1.$$

Nous supposons que les forces volumiques, les tractions surfaciques et les densités des charges électriques volumiques et surfaciques vérifient :

$$(6.2.7) \quad \mathbf{f}_0 \in C(0, T; H), \quad \mathbf{f}_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)^d),$$

$$(6.2.8) \quad q_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_b)).$$

Par la suite, nous définissons les fonctions $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V$, $q : [0, T] \rightarrow W$ et $h : V \times W \rightarrow W$ comme suit :

$$(6.2.9) \quad (f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v \, da,$$

$$(6.2.10) \quad (q(t), \xi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \xi \, dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \xi \, da,$$

pour tout $u, v \in V$, $\xi \in W$ et $t \in [0, T]$, et nous notons que les conditions (6.2.7) et (6.2.8) implique que

$$(6.2.11) \quad \mathbf{f} \in C(0, T; V), \quad q \in C(0, T; W).$$

Soit l'ensemble

$$(6.2.12) \quad \mathcal{Q} = \{\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid 0 \leq \beta(t) \leq 1 \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

et l'ensemble fermé non vide

$$(6.2.13) \quad V = \{V \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1, v_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3\}$$

Supposons que les coefficients d'adhésion γ_ν, γ_τ et ϵ_a satisfont les conditions

$$(6.2.14) \quad \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \epsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\tau, \epsilon_a \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3,$$

tandis que la coefficient de frottement μ vérifie

$$(6.2.15) \quad \mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3$$

Finalement, nous supposons que les condtions initiales β_0 et u_0 satisfont

$$(6.2.16) \quad \beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \text{ p.p. sur } \Gamma_3,$$

$$(6.2.17) \quad u_0 \in V.$$

Nous définissons la fonctionnelle d'adhésion $j_{ad} : L^2(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$(6.2.18) \quad j_{ad}(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) \cdot v_\tau da,$$

et la fonctionnelle de frottement $j_{fr} : \mathcal{H}_1 \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$(6.2.19) \quad j_{fr}(\sigma, v) = \int_{\Gamma_3} \mu p(|R(\sigma_\nu)|) \cdot |v_\tau| da$$

Supposons que (u, σ, φ, D) sont des fonctions régulières satisfaisant (6.1.3)–(6.1.12). D'une part, selon une procédure standard basée sur la formule de Green (2.2.3) combinée avec les conditions (6.1.3), (6.1.4), (6.1.5) et la

définition de f , nous avons

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} = (f(t), v - \dot{u}(t))_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu \cdot (v - \dot{u}(t)) da, \quad \forall v \in V,$$

et compte tenu la décomposition du tenseur de *Cauchy* (1.1.3), nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} &= (f(t), v - \dot{u}(t))_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t) \cdot (v_\nu - \dot{u}_\nu(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau - \dot{u}_\tau(t)) da \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant (6.1.7), (6.1.8) et l'égalité précédente on trouve

$$\begin{aligned} (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} &\geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V - \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) \cdot (v_\tau - \dot{u}_\tau(t)) da \\ &- \int_{\Gamma_3} \mu p(|R(\sigma_\nu)|) (\|v_\tau\| - \|\dot{u}_\tau\|) da \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Combinons cette dernière inégalité avec (6.2.18) et (6.2.19) pour obtenir

$$\begin{aligned} (6.2.20) \quad &(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - \dot{u}(t)) + \\ &+ j_{fr}(\sigma(t), v) - j_{fr}(\sigma(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \\ &\forall v \in V, \text{ p.p. } t \in [0, T] \end{aligned}$$

Gardant à l'esprit (1.1.7) et (6.1.1) on peut écrire

$$(6.2.21) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\mathcal{F}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + \\ &(\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - \dot{u}(t)) + \\ &+ j_{fr}(\sigma(t), v) - j_{fr}(\sigma(t), \dot{u}(t)) \\ &\geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in U_{ad}, \end{aligned} \right.$$

D'autre part, en utilisant la formule de *Green* (2.2.16) pour les inconnues électriques du problème ainsi que les conditions (6.1.4), (6.1.10), (6.1.11) et

(6.1.12) nous obtenons

$$(D(t), \nabla \xi)_{L^2(\Omega)^d} + \int_{\Omega} q_0(t) \xi dx = \int_{\Gamma_b} q_2 \xi da \quad \forall \xi \in W.$$

Gardant à l'esprit (6.2.10) et (6.2.17) on obtient

$$(6.2.22) \quad (D(t), \nabla \xi)_{L^2(\Omega)^d} + (q(t), \xi)_W = 0 \quad \forall \xi \in W.$$

Combinons cette dernière égalité avec (1.1.7) et (6.1.2) pour obtenir

$$(6.2.23) \quad (\mathcal{B} \nabla \varphi(t), \nabla \xi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \xi)_{L^2(\Omega)^d} = (q(t), \xi)_W \\ \forall \psi \in W, \quad \forall t \in [0, T],$$

De (6.2.21) et (6.2.23) nous obtenons la formulation variationnelle du problème électro-viscoélastique \mathcal{P}_4

Problème \mathcal{P}_4^{V1} Trouver un champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, un potentiel électrique $\varphi : [0, T] \rightarrow W$, et un champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que

$$(6.2.24) \quad \sigma = \mathcal{F} \varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G} \varepsilon(u) - \mathcal{E}^* \mathbf{E}(\varphi)$$

$$(6.2.25) \quad (\sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - \dot{u}(t)) \\ + j_{fr}(\sigma(t), v) - j_{fr}(\sigma(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V, \\ \forall v \in V, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(6.2.26) \quad (\mathcal{B} \nabla \varphi(t), \nabla \xi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \xi)_H = (q(t), \xi)_W, \\ \forall \xi \in W, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(6.2.27) \quad \dot{\beta}(t) = -(\gamma_{\tau} \beta(t) \|R_{\tau}(u_{\tau}(t))\|^2) - \epsilon_a)_+, \quad \mathbf{p.p.} \quad t \in (0, T),$$

$$(6.2.28) \quad u(0) = u_0$$

$$(6.2.29) \quad \beta(0) = \beta_0.$$

Dans le reste de cette section, nous présentons quelques inégalités com-

prenant les fonctionnelles j_{ad} et j_{fr} qui seront utilisées dans les sections suivantes. Ci-dessous dans cette section, β, β_1, β_2 dénotent les éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tel que $0 \leq \beta, \beta_1, \beta_2 \leq 1$ p.p. sur Γ_3 ; u_1, u_2, v_1, v_2, u et v représentent des éléments de V ; et c est une constante générique positive qui peut dépendre de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \gamma_\tau$ et L , dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la raison de simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite aux fonctions diverses sur $x \in \Omega \cup \Gamma_3$.

D'abord nous faisons remarquer que la fonctionnelles j_{ad} est linéaires par rapport au dernier argument et donc

$$(6.2.30) \quad j_{ad}(\beta, u, -v) = -j_{ad}(\beta, u, v).$$

Ensuite, en utilisant (6.2.18) et les inégalités; $\|R_\tau(u_\tau)\| \leq L, |\beta_1| \leq 1, |\beta_2| \leq 1$, nous déduisons que

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| \|u_1 - u_2\| da.$$

En combinant cette inégalité avec (2.2.8), nous obtenons

$$(6.2.31) \quad j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u_1 - u_2\|_V.$$

En choisissant $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ dans (6.2.31), nous trouvons

$$(6.2.32) \quad j_{ad}(\beta, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta, u_2, u_1 - u_2) \leq 0.$$

Des manipulations semblables, basées sur la Lipschitzialité de l'opérateurs R_τ , montrent que

$$(6.2.33) \quad |j_{ad}(\beta, u_1, v) - j_{ad}(\beta, u_2, v)| \leq c \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V.$$

Aussi, nous prenons $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans (6.2.32), ensuite nous utilisons l'égalités $R_\tau(0) = 0$ et (6.2.31) pour obtenir

$$(6.2.34) \quad j_{ad}(\beta, v, v) \geq 0.$$

En utilisant (6.2.5)(a), (6.2.19), (2.2.8), les propriétés de l'opérateur R et les inégalités $\|R_\tau(u_\tau)\| \leq L$, $|\beta_1| \leq 1$, $|\beta_2| \leq 1$, nous déduisons que :

$$(6.2.35) \quad \begin{aligned} & j_{fr}(\sigma_1, v_2) - j_{fr}(\sigma_1, v_1) + j_{fr}(\sigma_2, v_1) - j_{fr}(\sigma_2, v_2) \\ & \leq L_p C_{\mathcal{R}C_0} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\sigma_2 - \sigma_1\|_{\mathcal{H}} \|v_2 - v_1\|_V). \end{aligned}$$

Dans l'inégalité précédente, si on prend $\sigma_1 = \sigma_2 = g$ on obtient

$$(6.2.36) \quad j_{fr}(g, v_2) - j_{fr}(g, v_1) + j_{fr}(g, v_1) - j_{fr}(g, v_2) \leq 0$$

Les inégalités (6.2.31)–(6.2.36) combinées avec l'égalités (6.2.30) vont être utilisées dans des places diverses dans le reste du chapitre.

Nous énonçons maintenant notre résultat principal concernant l'unique solvabilité du Problème \mathcal{P}_4^{V1} .

Théorème 6.2.1. *Supposons que (6.2.1)–(6.2.5), (6.2.7)–(6.2.8) et (6.2.14)–(6.2.17) sont vérifiées. Alors, Il existe μ_0 dépendant uniquement de Ω , Γ_1 , Γ_3 , p , L et R telle que si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$, alors le problème \mathcal{P}_4^{V1} admet une solution unique, de plus la solution satisfait*

$$(6.2.37) \quad u \in C^1(0, T; V),$$

$$(6.2.38) \quad \varphi \in C([0, T]; W).$$

$$(6.2.39) \quad \beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}.$$

Un "quintuple" de fonctions $(u, \sigma, \varphi, \beta, D)$ qui satisfait (6.1.1), (6.1.2),

(6.2.25)–(6.2.29) est appelée solution faible du problème mécanique (\mathcal{P}_4) . Nous concluons par le Théorème 6.2.1 que, sous les hypothèses (6.2.1)–(6.2.5), (6.2.7)–(6.2.8) et (6.2.14)–(6.2.17) le problème \mathcal{P}_4 possède une solution faible unique.

Pour préciser la régularité de la solution faible, nous notons que les relations constitutives (6.1.1) et (6.1.2), les hypothèses (6.2.1)–(6.2.4) et les régularités (6.2.37)–(6.2.38) implique que $\sigma \in C(0, T; \mathcal{H})$, $D \in C(0, T; \mathcal{W})$. En prenant $v = \dot{u}(t) \pm z$ où $z \in C_0^\infty(\Omega)^d$ dans (6.2.25) et $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ dans (6.2.26) et en utilisant les définitions des f , q , j_{ad} et j_{fr} nous obtenons

$$(6.2.40) \quad \text{Div } \sigma(t) + f_0(t) = 0, \quad \text{div } D(t) + q_0(t) = 0,$$

pour tout $t \in [0, T]$. Il s'ensuit maintenant de (6.2.7) et (6.2.8) que $\text{Div } \sigma \in C(0, T; H)$ et $\text{div } D \in C(0, T; L^2(\Omega))$ ce qui montre que

$$(6.2.41) \quad \sigma \in C([0, T]; \mathcal{H}_1),$$

$$(6.2.42) \quad D \in C([0, T]; \mathcal{W}_1)$$

Nous concluons que la solution faible $(u, \sigma, \varphi, D, \beta)$ du problème piézoélectrique de contact avec adhésion et frottement (\mathcal{P}_4) possède la régularité (6.2.37)–(6.2.39), (6.2.41) et (6.2.42).

6.3 Démonstration du Théorème 6.2.1

La démonstration du théorème (6.2.1) sera effectuée en plusieurs étapes et elle est basée sur les résultats abstraits donnés par les théorèmes (2.5.1), (2.6.1) et le corollaire (2.4.17). A cet effet, nous supposons dans la suite que (6.2.1)–(6.2.5), (6.2.7)–(6.2.8) et (6.2.14)–(6.2.17) sont satisfaites; ci-après, c est une constante positive générique qui peut dépendre de Ω , Γ_1 , Γ_3 , p , L et R

, dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite des diverses fonctions sur $x \in \Omega \cup \Gamma$.

Soit $\eta \in C([0, T]; V)$, $g \in C([0, T]; \mathcal{H})$ des fonctions données et soit

$$(6.3.1) \quad \sigma_{\eta g}(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\dot{u}_{\eta g}(t)) + \varepsilon(\eta(t)),$$

Dans la première étape, nous considérons le problème intermédiaire suivant :

Problème $\mathcal{P}_{\eta g}^{V2}$ Trouver un champ de déplacement $u_{\eta g} : [0, T] \rightarrow V$, tel que

$$(6.3.2) \quad \begin{aligned} & (\mathcal{F}\varepsilon(\dot{u}_{\eta g}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}_{\eta g}(t)))_{\mathcal{H}} + j_{fr}(g(t), v) - j_{fr}(g(t), \dot{u}_{\eta g}(t))) \\ & \geq (f(t) - \eta(t), v - \dot{u}_{\eta g}(t))_V, \quad \forall v \in V, \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

$$(6.3.3) \quad u_{\eta g}(0) = u(0)$$

Dans l'étude du problème variationnel $\mathcal{P}_{\eta g}^{V2}$ nous avons le résultat suivant :

Lemme 6.3.1. *Supposons que (6.2.1)–(6.2.5), (6.2.7)–(6.2.8) et (6.2.14)–(6.2.17) sont vérifiées. Alors, le problème $\mathcal{P}_{\eta g}^{V2}$ admet une solution unique, de plus la solution satisfait*

$$(6.3.4) \quad u_{\eta g} \in C^1(0, T; V),$$

Démonstration. En utilisant le théorème de représentation de Riesz on peut définir l'opérateur $A : V \rightarrow V$ comme suit :

$$(6.3.5) \quad (Au(t), v)_V = (\mathcal{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V.$$

Soit $t \in [0, T]$ et soit $u_1(t), u_2(t) \in V$. Nous utilisons (6.3.5) pour trouver

$$(Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t))_V = (\mathcal{F}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{F}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t)))_{\mathcal{H}}.$$

Moyennant maintenant (6.2.1)(c) et (2.2.7) nous déduisons que

$$(6.3.6) \quad (Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t))_V \geq m_{\mathcal{F}} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2.$$

Soit $v \in V$, en utilisant (6.3.5) nous avons

$$(Au_1(t) - Au_2(t), v)_V = (\mathcal{F}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{F}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V.$$

Combinons l'inégalité précédente avec (6.2.1)(b) et (2.2.7) pour trouver

$$(Au_1(t) - Au_2(t), v)_V \leq L_{\mathcal{F}} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Mettons ensuite $v = Au_1(t) - Au_2(t)$ dans l'inégalité précédente pour obtenir

$$(6.3.7) \quad \|Au_1(t) - Au_2(t)\|_V \leq L_{\mathcal{F}} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V.$$

Nous concluons de (6.3.6) et (6.3.7) que A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. La fonctionnelle $j_{fr}(g(t), \cdot)$ une fonctionnelle propre, convexe et semi-continue inférieurement sur V . Alors, en utilisant des arguments classiques sur les inéquations variationnelles elliptiques (voir Théorème 2.5.1), nous déduisons qu'il existe une fonction unique $v_{\eta g} \in V$ qui vérifie

$$(6.3.8) \quad \begin{aligned} & (\mathcal{F}\varepsilon(v_{\eta g}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(v_{\eta g}(t)))_{\mathcal{H}} + j_{fr}(g(t), v) - j_{fr}(g(t), v_{\eta g}(t)) \\ & \geq (f(t) - \eta(t), v - v_{\eta g}(t))_V, \quad \forall v \in V, \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

Nous montrons maintenant que $v_{\eta g} \in C(0, T; V)$. En utilisant (6.3.8), (6.2.1)(c),

(6.2.19) et après quelques manipulation algébriques on peut montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$(6.3.9) \quad \begin{aligned} \|v_{\eta g}(t_1) - v_{\eta g}(t_2)\|_V &\leq c(\|f(t_1) - f(t_2)\|_V \\ &+ \|\eta(t_1) - \eta(t_2)\|_V + \|g(t_1) - g(t_2)\|_{\mathcal{H}}). \end{aligned}$$

Compte tenu que $f \in C(0, T; V)$, $\eta \in C(0, T; V)$ et $g \in C([0, T]; \mathcal{H}_1)$, nous concluons de l'inégalité précédente que

$$(6.3.10) \quad v_{\eta g} \in C(0, T; V),$$

Soit maintenant $u_{\eta g} : [0, T] \rightarrow V$ la fonction définie par

$$(6.3.11) \quad u_{\eta g}(t) = u_{\eta g}(0) + \int_0^t v_{\eta g}(s) ds$$

Il vient de (6.3.5), (6.3.8), (6.3.8), (6.3.10) et (6.3.11) que $u_{\eta g}$ est la solution unique du problème $\mathcal{P}_{\eta g}^{V2}$ qui satisfait

$$(6.3.12) \quad u_{\eta g} \in C^1(0, T; V).$$

■

Notons que la relations (6.3.1), l'hypothèse (6.2.1) et les régularités $\eta \in C([0, T]; V)$, $v_{\eta g} \in C(0, T; V)$, implique que $\sigma_{\eta g} \in C(0, T; \mathcal{H})$. En prenant maintenant $v = \dot{u}_{\eta g}(t) \pm z$ où $z \in C_0^\infty(\Omega)^d$ dans (6.3.2) et en utilisant (6.3.1) et les définitions de f , j_{ad} et j_{fr} , on obtient

$$(6.3.13) \quad Div \sigma_{\eta g}(t) + f_0(t) = 0,$$

pour tout $t \in [0, T]$. Il vient maintenant de (6.2.7) que $Div \sigma_{\eta g} \in C(0, T; H)$ ce

qui montre que

$$(6.3.14) \quad \sigma_{\eta g} \in C([0, T]; \mathcal{H}_1),$$

Dans l'étape suivante nous utilisons la solution $u_{\eta g} \in C^1([0, T], V)$ obtenue dans le Lemme 6.3.1 pour construire le problème variationnel suivant.

Problème $\mathcal{P}^{\varphi_{\eta g}}$. *Trouver un potentiel électrique $\varphi_{\eta g} : [0, T] \rightarrow W$ tel que*

$$(6.3.15) \quad (\mathcal{B}\nabla\varphi_{\eta g}(t), \nabla\xi)_W - (\mathcal{E}\varepsilon(u_{\eta g}(t)), \nabla\xi)_W = (q(t), \xi)_W \\ \forall \xi \in W, t \in [0, T].$$

On a le résultat suivant.

Lemme 6.3.2. *Il existe une unique solution $\varphi_{\eta g} \in C(0, T; W)$ qui satisfait (6.3.15). De plus, si $\varphi_{\eta_1 g}$ et $\varphi_{\eta_2 g}$ sont deux solutions de (6.3.15) correspondantes à $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; V)$ alors il existe $c > 0$ tel que*

$$(6.3.16) \quad \|\varphi_{\eta_1 g}(t) - \varphi_{\eta_2 g}(t)\|_W \leq c \|u_{\eta_1 g}(t) - u_{\eta_2 g}(t)\|_V \quad \forall t \in [0, T].$$

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$. Nous utilisons le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet pour définir l'opérateur $G : W \rightarrow W$ par

$$(6.3.17) \quad (G\varphi_{\eta g}(t), \xi)_W = (\mathcal{B}\nabla\varphi_{\eta g}, \nabla\xi)_W - (\mathcal{E}\varepsilon(u_{\eta g}(t)), \nabla\xi)_W$$

Pour tout $\varphi_{\eta g}, \xi \in W$. Soit $\varphi_1 = \varphi_{\eta_1 g}, \varphi_2 = \varphi_{\eta_2 g} \in W$; nous utilisons les hypothèses (6.2.4) et (6.2.17) pour trouver

$$(6.3.18) \quad (G\varphi_1(t) - G\varphi_2(t), \varphi_1(t) - \varphi_2(t))_W \geq m_B \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2$$

D'un autre côté, en utilisant de nouveau (6.2.4), (6.2.3), (6.2.15) et (6.2.17)

nous obtenons

$$(6.3.19) \quad (G\varphi_1 - G\varphi_2, \xi)_W \leq c_\mathcal{E} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\xi\|_W \quad \forall \xi \in W,$$

où $c_\mathcal{E}$ représente une constante positive qui dépend du tenseur piézoélectrique \mathcal{E} . Pour $\xi = G\varphi_1 - G\varphi_2$, l'inégalité précédente implique que

$$(6.3.20) \quad \|G\varphi_1(t) - G\varphi_2(t)\|_W \leq c_\mathcal{E} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W.$$

Maintenant, les inégalités (6.3.18) et (6.3.20) montrent que l'opérateur G est fortement monotone et de Lipschitz sur W ; donc, en utilisant un résultat standard sur les égalités variationnelles (voir Corrolaire 2.4.17), il s'ensuit qu'il existe un unique élément $\varphi_{\eta g}(t) \in W$ tel que

$$(6.3.21) \quad G\varphi_{\eta g}(t) = q(t).$$

Nous combinons maintenant (6.3.17) et (6.3.21) pour déduire que $\varphi_\eta(t) \in W$ est l'unique solution de l'équation variationnelle (6.3.15).

Nous prouvons maintenant que $\varphi_{\eta g} \in C(0, T; W)$. A cette fin, considérons $t_1, t_2 \in [0, T]$ et, pour raison de simplicité, nous écrivons $\varphi_{\eta g}(t_i) = \varphi_i$, $u_{\eta g}(t_i) = u_i$ et $q(t_i) = q_i$, pour $i = 1, 2$. Moyennant (6.3.15), (6.2.3), (6.2.4) et (6.2.17) nous dérivons l'inégalité

$$(6.3.22) \quad m_B \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 \leq c_\mathcal{E} \|u_1 - u_2\|_V \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W + \|q_1 - q_2\|_W \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W.$$

Il s'ensuit maintenant de l'inégalité (6.3.22) que

$$(6.3.23) \quad \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \leq c(\|u_1 - u_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W),$$

où c est une constante positive. Donc, puisque $u_{\eta g} \in C([0, T]; V)$ et $q \in$

$C(0, T; W)$, l'inégalité (6.3.23) implique que $\varphi_{\eta g} \in C(0, T; W)$.

Soit maintenant $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; \mathcal{H})$ et, pour simplicité, notons $\varphi_{\eta_i g} = \varphi_i$, $u_{\eta_i g} = u_i$, $i = 1, 2$. Nous utilisons (6.3.15) et moyennant des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (6.3.22) on obtient :

$$(6.3.24) \quad \begin{aligned} m_B \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W &\leq c_\varepsilon \|u_1(t) - u_2(t)\|_V \\ &\forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité mènent à (6.3.16), ce qui achève la preuve du lemme 6.3.2. ■

Dans l'étape suivante nous utilisons la solution $u_{\eta g}$ obtenue dans le lemme 6.3.1 et soit le problème de *Cauchy* suivant :

Problème. $\mathcal{P}^{\beta_{\eta g}}$ Trouver un champ d'adhésion $\beta_{\eta g} : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que :

$$(6.3.25) \quad \begin{aligned} \dot{\beta}_{\eta g}(t) &= -(\gamma_\tau \beta_{\eta g}(t) \|R_\tau(u_{\eta g \tau}(t))\|^2 - \varepsilon_a)_+ \\ &\text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

$$(6.3.26) \quad \beta_{\eta g}(0) = \beta_0.$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 6.3.3. *Il existe une unique solution $\beta_{\eta g}$ au problème $\mathcal{P}^{\beta_{\eta g}}$ qui satisfait $\beta_{\eta g} \in W^{1,\infty}(0, T, L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}$.*

La démonstration du Lemme 6.3.3 est similaire à celle du Lemme 5.3.4.

Maintenant, soit l'opérateur $\Lambda_\eta : C([0, T]; \mathcal{H}_1) \rightarrow C([0, T]; \mathcal{H}_1)$ défini par

$$(6.3.27) \quad \Lambda_\eta g = \sigma_{\eta g} \quad \forall g \in C([0, T]; \mathcal{H}_1).$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 6.3.4. *Pour tout $g \in C([0, T]; \mathcal{H}_1)$, il existe μ_0 dépendant uniquement de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, p, L$ et R telle que si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$, la fonction $\Lambda_\eta g : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1$ appartient à $C([0, T]; \mathcal{H}_1)$, et l'opérateur Λ_η possède un unique point fixe $g_\eta \in C([0, T]; \mathcal{H}_1)$.*

Démonstration. Soit $g_1, g_2 \in C([0, T]; \mathcal{H}_1)$ et soit $v_{\eta g_i}$ la solution du problème $\mathcal{P}_{\eta g_i}^{V2}$ pour $i = 1, 2$. Pour raison de simplicité, nous écrivons $v_{\eta g_i} = v_i$, $\sigma_{\eta g_i} = \sigma_i$, $i = 1, 2$. En utilisant (6.3.13) nous avons $Div \sigma_1(t) = Div \sigma_2(t)$ ce qui implique que

$$(6.3.28) \quad \|\Lambda_\eta g_1(t) - \Lambda_\eta g_2(t)\|_{\mathcal{H}_1} = \|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_{\mathcal{H}}.$$

De plus, en utilisant (6.3.8), nous avons

$$(\mathcal{F}\varepsilon(v_1(t)) - \mathcal{F}\varepsilon(v_2(t)), \varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2))_{\mathcal{H}} \leq j_{fr}(g_1, v_2) - j_{fr}(g_1, v_1) + j_{fr}(g_2, v_1) - j_{fr}(g_2, v_2).$$

Combinons l'inégalité précédente avec l'inégalité (6.2.35) pour trouver

$$(\mathcal{F}\varepsilon(v_1(t)) - \mathcal{F}\varepsilon(v_2(t)), \varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2))_{\mathcal{H}} \leq L_p C_{\mathcal{R}C_0} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|g_1 - g_2\|_{\mathcal{H}_1} \|v_1 - v_2\|_V).$$

En utilisant maintenant (6.2.1)(c), nous obtenons

$$(6.3.29) \quad m_{\mathcal{F}} \|\varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq L_p C_{\mathcal{R}C_0} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|g_1 - g_2\|_{\mathcal{H}_1} \|v_1 - v_2\|_V).$$

Maintenant, par (2.2.7) et (6.3.29) il vient que

$$(6.3.30) \quad m_{\mathcal{F}} \|v_1 - v_2\|_V \leq L_p C_{\mathcal{R}C_0} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|g_1 - g_2\|_{\mathcal{H}_1}.$$

En utilisant maintenant (6.3.1), (6.2.1)(b) et (2.2.7) on obtient

$$(6.3.31) \quad \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{F}} \|v_1 - v_2\|_V.$$

Combinons (6.3.28), (6.3.31) et (6.3.30) pour obtenir

$$(6.3.32) \quad \|\Lambda_\eta g_1(t) - \Lambda_\eta g_2(t)\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{L_{\mathcal{F}} L_p C_{\mathcal{R}} c_0 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}}{m_{\mathcal{F}}} \|g_1 - g_2\|_{\mathcal{H}_1},$$

ce qui montre que Λ_η est une contraction sur $C([0, T]; \mathcal{H}_1)$ à condition que $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$, où μ_0 est donnée par

$$(6.3.33) \quad \mu_0 = \frac{m_{\mathcal{F}}}{L_{\mathcal{F}} L_p C_{\mathcal{R}} c_0}.$$

Alors, nous concluons par l'utilisation du théorème du point fixe de Banach que si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$ l'opérateur Λ_η admet un point fixe unique g_η tel que

$$(6.3.34) \quad \Lambda_\eta g_\eta = g_\eta.$$

Il est claire que μ_0 dépend seulement de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, p$ et R . ■

Dans la suite nous supposons que $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$. Pour tout $\eta \in C([0, T]; V)$ dénotons par g_η le point fixe de l'opérateur Λ_η défini dans (6.3.27), par u_η la solution du problème $\mathcal{P}_{\eta g}^{V_2}$ donnée par (6.3.11), par φ_η la solution du problème $\mathcal{P}^{\varphi_{\eta g}}$ donnée par le Lemme (6.3.2) et par β_η la solution du Problème $\mathcal{P}^{\beta_{\eta g}}$ fournie par le Lemme 6.3.3. En utilisant le théorème de représentation de Riesz, on peut définir l'opérateur $\Lambda : C([0, T]; V) \rightarrow C([0, T]; V)$ comme suit :

$$(6.3.35) \quad (\Lambda \eta, v)_V = (\mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta_\eta(t), u_\eta(t), v).$$

Pour tout $\eta \in C([0, T]; V)$

Lemme 6.3.5. *Pour tout $\eta \in C([0, T]; V)$ la fonction $\Lambda \eta : [0, T] \rightarrow V$ est continue. De plus, il existe un unique élément $\eta^* \in C([0, T]; V)$ tel que*

$$(6.3.36) \quad \Lambda \eta^* = \eta^*.$$

Démonstration. Soit $\eta \in C([0, T]; V)$ et $t_1, t_2 \in [0, T]$. Utilisons (6.3.35) pour trouver

$$\begin{aligned} |(\Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2), v)_V| &= |(\mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t_1)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t_2)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(t_1) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(t_2), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + j_{ad}(\beta_\eta(t_1), \beta_\eta(t_1), v) - j_{ad}(\beta_\eta(t_2), u_\eta(t_2), v)| \end{aligned}$$

En utilisant (6.2.18) et après quelques manipulations algébriques impliquant la lipschitzialité de l'opérateur de troncation R_τ , les relation (2.2.8), (2.2.13) et l'inégalité $0 \leq \beta_\eta \leq 1$, nous arrivons à l'inégalité

$$(6.3.37) \quad \begin{aligned} |(\Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2), v)_V| &\leq c (\|\beta_\eta(t_1) - \beta_\eta(t_2)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\quad + \|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_V + \|\varphi_\eta(t_1) - \varphi_\eta(t_2)\|_W) \|v\|_V \end{aligned}$$

Mettons maintenant $v = \Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2)$ dans (6.3.37) pour obtenir

$$(6.3.38) \quad \begin{aligned} \|\Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2)\|_V &\leq c \|\beta_\eta(t_1) - \beta_\eta(t_2)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\quad + c \|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_V + c \|\varphi_\eta(t_1) - \varphi_\eta(t_2)\|_W. \end{aligned}$$

Compte tenu que $u_\eta \in C^1([0, T]; V)$, $\varphi_{\eta g} \in C(0, T; W)$ et $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$, nous concluons de l'inégalité (6.3.38) que $\Lambda\eta \in C([0, T]; V)$.

Soit maintenant $t \in [0, T]$, $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; V)$, et soit $u_i = u_{\eta_i}$, $v_i = \dot{u}_i = \dot{u}_{\eta_i}$, $\sigma_i = g_{\eta_i} = \sigma_{\eta_i g_{\eta_i}}$ et $\beta_i = \beta_{\eta_i}$ pour $i = 1, 2$. D'une part, nous intégrons (6.1.9) avec la condition initiale (6.1.13), pour obtenir

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \int_0^t (\beta_1(s) \|R_\tau(u_{1\tau}(s))\|^2 - \beta_2(s) \|R_\tau(u_{2\tau}(s))\|^2)_{L^2(\Gamma_3)} ds.$$

En utilisant les propriétés de l'opérateur de troncation R_τ et écrivant $\beta_1 = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2$, nous arrivons à

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds.$$

Moyennant une version des lemmes de Gronwall, il s'ensuit que

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds.$$

Combinons cette dernière inégalité avec (2.2.8), pour obtenir

$$(6.3.39) \quad \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds.$$

D'autre part, en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés pour la preuve de (6.3.38), nous trouvons que

$$\begin{aligned} \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V &\leq c \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\quad + c \|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W \end{aligned}$$

Ensuite, par (6.3.39) et (6.3.24) nous avons

$$(6.3.40) \quad \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V \leq c \|u_1(t) - u_2(t)\|_V + c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds.$$

De plus, puisque u_1 et u_2 ont la même condition initiale, il s'ensuit que

$$(6.3.41) \quad \|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Combinons l'inégalité (6.3.41) avec (6.3.40) pour obtenir

$$(6.3.42) \quad \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V \leq c \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds \quad \forall t \in [0, T].$$

En utilisant l'inégalité (6.3.2) pour $\eta = \eta_1$, $v = \dot{u}_2$, $\sigma_1 = g_{\eta_1}$ et $\eta = \eta_2$, $v = \dot{u}_1$, $\sigma_2 = g_{\eta_2}$; par addition des résultats obtenus nous avons

$$(6.3.43) \quad \begin{aligned} &(\mathcal{F}\varepsilon(\dot{u}_1) - \mathcal{F}\varepsilon(\dot{u}_2), \varepsilon(\dot{u}_2) - \varepsilon(\dot{u}_1))_{\mathcal{H}} + (\eta_1 - \eta_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2)_V \\ &j_{fr}(\sigma_1, \dot{u}_2) - j_{fr}(\sigma_1, \dot{u}_1) + j_{fr}(\sigma_2, \dot{u}_1) - j_{fr}(\sigma_2, \dot{u}_2) \geq 0. \end{aligned}$$

Combinons cette dernière inégalité avec (6.2.1)(c) et (6.2.35), nous trouvons

$$(6.3.44) \quad m_{\mathcal{F}} \|\dot{u}_1 - \dot{u}_2\|_V \leq \|\eta_1 - \eta_2\|_V + L_p C_{\mathcal{R}c_0} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\sigma_2 - \sigma_1\|_{\mathcal{H}}.$$

De plus, puisque $Div \sigma_1(t) = Div \sigma_2(t)$ (voir (6.3.13)), en utilisant encore une fois (6.3.2), (6.2.1)(b) et (2.2.7)

$$(6.3.45) \quad \|\sigma_2 - \sigma_1\|_{\mathcal{H}} = \|\sigma_2 - \sigma_1\|_{\mathcal{H}_1} \leq L_{\mathcal{F}} \|\dot{u}_1 - \dot{u}_2\|_V + \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V$$

Pour conclure, à partir de (6.3.44) et (6.3.45) il vient que

$$(6.3.46)$$

$$(m_{\mathcal{F}} - L_{\mathcal{F}} L_p C_{\mathcal{R}c_0} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_V \leq (1 + L_p C_{\mathcal{R}c_0} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V \quad \forall t \in [0, T],$$

et puisque $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$, de (6.3.46) et (6.3.33) nous déduisons que

$$(6.3.47) \quad \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_V \leq \frac{1 + L_p C_{\mathcal{R}c_0} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}}{m_{\mathcal{F}} - L_{\mathcal{F}} L_p C_{\mathcal{R}c_0} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}} \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V \quad \forall t \in [0, T].$$

Combinons maintenant l'inégalité (6.3.42) avec la dernière inégalité pour obtenir

$$(6.3.48) \quad \|\Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t)\|_V \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V ds \quad \forall t \in [0, T].$$

où $c > 0$. Réitérons cette dernière inégalité m fois pour trouver que

$$(6.3.49) \quad \|\Lambda^m \eta_1 - \Lambda^m \eta_2\|_{C([0, T]; V)} \leq \frac{c^m T^m}{m!} \|\eta_1 - \eta_2\|_{C([0, T]; V)},$$

ce qui implique que pour m suffisamment grand l'opérateur Λ^m est une contraction dans l'espace de Banach $C([0, T]; V)$, donc il possède un point fixe unique $\eta^* \in C([0, T]; V)$ tel que $\Lambda^m \eta^* = \eta^*$, et par conséquent η^* est l'unique point fixe de l'opérateur Λ . ■

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du Théorème 6.2.1

Existence. Soit $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$ et soit $\eta^* \in C([0, T]; V)$, $g_{\eta^*} \in C([0, T]; \mathcal{H}_1)$ les points fixes des opérateurs Λ , Λ_η , respectivement. Soient (u, φ, β) les solutions définies dans les lemmes (6.3.1), (6.3.2) et (6.3.3), respectivement, pour $\eta = \eta^*$, c'est-à-dire $u = u_{\eta^*} = u_{\eta^* g_{\eta^*}}$, $\varphi = \varphi_{\eta^*} = \varphi_{\eta^* g_{\eta^*}}$, $\beta = \beta_{\eta^*} = \beta_{\eta^* g_{\eta^*}}$. Donc, en choisissant $\eta = \eta^*$, $g = g_{\eta^*}$ dans (6.3.2), on obtient

$$(6.3.50) \quad \begin{cases} (\mathcal{F}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + (\eta^*(t), v - \dot{u}(t))_V + j_{fr}(g_{\eta^*}(t), v) \\ -j_{fr}(g_{\eta^*}(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V, \quad \forall v \in V, \quad \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

Maintenant, pour $\sigma = \sigma_{\eta^* g_{\eta^*}}$ l'inégalité (6.2.25) vient de (6.3.50), (6.3.36) et (6.3.35) puisque $g_{\eta^*} = \Lambda_{\eta^*}(g_{\eta^*}) = \sigma_{\eta^* g_{\eta^*}}$. L'égalité (6.2.24) vient de (6.3.1) et (6.3.35). L'égalité (6.2.28) vient de (6.3.11). IL est claire que (6.2.27) et (6.2.29) sont satisfaites par le Problème $\mathcal{P}^{\beta_{\eta^* g_{\eta^*}}}$. IL est claire aussi que (6.2.26) est satisfaite par le Problèmes $\mathcal{P}^{\varphi_{\eta^* g_{\eta^*}}}$. Finalement, les régularités (6.2.37), (6.2.38) et (6.2.39) sont des conséquences des lemmes 1, 2 et 3, respectivement.

Unicité : L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité des points fixes des opérateurs Λ et Λ_η et de l'unique solvabilité des problèmes $\mathcal{P}_{\eta g}^{V^2}$, $\mathcal{P}^{\beta_{\eta g}}$ et $\mathcal{P}^{\varphi_{\eta g}}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. S. Adams, "Sobolev spaces", Academic press, New York (1975).
- [2] A. Amassad, M. Sofonea, Analysis of a quasistatic viscoplastic problem involving Tresca friction law, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 4 (1998), 55-72.
- [3] A. Amassad, M. Shillor, M. Sofonea, A quasistatic contact problem with slip dependent coefficient of friction, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **22** (1999), 267-284.
- [4] L.-E. Andersson, A quasistatic frictional problem with normal compliance, *Nonlinear Analysis TMA* 16 (1991), 407-428.
- [5] L.-E. Andersson, A global existence result for a quasistatic contact problem with friction, *Advances in Mathematical Sciences and Applications* **5** (1995), 249-286.
- [6] K.T. Andrews, M. Shillor, Dynamic adhesive contact of a membrane, *Adv. Math. Sci. Appl.* 13 (2003), 343-356.
- [7] B. Awbi, Analyse variationnelle de quelques problèmes viscoélastiques et viscoplastiques avec frottement, Thèse, Université de Perpignan, 2001.

- [8] H.T. Banks, R.C. Smith and Y. Wang, *Smart Material Structures : Modeling, Estimation and Control*, Masson, Wiley, 1996.
- [9] M. Barboteu, M. Sofonea. Modeling and analysis of the unilateral contact of a piezoelectric body with a conductive support. *J. Math. Anal. Appl.* 358 (2009) 110–124.
- [10] M. Barboteu, J.R. Fernandez and Y. Ouafik. Numerical analysis of two frictionless elastic-piezoelectric contact problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 339, 905-917 (2008).
- [11] M. Barboteu, J.R. Fernandez and Y.Ouafik, Numerical analysis of a frictionless viscoelastic piezoelectric contact problem. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M2AN)* 42(4), 667-682 (2008).
- [12] M. Barboteu, W. Han and M. Sofonea, A frictionless contact problem for viscoelastic materials, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2 (2002), 1-21.
- [13] M. Barboteu, T.-V. Hoarau-Mantel and M. Sofonea, On the frictionless unilateral contact of two viscoelastic bodies, *J. Appl. Math.*, 11 (2003), 575-603.
- [14] V. Barbu, *Optimal Control of Variational Inequalities*. Research Notes in Mathematics, vol. 100, Pitman, Massachusetts, 1984.
- [15] V. Barbu, T. Precupanu, *Convexity and optimisation in Banach spaces*, D. Reidel, Publishing Company, Dordrecht, 1986.
- [16] R. C. Batra, J.S. Yang . Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity. *Journal of Elasticity* 38 (1995), 209–218.
- [17] R.C. Batra, J.S.Yang, Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity, *Journal of Elasticity* 38(1995), 209-218.
- [18] P. Bisenga, F Lebon, F. Maceri, The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support. in *Contact Mechanics*, J.A.C.

- Martins and Manuel D.P. Monteiro Marques (Eds.), Kluwer, Dordrecht, 2002, 347-354.
- [19] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris (1987).
- [20] H. Brezis, *Équations et inéquations nonlinéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, *Ann. Inst. Fourier*, 18 (1968), 115–175.
- [21] L.Cangémi, *Frottement et Adhèrence : modèle, traitement numérique et application à l'interface fibre / matrice*, Ph. D. Thesis, Univ.Méditerranée, Aix-Marseille II (1997).
- [22] O. Chau, M. Shillor, M. Sofonea, *Dynamic frictionless contact with adhesion*. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* 55 (2004), 32-47.
- [23] O. Chau, J. R. Fernández, M. Shillor, M. Sofonea, *Variational and Numerical Analysis of a Quasistatic Viscoelastic Contact Problem with Adhesion*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 159 (2003), 431-465.
- [24] N. Chougui, S. Drabla, *A quasistatique électro-élastique problem with normal compliance, friction and adhesion*, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2014 (2014), No. 257, pp. 1-21.
- [25] N. Chougui, S. Drabla, *A quasistatique électro-viscoélastique problem with adhesion*, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society* (Accepted)
- [26] M. Cocu, *Existence of solutions of Signorini problems with friction*, *Int. J. Engng. Sci.*, 22 (1984), 567-581.
- [27] M. Cocu, R. Rocca, *Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion*, *Math. Model. Num. Anal* 34, (2000), 981-1001.

- [28] M. Cocu, E. Pratt, M. Raous, Formulation and approximation of quasi-static frictional contact, *Int. Jour. Engng. Sci.*, 34 (1996), 783-798.
- [29] S. Drabla, *Analyse Variationnelle de Quelques Problèmes aux Limites en Elasticité et Viscoplasticité*, thèse de doctorat, Université Ferhat Abbas-Sétif (1999).
- [30] S. Drabla, Z. Zellagui, Analyse OF A Electro-Elastic Contact Problem With Friction And Adhesion. *STUDIA UNIV. " BABES-BOLYAI ", MATHEMATICA*, Volume LIV, Number 1, March 2009.
- [31] S. Drabla, Z. Zellagui. Variational Analysis and the Convergence of the Finite Element Approximation of an Electro-Elastic Contact Problem with Adhesion. *Arab J Sci Eng* (2011) 36 :1501-1515.
- [32] G. Duvaut, J. L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris, (1972).
- [33] I. Ekeland, R. Temam, *Convex Analysis an Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [34] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambigue ondizioni al ontorno, *Mem. Aad. Naz. Lincei, S. VIII, Vol. VII, Sez. I, 5* (1964), 91-140.
- [35] M. Frémond, Equilibre des structures qui adhèrent à leur support. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II* 295 (1982), 913-916.
- [36] M. Frémond, Adhérence des Solides. *Jounal. Mécanique Théorique et Appliquée* 6 (1987), 383-407.
- [37] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*. Springer, Berlin, 2002.
- [38] W. Han, On the numerical approximation of a frictional contact problem with normal compliance, *Numer. Funct. Anal. et Optimiz*, 17(1996), 307-321.

- [39] W. Han, M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*. Studies in Advanced Mathematics 30, American Mathematical Society, Providence, RI - Intl. Press, Sommerville, MA, 2002.
- [40] W. Han, M. Sofonea, Evolutionary Variational inequalities arising in Viscoelastic contact Problems, *SIAM journal of Numerical Analysis*, 38(2000), 556-579.
- [41] W. Han, M. Sofonea, Analysis and numerical approximation of an elastic frictional contact problem with normal compliance, *Applicationes Mathematicae*, 26(1999), 415-435.
- [42] T. Ikeda, *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [43] I.R. Ionescu, J.-C. Paumier, On the contact problem with slip displacement dependent friction in elastostatics, *Int. J. Engng. Sci.*, 34 (1996), 471–491.
- [44] I.R. Ionescu, J.-C. Paumier, On the contact problem with slip rate dependent friction in elastodynamics, *Eur. J. Mech., A/Solids*, 13 (1994), 555-568.
- [45] I. R. Ionescu, M. Sofonea, “ *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*”, Oxford University Press, Oxford, (1993).
- [46] L.Jianu, M. Shillor and M. Sofonea, A Viscoelastic bilateral frictionless contact problem with adhesion, *Applic. Anal.* 80 (2001), 233-255.
- [47] A. Klarbring, A. Mikelic, M. Shillor, Frictional contact problems with normal compliance, *Int. J. Engng. Sci.*, 26 (1988), 811-832.
- [48] A. Klarbring, A. Mikelic, M. Shillor, A global existence result for the quasistatic frictional contact problem with normal compliance in *Unilateral Problems in Structural Analysis Vol. 4*, Eds. G. Del Piero and F. Maceri, Birkhauser, Boston (1991), p. 85-111.

- [49] Z. Lerguet, *Analyse de Quelques Problèmes de Contact avec Frottement et Adhésion*, Thèse de Doctorat en Mathématique Appliquées, Univ, Ferhat Abbas, setif, 2008.
- [50] F. Maceri, P. Bisegna, The unilateral frictionless contact of a piezoelectric body with a rigid support. *Math. Comp. Modelling* 28 (1998), 19–28.
- [51] A. Matei, *Modélisation Mathématique en Mécanique du Contact*, Thèse de doctorat de l'Université de Perpignan (2002)
- [52] R. D. Mindlin, Polarisation gradient in elastic dielectrics. *Int. J. Solids Structures* 4 (1968), 637-663.
- [53] R.D. Mindlin, Continuum and lattice theories of influence of electromechanical coupling on capacitance of thin dielectric films. *Int. J. Solids Struct.* 4 (1969) 1197-1213.
- [54] R.D. Mindlin, Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics. *Journal of Elasticity* 4 (1972), 217-280.
- [55] A. Morro, B. A. Straughan, Uniqueness theorem in the dynamical theory of piezoelectricity. *Math. Methods Appl. Sci.* 14 (5) (1991) 295-299.
- [56] D. Motreanu, M. Sofonea, Quasivariational inequalities and applications in frictional contact problems with normal compliance. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 10(2000), 103-118.
- [57] D. Motreanu and M. Sofonea, Evolutionary variational inequalities arising in quasistatic frictional contact problems for elastic materials, *Abstr. Appl. Anal.* 4 (1999), 255-279.
- [58] J. Nečas and I. Hlaváček, "Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies An Introduction", Elsevier, "Amsterdam (1981).

- [59] Y. Ouafik, Contribution à l'étude mathématique et numérique des structures piézoélectriques en Contact. Thèse, Université de Perpignan, 2007.
- [60] V. Z. Patron, B. A. Kudryavtsev, Electromagnetoelasticity, Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids. Gordon & Breach, London, 1988.
- [61] M. Raous, L. Congemi, M. Cocu, A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 177 (1999), 383–399.
- [62] J. Rojek, J. J. Telega, Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopedic biomechanics. I : general developments. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 39 (2001), no. 3, 655-677.
- [63] J. Rojek, J. J. Telega, S. Stupkiewicz, Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopedic biomechanics. II : numerical implementation and application to implanted knee joints. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 39 (2001), 679-706.
- [64] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris (1967).
- [65] M. Shillor, M. Sofonea, A quasistatic viscoelastic contact problem with friction, to appear in *Int. J. Engn. Sci.*
- [66] M. Shillor, M. Sofonea, J.J. Telega, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*, *Lecture Notes Phys.* 655, Springer, Berlin, 2004.
- [67] A. Signorini, *Sopra alcune questioni di elastostatica*, *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, 1933.
- [68] M. Sofonea, *Problèmes non Linéaires dans la Théorie de l'Elasticité*, *Cours de Magister de Mathématiques Appliquées à l'Université de Sétif* (1993).

- [69] M. Sofonea, Problèmes Nonlinéaires dans la Théorie de l'Elasticité Cours de Magister de Mathématiques Appliquées, Université de Sétif, Algérie, 1993.
- [70] M. Sofonea, Problèmes Mathématiques en Élasticité et Viscoplasticité, Cours de DEA de Mathématiques Appliquées, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 1991.
- [71] M. Sofonea, R. Arhab, An Electro-viscoelastic Contact Problem with Adhesion, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A : Mathematical Analysis, 14 (2007), 577-591.
- [72] M. Sofonea, R. Arhab, R. Tarraf, Analysis of electroelastic frictionless contact problems with adhesion, Journal of Applied Mathematics, Art. ID. 64217, 25 pages.
- [73] M. Sofonea, El H. Essoufi, A Piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction, Mathematical Modelling and Analysis **9** (2004), 229–242.
- [74] M. Sofonea, El H. Essoufi, Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body, Adv. Math. Sci. Appl. 14 (2004), 613–631.
- [75] M. Sofonea, Z. Lerguet, A model for adhesive frictional contact, Machine Dynamics Problems 30 (2006), 158–168.
- [76] M. Sofonea, A. Matei, A quasistatic frictionless contact problem with normal compliance, Ann. Univ. Craiova, Math-Info., XXVII (2000), 43-56.
- [77] M. Sofonea, A. Matei, Variational inequalities with applications, A study of antiplane frictional contact problems, Springer, New York (à paraître).
- [78] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage. Pure and Applied Mathematics 276, Chapman-Hall/CRC Press, New York, 2006.

- [79] M. Sofonea, Y. Ouafik, A piezoelectric contact problem with normal compliance. *Appl. Math.* 32 (2005) 425-442.
- [80] N. Strömberg, L. Johansson, A. Klarbring, Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear, *Int. J. Solids Structures*, 33 (1996), 1817–1836.
- [81] P. Suquet, *Plasticité et Homogénéisation*, Thèse de Doctorat d'Etat, Univ, Pierre et Marie Curie, Paris 6 (1982).
- [82] G.W. Taylor, J.J. Gagnepain, T.R. Meeker, T. Nakamura and L.A. Shulvalov, *Piezoelectricity*, 4 Gordon and Breach, New York, 1985.
- [83] R.A Toupin, The elastic dielectric, *J. Rational Mech. Anal.* 5(1956)849-915.
- [84] R.A. Toupin, A dynamical theory of elastic dielectrics. *Int. J. Engrg. Sci.* 1 (1963) 101-126.
- [85] R.A. Toupin, Stress tensors in elastic dielectrics. *Arch. Rational Mech. Anal.* 5 (1960) 440-452.
- [86] A. Touzaline, A quasistatic frictional contact problem with adhesion for nonlinear elastic materials, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2008(2008), No. 131, pp. 1–17.
- [87] A. Touzaline, Analysis of a quasistatic contact problem with adhesion and nonlocal friction for viscoelastic materials, *Appl. Math. Mech. - Engl. Ed.* 31(5), 623–634 (2010).
- [88] A. Touzaline, A. Mignot, Existence of solutions for quasistatic problems of unilateral contact with nonlocal friction for nonlinear elastic materials, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2005 (2005), No. 99, pp. 1-13.
- [89] N. Turbé, G.A. Maugin. On the linear piezoelectricity of composite material. *Math. Methods Appl. Sci.* 14 (6) (1991) 403–412.

Résumé : L'objet de cette thèse est l'étude de quelques problèmes en Mécanique de Contact pour des lois constitutives électro-élastiques et électro-viscoélastiques. Les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité d'une solution faible pour les problèmes étudiés. La thèse est structurée en trois parties. La première partie est consacrée à rappeler les différents modèles mécaniques de contact étudiés ainsi que quelques outils mathématiques nécessaires dans la thèse. La deuxième partie est destinée à l'étude des problèmes de contact électro-élastiques avec adhésion et frottement. La troisième partie est dédiée à l'analyse des problèmes électro-viscoélastiques avec frottement ou adhésion.

Mots-Clés : électro-élastiques, électro-viscoélastiques, compliance normale, adhésion, frottement de Coulomb, inéquation quasi-variationnelle, inéquation d'évolution, solution faible, point fixe.

Abstract: The purpose of this work is the study of some problems in Contact Mechanics for electro-elastic and electro-viscoelastic constitutive laws. The results obtained concern the existence and uniqueness of weak solutions for the studied problems. The thesis is structured into three parts. The first part is dedicated to recall different mechanical models of contact, as well as some necessary mathematical tools. The second part is destined to the study of electro-elastic problems with adhesion and friction. The third part is intended to in the analysis of electro-viscoelastic problems with friction or adhesion.

Key-words: electro-elasticity, electro-viscoelasticity, normale compliance, adhesion, Coulomb's friction, quasi-variational inequality, evolutionary variational inequality, weak solution, fixed point,

ملخص : هدف هذه الأطروحة هو دراسة بعض المسائل في ميكانيك التماس لقوانين كهرومطاطية و كهروفيسكومطاطية. النتائج المحصل عليها تخص وجود ووحداية الحل الضعيف للمسائل المدروسة. الأطروحة مكونة من ثلاثة أجزاء. الجزء الأول مخصص للتذكير بمختلف النماذج الميكانيكية المدروسة وكذلك بعض الوسائل الرياضية الضرورية في هذه الأطروحة. الجزء الثاني موجه لدراسة مسائل التماس الكهرومطاطية بالتصاق واحتكاك. الجزء الثالث مكرس لدراسة مسائل التماس الكهروفيسكومطاطية باحتكاك أو التصاق.

الكلمات المفاتيح : كهرومطاطية، كهروفيسكومطاطية، التصاق، إحتكاك كولومب، متباينة شبه تغيرية، متباينة تطور، الحل الضعيف، نقطة ثابتة.