

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE FERHAT ABBES – SETIF -1-**

**UFAS(ALGERIE)**

**THESE**

Présentée à la faculté de technologie

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

Pour l'obtention du diplôme

**DOCTORAT EN SCIENCE**

Par

**KARKAR NORA**

**THEME**

*Estimation de paramètres et d'états des systèmes non linéaires  
incertains en présence de perturbations: méthodologie  
arithmétique d'intervalles*

Soutenue le 02/06/2015 devant la commission d'examen :

|                                   |                                      |            |
|-----------------------------------|--------------------------------------|------------|
| Mr <i>Ferhat -Hamida Abdelhak</i> | Prof à l'université de <b>Sétif1</b> | Président  |
| Mr <b>Khier Benmahammed</b>       | Prof à l'université de <b>Sétif1</b> | Rapporteur |
| Mr <i>Harmas Mohamed N</i>        | Prof à l'université de <b>Sétif1</b> | Examineur  |
| Mr <i>Mendil Boubakeur</i>        | Prof à l'université de <b>Bejaia</b> | Examineur  |
| Mr <i>Boumehrez Mohamed</i>       | Prof à l'université de <b>Biskra</b> | Examineur  |
| Mr <i>Benoudjit Nabil</i>         | Prof à l'université de <b>Batna</b>  | Examineur  |

## ***REMERCIEMENTS***

**J**e tiens à exprimer ma très vive reconnaissance envers mon directeur de thèse Professeur ***Benhammed Khier*** , de m' avoir accueilli dans son équipe de recherche.

**J**e remercie **Sebastien Tornil** , Professeur au Département de contrôle automatique (ESAI) et Pau *Herrero Vinas*, docteur à l'Imperial Collège de Londres, pour leurs précieux conseils.

**J**e tiens également à exprimer toute ma reconnaissance aux professeurs ***Harmas Mohamed Nadjib*** , ***Ferhat Hamida***, ***Mendil Boubakeur*** , ***Boumehrez Mohamed*** ,et ***Benoudjit Nabil*** qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury de thèse, et pour leur relecture attentive de ce document.

## Table des matières

|  |    |
|--|----|
| Table des matières.....  | i  |
| Introduction générale.....   | 1  |
| <b>Chapitre I: Principaux outils de l'arithmétique des intervalles</b>         |    |
| I.1. Introduction.....   | 3  |
| I.2. Arithmétique en virgule flottante.....                                    | 3  |
| I.2.1. La norme IEEE754 .....  | 5  |
| I. 2.2Description.....   | 5  |
| I.2.2a. Normalisation.....   | 5  |
| I.2.2b. Biais .....  | 5  |
| I.3. Exemple .....   | 6  |
| I.4. Arrondis .....  | 6  |
| I.5. Le calcul par intervalles .....   | 7  |
| I.6. Arithmétique d'intervalles .....  | 8  |
| I.6.2. Définition et Notations .....   | 9  |
| I.6.3 Définition .....   | 10 |
| I.7. Opérations logiques sur les intervalles .....                             | 11 |
| I.8. Opérations arithmétiques sur les intervalles .....                        | 12 |
| I.9. Propriétés algébriques de l'arithmétique des intervalles .....            | 12 |
| I.10 Fonction réelle et domaines de définition.....                            | 13 |
| I.11. Fonction d'inclusion .....   | 13 |
| I.12. Fonction d'inclusion par développement de Taylor .....                   | 16 |
| <b>Chapitre II : Incertitudes dans la modélisation des systèmes incertains</b> |    |
| II.1. Introduction .....   | 17 |
| II.2. système incertains.....  | 18 |
| II.3. erreur et incertitude.....   | 19 |
| II.3.1.1 Définition de l'erreur .....  | 19 |

|   |    |
|---|----|
| II.3.1.2. erreurs aléatoires et erreurs systématique .....                                      | 19 |
| II.3.3. Mesure quantitatives de l'incertitude de mesure .....                                   | 19 |
| II.4. Concept général d'incertitude .....   | 21 |
| II.5. Les causes des incertitudes de mesures .....  | 22 |
| II.6. Limitation des causes des incertitudes de mesures.....                                    | 22 |
| II.7. Modélisations conventionnelles des incertitudes de mesures.....                           | 24 |
| II.7.1. Modélisation par un intervalle .....  | 25 |
| II.7.2 Modélisations par une distribution de probabilité .....                                  | 25 |
| II.7.2.1. Théorie et interprétations.....   | 25 |
| II.7.2.2. Incertitude de type A .....   | 26 |
| II.7.2.3. Incertitude de type B.....  | 27 |
| II.7.2.4. Modélisation par la moyenne et l'écart-type.....                                      | 28 |
| II.7.2.4.2. Incertitude de type A .....   | 30 |
| II.7.2.4.3. Incertitude de type B.....  | 30 |
| II.7.2.4.4. Cas de figure ne pouvant être traités convenablement par moyenne et écart-type..... | 31 |
| II.7.2.5. Exploitation de la modélisation de l'incertitude .....                                | 31 |
| II.7.2. 5.1. Passage aux intervalles de confiance.....  | 31 |
| II.8. Présentation d'un résultat expérimental .....   | 33 |
| II.8.1.Les causes des incertitudes de mesures .....   | 33 |
| II.8.2.Limitation des causes des incertitudes de mesures.....                                   | 34 |
| II.9.Mesures quantitatives de l'incertitude de mesure .....                                     | 34 |

### **Chapitre III: Estimation d'état Zéro dans un contexte incertain**

|  |    |
|--|----|
| III.1. Introduction .....                        | 36 |
| III.2.1 Système linéaire .....                   | 37 |
| III.3. L'élimination gaussienne .....            | 40 |
| III.3.1. Echec de l'élimination gaussienne ..... | 40 |
| III.3.2. Pré conditionnement.....                | 41 |

|   |    |
|---|----|
| III.4. La méthode de Krawczyk.....                              | 43 |
| III.5. Système non linéaire .....                               | 44 |
| III.5.1. La méthode de newton d'intervalle.....                 | 44 |
| III.5.2. Introduction .....                                     | 44 |
| III.5.4.1. La méthode de newton d'intervalle de pente .....     | 46 |
| III.5.4.2. Un exemple sur la méthode de pente .....             | 49 |
| III.5.5. La méthode de Newton multivariable .....               | 49 |
| III.5.5.a. Opérateurs de Newton .....                           | 51 |
| III. 5.5.b. Opérateur de Krawczyk.....                          | 51 |
| III. 5.5.c. Opérateur de Hansen et Sengupta.....                | 51 |
| III. 5.5.d. Toutes les solutions d'un système non linéaire..... | 53 |

### **Partie simulation:**

#### **Chapitre IV : Application : Estimation de paramètres d'un robot planaire**

|  |    |
|--|----|
| IV.1.Introduction.....                                       | 55 |
| IV.2.Estimation à erreurs bornées .....                      | 56 |
| IV.3. Model d'un robot manipulateur planaire .....           | 57 |
| IV.4 Principe du système bielle-manivelle .....              | 58 |
| IV.4.2.Objets contenant des systèmes à bielle manivelle..... | 59 |
| IV.5. Etude analytique du mouvement.....                     | 59 |
| IV.6.Estimation de paramètres par l'algorithme SIVIA .....   | 66 |
| IV.6.1.Introduction.....                                     | 66 |
| IV.6.2.Inversion Ensembliste .....                           | 67 |
| IV.6.3. Estimation ensembliste à erreurs bornées .....       | 68 |
| IV6.4.Algorithme de SIVIA.....                               | 69 |
| IV6.5 SCS Matlab tool box et VSIVIA .....                    | 69 |
| IV.7. L'approximation Minmax à intervalles.....              | 78 |
| IV.7.1.Introduction.....                                     | 78 |

|  |    |
|--|----|
| IV.7.2.Approximation par la méthode des moindres carrés..... | 79 |
| IV.7.2.1.Introduction.....                                   | 79 |
| IV.8.Résultat de simulation.....                             | 80 |
| Conclusion.....  | 81 |

*"La religion et la science : comment  
pourrait-il y avoir contradiction entre le  
vrai et le vérifié ? C'est toujours le  
second qui tarde."*

Pr. Jérôme Lejeune<sup>[1]</sup>

<sup>[1]</sup>Pédiatre et professeur de génétique, à qui l'on doit, entre autres, la découverte de l'anomalie chromosomique à l'origine de la trisomie .

## ***Avant propos***

*La thèse est pour moi l'achèvement d'un long chemin, parfois difficile mais comme le dit Sören Kierkegaard, le père de l'existentialisme « ce n'est pas le chemin qui est difficile mais le difficile qui est le chemin ». Faire une thèse est un accomplissement de soi, une chose qui fait appel à notre inconscience, qui nous pousse à aller toujours plus loin, à ne jamais se contenter de l'acquis. Une thèse c'est se confronter à ses propres faiblesses, c'est se remettre en question, sans cesse s'améliorer pour atteindre toujours plus de connaissances. La réussite d'une telle entreprise n'est possible à mes yeux qu'en développant des qualités essentielles, que chacun possède en nous, la sagesse, la bonté, la simplicité, etc.*

*Clément LETELLIER*



# *Introduction générale*

## *Introduction générale*

Le problème majeur rencontré lors d'une procédure de validation de données ou de diagnostic réside dans le fait que le système physique est représenté au moyen d'un modèle qui ne définit qu'un comportement approché du processus censé le représenter.

L'estimation est l'un des concepts les plus utilisés en automatique, dans les domaines de l'identification, de l'observation, de la commande et du diagnostic. Le cas des systèmes linéaires à paramètres constants est bien résolu ainsi que l'extension aux systèmes à paramètres variables. Lorsque les systèmes sont affectés de perturbations non mesurées, la problématique est plus délicate.

Une mauvaise connaissance a priori des paramètres du modèle ou d'états, rend difficile la conception des contrôleurs. Les approches habituellement utilisées pour l'identification de systèmes, telle que la méthode des moindres carrés, qui reste l'une des méthodes les plus fréquemment utilisées. Elle a de nombreux usages. On peut l'utiliser par exemple pour procéder à une description des données : quelles sont les variables rendant compte le mieux de la variabilité d'une variable d'intérêt. On peut aussi l'utiliser dans de nombreuses autres situations pour estimer un paramètre auquel on donne un sens causal : que se passerait-il si on faisait varier une variable donnée d'un montant donné. Il est basé sur l'hypothèse essentielle que les résidus et les variables explicatives sont orthogonales, et l'estimateur des moindres carrés est d'autant plus précis que le nombre d'observations est grand.

L'identification des paramètres par cette méthode classique, dite ponctuelle, peut être vue comme un problème d'optimisation qui se résout avec des techniques locales telles que les méthodes de Gauss Newton, de quasi-Newton ainsi que celle du gradient conjugué [21-23]. Ces approches n'offrent aucune garantie sur la qualité de l'estimation, pas plus que sur la confiance qu'on peut accorder à la solution obtenue. Cette méthode peut être inefficace pour identifier les systèmes incertains. Puisqu'il ne peut pas être représenté sous une forme linéaire par rapport à ses paramètres incertains. La représentation d'un système réel par un modèle incertain constitue une bonne solution pour prendre en compte le caractère incertain des paramètres du modèle du système.

La méthode des moindres carrés aux problèmes d'estimation suppose que le vecteur d'erreur est statistiquement modélisé par la fonction de distribution de probabilité. Cependant dans certaines applications, il est difficile de décrire les perturbations par des lois de

probabilité. Il est donc plus judicieux de considérer que l'erreur entre la sortie du modèle et celle du système est bornée et de bornes connues. Ces bornes tiennent compte du bruit de mesure et des erreurs de modélisation. Dans ce cas, on ne cherche plus une valeur du vecteur de paramètres permettant de minimiser le critère, mais un intervalle de valeurs *acceptables*.

Cet intervalle contient d'une manière garantie toutes les valeurs du vecteur de paramètres, telle que l'erreur entre la sortie prédite et celle du système réel n'excède pas les bornes fixées *a priori*. L'approche à erreur bornée est efficace pour estimer des paramètres incertains de modèles, principalement développée dans le contexte de contrôle et de traitement de signal. Cette approche basée sur l'analyse d'intervalle et l'inversion ensembliste. Elle a été récemment utilisée avec succès dans plusieurs domaines notamment en Robotiques, en contrôle et en traitement des signaux et a fait l'objet de nombreux travaux de recherches et thèses (voir par exemple [55-58]).

L'estimation d'état et de paramètres dans un contexte à erreurs bornées, basée sur l'analyse d'intervalle pour des systèmes décrits par des équations différentielles représente l'objectif de cette thèse, l'approche est appliquée au problème d'estimation des paramètres d'un robot planaire .

Cette thèse est structurée comme suit : dans le chapitre 1, nous allons détailler les principaux outils de l'analyse par intervalles qui seront utilisés tout au long de ce document, les différentes propriétés de l'analyse par intervalles sont présentées. Ainsi les notions de fonction d'inclusion, d'inversion ensembliste et de contacteurs, permettant de minimiser l'effet d'enveloppement et d'alléger le temps de calcul requis pour résoudre une équation intervalle. L'objectif du deuxième et troisième chapitre est de traiter le problème d'estimation d'états et de paramètres des systèmes statiques linéaires et non linéaires incertains, La notion de modèle incertain et les différents types d'incertitude sont ensuite introduites à travers l'approche bornante permettant d'appréhender les variables incertaines. Dans le chapitre 4, un exemple applicatif de la méthode d'estimation de paramètres présentée dans le troisième chapitre. La modélisation d'un robot planaire et l'estimation de ces paramètres incertains basée sur l'analyse par intervalles est détaillée.

## *Chapitre I*

# *Principaux outils de l'arithmétique d'intervalles réelles*

## I-1.Introduction :

Avec l'accroissement de la vitesse des ordinateurs, le calcul numérique a vu naître de nouvelles applications comme la modélisation de molécules ou encore la conception de modèles climatiques. Ces applications demandent de plus en plus une qualité et une précision de calcul accrue qui ne peut pas toujours être atteinte. La faute incombe aux circuits et aux programmes arithmétiques qui peuvent comporter des erreurs (par exemple l'explosion d'Ariane 5 lors de son premier vol [ESA Report, 1996]), mais aussi aux nombres qui ne sont pas forcément représentables en machine et doivent être arrondis en introduisant, par conséquent, de petites erreurs. Le besoin d'une arithmétique fiable se fait sentir de façon marqué. Par exemple, en 1982, la Bourse de Vancouver a créé un nouvel indice initialisé à la valeur 1 000,000. L'indice était recalculé après chaque transaction. Vingt-deux mois plus tard, sa valeur était de 524,881. La cause provenait de la valeur de l'indice tronquée après chaque mise à jour au lieu d'être arrondie. Le calcul arrondi aurait donné une valeur de 1 098,892.

Il existe différentes manières de représenter les nombres pour les systèmes informatiques. En mettant de côté les problèmes de la taille des mémoires (que l'on considère toujours finie), n'importe quel nombre entier ou nombre rationnel peut-être codé sur une machine. Les nombres réels sont quant à eux le plus souvent approchés au moyen d'une représentation à virgule flottante. Les représentations à virgule flottante diffèrent seulement par le nombre de chiffres significatifs et la base choisie. Dans ce chapitre, on présente les limites du calcul classique avec des nombres à virgule flottante.

La norme IEEE 754, développée dans les années 80, définit le format de représentation des nombres en virgule flottante ainsi qu'un ensemble d'opérations, de valeurs singulières et d'arrondis permettant de manipuler et d'effectuer des calculs en minimisant les erreurs, mais elles ne les suppriment pas.

## I.2. Arithmétique en virgule flottante

On commence par illustrer le calcul avec les nombres à virgule flottante à l'aide d'un exemple tiré du livre de Hansen [8]. Soit  $f$  la fonction rationnelle  $f : R^2 \rightarrow R$  définie par l'expression suivante :

$$f(x, y) = 333.75y^6 + x^2(11x^2y^2 - y^6 - 121y^4 - 2) + 5.5y^8 + x/2y \quad (1.1)$$

Toutes ces évaluations sont fausses. Comme  $f$  est rationnelle, il est facile d'obtenir la valeur correcte :

Le calcul de  $f(77\ 617, 33\ 096)$  avec différents outils conduit :

- à l'aide de Matlab :  $f = 7.005 \times 1039$ ,
- à l'aide de Mupad :  $f = -5.764607523 \times 1017$ ,
- à l'aide d'un programme écrit en C :
  - Simple précision :  $f = 1.172603 \dots$ ,
  - Double précision :  $f = 1.1766039400531 \dots$ ,
  - Précision étendue :  $f = 1.176603940053178 \dots$

Pour comprendre pourquoi chacun de ces précédents calculs est faux, nous allons étudier comment les machines à calculer manipulent habituellement les réels<sup>1</sup>. Ils représentent une partie finie des réels avec ce que l'on appelle les nombres à virgule flottante ou les nombres

flottants. Ces machines effectuent le plus souvent ces calculs en base 2, mais par souci de clarté, nous allons présenter ces nombres, en base 10 :

$$F_{n,q}^{10} = \{ x \in \mathbb{R}, x = \pm m \cdot 10^p \}$$

$m$  un décimal sous la forme :  $0, a_0 a_1 \dots a_n$ ,

où  $a_i \in \{0, \dots, 9\}$  et  $10^{-1} \leq m < 1$

et  $p$  un entier à  $q$  chiffres .

Le nombre entier **a0a1 . . . an** est appelé la mantisse, l'entier **p** l'exposant

### Exemple 2 :

Regardons l'ensemble  $F_{2,1}$  .

1. le nombre  $17 \in F_{2,1}$  ; en effet  $17 = 0.17 \cdot 10^2$  ( $m = 0.17, p = 2$ ).

2. le nombre  $-0.2 \in F_{2,1}$  ; en effet  $-0.2 = -0.20 \cdot 10^0$  ( $m = -0.20, p = 0$ ).

3. le nombre  $0.01 \notin F_{2,1}$  ; en effet  $0.01 = 0.10 \cdot 10^{-1}$  ( $m = 0.10, p = -1$ ).

On aurait aussi pu l'écrire,  $0.01 = 0.01 \cdot 10^0$ , mais alors  $m < 10^{-1}$ .

4. le nombre  $0.01 \cdot 10^{-9} \notin F_{2,1}$  ; en effet, on a :  $m < 10^{-1}$ .

5. le nombre  $0.1 \cdot 10^{-9} \in F_{2,1}$  ; c'est le plus petit élément de  $F_{2,1}$  strictement positif.

Si l'on cherche à représenter un nombre plus proche de 0, on obtient une exception appelée *underflow*.

6. le nombre  $990\,000\,000 \in F_{2,1}$ ,  $990\,000\,000 = 0.99 \cdot 10^9$  ( $m = 0.99, p = 9$ ) ; c'est le plus grand nombre de  $F_{2,1}$ .

7. le nombre  $990\,000\,000 - 17 = 989\,999\,983 \notin F_{2,1}$  bien que  $990\,000\,000, 17 \in F_{2,1}$ ,  $989\,999\,983 \approx 0.99 \cdot 10^9$  ( $m = 0.99, p = 9$ ).

Question : que se passe-t-il si l'on réitère ce calcul  $n$  fois ?

8. le nombre  $990\,000\,000 + 17 \notin F_{2,1}$  ; on cherche à représenter un nombre trop grand. C'est un cas d'*overflow*.

Pour représenter les nombres réels, l'informatique utilise le plus souvent les nombres à virgule flottante ou nombres flottants. Ils sont codés sous la forme d'un signe  $s$ , d'un exposant  $e$  et d'une mantisse  $m$  comme dans la figure 1.1.

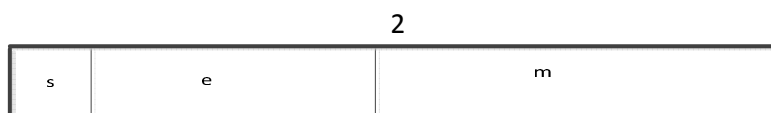


Fig.1.1. Codage d'un nombre à virgule flottante ;  $s$  est le signe,  $e$  correspond à l'exposant

et m la mantisse.

### I.2.1. La norme IEEE 754

La norme IEEE 754 est un standard définissant la représentation des nombres réels en binaire. C'est le standard le plus couramment utilisé par les ordinateurs pour effectuer des calculs avec des nombres flottants. Cette norme définit un format de représentation des nombres à virgule flottante, ainsi qu'un ensemble d'opérations, de valeurs singulières (par exemple zéro et infini) et d'arrondis permettant de manipuler et d'effectuer des calculs sur ces nombres.

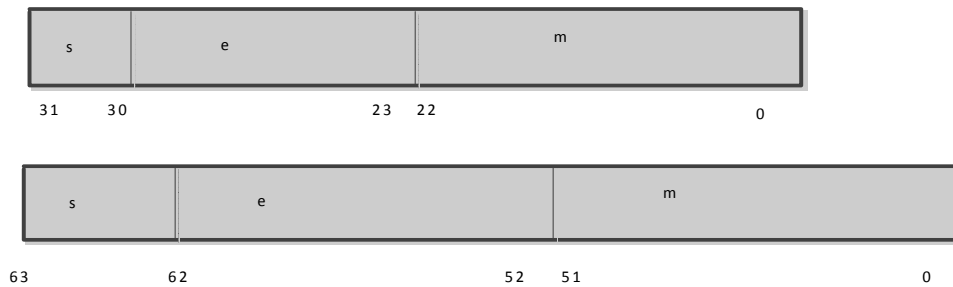


Fig.1.2. Détail du nombre de bits d'un nombre flottant en précision simple et double dans la norme IEEE 754.

### I.2.2 Description

La norme IEEE 754 décrit deux formats principaux de représentation des nombres réels, la précision simple codée sur 32 bits et la précision double codée sur 64 bits (voir figure 1.2). Elle définit aussi une précision étendue, respectivement d'au moins 43 bits et 79 bits, pour chacune des deux représentations standard. Ainsi, l'équation de conversion d'un nombre flottant binaire vers un nombre réel est, sauf cas particulier :

$$(-1)^s \times 2^{e-\text{biais}} \times 1.m$$

C'est la version binaire de la notation scientifique.

#### I.2.2.a. Normalisation :

En notation scientifique, la mantisse est normalisée : elle sera toujours supérieure ou égale à 1 et strictement inférieure à 10. Dans la version binaire, on procède de la même façon. La mantisse normalisée sera donc supérieure ou égale à 1 et strictement inférieure à 2. Toutefois, dans certains cas (voir tableau 2.3), une version dénormalisée est utilisée, où la mantisse sera comprise entre 0 et 1. La valeur de l'exposant détermine si le nombre est normalisé ou dénormalisé, le 0 ou le 1 n'est donc jamais stocké.

#### I.2.2.b Biais :

Le biais qui apparaît dans la partie exposant de l'équation permet de représenter un exposant positif ou négatif en le codant par un nombre toujours positif. Il est fonction du format utilisé et est calculé par l'équation  $2^{n-1} - 1$  avec n le nombre de bits de l'exposant. Par exemple, en précision simple, le biais sera de  $2^{8-1} - 1 = 127$ .

| Exposant        | Mantisse   | Valeur  | Qualificatif |
|-----------------|------------|---|--------------|
| $e=2^n-1$       | $m \neq 0$ | NaN   | Not-a-Number |
| $e=2^n-1$       | $m=0$      | $(-1)^s \cdot \infty$                           | Infini       |
| $0 < e < 2^n-1$ | $m \neq 0$ | $(-1)^s \times 2^{(e-\text{biais})} \times 1.m$ | Normalisé    |
| $e=0$           | $m \neq 0$ | $(-1)^s \times 2^{(e-\text{biais})} \times 0.m$ | Dénormalisé  |
| $e=0$           | $m=0$      | $(-1)^s \times 0$                               | Zéro         |

Fig. 1.2.2: Les différentes interprétations du codage d'un nombre flottant.

**S** : Le signe détermine si le nombre est positif ou négatif.

### 1.3. Exemple

Par exemple, convertissons le nombre 4,625 en un flottant en précision simple. La première étape consiste à le convertir en un nombre binaire à virgule fixe. Le nombre avant la virgule est représenté par des puissances de 2 positives, tandis que le nombre à droite utilise les

$$\text{puissances de 2 négatives. } 4,625 \left\{ \begin{array}{l} .4 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 100 \\ 0,625 = 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = 0,101 \end{array} \right\} 100,101.$$

Puis le résultat est normalisé en décalant la virgule de 2 bits sur la gauche ; l'exposant est biaisé avec la valeur 127 propre aux nombres à virgule flottante en précision simple

$$100,101 = 1,00101 \times 2^2 \Rightarrow 1,00101 \times 2^{2+127}$$

soit en binaire

$$1,00101 \times 2^{10000001}.$$

Le nombre étant positif, en notation scientifique binaire, on obtient la conversion suivante

$$(-1)^0 \times 2^{10000001} \times 1,00101,$$

le codage machine étant illustré par la figure 1.3

|   |          |                          |
|---|----------|--------------------------|
| 0 | 10000001 | 001010000000000000000000 |
|---|----------|--------------------------|

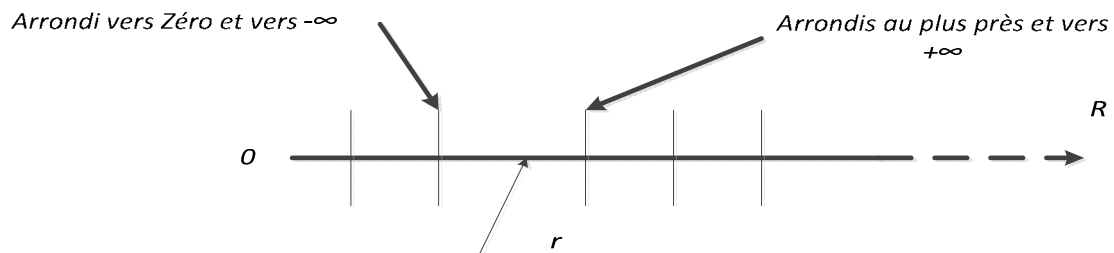
Fig.1.3: Codage IEEE 754 du nombre 4,625.

### 1.4. Arrondis

Coder une infinité de nombres réels avec un nombre fini de bits est impossible. La plupart des calculs utilisant les nombres réels produisent donc un résultat qui ne peut pas être représenté exactement par un nombre à virgule flottante. Ainsi ces résultats devront souvent être arrondis



afin de les faire tenir dans un nombre restreint de bits. Pour cela, la norme IEEE 754 définit quatre modes d'arrondis illustrés par l'exemple de la figure 1.4 : au plus proche (arrondi par défaut), vers zéro, vers  $+\infty$  et vers  $-\infty$ .



**Fig. 1.4:** Arrondis IEEE 754 d'un nombre réel  $r$ .

Ces arrondis sont sources d'erreurs dans les programmes. Pour reprendre un exemple très souvent cité dans la littérature, l'accident survenu pendant la guerre du Golfe : le 25 février 1991, un anti-missile Patriot du système de défense anti-aérien basé à Dhahran en Arabie Saoudite a échoué dans sa mission de poursuite et d'interception d'un Scud. Ce Scud a donc pu atteindre des bâtiments militaires et à tué 28 américains.

Cet exemple montre le besoin d'une arithmétique fiable et robuste permettant d'effectuer des calculs sans risque d'erreurs, et plus généralement de logiciels fiables.

### 1.5. Le calcul par intervalles

Comme l'a montrée la section précédente, l'étude de l'erreur de manipulation des nombres réels avec des nombres flottants est une étude fastidieuse et insuffisante, l'utilisation seule des nombres flottants ne permet pas de faire du calcul garanti. Le calcul par intervalles, est un moyen d'obtenir un résultat garanti qui a les particularités suivantes :

- il nous apporte en général un meilleur résultat.
- il ne nécessite pas d'étudier l'erreur à priori.

Appliquons et détaillons cette méthode par un exemple et calculons un encadrement pour  $f = 12,01 + 27,14 \times 7,026$  :

-étape 1 : chacun des nombres réels est encadré par deux flottants de  $F_{2,1}$  :

$$\begin{aligned} 12 &\leq 12,01 \leq 13 \\ 27 &\leq 27,14 \leq 28 \\ 7,0 &\leq 7,026 \leq 8,0 \end{aligned}$$

- étape 2 : on effectue la multiplication, on en déduit :

$$\begin{aligned} 27 \times 7,0 &\leq 27,14 \times 7,026 \leq 28 \times 8,0 \\ 189 &\leq 27,14 \times 7,026 \leq 224 \end{aligned}$$

- étape 3 : le résultat obtenu est remplacé par son flottant le plus proche, par défaut à gauche et par excès à droite :

$$\begin{aligned} 189 &\leq 27,14 \times 7,026 \leq 224 \\ 180 &\leq 27,14 \times 7,026 \leq 230 \end{aligned}$$

étape 4 : on effectue la somme, on en déduit :

$$12 + 180 \leq 12,01 + 27,14 \times 7,026 \leq 13 + 230$$

$$192 \leq 12,01 + 27,14 \times 7,026 \leq 243$$

– étape 5 : le résultat obtenu est remplacé par son flottant le plus proche, par défaut à gauche et par excès à droite :

$$190 \leq 12,01 + 27,14 \times 7,026 \leq 250$$

On en déduit donc que :  $f \in [190, 250]$ .

Une autre façon de présenter ces calculs consiste à manipuler directement les intervalles. On s'autorisera donc, par exemple, l'écriture  $[27; 28] \times [7, 0; 8, 0]$  qui correspond à l'étape 2. Le tableau suivant présente les différents calculs en utilisant directement les intervalles.

|        | Réel                    | Intervalle                         |
|--------|-------------------------|------------------------------------|
| étape1 | 12,01<br>27,14<br>7,026 | [12 ; 13]<br>[27; 28]<br>[7 ; 8]   |
| étape2 | 27,14x7,026             | [27; 28]x[7 ; 8]<br>=[189; 224]    |
| étape3 | 27,14x7,026             | = [180; 230]                       |
| étape4 | 12,01+27,14x7,026       | [12; 13]+[180; 230]<br>=[192; 243] |
| étape5 | 12,01+27,14x7,026       | [190; 250]                         |

Tableau.1.5. les différents calculs en utilisant directement les intervalles

## **I.6. Arithmétique par intervalles**

### **I.6.1.Introduction**

L'arithmétique par intervalles est une arithmétique définie sur des intervalles plutôt que sur des nombres. Les premières ébauches apparaissent dans les années 1920 ([Burkill, 1924, Young, 1932, Sunaga, 1958]) mais l'arithmétique par intervalles connaît un réel développement suite à la thèse de Moore en 1962 [25] qui l'a définie de façon très complète. Le but de cette arithmétique est de pallier aux erreurs d'arrondis et de troncation introduites par les ordinateurs. Depuis, l'analyse par intervalle a vu des extensions pour résoudre des problèmes posés en mathématique et dans les sciences du génie. Cette approche permet de résoudre des problèmes non linéaires que les méthodes classiques ne peuvent résoudre adéquatement, en particulier, lorsque les données intervenant dans les problèmes sont incertaines.

L'analyse numérique classique propose bien entendu des méthodes pour résoudre des systèmes d'équations. Malheureusement, la solution fournie par ces méthodes est le résultat d'une série de calculs entachés d'imprécisions. Ces imprécisions peuvent être :

- \_ des erreurs d'arrondi liées au calcul sur les flottants ;
- \_ des imprécisions liées aux méthodes elles-mêmes, qui ne fournissent, même en théorie, qu'une approximation de la solution ;

\_ des incertitudes sur les paramètres. En effet, bien souvent le système que l'on résout est un modèle mathématique d'un problème physique. Or, les incertitudes inhérentes aux grandeurs physiques ne sont pas prises en compte dans le modèle. Ce dernier présente donc, dès le départ, un décalage avec la réalité.

On voit qu'il est donc nécessaire d'effectuer parallèlement aux calculs une analyse d'erreur. Il est possible, par exemple, d'utiliser un modèle probabiliste, pour connaître la distribution des sorties d'un système. Malheureusement, dans un contexte critique (robotique chirurgicale, contrôle de centrales nucléaires, etc...), cela est insuffisant : on ne peut accepter qu'il y ait une probabilité, même très faible, qu'un accident se produise. Ajoutons que ces méthodes convergent vers une solution particulière. Elles ne conviennent pas pour décrire l'ensemble des solutions d'un système. On voit qu'il est donc nécessaire d'effectuer parallèlement aux calculs une analyse d'erreur.

L'analyse par intervalles repose sur une approche différente, qui consiste en un mot à prendre en compte au niveau le plus "atomique", c'est à dire dans chaque calcul élémentaire, l'ensemble des imprécisions possibles, que l'on représente par des intervalles. Ainsi, chaque entité (variable, paramètre) se voit affecter un intervalle décrivant ses variations possibles (que l'origine de cette variation soit numérique, physique, etc...). Les calculs ne se font donc plus avec des opérandes réelles (flottantes), mais avec des opérandes de type intervalle.

Les calculs élémentaires produisent de nouveaux intervalles qui conservent les imprécisions obtenues jusqu'à ce stade, et y cumulent les nouvelles imprécisions introduites par le calcul lui-même. On parle de calcul conservatif. C'est cette propriété qui permet de garantir à l'issue de la méthode, qu'une solution reste dans un intervalle de tolérance. Combinée avec un découpage exhaustif des domaines, cette méthode ne perd aucune solution. Voir [27] pour plus de détails

Moore [2] a proposé l'arithmétique par intervalle (arithmétique de gamme) sous sa forme moderne, comme outil pour bondir autour des erreurs dans des calculs numériques. L'arithmétique par intervalle spécifie une méthode précise pour effectuer des opérations arithmétiques sur des intervalles (nombres d'intervalle). Dans le système de numération d'intervalle, chaque nombre d'intervalle représente un certain nombre réel fixe entre les points finaux inférieurs et supérieurs de l'intervalle. Ainsi, une opération arithmétique d'intervalle produit deux valeurs pour chaque résultat. Les deux valeurs correspondent aux points finaux inférieurs et supérieurs de l'intervalle, tels que le vrai résultat se trouve sur cet intervalle. L'exactitude du résultat est indiquée par la largeur de l'intervalle résultant (la distance entre les deux points finaux). Dans ce qui suit, nous abordons les aspects théoriques de l'arithmétique d'intervalle réelle.

### **1.6.2 Définitions et notations**

Par définition, un intervalle est un ensemble fermé et borné de nombres réels [26]. Si  $x$  désigne une variable réelle bornée, alors l'intervalle  $[x]$  auquel elle appartient est défini par :

$$[x] = \{x \in R / \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$$

où  $\underline{x}$  et  $\bar{x}$  sont des nombres réels représentant respectivement les bornes inférieure et supérieure de  $x$ . On note  $\mathbb{IR}$  l'ensemble des intervalles définis sur  $R$ . De manière générale, l'intervalle  $[x]$  sera noté :  $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$  ou  $[x] = \langle c([x]), \bar{x} \rangle$ , où  $c([x])$  représente le centre

de l'intervalle et  $\bar{x} = \frac{(\bar{x} - \underline{x})}{2}$  son rayon.

Notons que les bornes  $\underline{x}$  et  $\bar{x}$  peuvent être finies ou infinies, dans le cadre de la modélisation des systèmes, les incertitudes sont d'amplitude finie. Les paramètres physiques tels qu'une résistance ne changent pas de signe et les domaines de bon fonctionnement qui en résultent

sont fermés. Si une seconde variable réelle  $y$  est élément de  $[x]$ , alors nous noterons :  $y \in [x]$ . Dans ces conditions, toutes les valeurs possibles de  $y$  sont comprises entre les deux bornes sans forcément les atteindre. Cette notation permet de distinguer la variable bornée  $x$ , dont la valeur courante est inconnue et peut fluctuer entre  $\underline{x}$  et  $\bar{x}$ , de l'intervalle  $[x]$  qui est un ensemble parfaitement déterminé. De manière pratique, un domaine d'appartenance ou support peut ainsi être associé à un paramètre, certes inconnu, mais dont les bornes peuvent être appréciées. Ce domaine, représenté sous la forme d'un intervalle, traduit ainsi la notion d'incertitude. Dans la suite de ce document, les variables incertaines seront systématiquement définies en tant que variables bornées. Un autre avantage de l'utilisation des intervalles est que l'évaluation d'une fonction intervalle conduit à un ensemble contenant nécessairement les valeurs recherchées [7]. Notons que, représenter le support d'une variable incertaine  $x$  par un intervalle  $[x]$  ne suppose en aucune façon que la variable considérée est distribuée selon une loi de distribution uniforme. Le lien qui existe entre les espaces  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{IR}$  est défini par la précision minimale que l'on accepte dans un espace d'intervalles.

### **I.6.3 Définition :**

L'espace des intervalles à précision réelle  $\mathbb{IR}_\varepsilon$  est défini par :

$$\varepsilon \in \mathbb{R}, \mathbb{IR}_\varepsilon = \{[x] \in \mathbb{IR} \mid \bar{x} \geq \varepsilon\}$$

La notion d'intervalle peut aisément être étendue au cas d'un vecteur  $X$  constitué de  $n$  variables réelles  $x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}$ . Le vecteur intervalle  $[X]$  contenant  $X$  se définit comme

$$\text{suit : } [X] = [[x_1], \dots, [x_n]]^T$$

où chaque  $[x_i] = [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$  est associé à une variable réelle  $x_i$ . Prenons le cas d'un vecteur de dimension 2. L'intervalle  $[X]$  définit un orthotope aligné (un orthotope aligné veut dire que ces hyperplans sont orthogonaux à des axes du repère paramétrique). les arêtes de l'hyperrectangle sont donc colinéaires aux axes du repère  $(x_1; x_2)$ , plus familièrement appelé boîte ou pavé (voir figure 1.6).

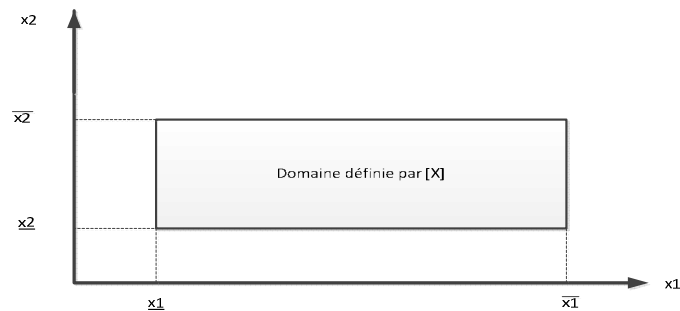
|                                | <i>Intervalle</i> $[x]$                      | <i>Vecteur intervalle</i> $[X]$                                    |
|--------------------------------|--|--|
| <i>centre ou Milieu</i>        | $c([x]) = \frac{\bar{x} + \underline{x}}{2}$ | $c([X]) = \left[ \left( c([x_1]) \dots c([x_n]) \right) \right]^T$ |
| <i>Longueur ou taille</i>      | $w([x]) = \bar{x} - \underline{x}$           | $w([X]) = \max(w([x_1]), \dots, w([x_n]))$                         |
| <i>Valeur absolue ou Norme</i> | $ x  = \max( \bar{x} ,  \underline{x} )$     | $\ [X]\  = \max( x_1 , \dots,  x_n )$                              |

***Tab.1.6 Expression des principales caractéristiques d'un intervalle***

nous appellerons variable bornée normalisée toute variable  $x$  comprise entre 1 et -1 :  $|x| \leq 1$ , ce qui correspond à poser :  $[x] = [-1; 1]$ . Notons qu'un vecteur  $X$  de variables bornées normalisées est caractérisé par la propriété suivante :  $\|X\|_\infty \leq 1$ .

Le tableau 1.6 montre un certain nombre de caractéristiques courantes d'un intervalle notamment le centre, la longueur et la valeur absolue. La valeur absolue d'un intervalle

correspond au maximum de la valeur absolue de ses bornes ; de ce fait, l'inégalité  $|x| \leq |[x]$ ,  $\forall x \in [x]$ , est toujours respectée.



**Fig.1.6. Vecteur intervalle de dimension 2**

Lorsque la borne inférieure est l'opposée de la borne supérieure ( $\bar{x} = -\underline{x}$ ), un intervalle est qualifié de symétrique. Si  $x$  est un intervalle symétrique, alors ses caractéristiques se simplifient pour s'exprimer comme suit :

- le centre :  $c([x]) = 0$
- la longueur :  $w([x]) = 2\bar{x}$
- la valeur absolue :  $||[x]| = 0.5w([x]) = \bar{x}$ .

### 1.7. Opérations logiques sur les intervalles

Les intervalles peuvent être vus comme des ensembles sur lesquels s'appliquent des opérateurs logiques (égalité, intersection, réunion, relation d'ordre, inclusion) permettant de les comparer.

Deux intervalles  $[x]$  et  $[y]$  sont égaux si et seulement si leurs bornes sont égales :

$$[x] = [y] \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y} \text{ et } \bar{x} = \bar{y}$$

Cette définition s'étend aisément dans le cas vectoriel où l'équivalence précédente doit être vérifiée pour chaque composante des vecteurs intervalles  $[X]$  et  $[Y]$ .

L'intersection de deux intervalles  $[x]$  et  $[y]$  est vide si l'une des conditions  $\underline{x} > \bar{y}$  ou  $\bar{x} < \underline{y}$  est vérifiée. Sinon, cette intersection est aussi un intervalle défini par :

$$[x] \cap [y] = [\max(\underline{x}, \underline{y}), \min(\bar{x}, \bar{y})]$$

Dans le cas vectoriel, l'intersection de  $[X]$  avec  $[Y]$  est vide si au moins une des intersections entre deux composantes de même indice de ces deux intervalles est vide. Sinon, une relation similaire à la précédente est utilisée :

$$[X] \cap [Y] = [[x_1] \cap [y_1], \dots, [x_n] \cap [y_n]]^T$$

L'union de deux intervalles est définie si et seulement si leur intersection est non-vide, et dans ce cas, c'est aussi un intervalle :

$$[X] \cup [Y] = [\min(\underline{x}, \underline{y}), \max(\bar{x}, \bar{y})]$$

Si l'intersection est vide, il est possible d'utiliser l'intervalle enveloppe de l'union qui complète celle-ci de manière à obtenir un ensemble connexe [8] :

$$[\{[x], [y]\}] = [\min(\underline{x}, \underline{y}), \max(\bar{x}, \bar{y})]$$

Comme pour les variables réelles, on peut définir les relations d'ordre pour les variables intervalles comme suit :

$$[x] op [y] \Leftrightarrow \bar{x} op \bar{y} \text{ avec } op \in \{<, \leq\}, [x] op [y] \Leftrightarrow \underline{x} op \underline{y} \text{ avec } op \in \{>, \geq\}$$

Les relations d'ordre sont antisymétriques et transitives, et les inégalités  $\leq$  et  $\geq$  sont réflexives. Pour comparer deux intervalles, il est nécessaire que l'intersection de ces derniers soit vide (inégalité stricte) ou limitée à une borne commune (inégalité large). Les relations précédentes sont valables dans le cas de deux vecteurs intervalles lorsque la relation d'ordre est vérifiée pour chaque composante.

L'opérateur d'inclusion peut être défini par :  $[x] \subseteq [y] \Leftrightarrow \underline{x} \geq \underline{y}$  et  $\bar{x} \leq \bar{y}$

L'extension dans le cas vectoriel ne pose aucun problème puisqu'il suffit de vérifier la relation précédente pour toutes les composantes de même indice des vecteurs intervalles  $[X]$  et  $[Y]$ .

### 1.8. Opérations arithmétiques sur les intervalles

Les intervalles peuvent être vus comme des couples de réels, et non plus seulement en tant qu'ensembles. Les opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division) sur les variables réelles peuvent donc être reformulées dans le cadre de l'analyse par intervalles. Les opérateurs élémentaires de l'arithmétique des intervalles sont définis dans le tableau 1.8.

| <i>opération arithmétique</i> | <i>calcul des bornes de l'intervalle obtenu</i>   |
|-------------------------------|---|
| <i>Addition</i>               | $[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$  |
| <i>Soustraction</i>           | $[x] - [y] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$  |
| <i>Multiplication</i>         | $[x][y] = [\min(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}), \max(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y})]$   |
| <i>Inversion</i>              | $\frac{1}{[x]} = \left[ \frac{1}{\bar{x}}, \frac{1}{\underline{x}} \right]$ si $0 \notin x$   |
| <i>Division</i>               | $\frac{[x]}{[y]} = \left[ \min\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\underline{y}}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right), \max\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\underline{y}}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right) \right]$ si $0 \notin y$ |
| <i>Négation</i>               | $-[x] = [-\bar{x}, -\underline{x}]$   |

Tab. 1.8 – Opérations arithmétiques sur les variables intervalle

L'inversion n'est définie que si 0 n'est pas élément de  $[x]$ , c'est-à-dire si l'une des contraintes  $\underline{x} > 0$  ou  $\bar{x} < 0$  est respectée. Si aucune de ces deux contraintes n'est vérifiée, l'inverse de  $[x]$  ne peut être ni connexe, ni compact, ce qui est en contradiction avec la définition d'un intervalle. Une opération arithmétique entre un intervalle  $[x]$  et une constante  $\alpha$  (ou une variable réelle) revient à utiliser les relations définies dans le tableau 1.8.

### 1.9. Propriétés algébriques de l'arithmétique des intervalles

Les propriétés de l'arithmétique des intervalles sont des conséquences directes des définitions des opérations qu'elle utilise. Par exemple, il est facile de montrer que la multiplication et l'addition sont toutes les deux associatives et commutatives. Par contre, la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication n'est pas toujours vérifiée. Moore [2] définit la sous-

distributivité en observant que pour les intervalles  $[x]$ ,  $[y]$  et  $[z]$  la relation suivante est toujours satisfaite :

$$[x]([y] \pm [z]) \subseteq [x][y] \pm [x][z] \text{ ou } ([y] \pm [z])[x] \subseteq [x][z] \pm [x][y]$$

Notons que les propriétés algébriques de l'arithmétique des intervalles se déduisent de celles rencontrées dans le cas de variables réelles. Néanmoins, certaines propriétés diffèrent à cause du problème de dépendance. Pour plus d'information, consulter [2] et [28].

### **I.10 Fonction réelle et domaines de définition**

Soit  $X$  et  $Y$  deux ensembles respectivement définis sur  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$ . L'image  $Y$  d'un ensemble  $X$  par la fonction  $f$  est l'ensemble des images des

éléments de  $X$  par  $f$  :  $f(X) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in X, y = f(x)\}$

On appelle  $X$  le domaine de définition de  $f$  et  $Y$  son domaine image. L'image inverse de l'ensemble  $Y$  par la même fonction  $f$  est l'ensemble des éléments de  $\mathbb{R}^m$  dont l'image appartient à  $Y$

$$f^{-1}(Y) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists y \in Y, f(x) = y\}$$

Soient  $X_1$  et  $X_2$  (respectivement  $Y_1$  et  $Y_2$ ) deux sous-ensembles de  $X$  (respectivement  $Y$ ). Parmi les propriétés importantes de ces ensembles rappelons :

$$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2) \quad (1.1)$$

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2) \quad (1.2)$$

$$f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \quad (1.3)$$

$$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \quad (1.4)$$

$$f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y \quad (1.5)$$

$$f(f^{-1}(X)) \supseteq X \quad (1.6)$$

Ces propriétés définissent un jeu de relations logiques entre les domaines de définition et les domaines images des fonctions réelles. Notons que, pour une fonction réelle la combinaison des opérateurs associés et utilisés avec des intervalles ne fournit pas toujours la même image, afin de lever les ambiguïtés possibles, on définit la fonction d'inclusion. Les fonctions d'inclusions sont alors aux intervalles ce que les fonctions réelles sont aux réels. L'association d'une fonction d'inclusion à une fonction réelle permet d'étudier le domaine de variation de la fonction réelle. Individuellement, elle définissent des relations sur les ensembles par un raisonnement sur les intervalles [2] et [26].

### **I.11. Fonction d'inclusion**

**Définition 1** : Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Une fonction intervalle  $[f]$  définie de  $\mathbb{IR}^m$  dans  $\mathbb{IR}^n$  est une fonction d'inclusion de  $f$  si :

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^m, f([x]) \subseteq [f]([x])$$

Notons que quelque soit la fonction  $f$ , on peut trouver une fonction d'inclusion. Par exemple la fonction  $[f]([x]) = \mathbb{R}^m$ , pour tout  $[x] \in \mathbb{R}^m$ , est une fonction d'inclusion pour toute fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$ , ce qui implique la non unicité des fonctions d'inclusion.

**Définition 2 :** Une fonction d'inclusion  $f$  est monotone au sens de l'inclusion si et seulement si :

$$[x] \subset [y] \Rightarrow [f]([x]) \subset [f]([y])$$

**Définition 3 :** Soit  $[x](k)$  une série d'intervalles définie sur l'espace  $X$ . La fonction d'inclusion  $[f]$  définie sur  $X$  est convergente si et seulement si :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w([x](k)) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} w([f]([x](k))) = 0$$

où  $w([x](k))$  dénote la longueur de  $[x](k)$

L'image d'une fonction d'inclusion est un élément intervalle de  $\mathbb{R}^m$  qui contient l'image de la fonction réelle associée. La construction d'une bonne fonction d'inclusion est un problème essentiel pour l'analyse d'intervalles. L'objectif est d'obtenir un intervalle qui soit le plus proche possible du domaine image de la fonction réelle lorsque le domaine de définition de la fonction réelle est un intervalle.

Quand  $x$  tend vers un réel  $\mathbf{x}$ , son intervalle image  $f$  tend vers le réel  $f(\mathbf{x})$ . De telles fonctions d'inclusion se trouvent aisément pour la plupart des fonctions  $f$  utilisées en physique, pourvu que  $f$  soit continu. Cette propriété permettra d'obtenir des algorithmes convergents. Dans la suite, une fonction d'inclusion sera par défaut monotone et convergente. Toutes ces notions se généralisent immédiatement aux intervalles représentables en machine, qu'il faudrait utiliser en toute rigueur pour avoir un résultat garanti. La construction de ces fonctions s'appuie en particulier sur le théorème suivant :

**Théorème 1.** Soit la fonction  $f$  définie sur  $X^m$  à valeur  $Y \in \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, \dots, x_m) \mapsto Y$ , pour laquelle nous disposons d'une expression explicite comportant uniquement des fonctions et des opérateurs. Soit  $F$  la fonction de  $X^m$  dans  $Y$  obtenue en remplaçant chaque occurrence de la variable  $x_i$  par l'ensemble  $X_i$ . Alors en posant :

$$f(X_1 \dots X_m) = \{f(x_1 \dots x_m) \mid x_1 \in X_1, \dots, x_m \in X_m\}$$

$$f(X_1 \dots X_m) \subset F(X_1 \dots X_m)$$

Si l'expression explicite de  $f$  ne fait intervenir qu'une seule occurrence de chaque variable  $x_i$  alors on a l'égalité :

$$f(X_1 \dots X_m) = F(X_1 \dots X_m)$$

Lorsque cette égalité est vérifiée, la fonction  $F$  est dite optimale, dans le cas contraire, elle est dite pessimiste. Par cette égalité, on définit la fonction d'inclusion optimale telle que :

**Définition :** La fonction intervalle  $[f] : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction d'inclusion optimale pour  $f$  si et seulement si :

$$\forall [X] \in \mathbb{R}^m, f([X]) = [f]([X])$$

L'image d'une fonction optimale est unique et incluse dans celle de toutes les autres fonctions d'inclusion que l'on pourrait choisir. Une fonction qui n'est pas optimale est dite pessimiste.



Le pessimisme induit par les multiples occurrences d'une même variable est dû à l'effet de dépendance [28].

Exemple 1.11 : Si  $f_1(x) = x - x^2$ ,  $f_2(x) = x(1-x)$  et  $f_3(x) = -(x-1/2)^2 + 1/4$ ,  
 nous avons  $f_1 = f_2 = f_3$ .

Bien que les expressions formelles de ces trois fonctions soient différentes. Les fonctions d'extension naturelles associées sont respectivement  $f_1(x) = x - x^2$ ,  $f_2(x) = x(1-x)$  et  $f_3(x) = -(x-1/2)^2 + 1/4$ , qui conduisent à des résultats différents si par exemple  $x=[0,1]$ , alors,

$$f_1(x) = [0,1] - [0,1]^2 = [0,1] - [0,1] = [-1,1],$$

$$f_2(x) = [0,1] * (1 - [0,1]) = [0,1] * [0,1] = [0,1],$$

$$f_3(x) = -([0,1] - 1/2)^2 + 1/4 = -[-1/2, 1/2]^2 + 1/4 = [0, 1/4].$$

Il est possible de montrer que  $f_3(x)$  est minimale car, dans son expression formelle, la variable  $x$  n'apparaît qu'une seule fois. tel n'est pas le cas pour  $f_2(x)$  et  $f_1(x)$  car on effectue des opérations sur des intervalles associés aux mêmes quantités réelles en faisant comme si elles étaient indépendantes. Ce phénomène est connu sous le nom de problème de dépendance.

Dans le cas général, pour avoir une fonction d'inclusion relativement précise, nous avons tout intérêt à réduire le nombre d'occurrences de la variable  $x$  dans l'expression de  $f$ .

Lorsque le domaine image d'une fonction réelle n'a pas la structure d'un intervalle, la fonction optimale ne peut être construite. Dans ce cas, la fonction d'inclusion est nécessairement pessimiste. L'optimalité de  $[f]$  dépend de la topologie des domaines mis en correspondance (voir figure 1.11). Pour assurer l'unicité de la fonction d'inclusion, on définit la fonction d'inclusion minimale, notée  $[f]^*$ . Son image est le plus petit intervalle contenant le domaine image de  $f$  pour un domaine de définition donné.

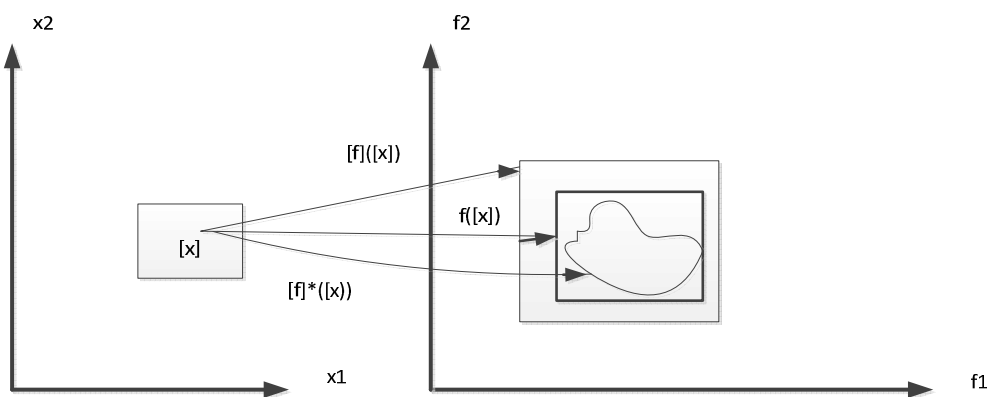


Fig. 1.11 – Image directe  $f$ , fonction d'inclusion minimale  $[f]^*$  et non minimale  $[f]$  d'une fonction vectorielle  $f$  de dimension deux ( $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ).

Il apparaît simplement qu'une fonction d'inclusion minimale est nécessairement monotone.

La convergence, sans être une condition nécessaire pour les fonctions d'inclusion, assure la continuité entre l'espace des réels et celui des intervalles. Si la fonction d'inclusion  $[f]$  associée à  $f$  est convergente, alors pour une donnée ponctuelle, on a  $[f](x) = f(x)$ .

### **I.12.Fonction d'inclusion par développement de Taylor**

Si  $f$  est  $n$  différentiable  $\bar{x}$  le centre de  $\mathbf{x}$  et  $f^{(n)}$  une fonction d'inclusion de la dérivée  $n^{\text{ème}}$  de  $f$   
Alors la fonction d'inclusion centré est donnée par

$$f(x) \subset f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{f''(\bar{x})}{2!}(x - \bar{x})^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}(x - \bar{x})^n \quad (2.1)$$

Dans le cas ou  $n=1$ , nous avons donc

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \quad (2.2)$$

## *Chapitre II*

### *Incertitudes dans la Modélisation des systèmes incertains*

## II.1.Introduction :

Le système physique est excité par des signaux extérieurs. Ces signaux se divisent en deux familles : les entrées du système et les perturbations. Les entrées du système sont contrôlables et observables. Les perturbations sont des signaux non observables. On peut constater uniquement leur influence sur les sorties du système. La commande de systèmes à modèle incertain est un des défis majeurs de l'automatique moderne. La première étape dans la synthèse d'une commande robuste est la définition d'un modèle du système, utilisé pour la synthèse de la commande. La plupart des articles scientifiques traitant de la commande de systèmes incertains, un modèle incertain est proposé avec un certain nombre d'hypothèses sur ses bornes et ses propriétés. Malheureusement dans la pratique la quantification des bornes des hypothèses prises peut s'avérer difficile. Or la robustesse d'une loi de commande dépend de la possibilité d'obtenir un modèle satisfaisant du système.

Déterminer un modèle mathématique d'un système consiste en deux activités :

- la détermination de sa structure ;
- la détermination des valeurs numériques de ses paramètres.

Pour y parvenir, deux chemins complémentaires peuvent être empruntés :

- en partant des lois de la physique, ce qui est pertinent si ces lois sont connues avec assez de précision ;
- en partant de données expérimentales et en cherchant un modèle qui rend compte de manière satisfaisante de ces données.

Selon que l'on utilise les lois de la physique ou des données expérimentales pour déterminer respectivement la structure du modèle ou les valeurs numériques des paramètres, plusieurs configurations sont envisageables, déterminées par la précision des lois de la physique et par la faisabilité des essais expérimentaux. A titre d'exemple, considérons les trois situations suivantes :

- Dans les situations où les lois de la physique permettent de modéliser fidèlement le système et où elles permettent de déterminer précisément les valeurs des paramètres, le recours aux données expérimentales peut être limité à des fins de validation. Cela pourrait être le cas pour un système mécanique simple comme un pendule.
- Certains systèmes se trouvent décrits de manière très imprécise par des lois de la physique.

Si les essais expérimentaux peuvent être effectués facilement, il est plus simple d'utiliser ces derniers à la fois pour déterminer la structure du modèle et les valeurs numériques des paramètres.

-Le cas le plus courant est la situation intermédiaire où les lois de la physique permettent de déterminer la structure du modèle (même partiellement) et où les valeurs des paramètres sont estimées à partir de données expérimentales. C'est dans ce cadre que le modèle du robot planaire considéré dans ce mémoire a été développé.

## **II.2. Système incertains [29]et[30]:**

Le calcul de la commande d'un processus physique passe nécessairement par l'utilisation d'un modèle qui ne peut jamais être une représentation parfaite de la réalité : il y a toujours des incertitudes de modélisation, dont la conséquence est qu'on ne peut pas décrire exactement par un modèle mathématique le comportement d'un système physique. En effet, le modèle mathématique qui peut être issu, soit des équations physiques reflétant notre compréhension des mécanismes mis en jeu, soit d'une procédure d'identification du comportement entrée/sortie du système, dépend de paramètres dont la valeur est souvent mal connue ou évolue au cours du temps. Donc un système physique ne peut jamais être caractérisé exactement par un modèle mathématique, cependant dans certain cas, nous avons une estimation de l'exactitude de notre modèle qui pourrait être plutôt imprécise. Par exemple, le modèle est bon à 25% environ jusqu'à 30 Hertz et au delà de 100 Hertz le modèle est trop imprécis pour l'utiliser pour la conception. Donc il se peut que nous ne voulions pas investir du temps et de l'effort pour obtenir un modèle plus précis, ou il se peut que le comportement change légèrement entre les expériences et nous ne pouvons pas déterminer un modèle plus précis. Dans la pratique, les deux aspects contribueront à l'incertitude. Nous voulons donc des moyens d'incorporer cette incertitude dans le modèle pour la procédure de validation de modèle. L'approche de ces problèmes consiste alors à utiliser un modèle incluant une perturbation (incertitudes, bruit) inconnue mais bornée. La borne sur cette perturbation sera déterminée dans la suite de cette thèse afin de refléter la quantité d'incertitude. Le modèle incertain qui présente la plus petite perturbation en norme est celui qui décrit au mieux le système et donc celui qu'il est préférable d'utiliser pour la conception de la commande.

L'incertitude sur le modèle décrite précédemment par une perturbation résulte en général de deux sources; entrées inconnues et dynamique inconnue (par exemple dynamique en haute

fréquence). Les entrées inconnues seront les entrées dans le modèle intervenant de façon additive sur la sortie de modèle ou/et des entrées du modèle expliquant le bruit de mesure, elles seront d'une énergie bornée. Tandis que la dynamique inconnue sera regroupée dans un composant inconnu du modèle, noté  $\Delta$ , représentant alors les incertitudes de modélisation telles que les dynamiques hautes fréquences qui sont mal connues ou volontairement négligées dans l'écriture du modèle, les retards purs, les incertitudes sur la valeur des paramètres physiques, les effets d'une linéarisation autour d'un point de fonctionnement, l'utilisation de modèles simplifiés pour les actionneurs et les capteurs. Cet opérateur inconnu  $\Delta$  sera supposé linéaire et invariant dans le temps de norme bornée.

### **II.3. Erreur et incertitude :**

En sciences expérimentales, il n'existe pas de mesures exactes. Celle-ci ne peuvent être qu'entachées d'erreurs plus ou moins importantes selon le protocole choisi, la qualité des instruments de mesure ou le rôle de l'opérateur. Evaluer l'incertitude sur une mesure est un domaine complexe qui fait l'objet d'une branche complète : la métrologie.

#### **II.3.1. Erreurs :**

##### **II.3.1.1. Définition de l'erreur :**

Lors de la mesure d'une grandeur physique  $x$ , l'erreur est la différence entre la valeur mesurée  $x$  et la valeur vraie  $X$ . La valeur vraie est en général inconnue (puisqu'on la cherche).

##### **II.3.1.2 Erreurs aléatoires et erreurs systématiques :**

###### **a. Erreurs aléatoires**

Lorsqu'on mesure la période d'oscillation d'une pendule en opérant avec un chronomètre manuel, on constate qu'en répétant les mesures, on trouve des résultats légèrement différents, dus surtout aux retards de déclenchement qui vont réduire ou accroître la valeur de la période suivant qu'ils ont lieu au début ou à la fin de la mesure. Ce phénomène sera détecté par une étude statistique. On parle d'erreur aléatoire. Le résultat de la mesure est caractérisé par une distribution de probabilité répartie autour de la valeur vraie dans le cas d'erreurs purement aléatoires.

###### **b. Erreurs systématiques**

Supposons maintenant qu'on mesure la période d'oscillation d'une pendule avec un chronomètre faussé qui indique toujours des temps 2 % trop faibles. L'étude statistique ne le détectera pas. On parle d'erreur systématique : c'est la composante de l'erreur qui ne varie pas dans des conditions de mesure répétées. Plus généralement les erreurs systématiques ont des origines diverses :

- erreur d'étalonnage

Exemple : Millikan a trouvé une valeur inexacte de la charge de l'électron parce qu'il avait pris une valeur fausse de la viscosité de l'air.

- oubli d'un paramètre

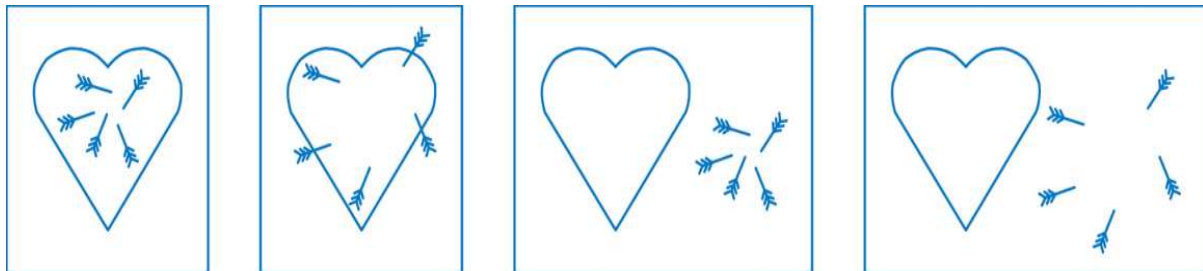
Exemple : influence de la température sur la vitesse du son (si on ne précise pas la température il est impossible de comparer la mesure à une valeur de référence)

- procédure erronée

Exemple : mesure d'une résistance sans tenir compte des résistances de l'ampèremètre et du voltmètre.

Les erreurs systématiques sont difficiles à détecter à priori, mais une fois détectées, on peut souvent les corriger (par exemple en tenant compte des résistances de l'ampèremètre et du voltmètre lors de la mesure d'une résistance).

On représente les rôles respectifs des erreurs aléatoires et systématiques par une analogie avec un tir sur cible illustré dans la figure 3.1. Le centre de la cible représentant la valeur vraie de la grandeur à mesurer :



*Figure II Rôles respectifs des erreurs aléatoires et systématiques*

- si tous les impacts sont proches du centre : faibles erreurs aléatoires et faible erreur systématique

- si les impacts sont très étalés mais centrés en moyenne sur la cible : fortes erreurs aléatoires et faibles erreurs systématique

- si les impacts sont groupés mais loin du centre : faibles erreurs aléatoires et fortes erreurs systématique

- si les impacts sont étalés et loin du centre : fortes erreurs aléatoires et fortes erreurs systématique.

### II.3.1.3 Incertitudes

Lorsque l'on donne le résultat de la mesure d'une grandeur physique, il doit être accompagné d'une indication quantitative de la qualité de ce résultat, afin que ceux qui l'utilisent puissent estimer sa fiabilité. Sinon, les résultats de mesures ne peuvent être comparés, soit entre eux, soit par rapport à des valeurs de référence données dans une spécification ou une norme. Dans la littérature, la qualité du résultat d'un mesurage est universellement dénommée "incertitude de mesure"[31].

### II.4. Concept général d'incertitude

On distingue essentiellement trois types d'incertitudes sur des connaissances,

- Incertitudes de nature aléatoire : on parle alors de *connaissances incertaines*. La théorie des probabilités fournit une structure mathématique pour l'étude de tels phénomènes qui, bien que produits de manière identique, donnent à chaque expérience des résultats qui fluctuent de manière imprévisible.

- Connaissances incomplètes :

- C'est le cas d'un phénomène aléatoire dont la loi de probabilité n'est que partiellement spécifiée, à cause d'informations incomplètes.
- L'incomplétude peut être due à l'imprécision des informations. C'est le cas des phénomènes aléatoires qui, à cause d'informations incomplètes, sont caractérisés par des ensembles aléatoires au lieu de variables aléatoires, plus précises.
- Un autre type d'incomplétude provient de l'utilisation de lois générales, telles que "tout ce qui est rare est cher", qui admettent des exceptions dont on ne sait pas donner les caractéristiques en détail, mais dont il faut se souvenir qu'elles existent.

- Connaissances vagues ou imprécises : typiquement une connaissance vague ou imprécise est fournie en termes linguistiques et contient des concepts vagues comme "assez petit", "vraisemblable", "cher", etc. Ceci apparaît en particulier dans les systèmes de décision d'experts. Ou encore, une connaissance imprécise sera une donnée fournie sous forme d'intervalle, ou bien de sous-ensemble flou.

Dans la pratique, les données délivrées par des capteurs sont la plupart du temps des données Incertaines. L'essentiel de notre étude portera donc sur ce type de données. Il peut arriver que l'incertitude associée aux mesures d'un capteur soit fournie sous la forme d'un intervalle. Nous verrons dans ce cas, comment elle peut être traitée. Dans ce mémoire, nous n'aborderons pas le cas des données imprécises ni celui des données incomplètes.



## **II.5 Les causes des incertitudes de mesures**

Supposons que la valeur vraie du mesurande considéré existe et soit unique. Cette supposition sera maintenue dans toute la suite de ce rapport. Alors, les incertitudes de mesures comprennent en général plusieurs composantes que l'on peut classer en plusieurs catégories [32]et[33].

- Composantes provenant d'*effets systématiques* : elles caractérisent une dispersion constante des mesures, c'est-à-dire que les mesures sont décalées de la valeur vraie par une valeur constante. Ces effets sont dus à des grandeurs d'influences telles que les erreurs liées à l'étalonnage, les erreurs dues aux conditions d'alimentation ou aux traitements électroniques du signal (gain, mise à échelle,...), les erreurs dues aux modes ou aux conditions d'utilisation (rapidité, finesse).
- Composantes provenant d'*effets aléatoires* : elles caractérisent une dispersion aléatoire de mesures, peu éloignées de la valeur vraie du mesurande. Ces effets peuvent être liés aux bruits des composants, à la quantification, ou encore aux variations légères mais incontrôlées des paramètres de référence.
- Composantes provenant d'*effets aberrants* : elles aboutissent à l'obtention d'une valeur qui ne fait pas partie de la population étudiée [32]. Ces effets proviennent, par exemple, des défaillances du capteur ou de l'électronique associée (amplificateur, horloge,...), de variations brutales des caractéristiques du mesurage, etc.

## **II.6. Limitation des causes des incertitudes de mesures :**

Les causes des incertitudes de mesures peuvent être limitées en les détectant et éventuellement en les corrigeant, afin d'obtenir une meilleure qualité de mesure.

- Ainsi, une correction "satisfaisante" des effets systématiques peut être obtenue par application de coefficients sur la valeur numérique acquise, ces coefficients pouvant être obtenus par étalonnage ou par d'autres bases de connaissances externes. En pratique, on peut souvent corriger le résultat de la mesure de manière satisfaisante pour tous les effets systématiques reconnus comme significatifs.
- En ce qui concerne les effets aberrants, leur proportion peuvent être diminuées par adjonction de dispositifs électroniques particuliers, mais aussi par un recoupement d'informations avec d'autres mesures (du même capteur ou d'autres capteurs) ou encore par une reconfiguration du capteur dans un mode mieux adapté à la situation de la mesure.
- Quant aux effets aléatoires, nous verrons par la suite qu'ils peuvent être diminués à condition

de disposer de suffisamment d'informations.

L'incertitude de mesure, est la différence entre la sortie du système et le modèle d'étude pour des conditions initiales identiques. Pour évaluer les incertitudes, Il faut un instrument de mesure construit sur un étalon. Malgré tout, cet instrument possède aussi une certaine précision. L'acte de mesurer entraîne deux types d'évaluation. Il est bien précisé que cette classification ne signifie pas qu'il existe une différence quelconque de nature entre les composantes, elle n'a pour but que de clarifier la présentation. Ainsi, les définitions données de ces deux types d'incertitudes sont les suivantes :

#### **Evaluations de type A :**

C'est le cas où l'opérateur fait toute une série de mesure. Le traitement des erreurs est statistique : *moyenne, écart-type, ...* Cette analyse statistique se fait lorsqu'on a peu d'indications sur les sources d'erreurs.

#### **Evaluations de type B :**

Il est difficile de faire un calcul statistique (cas de la mesure unique). L'opérateur doit chercher et évaluer les sources d'erreurs. Le constructeur de l'instrument de mesure fournit des données telles que *la classe de l'appareil, le calibre, la résolution*. Il est nécessaire d'avoir une connaissance générale sur l'expérience.

La différence fondamentale entre les deux types d'incertitudes est qu'une incertitude de type A est une interprétation fréquentiste des données considérées. Par contre, une incertitude de type B est une interprétation subjectiviste des connaissances dont on dispose. Cependant, il n'est pas précisé dans quelle catégorie doit être rangée l'incertitude qui est évaluée à la fois à partir d'une analyse statistique des observations acquises, et d'informations autres que celles-ci. Nous choisissons de classer cette catégorie d'incertitude dans les évaluations de type A [34]. Nous reconnaissons que nous aurions pu tout aussi bien faire le choix opposé. C'est le cas de l'incertitude composée.

#### **-Incertitudes composées :**

Dans certains cas complexes, il faut souvent combiner les méthodes de type A et de type B, pour obtenir une meilleure évaluation de l'incertitude.

**Exemple :** En ouvrant la notice d'un voltmètre numérique, on trouve typiquement les indications suivantes : la précision D de la mesure est donnée par  $\pm 2$  fois ,le dernier digit  $\pm 0,1$  % de la valeur lue. On peut considérer que l'indication donnée par le fabricant a deux origines :

– Celle qui provient d'une erreur de calibrage (variable d'un appareil à l'autre, d'un calibre à l'autre...). Cette erreur est systématique quand on utilise le même calibre d'un même appareil.

Elle devient aléatoire quand on utilise plusieurs calibres ou plusieurs appareils, même de modèles identiques. Elle est essentiellement présente dans les  $\pm 0,1\%$  de la valeur lue.

– Celle qui provient d'erreurs aléatoires (bruit...). Elle est essentiellement présente dans les  $\pm 2$  fois le dernier digit.

Pour évaluer l'incertitude-type sur une mesure, on procède à une évaluation de type B. On convient de diviser la précision  $\Delta$  indiquée par le fabricant par  $\sqrt{3}$ .

## **II.7 Modélisations conventionnelles des incertitudes de mesures :**

Dans ce chapitre, nous limitons notre étude à l'incertitude de mesure modélisable par une distribution de probabilité *unimodale et symétrique*, ou encore *uniforme*. Le traitement statistique est basé sur la répétition des mesures de  $x$ . La meilleure estimation de la valeur vraie  $X$ , notée  $\bar{x}$ , obtenue à partir des  $n$  mesures  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , est la moyenne de ces mesures :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (2.2)$$

L'estimation de l'écart-type de la distribution des valeurs de  $x$  est donnée par :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.3)$$

En résumé, si on réalise  $n$  mesures de  $x$ , avec les résultats

le résultat final s'écrira sous la forme :

Soient  $n$  observations individuelles  $q_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) d'un capteur donné, pour un même mesurande, obtenues dans les mêmes conditions de mesure, et qui diffèrent en raison des variations aléatoires. Rappelons que les données  $q_k$  peuvent donc être vues comme  $n$  observations indépendantes d'une variable aléatoire  $q$ . Notons que, selon la méthode de mesurage employée, les  $n$  observations se réduisent parfois à une unique observation  $q_1$ , c'est-à-dire que  $n=1$ .

Notons  $q_{est}$ , la meilleure estimation du mesurande obtenue à l'issue de la procédure de mesurage. Notons que cette valeur n'est pas forcément unique, en particulier dans le cas de mesures dites *imprécises*. Dans ce rapport, nous nous limiterons cependant aux cas où elle est unique, et où elle peut être évaluée. Comme indiqué précédemment, nous proposons de là choisir comme étant l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $q$ , dont la meilleure estimation sera dans la plupart des cas la moyenne arithmétique des  $n$  observations  $q_k$  dont on

dispose. Par conséquent, les intervalles de confiance seront construits autour de cette moyenne arithmétique.

### **II.7.1. Modélisation par un intervalle**

Nous nous plaçons dans le cas où la procédure de mesurage employée conduit à l'obtention d'une unique observation  $q_1$ . Donc, la meilleure estimation du mesurande dont on dispose est :  $q_{est.} = q_1$ . La méthode employée [33] pour modéliser les incertitudes de mesures consiste à définir un intervalle  $[q_{est.} - a, q_{est.} + a]$ , avec  $a$  déterminé par le constructeur du capteur de telle façon à ce que la valeur vraie du mesurande soit assurée, de se trouver dans cet intervalle, quelle que soit la mesure effectuée par le capteur. La grandeur  $a$  permet donc de caractériser les incertitudes de mesures par un intervalle défini autour de  $q_{est.}$ .

Cette méthode est relativement "primaire" et qu'elle n'est pas toujours utilisable. En effet, l'intervalle donné doit contenir tout l'ensemble des valeurs possibles du mesurande et il est parfois impossible de fournir un tel intervalle sans trop en exagérer la largeur. Bien souvent, on ne peut définir que des intervalles contenant seulement une proportion donnée de valeurs possibles, c'est-à-dire des intervalles de confiance. Du reste, de tels intervalles suffisent bien souvent à l'utilisateur. En ce qui concerne les évaluations de type A, le choix de l'intervalle ne peut être fait que par l'étendue de la statistique. Un tel choix, bien que très simple en termes de calculs, dépend fortement du nombre d'observations dont on dispose et il semble difficile de donner une estimation du nombre minimal d'observations nécessaire pour établir cet intervalle [32]. Nous pouvons au moins dire que l'évaluation sera d'autant meilleure que le nombre d'observations sera grand. Pour les évaluations de type B, cette méthode semble peut-être mieux adaptée dans le cas d'interrogation d'experts. Bien-entendu, on ne peut pas en déduire des intervalles de confiance de niveaux différents de 100%. Quant à la propagation des intervalles, elle conduit souvent à une augmentation importante de la largeur des intervalles.

### **II.7.2 Modélisations par une distribution de probabilité**

#### **II.7.2.1. Théorie et interprétations**

P est une mesure de probabilité si et seulement si [32] :

- P est une application d'une  $\sigma$ -algèbre  $P(\Omega)$ , ensemble des parties de  $\Omega$ , dans  $[0,1]$ ,
- $P(\Omega)=1$ ,

Toute mesure de probabilité peut se présenter de façon unique à l'aide d'une densité de probabilité  $p$ , définie de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que :

$$\sum_{w \in \Omega} p(w) = 1 \quad \text{dans le cas discret,}$$

et

$$\int_{w \in \Omega} p(w)dw = 1 \quad \text{dans le cas continu}$$

Le calcul de la mesure de probabilité d'un événement A est alors obtenu par :

$$P(A) = \sum_{w \in \Omega} p(w) = 1 \quad \text{dans le cas discret,}$$

$$P(A) = \int_{w \in \Omega} p(w)dw = 1 \quad \text{dans le cas continu}$$

pour modéliser un phénomène aléatoire par une distribution de probabilité, on peut effectuer une interprétation fréquentiste des données considérées, il s'agit alors d'une interprétation de type A, ou encore on peut effectuer une interprétation subjectiviste des connaissances dont on dispose, et c'est alors une interprétation de type B.

### II.7.2.2. Incertitude de type A

Supposons que l'on dispose de  $n$  observations individuelles  $q_k$  d'un capteur donné, obtenues dans les mêmes conditions de mesure et qui diffèrent en raison des variations aléatoires. Les données  $q_k$  peuvent donc être vues comme  $n$  observations indépendantes d'une variable aléatoire  $q$ . Nous distinguons deux grands cas de figures, selon la valeur de  $n$ , qui permettent une évaluation de type A.

#### **a - $n > 30$ observations**

On peut alors effectuer une interprétation purement statistique des mesures. L'incertitude est alors modélisée par la **loi gaussienne associée à la moyenne**. C'est la loi gaussienne, centrée sur la moyenne arithmétique  $\bar{q}$  des  $n$  observations :

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k \quad (1)$$

et d'écart-type estimé par  $s(q)$ . Cette estimation est obtenue à partir de :

$$s^2(\bar{q}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2 \quad (2)$$

#### **b - $n < 30$ observations**

Deux situations peuvent alors se produire, qui vont conduire à une évaluation de type A.

-On a une estimation de l'écart-type à priori : notons-le  $s_p(q)$ . A l'aide d'une interprétation statistique des  $n$  observations, on peut alors modéliser de manière approximative les incertitudes de mesures par la loi gaussienne associée à la moyenne. Cette fois-ci, elle est obtenue par la loi gaussienne centrée sur la moyenne des  $n$  observations (donnée par (1)),

$$\text{d'écart-type estimé par } s_p(\bar{q}) : s_p(\bar{q}) = \frac{s_p(q)}{\sqrt{n}} \quad (3).$$

- On n'a pas d'estimation de l'écart-type à priori mais on sait que la loi associée aux mesures est gaussienne. On peut alors modéliser les incertitudes de mesures par la loi de Student, ou loi de  $t$ , l'expression de la loi de Student centrée réduite étant donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{v\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} \cdot \left[ 1 + \frac{t^2}{v} \right]^{-\frac{v+1}{2}} \quad (4)$$

$$\text{Avec } \Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$$

et  $v$ , le nombre de degrés de liberté, qui vaut  $n-1$ , dans les cas simples. Cette loi n'est généralement pas utilisée pour modéliser l'incertitude de mesure par une distribution de probabilité. Par contre, elle à calculer les intervalles de confiance qui lui sont associés.

Notons que, dans chacune des situations précédentes, plus  $n$  est grand, plus la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées à la valeur vraie du mesurande est réduite, et donc plus la valeur vraie du mesurande est estimée avec précision. Ainsi, l'augmentation du nombre de mesure permet d'améliorer la correction des variations aléatoires des grandeurs d'influence.

### **II.7.2.3 Incertitude de type B**

On se trouve alors dans le cas où la procédure de mesurage employée conduit à l'obtention d'une unique observation  $q_1$ , ou bien d'un nombre  $n$  inférieur à 5 observations, ce qui ne nous permet plus de faire une estimation fréquentiste de l'incertitude des mesures dont on dispose. Pour une estimation du mesurande qui n'a pas été obtenue à partir d'observations répétées, les incertitudes de mesures doivent être évaluées par un jugement scientifique fondé sur toutes les informations disponibles au sujet de la variabilité possible de  $q$ . L'ensemble des informations accumulées peut comprendre [34] :

- des résultats de mesures antérieures,

- des spécifications du fabricant,
- les données fournies par des certificats d'étalonnage,
- l'expérience ou la connaissance générale du comportement et des propriétés des matériaux et instruments utilisés,

Notons que les incertitudes de type B ne sont pas moins cohérentes que celles de type A dans le cas où l'on dispose de peu de mesures. Lorsque les connaissances sont pauvres, en particulier, lorsqu'elles proviennent d'experts, les techniques probabilistes proposent d'avoir recours aux méthodes bayésiennes [32].

Les techniques probabilistes ne permettent pas de modéliser convenablement le résultat du mesurage par une loi de probabilité, car la connaissance dont on dispose n'est pas assez riche. Néanmoins, regardons quelle modélisation probabiliste qui, bien qu'imparfaite, pourrait leur être affectée. Ces cas peuvent être regroupés dans les trois classes suivantes :

- On dispose d'une connaissance pauvre pour l'incertitude, sous forme d'intervalle par exemple. Dans ce cas, pour traiter cette situation par les méthodes probabilistes, il est suggéré de modéliser la mesure par une loi de probabilité uniforme, d'étendue égale à la largeur de l'intervalle (évaluation de type B).
- On dispose de  $n < 5$  observations et l'écart-type est connu mais pas la forme de la loi. Une solution consiste à tout de même construire la loi associée à la moyenne à partir des  $n < 5$  observations et à approcher sa forme par une forme gaussienne (évaluation de type A).
- On dispose de  $n < 30$  observations, l'écart-type n'est pas connu à priori et on ne sait pas si la loi associée aux mesures a une forme gaussienne. On utilisera alors pour estimer l'écart-type l'expression donnée par (2) et le résultat du mesurage sera modélisé par la loi de probabilité associée à la moyenne (évaluation de type A).

Dans chacun de ces cas, l'évaluation de l'incertitude n'est pas très bonne à cause de la trop grande imprécision des informations ou du trop petit nombre d'observations[31].

Lorsque les incertitudes de mesures sont modélisées par des distributions de probabilités, la propagation des incertitudes nécessite des opérations sur ces distributions de probabilités. Il est parfois considéré que la quantité de calculs alors exigée est trop importante [32] , C'est pour cela que la modélisation des mesures par la moyenne et l'écart-type de la loi a été adoptée par le guide ISO.

#### II.7.2.4 Modélisation par la moyenne et l'écart-type

Une distribution de probabilité peut être aussi caractérisée par ses moments. Notons  $q$ , une variable aléatoire caractérisée par sa densité de probabilité  $p$  associée. Alors son moment  $m_n$

d'ordre  $n$  sera donné par :

$$m_n = E(q^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot p(x) \cdot dx$$

avec  $E$ , l'espérance mathématique et  $x$  décrivant l'espace des réalisations ( $x \in \mathbb{R}$ ).

La connaissance de tous les moments, à condition qu'ils existent, est équivalente à la connaissance de la distribution. L'information apportée par les moments des deux premiers ordres est très utile. Le moment d'ordre 1 donne la moyenne et celui d'ordre 2 donne le moment quadratique.

a-moyenne :

$$\text{- Cas continu : } m_1 = m = E(q) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) \cdot dx \quad (5)$$

$$\text{- Cas discret : } m_1 = m = E(q) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i) \quad (6)$$

b-moment quadratique :

$$\text{- Cas continu : } m_2 = E(q^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x) \cdot dx \quad (7)$$

$$\text{- Cas discret : } m_2 = E(q^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p(x_i) \quad (8)$$

Notons que l'expression de la variance est la suivante :

$$E[q - m]^2 = \sigma^2 = E(q^2) - m^2 \quad (9)$$

Donc, lorsque la distribution de probabilité  $p$  est centrée, on a  $m = 0$  et les deux expressions (7) et (9) se confondent. Autrement dit, le moment quadratique est égal à la variance, c'est-à-dire l'écart-type  $\sigma$  au carré.

Dans ce paragraphe, nous considérons les cas où le résultat du mesurage est donné sous la forme :

-d'une moyenne, qui, rappelons-le, sera considérée comme la meilleure estimation dont on dispose du mesurande,

-et de l'estimation d'un écart-type, appelé *incertitude-type*, et noté  $u(q)$ .



Cette méthode est recommandée dans [33]. Le principe employé consiste en fait à remplacer la distribution de probabilité permettant de modéliser les incertitudes de mesures par ses moments d'ordre 1 et 2, de manière à simplifier les traitements. Puisque la moyenne est donnée de manière systématique par (1), nous nous intéresserons dans ce paragraphe seulement à l'évaluation de l'incertitude-type. Ici encore, elle peut se présenter sous la forme d'une évaluation de type A ou de type B.

#### **II.7.2.4.2. Incertitude de type A**

Supposons que l'on dispose de  $n$  observations individuelles  $q_k$  d'un capteur donné, obtenues dans les mêmes conditions de mesure et qui diffèrent en raison des variations aléatoires.

##### ***a- $n > 30$ observations***

On peut alors effectuer une interprétation purement statistique des mesures. Les incertitudes de mesures sont modélisées par l'écart-type de la loi gaussienne associée à la moyenne. Il est estimé par l'écart-type expérimental de la moyenne  $s(q)$ . Il est obtenu à partir de (2).

##### ***b- $5 < n < 30$ observations***

De manière similaire à la modélisation par loi de probabilité, deux situations peuvent alors se produire, qui vont conduire à une évaluation de type A.

- On a une estimation de l'écart-type à priori, noté  $s_p(q)$ . A l'aide d'une interprétation statistique des  $n$  observations, on peut alors encore modéliser les incertitudes de mesures par l'écart-type expérimental de la moyenne. Mais cette fois-ci, il est donné par  $s_p(q)$ , à l'aide de (3). On peut alors modéliser les incertitudes de mesures par l'écart-type estimé par (3), à condition de garder en mémoire le degré de liberté  $\nu = n - 1$ . Il nous servira lors du passage aux intervalles de confiance, ou encore en cas de propagation des incertitudes de mesures.

#### **II.7.2.4.3 Incertitude de type B**

Il est alors nécessaire d'avoir une estimation à priori de l'écart-type de la loi de probabilité associée aux mesures de capteur. On choisit alors pour l'incertitude-type cet écart-type.

Dans la pratique, les incertitudes de mesures sont parfois données soit directement sous la forme d'un écart-type  $\sigma(q)$ , soit indirectement sous la forme d'un multiple de l'écart-type :  $k \cdot \sigma(q)$ . Ce dernier cas se présente lorsque l'estimation  $q$  est obtenue à partir d'une spécification d'un fabricant, d'un certificat d'étalonnage ou d'une publication par exemple.

Afin d'écrire l'incertitude-type sous la forme d'un écart-type, il est alors préconisé de simplement diviser la valeur donnée par le facteur multiplicatif  $k$ .

A titre d'exemple, citons celui proposé dans [31]:

*"Un certificat d'étalonnage indique que la masse d'un étalon de masse en acier inoxydable de valeur nominale égale à un kilogramme est de 1 000, 000 325g et que l'incertitude sur cette valeur n'est égale à 240µg qu'au niveau de 3 écarts-types."*

Il est alors proposé de choisir pour l'incertitude-type l'écart-type, c'est-à-dire  $240\mu\text{g}/3 = 80\mu\text{g}$ . Remarquons que lorsque la connaissance de l'incertitude est donnée par un expert, on est obligé, d'après l'approche proposée par le guide ISO, de chercher à la modéliser par une loi de probabilité afin d'en utiliser l'écart-type comme modélisation de l'incertitude. Ce n'est pas forcément la meilleure méthode pour modéliser cette connaissance.

#### **II.7.2.4.4 Cas de figure ne pouvant être traités convenablement par moyenne et écart-type :**

Ce sont les mêmes cas que ceux qui ne permettent pas une modélisation par loi de probabilité. Nous les présentons ici, ainsi que leur meilleure modélisation par moyenne et écart-type associés.

- On dispose d'une connaissance pauvre, sous forme d'intervalle par exemple. La moyenne est alors donnée par la mesure effectuée et l'écart-type est l'écart-type de la loi uniforme d'étendue donnée par la largeur de l'intervalle (évaluation de type B).
- On dispose de  $n < 5$  observations et l'écart-type est connu mais pas la forme de la loi. La meilleure solution consiste à tout de même choisir la moyenne et l'écart-type expérimental de la moyenne des  $n < 5$  observations (évaluation de type A).
- On dispose de  $n < 30$  observations, l'écart-type n'est pas connu a priori et on ne sait pas si la loi associée aux mesures a une forme gaussienne. La meilleure estimation de cet écart-type sera alors donnée par (2) (évaluation de type A).

#### **II.7.2.5. Exploitation de la modélisation de l'incertitude**

##### **II.7.2. 5.1. Passage aux intervalles de confiance**

Dans le cas d'une évaluation de type A, les intervalles de confiance associés, centrés sur la moyenne des  $n$  observations, doivent être établis en utilisant les tables de la loi normale. Elles donnent la valeur de ces intervalles en fonction du niveau de confiance désiré.

##### ***- Exemple :***

Considérons un exemple où un capteur de distance a fourni les 7 mesures suivantes dans des conditions identiques {2.6m, 2.3m, 2.5m, 2.4m, 2.5m, 2.7m, 2.4m} et où l'écart-type associé

aux mesures du capteur a été estimé *a priori* à  $\sigma=0.1m$ . Supposons que l'on cherche à déterminer l'intervalle de confiance, de niveau de confiance 95%, centré sur la moyenne des mesures effectuées. La moyenne  $q$  de ces mesures est calculée en utilisant (1) :  $q = 2.48m$ .

L'intervalle de confiance centré sur  $q$ , de niveau de confiance 95%, est :

$$\left[ \bar{q} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u, \bar{q} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u \right]$$

avec  $u$  choisi dans la table de la loi normale centrée réduite, de la manière suivante. Cette table donne la valeur  $u_\alpha$  correspondant à la probabilité  $\alpha$  de trouver une valeur inférieure à  $u_\alpha$  (voir figure II.1).

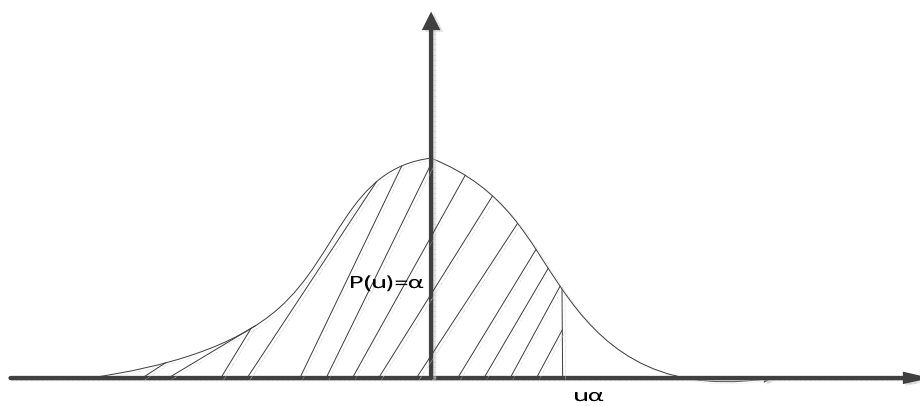


Figure II.1 : Loi normale centrée réduite

Etant donné que nous recherchons l'intervalle de confiance, de niveau de confiance 95%, centré sur la moyenne des observations, c'est donc la valeur  $u_\alpha$ , avec  $\alpha=1-[(1-0.95)/2]=0.975$ , qui est choisie dans la table de la loi normale. L'intervalle de confiance centré sur  $q$ , de niveau de confiance 95%, est donc :

$$\bar{q} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{0.975} = \bar{q} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot 1.96 = [2.406m, 2.554m].$$

Notons toutefois que dans la situation où l'on ne connaît pas l'écart-type à priori mais où l'on sait que la loi est gaussienne, les intervalles de confiance associés, centrés sur la moyenne des  $n$  observations, doivent être établis en utilisant les tables de la loi de Student. Ces tables donnent les valeurs des intervalles de confiance de la même façon que les tables de la loi normale sauf que, en plus du degré de confiance désiré, elles permettent de tenir compte du degré de liberté  $v$ . Dans le cas d'une évaluation de type B, de la même façon que précédemment, les intervalles de confiance centrés sur l'unique mesure (ou encore sur la moyenne des  $n < 5$  mesures) doivent être déduits de (4) en utilisant la loi connue à priori par

l'expert pour les mesures. Les valeurs de ces intervalles peuvent éventuellement avoir été tabulées à priori.

### **II.8. Présentation d'un résultat expérimental :**

Avant de voir quelles peuvent être les causes et les limitations des incertitudes de mesures, nous proposons de rappeler quelques concepts fondamentaux de métrologie [35]. On appelle mesurande la grandeur physique soumise à mesurage, c'est-à-dire à l'ensemble des opérations ayant pour but de déterminer une valeur d'une grandeur.

On appelle grandeur d'influence, toute grandeur qui n'est pas le mesurande mais qui a un effet sur le résultat du mesurage. On peut citer comme exemples de grandeurs d'influence la température d'un micromètre lors de la mesure d'une longueur, ou encore la fréquence lors de la mesure de l'amplitude d'une tension électrique alternative.

A cause des grandeurs d'influence, une valeur vraie du mesurande, c'est-à-dire une valeur que l'on obtiendrait par un mesurage parfait, ne peut être connue avec exactitude, on peut seulement en avoir une estimation plus ou moins précise, selon la connaissance plus ou moins bonne que l'on a des grandeurs d'influence. L'écriture rapportant la mesure d'une grandeur physique  $x$  est :

$$\boxed{\text{valeur mesurée de } x = \bar{x} + \delta x} \quad (2.1)$$

où  $\bar{x}$  est la meilleure estimation de la valeur vraie  $X$  et  $\delta x$  l'incertitude-type sur la mesure (incertitude absolue).

En l'absence d'erreurs systématiques, la valeur vraie de  $x$  se trouve probablement dans (ou proche de) l'intervalle allant de  $\bar{x} - \delta x$  à  $\bar{x} + \delta x$ . On définit aussi l'incertitude type relative ou fractionnaire :  $\delta x / |\bar{x}|$ .

#### **II.8.1. Les causes des incertitudes de mesures :**

Supposons que la valeur vraie du mesurande considéré existe et soit unique. Cette supposition sera maintenue dans toute la suite de ce rapport. Alors, les incertitudes de mesures comprennent en général plusieurs composantes que l'on peut classer en plusieurs catégories [35] et [36].

- Composantes provenant d'*effets systématiques* : elles caractérisent une dispersion constante des mesures, c'est-à-dire que les mesures sont décalées de la valeur vraie par une valeur constante. Ces effets sont dus à des grandeurs d'influence telles que les erreurs liées à l'étalonnage, les erreurs dues aux conditions d'alimentation ou aux traitements électroniques

du signal (gain, mise à échelle,...), les erreurs dues aux modes ou aux conditions d'utilisation (rapidité, finesse).

- Composantes provenant d'*effets aléatoires* : elles caractérisent une dispersion aléatoire de mesures, peu éloignées de la valeur vraie du mesurande. Ces effets peuvent être liés aux bruits des composants, à la quantification, ou encore aux variations légères mais incontrôlées des paramètres de référence.
- Composantes provenant d'*effets aberrants* : elles aboutissent à l'obtention d'une valeur qui ne fait pas partie de la population étudiée [37]. Ces effets proviennent, par exemple, des défaillances du capteur ou de l'électronique associée (amplificateur, horloge,...), de variations brutales des caractéristiques du mesurage, etc.

### **II.8.2.Limitation des causes des incertitudes de mesures :**

Les causes des incertitudes de mesures peuvent être limitées en les détectant et éventuellement en les corrigeant, afin d'obtenir une meilleure qualité de mesure.

- Ainsi, une correction "satisfaisante" des effets systématiques peut être obtenue par application de coefficients sur la valeur numérique acquise, ces coefficients pouvant être obtenus par étalonnage ou par d'autres bases de connaissances externes. En pratique, on peut souvent corriger le résultat de la mesure de manière satisfaisante pour tous les effets systématiques reconnus comme significatifs.
- En ce qui concerne les effets aberrants, leur proportion peuvent être diminuées par adjonction de dispositifs électroniques particuliers, mais aussi par un recoupement d'informations avec d'autres mesures (du même capteur ou d'autres capteurs) ou encore par une reconfiguration du capteur dans un mode mieux adapté à la situation de la mesure.
- Quant aux effets aléatoires, nous verrons par la suite qu'ils peuvent être diminués à condition de disposer de suffisamment d'informations.

### **II.9.Mesures quantitatives de l'incertitude de mesure :**

L'incertitude de mesure est définie comme une indication quantitative de la qualité du résultat d'un mesurage. Nous proposons ici de rappeler les recommandations de base [38]et[39]qui correspondent aux attentes des milieux applicatifs, pour choisir la quantité qui évalue et exprime l'incertitude de mesure.

**a. recommandation 1 :**

Tout d'abord, il est préconisé d'utiliser une représentation paramétrique de l'incertitude de mesure, c'est-à-dire sous la forme d'un simple et unique paramètre. Le résultat du mesurage est alors complètement caractérisé par la meilleure estimation dont on dispose du mesurande, plus un paramètre caractérisant l'incertitude.

**b. recommandation 2 :**

La méthode idéale d'évaluation et d'expression de l'incertitude du résultat d'un mesurage devrait être transférable, c'est-à-dire que l'incertitude évaluée pour un résultat devrait pouvoir être utilisée directement comme composante dans l'évaluation de l'incertitude d'un autre mesurage où l'on utilise le premier résultat.

Autrement dit, si pour exprimer l'incertitude d'un mesurage M1, on a besoin de l'incertitude d'un second mesurage M2, alors la quantité qui est choisie pour exprimer l'incertitude de mesure de M2 doit être directement utilisable pour établir la quantité exprimant l'incertitude de mesure de M1.

**c. recommandation 3 :**

Le paramètre peut être, par exemple, un écart-type (ou un multiple de celui-ci) ou la demi-largeur d'un intervalle de confiance déterminé.

En réalité, bien que cela ne soit pas dit explicitement, une représentation fonctionnelle sous-tend ces deux paramétrages. C'est la distribution de probabilité qui modélise le mieux possible la dispersion aléatoire des mesures d'un même capteur, dans les mêmes conditions de mesure. Ainsi, si le paramètre choisi pour exprimer l'incertitude de mesure est un écart-type, il faut choisir l'écart type associé à cette distribution de probabilité. De même, si l'on veut exprimer l'incertitude de mesure par la demi-largeur d'un intervalle de confiance donné, il s'agit de l'intervalle associé à cette distribution de probabilité, pour un niveau de confiance donné.

**d. recommandation 4 :**

Dans de nombreuses applications industrielles et commerciales, de même que dans les domaines de la santé et de la sécurité, il est souvent nécessaire de fournir, autour du résultat d'un mesurage, un intervalle dont on puisse s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande. Aussi, la méthode idéale d'évaluation et d'expression de l'incertitude de mesure devrait pouvoir fournir aisément un tel intervalle, en particulier avec une probabilité ou un niveau de confiance qui corresponde de manière réaliste à ce qui est exigé.

Donc pour que la méthode utilisée soit satisfaisante, elle doit fournir des intervalles de confiances aussi proches que possible de la réalité.

*Chapitre III :*

*Estimation d'état zéro dans un contexte incertain*

### III.1.Introduction :

L'estimation est l'un des concepts les plus utilisés en automatique, dans les domaines de l'identification, de l'observation, de la commande et du diagnostic. Le cas des systèmes linéaires à paramètres constants est bien résolu ainsi que l'extension aux systèmes à paramètres variables. Lorsque les systèmes sont affectés de perturbations non mesurées, la problématique est plus délicate et les approches à erreurs bornées peuvent donner des éléments de réponse.

L'estimation de l'état d'un système est un problème bien résolu lorsque ce système est à paramètres constants (utilisation des observateurs de type Luenberger) ou quand il est soumis à des perturbations de caractéristiques statistiques a priori connues (utilisation de filtres de Kalman). Pour des systèmes à paramètres variables, et lorsque les lois de variations sont a priori connues, les méthodes précédentes se généralisent. La situation devient plus délicate lorsque les paramètres du système varient au cours du temps selon des lois inconnues. En général, les techniques d'estimation se basent sur la connaissance du modèle du système. Cependant, ce modèle n'est qu'une image approchée du comportement du système. De plus les informations recueillies sur un système se font à partir de capteurs dont la fiabilité peut être mise en cause. Tous ces facteurs constituent des phénomènes perturbateurs qui amoindrissent l'aptitude des modèles à représenter fidèlement le fonctionnement des systèmes. Une façon assez séduisante de prendre en compte les variations des paramètres d'un système consiste à considérer des perturbations bornées et que les bornes sont connues a priori.

L'estimation est un "problème de décision" qui trouve de nombreuses applications dans le domaine des sciences de l'ingénieur. Ainsi l'utilise-t-on lorsqu'il est nécessaire, pour caractériser le phénomène que l'on veut étudier, d'extraire des informations de l'observation de grandeurs physiques. Le plus souvent, l'étape d'estimation est rendue nécessaire du fait de la nature même des observations qui sont réalisées au moyen de capteurs. En dépit du soin apporté lors de la conception de ceux-ci, ils ne peuvent cependant s'affranchir totalement des grandeurs d'influence qui perturbent leur fonctionnement (température, humidité, pression, champ magnétique,...). De plus, un capteur étant un objet technologique, il possède nécessairement un "domaine de fonctionnement" limité lié, par exemple, à la linéarité de l'évolution de la sortie par rapport à l'entrée. Si l'on représente le fonctionnement d'un capteur au moyen d'une transmittance, on retrouve de plus les notions de gain, d'inertie, de frottements ou de bande passante qui limitent nécessairement la qualité des mesures fournies.



Parmi les applications des méthodes d'estimation, celles liées à la *validation de mesures* sont importantes. Il ne sert à rien, en effet, d'élaborer des commandes complexes si les algorithmes qui les génèrent reçoivent des informations erronées et incohérentes. S'assurer que les mesures sont correctes apparaît donc comme indispensable aussi bien lors de la caractérisation d'un processus (étape de modélisation-identification) que lors de l'étape de conduite de celui-ci (étape de commande).

Dans ce chapitre, nous discutons les différentes classes de solution pour les systèmes d'intervalle d'équations linéaires et non linéaires.

### **III.2. Vecteur intervalle :**

Un vecteur d'intervalle  $b^I$  est un vecteur dont les composants sont des intervalles. Une matrice d'intervalle  $A^I$  est une matrice dont les éléments sont des intervalles. Considérons  $x$  comme un vecteur réel avec composants  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , et  $X^I$  un vecteur d'intervalle avec des composants  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ . Nous disons que  $x$  est contenu dans  $X^I$  si et seulement si  $x_i \in X_i$  pour tous  $i = 1, 2, \dots, n$ .  $A$  est une matrice réelle avec des éléments  $a_{ij}$  et  $A^I$  une matrice d'intervalle avec des éléments  $A_{ij}$  pour  $i=1, 2, \dots, m$ , et  $j=1, 2, \dots, n$ . nous disons que  $A$  est contenu dans  $A^I$  si et seulement si  $a_{ij} \in A_{ij}$  pour tous  $i=1, 2, \dots, m$ , et  $j= 1, 2, \dots, n$ . De même, pour les vecteurs d'intervalles  $x^I$  et  $y^I$  nous écrivons  $x^I \subset y^I$  si et seulement si  $X_i \subset Y_i$  pour tous  $i = 1, 2, \dots, n$ , ou  $Y_1, \dots, Y_n$  sont des composants de  $y^I$ .

Nous écrivons  $A^I \subset B^I$  si et seulement si  $A_{ij} \subset B_{ij}$  de  $A_{ij}$  pour tous  $i=1, 2, \dots, m$ , et tous  $j= 1, 2, \dots, n$ . ou  $B_{ij}$  sont des éléments de  $B^I$ . L'ensemble des points réelles (vecteurs)  $x$  sous une forme du vecteur  $X^I$  d'intervalle parallélépipède de  $n$  dimensions avec des cotés parallèles aux axes du même rang. le centre d'une matrice d'intervalle  $A^I$  est une matrice réelle  $m(A^I)$  dont ses éléments sont les points médians des éléments correspondant a  $A^I$ . Nous définissons la largeur d'un vecteur d'intervalle (matrice) pour être la largeur du composant le plus large (élément).

#### **III.2.1 système linéaire :**

Considérons le système réel d'équation :  $AX = b$  (2.1)



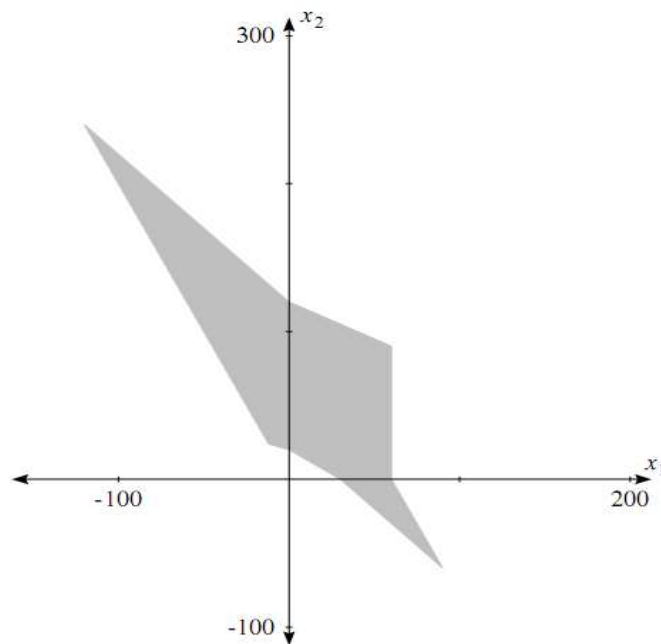
Si  $x$  est un point de l'ensemble de la solution  $S$ , le membre gauche intersecté avec le membre droit dans chaque équation, citée ci-dessus, doivent satisfaire aux inégalités ci-après:

$$2x_1 \leq 120, 3x_1 + x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 240, 2x_1 + 3x_2 \geq 60,$$

La relation  $3x_1 + x_2 \geq 0$  est automatiquement vérifiée (parce que  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ ). Si ces inégalités sont des égalités, on obtient les lignes de frontière pour  $S$ . Dans les autres quadrants l'ensemble solution peut être trouvé d'une manière semblable. L'ensemble  $S$  a été abordé dans les contextes où l'analyse d'intervalle n'a pas été utilisée. On utilisant les méthodes d'intervalle pour bondir  $S$ , les limites seront sous forme de boîte (un vecteur d'intervalle qui représentera  $S$ ). La plus petite boîte (la solution globale) pour l'ensemble de solution du système à intervalle (2.4) sera :

$$X^I = \begin{bmatrix} [-120, 90] \\ [-60, 240] \end{bmatrix}.$$



**Fig. 3.1.** L'ensemble de solution du système à intervalle (2.4)

On note que  $X^I$  contient des points qui ne sont pas dans  $S$ . par exemple, le point  $(0, 200)^T$  est dans  $X^I$  mais pas dans  $S$ .

### III.3. Itération de Gauss :

Il y a plusieurs méthodes variantes pour résoudre les équations qui peuvent être considérées en tant qu'élimination gaussienne. Une version d'intervalle peut être obtenue par le remplacement de chaque étape de l'arithmétique réelle par l'étape correspondante d'arithmétique d'intervalle. Une méthode standard implique de factoriser la matrice de coefficient dans un produit d'une matrice triangulaire inférieure et supérieure. Une version d'intervalle de cette méthode avec l'amélioration itérative des facteurs triangulaires a été abordée par Alefeld et Rokne (1984). La plupart des publications sur les équations linéaires d'intervalles n'utilisent pas la factorisation. L'élimination gaussienne à intervalle s'applique sur  $Ax=b$ , Si les éléments des matrices de  $A^I$  et  $b^I$  sont des intervalles. Le vecteur de solution d'intervalle calculé en utilisant l'élimination gaussienne contient l'ensemble de  $S$ . Supposons que le procédé d'élimination n'échoue pas en raison de la division par un intervalle contenant zéro. Alors il produit une matrice triangulaire supérieure. Si aucun élément diagonal de la matrice triangulaire supérieure ne contient zéro, alors  $A^I$  est régulière (chaque matrice réelle contenue dans  $A^I$  est non singulière). Si  $A^I$  est dégénéré, ce résultat montre que  $A^I$  est non singulier (la méthode d'intervalle peut montrer qu'une matrice réelle est non singulière).

Si  $A^I$  et  $b^I$  a au moins un élément d'intervalle non dégénéré, la solution  $S$  se compose généralement de plus d'un point. La boîte  $x^I$  calculée par l'élimination gaussienne d'intervalle contient toujours l'ensemble de solution  $S$ . Une attention spéciale doit être accordée au choix du pivot dans l'élimination gaussienne d'intervalle. Dans l'algorithme réel, le pivot a la plus grande magnitude. Cependant, si deux intervalles se chevauchent, et tous les nombres réels dans un intervalle ne sont pas plus grands que les nombres réels dans l'autre, Le bon choix est celui de la plus grande magnitude. [9]

#### III.3.1. Echec de l'itération de Gauss

Depuis la production de l'arrondissement (extérieur) dans les calculs d'intervalles, une solution calculée en utilisant l'élimination gaussienne d'intervalle n'est pas généralement la plus étroite possible[22]. En fait, l'algorithme peut échouer de temps en temps en raison de la division par un intervalle contenant zéro même lorsque l'ensemble de solution  $S$  est lié. Ce qui est plus mauvais, cependant, est que la dépendance peut causer un tel échec même si l'arithmétique d'intervalle exacte est employée.

Dans la pratique, l'échec peut se produire même lorsque chaque matrice réelle dans la matrice de coefficient d'intervalle est définie positive. Ceci est prouvé en utilisant un exemple de trois dimensions par Reichmann (1979). Considérons un système  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  en lequel  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}$  sont réels (non intervalle).

Supposons que nous résolvons ce système par élimination gaussienne d'intervalle pour bondir les erreurs d'arrondis. Hansen et Smith (1967) ont observé que les limites d'intervalle se développent pendant que la matrice se développe.

Ils ont expérimenté la méthode sur un ordinateur avec 27 bits dans une mantisse (qui est l'équivalent d'environ 8.5 chiffres décimaux d'exactitude). Ils ont trouvé cela pour des matrices réelles bien conditionnées, les points finaux des composants d'intervalles du vecteur de solution ont généralement différé dans le premier chiffre des matrices d'ordre 10 ou plus. Ainsi quand on utilise la précision simple d'arithmétique d'intervalle, l'élimination gaussienne d'intervalle simple ne peut pas généralement être employée pour résoudre des systèmes d'ordre 10 ou plus.

Wongwises (1975a,1975b) a entrepris des expériences beaucoup plus étendues. Les résultats obtenus donnent une détermination définitive des propriétés de l'algorithme gaussienne d'intervalle.[9]

### **III.3.2. Pré conditionnement :**

On remplaçant simplement l'algorithme d'élimination gaussienne réelle par une version d'intervalle qui ne peut pas généralement être recommandé dans la pratique (bien qu'il y a des exceptions). Dans cette section, nous donnons un algorithme alternatif qui donne des excellents résultats une fois appliqué pour se dégénérer ou pour s'approcher des systèmes dégénérés. La méthode a été dérivée par Hansen (1965). Une étude complète de la méthode a été faite par Wongwises (1975a, 1975b). Le procédé que nous décrivons maintenant est identique si le système est réelle ou à intervalle. Cependant, nous décrivons et abordons la version d'intervalle.

On prend  $\mathbf{A}^c$  dénoter le centre  $m(\mathbf{A}^I)$  de  $\mathbf{A}^I$ . Ainsi, si  $A_{ij} = [ \underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij} ]$ , puis  $A_{ij}^c = \frac{1}{2} (\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij})$ .

Dans la pratique, le  $\mathbf{A}^C$  n'a pas besoin d'être exact. Par exemple, pour une élimination gaussienne réelle, nous calculons un inverse approximatif  $\mathbf{B}$  de  $\mathbf{A}^C$ . Nous employons  $\mathbf{B}$  comme une matrice de pré-conditionnement. En utilisant l'arithmétique d'intervalle pour bondir des erreurs d'arrondis, nous calculons  $\mathbf{M}^I = \mathbf{B} \mathbf{A}^I$  et  $\mathbf{r}^I = \mathbf{B} \mathbf{b}^I$ . Nous résolvons le système pré-conditionné  $\mathbf{M}^I \mathbf{x} = \mathbf{r}^I$ . (2.6)

Il pourrait se produire que le  $\mathbf{B}^I$  ne peut pas être calculé parce que  $\mathbf{A}^C$  est singulier ou proche à être singulier. Dans ce cas, l'ensemble de solution  $\mathbf{A}^I \mathbf{x} = \mathbf{b}^I$  pourrait être illimité. Ainsi, il est simplement raisonnable d'abandonner de calculer la solution. Quand l'arithmétique exacte est employée, le centre de  $\mathbf{M}^I$ , est la matrice d'identité. Si les éléments d'intervalle de  $\mathbf{A}^I$  ne sont pas larges, puis  $\mathbf{M}^I$  se rapproche à l'identité de la matrice dans certain sens, dans ce cas-ci, nous pouvons résoudre (2.6) en utilisant l'arithmétique d'intervalle.

Car chaque élément de  $\mathbf{A}^I$  rentre seulement une fois dans le calcul d'un élément donné de  $\mathbf{M}^I$ . Ainsi, seulement les erreurs d'arrondis ajoutent une largeur aux éléments calculés de  $\mathbf{M}^I$ . Nous pouvons maintenant résoudre (2.6) par la méthode d'élimination gaussienne d'intervalle décrit ci-dessus, si les éléments d'intervalle de  $\mathbf{A}^I$  sont étroits, alors ainsi ceux de  $\mathbf{M}^I$  sont étroits. Quand les éléments de  $\mathbf{A}^I$  sont réelles (des intervalles dégénérés), les résultats calculés suivant ce procédé sont excellents. Néanmoins nous relevons une légère croissance des intervalles due aux erreurs d'arrondis.

Pour employer la méthode que nous avons décrite pour résoudre des systèmes des équations linéaires, nous effectuons une quantité considérable de travail qui n'est pas nécessaire dans l'élimination gaussienne non intervalle pour calculer une solution approximative. Le travail supplémentaire est de calculer un inverse approximatif  $\mathbf{B}$  de  $\mathbf{A}^C$ , le centre de  $\mathbf{A}^I$  et de multiplier  $\mathbf{A}^I$  et  $\mathbf{b}^I$  par  $\mathbf{B}$ . en conséquence, notre procédé emploie environ six fois autant d'opérations comparativement à l'élimination gaussienne ordinaire.

Si la matrice coefficient  $\mathbf{A}^I$  est une matrice  $M$ , donc l'élimination gaussienne d'intervalle produit la plus petite case contenant l'ensemble de solution. Dans ce cas-ci, le pré-conditionnement est non seulement inutile, mais il devrait être évité pour que l'ensemble de solution ne soit pas agrandie.

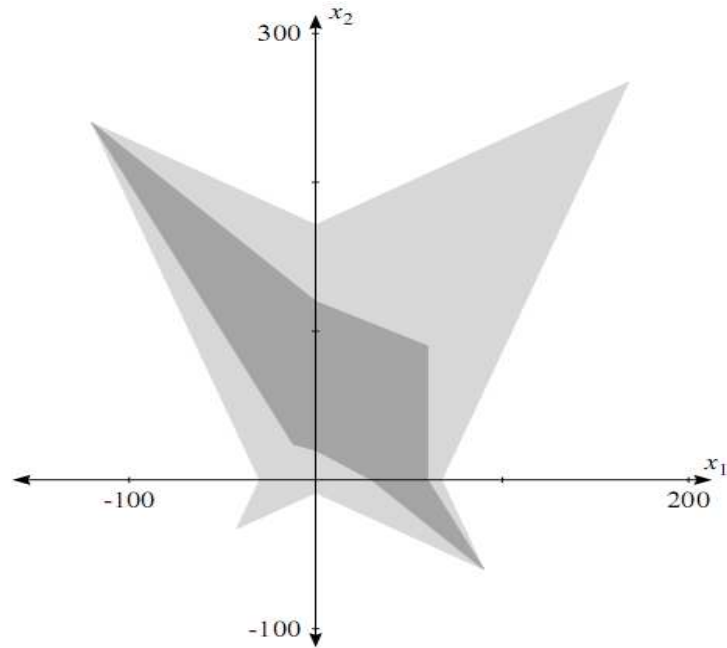


Fig. 3.1 : l'ensemble de solution  $S$  et l'ensemble de solution après le pré-conditionnement pour les équations (2.4)

#### III.4. Itération de Krawczyk :

Le système linéaire d'intervalle  $A x = b$  peut être pré-conditionné en se multipliant par une matrice  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . L'élimination gaussienne peut être employée, mais il est plus rapide de calculer une clôture de la solution par la méthode de Krawczyk.

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . soit  $x^{(i)}$ , présente la  $i$ -ème itération, calculée pour  $x^{(0)} := x$ . Alors tels que

$$\square \Sigma(A, b) \subseteq x^{(i)} \text{ puis}$$

$$\tilde{A}^{-1} \tilde{b} = C \tilde{b} + (I - C \tilde{A}) \tilde{A}^{-1} \tilde{b} \in C b + (I - C A) x^{(i)}$$

Prises pour tout  $\tilde{A} \in A$  et  $\tilde{b} \in b$ , de sorte que

$$\square \Sigma(A, b) \subseteq x^{(i)} \Rightarrow \square \Sigma(A, b) \subseteq (C b + (I - C A) x^{(i)}) \cap x^{(i)} \quad (2.7)$$

Ceci donne l'itération de Krawczyk

$$x^{(i+1)} = (C b + (I - C A) x^{(i)}) \cap x^{(i)} \quad (2.8)$$

Pour commencer l'itération, prenant le vecteur  $x^{(0)}$  tels que la solution  $\tilde{x} \in x^{(0)}$  et

$x^{(0)} \supseteq \square \Sigma(A, b)$ . si possible que  $x^{(0)}$  peut être trouvé à l'aide du théorème suivant.

**Théorème 1.** Si  $C$  satisfait  $\|I - C\tilde{A}\| = \beta < 1$ ,  $\tilde{x} = \tilde{A}^{-1}\tilde{b}$  et  $\|\cdot\|$  est n'importe quelle norme subalterne, puis  $\|\tilde{x}\| \leq \|c\tilde{b}\| / (1 - \beta)$

**Preuve.** De  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$  nous avons  $\tilde{x} = c\tilde{b} + (1 - c\tilde{A})\tilde{x}$  et par conséquent

$$\|\tilde{x}\| \leq \|c\tilde{b}\| + \|I - c\tilde{A}\|\|\tilde{x}\|$$

$$\|\tilde{x}\| \leq \|c\tilde{b}\| + \beta\|\tilde{x}\|$$

Ce qui donne le résultat.

Depuis  $\|c\tilde{b}\|_{\infty} \leq \|cb\|_{\infty}$  et  $\beta < 1$  est très probable pour  $C$  être l'inverse de la matrice de point médian de  $A$ , nous définissons le vecteur initial d'intervalle par :

$$x^{(0)} = ([-\alpha, \alpha], \dots, [-\alpha, \alpha])^T.$$

Les itérations peuvent être terminées si les rayons des composants de  $x^{(i)}$  ne diminuent plus rapidement. La somme de ces rayons peut être calculée après chaque itération et être comparée à la somme précédente. [8]

### **III.5. Système nonlinéaire :**

#### **III.5.1. algorithme de Newton d'intervalles :**

#### **III.5.2. Introduction :**

La méthode de Newton est une procédure classique pour résoudre des équations par approximations successives. Ce type de résolution est très ancien. Les Grecs en utilisaient déjà une variante pour trouver les racines carrées : on part d'une estimation ; cette estimation en fournit une meilleure, et, en réitérant le procédé, on obtient une valeur qui converge vers la solution. Ce procédé est rapide car le nombre de décimales gagnées en précision double en général à chaque étape, où il s'applique à une grande variété de problèmes. La méthode de Newton présente toutefois un petit inconvénient : la solution trouvée dépend de l'estimation initiale. Et comme les équations peuvent posséder plusieurs solutions, on n'obtient pas toujours celle que l'on cherche. Mais cela ne fait en général pas problème, car on a une bonne idée de l'endroit où débiter, et, si la première tentative converge vers une solution inattendue, on peut toujours recommencer avec une autre estimation [13]et [18].

Les méthodes itératives figurent parmi les méthodes numériques les plus courantes et le plus puissantes. L'idée est de partir d'une valeur approchée (souvent grossière) de la solution, puis d'augmenter la précision par l'application itérée d'un algorithme bien choisi [15].



La méthode de Newton est un outil clé dans le calcul scientifique pour résoudre des équations non linéaires et des problèmes d'optimisation. Notre intérêt dans ce chapitre est en Newton méthode pour résoudre des systèmes d'équations algébriques non linéaires. Traditionnellement, la méthode de Newton est utilisée pour calculer une approximation d'un zéro d'une fonction non linéaire réelle  $f(x)$ . C'est de calculer une solution de l'équation

$$f(x) = 0 \quad (2.9)$$

La méthode rapproche la fonction  $f(x)$  dans le voisinage d'une valeur initiale  $x_0$  par la fonction linéaire (la tangente).

Supposons que  $f(x)$  est continuellement dérivable. Par le théorème de valeur moyen, nous pouvons écrire :

$$f(x) = f(y) + f'(c)(x - y) \quad (3)$$

Pour un certain  $c$  entre  $x$  et  $y$ .

Soit  $[a, b]$  un intervalle dans lequel nous cherchons une solution de l'équation (2.9). Une solution  $x$ , s'il existe, doit satisfaire :

$$f(y) + f'(c)(x - y) = 0 \quad (3.1)$$

Pour n'importe quel  $y \in [a, b]$ , en particulier pour  $y = m([a, b]) = (a + b)/2$ . D'où,

$$x = y - \frac{f(y)}{f'(c)} \quad (3.2)$$

$x$  est une approximation d'un zéro de l'équation (2.9). La méthode de Newton raffine cette approximation en prenant pour nouvelle valeur la solution  $y$  plus un terme correctif (à  $y$  on ajoute ici  $-\frac{f(y)}{f'(c)}$ ).

Soit  $F'(X)$  la fonction d'inclusion de  $f'(x)$ , et considérons l'algorithme :

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} \cap N(X^{(k)}) \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (3.3)$$

$$N(X) = m(X) - f(m(X))/F'(X) \quad (3.4)$$

Il suit de (3.2) que  $x$  est contenu dans  $N(X)$ , si  $y = m(X)$  et si  $x$  est contenu dans  $X$ , alors  $c$  dans (3.1) est aussi contenu dans  $X$ . Dans ce cas est aussi contenu dans  $X(k)$  pour toutes les valeurs de  $k$ .

Conditions d'arrêt :

- Si  $|X^{(k)} - X^{(k-1)}| < \varepsilon$  alors  $X^{(k)}$  est le résultat de l'estimation de la racine
- Si  $k > \text{MAX\_ITER}$  alors la méthode diverge ou n'a pas la convergence assez rapide pour fournir un résultat.
- Si  $f'(X^{(k-1)}) = 0$ , il y aura division par zéro.

**Algorithme :**

Début

Pile(P)  $\leftarrow X^{(0)}$

**Répéter**

tant que  $P \neq \emptyset$  faire

tant que  $\text{largeur}(X^{(0)}) > \varepsilon$  faire

si  $f'(X^{(k)}) = 0$

On termine : ne peut pas diviser par zéro

Sinon

Calculer  $X^{(k)} \cap N(X^{(k+1)})$

Incrémenter nbIterations

$X^{(k+1)} = X^{(k)} \cap N(X^{(k)})$

Si  $|X^{(k+1)} - X^{(k)}| > \varepsilon$

$X^{(k)} := X^{(k+1)}$

**Tant que** (continuer ET nbIter  $\leq$  MAX\_ITER)

Si (nbIter  $>$  MAX\_ITER)

Afficher "On n'a pas encore la convergence vers la racine".

Pour plus de compréhension, nous présentons l'exemple présenté ci-après cité dans la référence [13

### III.5.3 Exemple :

Soit  $f(x) = x^2 - 2$ .

Une extension d'intervalle de la fonction  $f'(x) = 2x$  et  $F(X) = 2X$ . d'ici,

$$N(X) = m(X) - \frac{[m(X)]^2 - 2}{2X},$$

D'où

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} \cap \left\{ m(X^{(k)}) - \frac{[m(X^{(k)})]^2 - 2}{2X^{(k)}} \right\}.$$

Prenant  $X^{(0)} = [1, 2]$ , on obtient :

$$X^{(1)} = [ 1.3749999999999999 , 1.4375000000000001 ]$$

$$X^{(2)} = [ 1.4140624999999999 , 1.41441761363637 ]$$

$$X^{(3)} = [ 1.41421355929452 , 1.41421356594718 ]$$

$$X^{(4)} = [ 1.41421356237309 , 1.41421356237310 ]$$

$$X^{(5)} = [ 1.41421356237309 , 1.41421356237310 ]$$

$f(x)$  a pour solution  $x = \sqrt{2}$ . arrondir  $X^{(3)}$  à partir de la huitième position après la virgule, on voit que  $\sqrt{2} \in [1.41421355, 1.41421357]$ .

$X(k) = X(3)$  pour tout  $k > 3$ , l'algorithme converge alors après trois itérations.

à l'inverse de la méthode de Newton sur les nombres, la méthode de Newton converge toujours sur les intervalles. L'arithmétique d'intervalles permet de trouver, s'ils existent les zéros de la fonction dans l'intervalle  $X_0$  ou conclura à la non-existence.

L'inconvénient, et que le nombre d'itérations ne peut être connu a priori (dépend du  $X_0$  choisi) mais peut être fixé. Le calcul de la dérivée est par fois difficile à calculer.

#### III.5.4.1. la pente intervalle de newton méthode[5]et[19] :

Nous décrivons maintenant la pente intervalle de newton méthode. Pour l'obtenir, nous modifions la méthode ci-dessus de Newton d'intervalle en remplaçant la dérive  $f'$  par la fonction  $g$  de pente.

$$f(y) = f(x) + (y-x)g(x, y) \quad (3.5)$$

Là où  $g(x, y)$  est la fonction de pente. Si  $y$  est un zéro de  $f$ , puis  $f(y) = 0$  et, de (3.5),

$$y = x - \frac{f(x)}{g(x, y)}$$

Si  $y$  est dans un intervalle  $X$  dans lequel nous cherchons un zéro de  $f$ , puis  $y \in N_S(x, X)$  où

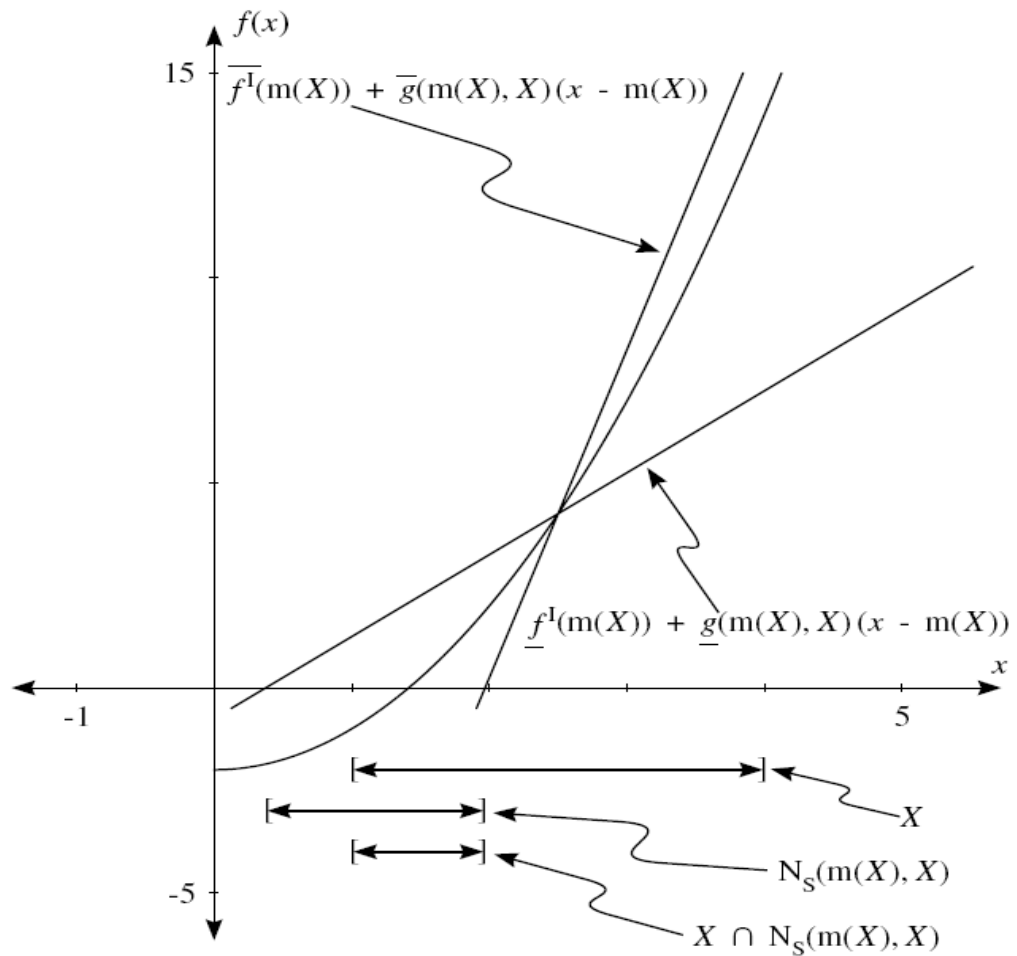
$$N_S(x, X) = x - \frac{f(x)}{g(x, X)} \quad (3.6)$$

Pour trouver un zéro de  $f$  dans un intervalle  $X$ , nous pouvons employer la méthode itérative

$$N_S(x_n, X_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n, X_n)}$$

$$X_{n+1} = X_n \cap N_S(x_n, X_n)$$

Pour  $n = 0, 1, 2, \dots$  où  $X_0 = X$ . Un bon choix pour  $x_n$  est  $m(X_n)$ . Nous appelons ce procédé la pente intervalle de newton méthode. La figure 3.2 montre bien cette méthode.



**Fig3.2. la pente intervalle de newton méthode**

Si nous comparons cette relation à la relation (3.1) pour la méthode de Newton d'intervalle, la seule différence apparente est que nous avons remplacé  $f'(X)$  par  $g(x, X)$ . En fait, il y a une autre différence. Pour s'assurer que n'importe quel zéro de  $f$  dans  $X$  est également dans  $N(x, X)$  comme donné près (3.1), il est nécessaire que le point  $X$  soit dans l'intervalle  $X$ . Pour la méthode de Newton d'intervalle de pente, ce n'est pas nécessaire.

Si  $x \in X$ , puis  $g(x, X) \subset f'(X)$ ; Par conséquent, la méthode de Newton d'intervalle de pente est généralement plus efficace que la méthode de Newton d'intervalle donnée dans (3.3).

Il peut montrer que les théorèmes 5.1 à 5.5 valent pour cette méthode qui utilise des pentes. La preuve du théorème 5.2 exige que  $g$  ont un nombre fini des zéros dans  $X$  [17]

#### **III.5.4.2 Exemple illustratif**

Nous considérons maintenant un exemple simple illustré la vertu de la forme de pente de la méthode de Newton d'intervalle. Considérons la fonction :

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 96x^2 - 388x + 480$$

Si nous déterminons sa pente analytiquement utilisons (3.5), nous pouvons rassembler des limites et écrire la pente comme

$$g(x, X) = X^3 + (x+3)X^2 + (x^2 + 3x - 96)X + x^3 + 3x^2 - 96x - 388.$$

Supposons que nous cherchons une racine de  $f(x)$  dans l'intervalle  $X = [0, 4]$  et augmente au sujet du centre  $X = 2$  du  $X$ . évaluant la pente on utilise la règle de Horner, nous obtenons  $g(x, X) = [-904, -560]$ . Alors  $f(x) = -640$ , le résultat de Newton de pente est  $[0.8571, 1.093]$  approximativement.

Le résultat de Newton est  $[0.3505, 1.429]$  approximativement. Le rapport des largeurs de la pente à celui de dérivé est 0.4034. C'est-à-dire, le résultat de pente est considérablement plus étroit [17]

#### **III.5.5. La méthode de Newton multivariable**

Le problème est de trouver des limites sur la solution d'une fonction continue non linéaire  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dans une boîte donnée  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ . En raison de la puissance de l'arithmétique d'intervalles de bondir des gammes des fonctions, les solutions des systèmes des équations non linéaires et optimisation globale, par les méthodes semblables, sont les utilisations les plus communes de l'analyse d'intervalle.

Il y a beaucoup d'applications où nous voudrions une équation non linéaire résolvant la technique qui peut trouver, avec la certitude mathématique, toutes les racines dans une région donnée. Suivre une méthode non intervalle il est difficile de trouver toutes les solutions et souvent impossible de vérifier si toutes les solutions ont été trouvées. Des méthodes d'intervalle peuvent être employées pour compter les nombres des racines dans une boîte donnée et pour fournir les limites serrées pour chaque racine individuelle.

Utilisons le théorème de la valeur moyenne nous prenons pour n'importe quel  $x^*$  cela :

$$f(x^*) \in f(\tilde{x}) + J(x)(x^* - \tilde{x})$$

Là où  $J(x)$  est la matrice de Jacobian d'intervalle avec

$$J_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad i, j = 1, \dots, n$$

Ce qui peut être formé utilise la différentiation automatique, et  $\tilde{x} \in x$ . Si  $x^*$  est un zéro de  $f$  alors  $f(x^*) = 0$  et donc

$$-f(x) \in J(x)(x^* - \tilde{x}) \quad (3.7)$$

Le système linéaire d'intervalle peut alors être résolu pour que  $x^*$  obtienne une limite externe sur l'ensemble de solution  $(N(\tilde{x}, x))$ . La notation inclut  $\tilde{x}$  et  $x$  pour montrer la dépendance aux deux conditions. Ceci donne

$$\begin{aligned} 0 &\in f(\tilde{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})(N(\tilde{x}, \mathbf{x}) - \tilde{x}), \\ f(\tilde{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})(N(\tilde{x}, \mathbf{x}^{(k)}) - \tilde{x}^{(k)}) &= 0, \\ x^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} \cap N(\tilde{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k)}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Pour  $k=0, 1, \dots$  et  $x^{(k)} \in x^{(k)}$ , Un choix raisonnable pour  $\tilde{x}^{(k)}$  est le centre  $\tilde{x}^{(k)}$ , de  $x$ , toute fois de meilleurs choix sont disponibles. Un exemple de la détermination  $\tilde{x}^{(k)}$  est employé un non-intervalle version de la méthode de Newton pour trouver une approximation d'une solution dans  $x$ . Les diverses méthodes de Newton d'intervalle sont déterminées par la façon dont  $N(\tilde{x}^{(k)}, x^{(k)})$  est défini. Essentiellement les variations sur les trois opérateurs décrits ci-dessous sont utilisées généralement.

### III.5.5.a. Opérateurs de Newton

Le système linéaire peut être résolu en utilisant l'opérateur de Newton

$$N(\tilde{x}, \mathbf{x}) = \tilde{x} - J(x)^{-1} f(\tilde{x})$$

Dans la pratique cet opérateur n'est pas employé souvent puisqu'un système linéaire d'intervalle doit être résolu pour chaque itération. Également  $J(x)$  est susceptible de contenir des matrices singulières à moins que la largeur de  $x$  soit petite.

### III.5.5.b. Opérateur de Krawczyk :

La méthode de Newton échoue souvent en présence de singularité et ne produit rien. Nous survolons rapidement dans ce paragraphe une alternative possible : l'opérateur de Krawczyk. L'avantage de cet opérateur est qu'aucune équation linéaire d'intervalle ne doit être résolue à n'importe quelles étapes, de ce fait vitesse et fiabilité croissantes. La substitution des limites du système linéaire dans l'itération de Krawczyk mène à l'opérateur de Krawczyk pour les systèmes non linéaires  $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et est défini par

$$K(\tilde{x}, \mathbf{x}) = \tilde{x} - C f(\tilde{x}) - (I - C J(x)) (\tilde{x} - \mathbf{x})$$

Là où  $C$  est la matrice de préconditionnement, l'inverse de point médian de  $J(x)$ , et  $(\tilde{x} \in \mathbf{x})$ . Bien qu'un inverse soit encore exigé, c'est l'inverse d'une vraie matrice plutôt qu'une matrice d'intervalle.

Remplacement de  $N(\tilde{x}, \mathbf{x})$  par  $K(\tilde{x}, \mathbf{x})$  dans (3.8) mène à l'itération de Krawczyk

Pour  $k=0, 1, \dots$  et  $\tilde{x}^{(k)} \in x^{(k)}$

### III.5.5.c. Opérateur de Hansen et Sengupta :

Un troisième opérateur développé par Hansen et Sengupta [2], l'opérateur de Hansen-Sengupta, emploie un procédé de Gauss-Seidel. Pré-conditionnant l'équation (3.7) avec  $C$  l'inverse de point médian de  $J(x)$  donne :

$$CJ(x) (N(\tilde{x}, \mathbf{x}) - \tilde{x}) = -C f(\tilde{x}).$$

Changement de la notation  $N(\tilde{x}, \mathbf{x})$  à  $H(\tilde{x}, \mathbf{x})$  et définition

$$M = CJ(x), b = C f(\tilde{x}).$$

L'intervalle de la procédure du gauss-Seidel montant composant par composant pour donner l'itération :  $x^{(k+1)} = H(\tilde{x}^{(k)}, x^{(k)})_i \cap x_i^{(k)}$ ,

Pour  $k=0, 1, \dots$  et  $\tilde{x}^{(k)} \in x^{(k)}$

Neumaier [25] prouve que cet opérateur rapporte une clôture plus serrée que l'opérateur de Krawczyk [2]. Un avantage d'employer l'analyse d'intervalles pour résoudre des équations non linéaires est que les opérateurs de Krawczyk et Hansen-Sengupta peuvent être employés pour examiner l'existence et l'unicité d'un zéro dans un intervalle  $x$ .

**Théorème 1.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  être une fonction continue non linéaire,  $\tilde{x} \in x$  et  $x'$  dénoter ou  $K(\tilde{x}, x)$  ou  $H(\tilde{x}, x)$ .

- (i) Si  $f$  a une racine  $x^* \in x$  alors  $x^* \in x' \cap x$ .
- (ii) Si  $x' \cap x = \emptyset$  alors  $f$  ne contient aucun zéro dans  $x$ .
- (iii) Si  $\emptyset \neq x' \subseteq x$  alors  $f$  contient un unique zéro dans  $x$ .

Une preuve est donnée par Neumaier [25].

**Exemple**

Considérer les équations non linéaires

$$2x_1 - x_2 - 2 = 0,$$

$$\frac{7}{2}x_2 - x_1^2 - 4x_1 + 5 = 0$$

Ce qui ont de vraies solutions  $x = (1, 0)^T$  et  $x = (2, 2)^T$ . Utilisons la fonction `nlinkraw.m` avec l'intervalle initial  $x = ([0.8, 1.2], [-0.2, 0.2])^T$ , elle produit le résultat suivant :

```

Nombre of iterations
      8
intvals =
[0.999999999999999, 1.000000000000001]
[-0.000000000000001, 0.000000000000001]

```

Dans ce cas-ci, des limites appropriées sont données autour d'une des racines dans 8 itérations.

Si la largeur de l'intervalle initial est grimpée légèrement jusqu'à  $x = ([0.5, 1.5], [-0.5, 0.5])^T$  la fonction `nlinkraw.m` ne trouve pas plus serré les limites sur une racine, et l'intervalle initial est produit.

Augmentant la largeur plus loin de sorte que l'intervalle initial,  $x = ([0.5, 3], [-0.5, 3])^T$ , contient les deux vraies racines, produit le rendement suivant pour la fonction `nlinkraw.m`.

```

Nombre of iterations

```



1

```
intval ans =  
[0.500000000000000, 3.000000000000000]  
[-0.500000000000001, 3.000000000000000]
```

Bien que le rendement soit correct du fait les deux racines sont contenues dans l'intervalle, une clôture serrée d'une racine n'est pas obtenue. L'application du même intervalle initial avec la fonction `nlinhs.m`, produit une erreur due à la division par zéro.

Ces exemples numériques montrent l'importance de fournir un intervalle du petit rayon contenant une racine. Si un tel intervalle est indiqué alors les fonctions peuvent être employées pour donner les limites fortement vérifiées sur une racine.

### **III.5.5.d. Toutes les solutions d'un système non linéaire :**

Un inconvénient des méthodes multivariées discutées jusqu'ici est que seulement une racine peut être trouvée à la fois, pour trouver toutes les racines dans une gamme donnée. Par davantage de considération, des méthodes d'intervalle peuvent être employées pour surmonter ce problème, bondissant toutes les racines dans un intervalle donné. Afin de réaliser ceci, un algorithme utilise la « bisection » généralisé en même temps que des méthodes de Newton peuvent être développées. [13]

Le théorème 1 permet à toutes les solutions d'être calculées avec la certitude mathématique.

L'idée fondamentale est de réitérer par l'utilisation d'un opérateur de Newton sur une boîte jusqu'à ce qu'à un certain moment la largeur de  $x^{(k+1)}$  n'est pas suffisamment (plus petite que  $x^{(k)}$ ).

Ceci peut se produire parce que plusieurs racines sont contenues dans la boîte, ou la boîte est trop large pour converger à une racine simple. La boîte est bissectée à ce stade pour former deux nouvelles boîtes. L'itération est alors effectuée sur une des boîtes tandis que l'autre est empilée pour la considération postérieure.

Si une étape de l'itération est appliquée à une boîte  $x^{(k)}$  et la boîte  $x^{(k+1)}$  est retournée, alors un critère est exigé pour décider si la taille de la boîte est suffisamment réduite. Un critère possible est de dire la boîte  $x^{(k+1)}$  est suffisamment réduit si pour certains  $i=1,2,\dots,n$

$$\text{rad}(x_i^{(k)}) - \text{rad}(x_i^{(k+1)}) < \alpha \max_i (\text{rad}(x_i^{(k)})),$$

Là où le  $\alpha$  est une constante tels que  $0 < \alpha < 1$ . Si une boîte est suffisamment réduite alors l'itération est continuée sur la boîte, et sinon, alors elle est coupée en sous-boîtes. **[13]**

## *Chapitre IV*

### *Estimation de paramètres d'un robot planaire*

## IV.1.Introduction :

Les performances des lois de commande basées sur l'utilisation du modèle dynamique dépendent en partie de la qualité des valeurs estimées des paramètres du modèle qui décrit la dynamique du robot. La robustesse quant à elle dépend en partie de la qualité des incertitudes fournies par les estimations. On comprend alors l'importance de la bonne connaissance de ces paramètres et des incertitudes associées. L'estimation de paramètres à partir de données expérimentales est habituellement réalisée par la minimisation de normes quadratiques, soit de la différence entre des données expérimentales et les sorties d'un modèle[41],[42]. Ces derniers étant généralement non-linéaires, la minimisation est effectuée par des méthodes itératives locales (telles que la méthode de Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt ou gradients conjugués par exemple) alors même que ces techniques présentent la faiblesse de fournir des résultats dépendant fortement des choix des points initiaux. Des techniques de minimisation globales (comme les algorithmes évolutionnaires par exemple) peuvent parfois contourner ce type d'écueils numériques. Néanmoins, les grandeurs identifiées doivent être assorties d'intervalles de confiance ou d'incertitude. Dans le contexte statistique, ces derniers sont obtenus par le biais de la borne de Cramèr-Rao, correspondant à l'inverse de la matrice d'information de Fisher. Or, cette valeur est une borne asymptotique d'estimateur et de plus, elle n'a de sens que si le modèle utilisé est valide et que les erreurs agissant sur le système sont distribuées selon une loi de probabilité connue *à priori*. Malheureusement, ces conditions sont rarement vérifiées : en effet, les modèles incluent souvent des approximations qui se traduisent par des erreurs systématiques difficilement décrites comme des variables aléatoires et la nature exacte des bruits agissant sur les grandeurs mesurées est souvent mal connue. Ainsi, le contexte *erreurs bornées* offre une alternative séduisante au contexte statistique. En effet, il est souvent plus naturel d'utiliser la formulation erreurs inconnues mais bornées pour traduire les informations disponibles sur les perturbations agissant sur un système physique, comme par exemple des erreurs de mesure systématiques ou encore des erreurs déterministes de modélisation.

Ce chapitre concerne l'estimation des paramètres d'un slider-crank par l'approche de l'estimation à erreur bornée basée sur l'analyse d'intervalle.

#### IV.2. Estimation à erreurs bornées :

L'estimation de paramètres dans un contexte à erreurs bornées est une méthode par laquelle l'ensemble faisable de paramètres est calculé. Etant donné  $p$ , le vecteur des paramètres à estimer, et  $Y_k$  le vecteur de mesure à l'instant  $t_k$ , La réponse de ce système ,peut être exprimée comme suit :

$$f : R^m \rightarrow R, \quad t_k \in R^m$$

$$y_k = f(t_k), \quad k=1, \dots, N \quad (4.1)$$

Le système peut être statique et dépendre seulement de la valeur actuelle de l'entrée ou le système peut être dynamique et dépendre des valeurs précédentes de l'entrée et de la sortie. On peut donner la réponse de système comme suit :

$$y_{mk} = y_k + e_{mk}, \quad k=1, \dots, N \quad (4.2)$$

Où  $e_{mk}$  dénote l'erreur additive et  $N$  est nombre de mesure. Système inconnu peut être Modelé utilisant une fonction paramétrique,  $f_p : R^{m \times n} \rightarrow R$ , paramétré on  $p \in R^n$ , l'estimation sortie est donnée par :

$$y_k = f(t_k, p) \quad (4.3)$$

Et l'erreur entre le système et son modèle mathématique est appelée l'erreur de modulation, et elle est définie comme

$$e_{ok} = y_k - y_k \quad (4.4)$$

Et l'erreur entre l'observation mesurée et le modèle mathématique est égale à :

$$e_k = y_{mk} - y_k \quad (4.5)$$

De (4.4) et (4.5) l'erreur d'estimation due au bruit de mesure et à l'erreur de modélisation est exprimée par :

$$e_k = e_{mk} + e_{ok} \quad (4.6)$$

Pour l'estimation de paramètre à erreurs bornées, l'erreur de mesure et l'erreur de modélisation sont supposées bornées avec  $|e_{mk}| \leq E_{mk}$  et  $|e_{ok}| \leq E_{ok}$ , Respectivement. Donc, l'erreur entre le modèle et la réponse observée est aussi bornée.

$$\left| y_{mk} - y_k^\Lambda \right| \leq E_k \quad (4.7)$$

where  $E_k = E_{mk} + E_{ok}$

Il ressort de ceux-ci, que l'ensemble des paramètres estimés par l'approche à erreur bornées, présente toutes les valeurs possibles des paramètres et satisfont l'expression présentée ci-après :

$$P_k = \left\{ p : \left| y_{mk} - f(t_k, p) \right| \leq E_k \right\} \quad (4.8)$$

### **IV.3. Model d'un robot manipulateur planaire :**

Généralement, un robot manipulateur est considéré comme un système articulé rigide. Le système articulé rigide est caractérisé par une structure arborescente articulé simple ou multiple dont les liaisons sont mobiles les unes par rapport aux autres. Cet ensemble a pour objectif de mener l'organe terminal vers un lieu géométrique imposé par la tâche [44], [45]et[46]. Tout manipulateur peut être considéré comme une chaîne de liaisons connectées par des articulations charnières ou glissières, cette chaine peut-être ouverte ou fermé. Chaque liaison localise les informations à son propre repère.

Les bras manipulateurs de chaîne cinématique ouverte ont la rigidité mécanique insuffisante et présentent un comportement élastique indésiré [44]. D'autre part les bras manipulateurs de chaîne cinématique fermé sont préférables en raison de leur haute rigidité structurelle.

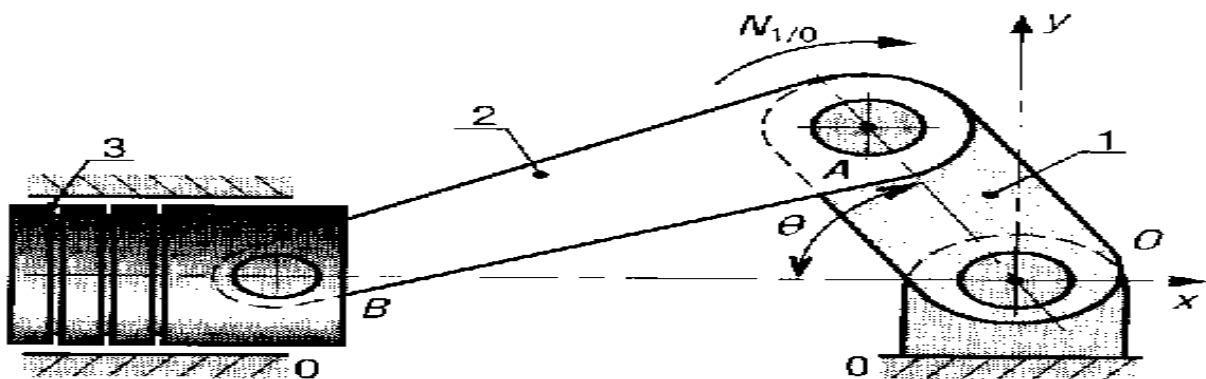
L'objectif majeur des robots manipulateurs, est l'exécution robuste de tâches répétitives (assemblage, tri, soudure, peinture, etc.).

Dans l'industrie automobile la large utilisation des robots manipulateurs a permis une évolution considérable qui a changé le cours de cette industrie comme par exemple : les applications de ferrage ou d'assemblage. Ces applications utilisent des robots à six degrés de

liberté. Cependant, la robotique s'est élargie rapidement à divers secteurs et en particulier aux industries utilisant des tâches prise-dépose, appelées aussi "pick-and-place". Ce secteur connaît une croissance et une évolution considérable et rapide. Plusieurs secteurs utilisent les robots de pick-and-place. Tels que l'agroalimentaire, l'hygiène-santé- beauté et l'électronique etc. Ces robots ne nécessitent pas toujours six ddl .

les bras manipulateurs à mécanisme de bielle-manivelle présentent une structure et des propriétés topologique similaires à celles des robots manipulateurs polaires et anthropomorphiques, et peuvent-être transformés alternativement en l'un ou l'autre.

Le système bielle-manivelle permet la transformation d'un mouvement circulaire continu en mouvement rectiligne alternatif (application aux pompes, compresseurs alternatifs, ...) et réciproquement mouvement rectiligne alternatif en mouvement circulaire continu (application aux moteurs à pistons); la figure ci-dessous en présente le principe.



*Fig.4.1.Principe du système bielle-manivelle*

**IV.4 Principe du système bielle-manivelle :**

**IV.4.1Définitions:**

**1.Bielle:**

Barre destinée à transmettre un mouvement entre 2 pièces articulées à ses extrémités suivant des axes parallèles.

## **2. Manivelle:**

Pièce fixée à l'extrémité d'un arbre et munie d'une poignée excentrée permettant de faire tourner cet arbre ou d'un maneton sur lequel s'articule une bielle.

## **3. Piston:**

Organe de machine constitué par une cloison rigide mobile entre 2 fluides, à des pressions différentes et destiné à transmettre un effort moteur.

### **IV.4.2. Objets contenant des systèmes à bielle manivelle:**

- Compresseurs, pompes, moteurs à explosion, moteurs à vapeur, machines à coudre à pédales, moulins à eau, ...

### **IV.5. Etude analytique du mouvement :**

Le bras manipulateur à mécanisme de bielle-manivelle, consiste en quatre corps rigides (RRRT), qui représentent la base, la manivelle, la tige bielle et le curseur comme indiqué dans fig4.1.

La figure 4.2, schématise le bras d'un manipulateur à système *bielle-manivelle*, la manivelle articulée en A et B est entraînée par la bielle, articulée en B et C. Le piston est cylindrique et présenté par un rectangle. Il transmet le mouvement rotationnel à un mouvement translatif. On considère le centre de masse de chaque corps placé au milieu de la distance de la longueur totale des corps.

La tige AB de longueur  $L_1$  tourne autour de A avec une vitesse constante. La tige BC de longueur  $L_2$  permet de transformer le mouvement de rotation de B à un mouvement de translation. Elle est articulée en B et une glissière oblige le point C à rester sur OX



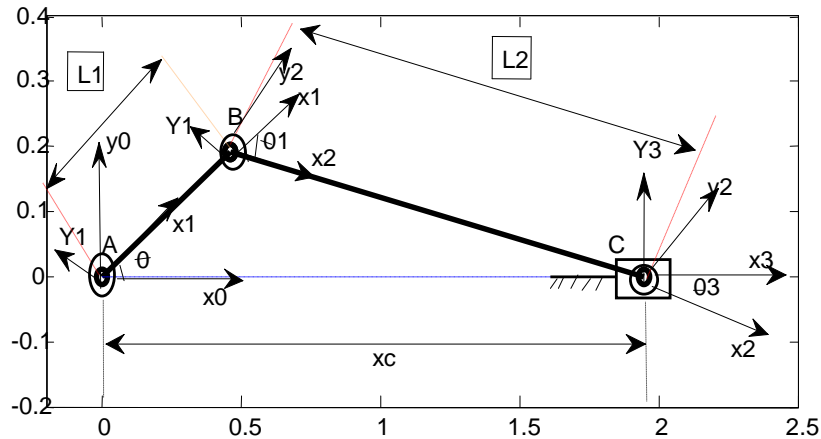


Fig.4.2.bras de robot à mécanisme de bielle manivelle

Dans chaque corps  $i$ , on associe une base orthonormé  $(x_i, y_i, z_i)$ . Le type de liaisons entre les différents corps du bras manipulateur est représenté comme suit:

A: liaison pivot autour de l'axe  $(A, Z_0)$ , on pose  $(x_0, x_1) = (y_0, y_1) = \theta$ .

B: liaison pivot autour de l'axe  $(B, Z_0)$ , on pose  $(x_2, x_1) = (y_2, y_1) = \theta_1$ .

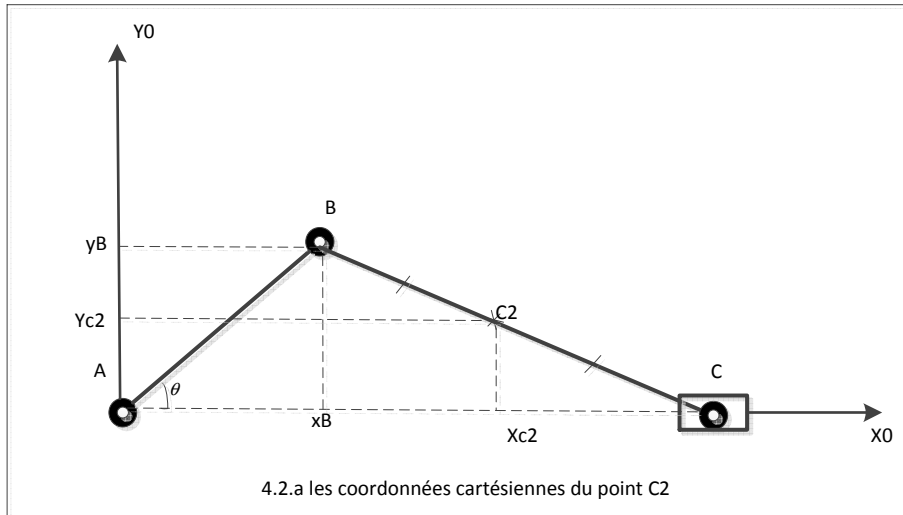
C: liaison pivot autour de l'axe  $(C, Z_0)$ , on pose  $(x_3, x_2) = (y_3, y_2) = \theta_3$ , et liaison glissière parallèle à  $(C, x_3)$ , on pose  $AC = x_c$ .

Une référence Cartésienne  $xOy$  est choisie, comme illustrée dans le fig4.2.a. L'articulation A est placée à l'origine du système de référence, d'ici,  $A \equiv 0$ . Les vecteurs de la maille qui présentent le schéma de la bielle manivelle donnent l'équation suivante :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \quad (4.9)$$

Les coordonnées cartésiennes de l'articulation B sont données par :

$$x_B = AB \cos(\theta), \quad y_B = AB \sin(\theta) \quad (4.10).$$



Les inconnus sont les coordonnées du joint ( articulation) C,  $x_C$  et  $y_C$ . Le joint C est placé sur l'axe horizontal , $y_C = 0$ . Le corps ( tige) BC a un mouvement planaire : translation le long de l'axe des abscisses, translation le long de l'axe des ordonnées et rotation autour de l'axe Z . Le centre massif du corps BC est placé à C2. Le centre massif du corps BC est le point milieu du segment BC,

$$x_{C2} = \frac{x_B + x_C}{2}, y_{C2} = \frac{y_B + y_C}{2}$$

Les longueurs des corps (segment) AB et BC, sont respectivement  $L_1$  et  $L_2$ . En utilisant le théorème de Pythagore pour le triangle rectangle  $Bx_B C$  comme illustré dans la figure 4.2.a, les relations suivantes peuvent être écrites :

$$(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = BC^2 \quad (4.11),$$

Comme mentionnée ci-dessus,

$$y_C = 0, \|AB\| = L_1 \text{ and } \|BC\| = L_2,$$

L'équation (4.11) peut être réécrite comme :

$$(x_C - x_B)^2 + (y_B)^2 = (L_2)^2 \quad (4.12),$$

De (4.10) ,

$$y_B = AB \sin(\theta) = L1 \sin(\theta), \quad x_B = L1 \cos(\theta),$$

Et peut être exprimée comme

$$X_C = L1 \cos \theta + \sqrt{\left( (L2)^2 - (L1 \sin \theta)^2 \right)} \quad (4.13) .$$

L'équation (4.13) est l'équation cinématique pour le mécanisme bielle manivelle ( bras manipulateur) , les valeurs de L1 et L2, sont des paramètres inconnus du bras et le paramètre  $\theta$ , présente la variable d'entrée pour l'analyse cinématique.

le mécanisme est le chemin fermé décrit par le point C2 (le centre de masse du segment BC) pour une rotation complète du lien segment AB et pour les valeurs désirées de paramètres L1 et L2 est illustré dans les figures : fig.4.3.a. , dans le plan  $(o\vec{x}, o\vec{y})$  , Fig.4.3.b , dans le plan  $(o\vec{y}, o\vec{\theta})$  . Fig.4.3.c donne le chemin fermé décrit par le point C dans le plan  $(o\vec{x}, o\vec{\theta})$  .

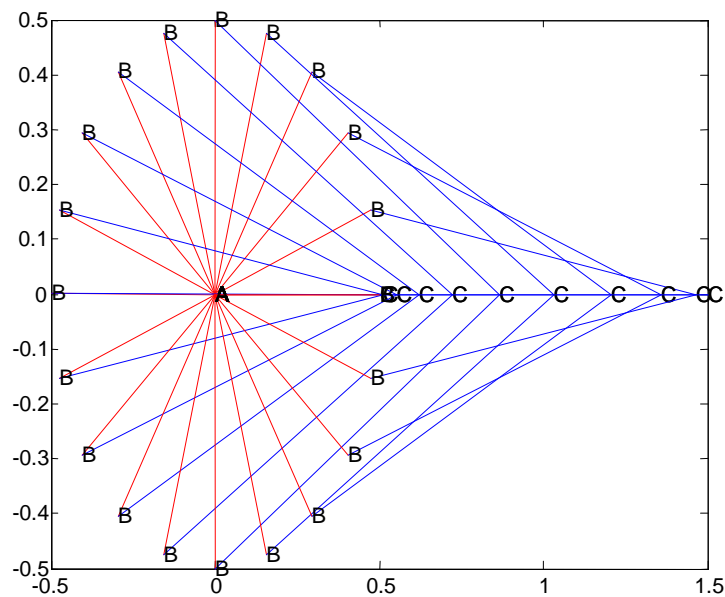
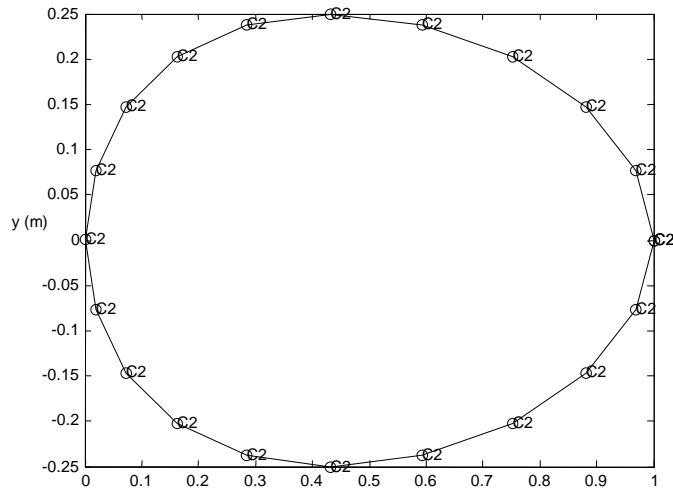
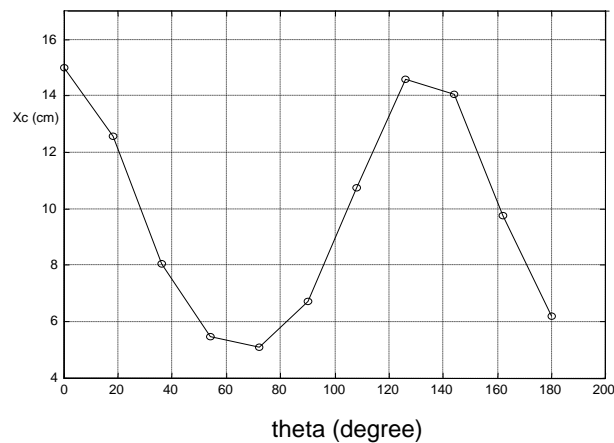


Fig.4.3.a Graphique du mécanisme



**Fig.4.3.b. le chemin fermé décrit par le point  $C_2$  dans le plan  $(o\vec{x}, o\vec{\theta})$**



**Fig.4.3.c le chemin décrit par le point  $C$  dans le plan  $(o\vec{x}, o\vec{\theta})$**

L'analyse d'intervalle, permet de prendre en compte des changements de dimensions géométriques, causées par la variation industrielle, révélant ainsi les variations résultantes dans la configuration du système (de sa configuration nominale). Les segments du bielle-manivelle, sont tolérés d'être variables dans la longueur, cette petite variation est exprimée par :

$\Delta L = \Delta L_1 = \Delta L_2$ . Donc,  $L_1, L_2$  peuvent être représentés comme suit :

$$L_1 = [L_1 - \Delta L, L_1 + \Delta L], L_2 = [L_2 - \Delta L, L_2 + \Delta L] .$$

Nous supposons que l'erreur entre le système réel et son modèle est égale à zéro . Ainsi, de l'équation (4.4), nous concluons que :  $y_k = X_C$  . Avec  $L_1$  et  $L_2$  qui sont des intervalles  $X_C$ , peut être réécrit comme intervalle avec une borne inférieure et une borne supérieure respectivement :

$$[X_C] = [x_c, \bar{x}_c] = [L_1 + \Delta L, L_1 - \Delta L] \cos \theta + \sqrt{\left( [L_2 + \Delta L, L_2 - \Delta L] \right)^2 - \left( [L_1 + \Delta L, L_1 - \Delta L] \sin \theta \right)^2} \quad (4.6) .$$

La réponse de système réelle est définie comme :

$$X_{C-mk} = \{X : X \in S\},$$

$$S = [X_C] + WGN.$$

*WGN* : Est le bruit gaussien blanc, produit la valeur de nombre aléatoire qui est uniformément distribuée dans l'intervalle (0,1) [47].

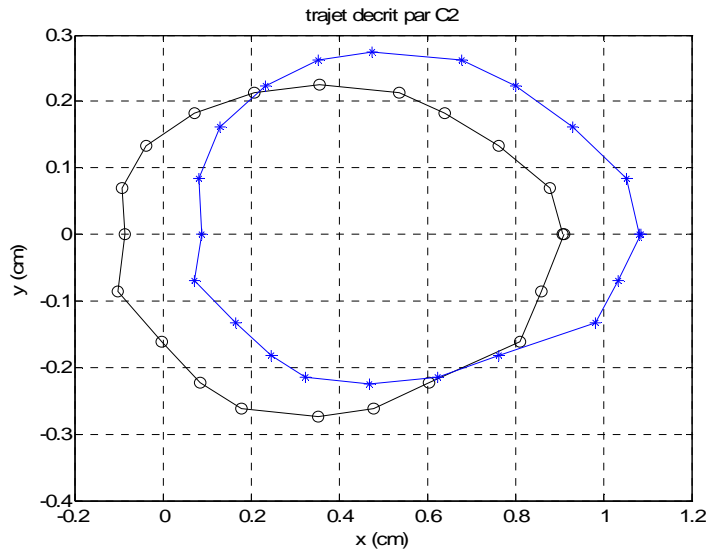
De ceux-ci, nous concluons que l'ensemble des paramètres estimés dans un contexte à erreur bornée, est un ensemble de paramètres faisables, compatibles avec des données et des limites connues sur l'erreur, et qui peut être exprimé par :

$$Lk = \left\{ L : \left| X_{C-mk} - (L \cos(\theta) + \sqrt{(L_2)^2 - (L_1 \sin(\theta))^2}) \right| \leq Ek \right\} \text{ where } L = [L_1; L_2]$$

Les paramètres du modèle sont des intervalles dont la largeur est égale à deux fois la valeur de tolérance appliquée à chaque segment. Dans le cas où un bruit blanc est ajouté, la largeur de l'intervalle devient deux fois l'amplitude de l'incertitude et du bruit blanc.

La Fig4.4 montre le chemin fermé décrit par le point C2, le centre massif du segment BC présenté dans le plan Cartésien  $xOy$ , dans le cas où l'amplitude du bruit blanc et celui de la tolérance des segments sont prises en compte.

L'espace compris entre la courbe à étoiles et celle désignées par des cercles, présente tous les trajets possibles du point C2, pour des valeurs admissibles des deux segments  $L_1$  et  $L_2$ .



**Fig4.4** montre le chemin fermé décrit par le point C2

L'estimation des paramètres, c'est de trouver les valeurs des inconnus d'un modèle mathématique pour simuler un système physique. Dans notre cas, les paramètres inconnus, sont L1 et L2. Dans la littérature [48], l'ajustement des valeurs actuelles (y) aux données expérimentales est souvent mis en œuvre par des méthodes itératives pour l'analyse de régression non-linéaire.

L'estimation des paramètres est une tâche difficile, surtout lorsque en tient en compte des incertitudes liées aux paramètres et aux données de mesure. Les méthodes classiques basées sur des statistiques et des méthodes de régression nécessitent une énorme quantité de données expérimentales, afin d'être efficace dans l'estimation de paramètres. les paramètres inconnus de notre robot dont le nombre de données de mesure disponibles est limitée à un certain nombre d'échantillons. En conséquence, il n'est pas possible d'utiliser les méthodes classiques. Les approches basées sur un ensemble d'identification des paramètres sont plus efficaces, parce que par des méthodes basées sur des ensembles, il est possible d'analyser des ensembles complets de données au lieu de nombre finis de points distincts.

Dans cette thèse, on propose deux approches à base d'intervalles pour estimer ces paramètres. Ces deux approches sont capables d'encadrer les paramètres de manière robuste, c'est-à-dire de donner des intervalles contenant les valeurs de ces paramètres de manière absolument certaine.

-La première approche, basé sur AI (arithmétique d'intervalles) et notamment sur l'algorithme Set Inverter Via interval analysis (SIVIA)[49]. très connue dans l'univers de

l'analyse par intervalles. Cette approche a été mise en œuvre à travers un langage de programmation orienté (calcul numérique de haut niveau), Matlab en l'occurrence, est un outil très utilisé dans le monde de l'ingénierie, et plus adapté à notre champ d'applications qu'un langage de plus bas niveau comme C/C++. Etant donné que le principal frein à l'utilisation de SIVIA réside dans sa complexité en calculs, une implémentation efficace de cet algorithme a été réalisée en Matlab,

de manière à pouvoir travailler avec SIVIA en Matlab avec une rapidité comparable à celle d'implémentations équivalentes en C/C++ [50] et[51].

-la deuxième approche est le Minmax approximation d'intervalle Comme défini dans[52],est basée sur la méthode des moindres carrés ponctuelle.

#### **IV.6.Estimation de paramètres par l'algorithme SIVIA :**

##### **IV.6.1.Introduction :**

L'identification paramétrique classiquement utilisée dans le cadre statistique, repose sur la modélisation des incertitudes du modèle par un vecteur aléatoire de densité de probabilité connue ; la qualité d'estimation est donc étroitement liée à cette loi de probabilité. Ces méthodes décrites par ces lois stochastiques donnent de bons résultats dans la majorité des cas. Cependant, les méthodes statistiques sont limitées lorsqu'il s'agit d'erreurs structurelles déterministes ou d'erreurs bornées [52]. Une reformulation ensembliste du problème permettra, de pallier les incertitudes des données intervenant dans le problème ponctuel et les erreurs de calcul numérique introduites par le calculateur.

Les problèmes d'*inversion ensembliste* forment une grande classe des problèmes ensemblistes. Dans ce type de problèmes, l'ensemble solution est défini comme l'image réciproque par une fonction donnée d'un ensemble connu.

L'approche ensembliste, permet de chercher, non pas une solution ponctuelle, mais un ensemble de solutions pouvant contenir une infinité de vecteurs. Un problème qui admet pour solution un ensemble de solutions sera appelé problème ensembliste.

L'un des principaux avantages de l'approche ensembliste est qu'elle fournit une garantie de solution à la différence de méthodes d'estimation stochastiques. Cependant, il ne donne pas toute précision sur le degré de croyance.

D'autre part, l'approche ensembliste est souvent critiquée pour la surestimation du résultat. Cependant, il faut noter que d'une manière similaire, l'approche stochastique peut estimer les états du système avec un intervalle de confiance large, qui peut rendre aussi difficile l'interprétation des résultats.

#### IV6.2. Inversion Ensembliste :

Si  $f : R^n \rightarrow R^m$  est une fonction continue et différentiable et  $Y$  un sous ensemble de  $R^m$ . La théorie de l'inversion ensembliste permet de trouver l'ensemble image réciproque de  $Y$  par la fonction  $f$ . La formalisation mathématique de ceci s'écrit :

$$X = \{x \in R^n \mid f(x) \in Y\} = f^{-1}(Y) \quad (4.7)$$

Résoudre un problème d'inversion ensembliste revient à caractériser le sous ensemble  $X$ .

La figure 4.5 présente une vue graphique des différentes situations que l'on peut rencontrer lorsque on résout un problème d'estimation par les outils ensemblistes (problèmes de satisfaction de contraintes). On y voit des pavés solutions (rouge) complètement inclus dans le domaines de solutions (bleu), des pavés (jaunes) dits indécidables car ils ne sont pas complètement dans le domaines solutions et ils ne sont pas exclus du domaine solution, et des pavés qui sont complètement exclus du domaine solution (blancs). sur ce schéma,  $\square$  représente la dimension minimale du pavé au-delà de laquelle, l'opération de bisection ne sera pas réalisée.

L'algorithme SIVIA est applicable pour toute fonction ayant une fonction d'inclusion. La structure de base de cet algorithme, tel que définie dans [49] peut être résumée par les étapes suivantes :

Les entrées à définir

Fonction d'inclusion : [f]

L'ensemble à inverser : y

Le pavé initial : [x](0)

Précision requise pour le sous-pavage (critère d'arrêt) :  $\square$

Initialisation



**IV6.3. Estimation ensembliste à erreurs bornées :**

Considérons une application  $y$  paramétrée en  $P$ , définie par :

$$Y_p : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$$

$$x \rightarrow f(p,x) \text{ avec } p \in P \subset \mathbb{R}^{n_p} \quad (4.8)$$

et  $y_i \subset \mathbb{R}^{n_y}$  avec  $i = \{1,2,\dots, N\}$ , les ensembles associés aux incertitudes sur chaque  $(y_p)_i = y_p(x_i)$ , pour un nombre  $N$  d'échantillons  $x_i$ . Une estimation à erreur bornée sur l'application  $y_p$  consiste à rechercher l'ensemble des paramètres  $p$  permettant à  $y_p(x_i)$  de satisfaire ou d'appartenir aux contraintes  $y_i$ .

$$S = \bigcap_{i=1}^N \left\{ p \in P \subset \mathbb{R}^{n_p} \mid y_p(x_i) = f(p,x_i) \subset Y_i \right\} \quad (4.9)$$

La formulation en terme d'inversion ensembliste de l'expression (4.9) se fait par la relation

suivante :

$$S = \bigcap_{i=1}^N f_i^{-1}(Y_i) \quad (4.10)$$

La caractérisation de l'ensemble  $S$  défini par (4.10) est un problème d'inversion ensembliste,

Qui peut être résolu d'une manière garantie en utilisant l'algorithme SIVIA (Set Inversion Via Interval Analysis) proposé par *Jaulin* et *Walter* [49].

Cet algorithme permet de trouver un encadrement (lorsqu'au moins une solution existe) de l'ensemble des solutions. Les ensembles  $\underline{S}$  et  $\overline{S}$  représentent respectivement, un encadrement intérieur et un encadrement extérieur de l'ensemble solution  $S$  :

$$\underline{S} \subset S \subset \overline{S}$$

avec

$$S = \underline{S} \cup \Delta S \quad (4.11)$$

où  $\underline{S}$  est l'ensemble des pavés prouvés solutions et  $\Delta S$  est l'ensemble des pavés pour lesquels aucune décision n'a pu être établie et peut être interprété aussi en terme d'incertitudes sur la caractérisation de  $S$ .

#### **IV6.4.Algorithme de SIVIA :**

Le problème d'identification des paramètres par SIVIA est une sorte de problèmes qui visent à identifier les paramètres inconnus utilisés au sein d'un modèle mathématique, lorsque certaines mesures, liant ses entrées et sorties, sont connues. L'algorithme de partitionnement SIVIA permet une caractérisation garantie de ces ensembles de pavés en utilisant un test d'inclusion défini par :

$$t([x]) = \begin{cases} 1 & \text{si } [f]([x]) \subseteq [y], \\ 0 & \text{si } [f]([x]) \cap [y] = \emptyset, \\ \text{indéterminé} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.12)$$

Un pavé  $[x] \in X$  est dit :

- Faisable et  $[x] \in \underline{S}, [x] \in \bar{S}$ , si  $t([x]) = 1$ ,
- Non faisable,  $t([x]) = 0$ ,
- Indéterminé, si  $t([x])$  est indéterminé.

Dans ce dernier cas, aucune décision à propos du pavé  $[x]$  n'est possible. Si sa taille est supérieure à une certaine tolérance  $\varepsilon$  fixée par l'utilisateur, ce pavé est partitionné en deux sous-pavés et l'algorithme est réexécuté sur chacun d'eux. L'algorithme SIVIA est le suivant :

Algorithme SIVIA(entrées:  $[t], [x], \varepsilon$ ; sortie :  $\underline{S}, \bar{S}$ )

1. Si  $t([x]) = 0$ , alors rejeter  $[x]$ , retour,
2. Si  $t([x]) = [1]$ , alors

#### **IV6.5 SCS Matlab tool box et VSIVIA :**

Luc Jaulin [49], qui est l'un des pionniers et des zélés des méthodes utilisant l'analyse par intervalles, fait la promotion d'environnements logiciels construits en programmation orientée objet utilisant le langage C++. L'efficacité de la programmation de SIVIA est un aspect de sa

facilité d'utilisation. Par contre, la programmation en matlab de SIVIA tel qu'il a été décrit dans la section (6.4) donne une exécution très lente du fait du caractère interprète (et non pas compile) de l'exécution des scripts (et non pas des programmes) écrit en matlab. Compte tenu de la popularité de l'utilisation du langage matlab dans de nombreuses applications et en particulier dans les travaux de cette thèse, cette barrière de langage de programmation était un frein à l'utilisation des méthodes utilisant l'analyse par intervalles. Fort heureusement, Pau Herrero-Vinas, et Tornil sebastien chercheurs en informatique se sont intéressés à la programmation efficace en matlab des méthodes utilisant l'analyse par intervalles et en particulier SIVIA. Dans les références [51] et [50], il décrivent des implémentations tirant profit de l'efficacité de matlab à faire des calculs vectoriels. Ces implémentations définissent deux packages, l'un appelé VSIVIA téléchargeable suite à l'aimable mise à disposition de ses auteurs, et l'autre appelé SCS Matlab Toolbox. Les temps d'exécution de ces applications ont été comparés avec ceux des programmes en C++ et ils sont du même ordre. Nous avons pu constater, quant à la vitesse d'exécution est mille fois plus rapide que celle d'une programmation naïve en matlab. Les détails de cette implémentation se trouvent dans le mémoire de Master de Benoit Delaunay [54]

Pour mieux comprendre le formalisme mathématique développé ci-dessus, un exemple illustratif tiré de [50] est présenté ci-après :

#### **IV.6.5.1 Exemple :**

Soit le comportement d'un système caractérisé par le modèle suivant :

$$f(p,t) = 20 \exp(-p_1 t) - 8 \exp(-p_2 t)$$

où les valeurs pour les paramètres  $p_1$  et  $p_2$  sont inconnues. Et supposons que les mesures de sortie incertaines suivantes ont été collectées:

| $t$  | $[y(t)]$      |
|------|---------------|
| 0.75 | [2.7,12.1]    |
| 1.5  | [1.04,7.14]   |
| 2.25 | [-0.13,3.61]  |
| 3.0  | [-0.95,1.15]  |
| 6.0  | [-4.85,-0.29] |
| 9.0  | [-5.06,-0.36] |
| 13.0 | [-4.1,-0.04]  |
| 17.0 | [-3.16,0.3]   |
| 21.0 | [-2.5,0.51]   |
| 25.0 | [-2,0.67]     |

L'ensemble de paramètres possible (FPS) est l'ensemble de valeurs des paramètres qui sont cohérentes avec les mesures. La fonction d'inclusion naturelle peut être facilement programmée :

```
function y = f_appex1(p,t)

for k=1:length(t),

y(k)=20*exp(-p(1)*t(k))-8*exp(-p(2)*t(k));
end;
```

En supposant l'ensemble de paramètres initial  $[P] = [-0.1,1.5] \times [-0.1,1.5]$ , le FPS peut être calculé en utilisant le code suivant:

```
t = [0.75,1.5,2.25,3,6,9,13,17,21,25];
Y = subpaving(infsup(...[2.7,1.04,-0.13,-0.95,-4.85,...
-5.06,-4.1,-3.16,2.5,2],...[12.1,7.14,3.61,1.15,-0.29,...
-0.36,-0.04,0.3,0.51,0.67]));
P0=subpaving(infsup([-0.1,-0.1],[0.5,0.5]));
eps = [0.01,0.01];
P = sivia('f_appex1',Y,P0,eps,t);
```

Le subpaving obtenu en utilisant le SCS Matlab Toolbox, est représenté sur les figures 4.5.a,b et c. Le temps nécessaire pour l'exécution de ce programme est d'environ 20 secondes pour le cas ou  $\text{eps}=0.01$ .

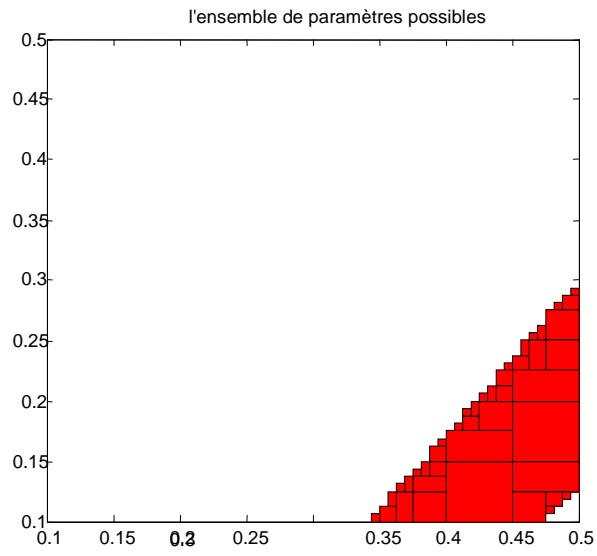


Fig.4.5.a(eps=0.01)

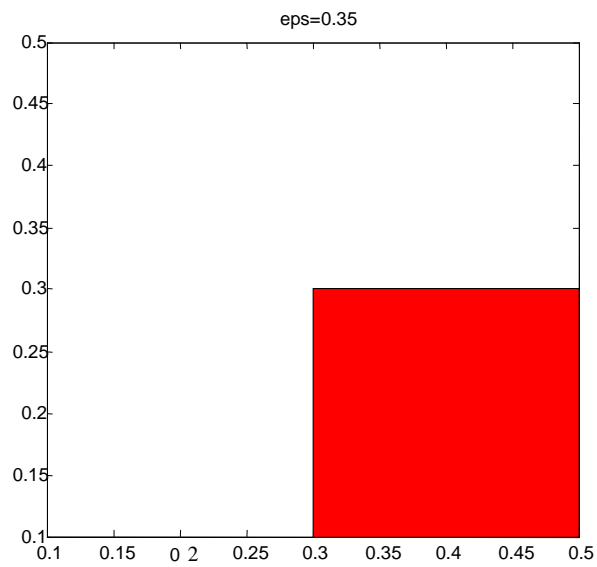
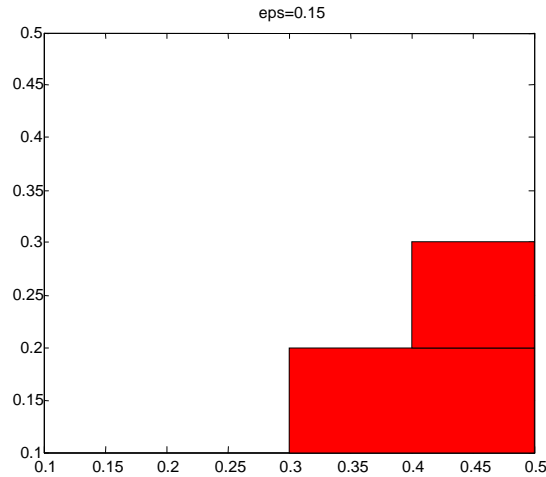


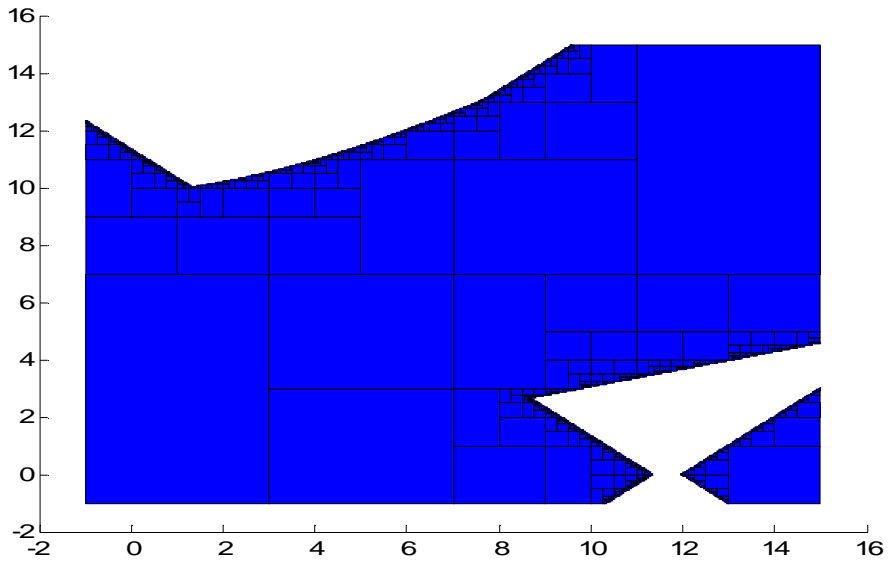
Fig4.5.b



Dans notre cas, les paramètres inconnus sont les longueurs des deux segments  $L_1$  et  $L_2$ , en utilisant l'algorithme de SIVIA [51] pour estimer ces deux paramètres. Pour ce problème, les Sous-pavages de  $Y$  représentent l'union des ensembles dans lesquels la solution de l'équation (4.6) est incluse. L'ensemble des solutions est représenté par l'espace vierge figurant dans les graphes obtenus par l'algorithme de SIVIA. Le sous-pavage de  $Y$  est constitué des mesures incertaines. L'ensemble solution trouvé est présenté ci-après :

1°) cas où la simulation est fait avec prise en considération des tolérances sur les deux segments :

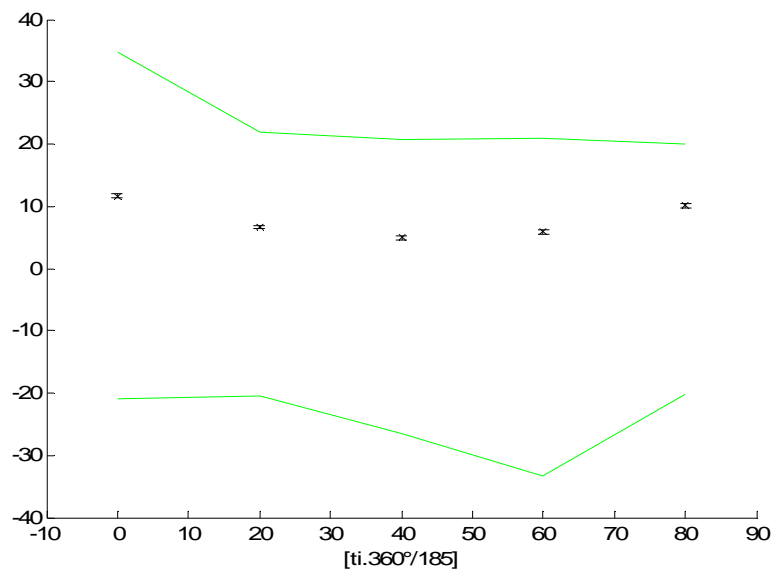
La figure **4.6.a** montre une représentation graphique des résultats fournis par SIVIA pour le calcul de  $S$ , tel que définie par (4.10), avec le pavé initial :  $P_0 = [-2,16] \times [-2,16]$  et  $\square = 0,05$ . les boîtes bleues correspondent à  $N$  (non-solutions), les boîtes vierges (blancs) à  $S$ .



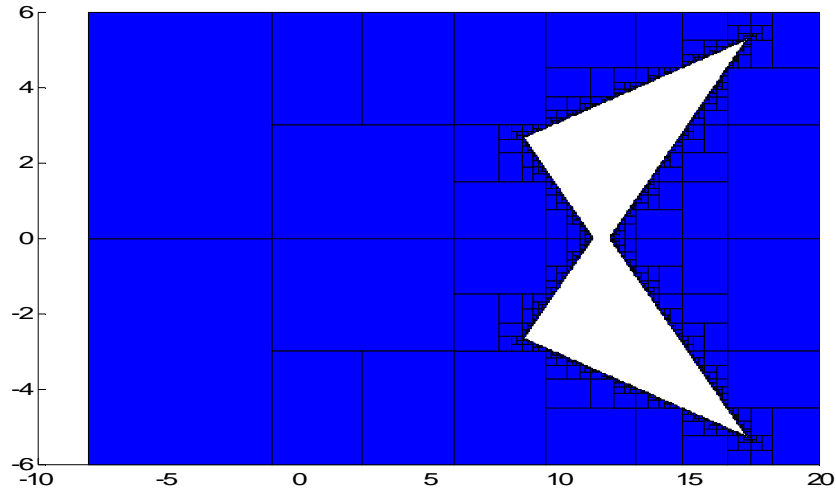
*Fig4.6.a. L'ensemble de paramètres obtenu par SIVIA*

La figure **4.6.b** est constituée des mesures incertaines utilisées par SIVIA, colorées en noir et les deux bornes inférieure et supérieure colorées en vert du pavé solution  $S$ .

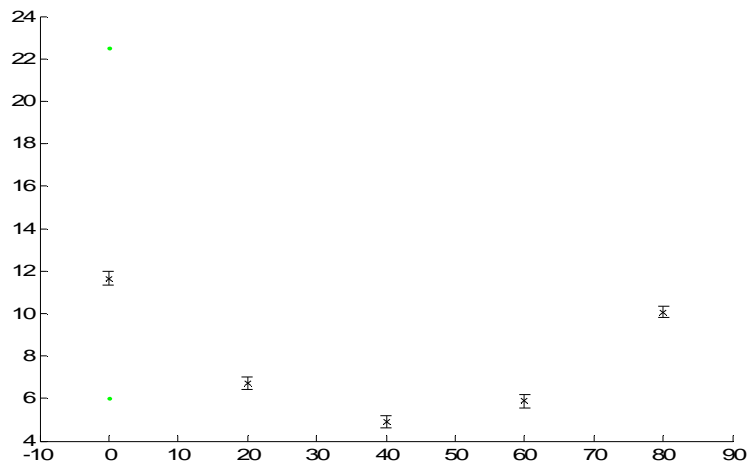
La figure **4.6.c.1** montrent une représentation graphique des résultats fournis par SIVIA pour le calcul de  $S$ , avec le pavé initial :  $P_0 = [-6,6] \times [-10,20]$  et  $\square = 0,01$ . les boîtes bleues correspondent à  $N$  (non-solutions), les boîtes vierges (blancs) à  $S$ .



*Fig.4.6.b. Valeurs admissibles pour  $Y_i$*



*Fig4.6.c.1. L'ensemble de paramètres obtenu par SIVIA*

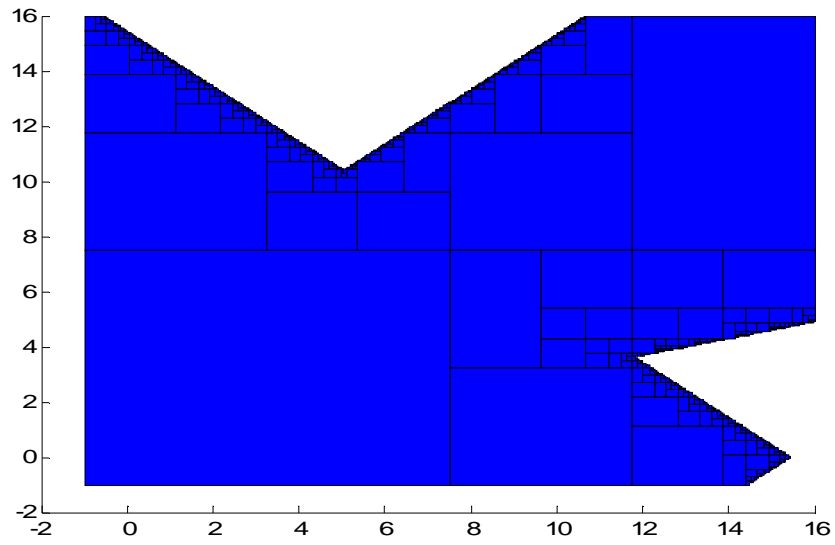


*Fig.4.6.c.2. Valeurs admissibles pour  $Y_i$*

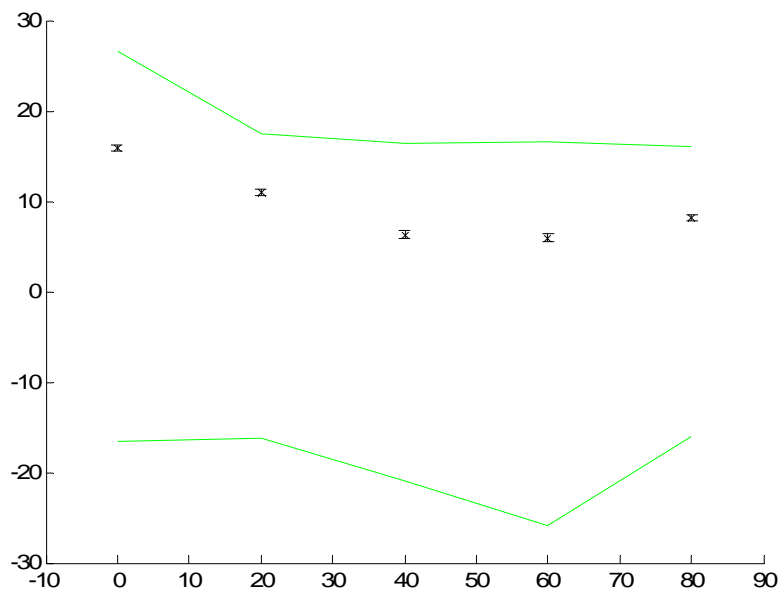
2°) cas où la simulation des paramètres est faite tout en tenant compte des tolérances et des perturbations pour un nombre d'échantillons plus important :

La figure **4.7.a** montre une représentation graphique des résultats fournis par SIVIA pour le calcul de  $S$ , avec le pavé initial :  $P_0 = [-2,16] \times [-2,16]$  et  $\square = 0,05$ . les boîtes bleues correspondent à  $N$  (non-solutions), les boîtes vierges (blancs) à  $S$ .

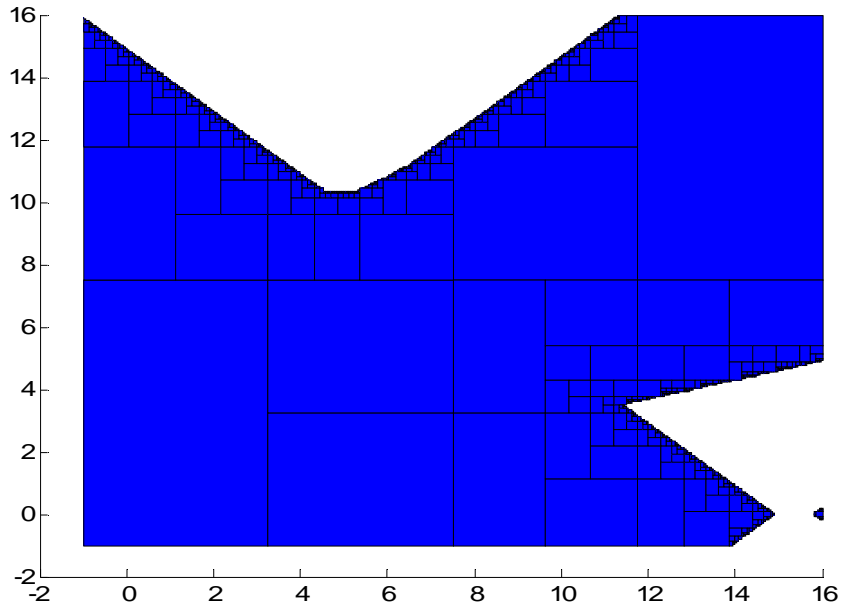




*Fig4.7.a. L'ensemble de paramètres estimé par SIVIA en présence de perturbations*

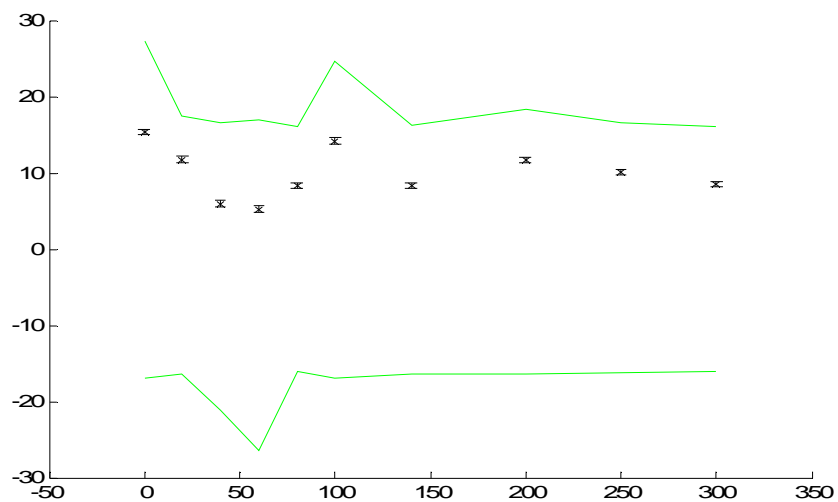


*Fig.4.7.b. Valeurs admissibles pour  $Y_i$*



*Fig4.8.a. L'ensemble de paramètres estimé par SIVIA en présence de perturbations*

La figure **4.7.b** est constituée des mesures incertaines utilisées par SIVIA, colorées en noir et les deux bornes inférieure et supérieure colorées en vert du pavé solution  $S$ . La figure **4.8.a et 4.8.c** montrent une représentation graphique des résultats fournis par SIVIA pour le calcul de  $S$ , avec les pavés initiaux :  $P_0 = [-6,6] \times [-10,20]$  et  $P_0 = [-10,10] \times [8,26]$  respectivement.  $\square = 0,01$ , les boîtes bleues correspondent à  $N$  (non-solutions), les boîtes vierges (blancs) à  $S$ .



*Fig.4.8.b. Valeurs admissibles pour  $Y_i$  en présence des perturbations*

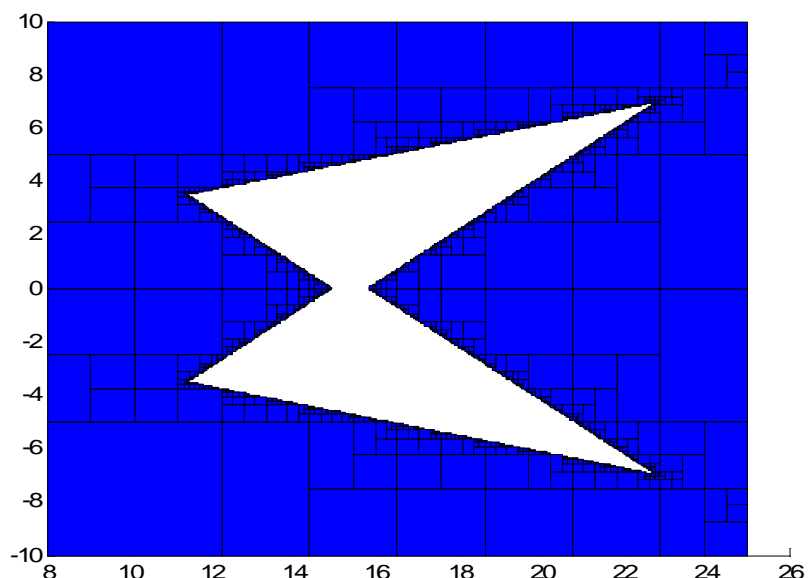


Fig4.8.c.  $P_1$  et  $P_2$  estimés par SIVIA en présence de perturbations dans  $[-10,10] \times [8,26]$

#### IV.7. L'approximation Minmax à intervalles :

##### IV.7.1.Introduction :

Dans la littérature [48], la mise en place de  $y$  à des données expérimentales est souvent mise en œuvre par des méthodes itératives pour l'analyse de régression non linéaire, qui calculent le meilleur ajustement de ces données. Par exemple, la méthode des moindres carrés ponctuelle ou l'approximation minmax à intervalles tels que définis dans [52], par laquelle on peut obtenir une approximation à intervalle sans utiliser l'arithmétique d'intervalles, où la borne inférieure et la borne supérieure de l'intervalle de données, représentent deux valeurs ponctuelles. Les bornes inférieures et supérieures des paires d'intervalles de données  $(X_i, Y_i)$  forment deux collections de données de points  $(\underline{x}_i, \underline{y}_i)$  et  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ . En procédant à l'approximation par la méthode des moindres carrés sur les deux valeurs séparément, on obtient deux estimations ponctuelles. Ces deux estimations peuvent former une méthode d'estimation par intervalle. Cette méthode a été rapportée et appliquée dans [52].

## IV.7.2. Aproximation par la méthode des moindres carrés :

### IV.7.2.1. Introduction :

Le problème de régression est souvent rencontré dans tous les domaines où des mathématiques sont appliquées. Pour des données de taille  $n$ ,  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  et  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , obtenues expérimentalement. Le problème de la régression consiste à rechercher une relation pouvant éventuellement exister entre les  $x$  et les  $y$ , par exemple de la forme  $y = f(x)$ . Lorsque la relation recherchée est affine, c'est-à-dire de la forme  $y = ax + b$ , on parle de régression linéaire. Mais même si une telle relation est effectivement présente, les données mesurées ne vérifient pas en général cette relation exactement. Pour tenir compte dans le modèle mathématique des erreurs observées, on considère les données  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  comme autant des réalisations d'une variable aléatoire  $Y$  et parfois aussi les données  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  comme autant des réalisations d'une variable aléatoire  $X$ . On dit que la variable  $Y$  est la variable dépendante ou variable expliquée et que la variable  $X$  est la variable explicative.

Les données  $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}$  peuvent être représentées par un nuage de  $n$  points dans le plan  $(x, y)$ , le diagramme de dispersion. Le centre de gravité de ce nuage peut se calculer

facilement : il s'agit du point de coordonnées  $(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right)$ . Rechercher une

relation affine entre les variables  $X$  et  $Y$  revient à rechercher une droite qui s'ajuste le mieux possible à ce nuage de points. Parmi toutes les droites possibles, on retient celle qui jouit d'une propriété remarquable : c'est celle qui rend minimale la somme des carrés des écarts des valeurs observées  $y_i$  à la droite  $\hat{y}_i = ax_i + b$ . Si  $\varepsilon_i$  représente cet écart, appelé aussi résidu, le principe des moindres carrés ordinaire consiste à choisir les valeurs de  $a$  et de  $b$  qui

minimisent  $E = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^n (y_i - (ax_i + b))^2$ .

Lsqcurvefit (least squares curve **fit**), est une fonction de Matlab qui résout les problèmes non-linéaires de moindres carrés en minimisant la somme de la différence élevée au carré, elle est appropriée pour résoudre les problèmes d'estimation de paramètres par point par la méthode des moindres carrés et elle nous donne le choix, en dimension moyenne, entre les techniques de Gauss Newton et de Levenberg et deux autres choix en grande dimension, la technique de recherche linéaire (l'algorithme est de type région fiable) et l'algorithme de gradient.

#### IV.8.Résultat de simulation :

Afin de montrer clairement l'efficacité et le potentiel d'une approche à intervalle dans l'estimation des paramètres, une des propriétés géométriques du mécanisme bielle-manivelle cité ci-dessus est utilisée pour estimer les paramètres.

L'intervalle des paramètres estimés est désigné par  $\hat{L}$

Par conséquent,  $WGN = 0.5rand$ .

Le rand est une fonction dans Matlab, génère des matrices de nombres aléatoires dont les éléments sont répartis uniformément dans l'intervalle (0,1).

De là, la limite est de  $WGN$  is:  $\|WGN\| \leq 0.5$

En appliquant la méthode des moindres carrés pour le modèle présenté en Fig.4.2, les intervalles des paramètres estimés sont donnés dans le tableau ci-dessous :

| Description         | Length [cm] | Tolerance $\Delta L$ [cm] | $L \pm \Delta L$ | Estimate value $\hat{L}$ | $W[\hat{L}]$ |
|---------------------|-------------|---------------------------|------------------|--------------------------|--------------|
| Crank [L1]          | 5           | 0.2                       | [4.8 , 5.2]      | [4.99 , 5]               | 0.01         |
| Connecting rod [L2] | 10          | 0.2                       | [9.8 , 10]       | [10 , 10]                | 0            |
| Crank [L1]          | 5           | 0.5                       | [4.5 ,5.5]       | [4.9 , 5]                | 0.1          |
| Connecting rod [L2] | 10          | 0.5                       | [9.5 , 10.5]     | [10 ,10]                 | 0            |
| Crank [L1]          | 25          | 0.2                       | [24.8 , 25.2]    | [24.99 , 25]             | 0.01         |
| Connecting rod [L2] | 40          | 0.2                       | [39.8 , 40.2]    | [40 , 40]                | 0            |

Table.1. Values of the parameters after simulation

A partir du résultat de la simulation précitée, la valeur nominale de paramètres L1 et L2 appartenant à l'intervalle des paramètres estimés, et la largeur de ces intervalles est plus petite que la largeur de l'intervalle d'incertitude tel que cité dans la section

## *Conclusion générale*

## Conclusion

Dans cette thèse, le problème de l'estimation d'états et l'estimation de paramètres d'un robot planaire, à l'aide des techniques d'intervalles dans un contexte à erreurs bornées, ont été étudiées. L'estimation de paramètres ou d'état dans un tel contexte consiste à caractériser l'ensemble des valeurs *admissibles* du vecteur de paramètres. Une valeur est dite *admissible*, si la sortie du modèle reste à l'intérieur des intervalles des sorties mesurées.

Dans un premier temps, un bref aperçu sur les principaux outils sur l'arithmétiques d'intervalles et les incertitudes dans la modélisation des systèmes incertains, ont été évoqué dans les chapitres un et deux. Quant à l'estimation d'états et de paramètres étaient l'objet des deux derniers chapitres.

Pour l'estimation d'états on a discuté différentes méthodes de résolution pour les systèmes à intervalles d'équations linéaires ou non linéaires. ces méthodes à intervalles constituent un important outil de modélisation des systèmes du monde réel (en particulier système mécanique) avec des paramètres incertains et pour contrôler les erreurs d'arrondi dans les calculs. Ils sont en principe beaucoup plus simples à implanter que les méthodes probabilistes ou floues, alors que dans le même temps, ils sont ainsi très conformes à de nombreuses situations pratiques.

Deux approches ont été présentées pour l'estimation des paramètres incertains du modèle : l'approche ensembliste et l'approche Minmax à intervalles. La première approche basé sur l'algorithme de SIVIA, a été révélé être l'outil approprié pour estimer les paramètres incertains d'une manière robuste.

L'ensemble solution a été calculé sous la forme de sous-pavages en utilisant l'analyse par intervalles et en particulier l'algorithme SIVIA. On notera qu'on a utilisé (VSIVIA) bien adaptée à l'environnement MATLAB et aimablement prêtée par Pau Herrero de l'Imperial Collège.

Une grande partie de l'espace des paramètres non solution peuvent être éliminés très rapidement, le nombre de boîtes dans les subpavings augmente rapidement lorsque le nombre de paramètres augmente ou lorsque le paramètre de tolérance  $\epsilon$  est diminué. Étant donné que les caractéristiques de ces boîtes peuvent être stockées sur des disques, problèmes de taille réaliste (dire avec moins de dix paramètres) peut être considéré.

La techniques set-inversion préconisées dans cette thèse fournit des résultats garantis (même si approximative) avec un nombre fini d'opérations. La principale limitation de l'algorithme est que le temps de calcul augmente de façon exponentielle avec la dimension de l'espace des paramètres. Cette approche fonctionne bien pour les systèmes de basse dimensionnalité, mais en ce qui concerne les problèmes plus complexes et dimensionnels élevées, ce procédé est assez lent. L'étape de correction consiste à ajouter des contraintes.

La deuxième approche, et à partir du résultat de la simulation précité, la valeur nominale de paramètres L1 et L2 appartenant à l'intervalle des paramètres estimés, et la largeur de ces

intervalles est plus petite que la largeur de l'intervalle d'incertitude tel que cité dans la fin du chapitre IV, les résidus sont insensibles aux incertitudes. Ceci implique que l'amplitude des incertitudes et des bruits doivent être suffisamment importants pour que ces derniers puissent être détectables.



## *Références bibliographiques*

- [1] P.S.Dwyer, Linear Computations,(New York,1951)
- [2] R.E.Moore,Method and application of interval analysis,(SIAM,Philadelphia,1979).
- [3] G.Alefeld and J.Herzberger, Introduction to interval Computations,(Academic Press, New York 1983).
- [4] D.Dubois,E.Kerre,R.Mesiar and H.Prade,"Fuzy interval analysis",in Fundamentals of Fuzzy sets,The Handbook of fuzzy sets,eds.D.Dubois,H.Prade,(Kluwer Acad Pub.,2000)
- [5] E.Hansen,G.W.Walster,"Global Optimization Using Interval Analysis", (Marcel Dekker, Inc.,New York,2004).
- [6] W. Oettli,W. Prager, Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides, Numer. Math. 6 (1964) 405–409.
- [7] A. Neumaier, Interval Methods for Systems of Equations, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [8] G.I.Hargreaves,"Interval analysis in Matlab",Departements of mathematics,University of Manchester",December 2002.
- [9] N.Dessart," Arithmétique par intervalles, résolution de systèmes linéaires et précision",Arénaire/LIP,2004.
- [10] K. Ganesan and P. Veeramani, "On Arithmetic Operations of Interval Numbers", International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge - Based Systems, vol. 13, no. 6, pp. 619 – 631, 2005.
- [11] K. Ganesan," On Some Properties of Interval Matrices", International Journal of Computational and Mathematical Sciences, Spring 2007.
- [12] S. Ning and R. B. Kearfott, "A comparison of some methods for solving linear interval Equations", SIAM. Journal of Numerical Analysis, vol.34, pp. 1289 – 1305, 1997.
- [13] R.E.Moore, and R. B. Kearfott and M.J.Cloud," Introduction to Interval Analysis", SIAM, 2009.
- [14] O. Didrit, « Analyse par intervalles pour l'automatique ; résolution globale et garantie de problèmes non-linéaires en robotique et en commande robuste ». PhD thesis, Université Paris XI (Orsay), 1997.
- [15] N.J.Higham, "Accuracy and Stability of Numerical Algorithms",2nd Edition SIAM,2002.
- [16] U. Kulisch, « Computer Arithmetic and Validity »,2nd Edition, De Gruyter,2013.
- [17] L. Jaulin, « Le calcul ensembliste par analyse par intervalles et ses applications ». Habilitation à diriger des recherches », Université d'Angers, 2000.
- [18] J.P.Dedieu, « Points fixes, zéros et la méthode de Newton », Springer-Verlag Berlin ,2006
- [19] R.E.Moore, "Computational functional analysis", Ellis Horwood limited,1985.
- [20] N.Karkar, K.Benmahamed, et A.Bartil " Solving Linear Systems Using Interval Arithmetic Approach", International Journal of Science and Engineering Investigations,IJSEI, vol. 1, issue 1, February 2012.
- [21] G.W.Collins, "Fundamental numerical methods and data analysis", Copyright 1990, 2003 George W. Collins.
- [22] J.F.Epperson, " An introduction to numerical methods and analysis" , 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc,2013.
- [23] J. D. Hoffman, "Numerical methods for engineers and scientists, 2nd Edition, Marcel Dekker,Inc.,New York, 2001.

- [24] N.Karkar, K.Benmahamed, et A.Bartil, "Parameter estimation of planar robot manipulator using interval arithmetic approach", Arabian Journal for Science and Engineering, AJSE, Juin 2014.
- [25] A. Neumaier, 'A simple derivation of the Hansen-Blik-Rohn-Ning-Kearfott enclosure for linear interval equations', Reliable Computing, 1998.
- [26] R.E. Moore, 'Interval arithmetic And automatic error analysis in digital computing, thèse Phd, Stanford University, 1962.
- [27] G. Chabert, « Techniques d'intervalles pour la résolution de systèmes d'équations », thèse de doctorat, 2007.
- [28] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit and E. Walter, "Applied Interval Analysis with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics", Springer-Verlag, 2001.
- [29] J. Taylor, "Incertitude et analyse des erreurs dans les mesures physiques", Dunod, Paris, 2000.
- [30] F.X. Bally et J.M. Berroir, « Incertitudes expérimentales », Union des professeurs de physiques et de chimie, novembre 2010.
- [31] V. Lasserre, « Modélisation floue des incertitudes de mesures de capteurs », thèse de doctorat, Université de Savoie, 1999.
- [32] G. Saporta, « Probabilités, analyse des données et statistique », Editions Technip, 1990, 493 pages.
- [33] M. Neuilly Cetama, « Modélisation et estimation des erreurs de mesure », Tec et Doc Lavoisier, 1998, 644 pages.
- [34] Ronsin C., "Présentation du Guide pour l'expression des incertitudes de mesure", *Congrès international de métrologie*, Lille, 19 au 21 Octobre 1993, pp. 258-264.
- [35] Klaassen K.B., *Electronic measurement and instrumentation*, University Press, 1996, 335 pages.
- [36] Michelini R.C., Rossi G.B., "Assessing measurement uncertainty in quality engineering", *IEEE/IMTC'96*, Brussels, Belgium, June 4-6, 1996, pp. 1217-1221.
- [37] Cetama, M. Neuilly, *Modélisation et estimation des erreurs de mesure*, Tec et Doc Lavoisier, 1993, 644 pages.
- [38] Guide for the expression of uncertainty in measurement, ISO 1993, 99 pages.
- [39] V. Lasserre, "Modélisation floue des incertitudes de mesures de capteurs", thèse de doctorat, univ de savoie, 1999.
- [40] Ronsin C., "Présentation du Guide pour l'expression des incertitudes de mesure", *Congrès international de métrologie*, Lille, 19 au 21 Octobre 1993, pp. 258-264.
- [41] K. Protassov, "analyse statistique des données expérimentales", EDP sciences, 2002.
- [42] A. Vandebos, "Parameter estimation for scientists and engineers", Wiley interscience, 2007.
- [43] F.V.D. Hheijden et al, "Classification, Parameter estimation and state estimation", John Wiley & sons Ltd, 2007.

- [44] S. Farkhondeh, "A kinematics based tolerance analysis of mechanisms", thesis, Tabriz university, Iran, 2008.
- [45] P. Flores and al., "Modeling and analysis of planar rigid multibody systems with translational clearance joints based on the non-smooth dynamics approach", *Multibody Syst Dyn*, 2010.
- [46] D.B. Marghitu, "Mechanisms and Robots Analysis with MATLAB", Springer, 2009.
- [47] F.C. Schweppe, "Recursive State Estimation: Unknown but bounded errors and system Inputs". *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. AC-13, n° 1, February 1968.
- [48] M. Milanese and G. Belforte, "Estimation theory and uncertainty intervals evaluation in presence of unknown but bounded errors: linear families of models," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-27, No.2, pp. 408-413, 1982.
- [49] L. Jaulin and E. Walter. "Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded error Estimation" . *Automatica*, 29(4):1053-1064, 1993.
- [50] S. Tornil-Sin, V. Puig, and T. Escobet. Set computations with subpavings in MATLAB: the SCS toolbox. In *IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design - Part of 2010 IEEE Multi-Conference on Systems and Control*, pp 1403-1408, Yokohama, Japan, 2010.
- [51] P. Herrero et al, "An Efficient Implementation of the SIVIA Algorithm in a High-Level Numerical Programming Language", pp 239-251 , *Reliable Computing*, ENSTA-Bretagne, 2012.
- [52] Chenyi Hu, "Using interval function approximation to estimate uncertainty". *Interval - probabilistic uncertainty and non-classical logics advances in soft computing volume 46*, pp 341-352, 2008.
- [53] E. Walter et L. Pronzato, "Identification of parametric models from experimental data" Masson 1997.
- [54] B. Delaunay, *Robust Parameter Identification using Interval Analysis Application to diabetes*. Master de l'Institut des Sciences et Techniques de l'Ingenieurs d'Angers, 'August, 31' 2012.
- [55] P. Bouron, "Méthodes ensemblistes pour le diagnostic, l'estimation d'état et la fusion de données temporelles", thèse de doctorat, juillet 2002.
- [56] A. Lalami, "Diagnostic par approches ensemblistes à base de zonotopes", thèse de doctorat, décembre 2008.
- [57] M. Kieffer, "Estimation ensembliste par analyse par intervalles ; Application à la localisation d'un véhicule", janvier 99.
- [58] T. Raissi, "Méthodes ensemblistes pour l'estimation d'état et de paramètres", thèse de doctorat, novembre 2004.