République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la
Recherche scientifique

UNIVERSITE FARHAT ABBAS -SETIF 1-

THÈSE

Présenté à la faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme

DOCTORAT LMD

Option : Mathématiques appliquées

Par
AMROUNE NASREDDINE

Théme

Sur certaines classes d'équations différentielles abstraites

Soutenu le : 13/12/2015

devant e jury composé

Président :	MEROUANI Boubakeur	Prof	UFA Sétif 1
Examinateurs :	LABBAS Rabah	Prof	Université du Havre
	MEDEGHRI Ahmed	Prof	Université de Mostaganem
Invité :	MAINGOT Stéphane	Prof	Université du Havre
Directeur de thèse :	AIBECHE Aissa	Prof	UFA Sétif 1

Remerciements

Avant tout, louange à ***ALLAH*** *le tout puissant de m'avoir aidé à réaliser ce travail. Je remercie infiniment mon encadreur* ***Pr. Aibeche Aissa*** *pour tout ce qui a fait afin que je finisse ce travail dans le délai prévu. Je le remercie pour ses conseils, ses informations ainsi pour sa patience durant ces années de formation.*
Je remercie le président du jury ***Pr.Merouani Boubakeur*** *d'avoir accepté de présider le jury de mon thèse.*
Je remercie les membres du jury pour avoir accepté de juger mon travail : ***Pr. Stéphane Maingot*** *pour sa disponibilité dans les moments où j'en avais besoin, et qui n'a pas hésité de nous donner le maximum de savoir et de nous inspirer la passion de la recherche scientifique et* ***Pr. Labbas Rabah*** *pour sa gentillesse et encouragements continus.*
Je remercie vivement ***Pr. Medeghri Ahmed*** *pour ses conseils qui m'ont été de grande utilité dans tous les domaines, ainsi que pour sa disponibilité.*
Je les remercie pour leur soutient moral et physique.
Je remercie aussi tous mes amis qui ont de près ou de loin contribué à l'élaboration de cette thèse.
Finalement, je ne saurai remercier autant ma très chère famille spécialement mes chers parents qui m'ont facilité le chemin pour atteindre ce stade d'études, mes sœurs qui ont veillé à ce que j'accomplis ce travail avec la moindre gène ainsi que mes frères pour leur soutient morale et physique.

Je dédie cette thèse
à mes parents.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles abstraites sont des équations différentielles dont les coefficients sont des opérateurs linéaires (non bornés mais au moins fermés) sur un espace de Banach. De nombreux auteurs ont étudié ce genre d'équations ; citons en premier les travaux de E. Hille et Nagy (1938), E. Hille et K. Yoshida (1948) qui ont résolu le problème de Cauchy abstrait suivant

$$\begin{cases} u'(x) - \mathcal{A}u(x) = 0, \quad x \in [0, +\infty) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

où $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire fermé sur un espace de Banach complexe E, $u_0 \in E$. La résolution de (1) a permis d'associer à l'opérateur $\mathcal{A}$, un opérateur linéaire borné $e^{x\mathcal{A}}$ pour tout $x \geq 0$, ce qui est connu par la théorie des semi-groupes (1930-1960).

Dans ce travail on s'intéresse à une classe d'équations différentielles abstraites du deuxième ordre du type

$$u''(x) + 2\mathcal{B}u'(x) + \mathcal{A}u(x) = f(x) \quad x \in (0, 1). \tag{2}$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sont deux opérateurs linéaires fermés dans E et $f \in L^p(0, 1; E)$ avec $1 < p < +\infty$. Plusieurs travaux concernant l'équation (2) avec différentes conditions aux limites ont été réalisés. Citons

- A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe, A. Yagi [23] qui ont étudié l'équation (2) avec des conditions aux limites de type Dirichlet

$$\begin{cases} u''(x) + 2\mathcal{B}u'(x) + \mathcal{A}u(x) = f(x) \;\; x \in (0, 1), \\ u(0) = u_0, \;\; u(1) = u_1. \end{cases} \tag{3}$$

- Les travaux de M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, A. Medgheri [14],[15] dans deux cas différents, soit $\mathcal{B} = 0$, soit $\mathcal{B}$ génère un groupe fortement continu avec des conditions aux limites de type Robin

$$\begin{cases} u'(0) - \mathcal{H}u(0) = u_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{4}$$

Dans ce travail, on étudie l'équation (2) avec des conditions non locales, contenant des opérateurs linéaires fermés $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$, de la forme

$$\begin{cases} \alpha u'(1) - \gamma\mathcal{H}u(0) = d_0 \\ \beta u'(0) + \delta\mathcal{K}u(1) = d_1, \end{cases} \tag{5}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ et d_0, $d_1 \in E$. Pour que le problème soit bien posé on suppose que

$$(\alpha, \gamma) \neq (0, 0), \;\; (\alpha, \delta) \neq (0, 0), \;\; (\beta, \gamma) \neq (0, 0), \;\; (\beta, \delta) \neq (0, 0). \tag{6}$$

Historiquement, l'étude de problèmes aux limites avec ce type de conditions (5) à été initié par T. Carleman, dans les années trente, qui utilisait une technique d'intégrale singulière pour résoudre une équation elliptique avec des conditions aux limites contenant une combinaison de fonctions à deux points différents. Une étape importante dans cette démarche est celle du travail de Bitsadze et Samarskii [6, 69]. La modélisation mathématique des problèmes non-locaux est rencontrée en théorie de transmission de la chaleur, en théorie des populations, thermo-élasticité, physique de plasma.

Dans cette thèse on utilise la méthode de réduction d'ordre (voir Krein [34]) pour obtenir une représentation d'une solution stricte de notre problème, puis en utilisant les outils de l'anayse fonctionnelle et de la théorie spectrale détaillés dans les rappels du premier chapitre, on montrera la régularité de cette solution. Ce travail est développé dans des espaces de Banach qui possèdent la propriété UMD et pour cela dans tout ce qui suit on pose

$$E \text{ est un espace UMD.} \tag{7}$$

La thèse est composée de trois chapitres.

Chapitre1

On donne ici certains rappels et certaines notions sur les outils principaux qui ont été utilisés. Dans un premier temps, on parle des opérateurs fermés et leurs propriétés, puis on rappelera quelques résultats classiques de la théorie des semi-groupes. Ainsi, on présentera la théorie de l'interpolation et le calcul fonctionnel grâce auquel on étudie les puissances fractionnaires des opérateurs. Finalement, on présentera les principaux résultats de la théorie des sommes d'opérateurs linéaires dans des espaces de Banach ayant la propriété UMD.

Chapitre2

On étudie dans le deuxième chapitre l'équation (2) avec des conditions aux limites l'une de ces conditions est non locale (le cas où $\alpha = \gamma = \delta = 1$, $\beta = 0$ et $\mathcal{K} = I$ dans (5))

$$\begin{cases} u'(1) - \mathcal{H}u(0) = d_0, \\ u(1) = d_1, \end{cases} \tag{8}$$

où $d_0,\ d_1 \in E$ et $\mathcal{H}$ est un opérateur linéaire fermé.
Le chapitre 2 est composé de trois sections.

- Avant de commencer l'étude du problème (2)-(8), on présentera dans la section 1 quelques résultats concernant la commutativité de deux opérateurs au sens des résolvantes et sa relation avec la commutatvité des opérateurs.
- Dans la deuxième section, le travail présenté est contenu dans un article intitulé " On elliptic equations with general non-local boundary conditions in UMD spaces ", qui a été accepté dans "Mediterranean Journal Of Mathematics". Dans ce travail, on étudie le problème dans le cas où $\mathcal{B} = 0$ avec des hypothèses sur les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}$ qui sont

$$\begin{cases} \mathcal{A} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } E, \\ [0, +\infty[\subset \rho(\mathcal{A}) \text{ et } \sup\limits_{\lambda \geq 0} \| \lambda(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty, \end{cases} \tag{9}$$

et

$$\begin{cases} \text{pour tout}\, s \in \mathbb{R}, (-\mathcal{A})^{is} \in \mathcal{L}(E) \text{ et il existe}\, \theta_{\mathcal{A}} \in]0,\pi[\\ \text{tel que } \sup\limits_{s\in\mathbb{R}} \|e^{-\theta_{\mathcal{A}}|s|}(-\mathcal{A})^{is} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty. \end{cases} \tag{10}$$

$\mathcal{H}$ doit satisfaire

$$0 \in \rho(\mathcal{H}), \tag{11}$$

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{A}^{-1}. \tag{12}$$

Notons $\mathcal{Q} = -(-\mathcal{A})^{\frac{1}{2}}$. De plus, on définit Λ par

$$\begin{cases} D(\Lambda) = D(\mathcal{H}) \\ \Lambda = 2\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}} - \mathcal{H}(I - e^{2\mathcal{Q}}), \end{cases}$$

notons que vu (12) on a $D(\mathcal{H}(I - e^{2\mathcal{Q}})) = D(\mathcal{H})$ et $\mathcal{H}(I - e^{2\mathcal{Q}}) = (I - e^{2\mathcal{Q}})\mathcal{H}$. On suppose que

$$\Lambda \text{ admet un inverse borné.} \tag{13}$$

Sous ces hypothèses, après avoir montré quelques lemmes techniques, on obtient le résultat suivant

Théorème 0.1. *Supposons que* (9) $\sim$ (13). *Soit* $f \in L^p(0,1;E)$ *avec* $1 < p < \infty$. *Alors, le problème admet une solution stricte unique si et seulement si* $d_1 \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p}$ *et*

$$\mathcal{H}^{-1}\left(d_0 + \mathcal{Q}d_1 - \int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}} f(s)ds\right) \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p}.$$

– Dans la troisème section, on essayera d'adapter les résultats obtenu dans la deuxième section pour le problème (2)-(8). Ici, on remplace dans les hypothèses, l'opèrateur $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A} - \mathcal{B}^2$ et dans ce cas nos hypothèses sont les suivantes

$$\begin{cases} \mathcal{A} - \mathcal{B}^2 \text{ est un opérateur linéaire fermé sur } E, \\ \text{tel que } [0,+\infty[\subset \rho(\mathcal{A} - \mathcal{B}^2) \text{ et } \sup\limits_{\lambda\geq 0} \| \lambda(\mathcal{A} - \mathcal{B}^2 - \lambda I)^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} \text{pour tout } s \in \mathbb{R},\ (\mathcal{B}^2 - \mathcal{A})^{is} \in \mathcal{L}(E) \text{ et il existe } \theta \in]0,\pi[\text{ tel que} \\ \sup\limits_{s\in\mathbb{R}} \| e^{-\theta|s|}(\mathcal{B}^2 - \mathcal{A})^{is} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty, \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \mathcal{B} \text{ est un opérateur linéaire fermé sur } E, \\ \text{il existe } \lambda_0 \text{ tel que} (\mathcal{A} - \mathcal{B}^2)^{-1}(\mathcal{B} - \lambda_0 I)^{-1} = (\mathcal{B} - \lambda_0 I)^{-1}(\mathcal{A} - \mathcal{B}^2)^{-1}, \end{cases} \tag{16}$$

$$(\mathcal{A} - \mathcal{B}^2)^{-1}\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{A} - \mathcal{B}^2)^{-1}, \tag{17}$$

$$\mathcal{B} \text{ génère un } C_0\text{−groupe } (G(x))_{x\in\mathbb{R}} \text{ sur } E, \tag{18}$$

$$0 \in \rho(\mathcal{H}), \tag{19}$$

Notons $P = (\mathcal{B}^2 - \mathcal{A})^{\frac{1}{2}}$. On Définit l'opérateur $\tilde{\Lambda}$ par

$$\begin{cases} D(\tilde{\Lambda}) = D(\tilde{\mathcal{H}}) \\ \tilde{\Lambda} = 2Pe^P - \tilde{\mathcal{H}}(I - e^{2P}), \end{cases}$$

on suppose que

$$0 \in \rho(\tilde{\Lambda}). \tag{20}$$

Le résultat essentiel de ce chapitre est le suivant :

Théorème 0.2. *Soit $f \in L^p(0,1;E)$ avec $1 < p < \infty$. Si les hypothèses (14)$\sim$(20) sont vérifiées. Alors, le problème admet une solution stricte unique si et seulement si $\tilde{d}_1 \in (D(P^2), E)_{\frac{1}{2p},p}$ et*

$$\tilde{\mathcal{H}}^{-1}(\tilde{d}_0 + P\tilde{d}_1 - \int_0^1 e^{(1-s)P}\tilde{f}(s)ds) \in (D(P^2), E)_{\frac{1}{2p},p},$$

où

$$\begin{cases} \tilde{y}_0 = \tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{d}_0 + \tilde{\Lambda}^{-1}P\tilde{d}_1 + \tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Lambda}^{-1}e^P\tilde{d}_1 - 2\tilde{\Lambda}^{-1}P\tilde{I}_1 + \tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{J}_0 - \tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Lambda}^{-1}e^P\tilde{I}_1, \\ \tilde{d}_0 = G(1)d_0 + \mathcal{B}G(1)d_1, \\ \tilde{d}_1 = G(1)d_1, \\ \tilde{\mathcal{H}} = G(1)\mathcal{H}, \\ \tilde{I}_1 = \dfrac{1}{2}P^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{(1-s)P}\tilde{f}(s)ds, \\ \tilde{J}_0 = \dfrac{1}{2}P^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{sP}\tilde{f}(s)ds, \\ \tilde{f}(x) = G(x)f(x). \end{cases} \tag{21}$$

Chapitre 3

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du problème (2)-(5). On s'intéresse à l'obtention des résultats concernant la représentation de la solution stricte et sa régularité sous certaines hypothèses.

Hypothèses

$$\begin{cases} \mathcal{A} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } E \\ [0,+\infty[\subset \rho(\mathcal{A}) \text{ et } \sup\limits_{\lambda \geq 0} \| \lambda(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty, \end{cases} \tag{22}$$

et

$$\begin{cases} \text{Pour tout } s \in \mathbb{R},\ (-\mathcal{A})^{is} \in L(E) \text{ et il existe } \theta_{\mathcal{A}} \in]0,\pi[; \\ \text{tel que :} \sup\limits_{s \in \mathbb{R}} \| e^{-\theta_{\mathcal{A}}|s|}(-\mathcal{A})^{is} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty, \end{cases} \tag{23}$$

$\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ satisfait

$$0 \in \rho(\mathcal{H}) \cap \rho(\mathcal{K}), \tag{24}$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}^{-1}\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{A}^{-1},\ \mathcal{A}^{-1}\mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K}^{-1}\mathcal{A}^{-1} \text{ et} \\ \mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K}^{-1}\mathcal{H}^{-1}. \end{cases} \tag{25}$$

Soit $\mathcal{Q} = -(-\mathcal{A})^{\frac{1}{2}}$. Considérons l'opérateur Π défini par

$$\begin{cases} D(\Pi) = D(\mathcal{Q}^2\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}), \\ \Pi = \mathcal{Q}^2\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1} - \gamma\delta I. \end{cases}$$

On suppose que

$$\Pi \text{ est d'inverse borné.} \tag{26}$$

De plus on introduit l'opérateur Λ en posant

$$\begin{cases} D(\Lambda) = D(\Pi(I - e^{2\mathcal{Q}})) = D(\Pi), \\ \Lambda = \Pi\left(I - e^{2\mathcal{Q}}\right) + 2\left(\alpha\delta\mathcal{H}^{-1} + \gamma\beta\mathcal{K}^{-1}\right)\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}, \end{cases}$$

et on impose que

$$0 \in \rho(\Lambda). \tag{27}$$

Résultat principal

Théorème 0.3. *Sous les hypothèses* (22)-(27) *avec* $f \in L^p(0,1;E)$ *et* $1 < p < \infty$*, le problème* (2)-(5) *avec* $\mathcal{B} = 0$ *admet une solution stricte* u *si et seulement si*

$$\mathcal{Q}\alpha\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_1 + \delta\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\left[d_0 - \alpha\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds\right] \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p}$$

et

$$-\mathcal{Q}\beta\Pi^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{H}^{-1}d_0 - \gamma\Pi^{-1}\mathcal{K}^{-1}\left[d_1 + \beta\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}}f(s)ds\right] \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p}.$$

Problème avec un paramètre spectral

Hypothèses

On suppose qu'il existe $\omega_0 \geq 0$ fixé tel que

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\omega_0} \text{ un opérateur linéaire fermé dans } E, \\ [0,+\infty[\subset \rho(\mathcal{A}_{\omega_0}) \text{ et } \sup\limits_{\lambda\geq 0} \| \lambda(\mathcal{A}_{\omega_0} - \lambda I)^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty. \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} \text{Pour tout } s \in \mathbb{R},\ (-\mathcal{A}_{\omega_0})^{is} \in L(E) \text{ et il existe } \theta_{\mathcal{A}_{\omega_0}} \in]0,\pi[; \\ \text{telle que} : \sup\limits_{s\in\mathbb{R}} \| e^{-\theta_{\mathcal{A}_{\omega_0}}|s|}(-\mathcal{A}_{\omega_0})^{is} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty. \end{cases} \tag{29}$$

De plus, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ doivent satisfaire

$$0 \in \rho(\mathcal{H}) \cap \rho(\mathcal{K}). \tag{30}$$

et les relations de commutativité suivantes

$$\mathcal{A}_{\omega_0}^{-1}\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{A}_{\omega_0}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{\omega_0}^{-1}\mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K}^{-1}\mathcal{A}_{\omega_0}^{-1}. \tag{31}$$

Notons que pour $\omega \geq \omega_0$, $\mathcal{Q}_\omega = -(-\mathcal{A}_\omega)^{\frac{1}{2}}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur E (voir [4]). De plus, si $0 \in \rho(\mathcal{A}_\omega)$, alors $0 \in \rho(\mathcal{Q}_\omega)$.
On définit aussi l'opérateur linéaire Π_ω sur son domaine $D(\Pi_\omega)$ par

$$\Pi_\omega = \alpha\beta\mathcal{Q}_\omega^2\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1} - \gamma\delta I.$$

Les hypothèses (26)-(27) sont en géréral difficiles à satisfaire ; on étudiera certains cas particuliers pour lesquels ces hypothèses sont réalisées. De plus, afin d'obtenir (26)-(27) pour des opérateurs $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ plus généraux, on étudiera le même problème avec un paramètre spectral assez grand. Il s'agit en fait de remplacer $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}_\omega$, d'introduire des opérateurs Π_ω et Λ_ω en remplacement de Π et Λ et de montrer qu'il existe un ω^* à partir duquel l'inversibilité de Π_ω et Λ_ω est assurée. On obtient alors les résultats suivants.

Lemme 0.4. *Sous les hypothèses* (28)-(31). *Si*

$$\exists\omega_1 \geq \omega_0,\ \exists c_1 \geq 0 :\ \forall\omega \geq \omega_1\ 0 \in \rho(\Pi_\omega)\ \text{et}\ \|\Pi_\omega^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq c_1, \tag{32}$$

alors, il existe $\omega^* \geq \omega_1 \geq \omega_0$ tel que, pour $\omega \geq \omega^*$, Λ_ω est admet un inverse borné et

$$\Lambda_\omega^{-1} = (I - e^{2\mathcal{Q}_\omega})^{-1}\left[I + 2\Pi_\omega^{-1}(\alpha\delta\mathcal{H}^{-1} + \gamma\beta\mathcal{K}^{-1})\mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega}(I - e^{2\mathcal{Q}_\omega})^{-1}\right]\Pi_\omega^{-1}.$$

Lemme 0.5. *Sous les hypothèses* (6) *et* (28) $\sim$ (31). *De plus, on suppose que l'une de ces conditions est satisfaite*

1. $\alpha\beta = 0$.
2. $\alpha\beta \neq 0$, $\dfrac{\gamma\delta}{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ *et* $\mathcal{H} = \mathcal{K} = I$.
3. $\alpha\beta \neq 0$, $\mathcal{H}, \mathcal{K} \in \mathcal{L}(E)$.

Alors, (3.32) *est vérifiée.*

Théorème 0.6. *Supposons* (28) $\sim$ (31) *et* (**??**). *Soit $f \in L^p(0,1;E)$, $1 < p < \infty$ et $\omega \geq \omega^*$. Alors, le problème admet une solution stricte si et seulement si*

$$\mathcal{Q}_\omega\alpha\Pi_\omega^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_1 + \delta\Pi_\omega^{-1}\mathcal{H}^{-1}\left[d_0 - \alpha\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}_\omega}f(s)ds\right] \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p},$$

et

$$-\mathcal{Q}_\omega\beta\Pi_\omega^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{H}^{-1}d_0 - \gamma\Pi_\omega^{-1}\mathcal{K}^{-1}\left[d_1 + \beta\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}_\omega}f(s)ds\right] \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p}.$$

Finalement, on étudiera quelques cas particuliers pour l'inversibilité du déterminant Λ et on donnera quelques exemples concrets.

Perspectives

A la fin de cette thèse, on présentera des perspectives pour le problème (2)-(5) dans le cas où $\mathcal{B}$ génère un groupe fortement continu.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Opérateurs fermés

Définition 1.1. *Soient E, F deux espaces de Banach. On dit qu'un opérateur $\mathcal{A}$ est fermé si son graphe $G(\mathcal{A})$ est fermé dans $E \times F$, c-à-d pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0} \subset D(\mathcal{A})$ telle que $x_n \longrightarrow x$ dans E et $\mathcal{A}x_n \longrightarrow y$ dans F, alors $x \in D(\mathcal{A})$ et $y = \mathcal{A}x$.*

Théorème 1.2. *(Théorème du graphe fermé) Si l'opérateur fermé $\mathcal{A}$ est défini sur tout l'espace E, alors $\mathcal{A}$ est borné :*

$$\mathcal{A} \text{ fermé et } D(\mathcal{A}) = E \implies \mathcal{A} \text{ borné}$$

Lemme 1.3. *Si $P : D(P) \subset E \longrightarrow E$ est un opérateur fermé et $T \in \mathcal{L}(E)$ avec*

$$T(E) \subset D(P),$$

alors

$$PT \in \mathcal{L}(E).$$

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $D(PT)$ et $x, y \in E$ tels que

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow x, \\ PTx_n \longrightarrow y. \end{cases}$$

Puisque T est continue, on a

$$\begin{cases} Tx_n \longrightarrow Tx, \\ P(Tx_n) = PT(x_n) \longrightarrow y \end{cases}$$

et parce que P est fermé, alors $Tx \in D(P)$, c-à-d $x \in D(PT)$ et $P(Tx) = y$, c-à-d $PT(x) = y$. Donc PT est fermé. D'après le Théorème du graphe fermé, on a

$$PT \in \mathcal{L}(E).$$

□

1.2 Théorie des semi-groupes

1.2.1 Semi-groupes

La théorie des semi-groupes prend son essor durant les années 1930-1960 à travers les contributions notamment de E. Hille [30], R. S. Phillips [39], M. H. Stone [43] et K. Yosida [49]. On trouvera dans le livre de A. Pazy [38] un exposé complet de cette théorie ; on pourra aussi consulter le livre de T. Kato [32].

Semi-groupes fortement continus

Définition 1.4. *Un semi-groupe sur E est une famille $(T(t))_{t\geqslant 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur E vérifiant*

1. $T(0) = I_E$.
2. $\forall t, s \geqslant 0$, $T(s+t) = T(t)T(s)$.
   Dans ce cas le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est l'opérateur linéaire

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \longrightarrow E,$$

caractérisé par

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in E : \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } E \right\} \\ \forall x \in D(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A}x = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Définition 1.5.
On dit qu'un semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est fortement continu si et seulement si

$$\forall x \in E, \ \lim_{t \to 0} \|T(t)x - x\|_E = 0.$$

On dit aussi que $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe.

Proposition 1.6. *Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un C_0 semi-groupe. On pose*

$$\varpi = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)},$$

alors :

1. $\varpi \in [-\infty, +\infty[$.
2. Pour tout $\omega \in]\varpi, +\infty[$, il existe $M = M(\omega) \geqslant 1$ tel que

$$\forall t \geqslant 0, \quad \|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant Me^{\omega t}, \tag{1.2}$$

3. Si $\omega = \varpi$ alors il n'est pas toujours possible de trouver $M \geqslant 1$ donnant (1.2).

Définition 1.7.
On dit que $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe uniformément borné si on a la majoration (1.2) avec $M \geqslant 1$ et $\omega = 0$ et on dit que $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe de contractions si on a (1.2) avec $M = 1$ et $\omega = 0$.

Dans la suite $\rho(\mathcal{A})$ désigne l'ensemble résolvant de l'opérateur linéaire fermé $\mathcal{A}$, c'est-à-dire

$$\rho(\mathcal{A}) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)\right\},$$

et $\sigma(\mathcal{A})$ désigne le spectre de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A}).$$

Le théorème suivant, qui traite le cas particulier des semi-groupes de contractions a été montré indépendamment par E. Hille [30] et K. Yosida [49].

Théorème 1.8.

$\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions $(T(t)))_{t\geqslant 0}$ si et seulement si

1. *$\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire fermé densément défini sur E,*
2. *$\rho(\mathcal{A}) \supset]0, +\infty[$ et*

$$\forall \lambda \in]0, +\infty[, \quad \left\|(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

Dans ce cas $\mathcal{A}$ vérifie de plus

$$\begin{cases} \rho(\mathcal{A}) \supset P_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ Re(\lambda) > 0\} \ \ et \\ \forall \lambda \in P_0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|(\mathcal{A} - \lambda I)^{-n}\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \dfrac{1}{(Re(\lambda))^n}. \end{cases}$$

L'analogue pour les C_0 semi-groupes quelconques a été obtenus indépendamment par R. S. Phillips [39].

Théorème 1.9.

Soient $M \geqslant 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *$\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t)))_{t\geqslant 0}$ satisfaisant*

$$\forall t \geqslant 0, \quad \|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant Me^{\omega t},$$

2. *$\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire fermé densément défini sur E,*

$$\rho(\mathcal{A}) \supset]\omega, +\infty[,$$

et

$$\forall \lambda \in]\omega, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left\|(\mathcal{A} - \lambda I)^{-n}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}. \tag{1.3}$$

En fait, si $\mathcal{A}$ génère un C_0 semi-groupe, on dispose de renseignements supplémentaires sur son ensemble résolvant et sa résolvante.

Proposition 1.10.

Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un C_0 semi-groupe satisfaisant

$$\exists M \geqslant 1, \exists \omega \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \geqslant 0, \ \|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant Me^{\omega t}.$$

Alors $\mathcal{A}$, le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geqslant 0}$, vérifie

1. *$\rho(A) \supset P_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ Re(\lambda) > \omega\}$ et*

$$\forall \lambda \in P_\omega, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\|(\mathcal{A} - \lambda I)^{-n}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)^n}.$$

2. *La résolvante de $\mathcal{A}$ est donnée par la transformation de Laplace :*

$$\forall \lambda \in P_\omega, \quad (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt. \tag{1.4}$$

3. *On peut retrouver le semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ à partir de son générateur $\mathcal{A}$ par la formule*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t\mathcal{A}_\lambda}x, \ t \geqslant 0, \ x \in E$$

où $\mathcal{A}_\lambda \in \mathcal{L}(E)$ est l'approximation de Yosida définie par

$$\mathcal{A}_\lambda = -\lambda\mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}, \ \lambda > \omega.$$

La proposition suivante détaille les principales propriétés des C_0 semi-groupes.

Proposition 1.11.

Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un C_0 semi-groupe de générateur infinitésimal $\mathcal{A}$, alors on a :

1. *Pour tout $x \in E$, la fonction $t \mapsto T(t)x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Si $x \in D(\mathcal{A})$ et $t \geq 0$ alors $T(t)x \in D(\mathcal{A})$.*
3. *La fonction $t \mapsto T(t)x$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $x \in D(\mathcal{A})$. Dans ce cas*

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{d}{dt}T(t)x = \mathcal{A}T(t)x = T(t)\mathcal{A}x.$$

4. *Pour tout x de E et tout $t \geq 0$*

$$\int_0^t T(s)xds \in D(\mathcal{A}) \ \text{et} \ \mathcal{A}\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x,$$

et si de plus $x \in D(\mathcal{A})$

$$\mathcal{A}\int_0^t T(s)xds = \int_0^t T(s)\mathcal{A}xds = T(t)x - x.$$

5. *Si $\mathcal{A}$ est générateur infinitésimal d'un autre C_0 semi-groupe $(S(t))_{t\geqslant 0}$, alors*

$$\forall t \geqslant 0, \ \ S(t) = T(t).$$

La proposition précédente permet d'affirmer entre autre que si $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ et si $u_0 \in D(\mathcal{A})$, la fonction $u : [0, +\infty[\longrightarrow E$ définie par

$$\forall t \geqslant 0, \ \ u(t) = T(t)u_0,$$

est l'unique fonction dans $C^1([0,1] \,; X) \cap C([0,1] \,; D(\mathcal{A}))$, solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \mathcal{A}u(t), \ \ x \in [0, +\infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Semi-groupes différentiables

Définition 1.12.

On dit qu'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est différentiable si pour tout x de E, la fonction $t \mapsto T(t)x$ est différentiable de $]0,+\infty[$ dans E.

Proposition 1.13.

Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un C_0 semi-groupe différentiable de générateur infinitésimal $\mathcal{A}$. Alors, on a, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$:

1. $\forall t \in]0,+\infty[$, $T(t)x \in D(\mathcal{A}^n)$.
2. $t \mapsto T(t)x$ *est n fois différentiable sur* $]0,+\infty[$ *et*
$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad T^{(n)}(t)x = \mathcal{A}^n T(t)x.$$
3. $\forall t \in]0,+\infty[$, $T^{(n)}(t) \in \mathcal{L}(E)$.
4. $t \mapsto T^{(n)}(t)$ *est différentiable (donc continu) de* $]0,+\infty[$ *dans* $\mathcal{L}(E)$.

Semi-groupes analytiques

Dans cette partie, pour $\phi \in]0,\pi]$, on considère le secteur ouvert
$$S_\phi = \{z \in \mathbb{C}^* \;/\; |\arg(z)| < \phi\}.$$

Définition 1.14.

Soit $\phi \in]0,\pi]$.
$(T(z))_{z\in\overline{S_\phi}}$ est un semi-groupe sur E , analytique dans S_ϕ si et seulement si

1. $\forall z \in \overline{S_\phi}, \quad T(z) \in \mathcal{L}(E)$.
2. $T(0) = I$.
3. $\forall z_1, z_2 \in \overline{S_\phi}, \quad T(z_1+z_2) = T(z_1)T(z_2)$.
4. $\forall x \in X, \quad \lim\limits_{z\longrightarrow 0,\ z\in\overline{S_\phi}} \|T(z)x - x\|_E = 0$.
5. $z \mapsto T(z)$ *est analytique dans* S_ϕ.

Si de plus $\sup\limits_{z\in\overline{S_\phi}} \|T(z)\| < +\infty$, on dit que $(T(z))_{z\in\overline{S_\phi}}$ est uniformément borné dans $\overline{S_\phi}$.

Définition 1.15.

Un semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ sur E, est appelé semi-groupe analytique s'il existe $\phi \in]0,\pi]$ tel que $(T(t))_{t\geqslant 0}$ se prolonge en $(T(z))_{z\in\overline{S_\phi}}$ semi-groupe sur E, analytique dans S_ϕ.

Notons que si $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe analytique sur E, alors, de par la définition, c'est un C_0 semi-groupe, de plus, pour tout x de E, la fonction $t \mapsto T(t)x$ est analytique de $]0,+\infty[$ dans E et donc $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est, a fortiori, un C_0 semi-groupe différentiable.

Il est alors naturel de se demander à quelles conditions un C_0 semi-groupe sur E, est un semi-groupe analytique. M. G. Crandall, A. Pazy, L. Tartar ont proposé dans [16], la caractérisation suivante :

Théorème 1.16.

Un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ sur E est un semi-groupe analytique si et seulement si son générateur infinitésimal $\mathcal{A}$ vérifie :

$$\begin{cases} \exists C, k \geqslant 0 : \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda \in]nk, +\infty[\\ \left\| \mathcal{A}(\mathcal{A}-\lambda I)^{-(n+1)} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \dfrac{C}{n\lambda^n}. \end{cases}$$

Il est important d'avoir aussi une caractérisation du générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique uniformément borné. Les deux théorèmes suivants répondent à ce problème

Théorème 1.17.

Soit $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ uniformément borné sur E. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

1. *Il existe $\delta \in]0, \pi/2[$ et $C \geqslant 0$ tels que*

$$\begin{cases} \rho(\mathcal{A}) \supset S_{\frac{\pi}{2}+\delta} \text{ et} \\ \forall \lambda \in S_{\frac{\pi}{2}+\delta}, \quad \|(\mathcal{A}-\lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \dfrac{C}{|\lambda|}. \end{cases} \tag{1.5}$$

2. *$(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe différentiable et il existe $M > 0$ tel que pour tout $t > 0$,*

$$T(t) \in \mathcal{L}(E, D(\mathcal{A})) \text{ et } \|\mathcal{A}T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \frac{M}{t}.$$

3. *Il existe $\phi \in]0, \pi]$ tel que $(T(t))_{t\geqslant 0}$ soit prolongeable en $(T(z))_{z\in\overline{S_\phi}}$ semi-groupe sur X, analytique dans S_ϕ, uniformément borné dans $\overline{S_\phi}$.*

Théorème 1.18.

Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire.

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *$\mathcal{A}$ est fermé, $D(\mathcal{A})$ est dense dans E et il existe $C \geqslant 0$ tel que*

$$\begin{cases} \rho(\mathcal{A}) \supset \Pi = \{\lambda \in \mathbb{C}^* \ / \ Re(\lambda) \geqslant 0\} \text{ et} \\ \forall \lambda \in \Pi, \quad \|(\mathcal{A}-\lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \dfrac{C}{|\lambda|}. \end{cases} \tag{1.6}$$

2. *$\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, uniformément borné $(T(t))_{t\geqslant 0}$ qui de plus se prolonge en $(T(z))_{z\in\overline{S_\phi}}$, semi-groupe sur E, analytique dans S_ϕ, uniformément borné dans $\overline{S_\phi}$ (avec $\phi \in]0, \pi]$).*

Notons qu'en fait (1.6) entraine à la fois (1.3) avec $\omega = 0$ et (1.5) et le théorème 1.18 découle alors du théorème 1.17.

Théorème 1.19.

Soit $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique borné $(T(t))_{t\geqslant 0}$ sur E.

Si $0 \in \rho(\mathcal{A})$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $\mathcal{A} + \delta I$ soit encore génèrateur d'un semi-groupe analytique borné et de plus pour tout $t > 0$ et $\alpha \geqslant 0$ on a

1. *$T(t) : \ E \longmapsto D(\mathcal{A}^\alpha)$,*

2. *Pour tout* $y \in D(\mathcal{A}^\alpha)$, *on a* $T(t)\mathcal{A}^\alpha y = \mathcal{A}^\alpha T(t)y$.
3. *Pour tout* $t > 0$ *l'opérateur* $\mathcal{A}^\alpha T(t)$ *est borné et il existe* $M_\alpha > 0$, *tel que*

$$\|\mathcal{A}^\alpha T(t)\| \leqslant M_\alpha x^{-\alpha} e^{-\delta x}.$$

4. *Si de plus* $0 < \alpha \leqslant 1$ *et alors, il existe* $C_\alpha > 0$ *tel que pour tout* $y \in D(\mathcal{A}^\alpha)$

$$\|T(t)y - y\| \leqslant C_\alpha t^\alpha \|\mathcal{A}^\alpha y\|.$$

Démonstration

On peut trouver la démonstration dans le livre de A. Pazy [38], théorème 6.13 page 74.

1. D'après les données sur $\mathcal{A}$ on a

$$\Sigma^+ \cup V \subset \rho(\mathcal{A}) \tag{1.7}$$

avec

$$\Sigma^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} \ \setminus \ 0 < \omega < |arg(\lambda)|\},$$

et

$$V = \{\lambda \in \Sigma^+ \setminus \|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leqslant \frac{M}{1 + |\lambda|}\},$$

alors $\mathcal{A}^\alpha$ existe pour tout α positif.
Puisque $T(t)$ est analytique alors

$$T(t) : E \longrightarrow \bigcap_{n=0}^{\infty} D(\mathcal{A}^n) \subset D(\mathcal{A}^\alpha), \text{ pour } \alpha \geqslant 0.$$

D'où le résultat.

2. Soit $x \in D(\mathcal{A}^\alpha)$, alors $x = \mathcal{A}^{-\alpha} y$ pour tout $y \in E$, et

$$T(t)x \;\; = T(t)\mathcal{A}^{-\alpha} y = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s)T(t)y ds \;\; = \mathcal{A}^{-\alpha} T(t)y = \mathcal{A}^{-\alpha} T(t)\mathcal{A}^\alpha x.$$

3. Puisque $\mathcal{A}^\alpha$ est fermé alors $\mathcal{A}^\alpha T(t) = T(t)\mathcal{A}^\alpha$ est aussi fermé, partout défini, donc d'après le théorème du graphe fermé $\mathcal{A}^\alpha T(t)$ est borné.
Soit $n - 1 < \alpha \leqslant n$ alors d'après l'hypothèse (1.7) il existe $\delta > 0$ tel que $-a + \delta$ génère un semi-groupe analytique ce qui implique l'estimation suivante

$$\|T(t)\| \leqslant M e^{-\delta t},$$

et

$$\|\mathcal{A}^n T(t)\| \leqslant M_n t^{-n} e^{-\delta t},$$

alors, on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}^\alpha T(t)\| \;\; &= \|\mathcal{A}^{\alpha-n} \mathcal{A}^n T(t)\| \leqslant \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1} \|\mathcal{A}^n T(t+s)\| ds \\ &\leqslant \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1} (t+s)^{-n} e^{-\delta(t+s)} ds \\ 0 \;\; &\leqslant \frac{M_n e^{-\delta t}}{\Gamma(n-\alpha) t^\alpha} \int_0^\infty u^{n-\alpha-1} (1+u)^{-n} du = \frac{M_\alpha}{t^\alpha} e^{-\delta t}. \end{aligned}$$

4. On a
$$\begin{aligned} \|T(t)x - x\| &= \| \int_0^t \mathcal{A}T(s)ds\| = \| \int_0^t \mathcal{A}^{1-\alpha}T(s)\mathcal{A}^{\alpha}xds\| \\ &\leqslant C \int_0^t s^{\alpha-1}\|\mathcal{A}^{\alpha}x\|ds = C_{\alpha}t^{\alpha}\|\mathcal{A}^{\alpha}x\|. \end{aligned}$$

1.2.2 Semi-groupes analytiques généralisés

Définition(Voir E. Sinestrari [41], A. Lunardi [37])

Un opérateur linéaire $\mathcal{A}$ sur E sera dit générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique généralisé si et seulement si il vérifie toutes les conditions pour être un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sauf la condition de densité de domaine $D(\mathcal{A})$. Alors il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que :

$$\begin{cases} \rho(\mathcal{A}) \supset S_{\omega,\delta} = \left\{\lambda \in \mathbb{C}\backslash \{\omega\} \ / \ |\arg(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \in S_{\omega,\delta}} \|(\lambda - \omega)(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{L(E)} < +\infty, \end{cases}$$

et en fixant $r > 0$, $\delta_0 \in]0, \delta[$ en peut écrire le semi-groupe $\left(e^{x\mathcal{A}}\right)_{x\geq 0}$ sous la forme

$$e^{x\mathcal{A}} = \begin{cases} \frac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\gamma} e^{\lambda x} (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} d\lambda \text{ si } x > 0 \\ \\ I \text{ si } x = 0, \end{cases}$$

où γ est le bord négativement orienté de $S_{\omega,\delta_0} \cup B(0, r)$.

Notons qu'on ne suppose pas que $\left(e^{x\mathcal{A}}\right)_{x\geq 0}$ soit un semi-groupe fortement continu.

Le Théorème 1.19 reste vrai si on remplace "semi-groupe analytique borné" par "semi-groupe analytique généralisé borné".

1.2.3 Groupes fortement continus

Certains semi-groupes d'opérateurs $(T(t))_{t\geq 0}$ peuvent être prolongés en une famille $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ qui garde la propriété fondamentale $T(s + t) = T(s)T(t)$ pour $s, t \in \mathbb{R}$. On étudie ici les caractéristiques de ces semi-groupes.

Définition 1.20. *Un groupe sur E, est une famille $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ d'opérateurs linéaires bornés sur E vérifiant*

1. $T(0) = I$.
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}, \ \ T(s + t) = T(s)T(t)$.

Ce groupe sera dit fortement continu s'il vérifie de plus

$$\forall \varphi \in E, \quad \lim_{t\to 0, t\in\mathbb{R}\backslash\{0\}} \|T(t)\varphi - \varphi\|_E = 0.$$

Remarque 1.21.

1. *Si $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe sur E alors $(T(t))_{t\geqslant 0}$ et $(T(-t))_{t\geqslant 0}$ sont des semi-groupes sur E.*

2. *Si $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe fortement continu sur E alors $(T(t))_{t\geqslant 0}$ et $(T(-t))_{t\geqslant 0}$ sont des semi-groupes fortement continus sur E. D'où*

$$\begin{cases} \exists M^+ \geqslant 1, \exists \omega^+ \geqslant 0 : \forall t \geqslant 0, & \|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant M^+ e^{\omega^+ t} \\ \exists M^- \geqslant 1, \exists \omega^- \geqslant 0 : \forall t \geqslant 0, & \|T(-t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant M^- e^{\omega^- t}, \end{cases}$$

soit en posant $M = \max\{M^+, M^-\} \geqslant 1$ et $\omega = \max\{\omega^+, \omega^-\} \geqslant 0$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant M e^{\omega|t|}.$$

Définition 1.22. *Soit $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ groupe sur E. On appelle générateur infinitésimal du groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$, l'opérateur linéaire $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \longrightarrow E$, caractérisé par*

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}) = \left\{\varphi \in E : \lim\limits_{t\to 0, t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \dfrac{T(t)\varphi - \varphi}{t} \text{ existe dans } E\right\} \\ \forall \varphi \in D(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A}\varphi = \lim\limits_{t\to 0, t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \dfrac{T(t)\varphi - \varphi}{t}. \end{cases} \tag{1.8}$$

Exemple 1.23. *Si $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E)$ alors $\left(e^{t\mathcal{A}}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe fortement continu sur E de générateur infinitésimal $\mathcal{A}$.*

Proposition 1.24. *Si $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe fortement continu de générateur infinitésimal $\mathcal{A}$ alors :*

1. *$(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur E de générateur infinitésimal $\mathcal{A}$.*
2. *$(T(-t))_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur E de générateur infinitésimal $-\mathcal{A}$.*

Démonstration. Rappelons que, d'après la remarque 1.21

$$\exists M \geqslant 1, \exists \omega \geqslant 0 : \forall t \in \mathbb{R}, \quad \|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant M e^{\omega|t|}.$$

On note $\mathcal{A}^+$ le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geqslant 0}$.

– Alors

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}^+) = \left\{\varphi \in E : \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)\varphi - \varphi}{t} \text{ existe dans } E\right\} \\ \forall \varphi \in D(\mathcal{A}^+), \quad \mathcal{A}^+\varphi = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)\varphi - \varphi}{t}. \end{cases}$$

  et vu (1.8) : $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^+$.

– De plus $\mathcal{A}^+ \subset \mathcal{A}$. En effet, si $\varphi \in D(\mathcal{A}^+)$ alors
  - $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)\varphi - \varphi}{t} = \mathcal{A}^+\varphi.$
  - $\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{T(t)\varphi - \varphi}{t} = \mathcal{A}^+\varphi$ car

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{T(-t)\varphi - \varphi}{-t} = \mathcal{A}^+\varphi \text{ et } \lim_{t\to 0^-} T(t)\left(\mathcal{A}^+\varphi\right) = \mathcal{A}^+\varphi,$$

  et pour $t < 0$

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{T(t)\varphi-\varphi}{t}-\mathcal{A}^{+}\varphi\right\| \\
=\ &\left\|T(t)\left(\frac{T(-t)\varphi-\varphi}{-t}\right)-\mathcal{A}^{+}\varphi\right\| \\
\leqslant\ &\left\|T(t)\left(\frac{T(-t)\varphi-\varphi}{-t}-\mathcal{A}^{+}\varphi\right)\right\|+\left\|T(t)\left(\mathcal{A}^{+}\varphi\right)-\mathcal{A}^{+}\varphi\right\| \\
\leqslant\ &\|T(t)\|\left\|\frac{T(-t)\varphi-\varphi}{-t}-\mathcal{A}^{+}\varphi\right\|+\left\|T(t)\left(\mathcal{A}^{+}\varphi\right)-\mathcal{A}^{+}\varphi\right\| \\
\leqslant\ &Me^{\omega|t|}\left\|\frac{T(-t)\varphi-\varphi}{-t}-\mathcal{A}^{+}\varphi\right\|+\left\|T(t)\left(\mathcal{A}^{+}\varphi\right)-\mathcal{A}^{+}\varphi\right\|.
\end{aligned}$$

– D'où $\lim\limits_{t\to 0, t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\dfrac{T(t)\varphi-\varphi}{t}=\mathcal{A}^{+}\varphi$ i.e.

$$\varphi\in D(\mathcal{A}) \text{ et } \mathcal{A}\varphi=\mathcal{A}^{+}\varphi.$$

– En conclusion : $\mathcal{A}^{+}=\mathcal{A}$

On note de même $\mathcal{A}^{-}$ le générateur infinitésimal de $(T(-t))_{t\geqslant 0}$.

– Alors

$$\begin{cases}
D(\mathcal{A}^{-})=\left\{\varphi\in E:\ \lim\limits_{t\to 0^{+}}\dfrac{T(-t)\varphi-\varphi}{t} \text{ existe dans } E\right\}\\
\forall\varphi\in D(\mathcal{A}^{-}),\quad \mathcal{A}^{-}\varphi=\lim\limits_{t\to 0^{+}}\dfrac{T(-t)\varphi-\varphi}{t}=-\lim\limits_{t\to 0^{-}}\dfrac{T(t)\varphi-\varphi}{t}.
\end{cases}$$

et vu (1.8) : $\mathcal{A}\subset-\mathcal{A}^{-}$.

– De plus $-\mathcal{A}^{-}\subset\mathcal{A}$. En effet, si $\varphi\in D(\mathcal{A}^{-})$ alors

– $\lim\limits_{t\to 0^{-}}\dfrac{T(t)\varphi-\varphi}{t}=-\mathcal{A}^{-}\varphi$.

– $\lim\limits_{t\to 0^{+}}\dfrac{T(t)\varphi-\varphi}{t}=-\mathcal{A}^{-}\varphi$ car

$$\lim_{t\to 0^{+}}\frac{T(-t)\varphi-\varphi}{t}=\mathcal{A}^{-}\varphi \text{ et } \lim_{t\to 0^{+}}T(t)\left(\mathcal{A}^{-}\varphi\right)=\mathcal{A}^{-}\varphi,$$

et pour $t>0$

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{T(t)\varphi-\varphi}{t}-\left(-\mathcal{A}^{-}\varphi\right)\right\| \\
=\ &\left\|T(t)\left(\frac{T(-t)\varphi-\varphi}{t}\right)-\mathcal{A}^{-}\varphi\right\| \\
\leqslant\ &\left\|T(t)\left(\frac{T(-t)\varphi-\varphi}{t}-\mathcal{A}^{-}\varphi\right)\right\|+\left\|T(t)\left(\mathcal{A}^{-}\varphi\right)-\mathcal{A}^{-}\varphi\right\| \\
\leqslant\ &\|T(t)\|\left\|\frac{T(-t)\varphi-\varphi}{t}-\mathcal{A}^{-}\varphi\right\|+\left\|T(t)\left(\mathcal{A}^{-}\varphi\right)-\mathcal{A}^{-}\varphi\right\| \\
\leqslant\ &Me^{\omega|t|}\left\|\frac{T(-t)\varphi-\varphi}{t}-\mathcal{A}^{-}\varphi\right\|+\left\|T(t)\left(\mathcal{A}^{-}\varphi\right)-\mathcal{A}^{-}\varphi\right\|.
\end{aligned}$$

– D'où $\lim\limits_{t\to 0, t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \dfrac{T(t)\varphi - \varphi}{t} = -\mathcal{A}^-\varphi$ i.e. $\varphi \in D(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A}\varphi = -\mathcal{A}^-\varphi$.

– En conclusion : $\mathcal{A}^- = -\mathcal{A}$.

□

Corollaire 1.25. *(Unicité du groupe associé à un gén érateur infinitésimal) Si $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal du groupe fortement continu $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ et du groupe fortement continu $(S(t))_{\in\mathbb{R}}$ alors*

$$T(t) = S(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. $(T(t))_{t\geqslant 0}$ et $(S(t))_{t\geqslant 0}$ sont des semi-groupes fortement continus sur E de même générateur infinitésimal $\mathcal{A}$, donc

$$T(t) = S(t), \quad t \geqslant 0.$$

De même $(T(-t))_{t\geqslant 0}$ et $(S(-t))_{t\geqslant 0}$ sont des semi-groupe fortement continus sur E de même générateur infinitésimal $-\mathcal{A}$ donc

$$T(-t) = S(-t), \quad t \geqslant 0.$$

□

Remarque 1.26. *Si $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe sur E dont le générateur infinitésimal $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{L}(E)$ alors c'est un groupe fortement continu sur E (car pour tout $\varphi \in E$: $\lim\limits_{t\to 0, t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \dfrac{T(t)\varphi - \varphi}{t}$ existe dans E ce qui entraine que $\lim\limits_{t\to 0, t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} T(t)\varphi - \varphi = 0$) donc, vu l'exemple 1.23 et le corollaire 1.25, on a*

$$T(t) = e^{t\mathcal{A}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.27. *Si $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe sur E alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$0 \in \rho\,(T(t)) \;\; et \;\; (T(t))^{-1} = T(-t).$$

Proposition 1.28. *Si $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe sur E tel que $0 \in \rho\,(T(t))$ pour tout $t \geqslant 0$, alors en posant pour $t \geqslant 0$*

$$T(-t) = (T(t))^{-1},$$

(i. e. $T(t) = (T(-t))^{-1}$ si $t \leqslant 0$) on obtient que $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe sur E.

Démonstration. Notons d'abord que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$T(t) \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(E) \text{ et } \; (T(t))^{-1} = T(-t),$$

en effet c'est vrai par définition si $t \geqslant 0$, et, si $t \leqslant 0$

$$T(t) = T(-(-t)) = (T(-t))^{-1}.$$

Pour montrer que $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe sur E il suffit de vérifier que :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad T(s+t) = T(s)T(t).$$

1. si $s,t \geqslant 0$, $T(s+t) = T(s)T(t)$ car $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe.
2. si $s,t \leqslant 0$ alors : $T(s+t) = T(t+s) = (T(-t-s))^{-1} \underset{\text{vu le 1.}}{=} (T(-t)T(-s))^{-1} = (T(-s))^{-1}(T(-t)^{-1} = T(s)T(t)$.
3. si $s \geqslant 0, t \leqslant 0, s+t \geqslant 0$ alors : $T(s) = T(s+t+(-t)) \underset{\text{vu le 1.}}{=} T(s+t)T(-t)$ donc $T(s)T(-t)^{-1} = T(s+t)$ soit $T(s+t) = T(s)T(t)$.
4. si $s \geqslant 0, t \leqslant 0, s+t \leqslant 0$ alors : $T(t) = T((-s)+s+t) \underset{\text{vu le 2.}}{=} T(-s)T(s+t)$ d'où $T(-s)^{-1}T(t) = T(s+t)$ soit $T(s+t) = T(s)T(t)$.
5. si $s \leqslant 0, t \geqslant 0, s+t \geqslant 0$ alors : $T(t) = T(-s+(s+t)) \underset{\text{vu le 1.}}{=} T(-s)T(s+t)$ donc $T(-s)^{-1}T(t) = T(s+t)$ soit $T(s+t) = T(s)T(t)$.
6. si $s \leqslant 0, t \geqslant 0, s+t \leqslant 0$ alors : $T(s) = T((s+t)-t) \underset{\text{vu le 2.}}{=} T(s+t)T(-t)$ donc $T(s)T(-t)^{-1} = T(s+t)$ soit $T(s+t) = T(s)T(t)$.

□

Proposition 1.29. *Si $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur E tel que $0 \in \rho(T(t))$ pour tout $t \geqslant 0$, alors en posant pour $t \geqslant 0$*

$$T(-t) = (T(t))^{-1},$$

on obtient que $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe fortement continu sur E.

Démonstration. Vu la proposition 1.28, il suffit de vérifier la forte continuité de $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$. Rappelons que $(T(t))_{t\geqslant 0}$ étant semi-groupe fortement continu

$$\exists M \geqslant 1, \omega \geqslant 0 : \forall t \geqslant 0, \quad \|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant Me^{\omega t}.$$

Or si $\varphi \in E$ on a

1. $\lim\limits_{t\to 0^+} \|T(t)\varphi - \varphi\|_E = 0$ car $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe fortement continu.
2. pour $-1 < t < 0$

$$\begin{array}{rcl} \|T(t)\varphi - \varphi\|_E & = & \|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \|\varphi - T(-t)\varphi\|_E \\ & \leqslant & \|T(1+t)T(-1)\|_{\mathcal{L}(E)} \|\varphi - T(-t)\varphi\|_E \\ & \leqslant & \|T(1+t)\|_{\mathcal{L}(E)} \|T(-1)\|_{\mathcal{L}(E)} \|T(-t)\varphi - \varphi\|_E \\ & \leqslant & Me^{\omega(1+t)} \|T(-1)\|_{\mathcal{L}(E)} \|T(-t)\varphi - \varphi\|_E, \end{array}$$

   d'où $\lim\limits_{t\to 0^-} \|T(t)\varphi - \varphi\|_E = 0$ en effet vu le 1. : $\lim\limits_{t\to 0^-} \|T(-t)\varphi - \varphi\|_E = 0$.
3. En conclusion : $\lim\limits_{t\to 0, t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \|T(t)\varphi - \varphi\|_E = 0$.

□

Proposition 1.30. *Si $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire sur E vérifiant :*

1. *$\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(T^+(t))_{t\geqslant 0}$ fortement continu sur E*
2. *$-\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(T^-(t))_{t\geqslant 0}$ fortement continu sur E.*

Alors $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal du groupe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ fortement continu sur E défni par

$$T(t) = \begin{cases} T^{+}(t) \ \textit{si}\ t \geqslant 0 \\ T^{-}(-t) \ \textit{si}\ t \leqslant 0. \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\forall t \geq 0 : T^{+}(t)T^{-}(t) = T^{-}(t)T^{+}(t) = I, \tag{1.9}$$

en effet, dans ce cas, vu la proposition 1.29, en posant

$$\begin{cases} T(t) = T^{+}(t) \text{ si } t \geq 0 \\ T(t) = \left(T^{+}(-t)\right)^{-1} = T^{-}(-t) \text{ si } t \leq 0, \end{cases}$$

on obtient que $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe fortement continu sur E. Mais, puisque pour chaque $t \geq 0$, $T^{+}(t)T^{-}(t) \in \mathcal{L}(E)$ et que $\overline{D(\mathcal{A})} = E$ (car $\mathcal{A}$ est le générateur infinit ésimal d'un semi-groupe), pour obtenir (1.9) il suffit de montrer que

$$\forall t \geq 0, \forall \varphi \in D(\mathcal{A}) : T^{+}(t)T^{-}(t)\varphi = T^{-}(t)T^{+}(t)\varphi = \varphi. \tag{1.10}$$

Soit donc φ un élément fixé de $D(\mathcal{A})$.

1. On définit
$$\begin{array}{rlcl} w: & [0,+\infty[& \longrightarrow & E \\ & t & \longmapsto & T^{+}(t)T^{-}(t)\varphi. \end{array}$$
   $D(\mathcal{A}) = D(-\mathcal{A})$, on a pour $t \in [0,+\infty[$
$$w'(t) = T^{+}(t)\mathcal{A}T^{-}(t)\varphi + T^{+}(t)\left(-\mathcal{A}\right)T^{-}(t)\varphi = 0.$$
   Donc $w' = 0$ sur $[0,+\infty[$ et w est constante :
$$\forall t \geqslant 0, w(t)\varphi = w(0)\varphi = \varphi,$$
   soit $\forall t \geqslant 0 : T^{+}(t)T^{-}(t)\varphi = \varphi$.
2. On obtient similairement par échange des rôles de $T^{+}(t)$ et $T^{-}(t)$ (et donc de $\mathcal{A}$ et $-\mathcal{A}$) que
$$\forall t \geqslant 0 : T^{-}(t)T^{+}(t)\varphi = \varphi.$$

Finalement on a obtenu (1.10) et donc (1.9). □

En combinant les propositions 1.24, 1.30 et le corollaire 1.25, on obtient :

Théorème 1.31. *$\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un groupe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ fortement continu sur E ssi $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(T^{+}(t))_{t\geqslant 0}$ fortement continu sur E et $-\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(T^{-}(t))_{t\geqslant 0}$ fortement continu sur E.*

De plus, dans ce cas pour $t \in \mathbb{R}$

$$T(t) = \begin{cases} T^{+}(t) \ \textit{si}\ t \geqslant 0 \\ T^{-}(-t) \ \textit{si}\ t \leqslant 0. \end{cases}$$

1.3 Espaces d'interpolation

1.3.1 Espaces de moyenne de Lions-Peetre [36]

Soient $(E_0, \|.\|_0)$ et $(E_1, \|.\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continûment dans un espace topologique séparé Ξ. On considère les espaces de Banach $E_0 \cap E_1$ et $E_0 + E_1$ munis des normes respectives

$$\begin{aligned} \|x\|_{E_0 \cap E_1} &= \|x\|_{E_0} + \|x\|_{E_1} \\ \|x\|_{E_0 + E_1} &= \inf_{x_i \in E_i,\ x_0 + x_1 = x} \left(\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1} \right). \end{aligned}$$

Définition 1.32.

Pour $p \in [1, \infty]$ et $\theta \in]0, 1[$, on appelle espace de moyenne (ou espace d'interpolation) entre E_0 et E_1, l'espace noté $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ des vecteurs
$x \in E_0 + E_1$ tels que

$$\begin{cases} i)\ \forall t > 0,\ \exists u_0(t) \in E_0,\ \exists u_1(t) \in E_1 \ \textit{avec} \\ \qquad x = u_0(t) + u_1(t) \\ ii)\ t^{-\theta} u_0 \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E_0),\ t^{1-\theta} u_1 \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E_1). \end{cases} \tag{1.11}$$

Ici, $L^p_*(\mathbb{R}_+, E_0)$ désigne l'espace des (classes de) fonctions fortement mesurables
$u : \mathbb{R}_+ \to E_0$ telles que

$$\|u\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+, E_0)} = \left(\int_0^{+\infty} \|u(t)\|^p_{E_0} \frac{dt}{t} \right)^{1/p} < +\infty,$$

avec la modification usuelle pour $p = +\infty$, c'est à dire

$$\|u\|_{L^\infty_*(\mathbb{R}_+, E_0)} = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} ess \ \|u(t)\|_{E_0} < +\infty.$$

Proposition 1.33.

$(E_0, E_1)_{\theta,p}$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|x\|_{\theta,p} = \inf_{\substack{u_0, u_1 \\ u_0(t) + u_1(t) = x}} \left(\left\| t^{-\theta} u_0 \right\|_{L^p_*(E_0)} + \left\| t^{1-\theta} u_1 \right\|_{L^p_*(E_1)} \right),$$

et vérifie

$$E_0 \cap E_1 \subset (E_0, E_1)_{\theta,p} \subset E_0 + E_1,$$

avec injections continues.

1.3.2 Propriété fondamentale d'interpolation

On se donne deux triplets d'espaces d'interpolation (E_0, E_1, Ξ) et $(F_0, F_1, \digamma)$ et un opérateur linéaire T de Ξ dans $\digamma$. Alors on a le théorème

Théorème 1.34.

On suppose que les restrictions de T aux espaces E_i à valeurs dans F_i sont linéaires continues. Alors pour tous $\theta \in]0,1[$ et $p \in [1,\infty]$ l'opérateur T est linéaire continu de $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ dans $(F_0, F_1)_{\theta,p}$ et

$$\|T\|_{L((E_0,E_1)_{\theta,p},(F_0,F_1)_{\theta,p})} \leqslant C \|T\|_{L(E_0,F_0)}^{1-\theta} \|T\|_{L(E_1,F_1)}^{\theta}.$$

1.3.3 Autres définitions des espaces d'interpolation

1. $x \in (E_0, E_1)_{\theta,p}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall y \in \mathbb{R},\ \exists u_0(y) \in E_0, \exists u_1(y) \in E_1 \\ \quad x = u_0(y) + u_1(y) \\ e^{-\theta y} u_0 \in L^p(\mathbb{R}, E_0),\ e^{(1-\theta)y} u_1 \in L^p(\mathbb{R}, E_1). \end{cases}$$

2. $x \in (E_0, E_1)_{\theta,p}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall t > 0,\ \exists u(t) \in E_0 \cap E_1 \\ \quad x = \displaystyle\int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t} \\ t^{-\theta} u \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E_0),\ t^{1-\theta} u \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E_1). \end{cases}$$

3. $x \in (E_0, E_1)_{\theta,p}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall y \in \mathbb{R},\ \exists u(y) \in E_0 \cap E_1 \\ \quad x = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty u(y) dy \\ e^{-\theta y} u \in L^p(\mathbb{R}, E_0),\ e^{(1-\theta)y} u \in L^p(\mathbb{R}, E_1). \end{cases}$$

Définition 1.35.

Soient $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire fermé de domaine $D(\mathcal{A}) \subset E$ muni de sa norme du graphe :

$$\forall x \in D(\mathcal{A}), \quad \|x\|_{D(\mathcal{A})} = \|x\|_E + \|\mathcal{A}x\|_E,$$

et E_0, E_1 tels que $E_0 = D(\mathcal{A})$ et $E_1 = E$, on pose

$$D_{\mathcal{A}}(\theta; p) = (D(\mathcal{A}); E)_{1-\theta,p},$$

où $p \in [1, +\infty]$ et $0 < \theta < 1$.

On a des caractérisations explicites de ces espaces, par exemple, dans les cas suivants :

1. Supposons que $\rho(\mathcal{A}) \supset \mathbb{R}_+$ et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0 \quad \left\| (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \frac{C}{\lambda},$$

alors $D_{\mathcal{A}}(\theta; p)$ est exactement le sous espace de E des u telles que

$$\left\| t^{\theta} \mathcal{A}(\mathcal{A} - tI)^{-1} u \right\|_{E} \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E).$$

$L^p_*(\mathbb{R}_+, E)$ est défini comme précédemment. Voir Grisvard [25] et [26].

2. Dans le cas où $\mathcal{A}$ génère un semi-groupe fortement continu et borné dans E

$$D_{\mathcal{A}}(\theta; p) = \{u \in E : \|t^{-\theta}(e^{t\mathcal{A}} - I)u\|_E \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E)\}.$$

Voir Lions [35].

3. Si maintenant $\mathcal{A}$ génère un semi-groupe analytique et borné dans E, alors

$$D_{\mathcal{A}}(\theta; p) = \{u \in E : \left\| t^{1-\theta} \mathcal{A} e^{t\mathcal{A}} u \right\|_{E} \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E)\}.$$

Voir Butzer-Bérens [11].

1.3.4 Réitération

Soit $\mathcal{A}$ opérateur linéaire fermé sur E. On pose

$$D_{\mathcal{A}}(\theta + k, p) = \left\{ x \in D(\mathcal{A}^k) \ / \ \mathcal{A}^k x \in D_{\mathcal{A}}(\theta, p) \right\} \text{ si } k \in \mathbb{N}.$$

Ainsi

$$D_{\mathcal{A}}(\theta + 1, p) = (D(\mathcal{A}), D(\mathcal{A}^2))_{\theta,p}.$$

On a alors

$$D_{\mathcal{A}^2}(\theta, p) = D_{\mathcal{A}}(2\theta, p) \text{ si } \theta \neq 1/2,$$

et plus généralement

$$D_{\mathcal{A}^m}(\theta, p) = D_{\mathcal{A}}(m\theta, p) \text{ si } m\theta \notin \mathbb{N}$$

En particulier

$$\begin{aligned} (D(\mathcal{A}^2), E)_{1-\frac{\theta}{2},p} &= D_{\mathcal{A}^2}(\tfrac{\theta}{2}, p) \\ &= D_{\mathcal{A}}(\theta, p) \\ &= (D(\mathcal{A}), E)_{1-\theta,p}. \end{aligned}$$

1.4 Calcul fonctionnel

1.4.1 Calcul fonctionnel de Dunford

On pourra consulter le livre de N. Dunford et J. Schwartz [21] et celui de E. Hille et R. S. Phillips [31], pour l'étude des premiers développements du calcul fonctionnel dans le cadre des opérateurs non bornés. Les derniers développements des différents calculs fonctionnels pourront être trouvés dans la synthèse récente de M. Uiterdijk [46].

Le cadre traité ici est celui des opérateurs sectoriels et se réfère à l'exposé de M. Haase [28].

Formule de Cauchy

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$.

On note $H(U)$ l'espace des fonctions holomorphes de U dans $\mathbb{C}$.

Pour $f \in H(U)$, K un compact à bord de U et z_0 à l'intérieur de K, la formule de Cauchy assure alors que

$$f\left(z_0\right) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - z_0} d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté de K.

Intégrale de Dunford-Riesz

Le calcul fonctionnel classique de Dunford-Riesz s'appuie sur la formule précédente pour construire $f\left(T\right)$ où T est un opérateur linéaire borné et f est holomorphe.

Plus précisément si $T \in \mathcal{L}(X)$ et si f est holomorphe sur un voisinage ouvert U de $\sigma\left(T\right)$ (le spectre de T) alors on définit l'intégrale de Dunford-Riesz par

$$f\left(T\right) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(\lambda) \left(\lambda I - T\right)^{-1} d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté d'un compact à bord K contenant $\sigma\left(T\right)$ et contenu dans U.

L'application

$$\begin{array}{cccc} \phi: & H(U) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & f & \mapsto & f\left(T\right), \end{array}$$

est un homomorphisme d'algèbre qui vérifie entre autre

$$\left(z^n\right)\left(T\right) = T^n \text{ si } n \in \mathbb{N}.$$

Il s'agit d'étendre, sous certaines conditions, ce calcul fonctionnel aux opérateurs sectoriels.

Opérateurs sectoriels

Définition 1.36.

Soit $\omega \in]0, \pi[$.

1. *On pose* $S_\omega = \{z \in \mathbb{C}^* \ / \ |\arg(z)| < \omega\}$ *et* $\Sigma_\omega = \mathbb{C} \setminus \overline{S_\omega}$.
2. *Un opérateur linéaire* $\mathcal{A}$ *sur* E *est dit sectoriel d'angle* ω *si et seulement si*

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{S_\omega},$$

et pour tout $\omega' \in]\omega, \pi[$, *il existe* $M_{\omega'} \geqslant 0$ *tel que*

$$\forall \lambda \in \Sigma_{\omega'}, \quad \left\| (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \right\| \leqslant \frac{M_{\omega'}}{|\lambda|}.$$

3. *Sect*(ω) *désigne l'ensemble des opérateurs linéaires sur* E *qui sont sectoriels d'angle* ω.

Espaces de fonctions holomorphes

Définition 1.37.
Soit $\varphi \in]0, \pi[$.

1. $\mathcal{DR}(S_\varphi)$ *est l'espace des fonctions* f *de* $H(S_\varphi)$ *vérifiant*

$$\exists C \geqslant 0, \ \exists s > 0 \ / \ \forall z \in S_\varphi, \quad |f(z)| \leqslant C \min\left(|z|^s, |z|^{-s}\right).$$

2. $\mathcal{DR}_0(S_\varphi)$ *est l'espace des fonctions* f *de* $H(S_\varphi)$ *qui sont bornées sur* S_φ, *qui admettent un prolongement holomorphe sur un voisinage de* 0 *et qui vérifent*

$$\exists s > 0 \ / \ |f(z)| \leqslant O(|z|^{-s}) \ \textit{(quand } |z| \longrightarrow +\infty\textit{)}.$$

Notons que $\mathcal{DR}$ est mis pour Dunford-Riesz.

Calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels

On considère ici $\omega \in]0, \pi[$ et $\mathcal{A} \in Sect(\omega)$.

Définition 1.38.
Soit $f \in \mathcal{DR}(S_\varphi) \cup \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$ *où* $\varphi \in]\pi, \omega[$. *On pose alors*

$$f(\mathcal{A}) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(\lambda) (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \, d\lambda,$$

où la coube Γ *est définie comme suit*

1. *Si* $f \in \mathcal{DR}(S_\varphi)$, *on fixe* $\omega' \in]\varphi, \omega[$ *et on prend pour* Γ, *le bord orienté positivement de* $S_{\omega'}$.
2. *Si* $f \in \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$, *on fixe* $\omega' \in]\varphi, \omega[$ *et on prend pour* Γ, *le bord orienté positivement de* $S_{\omega'} \cup B(0, \delta)$.*(où* δ *est un réel strictement positif, choisi de sorte que* f *soit holomorphe au voisinage de* $B(0, \delta)$*).*

$f(\mathcal{A})$ ainsi défini ne dépend pas du choix de ω' ou δ.

Définition 1.39.
Soit $f \in \mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$ *c'est-à-dire* $f = g + h$, *où*

$$g \in \mathcal{DR}(S_\varphi), h \in \mathcal{DR}_0(S_\varphi).$$

On pose alors

$$f(\mathcal{A}) = g(\mathcal{A}) + h(\mathcal{A}).$$

Proposition 1.40.
Si $f, g \in \mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$ *et* $c, d \in \mathbb{C}$ *alors*

1. $f(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(E)$.
2. $(cf + dg)(\mathcal{A}) = c(f(\mathcal{A})) + d(g(\mathcal{A}))$.

Extension du calcul fonctionnel

On considère encore $\omega \in]0, \pi[$ et $\mathcal{A} \in Sect(\omega)$.

Définition 1.41.
On pose, pour $\varphi \in]0, \pi[$

$$\mathcal{P}(S_\varphi) = \left\{ f \in H(S_\varphi) \ / \ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{f(z)}{(1+z)^n} \in \mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi) \right\}.$$

Notons que $\mathcal{P}(S_\varphi)$ contient $\mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$, mais aussi toutes les fonctions rationnelles qui ont leurs pôles hors de $\overline{S_\varphi}$ et en particulier les constantes.

Définition 1.42.
Pour tout $f \in \mathcal{P}(S_\varphi)$ *où* $\varphi \in]\omega, \pi[$, *on définit* $f(\mathcal{A})$ *en posant*

$$f(\mathcal{A}) = (I + \mathcal{A})^n \left(\frac{f(z)}{(1+z)^n} \right)(\mathcal{A}).$$

Les principales propriétés de ce calcul fonctionnel étendu sont données ci-dessous.

Proposition 1.43.
Si $f \in \mathcal{A}(S_\varphi)$ *avec* $\varphi \in]\omega, \pi[$, *alors*

1. $f(\mathcal{A})$ *est un opérateur fermé sur* E.
2. *Si* $\mathcal{A}$ *est borné alors* $f(\mathcal{A})$ *est borné.*
3. $1(\mathcal{A}) = I$, $(z^n)(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^n$ *où* $n \in \mathbb{N}^*$.
4. $\lambda \notin \overline{S_\varphi} \Longrightarrow \left(\frac{f(z)}{\lambda - z} \right)(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A})(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ *et en particulier*

$$\left(\frac{1}{\lambda - z} \right)(\mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}.$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{A}$ est injectif et dans l'optique de définir $\mathcal{A}^\alpha$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on s'intéresse à une nouvelle classe de fonctions.

Définition 1.44.

1. *On pose pour* $\varphi \in]0, \pi[$

$$\mathcal{B}(S_\varphi) = \left\{ f \in H(S_\varphi) \ / \ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{z^n f(z)}{(1+z)^{2n}} \in \mathcal{DR}(S_\varphi) \right\}.$$

2. *Si* $\mathcal{A}$ *est injectif, pour tout* $f \in \mathcal{B}(S_\varphi)$, $(\varphi \in]\omega, \pi[)$, *on définit* $f(\mathcal{A})$ *en posant*

$$f(\mathcal{A}) = \left((1+\mathcal{A})^2 \mathcal{A}^{-1}\right)^n \left(\frac{z^n f(z)}{(1+z)^{2n}}\right)(\mathcal{A}).$$

Proposition 1.45.
Si $f \in \mathcal{B}(S_\varphi)$ *avec* $\varphi \in]\omega, \pi[$, *alors*

1. $f(\mathcal{A})$ *est un opérateur fermé sur* E.
2. *Si* $\mathcal{A}$ *est borné et inversible alors* $f(\mathcal{A})$ *est borné.*

Notons enfin que si f est dans l'intersection de $\mathcal{A}(S_\varphi)$ et $\mathcal{B}(S_\varphi)$ alors $f(\mathcal{A})$ admet deux formules de définition et ces formules coïncident.

1.4.2 Puissances fractionnaires d'opérateurs

On s'appuiera sur le calcul fonctionnel développé ci-dessus pour définir les puissances fractionnaires d'un opérateur sectoriel, comme il est fait dans M. Haase [28]. On pourra aussi se référer à l'exposé fondateur de H. Komatsu [33] et à celui de A. V. Balakrishnan [4]. Le livre de H. Tanabe [44] fournit une présentation agréable des puissances fractionnaires réelles d'un opérateur sectoriel densément défini..

On considère ici $\mathcal{A} \in Sect(\omega)$ où $\omega \in]0, \pi[$.

On se donne $\alpha \in \mathbb{C}$, il s'agit alors sous certaines conditions, d'activer la formule

$$\mathcal{A}^\alpha = (z^\alpha)(\mathcal{A}). \tag{1.12}$$

Ici z^α désigne la détermination principale de la fonction "puissance α" caractérisée par

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln r \ + i\theta)} \text{ si } z = re^{i\theta}, \ r > 0, \ \theta \in]-\pi, \pi[.$$

Puissances fractionnaires avec partie réelle positive

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha) > 0$, alors, quitte à fixer

$$\varphi \in]\omega, \pi[\text{ et } n \in \mathbb{N}, \, n > Re(\alpha),$$

on obtient

$$\frac{z^\alpha}{(1+z)^n} \in \mathcal{DR}(S_\varphi) \text{ et donc } z^\alpha \in \mathcal{P}(S_\varphi),$$

ce qui permet de définir $\mathcal{A}^\alpha$ par la formule (1.12).

Proposition 1.46.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *avec* $Re(\beta)$, $Re(\alpha) > 0$, *on a*

1. $\mathcal{A}^\alpha$ *est un opérateur fermé de* E.

2. $\mathcal{A}^{\alpha+\beta} = \mathcal{A}^\alpha\mathcal{A}^\beta = \mathcal{A}^\beta\mathcal{A}^\alpha$.
3. $Re(\beta) > Re(\alpha) \Longrightarrow D(\mathcal{A}^\beta) \subset D(\mathcal{A}^\alpha)$ *et en particulier*
$$Re(\alpha) < 1 \Longrightarrow D(\mathcal{A}) \subset D(\mathcal{A}^\alpha).$$
4. *Si* $\mathcal{A}$ *est injectif alors* $\mathcal{A}^\alpha$ *est injectif et*
$$\left(\mathcal{A}^{-1}\right)^\alpha = (\mathcal{A}^\alpha)^{-1}.$$
5. *Si* $0 \in \rho(\mathcal{A})$ *alors* $0 \in \rho(\mathcal{A}^\alpha)$.
6. *Si* $\theta \in \mathbb{R}$ *avec* $0 < \theta < \dfrac{\pi}{\omega}$ *alors*
$$\left(\mathcal{A}^\theta\right)^\alpha = \mathcal{A}^{\theta\alpha}.$$
7. $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E) \Longrightarrow \mathcal{A}^\alpha \in \mathcal{L}(E)$.

Puissances fractionnaires avec partie réelle quelconque

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

Pour $\varphi \in]\omega, \pi[$, la fonction z^α est dans $\mathcal{B}(S_\varphi)$, et si $\mathcal{A}$ est injectif, la formule (1.12) permet encore de définir $\mathcal{A}^\alpha$.

Proposition 1.47.
On considère $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *et on suppose que* $\mathcal{A}$ *est injectif. Alors*

1. $\mathcal{A}^\alpha$ *est un opérateur fermé de* E.
2. $\mathcal{A}^\alpha$ *est injectif et* $(\mathcal{A}^\alpha)^{-1} = \mathcal{A}^{-\alpha} = (\mathcal{A}^{-1})^\alpha$.
3. $\mathcal{A}^{\alpha+\beta} \subset \mathcal{A}^\alpha\mathcal{A}^\beta$.
4. *Si* $\theta \in \mathbb{R}$ *avec* $|\theta| < \dfrac{\pi}{\omega}$ *alors*
$$\left(\mathcal{A}^\theta\right)^\alpha = \mathcal{A}^{\theta\alpha}.$$

Considérons maintenant le cas particulier où $\mathcal{A}$ admet un inverse borné.

Définition 1.48.
Si $0 \in \rho(\mathcal{A})$ *et* $\alpha \in \mathbb{C}$ *avec* $Re(\alpha) > 0$, *alors*

1. $\mathcal{A}^{-\alpha} = (\mathcal{A}^{-1})^\alpha \in \mathcal{L}(E)$.
2. $\mathcal{A}^{-\alpha-\beta} = \mathcal{A}^{-\alpha}\mathcal{A}^{-\beta} = \mathcal{A}^{-\beta}\mathcal{A}^{-\alpha}$.

1.5 Espaces UMD

La définition originale d'un espace UMD (Unconditional Martingale Differences) fait intervenir la théorie des martingales à valeurs vectorielles. Nous donnons ici une définition équivalente, plus adaptée à notre travail et qui utilise la transformation de Hilbert (pour l'équivalence entre les deux notions on pourra consulter J. Bourgain [7] et D. L. Burkholder [9]).

Définition 1.49. *Pour $\varepsilon \in]0,1[$ et $p \in]1,+\infty[$, on définit l'opérateur*

$$H_\varepsilon \in \mathcal{L}\left(L^p\left(\mathbb{R},E\right)\right),$$

par

$$\forall f \in L^p\left(\mathbb{R},E\right), \quad \left(H_\varepsilon f\right)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|s|<1/\varepsilon} \frac{f(x-s)}{s}ds, \ \text{p. p. } x \in \mathbb{R},$$

et si pour un élément $f \in L^p(\mathbb{R},E)$ donné

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} H_\varepsilon f \ \text{existe dans } L^p\left(\mathbb{R},E\right),$$

cette limite est notée Hf et est appelée la transformée de Hilbert de f sur $L^p\left(\mathbb{R},E\right)$.

Définition 1.50.
E est appelé espace UMD s'il existe $p \in]1,+\infty[$ tel que

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R},E), \quad \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} H_\varepsilon f \ \text{existe dans } L^p\left(\mathbb{R},E\right). \tag{1.13}$$

Dans ces conditions, l'application linéaire

$$\begin{array}{rlcl} H: & L^p(\mathbb{R},E) & \longrightarrow & L^p(\mathbb{R},E) \\ & f & \longmapsto & Hf = \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} H_\varepsilon f \end{array},$$

est continue, d'après le théorème de Banach Steinhaus. Cet élément de $\mathcal{L}\left(L^p\left(\mathbb{R},E\right)\right)$ est appelé la transformée de Hilbert sur $L^p\left(\mathbb{R},E\right)$.

Notons que si E est un espace UMD alors (1.13) est vraie pour tout $p \in]1,+\infty[$.
Il est bon d'avoir aussi une caractérisation géométrique des espaces UMD, à cette fin on introduit la notion de ζ-convexité. .

Définition 1.51.
E est dit ζ-convexe si et seulement si il existe une fonction

$$\zeta : E \times E \longrightarrow \mathbb{R},$$

vérifiant $\zeta(0,0) > 0$ et telle que pour tout x, y de E, on a

1. *$\zeta(x,.)$ et $\zeta(.,y)$ sont convexes sur E.*
2. *$\zeta(x,y) \leqslant \|x+y\|$ si $\|x\| = \|y\| = 1$.*

Le résultat fondamental de D.L. Burkholder (voir [8] et [10]) est le suivant :

Théorème 1.52.
E est un espace UMD si et seulement si E est ζ-convexe.

Il est possible de donner de nombreux exemples d'espaces de Banach classiques qui ont la propriété UMD, ainsi :

1. Tout espace de Hilbert est un espace UMD.
2. Tout sous espace fermé d'un espace UMD est UMD.

3. Tout espace isomorphe à un espace UMD est UMD.
4. Si E est un espace UMD alors $L^p(\Omega, E)$ l'est aussi dès que $p \in]1, +\infty[$ et que Ω est un espace mesuré σ-fini.

Définition 1.53. *Un opérateur linéaire fermé $\mathcal{A}$ densément défini sur E appartient à la classe BIP (α, E), avec $\alpha \in [0, \pi[$ si*

$$\left\{ \begin{array}{l}]-\infty, 0[\subset \rho(\mathcal{A}), \ \ker(\mathcal{A}) = \{0\}, \overline{Im(\mathcal{A})} = E \\ et\ \exists c \geqslant 1 : \forall \lambda > 0, \left\| (\mathcal{A} + \lambda I)^{-1} \right\| \leqslant c/\lambda, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall s \in \mathbb{R}, \mathcal{A}^{is} \in \mathcal{L}(E)\ et \\ \exists c \geqslant 1 : \forall s \in \mathbb{R}, \|\mathcal{A}^{is}\| \leqslant c e^{\alpha|s|}. \end{array} \right.$$

Cette définition valable pour tout espace de Banach E sera en fait utilisée quand E est UMD.

1.5.1 Théorème de Dore-Venni

Position du problème

Il s'agit de résoudre l'équation

$$\mathcal{A}u + \mathcal{B}u = f,$$

où $f \in E$ et $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sont deux opérateurs linéaires fermés dans E.

On suppose entre autre que E est un espace UMD. Le Théorème de Dore-Venni (voir [18] et [19]) montre que, sous de bonnes hypothèses sur les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ est fermé, à inverse borné.

Les hypothèses sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$

On suppose que

$$(DV_1) \left\{ \begin{array}{l} \rho(\mathcal{A}) \supset\ ]-\infty, 0] \text{ et } \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \|\lambda(\mathcal{A} + \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty \\ \rho(\mathcal{B}) \supset\ ]-\infty, 0] \text{ et } \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \|\lambda(\mathcal{B} + \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty \\ \overline{D(\mathcal{A})} = \overline{D(\mathcal{B})} = E, \end{array} \right.$$

$$(DV_2) \left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda \in \rho(-\mathcal{A}), \forall \mu \in \rho(-\mathcal{B}) \\ (\mathcal{A} + \lambda I)^{-1}(\mathcal{B} + \mu)^{-1} = (\mathcal{B} + \mu)^{-1}(\mathcal{A} + \mu)^{-1}, \end{array} \right.$$

$$(DV_3) \left\{ \begin{array}{l} \exists \theta_{\mathcal{A}}, \theta_{\mathcal{B}} \in [0, \pi[: \\ 1)\ \theta_{\mathcal{A}} + \theta_{\mathcal{B}} < \pi \\ 2)\ \forall s \in \mathbb{R},\ \mathcal{A}^{is} \in \mathcal{L}(E) \text{ et } \sup\limits_{s \in \mathbb{R}} e^{-|s|\theta_{\mathcal{A}}} \|\mathcal{A}^{is}\|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty \\ 3)\ \forall s \in \mathbb{R},\ \mathcal{B}^{is} \in \mathcal{L}(E) \text{ et } \sup\limits_{s \in \mathbb{R}} e^{-|s|\theta_{\mathcal{B}}} \|\mathcal{B}^{is}\|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty. \end{array} \right.$$

Notons qu'alors $\mathcal{A} \in BIP(\theta_{\mathcal{A}}, E)$ et $\mathcal{B} \in BIP(\theta_{\mathcal{B}}, E)$.

Le théorème

G. Dore et A. Venni ont obtenu dans [18] le résultat remarquable suivant :

Théorème 1.54. *Si E est un espace UMD et sous les hypothèses (DV_1), (DV_2) et (DV_3), l'opérateur*

$$L = \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

est fermé et

$$0 \in \rho(L).$$

De plus, l'inverse de L est défini explicitement par l'intégrale

$$L^{-1} = \int_{\Gamma} \frac{\mathcal{A}^{-z}\mathcal{B}^{z-1}}{\sin \pi z} dz,$$

où Γ est une courbe verticale contenue dans la bande $\{z \in \mathbb{C} : 0 < Re(z) < 1\}$ orientée de $-\infty\, i$ à $\infty\, i$.

Application

Considérant le problème suivant

$$\begin{cases} u'(t) - \mathcal{A}u(t) = f(t), & t \in (0,T) \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

où $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire fermé sur E, $T > 0$ et $f \in L^p(0,T;E)$.

Si $p \in]1, +\infty[$, en général, il n'est pas possible d'obtenir une solution

$$u \in W^{1,p}(0,T,E) \cap L^p(0,T,D(\mathcal{A})),$$

du Problème (1.14) sous l'hypothèse minimale

$$f \in L^p(0,T,E).$$

En fait, habituellement, un peu plus de régularité sur f est demandée.

Ici, grâce à la propriété géométrique UMD, G. Dore et A. Venni ont obtenu comme application de leur Théorème le résultat suivant :

Théorème 1.55.

Si E est un espace UMD et si $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire fermé densément défini sur E tel que

$$\begin{cases} 1)\ \rho(\mathcal{A}) \supset]-\infty, 0] \ \ et \ \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \|\lambda(\mathcal{A}+\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty \\ \\ 2)\ \exists C \geqslant 1, \exists \theta \in [0, \pi/2[: \forall s \in \mathbb{R}, \ \ \|\mathcal{A}^{is}\| \leqslant Ce^{\theta|s|}. \end{cases}$$

alors, pour tout $f \in L^p(0,T;E)$, le Problème (1.14) admet une unique solution

$$u \in W^{1,p}(0,T;E) \cap L^p(0,T;D(\mathcal{A})).$$

On peut encore citer le travail de G. Dore [17], Théorème 2.4 page 28 :

Théorème 1.56.

Soit $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu vérifiant

$$\exists \delta > 0, \quad \exists M \geqslant 1 : \forall y \geqslant 0, \quad \|e^{y\mathcal{A}}\| \leqslant M e^{-\delta y}.$$

Si le problème de Cauchy (1.14) admet pour un T donné une unique solution stricte sur $(0,T)$, alors le problème de Cauchy (1.14) admet sur $(0,\infty)$ une unique solution u.

Cette solution est donnée par

$$u \ : \ t \longmapsto \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}} f(s) ds.$$

Chapitre 2

Sur une classe d'équations elliptiques avec des conditions aux limites non locales dans l'espace UMD

Dans ce chapitre on étudie, dans un espace de Banach E, une classe d'équations différentielles abstraites de la forme

$$u''(x) + 2\mathcal{B}u'(x) + \mathcal{A}u(x) = f(x), \quad avec \quad x \in (0,1), \tag{2.1}$$

où f appartient à $L^p(0,1;E)$, $1 < p < \infty$. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux opérateurs linéaires fermés dans E. On n'exige pas de régularité supplémentaire sur f et pour cela on suppose dans tout ce travail que

$$E \text{ est un espace UMD.} \tag{2.2}$$

On va traiter l'équation (2.1) avec les conditions aux limites suivantes

$$u(1) = d_1, \tag{2.3}$$

$$u'(1) - \mathcal{H}u(0) = d_0. \tag{2.4}$$

L'originalité et la dificulté de l'étude tient notamment à la condition (2.4), qui est une condition aux limites non locale contenant de plus un opérateur linéaire non borné $\mathcal{H}$. De plus, d_0 et d_1 sont deux éléments de E.

2.1 Commutativité des opérateurs

La résolution de l'équation (2.1) avec les conditions aux limites (2.3)-(2.4) se fera en supposant que les opérateurs, intervenant dans l'équation et les conditions aux limites, commutent entre eux, en un certain sens à préciser. L'objet de ce paragraphe est d'étudier, les propriétés générales concernant la commutation de deux opérateurs linéaires P et Q. Soient P et Q deux opérateurs linéaires fermés sur E.

2.1.1 Commutativité au sens des résolvantes avec $\rho(P) \neq \varnothing$ et $\rho(Q) \neq \varnothing$

Définition 2.1. *Supposons que $\rho(P) \neq \varnothing$ et $\rho(Q) \neq \varnothing$. On dit que P et Q commutent (au sens des résolvantes) ssi*

$$\forall\lambda \in \rho(P), \forall\mu \in \rho(Q), \quad (P - \lambda I)^{-1} (Q - \mu I)^{-1} = (Q - \mu I)^{-1} (P - \lambda I)^{-1}.$$

Lemme 2.2. *Soient $\lambda \in \rho(P)$ et $\mu \in \rho(Q)$ (ce qui suppose $\rho(P) \neq \varnothing$ et $\rho(Q) \neq \varnothing$).*
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $(P - \lambda I)^{-1} (Q - \mu I)^{-1} = (Q - \mu I)^{-1} (P - \lambda I)^{-1}$.
2. $\forall y \in D(Q)$
$$(P - \lambda I)^{-1} y \in D(Q) \text{ et } (P - \lambda I)^{-1} (Q - \mu I) y = (Q - \mu I) (P - \lambda I)^{-1} y.$$
3. $\forall y \in D(Q)$
$$(P - \lambda I)^{-1} y \in D(Q) \text{ et } (P - \lambda I)^{-1} Qy = Q (P - \lambda I)^{-1} y.$$
4. $\forall y \in D(P)$
$$(Q - \mu I)^{-1} y \in D(P) \text{ et } (Q - \mu I)^{-1} (P - \lambda I) y = (P - \lambda I) (Q - \mu I)^{-1} y.$$
5. $\forall y \in D(P)$
$$(Q - \mu I)^{-1} y \in D(P) \text{ et } (Q - \mu I)^{-1} Py = P (Q - \mu I)^{-1} y.$$

Démonstration.

- Montrons que 1. $\Longrightarrow$ 2.
Soit $y \in D(Q)$. Pour $z = (Q - \mu I) y$ on a
$$(P - \lambda I)^{-1} (Q - \mu I)^{-1} z = (Q - \mu I)^{-1} (P - \lambda I)^{-1} z,$$
c'est-à-dire
$$(P - \lambda I)^{-1} y = (Q - \mu I)^{-1} (P - \lambda I)^{-1} (Q - \mu I) y, \tag{2.5}$$
donc $(P - \lambda I)^{-1} y \in D(Q)$ et en appliquant $Q - \mu I$ à (2.5)
$$(Q - \mu I) (P - \lambda I)^{-1} y = (P - \lambda I)^{-1} (Q - \mu I) y.$$
- Montrons que 2. $\Longrightarrow$ 1.
Pour $z \in E$ on a $(Q - \mu I)^{-1} z \in D(Q)$ donc
$$\begin{cases} (P - \lambda I)^{-1} (Q - \mu I)^{-1} z \in D(Q) \text{ et} \\ (P - \lambda I)^{-1} (Q - \mu I) (Q - \mu I)^{-1} z = (Q - \mu I) (P - \lambda I)^{-1} (Q - \mu I)^{-1} z, \end{cases}$$
ce qui donne
$$(P - \lambda I)^{-1} z = (Q - \mu I) (P - \lambda I)^{-1} (Q - \mu I)^{-1} z,$$
puis
$$(Q - \mu I)^{-1} (P - \lambda I)^{-1} z = (P - \lambda I)^{-1} (Q - \mu I)^{-1} z.$$

– 2. $\Longleftrightarrow$ 3. car

$$\begin{cases} (P-\lambda I)^{-1} Q = (P-\lambda I)^{-1} (Q-\mu I) + \mu (P-\lambda I)^{-1} \text{ et} \\ Q (P-\lambda I)^{-1} = (Q-\mu I) (P-\lambda I)^{-1} + \mu (P-\lambda I)^{-1} \end{cases}$$

– Conclusion : les propriétés $1., 2., 3.$ sont équivalentes.
– De même, par échange des rôles de P et Q, propriétés $1., 4., 5.$ sont équivalentes.

$\square$

Lemme 2.3. *Soient $\lambda, \lambda' \in \rho(P)$ et $\mu, \mu' \in \rho(Q)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $(P-\lambda I)^{-1} (Q-\mu I)^{-1} = (Q-\mu I)^{-1} (P-\lambda I)^{-1}$.
2. $(P-\lambda' I)^{-1} (Q-\mu' I)^{-1} = (Q-\mu' I)^{-1} (P-\lambda' I)^{-1}$.

Démonstration. Vu le Lemme précédent, les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $(P-\lambda I)^{-1} (Q-\mu I)^{-1} = (Q-\mu I)^{-1} (P-\lambda I)^{-1}$.

1a. $\forall\, y \in D(Q)$

$$(P-\lambda I)^{-1} y \in D(Q) \text{ et } (P-\lambda I)^{-1} Qy = Q (P-\lambda I)^{-1} y.$$

1b. $\forall y \in D(Q)$

$$(P-\lambda I)^{-1} y \in D(Q) \text{ et } (P-\lambda I)^{-1} (Q-\mu' I) y = (Q-\mu' I) (P-\lambda I)^{-1} y.$$

1.c $(P-\lambda I)^{-1} (Q-\mu' I)^{-1} = (Q-\mu' I)^{-1} (P-\lambda I)^{-1}$.

1.d $\forall y \in D(P)$

$$(Q-\mu' I)^{-1} y \in D(P) \text{ et } (Q-\mu' I)^{-1} Py = P (Q-\mu' I)^{-1} y.$$

1.e $\forall y \in D(P)$:

$$(Q-\mu' I)^{-1} y \in D(P) \text{ et } (Q-\mu' I)^{-1} (P-\lambda' I) y = (P-\lambda' I) (Q-\mu' I)^{-1} y.$$

2. $(P-\lambda' I)^{-1} (Q-\mu' I)^{-1} = (Q-\mu' I)^{-1} (P-\lambda' I)^{-1}$. $\square$

Proposition 2.4. *Soient λ_0 fixé dans $\rho(P)$ et μ_0 fixé dans $\rho(Q)$ (ce qui suppose $\rho(P) \neq \varnothing$ et $\rho(Q) \neq \varnothing$). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $(P-\lambda_0 I)^{-1} (Q-\mu_0 I)^{-1} = (Q-\mu_0 I)^{-1} (P-\lambda_0 I)^{-1}$.
2. $\forall y \in D(Q)$

$$(P-\lambda_0 I)^{-1} y \in D(Q) \textit{ et } (P-\lambda_0 I)^{-1} Qy = Q (P-\lambda_0 I)^{-1} y.$$

3. $\forall y \in D(P)$

$$(Q-\mu_0 I)^{-1} y \in D(P) \textit{ et } (Q-\mu_0 I)^{-1} Py = P (Q-\mu_0 I)^{-1} y.$$

4. $\forall \lambda \in \rho(P), \forall \mu \in \rho(Q)$

$$(P-\lambda I)^{-1} (Q-\mu I)^{-1} = (Q-\mu I)^{-1} (P-\lambda I)^{-1}.$$

5. $\forall \lambda \in \rho(P), \forall y \in D(Q)$

$$(P-\lambda I)^{-1}y \in D(Q) \text{ et } (P-\lambda I)^{-1}Qy = Q(P-\lambda I)^{-1}y.$$

6. $\forall \mu \in \rho(Q), \forall y \in D(P)$

$$(Q-\mu I)^{-1}y \in D(P) \text{ et } (Q-\mu I)^{-1}Py = P(Q-\mu I)^{-1}y.$$

Démonstration.
- Vu le Lemme 2.2, les propriétés 1., 2., 3. sont équivalentes et les propriétés 4., 5., 6. sont équivalentes.
- Vu que $\rho(P) \neq \varnothing$ et $\rho(Q) \neq \varnothing$, on a, d'après le Lemme 2.3 : 1. $\Longleftrightarrow$ 4.

□

2.1.2 Commutativité pour deux opérateurs avec $\rho(P)$ ou $\rho(Q) \neq \varnothing$

Définition 2.5. *Supposons que $\rho(P) \neq \varnothing$. On dit que P commute avec Q (au sens des résolvantes) ssi*

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \rho(P), \forall y \in D(Q), \\ (P-\lambda I)^{-1}y \in D(Q) \text{ et } (P-\lambda I)^{-1}Qy = Q(P-\lambda I)^{-1}y. \end{cases}$$

Proposition 2.6. *Soit λ_0 fixé dans $\rho(P)$ (donc $\rho(P) \neq \varnothing$). On suppose que $D(P) \subset D(Q)$.*
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\forall y \in D(Q)$

$$(P-\lambda_0 I)^{-1}y \in D(Q) \text{ et } (P-\lambda_0 I)^{-1}Qy = Q(P-\lambda_0 I)^{-1}y.$$

2. $D(QP) \subset D(PQ)$ *et* $\forall y \in D(QP), \quad QPy = PQy.$
3. $\forall \lambda \in \rho(P), \forall y \in D(Q),$

$$(P-\lambda I)^{-1}y \in D(Q) \text{ et } (P-\lambda I)^{-1}Qy = Q(P-\lambda I)^{-1}y.$$

Démonstration. Supposons que 1. soit vrai. Soit $y \in D(QP)$, alors $y \in D(P) \subset D(Q)$, donc

$$\begin{aligned} & Qy \\ = \; & Q(P-\lambda_0 I)^{-1}(P-\lambda_0 I)y \\ = \; & (P-\lambda_0 I)^{-1}Q(P-\lambda_0 I)y \text{ (justifié car } (P-\lambda_0 I)y = Py - \lambda_0 y \in D(Q)), \end{aligned}$$

donc $Qy \in D(P)$, i.e. $y \in D(PQ)$, de plus

$$(P-\lambda_0 I)Qy = Q(P-\lambda_0 I)y,$$

soit $PQy = QPy$. D'où 2. est vrai.

Supposons que 2. soit vrai. Soit $\lambda \in \rho(P)$ et $y \in D(Q)$ alors

$$z := (P-\lambda I)^{-1}y \in D(P) \subset D(Q)$$

et
$$Pz = (P-\lambda I)\, z + \lambda z = \underbrace{y}_{\in D(Q)} + \lambda \underbrace{z}_{\in D(P)\subset D(Q)} \in D(Q).$$
d'où $z \in D(QP)$. Donc par hypothèse : $QPz = PQz$ soit
$$\begin{aligned}
&Q\,(P-\lambda I)\, z = (P-\lambda I)\, Qz\\
&Q\,(P-\lambda I)\,(P-\lambda I)^{-1}\, y = (P-\lambda I)\, Q\,(P-\lambda I)^{-1}\, y\\
&Qy = (P-\lambda I)\, Q\,(P-\lambda I)^{-1}\, y,
\end{aligned}$$
et donc $(P-\lambda I)^{-1}\, Qy = Q\,(P-\lambda I)^{-1}\, y$. D'où 2. est vrai.

Enfin, il est évident que : 3. $\Longrightarrow$ 1. $\square$

Remarque 2.7. *Supposons que $\rho(P) \neq \varnothing$ et qu'il existe $\lambda_0 \in \rho(P)$ tel que*
$$\forall y \in D(Q), \quad (P-\lambda_0 I)^{-1}\, y \in D(Q) \text{ et } (P-\lambda_0 I)^{-1}\, Qy = Q\,(P-\lambda_0 I)^{-1}\, y.$$
Alors
$$D(QP) \cap D(Q) \subset D(PQ) \text{ et } \forall y \in D(QP)\cap D(Q), \quad QPy = PQy.$$
Démonstration. Soit $y \in D(QP)\cap D(Q)$, alors
$$\begin{aligned}
&Qy\\
=\;&Q\,(P-\lambda_0 I)^{-1}\,(P-\lambda_0 I)\, y\\
=\;&(P-\lambda_0 I)^{-1}\, Q\,(P-\lambda_0 I)\, y \text{ (justifié car } (P-\lambda_0 I)\, y = Py - \lambda_0 y \in D(Q)),
\end{aligned}$$
donc $Qy \in D(P)$, i.e. $y \in D(PQ)$, de plus
$$(P-\lambda_0 I)\, Qy = Q\,(P-\lambda_0 I)\, y,$$
d'où $PQy = QPy$. $\square$

2.1.3 Lien entre $(P-\lambda I)^{-1}(Q-\mu I)^{-1} = (Q-\mu I)^{-1}(P-\lambda I)^{-1}$ et $PQ = QP$

Remarque 2.8. *$PQ = QP$ signifie que*
$$D(PQ) = D(QP) \text{ et } PQx = QPx \text{ pour tout } x \in D(PQ) = D(QP)$$
Remarque 2.9. *Si $D(PQ) = D(QP)$ a-t-on pour $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$*
$$D((P-\lambda I)\, Q) = D(Q\,(P-\lambda I)) \text{ ?}$$
Notons d'abord que $D((P-\lambda I)\, Q) = D\,(PQ)$.

Mais pour avoir $D(Q\,(P-\lambda I)) = D\,(QP)$ il faudrait que pour $x \in D(Q\,(P-\lambda I))$, c'est-à-dire
$$x \in D\,(P) \text{ et } (P-\lambda I)\, x \in D\,(Q),$$
on ait aussi
$$x \in D\,(P) \text{ et } Px \in D\,(Q),$$
donc au final $x \in D\,(P) \cap D\,(Q)$!

Cas général $\rho(P) \neq \varnothing$**,** $\rho(Q) \neq \varnothing$

En utilisant les Propositions 2.4 et 2.6, on obtient :

Proposition 2.10. *Supposons que $\rho(P) \neq \varnothing$, $\rho(Q) \neq \varnothing$ et que $D(P) \subset D(Q)$.*
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\forall \lambda \in \rho(P), \forall \mu \in \rho(Q)$

$$(P - \lambda I)^{-1} (Q - \mu I)^{-1} = (Q - \mu I)^{-1} (P - \lambda I)^{-1}.$$

2. $\forall \lambda \in \rho(P), \forall y \in D(Q)$

$$(P - \lambda I)^{-1} y \in D(Q) \text{ et } (P - \lambda I)^{-1} Qy = Q (P - \lambda I)^{-1} y.$$

3. $D(QP) \subset D(PQ)$ *et* $\forall y \in D(QP), \quad QPy = PQy.$

Proposition 2.11. *Supposons que $\rho(P) \neq \varnothing$, $\rho(Q) \neq \varnothing$ et que $D(P) = D(Q)$.*
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\forall \lambda \in \rho(P), \forall \mu \in \rho(Q)$

$$(P - \lambda I)^{-1} (Q - \mu I)^{-1} = (Q - \mu I)^{-1} (P - \lambda I)^{-1}.$$

2. $\forall \lambda \in \rho(P), \forall y \in D(Q),$

$$(P - \lambda I)^{-1} y \in D(Q) \text{ et } (P - \lambda I)^{-1} Qy = Q (P - \lambda I)^{-1} y.$$

3. $PQ = QP.$

Démonstration. Montrons que 1. $\Longrightarrow$ 3.
Si 1. est vrai alors, d'après la proposition précédente

$$D(QP) \subset D(PQ) \text{ et } \forall y \in D(QP), \quad QPy = PQy,$$

mais on a aussi, par échange des rôles de P et Q

$$D(PQ) \subset D(QP) \text{ et } \forall y \in D(QP), \quad QPy = PQy,$$

c'est-à-dire $QPy = PQy$ sur $D(PQ) = D(QP)$, soit $PQ = QP$.
Le reste découle de la proposition précédente. □

Proposition 2.12. *Supposons que $\rho(P) \neq \varnothing$, et $Q \in \mathcal{L}(E)$.*
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\forall \lambda \in \rho(P), \forall \mu \in \rho(Q)$

$$(P - \lambda I)^{-1} (Q - \mu I)^{-1} = (Q - \mu I)^{-1} (P - \lambda I)^{-1}.$$

2. $\forall \lambda \in \rho(P), \forall y \in E$

$$(P - \lambda I)^{-1} Qy = Q (P - \lambda I)^{-1} y.$$

3. $D(P) \subset D(PQ)$ *et* $\forall y \in D(P), \quad QPy = PQy.$

$Q \in \mathcal{L}(E)$ donc $\rho(Q) \neq \varnothing$. De plus $D(P) \subset D(Q) = E$.
Donc on peut appliquer Proposition 2.10 en notant que $D(QP) = D(P)$. □

Cas particuliers Q et (ou) P inversibles

De la Proposition 2.12 on déduit :

Proposition 2.13. *Supposons que $\rho(P) \neq \varnothing$, et $Q \in \mathcal{L}(E)$ avec $0 \in \rho(Q)$.*

1. $\forall \lambda \in \rho(P), \forall \mu \in \rho(Q) : (P-\lambda I)^{-1}(Q-\mu I)^{-1} = (Q-\mu I)^{-1}(P-\lambda I)^{-1}$.
 équivaut à
2. $D(PQ) = D(QP) = D(P)$ et $PQ = QP$.

Démonstration. (Rappellons que $PQ = QP$ signifie :
$D(PQ) = D(QP)$ et $PQx = QPx$ pour tout $x \in D(PQ) = D(QP)$). On fixe pour la suite un λ_0 dans $\rho(P)$

1. $\Longrightarrow$ 2. – On a $D(PQ) \subset D(P)$ car

$$\begin{aligned} x \in D(PQ) &\Longrightarrow Qx = (P-\lambda_0 I)^{-1}(P-\lambda_0 I)Qx \quad (\text{car } Qx \in D(P)) \\ &\Longrightarrow x = Q^{-1}(P-\lambda_0 I)^{-1}(P-\lambda_0 I)Qx \\ &\Longrightarrow x = (P-\lambda_0 I)^{-1}Q^{-1}(P-\lambda_0 I)Qx \\ &\Longrightarrow x \in D(P), \end{aligned}$$

Réciproquement $D(P) \subset D(PQ)$ (voir 1.$\Longrightarrow$3. de la Proposition 2.12). Vu que $D(Q) = E$ on a $D(QP) = D(P)$.
Finalement : $D(PQ) = D(QP) = D(P)$.

– On applique à nouveau 1.$\Longrightarrow$3. de la Proposition 2.12 pour obtenir

$$\forall y \in D(P) = D(PQ) = D(QP), \quad QPy = PQy,$$

c'est-à-dire $PQ = QP$.

2. $\Longrightarrow$ 1. Si $\underline{t \in E}$ alors

$$t = Q(P-\lambda_0 I)(P-\lambda_0 I)^{-1}Q^{-1}t$$

or

$$(P-\lambda_0 I)^{-1}Q^{-1}t \in D(P) = D(PQ) = D(QP)$$

donc

$$\begin{aligned} t &= Q(P-\lambda_0 I)\left[(P-\lambda_0 I)^{-1}Q^{-1}t\right] \\ &= QP\left[(P-\lambda_0 I)^{-1}Q^{-1}t\right] - \lambda_0 Q\left[(P-\lambda_0 I)^{-1}Q^{-1}t\right] \\ &= QP\left[(P-\lambda_0 I)^{-1}Q^{-1}t\right] - \lambda_0 Q\left[(P-\lambda_0 I)^{-1}Q^{-1}t\right] \\ &= PQ\left[(P-\lambda_0 I)^{-1}Q^{-1}t\right] - \lambda_0 Q\left[(P-\lambda_0 I)^{-1}Q^{-1}t\right] \\ &= (P-\lambda_0 I)Q\left[(P-\lambda_0 I)^{-1}Q^{-1}t\right], \end{aligned}$$

soit $\underline{Q^{-1}(P-\lambda_0 I)^{-1}t = (P-\lambda_0 I)^{-1}Q^{-1}t}$
Conclusion : $Q^{-1}(P-\lambda_0 I)^{-1} = (P-\lambda_0 I)^{-1}Q^{-1}$ d'où 1.(il suffit d'appliquer l'équivalence des points 1. et 4. de la Proposition 2.4).

□

Proposition 2.14. *Supposons que $0 \in \rho(P) \cap \rho(Q)$.*
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $P^{-1}Q^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$
2. $D(PQ) = D(QP)$ *et* $PQx = QPx$ *pour tout* $x \in D(PQ) = D(QP))$ (*c'est-à-dire* $PQ = QP$).

Démonstration. **1. $\Longrightarrow$ 2.** – $\underline{D(PQ) \subset D(QP)}$. En effet, si $x \in D(PQ)$ alors

$$\begin{aligned} x &= Q^{-1}Qx \quad (\text{car } x \in D\,(Q)\,) \\ &= Q^{-1}P^{-1}PQx \quad (\text{car } Qx \in D\,(P)\,) \\ &= P^{-1}Q^{-1}PQx \end{aligned} \tag{2.6}$$

c'est-à-dire $x \in D\,(P)$ et $Px = Q^{-1}PQx \in D\,(Q)$ d'où : $x \in D(QP)$
– De même, par échange des rôles de P et Q on a $\underline{D(QP) \subset D(PQ)}$.
– Enfin si $\underline{x \in D(PQ) = D(QP))}$ alors, vu (2.6) on a

$$x = P^{-1}Q^{-1}PQx$$

soit $\underline{QPx = PQx}$.

2. $\Longrightarrow$ 1. Si $\underline{t \in E}$ alors $t = QPP^{-1}Q^{-1}t$, or $P^{-1}Q^{-1}t \in D(PQ) = D(QP)$d'où

$$t = QP\left[P^{-1}Q^{-1}t\right] = PQ\left[P^{-1}Q^{-1}t\right],$$

soit $\underline{Q^{-1}P^{-1}t = P^{-1}Q^{-1}t}$.

□

2.2 Cas $\mathcal{B} = 0$

2.2.1 Position du problème et hypothèses

Dans cette section notre problème s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} u''(x) + \mathcal{A}u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(1) = d_1, \\ u'(1) - \mathcal{H}u(0) = d_0, \end{cases} \tag{2.7}$$

Les hypothèses principales sur les opérateurs sont les suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{A} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } E, \\ [0, +\infty[\subset \rho(\mathcal{A}) \text{ et } \sup\limits_{\lambda \geq 0} \| \lambda(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, (-\mathcal{A})^{is} \in \mathcal{L}(E) \text{ et } \exists \theta_{\mathcal{A}} \in]0, \pi[; \\ \text{tel que } \sup\limits_{s \in \mathbb{R}} \|e^{-\theta_{\mathcal{A}}|s|}(-\mathcal{A})^{is} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty. \end{cases} \tag{2.9}$$

$\mathcal{H}$ doit satisfaire

$$0 \in \rho(\mathcal{H}), \tag{2.10}$$

et la condition de commutativité suivante

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{A}^{-1}. \tag{2.11}$$

Notons $\mathcal{Q} = -(-\mathcal{A})^{\frac{1}{2}}$. De plus, on définit Λ par

$$\begin{cases} D(\Lambda) = D(\mathcal{H}) \\ \Lambda = 2\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}} - \mathcal{H}(I - e^{2\mathcal{Q}}). \end{cases}$$

On suppose que

$$\Lambda \quad \text{est d'inverse borné.} \tag{2.12}$$

Remarque 2.15.

- *Il est bien connu que l'hypothèse (2.8) implique que $-(-\mathcal{A})^{\frac{1}{2}}$ génère un semi-groupe analytique borné sur E (voir [4]).*
- *Pour tout $\beta \in \mathbb{C}$, on a $((-\mathcal{A})^{\frac{1}{2}})^{\beta} = (-\mathcal{A})^{\frac{\beta}{2}}$. D'après l'hypothèse* (2.9),

$$-\mathcal{Q} = (-\mathcal{A})^{\frac{1}{2}} \in BIP(\theta_{\mathcal{A}}, E)$$

et en particulier

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \|e^{-\theta_{\frac{\mathcal{A}}{2}}|s|}(-(-\mathcal{A})^{\frac{1}{2}})^{is}\|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty$$

(voir [28]).

- *L'hypothèse d'inversibilité* (2.12) *est, en général, difficile à vérifier dans les applications, excepté pour certains $\mathcal{H}$ particuliers.*

2.2.2 Représentation de la solution

Afin de résoudre le problème (2.7), nous utilisons la méthode de la réduction d'ordre de Krein (voir [34]). Sous les hypothèses (2.8)$\sim$(2.12), on suppose que le problème (2.7) a une solution stricte u ; c'est-à-dire, $u \in W^{2,p}(0,1;E) \cap L^p(0,1;D(\mathcal{A}))$, $u(0) \in D(\mathcal{H})$ et (2.7) est satisfait. Pour presque tout $x \in (0,1)$, on a

$$v(x) = -\mathcal{Q}^{-1}u'(x), \quad y(x) = (u(x) - v(x))/2, \quad z(x) = (u(x) + v(x))/2,$$

alors

$$y'(x) = (u'(x) - v'(x))/2 = (-\mathcal{Q}v(x) + \mathcal{Q}^{-1}u''(x))/2.$$

En utilisant l'équation de (2.7) et $\mathcal{Q}^2 = -\mathcal{A}$, on obtient

$$\begin{cases} y'(x) = \mathcal{Q}y(x) + \dfrac{1}{2}\mathcal{Q}^{-1}f(x), \quad a.\ e\ \ x \in (0,1), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

où

$$y_0 = \frac{1}{2}(u(0) - v(0)) = \frac{1}{2}(u(0) + \mathcal{Q}^{-1}u'(0)).$$

De la même manière, nous avons

$$\begin{cases} z'(x) = -\mathcal{Q}z(x) - \dfrac{1}{2}\mathcal{Q}^{-1}f(x), \quad a.\, e \ \ x \in (0,1), \\ z(1) = z_1, \end{cases}$$

où $z_1 = \frac{1}{2}(u(1) - \mathcal{Q}^{-1}u'(1))$. Par conséquent, il s'en suit, pour presque tout $x \in (0,1)$,

$$\begin{cases} y(x) = e^{x\mathcal{Q}}y_0 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x e^{(x-s)\mathcal{Q}}\mathcal{Q}^{-1}f(s)ds \\ z(x) = e^{(1-x)\mathcal{Q}}z_1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^1 e^{(s-x)\mathcal{Q}}\mathcal{Q}^{-1}f(s)ds \end{cases} \tag{2.13}$$

et

$$u(x) = y(x) + z(x) = e^{x\mathcal{Q}}y_0 + e^{(1-x)\mathcal{Q}}z_1 + I_x + J_x, \tag{2.14}$$

avec

$$\begin{cases} I_x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x e^{(x-s)\mathcal{Q}}\mathcal{Q}^{-1}f(s)ds \\ J_x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^1 e^{(s-x)\mathcal{Q}}\mathcal{Q}^{-1}f(s)ds. \end{cases}$$

En fait, (2.13) et (2.14) vont être valide pour tout $x \in [0,1]$, puisque $u \in C^1([0,1];E)$. Par conséquent, pour obtenir la représentation finale de u, il faut calculer y_0 et z_1 par rapport aux données $d_0, d_1, f, \mathcal{H}$ et $\mathcal{A}$.
D'après la remarque (**??**) et puisque u est une solution stricte, on peut appliquer le résultat de [14, 1.6 p. 983] et on écrit

$$u(0), u(1) \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p} = (E, D(\mathcal{Q}^2))_{1-\frac{1}{2p},p} = (E, D(\mathcal{Q}))_{2-\frac{1}{p},p} \subset D(\mathcal{Q}), \tag{2.15}$$

de cela, nous déduisons que $y_0, z_1 \in D(\mathcal{Q})$. Nous avons également $u(0) \in D(\mathcal{H})$, alors $y_0 + e^{\mathcal{Q}}z_1 + J_0 \in D(\mathcal{H})$. Pour tout $x \in (0,1)$, on a

$$u'(x) = \mathcal{Q}e^{x\mathcal{Q}}y_0 - \mathcal{Q}e^{(1-x)\mathcal{Q}}z_1 + \mathcal{Q}I_x - \mathcal{Q}J_x, \tag{2.16}$$

ainsi

$$\begin{cases} u(0) = y_0 + e^{\mathcal{Q}}z_1 + J_0 \\ u(1) = e^{\mathcal{Q}}y_0 + z_1 + I_1 \\ u'(1) = \mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}y_0 - \mathcal{Q}z_1 + \mathcal{Q}I_1. \end{cases}$$

Maintenant de (2.3)-(2.4), on obtient

$$\begin{cases} \mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}y_0 - \mathcal{Q}z_1 + \mathcal{Q}I_1 - \mathcal{H}(y_0 - e^{\mathcal{Q}}z_1 - J_0) = d_0 \\ e^{\mathcal{Q}}y_0 + z_1 + I_1 = d_1. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}y_0 - \mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}z_1 - y_0 - e^{\mathcal{Q}}z_1 = \mathcal{H}^{-1}d_0 - \mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}I_1 + J_0 \\ e^{\mathcal{Q}}y_0 + z_1 = d_1 - I_1, \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} (\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}} - I)y_0 - (\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q} + e^{\mathcal{Q}})z_1 = \mathcal{H}^{-1}d_0 - \mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}I_1 + J_0 \\ e^{\mathcal{Q}}y_0 + z_1 = d_1 - I_1. \end{cases}$$

Nous déduisons que

$$\begin{cases}(\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}-I)y_0-(\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}+e^{\mathcal{Q}})z_1=\mathcal{H}^{-1}d_0-\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}I_1+J_0\\(\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}+e^{\mathcal{Q}})e^{\mathcal{Q}}y_0+(\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}+e^{\mathcal{Q}})z_1=(\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}+e^{\mathcal{Q}})(d_1-I_1),\end{cases}$$

ainsi, par l'addition de ces deux équations, on trouve

$$\Lambda\mathcal{H}^{-1}y_0=\mathcal{H}^{-1}d_0-\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}I_1+J_0+\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}d_1+e^{\mathcal{Q}}d_1-\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}I_1-e^{\mathcal{Q}}I_1.$$

Par conséquent

$$\begin{cases}y_0=\Lambda^{-1}d_0+\Lambda^{-1}\mathcal{Q}d_1+\mathcal{H}\Lambda^{-1}e^{\mathcal{Q}}d_1-2\Lambda^{-1}\mathcal{Q}I_1+\mathcal{H}\Lambda^{-1}J_0-\mathcal{H}\Lambda^{-1}e^{\mathcal{Q}}I_1\\z_1=\Lambda^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}d_1-\mathcal{H}\Lambda^{-1}d_1-\Lambda^{-1}e^{\mathcal{Q}}d_0+\mathcal{H}\Lambda^{-1}I_1-\mathcal{H}\Lambda^{-1}e^{\mathcal{Q}}J_0.\end{cases}\tag{2.17}$$

Les deux formules 2.14, 2.17 donnent

$$\begin{aligned}u(x)&=\Lambda^{-1}e^{x\mathcal{Q}}d_0+\Lambda^{-1}\mathcal{Q}e^{x\mathcal{Q}}d_1+\mathcal{H}\Lambda^{-1}e^{x\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}}d_1-2\Lambda^{-1}\mathcal{Q}e^{x\mathcal{Q}}I_1\\&\quad+\mathcal{H}\Lambda^{-1}e^{x\mathcal{Q}}J_0-\mathcal{H}\Lambda^{-1}e^{x\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}}I_1+e^{(1-x)\mathcal{Q}}(d_1-I_1)-e^{(1-x)\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}}y_0\\&\quad+I_x+J_x\end{aligned}$$

et u est représentée par la formule suivante

$$u(x)=S(x,d_0,d_1,f)+DV(x,f)+R(x,d_0,d_1,f),\tag{2.18}$$

où

$$S(x,d_0,d_1,f)=\Lambda^{-1}\mathcal{Q}e^{x\mathcal{Q}}\left(\mathcal{Q}^{-1}d_0+d_1-\mathcal{Q}^{-1}\int_0^1e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds\right)+e^{(1-x)\mathcal{Q}}d_1,\tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}DV(x,f)&=\frac{1}{2}\mathcal{H}\Lambda^{-1}\mathcal{Q}^{-1}e^{x\mathcal{Q}}\int_0^1e^{s\mathcal{Q}}f(s)ds-\frac{1}{2}\mathcal{Q}^{-1}e^{(1-x)\mathcal{Q}}\int_0^1e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds\\&\quad+\frac{1}{2}\mathcal{Q}^{-1}\int_0^xe^{(x-s)\mathcal{Q}}f(s)ds+\frac{1}{2}\mathcal{Q}^{-1}\int_x^1e^{(s-x)\mathcal{Q}}f(s)ds\end{aligned}$$

et

$$R(x,d_0,d_1,f)=\mathcal{H}\Lambda^{-1}e^{x\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}}(d_1-I_1)-e^{(1-x)\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}}y_0,$$

avec y_0 est donnée par (2.17).

2.2.3 Quelques résultats

Dans cette section nous supposerons (2.8) $\sim$ (2.12).

Lemme 2.16. *Pour $f\in L^p(0,1;E), 1<p<+\infty$, on a*

1. $x\mapsto K(x,f)=\mathcal{Q}\int_0^xe^{(x-s)\mathcal{Q}}f(s)ds\in L^p(0,1;E)$,
2. $x\mapsto K(1-x,f(1-.))=\mathcal{Q}\int_x^1e^{(s-x)\mathcal{Q}}f(s)ds\in L^p(0,1;E)$,

3. $x \mapsto P(x,f) = \mathcal{Q}\int_0^1 e^{(x+s)\mathcal{Q}} f(s)ds \in L^p(0,1;E)$.

Démonstration. 1. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u'(x) - \mathcal{Q}u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{2.20}$$

Si on applique le Thérème de Dore-Venni [18], on obtient que le problème de Cauchy (2.20) a une solution stricte

$$u \in W^{1,p}(0,1;E) \cap L^p(0,1;D(\mathcal{Q})),$$

avec

$$u(x) = \int_0^x e^{(x-s)\mathcal{Q}} f(s)ds \ \text{ p.p } \ x \in (0,1),$$

alors

$$\mathcal{Q}u : \ x \mapsto \mathcal{Q}\int_0^x e^{(x-s)\mathcal{Q}} f(s)ds \in L^p(0,1;E).$$

d'où, l'assertion 1 est vérifiée.

2. L'assertion 2 est aussi satisfaite grâce à la première assertion, en utilisant le changement de variable $t = 1 - s$. Donc

$$x \mapsto K(1-x, f(1-.)) \in L^p(0,1;E).$$

3. On a

$$\begin{array}{rcl} P(x,f) & = & \mathcal{Q}\int_0^1 e^{(x+s)\mathcal{Q}} f(s)ds \\ & = & \mathcal{Q}\int_0^x e^{(x-s)\mathcal{Q}} e^{2s\mathcal{Q}} f(s)ds + e^{2x\mathcal{Q}}\mathcal{Q}\int_x^1 e^{(s-x)\mathcal{Q}} f(s)ds \\ & = & K(x, e^{2.\mathcal{Q}} f) + e^{2x\mathcal{Q}} K(1-x, f(1-.)) \in L^p(0,1;E). \end{array}$$

Donc

$$P(x,f) \in L^p(0,1;E).$$

□

Lemme 2.17. *Sous l'hypothèse 2.8 et soit* $p \in]1,+\infty[$. *Alors*

1. $\mathcal{A}e^{\cdot\mathcal{Q}}\phi \in L^p(0,1;E)$ *si et seulement si* $\phi \in (D(\mathcal{A}),E)_{\frac{1}{2p},p}$.
2. $\mathcal{Q}e^{\cdot\mathcal{Q}}\phi \in L^p(0,1;E)$ *si et seulement si* $\phi \in (D(\mathcal{A}),E)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$.

Démonstration. Rappelons que si $n \in \mathbb{N}^*$ et C génère un semi-groupe analytique alors

$$\phi \in (D(C^n),E)_{\frac{1}{np},p} \ \text{ si et seulement si } \ C^n e^{\cdot C}\phi \in L^p(0,1;E).$$

En effet,

$$\begin{array}{rcl} \int_0^1 \| C^n e^{xC}\phi \|^p \, dx & = & \int_0^1 x^{n\frac{1}{np}p} \| C^n e^{xC}\phi \|^p \, \frac{dx}{x} \\ & \leq & \int_0^{+\infty} \| x^{n(1-(1-\frac{1}{np})}C^n e^{xC}\phi \|^p \, \frac{dx}{x} \\ & \leq & M \| \phi \|_{(D(C^n),E)_{\frac{1}{np},p}}, \text{(voir H. Triebel [45])} \end{array}$$

□

Lemme 2.18. *Sous les hypothèses 2.8, 2.9 et soit $f \in L^p(0,1;E)$, $1 < p < +\infty$, on a*

$$\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}} f(s)ds \in (D(\mathcal{Q}), E)_{\frac{1}{p},p} = (D(\mathcal{A}), E)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}.$$

Démonstration. D'aprés l'assertion 3 du Lemme 2.16, on a

$$\mathcal{Q}e^{\cdot\mathcal{Q}} \int_0^1 e^{s\mathcal{Q}} f(s)ds \in L^p(0,1;E),$$

on appliquons le Lemme 2.17, on obtient

$$\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}} f(s)ds \in (D(\mathcal{A}), E)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}.$$

□

Proposition 2.19. *Soient $d_0, d_1 \in E$ et $f \in L^p((0,1);E)$, $1 < p < \infty$. Alors*

$$x \mapsto \mathcal{A}R(x, d_0, d_1, f) \in L^p(0,1;X).$$

Démonstration. Pour tout $\psi \in E$, $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{\mathcal{Q}}\psi \in D(\mathcal{Q}^n)$, ainsi

$$\mathcal{A}e^{\cdot\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}}\psi = -e^{\cdot\mathcal{Q}}\mathcal{Q}^2 e^{\mathcal{Q}}\psi$$

est borné, donc dans $L^p(0,1;E)$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $\mathcal{A}R(.,d_0,d_1,f)$ peut être écrit comme somme de termes du types $T\mathcal{A}e^{\cdot\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}}\psi$, $T\,\mathcal{A}\,e^{(1-.)\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}}\psi$, où $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\psi \in E$. □

Proposition 2.20. *Si $f \in L^p(0,1;E), 1 < p < +\infty$, alors*

$$\mathcal{A}DV(.,f) \in L^p(0,1;E).$$

Démonstration. On a

$$\mathcal{A}DV(x,f) = -\frac{1}{2}\mathcal{H}\Lambda^{-1}\mathcal{Q}e^{x\mathcal{Q}} \int_0^1 e^{s\mathcal{Q}} f(s)ds + \frac{1}{2}\mathcal{Q}e^{(1-x)\mathcal{Q}} \int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}} f(s)ds$$
$$-\frac{1}{2}\mathcal{Q}\int_0^x e^{(x-s)\mathcal{Q}} f(s)ds - \frac{1}{2}\mathcal{Q}\int_x^1 e^{(s-x)\mathcal{Q}} f(s)ds,$$

et grâce au Théorème de Dore-Venni [18], on obtient

$$x \mapsto \frac{1}{2}\mathcal{Q}\int_0^x e^{(x-s)\mathcal{Q}} f(s)ds \text{ et } x \mapsto \frac{1}{2}\mathcal{Q}\int_x^1 e^{(s-x)\mathcal{Q}} f(s)ds,$$

sont dans $L^p(0,1;E)$. Par conséquent

$$x \mapsto \frac{1}{2}\mathcal{H}\Lambda^{-1}\mathcal{Q}e^{x\mathcal{Q}} \int_0^1 e^{s\mathcal{Q}} f(s)ds \text{ et } x \mapsto \frac{1}{2}\mathcal{Q}e^{(1-x)\mathcal{Q}} \int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}} f(s)ds,$$

appartient à $L^p(0,1;E)$. Alors $\mathcal{A}DV(x,f) \in L^p((0,1);E)$. □

Puisque $0 \in \rho(\mathcal{A})$, nous avons $0 \in \rho(I - e^{2\mathcal{Q}})$ (voir A. Lunardi [37, Corollaire 2.3.7, p. 62]) ainsi $\Lambda^{-1} = -(I - e^{2\mathcal{Q}})^{-1}(I - 2\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}(I - e^{2\mathcal{Q}})^{-1})\mathcal{H}^{-1}$. Pour analyser le terme S, on montre que

Lemme 2.21. Λ^{-1} *peut s'écrire sous la forme*

$$\Lambda^{-1} = -\mathcal{H}^{-1} - \mathcal{H}^{-1}W,$$

avec

$$W \in \mathcal{L}(E), \ \ \mathcal{H}^{-1}W = W\mathcal{H}^{-1} \ \ \text{et} \ \ W(E) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{Q}^k). \tag{2.21}$$

Démonstration. Prenons

$$\begin{cases} T = -2\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}(I - e^{2\mathcal{Q}})^{-1} \in \mathcal{L}(E) \\ S = -e^{2\mathcal{Q}} \in \mathcal{L}(E), \end{cases}$$

donc

$$-\Lambda^{-1} = (I+S)^{-1}(I+T)^{-1}\mathcal{H}^{-1}.$$

Posons

$$U = -T(I+T)^{-1} \in \mathcal{L}(E), \ V = -S(I+S)^{-1} \in \mathcal{L}(E),$$

alors $(I+T)^{-1} = I + U$ et $(I+S)^{-1} = I + V$.

On en déduit que

$$-\Lambda^{-1} = (I+U)(I+V)\mathcal{H}^{-1} = (I+V+U+UV)\mathcal{H}^{-1},$$

d'où

$$\Lambda^{-1} = -\mathcal{H}^{-1} - \mathcal{H}^{-1}W,$$

avec $W = V + U + UV = e^{\frac{1}{2}\mathcal{Q}}M$ où

$$M = (I+S)^{-1}\left[e^{\frac{3}{2}\mathcal{Q}} + 2\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}e^{\frac{1}{2}\mathcal{Q}}(I+T)^{-1}\left(I - S(I+S)^{-1}\right)\right] \in \mathcal{L}(E),$$

ce qui donne (2.21). □

Remarque 2.22. *De (2.19) on déduit que*

$$S(x, d_0, d_1, f) = -\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}e^{x\mathcal{Q}}\left(\mathcal{Q}^{-1}d_0 + d_1 - \mathcal{Q}^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds\right) + e^{(1-x)\mathcal{Q}}d_1 + \mathcal{H}^{-1}e^{x\mathcal{Q}}\xi,$$

où $\xi = -\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}W\left(\mathcal{Q}^{-1}d_0 + d_1 - \mathcal{Q}^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds\right) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{Q}^k).$

2.2.4 Résultat principal

Théorème 2.23. *Supposons que (2.8)∼(2.12). Soit* $f \in L^p(0,1;E)$ *avec* $1 < p < \infty$*. alors, les affirmations suivantes sont équivalentes*

1 $d_1 \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p}$ *et* $\mathcal{H}^{-1}\left(d_0 + \mathcal{Q}d_1 - \int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds\right) \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p}$.

2 Le problème 2.7 admet une unique solution stricte donnée par 2.18.

Démonstration. Rappelons que $u(x) = S(x, d_0, d_1, f) + DV(x, f) + R(x, d_0, d_1, f)$. On utilise les deux propositions précédentes 2.19 et 2.20, il suffit d'étudier le terme S. D'après la remarque 2.22, on a

$$\begin{aligned} S(x, d_0, d_1, f) &= -\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}e^{x\mathcal{Q}}\left(\mathcal{Q}^{-1}d_0 + d_1 - \mathcal{Q}^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds\right) + e^{(1-x)\mathcal{Q}}d_1 + \mathcal{H}^{-1}e^{x\mathcal{Q}}\xi \\ &= J_1(x) + J_2(x) + J_3(x). \end{aligned}$$

En raison de $\xi \in \cap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{Q}^k)$, $J_3(\cdot)$ est régulier, ainsi la régularité de S est celui de $J_1 + J_2$. mais J_1 est régulier au voisinage de 1 et J_2 au voisinage 0, ainsi

$$(J_1 + J_2)(\cdot) \in L^p(0, 1; E) \text{ si et seulement si } (J_1)(\cdot), (J_2)(\cdot) \in L^p(0, 1; E).$$

De plus, $J_2(\cdot) \in L^p(0, 1; E)$ si et seulement si $d_1 \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p} \subset D(\mathcal{Q})$ (voir Triebel [45]). De même, $J_1(\cdot) \in L^p(0, 1; E)$ si et seulement si

$$\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}\left(\mathcal{Q}^{-1}d_0 + d_1 - \mathcal{Q}^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds\right) \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p},$$

ce qui écrit

$$\mathcal{H}^{-1}\left(d_0 + \mathcal{Q}d_1 - \int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds\right) \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p},$$

avec $d_1 \in D(\mathcal{Q})$. $\square$

2.2.5 Problème avec un paramètre spectral

Notre résultat précédent du problème (2.7) exige l'hypothèse d'inversibilité (2.12), il peut être difficile à vérifier dans les applications. À cet effet, on introduit un paramètre spectral ω, suffisamment grand et on étudie le problème

$$\begin{cases} u''(x) + \mathcal{A}u(x) - \omega u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1) \\ u'(1) - \mathcal{H}u(0) = d_0, \\ u(1) = d_1. \end{cases} \tag{2.22}$$

On note par $\mathcal{A}_\omega = \mathcal{A} - \omega I$. Ici, nos hypothèses sont les suivantes : Il existe un $\omega_0 \geq 0$(fixé)

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } E, \\ [0, +\infty[\subset \rho(\mathcal{A}_{\omega_0}) \text{ et } \sup\limits_{\lambda \geq 0} \| \lambda(\mathcal{A}_{\omega_0} - \lambda I)^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty. \end{cases} \tag{2.23}$$

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, (-\mathcal{A}_{\omega_0})^{is} \in \mathcal{L}(E) \text{ et } \exists \theta_{\mathcal{A}_{\omega_0}} \in]0, \pi[; \\ \text{ tel que } \sup\limits_{s \in \mathbb{R}} \| e^{-\theta_{\mathcal{A}_{\omega_0}}|s|}(-\mathcal{A}_{\omega_0})^{is} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty. \end{cases} \tag{2.24}$$

$$0 \in \rho(\mathcal{H}). \tag{2.25}$$

Et la condition de commutativité suivante

$$\mathcal{A}_{\omega_0}^{-1}\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{A}_{\omega_0}^{-1}. \tag{2.26}$$

Remarque 2.24. *Si les hypothèses (2.23), (2.24) et (2.26) sont vraies, alors elles restent valables quand on remplace ω_0 par n'importe $\omega \geq \omega_0$.*

C'est évident pour les hypothèses (2.23) et (2.26), mais pour l'hypothèse (2.24), on utilise le Théorème [40, Théorème 3, p.437].

Pour $\omega \geq \omega_0$, $\mathcal{Q}_\omega := -(-\mathcal{A}_\omega)^{1/2}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique dans E (voir [4]), et on définit aussi l'opérateur linéaire $\Lambda_\omega = 2\mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega} - \mathcal{H}(I - e^{2\mathcal{Q}_\omega})$ avec $D(\Lambda_\omega) = D(\mathcal{H})$.

Lemme 2.25. *Sous les hypothèses (2.23) $\sim$ (2.26). Alors, il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tels que pour tout $\omega \geq \omega^*$, Λ_ω est d'inverse borné et*

$$\Lambda_\omega^{-1} = -(I - e^{2\mathcal{Q}_\omega})^{-1}(I - 2(I - e^{2\mathcal{Q}_\omega})^{-1}\mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega}\mathcal{H}^{-1})^{-1}\mathcal{H}^{-1}. \tag{2.27}$$

Démonstration. Par le même raisonnement de (2.2.3), $I - e^{2\mathcal{Q}_\omega}$ est d'inverse borné et on peut écrire

$$\begin{aligned}\Lambda_\omega &= 2\mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega} - \mathcal{H}(I - e^{2\mathcal{Q}_\omega}),\\ &= [2\mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega}(I - e^{2\mathcal{Q}_\omega})^{-1} - \mathcal{H}](I - e^{2\mathcal{Q}_\omega}),\\ &= -\mathcal{H}[I - 2\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega}(I - e^{2\mathcal{Q}_\omega})^{-1}](I - e^{2\mathcal{Q}_\omega}),\end{aligned}$$

alors

$$\Lambda_\omega = -\mathcal{H}[I - L_\omega](I - e^{2\mathcal{Q}_\omega}),$$

avec

$$L_\omega = 2\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega}(I - e^{2\mathcal{Q}_\omega})^{-1}.$$

$\mathcal{H}$, $I - e^{2\mathcal{Q}_\omega}$ sont inversibles dans $\mathcal{L}(E)$, pour prouver l'inversibilité de Λ_ω, il reste à montrer l'inversibilité de $I - L_\omega$.

Pour cela $I - L_\omega$, il faut de prouver que $\| L_\omega \|_{\mathcal{L}(E)} < 1$. Soit

$$\| L_\omega \| = \| 2\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega}(I - e^{2\mathcal{Q}_\omega})^{-1} \| \leq \| \mathcal{H}^{-1} \| \frac{2 \| \mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega} \|}{1 - \| e^{2\mathcal{Q}_\omega} \|}.$$

Maintenant, d'après le Lemme de Dore et Yakubov [20, Lemme 2.6 pp 103], il existe des constantes $C, k > 0$ (qui ne dépendent pas de ω) tels que pour tout $x \geq 1$

$$\|(-\mathcal{A} + \omega I)^\alpha e^{-x(-\mathcal{A}+\omega I)^{\frac{1}{2}}}\| \leq Ce^{-kx\sqrt{\omega}},$$

en particulier

$$\|\mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega}\| \leq Ce^{-k\sqrt{\omega}} \quad \text{and} \quad \|e^{2\mathcal{Q}_\omega}\| \leq Ce^{-2k\sqrt{\omega}},$$

alors

$$\|L_\omega\| \leq \| \mathcal{H}^{-1} \| \frac{2Ce^{-k\sqrt{\omega}}}{1 - Ce^{-2k\sqrt{\omega}}},$$

de ce qu'implique l'existence $\omega^* > \omega_0$ tels que pour tout $\omega \geq \omega^*$ on a

$$\frac{2Ce^{-k\sqrt{\omega}}}{1 - Ce^{-2k\sqrt{\omega}}} < \frac{1}{\| \mathcal{H}^{-1} \|},$$

alors

$$\| L_\omega \| < 1.$$

□

Le résultat principal

Appliquons le théorème 2.23 de même avec le lemme 2.32, on obtient :

Théorème 2.26. *Supposons (2.23) $\sim$ (2.26). Soit $f \in L^p(0,1;E)$, $1 < p < \infty$ et $\omega \geq \omega^*$. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes*

1 $d_1 \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p}$ *et* $\mathcal{H}^{-1}(d_0 + \mathcal{Q}_\omega d_1 - \int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}_\omega} f(s)ds) \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p}$.

2 Il existe une solution stricte unique de (2.22).

De plus, dans ce cas la solution u est donnée par (2.18), où $\mathcal{A}$ est remplacé par $\mathcal{A}_\omega$.

2.2.6 Exemples

Exemple

Prendre $E = L^p(\mathbb{R}), 1 < p < \infty$. Définir les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\mathcal{A}) = W^{2,p}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{A}u = au'', \\ D(\mathcal{H}) = W^{1,p}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{H}u = bu' + cu, \end{array} \right.$$

où $a > 0$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Soit $\omega_0 > 0$. Un calcul simple montre que (2.8), (2.9), (2.10) sont vérifiées. D'ailleurs, $\mathcal{A}$ satisfait (2.11) (voir Prüss-Sohr [40]).

$$\theta_{\mathcal{A}} = \epsilon_1,$$

avec $\epsilon_1 \in]0, \pi[$. Appliquons le théorème 2.26, on obtient

Proposition 2.27. *Soit $p \in]1, \infty[$, $f \in L^p(0,1;E)$ et*

$$d_1, \ \mathcal{H}^{-1}(d_0 + \mathcal{Q}_\omega d_1 - \int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}_\omega} f(s)ds) \in \left(W^{2,p}(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2p},p}.$$

Alors, il existe $\omega^* > 0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + a\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \omega u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in]0,1[\times \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) - b\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,y) - cu(0,y) = d_0(y), \quad y \in \mathbb{R}, \\ u(1,y) = d_1(y), \quad y \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \tag{2.28}$$

a une solution stricte unique u, donc

$$u \in W^{2,p}(0,1; L^p(\mathbb{R})) \cap L^p(0,1; W^{2,p}(\mathbb{R}))$$

et u satisfait (3.44).

Exemple

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n, n \geqslant 1$, avec frontière régulière $\partial\Omega$ et notons $E = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Définissons les opérateurs $\mathcal{A}, \mathcal{H}$ par

$$D(\mathcal{A}) = \left\{u \in W^4(\Omega) : u_{|\partial\Omega} = \Delta u_{|\partial\Omega} = 0\right\}, \quad \mathcal{A}u = b\Delta^2 u,$$

où $b < 0$ et

$$D(\mathcal{H}) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), \quad \mathcal{H}u = \Delta u.$$

Alors, le Théorème 2.26 marche et nous pouvons manipuler le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + b\Delta^2 u(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in (0,1)\times\Omega, \\ u(1,y) = d_0(y), \quad y \in \Omega, \\ u(1,y) - \Delta_y u(0,y) = d_1(y), \quad y \in \Omega, \\ u(x,\xi) = \Delta_y u(x,\xi) = 0, \qquad (x,\xi) \in (0,1)\times\partial\Omega, \end{cases}$$

à condition que $f \in L^p(0,1; L^p(\Omega))$ et

$$\mathcal{H}^{-1}(d_0 + \mathcal{Q}_\omega d_1 - \int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}_\omega} f(s)ds), d_1 \in (D(\mathcal{A}), L^p(\Omega))_{\frac{1}{2p},p}.$$

2.3 $\mathcal{B}$ génère un groupe fortement continu

2.3.1 Position du problème et hypothèses

On considère une classe d'équations differnetielles abstraites de deuxième ordre dans E comme suit

$$u''(x) + 2\mathcal{B}u'(x) + \mathcal{A}u(x) = f(x), \;\; x \in (0,1), \tag{2.29}$$

avec des conditions aux limites l'un de ces conditions est une classe des conditions non locales

$$\begin{cases} u'(1) - \mathcal{H}u(0) = d_0, \\ u(1) = d_1. \end{cases} \tag{2.30}$$

Notre hypothèses sur les opérateurs sont les suivantes

$$\begin{cases} \mathcal{A} - \mathcal{B}^2 \;\text{ est un opérateur linéaire fermé sur } E \text{ tel que} \\ [0,+\infty[\subset \rho(\mathcal{A}-\mathcal{B}^2) \;\text{ et }\; \sup\limits_{\lambda\geq 0} \| \lambda(\mathcal{A}-\mathcal{B}^2-\lambda I)^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty, \end{cases} \tag{2.31}$$

$$\begin{cases} \text{pour tout } \;\; s \in \mathbb{R}, \; (\mathcal{A}-\mathcal{B}^2)^{is} \in L(E) \text{ et il existe } \theta \in]0,\pi[\text{ tel que} \\ \sup_{s\in\mathbb{R}} \| e^{-\theta|s|}(\mathcal{B}^2-\mathcal{A})^{is} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty, \end{cases} \tag{2.32}$$

$$\begin{cases} \mathcal{B} \text{ est un opérateur linéaire fermé sur } E, \text{ son domaine } D(\mathcal{B}); \\ \text{il existe } \lambda_0 \text{ tel que} (\mathcal{A}-\mathcal{B}^2)^{-1}(\mathcal{B}-\lambda_0 I)^{-1} = (\mathcal{B}-\lambda_0 I)^{-1}(\mathcal{A}-\mathcal{B}^2)^{-1}, \end{cases} \tag{2.33}$$

$$(\mathcal{A}-\mathcal{B}^2)^{-1}\mathcal{H}^{-1}=\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{A}-\mathcal{B}^2)^{-1}, \tag{2.34}$$

$$\mathcal{B} \text{ génère un groupe fortement continu } (G(x))_{x\in\mathbb{R}} \text{ sur } E, \tag{2.35}$$

$$0\in\rho(\tilde{\mathcal{H}}), \tag{2.36}$$

On note $P=(\mathcal{B}^2-\mathcal{A})^{\frac{1}{2}}$ et on définit l'opérateur $\tilde{\Lambda}$ par

$$\begin{cases} D(\tilde{\Lambda})=D(\tilde{\mathcal{H}}) \\ \tilde{\Lambda}=2Pe^P-\tilde{\mathcal{H}}(I-e^{2P}), \end{cases}$$

on suppose que

$$\tilde{\Lambda} \text{ est d'inverse borné.} \tag{2.37}$$

2.3.2 Quelques résultats

Remarque 2.28. *Si $f\in L^p(0,1;E)$, alors $G(x)f\in L^p(0,1;E)$ avec $1<p<+\infty$. En effet, on a*

$$\exists C>0,\ \exists\beta\geq 0\ :\ \forall x\geq 0,\ \parallel G(x)\parallel\leq Ce^{x\beta}.$$

Donc pour $x\in[0,1]$, on obtient

$$\parallel G(x)f(x)\parallel\leq Ce^{x\beta}\parallel f(x)\parallel .$$

Remarque 2.29. *(voir [15]) Sous les hypothèses (2.2)-(2.31), on obtient*

1. *P est densément définie.*
2. *P est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(e^{xP})_{x\geq 0}$ dans E. Alors*

$$\begin{cases} P^2e^{\cdot P}\phi\in L^p(0,1;E) \quad \text{si et seulement si} \quad \phi\in(D(P^2),E)_{\frac{1}{2p},p} \\ Pe^{\cdot P}\phi\in L^p(0,1;E) \quad \text{si et seulement si} \quad \phi\in(D(\mathcal{A}),E)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}. \end{cases}$$

De plus, $e^P\xi\in D(P^k)$ pour tout $\xi\in E,\ k\in\mathbb{N}$, et donc

$$P^ke^{\cdot P}e^P\xi=e^{\cdot P}P^ke^P\xi\in L^p(0,1;E). \tag{2.38}$$

Théorème 2.30. *Soit $f\in L^p(0,1;E)$ avec $1<p<\infty$. Si les hypothèses (2.31)∼(2.37) sont vérifiées. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes*

1 $\tilde{d}_1\in(D(P^2),E)_{\frac{1}{2p},p}$ et $\tilde{\mathcal{H}}^{-1}(\tilde{d}_0+P\tilde{d}_1-\int_0^1 e^{(1-s)P}\tilde{f}(s)ds)\in(D(P^2),E)_{\frac{1}{2p},p}$.

2 Le problème (2.29)-(2.30) admet une unique solution stricte.

De plus, u est déterminée par

$$\begin{aligned} u(x) &= G(-x)\left[\tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Lambda}^{-1}e^{xP}e^P\left(\tilde{d}_1-\tilde{I}_1\right)-e^{(1-x)P}e^P\tilde{y}_0\right] \\ &+ G(-x)[\frac{1}{2}\tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Lambda}^{-1}P^{-1}e^{xP}\int_0^1 e^{sP}\tilde{f}(s)ds-\frac{1}{2}P^{-1}e^{(1-x)P}\int_0^1 e^{(1-s)P}\tilde{f}(s)ds \\ &+ \frac{1}{2}P^{-1}\int_0^x e^{(x-s)P}\tilde{f}(s)ds+\frac{1}{2}P^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)P}\tilde{f}(s)ds] \\ &+ G(-x)\left[\tilde{\Lambda}^{-1}Pe^{xP}\left(P^{-1}\tilde{d}_0+\tilde{d}_1-P^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)P}\tilde{f}(s)ds\right)+e^{(1-x)P}\tilde{d}_1\right], \end{aligned} \tag{2.39}$$

où

$$\begin{cases} \tilde{y}_0 = \tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{d}_0 + \tilde{\Lambda}^{-1}P\tilde{d}_1 + \tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Lambda}^{-1}e^P\tilde{d}_1 - 2\tilde{\Lambda}^{-1}P\tilde{I}_1 + \tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{J}_0 - \tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Lambda}^{-1}e^P\tilde{I}_1, \\ \tilde{d}_0 = G(1)d_0 + \mathcal{B}G(1)d_1, \\ \tilde{d}_1 = G(1)d_1, \\ \tilde{\mathcal{H}} = G(1)\mathcal{H}, \\ \tilde{I}_1 = \dfrac{1}{2}P^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{(1-s)P}\tilde{f}(s)ds, \\ \tilde{J}_0 = \dfrac{1}{2}P^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{sP}\tilde{f}(s)ds, \\ \tilde{f}(x) = G(x)f(x). \end{cases} \tag{2.40}$$

Démonstration. Soient $\tilde{d}_1 \in (D(P^2), E)_{\frac{1}{2p},p}$ et $\tilde{\mathcal{H}}^{-1}(\tilde{d}_0 + P\tilde{d}_1 - \int_0^1 e^{(1-s)P}\tilde{f}(s)ds) \in (D(P^2), E)_{\frac{1}{2p},p}$ On a, d'après l'hypothèse (2.33), $\tilde{d}_1 \in (D(P^2), E)_{\frac{1}{2p},p}$. De plus, puisque les hypothèses (2.8) $\sim$ (2.12) sont vérifées, alors (2.31) $\sim$ (2.37) aussi ; si on remplace $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A} - \mathcal{B}^2$. D'après la Remarque 2.28 et le Théorème 2.23, on peut construire une solution stricte par le même raisonnement qu'on a utilisé dans la section précédente

$$v \in W^{2,p}(0,1;E) \cap L^p(0,1;D(\mathcal{A} - \mathcal{B}^2)), \tag{2.41}$$

du problème

$$\begin{cases} v''(x) + (\mathcal{A} - \mathcal{B}^2)v(x) = G(x)f(x), \quad x \in (0,1), \\ v'(1) - G(1)\mathcal{H}v(0) = G(1)d_0 + \mathcal{B}G(1)d_1, \\ v(1) = G(1)d_1. \end{cases} \tag{2.42}$$

Maintenant, pour tout $x \in (0,1)$, on a

$$u(x) = G(-x)v(x),$$

en appliquent la formule (2.18) à (2.42), on obtient

$$v(x) = S(x, \tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \tilde{f}) + DV(x, \tilde{f}) + R(x, \tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \tilde{f}), \tag{2.43}$$

où

$$S(x, \tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \tilde{f}) = \tilde{\Lambda}^{-1}Pe^{xP}\left(P^{-1}\tilde{d}_0 + \tilde{d}_1 - P^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)P}\tilde{f}(s)ds\right) + e^{(1-x)P}\tilde{d}_1, \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned} DV(x, \tilde{f}) \quad = \quad & \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Lambda}^{-1}P^{-1}e^{xP}\int_0^1 e^{sP}\tilde{f}(s)ds - \frac{1}{2}P^{-1}e^{(1-x)P}\int_0^1 e^{(1-s)P}\tilde{f}(s)ds \qquad (2.45) \\ & + \frac{1}{2}P^{-1}\int_0^x e^{(x-s)P}\tilde{f}(s)ds + \frac{1}{2}P^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)P}\tilde{f}(s)ds \end{aligned}$$

et

$$R(x, \tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \tilde{f}) = \tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Lambda}^{-1}e^{xP}e^P\left(\tilde{d}_1 - \tilde{I}_1\right) - e^{(1-x)P}e^P\tilde{y}_0, \tag{2.46}$$

□

avec $\tilde{y}_0, \tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \tilde{\mathcal{H}}, \tilde{I}_1$ et $\tilde{f}$ sont données par (2.59). On a, d'après le point 2 de la Remarque 2.29,

$$\begin{cases} x \mapsto P^2 e^{\cdot P} d_1 \in L^p(0,1;E), \\ x \mapsto P^2 e^{\cdot P} \left(P^{-1}\tilde{d}_0 + \tilde{d}_1 - P^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)P} \tilde{f}(s)ds \right) \in L^p(0,1;E). \end{cases} \tag{2.47}$$

Alors

$$\mathcal{B}S' = \mathcal{B}\tilde{\Lambda}^{-1} P^2 e^{xP} \left(P^{-1}\tilde{d}_0 + \tilde{d}_1 - P^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)P} \tilde{f}(s)ds \right) - \mathcal{B}P^{-1}G(1)P^2 e^{(1-x)P} d_1,$$

puisque $\mathcal{B}\tilde{\Lambda}^{-1} \in L(E)$ et $\mathcal{B}P^{-1}G(1) \in L(E)$, on en déduit que $\mathcal{B}S' \in L^p(0,1;E)$.
Pour le terme DV, on a

$$\begin{aligned} 2\mathcal{B}DV' &= \mathcal{B}\tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Lambda}^{-1} P^{-1} P e^{xP} \int_0^1 e^{sP} \tilde{f}(s)ds + \mathcal{B}P^{-1} P e^{(1-x)P} \int_0^1 e^{(1-s)P} \tilde{f}(s)ds \\ &\quad + \mathcal{B}P^{-1} P \int_0^x e^{(x-s)P} \tilde{f}(s)ds - \mathcal{B}P^{-1} P \int_x^1 e^{(s-x)P} \tilde{f}(s)ds. \end{aligned}$$

Compte tenu le Lemme 2.21, il résulte que

$$\begin{aligned} 2\mathcal{B}DV' &= -\mathcal{B}P^{-1} P e^{xP} \int_0^1 e^{sP} \tilde{f}(s)ds - \mathcal{B}P^{-1}\tilde{W} P e^{xP} \int_0^1 e^{sP} \tilde{f}(s)ds \\ &+ \mathcal{B}P^{-1} P \int_0^x e^{(x-s)P} \tilde{f}(s)ds - \mathcal{B}P^{-1} P \int_x^1 e^{(s-x)P} \tilde{f}(s)ds \\ &+ \mathcal{B}P^{-1} P e^{(1-x)P} \int_0^1 e^{(1-s)P} \tilde{f}(s)ds, \end{aligned}$$

où

$$\tilde{W} \in \cap_{k=1}^{+\infty} D(P^k).$$

On sait que $\mathcal{B}P^{-1} \in L(E)$, donc en appliquant le Lemme 2.16, on déduit que

$$\mathcal{B}DV' \in L^p(0,1;E).$$

Finalement,

$$\mathcal{B}R' = \mathcal{B}\tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Lambda}^{-1} P e^{xP} e^P \left(\tilde{d}_1 - \tilde{I}_1 \right) + \mathcal{B}P^{-1} P^2 e^{(1-x)P} e^P \tilde{y}_0,$$

et grâce au Lemme 2.21 on a

$$\mathcal{B}R' = -\mathcal{B}P^{-1} P^2 e^{xP} e^P \left(\tilde{d}_1 - \tilde{I}_1 \right) - \mathcal{B}P^{-1}\tilde{W} P^2 e^{xP} e^P \left(\tilde{d}_1 - \tilde{I}_1 \right) + \mathcal{B}P^{-1} P^2 e^{(1-x)P} e^P \tilde{y}_0,$$

où $\tilde{W} \in \cap_{k=1}^{+\infty} D(P^k)$.
D'après (2.38) on remarque que $\mathcal{B}R' \in L^p(0,1;E)$ car on peut l'écrire sous forme de somme des termes suivantes

$$TP^k e^{\cdot P} e^P \xi, \ TP^k e^{(1-.)P} e^P \xi,$$

où $T \in L(E), \ k \in 1,2, \ \xi \in E$. Donc

$$\mathcal{B}v' \in L^p(0,1;E). \tag{2.48}$$

Puisque v est la solution stricte de (2.42) et on a $\mathcal{B}\left(\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\right)^{-1}, \ \mathcal{B}^2\left(\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\right)^{-1} \in L(E)$, donc

$$\begin{cases} \mathcal{B}v = \mathcal{B}\left(\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\right)^{-1}(\mathcal{B}^2 - \mathcal{A})v \in L^p(0,1;E) \\ \mathcal{B}^2 v = \mathcal{B}^2\left(\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\right)^{-1}(\mathcal{B}^2 - \mathcal{A})v \in L^p(0,1;E). \end{cases} \tag{2.49}$$

Pour $x \in (0,1)$, on trouve à partir de (2.41) et l'hypothèse(2.33)

$$u(x) = G(-x)v(x) \in D(\mathcal{A} - \mathcal{B}^2), \quad (\mathcal{A} - \mathcal{B}^2)u(x) = G(-x)(\mathcal{A} - \mathcal{B}^2)v(x),$$

donc $u \in L^p(0,1; D(\mathcal{A} - \mathcal{B}^2))$, on a aussi de (2.41), (2.48) et (2.49) on obtient

$$\begin{cases} u'(x) = G(-x)(-\mathcal{B}v(x) + v'(x)) \\ u''(x) = G(-x)(\mathcal{B}^2 v(x) - 2\mathcal{B}v'(x) + v''(x)), \end{cases}$$

avec $u \in W^{2,p}(0,1;E)$. De plus, pour $x \in (0,1)$

$$\mathcal{A}u(x) = G(-x)\mathcal{A}v(x),$$

ainsi

$$\begin{aligned} u''(x) + 2\mathcal{B}u'(x) + \mathcal{A}u(x) &= G(-x)(\mathcal{B}^2 v(x) - 2\mathcal{B}v'(x) + v''(x) - 2\mathcal{B}^2 v(x) + 2\mathcal{B}v'(x) + \mathcal{A}v(x)) \\ &= G(-x)(v''(x) + (\mathcal{A} - \mathcal{B}^2)v(x)) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{cases} u'(1) - \mathcal{H}u(0) = G(-1)\left(v'(1) - \mathcal{B}v(1) - G(1)\mathcal{H}v(0)\right) = d_0, \\ u(1) = G(-1)v(1) = d_1, \end{cases}$$

nous avons prouvé que u est une solution stricte du problème (2.29)-(2.30).

Inversement, si u est une solution stricte de notre problème, on pose

$$v(x) = G(x)u(x), \quad x \in (0,1),$$

puisque

$$u \in W^{2,p}(0,1;E) \cap L^p(0,1; D(\mathcal{A} - \mathcal{B}^2)), \ \ u^{'} \in L^p(0,1; D(\mathcal{B})),$$

on en déduit que v est la solution stricte de (2.42). Les hypothèses (2.8) $\sim$ (2.12) sont vérifiées, si on remplace $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A} - \mathcal{B}^2$ et $\mathcal{H}$ par $G(1)\mathcal{H}$, donc d'après le Théorème 2.23, on obtient

$$\tilde{d}_1 \in (D(P^2), E)_{\frac{1}{2p},p}, \quad \tilde{\mathcal{H}}^{-1}(\tilde{d}_0 + P\tilde{d}_1 - \int_0^1 e^{(1-s)P}\tilde{f}(s)ds) \in (D(P^2), E)_{\frac{1}{2p},p},$$

avec $\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{d}_0, \tilde{d}_1$ et $\tilde{f}$ sont données par (2.59). On déduit que si les deux affirmations de ce Théorème sont vérifiées, alors

$$u(x) = G(-x)v(x), \quad x \in (0,1),$$

où v est présentée par (2.43).

2.3.3 Problème avec un paramètre spectral

Notre résultat précédent du problème (2.29)-(2.30) exige l'hypothèse d'inversibilité (2.37), peut être difficile à vérifier dans les applications. À cet effet, on considère un certain grand nombre positif ω et on remplace $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A} - \omega I$, le problème devient alors

$$\begin{cases} u''(x) + 2\mathcal{B}u'(x) + \mathcal{A}u(x) - \omega u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \\ u'(1) - \mathcal{H}u(0) = d_0, \\ u(1) = d_1. \end{cases} \tag{2.50}$$

On note par $\mathcal{A}_\omega = \mathcal{A} - \omega I$. Il existe un $\omega_0 \geq 0$(fixé), et pour cela, nos hypothèses sont les suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\omega_0} - \mathcal{B}^2 \ \text{ est un opérateur linéaire fermé sur } E \text{ tel que} \\ [0, +\infty[\subset \rho(\mathcal{A}_{\omega_0} - \mathcal{B}^2) \ \text{ et } \ \sup_{\lambda \geq 0} \| \lambda(\mathcal{A}_{\omega_0} - \mathcal{B}^2 - \lambda I)^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty, \end{cases} \tag{2.51}$$

$$\begin{cases} \text{pour tout } \ s \in \mathbb{R}, \ (\mathcal{A}_{\omega_0} - \mathcal{B}^2)^{is} \in L(E) \text{ et il existe } \theta \in]0, \pi[\text{ tel que} \\ \sup_{s \in \mathbb{R}} \| e^{-\theta|s|}(\mathcal{A}_{\omega_0} - \mathcal{B}^2)^{is} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty, \end{cases} \tag{2.52}$$

$$\begin{cases} \mathcal{B} \text{ est un opérateur linéaire fermé sur } E, \text{ il existe } \lambda_0 \text{ tel que} \\ (\mathcal{A}_{\omega_0} - \mathcal{B}^2)^{-1}(\mathcal{B} - \lambda_0 I)^{-1} = (\mathcal{B} - \lambda_0 I)^{-1}(\mathcal{A}_{\omega_0} - \mathcal{B}^2)^{-1}, \end{cases} \tag{2.53}$$

$$(\mathcal{A}_{\omega_0} - \mathcal{B}^2)^{-1}\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{A}_{\omega_0} - \mathcal{B}^2)^{-1}, \tag{2.54}$$

$$\mathcal{B} \text{ génère un groupe fortement continu } (G(x))_{x \in \mathbb{R}} \text{ sur } E, \tag{2.55}$$

$$0 \in \rho(\mathcal{H}), \tag{2.56}$$

On note $P_\omega = (\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}_\omega)^{\frac{1}{2}}$ et on définit l'opérateur $\tilde{\Lambda}_\omega$ par

$$\begin{cases} D(\tilde{\Lambda}_\omega) = D(\mathcal{H}) \\ \tilde{\Lambda}_\omega = 2P_\omega e^{P_\omega} - G(1)\mathcal{H}(I - e^{2P_\omega}), \end{cases}$$

Remarque 2.31. 1. *Si les hypothèses* (2.51), (2.52) *et 2.26 sont vérifiées, alors elles restent vraies quand on remplace ω_0 par n'importe $\omega \geq \omega_0$.*

2. *Pour $\omega \geq \omega_0$, l'hypothèse* (2.52) *entraine que P_ω est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique dans E (Voir [4]).*

Lemme 2.32. *Sous les hypothèses* (2.51) $\sim$ (2.56). *Alors, il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tels que pour tout $\omega \geq \omega^*$, $\tilde{\Lambda}_\omega$ est d'inverse borné et*

$$\tilde{\Lambda}_\omega^{-1} = -(I - e^{2P_\omega})^{-1}(I - 2G(1)\mathcal{H}^{-1}P_\omega e^{P_\omega}(I - e^{2P_\omega})^{-1})^{-1}\mathcal{H}^{-1}G(-1). \tag{2.57}$$

Démonstration. Par le même raisonnement de (2.2.3), $I - e^{2P_\omega}$ est d'inverse borné et on peut écrire

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\omega &= 2P_\omega e^{P_\omega} - G(1)\mathcal{H}(I - e^{2P_\omega}) \\ &= [2P_\omega e^{P_\omega}(I - e^{2P_\omega})^{-1} - G(1)\mathcal{H}](I - e^{2P_\omega}) \\ &= -G(1)\mathcal{H}[I - 2\mathcal{H}^{-1}G(-1)P_\omega e^{P_\omega}(I - e^{2P_\omega})^{-1}](I - e^{2P_\omega}), \end{aligned}$$

alors

$$\tilde{\Lambda}_\omega = -G(1)\mathcal{H}[I - L_\omega](I - e^{2P_\omega}),$$

avec

$$L_\omega = 2\mathcal{H}^{-1}G(-1)P_\omega e^{P_\omega}(I - e^{2P_\omega})^{-1}.$$

$\mathcal{H}$, $I-e^{2P_\omega}$ sont des inverses bornés. Il reste à montrer que $\|L_\omega\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$ pour l'inversibilité de $I - L_\omega$. Soit

$$\| L_\omega \| = \| 2\mathcal{H}^{-1}G(-1)P_\omega e^{P_\omega}(I - e^{2P_\omega})^{-1} \| \leq \| \mathcal{H}^{-1} \| \| G(-1) \| \frac{2 \| P_\omega e^{P_\omega} \|}{1 - \| e^{2P_\omega} \|}.$$

D'après le Lemme de Dore-Yakubov, on a

$$\exists C,\, k > 0 : \|P_\omega e^{P_\omega}\| \leq Ce^{-k\sqrt{\omega}},\ \|e^{2P_\omega}\| \leq Ce^{-2k\sqrt{\omega}},$$

et si on pose $C' = \|G(-1)\| > 0$ alors

$$\|L_\omega\| \leq \| \mathcal{H}^{-1} \| \frac{2CC'e^{-k\sqrt{\omega}}}{1 - Ce^{-2k\sqrt{\omega}}},$$

de ce qu'implique l'existence $\omega^* > \omega_0$ tels que pour tout $\omega \geq \omega^*$ on a

$$\frac{2CC'e^{-k\sqrt{\omega}}}{1 - Ce^{-2k\sqrt{\omega}}} < \frac{1}{\| \mathcal{H}^{-1} \|},$$

alors

$$\| L_\omega \| < 1.$$

$\square$

Théorème 2.33. *Soit $f \in L^p(0,1;E)$ avec $1 < p < \infty$. Si les hypothèses (2.51) ∼(2.56) sont vérifiées et $\omega \geq \omega^*$. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes*

1 $d_1 \in (D(P^2), E)_{\frac{1}{2p},p}$ *et* $\tilde{\mathcal{H}}^{-1}\left(\tilde{d}_0 + P_\omega \tilde{d}_1 - \int_0^1 e^{(1-s)P_\omega}\tilde{f}(s)ds\right) \in (D(P^2), E)_{\frac{1}{2p},p}$.

2 Le problème (2.50) admet une unique solution stricte.

De plus, u est représentée par

$$\begin{aligned} u(x) &= G(-x)\left[\tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Lambda}_\omega^{-1}e^{xP_\omega}e^{P_\omega}\left(\tilde{d}_1 - \tilde{I}_1\right) - e^{(1-x)P_\omega}e^{P_\omega}\tilde{y}_0\right] \\ &+ G(-x)[\frac{1}{2}\tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Lambda}_\omega^{-1}P_\omega^{-1}e^{xP_\omega}\int_0^1 e^{sP_\omega}\tilde{f}(s)ds - \frac{1}{2}P_\omega^{-1}e^{(1-x)P_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)P_\omega}\tilde{f}(s)ds \\ &+ \frac{1}{2}P_\omega^{-1}\int_0^x e^{(x-s)P_\omega}\tilde{f}(s)ds + \frac{1}{2}P_\omega^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)P_\omega}\tilde{f}(s)ds] \\ &+ G(-x)\left[\tilde{\Lambda}^{-1}P_\omega e^{xP_\omega}\left(P_\omega^{-1}\tilde{d}_0 + \tilde{d}_1 - P^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)P_\omega}\tilde{f}(s)ds\right) + e^{(1-x)P_\omega}\tilde{d}_1\right], \end{aligned} \tag{2.58}$$

où

$$\begin{cases} \tilde{y}_0 = \tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{d}_0 + \tilde{\Lambda}_\omega^{-1}P_\omega\tilde{d}_1 + \tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Lambda}_\omega^{-1}e^{P_\omega}\tilde{d}_1 - 2\tilde{\Lambda}_\omega^{-1}P_\omega\tilde{I}_1 + \tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Lambda}_\omega^{-1}\tilde{J}_0 - \tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Lambda}_\omega^{-1}e^{P_\omega}\tilde{I}_1, \\ \tilde{d}_0 = G(1)d_0 + \mathcal{B}G(1)d_1, \\ \tilde{d}_1 = G(1)d_1, \\ \tilde{\mathcal{H}} = G(1)\mathcal{H}, \\ \tilde{I}_1 = \frac{1}{2}P_\omega^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)P_\omega}\tilde{f}(s)ds, \\ \tilde{J}_0 = \frac{1}{2}P_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sP_\omega}\tilde{f}(s)ds, \\ \tilde{f}(x) = G(x)f(x). \end{cases} \tag{2.59}$$

Chapitre 3

Problème aux limites avec des conditions non locales générales pour une classe d'équations elliptiques du second ordre

On étudie la même équation qu'au chapitre précédent, mais on fait apparaitre, dans les conditions aux limites, un deuxième opérateur $\mathcal{K}$ ce qui permet de généraliser et d'unifier le modèle proposé : on retrouve ici des résultats connus par ailleurs et on produit de plus des résultats nouveaux. Des complications techniques nous ont amené a ne traiter ici que le cas ou $\mathcal{B} = 0$.

3.1 Le cas où $\mathcal{B} = 0$

3.1.1 Position du problème et hypothèses

Soit E un espace de Banach complexe, f appartient à $L^p(0,1;E)$ où $1 < p < \infty$, d_0, d_1 sont des éléments de E ; $\mathcal{A}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont des opérateurs linéaires fermés dans E. Considérons l'équation différentielle opérationnelle du second ordre sur E,

$$u''(x) + \mathcal{A}u(x) = f(x), \quad p.p. \quad x \in (0,1), \tag{3.1}$$

avec des conditions aux limites non-locales

$$\begin{cases} \alpha u'(1) - \gamma \mathcal{H}u(0) = d_0, \\ \beta u'(0) + \delta \mathcal{K}u(1) = d_1, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$.

$$(\alpha, \gamma) \neq (0,0), \ (\alpha, \delta) \neq (0,0), \ (\beta, \gamma) \neq (0,0), \ (\beta, \delta) \neq (0,0). \tag{3.3}$$

Le but est de trouver une solution stricte u du (3.1)-(3.2), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$u \in W^{2,p}(0,1;E) \cap L^p(0,1;D(\mathcal{A})),$$

avec $u(0) \in D(\mathcal{H})$, $u(1) \in D(\mathcal{K})$ et satisfaisant (3.1)-(3.2). Comme précédemment on suppose que

$$E \text{ est un espace de Banach UMD.} \tag{3.4}$$

Les hypothèses, sur les opérateurs, pour résoudre le problème (3.1)-(3.2) sont les suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{A} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } E, \\ [0,+\infty[\subset \rho(\mathcal{A}) \text{ et } \sup\limits_{\lambda\geq 0} \| \lambda(\mathcal{A}-\lambda I)^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty. \end{cases} \tag{3.5}$$

Il est bien connu que l'hypothèse (3.5) implique que $-(-\mathcal{A})^{\frac{1}{2}}$ génère un semi-groupe analytique sur E (voir[4]). On suppose, De plus

$$\begin{cases} \text{pour tout } s \in \mathbb{R},\ (-\mathcal{A})^{is} \in \mathcal{L}(E) \text{ et il existe } \theta_{\mathcal{A}} \in]0,\pi[; \\ \text{tel que} : \sup\limits_{s\in\mathbb{R}} \| e^{-\theta_{\mathcal{A}}|s|}(-\mathcal{A})^{is} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty, \end{cases} \tag{3.6}$$

$\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ satisfait

$$0 \in \rho(\mathcal{H}) \cap \rho(\mathcal{K}), \tag{3.7}$$

et les conditions de commutativités suivantes

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{A}^{-1},\ \mathcal{A}^{-1}\mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K}^{-1}\mathcal{A}^{-1} \text{ et } \mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K}^{-1}\mathcal{H}^{-1}. \tag{3.8}$$

Soit $\mathcal{Q} = -(-\mathcal{A})^{\frac{1}{2}}$ et considérons l'opérateur Π défini par

$$D(\Pi) = D(\mathcal{Q}^2\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}) \text{ et } \Pi = \mathcal{Q}^2\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1} - \gamma\delta I,$$

on suppose que

$$\Pi \text{ est d'inverse borné.} \tag{3.9}$$

Soit Λ défini par $D(\Lambda) = D(\Pi(I - e^{2\mathcal{Q}})) = D(\Pi)$ et

$$\Lambda = \Pi\left(I - e^{2\mathcal{Q}}\right) + 2\left(\alpha\delta\mathcal{H}^{-1} + \gamma\beta\mathcal{K}^{-1}\right)\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}},$$

on suppose que

$$\Lambda \text{ est d'inverse borné.} \tag{3.10}$$

Remarque 3.1. *Supposons* (3.4) $\sim$ (3.10).

1. *L'hypothèse* (3.9) *implique que* $(\alpha\beta, \gamma\delta) \neq (0,0)$ *et cela est assuré par* (3.3).
2. *Concernant* Π *on a*
   - *si* $\alpha\beta = 0$, *alors* $D(\Pi) = E$ *et* $\Pi = -\gamma\delta I$ *est d'inverse borné,*
   - *si* $\alpha\beta \neq 0$ *et* $\mathcal{H} = \mathcal{K} = I$ *alors*

   $$D(\Pi) = D(\mathcal{Q}^2) \text{ et } \Pi = \alpha\beta(\mathcal{Q}^2 - \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}I) = -\alpha\beta(\mathcal{A} - \left(\frac{-\gamma\delta}{\alpha\beta}\right)I),$$

   donc (3.9) *est vérifiée si et seulement si* $\dfrac{-\gamma\delta}{\alpha\beta} \in \rho(\mathcal{A})$,
   - *si* $\alpha\beta \neq 0$ *et* $\mathcal{H} = \mathcal{K} = \mathcal{Q}$, *alors*

   $$D(\Pi) = E \text{ et } \Pi = (\alpha\beta - \gamma\delta)I.$$

   donc (3.9) *est vérifiée si et seulement si* $\gamma\delta \neq \alpha\beta$,

– *si* $\alpha\beta \neq 0$ *et* $(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = (\mathcal{Q}, I)$ *ou* $(I, \mathcal{Q})$ *alors*

$$D(\Pi) = D(\mathcal{Q}) \ \ et \ \ \Pi = \alpha\beta(\mathcal{Q} - \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} I),$$

donc (3.9) *est vérifiée si et seulement si* $\dfrac{\gamma\delta}{\alpha\beta} \in \rho(\mathcal{Q})$.

3. *Si* $x \in E$, *alors*

$$\alpha\beta\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}x \in D(\mathcal{Q}^2),$$

donc $\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}x \in D(\mathcal{Q}^2)$, *si* $\alpha\beta \neq 0$.

Démonstration. Il suffit d'écrire, pour tout $x \in E$, $\Pi^{-1}x \in D(\Pi) = D(\mathcal{Q}^2\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1})$. Alors

$$\alpha\beta\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}x = \alpha\beta\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}x \in D(\mathcal{Q}^2).$$

□

3.1.2 Réprésentation de la solution du (3.1)-(3.2)

Pour résoudre le problème (3.1)-(3.2), on utilise la même méthode que dans le chapitre précédent. Sous les hypothèses (3.4)-(3.10), on suppose que le problème admet une solution stricte u ; c'est-à-dire $u \in W^{2,p}(0,1;E) \cap L^p(0,1;D(\mathcal{A}))$, $u(0) \in D(\mathcal{H})$, $u(1) \in D(\mathcal{K})$ et u vérifie (3.1)-(3.2). Alors, pour $x \in [0,1]$ on a

$$u(x) = e^{x\mathcal{Q}}y_0 + e^{(1-x)\mathcal{Q}}z_1 + I_x + J_x, \tag{3.11}$$

avec

$$\begin{cases} I_x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x e^{(x-s)\mathcal{Q}}\mathcal{Q}^{-1}f(s)ds \\ J_x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^1 e^{(s-x)\mathcal{Q}}\mathcal{Q}^{-1}f(s)ds, \end{cases}$$

(voir [2, p. 3]). Maintenant, pour obtenir la réprésentation finale de u, il suffit de calculer y_0 et z_1 à partir des données $d_0, d_1, f, \mathcal{A}, \mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$. On a $y_0, z_1 \in D(\mathcal{Q})$ et pour tout $x \in (0,1)$,

$$u'(x) = \mathcal{Q}e^{x\mathcal{Q}}y_0 - \mathcal{Q}e^{(1-x)\mathcal{Q}}z_1 + \mathcal{Q}I_x - \mathcal{Q}J_x, \tag{3.12}$$

donc

$$\begin{cases} u(0) = y_0 + e^{\mathcal{Q}}z_1 + J_0 \\ u(1) = e^{\mathcal{Q}}y_0 + z_1 + I_1 \\ u'(0) = \mathcal{Q}y_0 - \mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}z_1 - \mathcal{Q}J_0 \\ u'(1) = \mathcal{Q}e^{Q}y_0 - \mathcal{Q}z_1 + \mathcal{Q}I_1, \end{cases} \tag{3.13}$$

alors

$$\begin{cases} \alpha\mathcal{Q}e^{Q}y_0 - \alpha\mathcal{Q}z_1 + \alpha\mathcal{Q}I_1 - \mathcal{H}\left(\gamma y_0 + \gamma e^{\mathcal{Q}}z_1 + \gamma J_0\right) = d_0 \\ \beta\mathcal{Q}y_0 - \beta\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}z_1 - \beta\mathcal{Q}J_0 + \mathcal{K}\left(\delta e^{\mathcal{Q}}y_0 + \delta z_1 + \delta I_1\right) = d_1, \end{cases}$$

on peut écrire

$$\begin{cases} \left(\alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}e^{Q} - \gamma I\right)\overline{y_0} - \left(\alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q} + \gamma e^{\mathcal{Q}}\right)\overline{z_1} = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}^{-2}d_0 + \gamma\mathcal{Q}^{-2}J_0 - \alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}I_1 \\ \left(\beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q} + \delta e^{\mathcal{Q}}\right)\overline{y_0} + \left(\delta I - \beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}\right)\overline{z_1} = \mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-2}d_1 + \beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}J_0 - \delta\mathcal{Q}^{-2}I_1, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases}\overline{y_0} = \mathcal{Q}^{-2}y_0,\\ \overline{z_1} = \mathcal{Q}^{-2}z_1.\end{cases}$$

On sait que $\overline{y_0}, \overline{z_1} \in D(\mathcal{Q}^2)$, dans le système précédent on peut appliquer $\delta I - \beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}$ à la première équation et $\alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q} + \gamma e^{\mathcal{Q}}$ à la deuxième équation, et puis on utilise l'hypothèse (3.8), cela implique

$$\begin{cases}\left(\delta I - \beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}\right)\left(\alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}} - \gamma I\right)\overline{y_0} - \left(\delta I - \beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}\right)\left(\alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q} + \gamma e^{\mathcal{Q}}\right)\overline{z_1}\\ = \left(\delta I - \beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}\right)\left(\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}^{-2}d_0 + \gamma\mathcal{Q}^{-2}J_0 - \alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}I_1\right)\\ \left(\alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q} + \gamma e^{\mathcal{Q}}\right)\left(\beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q} + \delta e^{\mathcal{Q}}\right)\overline{y_0} + \left(\alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q} + \gamma e^{\mathcal{Q}}\right)\left(\delta I - \beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}\right)\overline{z_1}\\ = \left(\alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q} + \gamma e^{\mathcal{Q}}\right)\left(\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-2}d_1 + \beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}J_0 - \delta\mathcal{Q}^{-2}I_1\right),\end{cases}$$

ainsi, par l'addition des deux équations, on déduit que

$$\left[-\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^2e^{2\mathcal{Q}} + \alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^2 + 2\alpha\delta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}} + 2\gamma\beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}} - \gamma\delta I + \gamma\delta e^{2\mathcal{Q}}\right]\overline{y_0}$$

$$= e^{\mathcal{Q}}\left[-\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}d_0 + \alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}I_1 + \gamma\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-2}d_1 - \gamma\delta\mathcal{Q}^{-2}I_1\right] + \delta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}^{-2}d_0$$
$$+\gamma\delta\mathcal{Q}^{-2}J_0 - 2\alpha\delta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}I_1 + \alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}d_1 + \alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}J_0,$$

on note que

$$-\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^2e^{2\mathcal{Q}} + \alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^2 + 2\alpha\delta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}} + 2\gamma\beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}} - \gamma\delta I + \gamma\delta e^{2\mathcal{Q}} = \Lambda,$$

on déduit que

$$\begin{array}{rcl}\overline{y_0} & = & e^{\mathcal{Q}}\Phi + \delta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}^{-2}d_0 + \gamma\delta\Lambda^{-1}\mathcal{Q}^{-2}J_0 - 2\alpha\delta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}I_1\\ & + & \alpha\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}d_1 + \alpha\beta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}J_0,\end{array} \tag{3.14}$$

où

$$\Phi = -\beta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}d_0 + \alpha\beta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}I_1 + \gamma\Lambda^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-2}d_1 - \gamma\delta\Lambda^{-1}\mathcal{Q}^{-2}I_1. \tag{3.15}$$

Alors

$$\begin{array}{rcl}\alpha\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}d_1 & = & \mathcal{Q}^{-2}y_0 - e^{\mathcal{Q}}\Phi - \mathcal{Q}^{-2}\delta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}d_0 - \mathcal{Q}^{-2}\gamma\delta\Lambda^{-1}J_0\\ & + & 2\mathcal{Q}^{-2}\alpha\delta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}I_1 - \alpha\beta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}J_0,\end{array} \tag{3.16}$$

et d'après l'assertion 3 de la remarque (3.1), on en déduit que $\alpha\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}d_1 \in D(\mathcal{Q}^2)$, alors

$$\alpha\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_1 \in D(\mathcal{Q}).$$

Maintenant, (3.14) devient

$$\begin{array}{rcl}y_0 & = & \mathcal{Q}^2e^{\mathcal{Q}}\Phi + \delta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}d_0 + \gamma\delta\Lambda^{-1}J_0 - 2\alpha\delta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}I_1\\ & + & \mathcal{Q}\alpha\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_1 + \mathcal{Q}\alpha\beta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}J_0,\end{array} \tag{3.17}$$

De la même manière, on a

$$\begin{cases}\left(\beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}+\delta e^{Q}\right)\left(\alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}e^{Q}-\gamma\right)\overline{y_0}-\left(\beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}+\delta e^{Q}\right)\left(\alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}+\gamma e^{\mathcal{Q}}\right)\overline{z_1}\\ =\left(\beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}+\delta e^{Q}\right)\left(\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}^{-2}d_0+\gamma\mathcal{Q}^{-2}J_0-\alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}I_1\right)\\ \left(\alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}e^{Q}-\gamma\right)\left(\beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}+\delta e^{\mathcal{Q}}\right)\overline{y_0}+\left(\alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}e^{Q}-\gamma\right)\left(\delta-\beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}\right)\overline{z_1}\\ =\left(\alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}e^{Q}-\gamma\right)\left(\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-2}d_1+\beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}J_0-\delta\mathcal{Q}^{-2}I_1\right),\end{cases}$$

par la soustraction des deux équations, on obtient

$$\begin{aligned}\Lambda\overline{z_1} &= e^{\mathcal{Q}}\left[-\delta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}^{-2}d_0+\alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}d_1-\gamma\delta\mathcal{Q}^{-2}J_0+\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}J_0\right]\\ &- \beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}d_0-\gamma\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-2}d_1+\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}I_1-2\gamma\beta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}J_0+\gamma\delta\mathcal{Q}^{-2}I_1,\end{aligned}$$

cela implique que

$$\begin{aligned}\overline{z_1} &= e^{\mathcal{Q}}\Psi-\beta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}d_0-\gamma\Lambda^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-2}d_1+\alpha\beta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}I_1\\ &- 2\gamma\beta\Lambda^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}J_0+\gamma\delta\Lambda^{-1}\mathcal{Q}^{-2}I_1,\end{aligned}\tag{3.18}$$

où

$$\Psi=-\delta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}^{-2}d_0+\alpha\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}d_1-\gamma\delta\Lambda^{-1}\mathcal{Q}^{-2}J_0+\alpha\beta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}J_0.\tag{3.19}$$

D'après l'assertion 3 de la remarque (3.1), on déduit que

$$\begin{aligned}z_1 &= \mathcal{Q}^2e^{\mathcal{Q}}\Psi-\mathcal{Q}\beta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_0-\gamma\Lambda^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_1+\mathcal{Q}^2\alpha\beta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}I_1\\ &- 2\gamma\beta\Lambda^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}J_0+\mathcal{Q}^2\gamma\delta\Lambda^{-1}I_1.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Par la substitution de (3.17) et (3.20) dans la formule (3.11), on obtient

$$\begin{aligned}u(x) &= \mathcal{Q}^2e^{x\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}}\Phi+\delta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}e^{x\mathcal{Q}}d_0+\gamma\delta\Lambda^{-1}e^{x\mathcal{Q}}J_0-2\alpha\delta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}e^{x\mathcal{Q}}I_1\\ &+ \mathcal{Q}\alpha\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}e^{x\mathcal{Q}}d_1+\mathcal{Q}^2\alpha\beta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}e^{x\mathcal{Q}}J_0+\mathcal{Q}^2e^{(1-x)\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}}\Psi\\ &- \mathcal{Q}\beta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}e^{(1-x)\mathcal{Q}}d_0-\gamma\Lambda^{-1}\mathcal{K}^{-1}e^{(1-x)\mathcal{Q}}d_1+\mathcal{Q}^2\gamma\delta\Lambda^{-1}e^{(1-x)\mathcal{Q}}I_1\\ &+ \mathcal{Q}^2\alpha\beta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}e^{(1-x)\mathcal{Q}}I_1-2\gamma\beta\Lambda^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}e^{(1-x)\mathcal{Q}}J_0+I_x+J_x,\end{aligned}$$

avec Φ et Ψ sont réprésentés respectivement par (3.15), (3.19). Finalement, on peut écrire u sous la forme suivante

$$u(x)=R(x,d_0,d_1,f)+DV_1(x,f)+DV_2(x,f)+S(x,d_0,d_1,f),\tag{3.21}$$

où

$$R(x,d_0,d_1,f)=e^{x\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}}\Phi+e^{(1-x)\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}}\Psi,$$

$$\begin{aligned}DV_1(x,f) &= \frac{1}{2}\gamma\delta\Lambda^{-1}\mathcal{Q}^{-1}e^{x\mathcal{Q}}\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}}f(s)ds+\frac{1}{2}\gamma\delta\Lambda^{-1}\mathcal{Q}^{-1}e^{(1-x)\mathcal{Q}}\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds\\ &+ \frac{1}{2}\mathcal{Q}^{-1}\int_0^x e^{(x-s)\mathcal{Q}}f(s)ds+\frac{1}{2}\mathcal{Q}^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)\mathcal{Q}}f(s)ds,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
DV_2(x,f) &= \frac{1}{2}\mathcal{Q}\alpha\beta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}e^{x\mathcal{Q}}\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}}f(s)ds \\
&+ \frac{1}{2}\mathcal{Q}\alpha\beta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}e^{(1-x)\mathcal{Q}}\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
S(x,d_0,d_1,f) &= \delta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}e^{x\mathcal{Q}}d_0 - \mathcal{Q}\beta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}e^{(1-x)\mathcal{Q}}d_0 + \mathcal{Q}\alpha\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}e^{x\mathcal{Q}}d_1 \\
&- \gamma\Lambda^{-1}\mathcal{K}^{-1}e^{(1-x)\mathcal{Q}}d_1 - \alpha\delta\Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}e^{x\mathcal{Q}}\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds \\
&- \gamma\beta\Lambda^{-1}\mathcal{K}^{-1}e^{(1-x)\mathcal{Q}}\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}}f(s)ds. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

3.1.3 Quelques résultats

Dans cette section, on donne quelques résultats concernant la régularité de la solution u de problème (3.1)-(3.2) en étudiant la régularité des termes R, DV_1, DV_2 et S.

Proposition 3.2. *Soient $d_0, d_1 \in E$ et $f \in L^p(0,1;E)$ avec $1 < p < +\infty$. Alors*

$$x \mapsto \mathcal{A}\ R(x,d_0,d_1,f) \in L^p(0,1;E).$$

Démonstration. Pour tout $\psi \in E$, $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{\mathcal{Q}}\psi \in D(\mathcal{Q}^n)$, donc

$$\mathcal{A}\ e^{\cdot\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}}\psi = e^{\cdot\mathcal{Q}}\ \mathcal{A}\ e^{\mathcal{Q}}\psi$$

et $\mathcal{A}\ e^{\cdot\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}}\psi$ est borné et appartient à $L^p(0,1;E)$. Il suffit de remarquer qu'on peut écrire $\mathcal{A}\ R(.,d_0,d_1,f)$ comme une somme des termes $Z\,\mathcal{A}\ e^{\cdot\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}}\psi$, $Z\,\mathcal{A}\ e^{(1-.)\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}}\psi$, où $Z \in \mathcal{L}(E)$ et $\psi \in E$. □

Remarque 3.3. ***(Corollaire du Théorème de Dore-Venni)***
Sous les hypothèses (3.4) $\sim$ (3.6) *et soit $f \in L^p(0,1;E)$ avec $1 < p < \infty$.*

$$\mathcal{Q}\int_0^x e^{(x-s)\mathcal{Q}}f(s)ds \in L^p(0,1;E),$$

par conséquent,

$$\mathcal{Q}\int_x^1 e^{(s-x)\mathcal{Q}}f(s)ds \in L^p(0,1;E).$$

Proposition 3.4. *Si $f \in L^p(0,1;E)$, $1 < p < \infty$. Alors*

$$\mathcal{A}\ DV_1(.,f) \in L^p(0,1;E).$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}\ DV_1(x,f) &= -\frac{1}{2}\gamma\delta\Lambda^{-1}\mathcal{Q}e^{x\mathcal{Q}}\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}}f(s)ds - \frac{1}{2}\gamma\delta\Lambda^{-1}\mathcal{Q}e^{(1-x)\mathcal{Q}}\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\mathcal{Q}\int_0^x e^{(x-s)\mathcal{Q}}f(s)ds - \frac{1}{2}\mathcal{Q}\int_x^1 e^{(s-x)\mathcal{Q}}f(s)ds, \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

donc

$$\mathcal{A}\ DV_1(x,f) = -\frac{1}{2}\gamma\delta\Lambda^{-1}\left[\mathcal{Q}\int_0^1 e^{(x+s)\mathcal{Q}}f(s)ds + \mathcal{Q}\int_0^1 e^{[(1-x)+(1-s)]\mathcal{Q}}f(s)ds\right]$$
$$-\frac{1}{2}\mathcal{Q}\int_0^x e^{(x-s)\mathcal{Q}}f(s)ds - \frac{1}{2}\mathcal{Q}\int_x^1 e^{(s-x)\mathcal{Q}}f(s)ds.$$

D'après la remarque (3.3), on a $x \mapsto \frac{1}{2}\mathcal{Q}\int_0^x e^{(x-s)\mathcal{Q}}f(s)ds$ et $x \mapsto \frac{1}{2}\mathcal{Q}\int_x^1 e^{(s-x)\mathcal{Q}}f(s)ds$ sont dans $L^p(0,1;E)$. Par conséquant $x \mapsto \mathcal{Q}\int_0^1 e^{(x+s)\mathcal{Q}}f(s)ds$ (voir [22, p. 215]) et $x \mapsto \mathcal{Q}\int_0^1 e^{[(1-x)+(1-s)]\mathcal{Q}}f(s)ds$ appartient à $L^p(0,1;E)$, où $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, d'où

$$\mathcal{A}\ DV_1(.,f) \in L^p(0,1;E).$$

□

D'après H.Triebel [45], on a

Remarque 3.5. *Soit $p \in]1,+\infty[$. Alors*

1. *$\mathcal{Q}^2 e^{\cdot\mathcal{Q}}x \in L^p(0,1;E)$ si et seulement si $x \in D(\mathcal{Q}^2,E)_{\frac{1}{2p},p}$.*
2. *$\mathcal{Q}e^{\cdot\mathcal{Q}}x \in L^p(0,1;E)$ si et seulement si $x \in D(\mathcal{Q}^2,E)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$.*

Lemme 3.6. *Si $f \in L^p(0,1;E)$, $1 < p < \infty$. Alors*

$$\mathcal{A}\ DV_2(.,f) \in L^p(0,1;E).$$

Démonstration. D'après la remarque 3.3, on peut déduire que

$$e^{\cdot\mathcal{Q}}\mathcal{Q}\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}}f(s)ds \in L^p(0,1;E).$$

De plus,

$$\Pi^{-1}\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}(E) \subset D(\mathcal{Q}^2) = D(\mathcal{A}),$$

(voir l'assertion 3 de la remarque 3.1) et $\mathcal{A}$ est fermé, donc $\mathcal{A}\Pi^{-1}\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\mathcal{A}\Pi^{-1}\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}e^{x\mathcal{Q}}\mathcal{Q}\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}}f(s)ds$$

et

$$\mathcal{A}\Pi^{-1}\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}e^{(1-x)\mathcal{Q}}\mathcal{Q}\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds$$

appartient à $L^p(0,1;E)$. D'où

$$\mathcal{A}DV_2 \in L^p(0,1;E).$$

□

Lemme 3.7. *On écrit Λ^{-1} sous la forme*

$$\Lambda^{-1} = \Pi^{-1} + \Pi^{-1}W,$$

avec

$$W \in \mathcal{L}(E) \text{ et } W(E) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{Q}^k).$$

Démonstration. Posons

$$\begin{cases} X = 2\Pi^{-1}\left(\alpha\delta\mathcal{H}^{-1} + \gamma\beta\mathcal{K}^{-1}\right)\mathcal{Q}e^{\mathcal{Q}}(I - e^{2\mathcal{Q}})^{-1} \in \mathcal{L}(E) \\ S = -e^{2\mathcal{Q}} \in \mathcal{L}(E) \end{cases}$$

On déduit que

$$\Lambda^{-1} = (I+S)^{-1}(I+X)^{-1}\Pi^{-1}.$$

Soit $U = -X(I+X)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ et $V = -S(I+S)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$,
alors $(I+X)^{-1} = I + U$ et $(I+S)^{-1} = I + V$.
On obtient

$$\Lambda^{-1} = (I+U)(I+V)\Pi^{-1} = (I + V + U + UV)\Pi^{-1},$$

et pour cela

$$\Lambda^{-1} = \Pi^{-1} + \Pi^{-1}W,$$

avec $W = V + U + UV = e^{\frac{1}{2}\mathcal{Q}}M$ où

$$M = \left[e^{\frac{3}{2}\mathcal{Q}} - 2\Pi^{-1}\left(\alpha\delta\mathcal{H}^{-1} + \gamma\beta\mathcal{K}^{-1}\right)\mathcal{Q}e^{\frac{1}{2}\mathcal{Q}}(I+X)^{-1} + X(I+X)^{-1}e^{\frac{3}{2}\mathcal{Q}}\right](I+S)^{-1} \in \mathcal{L}(E).$$

□

Remarque 3.8. *On appliquant le Lemme précédent 3.7 dans la formule* (3.22)*, nous trouvons*

$$\begin{aligned} S(x, d_0, d_1, f) &= \mathcal{Q}\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}e^{x\mathcal{Q}}[\delta\mathcal{Q}^{-1}d_0 + \alpha\mathcal{K}^{-1}d_1 - \alpha\delta\mathcal{Q}^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds] \\ &\quad -\mathcal{Q}\Pi^{-1}\mathcal{K}^{-1}e^{(1-x)\mathcal{Q}}[\beta\mathcal{H}^{-1}d_0 + \gamma\mathcal{Q}^{-1}d_1 + \gamma\beta\mathcal{Q}^{-1}\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}}f(s)ds] \\ &\quad +e^{x\mathcal{Q}}\zeta_0 - e^{(1-x)\mathcal{Q}}\zeta_1, \end{aligned} \tag{3.24}$$

où

$$\begin{cases} \zeta_0 = \mathcal{Q}\Pi^{-1}W[\delta\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{H}^{-1}d_0 + \alpha\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_1 \\ -\alpha\delta\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{H}^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds] \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{Q}^k), \\ \zeta_1 = \mathcal{Q}\Pi^{-1}W[\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_0 + \gamma\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_1 \\ +\gamma\beta\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{K}^{-1}\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}}f(s)ds] \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{Q}^k). \end{cases} \tag{3.25}$$

3.1.4 Résultat principal

Théorème 3.9. *Sous les hypothèses* (3.4) $\sim$ (3.10)*. Soit* $f \in L^p(0,1;E)$ *avec* $1 < p < \infty$*. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes*

1. $\mathcal{Q}\alpha\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_1 + \delta\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\left[d_0 - \alpha\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds\right] \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p}$ *et*
   $-\mathcal{Q}\beta\Pi^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{H}^{-1}d_0 - \gamma\Pi^{-1}\mathcal{K}^{-1}\left[d_1 + \beta\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}}f(s)ds\right] \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p}$.
2. *u donnée par* (3.21) *est l'unique solution stricte de* (3.1)-(3.2).

Démonstration. Rappelons que $u(x) = R(x, d_0, d_1, f) + DV_1(x, f) + DV_2(x, f) + S(x, d_0, d_1, f)$. On utilise les Propositions précédentes 3.2, 3.4 et le Lemme 3.6 ; il suffit d'étudier le terme S. D'après la Remarque 3.8, on a

$$\begin{aligned} S(x, d_0, d_1, f) &= e^{x\mathcal{Q}}\left(\mathcal{Q}\alpha\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_1 + \delta\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\left[d_0 - \alpha\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds\right]\right) \\ &\quad -e^{(1-x)\mathcal{Q}}\left(\mathcal{Q}\beta\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_0 + \gamma\Pi^{-1}\mathcal{K}^{-1}\left[d_1 + \beta\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}}f(s)ds\right]\right) \\ &\quad +e^{x\mathcal{Q}}\zeta_0 - e^{(1-x)\mathcal{Q}}\zeta_1 \\ &= J_1(x) + J_2(x) + J_3(x). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Puisque $\zeta_0,\ \zeta_1 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{Q}^k)$, $J_3(.)$ est régulière, de sorte que la régularité de S est l'une de $J_1 + J_2$. $J_1(.) \in L^p(0, 1; E)$ si et seulement si

$$\mathcal{Q}\alpha\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_1 + \delta\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\left[d_0 - \alpha\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}}f(s)ds\right] \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p}.$$

De même, $J_2(.) \in L^p(0, 1; E)$ si et seulement si

$$-\mathcal{Q}\beta\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_0 - \gamma\Pi^{-1}\mathcal{K}^{-1}\left[d_1 + \beta\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}}f(s)ds\right] \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p}.$$

□

Remarque 3.10. *En ce qui concerne l'affirmation 1 du Théorème précédent 3.9, nous pouvons remarquer que dans la première ligne $\mathcal{Q}\alpha\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_1$ est bien défini. En effet,*

1. *Si $\beta \neq 0$ puis en raison de remarquer 3.1 l'assertion 3*

$$\mathcal{Q}\alpha\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1} = \frac{1}{\beta}\mathcal{Q}\alpha\beta\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1} \in \mathcal{L}(E).$$

2. *Si $\beta = 0$, la deuxième ligne dans l'affirmation 1 du Théorème précédent 3.9 devient $-\gamma\Pi^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_1 \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p} \subset D(\mathcal{Q})$ et depuis $\gamma \neq 0$, $\Pi^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{Q}^{-1}\Pi^{-1}\mathcal{K}^{-1}$; on a $d_1 \in D(\mathcal{Q})$. De plus, nous pouvons écrire*

$$\mathcal{Q}\alpha\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_1 = \alpha\Pi^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}d_1.$$

De même, dans la deuxième ligne de l'affirmation 1 du Théorème 3.9 $-\mathcal{Q}\beta\Pi^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{H}^{-1}d_0$ est bien défini.

3.1.5 Problème avec un paramètre spectral

Notre résultat précédent concernant le problème (3.1)-(3.2) exige l'hypothèse d'inversibilité (3.10) qui peut être difficile à vérifier dans les applications. Pour cela, nous introduisons un paramètre spectral positif ω et nous étudions le nouveau problème

$$\begin{cases} u''(x) + \mathcal{A}u(x) - \omega u(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ \alpha u'(1) - \gamma\mathcal{H}u(0) = d_0, \\ \beta u'(0) + \delta\mathcal{K}u(1) = d_1. \end{cases} \tag{3.27}$$

Ce problème correspond au problème (3.1)-(3.2) où $\mathcal{A}$ est remplacé par $\mathcal{A}_\omega = \mathcal{A} - \omega I$.

Les hypothèses

On suppose qu'il existe $\omega_0 \geq 0$ fixé tel que

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\omega_0} \ \text{ un opérateur linéaire fermé dans } E, \\ [0,+\infty[\subset \rho(\mathcal{A}_{\omega_0}) \text{ et } \sup\limits_{\lambda\geq 0} \| \lambda(\mathcal{A}_{\omega_0}-\lambda I)^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty. \end{cases} \tag{3.28}$$

$$\begin{cases} \text{Pour tout } s\in\mathbb{R},\ (-\mathcal{A}_{\omega_0})^{is}\in\mathcal{L}(E) \text{ et il existe } \theta_{\mathcal{A}_{\omega_0}}\in]0,\pi[; \\ \text{tel que} : \sup\limits_{s\in\mathbb{R}} \| e^{-\theta_{\mathcal{A}_{\omega_0}}|s|}(-\mathcal{A}_{\omega_0})^{is} \|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty. \end{cases} \tag{3.29}$$

De plus, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ doivent satisfaire

$$0 \in \rho(\mathcal{H}) \cap \rho(\mathcal{K}). \tag{3.30}$$

et les relations de commutativité suivantes

$$\mathcal{A}_{\omega_0}^{-1}\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{A}_{\omega_0}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{\omega_0}^{-1}\mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K}^{-1}\mathcal{A}_{\omega_0}^{-1}. \tag{3.31}$$

Notons que pour $\omega \geq \omega_0$, $\mathcal{Q}_\omega = -(-\mathcal{A}_\omega)^{\frac{1}{2}}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur E (voir [4]). De plus, si $0 \in \rho(\mathcal{A}_\omega)$, alors $0 \in \rho(\mathcal{Q}_\omega)$.
On définit aussi l'opérateur linéaire Π_ω sur son domaine $D(\Pi_\omega)$ par

$$\Pi_\omega = \alpha\beta\mathcal{Q}_\omega^2\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1} - \gamma\delta I.$$

Résultats fondamentaux

Lemme 3.11. *Sous les hypothèses* (3.28)-(3.31)*. Si*

$$\exists\omega_1 \geq \omega_0,\ \exists c_1 \geq 0 :\ \forall\omega \geq \omega_1\ 0 \in \rho(\Pi_\omega) \ \textit{et}\ \|\Pi_\omega^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq c_1, \tag{3.32}$$

alors, il existe $\omega^* \geq \omega_1 \geq \omega_0$ tel que, pour $\omega \geq \omega^*$, Λ_ω est admet un inverse borné et

$$\Lambda_\omega^{-1} = (I - e^{2\mathcal{Q}_\omega})^{-1}\left[I + 2\Pi_\omega^{-1}(\alpha\delta\mathcal{H}^{-1} + \gamma\beta\mathcal{K}^{-1})\mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega}(I - e^{2\mathcal{Q}_\omega})^{-1}\right]\Pi_\omega^{-1}.$$

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} \Lambda_\omega &= (\alpha\beta\mathcal{Q}_\omega^2\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1} - \gamma\delta I)(I - e^{2\mathcal{Q}_\omega}) + 2(\alpha\delta\mathcal{H}^{-1} + \gamma\beta\mathcal{K}^{-1})\mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega} \\ &= \left[(\alpha\beta\mathcal{Q}_\omega^2\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1} - \gamma\delta I) + 2(\alpha\delta\mathcal{H}^{-1} + \gamma\beta\mathcal{K}^{-1})\mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega}(I - e^{2\mathcal{Q}_\omega})^{-1}\right](I - e^{2\mathcal{Q}_\omega}) \\ &= \Pi_\omega\left[I + 2\Pi_\omega^{-1}(\alpha\delta\mathcal{H}^{-1} + \gamma\beta\mathcal{K}^{-1})\mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega}(I - e^{2\mathcal{Q}_\omega})^{-1}\right](I - e^{2\mathcal{Q}_\omega}), \end{aligned}$$

alors

$$\Lambda_\omega = \Pi_\omega(I - L_\omega)(I - e^{2\mathcal{Q}_\omega}),$$

avec

$$L_\omega = -2\Pi_\omega^{-1}(\alpha\delta\mathcal{H}^{-1} + \gamma\beta\mathcal{K}^{-1})\mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega}(I - e^{2\mathcal{Q}_\omega})^{-1}.$$

Pour prouver l'inversibilité de Λ_ω, il suffit de montrer l'inversibilité de $I - L_\omega$. Donc prouvons que $\| L_\omega \|_{\mathcal{L}(E)} < 1$. Soit

$$\| L_\omega \|_{\mathcal{L}(E)} = \| 2\Pi_\omega^{-1}(\alpha\delta\mathcal{H}^{-1} + \gamma\beta\mathcal{K}^{-1})\mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega}(I - e^{2\mathcal{Q}_\omega})^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)}$$

$$\leq \| \Pi_\omega^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)} (| \alpha\delta | \| \mathcal{H}^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)} + | \gamma\beta | \| \mathcal{K}^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)}) \frac{2 \| \mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega} \|_{\mathcal{L}(E)}}{1 - \| e^{2\mathcal{Q}_\omega} \|_{\mathcal{L}(E)}}.$$

D'après le Lemme de Dore-Yakubov [20], pour $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe des constantes $C, k > 0$ (qui ne dépendent pas de ω), pour tout $x \geq 1$, on a

$$\| (-\mathcal{A} + \omega I)^\alpha e^{-x(-\mathcal{A}+\omega I)^{1/2}} \|_{\mathcal{L}(E)} \leq C e^{-kx\sqrt{\omega}},$$

en particulier

$$\| \mathcal{Q}_\omega e^{\mathcal{Q}_\omega} \|_{\mathcal{L}(E)} \leq C e^{-k\sqrt{\omega}} \text{ et } \| e^{2\mathcal{Q}_\omega} \|_{\mathcal{L}(E)} \leq C e^{-2k\sqrt{\omega}}.$$

Alors

$$\| L_\omega \|_{\mathcal{L}(E)} \leq \| \Pi_\omega^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)} (| \alpha\delta | \| \mathcal{H}^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)} + | \gamma\beta | \| \mathcal{K}^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)}) \frac{2Ce^{-k\sqrt{\omega}}}{1 - Ce^{-2k\sqrt{\omega}}}.$$

L'hypothèse (3.32) implique l'existence de $\omega^* > \omega_1$ tel que $\| L_\omega \|_{\mathcal{L}(E)} < 1$ pour tout $\omega \geq \omega^*$. □

Le Lemme suivant donne des conditions suffisantes pour que l'hypothèse (3.32) doit être vraie.

Lemme 3.12. *Sous les hypothèses* (3.3) *et* (3.28) $\sim$ (3.31). *De plus, on suppose que l'une de ces conditions est satisfaite*

1. $\alpha\beta = 0$.
2. $\alpha\beta \neq 0$, $\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ *et* $\mathcal{H} = \mathcal{K} = I$.
3. $\alpha\beta \neq 0$, $\mathcal{H}, \mathcal{K} \in \mathcal{L}(E)$.

Alors, (3.32) *est vérifiée.*

Démonstration. Notons d'abord que, d'après l'hypothèse (3.29), il existe $c \geq 0$ tel que pour tout $\omega > \omega_0$, on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_\omega^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} &= \|(\mathcal{A}_{\omega_0} - (\omega - \omega_0)I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} & (3.33) \\ &\leq \frac{c}{\omega - \omega_0}. & (3.34) \end{aligned}$$

Maintenant, si l'assertion 1 est vérifiée, alors $\Pi_\omega = -\gamma\delta I$ et (3.32) est vérifiée aussi.
Si l'assertion 2 est vérifiée, on a

$$\begin{aligned} \Pi_\omega &= \alpha\beta(\mathcal{Q}_\omega^2 - \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} I) & (3.35) \\ &= -\alpha\beta(\mathcal{A}_\omega - (-\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta})I) \\ &= -\alpha\beta(\mathcal{A}_{\omega_0} - (\omega - \omega_0 - \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta})I). \end{aligned}$$

Alors, pour $\omega > \omega_0$ (assez grand), $0 \in \rho(\Pi_\omega)$ et utilisant (3.33), on obtient

$$\begin{aligned} \|(\Pi_\omega)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} &= |\alpha\beta| \| \left(\mathcal{A}_{\omega_0} - (\omega - \omega_0 - \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta})I\right)^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)} \\ &\leq \frac{c}{\omega - \omega_0 - \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}}, \end{aligned}$$

qui prouve l'hypothèse (3.32).
Si l'assertion 3 est vérifiée, alors

$$\Pi_\omega = (\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1} - \gamma\delta\mathcal{Q}_\omega^{-2})\mathcal{Q}_\omega^{-2} = (\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1} + \gamma\delta\mathcal{A}_\omega^{-1})\mathcal{Q}_\omega^{-2}.$$

Mais, dans $\mathcal{L}(E)$,

$$\lim_{\omega\to+\infty} \alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1} + \gamma\delta\mathcal{A}_\omega^{-1} = \alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}. \tag{3.36}$$

Puisque $\mathcal{H},\mathcal{K} \in \mathcal{L}(E)$ on obtient que $\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$, donc il existe $\omega_1 \geq \omega_0$ tels que pour tout $\omega \geq \omega_1$

$$\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1} + \gamma\delta\mathcal{A}_\omega^{-1} \text{ est inevrsible dans } \mathcal{L}(E),$$

ce qui implique que

$$\Pi_\omega \text{ est d'inverse borné.}$$

Par conséquent, on pose pour $\omega \geq \omega_1$

$$\mathcal{D}_\omega := \left(\alpha\beta\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1} + \gamma\delta\mathcal{A}_\omega^{-1}\right)^{-1},$$

et utilisant (3.36), on trouve dans $\mathcal{L}(E)$

$$\lim_{\omega\to+\infty} \mathcal{D}_\omega = \frac{1}{\alpha\beta}\mathcal{K}\mathcal{H}.$$

Alors

$$\Pi_\omega = \mathcal{D}_\omega\mathcal{Q}_\omega^{-2} = -\mathcal{D}_\omega\mathcal{A}_\omega^{-1},$$

qui donne

$$\lim_{\omega\to+\infty} \|\Pi_\omega^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} = 0.$$

□

Théorème 3.13. *Supposons* (3.28) $\sim$ (3.31) *et* (3.32). *Soit* $f \in L^p(0,1;E)$, $1 < p < \infty$ *et* $\omega \geq \omega^*$. *Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes*

1. $\mathcal{Q}_\omega\alpha\Pi_\omega^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{K}^{-1}d_1 + \delta\Pi_\omega^{-1}\mathcal{H}^{-1}\left[d_0 - \alpha\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}_\omega}f(s)ds\right] \in (D(\mathcal{Q}^2),E)_{\frac{1}{2p},p}$ *et* $-\mathcal{Q}_\omega\beta\Pi_\omega^{-1}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{H}^{-1}d_0 - \gamma\Pi_\omega^{-1}\mathcal{K}^{-1}\left[d_1 + \beta\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}_\omega}f(s)ds\right] \in (D(\mathcal{Q}^2),E)_{\frac{1}{2p},p}$.
2. *Il existe une solution unique stricte de* (3.27).

De plus, la solution u *est donnée par* (3.21), *où* $\mathcal{Q}$ *est remplacé par* $\mathcal{Q}_\omega$, Λ *par* Λ_ω *et* Π *par* Π_ω.

3.1.6 Etude de quelques cas particuliers

Problème de Dirichlet

Dans ce cas, nous prenons $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = -1$, $\delta = 1$ et $\mathcal{H} = \mathcal{K} = I$. Notre problème (3.1)-(3.2) devient

$$\begin{cases} u''(x) + \mathcal{A}u(x) = f(x), & a.\ e. \quad x \in (0,1) \\ u(0) = d_0, \\ u(1) = d_1. \end{cases} \tag{3.37}$$

Les hypothèses (3.4) $\sim$ (3.10) réduisent à (3.4), (3.5) et (3.6).
$H^{-1} = K^{-1} = \Pi = I$ et $\Lambda = I - e^{2\mathcal{Q}}$. ($I - e^{2\mathcal{Q}}$ est d'inverse borné, (voir A. Lunardi [37, 60])). Notre résultat principal devient

Théorème 3.14. *Assumer* (3.4), (3.5) *et* (3.6). *Si* $f \in L^p(0,1;E)$ *avec* $1 < p < \infty$ *et* $d_0, d_1 \in (D(\mathcal{Q}^2), E)_{\frac{1}{2p},p}$, *alors le problème* (3.37) *a une solution stricte unique* u, *c'est-à-dire*

$$u \in W^{2,p}(0,1;E) \cap L^p(0,1;D(\mathcal{A})),$$

et satisfait (3.37).

Ce résultat a été prouvé par A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe, A. Yagi dans [22, Theorem 4, p. 216].

Le problème Neumann

Considérons l'équation principale de notre problème (3.1) avec des conditions aux limites de type Neumann, dans ce cas, nous remplaçons $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = \delta = 0$ et $\mathcal{H} = \mathcal{K} = I$; on obtient

$$\begin{cases} u''(x) + \mathcal{A}u(x) = f(x), \qquad a.\ e. \quad x \in (0,1) \\ u'(1) = d_0, \\ u'(0) = d_1. \end{cases} \tag{3.38}$$

Les hypothèses (3.4) $\sim$ (3.10) deviennent (3.4), (3.5) et (3.6). $\Pi = \mathcal{Q}^2 = -\mathcal{A}$ et

$$\Lambda = \mathcal{Q}^2(I - e^{2\mathcal{Q}}).$$

Dans ce cas, u représentée par

$$\begin{aligned} u(x) \;=\; & e^{\mathcal{Q}x} e^{\mathcal{Q}} \left[-(I - e^{2\mathcal{Q}})^{-1} \mathcal{Q}^{-3} d_0 + (I - e^{2\mathcal{Q}})^{-1} \mathcal{Q}^{-3} \int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}} f(s) ds \right] \\ & + e^{\mathcal{Q}(1-x)} e^{\mathcal{Q}} \left[(I - e^{2\mathcal{Q}})^{-1} \mathcal{Q}^{-3} d_1 + (I - e^{2\mathcal{Q}})^{-1} \mathcal{Q}^{-3} \int_0^1 e^{s\mathcal{Q}} f(s) ds \right] \\ & - (I - e^{2\mathcal{Q}})^{-1} \mathcal{Q}^{-1} e^{\mathcal{Q}(1-x)} d_0 + (I - e^{2\mathcal{Q}})^{-1} \mathcal{Q}^{-1} e^{\mathcal{Q}x} d_1 \\ & + \frac{1}{2} (I - e^{2\mathcal{Q}})^{-1} \mathcal{Q}^{-1} e^{\mathcal{Q}x} \int_0^1 e^{s\mathcal{Q}} f(s) ds \\ & + \frac{1}{2} (I - e^{2\mathcal{Q}})^{-1} \mathcal{Q}^{-1} e^{\mathcal{Q}(1-x)} \int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}} f(s) ds \\ & + \frac{1}{2} \mathcal{Q}^{-1} \int_0^x e^{(x-s)\mathcal{Q}} f(s) ds + \frac{1}{2} \mathcal{Q}^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)\mathcal{Q}} f(s) ds. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Ainsi, le résultat principal est :

Théorème 3.15. *Sous les hypothèses* (3.4), (3.5) *et* (3.6). *Soit* $f \in L^p(0,1;E)$ *avec* $1 < p < \infty$. *Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $d_0, d_1 \in (D(\mathcal{Q}), E)_{\frac{1}{p},p}$.
2. *u donnée par* (3.39) *est l'unique solution stricte de* (3.38).

Le cas où $\mathcal{K} = I$

Si on prend $\alpha = \gamma = \delta = 1$, $\beta = 0$ et $\mathcal{K} = I$; ce cas est étudié par A. Aibeche, N. Amroune, S. Maingot dans [2].

Le cas où $\mathcal{H} = \mathcal{K} = Q$

Dans ce cas, le problème (3.1)-(3.2) devient

$$\begin{cases} u''(x) + \mathcal{A}u(x) = f(x), \qquad a.\ e. \quad x \in (0,1) \\ \alpha u'(1) - \gamma \mathcal{Q}u(0) = d_0 \\ \beta u'(0) + \delta \mathcal{Q}u(1) = d_1. \end{cases} \tag{3.40}$$

On introduit une nouvelle hypothèse sur $\mathcal{A}$

$$\begin{cases} \mathcal{A} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } E, \sigma(\mathcal{A}) \subset]-\infty, 0[\\ \text{ et pour tout } \theta \in]0, \pi[, \sup\limits_{\lambda \in S_\theta} \parallel \lambda(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \parallel_{\mathcal{L}(E)} < +\infty, \end{cases} \tag{3.41}$$

où $S_\theta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mid argz \mid < \theta\}$.

Remarque 3.16. *1. Si $\alpha\beta - \gamma\delta = 0$ et $\alpha\delta + \gamma\beta \neq 0$, alors Λ n'admet pas un inverse borné.*

2. Si $\alpha\beta - \gamma\delta \neq 0$ et $\alpha\delta + \gamma\beta = 0$, Alors $\Lambda = (\alpha\beta - \gamma\delta)(I - e^{2\mathcal{Q}})$ est d'inverse borné.

3. Si $\alpha\beta - \gamma\delta \neq 0$ et $\alpha\delta + \gamma\beta \neq 0$, Alors

$$\Lambda = (\alpha\beta - \gamma\delta)(I - e^{2\mathcal{Q}}) + 2(\alpha\delta + \gamma\beta)e^{\mathcal{Q}}, \tag{3.42}$$

et on peut construire Λ^{-1} par l'utilisation du calcul fonctional (voir le Lemme et le Théorème suivants).

Lemme 3.17. *Soit $\Upsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On a, pour $z \in \mathbb{C}$*

$$F(z) = 1 + 2\Upsilon e^{-z} - e^{-2z}.$$

Alors

1. *$F(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$,*
2. *il existe $R_0 > 0$ telle que : $z \in \mathbb{C}$ et $Re(z) \geq R_0$ implique $F(z) \neq 0$,*
3. *il existe $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ telle que F ne s'annule pas sur le secteur $\overline{S_\varphi}$.*
   ($S_\varphi := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} :\mid arg(z) \mid < \varphi\}$).

Démonstration. 1. Supposons que $X \in \mathbb{R}$ vérifie

$$X^2 - 2\Upsilon X - 1 = 0.$$

Alors $\Upsilon = \dfrac{X^2 - 1}{2X} \in \mathbb{R}$, donc

$$\begin{cases} X = \Upsilon + \sqrt{\Upsilon^2 + 1} \in]1, +\infty[, \\ \text{ou} \\ X = \Upsilon - \sqrt{\Upsilon^2 + 1} \in]-\infty, 0[. \end{cases}$$

Finalement,

$$(X \in \mathbb{R} \text{ et } X^2 - 2\Upsilon X - 1 = 0) \Longrightarrow X \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[. \tag{3.43}$$

Maintenant, pour $x \in]0, +\infty[$, $F(x) = -(X^2 - 2\Upsilon X - 1)$ où $X = e^{-x} \in]0, 1[$ et (3.43), on obtient $F(x) \neq 0$.

2. il est clair que $\lim\limits_{Rez \to +\infty} F(z) = 1$.
3. Soit $Z(F) := \{z \in \mathbb{C} : F(z) = 0\}$ et

$$K = \{z \in \mathbb{C} \setminus 0 :| arg(z) |\leq \frac{\pi}{4},\ Rez \leq R_0\} \cup \{0\}.$$

Puisque F est analytique dans $\mathbb{C}$, $F \neq 0$ et K est un ensemble compact, on trouve que $Z(F) \cap K$ est fini. De plus, d'après l'assertion 1, $Z(F) \cap K \cap]0, +\infty[= \emptyset$.
On en déduit qu'il existe $\varphi \in]0, \frac{\pi}{4}[$ assez petit, tel que

$$Z(F) \cap \{z \in \mathbb{C} \setminus 0 :| arg(z) |\leq \varphi,\ Rez \leq R_0\} = \emptyset.$$

Et finalement d'après l'assertion 2, en déduit que

$$Z(F) \cap \overline{S_\varphi} = \emptyset.$$

□

Théorème 3.18. *Soit $f \in L^p(0, 1; E)$ avec $1 < p < +\infty$. On suppose que*

1$^{\text{ère}}$ ***cas*** (3.4), (3.5) *et* (3.6) *sont vérifiées et $\alpha\beta - \gamma\delta \neq 0$, $\alpha\delta + \gamma\beta = 0$*
ou

2$^{\text{ème}}$ ***cas*** (3.4), (3.41) *et* (3.6) *sont satisfaites et $\alpha\beta - \gamma\delta \neq 0$, $\alpha\delta + \gamma\beta \neq 0$.*

Alors, les deux affirmations suivantes sont équivalentes

1. $\alpha d_1 + \delta(d_0 - \alpha \int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}} f(s)ds \in (D(\mathcal{Q}), E)_{\frac{1}{p},p}$ *et*
$-\beta d_0 - \gamma(d_1 + \beta \int_0^1 e^{s\mathcal{Q}} f(s)ds \in (D(\mathcal{Q}), E)_{\frac{1}{p},p}$.
2. *Le problème* (3.40) *a une unique solution stricte.*

Il suffit d'obtenir l'inversibilité de Λ et puis d'appliquer le Théorème 3.9. Dans le premier cas, Λ est inversible (voir l'assertion 2 de la Remarque 3.16). Dans le deuxième cas, on peut écrire (3.42) *comme suit*

$$\Lambda = (\alpha\beta - \gamma\delta)\left(I - e^{2\mathcal{Q}} + 2\Upsilon e^{\mathcal{Q}}\right),$$

où $\Upsilon = \dfrac{\alpha\delta + \gamma\beta}{\alpha\beta - \gamma\delta}$. Utilisant le Lemme (3.17) *avec Υ particulier, on peut considérer*

$$Y = \frac{F - 1}{F},$$

qui est holomorphe au voisinage de $\sigma(-\mathcal{Q})$ et de sorte que

$$Y(-\mathcal{Q}) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma Y(z)(zI - (-\mathcal{Q}))^{-1} dz.$$

avec Γ est la courbe limite dans $S_{\frac{\varphi}{2}}$ (orientée positivement).
Alors, de l'utilisation du calcul fonctionnel classique (voir Haase [28]). On a

$$\begin{aligned}(I-Y(-\mathcal{Q}))\Lambda &= (I-Y(-\mathcal{Q}))\circ F(-\mathcal{Q}) \\ &= [(I-Y)(F)](-\mathcal{Q}) \\ &= [1](-\mathcal{Q}) = I.\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient

$$\Lambda(I-Y(-\mathcal{Q})) = I,$$

cela prouve que Λ est d'inverse borné avec $\Lambda^{-1} = I - Y(-\mathcal{Q})$. □

3.1.7 Exemples

On commence par un exemple simple

Exemple

Soit $E = L^p(\mathbb{R}), 1 < p < \infty$. On définit l'opérateur $\mathcal{A}$ par

$$D(\mathcal{A}) = W^{2,p}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{A}u = u'',$$

et considérons $\mathcal{H}, \mathcal{K} \in \mathcal{L}(E)$ deux opérateurs inversibles. Soit $\omega_0 > 0$. Un calcul simple montre que (3.5), (3.6), (3.7) sont vérifiées. De plus, $\mathcal{A}$ satisfait (3.8), voir Prüss-Sohr [40].

$$\theta_{\mathcal{A}} = \epsilon_1,$$

pour n'importe quel $\epsilon_1 \in]0, \pi[$. appliquons le Théorème 3.13, on a

Proposition 3.19. *Soit $p \in]1, \infty[$, $f \in L^p(0,1;X)$ et*

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_\omega \alpha \Pi_\omega^{-1} \mathcal{H}^{-1} \mathcal{K}^{-1} d_1 + \delta \Pi_\omega^{-1} \mathcal{H}^{-1} \left[d_0 - \alpha \displaystyle\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}_\omega} f(s) ds \right] \in \left(W^{2,p}(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}) \right)_{\frac{1}{2p},p} \\ -\mathcal{Q}_\omega \beta \Pi_\omega^{-1} \mathcal{K}^{-1} \mathcal{H}^{-1} d_0 - \gamma \Pi_\omega^{-1} \mathcal{K}^{-1} \left[d_1 + \beta \displaystyle\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}_\omega} f(s) ds \right] \in \left(W^{2,p}(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}) \right)_{\frac{1}{2p},p}. \end{cases}$$

Alors, il existe $\omega^* > 0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \omega u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in]0,1[\times \mathbb{R}, \\ \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) - \gamma \mathcal{H}(u(0,y)) = d_0(y), \quad y \in \mathbb{R}, \\ \beta \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) + \delta \mathcal{K}(u(1,y)) = d_1(y), \quad y \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.44}$$

admet une solution stricte unique u, telle que

$$u \in W^{2,p}(0,1;L^p(\mathbb{R})) \cap L^p(0,1;W^{2,p}(\mathbb{R}))$$

et u satisfaite (3.44).

Exemple

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n, n \geqslant 1$, avec une frontière régulière $\partial\Omega$ et prenons $E = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. On définit les opérateurs $\mathcal{A}, \mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ par

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ u \in W^{4,p}(\Omega) : \; u_{|\partial\Omega} = \Delta u_{|\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad \mathcal{A}u = -\Delta^2 u$$

et

$$D(\mathcal{H}) = D(\mathcal{K}) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), \quad \mathcal{H}u = \mathcal{K}u = \Delta u = -\sqrt{-\mathcal{A}}u = \mathcal{Q}u.$$

Si $\alpha = \beta = 1$, $\delta = -\gamma$, $\gamma \neq \pm i$ alors d'après l'assertion 2 de la Remarque (3.1) et l'assertion 2 de la Remarque (3.16) ; on a $0 \in \rho(\Pi) \cap \rho(\Lambda)$ et le Théorème 3.9 est applicable. Nous pouvons étudier le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \Delta^2 u(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in (0,1) \times \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial x} u(1,y) + \delta \Delta_y u(0,y) = d_0(y), \quad y \in \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial x} u(0,y) + \delta \Delta_y u(1,y) = d_1(y), \quad y \in \Omega, \\ u(x,\xi) = \Delta_y u(x,\xi) = 0, \qquad (x,\xi) \in (0,1) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

à condition que $f \in L^p(0,1; L^p(\Omega))$ et

$$\begin{cases} d_1 + \delta \left[d_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{(1-s)\mathcal{Q}} f(s) ds \right] \in (D(\mathcal{Q}), L^p(\Omega))_{\frac{1}{p},p}, \\ -d_0 + \delta \left[d_1 + \displaystyle\int_0^1 e^{s\mathcal{Q}} f(s) ds \right] \in (D(\mathcal{Q}), L^p(\Omega))_{\frac{1}{p},p}. \end{cases}$$

Perspectives

On donnera ici quelques pistes pour traiter le problème de chapitre précédent dans le cas où $\mathcal{B}$ génère un groupe fortement continu. On faudrait de résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} u''(x) + 2\mathcal{B}u'(x) + \mathcal{A}u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \\ \alpha u'(1) - \gamma \mathcal{H}u(0) = d_0, \\ \beta u'(0) + \delta \mathcal{K}u(1) = d_1. \end{cases}$$

où $f \in L^p(0,1;E)$. $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont des opérateurs linéaires fermés dans E. $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ et $d_0, d_1 \in E$.
Et pour cela, on appliquons la méthode de Krein [34] pour résout le problème suivant

$$\begin{cases} v''(x) + (\mathcal{A} - \mathcal{B}^2)v(x) = \tilde{f}(x), \quad x \in (0,1), \\ \alpha v'(1) - \gamma \tilde{\mathcal{H}}v(0) = \tilde{d}_0, \\ \beta v'(0) + \delta \tilde{\mathcal{K}}v(1) = \tilde{d}_1. \end{cases}$$

où $\tilde{f} \in L^p(0,1;E)$. $\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{K}}$ sont des opérateurs linéaires fermés dans E et $\tilde{d}_0, \tilde{d}_1 \in E$.
A cause des complications techniques, on introduisons un nouveau problème sous la forme

$$\begin{cases} u''(x) + 2\mathcal{B}u'(x) + \mathcal{A}u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \\ \alpha_1 u'(1) + \alpha_0 u'(0) + \gamma_1 \mathcal{H}_1 u(1) + \gamma_0 \mathcal{H}_0 u(0) = d_0, \\ \beta_1 u'(1) + \beta_0 u'(0) + \delta_1 \mathcal{K}_1 u(1) + \delta_0 \mathcal{K}_0 u(0) = d_1, \end{cases}$$

avec $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$ sont des opérateurs linéaires fermés dans E et $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1, \delta_0, \delta_1 \in \mathbb{C}$ et $d_0, d_1 \in E$. Des résultats analogues peuvent être établis par la technique utilisée dans les deux chapitres précédents pour le nouveau problème obtenu

$$\begin{cases} v''(x) + (\mathcal{A} - \mathcal{B}^2)v(x) = \tilde{f}(x), \quad x \in (0,1), \\ \alpha_1 u'(1) + \alpha_0 u'(0) + \gamma_1 \tilde{\mathcal{H}}_1 u(1) + \gamma_0 \tilde{\mathcal{H}}_0 u(0) = \tilde{d}_0, \\ \beta_1 u'(1) + \beta_0 u'(0) + \delta_1 \tilde{\mathcal{K}}_1 u(1) + \delta_0 \tilde{\mathcal{K}}_0 u(0) = \tilde{d}_1, \end{cases}$$

où $\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{H}}_1, \tilde{\mathcal{K}}_0, \tilde{\mathcal{K}}_1$ sont des opérateurs linéaires fermés dans E et $\tilde{d}_0, \tilde{d}_1 \in E$.

Bibliographie

[1] A. Aibeche. Coerciveness estimates for a class of nonlocal elliptic problems. *Differential Equations Dynam. Systems*, 1(4) :341–351, 1993. 00020.

[2] A. Aibeche, N. Amroune, S. Maingot. On elliptic equations with general non-local boundary conditions in UMD spaces. *Mediterr. J. Math, Springer Basel*, 2015.

[3] B. A. Aliev and Y. Yakubov. Second order elliptic differential-operator equations with unbounded operator boundary conditions in UMD Banach spaces. *Integral Equations and Operator Theory*, 69(2) :269–300, 2011.

[4] A. V. Balakrishnan. Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. *Pacific J. Math.*, 10 :419–437, 1960.

[5] R. Beals. Nonlocal elliptic boundary-value problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70(5) :693–696, 1964.

[6] A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii. On some general of linear elliptic boundary value problems. *Soviet Math. Doklady*, 10, 1969.

[7] J. Bourgain. Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional. *Ark. Mat.*, 21 (1983), 163-168 .

[8] D. L. Burkholder. A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional. *Ann. Probab.*, 9 :997–1011, 1981.

[9] D. L. Burkholder. A geometric condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued functions. *Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund, Chicago, 1981, Wadsworth, Belmont*, CA (1983), 270-286.

[10] D. L.Burkholder. Martingales and Fourier analysis in Banach spaces. *Probability and Analysis (Varenna 1985), Lecture Notes in Math. 1206, Springer, Berlin* (1986), 61-108.

[11] P. L. Butzer, H. Berens. Semi-groups of Operators and Approximation. *Springer-Verlag, Berlin*, 1967.

[12] J. R. Cannon and Yanping Lin. A Galerkin procedure for diffusion equations with boundary integral conditions. *Int. J. Engng Sci.*, 28(7) :579–587, 1990.

[13] T. Carleman. Sur la théorie des équations intégrales et ses applications. *Verhandlangen des Internat. Math. Kongr. Zurich*, I :138–151, 1932.

[14] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, and A. Medeghri. Sturm-Liouville problems for an abstract differential equation of elliptic type in UMD spaces. *Differenial and Integral Equation*, 21(9-10) :981–1000, 2008.

[15] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, and A. Medeghri. Complete abstract differential equations of elliptic type with general Robin boundary conditions, in UMD spaces *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S*, Volume 4, Number 3, pp. 523-538, June 2011.

[16] M. G. Crandall, A. Pazy and L. Tartar. *Remarks on generators of analytic semigroups.* Israel J. Math. 32 (1979), 363-374.

[17] G. Dore. *Lp Regularity for Abstract Differential Equations,* Functional Analysis and Related Topics Kyoto,1991, Lecture Notes in Math. vol. 1540, Springer-Verlag, Berlin (1993), 25-38.

[18] G. Dore and A. Venni. On the closedness of the sum of two closed operators. *Mathematische Zeitschrift*, 196 :270–286, 1987.

[19] G. Dore and A. Venni. Some Results about Complex Powers of Closed Operators. *J. Math. Anal. Appl.* 149 (1990), 124-136.

[20] S. Dore and S. Yakubov. Semigroup estimates and noncoercive boundary value problems. *Semigroup Forum*, 60 :93–121, 2000.

[21] N. Dunford and J T. Schwartz. *Linear Operators, Part I : General Theory.* Intersience Publishers, New York, 1958.

[22] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe, A. Yagi. Complete abstract differential equations of elliptic type in UMD spaces. *Funkcialaj Ekvacioj*, 2006.

[23] A. Favini, R Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi. A Simplified Approach in the Study of Elliptic Differential Equations in UMD Spaces and New Applications, Funkc. Ekv., 51 (2008), 165-187.

[24] A. Favini and Y. Yakubov. Irregular boundary value problems for second order elliptic differential operator in umd banach spaces. *Math. Ann.*, 348 :600–632, 2010.

[25] P. Grisvard. Commutativité de Deux Foncteurs d'Interpolation et Applications. *J. Math. Pures et Appli.* , 45 (1966), 143-290.

[26] P. Grisvard. Spazi di tracce e applicazioni. *Rendiconti di Matematica*, 5(4) :657–729, 1972.

[27] P. L. Gurevich. Elliptic problems with nonlocal boundary conditions and Feller semigroups. *Journal of Mathematical Sciences*, 186(3) :255–440, 2012.

[28] M. Haase. *The Functional Calculus for Sectorial Operators, Operator Theory : Advances andApplications.* Vol. 169, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2006.

[29] H. Hammou, R. Labbas, S. Maingot, and A. Medeghri. On some elliptic problems with nonlocal coefficient-operator conditions in the framework of hölderian spaces. *EJQTDE*, 36 :1–32, 2013.

[30] E. Hille. Functional Analysis and Semigroups. *Am. Math. Soc., Colloquium Publications*, 31, New York, 1948.

[31] E. Hille and R. S. Phillips. Functional Analysis and Semigroups. *Am. Math. Soc., Colloquium Publications*, 31, Providence Rhode.Island., 1957.

[32] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

[33] H. Komatsu. *Fractional Powers of Operators.* Pacific J. Math., 19 (1966), 285-346.

[34] S. G. Krein. Linear Differential Equations in Banach Spaces. *Moscou*, 1967.

[35] J. L. Lions. Théorèmes de trace et d'interpolation I et II. *Annali S.N.S. di Pisa*, 13, (1959), 389-403 et 14, (1960), 317-331.

[36] J. L. Lions et J. Peetre. Sur une classe d'espaces d'interpolation. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* , 19 (1964), 5-68.

[37] A. Lunardi. Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems. Birkhäuser, Basel, 1995.

[38] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[39] R. S. Phillips. *On the generation of semi-groups of linear operators.* Pacific J. Math. 2 (1952), 343-369.

[40] J. Prüss and H. Sohr. On Operators with Bounded Imaginary Powers in Banach Spaces. *Math. Zeitschrift*, 203 (1990), 429-452.

[41] E. Sinestrari. On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Spaces of Continuous Functions. *J. Math. Anal. App*, 66 (1985), 16-66.

[42] A. L. Skubachevskii. Nonclassical boundary value problems i. *Journal of Mathematical Sciences*, 155(2) :199–334, 2008.

[43] M. H. Stone. *On One-parameter Unitary Groups in Hilbert Space.* Ann. Math. 33 (1932), 643-648.

[44] H. Tanabe. *Equations of Evolution.* Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1979.

[45] H. Triebel. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.* Amsterdam, North Holland, 1978.

[46] M. Uiterdijk. *Functional Calculi for Closed Linear Operators.* Thesis, Technishe Universiteit Delft, 1998.

[47] M. J. Vishik. On general boundary value problems for elliptic differential equations. *Tr. Mosk.*, I :187–246, 1952.

[48] S. Yakubov and Y. Yakubov. *Differential-Operator Equations. Ordinary and Partial Differential Equations.* Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2000.

[49] K. Yosida. *On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators.* J. Math. Soc. Japan 1 (1948),15-21.

[50] N. I. Yurchuk. Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations. *Differ. Uravn.*, 22(12) :2117–2126, 1986.

Résumé :

Cette thèse présente quelques résultats sur une classe d'équations différentielles abstraites (à coefficients opérateurs) de type elliptiques dans l'espace UMD. La première partie étudie cette classe avec des conditions aux limites l'une des est non-locale et la deuxième partie consiste un travail similaire mais avec des conditions aux limites non-locales générales. Le but principal dans les deux parties est l'obtention des résultats concernant l'existence, l'unicité de la solution stricte et sa régularité grâce à la théorie des semi-groupes, la théorie d'interpolations et le Théorème de Dore-Venni.

Mots clefs : Equation différentielle abstraite, conditions aux limites non-locales, espace UMD, Théorème de Dore-Venni.

Abstract :

This thesis presents some results concerning a class of abstract differential equations (with operators' coefficients) of elliptic type in UMD space. The first part studies this class with non-local boundary conditions and the second part treats a similar work but with general non-local boundary conditions. The main aim of the two parts is to get some new results concerning existence, uniqueness of the strict solution and it's regularity due to the semigroups theory, interpolation theory and the well-known Dore-Venni Theorem.

Keys words : Abstract differential equations, non-local boundary conditions, UMD space, Dore-Venni Theorem.