وزارة التـــــعليم العــــالي والبحـــث العـلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة فرحات عباس- سطيف

UNIVERSITE FERHAT ABBAS- SETIF

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du Diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option: Mathématiques Appliquées

Par

Mr. SAADALLAH ABDELKADER

THEME

Comportement Asymptotique de différents Problèmes de contact avec frottement en film mince dans le cas isotherme et non-isotherme

Soutenu le : 21 / 01 / 2016

Devant le Jury

Prof. MEROUANI	Boubakeur	Université Ferhat Abbas Sétif 1	Président
Prof. BENSERIDI	Hamid	Université Ferhat Abbas Sétif 1	Directeur de thèse
Prof. YOUKANA	Amar	Université de Batna	Examinateur
Prof. HAMRI	Nasr-eddine	Université de Mila	Examinateur

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENT

J'exprime mes vifs remerciements et toute ma reconnaissance à mon encadreur monsieur Prof. $\boldsymbol{H.Benseridi}$, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de diriger ce travail et pour sa disponibilité malgré ses nombreuses préoccupations.

Je remercie monsieur Prof. $\boldsymbol{B.Merouani}$ qui a bien voulu examiner ce travail et accepté d'être le président de jury. Je remercie également monsieur Prof. $\boldsymbol{A.Youkana}$ et monsieur Prof. $\boldsymbol{N.Hamri}$, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en participant au jury de cette thèse .

Je remercie aussi tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin surtout à concrétiser ce travail.

Je profite aussi de cette occasion pour remercie tous les enseignants du département de mathématique de l'université Ferhat Abbas de Sétif et mes collègues de toutes mes années scolaires et universitaires.

DÉDICACES

Je dédie mon modeste travail à ma famille, qui était toujours à mes côtés et qui m'a beaucoup encouragé :

ma mère,

mon père,

ma femme,

mes frères,

ma sœur,

sans oublier tous mes amis.

Abdelkader Saadallah

INTRODUCTION

L'un des buts de l'analyse asymptotique est d'obtenir et de décrire un problème bidimensionnel $(2D)$ à partir d'un problème tri-dimensionnel $(3D)$, en passant à la limite sur l'épaisseur du domaine $(3D)$ supposé déjà mince.

L'équation de Reynolds n'est valable que dans un milieu continu, elle a bien un sens dans un milieu de fluide de Bingham qui est un modèle théorique de milieu viscoplastique (pâte de dentifrice par exemple) qui correspond à un comportement de solide parfait sous faibles contraintes, et à un comportement de fluide visqueux au-delà d'une contrainte-seuil. Le concept physique de l'équation de Reynolds est gouverné par le mouvement de fluide ou d'un milieu continu sur une surface ou bord $(2D)$ d'un domaine $(3D)$.

Des résultats concernant l'étude du phénomène de lubrification par des fluides Newtoniens avec glissement ont été obtenus en [6], lorsque le glissement est donné par la loi de frottement de Coulomb, et par F. Saidi [26] lorsqu'on prend aussi en considération l'effet de température. Comme le fluide non-Newtonien dont la viscosité suit la loi de puissance dans le cas isotherme et non isotherme, ce problème a été étudié par de nombreux auteurs [8, 9, 10, 25]. Les auteurs dans [7] ont étudié l'analyse asymptotique d'un problème dynamique pour l'élasticité dans un domaine borné en dimension trois avec les conditions de frottement de Tresca.
Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un pro-

blème dynamique pour l'élasticité linéaire non isotherme et le fluide non-Newtonien isotherme et non-isotherme dans un domaine borné en dimension trois en film mince avec les conditions de frottement de Tresca, en considérant les trois problèmes suivants :

- Analyse asymptotique d'un problème dynamique d'élasticité linéaire non-isotherme avec frottement de Tresca
- Comportement asymptotique d'un fluide de Bingham non isotherme dans un domaine mince avec frottement de Tresca.
- Comportement asymptotique d'un fluide de Herschel-Bulkley dans un domaine mince avec frottement de Tresca.

Le premier chapitre, est consacré essensiellement dans une première étape aux rappels des résultats principaux sur les équations générales de la mécanique des milieux continus ainsi les conditions aux limites de contact avec frottement dans le cas stationnaire et dynamique. Ensuite nous donnons un rappel de quelques résultats théoriques généraux de l'analyse fonctionnelle et qui nous permettent de mieux comprendre le contenu de ce travail.

Dans le deuxième chapitre, nous allons considérer le problème suivant :

$$\frac{\partial^2 u_{ij}^{\varepsilon}}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{ij}^{\varepsilon}}{\partial x_j} = f_i^{\varepsilon}, \quad i = 1, 2, 3 \qquad \text{dans } \Omega^{\varepsilon} \times]0, T[\tag{0.0.1}$$

avec la loi de comportement est donnée par

$$\sigma_{ij}^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}) = 2\mu(T^{\varepsilon}) d_{ij}(u^{\varepsilon}) + \lambda(T^{\varepsilon}) d_{kk}(u^{\varepsilon}) \delta_{ij},$$

et comme la déformation dans le cas non-isotherme, en couplant l'équation de la conservation de la quantité de mouvement (0.0.1) avec l'équation de la conservation de l'énergie déduite de la loi de Fourier suivant

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}^\varepsilon d_{ij}\left(u^\varepsilon\right) + r^\varepsilon\left(T^\varepsilon\right) \qquad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \tag{0.0.2}$$

où, u^ε représente le champ des déplacements, T^ε représente la température. Les conditions aux limites sont mixtes, elles sont modélisées par une condition de Dirichlet sur une partie de la frontière et les conditions de frottement non linéaires de type de Tresca sur l'autre partie pour l'équation du mouvement. Ainsi qu'une condition homogène de Neumann et de Dirichlet pour l'équation de la conservation de l'énergie, de la forme

$$\begin{array}{ll}
u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times]0,T[\\
u^\varepsilon = g & \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \times]0,T[\\
\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}.n = 0 & \text{sur } \omega \times]0,T[\\
\left.\begin{array}{l}
|\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \Longrightarrow \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0 \\
|\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \Longrightarrow \exists \beta > 0 \ tel\ que\ \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = -\beta \sigma_\tau^\varepsilon
\end{array}\right\} & \text{sur } \omega \times]0,T[\\
T^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon, \\
\dfrac{\partial T^\varepsilon}{\partial n} = 0 & \text{sur } \omega
\end{array}$$

Après la formulation variationnelle du problème on passe à l'étude de l'analyse asymptotique pour cela, en utilisant le changement d'échelle et des nouvelles inconnus pour mener l'étude sur un domaine ne dépend pas de ε. On cherche des estimations à priori, ensuite en passant à la limite, on obtient le problème limite et l'équation de Reynolds faible sous la forme :

$$\int_\omega \left(\int_0^h \hat{u}^*(x,z,t)\,dz - s^*(x,0,t)\,h - \hat{\mu}(\zeta^*)\,\hat{\tau}^* \tilde{A}(x,z) + \tilde{C}_i(x,z)\right) \nabla\psi = 0,\ \forall \psi \in H^1(\omega),$$

L'étude est basée sur la formulation variationnelle, l'inégalité de Poincaré, Cauchy-Shwartz, Young, Hölder, Korn et Gronwall. Cette étude a été menée par H. Benseridi and M. Dilmi [7] dans le cas isotherme.

Dans le troisième chapitre de cette thèse, nous étudions le comportement asymptotique d'un fluide de Bingham dans le cas non isotherme avec frottement de Tresca sur une partie de la frontiere :

$$\left.\begin{array}{r} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies u_\tau^\varepsilon = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists\lambda > 0 \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon = -\lambda\sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right\} \quad \text{sur } \omega$$

L'équation de la conservation de la quantité du mouvement et l'équation de la conservation de l'énergie sont données respectivement par :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} = f_i^\varepsilon, \quad i = 1, 2, 3 \qquad \text{dans } \Omega^\varepsilon \tag{0.0.3}$$

avec

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = -p^\varepsilon \delta_{ij} + \sqrt{2}\alpha^\varepsilon \frac{d_{ij}\left(u^\varepsilon\right)}{\left|D\left(u^\varepsilon\right)\right|} + 2\mu^\varepsilon\left(T^\varepsilon\right) d_{ij}\left(u^\varepsilon\right) \tag{0.0.4}$$

et

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i}\right) = 2\mu^\varepsilon\left(T^\varepsilon\right) d_{ij}\left(u^\varepsilon\right) d_{ij}\left(u^\varepsilon\right) + \sqrt{2}\alpha^\varepsilon\left|D\left(u^\varepsilon\right)\right| + r^\varepsilon\left(T^\varepsilon\right) \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \tag{0.0.5}$$

Après le changement d'échelle on cherche les estimations à priori sur la vitesse et la pression puis en passant à la limite, on trouve l'équation de Reynolds généralisé

$$\int_\omega \left[\frac{h^3}{12}\nabla p^* + \tilde{F} + \int_0^h \int_0^y \mu\left(T^*(x,\xi)\right) \frac{\partial u^*(x,\xi)}{\partial \xi} \partial\xi dy + \sqrt{2}\alpha \int_0^h \int_0^y \frac{\partial u^*/\partial\xi}{|\partial u^*/\partial\xi|}(x,\xi)\, d\xi dy - \right.$$

$$\left. - \frac{h}{2}\int_0^h \mu\left(T^*(x,\xi)\right) \frac{\partial u^*(x,\xi)}{\partial\xi}\partial\xi - \frac{\sqrt{2}\hat{\alpha} h}{2}\int_0^h \frac{\partial u^*/\partial\xi}{|\partial u^*/\partial\xi|}(x,\xi)\, d\xi\right].\nabla\varphi(x)\, dx = 0, \quad \forall\varphi \in H^1(\omega)$$

Cette étude a été menée dans [16] mais dans le cas isotherme.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de comportement asymptotique de l'écoulement stationnaire du fluide incompressible viscoplastique de Herschel-Bulkley dans un domaine mince, dont la viscosité ne dépend pas de la température.

L'équation de la conservation de la quantité du mouvement et donnée par (0.0.3), avec la loi de comportement de Herchel-Boulklet

$$\sigma_{ij}^{\varepsilon} = -p^{\varepsilon}\delta_{ij} + \alpha^{\varepsilon}\frac{d_{ij}(u^{\varepsilon})}{|D(u^{\varepsilon})|} + 2\mu\,|D(u^{\varepsilon})|^{r-2}\,d_{ij}(u^{\varepsilon}), \tag{0.0.6}$$

où le paramètre r, $1 < r < 2$, est l'exposant de la loi de puissance du matériau. Lorsque $r = 2$, on retrouve les fluides de Bingham, et lorsque $r = 2$ et $\alpha^{\varepsilon} = 0$, on retrouve le modèle de Navier-Stokes (fluide newtonien). Les conditions aux limites utilisées sont les conditions de Dirichlet homogènes sur une partie de la frontière et les conditions de Tresca sur l'autre partie. En cherchant des estimations à priori sur la vitesse et la pression et en passe à la limite pour cela en utilisant les inégalités de Poincaré, Young, Hölder, Korn, et le lemme de Minty, on obtient l'équation de Reynolds faible sous la forme :

$$\int_{\omega}\left[\frac{h^3}{12}\nabla p^* + \tilde{F} + \mu\int_0^h\int_0^y A^*(x,\zeta)\frac{\partial u^*(x,\xi)}{\partial\xi}d\xi dy + \hat{\alpha}\int_0^h\int_0^y\left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right|(x,\xi)\,d\xi dy\right.$$

$$\left.-\frac{h\mu}{2}\int_0^h A^*(x,\zeta)\frac{\partial u^*(x,\xi)}{\partial\xi}d\xi - \frac{\hat{\alpha}h}{2}\int_0^h\left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right|(x,\xi)\,d\xi\right].\nabla\varphi(x)\,dx = 0,\ \ \forall\varphi\in W^{1,p}(\omega).$$

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

1.1 Equations générales de la mécanique des milieux continus

Les lois générales de la mécanique des milieux continus sont données par :

– La loi de conservation de la quantité de mouvament

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = div\,(\sigma) + \rho f \tag{1.1.1}$$

où f représente une distribution volumique des forces extérieures. Le tenseur σ, a pour composant σ_{ij}, est le tenseur des contraintes, et "div" représente l'opérateur divergence pour les tenseurs : $div\sigma = (\sigma_{ij,j}) = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$

Le processus d'évolution défini par (1.1.1), s'appelle processus dynamique. Dans le cas où le champ des vitesses varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho \frac{d^2 u}{dt^2}$ peut être négligé.

Dans ce cas l'équation $(1.1.1)$ devient

$$div\,(\sigma) + \rho f = 0 \tag{1.1.2}$$

L'équation d'équilibre $(1.1.2)$ s'appelle processus statique.

– La loi de conservation de l'énergie est :

$$\sigma \frac{de}{dt} = \sigma : D\,(u) - div\,(q) + r$$

où e est un scalaire qui désigne l'énergie interne spécifique du milieu continu, r est un l'apport massique de la chaleur, q est le vecteur transport d'énergie et $D\,(u)$ est le tenseur des taux de déformation, de composantes :

$$d_{ij}\,(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i,\ j \leq 3$$

$\sigma : D\,(u)$ est le produit dyadique de deux tenseurs σ et $D\,(u)$ défini par

$$\sigma : D\,(u) = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} d_{ij}\,(u)$$

1.2 Conditions aux limites de contact avec frottement

Maintenant, nous présentons quelques exemples sur les lois de frottement intervenant dans cette thèse.

Le frottement est la relation qui existe entre les efforts tangentiels (forces de frottement) sur la zone de contact et le mouvement tangentiel relatif des deux corps (glissement).

Les phénomènes physiques à faire apparaître dans une loi de frottement sont l'existence d'un seuil d'effort en dessous duquel aucun glissement n'est possible et une éventuelle dépendance de ce seuil à l'intensité des efforts normaux. Pour définir les lois de frottement, on définit le glissement et la vitesse de glissement par :

$$\begin{aligned} u_n^\varepsilon &= u^\varepsilon.n = u_i^\varepsilon.n_i, \\ u_{\tau_i}^\varepsilon &= u_i^\varepsilon - u_n^\varepsilon n_i, \\ \sigma_n^\varepsilon &= (\sigma.n)\,n = \sigma_{ij}^\varepsilon n_i n_j, \\ \sigma_{\tau_i}^\varepsilon &= \sigma_{ij}^\varepsilon n_j - \sigma_n^\varepsilon n_i, \end{aligned}$$

La plus simple des lois de frottement est la loi de Tresca qui s'écrit de la manière suivante :

$$|\sigma_\tau| < g \implies u_\tau = s \quad \text{(Adhérence)}$$

$$|\sigma_\tau| = g \implies \exists\lambda > 0 \text{ tel que } u_\tau = s - \lambda\sigma_\tau \text{ (Glissement)}$$

et dans le cas dynamique :

$$|\sigma_\tau| < g \implies \frac{\partial u_\tau}{\partial t} = 0 \quad \text{(Adhérence)}$$

$$|\sigma_\tau| = g \implies \exists\lambda > 0 \text{ tel que } \frac{\partial u_\tau}{\partial t} = -\lambda\sigma_\tau \text{ (Glissement)}$$

où g est un seuil de d'adhérence/glissement fixé a priori, σ_τ la contrainte tangentielle et $\frac{\partial u_\tau}{\partial t}$ la vitesse relative tangentielle entre les deux corps en contact.

1.3 Propriétés de semi-continuité inférieure

Nous rappelons dans cette sections quelque notions d'analyse convexe. Nous considérons des fonctions φ définies sur un espace vectoriel réel X et à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$.

- Une telle fonction est dite propre si elle n'est pas identique à $+\infty$ c'est à dire s'il existe $v_0 \in X$ tel que $\varphi(v_0) < +\infty$.
- La fonction φ est dite convexe si

  $$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v)$$

  pour $u,\ v \in X$ et $t \in]0, 1]$.
- La fonction φ est dite strictement convexe si

  $$\varphi(tu + (1-t)v) < t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v)$$

  pour $u,\ v \in X$ et $u \neq v$.
- Une fonction $\varphi : X \to]-\infty, +\infty]$, est dite semi-continue inférierement si et seulement si

  $$\lim_n \inf \varphi(v_n) \geq \varphi(v)$$

  pour tout $v \in X$ et v_n converge vers v dans X.

Lemme 1.3.1. *Soit $K \subset H$, la fonction $\psi_K : H \to]-\infty, +\infty]$, définie par :*

$$\psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K \\ +\infty & \text{si } u \notin K \end{cases}$$

K est un ensemble convexe, fermé et non vide de H si et seulement si la fonction ψ_k est convexe et semi-continue inférierement et propre.

1.4 Lemme de Gronwall

Lemme 1.4.1. *Soient* $f,\ \varphi \in C\left(0,\ T,\ \mathbb{R}\right)$ *deux fonctions positives pour tout* $t \in [0,\ T]$, *et soit* $a \geq 0$. *Si* $\psi \in C\left(0,\ T,\ \mathbb{R}\right)$ *est une fonction telle que :*

$$\psi\left(t\right) \leq a + \int_0^t f\left(s\right) ds + \int_0^t \varphi\left(s\right) \psi\left(s\right) ds, \quad \forall t \in \left[0,\ T\right].$$

Alors

$$\psi\left(t\right) \leq \left(a + \int_0^t f\left(s\right) ds\right) \exp\left(\int_0^t \varphi\left(s\right) ds\right), \quad \forall t \in \left[0,\ T\right].$$

Pour le cas $f = 0$, ce lemme devient.

Corollaire 1.4.1. *Soit* $\varphi \in C\left(0,\ T,\ \mathbb{R}\right)$ *telle que* $\varphi\left(t\right) \geq 0$ *pour tout* $t \in [0,\ T]$ *et soit* $a \geq 0$. *Si* $\psi \in C\left(0,\ T,\ \mathbb{R}\right)$ *est une fonction telle que*

$$\psi\left(t\right) \leq a + \int_0^t \varphi\left(s\right) \psi\left(s\right) ds, \quad \forall t \in \left[0,\ T\right].$$

Alors

$$\psi\left(t\right) \leq a \exp\left(\int_0^t \varphi\left(s\right) ds\right), \quad \forall t \in \left[0,\ T\right].$$

1.5 Lemme de Minty

Soit E un espace de Banach et E' son dual.

Définition 1.5.1 *Soit* A *un opérateur de* $E \rightarrow E'$

A *est dit hémicontinu, si et seulement si pour toute suite* $\left(\lambda_n\right)_n$ *convergente vers* λ, *on a :*

$$\left(A\left(u + \lambda_n v\right), w\right) \rightarrow \left(A\left(u + \lambda v\right), w\right) \quad \forall \left(u, v, w\right) \in E^3$$

A *est dit monotone, si et seulement si :*

$$\left(A\left(u\right) - A\left(v\right), u - v\right) \geq 0 \ \ \forall \left(u, v\right) \in E^2$$

Lemme 1.5.1 (**Minty**) .

Soit E un espace de Banach, $A : E \to E'$ un opérateur hémicontinue et monotone ; $J : E \to]-\infty, +\infty]$ un semi continu inférieurement et propre.

Alors, si $u \in E$ et $f \in E'$, les deux inégalités suivantes sont équivalentes

$$\begin{aligned} \langle Au; v-u\rangle_{E'\times E} + J(v) - J(u) &\geq \langle f; v-u\rangle_{E'\times E} \quad \forall v \in E, \\ \langle Av; v-u\rangle_{E'\times E} + J(v) - J(u) &\geq \langle f; v-u\rangle_{E'\times E} \quad \forall v \in E. \end{aligned}$$

1.6 Inégalités

Proposition 1.6.1. *Si $u,\ v \in L^2(\Omega)$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz*

$$|(u,v)| \leq |u|\,|v|\,.$$

Lemme 1.6.1 (**Inégalité de Young**) .

Si $a,\ b \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, alors

$$a.b \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Lemme 1.6.2 (**Inégalité de Hölder**) .

Si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ telle que $1 \leq p \leq \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, alors $uv \in L^1(\Omega)$ et on a :

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}\,.$$

Si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{n} = 1$, alors

$$\|uvw\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}\|w\|_{L^n(\Omega)}\,.$$

Lemme 1.6.3. (**Inégalitè de Poincaré**)

On rappelle que $0 < h(x) < h^*,\ \forall x \in \omega$ et $\hat{u}^\varepsilon \in W_0^{1,r}$. On a l'inégalité :

$$\|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{L^r(\Omega)} \leq h^* \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^r(\Omega)} \quad \textit{pour } i = 1, 2, 3.$$

Avec Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$,et ω la frontière inférieure de Ω.

Lemme 1.6.4. (**Inégalitè de Korn**)

Pour tout $\varphi \in K$, avec K un convexe fermé non vide de $\left(W^{1,r}(\Omega)\right)^3$, on a :

$$\|\nabla u\|_{L^r(\Omega)} \leq C \|D(u)\|_{L^r(\Omega)}$$

1.7 Intégrale curviligne

La définition suivante, nous donnons la formule d'une intégrale curviligne.

Définition 1.7.1. *Soit f une fonction définie sur $\partial\Omega$, continue et à support compact.*

L'intégrale de f sur $\partial\Omega$, notée par $\int_{\partial\Omega} f(x)\,ds$, est définie par

$$\int_{\partial\Omega} f(x)\,ds = \int_\omega f(x, h(x))\sqrt{1 + |\nabla h|^2}dx$$

où $\nabla h = \left(\dfrac{\partial h}{\partial x_1}, \dfrac{\partial h}{\partial x_2}\right)$ et ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω.

Définition 1.7.2. *La normale extérieure unitaire en un point $(x, h(x)) \in \Gamma = \partial\Omega$, est le vecteur $\vec{n}(x)$ défini par*

$$\vec{n}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x1} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

CHAPITRE 2

ANALYSE ASYMPTOTIQUE D'UN PROBLÈME DYNAMIQUE D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE NON ISOTHERME AVEC FROTTEMENT DE TRESCA

Résumé. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un problème dynamique pour l'élasticité linéaire non isotherme dans un domaine de faible épaisseur borné de $\mathbb{R}^3$ avec les conditions de frottement non linéaires de type de Tresca sur une partie de la frontière et les conditions de Dirichlet sur l'autre partie. En couplant l'équation de la conservation de la quantité du mouvement avec l'équation de la conservation de l'énergie.

Notre objectif est d'étude le comportement asymptotique des solutions lorsque ε tend vers zéro. Lorsque les coefficients ne dépend pas de la tem-

pérature, le problème a été déjà étudie par H. Benseridi, M. Dilmi [7].

Contenu

2.1 Introduction et position du problème

Nous considérons un problème à des déformations d'un corps homogène élastique et isotrope en régime dynamique dans un domaine mince Ω^ε, où ε est un réel positif appartenant à $]0;1[$ et qui tend vers zéro.

La frontière de Ω^ε sera notée $\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon$ avec :

- $\bar{\Gamma}_1^\varepsilon$ est la frontière supérieure d'équation $x_3 = h(x_1; x_2)$;
- $\bar{\Gamma}_L^\varepsilon$ est la frontière latérale ;
- $\bar{\omega}$ est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω^ε.

On note $x' = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $x = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$

Le domaine Ω^ε est donné par :

$$\Omega^\varepsilon = \{(x, x_3) \in \mathbb{R}^3, (x, 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < \varepsilon h\,(x)\}.$$

où h est une fonction de classe C^1 définie sur ω telle que :

$$0 < h_* \leq h(x) \leq h^*; \forall (x; 0) \in \omega$$

Pour les forces extérieures f^ε données, nous supposons que les déformations d'un corps élastique sont gouvernées par les équations suivantes :
La loi de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial^2 u_{ij}^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} - f_i^\varepsilon = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

On désigne par $\sigma^\varepsilon = (\sigma_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}^\varepsilon$ le tenseur des contraintes et par $D = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ le tenseur des taux de déformations :

$$d_{ij}\,(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \ 1 \leq i, j \leq 3.$$

On suppose que la loi de comportement suit la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij}^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}) = 2\mu(T^{\varepsilon})\, d_{ij}(u^{\varepsilon}) + \lambda(T^{\varepsilon})\, d_{kk}(u^{\varepsilon})\, \delta_{ij},$$

où

- $u^{\varepsilon} = (u_1^{\varepsilon}, u_2^{\varepsilon}, u_3^{\varepsilon})$ est la déplacement du corps élastique ;
- λ et μ sont les coefficients de Lamé, avec $\lambda + \mu \geq 0$;
- T^{ε} est sa température.

La loi de la conservation de l'énergie est donnée par :

$$-\nabla(K^{\varepsilon}\nabla T^{\varepsilon}) = \sigma^{\varepsilon} : D(u^{\varepsilon}) + r^{\varepsilon}(T^{\varepsilon});$$
$$\sigma^{\varepsilon} : D(u^{\varepsilon}) = \textstyle\sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}^{\varepsilon} d_{ij}(u^{\varepsilon})$$

où K^{ε} et r^{ε} désignent respectivement, la conductivité thermique et l'apport massique de la chaleur.

Nous supposons que la vitesse est connue sur $\Gamma_1^{\varepsilon} \times]0, T[$ et sur $\Gamma_L^{\varepsilon} \times]0, T[$

$$\begin{array}{rcll} u^{\varepsilon} & = & 0 & \text{sur } \Gamma_1^{\varepsilon} \times]0, T[\\ u^{\varepsilon} & = & g & \text{sur } \Gamma_L^{\varepsilon} \times]0, T[\end{array}$$

avec, $g = (g_1, g_2, g_3)$ est une fonction avec $g_3 = 0$, telle que :

$$\int_{\Gamma^{\varepsilon}} g.n ds = 0.$$

Le vecteur normal extérieur unitaire à Γ^{ε} sera noté $n = (n_1; n_2; n_3)$:

La normale unitaire extérieure à ω est le vecteur $(0; 0; -1)$.

On utilise les notations usuelles :

$$\begin{array}{rcl} u_n^{\varepsilon} & = & u^{\varepsilon}.n = u_i^{\varepsilon}.n_i,\ u_{\tau_i}^{\varepsilon} = u_i^{\varepsilon} - u_n^{\varepsilon} n_i, \\ \sigma_n^{\varepsilon} & = & (\sigma.n)\, n = \sigma_{ij}^{\varepsilon} n_i n_j,\ \sigma_{\tau_i}^{\varepsilon} = \sigma_{ij}^{\varepsilon} n_j - \sigma_n^{\varepsilon} n_i, \end{array}$$

respectivement, la vitesse normale, la vitesse tangentielle, la composante normale et la composante tangentielle du tenseur.
Sur ω la vitesse tangentielle est connue et vérifie la loi de Tresca :

$$\left.\begin{array}{r}|\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \Longrightarrow \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \Longrightarrow \exists \beta > 0 \text{ tel que } \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon\end{array}\right\} \text{sur } \omega \times]0, T[$$

Pour la température, on suppose que :

$$\begin{aligned} T^\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon \quad (\text{ Dirichlet-homogène sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon\ ), \\ \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial n} &= 0 \ \text{ sur } \omega \quad (\text{ Neumann-homogène sur } \omega). \end{aligned}$$

Le problème complet consiste donc à trouver le champ de vitesse u^ε et la température T^ε vérifie les équations et les conditions aux limites suivantes :

(2.1.1) $$\frac{\partial^2 u_{ij}^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} = f_i^\varepsilon \quad \text{dans } \ \Omega^\varepsilon \times]0, T[$$

(2.1.2) $$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = 2\mu(T^\varepsilon)\, d_{ij}(u^\varepsilon) + \lambda(T^\varepsilon)\, d_{kk}(u^\varepsilon)\,\delta_{ij}$$

(2.1.3) $$-\nabla(K^\varepsilon \nabla T^\varepsilon) = \sigma^\varepsilon : D(u^\varepsilon) + r^\varepsilon(T^\varepsilon) \quad \text{dans } \ \Omega^\varepsilon,$$

(2.1.4) $$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[$$

(2.1.5) $$u^\varepsilon = g \quad \text{sur } \ \Gamma_L^\varepsilon \times]0, T[$$

(2.1.6) $$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}.n = 0 \quad \text{sur } \ \omega \times]0, T[$$

(2.1.7) $$\left.\begin{array}{r}|\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \Longrightarrow \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \Longrightarrow \exists \beta > 0 \ tel\ que \ \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon\end{array}\right\} \text{sur } \omega \times]0, T[$$

(2.1.8) $$u^\varepsilon(0) = u_0, \ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0) = u$$

(2.1.9) $$T^\varepsilon = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon,$$

(2.1.10) $$\frac{\partial T^\varepsilon}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } \omega$$

Afin de donner la formulation variationnelle du problème $(2.1.1)-(2.1.10)$, nous allons établir le lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *La condition* $(2.1.7)$ *est équivalente à la relation suivante :*

(2.1.11) $$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\sigma_\tau^\epsilon + k^\epsilon|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}| = 0 \qquad sur\ \omega.$$

Peuve.

• Supposons que u^ε vérifie la condition aux limites de tresca $(2.1.7)$.

▷ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon$, alors $\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0$, d'où $(2.1.11)$

▷ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon$, alors il existe $\beta \geq 0$ tel que $\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon$, on trouve donc

$$\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \cdot \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| = -\beta\,|\sigma_\tau^\varepsilon|^2 + \beta\,|\sigma_\tau^\varepsilon|^2 = 0$$

• Réciproquement, on suppose que $\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \cdot \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| = 0.$

▷ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon$, alors de (2.1.11) on a

$$\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \cdot \sigma_\tau^\varepsilon = -\,|\sigma_\tau^\varepsilon| \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right|$$

d'où l'existence d'un $\beta \geq 0$ tel que $\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon$

▷ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon$, alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \cdot \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| &\geq -\left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| \cdot |\sigma_\tau^\varepsilon| + k^\varepsilon \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| \\ &\geq \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right|(k^\varepsilon - |\sigma_\tau^\varepsilon|)\end{aligned}$$

et comme $k^\varepsilon - |\sigma_\tau^\varepsilon| > 0$, d'où $\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} = 0.$

2.2 Formulation variationnelle du problème (2.1.1)–(2.1.10)

On introduit le cadre fonctionnel suivant :

$$H^1(\Omega^\varepsilon)^3 = \left\{ v \in \left(L^2(\Omega^\varepsilon)\right)^3 : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega^\varepsilon),\ \forall i,j = 1,2,3 \right\}.$$

Nous définissons le convexe fermé non vide de $H^1(\Omega^\varepsilon)^3$, par :

$$V^\varepsilon = \left\{ \varphi \in \left(H^1(\Omega^\varepsilon)\right)^3 : \varphi = g \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon,\ \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \text{ et } \varphi.n = 0 \text{ sur } \omega \right\}.$$

On note par $H^1_{\Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon)$ le sous-espace vectoriel de $H^1(\Omega^\varepsilon)$:

$$H^1_{\Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega^\varepsilon) : \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon \right\}.$$

On introduit également les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
&(2.2.1) \quad & a(T,u,v) &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega^\varepsilon} 2\mu(T)\, d_{ij}(u)\, d_{ij}(v)\, dxdx_3 + \\
& & &\quad \int_{\Omega^\varepsilon} \lambda(T)\, div(u) .div(v)\, dxdx_3; \\
&(2.2.2) \quad & (f^\varepsilon, v) &= \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon v dxdx_3 = \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i dxdx_3; \\
&(2.2.3) \quad & J^\varepsilon(v) &= \int_\omega k^\varepsilon |v_\tau|\, dx; \\
&(2.2.4) \quad & b(T,\psi) &= \int_{\Omega^\varepsilon} K^\varepsilon \frac{\partial T}{\partial x_i} . \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dxdx_3; \\
&(2.2.5) \quad & C(u;T,\psi) &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon(T)\, d_{ij}^2(u)\, \psi dxdx_3 + \\
& & &\quad \int_{\Omega^\varepsilon} \lambda^\varepsilon(T)\, div(u) .div(u)\, \psi dxdx_3 + \int_{\Omega^\varepsilon} r^\varepsilon(T)\, \psi dxdx_3
\end{aligned}$$

Lemme 2.2.1. *Si $u^\varepsilon, T^\varepsilon$ sont des solutions du problème* $(2.1.1)-(2.1.10)$ *alors elles vérifient le problème variationnel :*

(2.2.6)
$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \text{ où } \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \in V^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) \text{ et } T^\varepsilon \in H^1_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon) \text{ telle que} \\ \quad \left(\dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \varphi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + a\left(T^\varepsilon; u^\varepsilon, \varphi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + J^\varepsilon(\varphi) - \\ \quad -J^\varepsilon\left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) \geq \left(f^\varepsilon, \varphi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right), \ \forall \varphi \in V^\varepsilon \\ u^\varepsilon(0) = u_0, \ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0) = u_1 \\ \quad b(T^\varepsilon, \psi) = C(u^\varepsilon; T^\varepsilon, \psi), \quad \forall \psi \in H^1_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}. \end{cases}$$

Preuve. En multipliant l'équation $(2.1.1)$ par $\left(\varphi_i - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)$, où $\varphi \in V^\varepsilon$ et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx dx_3 -$$
$$\textstyle\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{ij} n_j \left(\varphi_i - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) ds = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon_i \left(\varphi_i - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx dx_3.$$

Les conditions aux limites $(2.1.4)$ et $(2.1.5)$ impliquent que :

$$\int_{\Gamma^\epsilon} \sigma^\varepsilon_{ij} n_j \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) d\sigma = \int_\omega \sigma^\varepsilon_{ij} n_j \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx.$$

Mais $\sigma^\varepsilon_{ij} n_j = \sigma^\varepsilon_{T_i} + \sigma^\varepsilon_n n_i$, on trouve :

$$\int_{\Gamma^\epsilon} \sigma^\varepsilon_{ij} n_j \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) d\sigma = \int_\omega \sigma^\varepsilon_{\tau_i} \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx + \int_\omega \sigma^\varepsilon_n n_i \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx$$

et comme $\left(\varphi_i - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) n_i = 0$, on a :

(2.2.7)
$$\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \int_{\Omega^\epsilon} \sigma^\varepsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx dx_3 -$$
$$\textstyle\int_\omega \sigma^\varepsilon_{\tau_i} \left(\varphi_i - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx = \int_{\Omega^\epsilon} f^\varepsilon_i \left(\varphi_i - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx dx_3 \ \forall \varphi \in V^\varepsilon.$$

Dans $(2.2.7)$ on ajoute et on retranche le terme $\int_\omega k^\varepsilon \left(|\varphi_\tau| - |\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}| \right) dx$, on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) + \int_{\Omega^\epsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dx dx_3 - \int_\omega \sigma_{\tau_i}^\varepsilon \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dx +$$

$$\int_\omega k^\varepsilon \left(|\varphi_\tau| - |\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}| \right) dx - \int_\omega k^\varepsilon \left(|\varphi_\tau| - |\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}| \right) dx = \int_{\Omega^\epsilon} f_i^\varepsilon \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dx dx_3.$$

On pose :

$$B = \int_\omega \sigma_{\tau_i}^\varepsilon \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dx + \int_\omega k^\varepsilon \left(|\varphi_\tau| - |\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}| \right) dx.$$

Donc :

$$\begin{aligned} B &= \int_\omega \sigma_{\tau_i}^\varepsilon \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dx + \int_\omega k^\varepsilon \left(|\varphi_\tau| - |\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}| \right) dx \\ &= \int_\omega \sigma_{\tau_i}^\varepsilon \varphi_i dx - \int_\omega \sigma_{\tau_i}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) dx + \int_\omega k^\varepsilon |\varphi_\tau| dx - \int_\omega k^\varepsilon |\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}| dx. \end{aligned}$$

Maintenant le lemme $2.1.1$, nous donnons :

$$B = \int_\omega \sigma_{\tau_i}^\varepsilon \varphi_i dx + \int_\omega k^\varepsilon |\varphi_\tau| dx.$$

Autrement :

$$\sigma_\tau^\varepsilon \varphi \geq -|\sigma_\tau^\varepsilon||\varphi_\tau| \geq -k^\varepsilon |\varphi_\tau| \;\; \text{sur} \;\; \omega$$

et

$$B = \int_\omega \sigma_{\tau_i}^\varepsilon \varphi_i dx + \int_\omega k^\varepsilon |\varphi_\tau| dx \geq 0.$$

En déduit l'inégalité suivante :

(2.2.8) $$\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) + \int_{\Omega^\epsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx dx_3 + \int_\omega k^\varepsilon |\varphi_\tau| dx - \int_\omega k^\varepsilon |\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}(t)| dx \geq \int_{\Omega^\epsilon} f_i^\varepsilon (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx dx_3.$$

En remplaçant $\sigma_{ij}^{\varepsilon}$ par l'expression $(2.1.2)$ dans $(2.2.8)$, on voit que :

(2.2.9)
$$\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + a\left(T; u^\varepsilon(t), \varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + J^\varepsilon(\varphi) - J^\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) \geq \left(f^\varepsilon, \varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right), \forall \varphi \in V^\varepsilon.$$

En multipliant l'équation $(2.1.3)$ par $\psi \in H^1_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon)$ et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega^\varepsilon} K^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dx_3 = & \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon(T^\varepsilon) d_{ij}^2(u^\varepsilon)\psi dx dx_3 + \\ & \int_{\Omega^\varepsilon} \lambda^\varepsilon(T^\varepsilon) div(u^\varepsilon) .div(u^\varepsilon)\psi dx dx_3 + \\ & \int_{\Gamma^\varepsilon} K^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial \eta_i}\psi ds + \int_{\Omega^\varepsilon} r^\varepsilon(T^\varepsilon)\psi dx dx_3.\end{aligned}$$

Maintenant les conditions aux limites $(2.1.8)$-$(2.1.9)$, nous donnons :

(2.2.10)
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega^\varepsilon} K^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dx_3 = & \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon(T^\varepsilon) d_{ij}^2(u^\varepsilon)\psi dx dx_3 + \\ & \int_{\Omega^\varepsilon} \lambda^\varepsilon(T^\varepsilon) div(u^\varepsilon) .div(u^\varepsilon)\psi dx dx_3 + \\ & \int_{\Omega^\varepsilon} r^\varepsilon(T^\varepsilon)\psi dx dx_3\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$b(T^\varepsilon, \psi) = C(u^\varepsilon; T^\varepsilon, \psi), \quad \forall \psi \in H^1_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}. \blacksquare$$

2.3 Analyse asymptotique du problème (2.1.1) – (2.1.10)

2.3.1 Changement du domaine et problème variationnel

Pour l'analyse asymptotique du problème, nous utilisons le changement d'échelle $z=\dfrac{x_3}{\varepsilon}$, et donc le domaine Ω^ε se transforme à un domaine Ω indépendant de ε définit par :

$$\Omega = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^3, (x,0) \in \omega \ et \ 0 < z < h(x)\right\}.$$

On note $\Gamma = \bar{\omega} \cup \Gamma_L \cup \Gamma_1$, sa frontière.

A la suite de ce changement d'échelle, nous notons par $\hat{u}^\varepsilon$ et $\hat{T}^\varepsilon$, les inconnues définies sur Ω.

De plus, on définit sur Ω les fonctions suivantes :

$$\text{(2.3.1)} \qquad \begin{cases} u_i^\varepsilon(x,x_3,t) = \hat{u}_i^\varepsilon(x,z,t), \quad i=1,2 \\ \varepsilon^{-1}u_3^\varepsilon(x,x_3,t) = \hat{u}_3^\varepsilon(x,z,t), \ \ T^\varepsilon(x,x_3) = \hat{T}^\varepsilon(x,z). \end{cases}$$

Pour les données, nous avons les relations suivantes :

$$\text{(2.3.2)} \qquad \hat{f}(x,z,t) = \varepsilon^2 f^\varepsilon(x,x_3,t), \ \hat{g}(x,z,t) = g(x,x_3,t)$$

$$(\hat{u}_0)_i(x,z) = (u_0)_i(x,x_3), \ \ (\hat{u}_0)_3(x,z) = \varepsilon^{-1}(u_0)_3(x,x_3)$$

$$\text{(2.3.3)} \qquad \hat{K} = K^\varepsilon, \ \ \hat{r} = \varepsilon^2 r^\varepsilon, \ \hat{\lambda} = \lambda^\varepsilon, \ \hat{\mu} = \mu^\varepsilon, \ \hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon$$

avec $\hat{\mu}$, $\hat{\lambda}$, $\hat{f}$, $\hat{K}$, $\hat{k}$ et $\hat{g}$ indépendants de ε.

Ainsi le relèvement G^ε de g est définie par :

$$\text{(2.3.4)} \qquad \varepsilon\hat{G}_3(x,z,t) = G_3^\varepsilon(x,x_3,t), \ \hat{G}_i(x,z,t) = G_i^\varepsilon(x,x_3,t), \ \ i=1,2$$

Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel sur Ω. Pour cela, on note :

$$\begin{aligned}
V &= \left\{ v \in \left(H^1(\Omega)\right)^3 : v = g \text{ sur } \Gamma_L,\ \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1,\ v.n = 0\ sur\ \omega \right\}. \\
\Pi(V) &= \left\{ \varphi \in H^1(\Omega)^2 : \varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \varphi_i = g \text{ sur } \Gamma_L \text{ et } \varphi_i = 0 \text{ sur } \Gamma_1,\ i = 1,2 \right\}. \\
V_z &= \left\{ v = (v_1, v_2) \in L^2(\Omega)^2 : \frac{\partial v_i}{\partial z} \in L^2(\Omega),\ i = 1,2;\ v = 0\ sur\ \Gamma_1 \right\}.
\end{aligned}$$

Il est clair que V_z est un espace de Banach, muni de la norme :

$$\|v\|_{V_z} = \left(\sum_{i=1}^{2} \|v_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v_i}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Avec le changement d'échelle défini dans (2.3.1) - (2.3.3) le problème (2.2.6) devient :

Trouver le champ de $\hat{u}^\varepsilon$ dans V et $\hat{T}^\varepsilon$ dans $H^1_{\Gamma_L \cup \Gamma_1}(\Omega)$ tels que

(2.3.5)
$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \hat{\varphi}_i - \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \hat{\varphi}_3 - \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) + \\
&a\left(\hat{T}^\varepsilon; \hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) + J(\hat{\varphi}) - J\left(\hat{\varphi} - \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) \geq \\
&\left(\hat{f}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t) \right), \quad \forall \hat{\varphi} \in V
\end{aligned}$$

(2.3.6) $\quad b\left(\hat{T}^\varepsilon, \hat{\psi}\right) = C\left(\hat{u}^\varepsilon; \hat{T}^\varepsilon, \hat{\psi}\right), \quad \forall \hat{\psi} \in H^1_{\Gamma_L \cup \Gamma_1}(\Omega)$

où

$$\begin{aligned}
&a\left(\hat{T}^\varepsilon; \hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon\right) = \varepsilon^2 \textstyle\sum_{i,j=1}^2 \int_\Omega \hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right) \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dxdz + \\
&+ \textstyle\sum_{i=1}^2 \int_\Omega \hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right) \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) \right] dxdz + \\
&+ \varepsilon^2 \textstyle\int_\Omega 2\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right) \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_3 - \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dxdxz + \varepsilon^2 \int_\Omega \hat{\lambda}^\varepsilon \left(\hat{T}^\varepsilon\right) div\left(\hat{u}^\varepsilon\right) .div \left(\hat{\varphi} - \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dxdz \\
&\left(\hat{f}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon\right) = \sum_{i=1}^{2} \textstyle\int_\Omega \hat{f}_i^\varepsilon \left(\hat{\varphi} - \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dxdz + \varepsilon \int_\Omega \hat{f}_3^\varepsilon \left(\hat{\varphi}_3 - \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dxdz \\
&b\left(\hat{T}^\varepsilon, \hat{\psi}\right) = \sum_{i=1}^{2} \textstyle\int_\Omega \varepsilon^2 \hat{K} \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x_i} dxdz + \int_\Omega \hat{K} \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} dxdz, \qquad J(\hat{\varphi}) = \int_\omega \hat{k} \left|\hat{\varphi}_\tau\right| dx
\end{aligned}$$

$$C\left(\hat{u}^{\varepsilon};\hat{T}^{\varepsilon},\hat{\psi}\right)=\sum_{i;j=1}^{2}\frac{1}{2}\int_{\Omega}\varepsilon^{2}\hat{\mu}\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial x_{j}}+\frac{\partial\hat{u}_{j}^{\varepsilon}}{\partial x_{i}}\right)^{2}\psi dxdz+\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial z}+\varepsilon^{2}\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial x_{i}}\right)^{2}\psi dxdz+$$
$$\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)\left(\varepsilon^{2}\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial x_{i}}+\frac{\partial\hat{u}_{j}^{\varepsilon}}{\partial z}\right)^{2}\psi dxdz+\int_{\Omega}2\varepsilon^{2}\hat{\mu}\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial z}\right)^{2}\psi dxdz+$$
$$\int_{\Omega}r\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)\psi dxdz+\int_{\Omega}\varepsilon^{2}\hat{\lambda}^{\varepsilon}\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)div\left(\hat{u}^{\varepsilon}\right).div\left(\hat{u}^{\varepsilon}\right)\psi dx_{3}dz$$

2.3.2 Estimations à priori

Nous allons établir des estimations sur la déplacement $\hat{u}^{\varepsilon}$, puis sur la température $\hat{T}^{\varepsilon}$ solution de notre problème variationnel.

Estimation à priori sur le déplacement

Lemme 2.3.1. *Supposons que $f\in\left(L^{2}\left(\Omega\right)\right)^{3}$, le coefficient de frottement $k>0$ dans $L^{\infty}\left(\omega\right)$ et qu' il existe des constantes μ_{*} , μ^{*}, λ_{*}, λ^{*}telles que*

(2.3.7) $$0<\mu_{*}\leq\mu\left(a\right)\leq\mu^{*}\text{ et }0<\lambda_{*}\leq\lambda\left(b\right)\leq\lambda^{*}\quad\forall a,\ b\in\mathbb{R},$$

alors, il existe une constante strictement positive C indépendante de ε telle que :

(2.3.8)
$$\sum_{i;j=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial x_{j}}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\left\|\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial z}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\left\|\varepsilon^{2}\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial t}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial z}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\left\|\varepsilon^{2}\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial x_{i}}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\left\|\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial t}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\right)\leq C$$

(2.3.9)
$$\sum_{i;j=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial^{2}\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial x_{j}\partial t}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\left\|\varepsilon\frac{\partial^{2}\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial z\partial t}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\left\|\varepsilon^{2}\frac{\partial^{2}\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+$$
$$\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial^{2}\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial z\partial t}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\left\|\varepsilon^{2}\frac{\partial^{2}\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial x_{i}\partial t}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\left\|\varepsilon\frac{\partial^{2}\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\right)\leq C$$

Preuve. Soit u^{ε} la solution du problème $(2.2.6)$, donc :

$$\left(\frac{\partial^{2}u^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}\left(t\right),\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right)+a\left(T^{\varepsilon};u^{\varepsilon}\left(t\right),\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right)\leq\left(\frac{\partial^{2}u^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}\left(t\right),\varphi\right)+a\left(T^{\varepsilon};u^{\varepsilon}\left(t\right),\varphi\right)+$$
$$+J^{\varepsilon}\left(\varphi\right)-\int_{\Omega^{\varepsilon}}f_{i}^{\varepsilon}\varphi_{i}dxdx_{3}+\int_{\Omega^{\varepsilon}}f_{i}^{\varepsilon}\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)dxdx_{3},\ \forall\varphi\in V^{\varepsilon}$$

car $J^{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)$ est positive.
Alors

(2.3.10) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|^{2}+a\left(T^{\varepsilon};u^{\varepsilon}(t),\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)\right)\leq\left(\frac{\partial^{2}u^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}(t),\varphi\right)+$$
$$a\left(T^{\varepsilon};u^{\varepsilon}(t),\varphi\right)+J^{\varepsilon}(\varphi)-\int_{\Omega^{\varepsilon}}f_{i}^{\varepsilon}\varphi_{i}dxdx_{3}+\int_{\Omega^{\varepsilon}}f_{i}^{\varepsilon}\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\,dxdx_{3},\ \forall\varphi\in V^{\varepsilon}$$

En intégrant $(2.3.10)$ en temps pour $s\in[0,t]$ on a :

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|^{2}+a\left(T^{\varepsilon};u^{\varepsilon}(t),\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)\right)\leq\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(0)\right\|^{2}+a\left(T^{\varepsilon};u^{\varepsilon}(0),\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(0)\right)\right)+$$
$$\int_{0}^{t}\left(\frac{\partial^{2}u^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}(s),\varphi\right)ds+\int_{0}^{t}a\left(T^{\varepsilon};u^{\varepsilon}(s),\varphi\right)ds+tJ^{\varepsilon}(\varphi)-\int_{0}^{t}\left(f_{i}^{\varepsilon}(s),\varphi_{i}\right)ds+\int_{0}^{t}\left(f_{i}^{\varepsilon}(s),\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(s)\right)ds$$

et comme

$$\sum_{i,j=1}^{2}\left|d_{ij}(u^{\varepsilon})\right|^{2}\leq\left|\nabla u^{\varepsilon}\right|^{2}\quad et\quad\left|div(u^{\varepsilon})\right|^{2}\leq\left|\nabla u^{\varepsilon}\right|^{2},$$

on obtient :

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|^{2}+a\left(T^{\varepsilon};u^{\varepsilon}(t),\partial u^{\varepsilon}(t)\right)\right)\leq\frac{1}{2}\left(\left\|u_{1}\right\|^{2}+(2\mu^{*}+\lambda^{*})\left\|\nabla u_{0}\right\|^{2}\right)+$$
$$\int_{0}^{t}\left(\frac{\partial^{2}u^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}(s),\varphi\right)ds+\int_{0}^{t}a\left(T^{\varepsilon};u^{\varepsilon}(s),\varphi\right)ds+tJ^{\varepsilon}(\varphi)-\int_{0}^{t}\left(f_{i}^{\varepsilon}(s),\varphi_{i}\right)ds+\int_{0}^{t}\left(f_{i}^{\varepsilon}(s),\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(s)\right)ds$$

D'après l'inégalité de Korn, il existe C_K indépendant de ε telle que :

(2.3.11) $$a\left(T^{\varepsilon};u^{\varepsilon}(t),u^{\varepsilon}(t)\right)\geq2\mu_{*}C_{K}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}.$$

En appliquant les inégalités de Hölder et de Yong, on obtient :

$$\begin{aligned}a\left(T^{\varepsilon};u^{\varepsilon},\varphi\right)&\leq\int_{\Omega^{\varepsilon}}2\mu^{\varepsilon}(T^{\varepsilon})\left|d_{ij}(u^{\varepsilon})\right|.\left|d_{ij}(\varphi)\right|dxdx_{3}+\int_{\Omega^{\varepsilon}}\lambda^{\varepsilon}(T^{\varepsilon})\left|div(u^{\varepsilon})\right|.\left|div(\varphi)\right|dxdx_{3}\\&\leq\int_{\Omega^{\varepsilon}}2\mu^{*}\left|d_{ij}(u^{\varepsilon})\right|.\left|d_{ij}(\varphi)\right|dxdx_{3}+\int_{\Omega^{\varepsilon}}\lambda^{*}\left|div(u^{\varepsilon})\right|.\left|div(u^{\varepsilon})\right|dxdx_{3}\end{aligned}$$

$$\leq \left(\textstyle\int_{\Omega^\varepsilon} \sqrt{\frac{\mu_* C_K}{2}} \left|d_{ij}\left(u^\varepsilon\right)\right|\right)\left(\textstyle\int_{\Omega^\varepsilon} \frac{2\sqrt{2}\mu^*}{\sqrt{\mu_* C_K}} \left|d_{ij}\left(\varphi\right)\right| dxdx_3\right) +$$
$$\left(\textstyle\int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\sqrt{\mu_* C_K}}{2} \left|div\left(u^\varepsilon\right)\right|\right)\left(\textstyle\int_{\Omega^\varepsilon} \frac{2\lambda^*}{\sqrt{\mu_* C_K}} \left|div\left(\varphi\right)\right| dxdx_3\right)$$
$$\leq \frac{\mu_* C_K}{4} \left\|d_{ij}\left(u^\varepsilon\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{4\left(\mu^*\right)^2}{\mu_* C_K} \left\|d_{ij}\left(\varphi\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} +$$
$$\frac{\mu_* C_K}{8} \textstyle\int_{\Omega^\varepsilon} \left|div\left(u^\varepsilon\right)\right|^2 dxdx_3 + \frac{2\left(\lambda^*\right)^2}{\mu_* C_K} \textstyle\int_{\Omega^\varepsilon} \left|div\left(\varphi\right)\right|^2 dxdx_3.$$

donc :

(2.3.12)
$$\int_0^t a\left(T^\varepsilon; u^\varepsilon\left(s\right), \varphi\right) ds \leq \frac{3\mu_* C_K}{8} \int_0^t \left\|\nabla u^\varepsilon\left(s\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds + t\left(\frac{4\left(\mu^*\right)^2}{\mu_* C_K} + \frac{2\left(\lambda^*\right)^2}{\mu_* C_K}\right)\left\|\nabla\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$$

(2.3.13)
$$\textstyle\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}\left(s\right), \varphi\right) ds = \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right), \varphi\right) - \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(0\right), \varphi\right)$$
$$\leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left\|\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{1}{2}\left\|u_1\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$$

et comme

(2.3.14)
$$\int_0^t \left(f^\varepsilon\left(s\right), \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(s\right)\right) ds = \left(f^\varepsilon\left(t\right), u^\varepsilon\left(t\right)\right) - \left(f^\varepsilon\left(0\right), u^\varepsilon\left(0\right)\right) - \int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon\left(s\right)}{\partial t}, u^\varepsilon\left(s\right)\right) ds$$

les inégalités $(2.3.11) - (2.3.14)$, donnent :

(2.3.15)
$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \mu_* C_K \left\|\nabla u^\varepsilon\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \left\|u_1\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} +$$

$$\left(\frac{1}{2} + 2\mu^* + \lambda^*\right)\left\|u_0\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + t\left(\frac{\mu_* C_K + 4\left(\mu^*\right)^2 + 2\left(\lambda^*\right)^2}{\mu_* C_K}\right)\left\|\nabla\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + tJ\left(\varphi\right) +$$
$$+\frac{\left(\varepsilon h^*\right)^2}{2\mu_* C_K}\left\|f^\varepsilon\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left\|\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{\left(\varepsilon h^*\right)^2}{2\mu_* C_K}\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}\left(s\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds + \frac{\left(\varepsilon h^*\right)^2}{2}\left\|f^\varepsilon\left(0\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} +$$
$$\frac{\left(\varepsilon h^*\right)^2}{2}\int_0^t \left\|f^\varepsilon\left(s\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds + \int_0^t \left(\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(s\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \mu_* C_K \left\|\nabla u^\varepsilon\left(s\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right) ds.$$

En multipliant (2.3.15) par ε et en utilisant les égalités :

$$\varepsilon^2 \left\| f^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = \varepsilon^{-1} \left\| \hat{f} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \text{ et } \left\| \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_3} \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = \varepsilon^{-1} \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

on obtient :

$$\frac{1}{2}\varepsilon \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon\mu_* C_K \left\| \nabla u^\varepsilon(t) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq A + \int_0^t \left(\frac{1}{2}\varepsilon \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon\mu_* C_K \left\| \nabla u^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)} \right) ds$$

avec :

$$A = \left\| \hat{u}_1 \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{1}{2} + 2\mu^* + \lambda^* \right) \left\| \hat{u}_0 \right\|^2_{L^2(\Omega)} + t \left(\frac{\mu_* C_K + 4(\mu^*)^2 + 2(\lambda^*)^2}{\mu_* C_K} \right) \left\| \nabla \hat{\varphi} \right\|^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$\left\| \hat{\varphi} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + t\hat{J}(\hat{\varphi}) + \frac{(h^*)^2}{2} \left\| \hat{f}^\varepsilon(0) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{(h^*)^2}{2\mu_* C_K} \left\| \hat{f}^\varepsilon(t) \right\|^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$\frac{(h^*)^2}{2\mu_* C_K} \int_0^t \left\| \frac{\partial \hat{f}^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \frac{(h^*)^2}{2} \int_0^t \left\| \hat{f}^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^2(\Omega)} ds$$

Daprès le lemme de Gronwall, on déduit :

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|^2 + \varepsilon \left\| \nabla u^\varepsilon(t) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq C$$

Donc la première estimation est démontrée. ■

Pour montrer l'estimation a priori (2.3.9), on régularise la fonctionnelle J^ε, en posant

$$J_\xi^\varepsilon(u) = \int_\omega k^\varepsilon(x,t)\, \varphi_\xi\left(|u_\tau|^2 \right) dx, \ ou\ \varphi_\xi(\lambda) = \frac{1}{1+\xi} |\lambda|^{(1+\xi)} \qquad \xi > 0.$$

on considère l'équation approchée suivante :

(2.3.16)
$$\left(\frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \varphi \right) + a\left(T^\varepsilon; u_\xi^\varepsilon(t), \varphi \right) + \left(\left(J_\xi^\varepsilon \right)' \left(\frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t) \right), \varphi \right) = (f^\varepsilon, \varphi), \ \forall \varphi \in V^\varepsilon$$
$$u_\xi^\varepsilon(0) = u_0, \ \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(0) = u_1$$

maintenant on dérive (2.3.16) en t et on subtituant φ par $\dfrac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t)$

$$\left(\frac{\partial^3 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^3}(t), \frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) + a\left(T^\varepsilon; \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) + \left(\left(J_\xi^\varepsilon\right)''\left(\frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t)\right), \frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) = \left(f^\varepsilon, \frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right)$$

et comme $\left(\left(J_\xi^\varepsilon\right)''\left(\dfrac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t)\right), \dfrac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) > 0$, on obtient

(2.3.17) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\left\|\frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + a\left(T^\varepsilon; \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) \leq \left(f^\varepsilon, \frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right)$$

En intégrant (2.3.17) et utilisant l'inégalité de Korn, on trouve :

$$\left\|\frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + 2\mu_* C_K \left\|\nabla \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq a\left(T^\varepsilon; \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(0), \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(0)\right) + \left\|\frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} +$$
$$2\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) - 2\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0), \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(0)\right) - 2\int_0^t \left(\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(s), \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) ds$$

d'où l'on déduit

(2.3.18)
$$\left\|\frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + 2\mu_* C_K \left\|\nabla \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \left\|\frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + (2\mu^* + \lambda^*)\left\|\frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} +$$

$$+\mu_* C_K \left\|\nabla \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{(\varepsilon h^*)^2}{\mu_* C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \mu_* C_K \left\|\nabla \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} +$$
$$\frac{(\varepsilon h^*)^2}{\mu_* C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{(\varepsilon h^*)^2}{\mu_* C_K}\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds + \mu_* C_K \int_0^t \left\|\nabla \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds.$$

Il faut estimer $\dfrac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(0)$, après l''equation (2.3.16) on déduit que :

$$\left(\frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(0), \varphi\right) = (f^\varepsilon(0), \varphi) - a\left(T^\varepsilon; u_\xi^\varepsilon(0), \varphi\right)$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(0), \varphi\right)\right| \leq \|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} . \|\varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + (2\mu^* + \lambda^*)\left\|u_\xi^\varepsilon(0)\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}$$

$$\leq \varepsilon h^* \left\| f^\varepsilon (0) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} . \left\| \nabla \varphi \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + (2\mu^* + \lambda^*) \left\| u_\xi^\varepsilon (0) \right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \left\| \varphi \right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}$$
$$\leq \left(\varepsilon h^* \left\| f^\varepsilon (0) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + (2\mu^* + \lambda^*) \left\| u_\xi^\varepsilon (0) \right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \right) \left\| \varphi \right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}$$

En multipliant cette inégalité par $\sqrt{\varepsilon}$ et comme

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}} \left\| f^\varepsilon (0) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = \left\| \hat{f}^\varepsilon (0) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ; \quad \sqrt{\varepsilon} \left\| u_\xi^\varepsilon (0) \right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} = \left\| \hat{u}_\xi^\varepsilon (0) \right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}$$

on déduit que :

$$\sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2} (0) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq C,$$

où :

$$C = h^* \left\| \hat{f}^\varepsilon (0) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + (2\mu^* + \lambda^*) \left\| \hat{u}_\xi^\varepsilon (0) \right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} .$$

En passant à la limite en ξ dans $(2.3.18)$, on obtient :

(2.3.19)

$$\left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} (t) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + 2\mu_* C_K \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} (t) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} (0) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + (2\mu^* + \lambda^*) \left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} (0) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} +$$
$$\mu_* C_K \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} (t) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{(\varepsilon h^*)^2}{\mu_* C_K} \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} (t) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \mu_* C_K \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} (0) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} +$$
$$\frac{(\varepsilon h^*)^2}{\mu_* C_K} \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} (0) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{(\varepsilon h^*)^2}{\mu_* C_K} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} (s) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds + \mu_* C_K \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} (s) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds$$

En multipliant maintenant $(2.3.19)$ par ε, on trouve :

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} (t) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon \mu_* C_K \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} (t) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq B + \int_0^t \varepsilon \left(\left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} (s) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \mu_* C_K \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} (s) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \right) ds$$

où B est une constante ne dépand de ε

$$B = (2\mu^* + \lambda^* + \mu_* C_K) \left\| \nabla \hat{u}_1 \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{(h^*)^2}{\mu_* C_K} \left\| \frac{\partial \hat{f}^\varepsilon}{\partial t} (t) \right\|^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$\frac{(h^*)^2}{\mu_* C_K} \left\| \frac{\partial \hat{f}^\varepsilon}{\partial t} (0) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{(h^*)^2}{\mu_* C_K} \int_0^t \left\| \frac{\partial \hat{f}^\varepsilon}{\partial t} (s) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + C^2$$

par l'inégalité de Gronwel, on obtient :

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq C' \quad (C' \text{ est une constante ne dépand pas de } \varepsilon)$$

donc la deusieme estimation est démontré.

Estimation sur la température

Dans cette section, on cherche des estimations à priori sur la température $\hat{T}^\varepsilon$, pour cela nous avons besoin d'établir le lemme suivant :

Lemme 2.3.2. *La température $\hat{T}^\varepsilon$ est majorée par* :

$$\left\| \hat{T}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \leq h^* \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} ; \tag{2.3.20}$$

Lemme 2.3.3. *Supposons que les hypothèses du lemme 2.3.1 sont vérifiées, de plus supposons qu'il existe* :

- deux constantes strictement positives K_* et K^*, telles que :

$$0 < K_* \leq K(x,z) \leq K^*, \quad \forall (x,z) \in \Omega \tag{2.3.21}$$

- une constante positive $\hat{r}^*$, telle que

$$\hat{r}(a) \leq \hat{r}^*. \tag{2.3.22}$$

Alors, il existe une constante positive C_2 indépendante de ε, telle que :

$$\varepsilon^2 \textstyle\sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_2. \tag{2.3.23}$$

Preuve. Dans l'inéquation variationnelle (2.2.10), on choisit $\varphi = \hat{T}^\varepsilon$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{3} I_i = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \varepsilon^2 \hat{K} \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} dxdz + \int_\Omega \hat{K} \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} dxdz,$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{i,j=1}^{2}\frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon^2\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right)^2\hat{T}^\varepsilon dxdz+\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\int_\Omega \hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right)^2\hat{T}^\varepsilon dxdz+\\
&\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2}\int_\Omega \hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}+\frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z}\right)^2\hat{T}^\varepsilon dxdz+\int_\Omega 2\varepsilon^2\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right)^2\hat{T}^\varepsilon dxdz\,;\\
I_2 &= \int_\Omega r\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\hat{T}^\varepsilon dxdz\,;\qquad I_3=\int_\Omega \varepsilon^2\hat{\lambda}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)div\left(u^\varepsilon\right).div\left(u^\varepsilon\right)\hat{T}^\varepsilon dxdz.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous donnons :

$$\begin{aligned}
|I_1| &\le \frac{\varepsilon^2\hat{\mu}^*}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}+\frac{\hat{\mu}^*}{2}\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}+\\
&\frac{\hat{\mu}^*}{2}\sum_{j=1}^{2}\left\|\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}+\frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}+2\varepsilon^2\hat{\mu}^*\left\|\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Par Young, on trouve :

$$\begin{aligned}
|I_1| &\le 2\varepsilon^2\hat{\mu}^*\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}+2\hat{\mu}^*\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}+\\
&2\hat{\mu}^*\varepsilon^4\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}+2\varepsilon^2\hat{\mu}^*\left\|\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Maintenant l'inégalité $(2.3.8)$, et le lemme 2.3.2, nous donnons :

(2.3.24) $$|I_1|\le 2\hat{\mu}^*C\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}\le 2\mu^*h^*C\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

L'analogue de I_1, donne :

(2.3.25) $$|I_2|\le r^*\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}\le r^*h^*\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$|I_3|\le\varepsilon^2\hat{\lambda}^*\left\|div\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right\|^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}\le\hat{\lambda}^*\varepsilon^2\left\|\nabla\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right\|^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}$$

puisque $\varepsilon^2\left\|\nabla\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right\|^2\le C$, alors

(2.3.26) $$|I_3|\le\hat{\lambda}^*C\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}$$

D'autre part, par l'utilisation des $(2.3.21)$ et $(2.3.22)$, on trouve :

$$b\left(T^{\varepsilon},T^{\varepsilon}\right)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\varepsilon^{2}\hat{K}\left|\frac{\partial\hat{T}^{\varepsilon}}{\partial x_{i}}\right|^{2}dxdz+\int_{\Omega}\hat{K}\left|\frac{\partial\hat{T}^{\varepsilon}}{\partial z}\right|^{2}dxdz.$$

ce qui implique :

$$\begin{gathered}\hat{K}_{*}\varepsilon^{2}\left\|\frac{\partial\hat{T}^{\varepsilon}}{\partial x_{i}}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\hat{K}_{*}\left\|\frac{\partial\hat{T}^{\varepsilon}}{\partial z}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\leq b\left(\hat{T}^{\varepsilon},\hat{T}^{\varepsilon}\right)\\ \leq 2\hat{\mu}^{*}h^{*}C\left\|\frac{\partial\hat{T}^{\varepsilon}}{\partial z}\right\|_{L^{2}(\Omega)}+\hat{r}^{*}h^{*}\left\|\frac{\partial\hat{T}^{\varepsilon}}{\partial z}\right\|_{L^{2}(\Omega)}+\hat{\lambda}^{*}C\left\|\hat{T}^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega)},\end{gathered}$$

Autrement,

$$K_{*}\varepsilon^{2}\left\|\frac{\partial\hat{T}^{\varepsilon}}{\partial x_{i}}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\hat{K}_{*}\left\|\frac{\partial\hat{T}^{\varepsilon}}{\partial z}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\leq C_{1}\left\|\frac{\partial\hat{T}^{\varepsilon}}{\partial z}\right\|_{L^{2}(\Omega)}, \tag{2.3.27}$$

où, C_1 est une constante indépendante de ε donnée par :

$$C_{1}=2\hat{\mu}^{*}h^{*}C+\hat{r}^{*}h^{*}+\hat{\lambda}^{*}Ch^{*}$$

donc :

$$\left\|\frac{\partial\hat{T}^{\varepsilon}}{\partial z}\right\|_{L^{2}(\Omega)}\leq\hat{K}_{*}^{-1}C_{1}. \tag{2.3.28}$$

D'autre part, en injectant cette dernière estimation dans $(2.3.27)$, on déduit :

$$\varepsilon^{2}\left\|\frac{\partial\hat{T}^{\varepsilon}}{\partial x_{i}}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\left\|\frac{\partial\hat{T}^{\varepsilon}}{\partial z}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\leq C_{2},$$

où

$$C_{2}=\hat{K}_{*}^{-1}C_{1}^{2}.\ \blacksquare$$

2.3.3 Résultats de convergence

Dans ce paragraphe, on va énoncer du théorème de convergence.

Théorème 2.3.1. *Sous les mêmes hypothèses des lemmes* $(2.3.1)$ *et* $(2.3.3)$*, il existe* $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ *dans* $L^2(0,t,V_z)$ *et* T^* *dans* V_z*, tel que pour des sous suites de* $\hat{u}^\varepsilon$ $\left(\text{resp } \hat{T}^\varepsilon\right)$ *notée encore* $\hat{u}^\varepsilon$ $\left(\text{resp. } \hat{T}^\varepsilon\right)$*, on a les résultats de convergence suivants :*

(2.3.29) $\hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^*\ ;\ \dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \dfrac{\partial u_i^*}{\partial t}\quad 1 \leq i \leq 2$ *faiblement dans* $L^2(0,t,V_z)$

(2.3.30) $\varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0\ ,\ \varepsilon \dfrac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j \partial t} \rightharpoonup 0\ ,\ 1 \leq i,j \leq 2$ *faiblement dans* $L^2(0,t,V_z)$

(2.3.31) $\varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \rightharpoonup 0\ ,\varepsilon \dfrac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z \partial t} \rightharpoonup 0\ ,\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup 0, \varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0$ *dans* $L^2(0,t,V_z)$

(2.3.32) $\varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0\ ,\varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j \partial t} \rightharpoonup 0\quad 1 \leq i \leq 2$ *faiblement dans* $L^2(0,t,V_z)$

(2.3.33) $\varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0, \varepsilon \dfrac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup 0$ *faiblement dans* $L^2(0,t,V_z)$

(2.3.34) $\hat{T}^\varepsilon \rightharpoonup T^*$ *faiblement dans* V_z

(2.3.35) $\varepsilon \dfrac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0$ *faiblement dans* $L^2(\Omega)$

Preuve. D'après $(2.3.8)$, nous obtenons $(2.3.28) - (2.3.33)$.

Grâce à l'estimation $(2.3.23)$, il existe une constante positive C ne dépend pas de ε telle que :

$$\left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

En utilisant le lemme $(1.3.2)$, on en déduit que :

$$\left\| \hat{T}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \leq h^* \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq h^* C,$$

donc $\hat{T}^\varepsilon$ est bornée dans V_z, ce qui montre l'existence d'un élément $\hat{T}^*$ dans V_z tel que $\hat{T}^\varepsilon$ converge faiblement vers T^* dans V_z.

De plus, l'estimation $(2.3.23)$, montre que $\varepsilon \left\| \dfrac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C$, donc $\varepsilon \dfrac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}$ converge vers $\dfrac{\partial \hat{T}^*}{\partial x_i}$, et comme $\hat{T}^\varepsilon$ converge vers T^* dans V_z, alors $\varepsilon \dfrac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}$ converge ver 0 dans V_z.■

2.3.4 Problème limite et l'équation de Reynolds

Théorème 2.3.2. *Sous les hypothèses du théorème 1.3.1 les solutions* $\hat{u}^*$ *et* $\hat{T}^*$ *vérifient les relations suivantes* :

(2.3.36)
$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{\mu}\left(T^*\right)\frac{\partial u_i^*}{\partial z}(t).\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_i-\frac{\partial u_i^*}{\partial t}(t)\right)dxdz+J\left(\hat{\varphi}\right)- J\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t}(t)\right)\geq_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_i,\hat{\varphi}_i-\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right),\quad \forall\hat{\varphi}\in\Pi\left(V\right)$$

(2.3.37)
$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{K}\frac{\partial T^*}{\partial z}(t)\right)=_{i=1}^{2}\hat{\mu}\left(T^*\right)\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial z}(t)\right)^2+\hat{r}\left(T^*\right)\ dans\ L^2\left(\Omega\right).$$

(2.3.38)
$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\mu}\left(T^*\right)\frac{\partial u_i^*}{\partial z}(t)\right)=\hat{f}_i\qquad \text{pour } i=1,2\ \ dans\ L^2\left(\Omega\right);$$

Preuve. L'inéquation variationnelle $(2.3.5)$ s'écrit sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{2}\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2}(t),\hat{\varphi}_i-\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+\varepsilon^4\left(\frac{\partial^2\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2}(t),\hat{\varphi}_3-\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+$$
$$\sum_{i=1}^{4}I_i\left(\varepsilon\right)+\varepsilon^2\int_\Omega\hat{\lambda}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)div\left(\hat{u}^\varepsilon\right).div\left(\hat{\varphi}-\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)dxdz+\int_\omega\hat{k}\left|\hat{\varphi}\right|dx-$$
$$\int_\omega\hat{k}\left|\frac{\partial\hat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right|dx\geq\sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_i,\hat{\varphi}_i-\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+\varepsilon\left(\hat{f}_3,\hat{\varphi}_3-\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t)\right),$$

avec

$$I_1=\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\varepsilon^2\left(\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\hat{\varphi}_i-\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)dxdz;$$

$$I_2=\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_i-\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)dxdz;$$

$$I_3=\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\varepsilon^2\left(\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{\varphi}_3-\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)dxdz;$$

$$I_4=2\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_3-\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)dxdz.$$

En passant à la limite et en utilisant les résultats de convergence du théorème 1.3.1, il existe une sous-suite $\hat{T}^{\varepsilon}$ qui converge presque partout vers T^{*}, et comme $\hat{\mu}\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)$ est continue, alors $\hat{\mu}\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)$ converge presque partout vers $\hat{\mu}\left(T^{*}\right)$.

Le fait que J est semi-continue inférieurement, alors :

(2.3.39)

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^{*}\right)\frac{\partial u_i^{*}}{\partial z}(t).\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_i-\frac{\partial u_i^{*}}{\partial t}(t)\right)dxdz+J\left(\hat{\varphi}\right)-J\left(\frac{\partial u_i^{*}}{\partial t}\right)\geq\sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_i,\hat{\varphi}_i-\frac{\partial u_i^{*}}{\partial t}(t)\right).$$

D'après [9, 28], nous pouvons choisir $\varphi\in H_0^1(\Omega)$ dans (2.3.39) tel que

$$\hat{\varphi}_i=\frac{\partial u_i^{*}}{\partial t}\pm\psi \text{ avec } i=1,2 \text{ et } \hat{\varphi}_3=u_3^{*},$$

on obtient :

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^{*}\right)\frac{\partial u_i^{*}}{\partial z}(t).\frac{\partial\psi}{\partial z}dxdz=\sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_i,\psi_i\right).$$

En utilisant la formule de Green et en choisissant $\psi_1=0$ et $\psi_2\in H_0^1(\Omega)$, puis $\psi_2=0$ et $\psi_1\in H_0^1(\Omega)$, on trouve :

$$-\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^{*}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_i^{*}}{\partial z}\right)\psi_i dxdz=\int_{\Omega}\hat{f}_i\psi_i dxdz$$

donc :

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left[\hat{\mu}\left(T^{*}\right)\left(\frac{\partial u_i^{*}}{\partial z}\right)\right]=\hat{f}_i \quad \text{pour } i=1,2 \quad dans\ H^{-1}(\Omega) \tag{2.3.40}$$

et comme $\hat{f}_i\in L^2(\Omega)$ et $t\in[0,T]$, alors (2.3.40) est vraie dans $L^2(\Omega)$.

D'autre part, en passant à la limite dans (2.3.6) et en utilisant les résultats de convergence du théorème 1.3.1, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\hat{K}\frac{\partial T^{*}}{\partial z}.\frac{\partial\psi}{\partial z}dxdz &= \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^{*}\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_i^{*}}{\partial z}\right)^2\psi dxdz+\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^{\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial u_j^{*}}{\partial z}\right)^2\psi dxdz+\\ \int_{\Omega}\hat{r}\left(T^{*}\right)\psi dxdz &= \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^{*}\right)\left(\frac{\partial u_i^{*}}{\partial z}\right)^2\psi dxdz+\int_{\Omega}\hat{r}\left(T^{*}\right)\psi dxdz,\ \forall\psi\in H^1_{\Gamma_L\cup\Gamma_1}(\Omega).\end{aligned}$$

Maintenant la formule de Green, nous donnons :

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{K}\frac{\partial T^*}{\partial z}\right).\psi dxdz = \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{\mu}\left(T^*\right)\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial z}\right)^2 \psi dxdz + \int_\Omega \hat{r}\left(T^*\right)\psi dxdz . \forall\psi \in H^1_{\Gamma_L\cup\Gamma_1}\left(\Omega\right).$$

Par conséquent :

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{K}\frac{\partial T^*}{\partial z}\right) = \sum_{i=1}^{2}\hat{\mu}\left(T^*\right)\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial z}\right)^2 + \hat{r}\left(T^*\right) \text{ dans } H^{-1}_{\Gamma_L\cup\Gamma_1}\left(\Omega\right). \tag{2.3.41}$$

La formule (2.3.41) est valable dans $L^2(\Omega)$, puisque $\hat{\mu}$ et $\hat{r}$ sont deux fonctions bornées sur $\mathbb{R}$ et $\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial z}\right)^2$ est un élément de $L^2(\Omega)$. ■

Théorème 2.3.3. *Sous les mêmes hypothèses du théorème 2.3.2, on a* :

$$\int_\omega \hat{k}\left|\psi + s^* - s\right| - \left|s^* - s\right| dx - \int_\omega \hat{\mu}\hat{\tau}^*\psi dx \geq 0 \qquad \forall\psi \in L^2\left(\omega\right)^2$$

et

$$\begin{cases} \hat{\mu}\left(\zeta^*\right)\left|\hat{\tau}^*\right| < \hat{k} \Rightarrow \dfrac{\partial s^*}{\partial t} = 0 \\ \hat{\mu}\left(\zeta^*\right)\left|\hat{\tau}^*\right| = \hat{k} \Rightarrow \exists\beta > 0 \text{ tel que } \dfrac{\partial s^*}{\partial t} = \beta\hat{\tau}^* \end{cases}$$

avec :

$$\hat{\tau}^* = \frac{\partial u^*}{\partial z}\left(x,0,t\right), \quad s^*\left(x\right) = u^*\left(x,0,t\right) \textit{ et } \zeta^* = T^*\left(x,0\right).$$

De plus, u^* et T^* vérifie l'inéquation généralisée de Reynolds :

(2.3.42)

$$\int_\omega \left(\int_0^h u^*\left(x,z,t\right)dz - s^*\left(x,0,t\right)h - \hat{\mu}\left(\zeta^*\right)\hat{\tau}^*\tilde{A}\left(x,z\right) + \tilde{C}_i\left(x,z\right)\right)\nabla\psi = 0,\ \forall\psi \in H^1\left(\omega\right),$$

où

$$\tilde{A}\left(x,z\right) = \int_0^h\int_0^z \frac{d\xi}{\hat{\mu}\left(T^*\left(x,\xi\right)\right)},\ \tilde{C}_i\left(x,z\right) = \int_0^h\int_0^z\int_0^\xi \frac{\hat{f}_i\left(x,\eta,t\right)}{\hat{\mu}\left(T^*\left(x,\xi\right)\right)}d\eta d\xi.$$

Preuve. Pour démontrer (2.3.42) en intégrant deux fois l'équation (2.3.38) de 0 à z, on trouve :

$$u_i^*\left(x,z,t\right) = s^*\left(x,0,t\right) + \hat{\mu}\left(\zeta^*\right)A\left(x,z\right)\hat{\tau}^* - C_i\left(x,z\right) \tag{2.3.43}$$

avec

$$A(x,z)=\int_0^z \frac{d\xi}{\hat{\mu}(T^*(x,\xi))},\quad C_i=\int_0^z\int_0^\xi \frac{\hat{f}_i(x,\eta,t)}{\hat{\mu}(T^*(x,\xi))}d\eta d\xi$$

et comme $\hat{u}_i^*(x,h(x))=0$, on a :

$$s^*(x,0,t)+\hat{\mu}(\zeta^*)A(x,z)\hat{\tau}^*=C_i(x,z).$$

En intégrant $(2.3.43)$ de 0 à h, on obtient :

$$\textbf{(2.3.44)}\quad \int_0^h u_i^*(x,z,t)\,dz=s^*(x,0,t)\,h+\hat{\mu}(\zeta^*)\hat{\tau}^*\int_0^h A(x,z)\,dz-\int_0^h C_i(x,z)\,dz.$$

De $(2.3.44)$, on en déduit que :

$$\int_0^h u_i^*(x,z,t)\,dz-s^*(x,0,t)\,h-\hat{\mu}(\zeta^*)\hat{\tau}^*\tilde{A}(x,z)+\tilde{C}_i(x,z)=0,$$

Il résult donc que :

$$\int_\omega\left(\int_0^h u^*(x,z,t)\,dz-s^*(x,0,t)\,h-\hat{\mu}(\zeta^*)\hat{\tau}^*\tilde{A}(x,z)+\tilde{C}_i(x,z)\right)\nabla\psi=0.\quad\blacksquare$$

2.3.5 Unicité des solutions du problème limite

Théorème 2.3.4. *La solution* (u^*,T^*) *du problème limite* $(2.3.36)$-$(2.3.37)$ *est unique dans* $L^2(0,T,V_z)\times V_z$ *pout tout* $0<c<\min(c_0,c_1)$, *avec.*

$$c_0=\left[2\alpha^4C_{\hat{\mu}}\right]^{-\frac{1}{2}}\left(K_*\left[1+(h^*)^2\right]^{-1}-C_{\hat{r}}\right)^{\frac{1}{2}}\ \text{ et }\ c_1=(1+8\mu_*^{-1}\mu^*t)^{-\frac{1}{2}}c_0.$$

Preuv. Posons

$$W_z=\left\{v\in V_z:\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\in L^2(\Omega)\right\},$$
$$B_c=\left\{v\in W_z\times W_z:\left\|\frac{\partial v}{\partial z}\right\|_{V_z}\le c\right\}.$$

Supposons qu'il existe (u^1, T^1) et (u^2, T^2) solutions du problème limite $(2.3.36)$ et $(2.3.37)$.

Pour tout $\psi \in H^1_{\Gamma_L \cup \Gamma_1}(\Omega)$ on a

(2.3.45)
$$\int_\Omega -\hat{K}\frac{\partial T^1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\psi dxdz = \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{\mu}\left(T^1\right)\left(\frac{\partial u_i^1}{\partial z}\right)^2 \psi dxdz + \int_\Omega \hat{r}\left(T^1\right)\psi dxdz$$

(2.3.46)
$$\int_\Omega -\hat{K}\frac{\partial T^2}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} dxdz = \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{\mu}\left(T^2\right)\left(\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\right)^2 \psi dxdz + \int_\Omega \hat{r}\left(T^2\right)\psi dxdz$$

Par soustraction de $(2.3.45)$ et $(2.3.46)$ on obtient

(2.3.47)
$$\int_\Omega \hat{K}\frac{\partial}{\partial z}(C)\frac{\partial}{\partial z}(T^1 - T^2)\psi dxdz = \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \left[\hat{\mu}(T^1)\left(\frac{\partial u_i^1}{\partial z}\right)^2 - \hat{\mu}(T^2)\left(\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\right)^2\right]\psi dxdz +$$
$$+\int_\Omega \left[\hat{r}\left(T^1\right) - \hat{r}\left(T^2\right)\right]\psi dxdz$$

Dans $(2.3.47)$, on ajoute et on retranche le terme $\hat{\mu}(T^1)\left(\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\right)^2$, on trouve :

$$\int_\Omega \hat{K}\frac{\partial}{\partial z}(T^1 - T^2)\frac{\partial}{\partial z}\psi dxdz = \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \left[\hat{\mu}(T^1)\frac{\partial}{\partial z}(u_i^1 + u_i^2)\frac{\partial}{\partial z}(u_i^1 - u_i^2)\right]\psi dxdz +$$
$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \left[\hat{\mu}\left(T^1\right) - \hat{\mu}\left(T^2\right)\right]\left(\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\right)^2 \psi dxdz + \int_\Omega \left[\hat{r}\left(T^1\right) - \hat{r}\left(T^2\right)\right]\psi dxdz$$

En choisissant $\psi = T^1 - T^2 \in H^1_{\Gamma_L \cup \Gamma_1}(\Omega)$ on obtient :

(2.3.48)
$$\int_\Omega \hat{K}\frac{\partial}{\partial z}\left|T^1 - T^2\right|^2 dxdz = \sum_{k=1}^{3} R_k,$$

avec

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{i=1}^{2} R_1^i = \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \left[\hat{\mu}\left(T^1\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(u_i^1 + u_i^2\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(u_i^1 - u_i^2\right)\right]\left(T^1 - T^2\right)dxdz \\ R_2 &= \sum_{i=1}^{2} R_2^i = \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \left[\hat{\mu}\left(T^1\right) - \hat{\mu}\left(T^2\right)\right]\left(\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\right)^2\left(T^1 - T^2\right)dxdz \end{aligned}$$

$$R_3 = \int_\Omega \left[\hat{r}\left(T^1\right) - \hat{r}\left(T^2\right)\right]\left(T^1 - T^2\right) dxdz$$

et comme

$$\int_\Omega \hat{K}\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(T^1 - T^2\right)\right|^2 dxdz \geqslant K_*\left[1 + (h^*)^2\right]^{-1}\left\|T^1 - T^2\right\|_{V_z} \tag{2.3.49}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\left|R_1^i\right| &\leqslant \mu^*\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(u_i^1 + u_i^2\right)\right|^4 dxdz\right)^{1/4}\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(u_i^1 - u_i^2\right)\right|^2 dxdz\right)^{1/2}\left(\int_\Omega\left|T^1 - T^2\right|^4\right)^{1/4} dxdz \\
&\leqslant \mu^*\left\|\frac{\partial}{\partial z}\left(u_i^1 + u_i^2\right)\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\frac{\partial}{\partial z}\left(u_i^1 - u_i^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\left(T^1 - T^2\right)\right\|_{L^4(\Omega)}
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de hölder, et comme l'injection compact de V_z dans $L^4(\Omega)$ est continue, alors il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
|R_1^i| &\leqslant \mu^*\alpha^2\left\|\frac{\partial}{\partial z}(u_i^1 + u_i^2)\right\|_{V_z}\left\|\frac{\partial}{\partial z}(u_i^1 - u_i^2)\right\|_{L^2(\Omega)}\|(T^1 - T^2)\|_{V_z} \\
&\leqslant \mu^*\alpha^2\left\|\frac{\partial}{\partial z}(u_i^1 + u_i^2)\right\|_{V_z}\|(u_i^1 - u_i^2)\|_{V_z}\|(T^1 - T^2)\|_{V_z}
\end{aligned}$$

et puisque u_i^1et u_i^2 sont deux elément de B_c alors

$$\left|R_1^i\right| \leqslant 2\mu^*\alpha^2 c\left\|\left(u_i^1 - u_i^2\right)\right\|_{V_z}\left\|\left(T^1 - T^2\right)\right\|_{V_z}$$

en utilisant l'inégalité $a_1 + a_2 \leqslant \sqrt{2}\,(a_1 + a_2)^{1/2}$ pour $a_1, a_2 \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}
|R_1| &\leq 2\mu^*\alpha^2 c\left\|\left(T^1 - T^2\right)\right\|_{V_z}\sum_{i=1}^2\left\|\left(u_i^1 - u_i^2\right)\right\|_{V_z} \\
&\leq 2\sqrt{2}\mu^*\alpha^2 c\left\|\left(T^1 - T^2\right)\right\|_{V_z}\left(\sum_{i=1}^2\left\|\left(u_i^1 - u_i^2\right)\right\|_{V_z}^2\right)^{1/2} \\
&\leq 2\sqrt{2}\mu^*\alpha^2 c\left\|\left(T^1 - T^2\right)\right\|_{V_z}\left\|\left(u^1 - u^2\right)\right\|_{V_z\times V_z}
\end{aligned}$$

Alors :

(2.3.50) $$|R_1| \leq 2\sqrt{2}\mu^*\alpha^2 c \left\|\left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2\right)\right\|_{V_z} \left\|\left(u^1 - u^2\right)\right\|_{V_z \times V_z}$$

et

$$|R_2^i| \leq C_\mu \int_\Omega |T^1 - T^2|^2 \left|\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\right|^2 dxdz$$
$$\leq C_\mu \left(\int_\Omega |T^1 - T^2|^4\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\right|^4\right)^{1/2} dxdz$$
$$\leq C_\mu \|(T^1 - T^2)\|^2_{L^4(\Omega)} \left\|\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\right\|^2_{L^4(\Omega)}$$
$$\leq C_\mu \alpha^4 \|(T^1 - T^2)\|^2_{V_z} \left\|\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\right\|^2_{V_z}$$
$$\leq C_\mu \alpha^4 \|(T^1 - T^2)\|^2_{V_z} \|u_i^2\|^2_{W_z}$$
$$\leq C_\mu \alpha^4 c^2 \|(T^1 - T^2)\|^2_{V_z}$$

donc

(2.3.51) $$|R_2| \leq 2C_\mu \alpha^4 c^2 \left\|T^1 - T^2\right\|^2_{V_z}$$

comme la fonction $\hat{r}$ est lipshitzien sur $\mathbb{R}$ de rapport $C_{\hat{r}}$ alors

(2.3.52) $$\begin{aligned} |R_3| &\leq C_{\hat{r}} \|T^1 - T^2\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_{\hat{r}} \|T^1 - T^2\|^2_{V_z} \end{aligned}$$

En injectant $(2.3.47) - (2.3.52)$ dans $(2.3.46)$ on a :

$$K_* \left[1 + (h^*)^2\right]^{-1} \|T^1 - T^2\|^2_{V_z} \leq (2C_{\hat{\mu}}\alpha^4 c^2 + C_{\hat{r}}) \|T^1 - T^2\|^2_{V_z} +$$
$$+ 2\sqrt{2}\mu^*\alpha^2 c \|T^1 - T^2\|_{V_z} \|(u^1 - u^2)\|_{V_z \times V_z}$$

donc

$$\left(K_* \left[1 + (h^*)^2\right]^{-1} - 2C_{\hat{\mu}}\alpha^4 c^2 - C_{\hat{r}}\right) \left\|T^1 - T^2\right\|^2_{V_z} \leq 2\sqrt{2}\mu^*\alpha^2 c \left\|T^1 - T^2\right\|_{V_z} \left\|u^1 - u^2\right\|_{V_z \times V_z}$$

on suppose que

$$c < c_0 = \left[2\alpha^4 C_{\hat{\mu}}\right]^{-\frac{1}{2}} \left(K_* \left[1 + (h^*)^2\right]^{-1} - C_{\hat{r}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

a condition que

$$K_* > \left[1 + (h^*)^2\right].C_{\hat{r}}.$$

Alors

(2.3.53) $$\left\|T^1 - T^2\right\|_{V_z} \leq 2\sqrt{2}\mu^* \alpha^{-2} C_{\hat{\mu}}^{-1} c \left(c_0^2 - c^2\right)^{-1} \left\|\left(u^1 - u^2\right)\right\|_{V_z \times V_z}.$$

Nous avons aussi les deux inégalités suivantes :

(2.3.54)
$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{\mu}\left(T^1\right) \frac{\partial u_i^1}{\partial z}(t) . \frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_i^1 - \frac{\partial u_i^1}{\partial t}(t)\right) dxdz + J\left(\hat{\varphi}^1\right) - J\left(\frac{\partial u_i^1}{\partial t}\right) \geq \sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i^1 - \frac{\partial u_i^1}{\partial t}(t)\right)$$

(2.3.55)
$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{\mu}\left(T^2\right) \frac{\partial u_i^2}{\partial z}(t) . \frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_i^2 - \frac{\partial u_i^2}{\partial t}(t)\right) dxdz + J\left(\hat{\varphi}^2\right) - J\left(\frac{\partial u_i^2}{\partial t}\right) \geq \sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i^2 - \frac{\partial u_i^2}{\partial t}(t)\right)$$

On choisit que $\varphi^1 = \dfrac{\partial u_i^2}{\partial t}(t)$ dans $(1.3.52)$ et $\varphi^2 = \dfrac{\partial u_i^1}{\partial t}(t)$ dans $(2.3.55)$ et en sommant les deux inéquations, il vient pour $W = u^1 - u^2$

(2.3.56) $$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left[\hat{\mu}\left(T^1\right) \frac{\partial u_i^1}{\partial z}(t) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right) - \hat{\mu}\left(T^2\right) \frac{\partial u_i^2}{\partial z}(t) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)\right] dxdz \geqslant 0$$

on ajoute et on retranche le terme $\hat{\mu}\left(T^1\right) \dfrac{\partial u_i^2}{\partial z}(t) \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W}{\partial t}\right)$ dans l'equation $(2.3.56)$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left[\hat{\mu}\left(T^1\right) \frac{\partial \hat{u}_i^1}{\partial z}(t) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right) - \hat{\mu}\left(\hat{T}^2\right) \frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z}(t) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)\right] dxdz +$$
$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left[\hat{\mu}\left(T^1\right) \frac{\partial \hat{u}_i^1}{\partial z}(t) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right) - \hat{\mu}\left(T^2\right) \frac{\partial u_i^2}{\partial z}(t) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)\right] dxdz +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^{1}\right)\frac{\partial u_{i}^{2}}{\partial z}(t)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz-\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^{1}\right)\frac{\partial u_{i}^{2}}{\partial z}(t)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz\geqslant 0$$

donc

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}-\hat{\mu}\left(T^{1}\right)\frac{\partial W}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz+\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\hat{\mu}\left(T^{1}\right)-\hat{\mu}\left(T^{2}\right)\right)\frac{\partial u_{i}^{2}}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz\geqslant 0$$

(2.3.57)

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^{1}\right)\frac{\partial W}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz\leq\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\hat{\mu}\left(T^{1}\right)-\hat{\mu}\left(T^{2}\right)\right)\frac{\partial u_{i}^{2}}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz$$

et comme

(2.3.58)
$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^{1}\right)\frac{\partial W}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz\geq\frac{\mu_{*}}{2}\frac{d}{dt}\left\|W\right\|_{V_z}^{2}$$

l'inégalité de Hölder, nous donnons :

$$\left|\int_{\Omega}\left(\hat{\mu}\left(T^{1}\right)-\hat{\mu}\left(T^{2}\right)\right)\frac{\partial\hat{u}_{i}^{2}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz\right|\leq C_{\hat{\mu}}\int_{\Omega}\left|T^{1}-T^{2}\right|\left|\frac{\partial\hat{u}_{i}^{2}}{\partial z}\right|\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)\right|dxdz$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_{\hat{\mu}}\left\|T^{1}-T^{2}\right\|_{L^{4}(\Omega)}\left\|\frac{\partial\hat{u}_{i}^{2}}{\partial z}\right\|_{L^{4}(\Omega)}\left\|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)\right\|_{L^{2}(\Omega)}\\
&\leq \alpha^{2}C_{\hat{\mu}}\left\|T^{1}-T^{2}\right\|_{L^{4}(\Omega)}\left\|\frac{\partial\hat{u}_{i}^{2}}{\partial z}\right\|_{V_z}\left\|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)\right\|_{L^{2}(\Omega)}\\
&\leq c\alpha^{2}C_{\hat{\mu}}\left\|T^{1}-T^{2}\right\|_{V_z}\left\|\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)\right\|_{V_z}.
\end{aligned}$$

Maintenant, par l'inégalité deYoung, on trouve :

(2.3.59)

$$\left|\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\hat{\mu}\left(T^{1}\right)-\hat{\mu}\left(T^{2}\right)\right)\frac{\partial\hat{u}_{i}^{2}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz\right|\leq\sqrt{2}c\alpha^{2}C_{\hat{\mu}}\left\|T^{1}-T^{2}\right\|_{V_z}\frac{d}{dt}\left\|W\right\|_{V_z.V_z}$$

En injectent $(2.3.58)$ et $(2.3.59)$ dans $(2.3.57)$ on déduit que :

(2.3.60)
$$\begin{aligned}\frac{\mu_*}{2}\frac{d}{dt}\|W\|_{V_z}^2 &\leq \sqrt{2}c\alpha^2 C_{\hat{\mu}}\|T^1-T^2\|_{V_z}\frac{d}{dt}\|W\|_{V_z.V_z}\\ \frac{\mu_*}{2}\frac{d}{dt}\|W\|_{V_z} &\leq \sqrt{2}c\alpha^2 C_{\hat{\mu}}\|T^1-T^2\|_{V_z}\end{aligned}$$

Intégrant (2.3.60) entre 0 et t, et comme $W(0)=0$, on obtient

(2.3.61)
$$\frac{\mu_*}{2}\|W\|_{V_z} \leq \sqrt{2}c\alpha^2 C_{\hat{\mu}} t\left\|T^1-T^2\right\|_{V_z}.$$

En revenant à $(2.3.53)$ on trouve

$$\begin{aligned}\|T^1-T^2\|_{V_z} &\leq 2\sqrt{2}\mu^*\alpha^{-2}c\left(c_0^2-c^2\right)^{-1}\|(u^1-\hat{u}^2)\|_{V_z\times V_z}\\ &\leq 8\mu_*^{-1}\mu^* C_{\hat{\mu}}^{-1}c^2\left(c_0^2-c^2\right)^{-1}t\,\|T^1-T^2\|_{V_z}.\end{aligned}$$

Alors

$$\left(1-8\mu_*^{-1}\mu^* c^2\left(c_0^2-c^2\right)^{-1}t\right)\left\|T^1-T^2\right\|_{V_z}\leq 0$$

à condition que

$$0<c<c_1=\left(1+8\mu_*^{-1}\mu^* t\right)^{-\frac{1}{2}}c_0$$

par conséquent

$$\left\|T^1-T^2\right\|_{V_z}=0$$

donc $T^1=T^2$ presque partout dans V_z.

D'après $(2.3.61)$, on déduit que $u^1=u^2$ presque partout dans V_z.

CHAPITRE 3

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UN FLUIDE DE BINGHAM NON ISOTHERME DANS UN DOMAINE MINCE AVEC FROTTEMENT DE TRESCA

Résumé. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'écoulement non isotherme d'un fluide de Bingham incompressible en régime stationnaire dans un domaine de faible épaisseur borné de $\mathbb{R}^3$ avec les conditions de frottement non linéaires de type de Tresca sur une partie de la frontière et les conditions de Dirichlet sur l'autre partie. En couplant l'équation de la conservation de la quantité de mouvement avec l'équation de la conservation de l'énergie. Lorsque le fluide est supposé isotherme, le problème était déjà étudie par [16] .

Contenu

3.1 Introduction et position du problème

Nous considérons l'écoulement stationnaire non-isotherme incompressible d'un fluide de Bingham dans un film mince Ω^ε défini par :

$$\Omega^\varepsilon = \left\{(x, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x_3 < h\left(x\right)\right\}$$

et

$$0 < h_* < h\left(x\right) < h^* \text{ et } h \in C^2\left(\mathbb{R}\right)$$

Nous rappelons que Γ^ε est sa frontière avec : $\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon$

Pour des forces extérieures f^ε données, nous supposons que l'écoulement du fluide est gouverné par les équations suivantes :

La loi de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i^\varepsilon = 0,\ i = 1, 2, 3 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon$$

avec

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = -p^\varepsilon \delta_{ij} + \sqrt{2}\alpha^\varepsilon \frac{D\left(u^\varepsilon\right)}{\left|D\left(u^\varepsilon\right)\right|} + 2\mu^\varepsilon\left(T^\varepsilon\right) D\left(u^\varepsilon\right)$$

et

$$\left|D\left(u^\varepsilon\right)\right| = \left(\sum_{i,j=1}^{3} d_{ij}\left(u^\varepsilon\right) d_{ij}\left(u^\varepsilon\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

- $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$ est la vitesse de fluide ;
- μ^ε est sa viscosité ;
- p^ε est sa pression ;

T^ε est sa température.

La loi de conservation de l'inergie :

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i}\right) = 2\mu^\varepsilon\left(T^\varepsilon\right) d_{ij}\left(u^\varepsilon\right) d_{ij}\left(u^\varepsilon\right) + \sqrt{2}\alpha^\varepsilon \left|D\left(u^\varepsilon\right)\right| + r^\varepsilon\left(T^\varepsilon\right) \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon$$

nous supposons aussi que le fluide est incomprissible

$$div\,(u^\varepsilon) = 0 \qquad \text{dans } \Omega^\varepsilon$$

Sur ω la vitesse tangentielle est connue et vérifie la loi de Tresca

$$\left.\begin{array}{r} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies u_\tau^\varepsilon = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists\beta > 0 \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right\} \text{sur } \omega$$

La vitesse sur le bord est donnée par :

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon$$

$$u^\varepsilon.n = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \omega$$

$$\sigma_\tau^\varepsilon\,(u^\varepsilon) + l^\varepsilon u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon$$

$n = (n_1; n_2; n_3)$ est le vecteur normal extérieur à Γ^ε.

On note

$$\begin{aligned} u_n^\varepsilon &= u^\varepsilon.n = u_i^\varepsilon.n_i, \\ u_{\tau_i}^\varepsilon &= u_i^\varepsilon - u_n^\varepsilon n_i, \\ \sigma_n^\varepsilon &= (\sigma.n)\,n = \sigma_{ij}^\varepsilon n_i n_j, \\ \sigma_{\tau_i}^\varepsilon &= \sigma_{ij}^\varepsilon n_j - \sigma_n^\varepsilon n_i, \end{aligned}$$

Le problème complet consiste donc à trouver le champ de la vitesse u^ε, la pression p^ε, et la température T^ε,vérifient les équations et les conditions aux limites suivantes :

(3.1.1) $$\frac{\partial\sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans } \Omega^\varepsilon$$

(3.1.2) $$\sigma_{ij}^\varepsilon = -p^\varepsilon\delta_{ij} + \sqrt{2}\alpha^\varepsilon\frac{d_{ij}\,(u^\varepsilon)}{|D\,(u^\varepsilon)|} + 2\mu\,(T^\varepsilon)\,d_{ij}\,(u^\varepsilon)$$

(3.1.3)
$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i}\right) = 2\mu^\varepsilon\left(T^\varepsilon\right) d_{ij}\left(u^\varepsilon\right) d_{ij}\left(u^\varepsilon\right) + \sqrt{2}\alpha^\varepsilon\left|D\left(u^\varepsilon\right)\right| + r^\varepsilon\left(T^\varepsilon\right) \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon$$

(3.1.4) $\quad div\left(u^\varepsilon\right) = 0 \quad$ dans Ω^ε

(3.1.5) $\quad u^\varepsilon = 0 \quad$ sur Γ_L^ε

(3.1.6) $\quad u^\varepsilon.n = 0 \quad$ sur $\Gamma_1^\varepsilon \cup \omega$

(3.1.7) $\quad \sigma_\tau^\varepsilon\left(u^\varepsilon\right) + l^\varepsilon u^\varepsilon = 0 \quad$ sur Γ_1^ε

(3.1.8)
$$\left.\begin{array}{c} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies u_\tau^\varepsilon = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists\lambda > 0 \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon = -\lambda\sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right\} \quad \text{sur } \omega$$

(3.1.9) $\quad T^\varepsilon = 0 \quad$ sur $\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon$

(3.1.10) $\quad \dfrac{\partial T^\varepsilon}{\partial n} = 0 \quad$ sur ω

Lemme 3.1.1. *La condition* de Tresca *est équivalente à la relation suivante :*

$$u_T^\epsilon \sigma_T^\epsilon + k^\epsilon |u_T^\epsilon| = 0 \qquad sur\ \omega.$$

Preuve. On suppose que $u_T^\varepsilon \sigma_T^\varepsilon + k^\varepsilon |u_T^\varepsilon| = 0$.

▷ Si $|\sigma_T^\varepsilon| = k^\varepsilon$, alors

$$u_T^\epsilon \sigma_T^\epsilon = -\left|\sigma^\varepsilon\right| \left|u_T^\epsilon\right|,$$

d'où l'existence d'un $\beta \geq 0$ tel que

$$u_T^\epsilon = -\beta \sigma_T^\varepsilon\ .$$

▷ Si $|\sigma^\varepsilon| < k^\varepsilon$, alors

$$\begin{aligned} u_T^\epsilon \sigma_T^\epsilon + k^\varepsilon |u_T^\epsilon| &= 0 \geq -\left|u_T^\epsilon\right| . \left|\sigma_T^\epsilon\right| + k^\varepsilon |u_T^\epsilon| \\ &\geq \left|u_T^\epsilon\right| . \left(-\left|\sigma_T^\epsilon\right| + k^\varepsilon\right) \end{aligned}$$

et comme $-|\sigma_T^\epsilon| + k^\varepsilon > 0$, alors $u_T^\epsilon = 0$.

Réciproquement, on suppose que u^ε vérifie la condition aux limites de Tresca

▷ Si $|\sigma_T^\varepsilon| < k^\varepsilon$, alors $u_T^\varepsilon = 0$

$$u_T^\epsilon \sigma_T^\epsilon + k^\epsilon |u_T^\epsilon| = 0 \ .$$

▷ Si $|\sigma_T^\varepsilon| = k^\varepsilon$, alors il existe $\beta \geq 0$ tel que $u_T^\varepsilon = -\beta\sigma_T^\varepsilon$.

D'où

$$u_T^\epsilon \sigma_T^\epsilon + k^\epsilon |u_T^\epsilon| = -\beta \left|\sigma_T^\epsilon\right|^2 + \beta \left|\sigma_T^\varepsilon\right|^2 = 0. \quad \blacksquare$$

3.2 Formulation variationnelle du problème (3.1.1)–(3.1.10)

Pour la formulation variationnelle du problème, on introduit le cadre fonctionnel suivant

$$V^\varepsilon\left(\Omega^\varepsilon\right) = \left\{\varphi \in \left(H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^3 : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon;\ \varphi.n = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \omega\right\}$$

$$V_{div}^\varepsilon\left(\Omega^\varepsilon\right) = \left\{\varphi \in K^\varepsilon;\ div\varphi = 0\right\}$$

$$L_0^2\left(\Omega^\varepsilon\right) = \left\{q \in L^2\left(\Omega^\varepsilon\right) : \int_{\Omega^\varepsilon} q dx = 0\right\}$$

$$H_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}^1\left(\Omega^\varepsilon\right) = \left\{\varphi \in H^1\left(\Omega^\varepsilon\right) : \varphi = 0 \ \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon\right\}$$

on introduit également les notations suivantes

$$a\left(T; u, v\right) = 2\int_{\Omega^\varepsilon} \mu\left(T\right) d_{ij}\left(u\right) d_{ij}\left(v\right) dx dx_3$$

$$\left(p, divv\right) = \int_{\Omega^\varepsilon} pdivvdxdx_3$$

$$J\left(v\right) = \int_\omega k^\varepsilon \left|v\right| dx + \sqrt{2}\alpha^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \left|D\left(v\right)\right| dx dx_3$$

$$b(T,v)=\int_{\Omega^\varepsilon}K^\varepsilon\nabla T\nabla v dxdx_3$$

$$c(u;T,v)=2\int_{\Omega^\varepsilon}\mu(T)\,d_{ij}(u)\,d_{ij}(u)\,vdxdx_3+2\alpha^\varepsilon\int_{\Omega^\varepsilon}|D(u)|\,vdxdx_3+\int_{\Omega^\varepsilon}r^\varepsilon(T)\,vdxdx_3$$

Proposition.3.2.1. *si u^ε, p^ε et T^ε sont des solutions réguliéres du problème* $(3.1.1)-(3.1.10)$, *alors elles verifient le problème variationnel*

Trouver $u^\varepsilon\in V^\varepsilon_{div}$; $p^\varepsilon\in L^2_0(\Omega^\varepsilon)$ et *$T^\varepsilon\in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega^\varepsilon)$ telles que :*

(3.2.1)

$$a(T^\varepsilon;u^\varepsilon,\varphi-u^\varepsilon)-(p,div\varphi)+l^\varepsilon\int_{\Gamma_1^\varepsilon}u^\varepsilon(\varphi-u^\varepsilon)\,d\tau+J(\varphi)-J(u^\varepsilon)\geq(f^\varepsilon,\varphi-u^\varepsilon)\ \forall\varphi\in V^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$$

(3.2.2)
$$b(T^\varepsilon,\psi)=c(u^\varepsilon;T^\varepsilon,\psi),\quad\forall\psi\in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega^\varepsilon)$$

Preuve. En multipliant l'équation $(3.1.1)$ par $\varphi-u^\varepsilon$, où $\varphi\in V^\varepsilon$, et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega^\varepsilon}\sigma^\varepsilon_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi-u^\varepsilon)\,dxdx_3-\int_{\Gamma^\varepsilon}\sigma^\varepsilon_{ij}n_j(\varphi-u^\varepsilon)\,ds=\int_{\Omega^\varepsilon}f^\varepsilon(\varphi-u^\varepsilon)\,dxdx_3$$

D'après les conditions aux limites, on trouve :

(3.2.3)

$$a(T;u^\varepsilon,\varphi-u^\varepsilon)+\sqrt{2}\alpha^\varepsilon\int_{\Omega^\varepsilon}\frac{d_{ij}(u^\varepsilon)}{|D(u^\varepsilon)|}d_{ij}(\varphi-u^\varepsilon)\,dxdx_3-\int_{\Omega^\varepsilon}pdiv(\varphi-u^\varepsilon)\,dxdx_3+$$

$$+l^\varepsilon\int_{\Gamma_1^\varepsilon}u^\varepsilon(\varphi-u^\varepsilon)\,d\tau+J(\varphi)-J(u^\varepsilon)\geq(f^\varepsilon,\varphi-u^\varepsilon)\quad\forall\varphi\in V^\varepsilon$$

D'après l'inégalitè de Cauchy-Schwartz, on déduit :

(3.2.4)
$$d_{ij}(u^\varepsilon)\,d_{ij}(\varphi)\leq|D(u^\varepsilon)|\,|D(\varphi)|\,.$$

En substituant l'inégalitè $(3.2.4)$ dans $(3.2.3)$, on obtient $(3.2.1)$

Pour obtenir $(3.2.2)$, en multipliant l'équation $(3.1.3)$ par $\psi\in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega^\varepsilon)$ et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega^\varepsilon}\frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}dxd_3=\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega^\varepsilon}2\mu^\varepsilon\left(T^\varepsilon\right)D^2\left(u^\varepsilon\right)\psi dxdx_3+\sqrt{2}\alpha^\varepsilon\int_{\Omega^\varepsilon}\frac{D^2\left(u^\varepsilon\right)}{\left|D\left(u^\varepsilon\right)\right|}\psi dxdx_3+\int_{\Omega^\varepsilon}r^\varepsilon\left(T^\varepsilon\right)\psi dxdx_3$$

et comme $D^2\left(u^\varepsilon\right)=\left|D\left(u^\varepsilon\right)\right|^2$, on déduit directement (3.2.2)

3.3 Lemmes utiles

Lemme 3.3.1. (*Inégalitè de Poincaré*) [17]

$$\int_{\Omega^\varepsilon}\left|u^\varepsilon\right|^2dxdx_3\leq 2h^*\varepsilon\int_{\Gamma_1^\varepsilon}\left|u^\varepsilon\right|^2d\tau+2\left(h^*\varepsilon\right)^2\int_{\Omega^\varepsilon}\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3}\right|^2dxdx_3 \tag{3.3.1}$$

Lemme 3.3.2.[17] . *Supposons que* $f^\varepsilon\in\left(L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^3$; $\hat{l}=\varepsilon l^\varepsilon$; *et qu'il existe deux constants* $\mu_*,\ \mu^*$ *telles que :*

$$0<\mu_*<\mu\left(a\right)<\mu^*,\qquad\forall a\in\mathbb{R},$$
$$\frac{C\left(\Gamma_1^\varepsilon\right)}{l^\varepsilon}\leq\frac{1}{\mu^*}$$

alors :

$$\left\|\nabla u^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leq\left(\frac{24\left(h^*\varepsilon\right)^2}{\mu_*^2}+\frac{12h^*\varepsilon}{l^\varepsilon\mu_*}\right)\left\|f^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \tag{3.3.2}$$

avec :

$$C\left(\Gamma_1^\varepsilon\right)=2\left\|\frac{\partial h^\varepsilon}{\partial x_2}\right\|_{C(\bar{\omega})}\left(1+\left\|\frac{\partial h^\varepsilon}{\partial x_1}\right\|^2_{C(\bar{\omega})}\right) \tag{3.3.3}$$

Lemme 3.3.3. Sous les mêmes données du lemme 3.3.2, on a *:*

$$\int_{\Omega^\varepsilon}\left|\nabla u^\varepsilon\right|^2\leq 2\int_{\Omega^\varepsilon}\left|D\left(u^\varepsilon\right)\right|^2dxdx_3+C\left(\Gamma_1^\varepsilon\right)\int_{\Gamma_1^\varepsilon}\left|u^\varepsilon\right|^2d\tau \tag{3.3.4}$$

avec :

$$C\left(\Gamma_1^\varepsilon\right)\int_{\Gamma_1^\varepsilon}\left|u^\varepsilon\right|^2 d\tau \leq \frac{\mu_* C\left(\Gamma_1^\varepsilon\right)}{2l^\varepsilon}\int_{\Omega^\varepsilon}\left|\nabla u^\varepsilon\right|^2 dx dx_3 + \frac{2C\left(\Gamma_1^\varepsilon\right)}{l^\varepsilon}\left(\frac{2\left(h^*\varepsilon\right)^2}{\mu_*}+\frac{h^*\varepsilon}{l^\varepsilon}\right)\left\|f^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$$

3.4 Analyse asymptotique du problème $(3.1.1) - (3.1.10)$

Pour l'analyse asymptotique de notre problème, on utilise le changement d'échelle $z = \dfrac{x_3}{\varepsilon}$, donc le domaine Ω^ε se transforme à un domaine Ω indépendant de ε.

où

$$\Omega = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < z < h(x)\right\}$$

Nous définissons maintenant sur Ω des nouvelles inconnue

$$\begin{cases} \hat{u}_i^\varepsilon(x,z) = u_i^\varepsilon(x,x_3)\,,\ \hat{u}_3^\varepsilon(x,z) = \varepsilon^{-1}u_3^\varepsilon(x,x_3) \\ \hat{p}^\varepsilon(x,z) = \varepsilon^2 p^\varepsilon(x,x_3)\,,\ \hat{f}(x,z) = \varepsilon^2 f^\varepsilon(x,x_3) \\ \hat{l} = \varepsilon l^\varepsilon;\ \hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon;\ \hat{\mu} = \mu^\varepsilon;\ \hat{K} = K^\varepsilon;\ \hat{\alpha} = \varepsilon\alpha^\varepsilon;\ r = \varepsilon^2 r^\varepsilon;\ T^\varepsilon(x,x_3) = \hat{T}^\varepsilon(x,z) \end{cases}$$

et soit

$$V(\Omega) = \left\{\hat{\varphi} \in \left(H^1(\Omega)\right)^3 : \hat{\varphi} = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon;\ \hat{\varphi}.n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \omega\right\}$$

$$V_{div}(\Omega) = \{\hat{\varphi} \in K;\ div\hat{\varphi} = 0\}$$

$$H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega) = \{\hat{\varphi} \in H^1(\Omega) : \hat{\varphi} = 0 \ \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_L\}$$

$$V_z = \left\{\varphi \in \left(L^2(\Omega)\right)^2;\ \tfrac{\partial\varphi_i}{\partial z} \in L^2(\Omega) : \varphi = 0 \ \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon\right\}$$

Lorsque nous passons au domaine fixe Ω et en introduisant les nouvelles variables dans les inéquations variationnelles $(3.2.1)$ et $(3.2.2)$,et après la multiplication par ε, nous obtenons :

(3.4.1)

$$\begin{gathered}
\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega\left[\varepsilon^2\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right)-\hat{p}^\varepsilon\delta_{ij}\right]\frac{\partial(\hat{\phi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)}{\partial x_j}dxdz+\\
\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial(\hat{\phi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)}{\partial z}dxdz+\int_\Omega\left(2\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}-\hat{p}^\varepsilon\right)\frac{\partial(\hat{\phi}_3-\hat{u}_3^\varepsilon)}{\partial z}dxdz+\\
\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\varepsilon^2\left(\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z}\right)\frac{\partial(\hat{\phi}_3-\hat{u}_3^\varepsilon)}{\partial x_j}dxdz+\\
\sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_\omega\hat{u}_i^\varepsilon(x,h(x))\left(\hat{\phi}_i(x,h(x))-\hat{u}_i^\varepsilon(x,h(x))\right)\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x)|^2}dx+\\
\int_\omega\hat{l}\varepsilon^2\hat{u}_3^\varepsilon(x,h(x))\left(\hat{\phi}_3(x,h(x))-\hat{u}_3^\varepsilon(x,h(x))\right)\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x)|^2}dx+\\
+\int_\omega\hat{k}\left(|\hat{\phi}|-|\hat{u}^\varepsilon|\right)dx+\sqrt{2}\hat{\alpha}\int_{\Omega^\varepsilon}\left(\left|\widetilde{D}\left(\hat{\phi}\right)\right|-\left|\widetilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|\right)dxdz\geq\\
\geq\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega^\varepsilon}(\hat{f}_i,\hat{\phi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)dxdz+\int_{\Omega^\varepsilon}\varepsilon(\hat{f}_3,\hat{\phi}_3-\hat{u}_3^\varepsilon)dxdz\quad\forall\hat{\phi}\in V(\Omega)
\end{gathered}$$

avec

$$\left|\widetilde{D}(v)\right|=\left[\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{2}\varepsilon^2\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial v_3}{\partial x_i}\right)^2+\varepsilon^2\left(\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

et

(3.4.2)
$$\begin{gathered}
\int_\Omega\varepsilon^2\hat{K}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\nabla\hat{T}^\varepsilon\nabla\psi dxdz=2\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left|D\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|^2\psi dxdz+\\
+\sqrt{2}\hat{\alpha}\int_\Omega\left|\tilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|\psi dxdz+\int_\Omega r\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\psi dxdz\quad\forall\psi\in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)
\end{gathered}$$

Notre but maintenant est d'obtention des estimations a priori sur la vitesse, pression et la température dans le domaine fixe Ω.

3.4.1 Estimations sur la vitesse et la pression

Premières estimations sur la vitesse et la pression

Lemme 3.4.1. *Si* $(u^\varepsilon,p^\varepsilon,T^\varepsilon)\in V^\varepsilon_{div}\times L^2_0(\Omega^\varepsilon)\times H^1_{\Gamma_1^\varepsilon\cup\Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon)$ *sont des solutions du problème* (3.2.1) *et* (3.2.2)*, alors il existe une constante strictement positive* C *indépendent de* ε *telle que :*

(3.4.3)
$$\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\leq C$$

(3.4.4) $$\|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \qquad \textit{pour } i = 1, 2$$

(3.4.5) $$\|\varepsilon\hat{u}_3^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C$$

(3.4.6) $$\left\|\frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \quad \textit{pour } i = 1, 2$$

(3.4.7) $$\left\|\frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \varepsilon C.$$

Preuve. En passant au domaine fixe Ω dans le membre de droit dans l'inégalité $(3.3.2)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 &\leq \varepsilon\left(\frac{24\,(h^*\varepsilon)^2}{\mu_*^2} + \frac{12h^*\varepsilon}{l^\varepsilon\mu_*}\right)\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 \\
&\leq \varepsilon^3\left(\frac{24\,(h^*)^2}{\mu_*^2} + \frac{12h^*}{\hat{l}\mu_*}\right)\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2
\end{aligned}$$

et comme $\varepsilon^3 \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 = \left\|\hat{f}\right\|_{L^2(\Omega)}^2$, alors :

(3.4.8) $$\varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 \leq \left(\frac{24\,(h^*)^2}{\mu_*^2} + \frac{12h^*}{\hat{l}\mu_*}\right)\left\|\hat{f}\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

d'où $(3.4.3)$ d'écoule, avec $C = \left(\frac{24\,(h^*)^2}{\mu_*^2} + \frac{12h^*}{\hat{l}\mu_*}\right)\left\|\hat{f}\right\|_{L^2(\Omega)}^2$.

Pour obtenir $(3.4.4)$ et $(3.4.5)$, il suffit d'appliquer l'inégalité de Poincarè

$$\int_{\Omega^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2\, dx dx_3 \leq 2h^*\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2\, d\tau + 2\,(h^*\varepsilon)^2 \int_{\Omega^\varepsilon} \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3}\right|^2 dx dx_3$$

et comme $C\left(\Gamma_1^\varepsilon\right)\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2\, d\tau \leq \frac{\mu_* C\left(\Gamma_1^\varepsilon\right)}{2l^\varepsilon}\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2\, dx dx_3 + \frac{2C\left(\Gamma_1^\varepsilon\right)}{l^\varepsilon}\left(\frac{2\,(h^*\varepsilon)^2}{\mu_*} + \frac{h^*\varepsilon}{l^\varepsilon}\right)\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2$, alors :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-1}\int_{\Omega^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2\, dx dx_3 &\leq 2h^*\left(\frac{\mu_*}{2l^\varepsilon}\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2\, dx dx_3 + \frac{2}{l^\varepsilon}\left(\frac{2\,(h^*\varepsilon)^2}{\mu_*} + \frac{(h^*)^2\,\varepsilon}{l^\varepsilon}\right)\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2\right) + \\
&\quad + 2\,(h^*)^2\,\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3}\right|^2 dx dx_3 \\
&\leq \frac{\mu_* h^*}{l^\varepsilon}\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + h^*\left(\frac{8\,(h^*\varepsilon)^2}{l^\varepsilon\mu_*} + \frac{(h^*)^2\,\varepsilon}{(l^\varepsilon)^2}\right)\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + 2\,(h^*)^2\,\varepsilon\,\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après $(3.4.3)$, on obtient :

$$\varepsilon^{-1}\int_{\Omega^\varepsilon}|u^\varepsilon|^2\,dxdx_3\leq\left(\frac{h^*\mu_*}{\hat{l}}+2h^*\right)C+\left(\frac{8\,(h^*)^3}{\hat{l}\mu_*}+\frac{(h^*)^2}{\hat{l}^2}\right)\left\|\hat{f}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

donc

$$\varepsilon^{-1}\int_{\Omega^\varepsilon}|u^\varepsilon|^2\,dxdx_3=\int_\Omega|\hat{u}^\varepsilon|^2\,dxdz\leq C.$$

Autrement :

$$\sum_{1=1}^{2}\|\hat{u}_i^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\varepsilon\hat{u}_3^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}\leq C$$

donc $(3.4.4)$ et $(3.4.5)$ sont démontrées.

Pour obtenir la première estimation sur la pression $(3.4.6)$ on choisit dans $(3.4.1)$ $\varphi=(\hat{u}_1^\varepsilon\pm\psi,\hat{u}_2^\varepsilon,\hat{u}_3^\varepsilon)$ avec $\psi\in H_0^1(\Omega)$, on trouve :

$$\begin{gathered}\left|\int_\Omega\frac{\partial\hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}\psi dxdz\right|\leq\\ \left|\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega\varepsilon^2\mu^*\left(\frac{\partial\hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}dxdz\right|+\left|\int_\Omega\mu^*\left(\frac{\partial\hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z}dxdz\right|+\\ +\left|\hat{l}\int_\omega\hat{u}_1^\varepsilon(x,h(x))\psi\left(x,h\left(x\right)\right)\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x)|^2}dx\right|+2\hat{\alpha}\int_{\Omega^\varepsilon}\left|\widetilde{D}\left(\psi\right)\right|dxdz+\\ \left(2-\sqrt{2}\right)\hat{\alpha}\int_\Omega\left|\widetilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|dxdz+\left|\int_{\Omega^\varepsilon}(\hat{f},\psi)dxdz\right|\quad\forall\hat{\phi}\in V\left(\Omega\right)\end{gathered}$$

avec $\left|\widetilde{D}\left(\hat{\phi}\right)\right|\leq\sqrt{2}\left(\left|\widetilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|+\left|\widetilde{D}\left(\psi\right)\right|\right).$

Maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous donnons l'analogue de [19]

$$\begin{gathered}\left|\int_\Omega\frac{\partial\hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}\psi dxdz\right|\leq\sum_{j=1}^{2}\varepsilon^2\mu^*\left(\left\|\frac{\partial\hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_1}\right\|_{L^2(\Omega)}\right)\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)}+\\ +\mu^*\left(\left\|\frac{\partial\hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}+\varepsilon^2\left\|\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_1}\right\|_{L^2(\Omega)}\right)\left\|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}+\\ \hat{l}\left\{\left(\int_\omega|\hat{u}_1^\varepsilon(x,h(x))|^2\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x)|^2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\times\right.\\ \left.\times\left(\int_\omega|\psi\left(x,h\left(x\right)\right)|^2\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x)|^2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\right\}+2\sqrt{|\Omega|}\hat{\alpha}\left\|\widetilde{D}\left(\psi\right)\right\|_{L^2(\Omega)}+\\ +\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{|\Omega|}\hat{\alpha}\left\|\widetilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\hat{f}\right\|_{L^2(\Omega)}\|\psi\|_{L^2(\Omega)}\end{gathered}$$

et

$$\hat{l}\left\{\left(\int_\omega|\hat{u}_1^\varepsilon(x,h(x))|^2\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x)|^2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\int_\omega|\psi\left(x,h\left(x\right)\right)|^2\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x)|^2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\leq$$

$$\leq \hat{l}\max_{x\in\omega}\sqrt{1+|\nabla h^{\varepsilon}(x)|^{2}}\left\{\left(\int_{\omega}|\hat{u}_{1}^{\varepsilon}(x,h(x))|^{2}\sqrt{1+|\nabla h(x)|^{2}}dx\right)^{\frac{1}{2}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\int_{\omega}|\psi\left(x,h\left(x\right)\right)|^{2}\sqrt{1+|\nabla h(x)|^{2}}dx\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\leq$$
$$\hat{l}\max_{x\in\omega}\sqrt{1+|\nabla h^{\varepsilon}(x)|^{2}}\left(\int_{\Gamma_{1}}|\hat{u}_{1}^{\varepsilon}|^{2}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Gamma_{1}}|\psi|^{2}d\tau\right)$$

et comme : $\left(\int_{\Gamma_1}|\hat{u}_1^{\varepsilon}|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\leq C'$, et d'après la continuité de l'application de trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_1)$, il existe une constante C'' indépendante de ε telle que

$$\|\psi\|_{L^2(\Gamma_1)}\leq C''\|\psi\|_{H^1(\Omega)},$$

donc

$$\left|\hat{l}\int_{\omega}\hat{u}_{1}^{\varepsilon}(x,h(x))\psi\left(x,h\left(x\right)\right)\sqrt{1+|\nabla h^{\varepsilon}(x)|^{2}}dx\right|\leq C'''\|\psi\|_{H^{1}(\Omega)},$$

avec $C'''=C'C''\;\hat{l}\;\max_{x\in\omega}\sqrt{1+|\nabla h^{\varepsilon}(x)|^{2}}$.

où

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega}\frac{\partial\hat{p}^{\varepsilon}}{\partial x_{1}}\psi dxdz\right| &\leq \sum_{j=1}^{2}\varepsilon^{2}\mu^{*}\left(\left\|\frac{\partial\hat{u}_{1}^{\varepsilon}}{\partial x_{j}}\right\|_{L^{2}(\Omega)}+\left\|\frac{\partial\hat{u}_{j}^{\varepsilon}}{\partial x_{1}}\right\|_{L^{2}(\Omega)}\right)\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x_{j}}\right\|_{L^{2}(\Omega)}+\\ &\mu^{*}\left(\left\|\frac{\partial\hat{u}_{1}^{\varepsilon}}{\partial z}\right\|_{L^{2}(\Omega)}+\varepsilon^{2}\left\|\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial x_{1}}\right\|_{L^{2}(\Omega)}\right)\left\|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\|_{L^{2}(\Omega)}+C'''\|\psi\|_{H^{1}(\Omega)}+\\ &2\sqrt{|\Omega|}\hat{\alpha}\left\|\widetilde{D}\left(\psi\right)\right\|_{L^{2}(\Omega)}+\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{|\Omega|}\hat{\alpha}\left\|\widetilde{D}\left(\hat{u}^{\varepsilon}\right)\right\|_{L^{2}(\Omega)}+\left\|\hat{f}\right\|_{L^{2}(\Omega)}\|\psi\|_{L^{2}(\Omega)}\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant (3.4.3), on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega}\frac{\partial\hat{p}^{\varepsilon}}{\partial x_{1}}\psi dxdz\right| &\leq \mu^{*}C\sum_{j=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x_{j}}\right\|_{L^{2}(\Omega)}+\left\|\frac{\partial\psi_{j}}{\partial z}\right\|_{L^{2}(\Omega)}\right)+\left(C'''+2\sqrt{|\Omega|}\hat{\alpha}\right)\|\psi\|_{H^{1}(\Omega)}+\\ &\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{|\Omega|}\hat{\alpha}C+C_{1}\left\|\hat{f}\right\|_{L^{2}(\Omega)}\|\psi\|_{H^{1}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Lorsque $i=2$, il suffit de choisir $\varphi=(\hat{u}_1^{\varepsilon},\hat{u}_2^{\varepsilon}\pm\psi,\hat{u}_3^{\varepsilon})$, et pour obtenir (3.4.7), on prend $(\hat{u}_1^{\varepsilon},\hat{u}_2^{\varepsilon},\hat{u}_3^{\varepsilon}\pm\psi)$.

Deuxiéme estimation sur la vitesse et la pression

Lemme 3.4.2. *Supposons que* $\hat{f}\in\left(L^2(\Omega)\right)^3$,*. la fonction* $\hat{k}$ *est positive dans* $H^{\frac{1}{2}}(\omega)$, $\hat{g}\in\left(H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\right)^3$, *la fonction* $\hat{\mu}$ *est lipschitzienne sur* $\mathbb{R}$,*.* Γ_1 *et* Γ_L *sont* *de classe C^2 et ω est de classe C^3, aAlors, il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de ε telle que :*

$$\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}\right\|^2_{H^1(\Omega)}+\left\|\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{H^1(\Omega)}+\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{H^1(\Omega)}+\left\|\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{H^1(\Omega)}\right)\leq C \tag{3.4.9}$$

$$\left\|\frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}\leq C \quad \text{pour } i=1,2 \tag{3.4.10}$$

$$\left\|\frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}\leq \varepsilon C \tag{3.4.11}$$

Preuve. Voir [4 et 16]

3.4.2 Estimations sur la température

Lemme 3.4.3. *Sous les hypothèses du lemme* 3.4.2, *il existe une constante C indépendante de ε, telle que :*

$$\sum_{i=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \tag{3.4.12}$$

$$\left\|\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \tag{3.4.13}$$

Preuve. Dans l'équation (3.4.2), on choisit $\psi=\hat{T}^\varepsilon$, il vient

$$\int_\Omega \varepsilon^2\hat{K}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\nabla\hat{T}^\varepsilon\nabla\hat{T}^\varepsilon dxdz = 2\int_\Omega \hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left|\widetilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|^2\hat{T}^\varepsilon dxdz+ \sqrt{2}\hat{\alpha}\int_\Omega\left|\widetilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|\hat{T}^\varepsilon dxdz+\int_\Omega \hat{r}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\hat{T}^\varepsilon dxdz \tag{3.4.14}$$

par l'inégalité de Korn, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varepsilon^2\hat{K}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\nabla\hat{T}^\varepsilon\nabla\hat{T}^\varepsilon dxdz &\geq K_*\varepsilon^2\left\|\nabla\hat{T}^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\geq K_*\varepsilon^2\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+K_*\left\|\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

on pose

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\int_\Omega \hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left|\widetilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|^2 \hat{T}^\varepsilon dxdz = \sum_{i,i=1}^{2}\int_\Omega \frac{\varepsilon^2}{2}\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right)^2 \hat{T}^\varepsilon dxdz + \\ &+\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right)^2 \hat{T}^\varepsilon dxdz + \int_\Omega 2\varepsilon^2\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right)^2 \hat{T}^\varepsilon dxdz \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$|I_1| \leq \mu^*\left[\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\varepsilon^2}{2}\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial xi}\right\|_{L^4(\Omega)}^2+\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial xi}\right\|_{L^4(\Omega)}^2+2\varepsilon^2\left\|\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^4(\Omega)}^2\right]\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}$$

et comme $\|a+b\|^2 \leq 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$, on a

$$|I_1| \leq 2\mu^*\left[\sum_{i,j=1}^{2}\varepsilon^2\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}\right\|_{L^4(\Omega)}^2+\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^4(\Omega)}^2+\sum_{i=1}^{2}\varepsilon^4\left\|\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial xi}\right\|_{L^4(\Omega)}^2+\varepsilon^2\left\|\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^4(\Omega)}^2\right]\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}$$

D'autre part, l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$ est continue, il existe une constante positive $C(\Omega)$ indépendante de ε telle que :

$$|I_1| \leq 2\mu^* C(\Omega)\left[\sum_{i,j=1}^{2}\varepsilon^2\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\sum_{i=1}^{2}\varepsilon^4\left\|\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial xi}\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\varepsilon^2\left\|\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{H^1(\Omega)}^2\right]\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}$$

et d'après le lemme précédent, on trouve :

$$|I_1| \leq 2\mu^* C(\Omega)\, C\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.4.16}$$

et

$$\begin{aligned} I_2 &= \sqrt{2}\hat{\alpha}\int_\Omega \left|\widetilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right| \hat{T}^\varepsilon dxdz \\ |I_2| &\leq \sqrt{2}\hat{\alpha}\left\|\widetilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)} \\ |I_2| &\leq \sqrt{2}\hat{\alpha}C\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

De même, en appliquant l'inégalitè de Cauchy-Schwartz on obtient

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_\Omega \hat{r}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\hat{T}^\varepsilon dxdz, \\ |I_3| &\leq r^*\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}, \\ |I_3| &\leq r^*h^*\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.4.18}$$

En injectant $(3.4.15)-(3.4.18)$ dans $(3.4.14)$, on obtient :

$$K_*\varepsilon^2\sum_{i=1}^2\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + K_*\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left(2\mu^*C\left(\Omega\right)C + \sqrt{2}\hat{\alpha}C + r^*h^*\right)\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}$$

et comme $\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)} \leq h^*\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}$ on trouve :

$$K_*\varepsilon^2\sum_{i=1}^2\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + K_*\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left(2\mu^*C\left(\Omega\right)C + \sqrt{2}\hat{\alpha}C + r^*h^*\right)h^*\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}$$

donc

$$K_*\varepsilon^2\sum_{i=1}^2\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + K_*\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_2\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.4.19}$$

avec $C_2 = \left(2\mu^*C\left(\Omega\right)C + \sqrt{2}\hat{\alpha}C + r^*h^*\right)h^*$.

D'autre part, d'après $(3.4.19)$, on déduit que

$$K_*\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_2\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}$$

d'où

$$\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2K_*^{-1}.$$

En injectant cette dernière estimation dans $(3.4.19)$, on obtient

$$\varepsilon^2\sum_{i=1}^2\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_2K_*^{-2} = C_3$$

3.4.3 Résultats de convergence et problème limite

Théorème 3.4.1 *Sous les mêmes hypothèses des lemmes 3.4.1 et 3.4.3, il existe* $u^* = (u_1^*, u_2^*) \in \tilde{V}_z$, $p^* \in L_0^2(\Omega)$ *et* $T^* \in V_z$ *telles que*

(3.4.20) $\quad \hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^* \quad i = 1, 2$ *faiblement dans* V_z

(3.4.21) $\quad \varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0 \quad i, j = 1, 2$ *faiblement dans* $L^2(\Omega)$

(3.4.22) $\quad \varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \rightharpoonup 0$ *faiblement dans* $L^2(\Omega)$

(3.4.23) $\quad \varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \quad i = 1, 2$ *faiblement dans* $L^2(\Omega)$

(3.4.24) $\quad \varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon \rightharpoonup 0$ *faiblement dans* $L^2(\Omega)$

(3.4.25) $\quad \hat{p}^\varepsilon \rightharpoonup p^*$ *faiblement dans* $L^2(\Omega)$, p^* *dépend seulement de* x

(3.4.26) $\quad \hat{T}^\varepsilon \rightharpoonup T^*$ *faiblement dans* V_z

(3.4.27) $\quad \varepsilon \dfrac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0$ *faiblement dans* $L^2(\Omega)$.

Preuve. D'après $(3.4.3)$, on obtient $(3.4.20)$ et d'après $(3.4.3)$ et $(3.4.20)$ on obtient $(3.4.21)$. De $(3.4.21)$, et du fait que $div(\hat{u}^\varepsilon) = 0$ on obtient $(3.4.22)$. De $(3.4.3)$ et $(3.4.5)$ on obtient $(3.4.23)$ et $(3.4.24)$ et d'après $(3.4.6)$ et $(3.4.7)$ on obtient $(3.4.25)$. De $(3.4.12)$ et $(3.4.13)$ on obtient $(3.4.26)$ et $(3.4.27)$.

Théorème 3.4.2. *Avec les mêmes hypothèses du théorème 3.4.1,* u^*, p^*, T^* *vérifient :*

(3.4.28)
$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \hat{\mu}(T^*) \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \frac{\partial(\hat{\varphi}_i - u_i^*)}{\partial z} dxdz - \int_\omega p^*(x) \left(\sum_{i=1}^{2} \hat{\varphi}_i(x, h(x)) \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) dx -$$
$$\int_\Omega p^*(x) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right) dxdz + \sum_{i=1}^{2} \hat{l} \int_\omega u_i^*(x, h(x)) \left(\hat{\varphi}_i(x, h(x)) - u_i^*(x, h(x)) \right) dx +$$
$$\hat{\alpha} \int_\Omega \left(\left| \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} \right| - \left| \frac{\partial u^*}{\partial z} \right| \right) dxdz + \int_\omega \hat{k} \left(|\hat{\varphi}| - |u^*| \right) dx \geq \sum_{j=1}^{2} \int_{\Omega^\varepsilon} (\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - u^*) dxdz \qquad \forall \hat{\varphi} \in \Pi(V),$$

(3.4.29)
$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{K} \frac{\partial T^*}{\partial z} \right) = \sum_{i=1}^{2} \hat{\mu}(T^*) \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial z} \right)^2 + \sqrt{2} \hat{\alpha} \left| \frac{\partial u^*}{\partial z} \right| + \hat{r}(T^*), \textit{dans } L^2(\Omega)$$

où

$$\Pi(V)=\left\{\hat{\varphi}=(\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2)\in\left(H^1(\Omega)\right)^2,\ \exists\hat{\varphi}_3\in H^1(\Omega),\ tel\ que\ \hat{\varphi}=(\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2,\hat{\varphi}_3)\in V\right\}$$

Preuve. L'inéquation variationnelle (3.4.1) s'écrit sous la forme

(3.4.30)

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega \varepsilon^2\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}dxdz+\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}dxdz+$$

$$\int_\Omega 2\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\varepsilon^2\left(\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right)^2dxdz+\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\varepsilon^2\left(\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z}\right)\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j}dxdz+$$
$$\sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_\omega\left(\hat{u}_i^\varepsilon(x,h(x))\right)^2\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x)|^2}dx+\int_\omega\hat{l}\varepsilon^2\left(\hat{u}_3^\varepsilon(x,h(x))\right)^2\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x)|^2}dx+$$
$$\int_\omega\hat{k}|\hat{u}^\varepsilon-s|dx+\sqrt{2}\hat{\alpha}\int_\Omega\left|\widetilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|dxdz\leq\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega\varepsilon^2\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial x_j}dxdz+$$
$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial z}dxdz+\int_\Omega 2\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial\hat{\varphi}_3}{\partial z}dxdz+$$
$$\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\varepsilon^2\left(\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z}\right)\frac{\partial\hat{\varphi}_3}{\partial x_j}dxdz+\sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_\omega\hat{u}_i^\varepsilon(x,h(x))\hat{\varphi}_i(x,h(x))\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x)|^2}dx+$$
$$\int_\omega\hat{l}\varepsilon^2\hat{u}_3^\varepsilon(x,h(x))\hat{\varphi}_3(x,h(x))\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x)|^2}dx+\int_\omega\hat{k}|\hat{\varphi}|dx+\sqrt{2}\hat{\alpha}\int_{\Omega^\varepsilon}\left|\widetilde{D}\left(\hat{\varphi}\right)\right|dxdz+$$
$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{p}^\varepsilon\frac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial x_i}dxdz+\int_\Omega\hat{p}^\varepsilon\frac{\partial\hat{\varphi}_3}{\partial z}dxdz+\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega^\varepsilon}(\hat{f}_i,\hat{\varphi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)dxdz+\int_{\Omega^\varepsilon}\varepsilon(\hat{f}_3,\hat{\varphi}_3-\hat{u}_3^\varepsilon)dxdz$$

et comme le terme $\int_\omega\hat{l}\varepsilon^2\left(\hat{u}_3^\varepsilon(x,h(x))\right)^2\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x)|^2}dx\geq 0$, donc on peut le négliger dans le membre de gauche dans (3.4.30), puis on applique la $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\inf$ à gauche et la $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$ à droite dans (3.4.30) et d'après les résultats de convergence, on déduit que :

(3.4.31)

$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{\mu}\left(T^*\right)\frac{\partial u_i^*}{\partial z}\frac{\partial u_i^*}{\partial z}dxdz+\sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_\omega u_i^*(x,h(x))u_i^*(x,h(x))dx+$$
$$\hat{\alpha}\int_\Omega\left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right|dxdz+\int_\omega\hat{k}|u^*|dx\le\lim_{\varepsilon\to0}\inf\left\{\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega\varepsilon^2\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}dxdz+\right.$$
$$2\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}dxdz+\int_\Omega2\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\varepsilon^2\left(\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right)^2dxdz+$$
$$\left.\sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_\omega\left(\hat{u}_i^\varepsilon(x,h(x))\right)^2\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x)|^2}dx+\int_\omega\hat{k}|\hat{u}^\varepsilon|dx+\sqrt{2}\hat{\alpha}\int_\Omega\left|\widetilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|dxdz\right\}.$$

Puisque $\hat{T}^\varepsilon$ est converge presque par tout vers T^*, et $\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)$ est continue donc, $\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)$ converge presque partout vers $\hat{\mu}\left(T^*\right)$, et on a :

(3.4.32)

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega\varepsilon^2\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial x_j}dxdz+\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial z}dxdz+\right.$$

$$\int_\Omega2\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial\hat{\varphi}_3}{\partial z}dxdz+\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\varepsilon^2\left(\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z}\right)\frac{\partial\hat{\varphi}_3}{\partial x_j}dxdz+$$
$$\sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_\omega\hat{u}_i^\varepsilon(x,h(x))\hat{\varphi}_i(x,h(x))\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x)|^2}dx+\int_\omega\hat{l}\varepsilon^2\hat{u}_3^\varepsilon(x,h(x))\hat{\varphi}_3(x,h(x))\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x)|^2}dx+$$
$$\int_\omega\hat{k}|\hat{\varphi}|dx+\sqrt{2}\hat{\alpha}\int_{\Omega^\varepsilon}\left|\widetilde{D}\left(\hat{\varphi}\right)\right|dxdz+\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{p}^\varepsilon\frac{\partial\hat{\varphi}_3}{\partial x_i}dxdz+\int_\Omega p^\varepsilon\frac{\partial\hat{\varphi}_3}{\partial z}dxdz+$$
$$\left.\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega^\varepsilon}(\hat{f}_i,\hat{\varphi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)dxdz+\int_{\Omega^\varepsilon}\varepsilon(\hat{f}_3,\hat{\varphi}_3-\hat{u}_3^\varepsilon)dxdz\right\}=$$
$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{\mu}\left(T^*\right)\frac{\partial u_i^*}{\partial z}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial z}dxdz+\sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_\omega u_i^*(x,h(x))\hat{\varphi}_i\left((x,h(x)\right)dx+\int_\omega\hat{k}|\hat{\varphi}|dx+$$
$$+\int_\Omega\left|\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial z}\right|dxdz+\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega^\varepsilon}(\hat{f}_i,\hat{\varphi}_i-u_i^*)dxdz+\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega p^*\frac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial x_i}dxdz+\int_\Omega p^*\frac{\partial\hat{\varphi}_3}{\partial z}dxdz$$

Par la définition 1.7.2, on a :

$$\int_\Omega p^*\frac{\partial\hat{\varphi}_3}{\partial z}dxdz=\int_\omega\int_0^{h(x)}p^*\frac{\partial\hat{\varphi}_3}{\partial z}dxdz=\int_\omega p^*\hat{\varphi}_3dx\quad(\text{car }\hat{\varphi}\left(x,0\right)=0).$$

D'autre part : $\hat{\varphi}_1n_1+\hat{\varphi}_2n_2+\hat{\varphi}_3n_3=0$ sur Γ_1 implique que :

$$\hat{\varphi}_3=-\frac{1}{n_3}\left(\hat{\varphi}_1n_1+\hat{\varphi}_2n_2\right)=\sqrt{1+|\nabla h(x)|^2}\left(\hat{\varphi}_1n_1+\hat{\varphi}_2n_2\right)=\hat{\varphi}_1\frac{\partial h}{\partial x_1}+\hat{\varphi}_2\frac{\partial h}{\partial x_2}$$

donc

$$\int_\Omega p^* \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial z} dxdz = \int_\omega p^*(x) \left(\sum_{i=1}^{2} \hat{\varphi}_i (x, h(x)) \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) dx. \tag{3.4.33}$$

De $(3.4.31) - (3.4.33)$, on déduit $(3.4.28)$.

De plus, si φ vérifie la condition :

$$\int_\Omega \left(\varphi_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1}(x) + \varphi_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2}(x) \right) dxdz = 0, \quad \forall \theta \in C_0^1(\omega) \tag{D'}$$

on obtient :

(3.4.34)

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{\mu}(T^*) \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \frac{\partial(\hat{\varphi}_i - u_i^*)}{\partial z} dxdz + \sum_{i=1}^{2} \hat{l} \int_\omega u_i^*(x, h(x)) \left(\hat{\varphi}_i(x, h(x)) - u_i^*(x, h(x)) \right) dx +$$

$$\hat{\alpha} \int_\Omega \left(\left| \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} \right| - \left| \frac{\partial u^*}{\partial z} \right| \right) dxdz + \int_\omega \hat{k} \left(|\hat{\varphi}| - |u^*| \right) dx \geq \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega^\varepsilon} (\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - u^*) dxdz$$

Maintenant, en passant à la limite dans $(3.4.2)$ et en utilisant les résultats de convergence du théorème 3.4.1, on obtient :

(3.4.35)

$$\int_\Omega \hat{K} \frac{\partial T^*}{\partial z} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} dxdz = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{\mu}(T^*) \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial z} \right)^2 \hat{\psi} dxdz + \sqrt{2} \hat{\alpha} \int_\Omega \left| \frac{\partial u^*}{\partial z} \right| \hat{\psi} dxdz + \int_\Omega \hat{r}(T^*) \hat{\psi} dxdz$$

L'utilisation de la formule de Green, nous donnons :

$$-\int_\Omega \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{K} \frac{\partial T^*}{\partial z} \right) \hat{\psi} dxdz = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{\mu}(T^*) \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial z} \right)^2 \hat{\psi} dxdz + \sqrt{2} \hat{\alpha} \int_\Omega \left| \frac{\partial u^*}{\partial z} \right| \hat{\psi} dxdz + \int_\Omega \hat{r}(T^*) \hat{\psi} dxdz$$

par conséquent

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{K} \frac{\partial T^*}{\partial z} \right) = \sum_{i=1}^{2} \hat{\mu}(T^*) \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial z} \right)^2 + \sqrt{2} \hat{\alpha} \left| \frac{\partial u^*}{\partial z} \right| + \hat{r}(T^*), \text{dans } H^{-1}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$$

Cette formule est valable dans $L^2(\Omega)$, puisque $\hat{\mu}$ et $\hat{r}$ sont deux fonctions bornées sur $\mathbb{R}$, et $\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial z} \right)^2$ est un élément de $L^2(\Omega)$.

Lemme 3.4.4. *Le problème* (3.4.28) *est équivalent au problème suivant :*

(3.4.36) $$\int_\Omega \hat{\mu}\left(T^*\right)\left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right|^2 dxdz + \hat{l}\int_\omega |u^*(x,h(x))|^2\,dx + \int_\omega \hat{k}|u^*|dx + \hat{\alpha}\int_\Omega \left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right| dxdz = \int_\Omega \hat{f}u^* dxdz\ ,\quad \forall u^*\in\Sigma\left(V\right)$$

(3.4.37) $$\int_\Omega \hat{\mu}\left(T^*\right)\frac{\partial u^*}{\partial z}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}dxdz + \hat{l}\int_\omega u^*(x,h(x))\hat{\psi}\left(x,h(x)\right)dx + \int_\omega \hat{k}|\hat{\psi}|dx + \hat{\alpha}\int_\Omega\left|\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}\right|dxdz \geq \int_\Omega \hat{f}\hat{\psi}dxdz \quad \forall\hat{\psi}\in\Sigma\left(V\right)$$

avec

$$\Sigma\left(V\right) = \left\{\psi\in\Pi\left(V\right) :\ \psi \text{ satisfie la conditions } \left(D'\right)\right\}.$$

Preuve. En remplaçant la fonction $\hat{\varphi}$ par $\hat{\varphi} = 2u^*$ puis par $\hat{\varphi} = 0$ dans (3.4.28) on obtient :

(3.4.38) $$\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega \hat{\mu}\left(T^*\right)\frac{\partial u_i^*}{\partial z}\frac{\partial u_i^*}{\partial z}dxdz + \sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_\omega u_i^*(x,h(x))u_i^*(x,h(x))dx + \hat{\alpha}\int_\Omega\left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right|dxdz + \int_\omega \hat{k}|u^*|dx \geq \sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega^\varepsilon}(\hat{f}_i,u^*)dxdz, \forall\hat{\varphi}\in\Sigma\left(V\right)$$

(3.4.39) $$\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega \hat{\mu}\left(T^*\right)\frac{\partial u_i^*}{\partial z}\frac{\partial u_i^*}{\partial z}dxdz + \sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_\omega u_i^*(x,h(x))u_i^*(x,h(x))dx + \hat{\alpha}\int_\Omega\left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right|dxdz + \int_\omega \hat{k}|u^*|dx \leq \sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega^\varepsilon}(\hat{f}_i,u^*)dxdz, \forall u^*\in\Sigma\left(K\right)$$

De (3.4.38) et (3.4.39) on déduit (3.4.36).

Pour obtenir (3.4.37) en remplaçant la fonction $\hat{\psi}$ par $\hat{\psi} = (\hat{\varphi} - u^*) \in \Sigma\left(V\right)$.

Théorème 3.4.3. *Les solutions* (u^*, p^*, T^*) *vérifient les relations suivantes :*

(3.4.40) $$\sigma^* = -\nabla p^* + \hat{\mu}\left(T^*\right)\frac{\partial u^*}{\partial z} + \sqrt{2}\hat{\alpha}\pi$$

(3.4.41) $$-\frac{\partial}{\partial z}\left[\hat{\mu}\left(T^*\right)\frac{\partial u^*}{\partial z} + \sqrt{2}\hat{\alpha}\frac{\partial u^*/\partial z}{|\partial u^*/\partial z|}\right] = \hat{f} - \nabla p^* \qquad \textit{dans } L^2\left(\Omega\right)$$

Preuve. voir[18]

Théorème 3.4.4. *Sous les même hypothése du théorème 3.4.5, on a :*

(3.4.42)

$$\int_{\omega}\left[\frac{h^3}{12}\nabla p^* + \tilde{F} + \int_0^h\int_0^y \mu\left(T^*\left(x,\xi\right)\right)\frac{\partial u^*\left(x,\xi\right)}{\partial\xi}\partial\xi dy + \sqrt{2}\alpha\int_0^h\int_0^y \frac{\partial u^*/\partial\xi}{\left|\partial u^*/\partial\xi\right|}\left(x,\xi\right)d\xi dy - \right.$$

$$\left. -\frac{h}{2}\int_0^h \mu\left(T^*\left(x,\xi\right)\right)\frac{\partial u^*\left(x,\xi\right)}{\partial\xi}\partial\xi - \frac{\sqrt{2}\hat{\alpha}h}{2}\int_0^h \frac{\partial u^*/\partial\xi}{\left|\partial u^*/\partial\xi\right|}\left(x,\xi\right)d\xi\right].\nabla\varphi\left(x\right)dx = 0, \quad \forall\varphi\in H^1\left(\omega\right)$$

avec

$$F\left(x,y\right) = \int_0^h\int_0^{\xi}\hat{f}\left(x,t\right)dtd\xi, \quad \tilde{F}\left(x\right) = \int_0^h F\left(x,y\right)dy - \frac{h}{2}F\left(x,h\right)$$

Preuve. En intégrant $(3.4.41)$ de 0 à z on obtient :

$$-\hat{\mu}\left(T^*\left(x;z\right)\right)\frac{\partial u^*}{\partial z}\left(x;z\right) - \sqrt{2}\hat{\alpha}\frac{\partial u^*/\partial z}{\left|\partial u^*/\partial z\right|} + \hat{\mu}\left(\zeta^*\left(x\right)\right)\tau^*\left(x\right) + \sqrt{2}\hat{\alpha}\frac{\tau^*}{\left|\tau^*\right|} = \int_0^z \hat{f}\left(x,\xi\right)d\xi - z\nabla p^*$$

avec $\tau^*\left(x\right) = \dfrac{\partial u^*}{\partial z}\left(x,0\right)$ et $\zeta^*\left(x\right) = T^*\left(x,0\right)$

En intégrant à nouveau de 0 à z on trouve :

$$\begin{aligned} &-\textstyle\int_0^z \hat{\mu}\left(T^*\left(x;\xi\right)\right)\dfrac{\partial u^*}{\partial\xi}\left(x;\xi\right)d\xi - \sqrt{2}\hat{\alpha}\textstyle\int_0^z \dfrac{\partial u^*/\partial\xi}{\left|\partial u^*/\partial\xi\right|}d\xi + \\ &\hat{\mu}\left(\zeta^*\left(x\right)\right)\tau^*\left(x\right)z + \sqrt{2}\hat{\alpha}\frac{\tau^*}{\left|\tau^*\right|}z = \textstyle\int_0^z\int_0^{\xi}\hat{f}\left(x,y\right)dyd\xi - \dfrac{z^2}{2}\nabla p^*. \end{aligned} \tag{3.4.43}$$

En subtituant z par h, on obtient :

$$\begin{aligned} &-\textstyle\int_0^h \hat{\mu}\left(T^*\left(x;\xi\right)\right)\dfrac{\partial u^*}{\partial\xi}\left(x;\xi\right)\xi - \sqrt{2}\hat{\alpha}\textstyle\int_0^h \dfrac{\partial u^*/\partial\xi}{\left|\partial u^*/\partial\xi\right|}d\xi + \\ &\hat{\mu}\left(\zeta^*\left(x\right)\right)\tau^*\left(x\right)h + \sqrt{2}\hat{\alpha}\frac{\tau^*}{\left|\tau^*\right|}h = \textstyle\int_0^h\int_0^{\xi}\hat{f}\left(x,y\right)dyd\xi - \dfrac{h^2}{2}\nabla p^* \end{aligned} \tag{3.4.44}$$

intégrant $(3.4.43)$, entre 0 et h on trouve :

$$\begin{aligned} &-\int_0^h\int_0^y \hat{\mu}\left(T^*\left(x;\xi\right)\right)\frac{\partial u^*}{\partial z}\left(x;\xi\right)d\xi dy - \sqrt{2}\hat{\alpha}\int_0^h\int_0^y \frac{\partial u^*/\partial\xi}{\left|\partial u^*/\partial\xi\right|}d\xi dy + \\ &\hat{\mu}\left(\zeta^*\left(x\right)\right)\tau^*\left(x\right)\frac{h^2}{2} + \sqrt{2}\hat{\alpha}\frac{\tau^*}{\left|\tau^*\right|}\frac{h^2}{2} = \textstyle\int_0^h\int_0^y\int_0^{\xi}\hat{f}\left(x,t\right)dtd\xi dy - \dfrac{h^3}{6}\nabla p^* \end{aligned} \tag{3.4.45}$$

De $(3.4.44)$, on déduit :

(3.4.46)
$$\hat{\mu}\left(\zeta^*(x)\right)\tau^*(x)\,h+\sqrt{2}\hat{\alpha}\frac{\tau^*}{|\tau^*|}h=\textstyle\int_0^h \hat{\mu}\left(T^*(x;\xi)\right)\dfrac{\partial u^*}{\partial\xi}(x;\xi)\,\xi+$$
$$\sqrt{2}\hat{\alpha}\int_0^h \frac{\partial u^*/\partial\xi}{|\partial u^*/\partial\xi|}d\xi+\int_0^h\int_0^\xi \hat{f}(x,\xi)\,dyd\xi-\frac{h^2}{2}\nabla p^*$$

De $(3.4.46)$ et $(3.4.45)$, on obtient :

$$\textstyle\int_\omega \dfrac{h^3}{12}\nabla p^*+\tilde{F}+\int_0^h\int_0^y \mu\left(T^*(x,\xi)\right)\dfrac{\partial u^*(x,\xi)}{\partial\xi}d\xi dy+\sqrt{2}\alpha\int_0^h\int_0^y \dfrac{\partial u^*/\partial\xi}{|\partial u^*/\partial\xi|}(x,\xi)\,d\xi dy-$$
$$\textstyle-\dfrac{h}{2}\int_0^h \mu\left(T^*(x,\xi)\right)\dfrac{\partial u^*(x,\xi)}{\partial\xi}d\xi-\dfrac{\sqrt{2}\hat{\alpha}h}{2}\int_0^h \dfrac{\partial u^*/\partial\xi}{|\partial u^*/\partial\xi|}(x,\xi)\,d\xi=0$$

donc pour $\varphi\in H^1(\omega)$ on a :

$$\textstyle\int_\omega \Bigg[\dfrac{h^3}{12}\nabla p^*+\tilde{F}+\int_0^h\int_0^y \mu\left(T^*(x,\xi)\right)\dfrac{\partial u^*(x,\xi)}{\partial\xi}\partial\xi dy+\sqrt{2}\alpha\int_0^h\int_0^y \dfrac{\partial u^*/\partial\xi}{|\partial u^*/\partial\xi|}(x,\xi)\,d\xi dy-$$
$$\textstyle-\dfrac{h}{2}\int_0^h \mu\left(T^*(x,\xi)\right)\dfrac{\partial u^*(x,\xi)}{\partial\xi}\partial\xi-\dfrac{\sqrt{2}\hat{\alpha}h}{2}\int_0^h \dfrac{\partial u^*/\partial\xi}{|\partial u^*/\partial\xi|}(x,\xi)\,d\xi\Bigg].\nabla\varphi(x)\,dx=0.$$

Ce qui fallait démontrer.

Théorème 3.4.5. *La solution* (u^*,T^*) *du problème limite* $(3.4.34)-(3.4.35)$ *est unique dans* $\left(\tilde{W}_z\cap B_c\right)\times V_z$ *pour tout*

$$0<c<c_0=\left(2C_{\hat{\mu}}\beta^4\right)^{-\frac{1}{2}}\left[K_*\left[1+(h^*)^2\right]^{-1}-C_{\hat{r}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

avec

$$\begin{aligned}W_z&=\left\{u\in V_z:\frac{\partial u^2}{\partial z^2}\in L^2(\Omega)\right\}\\B_c&=\left\{u\in W_z\times W_z:\left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\|_{V_z}\leq c\right\}\\\tilde{W}_z&=\{u\in W_z\times W_z: u \text{ satisfait la condition } D'\}\end{aligned}$$

Preuve. Supposons qu'il existe (u^1,T^1) et (u^2,T^2) solutions du problème limite (3.4.34) et (3.4.35). Alors :

(3.4.47)

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^{1}\right)\frac{\partial u_i^1}{\partial z}\frac{\partial(\hat{\varphi}_i-u_i^1)}{\partial z}dxdz+\sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_{\omega}u_i^1(x,h(x))\left(\hat{\varphi}_i(x,h(x))-u_i^1(x,h(x))\right)dx+$$

$$\hat{\alpha}\int_{\Omega}\left(|D_z(\hat{\varphi})|-\left|D_z\left(u^1\right)\right|\right)dxdz+\int_{\omega}\hat{k}\left(|\hat{\varphi}|-|u^1|\right)dx\geq\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}(\hat{f}_i,\hat{\varphi}_i-u_i^1)dxdz$$

(3.4.48)

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^{2}\right)\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\frac{\partial(\hat{\varphi}_i-u_i^2)}{\partial z}dxdz+\sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_{\omega}u_i^2(x,h(x))\left(\hat{\varphi}_i(x,h(x))-u_i^2(x,h(x))\right)dx+$$

$$\hat{\alpha}\int_{\Omega}\left(D_z(\hat{\varphi})-D_z\left(u^2\right)\right)dxdz+\int_{\omega}\hat{k}\left(|\hat{\varphi}|-|u^2|\right)dx\geq\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}(\hat{f}_i,\hat{\varphi}_i-u_i^2)dxdz$$

avec $D_z(\hat{\varphi})=\left(\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

En remplaçant $\hat{\varphi}$ par u^2 dans (3.4.47) et $\hat{\varphi}$ par u^1 dans (3.4.48), on onbtient

(3.4.49)

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^{1}\right)\frac{\partial u_i^1}{\partial z}\frac{\partial(u_i^2-u_i^1)}{\partial z}dxdz+\sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_{\omega}u_i^1(x,h(x))\left(u_i^2(x,h(x))-u_i^1(x,h(x))\right)dx+$$

$$\hat{\alpha}\int_{\Omega}\left(|D_z(u^2)|-|D_z(u^1)|\right)dxdz+\int_{\omega}\hat{k}\left(|u^2|-|u^1|\right)dx\geq\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}(\hat{f}_i,u_i^2-u_i^1)dxdz$$

(3.4.50)

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^{2}\right)\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\frac{\partial(u_i^1-u_i^2)}{\partial z}dxdz+\sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_{\omega}u_i^2(x,h(x))\left(u_i^1(x,h(x))-u_i^2(x,h(x))\right)dx+$$

$$\hat{\alpha}\int_{\Omega}\left(D_z(u^1)-D_z(u^2)\right)dxdz+\int_{\omega}\hat{k}\left(|u^1|-|u^2|\right)dx\geq\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}(\hat{f}_i,u_i^1-u_i^2)dxdz$$

Par addition de (3.4.49) et (3.4.50), on trouve

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left[\hat{\mu}\left(T^{1}\right)\frac{\partial u_i^1}{\partial z}\frac{\partial(u_i^2-u_i^1)}{\partial z}+\hat{\mu}\left(T^{2}\right)\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\frac{\partial(u_i^1-u_i^2)}{\partial z}\right]dxdz-\hat{l}\sum_{i=1}^{2}\int_{\omega}\left|u_i^1(x,h(x))-u_i^2(x,h(x))\right|^2dx\geq 0$$

et comme

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left[\hat{\mu}\left(T^{1}\right)\frac{\partial u_i^1}{\partial z}\frac{\partial(u_i^2-u_i^1)}{\partial z}+\hat{\mu}\left(T^{2}\right)\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\frac{\partial(u_i^1-u_i^2)}{\partial z}\right]dxdz=$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^{1}\right)\left|\frac{\partial}{\partial z}(u_i^2-u_i^1)\right|^2dxdz+\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left[\hat{\mu}\left(T^{1}\right)-\hat{\mu}\left(T^{2}\right)\right]\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(u_i^1-u_i^2)dxdz$$

alors :

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{\mu}\left(T^1\right) \left|\frac{\partial}{\partial z}(u_i^2 - u_i^1)\right|^2 dxdz + \hat{l}\sum_{i=1}^{2} \|u_i^1 - u_i^2\|^2_{L^2(\omega)} \leq$$
$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left[\hat{\mu}\left(T^1\right) - \hat{\mu}\left(T^2\right)\right] \frac{\partial u_i^2}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}(u_i^1 - u_i^2) dxdz$$

car $\hat{l}\sum_{i=1}^{2} \|u_i^1 - u_i^2\|^2_{L^2(\omega)} \geq 0$, on a :

(3.4.51)
$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{\mu}\left(T^1\right) \left|\frac{\partial}{\partial z}(u_i^2 - u_i^1)\right|^2 dxdz \leq \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left[\hat{\mu}\left(T^1\right) - \hat{\mu}\left(T^2\right)\right] \frac{\partial u_i^2}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}(u_i^1 - u_i^2) dxdz.$$

Par l'inégalitè de Poincaré, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{\mu}\left(T^1\right) \left|\frac{\partial}{\partial z}(u_i^2 - u_i^1)\right|^2 dxdz &\geq \mu_* \sum_{i=1}^{2} \left\|\frac{\partial}{\partial z}(u_i^2 - u_i^1)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \mu_* \left[1 + (h^*)^2\right]^{-1} \sum_{i=1}^{2} \left\|(u_i^2 - u_i^1)\right\|^2_{V_z}\end{aligned}$$

Autrement :

(3.4.52)
$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{\mu}\left(T^1\right) \left|\frac{\partial}{\partial z}(u_i^2 - u_i^1)\right|^2 dxdz \geq \mu_* \left[1 + (h^*)^2\right]^{-1} \left\|u^2 - u^1\right\|^2_{V_z \times V_z}$$

et puisque $\hat{\mu}$ est lipschitzienne, il existe $C_{\hat{\mu}}$ telle que :

$$\left|\int_\Omega \left[\hat{\mu}\left(T^1\right) - \hat{\mu}\left(T^2\right)\right] \frac{\partial u_i^2}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}(u_i^1 - u_i^2) dxdz\right| \leq$$

$$\begin{aligned}&\leq C_{\hat{\mu}} \|T^1 - T^2\|_{L^4(\Omega)} \left\|\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\right\|_{L^4(\Omega)} \left\|\frac{\partial}{\partial z}(u_i^1 - u_i^2)\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \beta^2 C_{\hat{\mu}} \|T^1 - T^2\|_{V_z} \left\|\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\right\|_{V_z} \left\|\frac{\partial}{\partial z}(u_i^1 - u_i^2)\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \beta^2 C_{\hat{\mu}} c \|T^1 - T^2\|_{V_z} \|(u_i^1 - u_i^2)\|_{V_z}\end{aligned}$$

car $u^2 \in B_c$ et l'injection compacte de V_z dans $L^4(\Omega)$ est continue.

Et comme $\sum\limits_{i=1}^{2} a_i \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{2} (a_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, on a

(3.4.53)
$$\left|\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left[\hat{\mu}\left(T^1\right)-\hat{\mu}\left(T^2\right)\right]\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(u_i^1-u_i^2)dxdz\right| \leq \sqrt{2}\beta^2 C_{\hat{\mu}} c\left\|T^1-T^2\right\|_{V_z}\left\|(u^1-u^2\right\|_{V_z\times V_z}$$

En injectant (3.4.53) et (3.4.52) dans (3.4.51), on obtient :

(3.4.54)
$$\left\|u^2-u^1\right\|_{V_z\times V_z} \leq \sqrt{2}\beta^2 C_{\hat{\mu}}\mu_*^{-1}\left[1+(h^*)^2\right] c\left\|T^1-T^2\right\|_{V_z}.$$

D'autre par :

(3.4.55)
$$\int_{\Omega}\hat{K}\frac{\partial T^1}{\partial z}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}dxdz = \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^1\right)\left(\frac{\partial u_i^1}{\partial z}\right)^2\hat{\psi}dxdz+\sqrt{2}\hat{\alpha}\int_{\Omega}\left|D_z\left(u^1\right)\right|\hat{\psi}dxdz+\int_{\Omega}\hat{r}\left(T^1\right)\hat{\psi}dxdz$$

(3.4.56)
$$\int_{\Omega}\hat{K}\frac{\partial T^2}{\partial z}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}dxdz = \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^2\right)\left(\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\right)^2\hat{\psi}dxdz+\sqrt{2}\hat{\alpha}\int_{\Omega}\left|D_z\left(u^2\right)\right|\hat{\psi}dxdz+\int_{\Omega}\hat{r}\left(T^2\right)\hat{\psi}dxdz$$

par soustraction de (3.4.55) et (3.4.56), et en choisissant $\psi = (T^1 - T^2) \in H^1_{\Gamma_L\cup\Gamma_1}(\Omega)$, on trouve :

(3.4.57)
$$\int_{\Omega}\hat{K}\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(T^1-T^2\right)\right|^2 dxdz = \sum_{k=1}^{4} I_k$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{k=1}^{2} I_1^i,\ I_1^i = \int_{\Omega}\hat{\mu}\left(T^1\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(u_i^1+u_i^2\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(u_i^1-u_i^2\right)\left(T^1-T^2\right)dxdz\\
I_2 &= \sum_{k=1}^{2} I_2^i,\quad I_2^i = \int_{\Omega}\left[\hat{\mu}\left(T^1\right)-\hat{\mu}\left(T^2\right)\right]\left(\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\right)^2\left(T^1-T^2\right)dxdz\\
I_3 &= \int_{\Omega}\left(\hat{r}\left(T^1\right)-\hat{r}\left(T^2\right)\right)\left(T^1-T^2\right)dxdz\\
I_4 &= \sqrt{2}\hat{\alpha}\int_{\Omega}\left(D_z\left(u^1\right)-D_z\left(u^2\right)\right)\left(T^1-T^2\right)dxdz
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalitè de Poincaré, on obtient :

$$\int_\Omega \hat{K} \left| \frac{\partial}{\partial z} \left(T^1 - T^2 \right) \right|^2 dxdz \geq K_* \left[1 + (h^*)^2 \right]^{-1} \left\| T^1 - T^2 \right\|_{V_z}^2 \tag{3.4.58}$$

et

$$\left| I_1^i \right| \leq \mu^* \left\| \frac{\partial}{\partial z} \left(u_i^1 + u_i^2 \right) \right\|_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial}{\partial z} \left(u_i^1 - u_i^2 \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| T^1 - T^2 \right\|_{L^4(\Omega)}$$

et comme l'injection compacte de V_z dans $L^4(\Omega)$ est continue, alors il existe une constante β telle que :

$$\left| I_1^i \right| \leq \mu^* \beta^2 \left\| \frac{\partial}{\partial z} \left(u_i^1 + u_i^2 \right) \right\|_{V_z} \left\| u_i^1 - u_i^2 \right\|_{V_z} \left\| T^1 - T^2 \right\|_{V_z}$$

et puisque u^1 et u^2 sont deux élément de B_c, alors :

$$\left| I_1^i \right| \leq 2\mu^* \beta^2 c \left\| u_i^1 - u_i^2 \right\|_{V_z} \left\| T^1 - T^2 \right\|_{V_z}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^2 I_1^i \right| &\leq 2\mu^* \beta^2 c \left\| T^1 - T^2 \right\|_{V_z}^2 \sum_{i=1}^2 \left\| u_i^1 - u_i^2 \right\|_{V_z} \\
\left| \sum_{i=1}^2 I_1^i \right| &\leq 2\sqrt{2} \mu^* \beta^2 c \left\| u_i^1 - u_i^2 \right\|_{V_z \times V_z} \left\| T^1 - T^2 \right\|_{V_z}.
\end{aligned} \tag{3.4.59}$$

De même comme la fonction $\hat{\mu}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left| I_2^i \right| &\leq C_{\hat{\mu}} \int_\Omega \left| T^1 - T^2 \right|^2 \left(\frac{\partial u_i^2}{\partial z} \right)^2 dxdz \\
&\leq C_{\hat{\mu}} \left\| T^1 - T^2 \right\|_{L^4(\Omega)}^2 \left\| \frac{\partial u_i^2}{\partial z} \right\|_{L^4(\Omega)}^2 \\
&\leq C_{\hat{\mu}} \beta^4 \left\| T^1 - T^2 \right\|_{V_z}^2 \left\| \frac{\partial u_i^2}{\partial z} \right\|_{V_z}^2 \\
&\leq C_{\hat{\mu}} \beta^4 \left\| T^1 - T^2 \right\|_{V_z}^2 \left\| u_i^2 \right\|_{W_z}^2
\end{aligned}$$

donc

$$|I_2| \leq 2C_{\hat{\mu}}\beta^4 c^2 \left\|T^1 - T^2\right\|_{V_z}^2 . \tag{3.4.60}$$

La fonction $\hat{r}$ est lipschitzienne, on a :

$$|I_3| \leq C_{\hat{r}} \left\|T^1 - T^2\right\|_{V_z}^2 \tag{3.4.61}$$

l'inégalitè de Cauchy-Schwartz, nous donnons :

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq \sqrt{2}\hat{\alpha} \left\|T^1 - T^2\right\|_{V_z}^2 \left\|D_z\left(u^2 - u^1\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \\ |I_4| &\leq 2\hat{\alpha} \left\|T^1 - T^2\right\|_{V_z}^2 \left\|u^2 - u^1\right\|_{V_z \times V_z} \end{aligned} \tag{3.4.62}$$

En injectant $(3.4.58) - (3.4.62)$ on trouve :

$$K_* \left[1 + (h^*)^2\right]^{-1} \|T^1 - T^2\|_{V_z}^2 \leq 2\sqrt{2}\mu^*\beta^2 c \left\|u_i^1 - u_i^2\right\|_{V_z \times V_z} \|T^1 - T^2\|_{V_z} +$$
$$C_{\hat{\mu}}\beta^4 c^2 \|T^1 - T^2\|_{V_z}^2 + C_{\hat{r}} \|T^1 - T^2\|_{V_z}^2 + 2\hat{\alpha} \|T^1 - T^2\|_{V_z}^2 \|u^2 - u^1\|_{V_z \times V_z}$$

donc :

$$\left\|T^1 - T^2\right\|_{V_z} \leq \left[K_* \left[1 + (h^*)^2\right]^{-1} - 2C_{\hat{\mu}}\beta^4 c^2 - C_{\hat{r}}\right]^{-1} \left[2\sqrt{2}\mu^*\beta^2 c + 2\hat{\alpha}\right] \left\|u^2 - u^1\right\|_{V_z \times V_z}$$

on suppose que

$$0 < c < c_0 = \left(2C_{\hat{\mu}}\beta^4\right)^{-\frac{1}{2}} \left[K_* \left[1 + (h^*)^2\right]^{-1} - C_{\hat{r}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$K_* > \left[1 + (h^*)^2\right] C_{\hat{r}}$$

Alors : $c_0^2 - c^2 > 0$, donc :

$$\left\|T^1 - T^2\right\|_{V_z} \leq \left(2\sqrt{2}\mu^*\beta^2 c + 2\hat{\alpha}\right) \left(c_0^2 - c^2\right)^{-1} \left\|u^2 - u^1\right\|_{V_z \times V_z} \tag{3.4.63}$$

En injectant $(3.4.54)$ dans $(3.4.63)$, on obtient :

$$\left(1-\left(2\sqrt{2}\mu^*\beta^2c+2\hat{\alpha}\right)\left(c_0^2-c^2\right)^{-1}\sqrt{2}\beta^2C_{\hat{\mu}}\mu_*^{-1}\left[1+(h^*)^2\right]c\right)\left\|T^1-T^2\right\|_{V_z}\leq 0$$

si on suppose que $\left(1-\left(2\sqrt{2}\mu^*\beta^2c+2\hat{\alpha}\right)(c_0^2-c^2)^{-1}\sqrt{2}\beta^2C_{\hat{\mu}}\mu_*^{-1}\left[1+(h^*)^2\right]c\right)>0$, on a

$$\left\|T^1-T^2\right\|_{V_z}=0$$

donc $T^1=T^2$ presque partout dans V_z.

D'après $(3.4.54)$, on en déduit que

$$\left\|u^2-u^1\right\|^2_{V_z\times V_z}\leq 0$$

alors $u^1=u^2$ presque partout dans $V_z\times V_z$.

CHAPITRE 4

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UN FLUIDE DE HERSCHEL-BULKLEY DANS UN DOMAINE MINCE AVEC FROTTEMENT DE TRESCA

Résumé. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'écoulement isotherme d'un fluide de Herschel-Bulkley incompressible en régime stationnaire dans un domaine mince avec les conditions de frottement non linéaires de type de Tresca sur une partie de la frontière et les conditions de Dirichlet sur l'autre partie.

Contenu

4.3 Analyse asymptotique ;

4.3.1 Cadre fonctionnel et problème variationnel ;

4.3.2 Estimation à priori et résultats de convergence ;

4.3.3 Problème limite et l'équation généralisée de Reynolds ;

4.3.4 Unicité des solutions.

4.1 Introduction et Position du problème

Nous considérerons un modèle nonlinéaire qui décrit le comportement d'un fluide de Herschel-Bulkley dans le cas isothérme dans le domaine mince Ω^ε qui est donné par

$$\Omega^\varepsilon = \left\{(x, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x_3 < h\left(x\right)\right\}$$

avec $\varepsilon \in]0,1[$ est un réel strictement positif à tendre vers zéro et

$$0 < h_* < h\left(x\right) < h^* \text{ et } h \in C^2\left(\omega\right)$$

La frontière de Ω^ε sera notée $\Gamma^\varepsilon = \omega \cup \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon$, avec

- Γ_1^ε la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h\left(x\right).$
- Γ_L^ε la frontière latirale.

- ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω^ε.

La loi de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i^\varepsilon = 0 \qquad dans \Omega^\varepsilon$$

avec

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = -p^\varepsilon \delta_{ij} + \alpha^\varepsilon \tfrac{D(u^\varepsilon)}{|D(u^\varepsilon)|} + 2\mu \left|D\left(u^\varepsilon\right)\right|^{r-2} D\left(u^\varepsilon\right)$$
$$\left|D\left(u^\varepsilon\right)\right| = \left(\textstyle\sum_{i,j=1}^3 d_{ij}\left(u^\varepsilon\right) d_{ij}\left(u^\varepsilon\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

supposons aussi que le fluide est incompressible

$$div\left(u^\varepsilon\right) = 0 \qquad dans\ \Omega^\varepsilon$$

Nous supposons que la vitesse est connue sur Γ_1^ε et sur Γ_L^ε

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon$$

$$u^\varepsilon n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \omega$$

On utilise les notations usuelles :

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon.n = u_i^\varepsilon.n_i,\ u_{\tau_i}^\varepsilon = u_i^\varepsilon - u_n^\varepsilon n_i,$$

$$\sigma_n^\varepsilon = (\sigma.n)\, n = \sigma_{ij}^\varepsilon n_i n_j,\ \sigma_{\tau_i}^\varepsilon = \sigma_{ij}^\varepsilon n_j - \sigma_n^\varepsilon n_i,$$

respectivement, la vitesse normale, la vitesse tangentielle, la composante normale et tangentielle du tenseur.
Sur ω la vitesse tangentielle est connue et vérifie la loi de Tresca :

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \Longrightarrow u_\tau^\varepsilon = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \Longrightarrow \exists \beta > 0 \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right\} \ sur\ \omega$$

Le problème complet consiste donc à trouver le champ de la vitesse u^εet la pression p^ε,vérifient les équations et les conditions aux limites suivantes :

(4.1.1) $$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon$$

(4.1.2) $$\sigma_{ij}^\varepsilon = -p^\varepsilon \delta_{ij} + \alpha^\varepsilon \frac{d_{ij}(u^\varepsilon)}{|D(u^\varepsilon)|} + 2\mu\, |D(u^\varepsilon)|^{r-2}\, d_{ij}(u^\varepsilon)$$

(4.1.3) $$div(u^\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon$$

(4.1.4) $$u^\varepsilon = 0 \quad sur\ \Gamma_L^\varepsilon$$

(4.1.5) $$u^\varepsilon = 0 \quad sur\ \Gamma_1^\varepsilon$$

(4.1.6) $$u^\varepsilon.n = 0 \quad sur\ \Gamma_1^\varepsilon \cup \omega$$

(4.1.7) $$\left.\begin{array}{c} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies u_\tau^\varepsilon = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists \lambda > 0 \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon = -\lambda\sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right\} \quad sur\ \omega$$

4.2 Formulation variationnelle du problème (4.1.1)–(4.1.7)

Dans cette section nous définissons le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler, et nous obtenons la formulation faible du problème.
Pour l'ouvert Ω^ε on définit les espaces et les ensembles suivants :

$$\left(W^{1,r}\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^3 = \left\{v \in \left(L^r\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^3 : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^r\left(\Omega^\varepsilon\right)\right\}$$

l'espace de Sobolev muni de la norme

$$\|v\|_{L^r(\Omega^\varepsilon)} = \left(\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega^\varepsilon} |v_i|^r \, dxdx_3 + \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega^\varepsilon} \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^r dxdx_3\right)^{\frac{1}{r}}$$

$W_0^{1,r}\left(\Omega^\varepsilon\right)$ designe le sous-espace vectoriel des fonctions de $W^{1,r}\left(\Omega^\varepsilon\right)$ nulles sur Γ^ε. On note $W^{1,r'}\left(\Omega^\varepsilon\right)$ son dual topologique avec $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

$$V^\varepsilon\left(\Omega^\varepsilon\right) = \left\{\varphi \in \left(W^{1,r}\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^3 : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L;\ \varphi.n = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \omega\right\}$$

$$V_{div}^\varepsilon\left(\Omega^\varepsilon\right) = \left\{\varphi \in V^\varepsilon\left(\Omega^\varepsilon\right);\ div\varphi = 0\right\}$$

$$L_0^r\left(\Omega^\varepsilon\right) = \left\{q \in L^r\left(\Omega^\varepsilon\right) : \int_{\Omega^\varepsilon} q dx = 0\right\}$$

on introduit également les notations suivantes

$$a\left(u^\varepsilon, v^\varepsilon\right) = 2\int_{\Omega^\varepsilon} \mu \left|D\left(u^\varepsilon\right)\right|^{r-2} D\left(u^\varepsilon\right) D\left(v^\varepsilon\right) dxdx_3$$

$$(p, divv) = \int_{\Omega^\varepsilon} pdivvdxdx_3$$

$$J(v) = \int_\omega k^\varepsilon |v| \, dx + \alpha^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} |D(v)| \, dxdx_3$$

Proposition.4.3.1. *Si* u^ε, p^ε *sont des solutions régulières du problème* $(4.1.1)-(4.1.7)$, *alors elles verifient le problème variationnel*

Trouver $u^\varepsilon \in V_{div}^\varepsilon$ et $p^\varepsilon \in L_0^r(\Omega^\varepsilon)$ *telles que :*

(4.2.1) $$a(u^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) - (p, div\varphi) + J(\varphi) - J(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) \ \ \forall \varphi \in V^\varepsilon(\Omega^\varepsilon).$$

Preuve. En multipliant l'équation $(4.1.1)$ par $\varphi - u^\varepsilon$, où $\varphi \in V^\varepsilon$, et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi - u^\varepsilon)\, dxdx_3 - \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j (\varphi - u^\varepsilon)\, ds = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon (\varphi - u^\varepsilon)\, dxdx_3$$

D'après les conditions aux limites, on trouve :

(4.2.2)
$$\begin{gathered} a(u^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) + \alpha^\varepsilon \textstyle\int_{\Omega^\varepsilon} \dfrac{d_{ij}(u^\varepsilon)}{|D(u^\varepsilon)|} d_{ij}(\varphi - u^\varepsilon)\, dxdx_3 - \int_{\Omega^\varepsilon} pdiv(\varphi - u^\varepsilon)\, dxdx_3 + \\ + \textstyle\int_\omega k^\varepsilon |\varphi|\, dx - \int_\omega k^\varepsilon |u^\varepsilon|\, dx \geq (f^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) \quad \forall \varphi \in V^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) \end{gathered}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz ; on déduit :

(4.2.3) $$d_{ij}(u^\varepsilon)\, d_{ij}(\varphi) \leq |D(u^\varepsilon)|\, |D(\varphi)|$$

en utilisant l'inégalitè $(4.2.3)$ dans $(4.2.2)$, on obtient $(4.2.1)$.

Lemme 4.3.1. *La solution* u^ε *de l'inéquation* $(4.2.1)$ *vérifie l'estimation suivante*

(4.2.4)
$$a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \alpha^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} |D(u^\varepsilon)|\, dxdx_3 + \int_\omega k^\varepsilon |u^\varepsilon|\, dx \leq \frac{1}{2}\mu C_k \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^r(\Omega^\varepsilon)}^r + \frac{(\varepsilon h^*)^{r'}}{r'\left(\frac{1}{2}\mu C_k\right)^{\frac{r'}{r}}} \|f^\varepsilon\|_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)}^{r'}$$

Preuve. On choisit $\varphi = 0$ dans $(4.2.1)$ on obtient

$$a\left(u^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}\right) + \alpha^{\varepsilon} \int_{\Omega^{\varepsilon}} \left|D\left(u^{\varepsilon}\right)\right| dx dx_3 + \int_{\omega} k^{\varepsilon} \left|u^{\varepsilon}\right| dx \leq \left(f^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}\right) \tag{4.2.5}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on trouve :

$$\left\|u^{\varepsilon}\right\|_{L^r(\Omega^{\varepsilon})} \leq \varepsilon h^* \left\|\nabla u^{\varepsilon}\right\|_{L^r(\Omega^{\varepsilon})}. \tag{4.2.6}$$

Maintenant les inégalités de Hölder, Young et $(4.2.6)$, nous donnons :

$$\begin{aligned}
&\left(f^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon h^* \left\|\nabla u^{\varepsilon}\right\|_{L^r(\Omega)} \left\|f^{\varepsilon}\right\|_{L^{r'}(\Omega^{\varepsilon})} \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\mu p C_k\right)^{\frac{1}{r}} \left\|\nabla u^{\varepsilon}\right\|_{L^r(\Omega)} \frac{\varepsilon h^*}{\left(\frac{1}{2}\mu p C_k\right)^{\frac{1}{r}}} \left\|f^{\varepsilon}\right\|_{L^{r'}(\Omega^{\varepsilon})} \\
&\leq \frac{1}{2}\mu C_k \left\|\nabla u^{\varepsilon}\right\|^r_{L^r(\Omega^{\varepsilon})} + \frac{\left(\varepsilon h^*\right)^{r'}}{r'\left(\frac{1}{2}\mu C_k\right)^{\frac{r'}{r}}} \left\|f^{\varepsilon}\right\|^{r'}_{L^{r'}(\Omega^{\varepsilon})}
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

En utilisant $(4.2.7)$ dans $(4.2.5)$, on obtient $(4.2.4)$.

4.3 Analyse asymptotique

4.3.1 Cadre fonctionnel et problème variationnel

Pour l'analyse asymptotique de notre problème, on utilise le changement d'échelle $z = \dfrac{x_3}{\varepsilon}$, donc le domaine Ω^{ε} se transforme à un domaine Ω indépendant de ε.

où

$$\Omega = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < z < h(x)\right\}$$

Nous définissons maintenant sur Ω des nouvelles inconnues.

$$\hat{u}_i^{\varepsilon}(x, z) = u_i^{\varepsilon}(x, x_3),\ \hat{u}_3^{\varepsilon}(x, z) = \varepsilon^{-1} u_3^{\varepsilon}(x, x_3),\ \hat{p}^{\varepsilon}(x, z) = \varepsilon^{r} p^{\varepsilon}(x, x_3)$$

$$\hat{f}(x,z) = \varepsilon^r f^\varepsilon(x,x_3), \ \hat{k} = \varepsilon^{r-1}k^\varepsilon, \ \hat{\alpha} = \sqrt{2}\varepsilon^r \alpha^\varepsilon$$

et soit

$$V(\Omega) = \left\{\hat{\varphi} \in \left(W^{1,r}(\Omega)\right)^3 : \hat{\varphi} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_L^\varepsilon;\ \hat{\varphi}.n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \omega\right\}$$

$$V_{div}(\Omega) = \{\hat{\varphi} \in V(\Omega);\ div\hat{\varphi} = 0\}$$

$$V_z = \left\{\hat{\varphi} \in (L^p(\Omega))^2 ; \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} \in L^r(\Omega) : \hat{\varphi} = 0 \ \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_L^\varepsilon\right\}$$

$$\tilde{V}_z = \left\{\hat{\varphi} \in V_z :\ \hat{\varphi} \text{ vérifie } \left(\mathrm{D}'\right)\right\}$$

La condition (D') donnée par

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \left(L^2(\Omega)\right)^2 \text{ tel que } \int \left(\varphi_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \varphi_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2}\right) dxdz = 0 \ \ \forall \theta \in C_0^\infty(\Omega)$$

Lorsque nous passons au domaine fixé Ω en introduisant les nouvelles variables dans l'inéquation variationnelle (4.2.1) ,et après la multiplication par ε^{r-1}; nous obtenons :

(4.3.1) $$a(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) - (\hat{p}^\varepsilon, div\ (\hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon)) + j(\hat{\varphi}) - j(\hat{u}^\varepsilon) \geq (\hat{f}, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon),\ \forall \hat{\varphi} \in V(\Omega)$$

avec

$$\begin{aligned}
a(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) \quad = \quad & \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \left[\varepsilon^2 \mu \left|\tilde{D}(\hat{u}^\varepsilon)\right|^{r-2} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\right) - \hat{p}^\varepsilon \delta_{ij}\right] \frac{\partial(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon)}{\partial x_j} dxdz + \\
& \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \mu \left|\tilde{D}(\hat{u}^\varepsilon)\right|^{r-2} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\right) \frac{\partial(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon)}{\partial z} dxdz + \\
& \int_\Omega \left(\mu \left|\tilde{D}(\hat{u}^\varepsilon)\right|^{r-2} \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} - \hat{p}^\varepsilon\right) \frac{\partial(\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon)}{\partial z} dxdz + \\
& \sum_{j=1}^{2} \int_\Omega \varepsilon^2 \mu \left|\tilde{D}(\hat{u}^\varepsilon)\right|^{r-2} \left(\frac{1}{2}\left(\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z}\right)\right) \frac{\partial(\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon)}{\partial x_j} dxdz.
\end{aligned}$$

$$j(\hat{\varphi}) = \sqrt{2}\hat{\alpha} \int_{\Omega^\varepsilon} \left|\tilde{D}(u^\varepsilon)\right| dxdz + \int_\omega \hat{k} |\hat{\varphi}| dx$$

$$(\hat{f}^{\varepsilon}, \hat{\varphi} - \hat{u}^{\varepsilon}) = \sum_{j=1}^{2} \int_{\Omega} \hat{f}_i(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^{\varepsilon})dxdz + \int_{\Omega} \varepsilon \hat{f}_3(\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^{\varepsilon})dxdz,$$

$$\left|\widetilde{D}\left(\hat{u}^{\varepsilon}\right)\right| = \left(\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial z}\right)^2\right)^{\dfrac{1}{2}}$$

Notre but maintenant est d'obtenir des estimations a priori sur la vitesse et la pression dans le domaine fixe Ω.

4.3.2 Estimation à priori et résultats de convergence

Lemme 4.4.1. *Si* $(u^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}) \in K_{div}^{\varepsilon} \times L_0^r(\Omega^{\varepsilon})$ *sont des solutions du problème* (4.2.3), *alors il existe une constante strictement positive* C *indépendant de* ε *telle que*

(4.3.2) $$\sum_{i,j=1}^{2} \left\|\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial x_j}\right\|_{L^r(\Omega)}^r + \left\|\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial z}\right\|_{L^r(\Omega)}^r + \sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial z}\right\|_{L^r(\Omega)}^r + \left\|\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right\|_{L^r(\Omega)}^r\right) \leq C$$

(4.3.3) $$\left\|\frac{\partial \hat{p}^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right\|_{W^{-1,r'}(\Omega)} \leq C' \text{ pour } i = 1, 2$$

(4.3.4) $$\left\|\frac{\partial \hat{p}^{\varepsilon}}{\partial z}\right\|_{W^{-1,r'}(\Omega)} \leq \varepsilon C'$$

Preuve. En multipliant (4.2.4) par ε^{r-1}, on trouve

$$\varepsilon^{r-1} a\left(u^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}\right) + \sqrt{2}\hat{\alpha} \int_{\Omega} \left|\tilde{D}\left(u^{\varepsilon}\right)\right| dxdz + \int_{\omega} \hat{k}\left|\hat{u}^{\varepsilon}\right| dx \leq \frac{1}{2}\mu C_k \varepsilon^{r-1} \left\|\nabla u^{\varepsilon}\right\|_{L^r(\Omega^{\varepsilon})}^r + \varepsilon^{p-1} \frac{(\varepsilon h^*)^{r'}}{r' \left(\dfrac{1}{2}\mu C_k\right)^{\frac{r'}{r}}} \left\|f^{\varepsilon}\right\|_{L^{r'}(\Omega^{\varepsilon})}^{r'}$$

et comme $\varepsilon^{r'} \left\|f^{\varepsilon}\right\|_{L'(\Omega^{\varepsilon})}^{r'} = \varepsilon r \left\|\hat{f}\right\|_{L^{r'}(\Omega)}^{r'}$ on a :

(4.3.5)
$$\varepsilon^{p-1} a\left(u^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}\right) + \sqrt{2}\hat{\alpha} \int_{\Omega} \left|\tilde{D}\left(\hat{u}^{\varepsilon}\right)\right| dxdz + \int_{\omega} \hat{k}\left|\hat{u}^{\varepsilon}\right| dx \leq \frac{1}{2}\mu C_k \varepsilon^{r-1} \left\|\nabla u^{\varepsilon}\right\|_{L^r(\Omega^{\varepsilon})}^r + \frac{(h^*)^{r'}}{r' \left(\dfrac{1}{2}\mu C_k\right)^{\frac{r'}{r}}} \left\|\hat{f}\right\|_{L^{r'}(\Omega)}^{r'}$$

en appliquant l'inégalité de Korn, on obtient

(4.3.6)
$$\frac{1}{2}\mu C_k \varepsilon^{r-1} \|\nabla u^\varepsilon\|^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)} + \sqrt{2}\hat{\alpha}\int_\Omega \left|\tilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right| dxdz + \int_\omega \hat{k}\,|\hat{u}^\varepsilon|\,dx \le \frac{(h^*)^{r'}}{r'\left(\frac{1}{2}\mu C_k\right)^{\frac{r'}{r}}} \left\|\hat{f}\right\|^{r'}_{L^{r'}(\Omega)}$$

d'où $(4.3.2)$ d'écoule, avec $C = \dfrac{(h^*)^{r'}}{r'\left(\frac{1}{2}\mu C_k\right)^{\frac{r'}{r}}} \left\|\hat{f}\right\|^{r'}_{L^{r'}(\Omega)}$.

Pour obtenir l'estimation sur les pressions $(4.3.3)$ et $(4.3.4)$, on choisit dans $(4.3.1)$ $\hat{\varphi} = (\hat{u}_1^\varepsilon \pm \psi_1, \hat{u}_2^\varepsilon, \hat{u}_3^\varepsilon)$, $\psi \in W_0^{1,r}(\Omega)^3$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}\psi dxdz\right| \le\; & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega \varepsilon^2\mu\left|\tilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|^{r-2}\left|\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_1}\right|\left|\frac{\partial \psi_1}{\partial x_j}\right| dxdz + \\
& \frac{1}{2}\int_\Omega \mu\left|\tilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|^{r-2}\left|\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_1}\right|\left|\frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right| dxdz + \\
\sqrt{2}\quad & \hat{\alpha}\int_\Omega \left|\tilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon + \psi_1\right)\right| dxdz + \sqrt{2}\hat{\alpha}\int_\Omega \left|\tilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right| dxdz + \left|\left(\hat{f}_1, \psi_1\right)\right|,
\end{aligned}$$

et comme $|D(\hat{\varphi})| \le \sqrt{2}\left(|D(\hat{u}^\varepsilon)| + |D(\psi)|\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}\psi dxdz\right| \le\; & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega \varepsilon^2\mu\left|\tilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|^{r-2}\left|\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_1}\right|\left|\frac{\partial \psi_1}{\partial x_j}\right| dxdz + \\
& \frac{1}{2}\int_\Omega \mu\left|\tilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|^{r-2}\left|\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_1}\right|\left|\frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right| dxdz + \\
& \sqrt{2}\hat{\alpha}\int_\Omega \left|\tilde{D}\left(\psi_1\right)\right| dxdz + \left(2-\sqrt{2}\right)\hat{\alpha}\int_\Omega \left|\tilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right| dxdz + \left|\int_\Omega \hat{f}_1\psi_1 dxdz\right|
\end{aligned}$$

d'où $\left|\dfrac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_1}\right| \le \left|\tilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|$ et $\left|\dfrac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2\dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_1}\right| \le \left|\tilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|$ on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}\psi dxdz\right| \le\; & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega \varepsilon^2\mu\left|\tilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|^{r-1}\left|\frac{\partial \psi_1}{\partial x_j}\right| dxdz + \frac{1}{2}\int_\Omega \mu\left|\tilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|^{r-1}\left|\frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right| dxdz + . \\
& \sqrt{2}\hat{\alpha}\int_\Omega \left|\tilde{D}\left(\psi_1\right)\right| dxdz + \left(2-\sqrt{2}\right)\hat{\alpha}\int_\Omega \left|\tilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right| dxdz + \left|\int_\Omega \hat{f}_1\psi_1 dxdz\right|
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\left|\int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}\psi dxdz\right| \leq \frac{1}{2}\mu\varepsilon^2 \|D\hat{u}^\varepsilon\|_{L^r(\Omega)}^{\frac{r}{r'}} \|\nabla\psi_1\|_{L^r(\Omega)} + \frac{1}{2}\mu \|\nabla\hat{u}^\varepsilon\|_{L^r(\Omega)}^{\frac{r}{r'}} \|\nabla\psi_1\|_{L^r(\Omega)} + \hat{\alpha}\left(C(\Omega)\right)^{\frac{1}{r'}} \left\|\tilde{D}\psi_1\right\|_{L^r(\Omega)} + $$
$$+\left(\sqrt{2}-1\right)\hat{\alpha}\left(C(\Omega)\right)^{\frac{1}{r'}} \left\|\tilde{D}\hat{u}^\varepsilon\right\|_{L^r(\Omega)} + \left\|\hat{f}_1\right\|_{L^{r'}(\Omega)} \|\psi_1\|_{L^r(\Omega)}.$$

L'inégalité $(4.3.2)$, nous donnons :

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}\psi dxdz\right| &\leq \mu C\varepsilon^2 \|\nabla\psi_1\|_{L^r(\Omega)} + \mu C \|\nabla\psi_1\|_{L^r(\Omega)} + \sqrt{2}\hat{\alpha}\left(C(\Omega)\right)^{\frac{1}{r'}} \left\|\tilde{D}\psi_1\right\|_{L^r(\Omega)} + \\ &\left(2-\sqrt{2}\right)\hat{\alpha}\left(C(\Omega)\right)^{\frac{1}{r'}} C + \left\|\hat{f}_1\right\|_{L^{r'}(\Omega)} \|\psi_1\|_{L^r(\Omega)},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}\psi dxdz\right| &\leq \left(\varepsilon^2\mu C + \mu C + \sqrt{2}\hat{\alpha}\left(C(\Omega)\right)^{\frac{1}{r'}} + \left\|\hat{f}_1\right\|_{L^{r'}(\Omega)}\right)\|\psi_1\|_{W^{1,r}(\Omega)} + \left(2-\sqrt{2}\right)\hat{\alpha}\left(C(\Omega)\right)^{\frac{1}{r'}} C \\ &\leq \left(\left(\varepsilon^2+1\right)\mu C + \sqrt{2}\hat{\alpha}\left(C(\Omega)\right)^{\frac{1}{r'}} + \left\|\hat{f}_1\right\|_{L^{r'}(\Omega)}\right)\|\psi\|_{W^{1,r}(\Omega)} + \left(2-\sqrt{2}\right)\hat{\alpha}\left(C(\Omega)\right)^{\frac{1}{r'}} C \\ &\leq \left(2\mu C + \sqrt{2}\hat{\alpha}\left(C(\Omega)\right)^{\frac{1}{r'}} + \left\|\hat{f}_1\right\|_{L^{r'}(\Omega)}\right)\|\psi\|_{W^{1,r}(\Omega)} + \left(2-\sqrt{2}\right)\hat{\alpha}\left(C(\Omega)\right)^{\frac{1}{r'}} C\end{aligned}$$

Alors

$$\left|\int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}\psi dxdz\right| \leq \left(2\mu C + \hat{\alpha}\left(C(\Omega)\right)^{\frac{1}{r'}} + \left\|\hat{f}_1\right\|_{L^{r'}(\Omega)}\right)\|\psi\|_{W^{1,r}(\Omega)} + \left(\sqrt{2}-1\right)\hat{\alpha}\left(C(\Omega)\right)^{\frac{1}{r'}} C$$

donc

$$\left\|\frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}\right\|_{W^{-1,r}(\Omega)} \leq C$$

Lorsque $i=2$ il suffit de choisir $(4.3.1)$ $\hat{\varphi} = (\hat{u}_1^\varepsilon, \hat{u}_2^\varepsilon \pm \psi_2, \hat{u}_3^\varepsilon)$ on obtient

$$\left\|\frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_2}\right\|_{W^{-1,r}(\Omega)} \leq C$$

pour obtenir $(4.3.4)$ on prend $\hat{\varphi} = (\hat{u}_1^\varepsilon, \hat{u}_2^\varepsilon, \hat{u}_3^\varepsilon \pm \psi_3)$ on trouve

$$\left\|\frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{W^{-1,r}(\Omega)} \leq \varepsilon C$$

Ce qui termine la dèmonstration du lemme 4.4.1.

Théorème 4.4.1. *Sous les mêmes hypothèses du lemme 4.4.1 il existe* $u^* = (u_1^*, u_2^*) \in \tilde{V}_z$, et $p^* \in L_0^{r'}(\Omega)$ *telle que*

(4.3.7) $\hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^* \quad i = 1,2$ *dans* $\tilde{V}_z$

(4.3.8) $\varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0 \quad i,j = 1,2$ *dans* $L^r(\Omega)$

(4.3.9) $\varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \rightharpoonup 0$ *dans* $L^r(\Omega)$

(4.3.10) $\varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \quad i = 1,2$ *dans* $L^r(\Omega)$

(4.3.11) $\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon \rightharpoonup 0$ *dans* $L^r(\Omega)$

(4.3.12) $\hat{p}^\varepsilon \rightharpoonup p^*$ *dans* $L^{r'}(\Omega)$, p^* *dépend seulement de* x

Preuve. D'après $(4.3.2)$, on obtient $(4.3.7)$ et d'après $(4.3.2)$ et $(4.3.7)$ on touve $(4.3.8)$. De $(4.3.8)$, et du fait que $div(\hat{u}^\varepsilon) = 0$ on obtient $(4.3.9), (4.3.10)$ et $(4.3.11)$. De $(4.3.3)$ on déduit $(4.3.12)$.

4.4 Problème limite et l'équation généralisée de Reynolds

Théorème 4.4.2. *Avec les mêmes hypothèses du théorème 4.4.1,* u^*, p^*, T^* *vérifient :*

(4.4.1)

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial z} \right)^2 \right)^{\frac{r-2}{2}} \frac{\partial (u_i^*)}{\partial z} \frac{\partial (\hat{\varphi}_i - u_i^*)}{\partial z} dxdz - \int_\Omega p^*(x) \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial x_2} \right) dxdz +$$

$$\hat{\alpha} \int_\Omega \left(\left| \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} \right| - \left| \frac{\partial u^*}{\partial z} \right| \right) dxdz + \int_\omega \hat{k} \left(|\hat{\varphi}| - |u^*| \right) dx \geq \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega (\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - u^*) dxdz, \quad \forall \hat{\varphi} \in W_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$$

avec

$$W_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega) = \left\{ \varphi \in W^{1,r}(\Omega)^2, \varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_L \right\}$$

Preuve. D'après le lemme de Minty et comme $div\hat{u}^{\varepsilon} = 0$, le problème $(4.3.1)$ est équivalant au problème suivant :

$$a\left(\hat{\varphi}, \hat{\varphi} - \hat{u}^{\varepsilon}\right) - \int_{\Omega} \hat{p}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial x_2}\right) dxdz - \int_{\Omega} \hat{p}^{\varepsilon} \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial z} dxdz + J\left(\hat{\varphi}\right) - J\left(\hat{u}^{\varepsilon}\right) \geq$$
$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} (\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}^{\varepsilon}) dxdz \; + \int_{\Omega} \varepsilon \hat{f}_3 \left(\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^{\varepsilon}\right) dxdz$$

en passant à la limite, et comme J est convexe semi-continue et inférieurement, on obtient

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{r-2}{2}} \frac{\partial (\hat{\varphi}_i)}{\partial z} \frac{\partial (\hat{\varphi}_i - u_i^*)}{\partial z} dxdz - \int_{\Omega} p^* \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial x_2}\right) dxdz -$$
$$\int_{\Omega} p^* \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial z} dxdz + J\left(\hat{\varphi}\right) - J\left(u^*\right) \geq \sum_{j=1}^{2} \int_{\Omega} (\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - u^*) dxdz.$$

Puisque $\int_{\Omega} p^* \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} dxdz = 0$ car p^* dépend seulement de x, on trouve

(4.4.2)
$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{r-2}{2}} \frac{\partial (\hat{\varphi}_i)}{\partial z} \frac{\partial (\hat{\varphi}_i - u_i^*)}{\partial z} dxdz - \int_{\Omega} p^* \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial x_2}\right) dxdz +$$
$$+ J\left(\hat{\varphi}\right) - J\left(u^*\right) \geq \sum_{j=1}^{2} \int_{\Omega} (\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - u^*) dxdz.$$

Donc par le lemme de Minty l'inéquation $(4.4.2)$ est equivalante au $(4.4.1)$.

Théorème 4.4.3 L'inéquation variationnelle (4.4.1) *est equivalante :*

(4.4.3) $$\mu \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right|^r dxdz + \int_{\omega} \hat{k} |u^\star| dx + \hat{\alpha} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u^\star}{\partial z}\right| dxdz - \int_{\Omega} \hat{f} u^\star dxdz = 0,$$

et

(4.4.4) $$\mu \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right|^{r-2} \frac{\partial u^*}{\partial z} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} dxdz + \int_{\omega} \hat{k} |\hat{\psi}| dx + \hat{\alpha} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z}\right| dxdz \geq$$
$$\geq \int_{\Omega} \hat{f} \hat{\psi} dxdz, \; \forall \hat{\psi} \in \Sigma\left(K\right),$$

avec,

$$\Pi(K) = \left\{ \bar{\psi} = \left(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2\right) \in W^{1,r}(\Omega)^2 : \exists \hat{\psi}_3 \text{ such that } \psi = \left(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \hat{\psi}_3\right) \in K(\Omega) \right\}.$$

$$\Sigma(K) = \left\{ \bar{\psi} \in \Pi(K) : \bar{\psi} \textit{ satisfies condition } (4.2) \right\}.$$

preuve. $\triangleright$ en choisissant la fonction $\hat{\varphi}$ par $\hat{\varphi} = 2u^\star$ puis par $\hat{\varphi} = 0$ dans $(4.4.1)$ on obtient (4.4.3).

$\triangleright$ pour obtenir (4.4.4), en choisisant $\hat{\varphi} = \hat{\psi} - u^*$ for all $\hat{\psi} \in \Sigma(K)$.

Theorem 4.4.4 *Si*

$$\sigma^* = \tilde{\sigma}^* - \nabla p^* \textit{ et } \tilde{\sigma}^\star = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \mu \left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right|^{r-2} \frac{\partial u^*}{\partial z} + \hat{\alpha}\pi, \tag{4.4.5}$$

$$F\left(\hat{k}\hat{\psi}, \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z}\right) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \mu \left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right|^{r-2} \frac{\partial u^*}{\partial z}\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} dx dz - \int_\Omega f\hat{\psi} dx dz \tag{4.4.6}$$

on a :

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \mu \left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right|^{r-2} \frac{\partial u^*}{\partial z} + \hat{\alpha}\frac{\partial u^\star/\partial z}{|\partial u^\star/\partial z|}\right] = \hat{f} - \nabla p^\star \textit{ in } L^r(\Omega)^2, \tag{4.4.7}$$

Preuve. Si $\dfrac{\partial u^\star}{\partial z} = 0$, et d'aprés (4.4.5) on déduit $|\tilde{\sigma}^\star| \leq \hat{\alpha}$.

Et comme $\hat{\psi} \in \Sigma(K)$, en choisissant $\hat{\phi} = \hat{\psi}$, et $\hat{\phi} = -\hat{\psi}$ dans (4.4.4), on obtient :

$$\left| F\left(\hat{k}\hat{\psi}, \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z}\right) \right| \leq \int_\omega \hat{k}|\hat{\psi}| dx' + \hat{\alpha}\int_\Omega \left|\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z}\right| dx' dz.$$

d'aprés le théorème de Hanh-Banach . i.e. $\exists(\chi, \pi) \in L^\infty(\omega) \times L^\infty(\omega)$ avec $\|\chi\|_{L^\infty(\omega)} \leq 1$, $\|\pi\|_{L^\infty(\omega)} \leq 1$ on trouve

$$F\left(\hat{k}\hat{\psi}, \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z}\right) = -\int_\omega \chi \hat{k}\hat{\psi} dx - \hat{\alpha}\int_\Omega \pi \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} dx dz. \tag{4.4.8}$$

D'autre part, d'aprés $(4.4.3)$ et $(4.4.8)$ on obtient :

(4.4.9) $$\int \hat{k}\,|u^*|\,dx + \hat{\alpha}\int \left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right| dxdz = \int_\omega \chi\hat{k}u^* dx + \hat{\alpha}\int_\Omega \pi\frac{\partial u^*}{\partial z}dxdz.$$

Les égalités $(4.4.6)$ et $(4.4.8)$, donnent :

(4.4.10) $$\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \mu \left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right|^{r-2} \frac{\partial u^*}{\partial z}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}dxdz + \int_\omega \chi\hat{k}u^* dx + \hat{\alpha}\int_\Omega \pi\frac{\partial u^*}{\partial z}dxdz = \int_\Omega f\hat{\psi}dxdz.$$

Maintenant l'égalité $(4.4.9)$, donnent :

$$\hat{\alpha}\int_{\left|\frac{\partial u^\star}{\partial z}\right|\neq 0} \left(\left|\frac{\partial u^\star}{\partial z}\right| - \pi\frac{\partial u^\star}{\partial z}\right) dxdz + \int_\omega \hat{k}\left(|u^\star| - \chi u^\star\right) dx = 0,$$

et comme $\|\chi\|_{\omega,\infty} \leq 1$ et $\|\pi\|_{\Omega,\infty} \leq 1$, on en déduit que :

$$\left|\frac{\partial u^\star}{\partial z}\right| = \pi\frac{\partial u^\star}{\partial z} \text{ and } |u^\star| = \chi u^\star.$$

D'autre part, si $\left|\frac{\partial u^\star}{\partial z}\right| \neq 0$ et d'aprés (4.4.5), on obtient :

$$\widetilde{\sigma}^\star = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \mu \left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right|^{r-2} \frac{\partial u^*}{\partial z} + \hat{\alpha}\frac{\partial u^\star/\partial z}{|\partial u^\star/\partial z|},$$

donc

$$|\widetilde{\sigma}^\star| = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \mu \left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right|^{r-2} + \frac{\hat{\alpha}}{|\partial u^\star/\partial z|}\right)\left|\frac{\partial u^\star}{\partial z}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \mu \left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right|^{r-1} + \hat{\alpha} > \hat{\alpha},$$

Alors

(4.4.11) $$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \mu \left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right|^{r-2} \frac{\partial u^*}{\partial z} = \begin{cases} 0, & \textbf{si } |\widetilde{\sigma}^\star| \leq \hat{\alpha} \\ \widetilde{\sigma}^\star - \hat{\alpha}\dfrac{\partial u^\star/\partial z}{|\partial u^\star/\partial z|}, & \textbf{si } |\widetilde{\sigma}^\star| > \hat{\alpha}, \end{cases}$$

De $(4.4.10)$, il existe $p^\star \in L^{r'}(\Omega)^2$ telle que :

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \mu \left|\frac{\partial u^*}{\partial z}\right|^{r-2} \frac{\partial u^*}{\partial z}\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} dx'dz + \int_\omega \underline{n}\hat{k}\hat{\psi}dx' + \hat{\alpha}\int_\Omega \underline{m}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}dx'dz - \int_\Omega \hat{f}\hat{\psi}dx'dz = -\int_\Omega \nabla p^\star \hat{\psi}dx'dz, \quad \forall\hat{\psi}\in\Pi(K). \tag{4.4.12}$$

De (4.4.11), (4.4.12) on déduit :

$$\int_\Omega \widetilde{\sigma}^\star \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}dx'dz + \int_\omega \underline{n}\hat{k}\hat{\psi}dx' = \int_\Omega \hat{f}\hat{\psi}dx'dz - \int_\Omega \nabla p^\star\hat{\psi}dx'dz, \ \forall\hat{\psi}\in\Pi(K), \tag{4.4.13}$$

d'aprés (4.4.13) on déduit (4.4.7) avec $\hat{\psi}\in W_0^{1,r}(\Omega)^2$. □

Théorème 4.4.5. *Sous les mêmes hypothèse du théorème 4.4.4, on a :*

(4.4.14)

$$\int_\omega \left[\frac{h^3}{12}\nabla p^* + \tilde{F} + \mu\int_0^h\int_0^y A^*(x,\zeta)\frac{\partial u^*(x,\xi)}{\partial\xi}d\xi dy + \hat{\alpha}\int_0^h\int_0^y \frac{\partial u^\star/\partial z}{|\partial u^\star/\partial z|}(x,\xi)\,d\xi dy - \right.$$

$$\left.\frac{h\mu}{2}\int_0^h A^*(x,\zeta)\frac{\partial u^*(x,\xi)}{\partial\xi}d\xi - \frac{\hat{\alpha}h}{2}\int_0^h \frac{\partial u^\star/\partial z}{|\partial u^\star/\partial z|}(x,\xi)\,d\xi\right].\nabla\varphi(x)\,dx = 0, \ \ \forall\varphi\in W^{1,p}(\omega),$$

avec

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(x) &= \int_0^h F(x,y)\,dy - \frac{h}{2}F(x,h),\\
F(x,y) &= \int_0^h\int_0^\xi \hat{f}(x,t)\,dtd\xi,\\
A^*(x,\xi) &= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^2\left(\frac{\partial u^*}{\partial z}(x,\xi)\right)^2\right)^{\frac{r-2}{2}},\\
\tau^* &= A^*(x,0) = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^2\left(\frac{\partial u^*}{\partial z}(x,0)\right)^2\right)^{\dfrac{r-2}{2}}\frac{\partial u^*}{\partial z}(x,0),\\
\rho^* &= \frac{\partial u^*}{\partial z}(x,0).
\end{aligned}$$

Preuve. En intégrant $(4.4.7)$ de 0 à z, on obtient :

$$-\mu\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^2\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial u^*}{\partial z} - \hat{\alpha}\frac{\partial u^\star/\partial z}{|\partial u^\star/\partial z|} + \mu\tau^*(x) + \hat{\alpha}\frac{\rho^*}{|\rho^*|} = \int_0^z \hat{f}(x,\xi)\,d\xi - z\nabla p^*.$$

En intégrant à nouveau de 0 à z, on trouve :

$$\begin{aligned}
&-\textstyle\int_0^z \mu A^*(x,\xi)\dfrac{\partial u^*}{\partial \xi}(x;\xi)\,d\xi - \hat{\alpha}\textstyle\int_0^z \dfrac{\partial u^\star/\partial z}{|\partial u^\star/\partial z|}d\xi + \\
&\mu\tau^*(x)\,z + \hat{\alpha}\frac{\rho^*}{|\rho^*|}z = \textstyle\int_0^z\int_0^\xi \hat{f}(x,y)\,dyd\xi - \dfrac{z^2}{2}\nabla p^*
\end{aligned} \tag{4.4.15}$$

si $z = h$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&-\textstyle\int_0^h \mu A^*(x,\xi)\dfrac{\partial u^*}{\partial \xi}(x;\xi)\,d\xi - \hat{\alpha}\textstyle\int_0^h \dfrac{\partial u^\star/\partial z}{|\partial u^\star/\partial z|}d\xi + \\
&\mu\tau^*(x)\,h + \hat{\alpha}\frac{\rho^*}{|\rho^*|}h = \textstyle\int_0^h\int_0^\xi \hat{f}(x,y)\,dyd\xi - \dfrac{h^2}{2}\nabla p^*
\end{aligned} \tag{4.4.16}$$

intégrant $(4.4.15)$ entre 0 et h on trouve :

$$\begin{aligned}
&-\textstyle\int_0^h\int_0^y \mu A^*(x,\xi)\dfrac{\partial u^*}{\partial z}(x;\xi)\,d\xi dy - \hat{\alpha}\textstyle\int_0^h\int_0^y \dfrac{\partial u^\star/\partial z}{|\partial u^\star/\partial z|}d\xi dy + \\
&\mu\tau^*(x)\,\frac{h^2}{2} + \hat{\alpha}\frac{\rho^*}{|\rho^*|}\frac{h^2}{2} = \textstyle\int_0^h\int_0^y\int_0^\xi \hat{f}(x,t)\,dtd\xi dy - \dfrac{h^3}{6}\nabla p^*.
\end{aligned} \tag{4.4.17}$$

De $(4.4.16)$, on déduit :

$$\begin{aligned}
&\mu\tau^*(x)\,\frac{h^2}{2} + \hat{\alpha}\frac{\rho^*}{|\rho^*|}\frac{h^2}{2} = \frac{\mu h}{2}\textstyle\int_0^h A^*(x,\xi)\dfrac{\partial u^*}{\partial \xi}(x;\xi)\,d\xi \\
&+\frac{1}{2}h\hat{\alpha}\textstyle\int_0^h \dfrac{\partial u^\star/\partial z}{|\partial u^\star/\partial z|}d\xi + \dfrac{h}{2}\textstyle\int_0^h\int_0^\xi \hat{f}(x,\xi)\,dyd\xi - \dfrac{h^3}{4}\nabla p^*.
\end{aligned} \tag{4.4.18}$$

De $(4.4.18)$ et $(4.4.17)$, on obtient :

$$\frac{h^3}{12}\nabla p^* + \tilde{F} + \int_0^h\int_0^y \mu A^*(x,\xi)\frac{\partial u^*(x,\xi)}{\partial \xi}d\xi dy + \hat{\alpha}\int_0^h\int_0^y \frac{\partial u^\star/\partial z}{|\partial u^\star/\partial z|}(x,\xi)\,d\xi dy -$$

$$\frac{\mu h}{2}\int_0^h A^*(x,\xi)\frac{\partial u^*(x,\xi)}{\partial \xi}d\xi - \frac{\hat{\alpha}h}{2}\int_0^h \frac{\partial u^\star/\partial z}{|\partial u^\star/\partial z|}(x,\xi)\,d\xi = 0$$

donc pour $\varphi \in W^{1,r}(\omega)$, on a :

$$\int_\omega \left[\frac{h^3}{12}\nabla p^* + \tilde{F} + \mu\int_0^h\int_0^y A^*(x,\xi)\frac{\partial u^*(x,\xi)}{\partial \xi}d\xi dy + \hat{\alpha}\int_0^h\int_0^y \frac{\partial u^\star/\partial z}{|\partial u^\star/\partial z|}(x,\xi)\,d\xi dy - \right.$$

$$\frac{\mu h}{2}\int_0^h A^*(x,\xi)\frac{\partial u^*(x,\xi)}{\partial \xi}d\xi - \frac{\hat{\alpha} h}{2}\int_0^h \frac{\partial u^\star/\partial z}{|\partial u^\star/\partial z|}(x,\xi)\,d\xi\Bigg].\nabla\varphi(x)\,dx = 0$$

Ce qui fallait de prouver.

4.5 Unicité des solutions

Théorème 4.4.6. *La solution* (u^*, p^*) *du problème limite* $(4.4.1)$ *et* $(4.4.14)$ *est unique dans* $V_z \times L_0^{r'}(\omega)$.

Preuve. Supposons qu'il existe deux solutions $(u^1; p^1)$ et $(u^2; p^2)$ du problème$(4.4.1)$;

(4.5.1)

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u_i^1}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial(u_i^1)}{\partial z}\frac{\partial(\hat{\varphi}_i - u_i^1)}{\partial z}dxdz - \int_\Omega p^*(x)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right)dxdz +$$
$$\hat{\alpha}\int_\Omega\left(\left|\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial z}\right| - \left|\frac{\partial u^1}{\partial z}\right|\right)dxdz + \int_\omega \hat{k}\left(|\hat{\varphi}| - |u^2|\right)dx \geq \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - u^1)dxdz,\ \forall\hat{\varphi}\in V(\Omega)$$

(4.5.2)

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial(u_i^2)}{\partial z}\frac{\partial(\hat{\varphi}_i - u_i^2)}{\partial z}dxdz - \int_\Omega p^*(x)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right)dxdz +$$
$$\hat{\alpha}\int_\Omega\left(\left|\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial z}\right| - \left|\frac{\partial u^2}{\partial z}\right|\right)dxdz + \int_\omega \hat{k}\left(|\hat{\varphi}| - |u^2|\right)dx \geq \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - u_i^2)dxdz,\ \forall\hat{\varphi}\in V(\Omega).$$

On prend $\varphi = u^2$ dans $(4.5.1)$ et $\varphi = u^1$ dans $(4.5.2)$, on obtient :

(4.5.3)

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u_i^1}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial(u_i^1)}{\partial z}\frac{\partial(u_i^2 - u_i^1)}{\partial z}dxdz - \int_\Omega p^*(x)\left(\frac{\partial u_1^2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2^2}{\partial x_2}\right)dxdz +$$
$$\hat{\alpha}\int_\Omega\left(\left|\frac{\partial u^2}{\partial z}\right| - \left|\frac{\partial u^1}{\partial z}\right|\right)dxdz + \int_\omega \hat{k}\left(|u^2| - |u^2|\right)dx \geq \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega(\hat{f}_i, u_i^2 - u_i^1)dxdz,\ \forall\hat{\varphi}\in V(\Omega).$$

(4.5.4)

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial(u_i^2)}{\partial z}\frac{\partial(u_i^1 - u_i^2)}{\partial z}dxdz - \int_\Omega p^*(x)\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2^1}{\partial x_2}\right)dxdz +$$
$$\hat{\alpha}\int_\Omega\left(\left|\frac{\partial u^1}{\partial z}\right| - \left|\frac{\partial u^2}{\partial z}\right|\right)dxdz + \int_\omega \hat{k}\left(|u^1| - |u^2|\right)dx \geq \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega(\hat{f}_i, u_i^1 - u_i^2)dxdz,\ \forall\hat{\varphi}\in V(\Omega).$$

En sommant les deux inéquations (4.5.3) et (4.5.4), on trouve :

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}}\left(\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u_i^1}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial u_i^1}{\partial z}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}}\left(\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\right]\frac{\partial}{\partial z}(u_i^1-u_i^2)dxdz\leq 0.$$

Nous utilisons l'inégalité suivante :

$$\left(|x|^{r-2}x-|y|^{r-2}y,x-y\right)\geq(r-1)\left(|x|+|y|\right)^{r-2}|x-y|^2\quad x,y\in\mathbb{R}^n,\quad\forall\ 1<r\leq 2,$$

on obtient :

(4.5.5)
$$\int_{\Omega}\left[\left|\frac{\partial u^1}{\partial z}\right|+\left|\frac{\partial u^2}{\partial z}\right|\right]^{r-2}\left|\frac{\partial u^1}{\partial z}-\frac{\partial u^2}{\partial z}\right|^2 dxdz=0,$$

avec $\left|\frac{\partial u_i}{\partial z}\right|=\left(\sum\limits_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u_i^1}{\partial z}\right)^2\right)^{\dfrac{1}{2}}$.

L'inégalité de Hölder, nous donnons :

(4.5.6)
$$\int_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(u^1-u^2\right)\right]^r dxdz\leq C\left(\int_{\Omega}\left[\left|\frac{\partial u^1}{\partial z}\right|+\left|\frac{\partial u^2}{\partial z}\right|\right]^{r-2}\left|\frac{\partial u^1}{\partial z}-\frac{\partial u^2}{\partial z}\right|^2 dxdz\right)^{\frac{r}{2}}\times$$
$$\left(\int_{\Omega}\left[\left|\frac{\partial u^1}{\partial z}\right|+\left|\frac{\partial u^2}{\partial z}\right|\right]^{r}dxdz\right)^{\frac{2-r}{2}}.$$

Par l'utilisation de (4.5.5) et (4.5.6), on déduit que :

$$\left\|u^1-u^2\right\|_{V_z}=0.$$

Enfin, pour prouver l'unicité de la pression, on utilise l'équation (4.4.14) avec les deux pressions p^1 et p^2, on trouve :

$$\int_{\omega}\frac{h^3}{12}\nabla\left(p^1-p^2\right)\nabla\varphi dx=0.$$

Lorsque $\varphi = p^1 - p^2$, et par l'inégalité de Poincaré, en déduit que $\|p^1 - p^2\|_{L^{r'}(\omega)} = 0$. donc : $p^1 = p^2$.

Donc le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. ALLAIRE, *Analyse numérique et optimisation*, Paris,(2005).

[2] G. BAYADA, L. CHUPIN AND S. MARTIN, *Viscoelastic fluids in a thin domain*, Quart. Appl. Math.Vol. 65 , pp. 625–651, (2007).

[3] G. BAYADA, L. CHUPIN AND B.GREC, *Fluides viscoelastiques en film mince*, Institut carmille, Jordan, lyon, (2007).(math.univ-lyon1.fr/~grec/pres_smai_grec.pdf).

[4] G. BAYADA, M. BOUKROUCHE. *On a free boundary for the Reynolds equation derived from the stokes system with Tresca boundary condition*, Journal of mathematical Analysis and Applications, vol. 282, pp. 212-213, (2003).

[5] N. BENHABOUCHA, *Quelques problèmes mathématiques délatifs à la modélisation des conditions aux limites fluide-solide pour des écoulements de faible épaisseur*, Thèse, Université Claude Bernard, Lyon, (2003).

[6] N. BENHABOUCHA, M. CHAMBAT, *New models in micropolar fluid and their application to lubrication*, Insa de Lyon, Vol. 15, No. 3, (2005).

[7] H. BENSERIDI AND M. DILMI, *some inequalities and asymptotic behaviour of dynamic problem of linear elasticity*, Georgian Math. J. Vol. 20,

Issue 1 (2013), 25–41, March (2013).

[8] M. BOUKROUCHE, F. BOUGHANIM, H. SMAOUI, *Asymptotic behavior of a non-Newtonian flow with stick- stip condition*, Electronic Journal of Differential Equations, Conference 11, pp. 71–80, (2004).

[9] M. BOUKROUCHE, R. ELMI, *Asymptotic of a non-Newtonian Fluide in a then domain with Tresca law*, Nonlinear Analysis. Theory Methods and Applixations, vol.59, Issues 1-2, pp 85-105, (2004).

[10] M. BOUKROUCHE, R. ELMIR, *On a non-isothermal, non Newtonian lubrication problem with Tresca law : Existence and behavior of weak solution*. Nonlinear Analysis : RealWorld Applications, (2007).

[11] M. BOUKROUCHE, G. LUKASZEWICZ, *Asymptotic analysis of solutions of a thin film lubrication problem with Coulomb fluid–solid interface law*, International Journal of Engineering Science, Vol. 41, 521–537, (2003).

[12] F. BOUZEGHAYA, *Analyse de quelques problème aux Mécanique des milieux continus,* Thèse de Doctorat en sciences, août (2013)

[13] H. BREZIS, *Equation et inéquation non linéaire dans les espaces vectoriels en dualité*, Annales de l'institut Fourier, tome 18, pp.115-175, n° 1(1968).

[14] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, paris, (1987).

[15] R. BUNOUI, S. KESAVAN, *Asymptotic behaviour of a Bingham ‡uid in thin layers*, J. Math.Anal. Appl. 293 (2004), no. 2, 405-418.

[16] L. CHUPIN, *Modélisation et Analyse mathématique en films minces*, Institut Camille Jordan - INSA de Lyon, (2009). (math.univ-lyon1.fr/~chupin/FICHIERS.../chupin-hdr-soutenance.pdf).

[17] M. DILMI, *Problèmes aux limites obtiques et non linéaires pour les équations de Lamé*, Thèse de Doctorat en sciences, Janvier (2009).

[18] M. DILMI, H. BENSERIDI AND A. SAADALLAH, *Asymptotic Analysis of a Bingham Fluid in a Thin Domain with Fourier and Tresca Boundary Conditions,* Adv. Appl. Math. Mech.,Vol. 6, No. 6, pp. 797-810 (2014).

[19] G. DUVAUT, J.L. LIONS, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, (1972).

[20] R. EL MIR, *Etude mathématique et analyse asymptotique de quelques problèmes de lubrification par des fluides non-newtoniens avec des conditions de non adhérence aux bords*, Thèse, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, (2005).

[21] B. GREC, *Fluides complexes en films minces*, Thèse de Doctorat, l'Ecole Centrale de Lyon, le 04 décembre 2008.

[22] V. GIRAULT, P. A. RAVIART, *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*. Springer (1979) .

[23] R. KH. ZEYTOUNIAN. *Les Modèles Asymptotiques de la Mecanique des Fluides 1.* LNP0245, Springer, (1986).

[24] M.R LAYDI, M. LENCZNER, *Equation de Navier- Stokes dans un domaine mince avec viscosité évanescente*, C. R. Acad. sci. Paris, t. 326, séri I, p. 127-130, (1998).

[25] J.L. LION, *Quelques méthodes de résolution des problème aux limites non linéaires*, Paris, Dunod, (1968)

[26] S. MARTIEN, *Contribution à la modélisation de phénomènes frontière libre en mécanique des films minces*, Thèse de Doctorat, Lyon, le 21 novembre (2005).

[27] F. MESSELMI AND B. MEROUANI, *Flow of Herschel-Bulkley fluid through a two dimensional thin layer,* Stud. Univ. Babe¸s-Bolyai Math. 58(2013), No. 1, 119–130

[28] Y. OUAFIK, *Contribution à l'étude mathématique et numérique des structures piézoélastriques en contact*, Thèse de Doctorat, Perpignan, (2007).

[29] A. SAADALLAH, H. BENSERIDI, M. DILMI AND S. DRABLA, *Estimates for the asymptotic convergence of a non-isothermal linear elasticity with friction,* .accepted Georgian Math. J (2015).

[30] F. SAIDI, *Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes et incompressibles avec des conditions aux bords non linéaires. Etude mathématique et numérique*, Thèse, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, (2004).

[31] M. SOFONEA, *Problèmes non Linéaires dans la Théorie de l'Elasticité*, Cours de Magister de Mathématiques Appliquées à l'Université de Sétif (1993).

[32] F. SAIDI, M. BOUKROUCHE, *Non-isothermal lubrication problem with Trisca Fluide-solide interface law*, Nonlinear Analysis : RealWorld Applications,Vol. 7, pp. 1145 – 1166, (2006).