## REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

#### **UNIVERSITE FERHAT ABBAS SETIF 1**

#### **THESE**

Présentée à la Faculté des Sciences Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat 3éme cycle

**Option: Mathématiques Appliquées** 

Par

## **Ketfi-cherif** Amine

#### Thème

# Sur certaines méthodes d'optimisation globale basées sur l'introduction de fonctions auxiliaires.

Soutenue le 11/02/2016, devant le jury composé de:

Mr. A. BENHOCINE	Prof. U. Ferhat Abbas Sétif 1	Président.
Mr. A. ZIADI	Prof. U. Ferhat Abbas Sétif 1	Rapporteur.
Mr. M-S. RADJEF	Prof. U. Abderrahmane Mira - Bejaia	Examinateur.
Mr. S-E. REBIAI	Prof. U. Hadj Lakhdar Batna	Examinateur.

# بِنَ الْآخِيْرِ اللهِ ٱلاَّحْدَرِ الرَّحِيْدِ



تتناول هذه الأطروحة طرق الاستمثال الشامل التي يُستعمل فيها دوال مساعدة. اقترحنا طريقة استُخدمت فيها دالة مساعدة جديدة تسمى دالة الانحدار الشامل. يمكن استخدام هذه الطريقة لحل مشاكل جد عامة من مسائل الاستمثال الشامل حيث المعيقات تكون معرفة بدوال مستمرة فقط. أجرينا سلسلة من التطبيقات العددية مما دل على فعالية هذه الطريقة.

**كلمان هفتا حية**: الاستمثال الشامل، الاستمثال الغير منتظم، الاستمثال الغير محدب، دالة مساعدة، دالة الانحدار الشامل.

# Résumé:

Cette thèse traite les méthodes d'optimisation globale qui introduisent des fonctions auxiliaires. Une approche utilisant une nouvelle fonction auxiliaire, dite de descente globale, a été proposée. Elle permet de résoudre des problèmes assez généraux d'optimisation continue, avec des contraintes seulement continues. Une série d'applications numériques ont été effectuées prouvant l'efficacité de cette approche.

<u>Mots-clés</u>: Optimisation globale, Optimisation non convexe, Optimisation non régulière, Fonction auxiliaire, Fonction de descente globale.

# Abstract:

This thesis treats the global optimization methods that introduce auxiliary functions. An approach using a new auxiliary function called global descent function was proposed. It solves rather general continues global optimization problems, with constraints only continuous. We have performed a series of numerical experiments demonstrating the efficacy of this approach.

<u>Key-words</u>: Global optimization, Non-smooth optimization, Non-convex optimization, Auxiliary function, global descent function.

# Remerciement

Tout d'abord, mes sincères remerciements à ALLAH tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a données durant ces longues années d'études afin de réaliser cette thèse.

Je tiens à remercier tous les gens qui ont collaboré avec moi sur certains aspects de ce travail.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude au professeur ZIADI Abdelkader, mon directeur de thèse, se fut un grand honneur pour moi. Je tiens à le remercier pour sa compétence, sa disponibilité et ses conseils tout au long de la préparation de cette thèse.

J'ai grand plaisir à remercier le professeur **BENHOCINE** Abedlhamid, d'avoir bien voulu examiner ce travail et de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie aussi les Professeurs **REBIAI Salah-eddine** et **RADJEF Mohamed -Said** d'avoir bien voulu examiner cette thèse et d'avoir accepter de participer au Jury.

Je tiens ensuite à remercier mes parents pour le soutien inconditionnel dont ils ont fait preuve depuis que mon projet professionnel est défini. Merci pour le soutien financier, moral, psychologique et matériel. Si je suis ici aujourd'hui, c'est grâce à vous!

La Mère c'est comme du coton : elle est douce à l'intérieur comme à l'extérieur et nettoie tous les maux.

# Un enfant sans père est semblable à une maison sans toiture.

J'adresse mes sincères remerciements au frère Ahmed pour ces encouragements et son aide.

Je souhaite aussi remercier mes frères et ma sœur pour leur accompagnement et leur soutien sans faille.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers les amis et collègues qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Je dédie mon travail à ma petite famille qui partage ma vie.

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Ketfi-cherif Amine.

# Table des matières

ĺη	trod	uction	générale	4
1	Gén	éralité	s sur l'optimisation globale	7
	1.1	Minim	um local et minimum global	7
	1.2	L'exist	tence d'un minimum global	9
	1.3	Solutio	on approchée	10
	1.4	Classif	fication des problèmes d'optimisation globale	10
		1.4.1	Classification par rapport à la nature du domaine faisable	11
		1.4.2	Classification par rapport aux propriétés de la fonction objectif	12
	1.5	Quelques caractérisations d'un minimiseur global d'un problème non convexe		
		1.5.1	Cas d'un problème différentiable	14
		1.5.2	Cas d'un problème lipschitzien	16
		1.5.3	Cas d'un problème non lipschitzien	20
	1.6	Conclu	asion	22
2 Méthodes d'optimisation globale basées sur l'introduction d'une fonction auxiliaire		23		
	2.1	Introd	uction	24
	2.2	La mé	thode de la fonction de diffusion	24
		2.2.1	Principe de la méthode de la fonction de diffusion	24
		2.2.2	La transformation gaussienne	27
		2.2.3	Procédure d'optimisation	29

	2.3	2.3 La méthode de l'indicateur de relief		
		2.3.1	Notion de séparateur	32
		2.3.2	Critère d'optimalité globale	34
		2.3.3	Description de la méthode	35
	2.4		téthodes qui utilisent des fonctions minorantes de la fonction if	39
		2.4.1	Les méthodes de recouvrement	39
		2.4.2	La méthode de séparation et évaluation (Branch-and-Bound) .	47
	2.5	La mé	thode de la fonction Tunneling	52
	2.6	La mé	thode de la fonction Filled	54
		2.6.1	Principe de la méthode de la fonction Filled	54
		2.6.2	Quelques variantes de la méthode de la fonction Filled	56
	2.7	Conclu	usion	66
3	Une	e nouve	elle fonction auxiliaire de descente globale	68
	3.1	Introd	luction	68
	3.2	Préser	ntation du problème à optimiser et son approximation	69
	3.3	Une n	ouvelle fonction auxiliaire de descente globale avec ses propriétés	71
	3.4	La mé	thode de descente globale	81
		3.4.1	Algorithme de descente globale	81
		3.4.2	Convergence asymptotique	82
		3.4.3	Condition d'arrêt	84
		3.4.4	Un exemple illustratif	86
	3.5	Conclu	usion	90
4			n de la nouvelle fonction de descente globale pour résoudre emes d'optimisation discrète	91
	4.1	_	uction	91
	4.2	Prélim	ninaire sur l'optimisation discrète	92
	4.3	• •	ues propriétés de la nouvelle fonction de descente globale pour nisation discrète	93

			`
TABLB	EDES	MATI	ERES

# TABLE DES MATIÈRES

	4.4	Description de l'algorithme	. 99	
	4.5	Exemples illustratifs	. 102	
	4.6	Conclusion	. 103	
5 Applications				
$\mathbf{C}_{0}$	onclu	sion générale et perspectives	122	
Bi	bliog	graphie	124	

# Introduction

L'optimisation est présente dans notre vie quotidienne, nous cherchons à optimiser notre temps de travail ou d'étude, ou encore nos investissements financiers. Dans l'industrie, on cherche en continu à optimiser les processus de production. Dans un chantier de construction, on cherche à optimiser la planification des tâches, ou encore en informatique et télécommunication où on cherche à optimiser les réseaux de données.

Dans le domaine mathématique, un problème d'optimisation consiste à trouver parmi un ensemble donné, un élément minimisant ou maximisant une fonction appelée fonction objectif et satisfaisant une ou plusieurs conditions définies par des fonctions dites de contraintes.

Les problèmes d'optimisation formulés dans la littérature peuvent être classés en deux catégories : les problèmes convexes, avec un grand cadre théorique et plusieurs outils numériques et les problèmes non convexes dont l'étude est en plein essor.

Au cours des deux dernières décennies, l'optimisation non convexe a connu des développements spectaculaires. Pour une raison simple : beaucoup de problèmes d'optimisation dans la pratique sont de nature non convexe. Plusieurs problèmes sont très difficiles, avec un grand nombre de solutions locales. Donc, il est évident que les progrès réalisés dans les théories et les techniques numériques à atteindre l'optimalité globale permettront d'améliorer la qualité de notre vie.

Habituellement, les méthodes d'optimisation globale peuvent être divisées en deux classes : les méthodes stochastiques et les méthodes déterministes. Plusieurs méthodes stochastiques sont faciles à mettre en œuvre et ne nécessitent pas une forte propriété de régularité sur les fonctions qui définissent le problème à traiter. En général, elles sont limitées du côté théorique et ont quelques inconvénients tels que : la non garantie de la qualité de la solution obtenue, la convergence lente ou l'attirance vers certains minimiseurs locaux. Les méthodes stochastiques comprennent, par exemple, la méthode recuit simulé [28], les algorithmes évolutionnaires [18] et la recherche aléatoire contrôlée [1].

Contrairement aux méthodes stochastiques, les méthodes globales déterministes

exigent généralement des propriétés de régularité sur les fonctions qui définissent le problème à traiter. Elles offrent une certitude pour obtenir le minimum global et ne laissent aucune place au hasard. Elles consistent à localiser des solutions optimales à l'aide des méthodes d'approximation, de décomposition et aussi des techniques de réduction de dimension. Elles ont connu des développements importants au cours de ces dernières décennies à travers les travaux de H. Tuy, R. Horst, P. Pardalos et N. V. Thoai [24, 25, 26, 56]. De nombreux algorithmes efficaces ont été développés à partir de la structure particulière du problème traité. Par exemple la détermination d'une solution optimale se fait grâce à la constante de Lipschitz, les dérivées ou d'autres informations concernant la structure du domaine. Certaines méthodes s'appuient sur l'analyse et l'optimisation convexe. Par exemple, l'optimisation DC (Différence de deux fonctions convexes) et son algorithme DCA (DC Algorithm) ont connu plusieurs développements. C'est parce que plusieurs problèmes non convexes particuliers dans la pratique sont formulés ou reformulés sous la forme de problèmes de différences de deux fonctions convexes.

Parmi les méthodes les plus prometteuses de résolution des problèmes généraux d'optimisation globale, il existe celles qui introduisent des fonctions auxiliaires qui servent à trouver une suite de points qui converge vers un minimiseur global, ou au moins elles permettent de guider vers des sous-régions intéressantes de l'ensemble sur lequel on optimise. Bien qu'elles soient relativement performantes, une caractéristique commune à toutes ces approches est qu'elles réussissent lorsqu'on les applique à des problèmes bien spécifiques ayant des domaines simples et des fonctions objectifs régulières.

Dans cette thèse, on s'intéresse aux méthodes d'optimisation globale utilisant des fonctions auxiliaires. Nous proposons une nouvelle approche pour résoudre des problèmes assez généraux d'optimisation globale et d'un niveau de complexité important, dans la mesure où la fonction objectif et les fonctions définissant les contraintes ne possèdent pas d'hypothèses de régularité.

Le premier et le deuxième chapitre sont surtout bibliographiques. Le premier chapitre est consacré à des notions générales concernant l'optimisation globale. Nous donnerons une classification des différents problèmes d'optimisation en se basant sur les propriétés des fonctions qui définissent le problème et la structure du domaine où on veut optimiser. Puis, on résume quelques résultats d'optimalité globale. Notons que malgré plusieurs efforts théoriques sur la caractérisation d'un minimiseur global, la réalisation numérique reste très compliquée et parfois impossible. À partir de ce chapitre, on tire une conclusion de la problématique qui concerne le cas le plus difficile en optimisation continue et que l'on va traiter dans le chapitre 3.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons aux méthodes d'optimisation globale les plus connues parmi celles qui utilisent des fonctions auxiliaires, ainsi

que leurs variantes. Nous commençons par la méthode de la fonction de diffusion: c'est une méthode basée sur la construction d'une suite de fonctions auxiliaires régularisées de la fonction objectif, qui dépendent d'une intégrale multidimensionnelle et d'un paramètre qui contrôle le degré de régularité. La suite des minimiseurs globaux de cette suite de fonctions converge vers un minimiseur global du problème initial. La deuxième méthode est la méthode de l'indicateur de relief. Elle consiste à transformer un problème avec contraintes en un problème sans contraintes en utilisant une fonction auxiliaire paramétrée dite fonction de l'indicateur de relief. Si cette fonction atteint le zéro, le minimiseur associé représente un minimiseur global du problème initial. D'autre part, on s'intéresse aux méthodes qui utilisent des fonctions auxiliaires minorantes de la fonction objectif. On donne les méthodes de recouvrement les plus connues, ainsi que la méthodes de séparation et évaluation. Ce chapitre est clos par la méthode de la fonction Tunnelling et la méthode de la fonction Filled, qui utilisent des fonctions auxiliaires paramétrées dont la minimisation aide à s'échapper d'un minimiseur local connu de la fonction objectif et trouver un point de départ pour une nouvelle recherche, qui donne un nouveau minimiseur local plus bas. Les deux phases de minimisation se répètent jusqu'à la satisfaction de certaines conditions d'arrêt.

Dans le troisième chapitre, on propose une méthode d'optimisation globale basée sur une nouvelle fonction auxiliaire. Cette approche est utilisée pour résoudre un problème d'optimisation globale assez général. Une caractéristique importante de la nouvelle fonction est que ses minimiseurs locaux se trouvent toujours au voisinage et coïncidents souvent avec les minimiseurs faisables de la fonction objectif. En plus, elle pénalise les minimiseurs qui se trouvent dans des bassins supérieurs ou à l'extérieur du domaine faisable. Contrairement aux fonctions classiques, elle dépend d'un seul paramètre facile à ajuster. À partir de cette fonction auxiliaire, on a construit un algorithme d'optimisation qui converge asymptotiquement vers un minimiseur global.

Dans le quatrième chapitre, nous proposons une version de la méthode de descente globale pour l'optimisation discrète en utilisant la nouvelle fonction auxiliaire proposée dans le chapitre 3. Nous débutons par quelques préliminaires concernant l'optimisation entière, puis, nous donnons les propriétés de la nouvelle fonction dans le cas discret et un algorithme de résolution d'un problème d'optimisation discrète utilisant ces propriétés.

Ce travail sera achevé par une série d'applications de la nouvelle approche sur plusieurs problèmes tests tirés de la littérature.

# Chapitre 1

# Généralités sur l'optimisation globale

$\alpha$						•	
$\mathbf{S}$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{r}$	r	n	J.	ır	Ω
v	v.	11.	LI.	ш	a.	ш	C

1.1	Min	imum local et minimum global	7
1.2	L'ex	istence d'un minimum global	9
1.3	Solu	tion approchée	10
1.4	Clas	sification des problèmes d'optimisation globale	10
	1.4.1	Classification par rapport à la nature du domaine faisable	11
	1.4.2	Classification par rapport aux propriétés de la fonction	
		objectif	12
1.5	Que	lques caractérisations d'un minimiseur global d'un	
	prob	olème non convexe	14
	1.5.1	Cas d'un problème différentiable	14
	1.5.2	Cas d'un problème lipschitzien	16
	1.5.3	Cas d'un problème non lipschitzien	20
1.6	Con	clusion	22

# 1.1 Minimum local et minimum global

D'un point de vue mathématique, l'optimisation en dimension finie est l'étude des problèmes qui s'expriment de la manière suivante :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min f(x) \\ x \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n, \end{array} \right.$$

où  $\mathbb X$  est appelé ensemble faisable et  $f:\mathbb X\to\mathbb R$  la fonction objectif .

Une solution faisable  $x^*$  est appelée minimiseur local s'il existe une boule ouverte  $B(x^*, \rho)$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que

$$\forall x \in B(x^*, \rho) \cap \mathbb{X} : f(x^*) \le f(x).$$

De nombreux problèmes peuvent avoir plusieurs solutions optimales locales ayant des valeurs différentes pour la fonction objectif. Cela nous conduit à définir ce qu'on appel un minimiseur global :

**Définition 1.1.** On dit que  $x^*$  est un minimiseur global ou  $f(x^*)$  est le minimum global de f sur  $\mathbb{X}$  si :

$$\forall x \in \mathbb{X}: f(x^*) \le f(x).$$

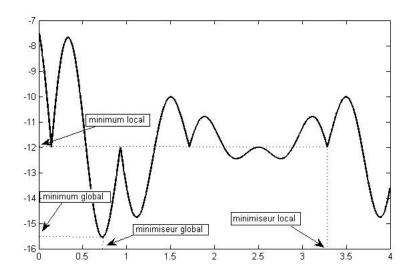


FIGURE 1.1 – Minimum local et minimum global.

Notons que si un point  $x^*$  est un maximum local (global) de f sur  $\mathbb{X}$ , alors  $x^*$  est un minimum local (global) de -f sur  $\mathbb{X}$ . Plus précisément,

$$\max\{f(x), x \in \mathbb{X}\} = -\min\{-f(x), x \in \mathbb{X}\}.$$

# 1.2 L'existence d'un minimum global

**Définition 1.2.** Soit  $f: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction où  $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  est un ensemble non vide. La fonction f est dite semi-continue inférieurement en  $x_0$  si pour toute suite  $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$  qui converge vers  $x_0$ , on a

$$f(x_0) \le \lim_k \inf f(x_k).$$

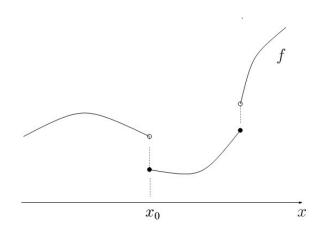


FIGURE 1.2 – Fonction semi-continue inférieurement en  $x_0$ .

**Définition 1.3.** Soit  $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction où  $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  est un ensemble non vide. Cette fonction est dite propre si

- Il existe un point  $x_0 \in \mathbb{X}$  tel que  $f(x_0) < +\infty$ .
- $f(x) > -\infty \quad \forall x \in \mathbb{X}$ .

Il est connu que si f est une fonction propre et semi-continue inférieurement, définie sur un compact  $\mathbb{X}$  de  $\mathbb{R}^n$ , alors l'ensemble des minimiseurs globaux du problème (P) est un compact non vide. Dans le cas où  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ , la garantie de l'existence d'un minimum global nécessite des hypothèses supplémentaires. Par exemple si f est globalement convexe (cœrcive), c-à-d :

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

alors,  $\forall T > 0, \exists \rho > 0$  tel que

$$||x|| > \rho \Rightarrow f(x) > T.$$

Soit  $x_0 \in \mathbb{X}$ , on pose  $T = f(x_0)$ . Alors,  $\exists \rho > 0$  tel que

$$||x|| > \rho \Rightarrow f(x) > f(x_0).$$

Donc il existe  $\rho > 0$  tel que

$$f(x) < f(x_0) \Rightarrow ||x|| < \rho.$$

Puisque f est semi-continue inférieurement sur la boule

$$B(0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \le \rho\},\$$

alors, il existe au moins un point  $x^* \in B(0, \rho)$  tel que

$$f(x^*) < f(x), \quad \forall x \in B(0, \rho).$$

Par conséquent,

$$f(x^*) \le f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

#### Solution approchée 1.3

D'un point de vue numérique, le calcul d'une solution optimale globale exacte  $x^*$  peut être trop couteux ou même impossible. Pour cela une solution ne pourrait être obtenue qu'avec une certaine précision  $\varepsilon$  strictement positive donnée. Par conséquent, le problème (P) sera considéré résolu dès qu'on aura atteint un élément appartenant à l'un au moins des ensembles suivants :

- $$\begin{split} \bullet \ \ & \mathbb{X}_{\varepsilon}^{f^*} = \{x \in \mathbb{X} : f(x) \leq f(x^*) + \varepsilon\}. \\ \bullet \ & \mathbb{X}_{\varepsilon}^{x^*} = \{x \in \mathbb{X} : \|x x^*\| < \varepsilon\}. \\ \bullet \ & \mathbb{X}_{\varepsilon}^{\delta(x^*)} = \{x \in \mathbb{X} : \delta(f(x^*)) < \varepsilon\}, \end{split}$$

avec:

$$\delta(y) = \frac{\lambda_n(\{x \in \mathbb{X} : f(x) \le y\})}{\lambda_n(\mathbb{X})},$$

où  $\lambda_n$  désigne la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$ 

#### Classification des problèmes d'optimisation glo-1.4 bale

Le domaine de l'optimisation globale peut être subdivisé en plusieurs catégories selon les différentes formulations possibles du problème traité.

## 1.4.1 Classification par rapport à la nature du domaine faisable

On distingue deux types d'optimisation selon la structure du domaine faisable :

#### L'optimisation continue

On dit qu'un problème d'optimisation est continu si le domaine faisable correspondant représente un sous ensemble non discret de  $\mathbb{R}^n$ . Dans ce cas,  $\mathbb{X}$  peut prendre plusieurs formes, par exemple :

• Une forme générale :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \le 0, i = 1, ..., m\},\$$

où les  $g_i$  sont des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^n$ .

• Un polyèdre, c-à-d :

$$\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m.$$

- Un polytope (qui est un polyèdre borné), par exemple :
  - 1) Un hyperrectangle, c-à-d:

$$\mathbb{X} = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, ..., n\}, \quad a_i < b_i \in \mathbb{R}.$$

2) Un simplexe  $S = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ :

C'est l'enveloppe convexe d'un ensemble de points  $v_0, v_1, \dots, v_n$  tel que les vecteurs :  $(v_1 - v_0), (v_2 - v_1), \dots, (v_n - v_0)$  sont linéairement indépendants.

#### L'optimisation discrète

Un problème d'optimisation est dit discret si son domaine faisable représente un ensemble fini ou dénombrable. Comme le cas continu on peut distinguer plusieurs formes spéciales, par exemple :

- $\mathbb{X} = C \cap \mathbb{B}^n$ , avec C un compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ .
- Un hyperrectangle:

$$\mathbb{X} = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n : a_i \le x_i \le b_i, i = 1, ..., n\}, \quad a_i < b_i \in \mathbb{Z}.$$

# 1.4.2 Classification par rapport aux propriétés de la fonction objectif

Selon les hypothèses liées à la fonction objectif et les fonctions qui définissent l'ensemble faisable, on distingue plusieurs types de problèmes d'optimisation.

#### 1. Selon la structure de la fonction objectif

De nombreuses méthodes ont été développées en exploitant la structure mathématique du problème. Nous donnons ici quelques classes de problèmes d'optimisation en se basant sur la structure de la fonction objectif et les contraintes associées.

#### L'optimisation concave

Un problème d'optimisation est dit concave si la fonction objectif f est concave et le domaine faisable  $\mathbb{X}$  est un convexe, c-à-d :

$$\forall x, y \in \mathbb{X}, \ 0 \le \lambda \le 1:$$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \ge \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \text{et}$$

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathbb{X}.$$

Pour ce type de problèmes, le minimum global est atteint en un point extrémal de X.

#### L'optimisation d.c

On dit qu'un problème d'optimisation est de type d.c si la fonction objectif s'exprime sous la forme d'une différence de deux fonctions convexes, c-à-d :

$$f(x) = q(x) - h(x),$$

où g et h sont deux fonctions convexes.

#### L'optimisation quadratique

Un problème d'optimisation est dit quadratique s'il est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \min\langle x, Q_0 x \rangle + \langle x, c_0 \rangle + d_0 \\ \langle x, Q_i x \rangle + \langle x, c_i \rangle + d_i \leq 0, \quad i = 1, ..., m \\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où les  $Q_i$ , i = 0, ...m sont des matrices symétriques,  $c_i \in \mathbb{R}^n$  et  $d_i \in \mathbb{R}$ .

#### L'optimisation fractionnaire

L'optimisation fractionnaire traite des problèmes où la fonction objectif est un rapport de deux fonctions. La forme générale de ce type de problèmes est la suivante :

$$\begin{cases} \min \max_{1 \le l \le k} \frac{f_l(x)}{h_l(x)} \\ x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}. \end{cases}$$

où 
$$f_l, h_l : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}, h_l(x) > 0, l = 1, ..., k.$$

#### L'optimisation multiplicative

Dans le cas général, un problème d'optimisation multiplicative s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min \prod_{i=1}^{n} f_i(x) \\ x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

avec : 
$$f_i(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$
.

#### L'optimisation séparable

Un problème d'optimisation est dit séparable si la fonction objectif possède la forme suivante :

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i).$$

#### 2. Selon la régularité de la fonction objectif

Dans la littérature, certains problèmes portent le nom du degré de régularité de la fonction objectif et les fonctions qui définissent les contraintes (différentiables, lipschitziennes,...). Ces conditions servent souvent à caractériser les solutions optimales du problème.

# 1.5 Quelques caractérisations d'un minimiseur global d'un problème non convexe

#### 1.5.1 Cas d'un problème différentiable

Soit  $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable. Une condition nécessaire pour qu'un point  $x^*$  représente un minimiseur local de f est la suivante :

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Avec cette condition et l'utilisation de la fonction biconjuguée de f, J.-B. Hiriart-Urrity [20] a donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point  $x^*$  représente un minimiseur global de f.

**Définition 1.4.** Soit  $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction non nécessairement convexe. Sa fonction conjuguée est la fonction définie comme suit :

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle y, x \rangle - f(x) \}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

L'application  $f \mapsto f^*$  est appelée transformation de Legendre-Fenchel.

Si on applique la transformation de Legendre-Fenchel à la fonction conjuguée; on obtient la fonction biconjuguée de f définie pour  $x \in \mathbb{R}^n$  comme suit :

$$f^{**}(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle y, x \rangle - f^*(y) \right\}.$$

Cette dernière fonction est le supremum de toutes les minorantes affines de f. En effet

Une fonction affine  $a: x \mapsto \langle y, x \rangle - \alpha$  minore f si est seulement si

$$\alpha \ge \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle y, x \rangle - f(x) \} = f^*(y).$$

Alors

$$\sup\{a(x): a \text{ est affine et } a \leq f\} = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle y, x \rangle - f^*(y)\}$$
$$= f^{**}(x). \tag{1.1}$$

Un autre outil de base qu'on a besoin de le rappeler est la notion de dérivée directionnelle dans le cas convexe [22].

Soit  $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe. On considère un point  $\overline{x}$  de  $\mathbb{R}^n$  et une direction  $d \in \mathbb{R}^n$ . La dérivée directionnelle de f en  $\overline{x}$  dans la direction de d, notée  $(f)'(\overline{x};d)$ , est définie comme suit :

$$(f)'(\overline{x};d) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f(\overline{x} + \alpha d) - f(\overline{x})}{\alpha}.$$

Si  $(f)'(\overline{x};d)$  est linéaire par rapport à d, alors f est différentiable en  $\overline{x}$  et dans ce cas, on a aussi  $(f)'(\overline{x};d) = \langle \nabla f(\overline{x}), d \rangle$ .

On a la condition d'optimalité suivante [20] :

**Théorème 1.1.** Soit  $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable. Alors  $x^*$  est un minimiseur global de f si est seulement si :

$$\begin{array}{l}
1) \ \nabla f(x^*) = 0 \\
et
\end{array}$$

2) 
$$f^{**}(x^*) = f(x^*)$$
.

Dans ce cas, la fonction  $f^{**}$  est différentiable en  $x^{**}$  et  $\nabla f^{**}(x^*) = 0$ .

Démonstration.

i) Supposons que  $x^*$  est un minimiseur global de f. La fonction constante définie par l'expression

$$h(x) = f(x^*)$$

est une minorante de la fonction objectif.

Puisque  $f^{**}$  représente le supremum de toutes les minorantes affines de f, il en résulte que  $f^{**}(x^*) = f(x^*)$ .

ii) Inversement, Soit  $x^*$  un point stationnaire de f tel que :  $f^{**}(x^*) = f(x^*)$ . Puisque  $f^{**}(x) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$ , on déduit que pour tout  $d \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\frac{f^{**}(x^* + \alpha d) - f^{**}(x^*)}{\alpha} \leq \frac{f(x^* + \alpha d) - f(x^*)}{\alpha}, \quad \forall \alpha > 0.$$

Lorsque  $\alpha \to 0^+$ , on trouve

$$(f^{**})'(x^*, d) \le \langle \nabla f(x^*), d \rangle = 0.$$

Puisque  $-(f^{**})'(x^*, -d) \le (f^{**})'(x^*, d)$ , alors :  $(f^{**})'(x^*, -d) \ge 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$ . D'où

$$(f^{**})'(x^*, -d) = 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n,$$

ce qui revient à dire que  $f^{**}$  est différentiable en  $x^*$  avec  $\nabla f^{**}(x^*) = 0$ . Il en résulte que  $x^*$  représente un minimiseur de la fonction convexe  $f^{**}$ , et par conséquent, il représente un minimiseur global de f.

Du point de vue pratique, la réalisation de la deuxième condition est difficile car la valeur exacte de  $f^{**}(x)$  n'est pas simple à déterminer.

#### Cas quadratique

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$(PQ)$$
  $\begin{cases} \min f(x) = \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle \\ ||x|| \le \delta. \end{cases}$ 

avec A une matrice carrée symétrique d'ordre  $n, \delta > 0$ , et  $b \in \mathbb{R}^n$ . On a le théorème suivant, établi par J.-B. Hiriart-Urrity [24] :

**Théorème 1.2.** Un point  $x^*$  est un minimiseur global du problème (PQ) si et seulement si, il existe une constante  $\mu \geq 0$  telle que :

- (i)  $(A + \mu I_n)x^* + b = 0$ .
- (ii)  $\mu(||x^*|| \delta) = 0$ .
- (iii)  $A + \mu I_n$  est semi-définie positive.

avec  $I_n$  désigne la matrice identité d'ordre n.

#### 1.5.2 Cas d'un problème lipschitzien

Rappelons d'abord quelques notions d'analyse non lisse :

**Définition 1.5.** Une fonction  $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  est dite localement lipschitzienne si pour tout point x de  $\mathbb{R}^n$ , il existe un voisinage V de x tel que la restriction de f à V soit lipschitzienne (pour une certaine constante k qui peut dépendre de V, donc de x).

Soit  $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction supposée localement lipschitzienne en  $x \in \mathbb{R}^n$ . Clarke [7], a défini la dérivée directionnelle généralisée de la façon suivante :

**Définition 1.6.** Pour tout  $d \in \mathbb{R}^n$ , la fonction f admet une dérivée directionnelle généralisée en x dans la direction d, notée  $f^{\circ}(x,d)$ , est définie par

$$f^{\circ}(x,d) = \limsup_{\begin{subarray}{c} y \longrightarrow x \\ \alpha \longrightarrow 0 \\ \alpha > 0 \end{subarray}} \frac{f(y + \alpha d) - f(y)}{\alpha}.$$

On définit ce qu'on appelle fonction support d'une partie  $C \subset \mathbb{R}^n$  comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \sigma_C(x) = \sup_{y \in C} \langle x, y \rangle.$$

Le sous-différentiel de Clarke pour une fonction localement lipschitzienne en un point x est défini comme suit :

**Définition 1.7.** Le sous-différentiel de f en x, noté  $\partial f(x)$  est l'ensemble non vide, compact et convexe de  $\mathbb{R}^n$  dont la fonction support qui associe à chaque  $d \in \mathbb{R}^n$  la valeur  $f^{\circ}(x,d)$ , c'-à-d:

$$\partial f(x) = \{ s \in \mathbb{R}^n : \langle s, d \rangle \le f^{\circ}(x, d), \forall d \in \mathbb{R}^n \}.$$

Les éléments de  $\partial f(x)$  sont appelés les sous-gradients de Clarke (ou gradients généralisés) de f en x.

Clarke a démontré la condition d'optimalité locale suivante [7] :

Théorème 1.3.  $Si \ \overline{x}$  un minimiseur local du problème :

$$\begin{cases} \min g_0(x), \\ g_i(x) \le 0, i = 1, ..., m_1, \\ h_j(x) = 0, j = 1, ..., m_2, \\ x \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où les  $g_i$  sont des fonctions localement lipschitziennes de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}$ , et  $m_1, m_2$  sont des entiers naturels, alors il existe des nombres  $r_0, r_i, s_j$  pas tous nuls et un point  $\xi \in \mathbb{R}^n$  tels que :

- $r_0 > 0, r_i > 0$ .
- $r_i g_i(\overline{x}) = 0, i = 1, ..., m_1.$
- $\xi \in r_0 \partial g_0(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m_1} r_i \partial g_i(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{m_2} r_j \partial h_j(\overline{x}).$
- $-\xi \in N_{\mathbb{X}}(\overline{x}),$

où  $N_{\mathbb{X}}(\overline{x})$  désigne le cône normal généralisé au sens de Clarke sur  $\overline{x} \in \mathbb{X}$ :

$$N_{\mathbb{X}}(\overline{x}) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \exists t > 0, y \in t \partial d(\overline{x}, \mathbb{X}) \},$$

avec  $d(., \mathbb{X})$  est la fonction distance définie comme suit :

$$d(x, \mathbb{X}) = \inf \{ ||x - y|| : y \in \mathbb{X} \}.$$

Si  $\mathbb{X}$  est un convexe,  $N_{\mathbb{X}}(x)$  coïncide avec le cône normal au sens d'analyse convexe :

$$N(x,\mathbb{X}) = \left\{ s \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \langle s,y-x \rangle \leq 0, \forall y \in \mathbb{X} \right\}.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour l'optimisation lipschitzienne, établie par Hiriart-Urruty et Ledyaev [21] et récemment étendue pour un cas plus général par P.G Georgiev et coll.[16], est donnée dans le théorème suivant :

**Théorème 1.4.** Soit  $\mathbb{X}$  un compact convexe de  $\mathbb{R}^n$  et  $f: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction localement lipschitzienne. On considère le problème suivant :

$$(P_{li}) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

On définit l'ensemble de niveau de f sur X, par :

$$L_c(f) = \{ y \in \mathbb{X} : f(y) = c \}.$$

On suppose qu'on a la condition de qualification suivante :

$$\partial f(y) \cap N(y, \mathbb{X}) = \emptyset \quad \forall y \in L_{f(x^*)}(f).$$
 (1.2)

On a

(a) Une condition suffisante pour que x\* représente un minimiseur global de f sur X est la suivante :

$$-\partial f(y) \subset N(y, \mathbb{X}) \qquad \forall y \in L_{f(x^*)}(f).$$
 (1.3)

(b) Si de plus, la fonction -f est régulière au sens de Clarke, alors la condition (1.3) est aussi nécessaire.

Démonstration.

Supposons que  $x^*$  n'est pas un minimiseur global du problème  $(P_{li})$ , alors il existe un point  $u \in \mathbb{X}$  tel que  $f(u) < f(x^*)$ .

Puisque f est continue, l'ensemble  $\mathcal{U}_{f(x^*)}(f) = \{x \in \mathbb{X} : f(x) \geq f(x^*)\}$  est fermé. Il est clair que  $u \notin \mathcal{U}_{f(x^*)}(f)$ , et nous pouvons poser  $\varepsilon = \frac{1}{2}d(u,\mathcal{U}_{f(x^*)}(f))$ .

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} ||x - u||^2 \\ x \in \mathcal{U}_{f(x^*)}(f)). \end{cases}$$

Généralement, ce problème ne possède pas de solution car  $\mathcal{U}_{f(x^*)}(f)$ ) est seulement fermé. Par contre, d'après le principe variationnel d'Ekland [9], il existe un point  $y \in \mathcal{U}_{f(x^*)}(f)$  tel que la fonction

$$\varphi_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{2} ||x - u||^2 + \varepsilon ||y - x||$$

atteint son minimum sur  $\mathcal{U}_{f(x^*)}(f)$ .

Alors, y représente une solution du problème

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} ||x - u||^2 + \varepsilon ||y - x|| \\ -f(x) \le -f(x^*) \\ x \in \mathbb{X}. \end{cases}$$

À partir de la condition nécessaire d'optimalité locale de Clarke(Théorème 1.3), il existe  $\lambda_0 \geq 0$ ,  $\lambda_1 \geq 0$ , pas tous nuls, et  $\xi \in \mathbb{R}^n$  tels que :

$$\xi \in \lambda_0 \partial \left( \frac{1}{2} \| . - u \|^2 + \varepsilon \| y - . \| \right) (y) + \lambda_1 \partial \left( -f(y) \right), \tag{1.4}$$

$$\lambda_1 (f(y) - f(x^*)) = 0,$$
 (1.5)

et

$$-\xi \in N(y, \mathbb{X}). \tag{1.6}$$

Maintenant, nous utilisons les propriétés suivantes du sous-différentiel convexe:

$$\partial ||x|| = \{ z \in B(0,1) : ||x|| = \langle z, x \rangle \}, \tag{1.7}$$

 $\operatorname{et}$ 

$$\partial \|x\|^2 = 2\|x\|\partial \|x\|. \tag{1.8}$$

A partir de (1.4) et les propriétés du sous-différentiel de Clarke (1.7) et (1.8), on déduit qu'il existe  $x_1^* \in \partial ||y - u||, x_2^* \in B(0, 1)$  et  $x_3^* \in \partial f(y)$  tels que

$$\xi = \lambda_0 (\|y - u\|x_1^* + \varepsilon x_2^*) - \lambda_1 x_3^*. \tag{1.9}$$

Si  $\lambda_0=0$ , alors  $\lambda_1\neq 0$  et d'après (1.5) et (1.6), on trouve :  $f(y)=f(x^*)$  et  $x_3^*=-\frac{1}{\lambda_1}\xi$ . Il s'ensuit que  $x_3^*\in N(y,\mathbb{X})$ , ce qui contredit la condition de qualification (1.2), et par conséquent  $\lambda_0>0$ .

De plus, si  $\lambda_1 = 0$ , alors d'après (1.6), on obtient

$$0 \ge \langle \xi, y - u \rangle$$

$$= \lambda_0 \left[ \|y - u\|^2 + \varepsilon \langle x_2^*, y - u \rangle \right]$$

$$\ge \lambda_0 \left[ \|y - u\|^2 - \varepsilon \|x_2^*\| \|y - u\| \right]$$

$$\ge \lambda_0 \|y - u\| \left[ \|y - u\| - \varepsilon \right]$$

$$\ge \lambda_0 \|y - u\| \left[ d(u, \mathcal{U}_{f(x^*)}(f)) - \varepsilon \right]$$

$$> 0,$$

ce qui est absurde.

Si  $\lambda_1 > 0$ , d'après (1.5), on obtient  $f(y) = f(x^*)$ . De (1.9), on peut écrire

$$x_3^* = \frac{1}{\lambda_1} \left[ \lambda_0 \left( \|y - u\| x_1^* + \varepsilon x_2^* \right) - \xi \right].$$

Alors, on a

$$\langle x_{3}^{*}, y - u \rangle = \frac{1}{\lambda_{1}} \langle \lambda_{0} (\|y - u\|x_{1}^{*} + \varepsilon x_{2}^{*}) - \xi, y - u \rangle$$

$$\geq \frac{\lambda_{0}}{\lambda_{1}} [\|y - u\|^{2} + \varepsilon \langle x_{2}^{*}, y - u \rangle]$$

$$\geq \frac{\lambda_{0}}{\lambda_{1}} [\|y - u\|^{2} - \varepsilon \|x_{2}^{*}\| \|y - u\|]$$

$$\geq \frac{\lambda_{0}}{\lambda_{1}} \|y - u\| [\|y - u\| - \varepsilon] > 0,$$

ce qui est contradictoire avec (1.3).

La preuve de l'implication inverse est la même que dans [21].

# 1.5.3 Cas d'un problème non lipschitzien

Si la fonction objectif ne possède pas de gradient ou de sous-différentiel, la caractérisation d'un minimiseur global est plus difficile. Plusieurs résultats théoriques ont été proposés pour ce cas.

#### a) Condition dans le cas de l'unicité d'un minimiseur global

Dans le cas d'unicité d'un minimiseur global, Pincus [45] a donné une condition nécessaire d'optimalité globale comme il est indiqué dans le théorème suivant :

**Théorème 1.5** ([45]). Soit f une fonction continue et  $\mathbb{X}$  un ensemble robuste, c- $\dot{a}$ -d:

$$\overline{\mathbb{X}} = \overline{int}\overline{\mathbb{X}},$$

 $où \overline{\mathbb{X}}$  désigne la fermeture de  $\mathbb{X}$ .

Si f possède un minimiseur global unique  $x^*$  sur X, alors

$$x^* = \lim_{k \to \infty} \frac{\int_{\mathbb{X}} x \exp(-kf(x)) dx}{\int_{\mathbb{X}} \exp(-kf(x)) dx}.$$

#### b) Condition dans de cas où la fonction objectif est strictement positive

Dans le cas où la fonction objectif est strictement positive sur X, Falk [12] a démontré la condition nécessaire et suffisante suivante :

**Théorème 1.6.** Soient f une fonction continue définie sur un ensemble robuste X et  $x^*$  un point de X. On définit la suite  $\{r(x,k)\}_{k\in\mathbb{N}}$  comme suit :

$$r(x,k) = \int_{\mathbb{X}} \left[ \frac{f(x^*)}{f(x)} \right]^k dx.$$

Le point  $x^*$  est un minimiseur global de f sur  $\mathbb{X}$  si est seulement si la suite  $\{r(x,k)\}_{k\in\mathbb{N}}$  est bornée.

#### c) Conditions dans de cas où la fonction objectif est non lipschitzienne

Soit  $x^*$  un point de  $\mathbb{X}$ , on suppose que  $\alpha$  est un nombre réel tel que  $\alpha = f(x^*)$ . On considère l'ensemble suivant :

$$F_{\alpha} := \{ x \in \mathbb{X} : f(x) < \alpha \}.$$

Il est clair que si f est continue et la mesure de l'ensemble  $F_{\alpha}$  est nulle, alors  $x^*$  est un minimiseur global du problème (P). Mais cette condition est difficile à réaliser numériquement. Dans le théorème suivant [23], nous donnons des conditions nécessaires est suffisantes pour qu'un point faisable représente un minimiseur global de f sur  $\mathbb{X}$ :

Théorème 1.7. Sous les conditions suivantes :

- i) f est semi-continue inférieurement,
- ii) f est robuste supérieurement, c-à-d les ensembles définis par :
  - $F_c := \{x \in \mathbb{X} : f(x) < c\}, \text{ sont robustes pour tout nombre réel } c,$
- iii) f admet une borne inférieure sur  $\mathbb{R}^n$ ,

alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1- Un point  $x^*$  est minimiseur global de f sur  $\mathbb{X}$  et  $f(x^*) = c^*$ .

$$2- \frac{1}{\lambda_n (H_{c^*} \cap \mathbb{X})} \int_{H_{c^*} \cap \mathbb{X}} f(x) d\lambda_n = c^*.$$

$$3 - \frac{1}{\lambda_n (H_{c^*} \cap \mathbb{X})} \int_{H_* \cap \mathbb{X}} (f(x) - c^*)^2 d\lambda_n = 0.$$

avec:

$$H_{c^*} := \{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) \le c^* \}.$$

Dans les travaux [65, 68, 43], on trouve des modifications récentes de ces conditions, ainsi que des réalisations numériques associées qui font appel à beaucoup d'heuristiques.

Remarque 1.1. Les conditions d'optimalité globale discutées dans ce chapitre ont un intérêt seulement théorique. Du point de vue pratique, leurs réalisations sont très difficiles et parfois impossibles.

## 1.6 Conclusion

Dans la résolution d'un problème d'optimisation, la recherche d'un optimum global présente des degrés de difficultés difficulté largement supérieur à ceux de la recherche d'un optimum local.

Bien qu'il existe de nombreux résultats concernant la caractérisation d'un minimiseur global, leur réalisation reste une chose très difficile ou même impossible.

Notons que le plus général et le plus difficile parmi les problèmes d'optimisation continue est le suivant :

$$(PC) \begin{cases} \operatorname{Glob} \min f(x) \\ s.c. \\ x \in \Omega \cap \mathbb{X}, \end{cases}$$

avec:

- $\Omega$  et un compact de  $\mathbb{R}^n$ .
- $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \le 0, i = 1, ..., m\}.$
- f(x),  $g_i(x)$ , i = 1, ..., m sont des fonctions seulement continues sur  $\Omega$ . Ce problème sera l'objet de notre étude dans le chapitre 3.

# Chapitre 2

# Méthodes d'optimisation globale basées sur l'introduction d'une fonction auxiliaire

# Sommaire

2.1	Intro	oduction	24
2.2	La n	néthode de la fonction de diffusion	24
	2.2.1	Principe de la méthode de la fonction de diffusion	24
	2.2.2	La transformation gaussienne	27
	2.2.3	Procédure d'optimisation	29
2.3	La n	néthode de l'indicateur de relief	31
	2.3.1	Notion de séparateur	32
	2.3.2	Critère d'optimalité globale	34
	2.3.3	Description de la méthode	35
2.4		méthodes qui utilisent des fonctions minorantes de nction objectif	39
	2.4.1	Les méthodes de recouvrement	39
	2.4.2	La méthode de séparation et évaluation (Branch-and-Bound)	47
2.5	La n	néthode de la fonction Tunneling	<b>52</b>
2.6	La n	néthode de la fonction Filled	54
	2.6.1	Principe de la méthode de la fonction Filled	54
	2.6.2	Quelques variantes de la méthode de la fonction Filled	56
2.7	Cond	clusion	66

## 2.1 Introduction

Parmi les méthodes de résolution des problèmes généraux d'optimisation globale, il existe celles basées sur la modification de la fonction objectif. L'idée commune dans toutes ces méthodes consiste à introduire une fonction auxiliaire qui dépend de la fonction objectif et de certains paramètres, dans le but de trouver une suite de points qui converge vers un minimiseur global, ou au moins de nous guider vers des sous-régions dignes d'intérêt de l'ensemble faisable. L'idée est certainement attrayante, mais comme il est signalé par certains chercheurs, une caractéristique commune à toutes ces approches est qu'elles réussissent lorsqu'on les appliquent à des problèmes d'optimisation globale bien spécifiques ayant des domaines faisables simples et des fonctions objectifs régulières. On ne dispose pas dans la littérature de preuves formelles de l'efficacité de ces méthodes, néanmoins, dans certains cas, elles donnent des résultats satisfaisants dans les expériences numériques. Dans ce chapitre, nous traitons et analysons ces méthodes dans le but de les améliorer.

## 2.2 La méthode de la fonction de diffusion

#### 2.2.1 Principe de la méthode de la fonction de diffusion

La méthode de la fonction de diffusion consiste à bâtir une suite de fonctions auxiliaires régularisées de la fonction objectif [29, 44]. Ces fonctions qui sont régulières étant construites de façon qu'elles perdent progressivement cette propriété grâce à un paramètre qui contrôle le degré de leur régularité. Lorsque ce paramètre est égal à une valeur suffisamment grande, la fonction régularisée correspondante possède un seul minimiseur. À partir de ce minimiseur, on procède une minimisation d'une autre fonction moins régulière et à chaque itération le degré de régularité est alors affaibli et la suite des minimiseurs globaux des fonctions lisses converge alors vers un minimiseur global de la fonction objectif .

Considérons la transformation suivante :

$$f^{[1]} = f(x) + \beta f''(x), \qquad \beta > 0.$$

En vertu de cette transformation, les points d'inflexion restent fixés car ils correspondent à f''(x) = 0. Tandis que les régions de la courbe où la fonction est convexe (concave) vont vers le haut (bas), déstabilisant ainsi les extremum existants de la courbe (pour les petites valeurs de  $\beta$ ).

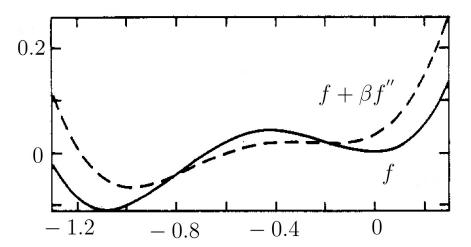


FIGURE 2.1 – La transformation  $f^{[1]}$  pour la fonction définie par  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 0.9x^2$ , avec  $\beta = 0.02$ .

Si on répète cette transformation N fois, on obtient :

$$f^{[N]} = \left(1 + \beta \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)^N f(x).$$

En prenant  $\beta = \frac{t}{N}$  et avec  $N \longrightarrow \infty$ , on trouve la fonction suivante :

$$F(x,t) = \lim_{N \to \infty} \left( 1 + \frac{t}{N} \frac{d^2}{dx^2} \right)^N f(x)$$
$$= \exp\left( t \frac{d^2}{dx^2} \right) f(x).$$

Si on utilise les séries de Taylor pour définir l'opérateur exp(.), c-à-d :

$$\exp(A) = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots,$$

on obtient

$$\exp\left(t\frac{d^2}{dx^2}\right) = T(t) := 1 + t\frac{d^2}{dx^2} + \frac{t^2}{2}\frac{d^4}{dx^4} + \frac{t^3}{3!}\frac{d^6}{dx^6} + \cdots$$

En général, la représentation en série de Taylor peut être divergente pour certaines fonctions et pour des grandes valeurs du paramètre t. Cependant, on peut facilement vérifier que T est une solution de l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial F}{\partial t},$$

où le paramètre t représente le temps.

Dans le cas multidimensionnel [29, 44], l'opérateur T devient comme suit :

$$T(t) = \exp(t\Delta),$$

avec  $\Delta$  représentant le Laplacien.

L'équation de diffusion multidimensionnelle sera de la forme suivante :

$$\Delta f = \frac{\partial F}{\partial t},$$

et quand on s'intéresse à la solution de cette dernière équation pour la condition aux limites donnée par

$$F(x,0) = f(x)$$
  $x \in \mathbb{R}^n$ 

l'utilisation des transformations de Fourier nous donne la solution suivante :

$$F(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \exp\left(-\frac{\|x-y\|}{4t}\right) dy.$$

Si le temps  $t=t_0$  est suffisamment grand, on peut obtenir une fonction  $F(.,t_0)$  qui possède un seul minimiseur. Sa position en général est différente de celui de la fonction objectif. Le minimiseur unique de  $F(.,t_0)$  sera utilisé comme un point de départ dans une autre minimisation de f. Cette procédure est ainsi répétée pour  $t_1=t_0-\delta t, t_2=t_0-2\delta t, ...$  où  $\delta t$  est un petit intervalle de temps.

La Figure 2.2 illustre l'effet de la transformation de diffusion sur la fonction déjà vue dans la figure (2.1), avec des valeurs différentes de t:

Dans la référence [8], une approche similaire a été proposée en utilisant la transformation suivante :

$$p(x) = c_{\Lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{f(y)}{\kappa_B T}\right) \exp\left(-\|\Lambda^{-1}(x-y)\|^2\right) dy,$$

avec  $\kappa_B$  la constante de Boltzmann, T la température,  $\Lambda$  une constante et  $c_\Lambda$  un facteur tel que

$$c_{\Lambda} \int \exp\left(-\|\Lambda^{-1}(x-y)\|^{2}\right) dy = 1.$$

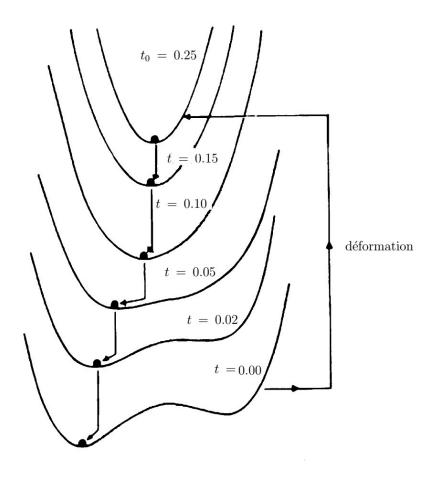


FIGURE 2.2 – Ulustration de la transformation de diffusion.

## 2.2.2 La transformation gaussienne

Un problème crucial de la méthode de la fonction de diffusion est le calcul de l'intégrale multiple. Une transformation similaire dite transformation gaussienne a été proposée par J. Moré et coll. [38]. Elle possède des propriétés intéressantes et l'intégrale multiple peut être calculée pour certaines classes particulières de fonctions rencontrées en pratique.

**Définition 2.1.** On appelle transformation gaussienne  $\langle f \rangle_{\lambda}$  d'une fonction f la fonction définie comme suit :

$$\langle f \rangle_{\lambda}(x) = \frac{1}{(\pi)^{\frac{n}{2}} \lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \exp\left(-\frac{\|x - y\|}{\lambda^2}\right) dy.$$
 (2.1)

Cette transformation possède quelques propriétés intéressantes comme il est indiqué dans le théorème suivant :

**Théorème 2.1** ([38]). Soit f une fonction définie de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}$ .

• Si f est continue presque partout et telle que

$$|f(x)| \le \beta_1 \exp(\beta_2 ||x||), \tag{2.2}$$

où  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont deux constantes positives, alors  $\langle f \rangle_{\lambda}$  est continue.

- Pour tout scalaire  $\alpha$  on  $a : \langle \alpha f \rangle_{\lambda} = \alpha \langle f \rangle_{\lambda}$ .
- Pour deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$ , on a  $\langle f_1 + f_2 \rangle_{\lambda} = \langle f_1 \rangle_{\lambda} + \langle f_2 \rangle_{\lambda}$ .
- Si f est convexe alors  $\langle f \rangle_{\lambda}$  est convexe.
- Si f est deux fois continûment différentiable et pour certaines constantes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  on a :

$$|\nabla^2 f(x)| \le \gamma_1 \exp(\gamma_2 ||x||), \tag{2.3}$$

alors:

$$\langle \nabla f \rangle_{\lambda}(x) = \nabla \langle f \rangle_{\lambda} \qquad et \qquad \langle \nabla^2 f \rangle_{\lambda} = \nabla^2 \langle f \rangle_{\lambda}.$$

L'avantage de la transformée gaussienne est qu'il existe certaines classes de fonctions pour lesquelles on peut calculer l'intégrale comme nous allons voir dans la proposition suivante :

Proposition 2.1 ([38]). • Si f peut être écrite sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} f_{k,j}(x_j),$$

alors:

$$\langle f \rangle_{\lambda} = \sum_{k=1}^{m} \left( \prod_{j=1}^{n} \langle f_{k,j} \rangle_{\lambda}(x_j) \right).$$

• Si f est une fonction quadratique, c-à-d elle peut être écrite sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x$$

avec Q une matrice et  $c \in \mathbb{R}^n$ , alors :

$$\langle f \rangle_{\lambda}(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + \frac{1}{4} \lambda^2 \left( \sum_{i=1}^n q_{i,i} \right).$$

•  $Si\ f(x) = x^k\ alors$ 

$$\langle f \rangle_{\lambda}(x) = \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \left( \frac{k!}{(k-2l)!l!} \right) \left( \frac{\lambda}{2} \right)^{2l} x^{k-2l}.$$

## 2.2.3 Procédure d'optimisation

La transformation gaussienne, comme celle de diffusion, déforme la fonction objectif pour construire une suite de fonctions progressivement moins régulière lorsque  $\lambda$  tend vers zéro. Cela nous conduit à la procédure de minimisation suivante :

#### Algorithme 1:

début

1 – Choisissez une suite  $\{\lambda_k : k = 0, ..., m\}$  telle que

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m = 0$$

- Choisissez un point de départ  $x_{\lambda_0}$ .
- 2- Pour k = 0, 1, ..., m:

Démarrer de  $x_{\lambda_k}$  et résoudre le problème suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle f \rangle_{\lambda_k}(x),$$

pour trouver un minimiseur  $x_{\lambda_{k+1}}$ .

Dans les résultats suivants [38], nous allons voir que si la suite  $\{\lambda_k\}$  tend vers 0, la suites des minimiseurs globaux de  $\langle f \rangle_{\lambda_k}$  converge vers un minimiseur global de f.

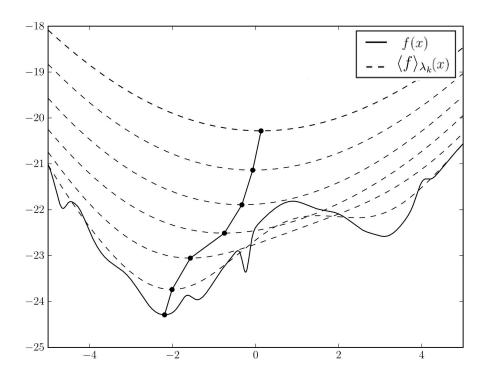


FIGURE 2.3 – Illustration de l'algorithme qui utilise la transformation gaussienne.

**Lemme 2.1.** Supposons que f est continue et satisfait (2.2). Si  $\{x_k\}$  converge vers  $x_*$  et  $\{\lambda_k\}$  converge vers 0, alors :

$$\lim_{k \to +\infty} \langle f \rangle_{\lambda_k}(x_k) = f(x_*).$$

**Théorème 2.2.** Supposons que f est continue et satisfait (2.2). Soit  $\{\lambda_k\}$  une suite qui converge vers 0. Si  $x_k$  est un minimiseur global de  $\langle f \rangle_{\lambda_k}$  et  $\{x_k\}$  converge vers  $x_*$ , alors  $x_*$  est un minimiseur global de f.

Démonstration. Puisque  $x_k$  est un minimiseur global de  $\langle f \rangle_{\lambda_k}$ , on a

$$\langle f \rangle_{\lambda_k}(x_k) \le \langle f \rangle_{\lambda_k}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

D'après le lemme précédent on déduit que

$$f(x_*) \le f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque 2.1. Ce type de méthodes peut manquer un minimum qui se trouve dans une région étroite et profonde, mais elles sont susceptibles de converger vers un minimum qui possède des bassins assez larges. (figure 2.4).

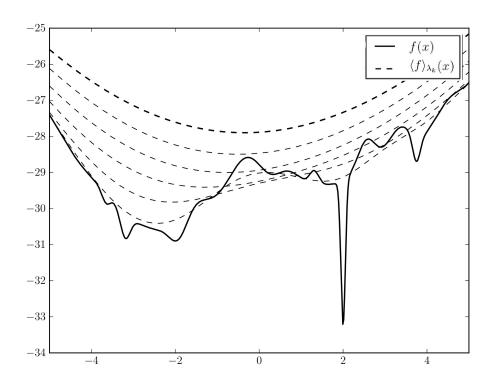


FIGURE 2.4 – Illustration de l'algorithme qui utilise la transformation gaussienne pour une fonction qui possède un minimum global dans une région étroite et profonde.

Remarque 2.2. Pour garantir la convergence de ce type de méthodes, on a besoin à chaque étape de l'algorithme de chercher des minima globaux des fonctions régularisées.

Remarque 2.3. Bien qu'il existe des méthodes numériques pour calculer des intégrales multidimensionnelles, leurs exécutions à chaque itération de l'algorithme rend l'approche de diffusion relativement inefficace.

## 2.3 La méthode de l'indicateur de relief

On considère le problème (P) avec  $\mathbb{X}$  un compact défini comme suit :

$$X = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \le 0, \ i = 1, ..., m \},$$
(2.4)

où f(x),  $g_i(x)$ , i = 1, ..., m sont des fonctions continues.

On suppose de plus l'hypothèse suivante :

$$\min\left\{f(x)|x\in\mathbb{X}\right\} = \min\left\{f(x)|x\in\operatorname{int}(\mathbb{X})\right\},\tag{2.5}$$

et pour  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}} - \{-\infty\}$ , on définit la fonction suivante :

$$F_{\alpha}(x) = \sup \{ f(x) - \alpha, g_1(x), ..., g_m(x) \}.$$
 (2.6)

On a alors le résultat suivant :

**Proposition 2.2.** Sous l'hypothèse (2.5), on a :

$$\alpha = \min_{x \in \mathbb{X}} f(x) \Leftrightarrow 0 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} F_{\alpha}(x). \tag{2.7}$$

En vertu de cette proposition, le problème (P) peut être réduit à la minimisation sans contraintes de la fonction  $F_{\alpha}$  dont le minimum est égal à zéro. De plus, si on trouve un point  $x_0$  tel que  $F_{\alpha}(x_0) < 0$ , alors ce point est faisable et vérifie  $f(x_0) < \alpha$ . Cependant, la recherche du minimum global de  $F_{\alpha}$  peut être aussi difficile que la résolution du problème initial. La méthode de l'indicateur de relief est basée sur une fonction auxiliaire de type d.c, relativement facile à minimiser et qui pourrait essentiellement jouer le même rôle que  $F_{\alpha}$  [55].

# 2.3.1 Notion de séparateur

Pour  $\alpha \in \mathbb{R} - \{-\infty\}$ , on considère les deux ensembles suivants :

$$S_{\alpha} = \{ x \in \mathbb{X} : f(x) < \alpha \}$$

et

$$\tilde{S}_{\alpha} = \{ x \in \mathbb{X} : f(x) \le \alpha \}.$$

Pour rendre notre problème traitable, supposons qu'une fonction  $r(\alpha, .)$ , dite séparateur de f sur  $\mathbb{X}$  est disponible.

**Définition 2.2.** Une fonction semi-continue inférieurement  $r(\alpha, .)$ , définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles, est dite séparateur pour la fonction f sur  $\mathbb{X}$  si elle satisfait les conditions suivantes :

- (i)  $r(\alpha, x) = 0, \quad \forall x \in \tilde{S}_{\alpha}.$
- (ii)  $0 < r(\alpha, y) \le d(y, \tilde{S}_{\alpha}) \triangleq \min\{\|x y\| : x \in \tilde{S}_{\alpha}\}, \quad \forall y \notin \tilde{S}_{\alpha}.$
- (iii) Pour x fixé,  $r(\alpha_1, x) \ge r(\alpha_2, x)$  pour  $\alpha_1 < \alpha_2$ .

#### Exemple 1:

Soit  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  une fonction deux fois continûment différentiable dont la dérivée seconde est bornée, c-à-d, il existe une constante M>0 telle que

$$|f''(x)| \le M, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pour tous  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , posons

$$\rho(\alpha, x) = \begin{cases} -\frac{1}{M} \left[ |f'(x)| + \sqrt{|f'(x)|^2 + 2M(f(x) - \alpha)} \right] & \text{si} \quad f(x) > \alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
 (2.8)

Un séparateur pour f sur l'ensemble  $D = \{x \in \mathbb{R} : |x| \le c\}$  est donné par

$$r(\alpha, x) = \max\left\{\rho(\alpha, x), |x| - c\right\}. \tag{2.9}$$

#### Exemple 2:

Soient  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  et  $\mathbb{X}$  un compact défini par (2.4), avec  $f, g_1, g_2, ...., g_m$  des fonctions lipschitzienne de constantes de Lipschitz, respectivement,  $L, L_1, L_2, ...., L_m$ , alors un séparateur pour f sur l'ensemble  $\mathbb{X}$  est donné par :

$$r(\alpha, x) = \max \left\{ 0, \ \frac{f(x) - \alpha}{L}, \ \frac{g_i(x)}{L_i}, \ i = 1, ..., m \right\}.$$

#### Exemple 3:

On considère l'ensemble  $\mathbb{X}$  défini par (2.4). Supposons que f est Hölderienne d'exposant  $\frac{1}{\beta}(\beta > 1)$  et de constante  $L_0$ , et chaque  $g_i$  est Hölderienne d'exposant  $\frac{1}{\beta_i}(\beta_i > 1)$  et de constante  $L_i$ , pour i = 1, ..., m. Ce qui signifie que  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  nous avons :

$$|f(x) - f(y)| \le L_0 ||x - y||^{\frac{1}{\beta}};$$
  
 $|g_i(x) - g_i(y)| \le L_i ||x - y||^{\frac{1}{\beta_i}} \quad i = 1, 2, ..., m.$ 

alors la fonction définie par l'expression suivante :

$$r(\alpha, x) = \max \left\{ \left[ \max \left( 0, \frac{f(x) - \alpha}{L_0} \right) \right]^{\beta}, \left[ \max \left( 0, \frac{g_i(x)}{L_i} \right) \right]^{\beta_i}, \quad i = 1, 2, ..., m \right\},$$

est un séparateur pour f sur  $\mathbb{X}$ .

# 2.3.2 Critère d'optimalité globale

Pour  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}} - \{-\infty\}$ , on définit la fonction suivante :

$$\varphi_{\alpha}(x) = h_{\alpha}(x) - ||x||^2, \tag{2.10}$$

avec

$$h_{\alpha}(x) = \sup_{v \notin S_{\alpha}} \left\{ 2vx + r^{2}(\alpha, v) - ||v||^{2} \right\}.$$
 (2.11)

Lemme 2.2. On a les assertions suivantes :

1-  $Si \ x \notin \tilde{S}_{\alpha}$ , alors

$$\varphi_{\alpha}(x) > 0.$$

2-  $Si \ x \in \tilde{S}_{\alpha}$ , alors

$$\varphi_{\alpha}(x) = -\inf\left\{ \|x - v\|^2 \mid v \notin S_{\alpha} \right\}.$$

3- Pour tout  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$  vérifiant  $\tilde{S}_{\alpha} \neq \emptyset$ , on a

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_{\alpha}(x) < 0.$$

4- Pour tout  $x \in \mathbb{X}$  et  $\alpha = f(x)$ , on a:

$$\varphi_{\alpha}(x) = 0.$$

La preuve de ce lemme est donnée dans [55].

**Théorème 2.3.** Soit  $\tilde{x} \in \mathbb{X}$  et supposons que :  $\tilde{\alpha} = f(\tilde{x})$ .

1- Si

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_{\tilde{\alpha}}(x) < 0, \tag{2.12}$$

alors,  $x \in \mathbb{X}$  et  $f(x) < \tilde{\alpha}$  pour tout x vérifiant  $\varphi_{\tilde{\alpha}}(x) < 0$ .

2-  $Si \tilde{x}$  est un minimiseur global de (P), alors

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_{\tilde{\alpha}}(x) = 0. \tag{2.13}$$

3- Sous l'hypothèse (2.5), tous les  $\tilde{x}$  vérifiant (2.13) sont des solutions globales du problème (P).

Démonstration.

Dû au Lemme 2.2, tout  $x \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $\varphi_{\tilde{\alpha}}(x) < 0$  doit être dans  $S_{\tilde{\alpha}}$ . Cela démontre le résultat 1 d'après la définition de  $S_{\tilde{\alpha}}$ .

En utilisant le résultat 1 qui précède et le Lemme 2.2, on voit que la condition (2.13) est nécessaire pour l'optimalité globale de  $\tilde{x}$ , c-à-d, on a le résultat 2.

Pour démontrer le résultat 3, on suppose que  $\tilde{x}$  satisfait (2.13) sans être une solution optimale du problème (P). Alors, en utilisant la condition (2.5), il est clair qu'il existe un point  $x' \in \text{int}(\mathbb{X})$  vérifiant  $f(x') < \tilde{\alpha}$ . Puisque la fonction f est continue, alors  $x' \in \text{int}(S_{\tilde{\alpha}})$ . Ce qui implique d'après Lemme 2.2 que

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_{\tilde{\alpha}}(x) \le \varphi_{\tilde{\alpha}}(x') = -\inf_{v \notin S_{\tilde{\alpha}}} ||x' - v|| < 0,$$

c-à-d,  $\tilde{x}$  ne satisfait pas (2.13), ce qui est une contradiction.

## 2.3.3 Description de la méthode

La fonction  $\varphi_{\alpha}$  est appelée "fonction indicateur de relief". C'est une fonction d.c [56] et d'après Théorème 2.3 et sous l'hypothèse (2.5), on a la relation suivante :

$$\alpha = \min_{x \in \mathbb{X}} f(x) \Leftrightarrow 0 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_{\alpha}(x).$$

Ce qui permet de remplacer le problème (P) par le problème d.c, paramétrique rt sans contraintes, suivant :

Chercher 
$$\alpha$$
 tel que  $0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_{\alpha}(x)$ .

Supposons que  $S_{\alpha} \neq \emptyset$ , une procédure itérative d'optimisation pour résoudre (P) peut être donnée comme suit :

#### Algorithme 2:

#### début

Chercher un point faisable  $x_1$ .

k = 1

#### Itération k:

Résoudre le problème auxiliaire suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_{\alpha_k}(x) \qquad (P_k)$$

où  $\alpha_k = f(x_k)$ .

Supposons que  $x_{k+1}$  est une solution optimale du problème  $(P_k)$ .

#### Test d'arrêt:

```
si \varphi_{\alpha_k}(x_{k+1}) = 0 alors

| arrêter, x_k est une solution optimale du problème (P).

sinon

| \alpha_{k+1} = f(x_{k+1}),

| k \leftarrow k + 1.
```

On a le théorème de convergence suivant [26, 55] :

**Théorème 2.4.** Avec l'hypothèse (2.5), si l'algorithme 2 est infini, alors tout point d'accumulation  $\hat{x}$  de la suite  $\{x_k\}$  est une solution optimale du problème (P).

Remarque 2.4. La mise en œuvre du procédé de l'indicateur de relief décrite cidessus possède les difficultés suivantes :

- L'expression de  $\varphi_{\alpha}$  nécessite des approximations convenables.
- Sauf dans des cas particuliers, le sous-problème  $(P_k)$  ne peut pas être résolu exactement en un nombre fini d'étapes. Par conséquent, dans la pratique, il faut remplacer  $(P_k)$  par un problème approché  $(Q_k)$ , qui peut être résolu par un algorithme fini.
- Le recherche du point initial faisable peut être une tâche ardue.

Une possibilité pour remédier à ces difficultés est la suivante [26] : On remplace le problème  $(P_k)$  par un problème de la forme

$$(Q_k) \begin{cases} \min \left( h^k(x) - ||x||^2 \right) \\ s.c \\ x \in S, \end{cases}$$
 (2.14)

où S est un polytope convenable, et  $h^k(x)$  une fonction convexe polyedrale convenable qui sous-estime  $h_{\alpha_k}(x)$ .

Puisque min  $\{\varphi_{\alpha_k}(x): x \in \mathbb{R}^n\}$  est atteint dans  $\mathbb{X}$ , il suffit de choisir n'importe quel polytope S qui contient  $\mathbb{X}$ .

En s'inspirant de la forme (2.11) de  $h_{\alpha}(x)$ , on peut prendre

$$h^{k}(x) = \sup_{i=1,2,\dots,k} \left\{ 2x_{i}x + r^{2}(\alpha_{i}, x_{i}) - ||x_{i}||^{2} \right\},$$
 (2.15)

où  $\alpha_i$  est la plus petite valeur de f aux points faisables évalués jusqu'à l'itération i, et  $x_{i+1} (i \ge 1)$  une solution optimale du problème  $(Q_i)$ .

Par définition de  $\alpha_i$  dans (2.15), on doit avoir  $\alpha_i \leq f(x_i)$  quand  $x_i \in \mathbb{X}$ . Donc,  $x_i \notin S_{\alpha_i}$  pour i = 1, 2, ..., k.

Puisque  $r(\alpha_i, x) \leq r(\alpha_k, x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , et i = 1, 2, ..., k et d'après (2.11) et (2.15), on a pour tout x

$$h^{k}(x) \le \sup_{v \notin S_{\alpha_{k}}} \left\{ 2vx + r^{2}(\alpha_{k}, v) - ||v||^{2} \right\} = h_{\alpha_{k}}(x),$$

c-à-d, les fonctions  $h^k(x)$  définies par (2.15) sont des fonctions sous-estimateurs des fonctions  $h_{\alpha_k}(x)$ .

De plus,  $h^k(x)$  sont des fonctions convexes polyedrales, puisque

$$h^{k}(x) = \max \{l^{i}(x)/i = 1, ..., k\},\$$

avec

$$l^{i}(x) = 2x_{i}x + r_{\alpha_{i}}^{2}(x_{i}) - ||x_{i}||^{2}.$$

Alors, le problème  $(Q_k)$  est équivalent à

$$(\bar{Q}_k) \begin{cases} \min(t - ||x||^2) \\ x \in S \\ l^i(x) \le t, (i = 1, ..., k). \end{cases}$$
 (2.16)

Ainsi, nous avons remplacé le problème d.c. sans contraintes  $(P_k)$  par le problème de minimisation concave  $(\bar{Q}_k)$  avec une fonction objectif quadratique et des contraintes linéaires.

Pour résoudre ce problème, on peut voir [26] où plusieurs algorithmes finis sont proposés.

D'après Lemme 2.2 et du fait que  $h^k(x) \leq h_{\alpha_k}(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , la valeur optimale de la fonction objectif de  $(\bar{Q}_k)$  n'est pas positive. De plus, si cette valeur est nulle, ont doit avoir

$$0 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_{\alpha_k}(x),$$

et d'après Théorème 2.3 , on a  $\alpha_k = \min f(\mathbb{X})$  et chaque point  $\bar{x}_k \in \mathbb{X}$  vérifiant  $f(x_k) = \alpha_k$  est une solution de problème (P).

Cependant, si  $h^k(x_{k+1}) - ||x_{k+1}||^2 < 0$ , il n'est pas garanti que  $f(x_{k+1}) < \alpha_k$ .

Pour cette raison, on pose  $\alpha_{k+1} = \alpha_k$  si  $x_{k+1} \notin X$ .

Quand la solution  $x_{k+1}$  de  $(\bar{Q}_k)$  est faisable, on peut faire appel à une procédure d'optimisation locale qui va prendre  $x_{k+1}$  comme point de départ pour arrive à un point faisable  $\bar{x}_{k+1}$  vérifiant  $f(\bar{x}_{k+1}) < f(x_{k+1})$ . Dans ce cas, on pose  $\alpha_{k+1} = \min \{\alpha_k, f(\bar{x}_{k+1})\}.$ 

Une approximation de la méthode de l'indicateur de relief peut être décrit comme suit [26] :

# Algorithme (méthode de l'indicateur de relief approchée)

#### Initialisation

Construire un polytope  $S \supset \mathbb{X}$  et choisir  $x_1 \in S$ .

Si on n'a pas de points faisables, poser  $\alpha_0 = \infty$ .

S'il y a des points faisables qui sont connus, poser  $\alpha_0$  égal à la plus petite valeur de f pour ces points.

#### Itération $k = 1, 2, \dots$ :

**k.1.** : Si  $x_k \in \mathbb{X}$ , alors on utiliser une procédure d'optimisation locale qui débute par  $x_k$  pour trouver un point  $\bar{x}_k \in \mathbb{X}$  vérifiant  $f(\bar{x}_k) < f(x_k)$ .

Poser  $\alpha_k = \min \{ \alpha_{k-1}, f(\bar{x}_k) \}.$ 

Si  $x_k \notin \mathbb{X}$ , poser  $\alpha_k = \alpha_{k-1}$ .

Noter par  $\tilde{x}_k$  le meilleur point faisable connu, c-à-d, on a  $f(\tilde{x}_k) = \alpha_k$ .

**k.2.** : Poser

$$l^{k}(x) = 2x_{k}x + r^{2}(\alpha_{k}, x_{k}) - ||x_{k}||^{2}$$

et résoudre le problème

$$(\bar{Q}_k) \begin{cases} \min(t - ||x||^2) \\ x \in S \\ l^i(x) \le t, (i = 1, ..., k). \end{cases}$$
 (2.17)

Soit  $(x_{k+1}, t_{k+1})$  une solution optimale de  $(\bar{Q}_k)$ . Si

$$t_{k+1} - ||x_{k+1}||^2 = 0,$$

alors, arrêter :  $\tilde{x}_k$  est une solution optimale de (P), et  $\alpha_k = f(\bar{x}_k) = \min f(\mathbb{X})$ . Sinon  $(t_{k+1} - ||x_{k+1}||^2 < 0)$ , aller à l'itération k+1.

Pour la preuve de convergence de ce dernier algorithme, il suffit de voir les références [26, 55].

# 2.4 Les méthodes qui utilisent des fonctions minorantes de la fonction objectif

### 2.4.1 Les méthodes de recouvrement

Les méthodes de recouvrement sont très utilisées en optimisation globale [11, 26, 47, 69]. Leur intérêt réside dans le fait qu'elles utilisent une hypothèse satisfaite par la plupart des problèmes rencontrés dans la pratique. Ils s'agit de supposer que la fonction objectif est à taux de variation borné. Elles sont appelées les méthodes de recouvrement, car elles génèrent des suites de points contenues dans des sous-domaines dont l'union couvre le domaine faisable. Le principe de ce type de méthodes est le suivant :

On considère le problème (P) et on définit ce qu'on appelle un record par :

$$R_k = \min \{ f(x_1), ..., f(x_k) \} = f(x_k^*),$$

où les  $x_i$ , i = 1, ..., k sont des points du domaine faisable et le point  $x_k^*$  est appelé point record.

Définissons l'ensemble suivant :

$$O_k = \{x \in \mathbb{R}^n : R_k - \varepsilon \le f(x)\}.$$

Il est évident que :

$$R_k - \varepsilon \le \min_{x \in O_k} f(x).$$

D'où

$$\min_{x \in \mathbb{X}} f(x) = \min_{x \in \mathbb{X} \setminus O_k} f(x) \qquad si \qquad \mathbb{X} \neq O_k.$$

Par conséquent, les éléments de  $O_k$  ne représentent pas d'intérêt pour la recherche du minimum global et donc ils peuvent être omis de l'espace faisable. On continue la recherche, et si on obtient un nouveau record  $R_{k+1}$  tel que  $R_{k+1} < R_k$ , un ensemble  $O_{k+1}$  plus grand peut à son tour être omis de l'ensemble faisable. Lorsqu'on arrive à un entier k tel que

$$\mathbb{X} \subset \bigcup_{k} O_{k},\tag{2.18}$$

la valeur  $R_k$  sera un minimum global approché de f sur  $\mathbb{X}$ . Ainsi, le problème de minimisation est ramené à la construction d'une suite de points  $x_1, ..., x_k$  vérifiant (2.18).

Parmi les méthodes de recouvrement, il existe celles qui utilisent des fonctions auxiliaires minorantes de fonction objectif (des fonctions sous-estimateurs). L'idée commune dans ce type de méthodes est de construire une suite croissante de fonctions  $F_k$ , minorantes de la fonction objectif et de façon que les minima globaux des éléments de cette suite convergent vers un minimum global de la fonction objectif. Le recouvrement de l'ensemble faisable est constitué de la famille d'ensembles suivants :

$$O_k = \{ x \in \mathbb{R}^n : F_k(x) \ge f_k^* - \varepsilon \},\,$$

où  $f_k^*$  est le record à l'itération k de l'algorithme.

La procédure générale de ce type de méthodes est donnée par l'algorithme suivant :

#### Algorithme 3:

```
début

Choisissez: x_1 \in \mathbb{X}, \varepsilon > 0.

Construire une fonction minorante F_1.

Poser k = 1, x_{\varepsilon} = x_1, f_{\varepsilon} = f(x_{\varepsilon}), F_{\varepsilon} = F_1(x_{\varepsilon}).

tant que (f_{\varepsilon} - F_{\varepsilon} > \varepsilon) faire

Déterminer x_{k+1} \in \arg\min_{x \in \mathbb{X}} F_k(x).

si (f(x_{k+1}) < f_{\varepsilon}) alors

\sqsubseteq \operatorname{Poser} x_{\varepsilon} = x_{k+1} \text{ et } f_{\varepsilon} = f(x_{k+1}).

Construire F_{k+1} à partir de F_k.

Poser : F_{\varepsilon} = \min_{x \in \mathbb{X}} F_{k+1}(x).

Poser k = k + 1.
```

On a le théorème de convergence suivant :

**Théorème 2.5.** Pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'algorithme 3 converge vers un minimum global  $\varepsilon$ -approché de f en un nombre fini d'itérations.

Démonstration.

Désignons par m le minimum global exact de f et par  $f_{\varepsilon}$  la meilleure solution obtenue par l'algorithme 3, montrons que :

$$f_{\varepsilon} - m < \varepsilon$$
.

Supposons que l'algorithme a atteint le minimum global  $f_{\varepsilon}$  avec une précision  $\varepsilon$  après k points d'évaluations  $x_1, x_2, ..., x_k$ . On a donc :

$$f_{\varepsilon} = \min\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_k)\},\$$

et:

$$f_{\varepsilon} - \min_{x \in \mathbb{X}} F_k(x) \le \varepsilon.$$

Puisque:

$$F_k(x) \le f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{X},$$

alors:

$$\min_{x \in \mathbb{X}} F_k(x) \le m \le f_{\varepsilon},$$

et par conséquent :

$$f_{\varepsilon} - m \le f_{\varepsilon} - \min_{x \in \mathbb{X}} F_k(x) \le \varepsilon.$$

Selon les propriétés liées à la fonction objectif, plusieurs fonctions sous-estimateurs ont été développées. Dans les paragraphes suivants on donne quelques exemples.

#### Sous-estimateur de Piyavskii

Dans le cas unidimensionnel, la méthode la plus connue est celle de Piyavskii [47, 48]. Elle consiste à construire des fonctions minorantes  $F_k$  de la façon suivante : Supposons que la fonction objectif f est lipschitzienne de constante L sur un intervalle [a,b], alors :

$$\forall x, y \in [a, b] : f(x) \ge f(y) - L|x - y|.$$

Donc pour y fixé, la fonction F(x) = f(y) - L|x-y| est un sous estimateur de f sur [a,b] .

La suite de points  $\{x_k\}$  de l'algorithme de Piyavskii est générée comme suit :

textbf

On pose:

$$F_1(x) = f(x_1) - L|x - x_1|, (2.19)$$

où  $x_1$  est un point quelconque de [a, b].

Le point suivant est défini par :

$$x_2 \in \arg\min_{x \in [a,b]} F_1(x).$$

Si on remplace  $x_1$  par  $x_2$  dans (2.19), on obtient aussi une nouvelle fonction minorante de f. Un meilleur sous-estimateur peut être obtenu en posant :

$$F_2(x) = \max_{i=1,2} \{ f(x_i) - L|x - x_i| \}.$$

Le troisième point  $x_3$  est déterminé par :

$$x_3 \in \arg\min_{x \in [a,b]} F_2(x).$$

A l'étape k, on prend

$$F_k(x) = \max_{i=1,\dots,k} \left\{ f(x_i) - L|x - x_i| \right\}, \tag{2.20}$$

et

$$x_k \in \arg\min_{x \in [a,b]} F_k(x). \tag{2.21}$$

Soit  $\Omega_k = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$  l'ensemble de points générés par l'algorithme tel que  $x_1 < x_2 < ... < x_k$ . Sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}], i = 1, ..., k-1$ , la fonction sous-estimateur prend la forme d'une dent de scie et son minimiseur sur cet intervalle est

$$\overline{x} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{2L},$$

avec

$$f(\overline{x}) = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} - L\frac{x_{i+1} - x_i}{2}.$$

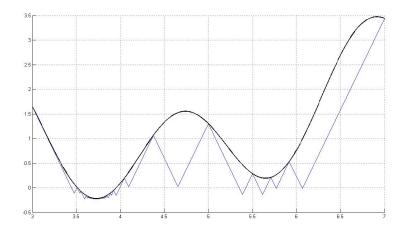


FIGURE 2.5 – Le sous-estimateur généré par l'algorithme de Piyavskii pour la fonction définie par  $f(x) = \sin(x) + \sin(3x) + \ln(x)$  avec L = 3.7 après un certain nombre itérations.

#### Sous-estimateur parabolique par morceaux

En utilisant un résultat de Brent [5], on peut donner une modification de l'algorithme de Piyavskii. Elle s'applique aux fonctions d'une seule variable, deux fois continûment différentiables avec la dérivée seconde bornée. L'idée consiste à construire une suite croissante de fonctions  $\{\varphi_k\}$  paraboliques par morceaux sur l'intervalle [a, b], en se basant sur le résultat suivant :

Théorème 2.6. Soit f une fonction à une seule variable deux fois continûment différentiable telle que

$$|f''(x)| \le M, \quad \forall x \in [a, b]. \tag{2.22}$$

On a  $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$  vérifiant  $x_1 < x_2$ , la parabole  $\varphi(x)$  définie par :

$$\begin{cases} \varphi''(x) = M, \forall x \in [a, b] \\ \varphi(x_1) = f(x_1) \\ \varphi(x_2) = f(x_2) \end{cases}$$

est un sous estimateur de f sur  $[x_1, x_2]$ .

Comme conséquence de ce théorème, si f est évaluée aux points  $a=x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k = b$  de [a,b], on peut construire une fonction parabolique par morceaux sur [a,b]. En effet, à partir de chaque couple  $(x_j,x_{j+1})$  de points successifs, on construit une parabole notée  $\varphi_{[x_j,x_{j+1}]}$  définie sur l'intervalle  $[x_j,x_{j+1}]$  et ceci pour j=0,...,k-1. Ensuite on définit la fonction  $F_k$  par :

$$F_k(x): [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
  
 $x \longrightarrow \varphi_{[x_j,x_{j+1}]}(x) \quad \text{si} \quad x \in [x_j,x_{j+1}].$ 

 $F_k$  est une fonction parabolique par morceaux, elle sera notée par :

$$F_k(x) = \left[\varphi_{[a,x_1]}, \varphi_{[x_1,x_2]}, ..., \varphi_{[x_{k-1},x_k]}\right].$$

Une parabole  $\varphi(x)$ , vérifiant  $\varphi''(x) = M$  et passant par les deux points  $(x_i, f(x_i))$ et  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$  avec  $x_i \neq x_{i+1}$ , est définie comme suit :

$$\varphi(x) = \frac{M}{2}x^2 + \alpha x + \beta,$$

avec 
$$\alpha = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} - \frac{M}{2}(x_i + x_{i+1})$$
 et  $\beta = \frac{x_i f(x_{i+1}) - x_{i+1} f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} + \frac{M}{2} x_i x_{i+1}$ . Elle possède le minimiseur global suivant :

$$x_0 = -\frac{\alpha}{M} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{M(x_i - x_{i+1})} + \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

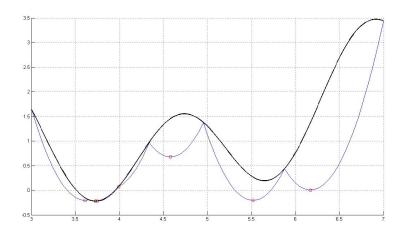


FIGURE 2.6 – Le sous-estimateur parabolique par morceaux pour la fonction définie par f(x) = $\sin(x) + \sin(3x) + \ln(x)$  avec M = 10 après un certain nombre itérations.

#### Sous-estimateur de Gergel

Dans [17], Gergel a proposé une fonction sous-estimateur en utilisant le théorème de Taylor. Précisément, il a utilisé la fonction auxiliaire  $F_k$  définie comme suit :

Pour f évaluée aux points  $a = x_0 < x_1 < x_2 <, ..., < x_k = b$  de [a, b]

$$F_k(x) = \left[\phi_{[a,x_1]}, \phi_{[x_1,x_2]}, ..., \phi_{[x_{k-1},b]}\right],$$

avec

$$\phi_{[x_{i-1},x_i]}(x) = max\{\phi_{i-1}(x),\phi_i(x)\}$$
 si  $x \in [x_{i-1},x_i]$ 

et

• 
$$\phi_{i-1}(x) = f(x_{i-1}) + f'(x_{i-1})(x - x_{i-1}) - \frac{M}{2}(x - x_{i-1})^2$$
.

• 
$$\phi_i(x) = f(x_i) - f'(x_i)(x_i - x) - \frac{M}{2}(x_i - x)^2$$
.

ullet M une constante telle que :

$$|f'(x) - f'(y)| \le M|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b].$$
 (2.23)

La fonction  $\phi_{[x_{i-1},x_i]}$  atteint son minimum au point suivant :

$$x_i^g = \frac{-f(x_i) + f(x_{i-1}) + f'(x_i)x_i - f'(x_{i-1})x_{i-1} + \frac{M}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2)}{M(x_i - x_{i-1}) + f'(x_i) - f'(x_{i-1})}.$$

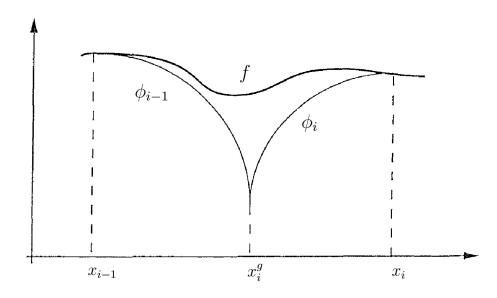


FIGURE 2.7 – Sous estimateur de Gergel.

#### Sous-estimateur de Sergeyev

En se basant sur l'idée de Gergel, Sergeyev [54] a construit une fonction sous-estimateur différentiable.

Soit  $I = [x_{i-1}, x_i]$  un sous intervalle de [a, b] et soient  $y_i, y_i'$  deux points de I tels que  $x_{i-1} < y_i' < y_i < x_i$  et vérifiant

$$\begin{cases} \phi_{i-1}(y_i') = \pi_i(y_i') \\ \phi'_{i-1}(y_i') = \pi'_i(y_i') \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \phi_i(y_i) = \pi_i(y_i) \\ \phi'_i(y_i) = \pi'_i(y_i) \end{cases}$$

et  $\pi_i$  est une parabole telle que

$$\pi_i(x) = \frac{M}{2}x^2 + \alpha_i x + \beta_i,$$

avec M est la constante vérifiant (2.23).

La fonction auxiliaire de Sergeyev est de la forme suivante :

$$\Phi_{i}(x) = \begin{cases} \phi_{i-1}(x) & \text{si } x \in [x_{i-1}, y'_{i}) \\ \pi_{i}(x) & \text{si } x \in [y'_{i}, y_{i}) \\ \phi_{i}(x) & \text{si } x \in [y_{i}, x_{i}]. \end{cases}$$

C'est une fonction différentiable qui minore f.

Pour déterminer  $y_i', y_i, \alpha_i, \beta_i$  il faux résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} f(x_{i-1}) + f'(x_{i-1})(y'_i - x_{i-1}) - \frac{M}{2}(y'_i - x_{i-1})^2 = \frac{M}{2}(y'_i)^2 + \alpha_i y'_i + \beta_i. \\ f(x_i) + f'(x_i)(y_i - x_i) - \frac{M}{2}(x_i - y'_i)^2 = \frac{M}{2}y_i^2 + \alpha_i y_i + \beta_i. \\ f'(x_{i-1}) - M(y'_i - x_{i-1}) = My'_i + \alpha_i. \\ f'(x_i) - M(y_i - x_i) = My_i + \alpha_i. \end{cases}$$

On trouve ainsi:

• 
$$y_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{4} + \frac{f'(x_i) - f'(x_{i-1})}{4M} + \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i) + f'(x_{i-1})x_i + \frac{1}{2}M(x_i^2 - x_{i-1}^2)}{M(x_i - x_{i-1}) + f'(x_i) - f'(x_{i-1})}.$$
•  $y_i' = -\frac{x_i - x_{i-1}}{4} - \frac{f'(x_i) - f'(x_{i-1})}{4M} + \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i) + f'(x_{i-1})x_i + \frac{1}{2}M(x_i^2 - x_{i-1}^2)}{M(x_i - x_{i-1}) + f'(x_i) - f'(x_{i-1})}.$ 

• 
$$y'_{i} = -\frac{x_{i} - x_{i-1}}{4} - \frac{f'(x_{i}) - f'(x_{i-1})}{4M} + \frac{f(x_{i-1}) - f(x_{i}) + f'(x_{i-1})x_{i} + \frac{1}{2}M(x_{i}^{2} - x_{i-1}^{2})}{M(x_{i} - x_{i-1}) + f'(x_{i}) - f'(x_{i-1})}$$

$$\bullet \ \alpha_i = f'(x_i) - 2My_i + Mx_i.$$

• 
$$\beta_i = f(x_i) - f'(x_i)x_i - \frac{1}{2}Mx_i^2 + My_i^2$$
.

Pour déterminer le minimiseur  $\overline{x}_i$  de  $\Phi_i$  sur l'intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  on distingue les trois cas suivants:

(i) Si  $\Phi'_{i}(y'_{i}) < 0$  et  $\Phi'_{i}(y_{i}) > 0$  alors :

$$\overline{x}_i = \operatorname{argmin}\{f(x_{i-1}), \Phi_i(\overline{x}_i), f(x_i)\},\$$

avec 
$$\overline{x}_i = 2y_i - \frac{1}{M}f'(x_i) - x_{i-1}$$
.  
(ii) Si  $\Phi'_i(y'_i) \ge 0$  et  $\Phi'_i(y_i) > 0$  alors:

$$\overline{x}_i = \operatorname{argmin}\{f(x_{i-1}), f(x_i)\}$$

(iii) Si  $\Phi'_i(y'_i) < 0$  et  $\Phi'_i(y_i) \le 0$  alors :

$$\overline{x}_i = \operatorname{argmin}\{f(x_{i-1}), f(x_i)\}$$

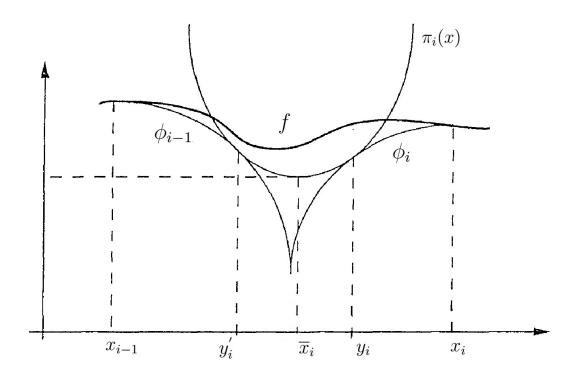


FIGURE 2.8 – Sous estimateur de Sergeyev.

Remarque 2.5. La mise en œuvre des méthodes de recouvrement est assez simple et leur efficacité a été prouvée dans le cas unidimensionnel. Cependant, il a été indiqué dans les différents travaux que l'extension de ces méthodes au cas multidimensionnel est très compliquée et inefficace [4, 36, 46].

# 2.4.2 La méthode de séparation et évaluation (Branch-and-Bound)

La méthode de séparation et évaluation (Branch-and-Bound (B&B) dans la littérature anglo-saxonne) est une approche d'optimisation globale assez générale pour la résolution des problèmes d'optimisation non convexes, et plus particulièrement des problèmes d'optimisation combinatoire.

La procédure de base est composée de deux phases :

1. La phase de séparation consiste à diviser successivement l'ensemble faisable  $\mathbb{X}$  en sous-ensembles  $\mathbb{X}_i$  qui forment une partition. Par conséquent, si on résout

notre problème sur chaque sous domaines  $X_i$  et que l'on prend la meilleure solution trouvée, alors on est assuré d'avoir résolu le problème initial.

2. La phase d'évaluation a pour le but de déterminer l'optimum de ces sous-problèmes. Pour un sous-problème donné, son optimum peut être déterminé lorsque ce problème est facile à résoudre. Néanmoins, en pratique, on rencontre généralement des sous-problèmes qui sont non convexes et très difficiles à résoudre. La procédure la plus utilisée consiste à déterminer des bornes inférieures aux solutions de ces sous problèmes. Dans la majorité des cas nous aurons besoin d'une fonction auxiliaire  $F_i$ , minorante de la fonction objectif, et pour chaque sous-ensemble  $X_i$  on résout le problème de minimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{X}_i} F_i(x). \tag{2.24}$$

Si on arrive à trouver une borne inférieure d'un sous problème qui est supérieure à la meilleure solution faisable trouvée jusqu'à présent (la borne supérieure), on a alors l'assurance que ce sous-ensemble ne contient pas l'optimum. On peut ensuite l'éliminer et sélectionner un autre ensemble parmi les restants pour poursuive la phase de séparation.

Le schéma général de l'algorithme de séparation et évaluation est le suivant :

#### Algorithme 4:

#### début

Poser: k=0,

Choisissez un ensemble  $X_0$  suffisamment grand tel que :  $X \subseteq X_0$ .

Poser :  $\mathcal{L}_0 = \mathbb{X}_0$ 

Déterminer :  $U_0 := \beta(\mathbb{X}_0)$  une borne supérieure.

Déterminer :  $L_0 := \alpha(\mathbb{X}_0)$  une borne inférieure.

tant que  $(U_k - L_k > \varepsilon)$  faire

Supprimer tous les  $X_i$  de  $\mathcal{L}_k$  tels que  $\alpha(X_i) > U_k$ .

Choisissez et subdiviser un élément  $X_i$  de  $\mathcal{L}_k$  avec  $\alpha(X_i) = L_k$ .

Soit  $\mathcal{R}_k$  la subdivision de  $\mathbb{X}_i$ , poser  $\mathcal{L}_{k+1} := (\mathcal{L}_k \backslash \mathbb{X}_i) \cup \mathcal{R}_k$ .

Poser:

$$U_{k+1} := \min_{\mathbb{X}_i \in \mathcal{L}_{k+1}} \beta(\mathbb{X}_i)$$
 et  $L_{k+1} := \min_{\mathbb{X}_i \in \mathcal{L}_{k+1}} \alpha(\mathbb{X}_i)$ .

Poser k = k + 1.

Considérer  $U_k$  comme l'estimation du minimum global de f sur  $\mathbb{X}$ .

Pour la convergence on peut voir [57].

Il existe dans la littérature plusieurs stratégies de subdivision de l'ensemble faisable en sous ensembles de  $\mathbb{R}^n$ , comme par exemple : les simplexes, rectangles,... . Cependant, le choix des fonctions auxiliaire  $F_k$ , utilisées pour déterminer des bornes inférieures reste le problème le plus important.

#### Quelques fonctions sous-estimateurs récentes

Sous-estimateur d'Evtushenko [10]: Récemment, Evtushenko et coll. ont proposés une fonction auxiliaire sous-estimateur en utilisant le développement de Taylor. On note par  $\lambda_{\min}(H(x))$  le minimum des valeurs propres de la matrice hessienne. Si  $\mathbb{X}_i$  est un compact, on pose

$$\lambda_{\min}^{\mathbb{X}_i}(H) := \min_{\xi \in \mathbb{X}_i} \lambda_{\min}(H(\xi)).$$

**Théorème 2.7.** Soit f une fonction deux fois continûment différentiable sur un ensemble compact convexe  $X_i$  et soit  $x_i \in X_i$ . Pour tout  $x \in X_i$ , la fonction

$$F_i(x) = f(x_i) + (x - x_i)^T \nabla f(x) + \frac{\lambda_{min}(H)}{2} ||x_i - x||_2^2,$$

est sous-estimateur de f sur  $X_i$ .

Démonstration.

Pour tous  $x, x_i \in \mathbb{X}_i$  et un certain  $\xi_i \in \mathbb{X}_i$ , le développement de Taylor du premier ordre nous donne

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)^T \nabla f(x_i) + \frac{1}{2} (x - x_i)^T H(\xi_i) (x - x_i)$$

$$= f(x_i) + (x - x_i)^T \nabla f(x_i) + \frac{1}{2} \frac{(x - x_i)^T H(\xi_i) (x - x_i)}{(x - x_i)^T (x - x_i)} (x - x_i)^T (x - x_i)$$

$$\geq f(x_i) + (x - x_i)^T \nabla f(x_i) + \frac{\lambda_{\min} (H(\xi_i))}{2} ||x - x_i||_2^2$$

$$\geq f(x_i) + (x - x_i)^T \nabla f(x_i) + \frac{\lambda_{\min}^{\mathbb{X}_i} (H)}{2} ||x - x_i||_2^2 = F_i(x).$$

où les deux dernières inégalités découlent du fait que le quotient de Rayleigh atteint son minimum avec la plus petite valeur propre.  $\Box$ 

Dans [14], on peut trouver plusieurs possibilités pour déterminer des bornes inférieures de  $\lambda_{\min}^{\mathbb{X}_i}(H)$ .

On donne les notations suivantes :

Soit f une fonction deux fois continûment différentiable sur un ensemble compact convexe  $\mathbb{X}_k$  et soit  $h_{i,j}(\xi)$  les éléments de la matrice hessienne  $H(\xi)$  de f. On note par  $\underline{H} = (\underline{h}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ ,  $\overline{H} = (\overline{h}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  les matrices tels que pour tout  $i, j = 1, \dots, n$ , on a

$$\underline{h}_{i,j} \le h_{i,j}(\xi) \le \overline{h}_{i,j},\tag{2.25}$$

pour tout  $\xi$  dans  $\mathbb{X}_k$ .

Les bornes inférieures et supérieures dans (2.25) peuvent être obtenues, par exemple, en utilisant l'arithmétique par intervalles [19].

**Théorème 2.8.** Soit f une fonction deux fois continûment différentiable sur un domaine compact convexe  $X_k$  et soient  $\underline{h}_{i,j}$  et  $\overline{h}_{i,j}$  et leurs matrices correspondantes  $\underline{H}, \overline{H}$  dans (2.25). Alors,

$$1. \ \lambda_{\min}^{\mathbb{X}_k}(H) \geq \min_i \left[ \underline{h}_{i,i} - \sum_{i \neq j} \max |\underline{h}_{i,j}|, |\overline{h}_{i,j}| \right].$$

2. Si on note par :  $H_M = \frac{H-\overline{H}}{2}$  et par  $\rho$  le rayon spectral de la matrice  $\Delta H = \frac{H+\overline{H}}{2}$ , on a

$$\lambda_{\min}^{\mathbb{X}_k}(H) \ge \lambda_{\min}(H_M) - \rho(\Delta H).$$

3. Si on note par:

$$(\widehat{H_M})_{i,j} = \begin{cases} \underline{h}_{ii} & si : i = j \\ H_{Mij} & si : i \neq j \end{cases} \qquad et \qquad \widehat{\Delta H} = \begin{cases} 0 & si : i = j \\ \Delta H_{ij} & si : i \neq j \end{cases}$$

on a

$$\lambda_{min}^{\mathbb{X}_k}(H) \ge \lambda_{min}\left(\widehat{H}_M\right) - \rho(\widehat{\Delta H}).$$

4.  $\lambda_{\min}^{\mathbb{X}_k}(H) \geq \lambda_{\min}(L)$ , avec  $L = (l_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  est la matrice dont les éléments sont définis comme suit :

$$l_{i,j} = \begin{cases} \frac{\underline{h}_{ii} + \sum_{k \neq i} \frac{\underline{h}_{ik} - \overline{h}_{ik}}{2} & si : i = j \\ \frac{\underline{h}_{ij} - \overline{h}_{ij}}{2} & si : i \neq j \end{cases}.$$

Pour le preuve on peut voir [14].

Sous-estimateurs de Ha Le Thi : Dans les références [30, 42], Ha Le Thi et coll. ont construit des fonctions sous-estimateurs convexes.

Soit I = [a, b] un intervalle de  $\mathbb{R}$  et M une constante vérifiant (2.22). Pour  $x_0, x_1$  deux nombres réels de I tels que  $x_0 < x_1$ , on définit les deux fonctions suivantes :

$$\omega_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & \text{si} \quad x \in [x_0, x_1] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [x_0, x_1]. \end{cases}$$

et

$$\omega_1(x) = \begin{cases} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} & \text{si} \quad x \in [x_0, x_1] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [x_0, x_1]. \end{cases}$$

Dans le cas unidimensionnelle [30], Ha Le Thi et Ouanes ont proposé la fonction sous-estimateur suivante :

$$F(x) = \sum_{i=0}^{i=1} f(x_i)\omega_i(x) - \frac{1}{2}M(x - x_0)(x_1 - x).$$

C'est la différence entre l'interpolation linéaire avec une perturbation concave quadratique.

On considère le pavé suivant :

$$X = \prod_{i=1}^{n} [x_i^0, x_i^1],$$

et soit V(X) l'ensemble de leurs sommets.

Dans la référence [42], Ouanes et coll. ont proposé une fonction sous-estimateur  $\Phi$  que c'est une extension de F dans le cas multidimensionnel et vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) Pour tout  $x \in V(X)$ , on a  $\Phi(x) = f(x)$ .
- (ii) Si pour tout  $x \in \mathbb{X}$  on a :  $\max |f''_{x_i x_i}(x)| \leq M$ , alors :  $\Phi(x) \leq f(x)$ .
- (iii) La fonction  $\Phi$  est convexe si

$$M \ge \max_{x \in \mathbb{X}} \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1,i \neq j} |f''_{x_i x_j}(x)|.$$

Remarque 2.6. Pour les méthodes de type séparation et évaluation, la convergence vers un minimum global est assurée. Cependant, elles sont assez efficaces seulement

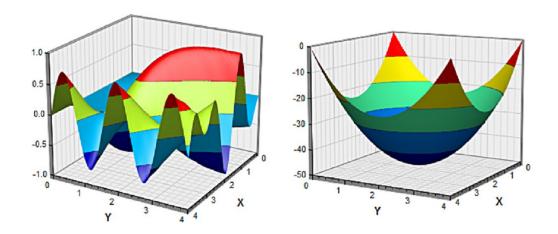


FIGURE 2.9 – Graphes des fonctions f et  $\Phi$  tel que :  $f(x, y) = \sin(x)\sin(xy)$  et M = 10.

pour des problèmes de tailles moyennes. Ceci est dû à la nécessité du stockage d'un nombre important d'informations sur les sous-ensembles générés par ces algorithmes, ainsi qu'à la difficulté liée à leur classement et au choix de l'un d'entre eux pour procéder sa partition.

# 2.5 La méthode de la fonction Tunneling

La méthode de la fonction Tunneling a été proposée pour la première fois par Levy et Montalvo [31]. C'est une méthode qui est basée aussi sur la modification de la fonction objectif. Elle est composée de deux phases qui se succèdent.

La première phase consiste à exécuter un algorithme de minimisation locale afin d'obtenir un minimiseur isolé  $x^*$ , c-à-d :

$$\nabla f(x^*) = 0$$
 et  $y^{\top} \nabla^2 f(x^*) y \ge 0$   $\forall y \in \mathbb{R}^n$ .

La deuxième phase est la procédure de tunneling (percement du tunnel). Elle est utilisée pour déterminer un point de départ pour une nouvelle minimisation de la fonction objectif. Pour obtenir un tel point, Levy et Montalvo ont proposé de chercher un zéro de la fonction T dite du Tunneling définie comme suit :

$$T(x) = \frac{f(x) - f(x^*)}{\prod_{i=1}^k ||x - x_i^*||^{\lambda_i}},$$

où  $x_i^*, i = 1, ..., k$  sont les minimiseurs locaux déjà trouvés, et  $\lambda_i, i = 1, ..., k$  des

paramètres à ajuster.

Cette dernière fonction possède les propriétés suivantes :

- Le terme  $f(x) f(x^*)$  a pour rôle d'éviter les points tels que  $f(x) > f(x^*)$ , qui ne peuvent pas être des minimiseurs globaux.
- Le terme  $\prod_{i=1}^{k} ||x x_i^*||^{\lambda_i}$  permet d'éviter d'obtenir les minimiseurs locaux déjà trouvés.

Dans cette méthode, le choix des paramètres est sans doute très complexe car il nécessite l'utilisation et la maîtrise de beaucoup d'heuristiques. De plus, la résolution de l'équation T(x) = 0 est souvent plus difficile que de minimiser f elle-même.

Dans la référence [64], Yao a étendu cette méthode pour résoudre les problèmes d'optimisation globale avec contraintes. Son extension a permis aussi de remédier partiellement le problème de résolution d'équations non linéaires paramétrés.

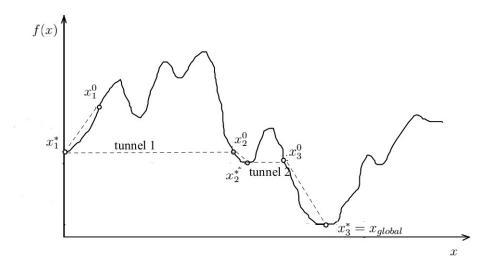


FIGURE 2.10 – Procédure de Tunneling.

## 2.6 La méthode de la fonction Filled

Dans la classe des méthodes d'optimisation globale qui utilisent des fonctions auxiliaires, la méthode de la fonction Filled est la plus étudiée dans la littérature. Elle a été introduite par Renpu dans une conférence en 1983 et son article [50] a été publié en 1990. Dans cette section nous étudions cette méthode avec quelques une de ses variantes.

# 2.6.1 Principe de la méthode de la fonction Filled

Comme la méthode de la fonction de Tunneling, la méthode de la fonction Filled est basée sur des techniques de recherche locale. À partir d'un minimiseur local de la fonction objectif, cette méthode consiste à construire une fonction auxiliaire dont la minimisation atteint un certain point approprié, qui sera utilisé comme un point de départ pour une nouvelle recherche locale du problème initial. Si un meilleur minimiseur local de la fonction objectif est obtenu, une nouvelle fonction auxiliaire est ainsi construite. Ces deux phases de minimisations se succèdent jusqu'à la satisfaction de certaines conditions d'arrêt.

#### Algorithme 5:

```
début
     Choisir un point x_0 de l'ensemble faisable \mathbb{X}.
    Poser k=0.
    Étape 1: À partir de x_k, appliquer une procédure de minimisation sur le problème
    d'optimisation initial dans le but d'obtenir un minimiseur local x_k^*.
    Étape 2: À partir d'un point voisin de x_k^*, appliquer une minimisation locale pour le
    problème:
                                                \begin{cases} \min F(x, x_k^*) \\ x \in \mathbb{X}, \end{cases}
    où F est la fonction Filled.
    Supposons qu'on a obtenu un point \overline{x}.
    si f(\overline{x}) < f(x_k^*) et \overline{x} est faisable alors
         x_{k+1} \longleftarrow \overline{x}.
         k \longleftarrow k + 1.
         Aller a l'étape 1.
    sinon
         si les conditions d'arrêt sont satisfaites alors
          arrêter l'algorithme.
         sinon
           ∟ ajuster les paramètres et aller a l'étape 2.
```

Avant de donner la définition de la fonction Filled développée initialement par Renpu [50], on définit d'abord ce qu'on appel un bassin ou région d'attraction.

**Définition 2.3.** Un Bassin  $B_k^*$  (ou région d'attraction) d'un minimiseur local  $x_k^*$  de f est le plus grand sous-domaine connexe qui possède les propriétés suivantes :

- $x_k^* \in B_k^*$ .
- Pour tout  $x \in B_k^*$  tel que  $x \neq x_k^*$  et  $f(x) > f(x_k^*)$ , il existe une trajectoire de descente de x vers  $x_k^*$ .

On note par  $U_k^*$  l'ensemble des bassins supérieurs à  $B_k^*$ .

La définition de la fonction Filled est la suivante [50] :

**Définition 2.4.** Une fonction F est appelée fonction Filled d'une fonction f en un un minimiseur local  $x_k^*$  de f si :

- $x_k^*$  représente un maximiseur local de F.
- F ne possède pas de points stationnaires dans  $(B_k^* \cup U_k^*) \setminus x_k^*$  et l'ensemble  $B_k^*$  représente une partie du bassin du minimiseur  $x_k^*$  de -F.
- Si f possède un bassin inférieur à  $B_k^*$ , alors il existe un point  $x^{'}$  dans ce bassin qui minimise la fonction Filled sur le segment  $x^* + \lambda(x^{'} x^*), \lambda > 0$ .

La fonction Filled proposée par Renpu [50] est la suivante :

$$F_{r,\rho}(x,x^*) = \frac{1}{r+f(x)} \exp(-\frac{\|x-x^*\|}{\rho^2}), \qquad (2.26)$$

où r et  $\rho$  sont deux paramètres à ajuster.

En réalité, cette fonction appartient à une classe plus générale de fonctions Filled définie comme suit [63]:

$$P_{r,\rho}(x, x^*) = \psi(r + f(x)) \exp \left[-\rho \phi(\|x - x^*\|^{\beta})\right],$$

où  $\beta \geq 1$ ,  $\rho > 0$  et r sont des paramètres,  $\phi$  et  $\psi$  sont des fonctions telles que :

- $\phi$  et  $\psi$  sont continûment différentiables pour  $t \in [0, +\infty[$ .
- Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , on a  $\psi(t) > 0$  et  $\psi(t) < 0$ .

- La fonction  $\frac{\psi'}{\psi}$  est croissante.
- $\phi(0) = 0$  et pour  $t \in [0, +\infty[: \phi'(t) \ge c > 0]$ .

Cette classe de fonctions est considérée comme une classe de fonctions Filled sous certaines conditions assez restrictives, parmi elles :

• 
$$\rho(r + f(x)) \ge \frac{L}{c\alpha\beta D_k^{\beta-1}}$$
, pour tout  $x \in B_k^* \cup U_k^*$ .

• 
$$\rho(r + f(x^*)) \ge \frac{c\beta D_k^{\beta - 1} \theta(r + f(x^*))}{c\beta D_k^{\beta - 1} \theta(r + f(x^*))}$$
.  
•  $r + f(x) > 0$   $\forall x \in \mathbb{X}$ .

• 
$$r + f(x) > 0$$
  $\forall x \in \mathbb{X}$ .

avec:

- $L = \max\{\|\nabla f(x)\|, x \in \mathbb{X}\}.$
- $\theta(t) = -\frac{\psi(t)}{t\psi'(t)}, t \in ]0, +\infty[.$
- $\alpha = \min\{\theta(r + f(x)) | x \in \mathbb{X}\}.$

L'un des principaux problèmes rencontrés dans ce type de fonctions est l'ajustement des paramètres qui est très compliqué. Mais aussi, la présence du terme exponentiel. Par exemple, dans la fonction de Renpu, lorsque le domaine faisable est très grand ou le paramètre  $\rho$  est très petit, le facteur  $\exp(-\frac{\|x-x_1\|}{\rho^2})$  devient proche de zéro et la fonction Filled devient ainsi très plate, cela rend l'exécution de l'algorithme très lente.

Dans la sous-section suivante on traite certaines variantes de la méthode de la fonction Filled.

#### 2.6.2 Quelques variantes de la méthode de la fonction Filled

#### Fonction Filled globalement convexe

Dans la définition de la fonction Filled, le concept du bassin rend la construction des fonctions Filled très difficile. Dans [51], Renpu a donné une autre définition plus simple où il a évité ce concept. Ainsi, il a construit des fonctions Filled globalement convexes.

On considère le problème d'optimisation globale sans contraintes suivant :

$$\begin{cases}
\min f(x) \\
x \in \mathbb{R}^n
\end{cases} (P_{sc}),$$

où la fonction objectif f est deux fois continûment différentiable et on suppose de plus qu'elle est globalement convexe. Dans ce cas, il existe un domaine fermé borné  $\mathbb X$  qui contient tous les minimiseurs de f et la valeur de cette fonction quand x est sur la frontière de ce domaine est plus grande que dans l'intérieur. Renpu [51] a construit une classe de fonctions Filled en utilisant la définition suivante :

**Définition 2.5.** Une fonction F est appelée fonction F illed d'une fonction f en un minimiseur local  $x^*$  si :

• F ne possède pas de points stationnaires dans la région

$$S_1(x^*) = \{x \in \mathbb{X} : f(x) \ge f(x^*)\}.$$

• Il existe un minimiseur de F dans la région

$$S_2(x^*) = \{ x \in \mathbb{X} : f(x) < f(x^*) \}.$$

• F est globalement convexe.

La classe des fonctions Filled proposée par Renpu [51] est la suivante :

$$F_{\tau,\rho}(x,x^*) = \eta \left( \|x - x_0\|^2 \right) \varphi(\tau[f(x) - f(x^*) + \rho]), \tag{2.27}$$

où  $x_0$  est un point pré-fixé de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $f(x_0) \geq f(x^*)$ ,  $x^*$  un minimiseur local,  $\tau \geq 0$ ,  $\rho > 0$  deux paramètres et  $\eta$ ,  $\varphi$  deux fonctions réelles élémentaires.

Ce type de fonctions ne sont pas différentiables au point  $x_0$ . Cependant, Lucidi et coll. [33] ont modifié légèrement ces fonctions en construisant deux fonctions Filled globalement convexes qui possèdent des propriétés théoriques similaires. Elles sont définies comme suit :

$$W_{\tau,\rho}(x,x^*) = \eta \left(\frac{1}{2}||x - x_0||^2\right) \varphi(\tau[f(x) - f(x^*) + \rho]), \tag{2.28}$$

$$Z_{\tau,\rho}(x,x^*) = \eta \left( \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2 \right) + \varphi(\tau[f(x) - f(x^*) + \rho]). \tag{2.29}$$

Dans ce qui suit, nous donnons les propriétés théoriques de la fonction  $W_{\tau,\rho}$ .

On suppose que les fonctions  $\eta$  et  $\varphi$  vérifient les conditions suivantes :

1. 
$$\eta(0) = 0$$
.

2.  $\eta'(t) \ge a > 0$  pour t > 0.

3.  $\varphi(t) \geq 0, \forall t \in [0, +\infty[$  et  $\varphi'(t) \geq 0, \forall t \in [-t_1, 0[$  avec :  $t_1 > 0$ . 4.  $\lim_{t \to +\infty} \varphi'(t) = \lim_{t \to +\infty} t\varphi'(t) = 0$ . 5.  $\varphi(0) = 0$  et  $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = B > 0$ .

**Théorème 2.9.** Pour tout  $\tau, \rho$  la fonction  $W_{\tau,\rho}$  est globalement convexe.

Démonstration.

Puisque f est globalement convexe, lorsque  $||x|| \longrightarrow +\infty$  on a

$$f(x) - f(x^*) + \rho \longrightarrow +\infty.$$

D'après les propriétés de la fonction  $\varphi$  on trouve

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \varphi(\tau[f(x) - f(x^*) + \rho]) = B > 0.$$

L'utilisation des propriétés de la fonction  $\eta$ , nous donne

$$\eta(t) = \int_0^t \eta'(s) ds \ge \int_0^t a ds = at \longrightarrow +\infty \quad \text{si} \quad t \longrightarrow +\infty.$$

Donc

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} W_{\tau,\rho}(x,x^*) = +\infty.$$

Ceci prouve la convexité globale de  $W_{\tau,\rho}$ .

Dans la suite nous analysons la nature du point  $x_0$  et les points stationnaires de  $W_{\tau,\rho}$ .

**Théorème 2.10.** Si  $f(x_0) \ge f(x^*)$ , alors le point pré-fixé  $x_0$  représente un mininiseur local isolé de  $W_{\tau,\rho}$ .

Démonstration.

Puisque f est continue sur le compact X, il existe un voisinage  $V(x_0,\varepsilon)$  de  $x_0$  tel que

$$f(x) \ge f(x^*), \quad \forall x \in V(x_0, \varepsilon).$$

D'où

$$W_{\tau,\rho}(x_0, x^*) = 0 < \eta \left(\frac{1}{2} \|x - x_0\|^2\right) \varphi(\tau[f(x) - f(x^*) + \rho]) = W_{\tau,\rho}(x, x^*).$$

Ce qui implique que  $x_0$  représente un minimiseur local isolé de  $W_{\tau,\rho}$ .

Dans le théorème suivant, on définit les deux ensembles  $S_1(x^*)$  et  $S_1(x^*)$  qui forment un partition de  $\mathbb{X}$  comme suit :

$$S_1(x^*) = \{x \in \mathbb{X} : f(x) \ge f(x^*)\}$$

 $\operatorname{et}$ 

$$S_2(x^*) = \{ x \in \mathbb{X} : f(x) < f(x^*) \}.$$

#### Théorème 2.11.

- 1. Il existe  $\tilde{\tau} \geq 1$  tel que pour tout  $\tau \geq \tilde{\tau}$ , la fonction  $W_{\tau,\rho}$  n'a pas de point stationnaire dans la région  $S_1(x^*)$ , sauf le point pré-fixé  $x_0$ .
- 2. Si  $x^*$  n'est pas un minimiseur global de f et  $\rho$  vérifie

$$0 < \rho < f(x^*) - f(x_a), \tag{2.30}$$

où  $x_g$  est un minimiseur global de f, alors la fonction  $W_{\tau,\rho}$  possède un minimiseur dans la région  $S_2(x^*)$ .

Démonstration.

1.On a

$$\nabla W_{\tau,\rho}(x,x^*) = (x - x_0)\eta' \left(\frac{1}{2}||x - x_0||^2\right)\varphi(\tau[f(x) - f(x^*) + \rho]) + \tau\eta \left(\frac{1}{2}||x - x_0||^2\right)\nabla f(x)\varphi'(\tau[f(x) - f(x^*) + \rho]).$$

Alors un point stationnaire  $\tilde{x}$  de  $W_{\tau,\rho}$  doit satisfaire

$$\|\tilde{x} - x_0\| \eta' \left( \frac{1}{2} \|\tilde{x} - x_0\|^2 \right) \varphi(\tau[f(\tilde{x}) - f(x^*) + \rho])$$

$$= \tau \eta \left( \frac{1}{2} \|\tilde{x} - x_0\|^2 \right) \|\nabla f(\tilde{x})\| \varphi'(\tau[f(\tilde{x}) - f(x^*) + \rho]).$$
(2.31)

On suppose que  $\tilde{x} \in S_1(x^*)$ , alors  $f(\tilde{x}) \geq f(x^*)$ .

Étant donné que  $x_0$  est un mimimiseur local isolé de  $W_{\tau,\rho}$ , il est possible de construire

un voisinage  $B(x_0, \varepsilon_0)$  sans point stationnaire de  $W_{\tau,\rho}$  et on a  $\|\tilde{x} - x_0\| > \varepsilon_0$ . En plus, les propriétés de  $\varphi$  et  $\eta$  impliquent que :

$$\varepsilon_0 a \varphi(\tau \rho) \le \|\tilde{x} - x_0\| \eta' \left( \frac{1}{2} \|\tilde{x} - x_0\|^2 \right) \varphi(\tau [f(\tilde{x}) - f(x^*) + \rho])$$

et

$$\tau \eta \left( \frac{1}{2} \|\tilde{x} - x_0\|^2 \right) \|\nabla f(\tilde{x})\| \varphi'(\tau [f(\tilde{x}) - f(x^*) + \rho]) \le \tau \eta \left( \frac{1}{2} D^2 \right) L \varphi'(\tau \rho),$$

avec

$$D = \max_{x \in \mathbb{X}} \|x - x_0\| \quad \text{et} \quad L = \max_{x \in \mathbb{X}} \|\nabla f(x)\|.$$

D'après (2.31), si  $x \in S_1(x^*)$ , on trouve

$$\varepsilon_0 a \varphi(\tau \rho) \le \tau \eta \left(\frac{1}{2} D^2\right) L \varphi'(\tau \rho).$$
(2.32)

Maintenant, à partir des propriétés (4) et (5) de  $\varphi$ , on obtient

$$\lim_{\tau \to +\infty} \varepsilon_0 a \varphi(\tau \rho) = \varepsilon_0 a B$$

$$\lim_{\tau \longrightarrow +\infty} \tau \eta \left(\frac{1}{2}D^{2}\right) L\varphi'(\tau \rho) = \lim_{\tau \longrightarrow +\infty} \frac{\tau \rho \eta \left(\frac{1}{2}D^{2}\right) L\varphi'(\tau \rho)}{\rho} = 0.$$

Cela signifie que nous pouvons toujours trouver une valeur  $\tilde{\tau}$  telle que pour tout  $\tau \geq \tilde{\tau}$ ,

$$\varepsilon_0 a \varphi(\tau \rho) > \varepsilon_0 a \frac{B}{2}$$

$$\tau \eta \left(\frac{1}{2}D^2\right) L\varphi'(\tau \rho) < \varepsilon_0 a \frac{B}{2},$$

ce qui est en contradiction avec la relation (2.32).

On déduit qu'un point stationnaire différent de  $x_0$  ne peut pas appartenir à  $S_1(x^*)$ .

2. Puisque  $W_{\tau,\rho}$  est une fonction continue dans le compact  $\mathbb{X}$ , elle admet un minimiseur global  $\widehat{x}$ . Soit  $x_g$  un minimum global de f. En utilisant (2.30), on trouve

$$f(x_g) < f(x^*) - \rho.$$

De plus, d'après les propriétés de  $\varphi$ , on a :

$$\varphi(\tau[f(x_q) - f(x^*) + \rho]) < 0,$$

et d'après la définition de  $W_{\tau,\rho}$ , on a  $W_{\tau,\rho}(x_g,x^*)<0$  . D'où

$$W_{\tau,\rho}(\widehat{x}, x^*) \leq W_{\tau,\rho}(x_q, x^*) < 0.$$

Alors

$$\varphi(\tau[f(\widehat{x}) - f(x^*) + \rho]) < 0.$$

Ce qui implique que  $f(\widehat{x}) < f(x^*)$ , et donc  $\widehat{x} \in S_1(x^*)$  .

Remarque 2.7. L'idée de la fonction Filled globalement convexe est intéressante. Un de ses inconvénients est le point pré-fixé  $x_0$  qui représente un minimiseur local qui possède une zone d'attraction assez large, ce qui pose des difficultés dans la recherche locale pour détecter un minimiseur local convenable. Il est facile de démontrer que c'est impossible de construire une fonction Filled globalement convexe en évitant la présence de ce point.

#### Fonction Filled non globalement convexe

Plusieurs chercheurs ont proposé des fonctions Filled qui ne possèdent pas la propriété de la convexité globale mais elles n'ont pas le problème du point pré-fixé comme dans la fonction de Ge [51], Lucidi et coll.[33].

On considère le problème  $(P_{sc})$  avec l'hypothèse suivante :

Pour tout réel  $\alpha$  l'ensemble :  $\mathcal{L}_f(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$ , est un compact.

Dans [6] Campana et coll. ont construit la fonction Filled définie par l'expression suivante :

$$Q_{\tau,\varrho}(x,x^*) = \exp\left(-\frac{\|x-x^*\|^2}{\gamma^2}\right) + 1 - \exp(-\tau[f(x) - f(x^*) + \varrho]),$$

avec  $x^*$  un minimiseur local de  $f,\, \tau \geq 1, \rho > 0$  sont deux paramètres et  $\gamma > 0$  une constante.

Les propriétés de  $Q_{\tau,\rho}$  sont décrites à travers le théorème suivant.

**Théorème 2.12.** Il existe  $\tilde{\tau} \geq 0$  tel que pour tout  $\tau \geq \tilde{\tau}$ , la fonction  $Q_{\tau,\varrho}$  possède les propriétés suivantes :

- 1. Le point  $x^*$  représente un maximiseur local strict de  $Q_{\tau,\varrho}$ .
- 2.  $Q_{\tau,\varrho}$  n'a pas de point stationnaire dans la région

$$S_1(x^*) = \{x \in \mathcal{L}_f(f(x_0)) : x \neq x^*, f(x) \ge f(x^*)\}.$$

3. Si x\* n'est pas un minimiseur global de f et o vérifie

$$0 < \rho < f(x^*) - f(x_g), \tag{2.33}$$

avec  $x_g$  un minimiseur global de f, alors la fonction  $Q_{\tau,\varrho}$  possède un minimiseur dans la région

$$S_2(x^*) = \{ x \in \mathcal{L}_f(f(x_0)) : f(x) < f(x^*) \}.$$

Démonstration.

L'expression du gradient de  $Q_{\tau,\varrho}$  est la suivante :

$$\nabla Q_{\tau,\varrho}(x, x^*) = -2 \frac{(x - x^*)}{\gamma^2} \exp\left(-\frac{\|x - x^*\|^2}{\gamma^2}\right) + \tau \nabla f(x) \exp(-\tau [f(x) - f(x^*) + \varrho]).$$
(2.34)

a) Puisque,  $x^*$  représente un point stationnaire de f, alors on a

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

D'après (2.34), on trouve :

$$\nabla Q_{\tau,\varrho}(x^*, x^*) = 0.$$

De plus, on a

$$\nabla^2 Q_{\tau,\varrho}(x^*, x^*) = -\frac{2}{\gamma^2} I + \tau \nabla^2 f(x^*) \exp(-\tau \varrho).$$

Il en résulte que pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  on a :

$$y^{\top} \nabla^{2} Q_{\tau,\varrho}(x^{*}, x^{*}) y = y^{\top} \left( -\frac{2}{\gamma^{2}} I + \tau \nabla^{2} f(x^{*}) \exp(-\tau \varrho) \right) y$$

$$= -\frac{2}{\gamma^{2}} \|y\|^{2} + \tau y^{\top} \nabla^{2} f(x^{*}) y \exp(-\tau \varrho)$$

$$\leq \left( -\frac{2}{\gamma^{2}} + \tau \lambda_{max} \left( \nabla^{2} f(x^{*}) \right) \exp(-\tau \varrho) \right) \|y\|^{2},$$
(2.35)

où  $\lambda_{max}(\nabla^2 f(x^*))$  est la plus grande valeur propre de la matrice  $\nabla^2 f(x^*)$ . Cette dernière inégalité implique qu'il existe  $\tau_1 > 0$  tel que si  $\tau \geq \tau_1$ , la matrice hessienne est définie négative. Cela veut dire que  $x^*$  représente un maximum local strict de  $Q_{\tau,\rho}$ .

b) Revenons à l'expression du gradient (2.34). Si  $\widehat{x} \in \mathcal{L}_f(f(x_0))$  est un point stationnaire de f, tel que  $\widehat{x} \neq x^*$  et  $f(\widehat{x}) \geq f(x^*)$ , alors

$$2\frac{\|\widehat{x} - x^*\|}{\gamma^2} \exp\left(-\frac{\|\widehat{x} - x^*\|^2}{\gamma^2}\right) = \tau \|\nabla f(\widehat{x})\| \exp(-\tau [f(\widehat{x}) - f(x^*) + \varrho]). \tag{2.36}$$

D'après a), il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\|\widehat{x} - x^*\| > \varepsilon$ .

Puisque  $\mathcal{L}_f(f(x_0))$  est compact, il existe des réels D et L tels que

$$\|\widehat{x} - x^*\| \le D$$
 et  $\|\nabla f(x)\| \le L$ ,  $\forall x \in \mathcal{L}_f(f(x_0))$ .

Par conséquent

$$2\frac{\varepsilon}{\gamma^2} \exp\left(-\frac{D^2}{\gamma^2}\right) \le 2\frac{\|\widehat{x} - x^*\|}{\gamma^2} \exp\left(-\frac{\|\widehat{x} - x^*\|^2}{\gamma^2}\right). \tag{2.37}$$

et

$$\tau \|\nabla f(\widehat{x})\| \exp(-\tau [f(\widehat{x}) - f(x^*) + \varrho]) \le \tau L \exp(-\tau \varrho). \tag{2.38}$$

D'où en utilisant (2.37) et (2.38) on peut déduire qu'il existe une constante  $\tau_2 > 0$  telle que pour tous  $\tau \geq \tau_2$  la condition (2.36) ne sera pas satisfaite.

c) La compacité de  $\mathcal{L}_f(f(x_0))$  implique l'existence d'un minimiseur global  $\widehat{x}^* \in \mathcal{L}_f(f(x_0))$  de  $Q_{\tau,\varrho}$ . Pour tout  $\widehat{x} \in \partial \mathcal{L}_f(f(x_0))$ , on a  $f(\widehat{x}) = f(x_0) \geq f(x^*)$ , car  $x^*$  est obtenu par une minimisation locale dans l'ensemble  $\mathcal{L}_f(f(x_0))$ . Alors

$$Q_{\tau,\varrho}(\widehat{x}, x^*) = \exp\left(-\frac{\|\widehat{x} - x^*\|^2}{\gamma^2}\right) + 1 - \exp(-\tau[f(\widehat{x}) - f(x^*) + \varrho]) > 0.$$

Soit  $x_g$  un minimiseur global de f. Alors, (2.33) implique qu'il existe  $\tau_3$  telle que pour tout  $\tau \geq \tau_3$  on a

$$Q_{\tau,\rho}(x_q, x^*) < 0,$$

à partir de laquelle nous avons

$$Q_{\tau,\rho}(\hat{x}^*, x^*) \le Q_{\tau,\rho}(x_q, x^*) < 0, \tag{2.39}$$

ce qui implique que  $\hat{x}^*$  est dans l'intérieur de  $\mathcal{L}_f(f(x_0))$ . De plus, nous avons

$$Q_{\tau,\varrho}(x^*, x^*) = 2 - \exp(-\tau \varrho) > 0,$$

et par conséquent (2.39) implique que  $\widehat{x}^* \in \mathcal{L}_Q(Q(x^*, x^*))$ .

Puisque,  $\hat{x}^*$  n'appartient pas à  $S_1(x^*)$  et appartient à l'intérieur de  $\mathcal{L}_f(f(x_0))$ , on déduit que  $\widehat{x}^* \in S_2(x^*)$ .

#### Fonction de descente globale

Dans [40] Ng et coll. ont proposé une amélioration de la méthode de la fonction Filled. Ils ont donné une classe de fonctions auxiliaires dites fonctions de descente globale en se basant sur la définition suivante :

**Définition 2.6.** On dit qu'une fonction G est de descente globale d'une fonction f en un minimiseur  $x^*$  si elle satisfait les conditions suivantes :

- (a) x\* représente un maximiseur local strict de G sur X.
- (b) G ne possède pas de points stationnaires dans la région

$$\hat{\mathbb{X}}(x^*) = \{ x \in \text{int}(\mathbb{X}) : x \neq x^*, f(x) \ge f(x^*) \}.$$

(c) Si f a un minimiseur  $x^{**} \in \operatorname{int}(\mathbb{X})$  avec  $f(x^{**}) < f(x^{*})$ , alors G possède un minimiseur x' tel que  $x' \in V(x^{**}, \varepsilon) \subset \mathbb{X}$  et  $f(x) < f(x^*)$  pour tout  $x \in V(x^{**}, \varepsilon)$ ,  $où V(x^{**}, \varepsilon)$  est un  $\varepsilon$ -voisinage de  $x^{**}$ .

La différence entre ce type de fonctions et les fonctions Filled classiques réside dans le fait que chaque minimiseur faisable  $x^{**}$  de la fonction objectif vérifiant  $f(x^{**}) < f(x^*)$  se trouve au voisinage d'un minimiseur de la fonction auxiliaire.

Ng et coll. [40] ont construit une famille de fonctions de descente globale à deux paramètres  $\mu$  et  $\rho$ , définie comme suit :

$$G_{\mu,\rho}(x,x^*) = (f(x) - f(x^*))V_{\mu}(f(x) - f(x^*)) - \rho ||x - x^*||,$$

où  $\rho > 0, \ 0 < \mu < 1$  sont deux paramètres à ajuster et  $V_{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable vérifiant les conditions suivantes :

- (V1)  $V_{\mu}(-\tau) = 1$ ,  $V_{\mu}(0) = \mu$ , et  $V_{\mu}(y) > c\mu$ , pour tout y. (V2)  $V_{\mu}^{'}(y) < 0$  pour tout y < 0 et  $-c^{'}\mu \leq V_{\mu}^{'}(y) \leq 0$  pour tout  $y \geq 0$

où:

- c est une constante telle que  $0 < c \le 1$ .
- $c' \geq 0$  est une constante ou une fonction de  $\mu$  avec  $\lim_{\mu \to 0} c'(\mu) = 0$ .
- $\tau$  vérifiant la condition suivante :

$$0 < \tau < \min \{ |f^* - f^{**}| : f^*, f^{**} \in f_{\text{all}}^*, f^* \neq f^{**} \},$$

avec  $f_{\text{all}}^* = \{f(x^*) : x^* \text{ est un minimiseur local de } f \text{ sur } X\}.$ 

Un exemple de la fonction  $V_{\mu}$  est la fonction suivante :

$$V_{\mu}(y) = \mu \left[ (1 - c) \left( \frac{\mu - c\mu}{1 - c\mu} \right)^{\frac{y}{\tau}} + c \right],$$

avec 0 < c < 1.

Cette fonction est de classe  $C^{\infty}$  et vérifie les conditions (V1) et (V2) avec

$$c' = \frac{1-c}{\tau} \ln \left( \frac{1-c\mu}{\mu-c\mu} \right)$$
 et  $\lim_{\mu \to 0} c'\mu = 0$ .

La fonction  $G_{\mu,\rho}$  satisfait les conditions C1,C2 et C3 dans le cas où on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0<\mu<\min\left\{1,\frac{\rho}{L}\right\} & \text{si} \quad c^{'}=0\\ 0<\mu<\min\left\{1,\frac{\rho}{L},\frac{\rho}{c^{'}DLM}\right\} & \text{si} \quad c^{'}>0, \end{array} \right.$$

et

$$0<\rho<\frac{\delta}{D},$$

tels que

- $\delta$  une constante suffisamment petite dépendant de la régularité de f.
- D une constante telle que

$$0 < \max_{x', x'' \in \mathbb{X}} \|x^{'} - x^{''}\| \leqslant D < \infty.$$

- L la constante de Lipschitz f.
- Une borne supérieure du gradient de f sur  $\mathbb{X}$ .

Une autre fonction à deux paramètres a été proposée dans le cas d'un problème différentiable par Z. Y Wu et coll. [61] sous la forme suivante :

$$H_{q,r}(x,x^*) = q\left(\exp\left(\frac{1}{\|x-x_0\|}\right)g_r(f(x)-f(x^*)) + h_r(f(x)-f(x^*))\right),$$

où  $x_0$  est un point donné de  $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{X}$  tel que  $||x - x_0|| \ge 1$  pour tout  $x \in \mathbb{X}$  et  $g_r, h_r$  sont des fonctions continûment différentiables définies comme suit :

$$g_r(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0\\ -\frac{2}{r^3}t^3 - \frac{3}{r^2}t^2 + 1, & -r < t \le 0\\ 0, & t < -r \end{cases}$$

et

$$h_r(t) = \begin{cases} 2, & t \ge r \\ -\frac{4-r}{r^3}t^3 + \frac{6-2r}{r^2}t^2 + t, & 0 < t < r \\ t, & t \le 0 \end{cases}.$$

On suppose qu'on a la condition suivante :

• il existe  $x_0^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $f_0 > 0$  et un hypérrectangle  $\mathbb{X}$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $x_0^0 \in \mathbb{X}$  et  $f(x) \geq f(x_0^0) + f_0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \text{int}(\mathbb{X})$ ,

alors, la fonction  $H_{q,r}$  possède les propriétés suivantes :

- (a') Tout  $x \in \mathbb{X}$  vérifiant  $f(x) \geq f(x^*) + r$  n'est pas un point stationnaire de  $H_{q,r}$ .
- (b') Tout x vérifiant  $\nabla f(x) = 0$  et  $0 \le f(x) f(x^*) < r$  n'est pas un point stationnaire de  $H_{q,r}$ .
- (c') Tout minimiseur  $x^{**}$  de f tel que  $f(x^{**}) < f(x^*)$  est un minimiseur local et un point stationnaire de  $H_{q,r}$  avec :  $H_{q,r}(x^{**},x^*) < H_{q,r}(x^*,x^*)$  et  $H_{q,r}(x^{**},x^*) < H_{q,r}(x,x^*)$  pour tout  $x \in \partial \mathbb{X}$ .
- (d') Si  $x^*$  et un minimiseur local obtenu à partir de la minimisation de  $H_{q,r}$  dans  $\mathbb{X}$ , alors  $x^* \in \operatorname{int}(\mathbb{X})$  pour tout  $0 < r \le f_0$ .

Remarque 2.8. La condition (c') est seulement nécessaire. Si nous avons une condition suffisante, nous n'avons pas besoin d'appliquer la recherche locale à la fonction objectif et les deux phases de minimisation peuvent être réduites à une phase, avec un gain important en temps de calcul.

# 2.7 Conclusion

Plusieurs méthodes d'optimisation globale basées sur l'introduction des fonctions auxiliaires sont proposées dans la littérature. Cependant, chaque méthode possède des inconvénients.

Dans la méthode de la fonction de diffusion, à chaque étape de l'algorithme on a besoin d'une minimisation globale d'une fonction auxiliaire régularisée de fonction objectif qui dépend d'une intégrale multiple, ce qui rend cette approche inefficace sauf dans des cas bien particuliers. Des développements récents de cette approche peuvent être trouvés dans la référence [37].

Pour la méthode de la fonction indicateur de relief, l'expression de la fonction auxiliaire est très compliquée car elle nécessite des approximations convenables. De plus, le choix d'un polytope qui contient le domaine faisable et le point qui sert à initialiser l'algorithme sont relativement difficiles.

Les méthodes de recouvrement sont très efficaces dans le cas unidimensionnel. Bien qu'il existe des efforts de recherches pour les améliorer, ces méthodes restent inefficaces dans le cas multidimensionnel et leur mise en œuvre est très compliquée. Concernant la méthode séparation et évaluation, elle est assez efficace mais seulement pour les problèmes de tailles moyennes.

L'inconvénient majeur dans la majorité des fonctions Filled est l'existence des paramètres qui sont difficiles à ajuster. De plus, elles sont appliquées seulement dans le cas où la fonction objectif est différentiable ou au moins lipschitzienne. Néanmoins, plusieurs problèmes importants dans la pratique ont des fonctions objectifs non-lipschitziennes et admettent des domaines faisables très compliqués.

# Chapitre 3

Sommaire

# Une nouvelle fonction auxiliaire de descente globale

3.1	Introduction	68
3.2	Présentation du problème à optimiser et son approximation	69
3.3	Une nouvelle fonction auxiliaire de descente globale avec ses propriétés	71
3.4	La méthode de descente globale	81
	3.4.1 Algorithme de descente globale	81

#### 

82

84

## 3.1 Introduction

3.4.2

3.4.3

Les chapitres précédents nous ont donné une idée sur les difficultés rencontrées dans les problèmes d'optimisation globale ainsi qu'un aperçu des méthodes de résolution existantes et de leurs limites. Dans ce chapitre, nous donnons une nouvelle approche de descente globale pour résoudre un problème d'optimisation globale assez général [27]. Nous proposons une nouvelle fonction auxiliaire qui possède des propriétés intéressantes et apporte des solutions aux inconvénients rencontrés dans les fonctions classiques. Elle permet d'une descente globale d'une fonction non régulière

et non convexe dans un domaine non convexe, défini par des fonctions non régulières et non convexes. Nous examinons plusieurs propriétés de cette nouvelle fonction et nous établissons un algorithme d'optimisation qui converge asymptotiquement.

#### Présentation du problème à optimiser et son 3.2 approximation

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(PC) \begin{cases} Glob \min f(x) \\ s.c. \\ g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, ..., m, \\ x \in \Omega, \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $f, g_i, i = 1, ..., m$  sont des fonctions continues non lipschitziennes et non convexes sur  $\Omega$ .

Dans la suite, nous utilisons les notations suivantes:

- $\mathbb{X} = \{x \in \Omega \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m\}.$
- $\mathbb{X} = \{x \in \text{int}(\Omega) \mid g_i(x) < 0, \ i = 1, ..., m\}.$   $I = \{1, ..., m\}$  et pour  $x \in \Omega \backslash \mathbb{X} : I'(x) = \{i \in I \mid g_i(x) > 0\}$ .
- Pour  $\varepsilon > 0$ , on prend  $\mathbb{X}_{\varepsilon} = \{x \in \Omega \mid g_i(x) \leq \varepsilon, i = 1, ..., m\}.$
- $K_{\Omega}$  est une constante positive telle que

$$0 < \max_{x', x'' \in \Omega} \|x' - x''\| \leqslant K_{\Omega} < \infty.$$

On fait les hypothèses suivantes :

- Hypothèse  $1: \overset{\circ}{\mathbb{X}}$  est non vide.
- Hypothèse 2 : il existe au moins un minimiseur global de (PC) contenu dans  $int(\Omega)$ .

La résolution de ce problème a un grand intérêt pratique, car la modélisation conduit souvent à des problèmes qui ne sont ni convexes ni lipschitziens, qui sont très difficiles à traiter à cause du manque de régularité de la fonction objectif, et la structure du domaine faisable qui peut être très compliquée. Pour cela, nous essayerons de le résoudre avec une approximation relativement petite  $\varepsilon > 0$ .

**Définition 3.1.** On dit qu'un point  $x_{\varepsilon}^* \in \Omega$  est un minimiseur global  $\varepsilon$ -approché du problème (PC), si

$$x_{\varepsilon}^* \in \mathbb{X}_{\varepsilon} \quad et \quad f(x) \geqslant f(x_{\varepsilon}^*) - \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{X}_{\varepsilon}.$$

Définissons maintenant le problème relaxé  $(PC_{\varepsilon})$  associé à (PC) comme suit :

$$(PC_{\varepsilon}) \begin{cases} \operatorname{Glob} \min f(x) \\ s.c. \\ x \in \mathbb{X}_{\varepsilon}. \end{cases}$$

Dans le prochain théorème, nous allons voir que si  $\varepsilon \to 0$ , la suite des solutions des problèmes  $(PC_{\varepsilon})$  converge vers un minimiseur global de (PC).

**Théorème 3.1.** Si  $x_{\varepsilon}^*$  est un minimiseur global du problème  $(PC_{\varepsilon})$  et  $\overline{x}$  un point d'accumulation de la suite  $\{x_{\varepsilon}^*\}$  lorsque  $\varepsilon \longrightarrow 0$ , alors  $\overline{x}$  est un minimiseur global du problème (PC).

 $D\'{e}monstration.$ 

Soit

$$E = \{x_{\varepsilon}^* \in \mathbb{X}_{\varepsilon} \mid x_{\varepsilon}^* \text{ est un minimiseur global de } f \text{ sur } \mathbb{X}_{\varepsilon} \text{ pour } \varepsilon > 0\}.$$

Puisque  $\overline{x}$  est un point d'accumulation de E, il existe une suite  $\{x_{\varepsilon_n}^*\}\subset E$  telle que

$$\lim_{n} x_{\varepsilon_n}^* = \overline{x}.$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(x) + \varepsilon_n \geqslant f(x_{\varepsilon_n}^*) \quad \forall x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{X}_{\varepsilon_n}.$$

Alors

$$\lim_{n} (f(x) + \varepsilon_n) \geqslant \lim_{n} (f(x_{\varepsilon_n}^*)) \ \forall x \in \mathbb{X}.$$

Puisque la fonction f est continue, il en résulte que

$$f(x) \geqslant f(\overline{x}), \forall x \in \mathbb{X}.$$

De plus,  $\overline{x} \in \mathbb{X}_{\varepsilon_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Par conséquent

$$\overline{x} \in \bigcap_{n} \mathbb{X}_{\varepsilon_n} = \mathbb{X}.$$

# 3.3 Une nouvelle fonction auxiliaire de descente globale avec ses propriétés

Dans cette section on présente une nouvelle fonction auxiliaire qui permet de résoudre le problème (PC) avec une approximation  $\varepsilon>0$ . Elle est définie par l'expression suivante :

$$G_{\omega}(x, x^*) = -\varphi(\|x - x^*\|) + \omega \min\{f(x) - f(x^*), \omega \eta(x)\} - \omega^2 \eta(x), \tag{3.1}$$

avec:

- $x^*$  un minimiseur local de f sur  $\Omega$ .
- $\omega$  un paramètre à ajuster.
- la fonction  $\eta$  est définie comme suit :

$$\eta(x) = \sum_{i \in I} \min \left[ 0, -g_i(x) \right].$$

- la fonction  $\varphi: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$  vérifie les conditions suivantes :
  - $-\varphi$  est continûment différentiable et lipschitzienne de constante  $L_{\varphi}$ .
  - Pour tout  $t \in [0, +\infty[ , \varphi'(t) > 0.$

Dans les prochains résultats, nous allons montrer que  $G_{\omega}$  est une fonction de descente globale qui possède des propriétés intéressantes.

Tout d'abord, nous donnons le lemme suivant [49, 58]:

**Lemme 3.1.** Une fonction réelle définie sur un ensemble compact  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  est continue, si et seulement si, pour chaque  $\varepsilon > 0$  il existe une constante  $K_{\varepsilon} > 0$  telle que

$$\forall x, y \in \Omega: \qquad |f(x) - f(y)| \le K_{\varepsilon} ||x - y|| + \varepsilon. \tag{3.2}$$

Démonstration.

Notons par  $C(\Omega, \mathbb{R})$  l'espace des fonctions continues du compact  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , muni de la topologie associée à la métrique de la convergence uniforme. On définit l'espace  $L(\Omega, \mathbb{R})$  des fonctions lipschitziennes sur  $\Omega$  comme suit :

$$L(\Omega, \mathbb{R}) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \exists K > 0 : |f(x) - f(y)| \le K ||x - y||, \ \forall x, y \in \Omega \}.$$

Puisque  $L(\Omega, \mathbb{R})$  est dense dans  $C(\Omega, \mathbb{R})$ , pour une fonction f de  $C(\Omega, \mathbb{R})$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $g_{\varepsilon}$  de  $L(\Omega, \mathbb{R})$  telle que

$$||f - g_{\varepsilon}|| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit  $K_{\varepsilon}$  la constante de Lipschitz de la fonction  $g_{\varepsilon}$  sur  $\Omega$ . On a

$$\forall x, y \in \Omega: \qquad |f(x) - f(y)| \le |f(x) - g_{\varepsilon}(x)| + |g_{\varepsilon}(x) - g_{\varepsilon}(y)| + |g_{\varepsilon}(y) - f(y)|$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + K_{\varepsilon} ||x - y|| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= K_{\varepsilon} ||x - y|| + \varepsilon.$$

Inversement:

Soit  $\varepsilon_1>0$ . On a pour  $\varepsilon=\frac{\varepsilon_1}{2}>0$ , il existe une constante  $K_\varepsilon>0$  telle que

$$\forall x, y \in \Omega: |f(x) - f(y)| \le K_{\varepsilon} ||x - y|| + \varepsilon.$$

Posons  $\delta = \frac{\varepsilon_1}{2K_{\varepsilon}}$ . On a

$$||x - y|| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon_1.$$

D'où, f est uniformément continue et par conséquent elle est continue sur  $\Omega$ .  $\square$ 

Corollaire 3.1. Pour  $x \in \Omega \setminus \mathbb{X}_{\varepsilon}$ , l'expression  $\frac{f(x^*)-f(x)}{\sum_{i \in I'(x)} g_i(x)}$  est bornée .

 $D\'{e}monstration.$ 

Puisque f est continue sur le compact  $\Omega$ , l'utilisation de (3.2) nous donne

$$\frac{f(x^*) - f(x)}{\sum_{i \in I'(x)} g_i(x)} < \frac{K_{\varepsilon} ||x - x^*|| + \varepsilon}{\sum_{i \in I'(x)} g_i(x)}$$

$$< \frac{K_{\varepsilon} K_{\Omega}}{\varepsilon} + 1$$

$$< +\infty.$$

Dans la suite, on utilise les notations suivantes :

$$\varpi_1 = \frac{K_{\varepsilon}K_{\Omega}}{\varepsilon} + 1, \qquad \varpi_2 = \frac{L_{\varphi}K_{\Omega}}{\varepsilon}.$$

**Théorème 3.2.**  $x^*$  représente un maximuiseur local strict de  $G_{\omega}$  sur  $\Omega$ .

Démonstration.

Puisque  $x^*$  représente un minimiseur local de f sur  $\Omega$ , il existe un voisinage  $V(x^*, \delta)$  de  $x^*$  tel que

$$f(x) \geqslant f(x^*) \quad \forall x \in V(x^*, \delta) \cap \Omega.$$

Pour  $x \in V(x^*, \delta) \cap \Omega$  et  $x \neq x^*$ , on a

$$G_{\omega}(x, x^*) = -\varphi(\|x - x^*\|)$$

$$< -\varphi(0)$$

$$= G_{\omega}(x^*, x^*).$$

D'où,  $x^*$  représente un maximiseur local strict de  $G_{\omega}$  sur  $\Omega$ .

Théorème 3.3.

- (i) Tout  $x \in \operatorname{int}(\Omega) \setminus \{x^*\}$  n'est pas un point stationnaire de  $G_{\omega}$  si
  - $f(x) > f(x^*)$

- $f(x) = f(x^*)$  et x est un minimiseur local de f.
- (ii) Tout  $x \in \operatorname{int}(\Omega) \setminus (\mathbb{X}_{\varepsilon} \cup \{x^*\})$  n'est pas un point stationnaire de  $G_{\omega}$ , si  $\omega > \varpi_1$ .

Démonstration.

(i) Si  $x \in \Omega$  tel que  $x \neq x^*$  et  $f(x) \geqslant f(x^*)$ , alors

$$G_{\omega}(x, x^*) = -\varphi(\|x - x^*\|).$$
 (3.2)

Puisque f est continue sur  $\Omega$ , pour  $x \in \operatorname{int}(\Omega)$  tel que  $f(x) > f(x^*)$  ou x est un minimiseur local de f, (3.2) est vérifiée sur un voisinage de x, et puisque  $\varphi$  est continûment différentiable, on déduit que

$$\nabla G_{\omega}(x, x^*) = -\frac{\varphi'(\|x - x^*\|)(x - x^*)}{\|x - x^*\|} \neq 0.$$

(ii) Dans le cas où  $x \in \operatorname{int}(\Omega) \setminus (\mathbb{X}_{\varepsilon} \cup \{x^*\})$ , il existe au moins  $i_0 \in I$  tel que  $g_{i_0}(x) > \varepsilon.$ Si  $\omega > \frac{f(x^*) - f(x)}{\sum_{i \in I'(x)} g_i(x)}$ , alors

$$f(x) - f(x^*) > -\omega \sum_{i \in I'(x)} g_i(x).$$

Par conséquent

$$G_{\omega}(x, x^*) = -\varphi(\|x - x^*\|) - \omega^2 \sum_{i \in I'(x)} g_i(x) + \omega^2 \sum_{i \in I'(x)} g_i(x) = -\varphi(\|x - x^*\|).$$

Comme dans le point (i), on trouve

$$\nabla G_{\omega}(x, x^*) \neq 0.$$

**Théorème 3.4.** Soient  $x_1, x_2 \in \Omega$  vérifiant les conditions suivantes :

$$i ) f(x_1) \geqslant f(x^*) ou x_1 \notin \mathbb{X}_{\varepsilon}$$

$$ii \ ) \ f(x_2) \geqslant f(x^*) \ ou \ x_2 \notin \mathbb{X}_{\varepsilon}.$$
 Si  $\omega > \varpi_1$ , alors

$$||x_2 - x^*|| > ||x_1 - x^*||$$
 si et seulement si  $G_{\omega}(x_2, x^*) < G_{\omega}(x_1, x^*)$ .

Démonstration.

D'après les hypothèses du Théorème, on a

$$G_{\omega}(x_i, x^*) = -\varphi(\|x^* - x_i\|), \quad i = 1, 2.$$

Par conséquent

$$||x_2 - x^*|| > ||x_1 - x^*||$$
 si et seulement si  $G_{\omega}(x_2, x^*) < G_{\omega}(x_1, x^*)$ .

**Théorème 3.5.** Soit  $\varepsilon > 0$  et supposons que  $x^{**} \in \operatorname{int}(\Omega)$  est un minimiseur local de  $G_{\omega}$  sur  $\mathbb{X}$ . Si  $\omega > \varpi_2$ , alors  $x^{**}$  est un minimiseur local  $\varepsilon$ -approché de f sur  $\mathbb{X}$ .

Démonstration.

Si  $x^{**} \in \operatorname{int}(\Omega)$  un minimiseur local de  $G_{\omega}$  sur  $\mathbb{X}$ , alors il existe un voisinage  $V(x^{**}, \delta)$  tel que

$$G_{\omega}(x^{**}, x^{*}) \leqslant G_{\omega}(x, x^{*}), \quad \forall x \in V(x^{**}, \delta) \cap \mathbb{X}.$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , on suppose le cas contraire, c-à-d :

$$\exists y \in V(x^{**}, \delta) \cap \mathbb{X}, \quad \text{tel que} \quad f(y) < f(x^{**}) - \varepsilon.$$
 (3.3)

On considère les deux cas suivants :

• Le premier cas :  $||y - x^*|| \ge ||x^{**} - x^*||$ . On a

$$-\varphi(\|x^{**} - x^*\|) \geqslant -\varphi(\|y - x^*\|). \tag{3.4}$$

D'après (3.3), on trouve

$$\omega[f(x^{**}) - f(x^{*})] > \omega[f(y) - f(x^{*})]. \tag{3.5}$$

De (3.5) et (3.4), on obtient

$$-\varphi(\|x^{**} - x^*\|) + \omega[f(x^{**}) - f(x^*)] > -\varphi(\|y - x^*\|) + \omega[f(y) - f(x^*)].$$

Ceci est équivalent à

$$G_{\omega}(x^{**}, x^{*}) > G_{\omega}(y, x^{*})$$
 pour  $y \in V(x^{**}, \delta) \cap \mathbb{X}$ .

ce qui contredit le fait que  $x^{**}$  est un minimiseur local de  $G_{\omega}$ .

• Le deuxième cas :  $\|y - x^*\| < \|x^{**} - x^*\|$ . Si  $\omega > \frac{L_{\varphi}\delta}{\varepsilon}$ , alors

$$\omega > \frac{L_{\varphi}(\|x^{**} - y\|)}{\varepsilon}$$

$$> \frac{L_{\varphi}(\|x^{**} - x^{*}\| - \|y - x^{*}\|)}{\varepsilon}$$

$$> \frac{\varphi(\|x^{**} - x^{*}\|) - \varphi(\|y - x^{*}\|)}{f(x^{**}) - f(y)},$$

ce qui implique que

$$\omega \left( f(x^{**}) - f(x^*) - [f(y) - f(x^*)] \right) > \varphi(\|x^{**} - x^*\|) - \varphi(\|y - x^*\|).$$

D'où

$$-\varphi(\|x^{**} - x^*\|) + \omega[f(x^{**}) - f(x^*)] > -\varphi(\|y - x^*\|) + \omega[f(y) - f(x^*)],$$

ce qui est équivalent à dire

$$G_{\omega}(x^{**}, x^{*}) > G_{\omega}(y, x^{*}).$$

On arrive aussi à une contradiction.

On conclut que pour  $\varepsilon > 0$ , si  $\omega > \varpi_2$ , alors

$$f(x) \geqslant f(x^{**}) - \varepsilon \quad \forall x \in V(x^{**}, \delta) \cap \mathbb{X}.$$

C'est à dire,  $x^{**}$  représente un minimiseur local  $\varepsilon$ -approché de f sur  $\mathbb{X}$ .

D'après l'hypothèse (2), si  $x^*$  n'est pas un minimiseur global de (PC), il existe un autre minimiseur  $x^{**} \in int(\Omega)$  avec  $f(x^{**}) < f(x^*)$ . Le résultat suivant donne une condition sur  $\omega$  pour que la fonction  $G_{\omega}$  possède des minimiseurs :

**Théorème 3.6.** Soit  $x^{**} \in \operatorname{int}(\Omega) \cap \mathbb{X}$  un minimiseur local de f dans  $\Omega$  tel que  $f(x^{**}) < f(x^*)$ . Il existe une constante  $\varpi_3$  telle que pour tout  $\omega > \varpi_3$ ,  $G_{\omega}$  possède un minimiseur  $x_0^{**} \in V(x^{**}, \delta) \subset \mathbb{X}_{\varepsilon}$  tel que  $f(x_0^{**}) < f(x^*)$ , où  $V(x^{**}, \delta)$  est un  $\delta$ -voisinage de  $x^{**}$ , avec  $f(x) < f(x^*)$   $\forall x \in V(x^{**}, \delta)$ .

Démonstration.

D'abord, puisque  $x^{**} \in \operatorname{int}(\Omega) \cap \mathbb{X}$ , alors  $x^{**} \in \operatorname{int}(\mathbb{X}_{\varepsilon})$ . Dû à la continuité de la fonction f, il existe un voisinage  $V(x^{**}, \delta) \subset \mathbb{X}_{\varepsilon}$  avec  $\delta > 0$  tel que

$$f(x^{**}) \leqslant f(x) < f(x^*) \qquad \forall x \in V(x^{**}, \delta).$$

Cette condition implique qu'il existe un point  $x_0$  de  $V(x^{**}, \delta)$  tel que pour un  $\rho > 0$  suffisamment petit on a

$$f(x^{**}) < f(x_0) = f(x^{**}) + \rho < f(x^*).$$

On considère les deux ensembles suivants :

$$L_{\delta}^{=} = \left\{ x \in V(x^{**}, \delta) : f(x) = f(x^{**}) + \frac{\rho}{2} \right\}$$

et

$$L_{\delta}^{\leqslant} = \left\{ x \in V(x^{**}, \delta) : f(x) \leqslant f(x^{**}) + \frac{\rho}{2} \right\},\,$$

et pour  $x \in L_{\delta}^{=}$ , on note  $\omega_x = \frac{\varphi(\|x-x^*\|)-\varphi(\|x^{**}-x^*\|)}{f(x)-f(x^{**})}$ 

On a les deux cas suivants :

• Le premier cas :  $||x - x^*|| \le ||x^{**} - x^*||$ . Puisque  $\omega > 0$ , on a

$$\omega > \omega_x = \frac{\varphi(\|x - x^*\|) - \varphi(\|x^{**} - x^*\|)}{(f(x) - f(x^*) - [f(x^{**}) - f(x^*)])}.$$

Ce qui implique

$$-\varphi(\|x - x^*\|) + \omega[f(x) - f(x^*)] > -\varphi(\|x^{**} - x^*\|) + \omega[f(x^{**}) - f(x^*)].$$
 (3.6)

Si  $x \in \mathbb{X}$ , alors

$$G_{\omega}(x, x^*) = -\varphi(\|x - x^*\|) + \omega[f(x) - f(x^*)],$$

et (3.6) est équivalente à

$$G_{\omega}(x, x^*) > G_{\omega}(x^{**}, x^*).$$

Autrement, si  $x \in \mathbb{X}_{\varepsilon} \setminus \mathbb{X}$ , alors

$$G_{\omega}(x, x^*) = -\varphi(\|x - x^*\|) + \omega \min \left\{ f(x) - f(x^*), -\omega \sum_{i \in I'(x)} g_i(x) \right\} + \omega^2 \sum_{i \in I'(x)} g_i(x).$$

D'où, (3.6) implique

$$G_{\omega}(x, x^*) > G_{\omega}(x^{**}, x^*).$$

• Le deuxième cas :  $||x - x^*|| > ||x^{**} - x^*||$ . On a

$$\omega_{x} = \frac{2(\varphi(\|x - x^{*}\|) - \varphi(\|x^{**} - x^{*}\|))}{\rho} \\
< \frac{2L_{\varphi}(\|x - x^{*}\| - \|x^{**} - x^{*}\|)}{\rho} \\
< \frac{2L_{\varphi}(\|x - x^{**}\|)}{\rho} \\
< \frac{2L_{\varphi}\delta}{\rho},$$

donc  $\omega_x$  est borné.

Par conséquent, si  $\omega \geqslant \frac{2L_{\varphi}\delta}{\rho}$ , alors  $\omega > \omega_x$ . Comme le premier cas, on obtient

$$G_{\omega}(x, x^*) > G_{\omega}(x^{**}, x^*).$$

On déduit que si  $\omega \geqslant \frac{2L_{\varphi}\delta}{\rho}$ , alors

$$G_{\omega}(x, x^*) > G_{\omega}(x^{**}, x^*) \quad \forall x \in L_{\delta}^{=}.$$

D'où

$$\arg\min_{x\in L_{\delta}^{\leqslant}}G_{\omega}(x,x^{*}) = \arg\min_{x\in L_{\delta}^{\leqslant}\setminus L_{\delta}^{\equiv}}G_{\omega}(x,x^{*}).$$

Soit  $x_0^{**} \in \arg\min_{x \in L_{\delta}^{\leq}} G_{\omega}(x, x^*)$ . Puisque  $V(x^{**}, \delta)$  est un ouvert, d'après la continuité de f, il existe  $\delta_0 \in ]0, \delta[$  tel que pour tout  $\delta' < \delta_0$ , on a  $V(x_0^{**}, \delta') \subset V(x^{**}, \delta)$ , et

$$G_{\omega}(x_0^{**}, x^*) \leqslant G_{\omega}(x, x^*), \forall x \in V(x_0^{**}, \delta'),$$

où  $V(x_0^{**}, \delta')$  est un  $\delta'$ -voisinage de  $x_0^{**}$ .

D'où,  $x_0^{**} \in V(x^{**}, \delta)$  est minimiseur local de  $G_{\omega}$ .

Remarque 3.1. On a vu que certaines fonctions Filled possèdent la propriété intéressante être globalement convexes. Le résultat suivant montre que sous certaines conditions, la fonction  $G_{\omega}$  dispose aussi cette propriété.

**Théorème 3.7.** On considère la fonction  $G_{\omega}$  (3.1), avec :

- f globalement convexe.
- la fonction  $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$  vérifie les conditions suivantes :
  - $-\varphi$  est une fonction continûment différentiable et lipschitzienne de constante  $L_{\omega}$ .
  - Il existe une constante  $\tilde{a}$  telle que  $\varphi'(t) \leq \tilde{a} < 0$  pour t > 0.

Il existe une constante  $\varpi$  telle que si  $\omega > \varpi$ , alors

- (i)  $G_{\omega}$  possède des propriétés similaires que dans les théorèmes 3.3, 3.5 et 3.6
- (ii)  $x^*$  représente un minimiseur local de f sur  $\Omega$ .
- (iii)  $G_{\omega}$  est globalement convexe.
- (iv) Pour tous  $x_1, x_2 \in \Omega$  vérifiant les conditions suivantes :

- 
$$f(x_1) \geqslant f(x^*)$$
 ou  $x_1 \notin \mathbb{X}_{\varepsilon}$ 

- 
$$f(x_2) \geqslant f(x^*)$$
 ou  $x_2 \notin \mathbb{X}_{\varepsilon}$ , on a

$$||x_2 - x^*|| < ||x_1 - x^*||$$
 si et seulement si  $G_{\omega}(x_2, x^*) < G_{\omega}(x_1, x^*)$ .

Démonstration.

- (i) La démonstration de ce point est similaire que dans les théorèmes 3.3, 3.5 et 3.6.
- (ii) Puisque  $x^*$  est un minimiseur local de f sur  $\Omega$ , il existe un voisinage  $V(x^*, \delta)$  de  $x^*$  tel que

$$f(x) \geqslant f(x^*)$$
  $\forall x \in V(x^*, \delta) \cap \Omega.$ 

Ce qui implique que

$$G_{\omega}(x, x^*) = -\varphi(\|x - x^*\|) \qquad \forall x \in V(x^*, \delta) \cap \Omega.$$

Par conséquent, pour  $x \neq x^*$ , on a

$$G_{\omega}(x, x^*) = -\varphi(\|x - x^*\|) > -\varphi(0) = G_{\omega}(x^*, x^*) \qquad \forall x \in V(x^*, \delta) \cap \Omega..$$

D'où,  $x^*$  représente un minimiseur local strict de  $G_{\omega}$  sur  $\Omega$ . (iii) On a

$$\varphi(t) = \int_0^t \varphi'(s) ds \le \int_0^t \tilde{a} ds = \tilde{a}t \longrightarrow -\infty \quad \text{si} \quad t \longrightarrow +\infty.$$

-Si  $f(x) - f(x^*) \ge \omega \eta(x)$ , alors

$$G_{\omega}(x, x^*) = -\varphi(||x - x^*||).$$

D'où

$$\lim_{\|x\|\to\infty} G_{\omega}(x, x^*) = \lim_{\|x\|\to\infty} -\varphi(\|x - x^*\|) = +\infty.$$

-Si  $f(x) - f(x^*) < \omega \eta(x)$ , alors

$$G_{\omega}(x, x^*) = -\varphi(\|x - x^*\|) + \omega(f(x) - f(x^*)) - \omega^2 \eta(x)$$
  
>  $-\varphi(\|x - x^*\|) + \omega(f(x) - f(x^*)).$ 

Puisque f est globalement convexe, on trouve

$$\lim_{\|x\| \to \infty} (-\varphi(\|x - x^*\|) + \omega(f(x) - f(x^*))) = +\infty.$$

Par conséquent

$$\lim_{\|x\| \to \infty} G_{\omega}(x, x^*) = +\infty.$$

D'où,  $G_{\omega}$  est globalement convexe.

(iv) D'après les hypothèses, pour  $i=1,2, \text{ on a si } \omega > \varpi_1, \text{ alors}$ 

$$G_{\omega}(x_i, x^*) = -\varphi(\|x^* - x_i\|).$$

Par conséquent

$$||x_2 - x^*|| < ||x_1 - x^*||$$
 si et seulement si  $G_{\omega}(x_2, x^*) < G_{\omega}(x_1, x^*)$ .

Ce dernier théorème nous conduit au corollaire suivant :

Corollaire 3.2. Si on considère la fonction  $G_{\omega}$  définie dans (3.1), avec la fonction  $\varphi$  vérifiant les mêmes conditions que dans le théorème 3.7, il existe une constante  $\varpi$  telle que si  $\omega > \varpi$ , alors :

 $x_g \in \operatorname{int}(\Omega)$  est un minimiseur global du problème (PC), si est seulement si,  $x_g$  est un minimiseur unique de  $G_{\omega}(., x_g)$  sur  $\Omega$ .

#### Démonstration.

Supposons que  $x_g \in int(\Omega)$  est un minimiseur global du problème (PC). Il est facile de voir que, dans ce cas, si  $\omega > \varpi_1$  alors pour tout  $x \in \Omega$ , on a

$$G_{\omega}(x, x_q) = -\varphi(\|x - x_q\|). \tag{3.7}$$

Ce qui implique que

$$\nabla G_{\omega}(x, x_g) = -\frac{\varphi'(\|x - x_g\|)(x - x_g)}{\|x - x_g\|} \neq 0 \qquad \forall x \in int(\Omega), x \neq x_g.$$

De plus, d'après le point (iv) du théorème précédent, tous les minimiseurs de la fonction définie par l'expression (3.7) sont dans  $int(\Omega)$ .

Maintenant, si  $x_g \in int(\Omega)$  n'est pas un minimiseur global du problème (PC), il existe un autre minimiseur  $x' \in int(\Omega)$  tel que  $f(x') < f(x_g)$ . Donc, il existe une constante  $\varpi'$  telle que si  $\omega > \varpi'$ , la fonction  $G_{\omega}(.,x_g)$  possède un minimiseur différent de  $x_g$  et qui se trouve au voisinage de x'; ce qui est contradictoire et le théorème est prouvé pour  $\varpi = \max\{\varpi_1, \varpi'\}$ .

D'après les théorèmes précédents, si le paramètre  $\omega$  est choisi suffisamment grand, alors :

• Tous les minimiseurs locaux de  $G_{\omega}$  sont dans la région  $\widehat{\mathbb{X}}_{\varepsilon} \cup \operatorname{Fr}(\Omega)$ , avec :

$$\widehat{\mathbb{X}}_{\varepsilon} = \left\{ x^{'} \in \mathbb{X}_{\varepsilon} \mid f(x^{'}) < f(x^{*}) \text{ ou } f(x^{'}) = f(x^{*}) \text{ et } x \text{ n'est pas un minimiseur de } f \right\}.$$

- Tout minimiseur  $x^* \in int(\Omega)$  de  $G_{\omega}$  sur  $\mathbb{X}$  est un minimiseur  $\varepsilon$ -approché de f où  $\varepsilon$  est une constante que l'on peut choisir aussi petite que l'on veut.
- Tout minimiseur  $x^* \in int(\Omega)$  du problème (PC) se trouve dans un voisinage d'un minimiseur de la fonction  $G_{\omega}$ .

En utilisant toutes ces propriétés, nous introduisons dans la section suivante une procédure d'optimisation qui converge vers un minimiseur global approché de (PC).

# 3.4 La méthode de descente globale

### 3.4.1 Algorithme de descente globale

Les propriétés théoriques de la fonction de descente globale discutées dans la section précédente nous donnent une idée sur la façon de trouver un minimiseur global approché du problème (PC). Un algorithme basé sur ces propriétés peut être décrit comme suit :

#### Algorithme 6:

#### Étape 1 Initialisation

- (i) Choisir les composantes suivantes :
  - $\omega_U > 0$  une borne supérieure de  $\omega$ .
  - $\omega_0$  une valeur initiale du paramètre  $\omega$ .
  - $\bullet$   $\overline{\omega}$  un facteur de croissance.
- (ii) Générer un point initial  $x_s$  pour le problème (PC).
- (iii) Prendre k = 0.

#### Étape 2

Utiliser une méthode de recherche locale pour trouver un minimiseur local  $x_k^*$  de f sur  $\mathbb{X}$  en partant du point  $x_s$ .

#### Étape 3:

- (i) Prendre  $\omega = \omega_0$ .
- (ii) En utilisant un point de départ  $x_k$  généré selon la loi uniforme, résoudre le problème

$$\min_{\Omega} G_{\omega}(x, x_k^*)$$

par une méthode de recherche locale pour trouver un minimiseur  $x_{\omega}$ . Si  $x_{\omega} \in \mathbb{X}$  et  $f(x_{\omega}) < f(x_k^*)$ , déterminer un point faisable  $x_s$  dans un voisinage de  $x_{\omega}$ ,  $k \leftarrow k+1$  et aller à l'étape 2.

Sinon, passer à l'étape 4.

#### Étape 4

- (i) Si  $\omega \leq \omega_U$ , augmenter  $\omega$  en posant  $\omega := \overline{\omega}\omega$ ,  $x_{k+1}^* \leftarrow x_k^*$ ,  $k \leftarrow k+1$  et allez à l'étape(3,ii), sinon, passez à l'étape suivante.
- (ii) Si les conditions d'arrêt ne sont pas satisfaites, poser  $x_{k+1}^* \leftarrow x_k^*$ ,  $k \leftarrow k+1$  et revenir à l'étape (3,ii), sinon, l'algorithme s'arrête et  $x_k^*$  sera considéré comme un minimiseur global du problème (PC).

La procédure décrite par l'algorithme ci-dessus est composée de deux phases. La

première phase a pour but de déterminer des minimiseurs locaux de f et la deuxième tente d'atteindre des minimiseurs approchés de la fonction f dans la région

$$\{x \in \mathbb{X} \text{ et } f(x) < f(x_k^*)\}.$$

### 3.4.2 Convergence asymptotique

Dans cette sous-section nous montrons d'une manière similaire que dans la référence [70], que l'algorithme de descente globale proposé dans la sous-section précédente converge asymptotiquement vers un minimum global approché.

La définition (3.1) conduit à la définition suivante qui précise l'ensemble des points qui sont dans les voisinages des minimiseurs globaux du problème (PC):

**Définition 3.2.** Soit  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble des solutions  $\varepsilon$ -approchées du problème (PC) est défini comme suit :

$$S_{\varepsilon}^* = \left\{ x \in \mathbb{X}_{\varepsilon} : f(x) < f(x_*) + \varepsilon \right\},\,$$

où  $x^*$  est un minimiseur global de (PC).

On suppose qu'une méthode d'optimisation qui converge vers un minimiseur local est disponible.

On considère les deux suites suivantes :

- $\{x_k\}$ : la suite des points générés suivant la loi uniforme durant l'algorithme.
- $\{x_k^*\}$ : la suite des minimiseurs locaux obtenus tels que :

$$f(x_1^*) \ge \dots \ge f(x_k^*) \ge f(x_{k+1}^*) \dots \ge f(x^*)$$
 et  $x_i^* \in \mathbb{X}_{\varepsilon}$ .

Sans perdre de généralité, supposons que  $S_{\varepsilon}^* \neq \Omega$ . Ainsi, il est évident que

$$0 < \lambda_n(S_{\varepsilon}^*) < \lambda_n(\Omega).$$

Puisque les points  $x_k$  sont choisis d'une manière uniforme et indépendante, on a :

$$P(\{x_k \notin S_{\varepsilon}^*\}) = P(\{x_{k+1} \notin S_{\varepsilon}^*\}) = 1 - \frac{\lambda_n(S_{\varepsilon}^*)}{\lambda_n(\Omega)} < 1, \qquad k = 1, 2, \dots$$
 (3.8)

On a le résultat suivant :

**Théorème 3.8.**  $\{x_k^*\}$  converge vers un point de  $S_{\varepsilon}^*$ , c-à-d

$$P\left(\lim_{k \to +\infty} \left\{ f(x_k^*) < f(x^*) + \varepsilon \right\} \right) = 1.$$

Démonstration.

Il est facile de voir que la démonstration de ce théorème revient à prouver que

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}\left\{f(x_l^*) - f(x^*) \ge \delta\right\}\right) = 0, \quad \text{pour} \quad \delta \ge \varepsilon.$$
 (3.9)

D'abord, nous allons voir que

$$P(\{f(x_k^*) - f(x^*) \ge \delta\}) \le (P(\{x_k \notin S_{\varepsilon}^*\}))^{k-1}, \qquad k = 2, 3, \dots$$
 (3.10)

Soient les événements suivants :

- $E_k = \{x_k \in S_{\varepsilon}^*\}$
- $F_k = \{x_k^* \notin S_\varepsilon^*\}$
- $G_k = \{$  la minimisation de G converge vers un point de  $x' \in S_{\varepsilon}^* \}$ .

Il est évident que

$$\overline{G_k} \subseteq \overline{E_k}$$
 et  $F_{k+1} \subseteq F_k \cap \overline{G_k}$ .

D'où

$$P(F_{k+1}) \leq P(F_k \cap \overline{G_k})$$
  
  $\leq P(F_k \cap \overline{E_k}).$ 

Puisque les points  $x_k$  sont choisis indépendants et d'une manière uniforme, alors :

$$P(F_{k+1}) \leq P(F_k) \cdot P(\overline{E_k})$$

$$\leq P(F_1) \cdot \prod_{l=1}^{k} P(x_l \notin S_{\varepsilon}^*)$$

$$\leq \prod_{l=1}^{k} P(x_l \notin S_{\varepsilon}^*)$$

$$= (P(x_l \notin S_{\varepsilon}^*))^k.$$

De plus, on a pour tout  $\delta > 0$ ,  $\delta \ge \varepsilon$ 

$$\{f(x_k^*) - f(x^*) \ge \delta\} \subseteq F_k, \qquad k = 2, 3, \dots$$

Ce qui implique que

$$P(\{f(x_k^*) - f(x^*) \ge \delta\}) \le P(F_k)$$
  
  $\le (P(\{x_k \notin S_{\varepsilon}^*\}))^{k-1}, \qquad k = 2, 3, ...$ 

D'où (3.10).

Revenons maintenant à la démonstration de (3.9) en utilisant (3.10). On a

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}\left\{f(x_{l}^{*})-f(x^{*})\geq\delta\right\}\right) \leq \lim_{k\to\infty}P\left(\bigcup_{l=k}^{\infty}\left\{f(x_{l}^{*})-f(x^{*})\geq\delta\right\}\right)$$

$$\leq \lim_{k\to\infty}\sum_{l=k}^{\infty}P\left(\left\{f(x_{l}^{*})-f(x^{*})\geq\delta\right\}\right)$$

$$\leq \lim_{k\to\infty}\sum_{l=k}^{\infty}\left(P\left(\left\{x_{k}\notin S_{\varepsilon}^{*}\right\}\right)\right)^{l-1}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\left(P\left(\left\{x_{k}\notin S_{\varepsilon}^{*}\right\}\right)\right)^{k-1}}{1-P\left(\left\{x_{k}\notin S_{\varepsilon}^{*}\right\}\right)}$$

$$= 0.$$

Ainsi on a (3.9) et par conséquent le théorème est prouvé.

#### 3.4.3 Condition d'arrêt

Dans tout algorithme itératif, se pose la question du choix de la procédure d'arrêt. Pour notre algorithme, on a choisi une règle d'arrêt bayésienne inspirée des algorithmes dits Multistart. Elle a été introduite pour la première fois par Boender et Rinnooy Kan [2, 3].

Soit k le nombre des minima locaux de la fonction objectif f. Notons la mesure de Lebesgue de la i-ème région d'attraction par  $\theta_i$ : i=1,...,k. Si ces valeurs sont connues, nous pouvons introduire plusieurs bonnes règles d'arrêt. Cependant, dans la pratique, elles sont presque toujours inconnues.

Dans cette approche bayésienne, les inconnus  $k, \theta_i : i = 1, ..., k$  sont supposés être elles-mêmes des variables aléatoires  $K, \Theta_i$ , avec des réalisations  $k, \theta_i$  pour lesquelles une distribution à priori peut être spécifiée. Compte tenu du résultat de certain nombre de recherches locales, le théorème de Bayes est utilisé pour déterminer la distribution à posteriori de k. Si t minima locaux différents ont été trouvés à partir de n recherches locales indépendantes, alors on a le résultat suivant [2, 3]:

Théorème 3.9. Une estimation du nombre total des minima locaux est donné par

$$E(k|\{n_1,...,n_t\}) = \frac{t(n-1)}{n-t-2},$$

 $si \ n \ge t + 3.$ 

Pour la preuve, il suffit de voir la référence [3].

Plusieurs auteurs des méthodes Multistart utilisent la condition d'arrêt suivante :

$$\frac{t(n-1)}{n-t-2} - t \le \frac{1}{2}. (3.11)$$

D'une manière générale, lorsque la dimension d'un problème de minimisation globale est élevée ou bien le diamètre du domaine faisable est grand, des recherches locales supplémentaires sont nécessaires pour trouver un minimiseur global. Donc, nous pensons que ce serait mieux si un critère d'arrêt peut être lié à la dimension du problème à résoudre et au diamètre du domaine faisable. Pour cette raison, il est préférable d'utiliser le critère suivant :

$$\frac{t(n-1)}{n-t-2} - t \le \frac{1}{\xi},\tag{3.12}$$

avec  $\xi \geq 2$  une constante qui dépend de la dimension du problème à résoudre et d'une borne supérieure du diamètre du domaine faisable.

Un des avantages de notre approche par rapport aux méthodes Multistart est que, à chaque étape de l'algorithme, on a l'assurance d'éliminer des minimiseurs qui ne sont pas intéressantes. Cependant, notre critère (3.12) est inefficace pour des fonctions  $G_{\omega}(.,x_k^*)$  possédant des minimiseurs sur la frontière de  $\Omega$ . Afin de palier à ce défaut, on propose dans notre algorithme de minimiser durant l'étape (4,ii) une fonction globalement convexe  $\tilde{G}_{\omega}(.,x_k^*)$  telle que, si on s'assure qu'elle admette un seul minimiseur  $x' \in int(\Omega)$ , alors ce dernier représente un minimiseur global du problème (P), comme le montre le corollaire (3.2). Donc, notre algorithme de descente globale sera arrêté lorsque l'inégalité (3.12) sera satisfaite pour t = 1, c-à-d

$$n \ge 2\xi + 3$$
.

## 3.4.4 Un exemple illustratif

On considère le problème d'optimisation suivant avec une fonction objectif non convexe et un domaine non convexe :

$$\begin{cases} \min f(x) = -\cos\left(\left|\frac{x-1}{4}\right| + \left|\sin\left(\pi\left(1 + \frac{x-1}{4}\right)\right)\right| + 1\right) \\ s.c. \\ |x| - 10 \leqslant 0 \\ -|x| + 2 \leqslant 0 \\ x \in \Omega = [-20, +20] \, . \end{cases}$$

Les figures suivantes décrivent le comportement de l'algorithme de descente globale en plusieurs étapes :

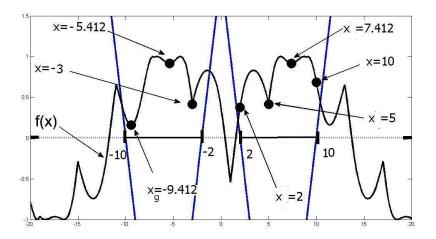


FIGURE 3.1 – Les fonctions f et  $g_i$ 

• Dans la figure 3.1, on peut voir que la région faisable est :

$$X = [-10, -2] \cup [2, 10],$$

et la fonction objectif a sept minimiseurs vérifiant les contraintes : x=-9.412, x=-5.412, x=-3, x=2, x=5, x=7.412, x=10.

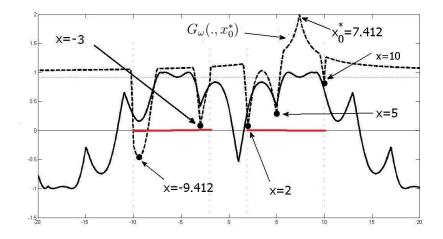


FIGURE 3.2 –  $G_{\omega}(., x_0^*)$ 

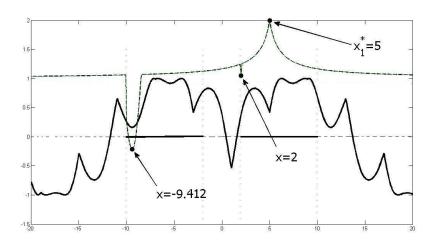


Figure 3.3 –  $G_{\omega}(., x_1^*)$ 

- L'algorithme génère un point de départ faisable suivant une loi de probabilité uniforme  $(x_s = 8.4)$ , puis une minimisation de la fonction objectif est exécutée afin d'obtenir un minimiseur local, dans notre cas,  $x_0^* = 7.412$ .
- $\bullet$  La construction de  $\,G_{\omega}$  sur  $\,x_0^*,x_1^*,x_2^*,x_3^*\,$  est illustrée sur les figures 3.2-3.5.

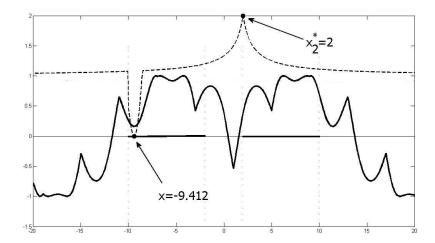


FIGURE 3.4 –  $G_{\omega}(., x_2^*)$ 

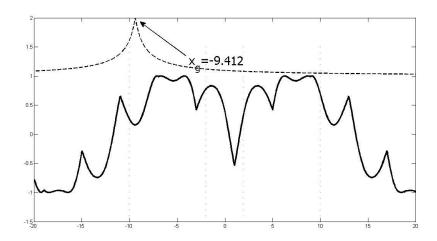


FIGURE 3.5 –  $G_{\omega}(., x_3^*)$ 

- La figure 3.5 illustre l'étape (4,i) de l'algorithme. La fonction de descente globale n'a pas de minimiseurs locaux faisables. L'algorithme augmente  $\omega$  jusqu'à  $\omega > \omega_U$ .
- La figure 3.6 illustre l'étape (4,ii) de l'algorithme. Sept minimisations ont été effectuées sur une fonction  $\tilde{G}_{\omega}(.,x_3^*)$  globalement convexe sans l'obtention d'un nouveau minimiseur,  $x_3^* = -9.412$  est considéré comme une solution globale de notre problème.

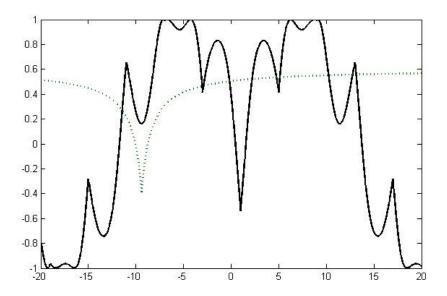


Figure 3.6 –  $\tilde{G}_{\omega}(.,x_g)$ 

Remarque 3.2. Dans cet exemple, le domaine faisable est  $\mathbb{X} = [-10, -2] \cup [2, 10]$ , malgré que le point de départ se trouve dans [2, 10], l'algorithme converge vers un minimiseur global contenu dans [-10, -2].

Remarque 3.3. Nous pouvons prendre comme valeur initiale  $\omega_0 = \overline{\omega}_2$ . Le but de l'augmentation du paramètre  $\omega$  est de satisfaire la condition  $\omega > \max{\{\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_3\}}$ . Notons que la constante  $\rho$  dépend de la régularité de la fonction objectif. Si nous pouvons calculer la constante  $K_{\epsilon}$ , de meilleurs résultats peuvent être obtenus. Pour estimer cette constante, les résultats suivants peuvent être utilisés [49, 58]:

- Si f est continûment différentiable, alors  $K_0 = ||f'||_{\infty}$ .
- Si f est de Lipschitz de constante L, alors  $K_0 \leq L$ .
- Si f est de Hölder avec une constante h et d'exposant  $\frac{1}{\beta}(\beta > 1)$ , alors

$$K_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\beta - 1} \left( \frac{h(\beta - 1)}{\beta \varepsilon} \right)^{\beta}.$$

• Si on a seulement la continuité de f, alors

$$K_{\varepsilon} = \sup_{x', x'' \in \Omega} \frac{|f(x') - f(x'')| - \varepsilon}{\|x' - x''\|}.$$

# 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a proposé une nouvelle fonction auxiliaire de descente globale qui permet de résoudre des problèmes d'optimisation globale avec contraintes. On peut l'appliquer à des problèmes complexes dont la fonction objectif est non régulière et dans le cas où le domaine faisable est non connexe et non convexe. De plus, elle possède seulement un seul paramètre facile à ajuster. Une propriété importante de cette fonction est que ces minimiseurs locaux sont des minimiseurs approchés de la fonction objectif. En plus, elle pénalise les solutions qui ne sont pas intéressantes. La performance de notre algorithme est assurée par une bonne estimation du paramètre  $\omega$ . Dans un grand nombre de situations, un choix approprié peut être facilement trouvé.

# Chapitre 4

# Utilisation de la nouvelle fonction de descente globale pour résoudre des problèmes d'optimisation discrète

#### Sommaire

4.1	Introduction
4.2	Préliminaire sur l'optimisation discrète 92
4.3	Quelques propriétés de la nouvelle fonction de descente globale pour l'optimisation discrète 93
4.4	Description de l'algorithme
4.5	Exemples illustratifs
4.6	Conclusion

# 4.1 Introduction

Plusieurs méthodes déterministes et stochastiques ont été développées pour résoudre des problèmes d'optimisation discrète au cours de ces dernières décennies. Bien que chaque méthode a ses propres avantages, elles sont toutes confrontées à des difficultés plus ou moins surmontables. Par exemple, les méthodes de type séparation et évaluation ne réussissent pas généralement à trouver une solution optimale si la fonction objectif n'est pas convexe.

Plusieurs approches stochastiques pour le cas continu sont aussi appliquées à

l'optimisation discrète, par exemple, la méthode du Recuit Simulé et les algorithmes génétiques. Malgré qu'il n'y ait aucune garantie que ces méthodes obtiennent une optimalité globale, elles réussissent généralement à trouver des solutions dites quasi-optimales pour une variété de problèmes d'optimisation globale discrète.

Le but de ce chapitre est de donner une version de la méthode de descente globale pour l'optimisation discrète en utilisant notre fonction proposée dans le chapitre 3.

# 4.2 Préliminaire sur l'optimisation discrète

Dans cette section, nous rappelons quelques notions d'analyse et de l'optimisation discrète. Pour plus de détails, on peut voir les références [32, 41].

**Définition 4.1.** Une suite  $\{x^{(i)}\}_{i=0}^{u+1}$  est appelée un chemin discret dans un ensemble  $\mathbb{X}$  entre deux points distincts  $x^*$  et  $x^{**}$  de  $\mathbb{X}$  si :

- $x^{(0)} = x^*, x^{(u+1)} = x^{**}$  et pour tout  $i \in \{0, ..., u+1\} : x^{(i)} \in \mathbb{X}$ .
- $x^{(i)} \neq x^{(j)}$  pour  $i \neq j$ .
- Pour tout  $i \in \{0, ..., u\} : ||x^{(i+1)} x^{(i)}|| = 1$ .

Si un tel chemin discret existe, alors on dit que  $x^*$  et  $x^{**}$  sont connectés dans  $\mathbb{X}$ . En plus, on dit que  $\mathbb{X}$  est un ensemble connecté si n'importe quels deux points de  $\mathbb{X}$  sont connectés.

Soit

$$\mathbb{D} = \{ \pm e_i, i = 1, ..., n \}$$

l'ensemble des directions axiales, où  $e_i$  est un vecteur unitaire de dimension n ( la i-ème composante est égale à un et les autres sont des zéros).

**Définition 4.2.** Pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$ , un voisinage discret de x est l'ensemble suivant :

$$V(x) = \{x, x \pm d, d \in \mathbb{D}\}.$$

**Définition 4.3.** Un point  $x \in \mathbb{X}$  est appelé un coin (sommet) de  $\mathbb{X}$  si pour chaque  $d \in \mathbb{D}$ ,  $x + d \in \mathbb{X}$  implique  $x - d \notin \mathbb{X}$ .

On note par  $S_{\mathbb{X}}$  l'ensemble des points coins d'un ensemble  $\mathbb{X}$ .

**Définition 4.4.** Un point  $x^* \in \mathbb{X}$  est appelé minimiseur local discret de f sur  $\mathbb{X}$  si :  $f(x^*) \leq f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{X} \cap V(x^*)$ . De plus, si  $f(x^*) \leq f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{X}$  alors  $x^*$  est appelé minimiseur global discret de f sur  $\mathbb{X}$ .

# 4.3 Quelques propriétés de la nouvelle fonction de descente globale pour l'optimisation discrète

On considère le problème d'optimisation globale suivant :

$$(PD) \begin{cases} \operatorname{Glob} \min f(x) \\ s.c. \\ x \in \mathbb{X}, \end{cases}$$

où  $\mathbb{X}$  est un ensemble connecté fini et f une fonction réelle définie sur chaque point de  $\mathbb{X}$ .

Dans ce cas, l'expression de  $G_{\omega}$  sera comme suit :

$$G_{\omega}(x, x^*) = -\varphi(\|x - x^*\|) + \omega \min\{f(x) - f(x^*), 0\}.$$

Dans la suite, nous utilisons les notations suivantes :

•  $K_{\mathbb{X}}$  est une constante positive telle que

$$0 < \max_{x', x'' \in \mathbb{X}} ||x' - x''|| \le K_{\mathbb{X}} < \infty.$$

•  $\tau$  est une constante telle que

$$0<\tau\leq \min\{|f(x^{'})-f(x^{''})|:x^{'},x^{''}\in\mathbb{X},\ f(x^{'})\neq f(x^{''})\}.$$

$$\bullet \ \kappa = \frac{L_{\varphi}K_{\mathbb{X}}}{\tau}.$$

On fait l'hypothèse suivante :

• Hypothèse 1 : il existe au moins un minimiseur global strict de (PD) contenu dans  $\mathbb{X}\backslash S_{\mathbb{X}}$ .

Dans les prochains résultats, nous montrons que  $G_{\omega}$  vérifie les conditions de la définition de la fonction de descente globale suivante :

**Définition 4.5.** Une fonction  $G: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$  est dite fonction de descente globale discrète d'une fonction f en un minimiseur local  $x^*$  de f, si elle vérifie les conditions suivantes :

- (D1)  $x^*$  représente un maximiseur global strict de G sur X.
- (D2) G n'admet aucun minimiseur local sur  $\hat{\mathbb{X}}(x^*)\backslash S_{\mathbb{X}}$ , où

$$\hat{\mathbb{X}}(x^*) = \{ x \in \mathbb{X} : x \neq x^*, f(x) \ge f(x^*) \}.$$

- (D3) Soit x' un minimiseur local de  $G_{\omega}$  sur  $\mathbb{X}$ . S'il existe une direction faisable  $d^*$  sur x' tel que  $||x' + d^* x^*|| > ||x' x^*||$ , alors x' représente un minimiseur local de f sur  $\mathbb{X}$ .
- (D4) Si  $x^{**} \in \mathbb{X}$  est un minimiseur local strict de f sur  $\mathbb{X}$  avec  $f(x^{**}) < f(x^{*})$ , alors  $x^{**}$  est un minimiseur local strict de G sur  $\mathbb{X}$ .

Lemme 4.1. On a les assertions suivantes :

1. Pour tous  $x^*, x^{**} \in \mathbb{X}$  et  $d \in \mathbb{D}$ , on a

$$||x^{**} - x^*|| \neq ||x^{**} + d - x^*||.$$

2. Pour tous  $x^*, x^{**} \in \mathbb{X}$ , s'il existe  $i \in \{1, ..., n\}$  tel que  $x^* \pm e_i \in \mathbb{X}$ , alors il existe une direction  $d \in \mathbb{D}$  telle que  $||x^{**} + d - x^*|| > ||x^{**} - x^*||$ .

Démonstration.

1) Pour  $d = \pm e_i$ , on a

$$||x^{**} + d - x^{*}||^{2} - ||x^{**} - x^{*}||^{2} = 2\operatorname{sgn}(d_{i})(x_{i}^{**} - x_{i}^{*}) + 1 \neq 0,$$

οù

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a > 0 \\ -1 & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

D'où on a le premier point.

Pour le deuxième point, il suffit de poser  $d = e_i$  si  $x_i^{**} - x_i^* \ge 0$ , dans le cas contraire, on prend  $d = -e_i$ .

**Lemme 4.2.** Pour tous  $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$  vérifiant  $f(x_1) \ge f(x^*)$  et  $f(x_2) \ge f(x^*)$ , on a  $||x_2 - x^*|| > ||x_1 - x^*||$  si et seulement si  $G_{\omega}(x_2, x^*) < G_{\omega}(x_1, x^*)$ .

Démonstration.

Selon les hypothèses, pour i = 1, 2, on a

$$G_{\omega}(x_i, x^*) = -\varphi(\|x_i - x^*\|).$$

Par conséquent,

 $||x_2 - x^*|| > ||x_1 - x^*||$  si et seulement si  $G_{\omega}(x_2, x^*) < G_{\omega}(x_1, x^*)$ .

**Lemme 4.3.** Pour tous  $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$  vérifiant les conditions suivantes :

1) 
$$f(x_1) \ge f(x^*) > f(x_2)$$

2) 
$$||x_2 - x^*|| > ||x_1 - x^*||$$

on a

$$G_{\omega}(x_2, x^*) < G_{\omega}(x_1, x^*).$$

Démonstration.

D'après les hypothèses, on a

$$G_{\omega}(x_{2}, x^{*}) = -\varphi(\|x_{2} - x^{*}\|) + \omega \left[f(x_{2}) - f(x^{*})\right]$$

$$< -\varphi(\|x_{2} - x^{*}\|)$$

$$< -\varphi(\|x_{1} - x^{*}\|) = G_{\omega}(x_{1}, x^{*}).$$

**Lemme 4.4.** Pour tous  $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$  vérifiant les conditions suivantes :

1) 
$$f(x^*) \ge f(x_1) > f(x_2)$$

2) 
$$||x_1 - x^*|| < ||x_2 - x^*||$$

on a

$$G_{\omega}(x_1, x^*) > G_{\omega}(x_2, x^*).$$

Démonstration.

Pour tous  $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$  vérifiant les hypothèses du lemme, on a

$$-\varphi(\|x_1 - x^*\|) > -\varphi(\|x_2 - x^*\|), \tag{4.1}$$

et

$$\omega [f(x_1) - f(x^*)] > \omega [f(x_2) - f(x^*)].$$
 (4.2)

De (4.1) et (4.2) on obtient

$$G_{\omega}(x_1, x^*) > G_{\omega}(x_2, x^*).$$

**Théorème 4.1.**  $x^*$  représente un maximiseur global strict de  $G_{\omega}$  sur  $\mathbb{X}$ .

Démonstration.

Pour tout  $x \in \mathbb{X}$  tel que  $x \neq x^*$ , on a

$$G_{\omega}(x, x^{*}) = -\varphi(\|x - x^{*}\|) + \omega \min\{f(x) - f(x^{*}), 0\}$$

$$\leq -\varphi(\|x - x^{*}\|)$$

$$< -\varphi(0)$$

$$= G_{\omega}(x^{*}, x^{*}).$$

D'où,  $x^*$  représente un maximiseur global strict de  $G_{\omega}$  sur  $\mathbb{X}$ .

**Théorème 4.2.**  $G_{\omega}$  n'a pas de minimiseur dans la région  $\widehat{\mathbb{X}}(x^*)\backslash S_{\mathbb{X}}$ .

 $D\'{e}monstration.$ 

Pour tout  $x \in \widehat{\mathbb{X}}(x^*) \backslash S_{\mathbb{X}}$ , il existe  $i \in \{1, ..., n\}$  tel que  $x \pm e_i \in \mathbb{X}$ . D'après Lemme 4.1, il existe une direction  $\overline{d} \in \mathbb{D}$  telle que

$$||x + \overline{d} - x^*|| > ||x - x^*||.$$

On considère les deux cas suivants :

1) Si  $f(x + \overline{d}) \ge f(x^*)$ , alors d'après Lemme 4.2 on obtient

$$G_{\omega}(x + \overline{d}, x^*) < G_{\omega}(x, x^*).$$

2) Si  $f(x + \overline{d}) < f(x^*)$ , alors d'après Lemme 4.3 on trouve

$$G_{\omega}(x+\overline{d},x^*) < G_{\omega}(x,x^*).$$

D'où,  $G_{\omega}$  n'a pas de minimiseurs dans la région  $\widehat{\mathbb{X}}(x^*)\backslash S_{\mathbb{X}}$ .

**Théorème 4.3.** Soit x' un minimiseur local de  $G_{\omega}$  sur  $\mathbb{X}$ . On suppose qu'il existe une direction faisable  $d^*$  sur x' telle que  $\|x'+d^*-x^*\| > \|x'-x^*\|$ , alors il existe une constante  $\kappa_1 < \kappa$ , telle que si  $\omega > \kappa_1$ , x' représente un minimiseur local de f sur  $\mathbb{X}$ .

Démonstration.

D'abord, puisque x' est un minimiseur local de  $G_{\omega}$ , alors pour toute direction faisable  $d \in \mathbb{D}$  sur x', on a

$$G_{\omega}(x', x^*) \le G_{\omega}(x' + d, x^*).$$

Si on suppose que  $f(x') \ge f(x^*)$  alors

$$G_{\omega}(x' + d^*, x^*) = -\varphi(\|x' + d^* - x^*\|) + \omega \min\{f(x' + d^*) - f(x^*), 0\}$$

$$\leq -\varphi(\|x' + d^* - x^*\|)$$

$$< -\varphi(\|x' - x^*\|)$$

$$= G_{\omega}(x', x^*).$$

Il s'agit d'une contradiction et par conséquent  $f(x') < f(x^*)$ .

Maintenant, si on suppose au contraire qu'il existe une direction  $\overline{d} \in \mathbb{D}$  telle que  $f(x' + \overline{d}) < f(x')$ , alors si  $||x' - x^*|| < ||x' + \overline{d} - x^*||$ , l'utilisation du Lemme 4.4 nous donne

 $G_{\omega}(x', x^*) > G_{\omega}(x' + \overline{d}, x^*).$ 

$$+ u - x \parallel$$
, I utilisation du Lemme 4.4 nous donn

Ce qui contredit le fait que x' est un minimiseur local de  $G_{\omega}$ . D'autre part, si  $||x'-x^*|| \ge ||x'+\overline{d}-x^*||$ , on suppose que

$$\gamma_{1} = \min_{d \in \widehat{\mathbb{D}}(x')} \{ f(x') - f(x'+d) \} > 0$$

avec  $\widehat{\mathbb{D}}(x') = \{d \in \mathbb{D} : x' + d \in \mathbb{X}, f(x') > f(x' + d)\}.$  Si  $\omega > \frac{L_{\varphi}K_{\mathbb{X}}}{\gamma_1}$ , alors

$$\omega > \frac{L_{\varphi}(\|x' - x^*\| - \|x' + \overline{d} - x^*\|)}{f(x') - f(x' + \overline{d})}$$
$$> \frac{\varphi(\|x' - x^*\|) - \varphi(\|x' + \overline{d} - x^*\|)}{f(x') - f(x' + \overline{d})}.$$

Ce qui implique que

$$\omega\{f(x') - f(x' + \overline{d})\} > \varphi(\|x' - x^*\|) - \varphi(\|x' + \overline{d} - x^*\|).$$

D'où

$$G_{\omega}(x', x^*) > G_{\omega}(x' + \overline{d}, x^*).$$

Encore une fois, il s'agit d'une contradiction.

Par conséquent, x' représente un minimiseur local de f si  $\omega > \kappa_1 = \frac{L_{\varphi}K_{\mathbb{X}}}{\gamma_1}$ .

**Théorème 4.4.** Soit  $x^{**}$  un minimiseur local strict de f sur  $\mathbb{X}$  avec  $f(x^{**}) < f(x^{*})$ . Il existe une constante  $\kappa_2 < \kappa$  telle que si  $\omega > \kappa_2$ ,  $x^{**}$  représente un minimiseur local strict de  $G_{\omega}$  sur  $\mathbb{X}$ .

 $D\'{e}monstration.$ 

Soit  $\overline{d} \in \mathbb{D}$ . D'après Lemme 4.1, on a

$$||x^{**} - x^*|| \neq ||x^{**} + \overline{d} - x^*||.$$

Donc, nous considérons les deux cas suivants :

Premier cas:  $||x^{**} - x^*|| > ||x^{**} + \overline{d} - x^*||$ .

D'une part, si  $f(x^{**}) < f(x^{**} + \overline{d}) \le f(x^{*})$ , alors par Lemme 4.4, on obtient

$$G_{\omega}(x^{**}, x^{*}) < G_{\omega}(x^{**} + \overline{d}, x^{*}).$$

D'autre part, si  $f(x^{**}) < f(x^*) \le f(x^{**} + \overline{d})$ , alors, en utilisant Lemme 4.3, nous obtenons

$$G_{\omega}(x^{**}, x^{*}) < G_{\omega}(x^{**} + \overline{d}, x^{*}).$$

Deuxième cas :  $||x^{**} - x^*|| < ||x^{**} + \overline{d} - x^*||$ .

Posons

$$\gamma_2 = \min_{d \in \widehat{\mathbb{D}}(x^{**})} \{ f(x^{**} + d) - f(x^{**}) \} > 0$$

et

$$\gamma_3 = \min_{\substack{x_1, x_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{X}) \\ f(x_1) \neq f(x_2)}} |f(x_1) - f(x_2)|$$

avec:

- $\widehat{\mathbb{D}}(x^{**}) = \{d \in \mathbb{D} : x^{**} + d \in \mathbb{X}\}.$
- $\mathcal{L}(\mathbb{X})$  l'ensemble des minimiseurs locaux de f sur  $\mathbb{X}$ .

Si  $f(x^{**}) < f(x^{**} + \overline{d}) \le f(x^*)$ , alors  $\omega > \frac{L_{\varphi}K_{\mathbb{X}}}{\gamma_2}$  implique

$$\omega > \frac{\varphi(\|x^{**} + \overline{d} - x^*\|) - \varphi(\|x^{**} - x^*\|)}{f(x^{**} + \overline{d}) - f(x^{**})}.$$

D'où

$$-\varphi(\|x^{**} + \overline{d} - x^*\|) + \omega\{f(x^{**} + \overline{d}) - f(x^*)\} > -\varphi(\|x^{**} - x^*\|) + \omega\{f(x^{**}) - f(x^*)\}$$

Ce qui est équivalent à

$$G_{\omega}(x^{**}, x^{*}) < G_{\omega}(x^{**} + \overline{d}, x^{*}).$$

Si 
$$f(x^{**}) < f(x^*) \le f(x^{**} + \overline{d})$$
, alors  $\omega > \frac{L_{\varphi}K_{\mathbb{X}}}{\gamma_3}$  implique que

$$\omega > \frac{\varphi(\|x^{**} + \overline{d} - x^*\|) - \varphi(\|x^{**} - x^*\|)}{f(x^*) - f(x^{**})}.$$

Par conséquent

$$-\varphi(\|x^{**} + \overline{d} - x^*\|) > -\varphi(\|x^{**} - x^*\|) + \omega(f(x^{**}) - f(x^*)).$$

Ce qui est équivalent à

$$G_{\omega}(x^{**}, x^*) < G_{\omega}(x^{**} + \overline{d}, x^*).$$

Donc  $x^{**}$  est un minimiseur local strict de  $G_{\omega}(x, x^*)$  sur  $\mathbb{X}$  si  $\omega > \kappa_2 = \frac{L_{\varphi}K_{\mathbb{X}}}{\min\{\gamma_2, \gamma_3\}}$ .

# 4.4 Description de l'algorithme

En se basant sur les propriétés théoriques de la fonction de descente globale discutée dans la section 4.3, une procédure de descente globale peut être donnée comme suit :

#### Algorithme 7: L'algorithme de descente globale

Étape 1 Initialisation

- (i) Choisir les composantes suivantes :
  - $\omega_U > 0$  une borne supérieure de  $\omega$ .
  - $\omega_0$  une valeur initiale du paramètre  $\omega$ .
  - $\overline{\omega}$  un facteur de croissance.
- (ii) Générer un point initial  $x_s$  pour le problème (PD).
- (iii) poser k = 1.

Étape 2

Utiliser une méthode de recherche locale pour trouver un minimiseur local  $x_k^*$  de f sur  $\mathbb{X}$  en démarrant du point initial  $x_s$ .

Étape 3

Prendre  $\omega = \omega_0$ .

Soit  $D = \{d_1, ..., d_{2n}\}$  où  $d_i = e_i$  et  $d_{n+i} = -e_i$ , i = 1, ..., n.

Poser i = 1.

(a) Appeler une méthode de recherche locale pour résoudre le problème

$$\min_{\mathbb{X}} \mathrm{loc} G_{\omega}(x, x_k^*)$$

en prenant un point de départ  $x_{i,k} = x_k^* + d_i$ . Soit  $x_{i,k}^*$  le point obtenu.

Si i < 2n, poser i = i + 1 et aller à l'étape (3,a). Sinon aller à l'étape suivante.

(b) Poser

$$\overline{x} = \arg\min_{i} f(x_{i,k}^*).$$

Si  $f(\overline{x}) < f(x_k^*)$ , prendre  $x_s = \overline{x}, k = k + 1$  et aller à l'étape 2.

Sinon, passer à l'étape 4.

Étape 4

 $\overline{\text{Si }\omega \leq \omega_U}$ , augmenter  $\omega$  en mettant  $\omega = \overline{\omega}\omega$  et aller à l'étape (3,a).

Sinon, l'algorithme s'arrête.

### Quelques remarques sur l'algorithme

• Dans les applications numériques, on a utilisé une simple version d'une méthode de descente afin de déterminer les minimiseurs locaux, celle-ci est décrite par l'algorithme suivant :

Algorithme 8 : Une procédure de descente pour chercher des minima locaux.

- 1. Déterminer un point de départ  $x_s \in X$
- 2. Si  $x_s$  est minimiseur local, alors arrêter. Sinon, déterminer  $d^*$  telle que :

$$f(x_s + d^*) \le f(x_s + d) \quad \forall d \in \mathbb{D}.$$

- 3. Poser  $x_s = x_s + d^*$ , et aller à l'étape 1.
- On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(PQD) \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle \\ x_i \in \{1, ..., m\}, \quad i = 1, ..., n. \end{cases}$$

où A est une matrice carrée symétrique d'ordre  $n, m \in \mathbb{N}^*$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ .

Une condition suffisante d'optimalité globale pour ce problème établie dans [62], est la suivante :

• Si la matrice  $\frac{A}{2} - \text{diag}(C_{x^*})$  est semi-définie positive, alors  $x^*$  est un minimiseur global du problème (PQD),

où  $\operatorname{diag}(x_1,...,x_n)$  désigne la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont  $x_1,...,x_n$ , et  $C_{x^*}=(C_{x_1^*},...,C_{x_n^*})$  avec

$$C_{x_i^*} = \max\left\{x_i^*(b + Ax^*), \frac{x_i^*(b + Ax^*)i}{m}\right\}.$$

On peut utiliser cette condition comme un critère d'arrêt pour l'algorithme de descente globale dans le cas des problèmes de type (PQD).

# 4.5 Exemples illustratifs

#### Exemple 1:

On considère le problème (PQD) avec :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = (1, -5, 1) \quad \text{et} \quad x_i \in \{1, 2, 3\}.$$

En démarrons de trois points différents (1,1,1),(2,2,2) et (3,3,3), la solution obtenue par l'algorithme de descente globale est  $x^* = (0,2,0)$  en un temps de calcul inférieur à  $0.1 \times 10^{-5}$  secondes.

De plus la matrice 
$$\frac{A}{2} - \text{diag}(C_{x_{final}}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -0.5 \\ 1 & 1.5 & 1 \\ -0.5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
 est semi-définie posi-

tive, ce qui signifie que  $x^* = (0, 2, 0)$  représente un minimiseur global.

#### Exemple 2:

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ 100(x_{i+1} - x_i)^2 + (1 - x_i)^2 \right], \\ s.c. \\ x \in \mathbb{X} = \left[ -5, +5 \right]^n \cap \mathbb{Z}^n. \end{cases}$$

La fonction objectif est appelée fonction de Rosenbrock [53, 41] et le domaine faisable a  $1.08347 \times 10^{26}$  points pour n=25. Elle possède 5 (resp. 6, 7, 8 et 11) minimiseurs locaux pour n =2 (resp. 3, 4, 5 et 6) et un minimiseur global isolé  $x^* = (1, ..., 1)^T$ , avec  $f(x^*) = 0$ .

On a obtenu les résultats suivants :

n	$x_0$	$x_{\mathrm{final}}$	$f(x_{\text{final}})$	f-eval	G-eval	Temps(sec)
5	(10,, 10)	(1,,1)	0	4558	10270	1.8096
10	(5,,5)	(1,,1)	0	45439	84724	82.7273
15	(5,,5)	(1,,1)	0	120082	222882	697.7768
20	(5, -5,, -5)	(1, 1, 1, 1)	0	86465	113609	389.6436
25	(5, -5,, 5)	(1, 1, 1, 1)	0	213936	311342	2774.8677

# 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a donné une version de la méthode de descente globale pour l'optimisation discrète en utilisant la nouvelle fonction proposée dans le chapitre 3. Contrairement aux méthodes classiques, notre approche ne nécessite pas une hypothèse de régularité sur la fonction objectif et elle dépend seulement d'un paramètre simple à ajuster.

## Chapitre 5

# **Applications**

# Applications sur quelques problèmes d'optimisation continue

L'importance d'une méthode d'optimisation dépend essentiellement de son efficacité dans la résolution des problèmes pratiques. Plusieurs problèmes tests d'optimisation globale sont proposés pour évaluer l'efficacité des nouvelles approches. Dans cette section, nous donnerons quelques résultats de nos expériences numériques concernant des problèmes trouvés dans la littérature. Les calculs ont été effectués sur Intel Pentium dual-core CPU T3200 et un Intel-Core i3-2348M CPU. L'algorithme CARTopt [52] a été utilisé pour obtenir des minimiseurs locaux de la fonction de descente globale et la fonction objectif. Durant l'algorithme, on a choisi le paramètre  $\omega$  comme suit :

• Dans tous les problèmes choisis,  $\Omega$  est un pavé  $\mathbb{R}^n$ , c-à-d :

$$\Omega = \begin{bmatrix} x_1^l, x_1^u \end{bmatrix} \times \dots \times \begin{bmatrix} x_n^l, x_n^u \end{bmatrix},$$

on a pris

$$K_{\Omega} = \max\{\|x^{'} - x^{''}\|_{2} : x^{'}, x^{''} \in \Omega\} = \sqrt{(x_{1}^{u} - x_{1}^{l})^{2} + \dots + (x_{n}^{u} - x_{n}^{l})^{2}}.$$

- $\varphi(t) = t$ , et donc  $L_{\varphi} = 1$ .
- L'estimation de  $\omega_U$  est donnée comme suit :

$$\omega_U > \omega_{max} + 1$$
,

οù

$$\omega_{max} = \max \left\{ \frac{2L_{\varphi}K_{\Omega}}{\rho}, \frac{K_{\varepsilon}K_{\Omega}}{\varepsilon} + 1 \right\},$$

avec  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\rho < 10^{-3}$ ,  $K_{\varepsilon} > 10^{4}$ .

Les symboles utilisés dans les tableaux sont donnés comme suit :

- $\bullet$  n: Le nombre de variables.
- $x_0$ : Le point initial.
- f-eval : Le nombre d'évaluations de la fonction objectif.
- $\bullet \ x_g$ : La solution optimale obtenue par la méthode proposée.
- $\omega_g$ : la valeur de  $\omega$  lorsque le premier minimiseur global est atteint, et pour certains problèmes, c'est une borne fixée pour paramètre  $\omega$ .

#### Problème 1 [13] :

$$\begin{cases} \min - \sin(\sqrt{3x_1 + 2x_2 + |x_1 - x_2|}), \\ s.c. \\ 0 \le x_i \le 5, i = 1, 2. \end{cases}$$

La meilleure solution obtenue pour ce problème est  $x_g = (0.29658..., 0.62279...)$  avec  $f(x_g) = -0.99999825...$ .

On a obtenu les résultats suivants :

	$\omega_g$	$x_s$	$x_g$	$f(x_g)$		Time (sec)
2	1000	(1.5,1.5)	$(2.217 \times 10^{-7}, 0.8224)$	-0.9999999976	995	3.520426

Table 5.1 – Résultats numériques pour le premier problème continu.

#### Problème 2 [13] :

$$\begin{cases} \min\left(0.9\sqrt{|1-x|} + |2-x|^3\right),\\ s.c.\\ 1 \le x \le 3. \end{cases}$$

Ce problème est proposé récemment dans [13] et la petite valeur connue de f(x) est : 0.758588. On a obtenu les résultats suivants :

n	$\omega_g$	$x_s$	$x_g$	$f(x_g)$	f-eval	Time (sec)
1	200	1	1.551	0.758583199	320	0.643584
1	2000	1	1.550	0.758582846	322	0.329272

Table 5.2 – Résultats numériques pour le deuxième problème continu.

#### Problème 3 [13] :

$$\begin{cases} & \min\left(-\ln(x) + \min(\sqrt{1-x}, (2-x)^3, \sqrt{|3-x|})\right), \\ & s.c. \\ & 1 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Ce problème est proposé dans [13], et la petite valeur connue de f(x) est : -2.092702.

On a obtenu les résultats suivants :

n	$\omega_g$	$x_s$	$x_g$	$f(x_g)$	f-eval	Time (sec)
1	1	1.5	3.000	-2.09861	440	0.148802

Table 5.3 – Résultats numériques pour le troisième problème continu.

#### Problème 4 [67]:

$$\begin{cases} & \min\left(\left|\frac{x-1}{4}\right| + \left|\sin\left(\pi\left(1 + \frac{x-1}{4}\right)\right)\right| + 1\right), \\ & s.c. \\ & -10 \leqslant x \leqslant 10. \end{cases}$$

Il est connu que  $x_g = 1$  est un minimiseur global avec la valeur optimale globale  $f(x_g) = 1$ .

On a obtenu les résultats suivants :

n	$\omega_g$	$x_s$	$x_g$	$f(x_g)$	f-eval	Time (sec)
1	10	10	1.000	1.000	362	0.155204

Table 5.4 – Résultats numériques pour le quatrième problème continu.

#### Problème 5 [67] :

$$\begin{cases} \min(|x-1|(1+10|\sin(x+1)|)+1), \\ s.c. \\ -10 \le x \le 10. \end{cases}$$

Il est connu que  $x_g = 1$  est un minimiseur global avec la valeur optimale globale  $f(x_g) = 1$ .

On a obtenu les résultats suivants :

n	$\omega_g$	$x_s$	$x_g$	$f(x_g)$	f-eval	Time (sec)
1	10	10	1.000	1.000	524	0.377944

Table 5.5 – Résultats numériques pour le cinquième problème continu.

#### Problème 6 [67] :

$$\begin{cases} \min\left(\max_{i=1,2,3} f_i(x) + \max_{i=4,5,6} f_i(x)\right), \\ s.c. \\ -10 \leqslant x_i \leqslant 10, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

avec:

- $f_1(x) = x_1^4 + x_2^2$ .
- $f_2(x) = (2 x_1)^2 + (2 x_2)^2$ .
- $f_3(x) = 2e^{-x_1+x_2}$ .
- $f_4(x) = x_1^2 2x_1 + x_2^2 4x_2 + 4$ .
- $f_5(x) = 2x_1^2 5x_1 + x_2^2 2x_2 + 4$ .
- $f_6(x) = x_1^2 + 2x_2^2 4x_2 + 1$ .

Il est connu que  $x_g = (1, 1)$  est un minimiseur global avec la valeur optimale globale  $f(x_g) = 2$ .

	$\omega_g$					Time (sec)
2	10	10	(1.000, 1.000)	2.000	1136	2.473803

Table 5.6 – Résultats numériques pour le sixième problème continu.

#### Problème 7 [67] :

$$\begin{cases} \min\left(-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1\right) \\ s.c. \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 \leqslant 0 \\ \min\{x_2 - x_3, x_3\} \leqslant 0, \\ -10 \leqslant x_i \leqslant 10, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

La meilleure solution connue est  $x_g = (1.9889, -0.0001, -0.0111)$  avec  $f(x_g) = -5.9446$ .

On a obtenu les résultats suivants :

n	$\omega_g$	$x_s$	$x_g$	$f(x_g)$	f-eval	Time (sec)
3	1	(1,0.5,0.5)	(1.9940, -0.1216, 0.0316)	-5.9543	388	$1.271\overline{459}$

Table 5.7 – Résultats numériques pour le septième problème continu.

#### Problème 8 [67] :

$$\begin{cases} \min \max\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\} \\ s.c. \\ x_1^2 - x_2 - x_4^2 \leq 0, \\ 0 \leq x_i \leq 3, \quad i = 1, ..., 4. \end{cases}$$

avec

$$f_i(x) = f_0(x) + 10.g_i(x).$$

$$f_0(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - 5x_1 - 5x_2 - 21x_3 + 7x_4.$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 8.$$

$$g_2(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - x_1 - x_4 - 10.$$

$$g_3(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1 - x_2 - x_4 - 5.$$

La meilleure solution connue est  $x_g = (0, 1, 1, 1)$  avec  $f(x_g) = -65$ .

n	$\omega_g$	$x_s$	$x_g$	$f(x_g)$	f-eval	Time
4	10	(1.5,)	(0.0007, 0.6817, 0.8480, 1.1950)	-66.4396	1532	4.5790
	_	(1.5,)	(0.0000, 0.6821, 0.8481, 1.1970)	-66.4488	5808	16.6676

Table 5.8 – Résultats numériques pour le huitième problème continu.

#### Problème 9 [67]:

$$\begin{cases} \min\left(\frac{\pi}{n} \left[ 10\sin^2(\pi x_1) + g(x) + (x_n - 1).^2 \right] \right), \\ s.c. \\ -10 \leqslant x_i \leqslant 10, \quad i = 1, 2, ..., n \end{cases}$$

où  $g(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ (x_i - 1)^2 (1 + 10\sin^2(\pi x_{i+1})) \right].$  Il est connu que, pour tout  $n, x_g = (1, 1, ..., 1)$  est un minimiseur global avec la valeur optimale  $f(x_g) = 0$ .

On a obtenu les résultats suivants :

n	$\omega_g$	$x_s$	$x_g$	$f(x_g)$	f-eval	Time
2	10	(10,10)	(1.000, 1.001)	$1.570 \times 10^{-6}$	992	1.9494
3	100	(10,10,10)	(1.001, 1.003, 1.001)	$1.148 \times 10^{-4}$	1478	2.8217
4	200	(10,)	-	$1.047 \times 10^{-6}$	2274	6.5797
10	1000	(10,)	-	$1.141 \times 10^{-4}$	9686	30.2927
20	5000	(10,)	-	0.0012	21092	80.3550

Table 5.9 – Résultats numériques pour le neuvième problème continu.

#### Problème 10 [67]:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} |x_i - 0.5|, \\ s.c. \\ -10 \leqslant x_i \leqslant 10, \quad i = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

Il est clair que  $x_g = (0.5, ..., 0.5)$  est un minimiseur global avec la valeur optimale globale  $f(x_g) = 0$ ,  $\forall n$ .

n	$\omega_g$	$x_s$	$x_g$	$f(x_g)$	f-eval	Time (sec)
2	10	(5,5)	(0.5, 0.5)	0.000	1212	2.955925
3	200	(5,5,5)	(0.5, 0.5, 0.5)	0.000	1678	5.161670
4	500	(5,5,5,5)	(0.5, 0.5, 0.5, 0.5)	0.000	2614	7.568562
5	500	(5,5,5,5,5)	-	$2.0000 \times 10^{-4}$	3484	10.001638
10	1000	(5,,5)	-	$6.0000 \times 10^{-4}$	10344	37.528953
15	1000	(5,,5)	_	$8.0000 \times 10^{-4}$	14390	55.379608
20	2000	(5,,5)	-	$5.0000 \times 10^{-4}$	42446	118.440391

Table 5.10 – Résultats numériques pour le dixième problème continu.

#### Problème 11 [13]:

$$\begin{cases}
\min \sum_{i=1}^{n} \left(0.9\sqrt{|1-x_i|} + |2-x_i|^3\right), \\
s.c. \\
1 \le x_i \le 3, i = 1, ..., n.
\end{cases}$$

Les meilleures solutions connues pour ce problème sont données comme suit [13] :

n	Meilleur minimum
5	3.861668
10	8.501569
15	12.643976
20	18.918043

On a obtenu les résultats suivants :

n	$\omega_g$	$x_s$	$x_g$	$f(x_g)$	f-eval	Time (sec)
5	400	-	(1.550,,1.550)	3.7929	3897	10.6931
10	500	-	(1.550,,1.550)	7.5858	14718	25.0244
15	1000	-	(1.550,,1.550)	11.3787	25923	41.1567
20	$10^{8}$	_	(1.550,,1.550)	15.1717	52464	91.7331

Table 5.11 – Résultats numériques pour le onzième problème continu.

Dans les tableaux suivants, on donne des comparaisons sur la qualité des solutions obtenues par notre approche et une méthode proposée récemment par A.Ferrer et coll.[13], ainsi que la méthode de la fonction Filled [67] :

Problème	La méthode proposée dans [13]	Notre approche
1	-0.999981	-0.999999976
2	0.758714	0.758582846
3	-2.092702	-2.09861
11(n=5)	3.861705	3.7929
11(n=10)	8.503067	7.5858
11(n=15)	12.64905	11.3787
11(n=20)	18.918043	15.1717

Table 5.12 – Problèmes non lipschitziens

Problème	La méthode proposée dans [67]		Notre approche	
	$x_g$	$f(x_g)$	$x_g$	$f(x_g)$
4	1.0029	1.0012	1.0000	1.0000
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	Échouer		(1.000, 1.000)	2.0000
7	$\begin{pmatrix} 1.9889 \\ -0.0001 \\ -0.0111 \end{pmatrix}$	-5.9446	$ \left(\begin{array}{c} 1.9940 \\ -1.1216 \\ 0.0316 \end{array}\right) $	-5.9543
8	$ \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.0001 \\ 0.0001 \\ 0.0001 \end{pmatrix} $	-65	$ \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.6821 \\ 0.8481 \\ 1.1970 \end{pmatrix} $	-66.4488
9	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	0.0000	$\begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.0040 \\ 0.9996 \\ 1.0040 \\ 1.0020 \\ 0.9995 \\ 0.9938 \end{pmatrix}$	2.5133e-005
10	$\left(\begin{array}{c} 0.5000\\ 0.5000 \end{array}\right)$	0.0000	$\left(\begin{array}{c} 0.5000\\ 0.5000 \end{array}\right)$	0.0000

Table 5.13 – Problèmes lipschitziens

# Applications à quelques problèmes d'optimisation discrète

Dans les tableaux qui se suivent, on utilise les notations suivantes :

- f-eval : Le nombre d'évaluations de la fonction objectif.
- G-eval : Le nombre d'évaluations de la fonction de descente globale.
- $R = \frac{\text{f-eval+G-eval}}{Ne}$ , avec Ne est le nombre du points faisables du problème.

#### Problème 1 :Fonction de Coville [41, 53]

$$\begin{cases} \min f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 + x_3^2)^2 + (1 - x_3)^2 \\ + 10.1 \left[ (x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2 \right] + 19.8(x_2 + 1)(x_4 - 1) \end{cases}$$
s.c.
$$x \in \mathbb{X} = \left[ -10, +10 \right]^4 \cap \mathbb{Z}^4.$$

Ce problème possède  $1.94481 \times 10^5$  points faisables dont 41 d'entre eux sont des minimiseurs locaux. Il a un minimiseur global unique  $x_g = (1, 1, 1, 1)$ , avec  $f(x_g) = 0$ .

On a obtenu les résultats suivants :

$x_0$	$x_{\rm final}$	$f(x_{\text{final}})$	f-eval	G-eval	Temps(sec)	R
(1, 1, 0, 0)	(1, 1, 1, 1)	0	1361	3020	0.171601	0.0225
(0,0,0,0)	(1, 1, 1, 1)	0	1366	3022	0.187201	0.0226
(5, -3, 4, -4)	(1, 1, 1, 1)	0	1375	2450	0.156001	0.0197
(10, -10, 10, -10)	(1, 1, 1, 1)	0	1476	2450	0.218401	0.0202
(10, 10, 10, 10)	(1, 1, 1, 1)	0	2322	7814	0.655204	0.0521

Table 5.14 – Résultats numériques pour le premier problème discret.

#### Problème 2[41]:

$$\begin{cases} \min f(x) = (1 - x_1)^2 + (1 - x_n)^2 + n \sum_{i=1}^{n-1} (n - i)(x_i^2 - x_{i+1})^2, \\ s.c. \\ x \in \mathbb{X} = [-5, +5]^n \cap \mathbb{Z}^n. \end{cases}$$

Ce problème possède 4 (resp. 6, 7, 10 et 12) minimiseurs pour n =2 (resp. 3, 4, 5 et 6), mais il a un seul minimiseur global  $x^* = (1, ..., 1)$  avec  $f(x^*) = 0$ ,  $\forall n$ .

n	$x_0$	$x_{\rm final}$	$f(x_{\text{final}})$	f-eval	G-eval	Temps(sec)	R
3	(5,5,5)	(1, 1, 1)	0	256	754	0.0156	0.7588
4	(5,,5)	(1,,1)	0	733	1704	0.0468	0.1665
5	(5,,5)	(1,,1)	0	1877	3514	0.1872	0.0335
6	(5,,5)	(1,,1)	0	3445	6114	0.4680	0.0054

Table 5.15 – Résultats numériques pour le deuxième problème discret.

#### Problème 3 [41] :

$$\begin{cases} \min f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2, \\ s.c. \\ x \in \mathbb{X} = [-5, +5]^n \cap \mathbb{Z}^n. \end{cases}$$

Ce problème a  $1.94481 \times 10^5$  points faisables et 3 (resp. 7, 19, 51 et 141) minimiseurs locaux pour n =2 (resp. 3, 4, 5 et 6), mais il a un seul minimiseur global  $x^* = (0, ..., 0)$  avec  $f(x^*) = 0$ ,  $\forall n$ .

On a obtenu les résultats suivants :

n	$x_0$	$x_{\rm final}$	$f(x_{\text{final}})$	f-eval	G-eval	Temps(sec)	R
4	(5,,5)	(0,,0)	0	1798	2416	0.0000	0.2878
5	(5,,5)	(0,,0)	0	3588	4550	0.8736	0.0505
10	(5,,5)	(0,,0)	0	29878	33680	24.9495	$2.4504 \times 10^{-6}$
15	(5,,5)	(0,,0)	0	99611	112065	250.5065	$5.0674 \times 10^{-11}$
20	(5,,5)	(0,,0)	0	214093	262180	1484.2715	$7.0795 \times 10^{-16}$
25	(5,,5)	(0,,0)	0	896068	1040209	23245.8338	$1.7871 \times 10^{-20}$

Table 5.16 – Résultats numériques pour le troisième problème discret.

#### Comparaisons

Il est connu que la méthode de la fonction Filled est très efficace pour certaines classes de problèmes d'optimisation discrète. Dans la référence [59], une étude comparative complète a été faite entre plusieurs fonctions Filled proposées dans la littérature. Dans ce paragraphe, on propose une comparaison entre nos résultats

numérique et ceux présentés dans la référence précédente. On a choisi les fonctions Filled suivantes :

#### Fonction de Ng, Zhang, Li et Tian [41]:

Elle est définie par l'expression suivante :

$$F_{\mu,\rho}^{1}(x,x^{*}) = f(x^{*}) - \min[f(x), f(x^{*})] - \rho ||x - x^{*}|| + \mu \{\max[0, f(x) - f(x^{*})]\}^{2},$$

où  $\rho$  et  $\mu$  sont deux paramètres à ajuster et  $x^*$  représente un minimiseur local de f sur  $\mathbb{X}$ .

Soient K une borne supérieure du diamètre du domaine faisable X, L la constante de Lipschitz de la fonction objectif f et  $B^*$  le bassin du minimiseur  $x^*$ . La fonction  $F^1_{\mu,\rho}$  possède les propriétés suivantes :

- Si  $\rho > 0$  et  $0 < \mu \le \frac{\rho}{L^2}$ , alors  $x^*$  représente un maximiseur local de  $F^1_{\mu,\rho}$  sur  $\mathbb{X}$ .
- Si  $\rho > 0$  et  $0 < \mu \le \frac{\rho}{2L^2K^2}$ , alors  $F_{\mu,\rho}^1$  ne possède aucun minimiseur local dans  $B^*$  et dans tout bassin supérieur à  $B^*$ .
- Soit x' un minimiseur local de  $F_{\mu,\rho}^1$ . Si  $\rho > 0$  et  $0 < \mu \le \frac{\rho}{2L^2K^2}$ , alors x' sera dans un bassin plus bas que  $B^*$ .

#### Fonction de Yang et Liang [66]:

Elle est définie par l'expression suivante :

$$F_{a,b}^{2}(x,x^{*}) = \frac{1}{a + \|x - x^{*}\|} + \chi(\max[0, f(x) - f(x^{*}) + b]),$$

οù

$$\chi(y) = \begin{cases} \exp(\frac{-a}{y}), & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases},$$

a et b sont deux paramètres à ajuster.

On suppose que

$$0 < b < \min_{x_1, x_2 \in \mathcal{L}, f(x_2) < f(x_1)} (f(x_1) - f(x_2))$$

avec  $\mathcal{L}$  l'ensemble des minimseurs locaux de la fonction globalement convexe f définie sur l'ensemble  $\mathbb{X}$ .

Cette dernière fonction possède les propriétés suivantes :

• Si  $0 < a < \min\left\{1, \frac{b}{2}\right\}$ , alors  $x^*$  représente un maximiseur local de  $F_{a,b}^2$  sur  $\mathbb{X}$ .

• Si  $0 < a < \min\left\{1, \frac{b^2}{L}\ln\left(\frac{4K^2}{4K^2-1}\right), \frac{1}{4K^2}\right\}$ , alors  $F_{a,b}^2$  ne possède pas de points stationnaires dans la région

$$X_1(x^*) = \{x \in X : x \neq x^*, f(x) \ge f(x^*)\}.$$

• Si  $x^*$  n'est pas un minimiseur global de f sur  $\mathbb{X}$ , alors il existe un minimiseur de f dans la région

$$X_1(x^*) = \{x \in X : x \neq x^*, f(x) < f(x^*)\}.$$

#### Fonction de Ng, Li et Zhang [39]:

Elle est définie par l'expression suivante :

$$G_{\mu,\rho}(x,x^*) = A_{\mu}(f(x) - f(x^*)) - \rho ||x - x^*||,$$

et

$$A_{\mu}(y) = \mu \left[ (1 - c) \left( \frac{\mu - c\mu}{1 - c\mu} \right)^{\frac{y}{\tau}} + c \right],$$

avec 0 < c < 1 et  $\tau > 0$  une constante suffisamment petite telle que

$$0 < \tau < \min\{|f(x^{'}) - f(x^{''})| : x^{'}, x^{''} \in \mathbb{X}, \ f(x^{'}) \neq f(x^{''})\},\$$

 $\rho > 0$  et  $0 < \mu < 1$  sont deux paramètres.

Cette fonction possède les propriétés suivantes :

- Si  $\rho>0$  et  $0<\mu<\min\{1,\frac{\rho}{L}\}$ , alors  $x^*$  représente un maximiseur local de  $G_{\mu,\rho}$  sur  $\mathbb X$ .
- Si  $\rho > 0$  et  $0 < \mu < \min\{1, \frac{\rho}{2K^2L}\}$ , alors G n'a pas de minimiseurs locaux sur  $\hat{\mathbb{X}}(x^*)\backslash S_{\mathbb{X}}$ , où

$$\hat{\mathbb{X}}(x^*) = \{ x \in \mathbb{X} : x \neq x^*, f(x) \ge f(x^*) \}.$$

- Soit x' un minimiseur local de  $G_{\mu,\rho}$  et on suppose qu'il existe une  $\overline{d}$  une direction faisable sur x' tel que  $||x' + \overline{d} x^*|| > ||x' x^*||$ . Si  $\rho > 0$  et  $0 < \mu < \min\{1, \frac{\rho}{2K^2L}\}$ , alors x' représente un minimiseur local strict de  $G_{\mu,\rho}$ .
- Supposons que chaque minimiseur de f est strict.  $x^{**} \in \mathbb{X} \setminus V_{\mathbb{X}}$  est un minimiseur local de f sur  $\mathbb{X}$  avec  $f(x^{**}) < f(x^*)$  si est seulement si  $x^{**}$  est un minimiseur local de  $G_{\mu,\rho}$  sur  $\mathbb{X}$ .

Dans les tableaux de comparaisons suivants, nous utilisons les notations suivantes :

- A : L'algorithme proposé dans [41] qui utilise la fonction  $F_{\mu,\rho}^1$ .
- B : L'algorithme proposé dans [66] qui utilise la fonction  $F_{a,b}^2$ .
- C : L'algorithme proposé dans [39] qui utilise la fonction  $G_{\mu,\rho}$ .

Dans le tableau suivant, on résume les résultats numériques pour le problème de Colville on utilisant le point de départ  $x_0 = (1, 1, 0, 0)$ :

L'algorithme	$x_{\mathrm{final}}$	$f(x_{\text{final}})$	f-eval	G-eval	R
A	(1, 1, 1, 1)	0	2095	10603	0.0653
В	(1, 1, 1, 1)	0	3041	35243	0.1969
С	(1, 1, 1, 1)	0	1426	5097	0.0335
Notre approche	(1, 1, 1, 1)	0	1361	3020	0.0225

Dans le tableau suivant, on résume les résultats numériques pour le problème de Colville en utilisant un point de départ  $x_0 = (-10, -5, 0, 5)$ :

L'algorithme	$x_{\rm final}$	$f(x_{\text{final}})$	f-eval	G-eval	R
A	(1, 1, 1, 1)	0	2192	7056	0.0476
В	(1, 1, 1, 1)	0	3842	37147	0.2108
С	(1, 1, 1, 1)	0	1567	5135	0.0345
Notre approche	(1, 1, 1, 1)	0	1882	4253	0.0315

Dans le tableau suivant, on résume les résultats numériques pour le problème de Colville en utilisant un point de départ  $x_0 = (10, -10, 10, 10)$ :

L'algorithme	$x_{\rm final}$	$f(x_{\text{final}})$	f-eval	G-eval	R
A	(1, 1, 1, 1)	0	3940	10603	0.0748
В	(1, 1, 1, 1)	0	4608	39849	0.2286
С	(1, 1, 1, 1)	0	2674	5979	0.0445
Notre approche	(1, 1, 1, 1)	0	1869	4590	0.0332

Dans le tableau suivant, on résume les résultats numériques pour la fonction de Rosenbrock pour n = 25 en utilisant un point de départ  $x_0 = (5, -5, ..., 5)$ :

L'algorithme	$x_{\rm final}$	$f(x_{\text{final}})$	f-eval	G-eval	R
A	(1,,1)	0	512802	1006018	$1.4018 \times 10^{-20}$
В	(1,,1)	0	680190	2920682	$3.3235 \times 10^{-20}$
С	(1,,1)	0	193297	563646	$6.9863 \times 10^{-21}$
Notre approche	(1,,1)	0	213936	311342	$4.8481 \times 10^{-21}$

### Applications sur des problèmes d'inégalités variationnelles et des problèmes de complémentarité non linaire en dimension finie

L'étude systématique du problème d'inégalités variationnelles en dimension finie et du problème de complémentarité a débuté au milieu des années 1960. Durant ces dernière décennies, ce domaine est devenu une discipline très fructueuse dans le domaine de la programmation mathématique. Il implique une théorie mathématique riche, une multitude de liens intéressants à de nombreuses disciplines et une large gamme d'applications importantes dans l'ingénierie et l'économie. Dans cette sous section nous appliquons notre approche de descente globale à la résolution de ces problèmes importants.

Soit  $\Omega$  un convexe fermé de  $\mathbb{R}^n$  et F une fonction continue de  $\Omega$  vers  $\mathbb{R}^n$ . Le problème d'inégalités variationnelles en dimension finie est le suivant :

trouver 
$$x^* \in \Omega$$
 tel que  $\langle F(x^*), x - x^* \rangle \ge 0$ ,  $\forall x \in \Omega$  (IV).

On peut formuler ce problème sous forme d'un problème de système d'équations comme nous indique la proposition suivante :

**Proposition 5.1.** Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un ouvert convexe et soit  $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. Le vecteur  $x^* \in \Omega$  est une solution de (IV) si est seulement si  $F(x^*) = 0$ .

On définit le problème (SE) qui est équivalent au problème (IV) comme suit :

$$(SE) \begin{cases} F(x) = 0 \\ s.c. \\ x \in \Omega. \end{cases}$$

Une des méthodes proposées pour la résolution du problème (SE), est de le reformuler sous la forme du problème d'optimisation suivant, pour appliquer par la suite un algorithme d'optimisation :

$$\begin{cases} \min H(x) = ||F(x)||^2 \\ s.c. \\ x \in \Omega. \end{cases}$$

Il est évident que le minimum global de ce dernier problème est égal à zéro.

#### Exemple 1:

On considère le problème (SE) avec

$$F = (F_1, ..., F_8),$$

et

- $F_1(x) = 4.731 \times 10^{-3} x_1 x_3 0.3578 x_2 x_3 0.1238 x_1 + x_7 1.63710^{-3} x_2 0.9338 x_4 0.3571$ .
- $F_2(x) = 0.2238x_3x_1 + 0.7623x_2x_3 + 0.2638x_1 x_7 0.07745x_2 0.6734x_4 0.6022$ .
- $F_3(x) = x_8x_6 + 0.7623x_1 + 0.2238x_2 + 0.3461$ .
- $F_4(x) = -0.7623x_1 + 0.2238x_2 + 0.3461$ .
- $F_5(x) = x_1^2 + x_2^2 1$ .
- $F_6(x) = x_3^2 + x_4^2 1$ .
- $F_7(x) = x_5^2 + x_6^2 1$ .
- $F_8(x) = x_7^2 + x_8^2 1$ .
- $-1 \le x_i \le 1, \quad i = 1, ..., 8.$

Ce problème a pour but de déterminer les concentrations des produits d'un procédé de combustion d'hydrocarbures à l'état d'équilibre (Meintjes et Morgan [35]).

L'application de l'algorithme de descente globale donne les résultats suivants :

$x_0$	$x_g$	$H(x_g)$	$F(x_g)$
( 1.000 )	( 0.6715 )		$\int 1.8610e - 005$
1.000	0.7410		-7.1510e - 005
1.000	0.9519		-3.7330e - 005
1.000	-0.3064	$9.144 \times 10^{-9}$	5.1350e - 005
1.000	0.9638	9.144 × 10	-6.7500e - 006
1.000	-0.2666		-5.4300e - 006
1.000	0.4047		-1.4000e - 005
$\setminus$ 1.000 $/$	$\setminus$ 0.9145		$\int 9.2340e - 005$

Table 5.17 – Résultats numériques pour la résolution d'un problème d'un système d'équations non linéaires.

#### Exemple 2:

On considère le problème (IV) avec

$$F = (F_1, F_2),$$

et

- $F_1(x) = |x_1| + (x_2 1)^2 1$ .
- $F_2(x) = (x_1 1)^2 + |x_2| 1$ .

$$0 \le x_i \le 2, \quad i = 1, 2.$$

$x_0$	$x_g$	$H(x_g)$	$F(x_g)$
(2.000)	( 1.001 )	$5.0000 \times 10^{-7}$	$\left(1.0000 \times 10^{-3}\right)$
$\left(\begin{array}{c} 2.000 \end{array}\right)$	$ \setminus 1.000 $	0.0000 × 10	$1.0000 \times 10^{-6}$

Table 5.18 – Résultats numériques pour le premier problème d'inégalités variationnelles.

#### Exemple 3:

On considère le problème (IV) avec

$$F = (F_1, ..., F_5),$$

et

- $\bullet$   $F_1 = x_1x_2 + x_1 3x_5$ .
- $F_2 = 2x_1x_2 + x_1 + 3R_{10}x_2^2 + x_2x_3^2 + R_7x_2x_3 + R_9x_2x_4 + R_8x_2 Rx_5$ .
- $F_3 = 2x_2x_3^2 + R_7x_2x_3 + 2R^5x_3^2 + R_6x_3 8x_5$ .
- $F_4 = R_9 x_2 x_4 + 2x_4^2 4Rx_5$ .
- $F_5 = x_1x_2 + x_1 + R_{10}x_2^2 + x_2x_3^2 + R_7x_2x_3 + R_9x_2x_4 + R_8x_2 + R^5x_3^2 + R^6x_3 + x_4^2 1$ .
- $0.0001 \leqslant x_i \leqslant 100, \qquad i = 1, ..., 5$

$$R = 10$$
  $R_5 = 0.193$   $R_6 = 4.10622 \times 10^{-4}$ 

$$R = 10 R_5 = 0.193$$

$$R_7 = 5.45177 \times 10^{-4} R_8 = 4.4975 \times 10^{-7}$$

$$R_9 = 3.40737 \times 10^{-5} R_{10} = 9.615 \times 10^{-7}$$

$x_0$	$x_g$	$H(x_g)$	$F(x_g)$
13.000	(0.0035)		$\int 6.400e - 005$
17.000	31.0000		2.904e - 005
4.000	0.0687	3.250e - 009	3.775e - 005
3.000	0.8595		-1.162e - 005
1.000	$\setminus 0.0370$		1.633e - 005

Table 5.19 – Résultats numériques pour le deuxième problème d'inégalités variationnelles.

#### Problème de complémentarité non linaire

Dans le cas spécial où  $\Omega=\mathbb{R}_+^*$ , le problème (IV) peut être écrit sur la forme suivante :

trouver 
$$x^* \in \Omega$$
 tel que 
$$\begin{cases} \langle x^*, F(x^*) \rangle = 0 \\ F(x^*) \ge 0 \\ x^* \ge 0, \end{cases}$$
 (PCN)

appelé un problème de complémentarité. On a besoin de la définition suivante :

**Définition 5.1.** Une fonction  $\Phi$  est dite fonction de complémentarité si :

$$\Phi(a,b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a.b = 0 \\ a \ge 0 \\ b \ge 0. \end{cases}$$

Plusieurs fonctions de complémentarité sont proposées dans littérature, parmi elles :

• Fonction de Fischer-Burmeiser :

$$\Phi_{BF}(a,b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

• Fonctions de Kanzow and Kleinmichel:

$$\Phi_{\theta}(a,b) = a + b - \sqrt{a + b + \theta ab} \qquad \theta \in ]0,4[, (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

• Fonctions de Chen

$$\Phi_p(a,b) = a + b - \sqrt[n]{|a|^p + |b|^p} \qquad p \in \mathbb{N}^*, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Il est facile de voir qu'avec l'utilisation des fonctions de complémentarité, on peut transformer le problème (PCN) en un problème d'optimisation sans contraintes défini comme suit :

$$\begin{cases} \min C(x) = \|\Phi_{FB}\|_{2}^{2} = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{FB}^{2}(x_{i}, F_{i}(x)) \\ s.t. \\ x \in \mathbb{R}^{n}, \end{cases}$$

#### Exemple[34]:

On considère le problème (PCN) avec

• 
$$F_1(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3 - 3x_4 - 6$$
.

• 
$$F_2(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 + 10x_3 + 2x_4 - 2$$
.

• 
$$F_3(x) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3 + 9x_4 - 9$$
.

• 
$$F_4(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3 + 3x_4 - 3$$
.

avec

$$0 \leqslant x_i \leqslant 10, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Ce problème possède les deux solutions optimales suivantes :

$$x_1^* = (\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, 0, 0.5)^T$$
 et  $x_2^* = (1, 0, 3, 0)^T$ .

n	$\omega_g$	$x_s$	$x_g$	$C(x_g)$	f-eval	Time (sec)
4	10	(5,5,5,5)	$(1, 2.126 \times 10^{-7}, 2.998, 3.272 \times 10^{-4})$	$2.258 \times 10^{-6}$	18676	31.1937

Table 5.20 – Résultats numériques pour un problème de complémentarité non-linéaire

# Conclusion générale et perspectives

L'essor de l'optimisation dans les dernières décennies a été favorisé par le développement des moyens de calcul sur machine ainsi que par ses nombreuses applications dans tous les domaines de la vie.

La détection d'un minimum global parmi plusieurs minima locaux représente un grand défi. Les chercheurs rencontrent des difficultés considérables dans le cas des problèmes multidimensionnels et non convexes, définis par des fonctions non régulières. Avec la croissance continue de la complexité des problèmes à traiter, de nombreuses voies restent encore à explorer. Bien qu'il existe plusieurs résultats théoriques sur la caractérisation d'un minimiseur global, leurs réalisations numériques restent une chose très compliquée dans la majorité des cas. Nous sommes appelés à déterminer d'autres caractérisations qui soient fondées sur des résultats mathématiques bien précis, en prenant en compte la simplicité de leur mise en œuvre.

Plusieurs chercheurs ont développé des méthodes dans le but d'atteindre l'optimalité globale. Cependant chacune possède des handicaps. Certaines méthodes sont relativement efficaces, mais seulement pour des cas bien particuliers.

Récemment, certaines méthodes méta-heuristiques ont données des résultats satisfaisants pour des fonctions tests dans le cas des grandes dimensions. Cependant, elles ne possèdent pas de fondements mathématiques, notamment, les résultats de convergence.

Contrairement aux méthodes locales, il n'existe pas des critères rigoureux pour faire une comparaison entre les différentes méthodes d'optimisation globale. Certains auteurs utilisent le temps de calcul qui diffère d'une machine à une autre selon leur puissance et leurs utilisateurs. D'autres critères sont aussi appliqués, comme : le nombre de points d'évaluations, la simplicité de la mise en œuvre et la qualité du minimum global obtenu, mais ce sont des critères qui ne sont pas très suffisantes. Donc, il est naturel de penser à développer de nouvelles approches qui reposent sur

des notions et des concepts bien fondés pour élaborer des critères de comparaisons plus efficaces.

Dans cette thèse, on s'est intéressé aux méthodes d'optimisation globale qui sont basées sur la construction des fonctions auxiliaires. On a traité les méthodes les plus connues. L'idée de la méthode de la fonction de diffusion est intéressante. Cependant, la présence d'une intégrale multiple dans l'expression de la fonction auxiliaire utilisée rend cette approche inutilisable dan la majorité des cas . De ce fait, un intérêt particulier est de penser à construire des méthodes de régularisation basées sur des fonctions d'expressions assez simple. La méthode de l'indicateur de relief est difficile à mettre en œuvre. Ceci est dû à l'expression de la fonction séparateur qui nécessite des approximations plus précises. De plus, le choix d'un polytope qui contient le domaine faisable et le point qui sert à initialiser l'algorithme est aussi difficile. Concernant les méthodes de recouvrement, elles sont bien développées théoriquement et traitées par plusieurs chercheurs. Malheureusement, ces méthodes perdent leur efficacité dans le cas multidimensionnel, même pour les problèmes de taille moyenne. Certains chercheurs proposent de les couplées avec la méthode de séparation et évaluation.

On a proposé une nouvelle approche de descente globale pour résoudre des problèmes généraux d'optimisation globale continus et discrets. Nous avons construit une nouvelle fonction de descente globale à un paramètre qui garantit que chacun de ses minimiseurs locaux coïncident (ou se trouvant très proche) avec un minimiseur de la fonction objectif, ce qui donne une possibilité d'une descente globale de la fonction objectif dans des régions dignes d'intérêt de l'ensemble faisables. Les résultats numériques confirment l'analyse théorique de la fonction proposée et l'efficacité de la méthode. Notre approche ne nécessite que la continuité de la fonction objectif et les fonctions qui définissent les contraintes. Les performances de notre algorithme sont liées à une bonne estimation du paramètre  $\omega$  et dans la plupart des situations, un choix convenable peut être facilement trouvé. Aussi, nous avons donné une version de la méthode de descente globale pour l'optimisation discrète en utilisant notre nouvelle fonction.

Il est important de rappeler, que les problèmes d'optimisation globale sont extrêmement difficiles à résoudre et intraitables sans un minimum d'hypothèses qui doivent être satisfaites par les fonctions qui définissent le problème à traiter.

## Bibliographie

- [1] M.M. Ali, A. Törn, and S. Viitanen. A numerical comparison of some modified controlled random search algorithms. *Journal of Global Optimization*, 11(4):377–385, 1997.
- [2] C.G.E. Boender and A.H.G. Rinnooy Kan. A bayesian analysis of the number of cells of a multinomial distribution. *The Statistician*, pages 240–248, 1983.
- [3] C.G.E. Boender and A.H.G. Rinnooy Kan. Bayesian stopping rules for multistart global optimization methods. *Mathematical Programming*, 37(1):59–80, 1987.
- [4] L. Breiman and A. Cutler. A deterministic algorithm for global optimization. *Mathematical Programming*, 58(1-3):179–199, 1993.
- [5] R. P. Brent. Algorithm for minimization without derivatives. *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs, New Jersey, 195 p, 1973.
- [6] E. F. Campana, G. Liuzzi, S. Lucidi, D. Peri, V. Piccialli, and A. Pinto. New global optimization methods for ship design problems. *Optimization and Engineering*, 10(4):533–555, 2009.
- [7] F. H. Clarke. Optimization and nonsmooth analysis, volume 5. Siam, 1990.
- [8] T. Coleman, D. Shalloway, and Z. Wu. Isotropic effective energy simulated annealing searches for low energy molecular cluster states. *Computational Optimization and Applications*, 2(2):145–170, 1993.
- [9] I. Ekeland. On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 47(2):324–353, 1974.
- [10] Y. Evtushenko and M. Posypkin. A deterministic approach to global box-constrained optimization. *Optimization Letters*, 7(4):819–829, 2013.

[11] Y. G. Evtushenko. Numerical methods for finding global extrema (case of a non-uniform mesh). USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 11(6):38–54, 1971.

- [12] J. E. Falk. Conditions for global optimality in nonlinear programming. *Operations Research*, 21(1):337–340, 1973.
- [13] A. Ferrer, A. Bagirov, and G. Beliakov. Solving dc programs using the cutting angle method. *Journal of Global Optimization*, 61(1):71–89, 2015.
- [14] C. A. Floudas. *Deterministic global optimization*, volume 37. Springer Science & Business Media, 1999.
- [15] C.A. Floudas, P.M. Pardalos, C. Adjiman, W.R. Esposito, Z.H. Gümüs, S.T. Harding, J.L. Klepeis, C.A. Meyer, and C.A. Schweiger. *Handbook of test problems in local and global optimization*, volume 33. Springer Science & Business Media, 1999.
- [16] P. G. Georgiev, A. Chinchuluun, and P.M. Pardalos. Optimality conditions of first order for global minima of locally lipschitz functions. *Optimization*, 60(1-2):277–282, 2011.
- [17] V. P. Gergel. A global optimization algorithm for multivariate functions with lipschitzian first derivatives. *Journal of Global Optimization*, 10(3):257–281, 1997.
- [18] D. E. Goldberg and J. H. Holland. Genetic algorithms and machine learning. *Machine learning*, 3(2):95–99, 1988.
- [19] E. Hansen and G. W. Walster. Global optimization using interval analysis: revised and expanded, volume 264. CRC Press, 2003.
- [20] J-B. Hiriart-Urruty. When is a point x satisfying  $\nabla f(x) = 0$  a global minimum of f? American Mathematical Monthly, pages 556–558, 1986.
- [21] J-B. Hiriart-Urruty and Y. S. Ledyaev. A note on the characterization of the global maxima of a (tangentially) convex function over a convex set. *Journal of Convex Analysis*, 3:55–62, 1996.
- [22] J-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. Convex Analysis and Minimization Algorithms I: Part 1: Fundamentals, volume 305. Springer Science & Business Media, 1996.
- [23] C. S. Hong and Q. Zheng. Integral global optimization: theory, implementation and applications, volume 298. Springer Verlag, 1988.

[24] R. Horst and P. M. Pardalos. *Handbook of global optimization, Nonconvex Optimization and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

- [25] R. Horst, P.M. Pardalos, and N. V. Thoai. Introduction to global optimization, Nonconvex Optimization and its Applications, vol. 48. Kluwer, Dordrecht, 2000.
- [26] R. Horst and H. Tuy. *Global optimization : Deterministic approaches*. Springer Science & Business Media, 1996.
- [27] A. Ketfi-cherif and A. Ziadi. Global descent method for constrained continuous global optimization. *Applied Mathematics and Computation*, 244:209–221, 2014.
- [28] S. Kirkpatrick, M.P. Vecchi, and D. Gelatt Jr. Optimization by simmulated annealing. *science*, 220(4598):671–680, 1983.
- [29] J. Kostrowicki and L. Piela. Diffusion equation method of global minimization: Performance for standard test functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 69(2):269–284, 1991.
- [30] H. A. Le Thi and M. Ouanes. Convex quadratic underestimation and branch and bound for univariate global optimization with one nonconvex constraint. *Rairo-Operations Research*, 40(03):285–302, 2006.
- [31] A.V. Levy and A. Montalvo. The tunneling algorithm for the global minimization of functions. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 6(1):15–29, 1985.
- [32] D. Li and X. Sun. *Nonlinear integer programming*, volume 84. Springer Science & Business Media, 2006.
- [33] S. Lucidi and V. Piccialli. New classes of globally convexized filled functions for global optimization. *Journal of global optimization*, 24(2):219–236, 2002.
- [34] O. L. Mangasarian and M.V. Solodov. Nonlinear complementarity as unconstrained and constrained minimization. *Mathematical Programming*, 62(1-3):277–297, 1993.
- [35] K. Meintjes and A.P. Morgan. Chemical equilibrium systems as numerical test problems. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 16(2):143–151, 1990.
- [36] R. H. Mladineo. An algorithm for finding the global maximum of a multimodal, multivariate function. *Mathematical Programming*, 34(2):188–200, 1986.

[37] H. Mobahi. Optimization by Gaussian smoothing with application to geometric alignment. PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2013.

- [38] J. J. Moré and Z. Wu. Global continuation for distance geometry problems. SIAM Journal on Optimization, 7(3):814–836, 1997.
- [39] C-K. Ng, D. Li, and L-S. Zhang. Discrete global descent method for discrete global optimization and nonlinear integer programming. *Journal of Global Optimization*, 37(3):357–379, 2007.
- [40] C-K. Ng, D. Li, and L-S. Zhang. Global descent method for global optimization. SIAM Journal on Optimization, 20(6):3161–3184, 2010.
- [41] C-K. Ng, L-S. Zhang, D. Li, and W-W. Tian. Discrete filled function method for discrete global optimization. *Computational Optimization and Applications*, 31(1):87–115, 2005.
- [42] M. Ouanes, H. A. Le Thi, and A. Nguyen, T. P. et Zidna. New quadratic lower bound for multivariate functions in global optimization. *Mathematics and Computers in Simulation*, 109:197–211, 2015.
- [43] Z. Peng, D. Wu, and Q. Zheng. A level-value estimation method and stochastic implementation for global optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 156(2):493–523, 2013.
- [44] L. Piela, J. Kostrowicki, and H. A. Scheraga. On the multiple-minima problem in the conformational analysis of molecules: deformation of the potential energy hypersurface by the diffusion equation method. *The Journal of Physical Chemistry*, 93(8):3339–3346, 1989.
- [45] M. Pincus. A closed form solution of certain programming problems. *Operations Research*, 16(3):690–694, 1968.
- [46] J. D. Pintér. Global optimization in action: continuous and Lipschitz optimization: algorithms, implementations and applications, volume 6. Springer Science & Business Media, 1996.
- [47] S.A. Piyavskii. Algorithm for finding the absolute minimum of a function. *Theory of Optimal Decisions*, 2, 1967.
- [48] S.A. Piyavskii. An algorithm for finding the absolute extremum of a function. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 12(4):57–67, 1972.

[49] M. Rahal and A. Ziadi. A new extension of piyavskii's method to hölder functions of several variables. *Applied mathematics and Computation*, 197(2):478–488, 2008.

- [50] G. Renpu. A filled function method for finding a global minimizer of a function of several variables. *Mathematical Programming*, 46(1-3):191–204, 1990.
- [51] G. Renpu and Y. Qin. The globally convexized filled functions for global optimization. *Applied Mathematics and Computation*, 35(2):131–158, 1990.
- [52] B.L. Robertson, C.J. Price, and M. Reale. Cartopt: a random search method for nonsmooth unconstrained optimization. *Computational Optimization and Applications*, 56(2):291–315, 2013.
- [53] K. Schittkowski. More test examples for nonlinear programming codes, volume 282. Springer Science & Business Media, 1987.
- [54] Y. D. Sergeyev. Global one-dimensional optimization using smooth auxiliary functions. *Mathematical Programming*, 81(1):127–146, 1998.
- [55] P. T. Thach and H. Tuy. The relief indicator method for constrained global optimization. *Naval Research Logistics (NRL)*, 37(4):473–497, 1990.
- [56] H. Tuy. Convex analysis and global optimization, volume 22. Springer Science & Business Media, 1998.
- [57] H. Tuy and R. Horst. Convergence and restart in branch-and-bound algorithms for global optimization. application to concave minimization and dc optimization problems. *Mathematical Programming*, 41(1-3):161–183, 1988.
- [58] R. J. Vanderbei. Extension of piyavskii's algorithm to continuous global optimization. *Journal of Global Optimization*, 14(2):205–216, 1999.
- [59] S.F. Woon and V. Rehbock. A critical review of discrete filled function methods in solving nonlinear discrete optimization problems. *Applied Mathematics and Computation*, 217(1):25–41, 2010.
- [60] Z. Wu. The effective energy transformation scheme as a special continuation approach to global optimization with application to molecular conformation. *SIAM Journal on Optimization*, 6(3):748–768, 1996.
- [61] ZY. Wu, D. Li, and L-S. Z. Global descent methods for unconstrained global optimization. *Journal of Global Optimization*, 50(3):379–396, 2011.

[62] Z.Y. Wu, G.Q. Li, and J. Quan. Global optimality conditions and optimization methods for quadratic integer programming problems. *Journal of Global Optimization*, 51(3):549–568, 2011.

- [63] Z. Xu, H-X. Huang, P. M. Pardalos, and C-X. Xu. Filled functions for unconstrained global optimization. *Journal of Global Optimization*, 20(1):49–65, 2001.
- [64] Y. Yao. Dynamic tunneling algorithm for global optimization. Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on, 19(5):1222–1230, 1989.
- [65] Y. Yao, L. Chen, and Q. Zheng. Optimality condition and algorithm with deviation integral for global optimization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 357(2):371–384, 2009.
- [66] Y. Yongjian and L. Yumei. A new discrete filled function algorithm for discrete global optimization. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 202(2):280–291, 2007.
- [67] Y. Zhang, Y.and Xu and L. Zhang. A filled function method applied to nonsmooth constrained global optimization. *Journal of computational and applied mathematics*, 232(2):415–426, 2009.
- [68] Q. Zheng and L. Zhang. Global minimization of constrained problems with discontinuous penalty functions. *Computers & Mathematics with Applications*, 37(4):41–58, 1999.
- [69] A. A. Zhigljavsky and J. Pintér. *Theory of global random search*. Springer Netherlands, 1991.
- [70] W. Zhu. Globally concavized filled function method for the box constrained continuous global minimization problem. *Optimisation Methods and Software*, 21(4):653–666, 2006.