REPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SÉTIF1

Université
Ferhat Abbas-Sétif

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCE

Option: Mathématiques appliquées

Présentée par

Rahmoune Abita

THÈME

Etude de quelques problèmes aux limites linéaires ou non linéaires intervenant en mécanique des milieux continus

Soutenue le : 25/02/2016, devant le Jury composé de:

Membre	Grade & Etablissement	Qualité
Dr. DRABLA Salah	Prof. Univ. F. A., Sétif1	Président du Jury
Dr. Ben ABDERRAHMANE Benyattou	Prof. Univ. M. B., M'Sila	Rapporteur
Dr. BENSERIDI Hamid	Prof. Univ. F. A., Sétif1	Examinateur
Dr. DILMI Mourad	MCA. Univ. F. A., Sétif1	Examinateur
Dr. CHACHA Djamel Ahmed	Prof. Univ. K.M., Ouargla	Examinateur
Dr. BENHAMIDOUCHE Nouredine	Prof. Univ. M. B., M'Sila	Examinateur

ملخص

في هَاته الأطروحة، نَعتبر و ندرس بعض المسَائِل الحدودية المكَافِئة الخطية و الغير خطية التي تدخل ضمن مِكَانيك الوسط المستمر، اَلأَول يخص مسَائِل قطعية مكَافِئة متكونة مِن معَادلَات تصف حركة جسم مرن خطي بوجود طرف منبع و طرف مبَدِد الغير خطي، اَلثَاني هو المسَائِل القطعية عَالية غير الخطية بدون طرف مبَدِد، في حين أنّ الثَالث هو مسَألة قطعية غير خطية مِن أَجل مُؤثر اللّزوجة الغير خطية. تحت شروط إِبتدَائِية و مع بعض الفرضيَات المنَاسبة علَى المعطيَات، بِالإِستنَاد إِلَى تقنيَات التحليل الريَاضيَاتي و بطرق مُمَاثلة للّتي أشير إِليهَا في بعض المرَاجع، نتَائِج مهمة علَى نظرية وجود الحل الشَامل، اَلوحدَانية، اَلسلوك المتقَارب، اَلِانفجَار في الوقت المحدود و سلوك الحلول في الوقت الغير محدود تم الحصول عليهَا.

Résumé

Dans cette thèse, on considère quelques problèmes aux limites semi linéaires intervenant en mécanique des milieux continus hyperboliques ou paraboliques. Le premier est un problème hyperbolique pour les équations de l'élasticité linéaire avec un terme source et un terme dissipatif non linéaire, tandis que le second est un problème parabolique fortement non linéaire sans dissipation. Le troisième est un problème hyperbolique non linéaire pour les équations de viscoélasticité non linéaire. Sous certaines conditions sur les données initiales, en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, théorème de compacité et celle de monotonie ainsi que quelques techniques récentes d'analyse mathématique, des résultats importants sur l'existence locale et globale, le comportement asymptotique et l'explosion en temps fini des solutions ont été obtenus.

Abstract

In this thesis, we consider some semilnear hyperbolic or parabolic problems. The first is an hyperbolic problem for the linear elasticity equations with source and nonlinear dissipative terms, however the second is a parabolic problem for a strongly nonlinear elliptic operator without dissipative term. The third is a nonlinear hyperbolic problem for nonlinear viscoelastic equations. Under some hypothesis on the initial data, by basing on Faedo-Galerkin approximations, compactness and monotonicity theorems, the important results on the local and global existence, asymptotic behavior and the explosion in finite time of solutions are gotten in this work.

*

A LA MEMOIRE DE MON PERE.

TAYEB ....

**

Dédicaces

Je dédie cette thèse à ma mère, mes frères et sœurs, ma femme qui n'a pas cessé de m'encourager, à mes enfants :

Tayeb,

Aya.

A tous mes enseignants dès ma première année primaire jusqu'à maintenant...

A TOUTE MA FAMILLE....

A tous mes amis et mes collègues...

***

Remerciements

Avant tout chose, je tiens à remercier monsieur Benabderrahmane Benyattou professeur à l'université de M'sila qui m'a fait l'honneur d'accepter de poursuivre mes recherches sous sa direction, et pour la confiance qu'il m'a accordé en me proposant ce sujet de thèse, après la thèse de magister, et il n'a pas hésité de me fleurer par ses idées durant la préparation de cette thèse. Ses remarques m'ont permis de mener à bien ce travail qu'il trouve ici toute ma gratitude.

Je remercie Mr. DRABLA Salah, professeur à l'université de Sétif1, pour l'honneur qu'il m'a fait d'avoir accepté de juger ce travail et d'en présider le jury de soutenance.

Je remercie sincèrement Pr BENSERIDI Hamid, Dr DILMI Mourad, Pr CHACHA Djamel Ahmed et Pr BENHAMIDOUCHE Nouredine d'avoir accepté de lire mon travail et de faire partie du jury de cette thèse. Leur présences constituent un grand honneur. Merci pour vos remarques, vos critiques, vos conseils et simplement, pour l'intérêt que vous avez portés à mon travail.

Je voudrais également remercier tous les membres du laboratoire d'Informatique et de Mathématiques (LIM) à l'université de Laghouat.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements et grande gratitude à ma mére, ma femme, mes filles Tayeb et Aya, mes soeurs, à mes proches pour leur soutien constant et encouragement. Et surtout de m'avoir supporté toutes ces années, et à qui je dédie ce travail.

Rahmoune Abita

TABLE DES MATIÈRES

Introduction Générale **ii**

I Problème hyperbolique semi linéaire associé aux équations élastiques avec terme source et terme dissipatif **1**

1 Existence locale, Régularité et Dépendance continue de la solution par rapport aux données **3**
1.1 Notations et formulation variationnelle 3
1.1.1 Hypothèses 4
1.2 Formulation variationnelle 6
1.3 Existence et Unicité 8
1.3.1 Existence 8
1.3.2 Unicité 16
1.4 Régularité de la solution 17
1.5 Dépendance continue de la solution par rapport aux données 21

2 Existence globale et stabilité de la solution **23**
2.1 Introduction 23
2.2 Existence globale 24
2.3 Stabilité des solutions 25
2.4 Exemples 34

3 Exposion en temps fini de la solution **36**
3.1 Explosion en temps fini 36
3.1.1 Résultats et préliminaire 36

II Problèmes aux limites semi linéaires associés aux équations élastiques ou viscoélastiques avec terme source. 44

4 Existence globale et explosion en temps fini de la solution d'un problème hyperbolique semi linéaire associé aux équations élastiques avec terme source. 47
4.1 Position du problème 47
4.2 Existence globale de la solution 49
4.3 Non-existence globale de la solution 52
4.4 Explosion en temps fini de la solution 53

5 Existence locale et comportement à l'infini pour un problème aux limites parabolique non linéaire associé aux équations élastiques 55
5.1 Formulation variationnelle et préliminaires. 56
5.2 Existence et Unicité de la solution 57
5.2.1 Existence locale 57
5.2.2 Unicité 63
5.3 Comportement à l'infini en t 63
5.4 Exemples 66

6 Existence locale et dépendance continue de la solution par rapport aux données pour un problème viscoélastique non linéaire. 68
6.1 Position du Problème et Hypothèses 69
6.1.1 Position du Problème 69
6.1.2 Hypothèses 69
6.2 Formulation variationnelle 70
6.3 Existence locale et unicité de la solution 71
6.3.1 Existence locale des solutions 71
6.3.2 Unicité 78
6.4 Dépendance continue de la solution par rapport aux données 80
6.5 Exemples 82

Conclusion 84

Bibliographie 85

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basés sur les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDP dans la suite. C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes à travers d'EDP que l'on a pu comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises. L'étude mathématique des EDP nous a aussi appris à faire preuve d'un peu de modestie : on a découvert l'impossibilité de prévoir à moyen terme certains phénomènes gouvernés par des EDP non linéaires.

L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des EDP, c'est qu'il n'est en général pas question d'obtenir leurs solutions explicitement ! Ce que les mathématiques peuvent faire par contre, c'est à dire si une ou plusieurs solutions existent, et d'écrire parfois très précisément certaines propriétés de ces solutions telles que l'existence globale, le comportement asymptotique, l'explosion de la solution en temps fini,. . .

Dans ce travail, en se basant sur les techniques utilisées par [38, 39, 30, 29, 32, 31, 21, 22, 1, 65, 27, 3, 4, 47, 49, 25, 20, 40, 37], pour démontrer quelques résultats d'existence locale et globale, régularité, comportement asymptotique et comportement à l'infini de la solution de quelques problèmes semi linéaires hyperboliques ou paraboliques à savoir :

1. Problèmes aux limites semi linéaires hyperboliques pour les équations élastiques linéaires avec terme source et terme dissipatif,
2. Problèmes aux limites hyperboliques ou paraboliques non linéaires sans terme dissipatif.

Plus précisément, on s'intéresse à l'étude de l'existence locale et globale, le comportement asymptotique et l'explosion en temps fini de la solution d'une équation d'onde, et d'une équation semi linéaire pour l'opérateur de l'élasticité et pour l'opérateur fortement elliptique non linéaire.

Cette thèse est constituée de deux parties :

La première est consacrée à l'étude théorique d'un problème aux limites gouverné par des équations décrivant l'évolution des matériaux ayant une loi de comportement élastique et avec termes source et dissipatif :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - div\sigma(u) + |u|^\rho u + \alpha g(u') = f \text{ dans } \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

avec des conditions aux limites de Dirichlet-Neumann homogènes, où $\alpha \geq 0$, $p = \rho + 2 > 1$, $\sigma(u) = F(\varepsilon(u))$ et $\varepsilon(u)$ désignent respectivement le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations linéarisé, où F est une fonction linéaire et g est une fonction vérifie certaines conditions.

1. Dans le cas de la loi de Hook suivante :

   $$\sigma(u) = F(\varepsilon(u)) = 2\mu\varepsilon_{ij}(u) + \lambda trac(\varepsilon(u))I,$$

   où λ et μ désignent les coefficients de l'élasticité, et dans le cas où $\sigma(u) = \nabla u$.

   Les deux problèmes liés aux (1) avec des conditions aux limites et initiales et sans le terme dissipatif ont été considérés par plusieurs auteurs pour lesquels ils ont démontré l'unicité en imposant une condition sur le nombre ρ, voir Lions [38] .

2. Dans le cas $\sigma(u) = \nabla u$ et sans le terme source $|u|^\rho u$, avec $g(.) \neq 0$, le problème a été étudié par plusieurs auteurs, à savoir les conditions imposées sur la fonction g, on cite par exemple [47], [51], [1], [43], [57], [30], [49], [48], [25]. Précisément dans [47] et sous certaines conditions initiales arbitraires dans un espace convenable, Nakao Mitsuhiro a démontré que la solution faible est bornée ou bien existe globalement à cause du terme dissipatif non linéaire $g(u')$. Dans [43], où $g(v) = a\left(1 + |v|^{p-2}\right)v$, avec $a > 0$, $p > 2$, Massaoudi a démontré que le problème admet une solution globale unique, et que l'énergie se comporte exponentiellement. Finalement, dans [48], pour le même problème de Messaoudi, des résultats sur l'existence globale d'une solution locale pour $0 \leq p - 2 \leq \frac{2}{n-2}$, $n \geq 3$ et sur l'existence globale d'une solution forte pour $p - 2 > \frac{2}{n-2}$, $n \geq 3$ ont été obtenus.

Cette partie se décompose de trois chapitres :

Dans le premier et sous certaines hypothèses sur les données en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, la méthode de compacité ainsi que et la méthode de monotonie, nous allons démontrer l'existence locale et l'unicité d'une solution faible. Ensuite, sous certaines conditions supplémentaires sur la fonction g nous allons démontrer la régularité et la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Dans le second chapitre, en se basant sur les techniques introduites et développées par [10], [30], [32], [29], [1], [21], [22], [65], [1], [27], [31], [3, 4] nous allons prouver l'existence globale et la stabilité non linéaire des solutions. Les techniques utilisées sont celles de Liapounov basées sur l'application des inégalités et des intégrales appliquées dans [30],

[32], [29], [1], [21], [22], [10] et [25] en affaiblissant les conditions sur g et l'hypothèse $p' \leq \frac{n+2}{n-2}$ si $n \geq 3$ où p' désigne l'exposant conjugué de p.

Dans le dernier chapitre, sous certaines conditions sur la fonction g, différentes à celles considérées auparavant, on démontre que la solution trouvée s'explose en temps fini T^* qu'on va déterminer.

Il est important de signaler que les conditions sur la fonction g jouent un rôle très important sur le comportement de la solution. En effet,

1. Ma, et Soriano dans [41] ont considéré les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} p = n, \ g(x)\, x \geq 0, \\ \left|g(x)\right| \leq C_\beta \exp\left(\beta \left|x\right|^{\frac{n}{n-1}}\right), \ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

   pour démontrer l'existence globale pour des problèmes similaires à ceux considérés dans ce travail en se basant sur les mêmes techniques.

2. Vitilaro dans [63] a imposé la condition

$$\begin{cases} g \in C^1, \\ xg(x) \geq k_0 \left|x\right|^m, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ m > 2, \\ \left|g(x)\right| \leq k_1 \left|x\right| \left(1 + \left|x\right|^{m-1}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ m \geq 2, \end{cases}$$

il a obtenu des résultats similaires à ceux obtenus dans ce travail.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de l'existence locale et globale, explosion en temps fini, comportement asymptotique des solutions de quelques problèmes aux limites hyperboliques ou paraboliques non linéaires sans terme dissipatif et avec un terme source, à savoir :

* Problème hyperbolique semi linéaire associé aux équations élastiques linéaires avec terme source ;

* Problème aux limites parabolique non linéaire associé aux équations élastiques non linéaires ;

* Problème aux limites hyperbolique non linéaire associé aux équations viscoélastiques.

Cette partie se divise de trois chapitres.

Dans le premier chapitre on analyse la question d'existence globale et explosion en temps fini des solutions pour un problème hyperbolique semi linéaire associé aux équations élastiques avec terme source, suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - div\sigma(u) + \left|u\right|^\rho u = f, \ x \in \Omega, \ t \in \left]0, T\right[, \tag{2}$$

$$\sigma(u) = F(\varepsilon(u)). \tag{3}$$

La fonction u cherchée vérifie en outre les conditions initiales et les conditions aux limites suivantes :

$$u(x,0) = u_0(x),\ u'(x,0) = u_1(x),\ x \in \Omega, \tag{4}$$

$$u = 0 \text{ sur } \Sigma_1,\ \sigma(u)\eta = 0 \text{ sur } \Sigma_2, \tag{5}$$

où les fonctions u_0 et u_1 sont données.

Un problème particulier de (2)-(5) a été considéré par J.L. Lions dans [38]. Les techniques employées dans ce chapitre sont celles trouvées dans [3].

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du comportement à l'infini de la solution d'un problème aux limites parabolique non linéaire pour l'opérateur d'élasticité non linéaire.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu div\sigma\,(u) + \lambda \mathcal{A}u = f,\ x \in \Omega,\ t \in]0,T[\,,$$

Où $\mathcal{A}$, F sont des fonctions non linéaires et $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Dans le cas où $\mu = 0$ et $\lambda \neq 0$ et $\mathcal{A}u = -\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$, J.L. Lions dans [38] a étudié l'existence locale et l'unicité d'une solution faible du problème particulier suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f, x \in \Omega, t \in]0,T[\,,\ p \geq 2, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Les approximations de Faedo-Galerkin combinées aux méthodes de monotonie et de compacité, voir [54, 55], nous permettent de prouver l'existence locale et l'unicité de la solution du problème considéré. Ensuite, sous certaines hypothèses supplémentaires convenables sur les données nous allons analyser le comportement à l'infini de la solution et nous prouvons que la solution u reste bornée pour $t \longrightarrow +\infty$.

Dans le dernier chapitre nous allons considérer un problème aux limites hyperbolique non linéaire associé aux équations ayant une loi du comportement viscoélastique non linéaire :

$$\sigma\,(u) = \lambda F\,(\varepsilon(u)) + \mu G\,(\varepsilon(u'))\,,\ \text{dans } \Omega \times (0,T)\,,$$

avec les conditions aux limites et initiales (4) et (5). Où F et G sont des fonctions non linéaires et ρ, λ, μ des nombres réels positifs.

Dans les cas où $\mu = 0$ et $\lambda = 1$, avec $\sigma\,(u) = \nabla u$ ou $\mu = 1$ et $\lambda = 0$, avec $\sigma\,(u) = \nabla u'$ les problèmes correspondants ont été considérés par J.L. Lions [38]. Plus précisément, sous la supposition $\rho \leq \frac{2}{n-2}$, il a montré l'existence, l'unicité et la régularité d'une solution faible. Pour $\lambda = 1$, $\mu = 0$, où F est une fonction linéaire, le problème élastique associé a été étudié par R. Abita et B, Benyattou dans [56].

Sous certaines hypothèses sur les données en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, la méthode de compacité et le théorème du monotonie, nous allons démontrer l'existence locale et l'unicité d'une solution faible. Ensuite nous allons montrer la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Notations

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ on a

$\overline{\Omega}$	L'adhérence de Ω
Γ	La frontière de Ω supposée souvent régulière
Γ_i $(i = \overline{1,2})$	Une partition de la frontière Γ
$mes\ \Gamma_i$	La mesure de Lebesgue $(n-1)$ dimensionnelle de Γ_i
η	La normale extérieure unitaire à Γ
v_η, v_τ	Les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v
σ_η, σ_τ	Les composantes normale et tangentielle du champ tensoriel σ
$C^1(\overline{\Omega})$	L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$
$D(\Omega)$	L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω.
$D'(\Omega)$	L'espace des distributions sur Ω.
$D'(0,T;X)$	L'espace des distributions des fonctions $u : [0,T] \to X$
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	L'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ.
$(.,.)_X$	Le produit scalaire d'un espace de Hilbert X
$x_n \rightharpoonup x$, $(x_n \to x)$	La convergence faible (fort) de la suite (x_n) ver l'élément x
$\Vert . \Vert_X$	La norme de X
$\Vert . \Vert_{L^p(0,T;X)}$	La norme de l'espace de Sobolev $L^p(0,T;X)$
$\mathcal{L}(\mathrm{X})$	L'espace des applications linéaires et continues de X dans X

$\mathcal{H} = L^2(\Omega)_s^{n\times n} = \left\{\sigma = \left(\sigma_{ij}\right) \setminus \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\right\}$

$(\sigma,\tau)_{\mathcal{H}} =$	$\int_{\mathcal{H}} \sigma_{ij}\tau_{ij}dx$
$H^1(\Omega) =$	$\{v/\epsilon(v) \in \mathcal{H}\}$
$(u,v)_{H^1(\Omega)} =$	$(\epsilon(u),\epsilon(v))_{\mathcal{H}}$

$W^{1,p}(\Omega) = \{v \mid v \in L^p(\Omega),\ D_i v \in L^p(\Omega),\ i = 1,...,n\},\ 1 \leq p < +\infty$

$\Vert v \Vert_{W^{1,p}(\Omega)} =$	$\Vert v \Vert_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \Vert D_i v \Vert_{L^p(\Omega)}$
$C(0,T.H)$	L'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ dans H
f', f''	Les dérivées premières et secondes de f par rapport aux temps
$\partial_i f$	La dérivée partielle de f par rapport à la i éme composante x_i
$\nabla f = grad f$	Le gradient de f
$div\ f$	La divergence de f, i.e. $div\ \sigma = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right)$
$\mathcal{L}(X,Y)$	L'espace des applications linéaires et continues de X dans Y
$\mathcal{S}_n$	L'espace des tenseurs symétriques de seconde ordre sur $\mathbb{R}^n$
I_n	Le tenseur identité du second ordre sur $\mathbb{R}^n$

$\varepsilon(u) = \varepsilon\left(u_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ tenseur des déformations linéairisé

Principales normes et semi-normes utilisées

$\lvert f \rvert = \left(\int_{\Omega} \lvert f(x) \rvert^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$	Norme sur $L^2(\Omega)$
$\lvert f \rvert_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\lvert \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rvert^2 \right)^{\frac{1}{2}}$	Semi norme sur $H^1(\Omega)$
$\lVert f \rVert = \left(\lvert f \rvert^2 + \lvert f \rvert_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}$	Norme sur $H^1(\Omega)$
$\lVert f \rVert_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \lVert f(s) \rVert_X^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}$	Norme sur $L^p(0, T; X)$
$\lvert v \rvert = (v.v)^{\frac{1}{2}}$	Norme sur $\mathbb{R}^n$
$\lVert \tau \rVert = (\tau, \tau)^{\frac{1}{2}}$	Norme sur $\mathcal{S}_n$

Première partie

Problème hyperbolique semi linéaire associé aux équations élastiques avec terme source et terme dissipatif

Introduction

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ régulière. Dans cette première partie, on s'intéresse à l'existence locale et globale, comportement asymptotique et explosion en temps fini T^* de la solution d'un problème hyperbolique semi linéaire pour l'élasticité linéaire et avec une dissipation non linéaire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - div\sigma(u) + |u|^\rho u + \alpha g(u') = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \tag{6}$$

où u, f et $\sigma(u) = F(\varepsilon(u))$ et $\varepsilon(u)$ désignent le vecteur du déplacement, la densité des forces volumiques, le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations linéarisé, respectivement, où F est une fonction linéaire et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction monotone et globalement Lipschitz telle que $g(0) = 0$, $\alpha \geq 0$.

La fonction u cherchée doit vérifier en outre les conditions aux limites et les conditions initiales suivantes :

$$u = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \ \sigma(u)\eta = 0 \text{ sur } \Sigma_2. \tag{7}$$

$$u'(x, 0) = u_1(x), \ u(x, 0) = u_0(x), \text{ dans } \Omega, \tag{8}$$

avec $u_0(x)$, $u_1(x)$, sont des fonctions données.

Cette partie se décompose de trois chapitres :

Dans le premier chapitre de cette partie et sous certaines hypothèses sur les données en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, la méthode de compacité ainsi que et le théorème monotonie, nous allons démontrer l'existence locale et l'unicité d'une solution faible. Ensuite, sous certaines conditions supplémentaires sur la fonction g nous allons démontré la régularité et la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Dans le second chapitre, en se basant sur les techniques introduites et développées par [10], [30], [32], [29], [1], [21], [22], [65], [27], [31], [3, 4] nous allons prouver l'existence

globale et la stabilité non linéaire des solutions. Les techniques utilisées sont celles de Liapounov basées sur l'application des inégalités et des intégrales appliquées dans [30], [32], [29], [1], [21], [22], [10] et [25] en affaiblissant les conditions $|g(x)| \to \infty$ quand $|x| \to \infty$ et l'hypothèse $p' \leq \frac{n+2}{n-2}$ si $n \geq 3$, où p' est le conjuguée exponentielle de p.

Dans le dernier chapitre, sous certaines conditions sur la fonction g nous allons démontré queque la solution trouvée s'explose en temps fini T^* qu'on déterminera.

CHAPITRE 1

EXISTENCE LOCALE, RÉGULARITÉ ET DÉPENDANCE CONTINUE DE LA SOLUTION PAR RAPPORT AUX DONNÉES

Sommaire

1.1 Notations et formulation variationnelle **4**
1.1.1 Hypothèses 5
1.2 Formulation variationnelle **6**
1.3 Existence et Unicité **9**
1.3.1 Existence 9
1.3.2 Unicité 16
1.4 Régularité de la solution **18**
1.5 Dépendance continue de la solution par rapport aux données **22**

Dans ce chapitre, on considère un problème aux limites non linéaire gouverné par des équations décrivant l'évolution des matériaux ayant une loi de comportement élastique linéaire avec un terme source et un terme dissipatif. On démontre que ce problème, sous certaines hypothèses sur les données est équivalent au problème variationnel qu'on déterminera explicitement. Les approximations de Faedo-Galerkin et la méthode de compacité assurent que ce problème possède au moins une solution faible dans un intervalle borné $[0, T]$. L'unicité de la solution est obtenue en éliminant quelques conditions qui ont été imposées par plusieurs auteurs [Lions, Meflah,......] pour des problèmes particuliers. A la fin de ce chapitre on s'intéresse à la régularité de la solution et la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

1.1 Notations et formulation variationnelle

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, à frontière régulière Γ, on désigne par u un vecteur $(u_1, u_2, ..., u_n)$, où $\forall i$, $u_i : Q = \Omega \times]0, T[\to \mathbb{R}$. Soit $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ une partition de Γ, i.e. $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. On suppose que $mes\, \Gamma_1 > 0$ et on pose $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[$ et $\Sigma_2 = \Gamma_2 \times]0, T[$ où

T est un réel fini quelconque. On dénote par

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u'' = \left\{u_1'', u_2'', ..., u_n''\right\} = \left\{\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, ..., \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}\right\}$$

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \text{ désigne le tenseur des déformations linéarisé}$$

Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions u, σ par rapport à $x \in \Omega$ et $t \in [0, T]$. L'objet de ce chapitre est de chercher le couple $(u, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n$ solution du problème (1.1)-(1.4) suivant :

Problem 1.1 *Trouver un champ des déplacements* $u : Q \to \mathbb{R}^n$*, un champ des contraintes* $\sigma : Q \to \mathcal{S}_n$*, tels que*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - div\sigma(u) + |u|^\rho u + \alpha g(u') = f \text{ dans } Q, \tag{1.1}$$

$$\sigma(u) = F(\varepsilon(u)) \text{ dans } Q, \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} a) \; u = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \\ b) \; \sigma(u)\eta = 0 \text{ sur } \Sigma_2. \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} a) \; u(x,0) = u_0(x), \\ b) \; u'(x,0) = u_1(x), \end{cases} \text{ dans } \Omega. \tag{1.4}$$

Où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction monotone et globalement Lipschitz telle que $g(0) = 0$. La première équation, sans le terme non linéaire $|u|^\rho u + \alpha g(u')$, décrit l'évolution d'un corps ayant une loi de comportement élastique (1.2), où F est une fonction linéaire. Les relations (1.3) et (1.4) sont les conditions aux limites homogène Dirichlet-Neumann et les conditions initiales, respectivement.

En absence du terme dissipatif, pour $\alpha = 0$, le problème a été étudié par Rahmoune et Benabderrahmane dans [54, 55], ils ont démontré l'existence locale d'une solution faible et ils ont obtenu l'unicité de la solution en affaiblissant quelques hypothèses qui ont été considérées par plusieurs auteurs pour des problèmes particuliers, par exemple dans le cas où $\sigma(u) = \nabla u$, Lions dans [38, 39] a étudié le problème de Dirichlet associé. Il a démontré l'existence d'une solution faible en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin et la méthode de compacité, puis il a démontré l'unicité de la solution en supposons des conditions sur ρ où $\rho = p - 2 > -1$.

Pour l'étude de ce problème on aura besoin des hypothèses suivantes :

1.1.1 Hypothèses

Nous supposons que la fonction linéaire $F : \Omega \times S_n \to S_n$ satisfait les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} (a) \text{ Il existe } m > 0 \text{ telle que} \\ (F(x,\varepsilon), \varepsilon) \geq m\,|\varepsilon|^2, \; \forall \varepsilon, \in S_n, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \; (F(x,\varepsilon), \tau) = (F(x,\tau), \varepsilon), \; \forall \varepsilon, \tau \in S_n, \text{ p.p. } x \in \Omega; \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto F(x,\varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in S_n, \end{cases} \tag{1.5}$$

où S_n représente l'espace de tenseurs symétriques d'ordre n .

Nous supposons aussi que les données initiales aient la régularité suivante :

$$f \in L^2(Q), \tag{1.6}$$

$$u_0 \in V \cap L^p(\Omega), \tag{1.7}$$

$$u_1 \in L^2(\Omega). \tag{1.8}$$

où

$$V = \left\{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Sigma_1\right\}.$$

On dénote par

$$\mathcal{H}{=}L^2(\Omega)_s^{n\times n} = \left\{\sigma = (\sigma_{ij})/\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\right\},$$

qui est un espace de Hilbert muni de produit scalaire donné par

$$(\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathcal{H}} \sigma_{ij}\tau_{ij} dx.$$

et avec la norme associée $\|.\|_{\mathcal{H}}$.

On a les remarques suivantes

Remarque 1.1 *Les hypothèses (1.5) nous permettent de considérer l'opérateur, noté encore F, défini par*

$$F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H},\ F(\varepsilon(.)) = F(., \varepsilon(.)),\ \forall \varepsilon \in \mathcal{H},\ p.p.dans\ \Omega$$

Démonstration. Si $\varepsilon \in \mathcal{H}$, en utilisant le fait que F est continu et ((1.5),c) il résulte que $x \to F(x, \varepsilon(.))$ est une fonction mesurable de Ω à valeur dans $\mathcal{S}_n$, et comme $F(x, 0_n) = 0$, on conclut que $F(x, \varepsilon(.)) \in \mathcal{H}$. On remarque également que, d'après (1.5), l'opérateur F est un opérateur continu, linéaire et fortement monotone car il satisfait aux inégalités suivantes :

$$\int_{\Omega} |F((\varepsilon(u))|^2 \, dx \leq C \int_{\Omega} |(\varepsilon(u)|^2 \, dx \leq C, \text{ donc } F((\varepsilon(u)) \in \mathcal{H}$$

et

$$(F(\varepsilon), \varepsilon)_{\mathcal{H}} \geq m\, |\varepsilon|^2_{\mathcal{H}} \ \ \forall \varepsilon \in \mathcal{H}.$$

■

Remarque 1.2 *Comme l'opérateur F est linéaire et positive, i.e. $((F(\varepsilon), \varepsilon) \geq 0, \forall \varepsilon \in \mathcal{H})$, alors F est continu sur $\mathcal{H}$ fort.*

Remarque 1.3 *Etant donné que l'opérateur $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est fortement monotone et linéaire, alors F est inversible et $F^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est également fortement monotone et linéaire. Donc*

$$\sigma(u) = F(\varepsilon(u)) \text{ est équivalent au } \varepsilon(u) = F^{-1}(\sigma(u)).$$

1.2 Formulation variationnelle

Dans ce paragraphe on démontre que sous les hypothèses précédentes le problème (1.1)-(1.4) est équivalent à un problème variationnel, noté $(P.V)$.

Lemme 1.1 *Sous les hypothèses (1.5)-(1.8), le problème (1.1)-(1.4) est, formellement, équivalent au problème variationnel suivant :*

$$(P.V):\begin{cases} \text{Trouver } u\in V\cap L^{p}(\Omega) \text{ tel que} \\ (u'',v)+a(u,v)+(|u|^{\rho}u,v)+\alpha(g(u'),v)=(f,v),\ \forall v\in V\cap L^{p}(\Omega) \\ u(x,0)=u_0(x),\ u'(x,0)=u_1(x),\ x\in\Omega \end{cases}$$

Où

$$V=\left\{v\in H^{1}(\Omega)/v=0\ sur\ \Sigma_1\right\}$$

et

$$a(u,v)=\int_{\Omega}\sigma(u)\varepsilon(v)dx=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\sigma_{ij}(u)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx.$$

Démonstration. Soit u une solution du problème (1.1)-(1.4), en multipliant l'équation (1.1) par $v\in H^{1}(\Omega)\cap L^{p}(\Omega)$ il vient

$$(u'',v)-(div\sigma(u),v)+(|u|^{\rho}u,v)+\alpha(g(u'),v)=(f,v),$$

ou encore

$$(u'',v)-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial\sigma_{ij}(u)}{\partial x_j}v_i dx+(|u|^{\rho}u,v)+$$
$$+\alpha(g(u'),v)=(f,v),\ \forall v\in H^{1}(\Omega)\cap L^{p}(\Omega).$$

En utilisant la formule de Green, on obtient pour tout $v\in H^{1}(\Omega)\cap L^{p}(\Omega)$

$$(u'',v)+\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\sigma_{ij}(u)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Sigma}\sigma_{ij}(u)\eta_j v_i d\Sigma+(|u|^{\rho}u,v)+\alpha(g(u'),v)=(f,v)$$

En utilisant le fait que $\{\Sigma_1,\Sigma_2\}$ est une partition de Σ on en déduit

$$(u'',v)+\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\sigma_{ij}(u)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Sigma_1}\sigma_{ij}(u)\eta_j v_i d\Sigma_1-$$
$$-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Sigma_2}\sigma_{ij}(u)\eta_j v_i d\Sigma_2+(|u|^{\rho}u,v)+\alpha(g(u'),v)=(f,v)$$

En posant $v=0$ sur Σ_1, il en résulte

$$(u'',v)+\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\sigma_{ij}(u)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Sigma_2}\sigma_{ij}(u)\eta_j v_i d\Sigma_2+(|u|^{\rho}u,v)+$$
$$+\alpha(g(u'),v)=(f,v),\ \forall v\in V\cap L^{p}(\Omega).$$

En prenant en considération la condition (1.4) sur Σ_2, on obtient le problème variationnel suivant :

$$(u'',v)+a(u,v)+(|u|^{\rho}u,v)+\alpha(g(u'),v)=(f,v),\ \ \forall v\in V\cap L^p(\Omega)$$

Finalement tenant compte des conditions (1.3), on conclut que u est une solution du problème $(P.V)$.
Montrons l'implication inverse.

Soit u une solution variationnelle du problème $(P.V)$, on a

$$(u'',v)+a(u,v)+(|u|^{\rho}u,v)+\alpha(g(u'),v)=(f,v),\ \ \forall v\in V\cap L^p(\Omega).$$

En utilisant la formule de Green, on trouve

$$\begin{aligned}(u'',v)-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial\sigma_{ij}(u)}{\partial x_j}.v_i dx+\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Sigma}\sigma_{ij}(u)\eta_j v_i dx+(|u|^{\rho}u,v)+ \\ +\alpha(g(u'),v)=(f,v),\ \ \forall v\in V\cap L^p(\Omega).\end{aligned}\tag{1.9}$$

Pour $v=\psi\in D(\Omega)$ il vient

$$(u'',\psi)-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial\sigma_{ij}(u)}{\partial x_j}.\psi_i dx+(|u|^{\rho}u,\psi)+\alpha(g(u'),\psi)=(f,\psi),\ \forall\psi\in D(\Omega),$$

ou encore sous forme

$$(u'',\psi)-\int_{\Omega}di\mathbf{v}\sigma(u).\psi dx+(|u|^{\rho}u,\psi)+\alpha(g(u'),\psi)=(f,\psi),\ \forall\psi\in D(\Omega),$$

d'où l'équation

$$u''-div\sigma+|u|^{\rho}u+\alpha g(u')=f,\ \text{p.p. dans } Q.$$

Reste à vérifier les conditions (1.4).

Pour tout $v\in V\cap L^p(\Omega)$ on a $v=0$ sur Σ_1, de plus en remplaçant l'équation (1.1) dans (1.9), on trouve

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Sigma_2}\sigma_{ij}(u)\eta_j v_i d\Sigma_2=0,\ \forall v\in V\cap L^p(\Omega).$$

En admettant que l'espace des traces sur Σ_2 est dense dans $L^2(\Sigma_2)$ on trouve

$$\forall w\in L^2(\Sigma_2),\int_{\Sigma_2}\sigma(u)\eta w d\Sigma_2=0.$$

D'où il résulte que $\sigma(u)\eta=0$ sur Σ_2. ■

Si on pose

$$\|u\|_1=(a(u,u))^{\frac{1}{2}}=\left[\int_{\Omega}\sigma(u)\varepsilon(u)dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Il est clair que $\|u\|_1$ définie une semi norme sur V et de plus on a :

Lemme 1.2 *Sous l'hypothèse (1.5), $\|u\|_1$ est une semi norme équivalente à la norme $\|u\|$ sur $H_0^1(\Omega)$.*

Démonstration. En utilisant la remarque 1.3, il vient

$$|a(u,u)| \leq \left| \int_\Omega F(\varepsilon(u))\varepsilon(u)dx \right| \leq \int_\Omega |F(\varepsilon(u))|\, |\varepsilon(u)|\, dx \leq$$
$$\leq C \int_\Omega |\varepsilon(u)|^2\, dx \leq C\, |\varepsilon(u)|^2 \leq C_2\, \|u\|^2$$

Grâce à l'inégalité de Korn, de $((1.5), a)$ on tire

$$a(u,u) \geq m \int_\Omega |\varepsilon(u)|^2\, dx \geq C_2'\, \|u\|^2$$

Donc

$$C_2'^{\frac{1}{2}}\, \|u\| \leq (a(u,u))^{\frac{1}{2}} \leq C_2^{\frac{1}{2}}\, \|u\|\,.$$

■

1.3 Existence et Unicité

Dans ce paragraphe et sous les hypothèses que nous avons cité précédemment, l'existence locale et l'unicité d'une solution faible seront obtenues en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, méthode de compacité et les propriétés d'un opérateur semi continu inférieurement. L'unicité de la solution est démontrée sans aucune condition sur le nombre ρ.

Nous commençons par démontrer l'existence d'une solution faible du problème (1.1)–(1.4).

1.3.1 Existence

Théorème 1.1 *Supposons que les hypothèses (1.5)-(1.8) sont vérifiées. Alors le problème (1.1) possède au moins une solution pour tout T fini quelconque et tout $\rho > -1$. En outre, la solution satisfait*

$$u \in L^\infty(0,T; V \cap L^p(\Omega)), \tag{1.10}$$

$$u' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \tag{1.11}$$

$$g\,(u')\, u' \in L^1(0,T). \tag{1.12}$$

Avant de donner la démonstration explicite de ce théorème nous commençons par justifier que le problème variationnel $(P.V)$ a un sens.

Lemme 1.3 *Sous les hypothèses (1.5)-(1.8), le problème $(P.V)$ a bien un sens.*

Démonstration. Notons que si $u : t \to u(t)$ est une fonction de $L^2(0,T; V \cap L^p(\Omega))$ et si v est un élément de $V \cap L^p(\Omega)$, la fonction $t \to (u(t), v)_V$ appartient à $L^2(0,T)$. Tout d'abord puisque u est une fonction de $L^\infty(0,T; V \cap L^p(\Omega))$ et pour $u' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, les fonctions $t \longmapsto (u(t), v)$, $t \longmapsto a(u(t), v)$ appartiennent à $L^2(0,T)$ et $t \longmapsto (g(u'(t)), v)$ appartient à $L^1(0,T)$. Aussi la fonction $t \longmapsto (|u(t)|^\rho u(t), v)$ appartient à $L^1(0,T)$ pour tout $v \in V \cap L^p(\Omega)$, car en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left| |u|^\rho u(t) v(t) \right| dx &\leq \left\| |u|^\rho u(t) \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \\ &\leq C \|u(t)\|_{L^p(\Omega)} \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C.\end{aligned}$$

De même, puisque f est une fonction de $L^2(Q)$, la fonction $t \longmapsto (f(t), v)$ est dans $L^2(0,T)$ pour tout $v \in V$. Il en résulte que le problème variationnel $(P.V)$ a un sens dans $D'(]0,T[)$.

■

Lemme 1.4 *Sous les hypothèses (1.5)-(1.8), les conditions (1.3) ont un sens.*

Démonstration. Tenant compte de (1.10) et (1.11) on a

$$u \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega)\right) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega)\right).$$

En particulier, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, u est continue de $[0,T] \to L^2(\Omega)$, donc $((1.3), a)$ a un sens.
Reste à vérifier que $((1.3), b)$ a un sens, pour cela on revient à l'équation (1.1) qui donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f + div\sigma - |u|^\rho u + \alpha g(u').$$

En utilisant (1.10) on déduit

$$\varepsilon(u) \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega)\right).$$

Tenant compte du fait que F est continu, il résulte que

$$F(\varepsilon(u)) \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega)\right),$$

d'où il vient

$$divF(\varepsilon(u)) = div\sigma \in L^\infty\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right).$$

D'autre part en utilisant (1.10) il vient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left| (|u|^\rho u) \right|^{p'} dx &= \int_\Omega |u|^{(\rho+1)p'} dx = \int_\Omega |u|^{(\rho+1)\frac{p}{p-1}} dx = \\ &= \int_\Omega |u|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} dx = \int_\Omega |u|^p dx = \|u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C\end{aligned}$$

et par conséquent

$$|u|^\rho u \in L^\infty\left(0,T; L^{p'}(\Omega)\right), \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

De (1.11) on a
$$g\left(u'\right) \in L^{\infty}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right).$$
Donc, il en résulte que
$$u'' \in L^{2}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right)+L^{\infty}\left(0,T;H^{-1}(\Omega)+L^{p'}(\Omega)\right).$$
D'où, en particulier
$$u'' \in L^{2}\left(0,T;H^{-1}(\Omega)+L^{p'}(\Omega)\right).$$
Ceci joint à (1.13), en particulier, $\frac{\partial u}{\partial t}$ est continue de $[0,T] \longrightarrow H^{-1}(\Omega)+L^{p'}(\Omega)$, de sorte que $((1.3);b)$ a un sens. ■

Démonstration du Théorème 1.1. La démonstration du Théorème 1.1 sera effectuée dans quatre étapes :

a) Solution approchée : on construit des solutions approchées par la méthode de Faedo Galerkin ;

b) Estimations à priori : on établit sur ces solutions approchées des estimations (majorations) à priori ;

c) Passage à la limite : en utilisant la propriété de compacité dans les termes non linéaires et les propriétés d'un opérateur semi continu inférieurement.

d) Vérifications des conditions initiales.

A cet effet, nous assumons dans la suite que (1.5)-(1.8) sont satisfaites ; ci-après, C est une constante générique positive qui peut dépendre de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, L, m$, dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre.

a) Etape 1 : Solution approchée.

On introduit une suite (w_n) de fonctions ayant les propriétés suivantes :
* $\forall j; w_j \in V \cap L^p(\Omega)$;
* La famille $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ est linéairement indépendante ;
* L'espace $V_m = span\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ engendré par la famille $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ est dense dans $V \cap L^p(\Omega)$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on note $(\mathcal{P}_{\mathbf{1m}})$ le problème suivant : trouver $u_m = u_m(t)$ dans V_m, sous la forme
$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} K_{im}(t) w_{i,} \tag{1.13}$$
où les K_{jm} sont déterminés par le système (P_m) suivant :
$$(P_m) : \begin{cases} (u_m''(t), w_j) + a(u_m, w_j) + \left(|u_m|^{\rho} u_m, w_j\right) + \\ +\alpha(g\left(u_m'\right), w_j) = (f, w_j),\ 1 \leq j \leq m, \\ u_m(0) = u_{0m},\ u'(0) = u_{1m}, \end{cases} \tag{1.14}$$
où
$$u_m(0) = u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im} w_i \overset{m \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} u_0, \text{ dans } V \tag{1.15}$$

et
$$u'_m(0) = u_{1m} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{im} w_i \overset{m \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} u_1, \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{1.16}$$

Comme la famille $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ est linéairement indépendante, le problème (P_m) possède au moins une solution u_m dans l'intervalle $[0, t_m]$ ayant la régularité suivante :
$$u_m(t) \in L^2(0, t_m; V_m), u'_m(t) \in L^2(0, t_m; V_m).$$

Les estimations à priori sur $(u_m(t))_m$ qui suivent montreront que t_m est indépendant de m. (i.e. $t_m = T$.)

b) Estimations sur $(u_m(t))_m$.

On multiplie l'équation (1.14) d'indice j par $K'_{jm}(t)$ et l'on somme en j il vient
$$\begin{aligned}(u''_m(t), u'_m(t)) + a(u_m(t), u'_m(t)) + (|u_m|^\rho u_m, u'_m(t)) + \\ +\alpha(g(u'_m), u'_m(t)) = (f, u'_m(t)).\end{aligned} \tag{1.17}$$

Mais comme
$$u_m \in L^2(0, t_m; V_m), \; u'_m \in L^2(0, t_m; V_m)$$

Donc
$$\varepsilon(u_m), \; \varepsilon(u'_m) \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$$

Par conséquent
$$F(\varepsilon(u_m)), F(\varepsilon(u'_m)) \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right).$$

D'autre part comme
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} a(u_m(t), u_m(t)) = \left(\frac{d}{dt} F(\varepsilon(u_m(t))), \varepsilon(u_m(t))\right) + \\ + \left(F(\varepsilon(u_m(t))), \frac{d}{dt}\varepsilon(u_m(t))\right) = (F(\varepsilon(u'_m(t))), \varepsilon(u_m(t))) + \\ + (F(\varepsilon(u_m(t))), \varepsilon(u'_m(t))) = a(u'_m(t), u_m(t)) + a(u_m(t), u'_m(t)).\end{aligned}$$

En utilisant $((1.5), b)$ il en résulte
$$(F(\varepsilon(u'_m(t))), \varepsilon(u_m(t))) = (F(\varepsilon(u_m(t))), \varepsilon(u'_m(t)))$$

Donc
$$a(u_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a(u_m(t), u_m(t)) \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_1^2. \tag{1.18}$$

Aussi
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u'_m(t)\right|^2 = (u''_m(t), u'_m(t)); \\ \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u_m(x,t)\|^p_{L^p(\Omega)} = (|u_m|^\rho u_m(t), u'_m(t)), \; p = \rho + 2. \end{cases}$$

En utilisant (1.18) et le Lemme 1.2, (1.17) devient
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u'_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2} C_1 \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^p_{L^p(\Omega)} + \\ +\alpha(g(u'_m(t)), u'_m(t)) \leq (f(t), u'_m(t)).\end{aligned} \tag{1.19}$$

Grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, de (1.19) on conclut que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|u'_m(t)\right|^2 + C_1\left\|u_m(t)\right\|^2 + \frac{2}{p}\left\|u_m(t)\right\|^p_{L^p(\Omega)}\right) + \alpha\left(g\left(u'_m(t)\right), u'_m(t)\right) \leq \tag{1.20}$$
$$\leq \frac{1}{2}\left|(f(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|u'_m(t)\right|^2.$$

En intégrant (1.20) sur $(0,t)$ il résulte

$$\frac{1}{2}\left(\left|u'_m(t)\right|^2 + C_1\left\|u_m(t)\right\|^2 + \frac{2}{p}\left\|u_m(t)\right\|^p_{L^p(\Omega)}\right) + \alpha\int_0^t\left(g\left(u'_m(t)\right), u'_m(t)\right)dt \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\left|u_{1m}\right|^2 + \frac{1}{2}C_1\left\|u_{0m}\right\|^2 + \frac{1}{p}\left\|u_{0m}\right\|^p_{L^p(\Omega)} + \tag{1.21}$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left|(f(s)\right|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t\left|u'_m(s)\right|^2 ds.$$

Moyennant (1.15), (1.16) et (1.6) il résulte de (1.21) que

$$\left|u'_m(t)\right|^2 + C_1\left\|u_m(t)\right\|^2 + \frac{2}{p}\left\|u_m(t)\right\|^p_{L^p(\Omega)} + 2\alpha\int_0^t\left(g\left(u'_m(t)\right), u'_m(t)\right)dt \leq \tag{1.22}$$
$$\leq C_2 + \int_0^t\left|u'_m(s)\right|^2 ds.$$

En utilisant les propriétés de la fonction g on voit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $xg(x) \geq 0$, et par conséquent

$$\left(g\left(u'_m(t)\right), u'_m(t)\right) \geq 0,\ \forall t \geq 0. \tag{1.23}$$

Par conséquent, on a en particulier,

$$\left|u'_m(t)\right|^2 \leq C_2 + \int_0^t\left|u'_m(s)\right|^2 ds,\ \forall t \in [0,T]. \tag{1.24}$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall pour déduire de l'inégalité précédente que

$$\left|u'_m(t)\right| \leq C \text{ (indépendant de } m). \tag{1.25}$$

Reprenant (1.22) on en déduit que

$$\left\|u_m(t)\right\| + \left\|u_m(t)\right\|_{L^p(\Omega)} + \int_0^t\left(g\left(u'_m(t)\right), u'_m(t)\right)dt \leq C. \text{ (indépendant de } m) \tag{1.26}$$

D'où l'indépendance de t_m par rapport à m.

En utilisant (1.25), (1.26) pour conclure

$$\begin{cases} u_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty\left(0,T;V\cap L^p(\Omega)\right), \\ u'_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\ \left(g\left(u'_m(t)\right),u'_m(t)\right) \text{ demeure dans un borné de } L^1\left(0,T\right). \end{cases} \tag{1.27}$$

c) Passage à la limite.

De (1.27), on déduit qu'on peut extraire une sous suite $\left(u_\mu\right)$ de (u_m) telle que

$$u_\mu \to u \text{ dans } L^\infty\left(0,T;V\cap L^p(\Omega)\right), \text{ faible étoile,} \tag{1.28}$$

$$u'_\mu \to u' \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \text{ faible étoile.} \tag{1.29}$$

Puisque $V\cap L^p(\Omega)\subset L^2(\Omega)$, il résulte en particulier de (1.27) que les suites $(u_m)\,,(u'_m)$ sont bornées dans $L^2(0,T;V)\subset L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)=L^2\left(Q\right), L^2\left(Q\right)$, respectivement, en particulier (u_m) demeure dans un borné de $H^1(Q)$.
En utilisant le fait que l'injection de $H^1(Q)$ dans $L^2(Q)$ est compact, voir [20, 38], on déduit que

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ in } L^2(Q) \text{ fort.} \tag{1.30}$$

En utilisant le fait que $g\left(u'_m\right)$ demeure dans un borné de $L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, on conclut que

$$g\left(u'_\mu\right) \to \chi \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \text{ faible étoile} \tag{1.31}$$

et comme $|u_m|^\rho u_m$ demeure dans un borné de $L^\infty\left(0,T;L^{p'}(\Omega)\right), \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, alors on a

$$\left|u_\mu\right|^\rho u_\mu \to |u|^\rho u \text{ dans } L^2\left(0,T;L^{p'}(\Omega)\right), \text{ faible étoile.} \tag{1.32}$$

Soit j fixé, et $\mu > j$, alors d'après (1.14) on a

$$\left(u''_\mu(t),w_j\right)+a\left(u_\mu,w_j\right)+\left(\left|u_\mu\right|^\rho u_\mu(t),w_j\right)+\alpha\left(g\left(u'_\mu\right),w_j\right)=\left(f,w_j\right),\ j=1,...,m. \tag{1.33}$$

Mais d'après (1.28), (1.29) il résulte

$$\begin{cases} a(u_\mu,w_j)\to a(u,w_j) \text{ dans } L^\infty(0,T),\ \text{faible étoile,} \\ (u'_\mu,w_j)\to (u',w_j) \text{ dans } L^\infty(0,T),\ \text{faible étoile.} \end{cases}$$

Et donc,

$$\left(u''_\mu(t),w_j\right)\longrightarrow\left(u''(t),w_j\right) \text{ dans } \mathcal{D}'(0,T).$$

Moyennant (1.29), (1.31) on en déduit que

$$\left(g\left(u'_\mu\right),w_j\right)\to\left(\chi,w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T). \text{ faible étoile}$$

Et de (1.28), (1.32) on a

$$\left(\left|u_\mu\right|^\rho u_\mu,w_j\right)\longrightarrow\left(|u|^\rho u,w_j\right) \text{ dans } L^2(0,T) \text{ faible étoile.}$$

Par conséquent, (1.33) devient

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u,w_j)+a(u,w_j)+\left(|u|^\rho u,w_j\right)+\left(\alpha\chi,w_j\right)=\left(f,w_j\right),$$

pour tout $w_j \in V_m$ et tout $1 \leq j \leq m$.

Par densité de V_m dans $V \cap L^p(\Omega)$ on conclut que

$$(u'', v) + a(u, v) + (|u|^\rho u, v) + (\alpha\chi, v) = (f, v), \ \forall v \in V.$$

D'où il résulte que u satisfait

$$u'' - div\sigma(u) + |u|^\rho u + \alpha\chi = f \text{ dans } Q. \tag{1.34}$$

d) Vérifications des conditions initiales.

D'après (1.28), (1.29),

$$u_\mu(0) \to u(0) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

Alors, de (1.16) on en déduit, en particulier, que

$$u_\mu(0) = u_{0\mu} \to u_0 \text{ dans } V.$$

D'où la première condition dans (1.4).

D'autre part, nous avons

$$\left(u''_\mu(t), w_j\right) \to \left(u''(t), w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible étoile.}$$

Par conséquent,

$$\left(u'_\mu(0), w_j\right) \longrightarrow (u'(0), w_j).$$

Comme $\left(u'_\mu(0), w_j\right) \longrightarrow (u_1, w_j)$, on a $\left(u'(0), w_j\right) = (u_1, w_j), \forall j$. Alors la deuxième condition dans (1.4) est satisfaite.

Pour finir la preuve du Théorème 1.1 nous devons montrer que

$$\chi = g(u'(t)).$$

En effet :

Pour tout $v \in L^2(0, T; V)$ on a

$$X_\mu = \int_0^t \left(\alpha g\left(u'_\mu(s)\right) - \alpha g(v'(s)), u'_\mu(s) - v'(s)\right) ds \geq 0. \tag{1.35}$$

De (1.14) il découle

$$\int_0^t \left(\alpha g\left(u'_\mu(s)\right), u'_\mu(s)\right) ds = -\frac{1}{2}\left|u'_\mu(t)\right|^2 - \frac{1}{2}C_1\left\|u_\mu(t)\right\|^2 -$$

$$-\frac{1}{p}\left\|u_\mu(x,t)\right\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\left|u_{1\mu}\right|^2 + \frac{1}{2}C_1\left\|u_{0\mu}\right\|^2 +$$

$$+\frac{1}{p}\left\|u_{0\mu}\right\|^p_{L^p(\Omega)} + \int_0^t \left(f(s), u'_\mu\right) ds,$$

d'où

$$X_\mu = -\frac{1}{2}\left|u'_\mu(t)\right|^2 - \frac{1}{2}C_1\left\|u_\mu(t)\right\|^2 - \frac{1}{p}\left\|u_\mu(x,t))\right\|^p_{L^p(\Omega)} +$$

$$+\frac{1}{2}\left|u_{1\mu}\right|^2 + \frac{1}{2}C_1\left\|u_{0\mu}\right\|^2 + \frac{1}{p}\left\|u_{0\mu}\right\|^p_{L^p(\Omega)} + \int_0^t \left(f, u'_\mu\right) ds -$$

$$-\int_0^t \left(g\left(u'_\mu(s)\right), v'(s)\right) ds - \int_0^t \left(g\left(v'(s)\right), u'_\mu(s) - v'(s)\right) ds.$$

Comme les fonctions $t \longmapsto \left|u'_\mu(t)\right|^2, \left\|u_\mu(x,t))\right\|^p_{L^p(\Omega)}, \left\|u_\mu(t)\right\|^2$ sont semi continues inférieurement alors

$$\limsup_\mu X_\mu \leq -\frac{1}{2}\left|u'(t)\right|^2 - \frac{1}{2}C_1\left\|u(t)\right\|^2 - \frac{1}{p}\left\|u(x,t))\right\|^p_{L^p(\Omega)} +$$

$$+\frac{1}{2}\left|u_1\right|^2 + \frac{1}{2}C_1\left\|u_0\right\|^2 + \frac{1}{p}\left\|u_0\right\|^p_{L^p(\Omega)} + \int_0^t \left(f, u'_\mu\right) ds - \tag{1.36}$$

$$-\int_0^t (\chi, v'(s))\, ds - \int_0^t \left(g\left(v'(s)\right), u'(s) - v'(s)\right) ds.$$

En multipliant (1.34) par u' et intégrant par partie sur $(0, T)$ on trouve

$$\int_0^t (\chi, u'(s))\, ds = \int_0^t (f, u')\, ds - \frac{1}{2}\left|u'(t)\right|^2 - \frac{1}{2}C_1\left\|u(t)\right\|^2 - \frac{1}{p}\left\|u(x,t))\right\|^p_{L^p(\Omega)} +$$

$$+\frac{1}{2}\left|u_1\right|^2 + \frac{1}{2}C_1\left\|u_0\right\|^2 + \frac{1}{p}\left\|u_0\right\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

La dernière égalité, en utilisant (1.35) et (1.36), donne

$$\int_0^t \left(\chi - \alpha g\left(v'(s)\right), u'(s) - v'(s)\right) dt \geq 0. \tag{1.37}$$

Pour tout $w \in L^2(Q)$, nous posons $v' = u' - \lambda w$, $\lambda > 0$, donc (1.37) devient

$$\int_0^t \left(\chi - \alpha g\left(u'(s) - \lambda w(s)\right), w(s)\right) dt \geq 0.$$

Finalement, quand $\lambda \to 0$ il résulte que

$$\int_0^t \left(\chi - \alpha g\left(u'(s)\right), w(s)\right) ds \geq 0,\ \forall w \in L^2(Q).$$

Et par conséquent $\chi = \alpha g(u')$. ■

1.3.2 Unicité

On va donner dans ce paragraphe un résultat nouveau concernant l'unicité de la solution du problème considéré. Ce résultat consiste à démontrer l'unicité de la solution en éliminant l'hypothèse :

$$\rho \leq \frac{2}{n-2},\ n \geq 3,\ (\rho \text{ fini quelconque si } n \leq 2).$$

Cette hypothèse a été imposée pour démontrer l'unicité de la solution pour différents problèmes particuliers, plus précisément dans le cas où $\sigma(u) = \nabla u$.

Théorème 1.2 *Sous les hypothèses du Théorème 1.1. Alors pour tout $\rho > -1$, la solution u obtenue dans le Théorème 1.1 est unique.*

Démonstration. Soient u, v deux solutions du problème (1.1), au sens du Théorème 1.1.

En posant $w = u - v$, alors w doit vérifier le système suivant :

$$w''(t) - divF(\varepsilon(w)) + (|u|^{\rho} u - |v|^{\rho} v) + \alpha(g(u') - g(v')) = 0,\ \text{dans } Q, \tag{1.38}$$

$$w(0) = w'(0) = 0,\ \text{dans } \Omega, \tag{1.39}$$

$$w = 0 \text{ sur } \Sigma_1,\ \sigma(w)\eta = 0 \text{ sur } \Sigma_2, \tag{1.40}$$

$$w(t) \in L^{\infty}(0,T; V \cap L^{p}(\Omega)), \tag{1.41}$$

$$w'(t) \in L^{\infty}(0,T; L^{2}(\Omega)). \tag{1.42}$$

Multiplions les deux membres de (1.38) par w' ; alors ; ce qui est correct lorsque les intégrales ci-après ont un sens ; on aura après utilisation de la formule de Green et les conditions (1.40) :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w'(t)|^2 + a(w(t), w'(t)) + \\ &+\alpha \int_{\Omega} (g(u') - g(v'))(u' - v')\,dx = (|v|^{\rho} v - |u|^{\rho} u, w'(t)). \end{aligned} \tag{1.43}$$

L'analogue de (1.18) et (1.23) donne

$$a(w(t), w'(t)) \geq \frac{1}{2} C_1 \frac{d}{dt}\|w(t)\|^2,$$

et

$$\int_{\Omega} (g(u'(t)) - g(v'(t)))(u'(t) - v'(t))\,dx \geq 0.$$

Le deuxième membre de (1.43) est majoré en valeur absolue par

$$(\rho+1)\sup \int_{\Omega} (|u|^{\rho}, |v|^{\rho})\,|w|\,|w'|\,dx.$$

ce qui est majoré d'après l'inégalité de Hölder par

$$C\left(\left\||u|^{\rho}\right\|_{L^{n}(\Omega)} + \left\||v|^{\rho}\right\|_{L^{n}(\Omega)}\right)\|w\|_{L^{q}(\Omega)}\,\|w'\|_{L^{2}(\Omega)},$$

où $\frac{1}{n}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}=1$

Alors, en se renvoyant à [8], nous avons

$$\|v\|_{L^{kq}(\Omega)} = \left\||v|^k\right\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{1}{k}} \ \forall k, q \in \mathbb{N}^*. \tag{1.44}$$

Pour tout $\rho > -1$, posons

$$k = Ent\left(\frac{\rho\,(n-2)}{2}\right) + 1, k \in \mathbb{N}^*, \ \forall n \geq 2, \tag{1.45}$$

où $Ent\,(x)$, dénote la partie entière de x. Alors, de (1.45), k doit vérifier

$$\rho \leq \frac{2k}{n-2},\ k \in \mathbb{N}^*, n \neq 2 \ \ (\rho \text{ fini quelconque si } n = 2). \tag{1.46}$$

Donc, si $\frac{1}{n}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}=1$, (le cas $n=2$, d'ailleurs plus facile, se traitera de la même manière), alors $\rho n \leq qk$, et par conséquent, voir [38], on a

$$H^1\,(\Omega) \subset L^q(\Omega). \tag{1.47}$$

Alors, en utilisant (1.44)-(1.47) on obtient

$$\left\||v|^\rho\right\|_{L^n(\Omega)} = \|v\|^\rho_{L^{\rho n}(\Omega)} \leq \|v\|^\rho_{L^{kq}(\Omega)} = \left\||v|^k\right\|^{\frac{\rho}{k}}_{L^q(\Omega)} \leq \left\||v|^k\right\|^{\frac{\rho}{k}} \leq C\,\|v\|^\rho\,,$$

ce qui implique que

$$\left|\int_\Omega (|v|^\rho\, v - |u|^\rho\, u)\, w' dx\right| \leq C\,(\|u\|^\rho + \|v\|^\rho)\,\|w\|\,|w'| \leq C\,\|v\|^\rho\,\|w\|\,|w'|\,.$$

Puisque $u, v \in L^\infty\,(0, T; V \cap L^p(\Omega))$, donc $\|u\|^\rho + \|v\|^\rho \leq C$, par conséquent

$$\left|\int_\Omega (|v|^\rho\, v\,(t) - |u|^\rho\, u\,(t)) w'\,(t)\, dxdt\right| \leq C\,\|w\,(t)\|\,|w'\,(t)|\,. \tag{1.48}$$

En utilisant l'inégalité de Young, de (1.43) on tire

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|w'(t)|^2 + C_1\,\|w\|^2\right) \leq \frac{1}{2}C\,\|w\,(t)\|^2 + \frac{1}{2}C\,|w'\,(t)|^2\,. \tag{1.49}$$

Par intégration de (1.49) sur $(0, t)$, en utilisant les conditions initiales (1.39) et le lemme de Gronwall il résulte

$$|w'(t)|^2 + \|w\|^2 \leq 0.$$

D'où $w = 0$ ce qui achève la démonstration. ■

1.4 Régularité de la solution

Dans ce paragraphe et sous certaines hypothèses supplémentaires sur les données initiales et la fonction g on démontre la régularité de la solution obtenue au théorème précédent.

Théorème 1.3 *On se place dans les conditions du Théorème 1.1, avec en outre*

$$f' \in L^2\,(Q), \tag{1.50}$$

$$u_0 \in V \cap H^2(\Omega), \tag{1.51}$$

$$u_1 \in V, \tag{1.52}$$

$$g(u_1) \in L^2\,(\Omega). \tag{1.53}$$

Alors pour tout $\rho > -1$, il existe une solution u et une seule du système (1.13)-(1.16) ayant la régularité suivante :

$$u \in L^\infty\left(0, T; V \cap H^2(\Omega)\right), \tag{1.54}$$

$$u' \in L^\infty\,(0, T; V)\,, \tag{1.55}$$

$$u'' \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right). \tag{1.56}$$

Démonstration. Considérez la suite de fonctions (w_n) telles que :
$*$ $\forall j; w_j \in V \cap H^2(\Omega)$;
$*$ La famille $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ est linéairement indépendante ;
$*$ L'espace $V_m = span[w_1, w_2, ..., w_m]$ engendré par la famille $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ est dense dans $V \cap H^2(\Omega)$.
On suppose que les conditions initiales vérifient :

$$u_{0m} \longrightarrow u_0 \text{ dans } V \cap H^2(\Omega), \tag{1.57}$$

$$u_{1m} \longrightarrow u_1 \text{ dans } V, \tag{1.58}$$

$$g(u_{1m}) \longrightarrow g(u_1) \text{ dans } L^2\,(\Omega). \tag{1.59}$$

Alors, pour tout $j : 1 \leq j \leq m$ de (1.14) il découle

$$\left(u''_m(0), w_j\right) = \left(f(0) + divF\,(\varepsilon\,(u_{0m})) - |u_{0m}|^\rho\, u_{0m} - \alpha g\,(u_{1m})\,, w_j\right). \tag{1.60}$$

En utilisant (1.57), (1.59) et le fait que F est continue on obtient

$$|divF\,(\varepsilon\,(u_{0m}))| + \alpha \left|g\,(u_{1m})\right| \leq C.$$

De l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left||u_{0m}|^\rho\, u_{0m}\right| dx \;&\leq\; \left\||u_{0m}|^\rho\right\|_{L^n(\Omega)} \|u_{0m}\|_{L^2(\Omega)}\,(vol\Omega)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq\; C \left\||u_{0m}|^{\frac{\rho}{k}}\right\|^k_{L^n(\Omega)} \|u_{0m}\|_{L^2(\Omega)}\,,\;\; \frac{1}{n} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Prenant en considération (1.48) on a

$$\left\||u_{0m}|^{\frac{\rho}{k}}\right\|^k_{L^n(\Omega)} \leq \|u_{0m}\|^\rho_{L^{\frac{\rho n}{k}}(\Omega)}\,.$$

Utilisant (1.45) et (1.46), le nombre ρ vérifie l'inégalité $\frac{\rho n}{k} \leq q$ et comme $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ donc

$$\|u_{0m}\|^\rho_{L^{\frac{\rho n}{k}}(\Omega)} \leq C\,\|u_{0m}\|^\rho\,.$$

Donc de (1.57) nous concluons que

$$\int_{\Omega} \left| |u_{0m}|^{\rho} u_{0m} \right| dx \leq C.$$

Alors,

$$|u_{0m}|^{\rho} u_{0m} \text{ demeure dans un borné de } L^2(\Omega). \tag{1.61}$$

Multipliant l'équation (1.60) par $K''_{jm}(0)$ et sommant sur $j = 1$ à m, il vient

$$(u''_m(0), u''_m(0)) = (f(0) + divF(\varepsilon(u_{0m})) - |u_{0m}|^{\rho} u_{0m} - \alpha g(u_{1m}), u''_m(0)).$$

Alors,

$$\left|u''_m(0)\right|^2 \leq \left(\left|f(0)\right| + |divF(\varepsilon(u_{0m}))| + \left||u_{0m}|^{\rho} u_{0m}\right| + \alpha \left|g(u_{1m})\right|\right) \left|u''_m(0)\right|.$$

Utilisant (1.6) et (1.50), on obtient $f(0) \in L^2(\Omega)$.

Et par conséquent on a

$$\left|u''_m(0)\right| \leq C_2. \tag{1.62}$$

D'autre part, par dérivation par rapport à t, de (1.14) il découle

$$\begin{aligned} &\left(u'''_m(t), w_j\right) + a\left(u'_m(t), w_j\right) + (\rho+1)\left(|u_m|^{\rho} u'_m(t), w_j\right) + \\ &+\alpha\left(g'(u'_m(t))\, u''_m(t), w_j\right) = \left(f'(t), w_j\right). \end{aligned} \tag{1.63}$$

En multipliant (1.63) par $K''_{jm}(t)$ et en sommant en $j = 1$ de m, il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u''_m(t)\right|^2 + a(u'_m(t), u''_m) &= -\alpha\left(g'(u'_m(t))\, u''_m(t), u''_m(t)\right) + \\ &+ (f'(t), u''_m) - (\rho+1)\left(|u_m|^{\rho} u'_m(t), u''_m(t)\right). \end{aligned} \tag{1.64}$$

En utilisant les propriétés de la fonction g et d'après (1.11) on a

$$\left|(g'(u'_m(t))\, u''_m(t), u''_m(t))\right| \leq C\left\|g'(u'_m(t))\right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\|u''_m(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left|u''_m(t)\right|^2. \tag{1.65}$$

Puisque $\frac{1}{n} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$, donc par l'inégalité de Hölder on conclut que

$$\left|(\rho+1)\left(|u_m(t)|^{\rho} u'_m(t), u''_m(t)\right)\right| \leq C\left\||u_m(t)|^{\rho}\right\|_{L^n(\Omega)} \left\|u'_m(t)\right\|_{L^q(\Omega)} \left|u''_m(t)\right|.$$

D'après (1.10) et comme $\rho n \leq kq$, d'après (1.45) alors

$$\left\||u_m(t)|^{\rho}\right\|_{L^n(\Omega)} \leq C\,\|u_m(t)\|^{\rho} \leq C.$$

Par conséquent

$$(\rho+1)\left|\left(|u_m(t)|^{\rho} u'_m(t), u''_m(t)\right)\right| \leq C\left\|u'_m(t)\right\|\left|u''_m(t)\right|. \tag{1.66}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young et (1.65), (1.66), (1.18), l'équation (1.64) en valeurs absolue devient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|u''_m(t)\right|^2 + C_1\left\|u'_m(t)\right\|^2\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\left|f'(t)\right|^2 + \frac{1}{2}C_2\left|u''_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}C_3\left\|u'_m(t)\right\|^2. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Par intégration sur $[0,t]$ de (1.67) il résulte

$$\left|u''_m(t)\right|^2 + C_1\left\|u'_m(t)\right\|^2 \leq \int_0^t \left|f'(s)\right|^2 ds + \left|u''_m(0)\right|^2 + \tag{1.68}$$

$$+C_1\left\|u_{1m}\right\|^2 + (C_2+C_3)\int_0^t \left(\left\|u'_m(s)\right\|^2 + \left|u''_m(s)\right|^2\right) ds.$$

Donc en particulier, moyennant (1.50), (1.58), (1.62), de (1.68) il vient

$$\left|u''_m(t)\right|^2 + \left\|u'_m(t)\right\|^2 \leq C_4\left(1 + \int_0^t \left(\left|u''_m(s)\right|^2 + \left\|u'_m(s)\right\|^2\right) ds\right). \tag{1.69}$$

En utilisant le Lemme de Gronwall pour conclure que

$$\left|u''_m(t)\right| + \left\|u'_m(t)\right\| \leq C \text{ (indépendant de } m) \tag{1.70}$$

Par conséquent,

$$\left\{\begin{array}{l} u'_m(t) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T;V), \\ u''_m(t) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \end{array}\right. \tag{1.71}$$

D'où, on déduit qu'on peut extraire une sous suite $\left(u_\mu\right)$ de (u_m) telle que

$$\left\{\begin{array}{l} u'_\mu(t) \longrightarrow u'(t) \text{ dans } L^\infty(0,T;V) \text{ faible étoile.} \\ u''_\mu(t) \longrightarrow u''(t) \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \text{ faible étoile.} \end{array}\right. \tag{1.72}$$

Ce qui nous permet de supposer que la sous suite extraite $\left(u_\mu\right)$ vérifie, outre que (1.30), (1.72)

$$\left\{\begin{array}{l} u'_\mu \longrightarrow u' \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort,} \\ g\left(u'_\mu\right) \longrightarrow g(u') \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible étoile.} \end{array}\right. \tag{1.73}$$

Soit j fixé, et $\mu > j$, alors d'après (1.30), (1.72) et (1.73), on déduit que

$$\begin{array}{c} a\left(u_\mu(t),w_j\right) \longrightarrow a\left(u(t),w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible étoile,} \\ \left(\left|u_\mu\right|^\rho u_\mu, w_j\right) \longrightarrow \left(|u|^\rho u, w_j\right) \text{ dans } L^2(0,T) \text{ faible étoile,} \\ \left(u''_\mu(t),w_j\right) \longrightarrow \left(u''(t),w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible étoile,} \\ \left(g\left(u'_\mu\right),w_j\right) \longrightarrow \left(g(u'),w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible étoile,} \end{array}$$

Alors, en passant à la limite lorsque $\mu \to \infty$, on conclut, pour tout w_j que

$$(u''(t),w_j) + a(u(t),w_j) + \left(|u|^\rho u, w_j\right) + \alpha(g(u'(t)),w_j) = (f,w_j).$$

Par densité de V_m dans $V \cap H^2(\Omega)$, en déduit que pour tout $v \in V \cap H^2(\Omega)$ on a

$$(u''(t),v) + a(u(t),v) + (|u|^\rho u, v) + (\alpha g(u'),v) = (f(t),v),$$

d'où u satisfait (1.1), (1.55) et (1.56).

De l'autre côté, moyennant (1.6), (1.10), (1.11), (1.50) et (1.56) on a

$$g\left(u'\right),\ f,\ |u|^{\rho}u \in L^{\infty}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right).$$

D'où de (1.1) il résulte

$$h = div\sigma\left(u\right) = u'' + |u|^{\rho}u + \alpha g\left(u'\right) - f \in L^{\infty}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right). \tag{1.74}$$

Comme $div\sigma\left(u\right)$, voire [20], est un isomorphisme de V sur V'. Soit G son inverse. Alors, comme $u \in L^{\infty}\left(0,T;V\right)$ on a

$$u(t) = Gh(t). \tag{1.75}$$

Comme Ω est supposé régulier. Donc, en se référant à [20] et [39] on a $G \in \mathcal{L}\left(V';H^{2}(\Omega)\right)$, ce qui implique (1.54). ■

1.5 Dépendance continue de la solution par rapport aux données

Dans ce paragraphe, on analyse la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Pour cela, on définit l'espace de Banach suivant :

$$W\left(Q\right) = \left\{\varphi/\varphi \in L^{\infty}\left(0,T;V\right),\ \varphi' \in L^{\infty}\left(0,T;L^{2}\left(\Omega\right)\right)\right\},$$

muni de la norme

$$\left\|\varphi\right\|_{W(Q)} = \left\|\varphi\right\|_{L^{\infty}(0,T;V)} + \left\|\varphi'\right\|_{L^{\infty}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right)}.$$

On considère l'application π définie par :

$$\left\{\begin{array}{c} \pi : L^{2}\left(Q\right) \times V \times L^{2}\left(\Omega\right) \to W\left(Q\right) \\ \left\{f,u_{0},u_{1}\right\} \mapsto u, \end{array}\right. \tag{1.76}$$

où u est une solution du problème (1.1). Relativement à cette notation, on a le Théorème 1.4 suivant :

Théorème 1.4 *Sous les hypothèses des Théorème 1.1 et Théorème 1.2. Alors, l'application π définie par (1.76) est continue, autrement dit pour tout $u,v \in W\left(Q\right)$, on a*

$$\left|u' - v'\right|^{2} + \left\|u - v\right\|^{2} \leq$$
$$\leq C\left(u,v\right)\left[\left|u_{1} - v_{1}\right|^{2} + \left\|u_{0} - v_{0}\right\|^{2} + \int_{0}^{t}\left|\left(f - h\right)\left(s\right)\right|^{2} ds\right],$$

où $\pi\left(\left\{f,u_{0},u_{1}\right\}\right) = u$ et $\pi\left(\left\{h,v_{0},v_{1}\right\}\right) = v$.

Démonstration. Soit $v = \pi\left(\left\{h,v_{0},v_{1}\right\}\right)$ tel que

$$\left\{h,v_{0},v_{1}\right\} \to \left\{f,u_{0},u_{1}\right\} \text{ dans } L^{2}\left(Q\right) \times V \times L^{2}\left(\Omega\right).$$

Donc v demeure dans un borné de $W(Q)$.

Posant $w = u - v$, alors w doit vérifier

$$w'' - div\,(F(\varepsilon(w))) + \alpha\,(g\,(u') - g\,(v')) = f - h,$$

Multipliant les deux membres de la dernière équation par w', et intégrant sur Ω alors, après utilisation de la formule de Green et les conditions aux limites (1.40), on aura

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|w'(t)|^2 + C_1\,\|w\,(t)\|^2\right) + \\ + \left(|u|^\rho\,u - |v|^\rho\,v, w'\right) + \alpha\int_\Omega (g\,(u') - g\,(v'))\,w'dx = (f - h, w')\,. \end{gathered} \tag{1.77}$$

Utilisant (1.18), (1.23), (1.49) avec les inégalités de Hölder et Young, en intégrant (1.77) sur $(0, t)$ on obtient

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\left(|w'(s)|^2\,ds + C_1\,\|w\,(s)\|^2\right)ds \leq \\ \leq \frac{1}{2}C_3\int_0^t \left(\|w\,(s)\|^2 + |w'\,(s)|^2\right)ds + \int_0^t \left|(f-h)\,(s)\right|^2 ds.\end{gathered}$$

Par conséquent

$$\begin{gathered}|w'(t)|^2 + C_1\,\|w\,(t)\|^2 \leq |u_1 - v_1|^2 + C_1\,\|u_0 - v_0\|^2 + \\ + \int_0^t \left|(f-h)\,(s)\right|^2 ds + \int_0^t |w'(s)|^2\,ds,\end{gathered}$$

d'où il vient

$$\begin{gathered}|w'(t)|^2 + \|w\,(t)\|^2 \leq \\ \leq C\,(u,v)\left[|u_1 - v_1|^2 + \|u_0 - v_0\|^2 + \int_0^t \left|(f-h)\,(s)\right|^2 ds\right],\end{gathered}$$

où $C\,(u,v)$ est une fonction de u et v, bornée sur les bornés de Q, donc la fonction π est continue. ■

CHAPITRE 2

EXISTENCE GLOBALE ET STABILITÉ DE LA SOLUTION

Sommaire

2.1 Introduction **24**
2.2 Existence globale **25**
2.3 Stabilité des solutions **26**
2.4 Exemples **35**

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence globale et le comportement de la solution u trouvée dans le premier chapitre pour le système (1.1)–(1.4) avec $f = 0$. Les techniques utilisées sont celles trouvées dans [32], [30], [34], [27], [21, 22], [1]. Aussi, le comportement asymptotique des solutions fortes est montré sans prendre en considération la condition $|g(x)| \to \infty$ quand $|x| \to \infty$, et sans l'hypothèse $p' \leq \frac{n+2}{n-2}$, si $n \geq 3$. Ces hypothèses ont été supposées par plusieurs auteurs, par exemple dans [34], [32], [29], [21, 22] pour des problèmes particuliers.

2.1 Introduction

Pour démontrer la stabilité de la solution locale u du problème (1.1)–(1.4) donnée par le Théorème 1.1, on définit la fonction d'énergie comme suit :

$$E(t) = \frac{1}{2}|u_t|^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|_1^2 + \frac{1}{p}\|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.1}$$

E est une fonction positive.

Et pour obtenir la stabilité du système (1.1)–(1.4), on va supposer, en outre, qu'il existe des constantes $C_i, i = 1, ..., 4$ telles que

$$C_1|x|^p \leq \left|g(x)\right| \leq C_2|x|^{\frac{1}{p}}, \; p \geq 1, \text{ si } |x| \leq 1, \tag{2.2}$$

$$C_3|x| \leq \left|g(x)\right|, \; (n = 1, 2, 3, ...), \text{ si } |x| > 1, \tag{2.3}$$

$$\left|g(x)\right| \leq C_4|x|^{p'}, \; n \geq 3, p' > 1, \text{ si } |x| > 1. \tag{2.4}$$

Lemme 2.1 *L'énergie $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est décroissante et absolument continue et on a*

$$E'(t) = -\alpha \int_{\Omega} u_t g(u_t)\, dx \leq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.5}$$

Démonstration. Pour tout $0 \leq S < T < \infty$, d'après (1.1), (1.2), (1.3) et (2.1) on a

$$0 = \int_S^T \int_{\Omega} u_t \left(u_{tt} - div\sigma(u) + |u|^{\rho} u(t) + \alpha g(u_t)\right) dxdt =$$

$$= \int_S^T \int_{\Omega} \left(u_t u_{tt} - u_t div\sigma(u) + |u|^{\rho} u(t) u_t + \alpha u_t g(u_t)\right) dxdt =$$

$$= \int_S^T E'(t)\, dt + \alpha \int_S^T \int_{\Omega} u_t g(u_t)\, dxdt = E(T) - E(S) + \alpha \int_S^T \int_{\Omega} u_t g(u_t)\, dxdt,$$

donc

$$E(T) - E(S) = -\alpha \int_S^T \int_{\Omega} u_t g(u_t)\, dxdt, \ 0 \leq S < T < \infty. \tag{2.6}$$

Comme la fonction g est monotone et $g(0) = 0$ alors $xg(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, donc E est décroissante.

D'autre part, de (2.6) on conclut que E est localement absolument continue alors (2.5) est satisfaite. ■

2.2 Existence globale

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses du Théorème 1.1 la solution du système (1.1)–(1.4) vérifie :*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; V \cap L^p(\Omega)), \tag{2.7}$$

$$u' \in C(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)). \tag{2.8}$$

Démonstration du Théorème 2.1. Il suffit de montrer que $\frac{1}{2}|u_t|^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|_1^2 + \frac{1}{p}\|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p$ est uniformément bornée par rapport à t. Sous les hypothèses du Théorème 1.1 on obtient que $(u, u') \in (V \cap L^p(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ sur $[0, T)$. Alors de l'identité (2.5) on conclut que

$$\frac{1}{2}|u_t|^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|_1^2 + \frac{1}{p}\|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \leq E(0), \ \forall t \geq 0. \tag{2.9}$$

L'inégalité précédente et le principe de la continuité conduisent à l'existence globale de la solution, d'où les relations (2.7), (2.8). ■

2.3 Stabilité des solutions

Notre but dans cette section est d'obtenir, sous certaines hypothèses plus faibles, la stabilité du système considéré.

Théorème 2.2 *Supposons que les hypothèses (2.2)–(2.4) sont vérifiées. Alors pour toute solution forte du problème (1.1)–(1.4), il existe une constante $C > 0$ dépend uniquement de $E(0)$ et une constante $\varpi > 0$ telles que :*

$$E(t) \leq Ct^{\frac{-2}{p-1}},\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ si\ p > 1, \tag{2.10}$$

et

$$E(t) \leq E(0)\, e^{1-\varpi t},\ \forall t \in \mathbb{R}^+\ si\ p = 1, \tag{2.11}$$

où la constante ϖ est indépendante de $E(0)$.

Théorème 2.3 *Supposons que les hypothèses (2.2) et (2.4) sont vérifiées avec,*

$$\begin{cases} p \geq 1\ si\ (n = 1)\ et\ n \geq 3, \\ p > 1\ si\ n = 2. \end{cases}$$

Alors pour toute solution forte du système (1.1)–(1.4), il existe des constantes positives C et ϖ telles que les estimations (2.10) et (2.11) ont lieu.

Démonstration du Théorème 2.2. Pour mieux présenter la démonstration de ce Théorème 2.2, nous allons commencer par démontrer les lemmes suivants :

Lemme 2.2 *Pour tout $0 \leq S < T < \infty$, on a les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} 2\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt \quad &\leq \quad -\left[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_t u dx\right]_S^T + \frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)\,E'(t)\int_\Omega u_t u dxdt + \\ &+\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega \left(2\,(u_t)^2 - \alpha u g\,(u_t)\right) dxdt. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Démonstration. Utilisons le fait que

$$\int_\Omega u_{tt} u dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega u_t u dx - \int_\Omega (u_t)^2\,dx,$$

pour déduire

$$\begin{aligned} 0 = &\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u\,(u_{tt} - div\sigma\,(u) + |u|^\rho\, u(t) + \alpha g\,(u_t))\,dxdt = \\ &= \left[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_t u dx\right]_S^T - \frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)\,E'(t)\int_\Omega u u_t dxdt + \\ &+\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega \left(\left(-u.div\sigma\,(u) + |u|^\rho\, u^2(t)\right) + \alpha u g\,(u_t) - (u_t)^2\right) dxdt. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Donc de la définition (2.1) on tire que

$$\int_{\Omega}\left(-udiv\sigma(u)+|u|^{\rho}u^{2}(t)\right)dx\geq 2E(t)-\int_{\Omega}(u_t)^2\,dx. \tag{2.14}$$

En substituant (2.14) dans (2.13) il vient

$$0\geq\left[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega}u_t u dx\right]_S^T-\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)E'(t)\int_{\Omega}uu_t dxdt+$$
$$+\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega}\left(2E(t)-(u_t)^2+\alpha ug(u_t)-(u_t)^2\right)dxdt.$$

Par conséquent, on a

$$0\geq\left[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega}u_t u dx\right]_S^T-\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)E'(t)\int_{\Omega}uu_t dxdt+$$
$$+2\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt-\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega}\left(2(u_t)^2-\alpha ug(u_t)\right)dxdt,$$

d'où (2.12). ■

Lemme 2.3 *Il existe une constante positive C telle que pour tout* $0\leq S<T<\infty$, *on a*

$$2\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt\leq CE^{\frac{p+1}{2}}(S)+\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega}\left(2(u_t)^2-\alpha ug(u_t)\right)dxdt, \tag{2.15}$$

Démonstration. La condition (1.3) avec les hypothèses (1.5) impliquent que

$$\int_{\Omega}-udiv\sigma(u)\,dx=C_1\|u\|^2\geq c\int_{\Omega}u^2dx \tag{2.16}$$

Utilisant les inégalités de Young et (2.16) par la définition de l'énergie (2.1) on a

$$\left|E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega}uu_t dx\right|\leq CE^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega}\left((u)^2+(u_t)^2\right)dx\leq$$
$$\leq CE^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega}\left(-udiv\sigma(u)+(u_t)^2\right)dx\leq CE^{\frac{p-1}{2}}(t)E(t)=CE^{\frac{p+1}{2}}(t).$$

Comme E est décroissante on conclut que

$$\left[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega}uu_t dx\right]_S^T\leq C\left(E^{\frac{p+1}{2}}(T)+E^{\frac{p+1}{2}}(S)\right)\leq CE^{\frac{p+1}{2}}(S).$$

D'autre part on a

$$\left|\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)\,E'(t)\int_\Omega uu_t dxdt\right| \le C\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)\,(-E'(t))\,E(t)\,dt =$$
$$= CE^{\frac{p+1}{2}}(S) - CE^{\frac{p+1}{2}}(T) \le CE^{\frac{p+1}{2}}(S)\,,$$

En remplaçant les deux dernières estimations dans (2.12) on trouve (2.15). ■

Lemme 2.4 *Soient* $0 \le S < T < \infty$, *pour tout* $\varepsilon > 0$ *on a l'estimation suivante*

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega (u_t)^2\,dxdt \le \varepsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + C(\varepsilon)\,E(s) + CE^{\frac{p+1}{2}}(S)\,. \tag{2.17}$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}^+$ fixé, on a

$$\int_\Omega (u_t)^2\,dx = \int_{|u_t|\le 1}(u_t)^2\,dx + \int_{|u_t|>1}(u_t)^2\,dx.$$

Utilisant l'inégalité de Hölder on trouve

$$\int_\Omega (u_t)^2\,dx \le C\left(\int_{|u_t|\le 1}|u_t|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}} + \int_{|u_t|>1}(u_t)^2\,dx.$$

En utilisant les inégalités (2.2), (2.3) et l'identité (2.5) on trouve

$$\int_\Omega (u_t)^2\,dx \le C\left(\int_{|u_t|\le 1}|u_t|^p\,|u_t|\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}} + \int_{|u_t|>1}u_tu_tdx \le$$
$$\le C\left(\int_{|u_t|\le 1}\left|u_tg(u_t)\right|dx\right)^{\frac{2}{p+1}} + C\int_{|u_t|>1}\left|u_tg(u_t)\right|dx \le$$
$$\le C(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}} - CE'(t)\,,$$

d'où

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega (u_t)^2\,dxdt \le C\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\,(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}}\,dt - C\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\,E'(t)\,dt.$$

De l'inégalité de Young on obtient

$$C\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\left(-E'(t)\right)^{\frac{2}{p+1}}dt \leq C\frac{p-1}{p+1}\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}\frac{p+1}{p-1}}(t)\,dt+$$

$$+C\frac{2}{p+1}\int_S^T \left(-E'(t)\right)^{\frac{2}{p+1}\frac{p+1}{2}}dt = \varepsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt - C(\varepsilon)\int_S^T E'(t)\,dt \leq$$

$$\leq \varepsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + C(\varepsilon)E(S).$$

Alors

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega (u_t)^2\,dxdt \leq \varepsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + C(\varepsilon)E(S) + CE^{\frac{p+1}{2}}(S).$$

D'où (2.17). ■

Lemme 2.5 *Soit $0 \leq S < T < \infty$, on a pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\left|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega ug(u_t)\,dxdt\right| \leq \varepsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + C(\varepsilon)E(S). \tag{2.18}$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Young on trouve pour tout $\varepsilon' > 0$

$$\left|\int_{|u_t|\leq 1} ug(u_t)\,dx\right| \leq \varepsilon'\int_{|u_t|\leq 1} u^2dx + C(\varepsilon')\int_{|u_t|\leq 1} g^2(u_t)\,dx.$$

Aussi, de (2.2), (2.16) on conclut

$$\left|\int_{|u_t|\leq 1} ug(u_t)\,dx\right| \leq \varepsilon'\int_{|u_t|\leq 1} -u\,div\sigma(u)\,dx + C(\varepsilon')\int_{|u_t|\leq 1} g^2(u_t)\,dx \leq$$

$$\leq 2\varepsilon' E(t) + C(\varepsilon')\left(\int_{|u_t|\leq 1}\left|g(u_t)\right|^{p+1}dx\right)^{\frac{2}{p+1}} =$$

$$= 2\varepsilon' E(t) + C(\varepsilon')\left(\int_{|u_t|\leq 1}\left|g(u_t)\right|^{p}\left|g(u_t)\right|dx\right)^{\frac{2}{p+1}} \leq$$

$$\leq 2\varepsilon' E(t) + C(\varepsilon')\left(\int_{|u_t|\leq 1}\left|g(u_t)\right||u_t|\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}} =$$

$$= 2\varepsilon' E(t) + C(\varepsilon')\left(\int_{|u_t|\leq 1} u_t g(u_t)\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}} = 2\varepsilon' E(t) + C(\varepsilon')\left(-E(t)\right)^{\frac{2}{p+1}}.$$

Donc

$$\left| \int_{|u_t|\leq 1} ug(u_t)\,dx \right| \leq 2\varepsilon' E(t) + C(\varepsilon')(-E(t))^{\frac{2}{p+1}}. \tag{2.19}$$

On sait d'après [38], que si $\frac{1}{q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = 1$, alors $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. Ceci joint au fait que, voir [8],

$$\|v\|_{L^{kq}(\Omega)} = \left\| |v|^k \right\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{1}{k}}.$$

Pour tout $p' > 1$, pour tout $n > 2$, on pose $k = Ent\left(\frac{(p'+1)(n-2)}{2n}\right) + 1$, et par conséquent k doit vérifier la condition

$$p' + 1 \leq \frac{2nk}{n-2}, k \in \mathbb{N}^*, n \neq 2.$$

D'où il vient

$$p' + 1 \leq kq,\ k \in \mathbb{N}^*.$$

Par conséquent, on a

$$\|v\|_{L^{p'+1}(\Omega)} \leq \|v\|_{L^{kq}(\Omega)} = \left\| |v|^k \right\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{1}{k}} \leq C\|v\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)},\ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Donc, il en résulte que

$$\left(\int_{|u_t|>1} |u|^{p'+1}\,dx \right)^{\frac{1}{p'+1}} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq CE(t)^{\frac{1}{2}}.$$

Par la même manière de (2.19) en utilisant (2.4) on trouve

$$\left(\int_{|u_t|>1} \left|g(u_t)\right|^{\frac{p'+1}{p'}}\,dx \right)^{\frac{p'}{p'+1}} = \left(\int_{|u_t|>1} \left|g(u_t)\right| \left|g(u_t)\right|^{\frac{1}{p'}}\,dx \right)^{\frac{p'}{p'+1}} \leq$$

$$\leq \left(\int_{|u_t|>1} \left|u_t g(u_t)\right| dx \right)^{\frac{p'}{p'+1}} \leq C(-E'(t))^{\frac{p'}{p'+1}}.$$

D'où, il découle

$$\left| \int_{|u_t|>1} ug(u_t)\,dx \right| \leq \left(\int_{|u_t|>1} |u|^{p'+1}\,dx \right)^{\frac{1}{p'+1}} \left(\int_{|u_t|>1} \left|g(u_t)\right|^{\frac{p'+1}{p'}}\,dx \right)^{\frac{p'}{p'+1}} \leq \tag{2.20}$$

$$\leq CE(t)^{\frac{1}{2}}(-E'(t))^{\frac{p'}{p'+1}}.$$

Alors, de (2.19) et (2.20) on trouve

$$\left|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega ug(u_t)\,dxdt\right| \leq 2\varepsilon' \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\,E(t)\,dt+$$
$$+C(\varepsilon')\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\,(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}}\,dt + C\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\,E(t)^{\frac{1}{2}}\,(-E'(t))^{\frac{p'}{p'+1}}\,dt,$$

ou encore sous la forme

$$\left|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega ug(u_t)\,dxdt\right| \leq 2\varepsilon' \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt+$$
$$+C(\varepsilon')\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\,(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}}\,dt + C\int_S^T E^{\frac{p}{2}}(t)\,(-E'(t))^{\frac{p'}{p'+1}}\,dt.$$

Comme $\frac{2}{p+1}+\frac{p-1}{p+1}=1$, alors en utilisant l'inégalité de Young on obtient

$$C(\varepsilon')\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\,(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}}\,dt \leq C(\varepsilon')\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + C(\varepsilon')\int_S^T (-E'(t))\,dt. \tag{2.21}$$

De même comme $\frac{1}{p'+1}+\frac{p'}{p'+1}=1$, alors on a

$$C\int_S^T E^{\frac{p}{2}}(t)\,(-E'(t))^{\frac{p'}{p'+1}}\,dt \leq C\int_S^T E(t)^{\frac{p(p'+1)}{2}}\,dt + C\int_S^T (-E'(t))\,dt. \tag{2.22}$$

Utilisons (2.21) et (2.22) pour arriver à

$$\left|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega ug(u_t)\,dxdt\right| \leq 2\varepsilon' \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + C(\varepsilon')\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt+$$
$$+C(\varepsilon')\int_S^T (-E'(t))\,dt + C\int_S^T E(t)^{\frac{p(p'+1)}{2}}\,dt + C\int_S^T (-E'(t))\,dt \leq \tag{2.23}$$
$$\leq 3\varepsilon'\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt - C(\varepsilon')\int_S^T E'(t)\,dt + C\int_S^T E(t)^{\frac{p(p'+1)}{2}}\,dt.$$

En utilisant le fait que E est décroissante et $p(p'+1)\geq p+1$ on déduit que

$$\int_S^T E(t)^{\frac{p(p'+1)}{2}}\,dt \leq C\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt. \tag{2.24}$$

Finalement, moyennant (2.24) de (2.23) on obtient

$$\left| \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega u g(u_t)\, dx dt \right| \le \varepsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\, dt + C(\varepsilon) E(s),$$

ce qui achève la démonstration de (2.18). ■

Lemme 2.6 *On a l'estimation*

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\, dt \le C\left(1 + E^{\frac{p-1}{2}}(0)\right) E(s),\ 0 \le S \le T < \infty. \tag{2.25}$$

Démonstration. Choisissons $\varepsilon = \frac{1}{3}$, alors de (2.17) et (2.18) il découle

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega 2u_t^2 dx dt \le \frac{2}{3} \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\, dt + CE(s) + CE^{\frac{p+1}{2}}(s), \tag{2.26}$$

et

$$-\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega u g(u_t)\, dx dt \le \frac{1}{3} \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\, dt + CE(s). \tag{2.27}$$

Donc par sommation (2.26) et (2.27) il vient

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega \left(2u_t^2 - u g(u_t)\right) dx dt \le \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\, dt + CE(s) + CE^{\frac{p+1}{2}}(s). \tag{2.28}$$

Utilisant (2.28), de (2.15) on trouve que

$$2\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\, dt \le CE^{\frac{p+1}{2}}(s) + \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\, dt + CE(s) + CE^{\frac{p+1}{2}}(s).$$

Par conséquent,

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\, dt \le C\left(1 + E^{\frac{p-1}{2}}(s)\right) E(s) \le C\left(1 + E^{\frac{p-1}{2}}(0)\right) E(s),\ 0 \le S \le T < \infty.$$

Les lemmes 2.1 et 2.6 impliquent que la fonction $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est décroissantes et vérifie l'inégalité :

$$\int_t^\infty E^{\frac{p+1}{2}}(s)\, ds \le CE(t),\ \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

■

Par conséquent les estimations (2.10) et (2.11) sont suffisantes avec $\beta = \frac{p-1}{2}$, pour appliquer la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Soit $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante. S'il existe $\beta \geq 0$ et $T > 0$ tels que*

$$\int_t^{\infty} E^{\beta+1}(s)\,ds \leq TE^{\beta}(0)\,E(t)\,,\ \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

alors

$$E(t) \leq E(0)\left(\frac{T+\beta t}{T+\beta T}\right)^{\frac{-1}{\beta}}\,,\ \forall t \in \mathbb{R}^+ \text{ si } \beta > 0,$$

et

$$E(t) \leq E(0)\,e^{1-\frac{1}{T}t},\ \forall t \in \mathbb{R}^+ \text{ si } \beta = 0.$$

Voire [30].

Ce qui achève la démonstration du théorème Théorème 2.2. ■

Démonstration du Théorème 2.3. Soit $(u_0, u_1) \in V \cap H^2(\Omega) \times V$ tel que $g(u_1) \in L^2(\Omega)$, alors la solution du système (1.1)–(1.4) vérifie les régularités (1.55) et (1.56) obtenues au Théorème 1.3.

Pour $\varepsilon = 1$, de (2.18) on tire

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega (-ug(u_t))\,dxdt \leq \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + CE(S)\,. \tag{2.29}$$

En utilisant (2.29), de l'estimation (2.15) on conclut que

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt \leq CE^{\frac{p+1}{2}}(S) + CE(S) + 2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_t^2 dxdt \tag{2.30}$$

Comme dans la démonstration du Lemme 2.4 on a

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{|u'|\leq 1} u_t^2 dxdt \leq \varepsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + C(\varepsilon)\,E(S)\,,\forall\varepsilon > 0. \tag{2.31}$$

D'autre part, on distinguera deux cas :

Premier cas, $n = 1$. En utilisant (2.3) (1.54), (1.56) et (2.5) et l'injection de Sobolev $V \subset H^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ on obtient

$$\int_{|u'|>1} u_t^2 dx \leq C\int_{|u'|>1} |u_t|\left|u_t g(u_t)\right| dx \leq C\,\|u_t\|_{L^\infty(\Omega)}(-E'(t)) \leq -CE'(t)\,.$$

D'où il résulte

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{|u'|>1} u_t^2 dxdt \leq -C\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\,E'(t)\,dt \leq CE^{\frac{p+1}{2}}(S)\,. \tag{2.32}$$

Deuxième cas, $n \geq 2$. On a

$$\begin{aligned}\int\limits_{|u'|>1} |u_t|^2\,dx &\leq C \int\limits_{|u'|>1} |u_t|^{\frac{2p}{p+1}} \left|u_t g(u_t)\right|^{\frac{2}{p+1}} dx \leq \\ &\leq C\left(\int\limits_{|u'|>1} |u_t|^{\frac{2p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p+1}}\left(\int\limits_{|u'|>1} u_t g(u_t)\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}} \leq \\ &\leq C\,\|u_t\|^{\frac{2p}{p+1}}_{L^{\frac{2p}{p-1}}(\Omega)} \left(-E'(t)\right)^{\frac{2}{p+1}}.\end{aligned} \tag{2.33}$$

pour tout $p>1$, et tout $n>2$, si on pose $k = Ent\left(\frac{2p}{p-1}\frac{(n-2)}{2n}\right)+1$, alors k doit satisfaire la condition $\frac{2p}{p-1} \leq \frac{2nk}{n-2} = kq$. Comme $\frac{1}{n}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}=1$ alors $H^1(\Omega)\subset L^q(\Omega)$, et par conséquent de (1.48) et (1.55) on trouve

$$\|u_t\|^{\frac{2p}{p+1}}_{L^{\frac{2p}{p-1}}(\Omega)} \leq \|u_t\|^{\frac{2p}{p+1}}_{L^{kq}(\Omega)} = \left\||u_t|^k\right\|^{\frac{1}{k}\frac{2p}{p+1}}_{L^q(\Omega)} \leq C\,\|u_t\|^{\frac{2p}{p+1}}_{L^q(\Omega)} \leq C\,\|u_t\|^{\frac{2p}{p+1}}_{H^1(\Omega)} \leq C,$$

alors on conclut de (2.33) que

$$\int\limits_{|u'|>1} |u_t|^2\,dx \leq C\left(-E'(t)\right)^{\frac{2}{p+1}},$$

comme $\frac{p-1}{p+1}+\frac{2}{p+1}=1$, alors par l'inégalité de Young et (2.23) on trouve

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int\limits_{|u'|>1} u_t^2\,dxdt \leq C\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\left(-E'(t)\right)^{\frac{2}{p+1}}dt \leq \varepsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt - C(\varepsilon)\int_S^T E'(t)\,dt.$$

D'où, il vient

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int\limits_{|u'|>1} u_t^2\,dxdt \leq \varepsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + C(\varepsilon)\,E(S). \tag{2.34}$$

Les inégalités (2.32) et (2.34) impliquent pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ que

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int\limits_{|u'|>1} u_t^2\,dxdt \leq \varepsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + C(\varepsilon)\,E(S) + CE^{\frac{p+1}{2}}(S). \tag{2.35}$$

Choisissons $\varepsilon=\frac{1}{8}$, de (2.31) et (2.35) il résulte

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int\limits_{|u'|\leq 1} u_t^2\,dxdt \leq \frac{1}{8}\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + C(\varepsilon)\,E(S) \tag{2.36}$$

et

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int\limits_{|u'|>1} u_t^2\,dxdt \leq \frac{1}{8}\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + C(\varepsilon)\,E(S) + CE^{\frac{p+1}{2}}(S). \tag{2.37}$$

Donc l'inégalité (2.30) devient

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt \le CE^{\frac{p+1}{2}}(S) + CE(S) + 2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_t^2 dxdt =$$
$$= CE^{\frac{p+1}{2}}(S) + CE(S) + 2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\left(\int_{|u'|>1} u_t^2 dx + \int_{|u'|\le 1} u_t^2 dx\right)dt \le$$
$$\le \frac{1}{2}\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + CE(S) + CE^{\frac{p+1}{2}}(S),$$

ou encore

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt \le CE(S)\left(1 + E^{\frac{p-1}{2}}(0)\right), \tag{2.38}$$

d'où (2.25). Ainsi que les estimations (2.10) et (2.11) se déduisent en appliquant la proposition 2.1 avec $\beta = \frac{p-1}{2}$. ■

2.4 Exemples

1. Si on pose
$$\sigma(u) = F(\varepsilon(u)) = \nabla u,$$
alors le problème (1.1)–(1.4) devient
$$\begin{cases} u'' - \Delta u + |u|^\rho u + \alpha g(u') = 0 \text{ dans } Q, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1,\ \sigma(u)\eta = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u'(x,0) = u_1(x) \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

2. Si on pose
$$\sigma(u) = F(\varepsilon(u)) = \alpha\varepsilon(u) + (\alpha+\beta)\,Tr(\varepsilon(u))I,$$
où I dénote l'opérateur d'identité et Tr dénote l'opérateur trace. Alors, le problème (1.1)–(1.4) se ramène au problème :
$$\begin{cases} u'' - Lu + |u|^\rho u + \alpha g(u') = 0 \text{ dans } Q, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1,\ \sigma(u)\eta = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u'(x,0) = u_1(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$
où L désigne l'opérateurs de Lamé, défini par les coefficients de l'élasticité α et β par
$$L : \alpha\Delta + (\alpha+\beta)\,\nabla.div.$$

3. Si on pose
$$\sigma(u) = F(x,\varepsilon(u)) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j},$$

où

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \in C^1\left(\overline{\Omega}\right), \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\,\zeta_i\zeta_j \geq m\,|\zeta|^2\,,\ m > 0,\ \zeta_i \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

on trouve le problème suivant :

$$\begin{cases} u'' - \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + |u|^{\rho}\,u + \alpha g\,(u') = 0 \text{ dans } Q, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1,\ \sigma(u)\eta = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u'(x,0) = u_1(x) \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Donc touts les résultats obtenus dans les Théorème 1.1–Théorème 2.3 sont valables pour ces problèmes particuliers.

CHAPITRE 3

EXPOSION EN TEMPS FINI DE LA SOLUTION

Sommaire

3.1 Explosion en temps fini **37**

3.1.1 Résultats et préliminaire 37

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'explosion en temps fini de la solution du système (1.1)–(1.4). Dans le cas d'une dissipation forte en supposant que la fonction g vérifie les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{c} g \in C^1, \\ xg(x) \geq k_0 |x|^m, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ m > 2, \\ \left| g(x) \right| \leq k_1 \left(1 + |x|^{m-1} \right), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ m \geq 2. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

et avec des choix convenables des données initiales, en se basant sur les techniques utilisées dans [65], [63], [7] et [40], nous montrons que la solution locale obtenue par le Théorème 1.1 s'explose en temps fini T^*, qu'on déterminera.

Remarquons que les hypothèses sur la fonction g définies en (3.1) sant différentes à celles définies par [63] et [40].

3.1 Explosion en temps fini

Dans ce paragraphe on démontre que la solution u obtenue au Théorème 1.1 s'explose en temps fini T^*.

3.1.1 Résultats et préliminaire

Nous introduisons les constantes suivantes :

$$\lambda_0 = \left(\frac{C_1}{B_0^p} \right)^{\frac{1}{p-2}} \tag{3.2}$$

$$E_0 = C_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\lambda_0^2,\ p>2, \tag{3.3}$$

avec B_0 est la plus petite constante vérifie l'inégalité de Poincaré suivante *:*

$$\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq B_0\,|\nabla u(t)|\,,\ p\leq \frac{2n}{n-2}\ \left(p \text{ fini quelconque si } n\leq 2\right). \tag{3.4}$$

Théorème 3.1 *Supposons que*

$$2\leq m\leq 2\frac{n-1}{n-2},\ n\geq 3 \tag{3.5}$$

et que les conditions initiales (1.4) vérifient les estimations suivants :

$$E(0)=\frac{1}{2}|u_1|^2+\frac{1}{2}\|u_0\|_1^2+\frac{1}{p}\|u_0\|_{L^p(\Omega)}^p < E_0,\ p>2,\ \ |\nabla u_0|>\lambda_0. \tag{3.6}$$

Alors il existe un T^*, telle que

$$\lim_{t\overset{<}{\to}T^*}\left(\frac{1}{2}|u_t|^2+\frac{1}{2}\|u(t)\|_1^2+\frac{1}{p}\|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p\right)=+\infty. \tag{3.7}$$

Pour mieux présenter la démonstration de ce théorème nous allons commencer par démontrer les lemmes suivants :

Lemme 3.1 *Supposons que les données initiales vérifient les conditions (3.6). Alors, il existe une constante $\lambda_1>\lambda_0$ telle que*

$$|\nabla u(t)|>\lambda_1,\ \ \|u(t)\|_p>\lambda_1 B_0,\ \forall t\in[0,T]\,, \tag{3.8}$$

où u est la solution du problème (1.1)–(1.4).

Démonstration. De la définition de la fonctionnelle d'énergie (2.1) on a

$$E(t)=\frac{1}{2}|u_t|^2+\left(\frac{1}{2}\|u(t)\|_1^2-\frac{1}{p}\|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p\right)+\frac{2}{p}\|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p\,,\ \ t\in\mathbb{R}^+. \tag{3.9}$$

Donc en déduit que

$$E(t)\geq\frac{1}{2}\|u(t)\|_1^2-\frac{1}{p}\|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p\,,\ \ t\in\mathbb{R}^+, \tag{3.10}$$

ou encore par (3.4)

$$E(t)\geq\frac{1}{2}C_1|\nabla u(t)|^2-\frac{B_0^p}{p}|\nabla u(t)|^p=Q(|\nabla u(t)|)\,,\ \ t\in\mathbb{R}^+, \tag{3.11}$$

où Q est une fonction réelle monotone définie par

$$Q(x)=\frac{1}{2}C_1x^2-\frac{B_0^p}{p}x^p,\ p>2.$$

Cette fonction possède une seule valeur maximum $Q(\lambda_0)=E_0$, et $\lim\limits_{x\to\infty}Q(x)=-\infty$, donc et comme $E(0)<E_0$, alors il existe une constante $\lambda_1>\lambda_0$ telle que $Q(\lambda_1)=E(0)$.

Si on suppose qu'il existe un t_0 tel que $|\nabla u(t_0)| < \lambda_1$, Par la continuité, il existe un premier t_0^*, tel que $\left|\nabla u(t_0^*)\right| = \lambda_1$, et comme E est décroissante et de (3.11) on a $E(t) \geq E\left(t_0^*\right) \geq Q\left(\left|\nabla u(t_0^*)\right|\right) = Q(\lambda_1) = E(0)$, $\forall t \in \left[0, t_0^*\right]$, ce qui contredit la définition de la fonction E, et par conséquent de (3.10) il découle que

$$E(0) \geq E(t) \geq \frac{1}{2}\|u(t)\|_1^2 - \frac{1}{p}\|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{3.12}$$

ou encore

$$\|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \geq \frac{p}{2}C_1|\nabla u(t)|^2 - pE(0) \geq \frac{p}{2}C_1\lambda_1^2 - pQ(\lambda_1) = B_0^p\lambda_1^p \tag{3.13}$$

■

Démonstration du Théorème 3.1. Par l'absurde, on suppose pour la solution du problème (1.1)–(1.4), qu'il existe une constante C_0 telle que

$$\frac{1}{2}|u_t|^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|_1^2 + \frac{1}{p}\|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C_0, \forall t \in [0, T] \tag{3.14}$$

On pose

$$H(t) = E_0 - E(t), \forall t \in [0, T], \tag{3.15}$$

en utilisant le fait que $H'(t) > 0$, $\forall t \in [0, T]$, on a

$$H(t) > H(0) = E_0 - E(0) > 0, \tag{3.16}$$

de (3.12) et (3.8), l'équation (3.15) devient

$$\begin{aligned} H(t) &\leq E_0 - \frac{1}{2}\|u(t)\|_1^2 + \frac{1}{p}\|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \\ &\leq E_0 - \frac{1}{2}C_1|\nabla u(t)|^2 + \frac{1}{p}\|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \\ &\leq E_0 - \frac{1}{2}C_1\lambda_0^2 + \frac{1}{p}\|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p, \end{aligned} \tag{3.17}$$

alors

$$H(0) \leq H(t) \leq \frac{1}{p}\|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p, \forall t \in [0, T]. \tag{3.18}$$

On pose

$$\begin{cases} F(t) = |u(t)|^2 = \int |u(x,t)|^2 dx, \\ F'(t) = 2(u(t), u'(t)), \\ F''(t) = 2|u'(t)|^2 + 2(u(t), u''(t)), \end{cases} \tag{3.19}$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, bien choisi, on définit la fonction

$$G(t) = H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon F'(t), \tag{3.20}$$

où

$$0 < \alpha \leq \min\left(\frac{p-2}{2p}, \frac{p-m}{p(m-1)}\right). \tag{3.21}$$

Utilisant (3.19) et la formulation variationnelle, de (3.20) on tire

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(t) &= (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon F''(t) = \\
&= (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + 2\varepsilon |u'(t)|^2 + 2\varepsilon (u(t), u''(t)) = \\
&= (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + 2\varepsilon |u'(t)|^2 - 2\varepsilon \|u(t)\|_1^2 - \\
&-2\varepsilon \|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p - 2\varepsilon \int_\Omega ug(u_t)\,dx,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

En ajoutant le terme $2\varepsilon pH(t) - 2\varepsilon pH(t)$ dans (3.22) en utilisant (2.1) on en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(t) &= (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + 2\varepsilon |u'(t)|^2 + 2\varepsilon pH(t) - 2\varepsilon \|u(t)\|_1^2 - \\
&-2\varepsilon \|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p - 2\varepsilon \int_\Omega ug(u_t)\,dx + \varepsilon p |u'(t)|^2 + \varepsilon p \|u(t)\|_1^2 + \\
&+2\varepsilon \|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p - 2\varepsilon pE_0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

De (3.23) on déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(t) &\geq (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + (p+2)\varepsilon |u'(t)|^2 + 2\varepsilon pH(t) + \\
&+ (p-2)\varepsilon C_1 |\nabla u(t)|^2 - 2\varepsilon \int_\Omega ug(u_t)\,dx - 2\varepsilon pE_0,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Utilisons les inégalités de Young, Hölder et (3.1) pour conclure

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega ug(u_t)\,dx \right| &\leq k_1 \int_\Omega |u(t)|\,dx + k_1 \int_\Omega |u'(t)|^{m-1} |u(t)|\,dx \leq \\
&\leq k_1 C^{*2} C(\lambda) |\nabla u(t)|^2 + k_1 \frac{\delta^m}{m} \|u(t)\|_m^m + \\
&+k_1 \frac{m-1}{m} \delta^{\frac{1-m}{m}} \|u'(t)\|_m^m, \text{ avec } \delta,\ C(\lambda) > 0.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Combinant (3.22), (3.23), (3.24) et (3.25), on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(t) \quad \geq \quad & (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + (p+2)\varepsilon |u'(t)|^2 + 2\varepsilon pH(t) + \\
& + (p-2)\varepsilon C_1 |\nabla u(t)|^2 - 2\varepsilon k_1 C^{*2} C(\lambda) |\nabla u(t)|^2 - \\
& -2\varepsilon k_1 \frac{\delta^m}{m} \|u(t)\|_m^m - 2\varepsilon k_1 \frac{m-1}{m} \delta^{\frac{m}{1-m}} \|u'(t)\|_m^{m-1} - 2\varepsilon pE_0,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(t) &\geq (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + 2\varepsilon pH(t) + \\
&+\varepsilon \left((p-2) C_1 - 2k_1 C^{*2} C(\lambda) \right) |\nabla u(t)|^2 + \\
&+\varepsilon (p+2) |u'(t)|^2 - 2\varepsilon k_1 \frac{\delta^m}{m} \|u(t)\|_m^m - \\
&-2\varepsilon k_1 \frac{m-1}{m} \delta^{\frac{m}{1-m}} \|u'(t)\|_m^m - 2\varepsilon pE_0,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

d'autre part on a

$$(p-2)\,C_1\,|\nabla u\,(t)|^2 - 2pE_0 = (p-2)\,C_1\frac{\lambda_1^2-\lambda_0^2}{\lambda_1^2}\,|\nabla u\,(t)|^2 + \tag{3.28}$$
$$+\left((p-2)\,C_1\frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^2}\,|\nabla u\,(t)|^2 - 2pE_0\right),$$

où λ_1 est donné par la relation (3.8).

Donc il vient

$$(p-2)\,C_1\,|\nabla u\,(t)|^2 - 2pE_0 = C_3\,|\nabla u\,(t)|^2 + C_4, \tag{3.29}$$

où

$$\begin{cases} C_3 = (p-2)\,C_1\frac{\lambda_1^2-\lambda_0^2}{\lambda_1^2} > 0 \\ C_4 = (p-2)\,C_1\frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^2}\,|\nabla u\,(t)|^2 - 2pE_0 > 0. \end{cases} \tag{3.30}$$

De (3.1) et de (2.5) on a

$$H'\,(t) = -E'\,(t) = \int\limits_\Omega u_t g\,(u_t)\,dx \geq k_0\,\|u'\,(t)\|_m^m \tag{3.31}$$

Par (3.29) et (3.31), l'inéquation (3.27) devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G\,(t) \geq &\left((1-\alpha)\,H^{-\alpha}\,(t) - 2\varepsilon k_1\frac{m-1}{k_0 m}\delta^{\frac{m}{1-m}}\right)H'\,(t) + 2\varepsilon pH(t) + \\ &+\varepsilon\left(C_3 - 2k_1 C^{*^2} C\,(\lambda)\right)|\nabla u\,(t)|^2 + \\ &+\varepsilon\,(p+2)\,|u'\,(t)|^2 - 2\varepsilon k_1\frac{\delta^m}{m}\,\|u\,(t)\|_m^m\,, \end{aligned} \tag{3.32}$$

Choisissons δ de façons que $\delta^{\frac{m}{1-m}} = MH^{-\alpha}\,(t)$, où M est une constante bien définie, par ce choix la dernière inégalité donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G\,(t) \quad \geq \quad &\left((1-\alpha) - 2\varepsilon k_1\frac{m-1}{k_0 m}M\right)H^{-\alpha}\,(t)\,H'\,(t) + 2\varepsilon pH(t) + \\ &+\varepsilon\left(C_3 - 2k_1 C^{*^2} C\,(\lambda)\right)|\nabla u\,(t)|^2 + \\ &+\varepsilon\,(p+2)\,|u'\,(t)|^2 - 2\varepsilon k_1\frac{M^{1-m}}{m}H^{\alpha(m-1)}\,(t)\,\|u\,(t)\|_m^m\,, \end{aligned} \tag{3.33}$$

Comme $p > m$, on a

$$\|u\,(t)\|_m^m \leq C_5\,\|u\,(t)\|_p^m\,. \tag{3.34}$$

De (3.18) il découle

$$H^{\alpha(m-1)}\,(t)\,\|u\,(t)\|_m^m \leq C_5\left(\frac{1}{p}\right)^{\alpha(m-1)}\left(\|u\,(t)\|_p^p\right)^{\alpha(m-1)+\frac{m}{p}}\,. \tag{3.35}$$

Grace au (3.21), on a $p\alpha\,(m-1) + m \leq p$, donc

$$\begin{aligned} H^{\alpha(m-1)}\,(t)\,\|u\,(t)\|_m^m \quad &\leq \quad C\left(\|u\,(t)\|_p^p\right)^{\alpha(m-1)+\frac{m}{p}} \leq \\ &\leq \quad C\left(1 + \frac{1}{H\,(0)}\right)\left(\|u\,(t)\|_p^p + H\,(0)\right) \leq \\ &\leq \quad C_6\left(\|u\,(t)\|_p^p + H\,(t)\right),\ \forall t \in [0,T]\,, \end{aligned} \tag{3.36}$$

substituons (3.36) dans (3.33), il découle

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(t) \geq &\left((1-\alpha)-2\varepsilon k_1\frac{m-1}{k_0 m}M\right)H^{-\alpha}(t)H'(t)+\\
&+\varepsilon\left(C_3-2k_1C^{*^2}C(\lambda)\right)|\nabla u(t)|^2+\\
&+\varepsilon(p+2)|u'(t)|^2+\\
&+2\varepsilon\left[p\frac{H(t)}{\|u(t)\|_p^p+H(t)}-k_1\frac{M^{1-m}}{m}C_6\right]\left(\|u(t)\|_p^p+H(t)\right)\geq\\
\geq &\left((1-\alpha)-2\varepsilon k_1\frac{m-1}{k_0 m}M\right)H^{-\alpha}(t)H'(t)+\\
&+\varepsilon\left(C_3-2k_1C^{*^2}C(\lambda)\right)|\nabla u(t)|^2+\\
&+\varepsilon(p+2)|u'(t)|^2+\\
&+2\varepsilon\left[p\frac{H(0)}{\left(\frac{1}{p}+1\right)C_0}-k_1\frac{M^{1-m}}{m}C_6\right]\left(\|u(t)\|_p^p+H(t)\right),
\end{aligned} \tag{3.37}$$

on choisit $\lambda>0$ et $M>\left(\frac{pm}{k_1C_6}\frac{H(0)}{(p+1)C_0}\right)^{\frac{1}{m-1}}$ suffisamment grand de sorte que (3.37) donne

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(t) \quad\geq\quad &\left((1-\alpha)-2\varepsilon k_1\frac{m-1}{k_0 m}M\right)H^{-\alpha}(t)H'(t)+\\
&+\varepsilon K_1|\nabla u(t)|^2+\\
&+\varepsilon(p+2)|u'(t)|^2+\\
&+\varepsilon K_3\left(\|u(t)\|_p^p+H(t)\right),
\end{aligned} \tag{3.38}$$

où

$$K_1=C_3-2k_1C^{*^2}C(\lambda)>0.$$

Lorsque M est fixé on choisit ε assez petit de sorte que :

$$\begin{cases} G(0)=H^{1-\alpha}(0)+\varepsilon F'(0)>0,\\ \beta=(1-\alpha)-2\varepsilon k_1\frac{m-1}{k_0 m}M>0\end{cases}$$

Donc (3.38) devient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(t) \quad\geq\quad &\beta H^{-\alpha}(t)H'(t)+\\
&+\varepsilon K_1|\nabla u(t)|^2+\varepsilon K_2|u'(t)|^2+\varepsilon K_3\left(\|u(t)\|_p^p+H(t)\right),
\end{aligned} \tag{3.39}$$

De (3.39) on conclut que

$$\frac{d}{dt}G(t)\geq K\varepsilon\left(|\nabla u(t)|^2+|u'(t)|^2+\|u(t)\|_p^p+H(t)\right)\geq 0, \tag{3.40}$$

par conséquent

$$G(t)\geq G(0)>0, \forall t\in[0,T]. \tag{3.41}$$

De (3.20) on a

$$G^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) = \left(H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon F'(t)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C\left(H(t) + \left|\int_{\Omega} u(t)\, u'(t)\, dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right). \tag{3.42}$$

Moyennant aux inégalités de Hölder et de Young on trouve

$$\begin{aligned} \left|\int_{\Omega} u(t)\, u'(t)\, dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} &\leq \|u'(t)\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}} \|u(t)\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \\ &\leq C_7\left(\|u'(t)\|_2^2 + \left(\|u(t)\|_p^p\right)^{\frac{2}{(1-2\alpha)p}}\right). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Utilisant (3.36) et (3.21) on a

$$\begin{aligned} \left(\|u(t)\|_p^p\right)^{\frac{2}{(1-2\alpha)p}} &\leq \left(1 + \frac{1}{H(0)}\right)\left(\|u(t)\|_p^p + H(t)\right) \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{H(0)}\right)\left(\|u(t)\|_p^p + H(t) + |\nabla u(t)|^2\right). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Par conséquent (3.43) devient

$$\begin{aligned} \left|\int_{\Omega} u(t)\, u'(t)\, dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} &\leq \|u'(t)\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}} \|u(t)\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \\ &\leq C_8\left(\|u'(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_p^p + H(t) + |\nabla u(t)|^2\right). \end{aligned} \tag{3.45}$$

Combinant (3.42), (3.45), on trouve

$$G^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) \leq C_9\left(\|u'(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_p^p + H(t) + |\nabla u(t)|^2\right). \tag{3.46}$$

En comparaissant (3.40) avec (3.46) on trouve que

$$\frac{d}{dt} G(t) \geq \varepsilon C_{10} G^{\frac{1}{1-\alpha}}(t), \forall t \in [0, T]. \tag{3.47}$$

Intégrons (3.47) sur $(0, t)$ on trouve que

$$G^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t) \geq \frac{1}{G^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}(0) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\varepsilon t}, \forall t \in [0, T] \tag{3.48}$$

Par conséquent

$$\lim_{t \to T^*} G(t) = \infty,$$

ou encore

$$\lim_{t \overset{<}{\to} T^*} \left(\frac{1}{2}|u_t|^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|_1^2 + \frac{1}{p}\|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p\right) = +\infty, \tag{3.49}$$

où

$$T^* = \frac{(1-\alpha)\, G^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}(0)}{\alpha \varepsilon}. \tag{3.50}$$

■

Remarque 3.1 *Dans plusieurs cas où la fonction g vérifie certaines conditions déférentes à celles définies dans (2.2)-(2.4), ou dans (3.1), on omet ici les détails on peut montrer des résultats similaires comme ceux trouvés dans les Théorème 2.2, Théorème 2.3, et Théorème 3.1, nous n'indiquons pas ces résultats ici pour éviter les répétitions des techniques sans intérêt.*

Voici quelques exemples dont on cite les hypothèses qui ont été imposées par plusieurs auteurs :

1. *Ma, et Soriano dans [41] considère les hypothèses suivantes*

$$\begin{cases} p = n, \ g(x)\, x \geq 0, \\ \left|g(x)\right| \leq C_\beta \exp\left(\beta \left|x\right|^{\frac{n}{n-1}}\right), \ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

   pour démontrer un résultats d'existence globale pour des problèmes similaires en utilisant les mêmes techniques.

2. *Vitilaro dans [63] a supposé que la fonction g vérifie*

$$\begin{cases} g \in C^1, \\ xg(x) \geq k_0 \left|x\right|^m, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ m > 2, \\ \left|g(x)\right| \leq k_1 \left|x\right| \left(1 + \left|x\right|^{m-1}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ m \geq 2, \end{cases}$$

   il a prouvé les mêmes résultats obtenus au Théorème 3.1.

Deuxième partie

Problèmes aux limites semi linéaires associés aux équations élastiques ou viscoélastiques avec terme source.

Introduction

Cette partie est consacrée à l'étude de l'existence locale et globale, explosion en temps fini, comportement asymptotique des solutions de quelques problèmes aux limites hyperboliques ou paraboliques semi linéaires sans terme dissipatif et avec un terme source, à savoir :

* Problème hyperbolique semi linéaire associé aux équations élastiques linéaires avec terme source ;
* Problème aux limites parabolique non linéaire associé aux équations élastiques non linéaires ;
* Problème aux limites hyperbolique non linéaire associé aux équations viscoélastiques non linéaires.

Cette partie se divise de trois chapitres.

Dans le premier chapitre on analyse la question d'existence globale et explosion en temps fini des solutions pour un problème hyperbolique semi linéaire associé aux équations élastiques avec terme source :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - div\sigma(u) + |u|^\rho u = f,\ x \in \Omega,\ t \in]0, T[\,, \tag{3.51}$$

$$\sigma(u) = F(\varepsilon(u)). \tag{3.52}$$

La fonction u cherchée vérifie en outre les conditions aux limites et les conditions initiales suivantes :

$$u(x,0) = u_0(x),\ u'(x,0) = u_1(x),\ x \in \Omega, \tag{3.53}$$

$$u = 0 \text{ sur } \Sigma_1,\ \sigma(u)\eta = 0 \text{ sur } \Sigma_2, \tag{3.54}$$

où les fonctions u_0 et u_1 sont données.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du comportement à l'infini de la solution d'un problème aux limites parabolique non linéaire associé aux équations élastiques, suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu div\sigma(u) + \lambda\mathcal{A}u = f,\ x \in \Omega,\ t \in]0, T[\,,$$

avec les mêmes conditions initiales et aux limites (3.53) et (3.54). Où $\mathcal{A}, F$ sont des fonctions non linéaires et $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

Dans le cas où $\mu = 0$, $\lambda = 1$ et $\mathcal{A}u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$, J.L. Lions dans [38] a étudié l'existence locale et l'unicité d'une solution faible du problème résultant

Les approximations de Faedo-Galerkin combinées aux méthodes de monotonie et de compacité, voir [54, 55], nous permettent de prouver l'existence locale et l'unicité de la solution du problème considéré. Ensuite, sous certaines hypothèses supplémentaires convenables sur les données nous allons analyser le comportement à l'infini de la solution et nous allons prouver que la solution u reste bornée pour $t \longrightarrow +\infty$.

Dans le dernier chapitre nous allons considérer un problème aux limites hyperbolique non linéaire associé aux équations ayant une loi du comportement viscoélastique non linéaire :

$$\sigma(u) = \lambda F(\varepsilon(u)) + \mu G(\varepsilon(u')), \text{ dans } \Omega \times (0,T),$$

avec les conditions (3.53) et (3.54). Où F et G sont des fonctions non linéires et ρ, λ, μ des nombres réels positifs.

Sous certaines hypothèses sur les données en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, la méthode de compacité et le théorème du monotonie, nous allons démontrer l'existence locale et l'unicité d'une solution faible. Ensuite nous allons étudier la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

CHAPITRE 4

EXISTENCE GLOBALE ET EXPLOSION EN TEMPS FINI DE LA SOLUTION D'UN PROBLÈME HYPERBOLIQUE SEMI LINÉAIRE ASSOCIÉ AUX ÉQUATIONS ÉLASTIQUES AVEC TERME SOURCE.

Sommaire

4.1 Position du problème 48
4.2 Existence globale de la solution 50
4.3 Non-existence globale de la solution 53
4.4 Explosion en temps fini de la solution 54

Ce chapitre est dédié à l'étude de l'existence globale, l'instabilité ainsi que l'explosion en temps fini de la solution d'un problème aux limites hyperbolique semi linéaire et avec terme source. Sous certaines conditions sur les données initiales, en se basant sur les techniques trouvées dans [3], [30] et [37] pour des problèmes particuliers, nous allons montrer que la solution locale du problème considéré est instable.

Aussi nous allons démontrer que cette solution s'explose en temps fini T^* qu'on déterminera. Les techniques utilisées dans ce chapitre sont basées sur quelques estimations comme celles considérées dans [3], [4], [17] et [37].

4.1 Position du problème

Dans le cas $\alpha = 0$, le problème(1.1) se ramène au problème(4.1) suivant :

Problem 4.1 *Trouver le champ des déplacements $u : Q = \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$ et le champ des contraintes $\sigma : Q = \Omega \times [0, T] \to S_n$, tels que*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - div\sigma(u) + |u|^\rho u = f,\ x \in \Omega,\ t \in]0, T[\tag{4.1}$$

$$\sigma(u) = F(\varepsilon(u)),\ x \in \Omega,\ t \in]0, T[\tag{4.2}$$

$$\begin{cases} a)\ u(x,0) = u_0(x) \\ b)\ u'(x,0) = u_1(x) \end{cases},\ x \in \Omega \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} u = 0 \ sur \ \Sigma_1 \\ \sigma(u)\eta = 0 \ sur \ \Sigma_2 \end{cases} \tag{4.4}$$

Dans ce cas, $\alpha = 0$, les résultats d'existence, d'unicité et de régularité qui ont été démontrés dans la première partie ne seront pas redémontrés dans ce chapitre, car la présence ou l'absence du terme dissipatif $g(u')$ ne pose aucun problème pour l'existence locale, l'unicité et la régularité de la solution obtenue. Par conséquent, les résultats concernant l'existence locale, l'unicité et la régularité de la solution seront donnés sans démonstration.

Théorème 4.1 *Supposons que les hypothèses (1.5)-(1.8) sont vérifiées. Alors le problème (4.1) possède une solution unique pour T fini quelconque et pour tout $\rho > -1$. En outre, la solution satisfait*

$$u \in L^{\infty}(0, T; V \cap L^p(\Omega)),\ \ p = \rho + 2 \tag{4.5}$$

$$u' \in L^{\infty}\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \tag{4.6}$$

Théorème 4.2 *On se place dans les conditions du Théorème 4.1 avec en outre*

$$f' \in L^2(Q), \tag{4.7}$$

$$u_0 \in V \cap H^2(\Omega), \tag{4.8}$$

$$u_1 \in V. \tag{4.9}$$

Alors pour tout $\rho > 0$ il existe une solution u et une seule du système (5.12)-(5.15) ayant la régularité suivante :

$$u \in L^{\infty}\left(0, T; V \cap H^2(\Omega)\right), \tag{4.10}$$

$$u' \in L^{\infty}(0, T; V), \tag{4.11}$$

$$u'' \in L^{\infty}\left(0, T; L^2(\Omega)\right). \tag{4.12}$$

Notre but dans ce chapitre est d'examiner la question d'existence globale, l'instabilité du système et explosion en temps fini de la solution du problème (5.12)-(5.15).

On définit la fonctionnelle d'énergie par la formule

$$E(t) = \frac{1}{2}|u_t|^2 + \frac{1}{2}C_1\|u(t)\|^2 + \frac{1}{p}\|u(t)\|^p_{L^p(\Omega)},\ t \in \mathbb{R}^+\ p \geq 2. \tag{4.13}$$

On note par $d > 0$ la constante d'injection

$$V \to L^2(\Omega),\ d|v| \leq \|v\|,\ \forall v \in V$$

et par C_1 la constante positive telle que

$$a(v,v) = C_1\|v\|^2,\ \forall v \in V.$$

On pose

$$E(0) = \frac{1}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{2}C_1\|u_0\|^2 + \frac{1}{p}\|u_0\|^p_{L^p(\Omega)}$$

Lemme 4.1 *L'énergie $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est constante, absolument continue et on a*

$$E'(t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{4.14}$$

De plus

$$\|E(t)\|_{L^\infty(0,+\infty)} = E(0). \tag{4.15}$$

Démonstration. Pour tout $0 \leq S < T < \infty$, d'après (4.1)-(4.4) on a

$$0 = \int_S^T \int_\Omega u_t \left(u_{tt} - div\sigma(u) + |u|^\rho u(t)\right) dxdt =$$

$$= \int_S^T \int_\Omega \left(u_t u_{tt} - u_t div\sigma(u) + |u|^\rho u(t) u_t\right) dxdt =$$

$$= \int_S^T E'(t)\, dt = E(T) - E(S).$$

Donc

$$E(T) - E(S) = 0, \ 0 \leq S < T < \infty. \tag{4.16}$$

■

On note que

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}|u_t|^2 + \frac{1}{2}C_1\|u(t)\|^2 + \frac{1}{p}\|u(t)\|^p_{L^p(\Omega)}, \ t \in \mathbb{R}^+. \tag{4.17}$$

4.2 Existence globale de la solution

Théorème 4.3 *Soit u une solution du problème (4.1)–(4.4) avec $f = 0$. En outre on suppose que*

$$(u_0, u_1) < 0 \tag{4.18}$$

et

$$0 < E(0) \leq \frac{(2p-3)\, C_1 d\, |\Omega|^{\frac{-1}{4}}}{4(2p+1)}. \tag{4.19}$$

Alors $|u(t)|^2$ est strictement décroissante et uniformément bornée : $|u(t)|^2 \leq |u(0)|^2$ pour tout $t > 0$.

Démonstration. On définit la fonction F comme suit :

$$F(t) = |u(t)|^2 = \int_\Omega |u(x,t)|^2\, dx \tag{4.20}$$

D'où il vient

$$F'(t) = 2(u, u'). \tag{4.21}$$

En utilisant la formule de Green et les conditions aux limites (4.4), de (4.1) on conclut

$$\begin{aligned} F''(t) &= 2\left|u'(t)\right|^2 + 2\left(u, u''\right) = 2\left|u'(t)\right|^2 + 2\left(u, div\sigma(u) - |u|^{\rho} u(t)\right) = \\ &= 2\left|u'(t)\right|^2 + 2\left(u, div\sigma(u)\right) + 2\left(u, -|u|^{\rho} u(t)\right) = \\ &= 2\left|u'(t)\right|^2 - 2C_1\left\|u(t)\right\|^2 - 2\left\|u(t)\right\|^p_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Pour tout $\lambda > 0$ de (4.17) et (4.22) il résulte

$$\begin{aligned} F''(t) - \lambda E(0) &= 2\left|u'(t)\right|^2 - 2C_1\left\|u(t)\right\|^2 - 2\left\|u(t)\right\|^p_{L^p(\Omega)} + \\ &+ \frac{\lambda}{2}\left|u'\right| + \frac{\lambda}{2}C_1\left\|u(t)\right\|^2 + \frac{\lambda}{p}\left\|u(t)\right\|^p_{L^p(\Omega)} - 2\lambda E(0) = \\ &\left(2 + \frac{\lambda}{2}\right)\left|u'\right|^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - 2\right)C_1\left\|u(t)\right\|^2 + \left(\frac{\lambda}{p} - 2\right)\left\|u(t)\right\|^p_{L^p(\Omega)} - 2\lambda E(0) \end{aligned}$$

Posant $\lambda = 2p + 1$, où $p \geq 2$ il vient que

$$F''(t) \geq \frac{2p+5}{2}\left|u'(t)\right|^2 + \frac{2p-3}{2}C_1\left\|u(t)\right\|^2 - 2(2p+1)E(0). \tag{4.23}$$

Grâce à l'injection de Sobolev, on conclut qu'il existe une constante $d > 0$ telle que

$$\left\|u(t)\right\|^2 \geq d\left|u(t)\right|^2. \tag{4.24}$$

Donc (4.23) devient

$$F''(t) \geq \frac{2p+5}{2}\left|u'(t)\right|^2 + \frac{2p-3}{2}C_1 d\left|u(t)\right|^2 - 2(2p+1)E(0). \tag{4.25}$$

En multipliant (4.25) par $F(t)$ on obtient

$$\begin{aligned} F''(t)F(t) \quad &\geq \quad \left(\frac{2p+5}{2}\right)\left|u'(t)\right|^2\left|u(t)\right|^2 + \\ &+ \left(\frac{2p-3}{2}\right)C_1 d\left|u(t)\right|^4 - 2(2p+1)E(0)\left|u(t)\right|^2. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Comme

$$\left|u(t)\right|^4 \geq |\Omega|^{\frac{-1}{4}}\left|u(t)\right|^2, \tag{4.27}$$

alors (4.26) devient

$$\begin{aligned} F''(t)F(t) \quad &\geq \quad \left(\frac{2p+5}{2}\right)\left|u'(t)\right|^2\left|u(t)\right|^2 + \\ &+ \left(\frac{2p-3}{2}\right)C_1 d\,|\Omega|^{\frac{--1}{4}}\left|u(t)\right|^2 - 2(2p+1)E(0)\left|u(t)\right|^2. \end{aligned} \tag{4.28}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz de (4.21) il découle

$$\left(F'(t)\right)^2 \leq 4\left|u'(t)\right|^2\left|u(t)\right|^2. \tag{4.29}$$

Par conséquent, pour tout $\theta > 0$ l'inégalité (4.28) implique

$$F''(t)F(t) - \frac{\theta}{2}(F'(t))^2 \geq \left(\frac{2p+5}{2}\right)|u'(t)|^2|u(t)|^2 + \tag{4.30}$$
$$+\left(\frac{2p-3}{2}\right)C_1 d|\Omega|^{\frac{-1}{4}}|u(t)|^2 - 2(2p+1)E(0)|u(t)|^2 - 2\theta|u'(t)|^2|u(t)|^2,$$

ou encore

$$\begin{aligned} F''(t)F(t) - \frac{\theta}{2}(F'(t))^2 \quad \geq \quad & \left(\frac{2p+5}{2} - 2\theta\right)|u'(t)|^2|u(t)|^2 + \\ & + \left(\left(\frac{2p-3}{2}\right)C_1 d|\Omega|^{\frac{-1}{4}} - 2(2p+1)E(0)\right)|u(t)|^2. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Choisissons θ telle que

$$\frac{2p+5}{4} \geq \theta > 2, \tag{4.32}$$

alors de (4.31) il en résulte

$$F''(t)F(t) - \frac{\theta}{2}(F'(t))^2 \geq \left(\left(\frac{2p-3}{2}\right)C_1 d|\Omega|^{\frac{-1}{4}} - 2(2p+1)E(0)\right)F(t). \tag{4.33}$$

Si nous choisissons $E(0)$ tel que

$$\left(\left(\frac{2p-3}{2}\right)C_1 d|\Omega|^{\frac{-1}{4}} - 2(2p+1)E(0)\right) \geq 0,$$

ou encore sous la forme

$$0 < E(0) \leq \frac{(2p-3)C_1 d|\Omega|^{\frac{-1}{4}}}{4(2p+1)}. \tag{4.34}$$

En utilisant (4.19), l'inéquation (4.34) devient

$$\frac{1}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{2}C_1\|u_0\|^2 + \frac{1}{p}\|u_0\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\frac{(2p-3)C_1 d|\Omega|^{\frac{-1}{4}}}{2(2p+1)}. \tag{4.35}$$

Donc de l'inégalité (4.33) on arrive à

$$F''(t)F(t) \geq \frac{\theta}{2}(F'(t))^2. \tag{4.36}$$

D'où il en découle

$$\frac{F''(t)}{(F'(t))^2} \geq \frac{\theta}{2}\frac{1}{F(t)}. \tag{4.37}$$

Par l'intégration sur $(0,t)$ on obtient

$$\frac{1}{F'(t)} \leq \frac{1}{F'(0)} - \frac{\theta}{2}\int_0^t \frac{1}{F(s)}ds \leq \frac{1}{F'(0)}. \tag{4.38}$$

Moyennant (4.18) on déduit de (4.38) que

$$F'(t) < 0, \ \forall t \geq 0. \tag{4.39}$$

En utilisant (4.39), par intégration sur $(0,t)$ de (4.36) il résulte

$$\ln\left(\frac{F'(t)}{F'(0)}\right)=\int_0^t \frac{F''(s)}{F'(s)}ds \le \frac{\theta}{2}\int_0^t \frac{F'(s)}{F(s)}ds=\frac{\theta}{2}\ln\left(\frac{F(t)}{F(0)}\right), \tag{4.40}$$

ou encore

$$\frac{F'(t)}{F'(0)} \le \left(\frac{F(t)}{F(0)}\right)^{\frac{\theta}{2}}. \tag{4.41}$$

Par intégration une autre fois sur $(0,t)$ en tenant en compte (4.39), l'inégalité (4.41) donne

$$\begin{aligned}\left((F(t))^{\frac{2-\theta}{2}}-(F(0))^{\frac{2-\theta}{2}}\right) &= \int_0^t F'(s)(F(s))^{\frac{-\theta}{2}}\,ds \le \qquad (4.42)\\ &\le \frac{\theta-2}{2}F'(0)\int_0^t F'(0)(F(0))^{\frac{-\theta}{2}}\,ds = t\frac{\theta-2}{2}\left|F'(0)\right|(F(0))^{\frac{-\theta}{2}}.\end{aligned}$$

Finalement on arrive à l'estimation suivante :

$$F(t)\le F(0)\left(1+\frac{\theta-2}{2}t\left|F'(0)\right|F(0)\right)^{\frac{-2}{\theta-2}} \le F(0), \tag{4.43}$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 4.3. ∎

4.3 Non-existence globale de la solution

Théorème 4.4 *Soit u une solution du problème (4.1)–(4.4) avec $f=0$. En outre on suppose que*

$$(u_0,u_1)>0 \tag{4.44}$$

et

$$0<E(0)<\frac{1}{2}\frac{(2p-3)\,C_1 d\,|\Omega|^{\frac{1}{4}}}{2(2p+1)}. \tag{4.45}$$

Alors

$$\lim_{t\to\infty}|u(t)|=\infty.$$

Démonstration. Choisissons θ tel que

$$0<\theta<2 \tag{4.46}$$

on a

$$\frac{2p+5}{2}-2\theta>\frac{2p-3}{2}>0,\ p\ge 2, \tag{4.47}$$

et par suite (4.31) devient

$$F''(t)F(t)-\frac{\theta}{2}(F'(t))^2 \ge \left(\left(\frac{2p-3}{2}\right)C_1 d\,|\Omega|^{\frac{-1}{4}}-2(2p+1)E(0)\right)F(t). \tag{4.48}$$

En utilisant (4.45) de (4.48 on conclut

$$F''(t)\,F(t) \geq \frac{\theta}{2}\left(F'(t)\right)^2. \tag{4.49}$$

Comme $0 < \theta < 2$, de la dernière inégalité il découle

$$\frac{d^2}{dt^2}F^{\gamma} \geq 0 \tag{4.50}$$

où

$$1 > \gamma = \frac{2-\theta}{2} > 0. \tag{4.51}$$

Donc par intégration deux fois sur $(0, t)$, il résulte

$$F^{\gamma}(t) \geq \frac{\gamma^{-1}F(0) + tF'(0)}{\gamma^{-1}F^{1-\gamma}(0)}. \tag{4.52}$$

Par l'hypothèse (4.44) on conclut que F^{γ} devient non bornée à l'infini, et par conséquent $\lim\limits_{t\to\infty} |u(t)| = \infty$, d'où le Théorème 4.4. ■

4.4 Explosion en temps fini de la solution

Théorème 4.5 *Soit u une solution du problème (4.1)–(4.4) avec $f = 0$. En outre on suppose que*

$$(u_0, u_1) > 0 \tag{4.53}$$

et

$$E(0) = \frac{1}{2}\frac{(2p-3)\,C_1 d\,|\Omega|^{\frac{1}{4}}}{2\,(2p+1)}. \tag{4.54}$$

Alors la solution u s'explose en temps fini $T^* = \frac{|u_0|^2}{\gamma(u_0,u_1)}$, et par conséquent $\lim\limits_{t \overset{<}{\to} T^*} |u(t)| = \infty$.

Démonstration. Choisissons θ tel que

$$2 < \theta \leq \frac{2p+5}{4}. \tag{4.55}$$

Donc l'inégalité (4.31) donne

$$F''(t)\,F(t) - \frac{\theta}{2}\left(F'(t)\right)^2 \geq \left(-2\,(2p+1)\,E(0) + \frac{2p-3}{2}C_1 d\,|\Omega|^{\frac{1}{4}}\right)F(t). \tag{4.56}$$

Puisque $\theta > 2$, la dernière inégalité devient

$$\frac{d^2}{dt^2}F^{-\gamma} \leq -\gamma F^{-(1+\gamma)}\left(-2\,(2p+1)\,E(0) + \frac{2p-3}{2}C_1 d\,|\Omega|^{\frac{1}{4}}\right), \tag{4.57}$$

où

$$\gamma = \frac{\theta-2}{2} > 0.$$

Si nous choisissons $E(0)$ de la forme (4.54) l'inégalité (4.57) montre que $F^{-\gamma}$ est une fonction concave. Nous avons donc par intégration deux fois sur $(0,t)$

$$F(t) \geq F(0)\left(1 - \gamma t F^{-1}(0) F'(0)\right)^{\frac{-1}{\gamma}}. \tag{4.58}$$

Par l'hypothèse (4.53), l'inégalité (4.58) affirme que si on choisit T^* de la forme

$$T^* = \frac{F(0)}{\gamma F'(0)}, \tag{4.59}$$

alors F devient non bornée pour $t < T^*$ ce qui montre l'explosion en temps fini de la solution. ■

CHAPITRE 5

EXISTENCE LOCALE ET COMPORTEMENT À L'INFINI POUR UN PROBLÈME AUX LIMITES PARABOLIQUE NON LINÉAIRE ASSOCIÉ AUX ÉQUATIONS ÉLASTIQUES

Sommaire

5.1 Formulation variationnelle et préliminaires. **57**

5.2 Existence et Unicité de la solution **59**

5.2.1 Existence locale 59

5.2.2 Unicité 64

5.3 Comportement à l'infini en t **64**

5.4 Exemples **67**

Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement à l'infini de la solution d'un problème aux limites parabolique non linéaire.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \mu div\sigma\,(u) + \lambda\mathcal{A}u = f,\ x \in \Omega,\ t \in]0,T[\,, \\ \sigma\,(u) = F\,(x, \varepsilon(u))\,,\ x \in \Omega,\ t \in]0,T[\,, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \Sigma_1,\ \sigma(u)\eta = 0 \text{ sur } \Sigma_2, \end{cases} \tag{5.1}$$

où $\mathcal{A}$ est une fonction non linéaire et F est une fonction linéaire, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans les Sections 2 et 3, nous allons utiliser les approximations de Faedo-Galerkin combinées aux méthodes de monotonie et de compacité, voir [54, 55], pour prouver l'existence locale et l'unicité de la solution du problème considéré. Dans la section 4, sous certaines hypothèses supplémentaires convenables sur les données nous allons analyser le comportement à l'infini de la solution et nous allons prouver que la solution u reste bornée pour $t \longrightarrow +\infty$.

5.1 Formulation variationnelle et préliminaires.

Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ (régulière) ; on désigne par u un vecteur $(u_1, u_2, ..., u_n)$, où $\forall i\ u_i : Q = \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ une partition de Γ, i.e. $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. On suppose que *mes* $\Gamma_1 > 0$ et on pose $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[$ et $\Sigma_2 = \Gamma_2 \times]0, T[$ ou T est un réel fini, p' est l'exposant conjugué de p, i.e.$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$.

Le problème considéré dans ce chapitre consiste à chercher le couple (u, σ) tel que $u : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma : Q \rightarrow S_n$ satisfaisant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu div\sigma\,(u) + \lambda\mathcal{A}u = f, x \in \Omega, t \in]0, T[\,, \tag{5.2}$$

$$\sigma\,(u) = F\,(x, \varepsilon(u))\,,\ x \in \Omega, t \in]0, T[\,, \tag{5.3}$$

$$u(x, 0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \tag{5.4}$$

$$\begin{cases} u = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \\ \sigma(u)\eta = 0 \text{ sur } \Sigma_2, \end{cases} \tag{5.5}$$

où $u_0(x)$ est une fonction donnée. u, f , σ et $\varepsilon(u)$ désignent le vecteur du déplacement, la densité des forces volumiques, le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations linéarisé, respectivement. F est une fonction non linéaire et $\mathcal{A}$ est un opérateur non linéaire.

Les relations (5.4) et (5.5) sont les conditions initiales et les conditions aux limites Dirichlet-Neumann, respectivement. On dénote par S_n l'espace de tenseurs symétriques d'ordre n.

Pour donner la formulation variationnelle du problème considéré, nous définissons l'espace

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega)^{n\times n} = \left\{\sigma = \left(\sigma_{ij}\right) \in \mathcal{S}_n : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\right\},$$

qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire donné par

$$\langle\sigma,\tau\rangle = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij}dx.$$

et avec la norme associée $\|.\|_{\mathcal{H}}$.

Aussi, on définit l'espace

$$W^{1,p}\,(\Omega) = \{v \mid v \in L^p\,(\Omega)\,,\ D_i v \in L^p\,(\Omega)\,,\ i = 1, ..., n\}\,,\ 1 \leq p < +\infty$$

qui est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|v\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|D_i v\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

On désigne par $W_0^{1,p}\,(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}\,(\Omega)$ dans $W^{1,p}\,(\Omega)$ et qui est défini comme suit :

$$W_0^{1,p}\,(\Omega) = \left\{v \mid v \in W^{1,p}\,(\Omega)\,, v = 0 \text{ sur } \Gamma\right\}$$

et son dual est défini par $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Pour l'étude de ce problème, on suppose que l'opérateur élastique linéaire $F : \Omega \times S_n \rightarrow S_n$ vérifie :

$$\begin{cases} (a)\ \ \exists\, m > 0;\ (F(., \varepsilon), \varepsilon) \geq m\,|\varepsilon|^2\,,\ \forall\varepsilon \in S_n\ \ p.p.\ x \in \Omega \\ (b)\ x \rightarrow F(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega,\ \forall\ \varepsilon \in S_n\ \ p.p.\ x \in \Omega \\ (c)\ x \rightarrow F(x, 0_n) \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{5.6}$$

Aussi, supposons que $\mathcal{A} : W^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est un opérateur non linéaire de second ordre ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (a) \ \mathcal{A} \text{ monotone hémicontinu et } \|\mathcal{A}v\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C \|v\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)}; \\ (b) \ \exists\, \alpha > 0;\ (\mathcal{A}v, v) \geq \alpha \|v\|^{p}_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{5.7}$$

De plus les données f et u_0 doivent satisfaire

$$f \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega)),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ 2 \leq p < \infty; \tag{5.8}$$

$$u_0 \in L^2(\Omega). \tag{5.9}$$

Sous les hypothèses (5.6)–(5.9), en multipliant l'équation (5.2) par $v \in V$ et par intégration sur Ω, la formule de Green nous permet de vérifier facilement que le problème (5.2)–(5.5) est équivalent au problème variationnel suivant :

$$(P.V) : \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ (u', v) + a(u,v) + (\mathcal{A}u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega. \end{cases} \tag{5.10}$$

Où

$$V = \left\{ v \in W^{1,p}(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \sigma(u)\varepsilon(v)dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx.$$

Remarque 5.1 *Si on pose*

$$\|v\|_1 = (a(v,v))^{\frac{1}{2}} = \left[\int_\Omega \sigma(v)\varepsilon(v)dx \right]^{\frac{1}{2}} \text{ pour tout } v \in V.$$

Sous l'hypothèse (5.6) il vient

$$m\,|\varepsilon(u)|^2 \leq (F(\varepsilon(u)), \varepsilon(u)) \leq K\,|\varepsilon(u)|^2.$$

Grâce à l'inégalité de Korn et l'inégalité de Poincaré on en déduit qu'il existe des constantes C_1, $K > 0$ telles que

$$C_1 \|v\|^2 \leq a(v,v) \leq K \|v\|^2. \tag{5.11}$$

5.2 Existence et Unicité de la solution

5.2.1 Existence locale

Théorème 5.1 *Sous les hypothèses (5.6)–(5.9), le problème (5.2)–(5.5) admet au moins une solution u pour tout $T > 0$ fini quelconque vérifiant*

$$u \in L^p(0,T;V), \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^{p'}\left(0,T; V' \cap W^{-1,p'}(\Omega)\right), \tag{5.13}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $2 \leq p < \infty$.

Lemme 5.1 *Le problème $(P.V)$ est bien défini.*

Démonstration du Lemme 5.1. Puisque u est une fonction de $L^2(0,T;V)$, les fonctions $t \longmapsto (u(t),v)$ et $t \longmapsto a(u(t),v)$ appartiennent à $L^2(0,T)$. Aussi la fonction $t \longmapsto (\mathcal{A}u(t),v)$ appartient à $L^1(0,T)$ pour tout $v \in V$, car en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\mathcal{A}u(t)\,v(t)|\,dx &\leq \|\mathcal{A}u(t)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\|v(t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \\ &\leq C\|\mathcal{A}u(t)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\|v(t)\|_V \leq C.\end{aligned}$$

Et par conséquent $t \longmapsto (\mathcal{A}u(t),v), \forall v \in V$ est bien dans $L^1(0,T)$. De même, puisque f est une fonction de $L^{p'}\left(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)\right)$, la fonction $t \longmapsto (f(t),v)$ est dans $L^{p'}(0,T)$ pour tout $v \in V$. Il en résulte que le problème variationnel $(P.V)$ a un sens dans $D'(]0,T[)$. ∎

Démonstration du Théorème 5.1. La démonstration de ce théorème est organisée comme suit

– On construit des solutions "approchées" par la méthode de Faedo-Galerkin ;

– On établit, pour ces solutions approchées, des estimations à priori ;

– On passe à la limite (dans les termes non linéaires) en se basant sur la méthode de compacité et celle de monotonie.

Etape 1 :

Commençons par introduire la suite $\left(w_j\right)$ de fonctions ayant les propriétés suivantes

$$\begin{cases} w_j \in V,\ j = 1,...,m; \\ \text{La famille } \{w_1,w_2,...,w_m\} \text{ est linéairement indépendante ;} \\ \text{L'espace } V_m = span\{w_1,w_2,...,w_m\} \text{ est dense dans } V. \end{cases}$$

On cherche alors une suite $u_m(t)$ sous la forme

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} K_{im}(t)w_i. \tag{5.14}$$

solution du problème variationnel approché, associé au problème (5.2)–(5.5), suivant

$$(P_m):\begin{cases} \left(u_m'(t),w_j\right) + \mu a\left(u_m(t),w_j\right) + \lambda\left(\mathcal{A}u_m(t),w_j\right) = \left(f(t),w_j\right),\ 1 \leq j \leq m \\ u_m(0) = u_{0m} \end{cases} \tag{5.15}$$

avec les conditions initiales

$$u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}w_i \longrightarrow u_0 \text{ quand } m \longrightarrow \infty \text{ dans } V. \tag{5.16}$$

On obtient un système d'équations différentielles non linéaires du second ordre. D'après le théorème de Carathéodorie, il existe une unique solution u_m du système (5.14), (5.15) et (5.16) dans $[0,t_m]$ ayant la régularité suivante :

$$u_m(t) \in L^2(0,t_m;V_m),\ u_m'(t) \in L^2(0,t_m;V_m).$$

Les estimations à priori qui suivent montrent que t_m est indépendant de m.

Etape 2 :

Multiplions l'équation (5.15) d'indice j par $K_{jm}(t)$, et sommons sur j, il vient que

$$\left(u_m'(t), u_m(t)\right) + \mu a\left(u_m(t), u_m(t)\right) + \lambda\left(\mathcal{A}u_m, u_m(t)\right) = \left(f, u_m(t)\right). \tag{5.17}$$

Comme

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m(t)\right|^2 = \left(u_m'(t), u_m(t)\right).$$

Utilisons (5.11) et (5.7), donc (5.17) devient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m(t)\right|^2 + \mu C_1\left\|u_m(t)\right\|^2 + \lambda\alpha\left\|u_m\right\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \left|\left(f(t), u_m(t)\right)\right|. \tag{5.18}$$

Pour tout t dans $[0,T]$, par intégration par partie sur $(0,t)$ et par utilisation des inégalités de Hölder et de Young de (5.18) il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|u_m(t)\right|^2 + \mu C_1\int_0^t \left\|u_m(s)\right\|^2 ds + \lambda\alpha\int_0^t \left\|u_m(s)\right\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} ds \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\left|u_{0m}\right|^2 + \int_0^t \left(\left\|f(s)\right\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\left\|u_m(s)\right\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right) ds \leq \qquad (5.19)\\
&\leq \frac{1}{2}\left|u_{0m}\right|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\left(\frac{1}{\lambda\alpha}\right)^{\frac{p'}{p}}\left\|f(s)\right\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)} + \lambda\alpha\left\|u_m(s)\right\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}\right) ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|u_m(t)\right|^2 + \mu C_1\int_0^t \left\|u_m(s)\right\|^2 ds + \frac{1}{2}\lambda\alpha\int_0^t \left\|u_m(s)\right\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} ds \leq \qquad (5.20)\\
&\leq \frac{1}{2}\left|u_{0m}\right|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda\alpha}\right)^{\frac{p'}{p}}\int_0^t \left(\left\|f(s)\right\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)}\right) ds.
\end{aligned}$$

De la dernière inégalité on obtient

$$\left|u_m(t)\right|^2 \leq \left|u_{0m}\right| + \left(\frac{1}{\lambda\alpha}\right)^{\frac{p'}{p}}\int_0^t \left\|f(s)\right\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)} ds. \tag{5.21}$$

De (5.8) et (5.16), on conclut qu'il existe une constante $C_2 > 0$ telle que :

$$\left|u_{0m}\right| + \left(\frac{1}{\lambda\alpha}\right)^{\frac{p'}{p}}\int_0^t \left\|f(s)\right\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)} ds \leq C_2.$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Gronwall, on en déduit l'existence d'une constante positive C indépendante de m et de $[0, t_m]$ telle que

$$\left|u_m(t)\right| \leq C \text{ (indépendante de } m). \tag{5.22}$$

De (5.20) on en déduit

$$\int_0^t \left(\|u_m(s)\|^2 + \|u_m(s)\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \right) ds \leq C \ \text{(indépendante de } m). \tag{5.23}$$

De cette dernière estimation (5.23), on conclut que t est indépendant de m, et par conséquent $\forall m,\ t_m = T$.

En passant à la limite lorsque $m \to \infty$, de (5.22) on conclut que

$$(u_m) \ \text{est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \cap L^p(0,T;V). \tag{5.24}$$

Etape 3 :

De (5.24), on déduit qu'on peut extraire un sous suite $\left(u_\mu\right)$ de (u_m) telle que :

$$u_\mu \longrightarrow u \ \text{faible étoile dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \tag{5.25}$$

$$u_\mu \longrightarrow u \ \text{faible étoile dans } L^p(0,T;V), \tag{5.26}$$

$$u_\mu(T) \longrightarrow \zeta \ \text{faible étoile dans } L^2(\Omega). \tag{5.27}$$

Aussi et comme $\|\mathcal{A}v\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C\|v\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)}$, donc $\mathcal{A}(u_m)$ demeure dans un borné de $L^{p'}\left(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)\right)$, on a alors

$$\mathcal{A}\left(u_\mu\right) \longrightarrow \chi \ \text{faible étoile dans } L^{p'}\left(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)\right). \tag{5.28}$$

Soit j fixé, et $\mu > j$, alors d'après (5.17) on obtient

$$\left(u'_\mu(t),w_j\right) + \mu a\left(u_\mu(t),w_j\right) + \lambda\left(\mathcal{A}u_\mu(t),w_j\right) = \left(f(t),w_j\right). \tag{5.29}$$

De (5.25), on a

$$\begin{cases} a(u_\mu(t),w_j) \longrightarrow a(u(t),w_j) \ \text{faible étoile dans } L^\infty(0,T), \\ \left(\mathcal{A}u_\mu(t),w_j\right) \to \left(\chi,w_j\right) \ \text{faible étoile dans } L^\infty(0,T), \\ (u'_\mu(t),w_j) = \dfrac{d}{dt}(u_\mu(t),w_j) \longrightarrow (u'(t),w_j) \ \text{faible étoile dans } D'(0,T). \end{cases}$$

Par passage à la limite de (5.15), on déduit

$$\begin{cases} (u'(t),v) + \mu a(u(t),v) + \lambda(\chi,v) = (f(t),v), \ \forall v \in V, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Par comparaison avec le problème variationnel (5.10), on conclut que

$$u' - \mu div\sigma(u) + \lambda\chi = f, \tag{5.30}$$

et

$$u(T) = \zeta. \tag{5.31}$$

Pour compléter la preuve du théorème (Théorème 5.1) nous allons besoin de prouver que $\chi = \mathcal{A}(u(t))$.

En effet, comme $\mathcal{A}$ est monotone alors on a

$$X_\mu = \int_0^T ((\mathcal{A}\left(u_\mu(t)\right) - \mathcal{A}(v(t)), u_\mu(t) - v(t)\right) \geq 0 \ \ \forall v \in L^p(0,T;V). \tag{5.32}$$

En utilisant (5.15) pour déduire que

$$\lambda \int_0^T \left(\mathcal{A}\left(u_\mu(t)\right), u_\mu(t)\right) dt = \int_0^T \left(f, u_\mu\right) dt - \mu \int_0^T a\left(u_\mu(t), u_\mu(t)\right) dt + \frac{1}{2}\left|u_{0\mu}\right|^2 - \frac{1}{2}\left|u_\mu(T)\right|^2.$$

Par conséquent

$$X_\mu = \int_0^T \left(f, u_\mu\right) dt - \mu C_1 \int_0^T \left\|u_\mu(t)\right\|^2 dt + \frac{1}{2}\left|u_{0\mu}\right|^2 - \frac{1}{2}\left|u_\mu(T)\right|^2 -$$
$$-\lambda \int_0^T \left(\mathcal{A}\left(u_\mu(t)\right), v\right) dt - \lambda \int_0^T \left(\mathcal{A}(v), u_\mu - v\right) dt.$$

On sait que

$$\begin{cases} \liminf_\mu \left|u_\mu(T)\right|^2 \geq |u(T)|^2, \\ \liminf_\mu \int_0^T \left\|u_\mu(t)\right\|^2 dt \geq \int_0^T \|u(t)\|^2 dt, \end{cases}$$

donc

$$\limsup_\mu X_\mu \leq \int_0^T (f, u)\, dt - \mu C_1 \int_0^T \|u(t)\|^2 dt + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \tag{5.33}$$
$$-\frac{1}{2}|u(T)|^2 - \lambda \int_0^T (\chi, v)\, dt - \lambda \int_0^T (\mathcal{A}(v), u - v)\, dt.$$

Par intégrations par parties sur $(0, T)$ de (5.30) on trouve

$$\int_0^T (f, u)\, dt - \mu C_1 \int_0^T \|u(t)\|^2 dt + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 = \lambda \int_0^T (\chi, u)\, dt.$$

Ceci joint aux (5.32) et (5.33) nous donnent

$$\lambda \int_0^T (\chi - \mathcal{A}(v), u - v)\, dt \geq 0. \tag{5.34}$$

Pour $w \in L^p(0,T;V)$, on prend $v = u - \theta w$, $\theta > 0$, alors (5.34) donne

$$\int_0^T (\chi - \mathcal{A}(u - \theta w), w)\, dt \geq 0, \text{ pour tout } \theta > 0. \tag{5.35}$$

En utilisant la hémicontinuité et passant à la limite quand $\theta \to 0$ alors de (5.35) il vient

$$\int_0^T (\chi - \mathcal{A}(u), w)\, dt \geq 0 \quad \forall w \in L^p(0, T; V),$$

ce qui implique que

$$\chi = \mathcal{A}(u).$$

De (5.29) il découle

$$\frac{d}{dt}(u(t), w_j) + \mu a(u(t), w_j) + \lambda\left(\mathcal{A}u(t), w_j\right) = \left(f(t), w_j\right).$$

Pour tout $w_j \in V_m$ et tout $1 \leq j \leq m$.

En utilisant la densité de V_m dans V on trouve que

$$(u'(t), v) + \mu a(u(t), v) + \lambda(\mathcal{A}u(t), v) = (f(t), v) \quad \forall v \in V. \tag{5.36}$$

D'où il résulte que u satisfait (5.2).

Vérifions que (5.13) est satisfaite.

De (5.2) on a

$$u' = f + \mu div\sigma(u) - \lambda\mathcal{A}u.$$

Par passage à la limite de (5.12) il résulte que

$$\varepsilon(u) \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right).$$

Comme F est continue, alors on a

$$F(\varepsilon(u)) \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right).$$

Par conséquent

$$divF(\varepsilon(u)) = div\sigma(u) \in L^2(0, T; V').$$

Comme u vérifie (5.12), alors de (5.7) il résulte

$$\int_0^T \|\mathcal{A}(u)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}^{p'} dx \leq C \int_0^T \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{\frac{p(p-1)}{p-1}} dx \leq C \int_0^T \|u\|_V^p\, dx \leq C.$$

Utilisons le fait que $\mathcal{A}(u) \in L^{p'}\left(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)\right)$ pour déduire

$$u' \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)) + L^{p'}(0, T; V') + L^{p'}\left(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)\right),$$

Ce qui montre que

$$u' \in L^{p'}\left(0, T; V' \cap W^{-1,p'}(\Omega)\right),$$

D'où (5.13), et donc $u(0)$ et $u(T)$ ont un sens et que $u(0) = u_0$ et $u(T) = \zeta$. ■

5.2.2 Unicité

Théorème 5.2 *Sous les hypothèses (5.6)–(5.9), la solution u obtenue dans Théorème 5.1 est unique.*

Démonstration. Soient u, v deux solutions du problème (5.2)–(5.5). En posant $w = u - v$, il vient

$$w' - \mu divF(\varepsilon(w)) + \lambda\left(\mathcal{A}u - \mathcal{A}v\right) = 0, \tag{5.37}$$

$$w(0) = 0, \tag{5.38}$$

$$w = 0 \text{ sur } \Sigma_1,\ \sigma(w)\eta = 0 \text{ sur } \Sigma_2, \tag{5.39}$$

$$w \in L^\infty(0, T; V). \tag{5.40}$$

Multiplions les deux membres de (5.37) par w, alors on aura après utilisation de la formule de Green et les conditions (5.39) :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|w(t)\right|^2 + \mu a\left(w(t), w(t)\right) + \lambda\left(\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v\right) = 0. \tag{5.41}$$

En utilisant (5.6) et (5.7), pour tout $u, v \in L^\infty(0, T; V)$ on a les inégalités suivantes

$$\begin{cases} a\left(w(t), w(t)\right) \geq 0, \\ \left(\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v\right) \geq 0. \end{cases}$$

Par conséquent de (5.41) on déduit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|w(t)\right|^2 \leq 0.$$

D'où $w = 0$. ■

5.3 Comportement à l'infini en t

Dans cette section et sous certaines conditions supplémentaire sur les données nous allons analyser le comportement de la solution lorsque $t \to \infty$ et nous allons montrer que la solution u reste bornée lorsque $t \to \infty$.

Supposons que f vérifie

$$f \in L^{p'}_{loc}\left(0, \infty; W^{-1,p'}(\Omega)\right), \tag{5.42}$$

$$\int_t^{t+1} \left\|f(t)\right\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C_2\ \forall t \geq 0. \tag{5.43}$$

Grâce aux (Théorème 5.1) et (Théorème 5.2), pour tout $T > 0$ fini il existe une solution unique u du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \mu div\sigma(u) + \lambda\mathcal{A}u = f,\ x \in \Omega,\ t \in \left]0, T\right[, \\ u(x, 0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \tag{5.44}$$

Comme T est fini quelconque on a

$$u \in L^p_{loc}\left(0, \infty; W^{1,p}(\Omega)\right).$$

Lorsque $t \to \infty$ nous allons démontrer le résultat suivant

Théorème 5.3 *Supposons que (5.7), (5.42), (5.43) sont satisfaites. Soit u la solution unique de (5.44). Alors il existe deux constantes C_3, C_4 telles que*

$$|u(t)| \le C_3 \text{ quand } t \to \infty, \tag{5.45}$$

$$\int_t^{t+1} \|u(\zeta)\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}\, d\zeta \le C_4, \ \forall t \ge 0. \tag{5.46}$$

Démonstration. On subdivise l'intervalle $[0,\infty[$ par les intervalles $[j-1, j[\, , j = 1, 2, ...$

En utilisant le fait que la fonction $t \to u(t)$ est continue de $[0,\infty[\to \mathcal{H}$, on peut définir $\left|u\left(t_j\right)\right|$ comme suit :

$$\left|u\left(t_j\right)\right| = \sup_{t\in[j-1,j[} |u(t)|\,, \text{pour } t_j \in [j-1, j]\,,\ j = 1, 2, ... \tag{5.47}$$

On déduit de (5.2) que, pour tout $s, t : 0 < s < t$ on a :

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2 - \frac{1}{2}|u(s)|^2 + \mu \int_s^t (F\varepsilon(u), \varepsilon(u))\, d\zeta + \lambda \int_s^t (\mathcal{A}(u), u)\, d\zeta = \int_s^t (f, u)\, d\zeta. \tag{5.48}$$

En utilisant (5.6), (5.7) et (5.11), de (5.48) il vient

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2 - \frac{1}{2}|u(s)|^2 + \mu C_1 \int_s^t \|u(\zeta)\|^2 d\zeta + \lambda\alpha \int_s^t \|u(\zeta))\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}\, d\zeta \le \tag{5.49}$$

$$\le \int_s^t (f, u)\, d\zeta \le \left(\int_s^t \left\|f(\zeta)\right\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)} d\zeta\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_s^t \|u(\zeta))\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}\, d\zeta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour des raisons purement techniques on pose

$$M = \left(\left(\frac{3C_2}{(\lambda\alpha)^{p'}}\right)^{\frac{2}{p}} d^2 + \frac{6C_2}{(\lambda\alpha)^{\frac{p'}{p}}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.50}$$

où d est la constante d'injection $|v| \le d\,\|v\|$, et C_2 est donnée par (5.43).

On va montrer que

$$\left|u\left(t_{j+2}\right)\right| \le \max\left(\left|u\left(t_j\right)\right|, M\right),\ \text{pour tout } j = 1, 2, ... \tag{5.51}$$

Si $\left|u\left(t_{j+2}\right)\right| \le \left|u\left(t_j\right)\right|$ la preuve est évidente.

Supposons que $\left|u\left(t_{j+2}\right)\right| > \left|u\left(t_j\right)\right|$, alors on a

$$\frac{1}{2}\left|u(t_{j+2})\right|^2 + \mu C_1 \int_{t_j}^{t_{j+2}} \|u(\zeta)\|^2 d\zeta + \lambda\alpha \int_{t_j}^{t_{j+2}} \|u(\zeta))\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}\, d\zeta > \tag{5.52}$$

$$> \frac{1}{2}\left|u(t_j)\right|^2 + \mu C_1 \int_{t_j}^{t_{j+2}} \|u(\zeta)\|^2 d\zeta + \lambda\alpha \int_{t_j}^{t_{j+2}} \|u(\zeta))\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}\, d\zeta.$$

Pour $t = t_{j+2}$ et $s = t_j$, de (5.49) il découle

$$\frac{1}{2}\left|u(t_{j+2})\right|^2 + \mu C_1 \int_{t_j}^{t_{j+2}} \|u(\zeta)\|^2 \, d\zeta + \lambda\alpha \int_{t_j}^{t_{j+2}} \|u(\zeta))\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \, d\zeta \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left|u(t_j)\right|^2 + \int_{t_j}^{t_{j+2}} (f,u) \, d\zeta \leq \tag{5.53}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left|u(t_j)\right|^2 + \left(\int_{t_j}^{t_{j+2}} \left\|f(\zeta)\right\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)} d\zeta\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{t_j}^{t_{j+2}} \|u(\zeta))\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \, d\zeta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En combinant (5.52) et (5.53) on en déduit

$$\lambda\alpha \int_{t_j}^{t_{j+2}} \|u(\zeta))\|^p \, d\zeta < \left(\int_{t_j}^{t_{j+2}} \left\|f(\zeta)\right\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)} d\zeta\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{t_j}^{t_{j+2}} \|u(\zeta))\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \, d\zeta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'où il vient

$$\lambda\alpha \left(\int_{t_j}^{t_{j+2}} \|u(\zeta))\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \, d\zeta\right)^{\frac{1}{p'}} < \left(\int_{t_j}^{t_{j+2}} \left\|f(\zeta)\right\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)} d\zeta\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{5.54}$$

En utilisant le fait que $t_{j+2} - t_j \leq 3$ de (5.43) il résulte

$$\int_{t_j}^{t_{j+2}} \left\|f(\zeta)\right\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)} d\zeta < 3C_2.$$

Et par conséquent, de (5.54) il s'ensuit

$$\int_{t_j}^{t_{j+2}} \|u(\zeta))\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \, d\zeta < \frac{3C_2}{(\lambda\alpha)^{p'}}. \tag{5.55}$$

Comme $t_{j+2} - t_j \geq 1$, de (5.55) on conclut qu'il existe $\tau \in \left[t_j, t_{j+2}\right[$ tel que

$$\|u(\tau)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \left(\frac{3C_2}{(\lambda\alpha)^{p'}}\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5.56}$$

d'où nous déduisons

$$|u(\tau)| \leq \left(\frac{3C_2}{(\lambda\alpha)^{p'}}\right)^{\frac{1}{p}} d. \tag{5.57}$$

En utilisant (5.55), pour $t = t_{j+2}$ et $s = \tau$, de (5.49) il vient

$$\frac{1}{2}\left|u(t_{j+2})\right|^2 \leq \frac{1}{2}|u(\tau)|^2 + (3C_2)^{\frac{1}{p'}} \frac{(3C_2)^{\frac{1}{p}}}{(\lambda\alpha)^{\frac{p'}{p}}},$$

Substituons (5.57) dans la dernière inégalité

$$\left|u(t_{j+2})\right|^2 \leq \left(\frac{3C_2}{(\lambda\alpha)^{p'}}\right)^{\frac{2}{p}} d^2 + \frac{6C_2}{(\lambda\alpha)^{\frac{p'}{p}}} = M^2.$$

D'où la preuve de (5.51) et de plus on a

$$|u(t)| \leq \max\left(\max_{t\in[t_j,t_{j+2}[} \left|u\left(t_j\right)\right|, M\right) = C_3.$$

Ce qui achève la preuve de l'estimation (5.45).

D'un autre coté, en appliquant (5.49) avec $s = t + 1$, on déduit

$$\lambda\alpha \int_t^{t+1} \|u(\zeta)\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}\, d\zeta \leq \frac{1}{2}C_3^2 + C_2^{\frac{1}{p'}} \left(\int_t^{t+1} \|u(\zeta)\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}\, d\zeta\right)^{\frac{1}{p}},$$

d'où par l'inégalité de Young il vient que

$$\int_t^{t+1} \|u(\zeta)\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}\, d\zeta \leq C_4,$$

et par conséquent la preuve de l'estimation (5.46). ■

5.4 Exemples

1. Dans le cas où $\mu = 0$, $\lambda = 1$ et

$$\mathcal{A}u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + |u|^{p-2}\, u,$$

   de (5.2)–(5.5) on obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + |u|^{p-2}\, u = f,\ x\in\Omega,\ t\in\,]0,T[\,, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x\in\Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P1}$$

   On note que l'opérateur $-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + |u|^{p-2}\, u$ est le prolongement de l'opérateur $-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ à $W^{1,p}(\Omega)$ qui applique $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$.

2. Si on pose $\sigma(u) = \nabla u$ et $\mathcal{A}u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ avec $\lambda = \mu = 1$, alors le problème (5.2)–(5.5) se ramène au problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \text{ dans } \Omega\times(0,T)\,, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x\in\Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P2}$$

3. Si on pose $\sigma(u) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}$ où

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \in C^1\left(\overline{\Omega} \times (0,T)\right), \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\,\zeta_i\zeta_j \geq m\,|\zeta|^2\,,\ m > 0,\ \zeta_i \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et

$$\mathcal{A}u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right),\ p \geq 2,$$

alors le problème (5.2)–(5.5) devient

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \text{ dans } Q, \\ u(x,0) = u_0(x),\ \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P3}$$

Tous les résultats des Théorème 5.1 et Théorème 5.3 sont valables pour ces problèmes particuliers P1–P3.

CHAPITRE 6

EXISTENCE LOCALE ET DÉPENDANCE CONTINUE DE LA SOLUTION PAR RAPPORT AUX DONNÉES POUR UN PROBLÈME VISCOÉLASTIQUE NON LINÉAIRE.

Sommaire

6.1 Position du Problème et Hypothèses **70**
6.1.1 Position du Problème 70
6.1.2 Hypothèses 70
6.2 Formulation variationnelle **71**
6.3 Existence locale et unicité de la solution **72**
6.3.1 Existence locale des solutions 72
6.3.2 Unicité 79
6.4 Dépendance continue de la solution par rapport aux données **81**
6.5 Exemples **83**

Dans ce chapitre nous considérons un problème aux limites hyperbolique non linéaire associé aux équations viscoélastiques non linéaires :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - div\sigma\left(u\right) + \left|u\right|^{\rho} u = f, \text{ dans } \Omega \times (0,T)\,, \\ \sigma\left(u\right) = \lambda F\left(\varepsilon(u)\right) + \mu G\left(\varepsilon(u')\right), \text{ dans } \Omega \times (0,T)\,, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u'(x,0) = u_1(x),\ x \in \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0,T)\,,\ \sigma(u)\eta = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0,T)\,, \end{cases} \tag{6.1}$$

où F, et G sont des fonctions non linaires et ρ, λ, μ des nombres réels positifs.

Sous certaines hypothèses sur les données en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, la méthode de compacité et le théorème du monotonie, nous allons démontrer l'existence locale et l'unicité d'une solution faible. On termine par étudier la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

6.1 Position du Problème et Hypothèses

6.1.1 Position du Problème

Le problème non linéaire considéré dans ce chapitre consiste à chercher le couple (u, σ) solution du problème suivant :

Problem 6.1 *Trouver un champ des déplacements* $u : Q = \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$*et un champ des contraintes* $\sigma : Q = \Omega \times [0, T] \to \mathcal{S}_n$*, tels que*

$$u'' - div\sigma(u) + |u|^{\rho} u = f \text{ dans } Q, \ \rho > 0, \tag{6.2}$$

$$\sigma(u) = \lambda F(x, \varepsilon(u)) + \mu G(x, \varepsilon(u')) \text{ dans } Q, \tag{6.3}$$

$$\begin{cases} u = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \\ \sigma(u)\eta = 0 \text{ sur } \Sigma_2, \end{cases} \tag{6.4}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega, \\ u'(x, 0) = u_1(x) \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{6.5}$$

où u et f représentent le champ de déplacements et la densité des forces volumiques, respectivement. L'équation (6.2), sans le terme source $|u|^{\rho} u$ est une équation d'évolution, "*div*" dénote l'opérateur divergence pour le tenseur des contraintes $\sigma = (\sigma_{ij}), i, j = 1, 2, ..., n$, la relation (6.3) représente la loi de comportement du type viscoélastique. Les relations (6.4) et (6.5) sont les conditions les conditions aux limites Dirichlet-Neumann et les conditions initiales, respectivement . Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas la dépendance explicite des fonctions u et σ par rapport à $x \in \Omega$ et $t \in (0, T)$.

6.1.2 Hypothèses

Pour l'étude de ce problème, nous considérons les hypothèses suivantes : Nous supposons que l'opérateur élastique non linéaire $F : \Omega \times S_n \to S_n$ satisfait les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} (a) \text{ Il existe } m_1 > 0 \text{ telle que} \\ (F(x, \varepsilon_1) - F(x, \varepsilon_2)) . (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_1 |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2, \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_n, \text{ p.p. } x \in \Omega; \\ (b) \text{ Il existe } L > 0 \text{ telle que} \\ |F(x, \varepsilon_1) - F(x, \varepsilon_2)| \leq L |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|, \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_n, \text{p.p. } x \in \Omega; \\ (c) \text{ L'application } x \to F(x, \varepsilon) \\ \text{est mesurable, au sens de Lebesgue, dans } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in S_n; \\ (d) \ F(x; 0) = 0. \end{cases} \tag{6.6}$$

L'opérateur viscoélastique non linéaire $G : \Omega \times S_n \to S_n$ vérifie :

$$\begin{cases} (a) \text{ Il existe } m_2 > 0 \text{ telle que} \\ (G(\varepsilon_1) - G(\varepsilon_2)) . (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_2 |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2, \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_n, \text{ a.e. } x \in \Omega; \\ (b) \text{ L'application } x \to G(x, \varepsilon) \\ \text{est mesurable, au sens de Lebesgue, sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in S_n. \end{cases} \tag{6.7}$$

Aussi on suppose que les donnée f, u_0 et u_1 vérifient :

$$f \in L^2(Q), \tag{6.8}$$

$$u_0 \in V \cap L^p(\Omega),\ p = \rho + 2, \tag{6.9}$$

$$u_1 \in L^2(\Omega). \tag{6.10}$$

En se référant au [54, 55], il est facile de vérifier le résultat suivant.

Lemme 6.1 *Supposons que les hypothèses (6.6) et (6.7) sont vérifiées. Alors les fonctions, notées encore $F, G : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, définies par*

$$F(\varepsilon(.)) = F(., \varepsilon(.)),\ \ G(\varepsilon(.)) = G(., \varepsilon(.)),\ p.p.\ dans\ \Omega$$

sont continues sur $\mathcal{H}$.

6.2 Formulation variationnelle

Lemme 6.2 *Sous les hypothèses (6.6)-(6.10), le problème (6.1) est équivalent au problème variationnel suivant :*

$$(P.V) : \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \cap L^p(\Omega),\ p = \rho + 2 \text{ tel que pour tout } v \in V \cap L^p(\Omega) \text{ on a} \\ (u'', v) + \lambda a(u, v) + \mu \left(G(\varepsilon(u')), \varepsilon(v)\right) + (|u|^\rho u, v) = (f, v), \\ u(x, 0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \\ u'(x, 0) = u_1(x),\ x \in \Omega, \end{cases}$$

où

$$V = \left\{v \in H^1(\Omega), v = 0 \ sur\ \Gamma_1\right\}$$

et

$$a(u, v) = \int_\Omega F(\varepsilon(u))\, \varepsilon(v) dx.$$

Lemme 6.3 *Sous les hypothèses (6.6), $\|u\|_1 = a(u, u)^{\frac{1}{2}}$ est une semi norme équivalente à la norme $\|u\|$ sur $H^1(\Omega)$.*

Démonstration. En utilisant la remarque 1.3., il vient

$$\begin{aligned} |a(u, u)| &\leq \left|\int_\Omega F(\varepsilon(u))\varepsilon(u)dx\right| \leq \int_\Omega |F(\varepsilon(u))|\, |\varepsilon(u)|\, dx \leq \\ &\leq L \int_\Omega |\varepsilon(u)|^2\, dx = L\, |\varepsilon(u)|^2 \leq C\, \|u\|^2. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Korn on obtient

$$a(u, u) \geq m \int_\Omega |\varepsilon(u)|^2\, dx \geq C_2'\, \|u\|^2$$

Donc

$$C'^{\frac{1}{2}}\, \|u\| \leq (a(u, u))^{\frac{1}{2}} \leq C^{\frac{1}{2}}\, \|u\|,\ \forall u \in H^1(\Omega).$$

■

6.3 Existence locale et unicité de la solution

Notre but principal dans cette section est, en se basant sur l'approximation de Faedo-Galerkin et l'argument de compacité, de prouver l'existence et l'unicité d'une solution faible.

6.3.1 Existence locale des solutions

Théorème 6.1 *Supposons que les hypothèses (6.6)–(6.10) sont vérifiées. Alors il existe au moins une solution du problème (6.1) pour T fini quelconque. En outre, la solution satisfait :*

$$u \in L^{\infty}(0,T;V \cap L^{p}(\Omega)),\ p = \rho + 2, \tag{6.11}$$

$$u' \in L^{\infty}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right) \cap L^{2}\left(0,T;V\right). \tag{6.12}$$

Supposons que le résultat du Théorème 6.1 est vérifié, alors le résultat suivant a lieu.

Lemme 6.4 *Supposons que (6.6)–(6.10) sont vérifiées. Alors les conditions initiales (6.5) ont un sens.*

Démonstration. Utilisons les hypothèses (6.6)–(6.10), d'après le Théorème 6.1, on a

$$u \in L^{2}\left(0,T;V\right) \text{ et } u' \in L^{2}\left(0,T;V\right).$$

En utilisant (6.11) et (6.12) on déduit que

$$\varepsilon(u), \varepsilon(u') \in L^{\infty}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right).$$

Donc, comme F et G sont continues et $L^{2}(\Omega) \subset V'$, on a $F\left(\varepsilon(u)\right), G\left(\varepsilon(u')\right) \in L^{\infty}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right)$.

Alors,

$$div\sigma\left(u\right) = div\left(\lambda F\left(\varepsilon(u)\right) + \mu G\left(\varepsilon(u')\right)\right) \in L^{\infty}\left(0,T;V'\right).$$

Aussi, on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\left|\left(|u|^{\rho} u\right)\right|^{p'} dx &= \int_{\Omega}|u|^{(\rho+1)p'} dx = \int_{\Omega}|u|^{(\rho+1)\frac{p}{p-1}} dx = \\ &= \int_{\Omega}|u|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} dx = \int_{\Omega}|u|^{p} dx = \|u\|^{p}_{L^{p}(\Omega)},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$|u|^{\rho} u \in L^{\infty}\left(0,T;L^{p'}(\Omega)\right),\ \forall u \in L^{p}(\Omega).$$

Donc, de (6.2) il vient

$$u'' = f + div\sigma\left(u\right) - |u|^{\rho} u \in L^{2}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right) + L^{\infty}\left(0,T;V' + L^{p'}(\Omega)\right),$$

où V' est l'espace dual de$V$ et

$$V' + L^{p'}(\Omega) = \left\{u + v;\ u \in V' \text{et } v \in L^{p'}(\Omega)\right\}.$$

Puisque $L^2(\Omega) \subset V' + L^{p'}(\Omega)$ alors dans le cas particulier nous avons

$$u'' \in L^2\left(0, T; V' + L^{p'}(\Omega)\right). \tag{6.13}$$

Renvoyons à [38] et joint au (6.12) il en résulte que

$$u' : [0, T] \longrightarrow V' + L^{p'}(\Omega)$$

est continue, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $[0, T]$, donc $u'(0)$ est bien défini , par conséquent la deuxième condition dans (6.5) a un sens. ■

Démonstration du Théorème 6.1.

Etape 1 : Solution approchée.

On introduit une suite (w_n) des fonctions ayant les propriétés suivantes :

* $\forall j; w_j \in V \cap L^p(\Omega)$;

* La famille $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ est linéairement indépendante ;

* L'espace $V_m = span\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ engendré par la famille $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ est dense dans $V \cap L^p(\Omega)$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $(\mathcal{P}_{m\mathbf{4}})$ le problème suivant ; trouver $u_m = u_m(t)$ dans V_m sous la forme

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} K_{jm}(t) w_j. \tag{6.14}$$

Les K_{jm} sont déterminés par l'expression suivante :

$$\begin{gathered}(u_m''(t), w_j) + \lambda a(u_m(t), w_j) + \mu\left(G\left(\varepsilon(u_m'(t))\right), \varepsilon(w_j)\right) + \\ +(|u_m|^\rho u_m(t), w_j) = (f(t), w_j), \quad 1 \le j \le m,\end{gathered} \tag{6.15}$$

qui est un système d'équations différentielles non linéaires du second ordre sur $\mathbb{R}^m$ et sera complété par les conditions initiales suivantes :

$$u_m(0) = u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im} w_i \overset{m \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} u_0 \text{ dans } V \cap L^p(\Omega), \tag{6.16}$$

$$u_m'(0) = u_{1m} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{im} w_i \overset{m \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} u_1 \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{6.17}$$

Comme la famille $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ est linéairement indépendante, et d'après les arguments standards des systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires nous concluons que le système (6.14)-(6.17) possède au moins une solution.

D'où l'existence d'une suite de solutions (u_m) du système dans $[0, t_m]$ telles que :

$$u_m \in L^2(0, t_m; V_m), \ u_m' \in L^2(0, t_m; V_m).$$

Les estimations à priori qui suivent montreront que t_m est indépendant de m.

Etape 2 : Estimations sur $(u_m)_m$.

On multiplie l'équation (6.15) d'indice j par $K'_{jm}(t)$ et l'on somme en j il vient

$$\begin{gathered}(u_m''(t), u_m'(t)) + \lambda a(u_m(t), u_m'(t)) + \mu\left(G\left(\varepsilon(u_m'(t))\right), \varepsilon(u_m'(t))\right) + \\ + (|u_m|^\rho u_m(t), u_m'(t)) = (f(t), u_m'(t)).\end{gathered} \tag{6.18}$$

Comme $u_m \in L^2(0, t_m; V_m)$, $u_m' \in L^2(0, t_m; V_m)$, donc $\varepsilon(u_m)$, $\varepsilon(u_m') \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$.
Du Lemme 6.1 il vient

$$F(\varepsilon(u_m)),\ F(\varepsilon(u_m')) \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right).$$

Il est facile d'avoir que

$$\frac{d}{dt} a(u_m(t), u_m(t)) = (F\varepsilon(u_m(t)), \varepsilon(u_m'(t))) + \left(\frac{d}{dt}(F\varepsilon(u_m(t))), \varepsilon(u_m(t))\right).$$

Utilisant le Lemme 6.3 il découle que

$$(F(\varepsilon(u_m(t))), \varepsilon(u_m'(t))) = \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_1^2 - \left(\frac{d}{dt}F(\varepsilon(u_m(t))), \varepsilon(u_m(t))\right).$$

Grâce aux inégalités de Cauchy -Schwarz et Hölder et les hypothèses (6.6) on conclut que

$$\begin{aligned} \left|\left(\frac{d}{dt}F(\varepsilon(u_m(t))), \varepsilon(u_m(t))\right)\right| &\leq L\left|\varepsilon(u_m'(t))\right| |\varepsilon(u_m(t))| \leq \\ &\leq C_3 \left\|u_m'(t)\right\| \|u_m(t)\|. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Aussi, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m'(t)\right|^2 &= (u_m''(t), u_m'(t)), \\ \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u_m(x,t)\|_{L^p(\Omega)}^p &= (|u_m|^\rho u_m(t), u_m'(t)),\ p = \rho + 2, \end{aligned}$$

Moyennant les hypothèses (6.7), il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$(G(\varepsilon(u_m'(t))), \varepsilon(u_m'(t))) \geq C_2 \left\|u_m'(t)\right\|^2.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Young et (6.19) l'équation (6.18) devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left|u_m'(t)\right|^2 + \lambda C_1 \|u_m(t)\|^2\right] + \mu C_2 \left\|u_m'(t)\right\|^2 + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u_m(x,t)\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \\ \leq \left|(f(t)\right| \left|u_m'(t)\right| + C_3 \left\|u_m'(t)\right\| \|u_m(t)\| \leq \\ \leq \frac{1}{2}\left|f(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|u_m'(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\mu C_2 \left\|u_m'(t)\right\|^2 + \frac{1}{2}\frac{C_3^2}{\mu C_2}\|u_m(t)\|^2. \end{aligned} \tag{6.20}$$

En intégrant (6.20) sur $(0, t)$, nous déduisons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left|u_m'(t)\right|^2 + \lambda C_1 \|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\mu C_2 \int_0^t \left\|u_m'(s)\right\|^2 ds + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \\ \leq \frac{1}{2}|u_{1m}|^2 + \lambda C_1 \|u_{0m}\|^2 + \frac{1}{p}\|u_{0m}\|_{L^p(\Omega)}^p + \\ + \frac{1}{2}\int_0^t \left|f(s)\right|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \left|u_m'(s)\right|^2 ds + C_4 \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds, \end{aligned} \tag{6.21}$$

où $C_4 = \frac{1}{2}\frac{C_3^2}{\mu C_2}$.

En utilisant les hypothèses (6.17), (6.16) et (6.8) alors il existe une constante $C_5 > 0$ telle que

$$\frac{1}{2}\left|u_{1m}\right| + \lambda C_1 \left\|u_{0m}\right\|^2 + \frac{1}{p}\left\|u_{0m}\right\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{2}\int_0^t \left|f(s)\right|^2 ds \leq C_5.$$

D'où (6.21) devient

$$\left|u_m'(t)\right|^2 + \left\|u_m(t)\right\|^2 + \int_0^t \left\|u_m'(s)\right\|^2 ds + \left\|u_m(t)\right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \tag{6.22}$$

$$\leq C_6 + C_7 \int_0^t \left(\left|u_m'(s)\right|^2 + \left\|u_m(s)\right\|^2\right) ds,\ \forall m \in \mathbb{N}^*,$$

où $C_6 = \frac{C_5}{\min\left(\frac{1}{2},\lambda C_1,\frac{1}{2}\mu C_2,\frac{1}{p}\right)}$ et $C_7 = \frac{\max\left(\frac{1}{2},C_4\right)}{\min\left(\frac{1}{2},\lambda C_1,\frac{1}{2}\mu C_2,\frac{1}{p}\right)}$.

Par conséquent pour tout $t \in (0, T)$ on a

$$\left|u_m'(t)\right|^2 + \left\|u_m(t)\right\|^2 \leq C_6 + C_7 \int_0^t \left(\left|u_m'(s)\right|^2 + \left\|u_m(s)\right\|^2\right) ds$$

Appliquons le Lemme de Gronwall pour déduire

$$\left|u_m'(t)\right| + \left\|u_m(t)\right\| \leq C \text{ (indépendant de } m). \tag{6.23}$$

De (6.22) on conclut

$$\left\|u_m(t)\right\|_{L^p(\Omega)} + \int_0^t \left\|u_m'(s)\right\|^2 ds \leq C \text{ (indépendant de } m). \tag{6.24}$$

D'où, nous déduisons l'indépendance de t_m par rapport à m, et on peut maintenant écrire $t_m = T$.

En passant à la limite quand $m \longrightarrow \infty$, de (6.23) et (6.24) on conclut que

$$\begin{cases} (u_m) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty\left(0, T; V \cap L^p(\Omega)\right), \\ (u_m') \text{ demeure dans un borné de } L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, T; V\right). \end{cases} \tag{6.25}$$

Etape 3 : Passage à la limite .

De (6.25), on déduit qu'on peut extraire une sous suite $\left(u_\mu\right)$ de (u_m) telle que

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^\infty\left(0, T; V \cap L^p(\Omega)\right) \text{ faible étoile,} \tag{6.26}$$

$$u_\mu' \longrightarrow u' \text{ dans } L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, T; V\right) \text{ faible étoile.} \tag{6.27}$$

Il résulte en particulier de (6.25), que les suites (u_m), (u_m') sont bornées dans $L^2(0, T; V) \subset L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q)$ et $L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, T; V\right) \subset L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q)$, respectivement.

En particulier (u_m) demeure dans un borné de $H^1(Q)$.

On sait, voir [39], que l'injection de $H^1(Q)$ dans $L^2(Q)$ est compact ce qui nous permet de supposer que la sous suite $\left(u_\mu\right)$ extraite vérifie, outre que (6.26) et (6.27)

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort.} \tag{6.28}$$

De (6.25) il résulte que $(|u_m|^\rho\, u_m)$ demeure dans un borné de $L^\infty\left(0,T;L^{p'}(\Omega)\right)$, alors, il est facile de montrer que,

$$\left|u_\mu\right|^\rho u_\mu \to |u|^\rho\, u \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^{p'}(\Omega)\right) \text{ faible étoile,} \tag{6.29}$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ et $p=\rho+2$.

Soit j fixé, et $\mu>j$, alors d'après (6.15) on a

$$\begin{aligned}\left(u''_\mu(t),w_j\right)+\lambda a\left(u_\mu(t),w_j\right)+\mu\left(-divG\left(\varepsilon(u'_\mu(t))\right),w_j\right)+\\ +\left(\left|u_\mu\right|^\rho u_\mu(t),w_j\right)=\left(f(t),w_j\right).\end{aligned} \tag{6.30}$$

Par conséquent, (6.26) et (6.27) implique

$$\begin{cases} a(u_\mu,w_j)\longrightarrow a(u,w_j) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible étoile,}\\ (u'_\mu,w_j)\longrightarrow (u',w_j) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible étoile,}\\ \left(-divG\left(\varepsilon(u'_\mu(t))\right),w_j\right)\to\left(\chi,w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible étoile.}\end{cases}$$

Et

$$\left(u''_\mu(t),w_j\right)\longrightarrow\left(u''(t),w_j\right) \text{ dans } \mathcal{D}'(0,T).$$

Aussi, de (6.29) on a

$$\left(\left|u_\mu\right|^\rho u_\mu,w_j\right)\longrightarrow\left(|u|^\rho\, u,w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible étoile.}$$

On déduit donc de (6.30) que

$$(u''(t),w_j)+\lambda a(u(t),w_j)+\mu\left(\chi,w_j\right)+\left(|u|^\rho\, u(t),w_j\right)=\left(f(t),w_j\right).$$

Cela pour j fixé quelconque.

Donc d'après la densité de V_m dans $V\cap L^p(\Omega)$ on déduit

$$(u''(t),v)+\lambda a\,(u(t),v)+\mu\,(\chi,v)+(|u|^\rho\, u(t),v)=(f(t),v)\,,\ \forall v\in V\cap L^p(\Omega).$$

D'où il résulte que u vérifie

$$u''(t)-\lambda divF\,(\varepsilon(u))+\mu\chi+|u|^\rho\, u=f. \tag{6.31}$$

Etape 4 : Vérifications des conditions initiales.

D'après (6.26) et (6.27) on a, en particulier,

$$u_\mu(0)\to u(0) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

Par ailleurs, d'après (6.16) nous déduisons que

$$u_\mu(0)=u_{0\mu}\to u_0 \text{ dans } V\cap L^p(\Omega).$$

Donc, la première condition dans (6.5) est obtenue.

De l'autre côté, en utilisant (6.13) nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(u'_{\mu}(t),w_j\right) &\longrightarrow \left(f(t),w_j\right)-\lambda a\left(u(t),w_j\right)-\left(\chi,w_j\right) = \\ &= \frac{d}{dt}\left(u'(t),w_j\right) \text{ dans } L^2(0,T)+L^{p'}(0,T) \text{ faible étoile,}\end{aligned}$$

alors

$$\left(u'_{\mu}(0),w_j\right)=\left(u_{1\mu},w_j\right)\longrightarrow (u'(0),w_j).$$

Par conséquent

$$\left(u_1,w_j\right)=(u'(0),w_j)\ \forall j.$$

D'où la deuxième condition dans (6.5) est satisfaite.

Pour compléter la démonstration de l'existence on doit vérifier que :

$$\chi=-divG\left(\varepsilon(u'(t))\right)$$

Pour tout $\varphi\in L^2(0,T;V)$, si nous considérons $\mathcal{A}(\varphi(t))=-divG(\varepsilon(\varphi(t)))$, notre but, dans la suite, est de vérifier que $\chi=\mathcal{A}(u'(t))$.

En utilisant la formule du Green et les conditions aux limites (6.4), alors pour tout $v\in L^2(0,T;V)$, de (6.7) il découle

$$X_{\mu}=\int_0^t\left(\mathcal{A}\left(u'_{\mu}(s)\right)-\mathcal{A}(v'(s)),u'_{\mu}(s)-v'(s)\right)ds\geq 0. \tag{6.32}$$

Tenant compte (6.15) il résulte

$$\begin{aligned}\int_0^t\left(\mathcal{A}\left(u'_{\mu}(s)\right),u'_{\mu}(s)\right)ds &= -\frac{1}{2}\left|u'_{\mu}(t)\right|^2-\lambda\int_0^t a\left(u_{\mu}(s),u'_{\mu}(s)\right)ds-\frac{1}{p}\left\|u_{\mu}(x,t)\right\|^p_{L^p(\Omega)}+ \\ &+\frac{1}{p}\left\|u_{0\mu}\right\|^p_{L^p(\Omega)}+\frac{1}{2}\left|u_{1\mu}\right|^2+\int_0^t\left(f,u'_{\mu}\right)ds.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}X_{\mu} &= -\frac{1}{2}\left|u'_{\mu}(t)\right|^2-\lambda\int_0^t a\left(u_{\mu}(s),u'_{\mu}(s)\right)ds-\frac{1}{p}\left\|u_{\mu}(x,t)\right\|^p_{L^p(\Omega)}+ \\ &+\frac{1}{p}\left\|u_{0\mu}\right\|^p_{L^p(\Omega)}+\frac{1}{2}\left|u_{1\mu}\right|^2+\int_0^t\left(f,u'_{\mu}\right)ds-\int_0^t\left(\mathcal{A}\left(u'_{\mu}(t)\right),v'\right)ds- \\ &-\int_0^t\left(\mathcal{A}(v'),u'_{\mu}-v'\right)ds.\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités suivantes

$$\begin{cases} \liminf_{\mu} \left|u'_{\mu}(t)\right|^2 \geq |u'(t)|^2, \\ \liminf_{\mu} \left\|u_{\mu}(x,t))\right\|^p_{L^p(\Omega)} \geq \|u(x,t))\|^p_{L^p(\Omega)}, \\ \liminf_{\mu} \int_0^t a\left(u_{\mu}(s), u'_{\mu}(s)\right) ds \geq \int_0^t a(u(s), u'(s))\, ds, \end{cases}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \limsup_{\mu} X_{\mu} \leq\; & -\frac{1}{2}|u'(t)|^2 - \lambda \int_0^t a(u(s), u'(s))\, ds - \\ & -\frac{1}{p}\|u(x,t))\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{p}\|u_0\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}|u_1|^2 + \\ & + \int_0^t (f, u')\, ds - \mu \int_0^t (\chi, v')\, ds - \int_0^t (\mathcal{A}(v'), u' - v')\, ds. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Multipliant (6.31) par u', alors l'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \mu \int_0^t (\chi, u')\, ds =\; & \int_0^t (f, u')\, ds - \frac{1}{2}|u'(t)|^2 - \lambda \int_0^t a(u(s), u'(s))\, ds - \\ & -\frac{1}{p}\|u(x,t))\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{p}\|u_0\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}|u_1|^2. \end{aligned}$$

Utilisant la dernière égalité avec (6.32) et (6.33) pour obtenir

$$\int_0^t (\mu\chi - \mathcal{A}(v'), u' - v')\, dt \geq 0. \tag{6.34}$$

Pour tout $w \in L^2(0,T;V)$, posons $v' = u' - \alpha w$, $\alpha > 0$, alors (6.34) devient

$$\int_0^t (\mu\chi - \mathcal{A}(u' - \alpha w'), w(s))\, ds \geq 0. \tag{6.35}$$

Faisant $\alpha \to 0$ dans (6.35) il vient

$$\int_0^t (\mu\chi - \mathcal{A}(u'), w(s))\, ds \geq 0 \;\forall w \in L^2(0,T;V).$$

D'où,

$$\chi = \mathcal{A}(u').$$

Par conséquent de (6.30) on tire

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(t), w_j) + \lambda a(u(t), w_j) + \mu\left(-divG(\varepsilon(u'(t))), w_j\right) = \left(f(t), w_j\right).$$

Pour tout $w_j \in V_m$ et pour tout $1 \leq j \leq m$, la densité de V_m dans V implique que

$$(u''(t), v) + \lambda a(u(t), v) + \mu(-divG(\varepsilon(u'(t))), v) = (f(t), v) \ \forall v \in V. \tag{6.36}$$

D'où (6.2). ■

6.3.2 Unicité

Ce paragraphe est consacré à la démonstration de l'unicité de la solution sans prendre en considération l'hypothèse $\rho \leq \frac{2}{n-2}$.

Théorème 6.2 *Sous les hypothèses de Théorème 6.1, pour tout $\rho > -1$. La solution u obtenue dans Théorème 6.1 est unique.*

Démonstration. Soient u, v deux solutions du problème (6.1).

En posant $w = u - v$, donc w doit vérifier le système suivant :

$$\begin{aligned} &w'' - \lambda div(F(\varepsilon(u)) - F(\varepsilon(v))) - \\ &-\mu div(G(\varepsilon(u')) - G(\varepsilon(v'))) + \\ &+(|u|^\rho u - |v|^\rho v) = 0 \text{ dans } Q, \end{aligned} \tag{6.37}$$

$$w(0) = w'(0) = 0 \text{ dans } \Omega, \tag{6.38}$$

$$w = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \ \sigma(w)\eta = 0 \text{ sur } \Sigma_2, \tag{6.39}$$

$$w \in L^\infty(0, T; V \cap L^p(\Omega)), \ p = \rho + 2, \tag{6.40}$$

$$w' \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \cap L^2(0, T; V). \tag{6.41}$$

Multipliant les deux membres de (6.37) par w', et intégrant sur Ω alors on aura après utilisation de la formule de *Green* et les conditions aux limites (6.39)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w'(t)|^2 + \lambda(F(\varepsilon(u)) - F(\varepsilon(v)), \varepsilon(u') - \varepsilon(v')) + \\ &+\mu(G(\varepsilon(u')) - G(\varepsilon(v')), \varepsilon(u') - \varepsilon(v')) = \\ &= \int_\Omega (|v|^\rho v - |u|^\rho u) w' dx. \end{aligned} \tag{6.42}$$

Utilisant (6.6), (6.38) et le Lemme 6.3 nous trouvons

$$\begin{aligned} &(F(\varepsilon(u)) - F(\varepsilon(v)), \varepsilon(u') - \varepsilon(v')) = \\ &= \frac{d}{dt}(F(\varepsilon(u)) - F(\varepsilon(v)), \varepsilon(u) - \varepsilon(v)) - \\ &-\left(\frac{d}{dt}(F(\varepsilon(u)) - F(\varepsilon(v))), \varepsilon(u) - \varepsilon(v)\right) \geq \\ &\geq C_1\frac{d}{dt}\|w\|^2 - \left(\frac{d}{dt}(F(\varepsilon(u)) - F(\varepsilon(v))), \varepsilon(u) - \varepsilon(v)\right). \end{aligned}$$

De (6.7) on conclut qu'il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$(G(\varepsilon(u')) - G(\varepsilon(v')), \varepsilon(u') - \varepsilon(v')) \geq C_2\|w'\|^2.$$

Alors (6.42) devient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left|w'(t)\right|^2+\lambda C_1\left\|w\right\|^2\right)+\mu C_2\left\|w'\right\|^2 \leq \\ \leq \int_\Omega \left(\left|v\right|^\rho v-\left|u\right|^\rho u\right)w'dx+ \\ +\int_\Omega \frac{d}{dt}\left(F(\varepsilon(u))-F(\varepsilon(v))\right)\left(\varepsilon(u)-\varepsilon(v)\right)dx.\end{aligned} \tag{6.43}$$

Utilisons les hypothèses (6.6) pour conclure les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \frac{d}{dt}\left(F(\varepsilon(u))-F(\varepsilon(v))\right)\left(\varepsilon(u))-(\varepsilon(v)\right)dx\right| \leq \\ \leq L\int_\Omega \left|\varepsilon(u')-\varepsilon(v')\right|\left|\varepsilon(u)-\varepsilon(v)\right|dx \leq C_3\left\|w'\right\|\left\|w\right\|.\end{aligned} \tag{6.44}$$

Le premier terme du deuxième membre de (6.43) est majoré comme suit :

$$\left|\int_\Omega \left(\left|v\right|^\rho v-\left|u\right|^\rho u\right)w'dx\right| \leq (\rho+1)\int_\Omega \sup\left(\left|u\right|^\rho,\left|v\right|^\rho\right)\left|w\right|\left|w'\right|dx.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder nous avons

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \left(\left|v\right|^\rho v-\left|u\right|^\rho u\right)w'dx\right| \leq \\ \leq C\left(\left\|\left|u\right|^\rho\right\|_{L^n(\Omega)}+\left\|\left|v\right|^\rho\right\|_{L^n(\Omega)}\right)\left\|w\left(t\right)\right\|_{L^q(\Omega)}\left|w'\left(t\right)\right|.\end{aligned}$$

Aussi, si $\frac{1}{n}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}=1$, voir [8], alors

$$\left\|v\right\|_{L^{kq}(\Omega)}=\left\|\left|v\right|^k\right\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{1}{k}} \quad \forall k,\ q\in\mathbb{N}^*. \tag{6.45}$$

Pour tout $n>2$, et pour tout $\rho>-1$ si on pose $k=E\left(\frac{\rho(n-2)}{2}\right)+1$, où $E\left(x\right)$ dénote la partie entière de x. Alors k doit vérifier la condition

$$\rho\leq\frac{2k}{n-2},\ \ k\in\mathbb{N}^*,\ n\neq 2. \tag{6.46}$$

Utilisant (6.46) on a $\rho n\leq kq$. Comme $\frac{1}{n}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}=1$, voir [38] on a $H^1(\Omega)\subset L^q(\Omega)$, donc de (6.45) nous trouvons

$$\begin{aligned}\left\|\left|v\right|^\rho\right\|_{L^n(\Omega)} &= \left\|v\right\|_{L^{\rho n}(\Omega)}^\rho \leq \left\|v\right\|_{L^{kq}(\Omega)}^\rho=\left\|\left|v\right|^k\right\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{\rho}{k}} \leq \\ &\leq C\left\|v\right\|_{L^q(\Omega)}^\rho \leq C\left\|v\right\|^\rho.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left\|\left|v\right|^\rho\right\|_{L^n(\Omega)} \leq C\left\|v\right\|^\rho, \tag{6.47}$$

ce qui entraine

$$\left|\int_\Omega \left(\left|v\right|^\rho v-\left|u\right|^\rho u\right)w'dx\right| \leq C\left(\left\|u\right\|^\rho+\left\|v\right\|^\rho\right)\left\|w\right\|\left|w'\right|,$$

où C est une constante positive.

Utilisant l'estimation (6.11) on obtient :

$$\left| \int_{\Omega} (|v|^{\rho} v - |u|^{\rho} u) w' dx \right| \leq C_4 \|w\| |w'| . \tag{6.48}$$

En utilisant (6.43), (6.44), (6.48) et les inégalités de Young et Hölder on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|w'(t)|^2 + \lambda C_1 \|w(t)\|^2\right) + \mu C_2 \|w'\|^2 \leq$$
$$\leq C_3 \|w'\| \|w\| + C_4 \|w\| |w'| \leq \frac{1}{2}\mu C_2 \|w'\|^2 +$$
$$+ C_5 \|w(t)\|^2 + \frac{1}{2} C_6 \left(|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2\right).$$

En intégrant la dernière inégalité sur $(0,t)$ de (6.38) il résulte

$$\frac{1}{2}|w'(t)|^2 + \lambda C_1 \|w(t)\|^2 + \mu C_2 \int_0^t \|w'(s)\|^2 ds \leq$$
$$\leq 0 + C_7 \int_0^t \left(|w'(s)|^2 + \|w(s)\|^2\right) ds.$$

Appliquant le Lemme de Gronwall pour trouver $w = 0$. ■

6.4 Dépendance continue de la solution par rapport aux données

Dans ce paragraphe, on analyse la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

On définit l'espace de Banach suivant :

$$W(Q) = \left\{\varphi / \varphi \in L^{\infty}(0,T;V),\ \varphi' \in L^{\infty}\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\right\},$$

muni de la norme

$$\|\varphi\|_{W(Q)} = \|\varphi\|_{L^{\infty}(0,T;V)} + \|\varphi'\|_{L^{\infty}\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}.$$

On considère l'application π définie par :

$$\begin{cases} \pi : L^2(Q) \times V \times L^2(\Omega) \to W(Q) \\ \qquad \{f, u_0, u_1\} \mapsto u, \end{cases} \tag{6.49}$$

où u est une solution du problème (6.1). Relativement à cette notation on a le théorème suivant :

Théorème 6.3 *Sous les hypothèses des Théorème 6.1 et Théorème 6.2, l'application π définie en (6.49) est continue, autrement dit pour tout $u, v \in W(Q)$ on a*

$$|u' - v'|^2 + \|u - v\|^2 \leq$$
$$\leq C(u,v)\left[|u_1 - v_1|^2 + \|u_0 - v_0\|^2 + \int_0^t \left|(f-g)(s)\right|^2 ds\right],$$

où $\pi(\{f, u_0, u_1\}) = u$ et $\pi(\{g, v_0, v_1\}) = v$ et $C(u,v)$ est une fonction de u et v.

Démonstration. Soit $v = \pi\left(\{g, v_0, v_1\}\right)$ telle que

$$\{g, v_0, v_1\} \to \{f, u_0, u_1\} \text{ dans } L^2(Q) \times V \times L^2(\Omega).$$

Donc $w = u - v$ doit satisfaire au

$$\begin{aligned} w'' - \lambda div\left(F(\varepsilon(u)) - F(\varepsilon(v))\right) - \mu div\left(G(\varepsilon(u')) - G(\varepsilon(v'))\right) = \\ = f - g - \left(|u|^\rho u - |v|^\rho v\right), \end{aligned} \tag{6.50}$$

Multipliant les deux membres de (6.50) par w', et intégrant sur Ω on aura après utilisation de la formule de Green et les conditions aux limites (6.39)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w'(t)|^2 + \lambda \int_\Omega \left(F(\varepsilon(u)) - F(\varepsilon(v))\right)\varepsilon(w')dx + \\ +\mu \int_\Omega \left(G(\varepsilon(u')) - G(\varepsilon(v'))\right)\varepsilon(w')dx = (f - g, w') + \\ + \int_\Omega \left(|v|^\rho v - |u|^\rho u\right) w' dx. \end{aligned} \tag{6.51}$$

De (6.6) nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(F(\varepsilon(u)) - F(\varepsilon(v))\right)\varepsilon(w')dx \geq \\ \geq \frac{d}{dt}C_1\|w\|^2 - \int_\Omega \left(\frac{d}{dt}\left(F(\varepsilon(u)) - F(\varepsilon(v))\right)\right)\varepsilon(w)dx; \end{aligned}$$

et

$$\left|\int_\Omega \left(\frac{d}{dt}\left(F(\varepsilon(u)) - F(\varepsilon(v))\right)\right)\varepsilon(w)dx\right| \leq C_3\|w'\|\|w\|.$$

Aussi, en utilisant (6.7) nous trouvons

$$\int_\Omega \left(G(\varepsilon(u')) - G(\varepsilon(v'))\right)\varepsilon(w')dx \geq C_2\|w'\|^2.$$

Utilisant les inégalités de Hölder et de Young alors par intégration sur $(0, t)$ de (6.51) il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|w'(t)|^2 + \lambda C_1\|w(t)\|^2 + \mu C_2 \int_0^t \|w'(s)\|^2 ds \leq \\ \leq \frac{1}{2}|u_1 - v_1|^2 + \lambda C_1\|u_0 - v_0\|^2 + \\ +\frac{1}{2}\int_0^t \left|(f - g)(s)\right|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t |w'(s)|^2 ds + \frac{1}{2}C_4\int_0^t \|w(s)\|^2 ds + \\ +\frac{1}{2}\mu C_2 \int_0^t \|w'(s)\|^2 ds + \int_0^t \int_\Omega \left(|v|^\rho v - |u|^\rho u\right) w' dx ds. \end{aligned} \tag{6.52}$$

Moyennant (6.48), de (6.52) on obtient

$$|w'(t)|^2 + 2\lambda C_1 \|w(t)\|^2 + 2\mu C_2 \int_0^t \|w'(s)\|^2 ds \le |u_1 - v_1|^2 + 2C_1\lambda \|u_0 - v_0\|^2 +$$
$$+ \int_0^t \left|(f-g)(s)\right|^2 ds + \int_0^t |w'(s)|^2 ds + C_4 \int_0^t \|w(s)\|^2 ds +$$
$$+C_5 \int_0^t \left(\|w(s)\|^2 + |w'(s)|^2\right) ds.$$

Ou encore

$$\begin{aligned} |w'(t)|^2 + 2\lambda C_1 \|w\|^2 &\le |u_1 - v_1|^2 + 2\lambda C_1 \|u_0 - v_0\|^2 + \\ &+ \int_0^t \left|(f-g)(s)\right|^2 ds + 2C_6 \int_0^t \left(|w'(s)|^2 + \|w(s)\|^2\right) ds. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall entraîne

$$|w'(t)|^2 + \|w\|^2 \le C(u,v) \left[|u_1 - v_1|^2 + \|u_0 - v_0\|^2 + \int_0^t \left|(f-g)(s)\right|^2 ds \right],$$

où $C(u,v)$ est une fonction de u et v, bornée sur les bornés Q, donc la fonction π est continue. ■

6.5 Exemples

1. Si on pose

$$\sigma(u) = \nabla u + \nabla u'$$

alors le problème (6.2)–(6.5) devient

$$\begin{cases} u'' - \Delta u - \Delta u' + |u|^\rho u = f, \text{ dans } Q, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \ \sigma(u)\eta = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \\ u(x,0) = u_0(x), \ u'(x,0) = u_1(x), \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{P1}$$

2. Si on considère

$$\sigma(u) = \alpha\varepsilon(u) + (\alpha+\beta)\, Trace(\varepsilon(u)) I + \nabla u',$$

où I dénote l'opérateur d'identité et *Trace* dénote l'opérateur trace.
Alors, le problème (6.2)–(6.5) se ramène au problème :

$$\begin{cases} u'' - Lu + |u|^\rho u - \Delta u' = f, \text{ dans } Q, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \ \sigma(u)\eta = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \\ u(x,0) = u_0(x), \ u'(x,0) = u_1(x), \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

où L désigne l'opérateurs de Lamé, défini par les coefficients de l'élasticité α et β par $L : \alpha\Delta + (\alpha+\beta)\nabla.div$,

3. Si on pose

$$\sigma(u) = A\nabla u + \nabla u',$$

où

$$\begin{cases} A = \left(a_{ij}(x,t)\right)_{i,j=1,\dots,n}, \\ a_{ij} = a_{ji} \in C^1\left(\overline{\Omega}\right), \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\,\zeta_i\zeta_j \geq m\,|\zeta|^2,\ m > 0,\ \zeta_i \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on trouve le problème suivant :

$$\begin{cases} u'' - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \Delta u' + |u|^{\rho}\, u = 0, \text{ dans } Q, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1,\ \sigma(u)\eta = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u'(x,0) = u_1(x), \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{P3}$$

Donc tous les résultats obtenus dans les Théorème 6.1–Théorème 6.3 sont valables pour ces problèmes particuliers.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans la première partie de cette thèse après avoir, analysé la question d'existence locale des solutions faibles, la régularité ainsi que la dépendance continue de la solution par rapport aux données pour un problème aux limites semi linéaire hyperbolique avec termes source et dissipatif, nous avons étudié l'existence globale, la stabilité ainsi que l'explosion en temps fini de la solution. Dans la deuxième partie, nous avons commencé par étudier l'existence globale, l'instabilité et l'explosion en temps fini des solutions. Ensuite, nous nous sommes intéressés par le comportement à l'infini des solutions pour un problème aux limites parabolique non linéaire associé aux équations élastiques linéaires. Nous avons terminé cette partie par montrer un résultat sur l'existence locale et l'unicité de la solution pour un problème aux limites hyperbolique non linéaire associé aux équations viscoélastique non linéaires. Comme perspective, beaucoup des travaux importants sont visés par la suite tels que l'affaiblissement des hypothèses sur les fonctions F, G, g et sur les nombres p, n ainsi que la prise en considération des conditions de contact avec ou sans frottement sur la frontière pour quelques problèmes, notamment les problèmes piézoélectriques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Aassila. A Note on the Boundary Stabilization of a Compactly Coupled System of Wave Equations. *Applied Mathematics Letters*, 12 :19–24, 1999.

[2] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Semuel Ellenberg and Hymen, Columbia University, New York, 1975.

[3] J. M. Ball. Remarks On Blow-up And Nonexistence Theorems For Nonlinear Evolution Equations. *Quart I. Math. Oxford*, 28 :473–486, 1977.

[4] J. M. Ball. Finite Time Blow-Up in Nonlinear Problems. *Academic Press. Inc*, pages 189–205, 1978.

[5] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[6] C. Chen, H. Yao, and L. Shao. Global Existence, Uniqueness, and Asymptotic Behavior of Solution for p-Laplacian Type Wave Equation. *Journal of Inequalities and Applications*, 2010.

[7] W. Chen and Y. Zhou. Global nonexistence for a semilinear Petrovesky Equation. *Nonlinear Analysis*, 70 :3203–3208, 2009.

[8] Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette, and M. Dillard-Bleick. *Analysis, Manifolds and physics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1977.

[9] Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette, and M. Dillard-Bleick. *Decay of solution of wave equation in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback, Asymptotic Analysis*. Amsterdam, New York, Oxford, 1977.

[10] Y. Conrad and B. Rao. Decay of solution of wave equation in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback, Asymptotic Analysis. *Advances in Applied Math*, 7 :159–177, 1993.

[11] Y. Conrad and B. Rao. Energy decay and exact controllability for the Petrovsky equation in a bounded domain. *Advances in Applied Math*, 7 :159–177, 1993.

[12] R. Dautry and J. L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume 3. Paris, 1985.

[13] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus*. Dunod, Paris, 1998.

[14] G. Duvaut and J. L. Lions. *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*. Dunod, Paris, 1972.

[15] J. R. Fernandez, M. Shillor, and M. Sofonea. Analysis and numerical simulations of a dynamic contact problem with adhesion. *Math. Comput. Modelling*, 37 :1317–1333, 2003.

[16] J. R. Fernandez, M. Shillor, and M. Sofonea. Variational and Numerical Analysis of a Quasistatic Viscoelastic Contact Problem with Adhesion. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 159 :431–465, 2003.

[17] V. Galaktionova and S. Pohozaevc. Blow-up and critical exponents for nonlinear hyperbolic equations. *Nonlinear Analysis*, 53 :453–466, 2003.

[18] H. Gao and T. F. Ma. Global solutions for a nonlinear wave equation with the p-Laplacian operator. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, pages 1–13, 1999.

[19] R. Glowinski. *Numerical Methods for Nonlinear Variational problems*. Springer-Verlag, 1984.

[20] P. Grisvard. Boundary value problem in plan polygon Instruction for use E.D.F. *Journal of Math. Anal. and Applic, serie C*, 1 :21–59, 1986.

[21] A. Guesmia. Existence globale et stabilisation interne non linéaire d'un système de Petrovsky. *Bell. Belg. Math. Soc*, 5 :583–594, 1998.

[22] A. Guesmia. Energy decay for a damped nonlinear coupled system. *Journal of Math. Anal. and Applic*, 239 :38–48, 1999.

[23] W. Han and M. Sofonea. Boundary value problem in plan polygon. Instruction for use. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 38 :556–579, 1986.

[24] W. Han and M. Sofonea. *Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems*, volume 38. 2000.

[25] A. Haraux and E. Zuzua. Decay Estimates for some Semilinear Damped Hyperbolic Problems. *Nonlinear Analysis*, pages 191–206, 1987.

[26] I. Ionescu and M. Sofonea. *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*. Oxford University Press, Oxford, 1993.

[27] S. ji Feng and D. X. Feng. Nonlinear Internal Damping of Wave Equations with variable Coefficients. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 20 :1057–1072, Dec 2004.

[28] L. Jianu, M. Shillor, and M. Sofonea. *A Viscoelastic Frictionless Contact Problem with Adhesion*. Appli. Anal, 1993.

[29] V. Komornik. *Decay Estimates For Petrovsky System with a nonlinear Distribited Feedback*. Louis Pastor, France, 1992.

[30] V. Komornik. *Exact controllability and stabilization, The multiplier method*. Masson-John Wiley, 1994.

[31] V. Komornik. On the nonlinear boundary stabilization of the wave equation. *Chin. Ann. of Math 14B*, 2 :153–164, 1995.

[32] V. Komornik. Well-posedness and decay estimates for a Petrovsky system by a semigroup approach. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 60 :451–466, 1995.

[33] V. Komornik. Decay Estimates for Petrovsky system with a nonlinear Distributed Feedback . *IMA Preprint Series ♯ 1087*, pages 1–17, Decembre 1992.

[34] V. Komornik and S. Kouémou-Patcheu. Estimations d'énergie pour un système de Petrovsky avec amortissement interne . *C. R. Acad. Sci.*, Ser I Math. 319 :1185–1189, 1994.

[35] V. Komornik and S. Kouémou-Patcheu. On the nonlinear boundary stabilization of the wave equation. *C. R. Acad. Sci. Paris S er I Math*, 319 :1185–1189, 1994.

[36] Z. Lerguet, M. Shillor, and M. Sofonea. A frictional contact problem for an electroviscoelastic body. *Electron. J. Diff. Eqns*, 2007(170) :1–16, 2007.

[37] M. C. Leseduarte and R. Quintanilla. Instability, Nonexistence, And Uniqueness In Elasticity With Porous Dissipation . *Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, pages 1–14, 2006.

[38] J. L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris, 1966.

[39] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, volume 1, 2. Dunod, Paris, 1968.

[40] W. J. Liu. General decay and blow-up of solution for a quasilinear viscoelastic problem with nonlinear source. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 73 :1890–1904, 2010.

[41] T. F. Ma and J. A. Soriano. On weak solutions for an evolution equation with exponential nonlinearities. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, 37 :1029–1038, 1999.

[42] A. Matei, V. V. Motreanu, and M. Sofonea. On the Signorini frictionless contact problem for linear viscoelastic materials. *Applicable Analysis*, 80 :177–199, 2001.

[43] S. A. Messaoudi. Decay of the solution energy for a nonlinearly damped wave equation. *Arab. J. for Science and Engineerging Analysis*, 26 :75–93, 2001.

[44] S. A. Messaoudi. Global nonexistence in a nonlinearly damped wave equation. *Applicable Analysis*, 80 :269–277, 2001.

[45] S. A. Messaoudi. General decay of solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source. *Nonlinear Analysis*, 69 :2589–2598, 2008.

[46] S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa. On the control of solutions of viscoelastic equations with boundary feedback. *Nonlinear Analysis*, RWA 10 :3132Ű3140, 2009.

[47] M. Nako. A difference inequality and its application to nonlinear evolution equations. *Math. Soc. Japan*, 30 :747–762, 1978.

[48] M. Nako. Remarks on the existence and uniqueness of global decaying solutions of the nonlinear dissipative wave equations. *Math Z.*, 206 :265–275, 1991.

[49] M. Nako. Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation. *Math. Ann.*, 305 :403–417, 1996.

[50] J. Neças and I. Hlavaiçek. *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction*. Amsterdam, 1981.

[51] K. Ono. On the global existence and decay of solution for semilinear telegraphe equations. *Int. J. Applied Math.*, 2 ♯ 9, 2000.

[52] S. R. Park. Nonexistence Of Global Solutions Of Some Quasilinear Initial Boundary Value Problems. *J. Korean Math. So c.*, 34, 1997.

[53] E. Piskin and N. Polat. On the Decay of Solutions for a Nonlinear Petrovsky Equation. *Mathematical Sciences Letters*, 3(1) :43–47, 2013.

[54] A. Rahmoune and B. Benabderrahmane. Faedo-Galerkin's Method for a non Linear Boundary Value Problem. *Int. J. Open Probl. Comput. Sci. Math., IJOPCM*, 4(4), 2011.

[55] A. Rahmoune and B. Benabderrahmane. Semi linear hyperbolic boundary value problem for linear elasticity equations. *Appl. Math. Inf. Sci*, 7(4) :1417–1424, 2013.

[56] A. Rahmoune, B. Benabderrahmane, and B. Nouiri. A nonlinear hyperbolic problem for viscoelastic equations. *Palestine Journal of Mathematics*, 7(4(1)) :1–11, 2015.

[57] L. Roder and T. Tebou. Stabilization of the Wave Equation with Localized Nonlinear Damping. *journal of differential equations*, 145(DE983416) :502–524, 1998.

[58] M. Shillor, M. Sofonea, and J. J. Telega. *Models and Analysis of Quasistatic Contact, Lecture Notes in Physics*. Berlin, 2004.

[59] M. Sibony. *Analyse numérique III, Itérations et approximations*. Hermann, 1988.

[60] M. Sofonea. *Problèmes Mathématiques en élasticité et Viscoplasticité*. Clermont-Ferrand, 1991.

[61] M. Sofonea, W. Han, and M. Shillor. *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*. Boca Raton London New York Singapore, 2006.

[62] W. Troy. The existence of bounded solutions of a semilinear heat equation. *SIAM J. Math. Anal*, 18 :332–336, 1987.

[63] E. Vitillaro. Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 149 :155–182, 1999.

[64] F. B. Weissler. Single point blow-up for a semilinear initial value problem. *J. Differential Equations*, 55 :204–224, 1984.

[65] S.-T. Wu and L.-Y. Tsai. On Global solutions And Blow-up Of solutions For A Nonlinearly Damped Petrovsky System. *Taiwanes Journal Of Mathematics*, 19(2A) :545–558, April 2009.

[66] B. Yamna. *Etude de quelques problèmes aux limites hyperboliques semi linéaires : Existence locale et globale, comportement asymptotique et explosion en temps fini des solutions*. PhD thesis, Université de ferhat abbas sétif, 2014.

[67] Y. C. You. Energy decay and exact controllability for the Petrovsky equation in a bounded domain. *Advances in Applied Math*, 11 :372–388, 1990.