

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS - SÉTIF

## THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques  
Pour l'Obtention du Diplôme de

**DOCTORAT EN SCIENCES**

Option : Mathématiques Appliquées

Par

Melle **ZHOR LERGUET**

## THÈME

### ANALYSE DE QUELQUES PROBLÈMES DE CONTACT AVEC FROTTEMENT ET ADHÉSION

Soutenu le : / /2008

Devant le jury

M. B. MEROUANI	<i>Prof. Université Ferhat Abbas de Sétif</i>	Président
M. S. DRABLA	<i>M.C. Université Ferhat Abbas de Sétif</i>	Encadreur
M. M. SOFONEA	<i>Prof. Université de Perpignan</i>	Co-Encadreur
M. N. BENHAMIDOUCHE	<i>M.C. Université de M'Sila</i>	Examineur
M. B. BENYATTOU	<i>M.C. Université de Laghouat</i>	Examineur
M. N. HEMICI	<i>M.C. Université Ferhat Abbas de Sétif</i>	Examineur

**Résumé :** Cette thèse est destinée à l'étude variationnelle de quelques problèmes de contact avec frottement et adhésion entre un corps déformable et une fondation. Sous l'hypothèse des petites transformations, nous analysons des processus statiques et quasi-statiques pour des matériaux élastiques, électro-élastiques, viscoélastiques et électro-viscoélastiques. Les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité d'une solution faible pour les problèmes étudiés. Le mémoire est structuré en trois parties. La première partie est consacrée à rappeler les différents modèles mécaniques de contact étudiés ainsi que quelques outils mathématiques nécessaires dans le mémoire. La deuxième partie est destinée à l'étude des problèmes de contact élastiques et électro-élastiques avec frottement et adhésion. La troisième partie est dédiée à l'analyse des problèmes viscoélastiques et électro-viscoélastiques avec frottement et adhésion .

**Mots-Clés :** élasticité, électro-élasticité, viscoélasticité, électro-viscoélasticité, compliance normale, adhésion, frottement de Coulomb, inéquation quasi-variationnelle, inéquation d'évolution, solution faible, point fixe.

**Abstract :** This thesis is devoted to the study of some contact problems with friction and adhesion, between a deformable body and a so-called foundation. Under the hypothesis of small transformations, we analyse static and quasistatic processes for elastic, electro-elastic, viscoelastic and electro-viscoelastic materials. The results obtained concern the existence and uniqueness of weak solutions for the studied problems. The thesis is structured into three parts. The first part is dedicated to recall different mechanical models of contact, as well as some necessary mathematical tools. The second part is destined to the study of elastic and electro-elastic problems with friction and adhesion. The third part is intended in the analysis of viscoelastic and electro-viscoelastic problems with friction and adhesion.

**Key-Words :** elasticity, electro-elasticity, viscoelasticity, electro-viscoelasticity, normal compliance, adhesion, Coulomb's friction, quasi-variational inequality, evolutionary variational inequality, weak solution, fixed point.

## *Dédicaces*

*A mes chers parents*

*A mes soeurs : Nadia, Houda, Soumia, Ines et Amel*

*A mes frères : Noredine et Abdellatif*

*A mes beaux frères : Mansour, Adnane et Toufik*

*A mes neveux : Ahmed, Amine, Khalil, Mohssen, Racim, Mahdi*

*A mes belles soeurs : Samah et Amel*

*A mes niesses : Amira et Nadine*

*A mes grand-mères : Lâalia et Fatima*

*Aux esprits de mes grand-pères : Madani et Ahmed*

*Je dédie mon mémoire de thèse de Doctorat en Sciences avec toute  
ma gratitude, ma reconnaissance et mon amour.*

*Zhor*

## *Remerciements*

J'adresse mes remerciements les plus chaleureuses et sincères à mon co-encadreur Monsieur le Professeur MIRCEA SOFONEA qui a veillé pendant mes séjours à Perpignan à la réalisation de ma thèse de Doctorat, avec beaucoup de patience, de générosité et de disponibilité. Je le remercie pour le soutien et la confiance qu'il m'a accordés, tout en me permettant d'achever ma thèse dans les meilleures conditions possibles.

Je tiens particulièrement à remercier mon encadreur Monsieur le Docteur SALAH DRABLA de m'avoir beaucoup appris lors de son encadrement de ma thèse de Doctorat. Son enthousiasme et sa compétence m'ont encouragé à poursuivre mes travaux de recherche sous sa direction. Je le remercie pour tous ses précieux conseils et suggestions qu'il m'a apportés.

Je suis très honorée que Monsieur le Professeur B. MEROUANI a accepté de présider le jury de soutenance de ma thèse.

Je suis très heureuse de la participation au jury des Messieurs N. BENHAMI-DOUCHE, B. BENYATTOU et N. HEMICI, je leur prie de trouver ici l'expression de ma plus grande gratitude.

Ce mémoire de thèse doit aussi beaucoup à l'accueil chaleureux et l'ambiance joyeuse dans lesquels il a été effectué. Je pense ici à tous les membres du Laboratoire de Mathématiques, Physique et Systèmes (LAMPS). Je n'oublierai jamais la gentillesse de Monsieur et Madame El Jai, la sympathie de Samira, la générosité de Anne-Marie, la fraternité de Redouane et enfin le dévouement de Yves.

Mes remerciements vont aussi à tous mes collègues de l'équipe "Mécanique du Contact" : Rachid, Youssef, Raafat, Joseph et Mohamed, qui m'ont beaucoup aidé et soutenu pendant mes stages au sein du Laboratoire et c'est grâce à eux que j'ai pu apprendre à manipuler avec le LaTeX.

Par ailleurs, je souhaite exprimer ma sincère gratitude à ma très chère amie Houria ainsi que son mari Saïd et ses adorables filles Douâa et Tasnim, qui m'ont accueilli chez eux pendant mon séjour en France dans une ambiance familiale très chaleureuse. Je leur suis très reconnaissante.

Je remercie également Monsieur le Professeur M. Shillor pour sa collaboration scientifique et ses remarques précieuses.

Je tiens à remercier vivement Monsieur le Professeur H. Mekias de m'avoir incorporé dans l'Accord Programme *Tassili* (HCU05), ma bénéficiaire des stages juniors au sein du Laboratoire (LAMPS) à l'université de Perpignan a rendu possible la finalisation de mon mémoire de thèse.

A tous mes amis et collègues de travail qui m'ont accompagnés et soutenus durant mes années d'études, qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude.

Je n'oublie pas de remercier toute personne m'a aidé de près ou de loin à la réalisation de mon mémoire de thèse.

Aussi, je rends hommage à tous mes maîtres et professeurs à partir du primaire, à celles et ceux qui m'ont stimulé dans mes études et m'ont donné goût aux Mathématiques, je leur dis du fond du coeur merci en espérant que cette thèse leur soit dédié comme fruit de leur travail.

Enfin, je tiens à exprimer mes vifs remerciements à mes parents et à tous les membres de ma famille qui m'ont soutenue et encouragée par leur amour et leur confiance.

ZHOR LERGUET

# Table des matières

<b>Introduction</b>	iii
<b>Notations</b>	viii
<b>I Modélisation et Outils Mathématiques</b>	<b>1</b>
<b>1 Modélisation</b>	<b>5</b>
1.1 Cadre physique	5
1.2 Lois de comportement	10
1.3 Lois de contact avec frottement	13
1.4 Lois de contact avec frottement et adhésion	15
1.5 Conditions électriques à la surface de contact	18
<b>2 Outils Mathématiques</b>	<b>23</b>
2.1 Espaces de Sobolev	23
2.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	26
2.3 Inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution	29
2.4 Compléments divers	31
<b>II Problèmes Elastiques et Electro-élastiques</b>	<b>35</b>
<b>3 Problème élastique avec adhésion et frottement</b>	<b>39</b>
3.1 Formulation du problème	39
3.2 Formulation variationnelle	41
3.3 Démonstration du Théorème 3.1.	45
<b>4 Problème électro-élastique avec frottement</b>	<b>53</b>
4.1 Formulation du problème	53
4.2 Formulation variationnelle	55

4.3	Démonstration du Théorème 4.1. . . . .	59
<b>5</b>	<b>Problème électro-élastique avec adhésion et frottement</b>	<b>65</b>
5.1	Formulation du problème . . . . .	65
5.2	Formulation variationnelle . . . . .	67
5.3	Démonstration du Théorème 5.1. . . . .	69
<b>III</b>	<b>Problèmes Viscoélastiques et Electro-viscoélastiques</b>	<b>73</b>
<b>6</b>	<b>Problème viscoélastique avec adhésion et frottement</b>	<b>77</b>
6.1	Formulation du problème . . . . .	77
6.2	Formulation variationnelle . . . . .	78
6.3	Démonstration du Théorème 6.1 . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Problème électro-viscoélastique avec frottement</b>	<b>89</b>
7.1	Formulation du problème . . . . .	89
7.2	Formulation variationnelle . . . . .	91
7.3	Démonstration du Théorème 7.1. . . . .	94
	<b>Bibliographie</b>	<b>101</b>

# Introduction

Dans l'industrie comme dans la nature, plusieurs phénomènes fréquents font appel à des processus de contact entre deux corps déformables qui se déplacent l'un par rapport à l'autre. La littérature d'ingénierie concernant ce thème est vaste à cause de leur importance dans les systèmes structurels et mécaniques ainsi que dans le façonnage et l'extrusion des métaux. En raison de leur complexité inhérente, les phénomènes de contact sont modélisés par des problèmes évolutionnaires non linéaires qui sont difficiles à analyser.

Un progrès considérable a été réalisé récemment dans la modélisation et l'analyse mathématique des différents processus impliqués dans le contact entre corps déformables et par conséquent, une Théorie Mathématique générale de la Mécanique du Contact (MTCM) est actuellement émergée. Elle est concernée par les structures mathématiques qui sont à la base des problèmes de contact avec des lois constitutives différentes, c'est à dire, différents matériaux, diverses géométries et des conditions de contact différentes; voir par exemple [33, 68, 74].

Une littérature technique vaste, principalement dans l'ingénierie et dans la géophysique, couvre le contact avec ou sans frottement. Dans la géophysique, la littérature se concentre sur le mouvement des plaques tectoniques, particulièrement sur les tremblements de terre. Les publications qui traitent des problèmes de contact avec frottement sont très nombreuses, voir à titre d'exemples [2, 3, 5, 7, 19, 20] et aussi [36, 37, 51, 71, 73]. D'autres travaux ont considéré des conditions de contact du type compliance normale avec frottement, comme dans [4, 41, 42, 52, 70]. Le but est de fournir un contexte clair et rigoureux à la construction des modèles mécaniques de contact, la preuve des résultats d'existence et d'unicité et l'établissement de la régularité de la solution. Une fois l'existence, l'unicité et la régularité de la solution sont établies, des questions importantes surgissent, comme l'analyse mathématique des solutions et comment construire des algorithmes fiables et efficaces pour leur simulations numériques, dont les réponses peuvent figurer dans [16, 18, 25, 30, 31].

Les processus d'adhésion sont importants dans plusieurs montages industriels où les parties usuellement non métalliques sont collées ensemble. Pour cette raison, le contact adhésif entre les corps déformables, quand une colle est ajoutée pour empêcher le mouvement relatif des surfaces, a reçu récemment une attention accrue tant dans

l'ingénierie que dans la littérature mathématique. La modélisation de base peut être trouvée dans [27, 28, 29, 57]. L'analyse des modèles pour le contact adhésif peuvent être trouvée dans [6, 16, 17, 21, 32] et dans les monographies [68, 74]. On a considéré une application de la théorie du contact adhésif dans le domaine médical des membres prothétiques dans [59, 60]; là l'importance de l'adhésion entre l'os implanté et le tissu a été décrite puisque le décollement peut diminuer la capacité des personnes utilisant la prothèse ou la jointure.

L'effet piézoélectrique a été prédit par Coulomb et découvert par Becquerel en 1819, mais n'a été correctement expliqué qu'en 1880 par les frères Pierre et Jacques Curie (par expérimentation sur le Quartz et le sel de Rochelle). Bien qu'il semble que le premier à avoir observé ce phénomène soit l'abbé René Just Haüy. La loi de comportement de ce type de matériaux a été établie par Lippmann en 1881 en se basant sur des considérations thermodynamiques. Les premiers modèles impliquant l'effet piézoélectrique peuvent être trouvés dans [48, 49, 50, 77, 78, 79] et plus récemment [12, 35, 56, 76]. De nouvelles investigations dans l'étude des problèmes électromécaniques ont été signalées au cours de ces dernières années, citons par exemple [44, 64, 65, 66, 67, 72], et des simulations numériques ont été rajoutées dans [8, 9, 55].

La piézoélectricité peut être considérée comme une interaction entre deux phénomènes électromécaniques qui couplent les champs élastique et électrique. Une déformation mécanique du matériau génère un champ électrique c'est l'effet direct de la piézoélectricité ou *effet capteur*. Réciproquement, l'application d'un champ électrique ou d'une différence de potentiel induit des déformations mécaniques, c'est l'effet inverse de piézoélectricité ou *effet actionneur*.

Parmi les matériaux piézoélectriques les plus utilisés on trouve les piézocéramiques et les piézopolymères, dont les Zirconates Titanates (PZT) découverts en 1959, et les Poly-Vinyl-DiFluor (PVDF) qui ont été commercialisés en 1987. Ils sont en général de masse négligeable par rapport à la structure à contrôler et peuvent être flexibles dans le cas du PVDF. Il en résulte, un bon rendement de conversion d'énergie électrique en énergie mécanique et donc un rôle actionneur très efficace. D'autres matériaux possédant une propriété piézoélectrique tels que : le quartz (bien que faiblement piézoélectrique); la topaze; la tourmaline; la berlinite ( $\text{AlPO}_4$ ); l'orthophosphate de gallium ( $\text{GaPO}_4$ ); l'arséniat de gallium ( $\text{GaAsO}_4$ ); les céramiques de structure cristalline perovskite ou de structures tungstène-bronze; les polymères à base de fibres de caoutchouc, laine, cheveux, bois et soie.

Ces matériaux ont surtout trouvé des applications dans le contrôle des vibrations dans le domaine de l'automobile (injecteurs à commande piézoélectrique), l'aérospatiale, le contrôle de forme (ailes d'avion, ailes ou objectifs des télescopes), le contrôle en acoustique des nuisances sonores et dans la biomécanique pour la conception de certains organes humains tels que le pancréas, le foie ou le rein. Il existe des matériaux naturels ou synthétiques pouvant être polarisés pour exhiber ces propriétés piézoélectriques, comme la peau et les os. De très nombreux champs d'applications peuvent être trouvés dans la littérature, citons à titre d'exemples :

**Capteurs :** La particularité de l'effet piézoélectrique est la génération de fortes contraintes pour des petits déplacements. Il est donc un candidat idéal pour les applications basées sur la détection de pression :

- Capteurs de pression, notamment pour l'automobile (pression des pneus) et l'aéronautique (pression dans les tuyères);
- Capteurs sonores (microphones);
- Microbalance piézoélectrique;
- Batteries électroniques (musique).

**Actionneurs :** Les déplacements très faibles produits par les cristaux piézoélectriques en font des micromanipulateurs idéaux mis à profit dans différentes applications :

- Microscope à balayage;
- Hauts-parleurs;
- Optique adaptative en astronomie;
- Moteurs piézoélectriques (systèmes autofocus d'appareils photographiques, mécanismes de vitre électrique de voiture).

La piézoélectricité est aussi utilisée dans certaines des imprimantes de la marque Epson, rare entreprise à fabriquer des têtes jet d'encre piézoélectriques. Des impulsions électriques font se contracter de fines buses, emplies d'encre, qui expulsent alors de minuscules gouttes d'encre. Ainsi, en horlogerie, le quartz soumis à une charge à une certaine fréquence vibre à la fréquence propre du cristal, qui est utilisé comme référence de pulsation. Enfin, une utilisation tout à fait courante et anodine de la piézoélectricité est celle qui en est faite dans les allume-gaz: la pression exercée sur le manche de l'appareil produit un courant électrique qui se manifeste sous la forme d'étincelles.

Cette thèse représente une contribution à l'analyse de quelques problèmes de contact frottant avec ou sans adhésion entre un corps déformable et une fondation, en tenant compte de l'effet piézoélectrique du matériau. Sous l'hypothèse des petites transformations, nous étudions des processus statiques et quasistatiques pour des matériaux élastiques, électro-élastiques, viscoélastiques et électro-viscoélastiques. Les conditions aux limites sont du type compliance normale avec ou sans adhésion. Les lois de frottement utilisés sont des versions statiques ou quasistatiques de la loi de Coulomb avec ou sans adhésion. Les conditions électriques sont introduites dans les cas où la fondation est isolatrice ou conductrice. Notre étude des phénomènes de contact comprend les étapes suivantes : la modélisation mathématique, l'analyse variationnelle incluant des résultats d'existence et d'unicité de la solution.

Le mémoire est composé de trois parties que nous décrivons brièvement.

Dans la première partie nous introduisons les outils nécessaires pour une bonne compréhension de l'ouvrage. Nous présentons d'abord les cadres physiques et les modèles mathématiques utilisés. Ensuite, nous indiquons les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées tout au long de la thèse. Enfin, nous rappelons quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle concernant les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz, les inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution.

Dans la deuxième partie de ce mémoire nous étudions trois problèmes de contact impliquant l'adhésion et le frottement, entre un corps élastique ou électro-élastique et une fondation. Le premier chapitre est consacré à l'analyse d'un problème élastique non linéaire de contact avec frottement et adhésion. Nous dérivons une formulation variationnelle du problème mécanique, pour lequel nous démontrons qu'il existe une solution faible unique en utilisant des techniques de point fixe et de monotonie. Nous étendons ces résultats dans le troisième chapitre dans le cas où l'effet piézoélectrique du matériau est tenu en compte. Le contenu de ces deux chapitres a fait l'objet de la publication [44]. Tandis que dans le deuxième chapitre, nous considérons un problème électro-élastique avec frottement, pour lequel nous dérivons une formulation variationnelle et établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible.

Dans la troisième partie, composée de deux chapitres, nous nous intéressons à l'étude d'un problème de contact avec adhésion et frottement entre un corps visco-élastique et un obstacle. Nous obtenons une formulation variationnelle au problème

mécanique et nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution pour le modèle mécanique que nous démontrons en utilisant des techniques d'inéquations variationnelles elliptiques et de point fixe. Dans le dernier chapitre, nous proposons l'analyse d'un problème électro-viscoélastique avec frottement. La nouveauté dans ce chapitre, consiste dans le fait que la fondation est électriquement conductive. Nous dérivons une formulation variationnelle du problème mécanique et nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité en utilisant des résultats sur les inéquations variationnelles d'évolution, suivis d'un argument de point fixe. Les résultats obtenus dans ce chapitre sont démontrés dans [45].

Cette thèse de Doctorat en Sciences a été réalisée dans le cadre de l'Accord Programme *Tassili* (HCU05) entre les universités de Sétif, Perpignan, Chambéry et Clermont Ferrand; et dirigé sous le co-encadrement du Professeur Mircea Sofonea de l'université de Perpignan et du Docteur Salah Drabla de l'université de Sétif.

## Notations

Si  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2,3$ ), on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de $\Omega$ ,
$\Gamma$	la frontière de $\Omega$ supposée régulière,
$\Gamma_i$ ( $i = \overline{1,3}$ )	une partie mesurable de la frontière $\Gamma$ ,
$mes \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue ( $d - 1$ ) dimensionnelle de $\Gamma_1$ ,
$\nu$	la normale unitaire sortante à $\Gamma$ ,
$v_\nu, \mathbf{v}_\tau$	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel $\mathbf{v}$ ,
$\sigma_\nu, \boldsymbol{\sigma}_\tau$	les composantes normale et tangentielle du champ tensoriel $\boldsymbol{\sigma}$ ,
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$ ,
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables avec support compact contenu dans $\Omega$ ,
$H$	l'espace $L^2(\Omega)^d$ ,
$H_1$	l'espace $H^1(\Omega)^d$ ,
$\mathcal{H}$	l'espace $L^2(\Omega)_s^{d \times d}$ ,
$\mathcal{H}_1$	l'espace $\{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \mid \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j}) \in H\}$ ,
$H_\Gamma$	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ ,
$H'_\Gamma$	l'espace dual de $H_\Gamma$ ,
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si  $X$  est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes:

$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire de $X$ ,
$\ \cdot\ _X$	la norme de $X$ ,
$\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$	la convergence forte de la suite $(\mathbf{x}_n)$ vers l'élément $\mathbf{x}$ dans $X$ ,
$\mathbf{x}_n \rightharpoonup \mathbf{x}$	la convergence faible de la suite $(\mathbf{x}_n)$ vers l'élément $\mathbf{x}$ dans $X$ ,

Si de plus  $[0, T]$  un intervalle de temps,  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq +\infty$ , on note par

$L^p(0, T; H)$	l'espace de Lebesgue,
$\ \cdot\ _{L^p(0, T; H)}$	la norme de $L^p(0, T; H)$ ,
$W^{k,p}(0, T; H)$	l'espace de Sobolev,
$\ \cdot\ _{W^{k,p}(0, T; H)}$	la norme de $W^{k,p}(0, T; H)$ .

Pour une fonction  $f$ , on note par

$\dot{f}, \ddot{f}$	les dérivées première et seconde de $f$ par rapport au temps,
$\partial_i f, f_{,i}$	la dérivée partielle de $f$ par rapport à la $i$ ème composante $x_i$ ,
$\nabla f$	le gradient de $f$ ,
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de $f$ ,
$\text{Div } f$	la divergence de $f$ .

Autres notations

$\mathbb{S}^d$	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$ ,
"."	produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$ ,
" · "	norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$ ,
$\mathbf{I}_d$	le tenseur identité du second ordre sur $\mathbb{R}^d$ ,
$\Lambda^p$	puissance $p$ de l'opérateur $\Lambda$ ,
$C$	une constante générique strictement positive,
p.p.	presque partout.

Première partie

Modélisation et Outils Mathématiques



## Partie I

# Modélisation et Outils Mathématiques

Dans le souci de rendre cet ouvrage facile à lire, il nous est paru nécessaire de présenter dans la première partie les cadres physiques et fonctionnels dans lesquels on va travailler. Nous précisons d'abord les cadres physiques et les modèles mathématiques correspondants utilisés dans ce mémoire, ensuite nous décrivons les lois de comportement, les conditions de contact et les différentes lois de frottement qui interviennent dans tout le document.

Après un bref rappel de la mécanique des milieux continus, nous introduisons quelques préliminaires mathématiques qui seront utilisés partout dans ce mémoire. Nous commençons d'abord par les espaces de type Sobolev associés aux opérateurs divergence et déformation utilisés en mécanique, ainsi que leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. Nous rappelons ensuite les propriétés des espaces des fonctions à valeurs vectorielles et les espaces liés à l'effet piézoélectrique.

Enfin, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert, quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz, les inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution.

Les références bibliographiques seront ultérieurement spécifiées dans chacun des paragraphes suivants.



# Chapitre 1

## Modélisation

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus où nous allons introduire les cadres physiques utilisés dans cette thèse; il est destiné à rappeler l'équation de mouvement de Cauchy, à décrire les lois de comportement élastiques, électro-élastiques, viscoélastiques et électro-viscoélastiques. Par ailleurs, nous précisons dans ce chapitre les conditions aux limites de contact avec frottement, avec ou sans adhésion.

### 1.1 Cadre physique

Les phénomènes de contact considérés dans ce mémoire sont décrits par les deux cadres physiques suivants :

**Cadre physique n° 1.** (*Problème mécanique*). Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2,3$ ) avec une surface frontière régulière  $\Gamma$ , partitionnée en trois parties mesurables  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ , telles que  $mes \Gamma_1 > 0$ . Nous notons par  $\boldsymbol{\nu}$  la normale unitaire sortante à  $\Gamma$ . Le corps est encastré sur  $\Gamma_1$  dans une structure fixe. Sur  $\Gamma_2$  agissent des tractions surfaciques de densité  $\boldsymbol{f}_2$  et dans  $\Omega$  agissent des forces volumiques de densité  $\boldsymbol{f}_0$  (voir figure. 1.1). Nous supposons que  $\boldsymbol{f}_2$  et  $\boldsymbol{f}_0$  varient très lentement par rapport au temps et par conséquent le processus est quasistatique. Soit  $T > 0$  et soit  $[0, T]$  l'intervalle de temps en question. Le corps est en contact avec frottement avec ou sans adhésion avec un obstacle sur la partie  $\Gamma_3$ . Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps. Notre objectif sera d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps, sous l'hypothèse des petites transformations.

Nous utiliserons ce cadre physique dans les chapitres 3 et 6 de ce mémoire.

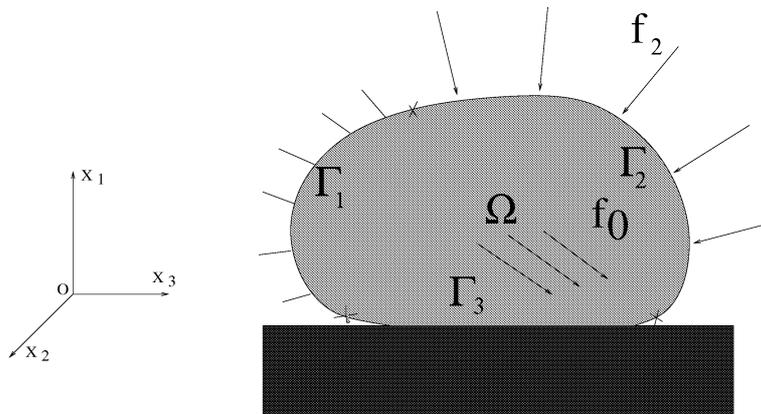


FIG. 1.1 – *Cadre physique n° 1*

**Cadre physique n° 2.** (*Problème électro-mécanique*). Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2,3$ ) avec une surface frontière régulière  $\Gamma$ , partitionnée en trois parties mesurables  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ , telles que  $mes \Gamma_1 > 0$ . On note par  $\nu$  la normale unitaire sortante à  $\Gamma$ . Le corps est encastré sur  $\Gamma_1$  dans une structure fixe. Sur  $\Gamma_2$  agissent des tractions surfaciques de densité  $\mathbf{f}_2$  et dans  $\Omega$  agissent des forces volumiques de densité  $\mathbf{f}_0$  (voir Fig. 1.2). Nous supposons que  $\mathbf{f}_2$  et  $\mathbf{f}_0$  varient très lentement par rapport au temps. Soit  $T > 0$  et soit  $[0, T]$  l'intervalle de temps en question.

En plus de l'action des forces et des tractions, le corps est soumis à l'action des charges électriques de densité volumique  $q_0$  et des charges électriques de surface. Pour les décrire, nous considérons une deuxième partition de la frontière  $\Gamma$  en trois parties mesurables  $\Gamma_a, \Gamma_b$  et  $\Gamma_3$  telles que  $mes(\Gamma_a) > 0$ . Nous supposons que le corps est en contact frottant avec ou sans adhésion avec une fondation isolatrice (ou conductive) sur  $\Gamma_3$ , le potentiel électrique s'annule sur  $\Gamma_a$  et une charge électrique superficielle de densité  $q_2$  est prescrite sur  $\Gamma_b$ . La différence par rapport au cadre physique précédent résulte du fait que maintenant nous prenons en considération les propriétés mécaniques et aussi les propriétés électriques du corps matériel. Nous étudions l'évolution de ces propriétés dans l'intervalle de temps  $[0, T]$  en admettant que le processus est quasistatique, dans l'hypothèse des petites transformations.

Nous utiliserons ce cadre physique dans les chapitres 4, 5 et 7 de ce mémoire.

Avant d'obtenir les modèles mathématiques qui correspondent aux cadres physiques présentés, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de

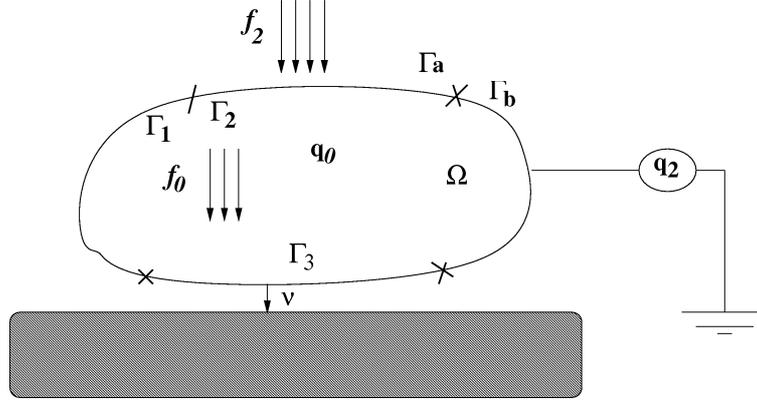


FIG. 1.2 – Cadre physique n° 2

ce mémoire.

Nous désignons par  $\mathbb{S}^d$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ); " $\cdot$ " et " $|\cdot|$ " représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{S}^d$ . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_i v_i, \quad \|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad \|\boldsymbol{\tau}\| = (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

avec la convention de l'indice muet.

Pour un vecteur  $\mathbf{v}$ , nous notons par  $v_\nu$  et  $\mathbf{v}_\tau$  les composantes *normale* et *tangentielle* à la frontière, définies par

$$(1.1) \quad v_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

Nous désignons par  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  le champ des *contraintes*, par  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  le champ des *déplacements* et par  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  le champ des *déformations infinitésimales*. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  et  $t \in [0, T]$ .

Pour un champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  nous dénotons par  $\sigma_\nu$  et  $\boldsymbol{\sigma}_\tau$  les composantes *normale* et *tangentielle* à la frontière, données par

$$(1.2) \quad \sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(1.3) \quad (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{v} = \sigma_\nu v_\nu + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau,$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire, dans l'établissement des formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact.

En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps; par exemple

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{u}} = \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}$$

où  $\dot{\mathbf{u}}$  désigne le *champ des vitesses* et  $\ddot{\mathbf{u}}$  désigne le *champ des accélérations*. Pour le champ des vitesses  $\dot{\mathbf{u}}$  les notations  $\dot{u}_\nu$  et  $\dot{\mathbf{u}}_\tau$  représentent respectivement les vitesses *normale* et *tangentielle* à la frontière, c'est-à-dire

$$\dot{u}_\nu = \dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\mathbf{u}}_\tau = \dot{\mathbf{u}} - \dot{u}_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$(1.4) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Notons qu'ici et tout au long de la thèse, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante à la variable spatiale.

Passons maintenant à la description des modèles mathématiques associées aux cadres physiques ci-dessus.

**Modèle mathématique n° 1.** Le premier modèle mathématique étudié dans ce mémoire, décrit l'évolution du corps dans le *cadre physique n° 1* (page 5). Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ .

On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de mouvement de Cauchy

$$(1.5) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

où  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  désigne la *densité de masse*; ici "Div" représente l'opérateur divergence pour les tenseurs,  $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j})$ . Le processus d'évolution défini par (1.5) s'appelle *processus dynamique*. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, dans le cas où le champ des vitesses  $\dot{\mathbf{u}}$  varie très lentement par rapport au temps, le terme  $\rho \ddot{\mathbf{u}}$  peut être négligé. Dans ce cas l'équation (1.5) devient

$$(1.6) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T).$$

L'équation (1.6) s'appelle *l'équation d'équilibre*. Le processus d'évolution défini par (1.6) s'appelle *processus quasistatique*. Nous rappelons que dans le *cadre physique n° 1*,  $\mathbf{f}_2$  et  $\mathbf{f}_0$  varient très lentement par rapport au temps. Par conséquent, nous supposons que les accélérations dans le système sont négligeables. Nous nous plaçons donc dans le cas *quasistatique* et nous utilisons l'équation (1.6).

Puisque le corps est encastré sur  $\Gamma_1$ , le champ des déplacements s'annule

$$(1.7) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T).$$

La condition aux limites en tractions est

$$(1.8) \quad \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T),$$

$\mathbf{f}_2$  étant une donnée du problème.

Nous allons compléter ultérieurement le modèle mathématique (1.5)–(1.8) par les conditions de contact sur la partie  $\Gamma_3$  de la frontière.

**Modèle mathématique n° 2.** Ce modèle mathématique décrit l'évolution du corps dans le *cadre physique n° 2* (page 6). C'est un modèle électro-mécanique qui est plus général que le premier. Les inconnues mécaniques du problème sont le champ des déplacements  $\mathbf{u}$  et le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  satisfaisant les égalités (1.6)–(1.8). A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir le champ de déplacement électrique  $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et le potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ . L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacement électrique

$$(1.9) \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = q_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T),$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs,  $\operatorname{div} \mathbf{D} = (D_{i,i})$ , et  $q_0$  représente la densité des charges électriques volumiques. Rappelons que dans le *cadre physique n° 2*, le potentiel électrique s'annule sur la partie  $\Gamma_a$  de la frontière

$$(1.10) \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a \times (0, T),$$

tandis que sur  $\Gamma_b$ , une charge électrique de densité  $q_2$  est prescrite,

$$(1.11) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0, T).$$

Ce modèle piézoélectrique (1.6)–(1.11) sera complété ultérieurement par les conditions aux limites sur la surface de contact  $\Gamma_3$ .

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui-même : c'est l'objet des lois de comportement que nous décrirons dans le deuxième paragraphe de ce chapitre.

## 1.2 Lois de comportement

Les lois de comportement caractérisent ce qui est propre à chaque type de matériau. Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement; par exemple, voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement mécaniques, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ , le tenseur des déformations infinitésimales  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et leurs dérivées temporelles  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  et  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électro-mécaniques, car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique  $\boldsymbol{D} = (D_i)$  ainsi que le champ électrique  $\boldsymbol{E}(\varphi) = -\nabla \varphi = -(\varphi_{,i})$ . Nous présentons par la suite les lois de comportement qui interviennent dans ce mémoire, elles correspondent à quatre catégories particulières de matériaux : matériaux élastiques, matériaux électro-élastiques, matériaux viscoélastiques et matériaux électro-viscoélastiques.

Dans le cas unidimensionnel, on dit qu'un matériau est *élastique* si, lors des essais de charge-décharge les courbes  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  coïncident; dans le cas contraire il est *plastique* (*anelastique*) et après décharge complète il subsiste une déformation résiduelle. Enfin, on dit qu'un matériau est *viscoélastique* s'il peut décrire le phénomène de relaxation ou de fluage.

En conclusion, l'analyse des données expérimentales permet d'établir ce qui est propre au matériau lui-même et conduit à l'établissement de la forme des lois de comportement.

**Lois de comportement des matériaux élastiques.** Nous considérons ici une catégorie de matériaux pour lesquels la loi de comportement s'écrit sous la forme suivante

$$(1.12) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}).$$

Ici le tenseur des contraintes est une fonction (linéaire ou non linéaire) du tenseur des déformations infinitésimales  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ ; ceci correspond aux matériaux élastiques et la loi de comportement (1.12) s'appelle *loi de comportement élastique*. Dans le cas unidimensionnel la loi (1.12) peut modéliser certaines propriétés mises en évidence par les expériences de chargement-monotone : la linéarité de la courbe  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  (selon  $\mathcal{F}$  est linéaire ou non linéaire), le durcissement ou l'adoucissement de la courbe  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  (selon  $\mathcal{F}$  est monotone ou non monotone).

Par contre, ni le fluage, ni la relaxation ne peuvent être décrits par la loi (1.12). En effet, plaçons-nous dans le cas unidimensionnel; si par exemple à l'instant  $t = 0$  on a  $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$  et nous maintenons la déformation constante  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \quad \forall t > 0$  il résulte que  $\sigma(t) = \mathcal{F}(\varepsilon_0) \quad \forall t > 0$ . Par conséquent le modèle (1.12) ne peut pas décrire le phénomène de relaxation mis en évidence par les essais expérimentaux. Un commentaire similaire peut se faire pour le phénomène de fluage. De même, pour l'équation (1.12), dans le cas unidimensionnel, les courbes charge-décharge  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  coïncident. Donc, ce modèle ne peut pas décrire les déformations résiduelles.

En général, la fonction  $\mathcal{F}$  dépend du point  $\mathbf{x} \in \Omega$  ( $\Omega$  étant le domaine de  $\mathbb{R}^d$  occupé par le corps), donc on a

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, t > 0.$$

Si  $\mathcal{F}$  ne dépend pas explicitement de  $\mathbf{x}$ , le milieu est dit *homogène*, sinon il est dit *non-homogène*.

Nous utiliserons la loi élastique (1.12) dans le chapitre 3 de ce mémoire.

**Lois de comportement des matériaux viscoélastiques.** L'investigation des propriétés mécaniques des matériaux tels que les pâtes, les huiles et les cires a mis en évidence les insuffisances de la théorie de l'élasticité. En effet, certains phénomènes, tels que le fluage ou la relaxation ne peuvent être décrits par les lois de comportement élastiques. C'est pourquoi les modèles viscoélastiques furent introduits. Ils sont utilisés aussi pour décrire le comportement de différents matériaux comme les métaux, les polymères, les caoutchoucs et les roches.

Dans le cas unidimensionnel, ces matériaux ont des caractéristiques élastiques, mais en même temps, les essais de chargement monotone indiquent que la courbe  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  dépend de  $\dot{\varepsilon}$ . Ce sont donc des *matériaux viscoélastiques*. Dans le cas multidimensionnel la loi viscoélastique de Kelvin-Voigt s'écrit

$$(1.13) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$$

où  $\mathcal{A}$  représente l'opérateur de *viscosité* et  $\mathcal{G}$  est l'opérateur d'*élasticité*. Remarquons que lorsque  $\mathcal{A} \equiv \mathbf{0}$ , la loi (1.13) se réduit à une loi de comportement élastique de la forme (1.12).

Nous utiliserons la loi viscoélastique dans le sixième chapitre de ce mémoire.

**Lois de comportement des matériaux électro-élastiques.** Pour modéliser les propriétés électro-élastiques des matériaux, nous considérons une loi de comportement de la forme

$$(1.14) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi), \\ \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathcal{B}\mathbf{E}(\varphi), \end{cases}$$

où  $\mathcal{F}$  est l'opérateur d'élasticité, non forcément linéaire, à champ électrique nul,  $\mathcal{E} = (e_{ijk})$  est le tenseur *piézoélectrique* qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul;  $\mathcal{B} = (b_{ij})$  est le tenseur de la *permittivité électrique* à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif et  $\mathbf{E}(\varphi) = -\nabla\varphi$  où  $\nabla\varphi = (\varphi_{,i})$  représente le champ électrique. Par ailleurs  $\mathcal{E}^* = (e_{ijk}^*)$  dénote le transposé du tenseur  $\mathcal{E}$ , tel que

$$(1.15) \quad \mathcal{E}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{E}^*\mathbf{v} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}^d, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d.$$

Nous donnons maintenant un exemple de la loi de comportement électro-élastique non linéaire. Nous prenons dans (1.14)

$$(1.16) \quad \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{A}\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{\alpha}(\boldsymbol{\xi} - P_K\boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d$$

où  $\alpha$  est une constante strictement positive.  $\mathcal{A} : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  est un tenseur d'ordre quatre symétrique et défini positif;  $K \subset \mathbb{S}^d$  est un convexe fermé non vide et  $P_K : \mathbb{S}^d \rightarrow K$  est l'opérateur de projection sur  $K$ . Ce convexe est défini par  $K = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d \mid G(\boldsymbol{\xi}) \leq k\}$  où  $G : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe et continue telle que  $G(\mathbf{0}) = 0$  et  $k > 0$ .

Pour plus de détails sur les lois de comportement (1.14), nous renvoyons le lecteur à voir par exemple [10, 12].

Nous utiliserons les lois de comportement des matériaux électro-élastiques dans les chapitres 4 et 5 de la deuxième partie de ce mémoire.

**Lois de comportement des matériaux électro-viscoélastiques.** Un matériau est dit électro-viscoélastique s'il possède une loi de comportement de la forme

$$(1.17) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi), \\ \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathcal{B}\mathbf{E}(\varphi) \end{cases}$$

dans laquelle l'opérateur  $\mathcal{A}$  est l'opérateur de viscosité à champ électrique nul,  $\mathcal{G}$  est l'opérateur d'élasticité pas forcément linéaire à champ électrique nul,  $\mathcal{E} = (e_{ijk})$  le tenseur piézoélectrique à champ constant ou nul,  $\mathcal{B} = (b_{ij})$  le tenseur de la permittivité électrique à déformation nulle et  $\mathbf{E}(\varphi) = -\nabla\varphi$  représente le champ électrique. Remarquons que lorsque  $\mathcal{A} \equiv \mathbf{0}$ , la loi (1.17) devient une loi de comportement électro-élastique de la forme (1.14).

Un exemple de la loi électro-viscoélastique non linéaire est le suivant

$$(1.18) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \frac{1}{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon} - P_K\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi),$$

où  $\mathcal{A}$  est un tenseur d'ordre quatre. Ses composantes  $a_{ijkl}$  s'appellent "coefficients de viscosité",  $K \subset \mathbb{S}^d$  est un convexe fermé non vide et  $P_K : \mathbb{S}^d \rightarrow K$  est l'opérateur de projection de  $\mathbb{S}^d$  sur  $K$ . L'opérateur d'élasticité est donné par

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon} - P_K\boldsymbol{\varepsilon})$$

et  $\mathcal{E}$  est un tenseur d'ordre trois. Ses composantes  $e_{ijk}$  s'appellent "coefficients piézo-électriques".

Nous utiliserons la loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques dans le chapitre 7 de la troisième partie de ce mémoire.

Finalement, afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur  $\Gamma_3$ ; c'est l'objet des conditions de contact et des lois de frottement que nous décrirons dans le paragraphe suivant.

### 1.3 Lois de contact avec frottement

Par *condition de contact* nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesses ou des contraintes. Par *loi de frottement* nous comprenons une relation entre la contrainte tangentielle  $\boldsymbol{\sigma}_\tau$  et le déplacement tangentiel  $\mathbf{u}_\tau$  ou la vitesse tangentielle  $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ . Notons ici que  $\boldsymbol{\sigma}_\tau$  s'appelle aussi *force de frottement*.

Nous commençons par présenter les conditions aux limites de contact utilisées tout au long de ce mémoire. Dans ce cas, nous nous plaçons dans le *cadre physique n° 1* (page 5). Les égalités et les inégalités qui suivent sont considérées vraies presque partout sur  $\Gamma_3 \times (0, T)$ .

**Contact avec compliance normale.** Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale  $\sigma_\nu$  satisfait la condition dite de *compliance normale*

$$(1.19) \quad -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g),$$

où  $u_\nu$  est le déplacement normal,  $g$  représente l'interstice entre le corps et la fondation et  $p_\nu$  est une fonction positive donnée, appelée *fonction de compliance normale*. Cette condition indique que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration  $u_\nu - g$ . Précisons que dans les chapitres 3, 5 et 6 du mémoire nous considérons le cas où le corps repose sur la fondation, c'est-à-dire, l'interstice est nul,  $g = 0$ . Comme exemple de la fonction  $p_\nu$  nous pouvons considérer

$$(1.20) \quad p_\nu(r) = c_\nu r_+$$

où  $c_\nu$  est une constante positive et  $r_+ = \max\{0, r\}$ . Un deuxième exemple est donné par

$$(1.21) \quad p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha \end{cases}$$

où  $\alpha$  est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.19) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse  $\alpha$ , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

Maintenant, nous présentons les lois de frottement intervenant dans ce mémoire.

**Loi de frottement de type Coulomb.** C'est une des lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématique. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer comme suit :

$$(1.22) \quad \begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu|\sigma_\nu|, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow \mathbf{u}_\tau = \mathbf{0}, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \mathbf{u}_\tau, \end{cases}$$

où  $\mu \geq 0$  est le coefficient de frottement. C'est une version statique de la loi de Coulomb qui intervient dans la description du contact frottant des problèmes étudiés dans la deuxième partie du mémoire.

Maintenant, nous remplaçons le seuil de frottement  $\sigma_\nu$  de la loi (1.22), par la condition de compliance normale (1.19), de façon à obtenir les conditions suivantes.

$$(1.23) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu p_\nu(u_\nu - g), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu p_\nu(u_\nu - g) \Rightarrow \mathbf{u}_\tau = \mathbf{0}, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu p_\nu(u_\nu - g) \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda \mathbf{u}_\tau. \end{cases}$$

Dans les chapitres 3, 5 et 6, nous utilisons la loi (1.23) avec le cas particulier  $g = 0$  i.e. lorsque l'interstice est nul; ce choix ne représente guère une restriction du point de vue mécanique, mais il est imposé pour raison de simplification des calculs.

Une version quasistatique de la loi de frottement de Coulomb utilisée en littérature est donnée par

$$(1.24) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq p_\tau(u_\nu - g), \\ \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau(u_\nu - g) \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|}, \end{cases}$$

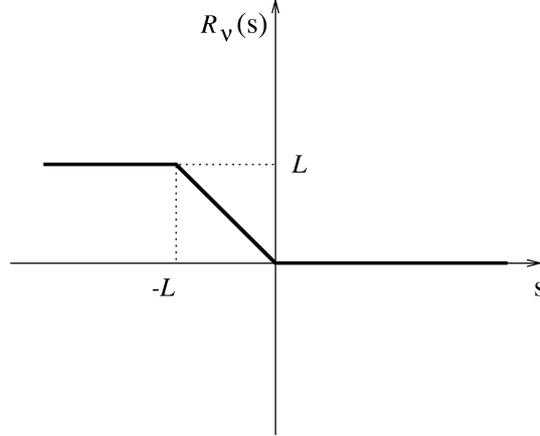
où  $p_\tau$  est une fonction positive. Dans (1.24), la contrainte tangentielle ne peut pas excéder le seuil de frottement  $p_\tau(u_\nu - g)$ . De plus, quand le seuil de frottement est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement. Cette condition de frottement a été utilisée dans différents papiers, par exemple [34, 58].

## 1.4 Lois de contact avec frottement et adhésion

Dans quelques modèles étudiés, nous supposons que le corps est en contact adhésif avec frottement sur la partie  $\Gamma_3$  de la frontière avec une fondation. Ceci se traduit par l'introduction d'une nouvelle variable interne de surface, en se basant sur les idées de Frémond [27, 28], appelée champ d'*adhésion* et notée par  $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ; elle décrit l'intensité des couches actives d'adhésion sur la surface de contact et elle vérifie  $0 \leq \beta(t) \leq 1$  sur  $\Gamma_3$ . Lorsque  $\beta(t) = 0$ , il n'y a plus d'adhésion, lorsque  $\beta(t) = 1$  c'est le cas d'une adhésion complète et il y a lieu à une adhésion partielle quand  $0 < \beta(t) < 1$  sur  $\Gamma_3$ . Pour décrire les conditions aux limites correspondantes, nous supposons que le vecteur de contrainte de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}$  a une décomposition de la forme

$$(1.25) \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu})^{ad} + (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu})^{fc},$$

où  $(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu})^{ad}$  et  $(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu})^{fc}$  dénotent les parties de  $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}$  associées à l'adhésion et au frottement, respectivement. Nous dénotons par  $\sigma_\nu$ ,  $\sigma_\nu^{ad}$ ,  $\sigma_\nu^{fc}$  les composantes normales des vecteurs


 FIG. 1.3 – Représentation graphique de l'opérateur de troncation  $R_\nu$ 

$\sigma_\nu$ ,  $(\sigma_\nu)^{ad}$  et  $(\sigma_\nu)^{fc}$ , qui sont

$$(1.26) \quad \sigma_\nu = \sigma_\nu \cdot \nu, \quad \sigma_\nu^{ad} = (\sigma_\nu)^{ad} \cdot \nu, \quad \sigma_\nu^{fc} = (\sigma_\nu)^{fc} \cdot \nu,$$

et par  $\sigma_\tau$ ,  $\sigma_\tau^{ad}$  et  $\sigma_\tau^{fc}$  les composantes tangentielles des mêmes vecteurs, qui sont

$$(1.27) \quad \sigma_\tau = \sigma_\nu - \sigma_\nu \nu, \quad \sigma_\tau^{ad} = (\sigma_\nu)^{ad} - \sigma_\nu^{ad} \nu, \quad \sigma_\tau^{fc} = (\sigma_\nu)^{fc} - \sigma_\nu^{fc} \nu.$$

Nous supposons que la composante normale du vecteur  $(\sigma_\nu)^{ad}$  satisfait la condition

$$(1.28) \quad \sigma_\nu^{ad} = \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)$$

dans laquelle  $\gamma_\nu$  est un coefficient positif et  $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est l'opérateur de troncation défini par

$$(1.29) \quad R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases}$$

Ici  $L > 0$  est la longueur caractéristique du lien, au delà de laquelle il s'étire sans offrir aucune résistance complémentaire. L'introduction de l'opérateur  $R_\nu$ , ensemble avec l'opérateur  $\mathbf{R}_\tau$  défini ci-dessous, est motivée par les arguments mathématiques mais ce n'est pas restrictif du point de vue physique, puisqu'aucune restriction de la taille du paramètre  $L$  n'est faite que dans ce qui suit (voir figure 1.3). Ainsi, en choisissant  $L$  très grand, nous pouvons assumer que  $R_\nu(u_\nu) = -u_\nu$  et, donc, nous obtenons la condition de compliance normale

$$\sigma_\nu^{ad} = \begin{cases} \gamma_\nu \beta^2 u_\nu & \text{si } u_\nu \leq 0, \\ 0 & \text{si } u_\nu > 0. \end{cases}$$

Aussi, nous supposons que la composante normale du vecteur  $(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu})^{fc}$  satisfait la condition de contact avec compliance normale

$$(1.30) \quad -\sigma_\nu^{fc} = p_\nu(u_\nu),$$

où  $u_\nu$  est le déplacement normal et  $p_\nu$  est la fonction positive prescrite telle que  $p_\nu(r) = 0$  pour  $r \leq 0$ . Combinons les égalités (1.25), (1.26), (1.28) et (1.2), nous dérivons la condition de contact de compliance normale avec adhésion,

$$(1.31) \quad -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

La contribution de l'adhésion à la traction normale est donnée par le terme  $\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)$ . Ainsi, la traction adhésive est nonnégative et proportionnelle, avec un coefficient de proportionnalité  $\gamma_\nu$ , par rapport au carré de l'intensité d'adhésion et le déplacement normal, mais tant que  $u_\nu$  n'excède pas la longueur du lien  $L$ .

Ensuite, nous supposons que la composante tangentielle du vecteur  $(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu})^{ad}$  satisfait la condition

$$(1.32) \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^{ad} = -\gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)$$

où, encore,  $\gamma_\tau$  est un coefficient positif et  $\mathbf{R}_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est l'opérateur de troncation défini par

$$(1.33) \quad \mathbf{R}_\tau(\mathbf{v}) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } \|\mathbf{v}\| \leq L, \\ L \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} & \text{si } \|\mathbf{v}\| > L. \end{cases}$$

Cette condition montre que la contrainte tangentielle adhésive sur la surface de contact est proportionnelle au déplacement tangentiel, mais tant qu'il n'excède pas la longueur du lien  $L$ .

Le frottement est modélisé par une version statique de la loi de frottement de Coulomb. Pour cela, considérons la décomposition (1.25) du vecteur de Cauchy et supposons que

$$(1.34) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau^{fc}\| \leq -\mu\sigma_\nu^{fc}, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau^{fc}\| < -\mu\sigma_\nu^{fc} \Rightarrow \mathbf{u}_\tau = \mathbf{0}, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau^{fc}\| = -\mu\sigma_\nu^{fc} \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ telle que } \boldsymbol{\sigma}_\tau^{fc} = -\lambda \mathbf{u}_\tau, \end{cases}$$

où  $\mu$  est le coefficient de frottement, supposé être positif. Combinons les relations (1.26), (1.27), (1.30), (1.32) et (1.34) nous obtenons la loi de frottement avec adhésion,

$$(1.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\| \leq \mu p_\nu(u_\nu), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\| < \mu p_\nu(u_\nu) \Rightarrow \mathbf{u}_\tau = \mathbf{0}, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\| = \mu p_\nu(u_\nu) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) = -\lambda \mathbf{u}_\tau \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (1.31) a été déjà utilisée dans [68] et les conditions de frottement similaires à ceux dans (1.35) ont été considérées dans [57] dans le cas particulier  $\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) = \mathbf{u}_\tau$  et  $R_\nu(u_\nu) = -u_\nu$ , pour  $L$  très grand.

Pour compléter le modèle, nous supposons que l'évolution du champ d'adhésion est gouvernée par une équation différentielle ordinaire

$$(1.36) \quad \dot{\beta} = -\left(\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu)^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\|^2) - \epsilon_a\right)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

A celle-ci, nous rajoutons la condition initiale

$$(1.37) \quad \beta(0) = \beta_0.$$

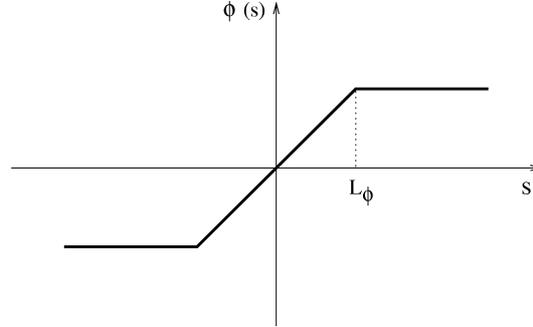
Ici et ci-dessous, en plus des paramètres positives  $\gamma_\nu$  et  $\gamma_\tau$  déjà introduits dans (1.28) et (1.32),  $\epsilon_a$  est un paramètre positif et  $r_+ = \max\{0, r\}$ . Notons que le processus adhésif est irréversible, en effet, une fois que le décollement se passe le collage ne peut pas être rétabli, puisque  $\dot{\beta} \leq 0$ . Pour plus de détails concernant la modélisation du contact adhésif, nous référons aux livres [29, 68, 74].

## 1.5 Conditions électriques à la surface de contact

Dans ce paragraphe nous allons énoncer les conditions de contact électrique, associées aux problèmes électro-mécaniques, sur la partie  $\Gamma_3$  de la surface. Nous supposons que la fondation est électriquement conductive et son potentiel est maintenu à  $\varphi_0$ . La condition électrique sur  $\Gamma_3$  est donnée par

$$(1.38) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = \psi(u_\nu - g) \phi(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

où  $\psi$  et  $\phi$  sont des fonctions données qui seront décrites ultérieurement. Cette condition représente une condition régularisée qui peut être obtenue à partir des considérations suivantes.


 FIG. 1.4 – Représentation graphique de la fonction  $\phi$ 

Lorsqu'il n'y a pas de contact en un point sur la surface (i.e.  $u_\nu < g$ ), l'interstice entre le corps et la base est supposé être isolant (disons qu'il est rempli d'air) et la composante normale du champ de déplacement électrique s'annule pour qu'il n'y ait aucune charge électrique libre sur la surface. Ainsi,

$$(1.39) \quad u_\nu < g \implies \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0.$$

Durant le processus de contact, (i.e. quand  $u_\nu \geq g$ ) la composante normale du champ de déplacement électrique ou la charge électrique libre est supposé être proportionnelle à la différence de potentiel entre la surface du corps et la fondation, avec une constante positive  $k$  comme facteur de proportionnalité. Ainsi,

$$(1.40) \quad u_\nu \geq g \implies \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = k(\varphi - \varphi_0).$$

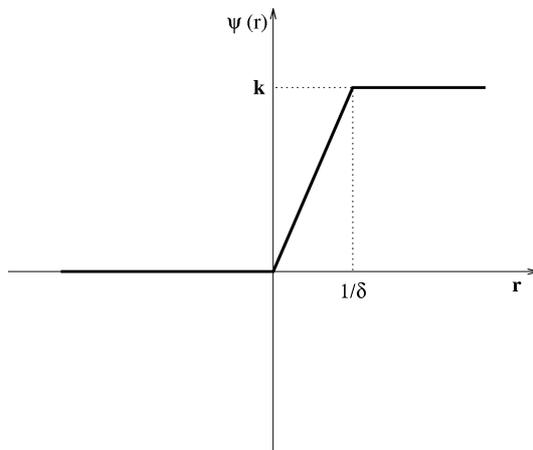
Combinons (1.39), (1.40) pour obtenir

$$(1.41) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = k \chi_{[0, \infty)}(u_\nu - g)(\varphi - \varphi_0),$$

où  $\chi_{[0, \infty)}$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, \infty)$ , qui est donnée par

$$\chi_{[0, \infty)}(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } r < 0, \\ 1 & \text{if } r \geq 0. \end{cases}$$

La condition (1.41) décrit le contact électrique parfait et elle est en quelque sorte semblable à la condition bien connue de contact de Signorini. Les deux conditions peuvent être considérées comme des sur-idéalisations dans plusieurs applications.


 FIG. 1.5 – Représentation graphique de la fonction  $\psi$ 

Pour la rendre plus réaliste, nous régularisons la condition (1.41) par la condition (1.38) dans laquelle  $\psi$  est une fonction régulière qui va être décrite ci-dessous et  $\phi$  est une fonction de troncation,

$$(1.42) \quad \phi(s) = \begin{cases} -L_\phi & \text{si } s < -L_\phi, \\ s & \text{si } -L_\phi \leq s \leq L_\phi, \\ L_\phi & \text{si } s > L_\phi, \end{cases}$$

où  $L_\phi$  est une constante positive très grande. De cette façon, la différence  $\varphi - \varphi_0$  est remplacé par  $\phi(\varphi - \varphi_0)$ . Notons que cette troncation ne pose aucune limitation pratique sur l'applicabilité du modèle puisque  $L_\phi$  peut être arbitrairement grand (voir figure 1.4) et donc dans les applications  $\phi(\varphi - \varphi_0) = \varphi - \varphi_0$ .

Les raisons de la régularisation (1.38) de (1.41) sont mathématiques.

Premièrement, nous avons besoin d'éviter les discontinuités dans les charges électriques lorsque le contact est établi et donc nous régularisons la fonction  $k \chi_{[0, \infty)}$  dans (1.41) par une fonction Lipschitzienne  $\psi$ . Un choix possible est l'exemple suivant :

$$(1.43) \quad \psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ k\delta r & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{1}{\delta}, \\ k & \text{si } r > \frac{1}{\delta}, \end{cases}$$

où  $\delta > 0$  est un paramètre assez grand. Ce choix veut dire que durant le processus du contact, la conductivité électrique augmente avec le contact à travers les aspérités de

la surface, et se stabilise quand la pénétration  $u_\nu - g$  atteint la valeur  $\frac{1}{\delta}$  (voir figure 1.5) .

Deuxièmement, nous avons besoin du terme  $\phi(\varphi - \varphi_0)$  pour rendre le terme  $\varphi - \varphi_0$  borné.

Notons que lorsque  $\psi \equiv 0$  dans (1.38), nous obtenons

$$(1.44) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T),$$

ce qui découple les problèmes électriques et mécaniques sur la surface de contact. La condition (1.44) modélise le cas où l'obstacle est un isolant parfait et a été utilisée dans [10, 46, 66, 67]. La condition (1.38) à la place de (1.44), introduit un couplage fort entre les conditions aux limites mécaniques et électriques et mène vers un nouveau modèle mathématique, non standard. Elle sera utilisée dans les chapitres 4 et 7 du mémoire. Par ailleurs, la condition (1.38) va être utilisée dans le cinquième chapitre du mémoire où nous avons supposé que la base est isolatrice (i.e.  $\psi \equiv 0$ ).



## Chapitre 2

# Outils Mathématiques

Dans ce chapitre, nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire, et donnons quelques propriétés nécessaires dans la suite. Partout dans ce chapitre  $\Omega$  est un domaine borné et lipschitzien de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2,3$ ), de frontière  $\Gamma$  représentable localement comme le graphe d'une fonction lipschitzienne sur un ouvert de  $\mathbb{R}^{d-1}$ ,  $\Omega$  étant situé localement d'un seul côté de  $\Gamma$ . Par ailleurs, nous considérons une partition  $\Gamma$  en trois parties mesurables disjointes  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , et  $\Gamma_3$  d'un côté et une partition de  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  en deux parties ouvertes  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$  d'un autre côté, telles que  $mes \Gamma_1 > 0$  et  $mes \Gamma_a > 0$ .

### 2.1 Espaces de Sobolev

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$\begin{aligned} H &= \{\mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\}, \\ \mathcal{H} &= \{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}, \\ H_1 &= \{\mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega)\}, \\ \mathcal{H}_1 &= \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \mid \sigma_{ij,j} \in H\}. \end{aligned}$$

Les espaces  $H, \mathcal{H}, H_1$  et  $\mathcal{H}_1$  sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés par

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H &= \int_{\Omega} u_i v_i dx, \\ (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_1} &= (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H + (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, \\ (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}_1} &= (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \text{Div } \boldsymbol{\tau})_H, \end{aligned}$$

respectivement, où  $\boldsymbol{\varepsilon} : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$  et  $\text{Div} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$  sont respectivement les opérateurs de *déformation* et de *divergence*, définis par

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces  $H$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $H_1$  et  $\mathcal{H}_1$  sont notées par  $\|\cdot\|_H$ ,  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ ,  $\|\cdot\|_{H_1}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$ , respectivement.

Puisque la frontière  $\Gamma$  est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur  $\boldsymbol{\nu}$  à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs  $\mathbf{v} \in H_1$  nous utilisons la notation  $\boldsymbol{\nu}$  pour désigner la trace  $\gamma \mathbf{v}$  de  $\mathbf{v}$  sur  $\Gamma$ . Rappelons que l'application de trace  $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$  est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de  $H_1$  par cette application est notée par  $H_\Gamma$ ; ce sous-espace s'injecte continûment dans  $L^2(\Gamma)^d$ . Désignons par  $H'_\Gamma$  le dual de  $H_\Gamma$ , et  $(\cdot, \cdot)$  le produit de dualité entre  $H'_\Gamma$  et  $H_\Gamma$ . Pour tout  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_1$ , il existe un élément  $\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \in H'_\Gamma$  tel que

$$(2.1) \quad (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}, \gamma \mathbf{v}) = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_H \quad \forall \mathbf{v} \in H_1.$$

En outre, si  $\boldsymbol{\sigma}$  est assez régulier (par exemple  $C^1$ ), nous avons la formule

$$(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}, \gamma \mathbf{v}) = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in H_1.$$

Donc, pour  $\boldsymbol{\sigma}$  assez régulier nous avons la formule suivante (Formule de Green) :

$$(2.2) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_H = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in H_1.$$

Nous définissons le sous-espace fermé de  $H_1$

$$(2.3) \quad V = \{ \mathbf{v} \in H_1 \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \}.$$

Puisque  $\text{mes } \Gamma_1 > 0$ , l'inégalité de Korn s'applique sur  $V$ ; alors, il existe une constante  $C_K > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega$  et  $\Gamma_1$  telle que

$$(2.4) \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{H}} \geq C_K \|\mathbf{v}\|_{H_1} \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Une preuve de cette inégalité peut être trouvée dans [53] p.79.

Nous considérons sur l'espace  $V$ , le produit scalaire donné par

$$(2.5) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

et soit  $\|\cdot\|_V$  la norme associée, i.e.

$$(2.6) \quad \|\mathbf{v}\|_V = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que  $\|\cdot\|_{H_1}$  et  $\|\cdot\|_V$  sont des normes équivalentes sur  $V$  et ainsi  $(V, \|\cdot\|_V)$  est un espace de Hilbert. De plus, en utilisant le Théorème de trace de Sobolev, (2.2) et (2.3), il existe une constante  $c_0$  dépendant uniquement de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  telle que

$$(2.7) \quad \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Pour une fonction scalaire  $\beta$ , qui représente le champ d'adhésion sur la surface  $\Gamma_3$  du contact, nous définissons l'ensemble

$$(2.8) \quad \mathcal{Q} = \{ \beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid 0 \leq \beta(t) \leq 1 \text{ sur } \Gamma_3 \}.$$

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de Sobolev associés aux inconnues électriques (champ du déplacement électrique  $\mathbf{D}$  et le potentiel électrique  $\varphi$ ) des problèmes électro-mécaniques qui vont être introduits dans les chapitres 4, 5 et 7 de la thèse. Soit les espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \{ \mathbf{D} = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega) \} = L^2(\Omega)^d, \\ \mathcal{W}_1 &= \{ \mathbf{D} = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega), D_{i,i} \in L^2(\Omega) \}. \end{aligned}$$

munis des produits scalaires

$$(\mathbf{D}, \mathbf{E})_{\mathcal{W}} = \int_{\Omega} D_i E_i dx, \quad (\mathbf{D}, \mathbf{E})_{\mathcal{W}_1} = (\mathbf{D}, \mathbf{E})_{\mathcal{W}} + (\operatorname{div} \mathbf{D}, \operatorname{div} \mathbf{E})_{L^2(\Omega)},$$

et leurs normes associées  $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_1}$ , respectivement. Le champ du potentiel électrique va être trouvé dans l'espace

$$W = \{ \xi \in H^1(\Omega) \mid \xi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \}.$$

Puisque  $mes(\Gamma_a) > 0$ , l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est satisfaite, ainsi,

$$(2.9) \quad \|\nabla \xi\|_{\mathcal{W}} \geq c_F \|\xi\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \xi \in W,$$

où  $c_F > 0$  est une constante qui dépend uniquement de  $\Omega$  et  $\Gamma_a$  et  $\nabla \xi = (\xi_{,i})$ . Sur l'espace  $W$ , nous considérons le produit scalaire donné par

$$(\varphi, \xi)_W = (\nabla \varphi, \nabla \xi)_{\mathcal{W}},$$

et soit  $\|\cdot\|_W$  la norme associée. Il s'ensuit de (2.9) que  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  et  $\|\cdot\|_W$  sont des normes équivalentes sur  $W$  et donc  $(W, \|\cdot\|_W)$  est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante  $\tilde{c}_0$  dépendant uniquement de  $\Omega$ ,  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_3$ , telle que

$$(2.10) \quad \|\xi\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0 \|\xi\|_W \quad \forall \xi \in W.$$

Aussi, rappelons que lorsque  $\mathbf{D} \in \mathcal{W}_1$  est une fonction régulière, la formule de Green est satisfaite :

$$(2.11) \quad (\mathbf{D}, \nabla \xi)_W + (\operatorname{div} \mathbf{D}, \xi)_W = \int_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} \xi \, da \quad \forall \xi \in H^1(\Omega).$$

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le lecteur par exemple à [1, 14, 24].

## 2.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel. Bien que le contenu de ce paragraphe est standard et peut être trouvé dans un grand nombre d'ouvrages, une revue d'ensemble sur ce sujet nous a paru utile.

Soit  $0 < T < \infty$  et soit  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace de Banach réel. Nous notons par  $C_c(0, T; X)$  l'ensemble des fonctions continues à support compact dans  $(0, T)$  à valeurs dans  $X$ .

**Définition 2.1.** *Une fonction  $f : [0, T] \rightarrow X$  est dite mesurable s'il existe un sous ensemble  $E \subset [0, T]$  de mesure nulle et une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions appartenant à  $C_c(0, T; X)$  telle que  $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , pour tout  $t \in [0, T] \setminus E$ .*

**Définition 2.2.** *Une fonction  $f : [0, T] \rightarrow X$  est dite fortement dérivable dans  $t_0 \in (0, T)$  s'il existe un élément  $\frac{df}{dt}(t_0) \in X$  appelé la dérivée forte de  $f$  dans  $t_0$ , tel que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (f(t_0 + h) - f(t_0)) - \frac{df}{dt}(t_0) \right\|_X = 0.$$

**Définition 2.3.** *Une fonction  $f : [0, T] \rightarrow X$  est dite intégrable s'il existe une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions appartenant à  $C_c(0, T; X)$  telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|f_n(t) - f(t)\|_X \, dt = 0.$$

**Théorème 2.4. ( Bochner )** Une fonction  $f : [0, T] \rightarrow X$  mesurable est intégrable si et seulement si  $x \mapsto \|f(x)\|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est intégrable. Dans ce cas,

$$\left\| \int_0^T f dt \right\|_X \leq \int_0^T \|f\|_X dt.$$

Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . L'espace de Lebesgue  $L^p(0, T; X)$  est l'ensemble des classes de fonctions  $f : (0, T) \rightarrow X$  mesurables, telles que l'application  $t \rightarrow \|f(t)\|_X$  appartient à  $L^p(X)$ . On sait que  $L^p(0, T; X)$  est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \left\{ c > 0 \mid \|f(t)\|_X \leq c, \quad \text{p.p. } t \in (0, T) \right\} \quad \text{si } p = \infty.$$

Par ailleurs, nous avons les résultats suivants.

**Proposition 2.5.** (1)  $L^p(0, T; X)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) est un espace de Banach.

(2) Si  $X$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$ , alors  $L^2(0, T; X)$  est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

(3)  $L^r(0, T; X) \subseteq L^q(0, T; X)$ , avec injection continue,  $1 \leq q \leq r \leq \infty$ .

(4) Si  $X$  est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' = L^q(0, T; X), \quad \text{si } 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' = L^\infty(0, T; X),$$

où  $L^p(0, T; X)'$  représente le dual de l'espace  $L^p(0, T; X)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Définition 2.6.** Soit  $u, w \in L^1(0, T; X)$ . La fonction  $w$  s'appelle la dérivée généralisée d'ordre  $n$  de  $u$  sur  $(0, T)$  si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t) u(t) dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t) w(t) dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, T),$$

$C_c^\infty(0,T)$  étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans  $(0,T)$ . Nous écrivons  $w = \dot{u}$  pour  $n = 1$  et  $w = u^{(n)}$  pour  $n \geq 2$ .

Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(0,T;X)$  est l'espace des fonctions  $u : [0,T] \rightarrow X$  telles que  $u \in L^p(0,T;X)$  et  $\dot{u} \in L^p(0,T;X)$ . L'espace  $W^{1,p}(0,T;X)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

**Définition 2.7.** Une fonction  $f : [0,T] \rightarrow X$  est dite absolument continue si quelque soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tel que pour toute suite d'intervalles  $(a_j, b_j)$  disjoints, inclus dans  $[0,T]$ , tels que  $\sum_j (b_j - a_j) < \delta$  on a  $\sum_j \|f(b_j) - f(a_j)\|_X \leq \varepsilon$ .

Maintenant nous rappelons le lien entre les fonctions absolument continues et les fonctions de l'espace  $W^{1,p}(0,T;X)$ .

**Théorème 2.8.** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $X$  un espace de Banach réflexif et soit  $u \in L^p(0,T;X)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (1)  $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ .
- (2)  $u$  admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans  $L^p(0,T;X)$ .
- (3) Il existe  $u_0 \in X$  et  $g \in L^p(0,T;X)$ , telles que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Il découle de la démonstration du théorème précédent que, si  $X$  est un espace réflexif, alors toute fonction  $u \in W^{1,p}(0,T;X)$  est fortement dérivable p.p. sur  $(0,T)$  et  $\dot{u} = \frac{du}{dt}$  p.p. sur  $(0,T)$ . Par ailleurs,  $W^{1,1}(0,T;X)$  coïncide avec l'ensemble des fonctions  $u : [0,T] \rightarrow X$  absolument continues et  $W^{1,\infty}(0,T;X)$  coïncide avec l'ensemble des fonctions lipschitziennes  $u : [0,T] \rightarrow X$ .

Étant donné un entier  $k \geq 2$  et un réel  $1 \leq p \leq \infty$  on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0,T;X) = \left\{ u \in W^{k-1,p}(0,T;X); \dot{u} \in W^{k-1,p}(0,T;X) \right\}.$$

On vérifie aisément que  $u \in W^{k,p}(0,T;X)$  si et seulement s'il existe  $k$  fonctions  $g_1, \dots, g_k \in L^p(0,T;X)$  telles que

$$\int_0^T u(t)\varphi^{(j)}(t)dt = (-1)^j \int_0^T g_j(t)\varphi(t), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \forall j = 1, 2, \dots, k$$

où  $\varphi^{(j)}$  désigne la dérivée d'ordre  $j$  de  $\varphi$ . On peut donc considérer les dérivées successives  $\dot{u} = g_1, u^{(2)} = g_2, \dots, u^{(k)} = g_k$ . L'espace  $W^{k,p}(0,T; X)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^k \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Nous dénotons aussi par  $C([0,T]; X)$  et  $C^1([0,T]; X)$  les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur  $[0,T]$  à valeurs dans  $X$ , respectivement, avec les normes

$$\begin{aligned} \|x\|_{C([0,T];X)} &= \max_{t \in [0,T]} \|x(t)\|_X, \\ \|x\|_{C^1([0,T];X)} &= \max_{t \in [0,T]} \|x(t)\|_X + \max_{t \in [0,T]} \|\dot{x}(t)\|_X. \end{aligned}$$

Pour plus de détails sur les résultats résumés dans ce paragraphe nous renvoyons le lecteur par exemple aux références [11, 14, 15].

## 2.3 Inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution

La modélisation de plusieurs classes de problèmes physiques conduit aux inégalités variationnelles elliptiques ou d'évolution, dans lesquelles la fonctionnelle non différentiable dépend de la solution elle-même. Ces dernières sont appelées "*inégalités quasi-variationnelles*". Nous donnons par la suite un résultat d'existence et d'unicité pour ce type de problèmes.

Pour cela, nous considérons un espace de Hilbert  $X$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et de la norme associée  $\|\cdot\|_X$  et soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur non linéaire,  $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f \in X$ . Compte tenu de ces données, nous considérons l'inégalité quasivariationnelle suivante

$$(2.12) \quad u \in X, \quad (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X.$$

Pour résoudre cette inéquation, nous supposons que  $A$  est *fortement monotone* et de *Lipschitz*, c'est-à-dire

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \text{il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ \quad (Au - Av, u - v)_X \geq m\|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X; \\ \text{(b)} \quad \text{il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|Au - Av\|_X \leq M\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \end{array} \right.$$

et la fonctionnelle  $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Pour tout } \eta \in X, j(\eta, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i. sur } X. \\ \text{(b) il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ \qquad j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \\ \qquad \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in X. \end{array} \right.$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème (2.12) est donnée par le résultat suivant.

**Théorème 2.9.** *Supposons que les hypothèses (2.13) et (2.14) sont satisfaites. Alors, si  $\alpha < m$ , pour tout  $f \in X$ , il existe une solution unique  $u \in X$  au problème (2.12).*

Une démonstration du Théorème se trouve par exemple dans [71] p.83.

Dans la troisième partie du mémoire, nous utiliserons un résultat abstrait sur les inéquations quasi-variationnelles d'évolution. Ce résultat concerne les problèmes du type suivant.

$$(2.15) \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} : [0, T] \rightarrow X \text{ tel que} \\ (A\dot{u}(t), v - \dot{u}(t))_X + (Bu(t), v - \dot{u}(t))_X + j(u(t), v) \\ - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad \forall v \in X, t \in [0, T], \end{array}$$

$$(2.16) \quad u(0) = u_0.$$

La différence entre le problème (2.12) et le problème (2.15)–(2.16) consiste dans le fait que le dernier problème est évolutif. En effet,  $f$  et  $u$  dépendent maintenant du temps, la dérivée  $\dot{u}$  apparaît dans la formulation du problème et par conséquent, une condition initiale, (2.16), est rajoutée.

Pour étudier le problème (2.15)–(2.16), en plus des hypothèses (2.13) et (2.14), nous avons besoin des hypothèses suivantes.

L'opérateur non linéaire  $B : X \rightarrow X$  est de Lipschitz, c'est-à-dire

$$(2.17) \quad \exists L_B > 0 \text{ tel que } \|Bu_1 - Bu_2\|_X \leq L_B \|u_1 - u_2\|_X \quad \forall u_1, u_2 \in X.$$

Aussi, nous supposons que

$$(2.18) \quad f \in C([0, T]; X),$$

$$(2.19) \quad u_0 \in X.$$

Dans l'étude du problème (2.15)–(2.16), nous avons le résultat suivant.

**Théorème 2.10.** *Soient (2.13), (2.14) et (2.17)–(2.19) satisfaites. Alors :*

- 1) *Il existe une unique solution  $u \in C^1([0, T]; X)$  au problème (2.15)–(2.16).*
- 2) *Si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux solutions du problème (2.15)–(2.16) correspondant aux données  $f_1, f_2 \in C([0, T]; X)$ , alors il existe  $c > 0$  tel que*

$$(2.20) \quad \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_X \leq c(\|f_1(t) - f_2(t)\|_X + \|u_1(t) - u_2(t)\|_X) \quad \forall t \in [0, T].$$

- 3) *Si en plus  $f \in W^{1,p}(0, T; X)$  pour  $p \in [1, \infty]$ , alors la solution satisfait  $u \in W^{2,p}(0, T; X)$ .*

Ce résultat d'existence, d'unicité et de régularité a été prouvé dans [33] et peut être aussi trouvé dans [34] p.232–236.

## 2.4 Compléments divers

Dans cette section, nous allons rappeler une version du théorème de Cauchy-Lipschitz.

**Théorème 2.11.** *Soit  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace de Banach réel et soit  $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$  un opérateur défini p.p. sur  $(0, T)$ , qui satisfait les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X, \text{ p.p. } t \in (0, T); \end{cases}$$

$$\text{il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que } F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X.$$

*Alors, pour tout  $x_0 \in X$ , il existe une fonction unique  $x \in W^{1,p}(0, T; X)$  telle que*

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

$$x(0) = x_0.$$

Pour des détails sur ce théorème on peut renvoyer le lecteur par exemple à [75] p.60.

A la fin, nous passons en revue les lemmes de Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans ce paragraphe, le lecteur pourra consulter par exemple [38, 62]. Notons par ailleurs que dans certains paragraphes de ce mémoire, nous allons utiliser des versions "presque partout" de ces lemmes.

**Lemme 2.12.** Soient  $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$  telles que  $m(t) \geq 0$  et  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $a \geq 0$  une constante, et  $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ .

(1) Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s)\psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left( a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp\left( \int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s) ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s) ds.$$

Dans le cas particulier  $m = 0$ , la partie (1) de ce lemme devient :

**Corollaire 2.13.** Soit  $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$  telle que  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et soit  $a \geq 0$ . Si  $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$  est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \exp\left( \int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Le Corollaire 2.13 est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. En supposant qu'il existe deux solutions, en notant par  $\psi$  la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer  $\psi$  sous la forme

$$\psi(t) \leq \int_0^t n(s)\psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction  $n \geq 0$ . L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de  $\psi$ .

**Lemme 2.14.** Soient  $m, n \in C([0, T], \mathbb{R})$  telles que  $m(t) \geq 0, n(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$  et  $a \geq 0$ . Soit également  $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t) dt + \int_0^s n(t)\phi^2(t) dt \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors,

$$|\phi(s)| \leq \left( a + \int_0^s m(t) dt \right) e^{\int_0^s n(t) dt} \quad \forall s \in [0, T].$$

Dans le cas particulier  $n = 0$ , le Lemme 2.14 devient :

**Corollaire 2.15.** *Soit  $m \in C([0, T], \mathbb{R})$  tel que  $m(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$  et soit  $a \geq 0$ . Soit également  $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que*

$$\frac{1}{2} \phi^2(s) \leq \frac{1}{2} a^2 + \int_0^s m(t) \phi(t) dt \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors,

$$|\phi(s)| \leq a + \int_0^s m(t) dt \quad \forall s \in [0, T].$$



Deuxième partie

Problèmes Elastiques et  
Electro-élastiques



## Partie II

### Problèmes Elastiques et Electro-élastiques

La deuxième partie de ce mémoire est consacrée à l'étude de certains problèmes de contact impliquant l'adhésion et le frottement, entre un corps ayant une loi de comportement élastique ou électro-élastique et une fondation. Elle est composée de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous étudions un problème élastique non linéaire de contact avec adhésion et frottement. Nous allons dériver une formulation variationnelle du problème mécanique originaire, pour lequel nous démontrons qu'il existe une solution faible unique en utilisant des techniques de point fixe pour des opérateurs construits dans des espaces de Banach appropriés.

Dans le deuxième chapitre, nous analysons un problème électro-élastique avec frottement, pour lequel nous dérivons une formulation variationnelle sous la forme d'un système couplé en terme du champ de déplacement électrique et du potentiel électrique. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution au problème variationnel.

Dans le troisième chapitre, nous étudions un problème électro-mécanique. Nous allons étendre les résultats obtenus dans le premier chapitre dans le cas où l'effet piézoélectrique du matériau est pris en considération. Nous obtenons une inégalité variationnelle couplée avec une égalité impliquant le champ du potentiel électrique. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible pour le problème en utilisant des techniques similaires à ceux utilisés dans le premier chapitre.



## Chapitre 3

# Problème élastique avec adhésion et frottement

Dans ce chapitre, on étudie un problème élastique de contact avec adhésion et frottement pour des matériaux élastiques. Notre intérêt est de décrire un processus quasistatique dans lequel le contact, l'adhésion et le frottement sont couplés; et de montrer que le modèle résultant se ramène à un problème mathématique bien posé. Le contact adhésif entre deux corps déformables, lorsque la colle est ajoutée pour éviter le mouvement relatif des surfaces, a reçu beaucoup d'attention dans la littérature mathématique, voir par exemple [21, 27, 28, 40, 57]. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de la publication [69].

### 3.1 Formulation du problème

Nous nous plaçons dans le *cadre physique n° 1* (page 5). Nous considérons que le corps est élastique, avec une loi de comportement non linéaire. En ce qui concerne le contact, nous le modélisons par une condition de compliance normale couplée avec l'adhésion et le frottement.

Avec ces considérations, le *modèle mathématique n° 1* (page 8) nous conduit au problème mécanique suivant:

**Problème  $\mathcal{P}_1$ .** *Trouver un champ des déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , un champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , et un champ d'adhésion  $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tels que*

$$(3.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(3.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(3.3) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T),$$

$$(3.4) \quad \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$(3.5) \quad -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(3.6) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\| \leq \mu p_\nu(u_\nu), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\| < \mu p_\nu(u_\nu) \Rightarrow \mathbf{u}_\tau = \mathbf{0}, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\| = \mu p_\nu(u_\nu) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \\ \text{tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) = -\lambda \mathbf{u}_\tau. \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(3.7) \quad \dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu)^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\|^2) - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(3.8) \quad \beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Maintenant, nous allons fournir quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites (3.1)–(3.8) qui ont été déjà introduits dans le premier chapitre. L'équation (3.1) représente la loi de comportement élastique de la forme (1.12), le processus est quasistatique et (3.2) est l'équation d'équilibre donnée dans (1.6). Les conditions (3.3) et (3.4) représentent les conditions de déplacement-traction introduits par (1.7) et (1.8). La condition (3.5) décrit le contact avec compliance normale et adhésion et les conditions (3.6) sont les conditions de frottement et d'adhésion, qui figurent dans (1.31) et (1.35), dans lesquels les opérateurs de troncation sont donnés par (1.29) et (1.33). L'équation (3.7) est l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion, déjà introduite par (1.36), avec (3.8) la condition initiale dans laquelle  $\beta_0$  est un champ d'adhésion donné, que nous avons vu dans (1.37).

## 3.2 Formulation variationnelle

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème mécanique  $\mathcal{P}_1$  nous supposons que l'opérateur d'élasticité  $\mathcal{F}$  satisfait les propriétés suivantes :

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d, \\ \text{(b) il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \text{(c) il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2), \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \text{(d) l'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d, \\ \text{(e) l'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, 0) \in \mathcal{H}, \end{array} \right.$$

et la fonction de compliance normale vérifie

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p_{\nu} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) il existe } L_{\nu} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_{\nu}(\mathbf{x}, r_1) - p_{\nu}(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_{\nu} |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) } (p_{\nu}(\mathbf{x}, r_1) - p_{\nu}(\mathbf{x}, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(d) l'application } \mathbf{x} \mapsto p_{\nu}(\mathbf{x}, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(e) } p_{\nu}(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right.$$

Nous supposons aussi que les forces volumiques et les tractions surfaciques aient la régularité

$$(3.11) \quad \mathbf{f}_0 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^d), \quad \mathbf{f}_2 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_2)^d),$$

Le théorème de représentation de Riesz-Fréchet entraîne l'existence d'une fonction  $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V$  définie par

$$(3.12) \quad (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} \, da,$$

pour tout  $\mathbf{v} \in V$  et  $t \in [0, T]$ , et on note que la condition (3.11) implique que

$$(3.13) \quad \mathbf{f} \in W^{1,\infty}(0, T; V).$$

Les coefficients d'adhésion  $\gamma_\nu$ ,  $\gamma_\tau$  et  $\epsilon_a$  satisfont les conditions

$$(3.14) \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \epsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \epsilon_a \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3,$$

tandis que le coefficient de frottement  $\mu$  vérifie

$$(3.15) \quad \mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

Finalement, on suppose que le champ initial d'adhésion vérifie

$$(3.16) \quad \beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

On définit la fonctionnelle d'adhésion comme suit  $j_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$(3.17) \quad j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \left( -\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) \cdot \mathbf{v}_\tau \right) da,$$

la fonctionnelle de compliance normale  $j_{nc} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$(3.18) \quad j_{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu da,$$

et la fonctionnelle de frottement  $j_{fr} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$(3.19) \quad j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(u_\nu) \|\mathbf{v}_\tau\| da.$$

La condition (3.10) entraîne que les intégrales dans (3.18) et (3.19) sont bien définies.

Selon une procédure standard basée sur la formule de Green (2.2) combinée avec les conditions (3.2)–(3.4) et la définition (3.12) de  $\mathbf{f}$ , nous obtenons

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_H + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Introduisons maintenant la formule (1.3) et la décomposition (1.25) pour trouver

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} &= (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_H + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu^{ad}(t)(v_\nu - u_\nu(t)) da + \\ &\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau^{ad}(t)(\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu^{fc}(t)(v_\nu - u_\nu(t)) da + \\ &\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau^{fc}(t)(\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)) da \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

Nous utilisons (1.28), (1.30), (1.32) et (1.34) pour obtenir

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} &\geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_H + \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)(v_\nu - u_\nu(t)) da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau(t))(\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)) da - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu(t))(v_\nu - u_\nu(t)) da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(u_\nu)(\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_\tau\|) da \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

A l'aide des définitions (3.17)–(3.19) des fonctionnelles  $j_{ad}$ ,  $j_{nc}$  et  $j_{fr}$  et compte tenu de (3.1), nous dérivons la formulation variationnelle suivante du problème  $\mathcal{P}_1$ , en terme des champs d'adhésion et de déplacement.

**Problème  $\mathcal{P}_1^V$ .** *Trouver un champ de déplacement  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$  et un champ d'adhésion  $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  tels que*

$$(3.20) \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j_{nc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T],$$

$$(3.21) \quad \dot{\beta}(t) = -\left(\beta(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau(t))\|^2) - \epsilon_a\right)_+ \text{ p.p. sur } t \in (0, T),$$

$$(3.22) \quad \beta(0) = \beta_0.$$

Dans le reste de cette section, nous présentons quelques inégalités comprenant les fonctionnelles  $j_{ad}$ ,  $j_{nc}$  et  $j_{fr}$  qui seront utilisées dans les sections suivantes. Ci-dessous dans cette section,  $\beta$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  dénotent les éléments de  $L^2(\Gamma_3)$  tel que  $0 \leq \beta, \beta_1, \beta_2 \leq 1$  p.p. sur  $\Gamma_3$ ;  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  représentent des éléments de  $V$ ; et  $c$  est une constante générique positive qui peut dépendre de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$ ,  $p_\nu$ ,  $\gamma_\nu$ ,  $\gamma_\tau$  et  $L$ , dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la raison de simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite aux fonctions diverses sur  $\mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma_3$ .

D'abord nous faisons remarquer que les fonctionnelles  $j_{ad}$  et  $j_{nc}$  sont linéaires par rapport au dernier argument et donc

$$(3.23) \quad j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad j_{nc}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -j_{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Ensuite, en utilisant (3.17) et les inégalités;  $|R_\nu(u_{1\nu})| \leq L$ ,  $\|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\| \leq L$ ,  $|\beta_1| \leq 1$ ,  $|\beta_2| \leq 1$ , nous déduisons que

$$j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq c \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\| da.$$

En combinant cette inégalité avec (2.7), nous obtenons

$$(3.24) \quad j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq c \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V.$$

En choisissant  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  dans (3.24), nous trouvons

$$(3.25) \quad j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq 0.$$

Des manipulations semblables, basées sur la Lipschitzialité des opérateurs  $R_\nu$  et  $\mathbf{R}_\tau$ , montrent que

$$(3.26) \quad |j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V.$$

Aussi, nous prenons  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$  et  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$  dans (3.25), ensuite nous utilisons les égalités  $R_\nu(0) = 0$ ,  $\mathbf{R}_\tau(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  et (3.24) pour obtenir

$$(3.27) \quad j_{ad}(\beta, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0.$$

Maintenant, nous utilisons (3.18) pour voir que

$$|j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})| |v_\nu| da,$$

ensuite (3.10)(b) et (2.7) impliquent

$$(3.28) \quad |j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq c_0^2 L_\nu \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V.$$

Nous utilisons encore une fois (3.18), pour obtenir

$$j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})) (u_{1\nu} - u_{2\nu}) da,$$

et alors, (3.10)(c) implique

$$(3.29) \quad j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \geq 0.$$

Aussi, nous prenons  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$  et  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$  dans l'inégalité (3.29) et nous utilisons (3.10)(e) et (3.23) pour obtenir

$$(3.30) \quad j_{nc}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0.$$

Maintenant, nous utilisons (3.19) pour trouver

$$\begin{aligned} & j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) + j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) \leq \\ & \leq \int_{\Gamma_3} \mu |p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})| \|\mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}_{2\tau}\| da. \end{aligned}$$

Moyennant l'hypothèse (3.10)(b) et gardant en tête (2.7), nous obtenons

$$(3.31) \quad \begin{aligned} & j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) + j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) \leq \\ & \leq c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V. \end{aligned}$$

Les inégalités (3.24)–(3.31) combinées avec les égalités (3.23) vont être utilisées dans des places diverses dans le reste de ce mémoire.

Nous énonçons maintenant notre résultat principal concernant l'unique solvabilité du problème  $\mathcal{P}_1^V$ , dont la démonstration sera détaillée dans la section suivante.

**Théorème 3.1.** *Supposons que les hypothèses (3.9)–(3.11) et (3.14)–(3.16) sont vérifiées. Alors, il existe  $\mu_0 > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \mathcal{F}$  et  $p_\nu$  telle que, si  $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$ , alors le problème  $\mathcal{P}_1^V$  possède une unique solution  $(\mathbf{u}, \beta)$ . En outre, la solution satisfait*

$$(3.32) \quad \mathbf{u} \in W^{1,\infty}(0,T; V),$$

$$(3.33) \quad \beta \in W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}.$$

Soit  $(\mathbf{u}, \beta)$  solution du Problème  $\mathcal{P}_1^V$  obtenue dans le Théorème 3.1 et soit  $\boldsymbol{\sigma}$  la fonction donnée par (3.1). Il est facile de vérifier que

$$(3.34) \quad \boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}(0,T; \mathcal{H}_1).$$

Un triplet de fonctions  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \beta)$  satisfaisant à (3.1) et (3.20)–(3.22) est appelée solution faible du problème  $\mathcal{P}_1$  de contact adhésif avec frottement. Nous concluons du Théorème 3.1 que, sous les hypothèses (3.9)–(3.11) et (3.14)–(3.16), si  $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$ , alors il existe une unique solution faible du Problème  $\mathcal{P}_1$  qui vérifie (3.32)–(3.34).

### 3.3 Démonstration du Théorème 3.1.

La démonstration du Théorème 3.1 sera effectuée dans plusieurs étapes. A cet effet, nous assumons dans la suite que (3.9)–(3.11) et (3.14)–(3.16) sont satisfaites; ci-après,  $c$  est une constante positive générique qui peut dépendre de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, p_\nu, \gamma_\nu, \gamma_\tau$  et  $L$ , dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite des diverses fonctions sur  $\mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma$ .

Soit  $\mathcal{Z}$  l'ensemble fermé de l'espace  $C([0,T]; L^2(\Gamma_3))$  défini par

$$(3.35) \quad \mathcal{Z} = \{ \beta \in C([0,T]; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q} \mid \beta(0) = \beta_0 \}$$

et soit  $\beta \in \mathcal{Z}$  donné.

Dans la première étape, nous considérons le problème variationnel suivant.

**Problème  $\mathcal{P}_1^{\mathbf{u}_\beta}$ .** *Trouver un champ de déplacement  $\mathbf{u}_\beta : [0, T] \rightarrow V$  tel que, pour tout  $t \in [0, T]$ ,*

$$(3.36) \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\beta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\beta(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t)) + j_{nc}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t)) \\ + j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 3.2.** *Il existe  $\mu_0 > 0$  qui dépend de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \mathcal{F}$  et  $p_\nu$  tel que, si  $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$ , alors, le Problème  $\mathcal{P}_1^{\mathbf{u}_\beta}$  possède une unique solution  $\mathbf{u}_\beta \in C([0, T]; V)$ .*

**Démonstration.** Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir l'opérateur  $A_\beta(t) : V \rightarrow V$  comme suit :

$$(3.37) \quad (A_\beta(t)\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v})_V = (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\beta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) + j_{nc}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) \\ \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Soit  $t \in [0, T]$  et  $\beta \in \mathcal{Z}$  fixés et soit  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$ . Nous utilisons (3.37) et les égalités (3.23) pour trouver

$$(A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V = (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2)))_{\mathcal{H}} \\ - j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) - j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2).$$

Moyennant maintenant (3.9)(c) et les inégalités (3.25) et (3.29), nous déduisons que

$$(3.38) \quad (A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V \geq m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2.$$

Soit  $\mathbf{v} \in V$ ; en utilisant (3.37) nous avons

$$(A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V = (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})))_{\mathcal{H}} \\ + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) + j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Combinons l'inégalité précédente avec (3.9)(b) et les inégalités (3.26) et (3.28) pour trouver

$$(A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V \leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V.$$

Mettons ensuite  $\mathbf{v} = A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2$  dans l'inégalité précédente pour obtenir

$$(3.39) \quad \|A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2\|_V \leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V.$$

Grâce à (3.10)(a) et (b), nous remarquons que la fonctionnelle  $j_{fr}$  est propre et semi continue inférieurement et nous déduisons qu'elle est convexe. De plus, la fonctionnelle  $j_{fr}$  satisfait (3.31).

Nous concluons de (3.38) et (3.39) que l'opérateur  $A_\beta(t)$  est fortement monotone et de Lipschitz sur  $V$ , donc vérifie les conditions (2.20) et la fonctionnelle  $j_{fr}$  satisfait les hypothèses (2.20). Soit  $\mu_0 = \frac{m_{\mathcal{F}}}{c_0^2 L_\nu}$  et remarquons que  $\mu_0$  dépend de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \mathcal{F}$  et  $p_\nu$ . Supposons que  $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$ . Alors

$$(3.40) \quad c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < m_{\mathcal{F}}$$

et, en appliquant le résultat d'existence et d'unicité sur les inégalités quasi-variationnelles (Théorème 2.9), il s'ensuit l'existence d'un élément unique  $\mathbf{u}_\beta(t) \in V$ , qui vérifie

$$(3.41) \quad (A_\beta(t)\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t))_V + j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t))_V \\ \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

En utilisant (3.37) et (3.41) il résulte que  $\mathbf{u}_\beta(t)$  vérifie (3.36), pour tout  $t \in [0, T]$ .

Montrons maintenant que  $\mathbf{u}_\beta \in C([0, T]; V)$ . Pour cela, considérons  $t_1, t_2 \in [0, T]$  et, pour simplicité, notons  $\mathbf{u}_\beta(t_i) = \mathbf{u}_i, \beta(t_i) = \beta_i, \mathbf{f}(t_i) = \mathbf{f}_i, \forall i = 1, 2$ . Nous utilisons (3.36) et quelques manipulations algébriques pour obtenir

$$(\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2))_{\mathcal{H}} \leq j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + \\ j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V + \\ j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) - j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) + j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) - j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2).$$

Combinons maintenant l'inéquation précédente avec l'hypothèse (3.9)(c) et les inégalités (3.24), (3.29) et (3.31) pour trouver

$$m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \leq c_0^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 + c \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \\ + \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_V \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V,$$

ce qui mène à l'inégalité suivante

$$(3.42) \quad \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \leq \frac{c}{m_{\mathcal{F}} - c_0^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu} \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \frac{1}{m_{\mathcal{F}} - c_0^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu} \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_V.$$

Rappelons que  $\mathbf{f} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$  et  $\beta \in C([0,T];L^2(\Gamma_3))$  (voir (3.35)), et sous l'hypothèse de petitesse  $m_{\mathcal{F}} > c_0^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu$ , il vient de (3.42) que l'application  $t \mapsto \mathbf{u}_\beta : [0,T] \rightarrow V$  est continue.  $\square$

Nous supposons par la suite que  $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$  ce qui implique (3.40). Dans l'étape suivante, nous utilisons le champ de déplacement  $\mathbf{u}_\beta$  obtenue dans le Lemme 3.2, et nous considérons le problème de Cauchy suivant.

**Problème  $\mathcal{P}_1^{\theta_\beta}$ .** *Trouver un champ d'adhésion  $\theta_\beta : [0,T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  tel que*

$$(3.43) \quad \dot{\theta}_\beta(t) = - \left( \theta_\beta(t) (\gamma_\nu R_\nu(u_{\beta\nu}(t))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{\beta\tau}(t))\|^2) - \epsilon_a \right)_+ \quad \text{p.p. } t \in (0,T),$$

$$(3.44) \quad \theta_\beta(0) = \beta_0.$$

Nous obtenons le résultat suivant.

**Lemme 3.3.** *Il existe une solution unique au Problème  $\mathcal{P}_1^{\theta_\beta}$  qui vérifie  $\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}$ .*

**Démonstration.** Nous considérons l'application  $F_\beta : [0,T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  défini par

$$F_\beta(t,\theta) = - \left( \theta_\beta(t) (\gamma_\nu R_\nu(u_{\beta\nu}(t))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{\beta\tau}(t))\|^2) - \epsilon_a \right)_+.$$

Soit  $t \in [0,T]$  et  $\theta \in L^2(\Gamma_3)$ . Il s'ensuit d'après les propriétés des opérateurs de troncation  $R_\nu$  et  $\mathbf{R}_\tau$  que  $F_\beta$  est de Lipschitz par rapport à la seconde variable, uniformément en temps. De plus, pour tout  $\theta \in L^2(\Gamma_3)$  l'application  $t \mapsto F_\beta(t,\theta)$  appartient à  $L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_3))$ . Moyennant maintenant le Théorème 2.11, nous obtenons l'existence d'une fonction unique  $\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))$  qui résout le problème  $\mathcal{P}_1^{\theta_\beta}$ . Notons que la restriction  $0 \leq \beta \leq 1$  est incluse implicitement dans le problème variationnel  $\mathcal{P}_1^V$ . En effet, la condition (3.16) nous garantit que  $\beta(t) \leq \beta_0$  et donc l'hypothèse (3.10) montre que  $\beta(t) \leq 1$  pour  $t \geq 0$ , p.p. sur  $\Gamma_3$ . D'un autre côté, si  $\beta(t_0) = 0$  à  $t = t_0$ , alors il s'ensuit de (3.15) et (3.16) que  $\dot{\beta}(t) = 0$  pour tout  $t \geq t_0$  et donc,  $\beta(t) = 0$  pour tout  $t \geq t_0$ , p.p. sur  $\Gamma_3$ . Nous concluons que  $0 \leq \beta(t) \leq 1$  pour tout  $t \in [0,T]$ , p.p. sur  $\Gamma_3$ . Il résulte de la définition de l'ensemble  $\mathcal{Q}$ , que  $\theta_\beta \in \mathcal{Q}$ , ce qui conclut la preuve du lemme.  $\square$

Il s'ensuit du Lemme 3.3, que pour tout  $\beta \in \mathcal{Z}$  la solution  $\theta_\beta$  du problème  $\mathcal{P}_1^{\theta_\beta}$  appartient à  $\mathcal{Z}$ , voir (3.35). Donc, nous pouvons considérer l'opérateur  $\Lambda : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$

donné par

$$(3.45) \quad \Lambda\beta = \theta_\beta.$$

Dans la dernière étape, nous allons prouver le résultat suivant.

**Lemme 3.4.** *Il existe un unique élément  $\beta^* \in \mathcal{Z}$  tel que  $\Lambda\beta^* = \beta^*$ .*

**Démonstration.** Supposons que  $\beta_1, \beta_2$ , sont deux fonctions dans  $\mathcal{Z}$  et notons par  $\mathbf{u}_i, \theta_i$  les fonctions obtenues dans les Lemmes 3.2 et 3.3, respectivement, pour  $\beta = \beta_i$ ,  $i = 1, 2$ . Soit  $t \in [0, T]$ , Nous utilisons des arguments semblables à ceux utilisés dans la preuve de (3.42) pour déduire que

$$(3.46) \quad \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V \leq \frac{c}{m_{\mathcal{F}} - c_0^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_\nu} \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}.$$

D'un autre côté, il s'ensuit de (3.43) et (3.44) que

$$\theta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t \left( \theta_i(s) (\gamma_\nu R_\nu(u_{i\nu}(s))^2 + \gamma_\tau \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{i\tau}(s))) \right) - \epsilon_a)_+ ds$$

et alors

$$\begin{aligned} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c \int_0^t \|\theta_1(s) R_\nu(u_{1\nu}(s))^2 - \theta_2(s) R_\nu(u_{2\nu}(s))^2\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \\ &+ \int_0^t \|\theta_1(s) \|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{1\tau}(s))\|^2 - \theta_2(s) \|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{2\tau}(s))\|^2\|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de  $R_\nu$  et  $\mathbf{R}_\tau$  et écrivant  $\theta_1 = \theta_1 - \theta_2 + \theta_2$ , nous arrivons à

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + c \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds.$$

Moyennant une version des lemmes de Gronwall (Corollaire 2.13), il s'ensuit que

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds,$$

et, en utilisant (2.7), nous obtenons

$$(3.47) \quad \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds,$$

puis nous introduisons (3.45) dans l'estimation (3.47) pour trouver

$$(3.48) \quad \|\Lambda\beta_1(t) - \Lambda\beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds.$$

Nous combinons maintenant (3.46) avec (3.48) pour déduire

$$\|\Lambda\beta_1(t) - \Lambda\beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \frac{c}{m_{\mathcal{F}} - c_0^2\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}L_\nu} \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds,$$

et, l'itération de cette inégalité  $n$  fois entraîne l'inégalité suivante

$$(3.49) \quad \|\Lambda^n\beta_1 - \Lambda^n\beta_2\|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))} \leq \frac{c^n T^n}{(m_{\mathcal{F}} - c_0^2\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}L_\nu)^n n!} \|\beta_1 - \beta_2\|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))}.$$

Rappelons que  $\mathcal{Z}$  est un ensemble fermé non vide dans l'espace de Banach  $C([0,T];L^2(\Gamma_3))$  et notons que l'inégalité (3.49) montre que pour  $n$  suffisamment grand  $\Lambda^n : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$  est une contraction. Nous concluons par l'utilisation du théorème du point fixe que  $\Lambda$  possède un point fixe  $\beta^* \in \mathcal{Z}$ .  $\square$

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du Théorème 3.1.

**Démonstration.**

*Existence.* Soit  $\beta^* \in \mathcal{Z}$  le point fixe de  $\Lambda$  et soit  $\mathbf{u}^*$  la solution du Problème  $\mathcal{P}_1^{\mathbf{u}_\beta}$  pour  $\beta = \beta^*$ , i.e.  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_{\beta^*}$ . Puisque  $\theta_{\beta^*} = \beta^*$ , nous concluons par (3.36), (3.43), (3.44) que  $(\mathbf{u}^*, \beta^*)$  est la solution du Problème  $\mathcal{P}_1^V$  et de plus,  $\beta^*$  satisfait (3.33). Aussi, puisque  $\beta^* = \theta_{\beta^*} \in W^{1,\infty}(0,T,L^2(\Gamma_3))$ , l'inégalité (3.46) implique que la fonction  $\mathbf{u}^*$  appartient à  $W^{1,\infty}(0,T;V)$ , ce qui montre que la fonction  $\mathbf{u}^*$  a la régularité exprimée dans (3.32).

*Unicité.* L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  défini par (3.45). Effectivement, soit  $(\mathbf{u}, \beta)$  la solution du Problème  $\mathcal{P}_1^V$  qui satisfait (3.32)–(3.33). Il s'ensuit de (3.36) que  $\mathbf{u}$  est une solution du Problème  $\mathcal{P}_1^{\mathbf{u}_\beta}$  et, puisque par le Lemme 3.2 ce problème possède une solution unique notée  $\mathbf{u}_\beta$ , nous obtenons

$$(3.50) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_\beta.$$

Alors, nous remplaçons  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\beta$  dans (3.21) et nous utilisons la condition initiale (3.22) pour voir que  $\beta$  est une solution du Problème  $\mathcal{P}_1^{\theta_\beta}$ . Puisque par le Lemme 3.3, ce dernier possède une unique solution notée  $\theta_\beta$ , nous trouvons

$$(3.51) \quad \beta = \theta_\beta.$$

Nous utilisons maintenant (3.45) et (3.51) pour obtenir que  $\Lambda\beta = \beta$ , i.e.  $\beta$  est le point fixe de l'opérateur  $\Lambda$ . D'après le Lemme 3.4, nous avons

$$(3.52) \quad \beta = \beta^*.$$

La partie unicité du Théorème 3.1 est maintenant conséquence de (3.50)–(3.52).  $\square$



## Chapitre 4

# Problème électro-élastique avec frottement

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle mathématique qui décrit le processus quasistatique d'un contact avec frottement entre un corps piézoélectrique et une fondation déformable conductive. Nous utilisons la loi de comportement électro-élastique pour décrire les propriétés mécaniques et électriques du matériau. Le contact est décrit par une condition de compliance normale et une condition électrique régularisée. Le frottement est modélisé par une version de la loi de Coulomb. Nous obtenons une formulation variationnelle sous forme de système couplé en termes du champ des déplacements et du potentiel électrique. Puis, en utilisant un argument d'inéquations quasi-variationnelles elliptiques, nous prouvons l'existence d'une solution unique pour le problème variationnel.

### 4.1 Formulation du problème

Le modèle mécanique étudié est classé dans le *cadre physique n° 2* ( page 6) que nous avons décrit dans la première partie du mémoire et par conséquent nous utilisons le modèle mathématique n° 2 présenté en page 9. Pour que le modèle soit complet, précisons que la loi de comportement est électro-élastique du type (1.14) et la condition de contact avec compliance normale est prescrite dans (1.19). Nous considérons la loi de frottement de type Coulomb (1.24) ainsi que la condition de conductivité électrique régularisée (1.38).

Avec ces considérations, le problème mécanique se formule comme suit :

**Problème  $\mathcal{P}_2$ .** *Trouver un champ des déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , un champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ , un potentiel électrique  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et un champ de déplacement électrique  $\mathbf{D} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  tels que*

$$(4.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi) \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(4.2) \quad \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathcal{B}\mathbf{E}(\varphi) \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(4.3) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(4.4) \quad \text{div } \mathbf{D} = q_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(4.5) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$(4.6) \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2,$$

$$(4.7) \quad -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

$$(4.8) \quad \begin{aligned} & \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq p_\tau(u_\nu - g), \\ \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_\tau &= -p_\tau(u_\nu - g) \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} \end{aligned} \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

$$(4.9) \quad \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a,$$

$$(4.10) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b,$$

$$(4.11) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = \psi(u_\nu - g)\phi(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Nous avons quelques commentaires à fournir sur les équations et les inéquations du problème (4.1)–(4.11). Les égalités (4.1) et (4.2) représentent la loi constitutive électro-élastique que nous avons déjà définie dans (1.14), où  $\mathcal{F}$  est une fonction constitutive non linéaire;  $\mathcal{E}$  représente le tenseur piézoélectrique,  $\mathcal{E}^*$  est son transposé et  $\mathcal{B}$  dénote le tenseur de Permittivité électrique. Ensuite, les égalités (4.3) et (4.4) sont les équations d'équilibre mécanique et électrique qui figurent dans (1.6) et (1.9), respectivement. Les conditions (4.5) et (4.6) sont les conditions aux limites de déplacement-traction. Le contact est décrit par la condition de compliance normale (4.7) que nous avons déjà introduite dans (1.19), tandis que pour modéliser le frottement nous utilisons la version statique (4.8) de la loi de Coulomb, définie dans (1.35). La condition (4.9) affirme que le potentiel s'annule sur la frontière  $\Gamma_a$  et selon (4.10) une charge électrique est prescrite sur  $\Gamma_b$ . La condition (4.11) représente la condition électrique que nous avons défini

dans (1.38) et qui décrit l'échange du potentiel entre le corps piézoélectrique et la fondation.

## 4.2 Formulation variationnelle

Avant d'établir une formulation faible au problème électro-mécanique  $\mathcal{P}_2$ , nous avons besoin de quelques hypothèses. Nous assumons que l'opérateur  $\mathcal{F}$  vérifie l'hypothèse (3.9) du chapitre précédent. Aussi, nous supposons que le tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E}$  et le tenseur de Permittivité électrique  $\mathcal{B}$  satisfont les hypothèses suivantes.

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = (e_{ijk}(\mathbf{x})\tau_{jk}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right.$$

$$(4.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{E}) = (b_{ij}(\mathbf{x})E_j) \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) } b_{ij} = b_{ji} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(d) Il existe } m_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que } b_{ij}(\mathbf{x})E_iE_j \geq m_{\mathcal{B}}\|\mathbf{E}\|^2 \\ \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right.$$

Dans le chapitre précédent, nous avons une seule fonction de compliance normale monotone et de Lipschitz, tandis que dans ce chapitre nous considérons deux fonctions de compliance normale  $p_r$  ( $r = \nu, \tau$ ) qui vérifient

$$(4.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p_r : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) } \exists L_r > 0 \text{ tel que } |p_r(x, u_1) - p_r(x, u_2)| \leq L_r |u_1 - u_2| \\ \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(c) } x \mapsto p_r(x, u) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } x \mapsto p_r(x, u) = 0, \text{ pour tout } u \leq 0. \end{array} \right.$$

La fonction de conductivité électrique  $\psi$  satisfait

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \psi : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) } \exists L_\psi > 0 \text{ tel que } |\psi(x, u_1) - \psi(x, u_2)| \leq L_\psi |u_1 - u_2| \\ \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(c) } \exists M_\psi > 0 \text{ tel que } |\psi(x, u)| \leq M_\psi \quad \forall u \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(e) } x \mapsto \psi(x, u) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}. \\ \text{(e) } x \mapsto \psi(x, u) = 0, \text{ pour tout } u \leq 0. \end{array} \right.$$

Les forces volumiques, les tractions surfaciques et les densités des charges électriques volumiques et surfaciques vérifient

$$(4.16) \quad \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d,$$

$$(4.17) \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^d,$$

$$(4.18) \quad q_0 \in L^2(\Omega),$$

$$(4.19) \quad q_2 \in L^2(\Gamma_b).$$

Finalement, nous supposons qu'il y a un interstice  $g$  entre le corps et la base qui vérifie

$$(4.20) \quad g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3,$$

et le potentiel donné  $\varphi_0$  satisfait

$$(4.21) \quad \varphi_0 \in L^2(\Gamma_3).$$

Par la suite, nous définissons les applications  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  et  $h : V \times W \rightarrow W$ , ainsi que les éléments et les fonctions  $\mathbf{f} \in V$  et  $q \in W$  comme suit :

$$(4.22) \quad j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g)v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - g)\|\mathbf{v}_\tau\| da,$$

$$(4.23) \quad (h(\mathbf{u}, \varphi), \xi)_W = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - g)\phi(\varphi - \varphi_0)\xi da,$$

$$(4.24) \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \, da,$$

$$(4.25) \quad (q, \xi)_W = \int_{\Omega} q_0 \xi \, dx - \int_{\Gamma_b} q_2 \xi \, da,$$

pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  et  $\varphi, \xi \in W$ . Notons que les définitions de  $h$ ,  $\mathbf{f}$  et  $q$  sont basées sur le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet; de plus, compte tenu des hypothèses (4.14)–(4.19), il s'ensuit que les intégrales que nous venons de voir dans (4.22)–(4.25) sont bien définies.

Retournons maintenant à établir une formulation variationnelle du problème  $\mathcal{P}_2$ . Nous utilisons la formule de Green (2.2) combinée avec les égalités (4.3), (4.5), (4.6) et (4.24) pour trouver

$$(4.26) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_H = \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V;$$

et, compte tenu de la décomposition du tenseur de Cauchy (1.3), nous avons

$$(4.27) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} = (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_H + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_{\nu}(\mathbf{v}_{\nu} - \mathbf{u}_{\nu}) \, da \\ + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_{\tau}(\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{u}_{\tau}) \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Nous utilisons les conditions (4.7) et (4.8) pour trouver

$$(4.28) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_H + \int_{\Gamma_3} p_{\nu}(\mathbf{u}_{\nu} - g)(\mathbf{v}_{\nu} - \mathbf{u}_{\nu}) \, da \\ - \int_{\Gamma_3} p_{\tau}(\mathbf{u}_{\nu} - g)(\|\mathbf{v}_{\tau}\| - \|\mathbf{u}_{\tau}\|) \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Combinons cette dernière inégalité avec (4.1) et (4.22) pour obtenir

$$(4.29) \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_H \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Maintenant, nous utilisons la formule de Green (2.11) pour les inconnues électriques du problème ainsi que les conditions (4.4), (4.9), (4.10) et la définition (4.25) de  $q$ . Il en résulte

$$(4.30) \quad (\mathbf{D}, \nabla \xi)_{\mathcal{W}} + (q, \xi)_{\mathcal{W}} = \int_{\Gamma_3} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} \xi \, da \quad \forall \xi \in W,$$

et, compte tenu de (4.2), (4.11) et (4.23), nous obtenons

$$(4.31) \quad (\mathcal{B}\nabla\varphi, \nabla\xi)_W - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}), \nabla\xi)_W + (h(\mathbf{u}, \varphi), \xi)_W = (q, \xi)_W \quad \forall \xi \in W.$$

En utilisant (4.29) et (4.31) nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème électro-élastique  $\mathcal{P}_2$ .

**Problème  $\mathcal{P}_2^V$ .** *Trouver un champ des déplacements  $\mathbf{u} \in V$  et un potentiel électrique  $\varphi \in W$  tels que*

$$(4.32) \quad (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_H \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

$$(4.33) \quad (\mathcal{B}\nabla\varphi, \nabla\xi)_W - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}), \nabla\xi)_W + h(\mathbf{u}, \varphi, \xi)_W = (q, \xi)_W \quad \forall \xi \in W.$$

Notre résultat principal d'existence et d'unicité que nous citons ici et prouvons dans la section suivante est le suivant.

**Théorème 4.1.** *Il existe  $\alpha$  qui dépend de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau$  et  $\psi$  tel que, si  $\alpha < \min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}})$ , alors le problème  $\mathcal{P}_2^V$  possède une solution unique. De plus, la solution vérifie*

$$(4.34) \quad \mathbf{u} \in V, \quad \varphi \in W.$$

Un quadruple de fonctions  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D})$  qui satisfait (4.1), (4.2), (4.32) et (4.33) est appelé *solution faible* du problème de contact piézoélectrique  $\mathcal{P}_2^V$ . Nous concluons par le Théorème 4.1 que, sous les hypothèses (3.9) et (4.12)–(4.21), il existe une unique solution faible du Problème  $\mathcal{P}_2^V$ . Pour décrire précisément la régularité de la solution faible, notons que les relations constitutives (4.1) et (4.2), les hypothèses (3.9), (4.12) et (4.13) et la régularité (4.34) montrent que  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$ ,  $\mathbf{D} \in \mathcal{W}$ ; de plus, en utilisant (4.1), (4.2), (4.32) et (4.33) il s'ensuit que (4.29) et (4.31) sont vérifiées pour tout  $\mathbf{v} \in V$  et  $\xi \in W$ . Nous prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{u} \pm \mathbf{z}$  où  $\mathbf{z} \in C_0^\infty(\Omega)^d$  dans (4.29) et  $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$  dans (4.31) et utilisons les notations (4.22)–(4.25) pour arriver à

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f}_0, \quad \text{div } \mathbf{D} = q_0.$$

Il s'ensuit maintenant des régularités (4.16) et (4.18) que  $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)^d$  et  $\text{div } \mathbf{D} \in L^2(\Omega)$  ce qui montre que

$$(4.35) \quad \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_1, \quad \mathbf{D} \in \mathcal{W}_1.$$

Nous concluons que la solution faible  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D})$  du problème de contact piézoélectrique  $\mathcal{P}_2$  possède la régularité (4.34) et (4.35).

### 4.3 Démonstration du Théorème 4.1.

La preuve du Théorème 4.1 s'effectue en plusieurs étapes. Pour l'établir, nous considérons l'espace produit  $X = V \times W$  muni du produit scalaire

$$(4.36) \quad (x, y)_X = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V + (\varphi, \xi)_W \quad \forall x = (\mathbf{u}, \varphi), y = (\mathbf{v}, \xi) \in X$$

et la norme associée  $\|\cdot\|_X$ . Partout ci-dessous, nous supposons que (3.9), (4.12)–(4.21) sont satisfaites.

Nous utilisons encore une fois le Théorème de représentation de Riesz pour définir l'opérateur  $A : X \rightarrow X$  par la formule

$$(4.37) \quad \begin{aligned} (Ax, y)_X &= (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{B}\nabla\varphi, \nabla\xi)_{L^2(\Omega)^d} + \\ &\quad (\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla\xi)_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad \forall x = (\mathbf{u}, \varphi), y = (\mathbf{v}, \xi) \in X, \end{aligned}$$

et nous allons étendre la fonctionnelle  $j$  définie dans (4.22) à une fonctionnelle  $J$  définie sur  $X \times X$  comme suit :

$$(4.38) \quad J(x, y) = j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (h(\mathbf{u}, \varphi), \xi)_W \quad \forall x = (\mathbf{u}, \varphi), y = (\mathbf{v}, \xi) \in X.$$

Enfin, nous considérons l'élément  $f \in X$  donné par

$$(4.39) \quad f = (\mathbf{f}, q) \in X.$$

Commençons par prouver le résultat d'équivalence suivant.

**Lemme 4.2.** *Le couple  $x = (\mathbf{u}, \varphi)$  est une solution du Problème  $P_2^V$  si et seulement si*

$$(4.40) \quad (Ax, y - x)_X + J(x, y) - J(x, x) \geq (f, y - x)_X \quad \forall y \in X.$$

**Démonstration.** Soit  $x = (\mathbf{u}, \varphi) \in X$  une solution du Problème  $P_2^V$  et soit  $y = (\mathbf{v}, \xi) \in X$ . Nous utilisons la fonction de test  $\xi - \varphi$  dans (4.33), rajoutons l'égalité correspondante à (4.32) et utilisons (4.36)–(4.39) pour trouver (4.40). Réciproquement,

soit  $x = (\mathbf{u}, \varphi) \in X$  une solution de l'inégalité quasi-variationnelle (4.40); nous prenons  $y = (\mathbf{v}, \xi)$  dans (4.40) où  $\mathbf{v}$  est un élément arbitraire de  $V$  pour obtenir (4.32); ensuite nous prenons successivement  $y = (\mathbf{v}, \varphi + \xi)$  et  $y = (\mathbf{v}, \varphi - \xi)$  dans (4.40), où  $\xi$  est un élément arbitraire de  $W$ , pour obtenir (4.33).  $\square$

Notons que l'inégalité quasi-variationnelle (4.40) dérivée dans le Lemme 4.2 est de la forme (2.12). Donc, pour appliquer le résultat d'existence et d'unicité pour les inéquations quasi-variationnelles (Théorème 2.9), nous vérifions dans ce qui suit les propriétés de l'opérateur  $A$  donné par (4.37) et la fonctionnelle  $J$  définie dans (4.38).

**Lemme 4.3.** *L'opérateur  $A : X \rightarrow X$  est fortement monotone et de Lipschitz.*

**Démonstration.** Soit  $x_1 = (\mathbf{u}_1, \varphi_1)$ ,  $x_2 = (\mathbf{u}_2, \varphi_2)$  deux éléments de  $X$ . Mettons  $y = x_2$  pour  $x = x_1$  et  $y = x_1$  pour  $x = x_2$  dans (4.37) et soustrayons les relations résultantes; nous en trouvons

$$(4.41) \quad (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X = \\ (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{B}\nabla\varphi_1 - \mathcal{B}\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_{L^2(\Omega)^d} + \\ (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_1 - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_2, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2))_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2), \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_{L^2(\Omega)^d}.$$

La condition (1.15) implique que  $(\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} = (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^d}$  pour tout  $x = (\mathbf{u}, \varphi) \in X$ , donc l'égalité (4.41) devient de la forme

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X = \\ (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{B}\nabla\varphi_1 - \mathcal{B}\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_{L^2(\Omega)^d}.$$

En utilisant (3.9)(c) et (4.13) nous obtenons

$$(4.42) \quad (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X \geq m_{\mathcal{F}}\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 + m_{\mathcal{B}}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2$$

et, moyennant (4.36), nous déduisons qu'il existe une constante  $k_1 > 0$  qui ne dépend que des opérateurs  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{B}$  et de  $\Omega$  telle que

$$(4.43) \quad (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X \geq k_1\|x_1 - x_2\|_X^2.$$

où  $k_1 = \min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}})$ .

Maintenant nous utilisons (4.37) pour  $y = (\mathbf{v}, \xi) \in X$  et  $x = x_i = (\mathbf{u}_i, \varphi_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Après quelques manipulations algébriques nous trouvons

$$\begin{aligned} (Ax_1 - Ax_2, y)_X &= (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{B}\nabla\varphi_1 - \mathcal{B}\nabla\varphi_2, \nabla\xi)_{L^2(\Omega)^d} + \\ &(\mathcal{E}^*\nabla\varphi_1 - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_2, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2), \nabla\xi)_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Combinons cette dernière relation avec (3.9), (4.12) et (4.13) pour trouver

$$\begin{aligned} (Ax_1 - Ax_2, y)_X &\leq k_2(\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\xi\|_W \\ &+ \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\mathbf{v}\|_V + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\xi\|_W), \end{aligned}$$

où  $k_2$  est une constante qui dépend des opérateurs  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{E}$  pour tout  $y = (\mathbf{v}, \xi) \in X$ . Compte tenu de  $\|\mathbf{v}\|_V \leq \|y\|_X$  et  $\|\xi\|_W \leq \|y\|_X$ , il s'ensuit que

$$(Ax_1 - Ax_2, y)_X \leq 4k_2 \|x_1 - x_2\|_X \|y\|_X \quad \forall y \in X,$$

et pour  $y = Ax_1 - Ax_2 \in X$ , nous obtenons

$$(4.44) \quad \|Ax_1 - Ax_2\|_X \leq 4k_2 \|x_1 - x_2\|_X.$$

La preuve du Lemme 4.3 découle des inégalités (4.43) et (4.44).  $\square$

**Lemme 4.4.** *La fonctionnelle  $J$  satisfait les hypothèses (2.14).*

**Démonstration.** Soit  $x = (u, \varphi) \in X$ . Il est clair que  $J(x, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et continue sur  $X$ , donc semi-continue inférieurement sur  $X$ . Il en résulte que  $J$  satisfait la condition (2.14)(a). Par ailleurs, soit  $x_1 = (u_1, \varphi_1)$ ,  $x_2 = (u_2, \varphi_2)$ ,  $y_1 = (v_1, \xi_1)$ ,  $y_2 = (v_2, \xi_2)$  des éléments de  $X$ . Nous utilisons (4.38), (4.22) et (4.23) et après quelques calculs, nous trouvons

$$\begin{aligned} (4.45) \quad J(x_1, y_2) - J(x_1, y_1) + J(x_2, y_1) - J(x_2, y_2) &= \\ &\int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_{1\nu} - g) - p_\nu(u_{2\nu} - g))(v_{2\nu} - v_{1\nu}) da + \\ &\int_{\Gamma_3} (p_\tau(u_{1\nu} - g) - p_\tau(u_{2\nu} - g))(\|\mathbf{v}_{2\tau}\| - \|\mathbf{v}_{1\tau}\|) da + \\ &\int_{\Gamma_3} (\psi(u_{1\nu} - g)\phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_{2\nu} - g)\phi(\varphi_2 - \varphi_0))(\xi_2 - \xi_1) da. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité élémentaire suivante  $\int_{\Gamma_3} f(x)g(x) da \leq \int_{\Gamma_3} |f(x)| |g(x)| da$ , nous déduisons

$$(4.46) \quad \begin{aligned} & J(x_1, y_2) - J(x_1, y_1) + J(x_2, y_1) - J(x_2, y_2) \leq \\ & \int_{\Gamma_3} |p_\nu(u_{1\nu} - g) - p_\nu(u_{2\nu} - g)| |(v_{2\nu} - v_{1\nu})| da + \\ & \int_{\Gamma_3} |p_\tau(u_{1\nu} - g) - p_\tau(u_{2\nu} - g)| \left| \|\mathbf{v}_{2\tau}\| - \|\mathbf{v}_{1\tau}\| \right| da + \\ & \int_{\Gamma_3} |\psi(u_{1\nu} - g)\phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_{2\nu} - g)\phi(\varphi_2 - \varphi_0)| |\xi_2 - \xi_1| da. \end{aligned}$$

Combinons l'inégalité (4.46) avec les hypothèses (4.14), (4.15) et (1.42) ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwartz, pour trouver

$$(4.47) \quad \begin{aligned} & J(x_1, y_2) - J(x_1, y_1) + J(x_2, y_1) - J(x_2, y_2) \leq \\ & \int_{\Gamma_3} L_\nu |u_{1\nu} - u_{2\nu}| |(v_{1\nu} - v_{2\nu})| da + \int_{\Gamma_3} L_\tau |u_{1\nu} - u_{2\nu}| \|\mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}_{2\tau}\| da + \\ & \int_{\Gamma_3} [M_\psi(\phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \phi(\varphi_2 - \varphi_0)) + L_\phi |\psi(u_{1\nu} - g) - \psi(u_{2\nu} - g)|] |\xi_1 - \xi_2| da. \end{aligned}$$

Utilisons encore une fois (4.15), (1.42) et les inégalités  $|u_\nu| \leq \|\mathbf{u}\|_V$  et  $\|\mathbf{v}_\tau\| \leq \|\mathbf{v}\|_V$ , comme résultat, nous en avons

$$(4.48) \quad \begin{aligned} & J(x_1, y_2) - J(x_1, y_1) + J(x_2, y_1) - J(x_2, y_2) \leq \\ & (L_\nu + L_\tau) \int_{\Gamma_3} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\| \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| da + \\ & \int_{\Gamma_3} [M_\psi \|\varphi_1 - \varphi_2\| + L_\phi L_\psi \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|] \|\xi_1 - \xi_2\| da. \end{aligned}$$

Moyennant maintenant (2.7), (2.10) et les inégalités  $\|\mathbf{u}\|_V \leq \|x\|_X$  et  $\|\varphi\|_W \leq \|x\|_X$ , nous obtenons

$$(4.49) \quad \begin{aligned} & J(x_1, y_2) - J(x_1, y_1) + J(x_2, y_1) - J(x_2, y_2) \leq \\ & [(L_\nu + L_\tau)c_0^2 + M_\psi \tilde{c}_0^2 + L_\phi L_\psi c_0 \tilde{c}_0] \|x_1 - x_2\|_X \|y_1 - y_2\|_X da. \end{aligned}$$

□

Posons  $\alpha = (L_\nu + L_\tau)c_0^2 + M_\psi\tilde{c}_0^2 + L_\phi L_\psi c_0\tilde{c}_0$ ; alors, si

$$(4.50) \quad \alpha < \min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}),$$

en appliquant le Théorème 2.9, il résulte que le problème variationnel admet une solution unique, ce qui conclut la démonstration.

**Remarque** L'hypothèse de petitesse (4.50) montre que si  $L_\nu + L_\tau, M_\psi$  et  $L_\psi$  sont suffisamment petits, alors le problème variationnel  $\mathcal{P}_2^V$  possède une solution unique. La question, si cette hypothèse représente une caractéristique intrinsèque du problème électro-élastique ou bien elle n'est qu'une limitation liée aux outils mathématiques que nous utilisons, constitue un problème ouvert. Bien évidemment, ce problème mérite une étude approfondie.



## Chapitre 5

# Problème électro-élastique avec adhésion et frottement

Dans ce chapitre, nous étendons nos résultats obtenus dans le troisième chapitre de la première partie au cas où l'effet piézoélectrique du matériau est tenu en compte. A cette fin, nous supposons que le comportement du matériau est modélisé par une loi constitutive électro-élastique non linéaire. Nous supposons que le corps est en contact adhésif avec une fondation isolatrice sur  $\Gamma_3$ . Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible du problème piézoélectrique. L'analyse de ce problème a fait l'objet de la publication [44].

### 5.1 Formulation du problème

Nous nous plaçons dans le *cadre physique n° 2* (page 6). Le corps est considéré électro-élastique, le contact est modélisé par la condition de compliance normale. Le frottement est décrit par une loi de Coulomb couplée avec adhésion. Avec ces considérations, le modèle mécanique est le suivant :

**Problème  $\mathcal{P}_3$ .** *Trouver un champ des déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , un champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , un potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , un champ de déplacement électrique  $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un champ d'adhésion  $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tels que*

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad \boldsymbol{\sigma} &= \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi) && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 (5.2) \quad \mathbf{D} &= \mathcal{B}\mathbf{E}(\varphi) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 (5.3) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 &= \mathbf{0} && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 (5.4) \quad \text{div } \mathbf{D} &= q_0 && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 (5.5) \quad \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\
 (5.6) \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} &= \mathbf{f}_2 && \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\
 (5.7) \quad -\sigma_\nu &= p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu) && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
 (5.8) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau\beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\| \leq \mu p_\nu(u_\nu), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau\beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\| < \mu p_\nu(u_\nu) \Rightarrow \mathbf{u}_\tau = \mathbf{0}, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau\beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\| = \mu p_\nu(u_\nu) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau\beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) = -\lambda \mathbf{u}_\tau \end{cases} &&& \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
 (5.9) \quad \dot{\beta} &= -(\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu)^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\|^2) - \epsilon_a)_+ && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
 (5.10) \quad \varphi &= 0 && \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \\
 (5.11) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} &= q_2 && \text{sur } \Gamma_b \times (0, T), \\
 (5.12) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{0} && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
 (5.13) \quad \beta(0) &= \beta_0 && \text{sur } \Gamma_3.
 \end{aligned}$$

Les équations (5.1) et (5.2) représentent la loi constitutive électro-élastique du corps, elles font parution dans (1.14). Ensuite, les équations (5.3) et (5.4) sont les équations d'équilibre écrites pour les champs de contrainte et de déplacement électrique, introduits respectivement dans (1.6) et (1.9). Les conditions (5.5) et (5.6) sont les conditions de déplacement-traction, la condition (5.7) décrit le contact avec compliance normale et adhésion et les conditions (5.8) sont les conditions de frottement et d'adhésion, où les opérateurs de troncation sont donnés par (1.29) et (1.33). L'équation (5.9) est l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion, avec la condition initiale (5.13) où  $\beta_0$  est un champ d'adhésion donné, tandis que (5.10) et (5.11) représentent les conditions aux limites électriques sur  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$ , respectivement, que nous avons définies dans (1.10) et (1.11). Notons que nous avons imposé la condition

(5.12) pour des raisons physiques; en effet, la fondation est supposée être isolatrice et par conséquent nous employons la condition (1.44).

## 5.2 Formulation variationnelle

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème  $\mathcal{P}_3$  nous nous plaçons dans le *cadre fonctionnel* (page 23). En outre, nous avons besoin d'introduire quelques hypothèses sur les données.

Nous supposons que l'opérateur piézoélectrique  $\mathcal{E}$  et l'opérateur de permittivité  $\mathcal{B}$  satisfait les hypothèses.

$$(5.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = (e_{ijk}(\mathbf{x})\tau_{jk}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right.$$

$$(5.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{E}) = (b_{ij}(\mathbf{x})E_j) \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) } b_{ij} = b_{ji} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(d) Il existe } m_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que } b_{ij}(\mathbf{x})E_iE_j \geq m_{\mathcal{B}}\|\mathbf{E}\|^2 \\ \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right.$$

L'opérateur  $\mathcal{F}$  vérifie l'hypothèse (3.9) du Chapitre 3. Des hypothèses (5.14) et (5.15), nous déduisons que l'opérateur piézoélectrique  $\mathcal{E}$  et l'opérateur électrique de permittivité  $\mathcal{B}$  sont linéaires, et de plus,  $\mathcal{B}$  est symétrique et défini positif.

Nous supposons que la densité des charges électriques satisfait

$$(5.16) \quad q_0 \in W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Gamma_b)),$$

et nous définissons la fonction  $q : [0,T] \rightarrow W$  par

$$(5.17) \quad (q(t), \psi)_W = \int_{\Omega} q_0(t)\psi \, dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t)\psi \, da,$$

pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \psi \in W$  et  $t \in [0,T]$ , et notons que les conditions (5.16) entraînent

$$(5.18) \quad q \in W^{1,\infty}(0,T; W).$$

En utilisant des calculs similaires à ceux utilisés pour obtenir la formulation variationnelle du problème  $\mathcal{P}_1$ , nous dérivons la formulation variationnelle suivante.

**Problème  $\mathcal{P}_3^V$ .** Trouver un champ des déplacements  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ , un potentiel électrique  $\varphi : [0, T] \rightarrow W$  et un champ d'adhésion  $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  tels que

$$(5.19) \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} + \\ j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j_{nc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \\ - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(5.20) \quad (\mathcal{B}\nabla\varphi(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = (q(t), \psi)_W$$

$$(5.21) \quad \forall \psi \in W \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(5.22) \quad \dot{\beta}(t) = -\left(\beta(t) (\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau(t))\|^2) - \epsilon_a\right)_+ \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

$$(5.23) \quad \beta(0) = \beta_0.$$

Dans l'étude du Problème  $\mathcal{P}_3^V$ , nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

**Théorème 5.1.** *Supposons que (3.9)–(3.11), (3.14)–(3.16), (5.14)–(5.16) et (1.15) sont vérifiées. Alors, il existe  $\mu_0 > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $p_\nu$  telle que, si  $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$ , alors le Problème  $\mathcal{P}_3^V$  possède une solution unique  $(\mathbf{u}, \beta)$ . En plus, la solution a la régularité exprimée dans (3.32), (3.33) et*

$$(5.24) \quad \varphi \in W^{1,\infty}(0, T; W).$$

Un "quintuple" de fonctions  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D}, \beta)$  qui satisfait (5.1), (5.2), (5.19)–(5.23) est appelé *solution faible* du problème de contact  $\mathcal{P}_3$ . Nous concluons par le Théorème 5.1 que, sous les hypothèses exposées, le Problème  $\mathcal{P}_3$  possède une solution unique faible. Pour préciser la régularité de la solution faible, nous notons que les relations constitutives (5.1) et (5.2), les hypothèses (3.9), (5.14) et (5.15) et les régularités (3.32), (5.24) montrent que  $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{H})$ ,  $\mathbf{D} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{W})$ ; il s'ensuit maintenant des régularités (3.11) et (5.16) que  $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}(0, T; H)$  et  $\text{div } \mathbf{D} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$ , qui montre que

$$(5.25) \quad \boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{H}_1),$$

$$(5.26) \quad \mathbf{D} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{W}_1).$$

Nous concluons que la solution faible  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D}, \beta)$  du problème piézoélectrique

de contact avec adhésion et frottement  $\mathcal{P}_3$  possède la régularité (3.32), (3.33), (5.24)–(5.26).

### 5.3 Démonstration du Théorème 5.1.

La démonstration du Théorème 5.1 est similaire à celle du Théorème 3.1 et elle est effectuée en plusieurs étapes. Puisque les modifications sont évidentes, nous omettons les détails.

**Etape i:** nous fixons  $\beta \in \mathcal{Z}$  et nous considérons le problème variationnel suivant.

**Problème  $\mathcal{P}_3^\beta$ .** *Trouver un champ des déplacements  $\mathbf{u}_\beta : [0, T] \rightarrow V$ , un potentiel électrique  $\varphi_\beta : [0, T] \rightarrow W$  tels que pour tout  $t \in [0, T]$ ,*

$$(5.27) \quad (\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\beta(t))), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \mathbf{u}_\beta(t))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_\beta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t)))_{\mathcal{H}} \\ + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t)) + j_{nc}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t)) \\ + j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t))_V \\ \forall \mathbf{v} \in V, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(5.28) \quad (\mathcal{B} \nabla \varphi_\beta(t), \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\beta(t)), \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W.$$

Pour l'étude de ce problème on a le résultat suivant.

**Lemme 5.2.** *Il existe  $\tilde{\mu}_0 > 0$  qui dépend de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \mathcal{F}, \mathcal{B}$  et  $p_\nu$  telle que le Problème  $\mathcal{P}_3^\beta$  possède une solution unique  $(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta) \in C([0, T]; V \times W)$ , si  $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \tilde{\mu}_0$ .*

**Démonstration.** Pour résoudre (5.27)–(5.28), nous considérons l'espace produit de Hilbert  $V \times W$  muni du produit scalaire

$$(x, y)_X = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V + (\varphi, \psi)_W \quad \forall x = (\mathbf{u}, \varphi), y = (\mathbf{v}, \psi) \in X$$

et la norme associée  $\|\cdot\|_X$ . Nous définissons l'opérateur  $\tilde{A}_{\beta(t)} : X \rightarrow X$ , la fonctionnelle  $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  et l'élément  $f(t) \in X$  par les égalités:

$$(5.29) \quad (\tilde{A}_{\beta(t)} x, y)_X = (A_\beta(t) \mathbf{u}, \mathbf{v})_V + (\mathcal{B} \nabla \varphi, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \\ - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall x = (\mathbf{u}, \varphi), y = (\mathbf{v}, \psi) \in X,$$

$$(5.30) \quad j(x, y) = j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall x = (\mathbf{u}, \varphi), y = (\mathbf{v}, \psi) \in X,$$

$$(5.31) \quad f(t) = (\mathbf{f}(t), q(t)),$$

pour tout  $t \in [0, T]$ , où  $A_\beta(t)$  est donné par (3.37). Il est simple de vérifier que le couple  $x_\beta = (\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta)$  est une solution du problème (5.27)–(5.28) avec la régularité  $(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta) \in C([0, T]; V \times W)$  si est seulement si  $x_\beta \in C([0, T]; X)$  et

$$(5.32) \quad \begin{aligned} & (\tilde{A}_{\beta(t)}x_\beta(t), y - x_\beta(t))_X + j(x_\beta(t), y) - j(x_\beta(t), x_\beta(t))_X \\ & \geq (f(t), y - x_\beta(t))_X \quad \forall y \in X, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons (3.38), (3.39), (5.14), (5.15) et (1.15) pour voir que  $\tilde{A}_{\beta(t)}$  est fortement monotone et de Lipschitz sur  $X$  et satisfait

$$(5.33) \quad (\tilde{A}_{\beta(t)}x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)}x_2, x_1 - x_2)_X \geq \min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}})\|x_1 - x_2\|_X^2 \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Aussi, en utilisant (5.30) and (3.31), nous pouvons vérifier aisément que, pour  $x \in X$  donné, la fonctionnelle  $j(x, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe est semi-continue inférieurement et satisfait

$$(5.34) \quad \begin{aligned} & j(x_1, y_2) - j(x_1, y_1) + j(x_2, y_1) - j(x_2, y_2) \\ & \leq c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|x_1 - x_2\|_X \|y_1 - y_2\|_X \quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in X. \end{aligned}$$

Finalement, notons que (5.31) et les régularités (3.13) et (5.18) montrent que  $f \in W^{1, \infty}(0, T; X)$ . Soit

$$(5.35) \quad \tilde{\mu}_0 = \frac{\min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}})}{c_0^2 L_\nu}$$

et supposons que  $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \tilde{\mu}_0$ ; nous procédons comme dans la démonstration du Lemme 3.2 pour voir que le problème (5.32) possède une solution unique  $x_\beta \in C([0, T]; X)$ , ce qui conclut la démonstration.  $\square$

**Etape ii :** Nous supposons dans ce qui suit que  $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \tilde{\mu}_0$  et, pour une fonction donnée  $\beta \in \mathcal{Z}$ , nous dénotons par  $(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta)$  la solution du problème  $\mathcal{P}_3^\beta$  obtenue dans le Lemme 5.2. Nous utilisons le Lemme 3.2 pour prouver que, pour une fonction donnée  $\beta \in \mathcal{Z}$ , il existe un unique élément  $\theta_\beta$  tel que

$$(5.36) \quad \theta_\beta \in W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z},$$

$$(5.37) \quad \dot{\theta}_\beta(t) = - \left( \gamma_\nu \theta_\beta(t) (R_\nu(u_{\beta\nu}(t)))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{\beta\tau}(t))\|^2 \right)_+ - \epsilon_a \quad \text{p.p. } t \in [0, T],$$

$$(5.38) \quad \theta_\beta(0) = \beta_0.$$

**Etape iii :** Aussi, il s'ensuit du Lemme 3.4 que l'opérateur  $\Lambda : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$  donné par

$$(5.39) \quad \Lambda\beta = \theta_\beta$$

possède un élément unique  $\beta^* \in \mathcal{Z}$ .

**Etape iv :** Soit  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_{\beta^*}$ ,  $\varphi^* = \varphi_{\beta^*}$ , où  $(\mathbf{u}_{\beta^*}, \varphi_{\beta^*})$  est le couple de fonctions obtenues dans le Lemme 5.2 pour  $\beta = \beta^*$ . Ensuite, nous utilisons (5.27)–(5.28) et (5.36)–(5.39) pour voir que  $(\mathbf{u}^*, \varphi^*, \beta^*)$  est la solution unique du Problème  $\mathcal{P}_3^V$ . L'unicité de la solution ainsi que la régularité (3.32), (3.33) et (5.24) s'ensuit des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration du Théorème 3.1.  $\square$



Troisième partie

Problèmes Viscoélastiques et  
Electro-viscoélastiques



## Partie III

# Problèmes Viscoélastiques et Electro-viscoélastiques

La troisième partie de ce mémoire est destinée à l'étude de quelques problèmes de contact avec adhésion et frottement, entre un corps ayant une loi de comportement viscoélastique ou électro-viscoélastique et une fondation. Elle est composée de deux chapitres.

Le sixième chapitre concerne l'étude d'un problème de contact avec adhésion et frottement entre un corps viscoélastique et un obstacle. Nous obtenons une formulation variationnelle au problème mécanique et nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution pour le modèle mécanique que nous démontrons en utilisant des techniques d'inéquations variationnelles elliptiques et de point fixe.

Le dernier chapitre propose l'analyse d'un problème électro-viscoélastique avec frottement. La nouveauté dans ce chapitre, consiste dans le fait que la fondation est électriquement conductive. Nous dérivons une formulation variationnelle du problème mécanique et nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité en utilisant des résultats sur les inéquations variationnelles d'évolution, suivis d'un argument de point fixe.



## Chapitre 6

# Problème viscoélastique avec adhésion et frottement

Dans ce chapitre, nous décrivons un modèle mathématique pour un processus quasi-statique d'un problème de contact entre un corps viscoélastique et une fondation. Le contact est modélisé par une condition modifiée de compliance normale et le frottement est formulé par une version de la loi de Coulomb couplé avec adhésion. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible pour le modèle.

### 6.1 Formulation du problème

Le problème étudié dans ce paragraphe se place dans le *cadre physique n° 1* (page 5) présenté dans la première partie du mémoire et par conséquent nous utilisons le premier modèle mathématique (page 8). Pour que le modèle soit complet, précisons que la loi de comportement est viscoélastique du type (1.13) et la condition de contact avec compliance normale est prescrite dans (1.19) dans le cas où l'interstice est nul. La version utilisée de la loi de Coulomb est donnée par (1.23)

Alors, le modèle classique de ce processus est formulé comme suit.

**Problème  $\mathcal{P}_4$ .** *Trouver un champ des déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , un champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , et un champ d'adhésion  $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tels que*

$$(6.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(6.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(6.3) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T),$$

$$(6.4) \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$(6.5) \quad -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(6.6) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\| \leq \mu p_\nu(u_\nu), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\| < \mu p_\nu(u_\nu) \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_\tau = \mathbf{0}, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\| = \mu p_\nu(u_\nu) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \\ \text{telle que } \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) = -\lambda \dot{\mathbf{u}}_\tau. \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(6.7) \quad \dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu)^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\|^2) - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(6.8) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(6.9) \quad \beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Dans ce qui suit, nous fournissons quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites (6.1)–(6.9). L'équation (6.1) représente la loi de comportement viscoélastique de type Kelvin-Voigt donnée par (1.13), le processus est supposé être quasistatique et l'égalité (6.2) est l'équation d'équilibre donnée dans (1.6). Les conditions (6.3) et (6.4) représentent les conditions de déplacement-traction introduites par (1.7) et (1.8). La condition (6.5) décrit le contact avec compliance normale et adhésion et la condition (6.6) est la loi de frottement avec adhésion, qui figurent dans (1.31) et (1.35) respectivement, dans lesquels les opérateurs de troncation sont donnés par (1.29) et (1.33). L'équation (6.7) est l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion, déjà introduite par (1.36). Les conditions (6.8) et (6.9) sont les conditions initiales où  $\mathbf{u}_0$  et  $\beta_0$  sont des champs donnés.

## 6.2 Formulation variationnelle

Nous inscrivons maintenant des hypothèses sur les données du problème. Supposons que l'opérateur de viscosité  $\mathcal{A}$  et l'opérateur d'élasticité  $\mathcal{G}$  satisfont les hypothèses

suivantes :

$$(6.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)) \cdot (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \mathcal{H}. \end{array} \right.$$

$$(6.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)\| \leq L_{\mathcal{G}} \|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \mathcal{H}. \end{array} \right.$$

Des exemples des opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{G}$  qui vérifient les conditions (6.10) et (6.11) peuvent être trouvés dans [68, 74]. La fonction de compliance normale  $p_\nu$  vérifie

$$(6.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Il existe } L_\nu > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p_\nu(\mathbf{x}, r_1) - p_\nu(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) } (p_\nu(\mathbf{x}, r_1) - p_\nu(\mathbf{x}, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\nu(\mathbf{x}, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(e) } p_\nu(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right.$$

Nous supposons que les forces volumiques et les tractions surfaciques vérifient

$$(6.13) \quad \mathbf{f}_0 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^d), \quad \mathbf{f}_2 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_2)^d).$$

En utilisant le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet, nous définissons la fonction  $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V$

$$(6.14) \quad (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} \, da,$$

pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  et  $t \in [0, T]$ , et notons que la condition (6.14) implique que

$$(6.15) \quad \mathbf{f} \in W^{1,\infty}(0, T; V).$$

Les coefficients d'adhésion  $\gamma_\nu, \gamma_\tau$  et la borne limite  $\epsilon_a$  satisfont les conditions

$$(6.16) \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \epsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \epsilon_a \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

Le coefficient de frottement  $\mu$  est tel que

$$(6.17) \quad \mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3,$$

et les données initiales vérifient

$$(6.18) \quad \beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \quad \mathbf{u}_0 \in V.$$

Nous définissons la fonctionnelle d'adhésion  $j_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$(6.19) \quad j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) \cdot \mathbf{v}_\tau) da,$$

la fonctionnelle de compliance normale  $j_{nc} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$(6.20) \quad j_{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu da.$$

et, finalement, la fonctionnelle de frottement  $j_{fr} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée par

$$(6.21) \quad j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(u_\nu) \|\mathbf{v}_\tau\| da.$$

pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ , et  $t \in [0, T]$ . Compte tenu de l'hypothèse (6.12) et les définitions des opérateurs  $R_\nu$  et  $\mathbf{R}_\tau$ , il résulte que les intégrales figurant dans (6.19)–(6.21) sont bien définies.

Passons maintenant à dériver une formulation variationnelle pour le problème  $\mathcal{P}_4$ . Moyennant la formule de Green (2.2), il résulte que si  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \beta\}$  sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (6.2)–(6.8), alors

$$(6.22) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{w} - \dot{\mathbf{u}}(t))_H + \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) (w_\nu - \dot{u}_\nu(t)) da \\ - \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau(t)) (\mathbf{w}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)) da - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu(t)) (w_\nu - \dot{u}_\nu(t)) da \\ - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(u_\nu) (\|\mathbf{w}_\tau\| - \|\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)\|) da \quad \forall \mathbf{w} \in V \quad \forall t \in [0, T].$$

En utilisant maintenant les définitions (6.19)–(6.21) des fonctionnelles  $j_{ad}$ ,  $j_{nc}$  et  $j_{fr}$  et compte tenu de (6.1) et la condition initiale (6.9), nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème  $\mathcal{P}_4$ , en terme des champs de déplacement et d'adhésion.

**Problème  $\mathcal{P}_4^Y$ .** *Trouver un champ des déplacements  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ , un champ d'adhésion  $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  tel que*

$$(6.23) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} \\ + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + j_{nc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{w} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{w}) \\ - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{w} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{w} \in V, \forall t \in [0, T],$$

$$(6.24) \quad \dot{\beta}(t) = -\left(\beta(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau(t))\|^2) - \epsilon_a\right)_+ \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(6.25) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \beta(0) = \beta_0.$$

Dans ce qui suit, nous présentons notre résultat principal qui énonce l'unique solvabilité du problème  $\mathcal{P}_4^Y$ .

**Théorème 6.1.** *Supposons que (6.10)–(6.18) sont vérifiées. Alors, il existe  $\mu_0 > 0$  qui dépend uniquement de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \mathcal{A}, \mathcal{G}$  et  $p_\nu$  tel que, si  $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$ , alors le problème  $\mathcal{P}_4^Y$  possède une unique solution  $(\mathbf{u}, \beta)$ . De plus, la solution satisfait*

$$(6.26) \quad \mathbf{u} \in W^{2,\infty}(0, T; V),$$

$$(6.27) \quad \beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}.$$

Soit  $(\mathbf{u}, \beta)$  une solution du Problème  $\mathcal{P}_4^Y$  obtenue dans le Théorème 6.1 et dénotons par  $\boldsymbol{\sigma}$  la fonction donnée par (6.1). Il est simple de voir que

$$(6.28) \quad \boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{H}_1).$$

Un triplet de fonctions  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \beta)$  qui vérifie (6.1), et (6.23)–(6.25) est appelé "solution faible" du problème de contact adhésif avec frottement  $\mathcal{P}_4$ . Nous concluons du Théorème 6.1 que, sous les hypothèses (6.10)–(6.13) et (6.16)–(6.18), si  $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$ , alors il existe une solution faible unique au problème  $\mathcal{P}_4$  qui satisfait à (6.26)–(6.28).

### 6.3 Démonstration du Théorème 6.1

La démonstration du Théorème 6.1 va être effectuée en plusieurs étapes. A cette fin, nous assumons dans ce qui suit que les hypothèses (6.10)–(6.18) sont satisfaites; ci-dessous,  $c$  est une constante générique positive qui peut dépendre de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$ ,  $p_\nu$ ,  $\gamma_\nu$ ,  $\gamma_\tau$  et  $L$ , dont la valeur peut changer d’une place à une autre. Pour raison de simplicité, nous omettons dans ce qui suit la dépendance explicite des différentes fonctions sur  $\boldsymbol{x} \in \Omega \cup \Gamma_3$ .

Soit  $\eta \in C([0, T]; V)$  fixé. Dans la première étape, nous considérons le problème auxiliaire suivant, dont l’inconnue est le champ de déplacement.

**Problème  $\mathcal{P}_4^\eta$ .** *Trouver un champ des déplacements  $\boldsymbol{u}_\eta : [0, T] \rightarrow V$  tel que*

$$(6.29) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_\eta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_\eta(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\eta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_\eta(t)))_{\mathcal{H}} +$$

$$(\eta(t), \boldsymbol{w} - \dot{\boldsymbol{u}}_\eta(t)) + j_{nc}(\boldsymbol{u}_\eta(t), \boldsymbol{w} - \dot{\boldsymbol{u}}_\eta(t)) + j_{fr}(\boldsymbol{u}_\eta(t), \boldsymbol{w})$$

$$- j_{fr}(\boldsymbol{u}_\eta(t), \dot{\boldsymbol{u}}_\eta(t)) \geq (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{w} - \dot{\boldsymbol{u}}_\eta(t))_V \quad \forall \boldsymbol{w} \in V, \forall t \in [0, T],$$

$$(6.30) \quad \boldsymbol{u}_\eta(0) = \boldsymbol{u}_0.$$

Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 6.2.** *Le problème  $\mathcal{P}_4^\eta$  possède une solution unique  $\boldsymbol{u}_\eta \in C^1([0, T]; V)$ . De plus, si  $\boldsymbol{u}_1$  et  $\boldsymbol{u}_2$  sont deux solutions du problème (6.29)–(6.30) correspondantes aux données  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in C([0, T]; \mathcal{H})$  alors il existe une constante  $c > 0$  telle que*

$$(6.31) \quad \|\dot{\boldsymbol{u}}_1(t) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(t)\|_V \leq c(\|\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_{\mathcal{H}} + \|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)\|_V) \quad \forall t \in [0, T].$$

**Démonstration.** Nous allons appliquer le Théorème 2.10 dans le cas de l’espace de Hilbert  $X = V$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_V$  et de la norme associée  $\|\cdot\|_V$  définies par (2.5) et (2.6) dans le deuxième chapitre de la première partie. Nous utilisons le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet pour définir les opérateurs  $A : V \rightarrow V$ ,  $B : V \rightarrow V$ , la fonctionnelle  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  et la fonction  $\boldsymbol{f}_\eta : [0, T] \rightarrow V$  par les

égalités

$$(6.32) \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}},$$

$$(6.33) \quad (B\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}},$$

$$(6.34) \quad j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = j_{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

$$(6.35) \quad (\mathbf{f}_\eta(t), \mathbf{v})_V = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V - (\boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}.$$

pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  et  $t \in [0, T]$ . Il s'ensuit des hypothèses (6.10) et (6.11) que les opérateurs  $A$  et  $B$  satisfont les conditions (2.13) et (2.17), respectivement.

Nous utilisons (6.20) et (6.21) pour voir que la fonctionnelle  $j(\xi, \cdot)$  définie dans (6.34) est convexe, propre et continue sur  $V$ , donc semi-continue inférieurement; et par conséquent elle satisfait la condition (2.14)(a). Moyennant maintenant les inégalités (3.28) et (3.31) que nous avons obtenues dans le Chapitre 3 de la deuxième partie, combinées avec l'inégalité (2.7), nous trouvons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} & j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \\ & \leq c_0^2 L_\nu (1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \end{aligned}$$

ce qui montre que la fonctionnelle  $j$  vérifie la condition (2.14)(b) sur  $X = V$ . De plus, en utilisant (6.15) nous avons  $\mathbf{f} \in W^{1,\infty}(0, T; V)$  et tenant compte que  $\boldsymbol{\eta} \in C([0, T]; \mathcal{H})$ , nous concluons de (6.35) que  $\mathbf{f}_\eta \in C([0, T]; V)$ , et par conséquent la condition (2.18) est vérifiée. Finalement, notons que (6.18) montre que la condition (2.19) est satisfaite aussi.

En utilisant maintenant (6.32)–(6.35) nous concluons que le Lemme 6.2 est une conséquence directe du Théorème 2.10 1), 2), ce qui achève la preuve.  $\square$

Ensuite, nous utilisons (6.35) pour voir que si  $\boldsymbol{\eta} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{H})$  alors  $\mathbf{f}_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ ; donc, en utilisant le Théorème 2.10 3), nous pouvons compléter le Lemme 6.2 par le résultat de régularité suivant :

$$(6.36) \quad \boldsymbol{\eta} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{H}) \implies \mathbf{u}_\eta \in W^{2,\infty}(0, T; V).$$

Dans l'étape suivante nous utilisons la solution  $\mathbf{u}_\eta \in C^1([0, T], V)$  obtenue dans le Lemme 6.2 pour formuler le problème de Cauchy suivant.

**Problème  $\mathcal{P}_4^\beta$ .** Trouver un champ d'adhésion  $\beta_\eta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  tel que

$$(6.37) \quad \dot{\beta}_\eta(t) = - \left( \beta(t) (\gamma_\nu R_\nu(u_{\eta\nu}(t)))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{\eta\tau}(t))\|^2 - \epsilon_a \right)_+ \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

$$(6.38) \quad \beta_\eta(0) = \beta_0.$$

Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 6.3.** *Le Problème  $\mathcal{P}_4^\beta$  possède une solution unique qui satisfait la régularité  $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}$ .*

La démonstration du Lemme 6.3 est similaire à celle du Lemme 3.3. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à voir la preuve (page 48).

Maintenant, pour tout  $\boldsymbol{\eta} \in C([0, T]; V)$  dénotons par  $\mathbf{u}_\eta$  la solution du Problème  $\mathcal{P}_4^\eta$  obtenue dans le Lemme 6.2 et par  $\beta_\eta$  la solution du Problème  $\mathcal{P}_4^\beta$  fournie par le Lemme 6.3. De plus, nous appliquons le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet pour définir la fonction  $\Lambda\boldsymbol{\eta} : [0, T] \rightarrow V$  par

$$(6.39) \quad (\Lambda\boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{w}) = j_{ad}(\beta_\eta, \mathbf{u}_\eta, \mathbf{w})$$

**Lemme 6.4.** *Pour tout  $\boldsymbol{\eta} \in C([0, T]; V)$  la fonction  $\Lambda\boldsymbol{\eta} : [0, T] \rightarrow V$  est continue. De plus, il existe un unique élément  $\boldsymbol{\eta}^* \in C([0, T]; V)$  tel que*

$$(6.40) \quad \Lambda\boldsymbol{\eta}^* = \boldsymbol{\eta}^*.$$

**Démonstration.** Soit  $\boldsymbol{\eta} \in C([0, T]; V)$  et  $t_1, t_2 \in [0, T]$ . Utilisons (6.39) et l'inégalité (3.24) pour trouver

$$(6.41) \quad \begin{aligned} |(\Lambda\boldsymbol{\eta}(t_1) - \Lambda\boldsymbol{\eta}(t_2), \mathbf{w})| &= |j_{ad}(\beta_\eta(t_1), \mathbf{u}_\eta(t_1), \mathbf{w}) - j_{ad}(\beta_\eta(t_2), \mathbf{u}_\eta(t_2), \mathbf{w})| \\ &+ \int_{\Gamma_3} \left( -\gamma_\nu \beta_\eta^2(t_1) R_\nu(u_{\eta\nu}(t_1)) v_\nu + \gamma_\tau \beta_\eta^2(t_1) \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{\eta\tau}(t_1)) \cdot \mathbf{v}_\tau \right) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \left( \gamma_\nu \beta_\eta^2(t_2) R_\nu(u_{\eta\nu}(t_2)) v_\nu - \gamma_\tau \beta_\eta^2(t_2) \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{\eta\tau}(t_2)) \cdot \mathbf{v}_\tau \right) da. \end{aligned}$$

Après quelques manipulations algébriques impliquant la lipschitzialité des opérateurs de troncation  $R_\nu, R_\tau$ , la relation (2.10) et l'inégalité  $0 \leq \beta_\eta \leq 1$ , nous arrivons à l'inégalité

$$(6.42) \quad \begin{aligned} |(\Lambda\boldsymbol{\eta}(t_1) - \Lambda\boldsymbol{\eta}(t_2), \mathbf{w})| \\ \leq c (\|\beta_\eta(t_1) - \beta_\eta(t_2)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\mathbf{u}_\eta(t_1) - \mathbf{u}_\eta(t_2)\|_V) \|\mathbf{w}\|_V. \end{aligned}$$

Mettons maintenant  $\mathbf{w} = \Lambda\boldsymbol{\eta}(t_1) - \Lambda\boldsymbol{\eta}(t_2)$  dans (6.42) pour obtenir

$$(6.43) \quad \|\Lambda\boldsymbol{\eta}(t_1) - \Lambda\boldsymbol{\eta}(t_2)\|_V \leq c \|\beta_\eta(t_1) - \beta_\eta(t_2)\|_{L^2(\Gamma_3)} + c \|\mathbf{u}_\eta(t_1) - \mathbf{u}_\eta(t_2)\|_V.$$

Compte tenu que  $\mathbf{u}_\eta \in C^1([0, T]; V)$  et  $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ , nous concluons de l'inégalité (6.43) que  $\Lambda\boldsymbol{\eta} \in C([0, T]; V)$ .

Soit maintenant  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in C([0, T]; V)$ , et soit  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{\eta_i}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{u}}_{\eta_i}$  et  $\beta_i = \beta_{\eta_i}$  pour  $i = 1, 2$ . Pour tout  $t \in [0, T]$ , nous intégrons (6.7) avec la condition initiale (6.9), pour obtenir

$$\begin{aligned} \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c \int_0^t \|\beta_1(s)R_\nu(u_{1\nu}(s))^2 - \beta_2(s)R_\nu(u_{2\nu}(s))^2\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \\ &\int_0^t \|\beta_1(s)\|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{1\tau}(s))\|^2 - \beta_2(s)\|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{2\tau}(s))\|^2\|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des opérateurs de troncation  $R_\nu$  et  $\mathbf{R}_\tau$  et écrivant  $\beta_1 = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2$ , nous arrivons à

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + c \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds.$$

Moyennant une version des lemmes de Gronwall (Corollaire 2.13), il s'ensuit que

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds.$$

Combinons cette dernière inégalité avec (2.7), pour obtenir

$$(6.44) \quad \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds.$$

D'un autre côté, utilisant des arguments similaires à ceux utilisés pour la preuve de (6.43), nous trouvons que

$$\|\Lambda\boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda\boldsymbol{\eta}_2(t)\|_V \leq c \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} + c \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V.$$

Ensuite, par (6.44) nous avons

$$(6.45) \quad \|\Lambda\boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda\boldsymbol{\eta}_2(t)\|_V \leq c \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V + c \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds.$$

De plus, puisque  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  ont la même condition initiale, il s'ensuit que

$$(6.46) \quad \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\| \leq \int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)\|_V ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Combinons l'inégalité (6.46) avec (6.45) pour obtenir

$$(6.47) \quad \|\Lambda\boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda\boldsymbol{\eta}_2(t)\|_V \leq c \int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)\|_V ds \quad \forall t \in [0, T].$$

En utilisant l'inégalité (6.29) pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_1$ ,  $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{u}}_2$  et  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_2$ ,  $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{u}}_1$ ; par addition des résultats obtenus nous avons

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_1) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_2), \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_2) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_1))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2), \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_2) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_1))_{\mathcal{H}} + \\ & (\eta_1 - \eta_2, \dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2)_V + j_{nc}(\mathbf{u}_1, \dot{\mathbf{u}}_2 - \dot{\mathbf{u}}_1) + j_{nc}(\mathbf{u}_2, \dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2) + \\ & j_{fr}(\mathbf{u}_1, \dot{\mathbf{u}}_2) - j_{fr}(\mathbf{u}_1, \dot{\mathbf{u}}_1) + j_{fr}(\mathbf{u}_2, \dot{\mathbf{u}}_1) - j_{fr}(\mathbf{u}_2, \dot{\mathbf{u}}_2) \geq 0. \end{aligned}$$

Combinons cette inégalité avec (6.10), (6.11) et les inégalités fournies par les fonctionnelles  $j_{nc}$  et  $j_{fr}$ ; nous trouvons

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} \|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2\|_V^2 & \leq \|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2\|_V \|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2\| + L_{\mathcal{G}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2\|_V \\ & + c_0^2 L_{\nu} (1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2\|_V, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$(6.48) \quad \|\dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t)\|_V \leq c \|\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_V + c \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V \quad \forall t \in [0, T].$$

Remplaçons (6.46) dans (6.48) pour trouver

$$(6.49) \quad \|\dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t)\|_V \leq c \|\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_V + c \int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)\|_V ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Utilisons encore une fois l'inégalité de Gronwall, pour déduire

$$\|\dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t)\|_V \leq c \|\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_V \quad \forall t \in [0, T].$$

Combinons maintenant l'inégalité (6.47) avec la dernière inégalité pour obtenir

$$(6.50) \quad \|\Lambda\boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda\boldsymbol{\eta}_2(t)\|_V \leq c \int_0^t \|\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)\|_V ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Réitérons cette dernière inégalité  $n$  fois pour trouver que

$$(6.51) \quad \|\Lambda^n \boldsymbol{\eta}_1 - \Lambda^n \boldsymbol{\eta}_2\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)} \leq \frac{c^n T^n}{n!} \|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)},$$

ce qui implique que pour  $n$  grand l'opérateur  $\Lambda^n$  est une contraction dans l'espace de Banach  $W^{1,\infty}(0,T;V)$ , donc il possède un point fixe unique  $\boldsymbol{\eta}^* \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ , et par conséquent  $\boldsymbol{\eta}^*$  est l'unique point fixe de l'opérateur  $\Lambda$ .  $\square$

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du Théorème 6.1

*Existence.* Soit  $\boldsymbol{\eta}^* \in C(0, T; V)$  le point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  et soit  $\mathbf{u}$  la solution du Problème  $\mathcal{P}_4^\eta$  pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$ , i.e.,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}$ . Nous dénotons par  $\boldsymbol{\sigma}$  la fonction donnée par (6.1), et soit  $\beta$  la solution du Problème  $\mathcal{P}_4^\beta$  pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$ , i.e.,  $\beta = \beta_{\boldsymbol{\eta}^*}$ . Il est clair que les égalités (6.24) et (6.25) sont satisfaites du Problème  $\mathcal{P}_4^\beta$ . De plus, puisque  $\boldsymbol{\eta}^* = \Lambda \boldsymbol{\eta}^*$ , il s'ensuit de (6.29) et (6.39) que (6.23) est aussi vérifiée. Alors, il s'ensuit du Lemme 6.2 que  $\mathbf{u} \in C^1([0, T]; V)$  et donc (6.1), (6.10) et (6.11) entraînent que  $\boldsymbol{\sigma} \in C(0, T; \mathcal{H})$ . Choissant maintenant  $\mathbf{z} \in C_0^\infty$  dans (6.23), nous obtenons

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0}.$$

En utilisant l'hypothèse (6.13), cette égalité implique que  $\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} \in C(0, T; L^2(\Omega)^d)$ , et donc  $\boldsymbol{\sigma} \in C(0, T; \mathcal{H}_1)$ . Rappelons aussi que la régularité du champ d'adhésion  $\beta \in W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}$  découle du Lemme 6.3. Nous concluons que  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \beta)$  est une solution du Problème  $\mathcal{P}_4^V$  qui satisfait les régularités (6.26)–(6.28).

*Unicité.* L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  et de l'unique solvabilité des problèmes  $\mathcal{P}_4^\eta$  et  $\mathcal{P}_4^\beta$ .  $\square$



## Chapitre 7

# Problème électro-viscoélastique avec frottement

Nous décrivons dans ce chapitre un modèle mathématique dans un processus quasi-statique d'un problème de contact entre un corps électro-viscoélastique et une fondation. Le contact est modélisé par une condition modifiée de compliance normale et une condition électrique régularisée. Le frottement est formulé par une version de la loi de Coulomb. Nous dérivons une formulation variationnelle sous forme de système couplé en terme des champs de déplacement et du potentiel électrique. Aussi, nous établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible pour le modèle. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de la publication [45]

### 7.1 Formulation du problème

Le problème étudié dans ce chapitre entre dans le *cadre physique n° 2* (page 6) présenté dans la première partie du mémoire et par conséquent nous utilisons le deuxième modèle mathématique (page 9). Pour que le modèle soit complet, précisons que la loi de comportement est électro-viscoélastique du type (1.17) et la condition de contact avec compliance normale est prescrite dans (1.19). Nous considérons les conditions de frottement du type Coulomb (1.24).

Alors, le modèle classique pour ce processus est le suivant :

**Problème  $\mathcal{P}_5$ .** *Trouver un champ des déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , un champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , un potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et un champ de déplacement électrique  $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  tels que*

$$\begin{aligned}
 (7.1) \quad & \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi) && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 (7.2) \quad & \mathbf{D} = \mathcal{B}\mathbf{E}(\varphi) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 (7.3) \quad & \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 (7.4) \quad & \text{div } \mathbf{D} = q_0 && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 (7.5) \quad & \mathbf{u} = \mathbf{0} && \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\
 (7.6) \quad & \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 && \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\
 (7.7) \quad & -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
 & \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq p_\tau(u_\nu - g), \\
 (7.8) \quad & \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau(u_\nu - g) \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|} && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
 (7.9) \quad & \varphi = 0 && \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \\
 (7.10) \quad & \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 && \text{sur } \Gamma_b \times (0, T), \\
 (7.11) \quad & \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = \psi(u_\nu - g)\phi(\varphi - \varphi_0) && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
 (7.12) \quad & \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 && \text{dans } \Omega.
 \end{aligned}$$

Nous décrivons maintenant les notations dans (7.1)–(7.12) et fournissons quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites. D’abord, les équations (7.1) et (7.2) représentent la loi constitutive électro-viscoélastique que nous avons introduite dans (1.17) où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{G}$  sont les opérateurs de viscosité et d’élasticité, respectivement;  $\mathcal{E}$  représente le tenseur piézoélectrique,  $\mathcal{E}^*$  est son transposé et  $\mathcal{B}$  dénote le tenseur de permittivité électrique. Ensuite, les équations (7.3) et (7.4) sont les équations d’équilibre des champs de contrainte et du déplacement électrique, que nous avons déjà vu dans (1.6) et (1.9). Les conditions (7.5) et (7.6) sont les conditions aux limites de déplacement-traction. Le contact avec compliance normale est modélisé par la condition (7.7) qui figure dans (1.19) et le frottement est décrit par la relation (7.8) qui peut être écrite sous la forme (1.23). Tandis que (7.9)–(7.11) représentent les conditions aux limites électriques que nous avons définis par (1.10), (1.11) et (1.38). Rappelons par ailleurs que  $\phi$  est la fonction de troncation définie par (1.42). Finalement, (7.12) est la condition initiale où  $\mathbf{u}_0$  est un champ de déplacement donné.

## 7.2 Formulation variationnelle

En plus des hypothèses (6.10) et (6.11) sur l'opérateur de viscosité  $\mathcal{A}$  et l'opérateur d'élasticité  $\mathcal{G}$  que nous venons de voir dans le chapitre précédent, nous supposons que le tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E}$  et le tenseur de permittivité électrique  $\mathcal{B}$  satisfont

$$(7.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = (e_{ijk}(\mathbf{x})\tau_{jk}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right.$$

$$(7.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{E}) = (b_{ij}(\mathbf{x})E_j) \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) } b_{ij} = b_{ji} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(d) Il existe } m_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que } b_{ij}(\mathbf{x})E_iE_j \geq m_{\mathcal{B}}\|\mathbf{E}\|^2 \\ \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right.$$

Les fonctions de compliance normale  $p_r$  ( $r = \nu, \tau$ ) satisfont l'hypothèse (4.14) qui figure dans le chapitre 4 de la deuxième partie. La fonction de conductivité  $\psi$  vérifie l'hypothèse (4.15) dans le même chapitre. Les forces, les tractions, les densités des charges volumiques et surfaciques vérifient

$$(7.15) \quad \mathbf{f}_0 \in W^{1,p}(0,T; H),$$

$$(7.16) \quad \mathbf{f}_2 \in W^{1,p}(0,T; L^2(\Gamma_2)^d),$$

$$(7.17) \quad q_0 \in W^{1,p}(0,T; L^2(\Omega)),$$

$$(7.18) \quad q_2 \in W^{1,p}(0,T; L^2(\Gamma_b)).$$

Finalement, nous assumons que l'interstice  $g$ , le potentiel donné et le déplacement initial satisfont

$$(7.19) \quad g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \quad \text{a.e. on } \Gamma_3,$$

$$(7.20) \quad \varphi_0 \in L^2(\Gamma_3),$$

$$(7.21) \quad \mathbf{u}_0 \in V.$$

Nous posons une hypothèse de petitesse sur la fonction de conductivité  $\psi$ .

$$(7.22) \quad M_\psi < \frac{m_B}{\tilde{c}_0^2},$$

où les constantes positives  $M_\psi$ ,  $m_B$  et  $\tilde{c}_0$  sont définies dans (4.15), (7.14) et (2.10), respectivement.

Maintenant, soit  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : V \times W \rightarrow W$ ,  $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V$  et  $q : [0, T] \rightarrow W$  les applications définies par

$$(7.23) \quad j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g)v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - g)\|\mathbf{v}_\tau\| da,$$

$$(7.24) \quad (h(\mathbf{u}, \varphi), \xi)_W = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - g)\phi(\varphi - \varphi_0)\xi da,$$

$$(7.25) \quad (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} da,$$

$$(7.26) \quad (q(t), \xi)_W = \int_{\Omega} q_0(t)\xi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t)\xi da,$$

pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ,  $\varphi, \xi \in W$  et  $t \in [0, T]$ . Notons que les définitions de  $h$ ,  $\mathbf{f}$  et  $q$  sont basées sur le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet; de plus, compte tenu des hypothèses (4.14) et (7.15)–(7.18), il s'ensuit que les intégrales que nous venons de voir dans (7.23)–(7.26) sont bien définies.

En utilisant les formules de Green (2.2) et (2.11), il résulte que si  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D}\}$  sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (7.3)–(7.11), alors

$$(7.27) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V,$$

$$(7.28) \quad (\mathbf{D}(t), \nabla \xi)_W + (q(t), \xi)_W = (h(\mathbf{u}(t), \varphi(t)), \xi)_W,$$

pour tout  $\mathbf{v} \in V$ ,  $\xi \in W$  et  $t \in [0, T]$ . Nous remplaçons (7.1) dans (7.27), (7.2) dans (7.28), et utilisons la notation  $\mathbf{E}(\varphi) = -\nabla \varphi$  et la condition initiale (7.12) pour dériver la formulation variationnelle du problème  $\mathcal{P}_5$ , en terme des champs de déplacement et du potentiel électrique.

**Problème  $\mathcal{P}_5^V$ .** *Trouver un champ des déplacements  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$  et un potentiel électrique  $\varphi : [0, T] \rightarrow W$  tels que*

$$(7.29) \quad \begin{aligned} & (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} \\ & \quad + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ & \quad \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T], \end{aligned}$$

$$(7.30) \quad \begin{aligned} & (\mathcal{B}\nabla\varphi, \nabla\xi)_W - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \nabla\xi)_W + (h(\mathbf{u}(t), \varphi(t)), \xi)_W = (q(t), \xi)_W \\ & \quad \forall \xi \in W, t \in [0, T], \end{aligned}$$

$$(7.31) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

Notre résultat principal d'existence et unicité que nous citons ici et prouvons dans la section suivante est le suivant.

**Théorème 7.1.** *Supposons que (4.14), (6.10), (6.11) et (7.13)–(7.22) sont vérifiées. Alors, il existe une solution unique au Problème  $\mathcal{P}_5^V$ . De plus, la solution satisfait*

$$(7.32) \quad \mathbf{u} \in W^{2,p}(0, T; V), \quad \varphi \in W^{1,p}(0, T; W).$$

Un "quadruple" des fonctions  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D})$  qui satisfont (7.1), (7.2), (7.29)–(7.31) est appelé *solution faible* du problème de contact piézoélectrique  $\mathcal{P}_5^V$ . Nous concluons par le Théorème 7.1 que, sous les hypothèses (4.14), (6.10), (6.11) et (7.13)–(7.22), il existe une unique solution faible du Problème  $\mathcal{P}_5^V$ . Pour préciser la régularité de la solution faible, notons que les relations constitutives (7.1) et (7.2), les hypothèses (6.10), (6.11), (7.13) et (7.14) et la régularité (7.32) montrent que  $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H})$ ,  $\mathbf{D} \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{W})$ ; de plus, en utilisant (7.1), (7.2), (7.29) et (7.30) il s'ensuit que (7.27) et (7.28) sont vérifiées pour tout  $\mathbf{v} \in V$ ,  $\xi \in W$  et  $t \in [0, T]$ . Nous prenons  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}(t) \pm \mathbf{z}$  où  $\mathbf{z} \in C_0^\infty(\Omega)^d$  dans (7.27) et  $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$  dans (7.28) et utilisons les notations (7.23)–(7.26) pour obtenir

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}(t) = -\mathbf{f}_0(t), \quad \operatorname{div} \mathbf{D}(t) = q_0(t)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . Il s'ensuit maintenant des régularités (7.15) et (7.17) que  $\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Omega)^d)$  et  $\operatorname{div} \mathbf{D} \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Omega))$  ce qui montre que

$$(7.33) \quad \boldsymbol{\sigma} \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H}_1), \quad \mathbf{D} \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{W}_1).$$

Nous concluons que la solution faible  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D})$  du problème de contact piézoélectrique  $\mathcal{P}_5$  possède la régularité (7.32) et (7.33).

### 7.3 Démonstration du Théorème 7.1.

Notre objectif principal dans ce paragraphe, est d'établir la démonstration du théorème d'existence et d'unicité pour le problème variationnel  $\mathcal{P}_5^V$ . A cette fin, nous supposons dans ce qui suit que (4.14), (6.10)–(6.11) et (7.13)–(7.22) sont satisfaites et, partout ci-dessous, nous dénotons par  $c$  une constante positive indépendante du temps et dont sa valeur peut changer d'une ligne à l'autre. Soit  $\boldsymbol{\eta} \in C([0, T], \mathcal{H})$  une fonction donnée. Dans la première étape, nous considérons le problème intermédiaire suivant.

**Problème  $\mathcal{P}_5^{\boldsymbol{u}_\eta$ .** *Trouver un champ des déplacements  $\boldsymbol{u}_\eta : [0, T] \rightarrow V$  tel que*

$$(7.34) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_\eta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_\eta(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\eta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_\eta(t)))_{\mathcal{H}} \\ + (\boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_\eta(t)))_{\mathcal{H}} + j(\boldsymbol{u}_\eta(t), \boldsymbol{v}) - j(\boldsymbol{u}_\eta(t), \dot{\boldsymbol{u}}_\eta(t)) \\ \geq (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}_\eta(t))_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, t \in [0, T],$$

$$(7.35) \quad \boldsymbol{u}_\eta(0) = \boldsymbol{u}_0.$$

Dans l'étude du problème variationnel  $\mathcal{P}_5^{\boldsymbol{u}_\eta}$  nous avons le résultat suivant.

**Lemme 7.2.** *Il existe une unique solution  $\boldsymbol{u}_\eta \in C^1([0, T]; V)$  au problème (7.34)–(7.35). De plus, si  $\boldsymbol{u}_1$  et  $\boldsymbol{u}_2$  sont deux solutions du problème (7.34)–(7.35) correspondantes aux données  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in C([0, T]; \mathcal{H})$  alors il existe une constante  $c > 0$  telle que*

$$(7.36) \quad \|\dot{\boldsymbol{u}}_1(t) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(t)\|_V \leq c(\|\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_{\mathcal{H}} + \|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)\|_V) \quad \forall t \in [0, T].$$

**Démonstration.** Nous allons appliquer le Théorème 2.10 dans le cas de l'espace de Hilbert  $X = V$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_V$  et de la norme associée  $\|\cdot\|_V$  définies par (2.5) et (2.6) dans le deuxième chapitre de la première partie. Nous utilisons le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet pour définir les opérateurs  $A : V \rightarrow V$ ,  $B : V \rightarrow V$  et la fonction  $\boldsymbol{f}_\eta : [0, T] \rightarrow V$  par les égalités

$$(7.37) \quad (A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}},$$

$$(7.38) \quad (B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V = (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}},$$

$$(7.39) \quad (\boldsymbol{f}_\eta(t), \boldsymbol{v})_V = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v})_V - (\boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}},$$

pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  et  $t \in [0, T]$ . Il s'ensuit des hypothèses (6.10) et (6.11) que les opérateurs  $A$  et  $B$  satisfont les conditions (2.13) et (2.17), respectivement.

Nous utilisons (2.7) pour voir que la fonctionnelle  $j$  définie dans (7.23) satisfait la condition (2.14)(a). Moyennant (4.14) et (2.7) encore une fois nous obtenons

$$\begin{aligned} & j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \\ & \leq c_0^2(L_\nu + L_\tau) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \end{aligned}$$

ce qui montre que la fonctionnelle  $j$  vérifie la condition (2.14)(b) sur  $X = V$ . De plus, en utilisant (7.15) et (7.16) il est facile de voir que  $\mathbf{f}$  défini par (7.25) satisfait  $\mathbf{f} \in W^{1,p}(0, T; V)$  et, prenant en considération que  $\boldsymbol{\eta} \in C([0, T]; \mathcal{H})$ , nous concluons de (7.39) que  $\mathbf{f}_\eta \in C([0, T]; V)$ . Finalement, notons que (7.21) montre que la condition (2.19) est satisfaite aussi.

En utilisant maintenant (7.37)–(7.39) nous remarquons que le Lemme 7.2 est une conséquence directe du Théorème 2.10 1), 2); ce qui achève la preuve.  $\square$

Ensuite, nous utilisons (7.39) pour voir que si  $\boldsymbol{\eta} \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H})$  alors  $\mathbf{f}_\eta \in W^{1,p}(0, T; V)$ ; donc, en utilisant le Théorème 2.10 3), nous notons que le Lemme 7.2 peut être complété le résultat de régularité suivant.

$$(7.40) \quad \boldsymbol{\eta} \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H}) \implies \mathbf{u}_\eta \in W^{2,p}(0, T; V).$$

Dans l'étape suivante nous utilisons la solution  $\mathbf{u}_\eta \in C^1([0, T], V)$  obtenue dans le Lemme 7.2 pour construire le problème variationnel suivant.

**Problème  $\mathcal{P}_5^{\varphi_\eta}$ .** Trouver un potentiel électrique  $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$  tel que

$$(7.41) \quad (\mathcal{B}\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\xi)_W - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta(t)), \nabla\xi)_W + (h(\mathbf{u}_\eta(t), \varphi_\eta(t)), \xi)_W = (q(t), \xi)_W \\ \forall \xi \in W, t \in [0, T].$$

Pour que le problème  $\mathcal{P}_5^{\varphi_\eta}$  soit bien posé on a le résultat suivant.

**Lemme 7.3.** *Il existe une unique solution  $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0, T; W)$  qui satisfait (7.41). De plus, si  $\varphi_{\eta_1}$  et  $\varphi_{\eta_2}$  sont deux solutions de (7.41) correspondantes à  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in C([0, T]; \mathcal{H})$  alors il existe  $c > 0$  tel que*

$$(7.42) \quad \|\varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t)\|_W \leq c \|\mathbf{u}_{\eta_1}(t) - \mathbf{u}_{\eta_2}(t)\|_V \quad \forall t \in [0, T].$$

**Démonstration.** Soit  $t \in [0, T]$ . Nous utilisons le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet pour définir l'opérateur  $A_\eta(t) : W \rightarrow W$  par

$$(7.43) \quad (A_\eta(t)\varphi, \xi)_W = (\mathcal{B}\nabla\varphi, \nabla\xi)_W - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta(t)), \nabla\xi)_W + (h(\mathbf{u}_\eta(t), \varphi), \xi)_W$$

Pour tout  $\varphi, \xi \in W$ . Soient  $\varphi_1, \varphi_2 \in W$ ; nous utilisons les hypothèses (7.14) et (7.24) pour trouver

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_{\mathcal{B}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 + \int_{\Gamma_3} \psi(u_{\eta\nu}(t) - g)(\phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \phi(\varphi_2 - \varphi_0))(\varphi_1 - \varphi_2) da$$

et, par la condition (4.15)(a) combinée avec la monotonie de la fonction  $\phi$  définie par (1.42), nous obtenons

$$(7.44) \quad (A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_{\mathcal{B}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2.$$

D'un autre côté, en utilisant de nouveau (7.14), (7.13), (4.15) et (7.24) nous avons

$$(7.45) \quad (A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \xi)_W \leq c_{\mathcal{E}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\xi\|_W + \int_{\Gamma_3} M_\psi |\varphi_1 - \varphi_2| |\xi| da \quad \forall \xi \in W,$$

où  $c_{\mathcal{E}}$  représente une constante positive qui dépend du tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E}$ . Il s'ensuit de (7.45) et (2.10) que

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \xi)_W \leq (c_{\mathcal{E}} + M_\psi \tilde{c}_0^2) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\xi\|_W,$$

ce qui implique que

$$(7.46) \quad \|A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2\|_W \leq (c_{\mathcal{E}} + M_\psi \tilde{c}_0^2) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W.$$

Les inégalités (7.44) et (7.46) montrent que l'opérateur  $A_\eta(t)$  est fortement monotone et de Lipschitz sur  $W$ ; donc, en utilisant un résultat standard sur les égalités variationnelles, il s'ensuit qu'il existe un unique élément  $\varphi_\eta(t) \in W$  tel que

$$(7.47) \quad A_\eta(t)\varphi_\eta(t) = q(t).$$

Nous combinons maintenant (7.43) et (7.47) pour déduire que  $\varphi_\eta(t) \in W$  est l'unique solution de l'équation variationnelle (7.41).

Nous prouvons maintenant que  $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0,T;W)$ . A cette fin, considérons  $t_1, t_2 \in [0,T]$  et, pour raison de simplicité, nous écrivons  $\varphi_\eta(t_i) = \varphi_i$ ,  $u_{\eta\nu}(t_i) = u_i$ ,  $\mathbf{u}_\eta(t_i) = \mathbf{u}_i$ ,  $q(t_i) = q_i$ , pour  $i = 1,2$ . Moyennant (7.41), (7.13), (7.14) et (7.24) nous dérivons l'inégalité

$$(7.48) \quad m_{\mathcal{B}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 \leq c_{\mathcal{E}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W + \|q_1 - q_2\|_W \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \\ + \int_{\Gamma_3} |\psi(u_1 - g)\phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_2 - g)\phi(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da$$

Nous utilisons les bornes  $|\psi(u_i - g)| \leq M_\psi$ ,  $|\phi(\varphi_1 - \varphi_0)| \leq L_\phi$ , la Lipschitzialité des fonctions  $\psi$ ,  $\phi$  et l'inégalité (2.10) pour obtenir

$$\int_{\Gamma_3} |\psi(u_1 - g)\phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_2 - g)\phi(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ \leq M_\psi \int_{\Gamma_3} |\varphi_1 - \varphi_2|^2 da + L_\psi L_\phi \int_{\Gamma_3} |u_1 - u_2| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ \leq M_\psi \tilde{c}_0^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 + L_\psi L_\phi c_0 \tilde{c}_0 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W.$$

Nous remplaçons cette dernière inégalité dans (7.48) et trouver

$$(7.49) \quad m_{\mathcal{B}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \leq (c_{\mathcal{E}} + L_\psi L_\phi c_0 \tilde{c}_0) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W + M_\psi \tilde{c}_0^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W.$$

Il s'ensuit maintenant de l'inégalité (7.49) et l'hypothèse de petitesse (7.22) que

$$(7.50) \quad \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \leq c(\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W)$$

où  $c$  est une constante positive. Notons aussi que les hypothèses (7.17) et (7.18) combinées avec la définition (7.25) impliquent que  $q \in W^{1,p}(0,T;W)$ . Donc, puisque  $\mathbf{u}_\eta \in C([0,T];V)$ , l'inégalité (7.50) implique que  $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0,T;W)$ .

Soit maintenant  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in C([0,T];\mathcal{H})$  et, pour simplicité, notons  $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$ ,  $u_{\eta_i} = u_i$ ,  $i = 1,2$ . Nous utilisons (7.41) et moyennant des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (7.49) pour obtenir que

$$(7.51) \quad m_{\mathcal{B}} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W \leq (c_{\mathcal{E}} + L_\psi L_\phi c_0 \tilde{c}_0) \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V \\ + M_\psi \tilde{c}_0^2 \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W \quad \forall t \in [0,T].$$

Cette dernière inégalité combinée avec l'hypothèse de petitesse (7.22) mènent à (7.42), ce qui achève la preuve.  $\square$

Considérons maintenant l'opérateur  $\Lambda : C([0,T];\mathcal{H}) \rightarrow C([0,T];\mathcal{H})$  défini par

$$(7.52) \quad \Lambda \boldsymbol{\eta}(t) = \mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in C([0,T];\mathcal{H}), t \in [0,T].$$

Dans la dernière étape, nous montrons que l'opérateur  $\Lambda$  possède un point fixe.

**Lemme 7.4.** *Il existe un unique élément  $\boldsymbol{\eta}^* \in W^{1,p}(0,T;\mathcal{H})$  tel que  $\Lambda\boldsymbol{\eta}^* = \boldsymbol{\eta}^*$ .*

**Démonstration.** Soit  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in C([0,T];\mathcal{H})$  et, pour simplicité, nous utilisons les notations  $\mathbf{u}_i$  et  $\varphi_i$  pour les fonctions  $\mathbf{u}_{\eta_i}$  et  $\varphi_{\eta_i}$  obtenues dans les Lemmes 7.2 et 7.3, pour  $i = 1,2$ . Soit  $t \in [0,T]$ , en utilisant (7.52) et (7.13) nous obtenons

$$\|\Lambda\boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda\boldsymbol{\eta}_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq c \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W$$

et, gardant à l'esprit (7.42), nous trouvons que

$$(7.53) \quad \|\Lambda\boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda\boldsymbol{\eta}_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq c \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V.$$

D'un autre côté, puisque

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \dot{\mathbf{u}}_i(s) ds$$

nous obtenons

$$(7.54) \quad \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)\|_V ds.$$

Nous remplaçons cette inégalité dans (7.36), pour obtenir

$$\|\dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t)\|_V \leq c \left( \|\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_{\mathcal{H}} + \int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)\|_V ds \right).$$

Il s'ensuit maintenant d'un argument de type Gronwall que

$$(7.55) \quad \int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)\|_V ds \leq c \int_0^t \|\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)\|_{\mathcal{H}} ds,$$

Combinons maintenant les inégalités (7.53)–(7.55) pour obtenir

$$\|\Lambda\boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda\boldsymbol{\eta}_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq c \int_0^t \|\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)\|_{\mathcal{H}} ds.$$

Réitérant l'inégalité précédente  $n$  fois, nous déduisons

$$\|\Lambda^n \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda^n \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{c^n}{n!} \|\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_{C([0,T];\mathcal{H})}.$$

La dernière inégalité montre que pour  $n$  suffisamment grand, l'opérateur  $\Lambda^n$  est une contraction sur l'espace de Banach  $C([0,T];\mathcal{H})$  tel que  $\Lambda\boldsymbol{\eta}^* = \boldsymbol{\eta}^*$  et donc il existe

un unique élément  $\boldsymbol{\eta}^* \in C([0, T]; \mathcal{H})$ . La régularité  $\boldsymbol{\eta}^* \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H})$  découle de la régularité  $\varphi_{\boldsymbol{\eta}^*} \in W^{1,p}(0, T; W)$  obtenue dans le Lemme 7.3, combinée avec la définition (7.52) de l'opérateur  $\Lambda$ .  $\square$

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour prouver le Théorème 7.1.

*Existence.* Soit  $\boldsymbol{\eta}^* \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H})$  le point fixe de l'opérateur  $\Lambda$ , et soit  $\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}, \varphi_{\boldsymbol{\eta}^*}$  les solutions des problèmes  $\mathcal{P}_5^{\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}}$  et  $\mathcal{P}_5^{\varphi_{\boldsymbol{\eta}^*}}$  respectivement pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$ . Il s'ensuit de (7.52) que  $\mathcal{E}^* \nabla \varphi_{\boldsymbol{\eta}^*} = \boldsymbol{\eta}^*$  et donc (7.34), (7.35) et (7.41) impliquent que  $(\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}, \varphi_{\boldsymbol{\eta}^*})$  est une solution du problème  $\mathcal{P}_5^V$ . La régularité (7.32) s'ensuit des Lemmes 7.3 et 7.4 combinés avec (7.40).

*Unicité.* L'unicité de la solution découle de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Lambda$ , donné par le Lemme 7.4. En effet, soit  $(\mathbf{u}, \varphi)$  solution du problème variationnel  $\mathcal{P}_5^V$  et soit

$$(7.56) \quad \boldsymbol{\eta} = \mathcal{E}^* \nabla \varphi,$$

il s'ensuit de (7.34) combinée avec (7.52) que  $\mathbf{u}$  est solution du problème  $\mathcal{P}_5^{\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}}}$ , et puisque par le Lemme 7.2 ce problème possède une solution unique notée  $\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}}$ , nous avons

$$(7.57) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}}.$$

De plus,  $\varphi$  satisfait l'égalité donc  $\varphi$  est solution du Problème  $\mathcal{P}_5^{\varphi_{\boldsymbol{\eta}}}$ . Mais ce dernier admet une solution unique par le Lemme 7.3, donc nous concluons que

$$(7.58) \quad \varphi = \varphi_{\boldsymbol{\eta}}.$$

Il résulte de (7.56), (7.58) et (7.52) que  $\Lambda \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}$  donc  $\boldsymbol{\eta}$  est un point fixe de l'opérateur  $\Lambda$ . D'après le Lemme 7.4 il s'ensuit que

$$(7.59) \quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*.$$

L'unicité de la solution résulte maintenant à partir de (7.57)–(7.59).  $\square$



## Bibliographie

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] A. Amassad, M. Sofonea, *Analysis of a quasistatic viscoplastic problem involving Tresca friction law*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **4** (1998), 55-72.
- [3] A. Amassad, M. Shillor, M. Sofonea, *A quasistatic contact problem with slip dependent coefficient of friction*, Math. Meth. Appl. Sci., **22** (1999), 267-284.
- [4] L.-E. Andersson, *A quasistatic frictional problem with normal compliance*, Nonlinear Analysis TMA **16** (1991), 407-428.
- [5] L.-E. Andersson, *A global existence result for a quasistatic contact problem with friction*, Advances in Mathematical Sciences and Applications **5** (1995), 249-286.
- [6] K.T. Andrews, M. Shillor, *Dynamic adhesive contact of a membrane*, Adv. Math. Sci. Appl. **13** (2003), 343-356.
- [7] B. Awbi, *Analyse variationnelle de quelques problèmes viscoélastiques et viscoplastiques avec frottement*, Thèse, Université de Perpignan, 2001.
- [8] M. Barboteu, J.R. Fernández, Y. Ouafik, *Numerical analysis of two frictionless elastic-piezoelectric contact problems*, à paraître dans Mathematics of Computation.
- [9] M. Barboteu, J.R. Fernández, Y. Ouafik, *Numerical analysis of a frictionless viscoelastic- piezoelectric contact problems*, à paraître dans Numerische Mathematik.
- [10] P. Bisenga, F. Lebon, F. Maceri, *The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support*, in Contact Mechanics, J.A.C. Martins and Manuel D.P. Monteiro Marques (Eds.), Kluwer, Dordrecht, (2002), 347-354.
- [11] V. Barbu, T. Precupanu, *Convexity and optimisation in Banach spaces*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986.
- [12] R.C. Batra, J.S. Yang, *Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity*, Journal of Elasticity **38** (1995), 209-218.

- [13] H. Brézis, *Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, Ann. Inst. Fourier, **18** (1968), 115–175.
- [14] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, 1987.
- [15] T. Cazenave, A. Haraux, *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, Ellipses, Paris, 1990.
- [16] O. Chau, J. R. Fernández, M. Shillor, M. Sofonea, *Variational and Numerical Analysis of a Quasistatic Viscoelastic Contact Problem with Adhesion*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **159** (2003), 431-465.
- [17] O. Chau, M. Shillor, M. Sofonea, *Dynamic frictionless contact with adhesion*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), **55**, (2004), 32–47.
- [18] J. Chen, W. Han, M. Sofonea, *Numerical analysis of a quasistatic problem of sliding frictional contact with wear*, Methods and Applications of Analysis, **7** (2000), 687-704.
- [19] M. Cocu, *Existence of solutions of Signorini problems with friction*, Int. J. Engng. Sci., **22** (1984), 567-581.
- [20] M. Cocu, E. Pratt, M. Raous, *Formulation and approximation of quasistatic frictional contact*, Int. Jour. Engng. Sci., **34** (1996), 783-798.
- [21] M. Cocu, R. Rocca, *Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion*, Math. Model. Num. Anal **34**, (2000), 981-1001.
- [22] G. Duvaut, *Lois de frottement non locale*, J. Méc. Thé. Appl. Numéro spécial (1982), 73-78.
- [23] G. Duvaut, *Mécanique des milieux continus*, Dunod, Paris, 1998.
- [24] G. Duvaut, J.L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod 1972.
- [25] J. R. Fernández-Garcia, W. Han, M. Shillor, M. Sofonea, *Numerical analysis and simulations of quasistatic frictionless contact problems*, Int. J. Appl. Math. Comp. Sci., **11** (2001), 205-222.
- [26] J.R. Fernández, M. Shillor, M. Sofonea, *Analysis and numerical simulations of a dynamic contact problem with adhesion*, Math. Comput. Modelling **37** (2003), 1317–1333.
- [27] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II **295**, (1982), 913–916.
- [28] M. Frémond, *Adhérence des solides*, J. Mécanique Théorique et Appliquée **6**, (1987), 383-407.
- [29] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin, 2002.

- [30] R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [31] R. Glowinski, J.L. Lions, R. Trémolières, *Numerical Analysis of Variational Inequalities*, North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [32] W. Han, K.L. Kuttler, M. Shillor, M. Sofonea, *Elastic beam in adhesive contact*, Int. J. Solids Structures **39** (2002), 1145–1164.
- [33] W. Han, M. Sofonea, *Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems*, SIAM Journal of Numerical Analysis **38** (2000), 556–579.
- [34] W. Han, M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics **30**, American Mathematical Society, Providence, RI - Intl. Press, Sommerville, MA, 2002.
- [35] T. Ikeda, *Fundamentals of Piezoelectricity*, Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [36] I.R. Ionescu, J.-C. Paumier, *On the contact problem with slip displacement dependent friction in elastostatics*, Int. J. Engng. Sci., **34** (1996), 471–491.
- [37] I.R. Ionescu, J.-C. Paumier, *On the contact problem with slip rate dependent friction in elastodynamics*, Eur. J. Mech., A/Solids, **13** (1994), 555-568.
- [38] I.R. Ionescu, M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, 1993.
- [39] J. Jarušek, C. Eck, *Dynamic contact problems with small Coulomb friction for viscoelastic bodies. Existence of solutions*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, **9** (1999), 11-34.
- [40] L. Jianu, M. Shillor, M. Sofonea, *A Viscoelastic Frictionless Contact Problem with Adhesion* Appli. Anal.
- [41] A. Klarbring, A. Mikelic, M. Shillor, *Frictional contact problems with normal compliance*, Int. J. Engng. Sci., **26** (1988), 811-832.
- [42] A. Klarbring, A. Mikelic, M. Shillor, *A global existence result for the quasistatic frictional contact problem with normal compliance in Unilateral Problems in Structural Analysis* Vol. 4, Eds. G. Del Piero and F. Maceri, Birkhauser, Boston (1991), p. 85-111.
- [43] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod et Gauthier-Villars, Paris 1969.
- [44] Z. Lerguet, M. Sofonea, S. Drabla, *Analysis of a frictional contact problem with adhesion*, Accepté dans Acta Mathematica Universitatis Comenianae.
- [45] Z. Lerguet, M. Shillor, M. Sofonea, *A frictional contact problem for an electroviscoelastic body*, Electron. J. Diff. Eqns., Vol. 2007 (2007), No. **170**, pp. 1-16.

- [46] F. Maceri and P. Bisegna, *The unilateral frictionless contact of a piezoelectric body with a rigid support*, Math. Comp. Modelling, **28** (1998), 19–28.
- [47] A. Matei, V. V. Motreanu, M. Sofonea, *On the Signorini frictionless contact problem for linear viscoelastic materials*, Applicable Analysis, **80** (2001), 177-199.
- [48] R. D. Mindlin, *Polarisation gradient in elastic dielectrics*, Int. J. Solids Structures **4** (1968), 637-663.
- [49] R. D. Mindlin, *Continuum and lattice theories of influence of electromechanical coupling on capacitance of thin dielectric films*, Int. J. Solids Structures **4** (1969), 1197-1213.
- [50] R. D. Mindlin, *Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics*, Journal of Elasticity **4** (1972), 217-280.
- [51] D. Motreanu, M. Sofonea, *Evolutionary variational inequalities arising in quasistatic frictional contact problems for elastic materials*, Abstract and Applied Analysis, **4** (1999), 255-279.
- [52] D. Motreanu and M. Sofonea, *Quasivariational inequalities and applications in frictional contact problems with normal compliance*, Adv. Math. Sci. Appl., **10** (2000), 103-118.
- [53] J. Nečas, I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies: An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, 1981.
- [54] Y. Ouafik, *A Piezoelectric Body in Frictional Contact*, Bull. Math Soc. Sc. Math. Roumanie, **48** (2005) 235-245.
- [55] Y. Ouafik, *Contribution à l'étude mathématique et numérique des structures piézoélectriques en Contact*, Thèse, Université de Perpignan, 2007.
- [56] V. Z. Patron, B. A. Kudryavtsev, *Electromagnetoelasticity, Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids*, Gordon & Breach, London, 1988.
- [57] M. Raous, L. Cangémi, M. Cocou, *A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., **177** (1999), 383–399.
- [58] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, *Quasistatic nonlinear viscoelastic contact with normal compliance and friction*, Journal of Elasticity, **51** (1998), 105-126.
- [59] J. Rojek, J.J. Telega, *Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics. I: General developments*, J. Theor. Appl. Mech. **39** (2001) 655–677.
- [60] J. Rojek, J.J. Telega, S. Stupkiewicz, *Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics. II: Numerical implementation and application to implanted knee joints*, J. Theor. Appl. Mech. **39** (2001), 679–706.

- [61] M. Sofonea, *Modélisation Mathématique en Mécanique du Contact*, Annals of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. **32** (2005), 67-74.
- [62] M. Sofonea, *Problèmes Mathématiques en Élasticité et Viscoplasticité*, Cours de DEA de Mathématiques Appliquées, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 1991.
- [63] M. Sofonea, *Problèmes Nonlinéaires dans la Théorie de l'Elasticité* Cours de Magister de Mathématiques Appliquées, Université de Sétif, Algérie, 1993.
- [64] M. Sofonea, R. Arhab, *An Electro-viscoelastic Contact Problem with Adhesion*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis, **14** (2007), 577-591.
- [65] M. Sofonea, R. Arhab, R. Tarraf *Analysis of electroelastic frictionless contact problems with adhesion*, Journal of Applied Mathematics, Art. ID. 64217, 25 pages.
- [66] M. Sofonea, El H. Essoufi, *A Piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction*, Mathematical Modelling and Analysis **9** (2004), 229–242.
- [67] M. Sofonea, El H. Essoufi, *Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body*, Adv. Math. Sci. Appl. **14** (2004), 613–631.
- [68] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics **276**, Chapman-Hall/CRC Press, New York 2006.
- [69] M. Sofonea, Z. Lerguet, *A model for adhesive frictional contact*, Machine Dynamics Problems **30** (2006), 158–168.
- [70] M. Sofonea, A. Matei, *A quasistatic frictionless contact problem with normal compliance*, Ann. Univ. Craiova, Math-Info., XXVII (2000), 43-56.
- [71] M. Sofonea, A. Matei, *Variational inequalities with applications*, A study of anti-plane frictional contact problems, Springer, New York (à paraître).
- [72] M. Sofonea, Y. Ouafik, *A piezoelectric contact problem with normal compliance*, Appl. Math., **32** (2005), 425-442.
- [73] N. Strömberg, L. Johansson, A. Klarbring, *Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear*, Int. J. Solids Structures, **33** (1996), 1817–1836.
- [74] M. Shillor, M. Sofonea, J.J. Telega, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*, Lect. Notes Phys. **655**, 2004, Springer, Berlin Heidelberg.
- [75] P. Suquet, *Plasticité et homogénéisation*, Thèse de Doctorat d'État, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1982.

- [76] B. Tengiz and G. Tengiz, *Some Dynamic Problems of the Theory of electroelasticity*, *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, **10** (1997), 1-53.
- [77] R. A. Toupin, *The elastic dielectrics*, *J. Rat. Mech. Analysis* **5** (1956), 849-915.
- [78] R. A. Toupin, *Stress tensors in elastic dielectrics*. *Arch. Rational. Mech. Anal.* **5** (1960), 440-452.
- [79] R. A. Toupin, *A dynamical theory of elastic dielectrics*. *Int. J. Engrg. Sci.* **1** (1963), 101-126.