REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF 1
ALGERIE

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématiques Appliquées

Présentée par :

SAFFIDINE REBIHA

Etude de la contrôlabilité d'un serpent hilbertien et application en géométrie sous-riemannienne

Soutenue le: 01 juin 2016 **Devant le jury:**

Mr. S. DRABLA	**Prof. U. Sétif 1**	**Président**
Mr. N. BENSALEM	**Prof. U. Sétif 1**	**Rapporteur**
Mr. F. PELLETIER	**Prof. U. Savoie. France**	**Co-rapporteur**
Mr. S. E. REBIAI	**Prof. U. Batna**	**Examinateur**
Mr. A. BOUDAOUD	**Prof. U. M'sila**	**Examinateur**

ملخص

في هذه الأطروحة نهتم بمسألة مراقبة الذراع المفصلية و الثعبان في فضاء هيلبرت.
في الفصل الاول و بعد تعميم مفهوم كلا من الثعبان والذراع المفصلية، ندرس بعض خواصهما.
في الفصل الثاني نعطي تعميما لنظرية الوصل لمسألة الثعبان وذلك باستخدام مكاملة التوزيع ومدارات حقول الأشعة في متغيرة بناخية، الفصل الثالث و الذي يمثل ثاني نتيجة لنا، نقدم إذن برهان أبسط لمسألة مراقبة الذراع المفصلية والثعبان الهيلبرتي باستعمال تأثير زمرة موبيس لكرة الوحدة على الفضاء C_p^L في حالة فضاء هيلبرت قابل للفصل.

الكلمات المفتاحية: الهندسة الريمانية الجزئية، المراقبة، ثعبان هيلبرتي، تحويلات موبيس.

Abstract

In this thesis, we study the controllability problem of an articulated arm and a snake in a Hilbert space. In the first chapter after the generalization of the notions of a snake and an articulated arm in infinite dimension, we study some properties of the snake and the articulated arm. In the chapter two, we give a generalization of the theorem of accessibility for the snake problem by using the arguments of the integrability of distribution and orbits of vector fields on Banach manifold. The third chapter presents our second contribution. We present a simpler proof to the controllability problem of an articulated arm and a snake by using the action of the Möbius group of the unit sphere on the configuration space C_p^L, in the context of separable Hilbert space.

Key words:Sub-Riemannian geometry, Controllability, Hilbert snake, Möbius transformations.

Résumé

Dans cette thèse, on étudie le problème de contrôlabilité d'un bras articulé et d'un serpent dans un espace de Hilbert. Dans le premier chapitre, on généralise les notions de serpent et du bras articulé en dimension infinie. On étudie également quelques propriétés de ces derniers . Dans le chapitre 2, on donne une généralisation du théorème d'accessibilité pour le problème de serpent en utilisant les résultats de l'intégrabilité d'une distribution et les orbites des champs de vecteurs sur une variété de Banach. Le troisième chapitre présente notre deuxième contribution. Le but de ce chapitre est de donner une démonstration plus simple du problème de contrôlabilité d'un bras articulé et d'un serpent en utilisant l'action du groupe de Möbius de la sphère unité sur l'espace des configurations C_p^L, dans le contexte d'un espace de Hilbert séparable.

Mots clés : Géométrie sous-Riemannienne, Contrôlabilité, Serpent hilbertien, Transformations de Möbius

Table des matières

Introduction

En dimension finie, un serpent (de longueur L) est une courbe $S : [0, L] \to \mathbb{R}^d$, continue et de classe C^1 par morceaux, paramétrée par longueur d'arc, telle que $S(0) = 0$. D'après [20], "*Charmer un serpent*" consiste à déformer S de sorte que son museau $S(L)$ suive une courbe c dans $\mathbb{R}^d$; c-à-d, chercher une déformation à un paramètre S_t de S telle que son *extrémité* $S_t(L)$ suive une courbe $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^d$ de classe C^1 avec $S_t(L) = c(t)$. Plus précisément, un serpent S de longueur L dans $\mathbb{R}^d$ peut se donner par une courbe $u : [0, L] \to \mathbb{S}^{d-1}$, continue par morceaux, telle que $S(s) = \int_0^s u(\tau)d\tau$. On note par $Conf$ l'ensemble de ce type de courbes de $[0, L]$ dans la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$, où on peut munir $Conf$ d'une structure de variété banachique. Donc, on doit construire une courbe de classe $C^1 : t \mapsto u_t$ dans $Conf$ telle que la famille associée S_t des serpents satisfasse la condition $S_t(L) = c(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. "*L'algorithme du charmeur de serpents*" proposé dans [20] consiste à construire une distribution "*horizontale*" convenable $\mathcal{D}$ dans $Conf$ telle que $t \mapsto u_t$ soit tangente à $\mathcal{D}$. En effet, cette approche revient à construire un relèvement $\tilde{c}$ de c dans $Conf$ de sorte que *l'énergie cinétique infinitésimale* $\frac{1}{2}||\dot{\tilde{c}}(t)||^2_{L^2}$ soit minimale pour tout $t \in [0, 1]$ (voir sous-section 3.4.1). Notons que, pour les bras articulés (c-à-d., où S est affine par partie), cet algorithme est une généralisation d'une approche analogue développée dans [12].

Dans cette thèse, on va donner une généralisation de ce problème dans le contexte d'un espace de Hilbert séparable. Pour plus de détails, étant donné un espace de Hilbert séparable $\mathbb{H}$, on considère l'hypersurface lisse $\mathbb{S}^\infty$ (la sphère unité de $\mathbb{H}$). D'une manière analogue à ce qui précède, un serpent hilbertien de longueur L est une courbe $S : [0, L] \to \mathbb{H}$, continue et de classe C^1 par morceaux, paramétrée par longueur d'arc telle que $S(0) = 0$. Le bras articulé correspond au cas particulier où S est affine par partie. Donc, un serpent est aussi donné par une courbe $u : [0, L] \to \mathbb{S}^\infty$, continue par morceaux, telle que $S(s) = \int_0^s u(\tau)d\tau$. Si on fixe une partition $\mathcal{P}$ de $[0, L]$, l'ensemble $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ de ces courbes sera appelé *l'espace des configurations*; cet espace a une structure de variété banachique. Pour les bras articulés, l'espace des configurations $\mathcal{A}^L_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ est le sous ensemble des u qui sont constantes sur chaque sous-intervalle associé à la partition. En fait, $\mathcal{A}^L_{\mathcal{P}}$ est une sous variété hilbertienne faible de $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$. A toute configuration $u \in \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$, on associe l'application extrémité $\mathcal{E}(u) = \displaystyle\int_0^L u(s)ds$. Cette dernière est lisse et sa dérivée $T_u\mathcal{E}$ est aussi une application linéaire et continue. On définit sur $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ une métrique riemannienne (faible) G. L'orthogonal de $\ker T_u\mathcal{E}$ engendre une distribution fermée $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$; c-à-d, une correspondance $u \mapsto \mathcal{D}_u$ où $\mathcal{D}_u$ est un sous espace vectoriel fermé de l'espace tangent $T_u\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$. Comme en dimension finie, pour toute courbe $t \mapsto u_t$ dans $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$, définie sur $[0, 1]$, on peut associer une famille S_t de serpents dont le museau $S_t(L)$ suit une courbe $c : t \mapsto S_t(L)$ pour $t \in [0, 1]$. La courbe $\tilde{c} : t \to u_t$ est dite un "relèvement " de c dans $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$. Si $\tilde{c}$ est tangente à $\mathcal{D}$, $\tilde{c}$ est appelé "relèvement horizontal".

Donc, le problème de contrôlabilité de l'extrémité (museau) du serpent hilbertien peut se traduire par le "problème d'accessibilité "suivant :

Trouver une courbe horizontale $\tilde{c} : [0, 1] \to \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$, de classe C^1 par morceaux (c-à-d. $\tilde{c}$ est tangente à $\mathcal{D}$), reliant u_0 et u_1 où u_0 (resp. u_1) est une configuration initiale (resp. finale) dans $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ telle que $\mathcal{E}(u_i) = x_i$, $i = 0, 1$.

Si on considère une configuration $u \in \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$, on étudie l'ensemble d'accessibilité $\mathcal{A}(u)$ de toutes les configurations $v \in \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ telles qu'il existe une courbe horizontale, de classe C^1 par morceaux, joignant v et u. En dimension finie, dans [12] et [20] et moyennant des arguments de l' action des groupes de Möbius sur $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$, les auteurs ont montré que $\mathcal{A}(u)$ est la variété intégrale maximale d'une distribution de dimension finie sur $\mathcal{A}^L_{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$. Dans notre cas, on va traiter le problème en question par deux méthodes.

Première méthode. Construire une distribution canonique $\bar{\mathcal{D}}$, modelée sur un espace de Hilbert, qui est intégrable de sorte que l'ensemble d'accessibilité $\mathcal{A}(u)$ soit un sous-ensemble dense dans la variété intégrale maximale en u de $\bar{\mathcal{D}}$. En outre, cette distribution est minimale (voir Remarque 2.4.2). Dans le cas où $\mathbb{H}$ est de dimension finie, $\bar{\mathcal{D}}$ est exactement la distribution finie obtenue dans [20], dont les feuilles sont les ensembles d'accessibilité.

Dans la démonstration, on a utilisé les arguments utilisés dans [17] et [16]. En effet, ce théorème d'accessibilité est une application des résultats obtenus dans [16] ; il donne également une illustration des "structures de presque algébroïde de Lie-Banach" développée dans [5].

Deuxième méthode. Elle est basée sur l'utilisation de l'action du groupe de Möbius généralisé de la sphère unité sur l'espace des configurations.

Le groupe de transformations de Möbius d'un espace de dimension finie est engendré par les inversions des sphères. Ce dernier est l'un des groupes géométriques fondamentaux. Les transformations de Möbius préservent les formes sphériques ainssi les angles entre les paires de courbes. Ce groupe peut être considéré comme le groupe conforme de la sphère identifiée avec la compactification d'un espace de dimension finie.

Si on note par $\mathfrak{M}(\mathbb{S}^n)$ les transformations de Möbius d'une telle sphère $\mathbb{S}^n$ qui préservent l'orientation, il est connu que $\mathfrak{M}(\mathbb{S}^n)$ est isomorphe au groupe $SO_0(n,1)$ qui est la composante connexe de l'identité de $O(n,1)$. Tous ces résultats peuvent être généralisés au contexte d'un espace de Hilbert (voir [3] et [14]). Par conséquent, le groupe $\mathfrak{M}(\mathbb{S}^\infty)$ des transformations de Möbius de la sphère unité $\mathbb{S}^\infty$ d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ est aussi isomorphe à un sous-groupe $SO_0(\mathbb{H},1)$ du groupe $O(\mathbb{H},1)$ des transformations linéaires de Lorentz de la structure de Lorentz sur $\mathcal{H}=\mathbb{R}\oplus\mathbb{H}$. Pour plus de détails, voir la section 3.2. Si on considère $SO(\mathbb{H},1)$ comme un sous-groupe du groupe $GL(\mathcal{H})$, des automorphismes continus de $\mathcal{H}$, $SO_{HS}(\mathbb{H},1)$ représente l'intersection de $SO(\mathbb{H},1)$ avec le sous-groupe $GL_{HS}(\mathcal{H})$ des automorphismes de Hilbert-Schmidt de $GL(\mathcal{H})$. D'après [10], $SO_{HS}(\mathbb{H},1)$ peut être considéré comme une limite de la suite croissante

$$SO(\mathbb{H}_2,1)\subset\cdots\subset SO(\mathbb{H}_n,1)\subset\cdots\subset SO_{HS}(\mathbb{H},1)\subset GL_{HS}(\mathcal{H}).$$

Via l'isomorphisme précédent de $SO(\mathbb{H},1)$ dans $\mathfrak{M}(\mathbb{S}^\infty)$ on obtient un sous-groupe $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ de $\mathfrak{M}(\mathbb{S}^\infty)$.

D'autre part, comme dans la situation de dimension finie, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $SO_{HS}(\mathbb{H},1)$ a une décomposition de type $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{s}$ où $\mathfrak{s}$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe $SO_{HS}(\mathcal{H})$ des isométries de Hilbert-Schmidt de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. $\mathfrak{h}$ peut être obtenu comme une limite adéquate des sous-espaces de dimension finie $\mathfrak{h}_n$ qui est un facteur de la décomposition classique $\mathfrak{g}_n=\mathfrak{h}_n\oplus\mathfrak{s}_n$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_n$ de $SO(\mathbb{H}_n,1)$. De cette manière, nous obtenons une structure sous-riemannienne naturelle sur $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ soit à partir de $\mathfrak{h}$ ou bien comme limite de la structure sous-riemannienne canonique sur chaque $SO(\mathbb{H}_n, 1)$. On sait que dans le cas fini, deux éléments de $SO(\mathbb{H}_n, 1)$ peuvent être reliés par un chemin horizontal. Malheureusement, cela n'est plus vrai dans $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$. Notre second résultat est de montrer qu'il existe dans $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ un sous-groupe dense $\mathfrak{M}^1_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$, muni par sa structure d'un groupe de Lie banachique, tel que tous deux éléments de $\mathfrak{M}^1_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ peuvent être reliés par un chemin horizontal (voir théorème 3.4.1). Ce théorème nous permet de donner une démonstration simple du résultat d'accessibilité pour le problème du serpent hilbertien donné dans [18].

Similairement, au cas de la dimension finie (voir [12] et [20]), nous avons une action naturelle $\mathfrak{A}$ de groupe $\mathfrak{M}(\mathbb{S}^\infty)$ sur $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$. Comme, il existe un isomorphisme canonique entre $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ et $SO_{HS}(\mathbb{H}, 1)$, soit $\mathfrak{M}^1_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ le sous-groupe de $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ associé à $SO^1_{HS}(\mathbb{H}, 1) \subset SO_{HS}(\mathbb{H}, 1)$, alors nous avons le résultat suivant.

Théorème 1

1. *L'orbite de la restriction à $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ de l'action $\mathfrak{A}$ passant par $u \in \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ est précisément la variété intégrale maximale $\mathcal{L}(u)$ de $\bar{\mathcal{D}}$ qui contient u.*
2. *L'orbite $\mathcal{O}^1(u)$ de la restriction à $\mathfrak{M}^1_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ de l'action $\mathfrak{A}$ passant par $u \in \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ est contenue dans $\mathcal{A}(u)$ et elle dense dans $\mathcal{L}(u)$. En particulier $\mathcal{A}(u)$ est un sous-ensemble dense de $\mathcal{L}(u)$.*

Notre objectif est de donner une généralisation d'un théorème d'accessibilité établi dans [12] et [20] pour les bras articulés et les serpents dans un espace de Hilbert de dimension finie. Ce travail est structuré comme suit.

Dans le premier chapitre et dans un premier temps on donne une généralisation des notions du serpent et du bras articulé dans un espace de Hilbert de dimension infinie. On montre aussi que l'espace des configurations $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$, où $\mathcal{P}$ une partition fixée de l'intervalle $[0, L]$ est une variété banachique. A toute configuration u, on associe l'application extrémité $\mathcal{E}(u) = \int_0^L u(s)ds$. Le noyau de la dérivée de cette application a un complémentaire D_u qui génère une distribution D appelée distribution horizontale. On donne une construction des champs de vecteurs qui engendrent la distribution D. On termine le chapitre par une caractérisation des points critiques de l'application $\mathcal{E}$.

Nous exposons dans le chapitre 2 la relation entre le relèvement horizontal et la minimisation de l'énergie cinétique infinitésimale. Essentiellement, ce chapitre va être consacré à l'un des théorèmes principaux de l'accessibilité (Théorème 2.4.1).

Nous donnons, dans chapitre 3, une démonstration plus simple du problème de contrôlabilité d'un serpent hilbertien (voir [18]) en utilisant l'action des transformations de Möbius sur la sphère unité pour montrer le Théorème 1.

On termine cette thèse par deux annexes, A et B. Dans l'annexe A on donne quelques définitions utiles de géométrie différentielle en dimension infinie, et dans l'annexe B on donne les démonstrations du Lemme (3.4.2) et du Théorème (3.3.6).

Chapitre 1

Serpent et bras articulé dans un espace de Hilbert

Dans ce chapitre, nous présentons les notions de base utiles pour notre travail. Nous définissons le serpent et le bras articulé dans un espace de Hilbert et leurs espaces de configurations où nous donnons quelques propriétés associées à ces derniers. Par la suite, nous introduisons la notion de distribution horizontale et nous déterminons les valeurs régulières et les points singuliers de l'application extrémité du serpent.

1.1 L'espace des configurations

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert réel séparable et $\langle . \rangle$ (resp. $\|.\|$) le produit scalaire (resp. la norme) sur $\mathbb{H}$. On considère une base hilbertienne $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ fixée de $\mathbb{H}$; c-à-d. pour tout $x \in \mathbb{H}$, $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i e_i$ où $x_i = \langle x.e_i \rangle$ désigne la i^{eme} coordonnée de x. On note par $\mathbb{S}^\infty = \{x \in \mathbb{H} \ : \ \|x\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{H}$. On rappelle que $\mathbb{S}^\infty$ est une hypersurface dans $\mathbb{H}$ de codimension égale à 1. Une courbe $\gamma : [a, b] \to \mathbb{H}$ est dite $\mathcal{C}^k$ par morceaux s'il existe un ensemble fini $\mathcal{P}$=$\{a = s_0 < s_1 < ... < s_N = b\}$ tel que pour tout $i = 0, ..., N-1$, la restriction de γ à l'intervalle $[s_i, s_{i+1}[$ se prolonge en une courbe de classe C^k sur l'intervalle fermé $[s_i, s_{i+1}]$.
Étant donné un espace métrique (X, d), on note par $\mathcal{C}([a, b], X)$ l'ensemble des courbes continues $u : [a, b] \to X$ et on munit $\mathcal{C}([a, b], X)$ de la distance usuelle définie par

$$d_\infty(u_1, u_2) = \sup_{t\in[a,b]} d(u_1(t), u_2(t)).$$

$(\mathcal{C}([a, b], X), d_\infty)$ est un espace métrique complet.

Pour une partition donnée $\mathcal{P}$=$\{a = s_0 < s_1 < ... < s_N = b\}$ de $[a, b]$, $\mathcal{C}^k_{\mathcal{P}}([a, b], \mathbb{S}^\infty)$ (resp. $\mathcal{C}^k_{\mathcal{P}}([a, b], \mathbb{H})$) désigne l'ensemble des courbes $u \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{S}^\infty)$ (resp. $u \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{H})$) qui sont C^k-par morceaux pour $\mathcal{P}$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Tout au long de cette thèse, on fixe le nombre réel $L > 0$ et $\mathcal{P}$ est une partition donnée et fixée de l'intervalle $[0, L]$.

Définition 1.1.1 *Un serpent hilbertien est une courbe* $S : [0, L] \to \mathbb{H}$ *continue et* C^1 *par morceaux telle que* $||\frac{dS}{ds}(s)|| = 1$ *et* $S(0) = 0$.

Un bras articulé hilbertien est un serpent S, affine par morceaux, appelé aussi serpent affine.

Un serpent est caractérisé par $u(s) = \frac{dS}{ds}(s) = \dot{S}(s)$ et dans ce cas on a :
$S(s) = \displaystyle\int_0^s u(\tau)d\tau$ où $u : [0, L] \to \mathbb{S}^\infty$ est une courbe continue par morceaux associée à la partition $\mathcal{P}$. De plus, ce serpent est affine si et seulement si u est constante sur chaque sous-intervalle de $\mathcal{P}$.

Définition 1.1.2 *L'ensemble* $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L = \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^0\left([0, L], \mathbb{S}^\infty\right)$ *est appelé l'espace des configurations des serpents dans* $\mathbb{H}$ *de longueur* L *pour la partition* $\mathcal{P}$.

On note par :

$\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^L = \left\{u \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L \text{ tel que } u \text{ est constante sur chaque sous-intervalle } [s_{i-1}, s_i[, i = 1, \cdots N\right\}$,

l'espace des configurations des bras articulés hilbertiens dans $\mathbb{H}$ de longueur L pour la partition $\mathcal{P}$. Nous munissons $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L$ de la distance

$$d_\infty(u_1, u_2) = \sup_{s\in[0,L]} ||u_1(s) - u_2(s)||,$$

qui induit la topologie de la convergence uniforme. Nous considérons cette topologie sur $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L$ et sur $\mathcal{C}^0([s_i, s_{i+1}], \mathbb{S}^\infty)$. En tant qu'espace métrique, $(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L, d_\infty)$ est complet. L'application h définie par

$$\begin{aligned} h : \quad & \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L \to \prod_{i=0}^{N-1} \mathcal{C}^0([s_i, s_{i+1}], \mathbb{S}^\infty) \\ & u \mapsto (u\,|_{[s_0,s_1]}, \ldots, u\,|_{[s_i,s_{i+1}]}, u\,|_{[s_{N-1},s_N]}), \end{aligned} \tag{1.1}$$

est un homéomorphisme et la restriction de h à $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^L$ est aussi un homéomorphisme sur $[\mathbb{S}^\infty]^N$. De plus, comme en dimension finie (voir[20]), on a la proposition suivante.

Proposition 1.1.3

1. *L'espace des configurations* $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L$ *possède une structure de variété banachique et l'application (1.1)*

$$h : \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L \to \prod_{i=0}^{N-1} \mathcal{C}^0([s_i, s_{i+1}], \mathbb{S}^\infty)$$

est un difféomorphisme.

2. *$\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{L}$ est une sous variété hilbertienne faible (voir[17]) difféomorphe à $[\mathbb{S}^{\infty}]^{N}$ et, la topologie associée à cette structure et la topologie induite par $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^{L}$ coïncident.*

Démonstration. Comme $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^{L}$ est homéomorphe au produit fini $\prod_{i=0}^{N-1} \mathcal{C}^0([s_i, s_{i+1}], \mathbb{S}^{\infty})$, donc il suffit de montrer que les espaces $\mathcal{C}^0([s_i, s_{i+1}], \mathbb{S}^{\infty})$ pour $i = 0, ..., N-1$ sont des variétés banachiques lisses. Pour cela, supposons que $\mathcal{P}=\{0, L\}$ et montrons que $\mathcal{C}^0\left([0, L], \mathbb{S}^{\infty}\right)$ est une variété banachique lisse. La démonstration sera semblable à la preuve en dimension finie donnée dans [20]. Rappelons que $\mathcal{C}^0\left([0, L], \mathbb{H}\right)$ muni de la norme

$$\|v\| = \sup_{s\in[0,L]} \|v(s)\|,$$

est un espace de Banach.
Considérons l'application $\mu : \mathcal{C}^0([0, L], \mathbb{H}) \to \mathcal{C}^0([0, L], \mathbb{R})$ définie par

$$\mu(v)(s) = \|v(s)\|^2,$$

μ est lisse entre des espaces de Banach et sa dérivée est donnée par

$$D_v\mu(w)(s) = 2\langle v(s), w(s)\rangle.$$

L'idée est de prouver que $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^{0}\left([0, L], S^{\infty}\right)$ est l'image réciproque d'un point de $\mathcal{C}^0([0, L], \mathbb{R})$ par une submersion.
Nous montrons que $D_v\mu$ est surjective. Il est clair que si $w(s) = 0$, alors $D_v\mu(w) = 0$.
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, L], \mathbb{R})$. Si $v(s) \neq 0$, alors il existe

$$w(s) = \left(\frac{f(s)\, v_1(s)}{2\|v(s)\|^2}, \frac{f(s)\, v_2(s)}{2\|v(s)\|^2}, ..., \frac{f(s)\, v_N(s)}{2\|v(s)\|^2}, ...\right) \in \mathbb{H}$$

telle que

$$D_v\mu(w)(s) = 2\langle v(s), w(s)\rangle = f(s).$$

De plus,

$$\ker D_v\mu = \big\{w : [0, L] \to \mathbb{H} \mid \langle v(s), w(s)\rangle = 0\ \forall s \in [0, L]\big\},$$

est un sous espace fermé, pour montrer que $\ker D_v\mu$ admet un complémentaire dans $\mathcal{C}^0\left([0, L], \mathbb{H}\right)$ Posons

$$D_v = \big\{f(s)v(s)/f \in \mathcal{C}^0([0, L], \mathbb{R})\big\}.$$

Il est clair que

$$\ker D_v\mu \cap D_v = \{0\} .$$

Il reste à montrer que chaque élément de $\mathcal{C}^0([0,L],\mathbb{H})$ s'écrit sous forme d'une somme de deux vecteurs, l'un appartient à $\ker D_v\mu$ et l'autre à D_v. Nous avons

$$w(s) = w(s) - \frac{\langle v(s), w(s)\rangle}{\|v(s)\|^2} v(s) + \frac{\langle v(s), w(s)\rangle}{\|v(s)\|^2} v(s) ,$$

$$w(s) - \frac{\langle v(s), w(s)\rangle}{\|v(s)\|^2} v(s) \in \ker D_v\mu \quad \text{et} \quad \frac{\langle v(s), w(s)\rangle}{\|v(s)\|^2} v(s) \in D_v.$$

De tout ce qui précède, nous déduisons que μ est une submersion. D'autre part, pour tout $v(s) \neq 0$, on définit $\eta(v) = \frac{1}{\|v(s)\|^2}\mu(v) \in \mathcal{C}^0([0,L],\mathbb{R})$, on a alors :

$$\eta(v(s)) = \frac{1}{\|v(s)\|^2}\mu(v(s)) = 1 \qquad \forall s \in [0,L] ,$$

η est une application constante que l'on note $\mathbf{1}$, définie par $1 = \eta(v) : [0,L] \to \mathbb{R}$, $s \mapsto 1$. L'image réciproque de $\mathbf{1}$ par μ est $\mu^{-1}(\mathbf{1}) = \mathcal{C}^0_{\mathcal{P}}([0,L], S^\infty)$.

D'autre part, si $\mathcal{P} = \{0, L\}$, l'application h n'est rien d'autre que l'identité. Donc, d'après la structure du produit, on déduit que h est un difféomorphisme lisse. Ce qui achève la première partie de la proposition.

Maintenant, si $\mathcal{P} = \{0, L\}$, l'application $f : \mathbb{S}^\infty \to \mathcal{A}^L_{\mathcal{P}}$ définie par $x \mapsto f(x)(t) = x$ est un homéomorphisme de $\mathbb{S}^\infty$ dans $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$. Elle est la restriction de l'application $\bar{f} : \mathbb{H} \to \mathcal{C}^0([0,L],\mathbb{H})$ définie de la même façon que f. Cependant, $\bar{f}$ est une application linéaire et injective est donc lisse ; sa dérivée est également injective. Il en résulte que f a les mêmes propriétés que $\bar{f}$. Comme l'image de cette restriction est précisément $\mathcal{A}^L_{\mathcal{P}}$, nous concluons que $\mathcal{A}^L_{\mathcal{P}}$ est une sous variété faible de $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ difféomorphe à $\mathbb{S}^\infty$. En outre, comme la topologie canonique sur $\mathbb{H}$ coïncide avec la topologie induite par $|| \, ||_\infty$, la même chose reste vraie pour chaque topologie induite sur $\mathcal{A}^L_{\mathcal{P}}$. De la structure du produit des variétés, on termine la preuve de la proposition 1.1.3. $\triangle$

1.1.1 L'espace tangent

L'espace tangent $T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$ au point u peut être identifié à l'ensemble

$$\Big\{v \in \mathcal{C}^0_\mathcal{P}([0,L],\mathbb{H}) \text{ tel que } < u(s), v(s) >= 0 \text{ pour tout } s \in [0,L]\Big\}.$$

$T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$ est naturellement muni de la norme $||.||_\infty$. D'autre part, notons que tout $v \in \mathcal{C}^0_\mathcal{P}([0,L],\mathbb{H})$ est intégrable sur $[0,L]$ et donc nous obtenons un produit scalaire sur $T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$ donné par

$$< v, w >_{L^2}= \int_0^L < v(s), w(s) > ds. \tag{1.2}$$

Ce produit scalaire induit une norme naturelle $||.||_{L^2}$ sur $T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$ donnée par

$$||v||_{L^2} = [\int_0^L < v(s), v(s) > ds]^{\frac{1}{2}}.$$

Nous avons l'inégalité suivante.

$$||u||_{L^2} \leq \sqrt{L}||u||_\infty. \tag{1.3}$$

De la même manière, nous pouvons identifier l'espace tangent $T_u\mathcal{A}^L_\mathcal{P}$ à l'ensemble des $v = (v_1, \cdots, v_N) \in \mathbb{H}^N$ tels que $< v_i, u_i >= 0$ pour $i = 1 \cdots N$, et $u = (u_1, \cdots, u_N)$. Cet espace vectoriel peut être également considéré comme un sous-espace de $T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$. Notons que ce dernier est un sous-espace fermé dans $T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$.

Remarque 1.1.4 Comme $(T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P}, ||.||_{L^2})$ n'est pas complet, les normes $||.||_\infty$, $||.||_{L^2}$ ne sont pas équivalentes (sur chaque $T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$). Donc, le produit scalaire défini par (1.2) donne seulement une métrique riemannienne faible G sur $T\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$.

Comme $\mathcal{A}^L_\mathcal{P}$ est difféomorphe à $[\mathbb{S}^\infty]^N$, l'espace tangent $T_u\mathcal{A}^L_\mathcal{P}$ peut être identifié à

$$T_{x_1}\mathbb{S}^\infty \times \cdots \times T_{x_N}\mathbb{S}^\infty,$$

pour $u = (x_1, \cdots, x_N) \in [\mathbb{S}^\infty]^N$. Par conséquent, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{H}^N$ induit un produit scalaire naturel sur $T_u\mathcal{A}^L_\mathcal{P}$.
D'autre part, le produit scalaire $< \ , \ >_{L^2}$ sur $T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$ induit un produit scalaire sur $T_u\mathcal{A}^L_\mathcal{P}$. En effet, ces produits scalaires sont proportionnels et, en outre, les normes

$|| \; ||_\infty$ et $|| \; ||_{L^2}$ induisent des normes équivalentes sur $T_u\mathcal{A}^L_\mathcal{P}$.

1.2 La distribution horizontale associée au serpent hilbertien

A tout $u \in \mathcal{C}^L_\mathcal{P}$, on fait correspondre l'application $S_u : [0, L] \to \mathbb{H}$ donnée par

$$S_u(s) = \int_0^s u(\tau)d\tau. \tag{1.4}$$

Cette application est appelée le serpent hilbertien associé à u. D'autre part, pour chaque configuration $u \in \mathcal{C}^L_\mathcal{P}$, on peut associer ce qu'on appelle l'application extrémité :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \; \mathcal{C}^L_\mathcal{P} & \to \mathbb{H} \\ u & \mapsto S_u(L) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Comme $\mathcal{E}$ est la restriction à $\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$ de l'application linéaire $u \to \displaystyle\int_0^L u(s)ds$ définie sur $\mathcal{C}^0_\mathcal{P}([0, L], \mathbb{H})$, alors il en résulte que $\mathcal{E}$ est lisse et sa dérivée est donc donnée par

$$T_u\mathcal{E}(v) = \int_0^L v(s)ds. \tag{1.6}$$

Notons que $\mathcal{E}[\mathcal{C}^L_\mathcal{P}]$ est la boule fermée $\mathbb{B}_L = \{x \in \mathbb{H} \text{ tel que } ||x|| \leq L\}$.

Lemme 1.2.1

1. *Le sous espace* $\ker T_u\mathcal{E} \subset T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$ *est un espace de Banach pour chaque norme induite* $||.||_\infty$ *et* $||.||_{L^2}$.
2. *L'orthogonal de* $\ker T_u\mathcal{E}$ *(pour le produit scalaire* $< ., . >_{L^2}$ *sur* $T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$*), noté par* $\mathcal{D}_u$*, est un espace fermé dans l'espace normé* $(T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P}, ||.||_{L^2})$ *et* $(T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P}, ||.||_\infty)$*, et nous avons la décomposition suivante*

$$T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P} = \mathcal{D}_u \oplus \ker T_u\mathcal{E}. \tag{1.7}$$

3. *Dans l'espace de Banach* $(T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P}, ||.||_\infty)$*, la restriction de* $T_u\mathcal{E}$ *à* $\mathcal{D}_u$ *est un morphisme continu injectif dans* $\mathbb{H}$.

Pour la démonstration, nous utilisons les mêmes arguments de [20].

Nous donnons maintenant la définition suivante.

Définition 1.2.2

1. *La famille* $u \mapsto \mathcal{D}_u$*, où* $\mathcal{D}_u$ *est un sous espace vectoriel fermé de l'espace tangent* $T_u\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L$*, est une distribution (fermée) sur* $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L$ *appelée la distribution horizontale.*
2. *Tout champ de vecteurs* X *sur* $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L$ *qui est tangent à* $\mathcal{D}$ *est appelé un champ de vecteurs horizontal.*

Sur $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^L$, l' intersection $\mathcal{D}_u \cap T_u\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^L$ engendre une distribution hilbertienne (fermée) $\mathcal{D}^{\mathcal{A}}$.
Notons que nous pouvons aussi définir $\mathcal{D}^{\mathcal{A}}$ directement comme l'orthogonal de $\ker T_u\mathcal{E} \cap T_u\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^L$ relativement au produit scalaire défini sur $T_u\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^L$ (voir Remarque1.1.4).
Si n'il y a pas de confusion, cette distribution $\mathcal{D}^{\mathcal{A}}$ sur $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^L$ sera notée aussi $\mathcal{D}$ et appelée la distribution horizontale sur $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^L$.

Dans ce qui suit, nous cherchons une famille de champs de vecteurs qui engendrent $\mathcal{D}_u$. Le produit scalaire sur $\mathbb{H}$ définit une métrique riemannienne g sur $T\mathbb{H} \equiv \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ donnée par $g_x(u, v) =< u, v >$.
Soit $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Le gradient usuel de ϕ sur $\mathbb{H}$ est le champ de vecteurs

$$\operatorname{grad}(\phi) = (g^\flat)^{-1}(d\phi),$$

où $g^\flat$ est l'isomorphisme canonique du fibré $T\mathbb{H}$ dans le fibré dual $T^*\mathbb{H}$, correspondant à la représentation de Riesz ; c-à-d. $g^\flat(v)(w) =< v, w >$. Donc, $\operatorname{grad}(\phi)$ est caractérisé par

$$g(\operatorname{grad}(\phi), v) =< \operatorname{grad}(\phi), v >= d\phi(v), \tag{1.8}$$

pour tout $v \in \mathbb{H}$.
Sur $T\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L$, la métrique riemannienne G est faible (voir la Remarque 1.1.4) et donc on ne peut pas définir le gradient de la même manière pour chaque fonction lisse sur $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L$.
Soit $G^\flat : T\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L \to T^*\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L$ le morphisme de fibrés défini par

$$G_u^\flat(v)(w) = G_u(v, w),$$

pour tout v et w dans $T_u\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L$. Alors, nous avons le lemme suivant.

Lemme 1.2.3 *Soit $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Alors,* $\ker d(\phi \circ \mathcal{E})$ *contient* $\ker T\mathcal{E}$ *et $d(\phi \circ \mathcal{E})$ appartient à $G_u^\flat(T_u\mathcal{C}_\mathcal{P}^L)$. De plus,*

$$\nabla\phi = (G^\flat)^{-1}(d(\phi \circ \mathcal{E})) \tag{1.9}$$

est tangent à $\mathcal{D}_u$ et on a

$$\nabla\phi(u)(s) = \mathrm{grad}(\phi)(\mathcal{E}(u)) - < \mathrm{grad}(\phi)(\mathcal{E}(u)), u(s) > u(s). \tag{1.10}$$

Remarque 1.2.4 Si $\mathbb{H}$ est de dimension finie, la relation (1.10) est exactement la définition de $\nabla\phi$ donnée dans [20].

Avant de démontrer le lemme 1.2.3, nous donnons la définition suivante.

Définition 1.2.5 *Pour toute fonction lisse $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$, le champ de vecteurs $\nabla\phi$ est appelé le gradient horizontal de ϕ.*

Démonstration du lemme *1.2.3* : Soit $v \in T_u\mathcal{C}_\mathcal{P}^L$. Alors nous avons $d(\phi\circ\mathcal{E})(v) = d\phi(T\mathcal{E}(v)) = d\phi(\int_0^L v(s)ds)$. Donc, si $v \in \ker T_u\mathcal{E}$, alors $d(\phi\circ\mathcal{E})(v) = 0$. D'après la décomposition (1.7), il en résulte que

$$d(\phi \circ \mathcal{E})(v) = d(\phi \circ \mathcal{E})(\pi_u(v)), \tag{1.11}$$

où $\pi_u : T_u\mathcal{C}_\mathcal{P}^L \to \mathcal{D}_u$ est la projection canonique associée à la décomposition (1.7). D'autre part, considérons le champ de vecteurs

$$\mathrm{Grad}(\phi)(u)(s) = \mathrm{grad}(\phi)(\mathcal{E}(u)) - < \mathrm{grad}(\phi)((u)), u(s) > u(s),$$

le long de u.

Comme

$$< \mathrm{Grad}(\phi)(u)(s), u(s) >= 0,$$

alors $\mathrm{Grad}(\phi)(u)$ appartient à $T_u\mathcal{C}_\mathcal{P}^L$. En outre, pour tout $v \in T_u\mathcal{C}_\mathcal{P}^L$ comme $< u(s), v(s) >= 0$ pour tout $s \in [0, L]$, nous avons

$$\begin{aligned} G(\mathrm{Grad}(\phi)(u), v) &= \int_0^L < \mathrm{grad}(\phi)(\mathcal{E}(u)), v(s) > ds \\ &=< \mathrm{grad}(\phi)(\mathcal{E}(u)), \int_0^L v(s)ds > \\ &= d\phi(\mathcal{E}(u))[\int_0^L v(s)ds] \end{aligned}$$

$$= d\phi(\mathcal{E}(u)) \circ T_u\mathcal{E}(v).$$

La première conséquence de la dernière égalité est que $\mathrm{Grad}(\phi)(u)$ appartient à $\mathcal{D}_u$. En utilisant l'identité $d\phi(\mathcal{E}(u)) \circ T_u\mathcal{E}(v) = d(\phi \circ \mathcal{E})(u)(v)$, la seconde conséquence est que $d(\phi \circ \mathcal{E})$ appartient à $G_u^\phi(T_u\mathcal{C}_\mathcal{P}^L)$, ce qui termine la démonstration du lemme 1.2.3.

$\triangle$

Notons que, à tout vecteur $x \in \mathbb{H}$, on peut associer la forme linéaire x^* telle que $x^*(z) =< z, x >$. Donc, du Lemme 1.2.3, le gradient horizontal ∇x^* est bien défini. En particulier, à tout vecteur e_i, $i \in \mathbb{N}$ de la base hilbertienne, on peut associer le champ de vecteurs horizontal $E_i = \nabla e_i^*$. Alors, comme dans [20], on a le lemme suivant.

Lemme 1.2.6 *La famille de champs de vecteurs E_i où $i \in \mathbb{N}$ engendre la distribution $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{C}_\mathcal{P}^L$, on peut écrire

$$u(s) = \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i(s)e_i.$$

On note par $\triangle_u$ le sous espace fermé engendré par la famille $\{E_i(u)\}_{i\in\mathbb{N}}$ dans l'espace normé $(T_u\mathcal{C}_\mathcal{P}^L, ||.||_{L^2})$. Le vecteur $v \in T_u\mathcal{C}_\mathcal{P}^L$ appartient à l'orthogonal de $\triangle_u$ (relativement à G) si et seulement si $G(v, E_i(u)) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.
Cependant, comme $< v(s), u(s) >= 0$, on aura :

$$\begin{aligned} G(v, E_i) &= \int_0^L < v(s), e_i - u_i(s)u(s) > ds \\ &=< \int_0^L v(s), e_i > \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

D'après (1.12), v est orthogonal à $\triangle_u$ si et seulement si $v \in \ker T_u\mathcal{E}$. Comme $\mathcal{D}_u$ est aussi fermé dans $(T_u\mathcal{C}_\mathcal{P}^L, ||.||_{L^2})$, on obtient $\triangle_u = \mathcal{D}_u$. $\triangle$

Remarque 1.2.7

1. Comme en dimension finie (voir [20]), pour $\phi = e_i^*$ de (1.10) et pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $E_i((u(s))) = e_i - < e_i, u(s) > u(s)$.

   Donc, chaque $E_i(u)$ peut être considéré comme champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^\infty$

le long de $u : [0, L] \to \mathbb{S}^\infty$. Dans ce cas, $E_i(u)$ n' est rien d'autre que la projection orthogonale de e_i sur l'espace tangent de S^∞ le long de $u([0, L])$.

2. Sur $\mathcal{A}^L_{\mathcal{P}}$, le produit scalaire $< \, , \, >_{L^2}$ induit une métrique riemannienne forte sur la distribution horizontale $\mathcal{D}$. De la même façon, à la base hilbertienne $\{e_i, \ i \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{H}$ nous pouvons associer une famille de champs de vecteurs globaux (notés aussi $\{E_i, \ i \in \mathbb{N}\}$) sur $\mathcal{A}^L_{\mathcal{P}}$. En effet, ces champs de vecteurs sont seulement la restriction sur $\mathcal{A}^L_{\mathcal{P}}$ de la famille $\{E_i,\}$ définie dans la variété $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$. Si on identifie $T\mathcal{A}^L_{\mathcal{P}}$ à $[T\mathbb{S}^\infty]^N$ (voir Remarque 1.1.4), la famille des champs de vecteurs E_i en $u = (x_1, \cdots, x_N)$ est

$$(e_i - < x_1, e_i > x_1, \cdots e_i - < x_N, e_1 > x_N).$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note aussi cette famille par Δ_u. Bien sûr, sur $\mathcal{A}^L_{\mathcal{P}}$, la distribution $\mathcal{D}$ est aussi engendrée par cette famille de champs de vecteurs.

1.3 Valeurs critiques et points singuliers de l'application extrémité

Dans ce paragraphe, nous déterminons l'ensemble des points critiques de l'application extrémité. Plus précisément, nous caractérisons les points singuliers ainsi que les points réguliers de l'application $\mathcal{E}$.

L'application linéaire $T_u\mathcal{E} : T_u\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}} \to T_{\mathcal{E}(u)}\mathbb{H} \equiv \mathbb{H}$ est fermée (voir [7], section 8.7). Il en résulte que $\rho_u = T_u\mathcal{E}_{|\mathcal{D}_u}$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}_u$ dans l'ensemble fermé $\rho_u(\mathcal{D}_u)$ de $\mathbb{H}$. Considérons un point $u \in \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$, d'après la remarque 1.1.4, l'annulateur de $\rho_u(\mathcal{D}_u) = T_u\mathcal{E}(T_u\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}})$ est

$$[\rho_u(\mathcal{D}_u)]^0 = \{z \in T_{\mathcal{E}(u)}\mathbb{H} \equiv \mathbb{H} \text{ tel que } < z, \rho_u(v) >= 0, \ \forall v \in \mathcal{D}_u\}.$$

Rappelons qu'un point u est un point singulier de l'application extrémité si $\mathcal{E}$ n'est pas une submersion en u.
Par consequent, nous avons la proposition suivante.

Proposition 1.3.1 *Un point u est un point singulier de $\mathcal{E}$ si et seulement si $[\rho_u(\mathcal{D}_u)]^0 \neq \{0\}$.*

D'autre part, comme la famille $\{E_i(u)\}_{i\in\mathbb{N}}$ engendre $\mathcal{D}_u$, alors un point $z \in \mathbb{H}$ appartient à $[\rho_u(\mathcal{D}_u)]^0$ si et seulement si

$$< z, \int_0^L E_i(u)(s)ds >= 0, \ \forall i \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

Considérons la décomposition $z = \sum_{i\in\mathbb{N}} z_i e_i$ et $u(s) = \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i(s)e_i$. Alors, (1.13) est équivalente à

$$Lz_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_0^L u_i(s)u_j(s)z_j ds \ \forall i \in \mathbb{N}. \tag{1.14}$$

Soit Γ_u l'endomorphisme défini par la matrice de terme général $(\int_0^L u_i(s)u_j(s)ds)$. Notons que Γ_u est auto-adjoint. L'endomorphisme $A_u = L.Id - \Gamma_u$ est aussi auto-adjoint et sa matrice dans la base $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est $(L\delta_{ij} - \int_0^L u_i(s)u_j(s)ds)$. Donc, (1.14) est équivalente à

$$A_u(z) = 0. \tag{1.15}$$

Par conséquent, u est un point singulier si et seulement si L est une valeur propre de Γ_u. Nous avons le résultat suivant.

Proposition 1.3.2 *Un point $u \in \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ est un point singulier de $\mathcal{E}$ si et seulement si l'espace vectoriel engendré par $u([0, L])$ est de dimension* 1.

La démonstration de cette proposition est une adaptation de l'argument utilisé en dimension finie (voir[20]).

Démonstration . D'abord, notons que pour chaque automorphisme unitaire U de $\mathbb{H}$, nous avons

$$U\Gamma_u U^* = \Gamma_{U(u)}. \tag{1.16}$$

D'autre part, on a

$$\mathcal{E} \circ U(u) = U(\mathcal{E}(u)). \tag{1.17}$$

Si $u([0, L])$ engendre un espace de dimension 1, alors on a $u(s) = \pm x \in \mathbb{S}^\infty$. En utilisant (1.16), on peut supposer que $u(s) = \pm e_1$ pour chaque $s \in [0, L]$. Dans ce

cas, de la relation obtenue de (1.17), on prouve que e_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre L de Γ_u et donc $\ker(L.Id - \Gamma_u) = \ker A_u \neq \{0\}$.
Montrons maintenant la réciproque. Si u est un point singulier de $\mathcal{E}$, il existe un vecteur $x \in \mathbb{S}^\infty$ qui est un vecteur propre de la valeur propre L de Γ_u. Si U est un automorphisme unitaire tel que $U(x) = e_1$, alors e_1 est un vecteur propre associé à L pour $U\Gamma_u U^* = \Gamma_{U(u)}$. Si on pose $\bar{u} = U(u)$, alors on obtient $\Gamma_{\bar{u}}(e_1) = Le_1$. Donc, pour la décomposition $\bar{u}(s) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \bar{u}_i(s) e_i$, on trouve $\int_0^L [\bar{u}_1]^2 = L$ et $\bar{u}_i(s) \equiv 0$ pour tout $i > 1$. Il découle que $\bar{u}(s) = \pm e_1$ et donc $u(s) = \pm x$.

$\triangle$

Notons que, d'après la proposition 1.3.2, un point $u \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L$ est singulier si et seulement si la restriction à $[s_{i-1}, s_i]$ est égale à $\pm x$ pour $x \in \mathbb{S}^\infty$. Il s'ensuit que l'ensemble des points singuliers $\Sigma(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}$ est difféomorphe à l'espace projectif $\mathbb{P}^\infty$ de $\mathbb{H}$.

D'autre part, soit $u \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L$ avec $u(s) \equiv x \in \mathbb{S}^\infty$. Pour chaque $v \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^0([0, L], \mathbb{H})$ tel que pour tout $s \in [0, L]$: $< u(s), v(s) >= 0$, on considère

$$\bar{u}_n = \frac{1}{n} v(s) + x.$$

Comme $||x|| = 1$, pour n suffisamment grand, nous avons $||\bar{u}_n(s)|| \geq \frac{1}{2}$ et $u_n(s) = \frac{\bar{u}_n}{||\bar{u}_n(s)||}$ appartient à $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L \setminus \Sigma(\mathcal{E})$. En outre, on a

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u.$$

Donc l'ensemble $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L \setminus \Sigma(\mathcal{E})$ des points réguliers de $\mathcal{E}$ est un sous ensemble ouvert dense dans $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L$.

Rappelons que l'image de $\mathcal{E}$ est la boule fermée $B(0, L)$ dans $\mathbb{H}$. Comme en dimension finie, si $\mathcal{P} = \{0, L\}$, l'ensemble des valeurs critiques de $\mathcal{E}$ est alors la frontière de $B(0, L)$; c-à-d, la sphère $S(0, L)$ et $\{0\}$.
Dans le cas général, si $\mathcal{P} = \{a = s_0 < s_1 < ... < s_N = b\}$, le même argument est appliqué pour chaque sous intervalle $[s_{i-1}, s_i]$ donnant que l'ensemble des valeurs critiques de $\mathcal{E}$ est l'union des sphères $S(0, L_j)$ pour $j = 1, \cdots, n$ avec $0 \leq L_j \leq L$.

Remarque 1.3.3

1. Rappelons que ρ_u est un isomorphisme de $\mathcal{D}_u$ dans $\rho_u(\mathcal{D}_u)$ qui est un sous-espace fermé de $\mathbb{H}$. Sur $\mathcal{D}_u$, la norme induite par $||.||_\infty$ est équivalente à la norme $||.||_{\mathbb{H}}$. De plus, ρ_u est une isométrie entre $\mathcal{D}_u$ et $\rho_u(\mathcal{D}_u)$ munie de la norme hilbertienne induite. En particulier, pour chaque point régulier u, l'inverse de ρ_u est donnée par $\dfrac{1}{L}\nabla v^*$ et, d'après (1.12), on a $\rho_u(\dfrac{1}{L}\nabla v^*) = v$. Donc, $\{E_i(u),\ i \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{D}_u$ selon cette isométrie. Maintenant, si u est un point singulier de $\mathcal{E}$ et d'après la démonstration précédente, il existe une base hilbertienne $\{e'_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{H}$ telle que $e'_1 = u(s)$ pour tout $s \in [0, L]$. Alors, ρ_u est un isomorphisme de $\mathcal{D}_u$ dans $\{e'_1\}^\perp$, il en résulte que, sur $\mathcal{D}_u$, la norme induite par $||.||_\infty$ est équivalente à la norme $||.||_{\mathbb{H}}$ donc ρ_u est une isométrie entre $\mathcal{D}_u$ et $\{e'_1\}^\perp$. Alors, la famille $\{E'_i(u) = \nabla(e'_i)^*(u),\ i > 1\}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{D}_u$.
2. Revenons au début de cette section. Comme

$$G(E_i(u), E_j(u)) = L\delta_{ij} - \int_0^L u_i(s)u_j(s)ds,$$

la matrice de G dans la base $\{E_i(u),\ i \in \mathbb{N}\}$ est la matrice de $A_u = L.Id - \Gamma_u$. Cependant, Γ_u est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{H}$ qui est compact. Donc, la suite $\{\lambda_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ des valeurs propres de Γ_u est bornée et converge vers 0 et alors il existe une base hilbertienne $\{e'_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ de vecteurs propres de A_u. Dans cette base, la matrice de A_u est diagonale et est égale à $(L - \lambda_i\delta_{ij})$. Donc, pour la famille associée $\{E'_i(u),\ i \in \mathbb{N}\}$ de générateurs de $\mathcal{D}_u$, on a :

(1) si u est régulier, la matrice de G dans la base $\{E'_i(u),\ i \in \mathbb{N}\}$ est $(L - \lambda_i)\delta_{ij}$. Notons que 0 n'est pas une valeur propre de A_u. Autrement dit, cela signifierait que u est un vecteur propre de Γ_u associé à la valeur propre L. Comme la suite $\{\lambda_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ est bornée et converge vers 0, alors il existe $K > 0$ de sorte que $\frac{1}{K} \leq L - \lambda_i \leq K$ pour chaque $i \in \mathbb{N}$, il en résulte que la norme associée à G et la norme associée à l' isométrie ρ_u sont équivalentes.

(2) si u est singulier, de la démonstration du lemme 1.3.2, on peut choisir e'_1 tel que $u = \pm e'_1$ et donc , par les mêmes arguments utilisés dans (1) mais appliqués à la restriction de A_u à $\{e'_1\}^\perp$, on obtient que la norme associée à G et la norme associée à l'isométrie ρ_u sont équivalentes.

Chapitre 2

Problème de contrôle optimal pour le serpent hilbertien

Le but de ce chapitre est d'étudier le problème d'accessibilité du serpent hilbertien. Nous allons tout d'abord présenter la notion d'une distribution faible sur une variété banachique. Nous rappelons les résultats qui sont nécessaires pour notre travail. Pour plus de détails, on pourra se référer à l'ouvrage [17]. Après une formulation du problème de serpent hilbertien à un problème de contrôle optimal, nous donnons quelques propriétés de densité des ensembles d'accessibilité.

2.1 Distribution faible sur une variété banachique

Dans cette partie, nous rappelons toutes les définitions, propriétés et résultats de [17], que nous allons utiliser plus tard.

Soit M une variété banachique connexe modelée sur un espace de Banach E. On note $\mathcal{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs locaux sur M. Rappelons qu'un champ de vecteurs local est une section du fibré tangent TM définie sur un ensemble ouvert de M (noté Dom(X)). Le flot d'un élément $X \in \mathcal{X}(M)$ sera noté ϕ_t^X. Nous avons alors les définitions et les propriétés suivantes.

Définition 2.1.1 *Une* **sous-variété faible** *de M est un couple (N, f) où N est une variété banachique connexe (modelée sur un espace de Banach F) et $f : N \to M$ est une application lisse telle que :*

— *il existe une application linéaire continue et injective $i : F \to E$ entre ces deux espaces de Banach.*

— *f est injective et l'application tangente $T_x f : T_x N \to T_{f(x)} M$ est injective pour tout $x \in N$.*

Remarque 2.1.2 Notons que, pour une sous-variété faible $f : N \to M$, sur le sous-ensemble $f(N)$ de M, nous avons deux topologies :

— La topologie induite par M.

— La topologie pour laquelle f est un homéomorphisme de N dans $f(N)$.

Avec cette dernière topologie, via f, nous obtenons une structure de variété banachique modelée sur F. En outre, l'inclusion de $f(N)$ dans M est continue comme application de la variété banachique $f(N)$ dans M. En particulier, si U est un ensemble ouvert de M, alors $f(N) \cap U$ est un ensemble ouvert pour la topologie de la variété banachique $f(N)$.

D'après [17], une **distribution faible** sur M est une correspondance $\mathcal{D} : x \mapsto \mathcal{D}_x$ qui à tout $x \in M$ associe un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}_x$ de T_xM (pas nécessairement fermé) muni d'une norme $|| \ ||_x$ telle que $(\mathcal{D}_x, || \ ||_x)$ est un espace de Banach (noté $\tilde{\mathcal{D}}_x$) et que l'inclusion naturelle $i_x : \tilde{\mathcal{D}}_x \to T_xM$ est continue. En outre, si la structure de Banach sur $\mathcal{D}_x$ est une structure de Hilbert, nous dirons que $\mathcal{D}$ est une **distribution hilbertienne faible** .

Lorsque $\mathcal{D}_x$ est fermé, nous avons une structure naturelle de Banach sur $\tilde{\mathcal{D}}_x$ induite par la structure de Banach sur T_xM. Ainsi, nous obtenons la définition classique d'une distribution et, dans ce cas, on dira que $\mathcal{D}$ est **fermée**.
Un champ de vecteurs (local) Z sur M est **tangent** à $\mathcal{D}$ si, pour tout $x \in Dom(Z)$ $Z(x)$ appartient à $\mathcal{D}_x$, où $Dom(Z)$ est l'ouvert maximal sur lequel Z est défini. L'ensemble des champs de vecteurs locaux tangents à $\mathcal{D}$ seront désignés par $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$.
On dit que $\mathcal{D}$ est **engendrée par un sous-ensemble** $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}(M)$ si, pour chaque $x \in M$, l'espace vectoriel $\mathcal{D}_x$ est l'enveloppe linéaire de l'ensemble
$\Big\{ Y(x) \ , \ Y \in \mathcal{X} \ , \ x \in Dom(Y) \Big\}$.

Pour une distribution faible $\mathcal{D}$ sur M nous avons les définitions suivantes.

Définition 2.1.3 *Une* **variété intégrale** *de $\mathcal{D}$ en x est une sous variété faible $f : N \to M$ telle qu'il existe $u_0 \in N$ avec $f(u_0) = x$ et $T_uf(T_uN) = \mathcal{D}_{f(u)}$ pour tout $u \in N$.*

Définition 2.1.4 *$\mathcal{D}$ est dit* **intégrable** *s'il existe une variété intégrale N de $\mathcal{D}$ pour tout $x \in M$.*

Définition 2.1.5 *Si $\mathcal{D}$ est engendrée par un ensemble $\mathcal{X}$ des champs de vecteurs locaux, $\mathcal{D}$ est dite $\mathcal{X}$-* **invariante** *si, pour tout $X \in \mathcal{X}$, l'application tangente $T_x\phi_t^X$ envoie $\mathcal{D}_x$ à $\mathcal{D}_{\phi_t^X(x)}$ pour chaque $(x,t) \in \Omega_X$. Si $\mathcal{D}$ est $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$-invariante, on dit que $\mathcal{D}$ est* **invariante***.*

Maintenant, nous introduisons une propriété essentielle " trivialité locale " qui jouera un rôle important dans ce chapitre.

• $\mathcal{D}$ est **(localement) triviale inférieurement** si, pour chaque $x \in M$, il existe un voisinage ouvert V de x et une application lisse $\Theta : \tilde{\mathcal{D}}_x \times V \to TM$ (appelée **trivialisation inférieure**) tels que :

(i) $\Theta(\tilde{\mathcal{D}}_x \times \{y\}) \subset \mathcal{D}_y$ pour tout $y \in V$.

(ii) Pour chaque $y \in V$, $\Theta_y \equiv \Theta(\ ,y) : \tilde{\mathcal{D}}_x \to T_yM$ est un opérateur continu et $\Theta_x : \tilde{\mathcal{D}}_x \to T_xM$ est l'inclusion naturelle i_x.

(iii) Il existe un opérateur continu $\tilde{\Theta}_y : \tilde{\mathcal{D}}_x \to \tilde{\mathcal{D}}_y$ tel que $i_y \circ \tilde{\Theta}_y = \Theta_y$, $\tilde{\Theta}_y$ est un isomorphisme de $\tilde{\mathcal{D}}_x$ dans $\Theta_y(\tilde{\mathcal{D}}_x)$ et $\tilde{\Theta}_x$ est l'identité de $\tilde{\mathcal{D}}_x$.

• $\mathcal{D}$ est **(localement) triviale supérieurement** si, pour chaque $x \in M$, il existe un voisinage ouvert V de x, un espace de Banach F et une application lisse $\Psi : F \times V \to TM$ (appelée **trivialisation supérieure**) tels que :

(i) Pour chaque $y \in V$, $\Psi_y \equiv \Psi(\ ,y) : F \to T_yM$ est un opérateur continu avec $\Psi_y(F) = \mathcal{D}_y$.

(ii) $\ker \Psi_x$ a un complément dans F.

(iii) Si $F = \ker \Psi_x \oplus S$, la restriction θ_y de Ψ_y à S est injective pour tout $y \in V$.

(iv) $\Theta(u, y) = (\theta_y \circ [\theta_x]^{-1}(u), y)$ est une trivialisation inférieure de $\mathcal{D}$.

Dans ce cas, l'application Θ est appelée **trivialisation inférieure associée**.

Une distribution faible triviale supérieurement $\mathcal{D}$ est appelée **involutive** si, pour chaque $x \in M$, il existe une trivialisation supérieure $\Psi : F \times V \to TM$ telle que pour chaque $u \in F$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $0 < \tau < \varepsilon$, on a un champ lisse d'opérateurs $C : [-\tau, \tau] \to L(F, F)$ avec la propriété suivante.

$$[X_u, Z_v](\gamma(t)) = \Psi(C(t)[v], \gamma(t)) \text{ pour tout } Z_v = \Psi(v,\ ) \text{ et pour } v \in F \tag{2.1}$$

le long d'une courbe intégrale $\gamma : t \mapsto \phi_t^{X_u}(x)$ sur $[-\tau, \tau]$ de la section inférieure $X_u = \Theta(\Psi(u, x),\ )$.

Avec ces définitions, nous avons le critère d'intégrabilité suivant.

Théorème 2.1.6 *(voir [16]) Soit $\mathcal{D}$ une distribution faible triviale supérieurement. Alors $\mathcal{D}$ est intégrable si et seulement si $\mathcal{D}$ est involutive.*

2.2 Orbite d'une famille de champs de vecteurs

Dans cette partie, nous exposons les résultats de [16] qui seront utilisés pour la preuve du théorème 2.4.1.

Notion de l'orbite $\mathcal{X}$.

Soit $\mathcal{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs locaux sur M. Étant donné $x \in M$, nous dirons que $\mathcal{X}(M)$ satisfait la condition (LBs) en x (localement borné d'ordre s) s'il existe une carte (V_x, ϕ) centrée en x et une constante $k > 0$ telles que pour tout $X \in \mathcal{X}$ dont le domaine $\mathrm{Dom}(X)$ contient V_x, on a

$$\sup\{||J^s[\phi_* X](y)||,\ X \in \mathcal{X},\ y \in V_x\} \leq k, \tag{2.2}$$

où J^s est le jet d'ordre s de X.

Pour tout ensemble d'indices A qui est ordonné fini ou dénombrable, considérons une famille $\xi = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ où les X_α sont définis sur le même ouvert V et satisfait la condition (LBs) pour $s \geq 1$. Étant donné une application intégrable bornée $u = (u_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'un certain intervalle I dans $l^1(A) = \{\tau = (\tau_\alpha), \sum_{\alpha \in A} |\tau_\alpha| < \infty\}$, nous pouvons associer un champ de vecteurs en fonction du temps de la forme

$$Z(x,t,u) = \sum_{\alpha \in A} u_\alpha(t) X_\alpha(x).$$

Pour un tel champ de vecteurs, il existe un **flot** $\Phi_u^\xi(t,\ .)$, voir Théorème 2 de [16].

Soit $\tau \in l^1(A)$ et posons $||\tau||_1 = \sum_{\alpha \in A} |\tau_\alpha|$. Sur l'intervalle correspondant $[0, ||\tau||_1]$, nous considérons la partition $(t_\alpha)_{\alpha \in A}$ de cet intervalle définie par $t_0 = 0$ et, pour $\alpha \in A$, $t_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\alpha} |\tau_\beta|$. Si nous choisissons $u = \Gamma^\tau = (\Gamma_\alpha^\tau)$ où Γ_α^τ est la fonction indicatrice de $]t_\alpha, t_{\alpha+1}[$, comme précédemment, nous pouvons associer à (ξ, τ) un champ de vecteurs dépendant du temps $Z(x,t,u)$. Sous des hypothèses appropriées, pour un tel Z, nous obtenons un flot associé noté $\Phi_\tau^\xi(t,\ )$. On suppose que l'ensemble de tous les $\mathrm{Dom}(X)$ pour $X \in \mathcal{X}$ est un recouvrement de M qui est borné en chaque point de M ; c-à-d. que l'ensemble $\{X(x),\ X \in \mathcal{X}\} \subset T_x M$ est borné pour chaque $x \in M$. Nous pouvons étendre $\mathcal{X}$ à l'ensemble $\hat{\mathcal{X}}$ donné par

$$\hat{\mathcal{X}} = \{Z = \Phi_*(\nu Y),\ Y \in \mathcal{X},\ \Phi = \phi_{t_p}^{X_p} \circ \cdots \circ \phi_{t_1}^{X_1} \text{ pour } X_1, \cdots, X_p \in \mathcal{X};\ \text{et } \nu \in \mathbb{R}\} \tag{2.3}$$

voir la sous section 3.1 de [16]. Alors, $\hat{\mathcal{X}}$ satisfait les mêmes propriétés précédentes que $\mathcal{X}$. A cet ensemble $\hat{\mathcal{X}}$, nous associons un pseudo-groupe approprié $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}$ des difféomorphismes locaux qui sont des compositions finies de flots de type ϕ_t^X avec $X \in \mathcal{X}$ et de type $\Phi_u^\xi(||\tau||_1, .)$ (comme nous l'avons vu précédemment) ou encore son inverse pour $\xi \subset \hat{\mathcal{X}}$.

A $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}$ est naturellement associée la relation d'équivalence sur M suivante.

$$x \equiv y \text{ ssi il existe } \Phi \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}} \text{ tel que } \Phi(x) = y$$

Une classe d'équivalence est appelée une $\mathcal{X}$-orbite.

Proposition 2.2.1 *(voir[16]). Pour chaque paire (x, y) dans la même orbite $\mathcal{X}$, soit nous avons une courbe lisse continue par morceaux qui joint x à y et dont chaque partie lisse est tangente à X ou $-X$ pour un certain $X \in \mathcal{X}$, soit il existe une suite γ_k de ces courbes lisses continues par morceaux dont l'origine est x (pour toutes les courbes) et dont la suite des extrémités converge vers y.*

Intégrabilité d'une distribution faible associée à une $\mathcal{X} - orbite$

Considérons un ensemble $\mathcal{Y}$ de champs de vecteurs locaux qui contient $\hat{\mathcal{X}}$. Supposons qu'il existe une distribution faible $\triangle$ engendrée par $\mathcal{Y}$ qui est intégrable sur M et que, pour tout $x \in M$, il existe une trivialisation inférieure $\Theta : F \times V \to TM$ pour un certain espace de Banach F (qui dépend de x) et pour un certain voisinage V de x dans M. Soit N l' union de toutes les variétés intégrales $i_L : L \to M$ passant par x_0. Alors, $i_N : N \to M$ est une variété intégrale maximale de $\triangle$ passant par x_0 voir Lemme 2.14 [17].

Nous avons la proposition suivante.

Proposition 2.2.2 *(voir [16]). Soit $f : N \to M$ la variété intégrale maximale de $\triangle$ passant par x.*

1. *Soit $Z \in \mathcal{X}(M)$ tel que $Dom(Z) \cap f(N) \neq \emptyset$ et tel que Z est tangent à $\triangle$. Posons $\tilde{V}_Z = f^{-1}(Dom(Z) \cap f(N))$. Alors, $\tilde{V}_Z$ est un ensemble ouvert dans N et il existe un champ de vecteurs $\tilde{Z}$ sur N tel que $Dom(\tilde{Z}) = \tilde{V}_Z$ et $f_*\tilde{Z} = Z \circ f$.*

   De plus, si $]a_x, b_x[$ est l'intervalle maximal sur lequel la courbe intégrale $\gamma : t \mapsto \phi^Z(t, x)$ est définie dans M, alors la courbe intégrale $\tilde{\gamma} : t \to \phi^{\tilde{Z}}(t, \tilde{x})$

est aussi définie sur $]a_x, b_x[$ *et on a*

$$\gamma = f \circ \tilde{\gamma}. \tag{2.4}$$

2. *Soit* $\xi = \{X_\beta,\ \beta \in B\} \subset \hat{\mathcal{X}} \subset \mathcal{Y}$ *qui satisfait la condition (LBs) sur la carte de domaine* V *centrée en* $x \in f(N)$ *et considérons le flot associé* Φ^ξ_τ*. Pour un certain* $\tau \in l^1(B)$*, soit* γ *la courbe définie sur* $[0, ||\tau||_1]$ *par* $\gamma(t) = \Phi^\xi_\tau(t, x)$*. Alors, il existe une courbe* $\tilde{\gamma} : [0, ||\tau||_1[\to N$ *telle que*

$$f \circ \tilde{\gamma} = \gamma \ sur\ [0, ||\tau||_1[. \tag{2.5}$$

D'après les propriétés de $\mathcal{X}$, nous pouvons associer à cet ensemble une distribution faible $\mathcal{D}$ de la façon suivante : $\mathcal{D}_x = \{Y = \sum_{X \in \mathcal{X}} \lambda_X X(x)\}$ pour une famille absolument sommable $\{\lambda_X,\ X \in \mathcal{X},\ x \in \mathrm{Dom}(X)\}$.
De la même manière, nous pouvons également associer à $\hat{\mathcal{X}}$ une distribution faible $\hat{\mathcal{D}}$ qui contient $\mathcal{X}$ et qui est $\mathcal{X}$-invariante. En plus, pour un ensemble $\mathcal{Y}$ de champs de vecteurs locaux qui contient $\mathcal{X}$ et qui est borné en chaque point, nous pouvons également associer une distribution faible $\triangle$ du type précédent. Si $\triangle$ est $\mathcal{X}$-invariante, alors $\hat{\mathcal{D}}_x \subset \triangle_x$ pour chaque $x \in M$.

D'autre part, à l'ensemble $\mathcal{X}$ nous pouvons associer une suite de familles

$$\begin{aligned}\mathcal{X} = \mathcal{X}^1 \subset \mathcal{X}^2 = \mathcal{X} \cup \{[X, Y],\ X, Y \in \mathcal{X}\} \subset \cdots \subset \mathcal{X}^k \\ = \mathcal{X}^{k-1} \cup \{[X, Y],\ X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{X}^{k-1}\} \subset \cdots\end{aligned}$$

Quand $\mathcal{X}^k$ est borné en chaque point et comme précédemment, nous pouvons également associer une distribution faible $\mathcal{D}^k$ engendrée par $\mathcal{X}^k$.

Considérons un ensemble d'indices A, fini ou dénombrable ordonné, et supposons que $\hat{\mathcal{D}}$ vérifie les conditions suivantes.

1. Pour tout $x \in M$, il existe une trivialisation supérieure $\Psi : l^1(A) \times V \to TM$ telle que $\Psi(e_\alpha, .) = Y_\alpha(.)$ pour chaque $\alpha \in A$, où $\{e_\alpha\}_{\lambda \in A}$ est la base canonique de $l^1(A)$.

2. Pour chaque $x \in M$, il existe un voisinage V de x où $V \subset \cap_{\alpha \in A} \mathrm{Dom}(Y_\alpha)$ et

il existe une constante $C > 0$ tels que

$$[Y_\alpha, Y_\beta](y) = \sum_{\nu \in A} C^\nu_{\alpha\beta}(y) Y_\nu(y) \text{ pour tout } \alpha, \beta \in A, \tag{2.6}$$

où chaque $C^\nu_{\alpha\beta}$ est une fonction lisse sur V, pour tout $\alpha, \beta, \nu \in A$ et on a

$$\sum_{\alpha,\beta,\nu \in A} |C^\nu_{\alpha\beta}(y)| \leq C$$

pour tout $y \in V$.

Alors, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.2.3 *(voir [16]).*

1. *Sous les hypothèses précédentes, la distribution $\hat{\mathcal{D}}$ est intégrable et chaque $\mathcal{X}$-orbite $\mathcal{O}$ est l'union des variétés intégrales maximales qui rencontrent $\mathcal{O}$. Chacune de ces variétés intégrales est dense dans $\mathcal{O}$.*

2. *Si $\mathcal{D}^k$ est définie et satisfait les hypothèses précédentes pour un certain $k \geq 2$, alors nous avons $\mathcal{D}^k = \hat{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{D}^k$ est intégrable.*

2.3 Problème d'optimalité et de contrôle

Rappelons qu'un relèvement d'une courbe $c : [0,1] \to \mathbb{H}$, continue et C^k par morceaux, est une courbe $\tilde{c} : [0,1] \to \mathcal{C}^L_\mathcal{P}$ continue et C^k par morceaux telle que : $\mathcal{E}(\tilde{c}(t)) = c(t)$. Si ce relèvement $\tilde{c}$ est tangent à $\mathcal{D}$, on dit que $\tilde{c}$ est un relèvement horizontal. De la construction de $\mathcal{D}$ et de la métrique riemannienne faible G sur $T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$ (voir la sous-section 1.2) et si $v \in T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$ est tel que $T\mathcal{E}(v) = \dot{c}(t)$, la quantité $\frac{1}{2}||v||^2_{L^2} = \frac{1}{2}\int_0^L ||v(s)||^2 ds = \frac{1}{2}G(v,v)$ est minimale si et seulement si v appartient à $\mathcal{D}_u$. Autrement dit, le relèvement $\tilde{c}$ de c est horizontal si et seulement si, pour tout $t \in [0,1]$, la quantité $\frac{1}{2}G(\dot{\tilde{c}}(t), \dot{\tilde{c}}(t))$ est minimale dans l'ensemble $\left\{\frac{1}{2}G(v,v) \ : \ v \in T_{\tilde{c}}\mathcal{C}^L_\mathcal{P}\right\}$. Donc, nous pouvons considérer ce type de **problème d'optimalité** pour un serpent hilbertien qui peut se formuler comme suit.

Etant donnée une courbe $c : [0,1] \to \mathbb{H}$ continue et C^k par morceaux, on cherche un relèvement $\tilde{c} : [0,1] \to \mathcal{C}^L_\mathcal{P}$, $t \mapsto u_t$ tel que pour tout $t \in [0,1]$:

– la famille des serpents $S_t(s) = \int_0^s u_t(\tau)d\tau$ associée satisfait $S_t(L) = c(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.
– l'énergie cinétique infinitésimale $\frac{1}{2}||\dot{\tilde{c}}(t)||^2_{L^2} = \frac{1}{2}G(\dot{\tilde{c}}(t), \dot{\tilde{c}}(t))$ est minimale.

Donc, un tel problème d'optimalité a une solution si et seulement si la courbe c a un relèvement horizontal. Nous dirons que ce relèvement horizontal est un **contrôle optimal**.

D'autre part, nous pouvons également poser la question suivante : Quand est ce-que deux positions de l'extrémité du serpent x_0, x_1 peuvent être reliées par une courbe c continue et lisse par morceaux et qui a un contrôle optimal $\tilde{c}$ comme relèvement ? Comme en dimension finie, l'ensemble d'accessibilité $\mathcal{A}(u)$, pour $u \in \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$, est l'ensemble de points (états) finaux $\tilde{c}(1)$ avec $\tilde{c} : [0, 1] \to \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ une courbe horizontale lisse par morceaux telle que $\tilde{c}(0) = u$. Dans ce cas, si $x_0 = S_u(L)$, alors chaque élément $z = S_{u'}(L)$ peut se joindre à x_0 par une courbe absolument continue c ayant un contrôle optimal lorsque u' appartient à $\mathcal{A}(u)$.

2.4 Propriétés des ensembles d'accessibilité

Dans le cas fini, étant donné une distribution horizontale $\mathcal{D}$ sur une variété M de dimension finie, le fameux *Théorème de Sussmann* (voir [22]) affirme que chaque ensemble d'accessibilité est une sous-variété lisse immergée qui est une variété intégrale d'une distribution $\hat{\mathcal{D}}$ qui contient $\mathcal{D}$ (c-à-d. $\mathcal{D}_x \subset \hat{\mathcal{D}}_x$ pour tout $x \in M$) et qui est caractérisée par :
$\hat{\mathcal{D}}$ est la plus petite distribution qui contient $\mathcal{D}$ et qui est invariante par le flot d'un champ de vecteurs (local) tangent à $\mathcal{D}$.

Dans le contexte d'une variété banachique, le lecteur peut trouver une généralisation de ce résultat dans [16]. Cependant, dans notre contexte, nous ne donnons que des résultats de densité des ensembles d'accessibilité avec une construction analogue dans le cas de la dimension finie.
Précisément, et d'après la sous-section 2.2, nous allons associer à chaque base hilbertienne $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{H}$ la famille $\mathcal{X} = \{E_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ de champs de vecteurs (globaux) de $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ (voir Lemme 1.2.6). De la définition d'une $\mathcal{X}$-orbite (voir section 2.2), chaque

ensemble d'accessibilité $\mathcal{A}(u)$ est contenu dans la $\mathcal{X}$-orbite de u. D'autre part, on peut étendre $\mathcal{X}$ à un ensemble de champs $\hat{\mathcal{X}}$ (voir (2.3)) et sous certaines hypothèses, nous pouvons montrer que la distribution $\hat{\mathcal{D}}$ engendrée par $\hat{\mathcal{X}}$ est integrable (voir [16], section 4) et que chaque $\mathcal{X}$-orbite est dense dans une variété intégrale maximale de $\hat{\mathcal{D}}$. Malheureusement, dans notre contexte en dimension infinie, ces hypothèses ne sont pas satisfaites.

Cependant, au lieu de $\hat{\mathcal{D}}$, nous allons construire une distribution faible $\bar{\mathcal{D}}$ qui donnera quelques propriétés analogues aux ensembles d'accessibilité. Plus précisément, nous étendons la famille $\mathcal{X} = \{E_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ à une famille

$$\{E_i, [E_j, E_k],\ i, j, k \in \mathbb{N}, k < l\},$$

qui génère une distribution hilbertienne faible $\bar{\mathcal{D}}$ sur $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ ayant les propriétés suivantes :
(i) $\bar{\mathcal{D}}$ ne dépend pas du choix de la base $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$.
(ii) $\hat{\mathcal{D}}_x$ est dense dans $\bar{\mathcal{D}}_x$ pour tout $x \in M$.
(iii) $\bar{\mathcal{D}}$ est intégrable et toute variété intégrale maximale de $\bar{\mathcal{D}}$ contient la $\{E_i,\ i \in \mathbb{N}\}$-orbite pour tout choix de la base $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{H}$.
(iv) L'ensemble d'accessibilité en un point d'une variété intégrale maximale N de $\bar{\mathcal{D}}$ est un sous-ensemble dense de N.

De cette façon, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 2.4.1 *Soit $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de $\mathbb{H}$ et $\{E_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ la famille associée de champs de vecteurs sur $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$. L'espace vectoriel*

$$\bar{\mathcal{D}}_u = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i E_i(u) + \sum_{j,l \in \mathbb{N}, j<l} \xi_{ij}[E_i, E_j](u) : \quad \sum (x_i)^2 < \infty, \quad \sum (\xi_{ij})^2 < \infty \right\}$$

est un sous-espace bien défini de $T_u\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ ayant une structure naturelle d'un espace de Hilbert telle que l'inclusion de $\bar{\mathcal{D}}_u$ dans $T_u\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ est continue et engendre une distribution hilbertienne faible de $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$. Cette distribution a les propriétés suivantes :

(1) $\bar{\mathcal{D}}$ ne dépend pas du choix de la base hilbetienne $\{e_i\}$ de $\mathbb{H}$.

(2) La distribution $\bar{\mathcal{D}}$ est intégrable. De plus, pour chaque $u \in \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$, l'ensemble d'accessibilité $\mathcal{A}(u)$ est un sous-ensemble dense de la variété intégrale maximale N de $\bar{\mathcal{D}}$ passant par u.

(3) Sur la variété $\mathcal{A}^L_P$, chaque sous-espace $\bar{\mathcal{D}}_u \cap T_u\mathcal{A}^L_P$ induit une distribution fermée (encore notée $\bar{\mathcal{D}}$) qui satisfait les deux propriétés précédentes ; en outre et dans ce cas, chaque variété intégrale maximale de cette distribution est une sous-variété hilbertienne de $\mathcal{A}^L_P$.

Remarque 2.4.2 Rappelons qu'une courbe horizontale γ est une courbe absolument continue dans $\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$ qui est presque partout tangente à $\mathcal{D}$. Soit $u \in \mathcal{C}^L_\mathcal{P}$, on note par $H_u \subset T_u\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$ l'ensemble des vecteurs tangents en u d'une courbe horizontale passant par u. Si X et Y sont deux champs de vecteurs sur $\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$ dont le domaine contient u, alors la courbe

$$t \to \Phi^X_t \circ \Phi^Y_t \circ \Phi^X_{-t} \circ \Phi^Y_{-t}(u)$$

est une courbe horizontale et il est bien connu que son vecteur tangent à u est $[X, Y](u)$. Donc, si on cherche la plus petite variété (faible) de $\mathcal{C}^L_\mathcal{P}$ qui contient l'ensemble d'accessibilité $\mathcal{A}(u)$, son espace tangent doit contenir H_u. En particulier, cet espace tangent doit contenir la famille $\{E_i(u), [E_j, E_l](u), i, j, l \in \mathbb{N}\}$. Notons que, d'après le Théorème 2.4.1, il en résulte que $\bar{\mathcal{D}}_u$ contient H_u.
D'une part, si on considère la distribution fermée engendrée par
$\mathcal{X} = \{E_i, [E_j, E_l], i, j, l \in \mathbb{N}\}$, nous pouvons montrer que cette distribution satisfait les propriétés (i) et (ii) données juste avant l'énoncé du théorème 2.4.1 et satisfait également une certaine propriété de type trivialité supérieure locale mais pas en termes de notre définition (voir section 2.1). Cependant, nous ne pouvons pas savoir si cette distribution est intégrable ou non .

D'autre part, la l^1-distribution faible $\triangle^1$ (voir la section 2.5) engendrée par $\mathcal{X}$ satisfait la propriété (2) mais pas la propriété (1) et donc $\triangle^1_u$ ne contient pas H_u. Dans ce sens, la distribution $\bar{\mathcal{D}}$ est la plus "petite" distribution faible qui est intégrable et telle que la variété intégrale maximale issue de u contient $\mathcal{A}(u)$. De plus, de la propriété (1) du Théorème 2.4.1, toute variété intégrale maximale N, pour une famille $\mathcal{X}' = \{E'_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ (associée à une base $\{e'_i,\ i \in \mathbb{N}\}$), la $\mathcal{X}'$-orbite de u est contenue dans N.

Finalement, quand $\mathbb{H}$ est un espace de dimension finie, on a $\hat{\mathcal{D}} = \bar{\mathcal{D}}$. Cette distribution est fermée et $\bar{\mathcal{D}}$ est la plus "petite" distribution dont les feuilles sont les ensembles d'accessibilité, comme c'est prouvé dans [16] (voir Exemple 4.5). Nous obtenons donc une autre démonstration du résultat de [20].

D'après notre problème d'optimalité de l'extrémité du serpent, nous savons que si u est une configuration et N est la variété intégrale maximale de $\bar{\mathcal{D}}$ issue de u, pour toute autre configuration $v \in N$ il existe une suite (γ_n) de courbes horizontales dans N dont l'origine est u et dont la suite d'extrémités converge vers v. Donc, si $\mathcal{E}(u) = x$ et $\mathcal{E}(v) = y$, les courbes $c_n = \mathcal{E} \circ \gamma_n$ sont optimales. L'origine de chaque courbe c_n est x et la suite des extrémités y_n de c_n converge vers y.

Donc, pour chaque variété intégrale maximale N de $\bar{\mathcal{D}}$, on note par N' l'image $N' = \mathcal{E}(N)$. Alors, pour tout couple $(x, y) \in N'$, il existe une famille de courbes optimales c_n qui ont x comme origine et, la suite des extrémités y_n de c_n converge vers y.

2.5 Construction de la distribution $\bar{\mathcal{D}}$

Pour la construction de $\bar{\mathcal{D}}$, nous avons besoin du résultat suivant dont la preuve est la même que dans le cas d'un espace de Hilbert de dimension finie $\mathbb{H}$ (voir [20]). D'après la Remarque 1.2.7, chaque E_i peut être considéré comme un champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^\infty$. Dans ce cas, nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.5.1 *Les crochets de champs de vecteurs de la famille $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ satisfont les relations suivantes :*

$[E_i, E_j](u) =< e_j, u > E_i(u) - < e_i, u > E_j(u)$ *pour tout* $u \in \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ *et* $i, j \in \mathbb{N}$,

$[E_i, [E_j, E_k]] = \delta_{ij} E_k - \delta_{ik} Ej$ *pour tout* $i, j, k \in \mathbb{N}$,

$[[E_i, E_j], [E_k, E_l]] = \delta_{il}[E_j, E_k] + \delta_{jk}[E_i, E_l] - \delta_{ik}[E_j, E_l] - \delta_{jl}[E_i, E_k]$, *pour tout* $i, j, k, l \in \mathbb{N}$.

Nous considérons l'ensemble dénombrable d'indices $\Lambda = \{(i, j),\ i, j \in \mathbb{N},\ i < j\}$ et soit $\mathbb{G}^1$ (resp $\mathbb{G}^2$) l'espace de Banach $l^1(\mathbb{N}) \oplus l^1(\Lambda)$ (resp. $l^2(\mathbb{N}) \oplus l^2(\Lambda)$). Nous avons alors le lemme suivant.

Lemme 2.5.2

1. *Pour $p = 1, 2$, l'application Ψ^p du fibré trivial $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}} \times \mathbb{G}^p$ dans $T\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ caractérisée par*

$$\Psi^p_u(\sigma, \xi) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sigma_i E_i(u) + \sum_{(i,j) \in \Lambda} \xi_{ij} [E_i, E_j](u), \tag{2.7}$$

$$\sigma = (\sigma_i) \in l^p(\mathbb{N}),\ \xi = (\xi_{ij}) \in l^p(\Lambda).$$

est bien définie et chaque Ψ^p_u est une application linéaire continue.

2. *Pour chaque* $u \in \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$*, soit* $\mathbb{V}_u$ *le sous-espace de Hilbert de* $\mathbb{H}$ *engendré par l'ensemble*
$$\{u(t) - u(0),\ t \in [0, L]\}.$$
Pour $p = 1, 2$*, si le noyau de* Ψ^p_u *n'est pas* $\{0\}$*, alors* $\mathbb{V}_u \neq \mathbb{H}$*.*

3. *Pour* $p = 1, 2$*, la distribution* $\triangle^p$ *définie par* $\triangle^p_u = \Psi^p_u(\mathbb{G}^p)$ *est une distribution faible et l'application* Ψ^p *définit une trivialisation supérieure (globale) de* $\triangle^p$*.*

4. *La distribution* $\triangle^2$ *ne dépend pas du choix de la base hilbertienne* $\{e_i\}$ *dans* $\mathbb{H}$ *et contient* $\mathcal{D}$ *(c-à-d.* $\mathcal{D}_u \subset \triangle^2_u$*).*

Démonstration du Lemme 2.5.2.
Partie 1 : Pour tout $\sigma \in l^p(\mathbb{N})$, le vecteur $\sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma_i e_i$ appartient à $\mathbb{H}$ et, pour tout $s \in [0, L]$, le vecteur $\sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma_i E_i(u(s))$ est la projection orthogonale sur $T_{u(s)}\mathbb{S}^\infty$ de $\sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma_i e_i$. Donc, on a

$$||\sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma_i E_i(u)||_\infty \leq [\sum_{i\in\mathbb{N}} (\sigma_i)^2]^{1/2} = ||\sigma||_2. \tag{2.8}$$

Si σ appartient à $l^1(\mathbb{N})$, comme $||\sigma||_2 \leq |\sigma||_1$, on obtient

$$||\sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma_i E_i(u)||_\infty \leq ||\sigma||_1.$$

D'autre part, comme $[E_k, E_l](u) = u_l E_k(u) - u_k E_l(u)$ et de la même manière on voit que, pour tout $s \in [0, L]$, le vecteur $\sum_{(k,l)\in\Lambda} \xi_{kl}[E_k, E_l](u(s))$ est la projection orthogonale de $\sum_{(k,l)\in\Lambda} \xi_{kl}(u_l(s)e_k - u_k(s)e_l)$ sur $T_{u(s)}\mathbb{S}^\infty$.
Cependant, nous avons

$$\sum_{(k,l)\in\Lambda} \xi_{kl} u_l(s) e_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} [\sum_{l>k} \xi_{kl} u_l(s)] e_k].$$

Donc, nous obtenons

$$||\sum_{(k,l)\in\Lambda} \xi_{kl} u_l(s) e_k||^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} [\sum_{l>k} \xi_{kl} u_l](s)]^2.$$

Utilisons le fait que $|u_j(s)| \leq ||u(s)|| = 1$ et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz on aura

$$|\sum_{l>k} \xi_{kl} u_l](s)| \le [\sum_{l>k} (\xi_{kl})^2]^{1/2}.$$

Finalement, on obtient

$$|| \sum_{(k,l)\in\Lambda} \xi_{kl} u_l(s) e_k ||^2 \le \sum_{(k,l)\in\Lambda} (\xi_{kl})^2 = (||\xi||_2)^2.$$

En utilisant, le même argument, nous obtenons

$$|| \sum_{(k,l)\in\Lambda} \xi_{kl} u_k(s) e_l ||^2 \le \sum_{(k,l)\in\Lambda} (\xi_{kj})^2 = (||\xi||_2)^2.$$

Donc

$$|| \sum_{(k,l)\in\Lambda} \xi_{kl} [E_k, E_l](u) ||_\infty \le 2||\xi||_2.$$

Si $\xi \in l^1(\Lambda)$, par le même argument utilisé précédemment, nous aurons également :

$$|| \sum_{(k,l)\in\Lambda} \xi_{kl} [E_k, E_l](u) ||_\infty \le 2||\xi||_1.$$

Enfin, nous obtenons

$$||\Psi_u^p(\sigma, \xi)||_\infty \le 2||(\sigma, \xi)||_p \ \text{ pour } p = 1, 2. \tag{2.9}$$

Il découle que Ψ^p est bien défini. D'après son expression, il est facile de voir de (2.9) que Ψ_u^p est linéaire et continue. Ce qui achève la démonstration de la partie 1.

Partie 2 : D'abord et comme l'inclusion naturelle $I : \mathbb{G}^1 \hookrightarrow \mathbb{G}^2$ est continue avec une image dense, nous avons $\Psi_u^2 \circ I = \Psi_u^1$, la clôture de $\ker \Psi_u^1$ dans $\mathbb{G}^2$ est égale à $\ker \Psi_u^2$. Donc, $\ker \Psi_u^1 \neq 0$ si et seulement si $\ker \Psi_u^2 \neq 0$. Supposons que $\ker \Psi_u^1 \neq \{0\}$ et soit $(\sigma, \xi) \in \ker \Psi_u^1$. D'après (2.7) et la Remarque 1.2.7, on obtient

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma_i E_i(u(s)) + \sum_{(i,j)\in\Lambda} \xi_{ij} [u_i(s) E_j(u(s)) - u_j(s) E_i(s)] = 0 \ \forall s \in [0, L]. \tag{2.10}$$

Posons $\bar{\xi}_{kj} = \dfrac{\xi_{kj}}{2}$ (resp. $\bar{\xi}_{kj} = -\dfrac{\xi_{kj}}{2}$) pour $j < k$ (resp. $j > k$) et $\bar{\xi}_{jj} = 0$. Alors, (2.10) peut s'écrire

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}[\sum_{j\in\mathbb{N}}(\bar{\xi}_{ij}u_j(s)+\sigma_i]E_i(u(s))=0,\ \text{pour tout } s\in[0,L]. \tag{2.11}$$

Etant donné $\xi\in l^1(\Lambda)$, notons Ξ l' endomorphisme de $l^1(\mathbb{N})$ dont la matrice dans la base canonique est précisément $(\bar{\xi}_{ij},\ i,j\in\mathbb{N})$. Donc, (2.11) est équivalente à

$$\Xi u(s)=-\sigma,\ \text{pour tout } s\in[0,L]. \tag{2.12}$$

Alors, σ doit appartenir à l'image de Ξ.
De la définition de $\mathbb{V}_u$, (2.12) est équivalente à $\Xi u(0)=-\sigma$ et $\mathbb{V}_u\subset\ker\Xi$.

Partie 3 : De la partie 1, $\triangle_u^p=\Psi_u^p(\mathbb{G}^p)$ engendre une distribution bien définie sur $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L$. D'autre part, notons par $\hat{\Psi}_u^p$ la bijection canonique induite par Ψ_u^p et donnée par

$$\hat{\Psi}_u^p:\mathbb{G}^p/\ker\Psi_u^p\to\triangle_u^p.$$

Donc, nous pouvons munir $\triangle_u^p$ de la structure banachique de sorte que $\hat{\Psi}_u^p$ soit une isométrie. Dans ce cas, $\triangle^p$ est donc une distribution faible. D'autre part, la famille des champs de vecteurs $\{E_i,\ i\in\mathbb{N}\}$ satisfait la condition (LBs) pour tout $s\in\mathbb{N}$ en chaque point et comme Ψ_u^1 est linéaire avec une constante de Lipschitz indépendante de u, l'application $(u,(\sigma,\xi))\mapsto\Psi_u^p(\sigma,\xi)$ est lisse.

Il reste à montrer que $\ker\Psi_u^p$ a un complément dans $\mathbb{G}^p$ pour tout $u\in\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L$. D'abord, pour $p=2$, comme $\mathbb{G}^2$ est un espace de Hilbert, ceci est toujours vrai. En particulier, la structure banachique précédente de chaque $\triangle_u^2$ est une structure hilbertienne. Cependant, nous allons montrer ce résultat pour chaque cas (pour $p=1$ et $p=2$). Supposons que $u\in\mathcal{R}(\mathcal{E})$. Si $\ker\Psi_u^p=\{0\}$ il n'y a rien à prouver. Maintenant, supposons que $\ker\Psi_u^p\neq\{0\}$. D'abord, supposons que nous avons une partition de $\mathbb{N}=A\cup B$ telle que $\{e_a,\ a\in A\}$ (resp. $\{e_b,\ b\in B\}$) est une base hilbertienne de $[\mathbb{V}_u]^\perp$ (resp. $\mathbb{V}_u$). Par construction, chaque composante u_a est constante pour tout $a\in A$. Donc, le crochet de Lie $[E_a,E_{a'}]$, pour $a,a'\in A$, appartient à $\mathcal{D}_u$. Soit

$$\mathbb{K}=\Big\{\xi\in l^p(\Lambda)\text{ tel que }\xi_{ij}=0\text{ si }i\text{ ou }j\in B\Big\}.$$

Selon les notations de la démonstration de la partie 2 et pour tout $\xi\in\mathbb{K}$, si on note par Ξ l'endomorphisme associé de $\mathbb{H}$, $\ker \Xi$ contient $\mathbb{V}_u$ et si $\sigma = -\Xi u(0)$, alors (σ, ξ) appartient à $\ker \Psi_u^p$. Donc , le sous-espace

$$\hat{\mathbb{K}} = \left\{ (\sigma, \xi) \in l^p(\mathbb{N}) \oplus l^p(\Lambda),\ \xi \in \mathbb{K}, \sigma = -\Xi u(0) \right\}$$

est contenu dans $\ker \Psi_u^p$.

D'autre part, si (σ, ξ) appartient à $\ker \Psi_u^p$, de la démonstration de la partie 2 on a $\sigma = -\Xi u(0)$ et $\mathbb{V}_u \subset \ker \Xi$ et, comme $\{e_b\}$ est une base de $\mathbb{V}_u$, on a donc $(\sigma, \xi) \in \hat{\mathbb{K}}$. Cela veut dire que $\ker \Psi_u^1$ a un complément.

Si on note par $\mathbb{L}$ le sous-espace de $\{\xi \in l^1(\Lambda),\ \xi_{ij} = 0$ pour tout $i, j \in A\}$, alors le sous-espace $l^p(\mathbb{N}) \oplus \mathbb{L}$ est le complément de $\ker \Psi_u^p$.

Dans la cas général, on choisit une base hilbertienne $\{e'_a,\ a \in A\}$ (resp $e'_b,\ b \in B\}$) de $[\mathbb{V}_u]^\perp$ (resp. de $\mathbb{V}_u$). Il existe une isométrie linéaire T de $\mathbb{H}$ telle que $T(e'_a) = e_a$ pour $a \in A$ et $T(e'_b) = e_b$ pour $b \in B$. Notons par $E'_j = \nabla(e'_j)^*$ le champ de vecteurs associé à $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L$ (voir le Lemme 1.2.3). L'application $\tilde{T} : (z, v) \mapsto (z, T(v))$ est un isomorphisme de $T\mathbb{H}$ tel que $\tilde{T}(E'_j)(u) = E_j(u)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Considérons l'application $\Psi' : \mathbb{G}^1 \times \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L \to T\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^L$ définie par

$$\Psi'_u(\sigma, \xi) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sigma_i E'_i(u) + \sum_{(i,j) \in \Lambda} \xi_{ij} [E'_i, E'_j](u),\ \sigma = (\sigma_i) \in l^p(\mathbb{N}),\ \xi = (\xi_{ij}) \in l^p(\Lambda).$$

Bien sûr, nous avons

$$\Psi_u^p = \Psi'_u \circ T.$$

Cependant, dans la nouvelle base, pour Ψ'_u nous sommes dans la situation précédente. Donc, il en résulte que $\ker \Psi_u^p$ a un complément, ce qui termine la démonstration de la partie 3.

Supposons maintenant que $u \in \Sigma(\mathcal{E})$. De la démonstration du Lemme 1.3.2, $u(t) = \pm x \in \mathbb{S}^\infty$ pour tout $t \in [0, L]$ et il existe une base de hilbertienne $\{e'_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ telle que $x = e'_1$, la famille associée $\{E'_i(u),\ i > 1\}$ est une base de $\triangle_u$ et $E'_1(u) = 0$ (voir le lemme 1.2.6). De plus, comme les composantes de u sont constantes et d'après le Lemme 2.5.1, tous les crochet $[E'_j, E'_l](u)$ appartiennent à $\mathcal{D}_u$ pour $i > 1$ et $j > 1$. Aussi, $[E'_1, E'j] = -x_i E_j$ appartient à $\triangle_u$. De ce qui précède, nous pouvons considérer l'application

$$\Psi'_u(\sigma,\xi)=\sum_{i\in\mathbb{N}}\sigma_i E'_i(u)+\sum_{(k,l)\in\Lambda}\xi_{kj}[E'_i,E'_j](u),\ \sigma=(\sigma_i)\in l^p(\mathbb{N}),\ \xi=(\xi_{ij})\in l^p(\Lambda).$$

Son noyau est $\mathbb{R}e'_1\oplus l^p(\Lambda)$. Par le même argument précédent, nous obtenons que $\ker\Psi^p_u$ a un complément. En outre, la restriction de Ψ^p_u à $l^P(\mathbb{N})$ a un noyau de dimension 1 et la restriction de Ψ^p à l'orthogonal $[\ker\Psi^p_u]$ dans $l^1(\mathbb{N})$ est un isomorphisme sur $\triangle^p_u$.

Partie 4 : Maintenant, il faut montrer que l'image de Ψ^2_u ne dépend pas du choix de la base hilbertienne (e_i) de $\mathbb{H}$. Donc, soit (e'_j) une autre base hilbertienne de $\mathbb{H}$ et notons par $E'_j=\nabla(e'_j)^*$ le champ de vecteurs associé sur $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$. Nous avons donc la décomposition

$$E'_i=\sum_{j\in\mathbb{N}}a^j_iE_j\text{et } [E'_j,E'_k]=\sum_{l,m\in\mathbb{N}}a^l_ja^m_k[E_l,E_m]=\sum_{(l,m)\in\Lambda}(a^l_ja^m_k-a^m_ja^l_k)[E_l,E_m]\tag{2.13}$$

Soit T l'isométrie de $\mathbb{H}$ définie par $T(e_i)=e'_i$. Soit $l^2_{BA}(\mathbb{H})$ l'ensemble des applications de Hilbert-Schmidt bilinéaires antisymétriques. Alors,
$\{e^*_i\wedge e^*_j,\ (i,j)\in\Lambda\}$ est une base hilbertienne de $l^2_{BA}(\mathbb{H})$. Notons par T^2 l'isométrie de $l^2_{BA}(\mathbb{H})$ induite par T sur $l^2_{BA}(\mathbb{H})$. Donc, la matrice de T^2 dans cette base est précisément $[(a^k_ia^l_j-a^k_ja^l_i)]_{(i,j),(k,l)\in\Lambda}$. Il en résulte que T (resp. T^2) est une isométrie de $l^2(\mathbb{N})$ (resp. $l^2(\Lambda)$).
D'autre part, un choix d'une base (e'_i) de $\mathbb{H}$ est naturellement associé à l'application $\Psi'^2:\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}\times\mathbb{G}^p\to T\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ caractérisée par

$$\Psi'^2_u(\sigma,\xi)=\sum_{i\in\mathbb{N}}\sigma_iE'_a(u)+\sum_{(j,k)\in\Lambda}\xi_{jk}[E'_j,E'_k](u).$$

D'après (2.13), on a

$$\Psi^2_u(\sigma,\xi)=\Psi'^2_u(T\sigma,T^2\xi).$$

Donc, $\Psi'^2_u(\mathbb{G}^2)=\triangle^2_u$ pour tout $u\in\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$.

D'autre part, du Lemme 1.2.6, il est clair que $\mathcal{D}_u$ est contenu dans $\triangle^2_u$. D'après la Remarque 1.3.3, on peut noter que $\psi^2_u(l^2(\mathbb{N})=\mathcal{D}_u$ et, de la démonstration de la partie 3, $\Psi^2(l^2(\Lambda))$ est un complément de $\mathcal{D}_u$ dans $\triangle^2_u$. Ce qui achève la démonstration de la partie 4 et donc du lemme 2.5.2

$\triangle$

2.6 Démonstration du théorème 2.4.1

Il reste à prouver les assertions suivantes.
Assertion 1 : *Les distributions $\triangle^1$ et $\triangle^2 = \bar{\mathcal{D}}$ sont intégrables.*

Démonstration . D'après le Lemme 2.5.2, on a $\bar{\mathcal{D}}_u = \triangle^2_u$ et donc $\bar{\mathcal{D}}$ est une distribution hilbertienne faible bien définie sur $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ qui ne dépend pas du choix de la base hilbertienne $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{H}$.
Plaçons nous dans le contexte de la démonstration du Lemme 2.5.2. D'après le Lemme 2.5.1, le Lemme 2.5.2 et le Théorème 2.1.6, il résulte que la distribution $\triangle^1$ est intégrable et que $\bar{\mathcal{D}} = \triangle^2$ est intégrable.
Notons toujours par $\mathcal{X}$ la famille des champs de vecteurs $\{E_i,\ i \in \mathbb{N}\}$.

Assertion 2 : *Toute $\mathcal{X}$-orbite est contenue dans une variété intégrale maximale de $\bar{\mathcal{D}}$.*

Démonstration . Par souci de simplicité, nous noterons par $\mathbb{G}$ l'espace de Hilbert précédent $\mathbb{G}^2$. Comme la distribution $\bar{\mathcal{D}}$ est intégrable, soit $f : N \to \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ une variété intégrale maximale de $\bar{\mathcal{D}}$. Sans perte de généralité, nous pouvons identifier N à $f(N)$ et prenons $f = i_N$ l'inclusion naturelle de N (avec sa structure de variété hilbertienne) sur $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$. Considérons le fibré image réciproque $f^*(\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}} \times \mathbb{G})$ sur N. Notons que $f^*(\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}} \times \mathbb{G})$ peut s'identifier à $N \times \mathbb{G}$. Comme l'image de Ψ_u est $\bar{\mathcal{D}}_u$, pour tout u, le morphisme de fibrés $\Psi : \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}} \times \mathbb{G} \to T\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ induit un morphisme de fibrés $\tilde{\Psi}$ de $N \times \mathbb{G}$ dans TN qui est surjectif. En outre, l'orthogonal de $\ker \tilde{\Psi}_u$ dans $\{u\} \times \mathbb{G}$ engendre un sous-fibré hilbertien de $N \times \mathbb{G}$. Notons par $\mathcal{N}$ ce sous-fibré et par Π la projection orthogonale naturelle de $N \times \mathbb{G}$ sur $\mathcal{N}$. Maintenant, on a $\Pi \circ \tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}$ et la restriction de $\tilde{\Psi}$ à $\mathcal{N}$ est un isomorphisme de $\mathcal{N}$ sur TN, et on a

$$Tf \circ \tilde{\Psi} = \Psi \circ (Id \times f). \tag{2.14}$$

Soit maintenant $\{\epsilon_i, \omega_{jl},\ i \in \mathbb{N}, (j,l) \in \Lambda\}$ la base hilbetienne canonique de $\mathbb{G}$. Posons $\hat{E}_i(u) = \tilde{\Psi}_u(\epsilon_i)$ et $\hat{E}_{jl}(u) = \tilde{\Psi}_u(\omega_{jl})$. En effet, $\hat{E}_i$ et $\hat{E}_{jl}$ sont des champs de vecteurs globaux lisses sur N.

D'autre part, on a $\Psi_v(\epsilon_i)(u) = E_i(u)$ et $\Psi_v(\omega_{jl}) = [E_j, E_l](v)$ pour tout $v \in f(N)$. De la proposition 2.2.2, ils existent des champs de vecteurs globaux $\tilde{E}_i$ sur N tels que $f_*\tilde{E}_i = E_i$ et donc $f_*[\tilde{E}_j, \tilde{E}_l] = [E_j, E_l]$. Il résulte de (2.14) que $\hat{E}_i = \tilde{E}_i$ et $\hat{E}_{jl} = [\tilde{E}_j, \tilde{E}_l]$.
Soit $\tilde{\mathcal{X}}$ la famille induite par $\{\tilde{E}_i, [\tilde{E}_j, \tilde{E}_l],\ i, j, l \in \mathbb{N},\ j < l\}$. Comme Ψ (resp. $\tilde{\Psi}$) est une trivialisation supérieure (globale) de $\bar{\mathcal{D}}$ sur $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ (resp TN sur N), cela signifie que , pour tout $u \in \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ (resp.$u \in N$), il existe un voisinage ouvert $U \subset \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ (resp. $\tilde{U} \subset N$) de u tel que $\mathcal{X}$ (resp. $\tilde{\mathcal{X}}$) satisfait la condition (LBs) sur U (resp. $\tilde{U}$) pour $s > 3$ (voir [16], démonstration du Théorème 6, partie 2).
Considérons une famille $\xi = \{X_\alpha,\ \alpha \in A\} \subset \mathcal{X}$ et soit $\tilde{\xi} = \{\tilde{X}_\alpha,\ \alpha \in A\}$ la famille correspondante sur une variété intégrale maximale N. Etant donné $u \in f(N)$, considérons un flot Φ^ξ_τ associé à ξ et soit $\gamma(t) = \Phi^\xi_\tau(t, u)$ la courbe intégrale définie sur $[0, ||\tau||_1]$. De la proposition 2.2.2, il existe une courbe $\tilde{\gamma} : [0, ||\tau||_1[\to N$ telle que $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ sur $[0, ||\tau||_1[$. Posons $v = \gamma(||\tau||_1)$.

On va montrer que v appartient aussi à $f(N)$, ou bien, $\Phi^\xi_\tau(||\tau||_1, u) = \phi^\xi_\tau(u)$ appartient à N.

Considérons une variété intégrale maximale $g \equiv i_M : M \to \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ de $\bar{\mathcal{D}}$ passant par v et soit $\tilde{v} = (i_M)^{-1}(v)$. Comme nous avons déjà vu, si $\mathcal{X}'$ est la famille de champs de vecteurs $\{E'_i, [E'_i, E'_l],\ i, j, l, \in \mathbb{N}, j < l\}$ sur M telle que $g_*E'_i = E_i$, alors $\mathcal{X}'$ satisfait la condition (LBs). Sur N, nous avons aussi une famille $\xi' = \{X'_\alpha, \alpha \in A\}$ définie sur un voisinage de v et donc $g_*X'_\alpha = X_\alpha$. Alors, ξ' satisfait aussi la condition (LBs) pour $s > 3$. Donc, d'après le Théorème 2 de [16], il existe $\eta > 0$ tel que, pour $\tau' \in l^1(A)$ avec $||\tau'||_1 \leq \eta$, le flot correspondant $\Phi^{\xi'}_{\tau'}(.,.)$ est défini sur un voisinage $\tilde{V}$ de $\tilde{v} = g^{-1}(v)$ dans M. Maintenant, revenons au flot d'origine Φ^ξ_τ sur $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$. Si $\tau = (\tau_\alpha)_{\alpha \in A}$, il existe α_0 tel que $\displaystyle\sum_{\alpha \geq \alpha_0} |\tau_\alpha| < \eta$. Alors, pour $a \in A$ avec $a \geq \alpha_0$, posons $\tau'_\alpha = \tau_a$ avec $\tau'_\alpha = 0$ pour $\alpha < a$ et $\tau'_\alpha = \tau_\alpha$ pour $\alpha \geq a$. Les flots correspondants $\Phi^{\xi'}_{\tau_a}$ et $\hat{\Phi}^{\xi'}_{\tau_a}$ sont définis sur M. De plus, on a

$$g \circ \Phi^{\xi'}_{\tau_a}(t, \tilde{z}) = \Phi^\xi_{\tau_a}(t, g(\tilde{z})) \text{ et } g \circ \hat{\Phi}^{\xi'}_{\tau_a}(t, \tilde{z}) = \hat{\Phi}^\xi_{\tau_a}(t, g(\tilde{z})), \tag{2.15}$$

pour tout $\tilde{z} \in \tilde{V}$.
Par construction du flot Φ^ξ_τ, on a $\Phi^\xi_{\tau_a}(||\tau_a||_1, \gamma(\tau_a)) = v$ et donc $\hat{\Phi}^\xi_{\tau_a}(||\tau_a||_1, v) = \gamma(\tau_a)$. Pour $a \geq \alpha_0$, dans $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ considérons la courbe $\hat{\gamma}_a(s) = \hat{\Phi}^\xi_{t_a}(||\tau_a||_1 - s, v)$. Cette courbe

est définie sur $[0, ||\tau_a||_1]$ et joint v à $\gamma(\tau_a)$. De la même manière, dans M, considérons la courbe $\hat{\gamma}'_a(s) = \hat{\Phi}^{\xi'}_{\tau_a}(||\tau_a||_1 - s, v)$. Cette courbe est également définie sur $[0, ||\tau_a||_1]$ et joint $\tilde{v}$ à $\tilde{v}_a$ dans N. D'après (2.15) on a

$$g \circ \hat{\gamma}'_a = \hat{\gamma}_a.$$

En particulier, on obtient $g(\tilde{v}) = \gamma(\tau_a)$. Cependant, $\gamma(\tau_a)$ appartient aux sous-ensembles de $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ $f(N) \equiv N$ et à $g(M) \equiv M$. Comme $(N, f \equiv i_N)$, $(M, g \equiv i_M)$ sont des variétés intégrales maximales de $\bar{\mathcal{D}}$, donc du fait que $N \cap M \neq \emptyset$ implique $N = M$, on peut prolonger $\tilde{\gamma}$ à un intervalle fermé $[0, ||\tau||_1]$ et, en particulier, $\phi^{\xi}_{\tau}(u) = \Phi^{\xi}_{\tau}(||\tau||_1, u)$ appartient à N.

Maintenant, si nous avons $v = \Phi(u)$ pour un certain $\Phi \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}$ (voir section 2.2), alors Φ est une composition finie de difféomorphismes locaux de type ϕ^{ξ}_{τ} ou $[\phi^{\xi}_{\tau}]^{-1}$ ou bien de type Φ^X_t pour $X \in \mathcal{X}$. De l'argument précédent, si $u \in N$, alors $\phi^{\xi}_{\tau}(u)$ et $[\phi^{\xi}_{\tau}]^{-1}(u)$ appartiennent à N et, d'après le Lemme 2.2.2-partie 1, $\Phi^X_t(u)$ appartient aussi à N. Par induction, nous obtenons que $v = \Phi(u)$ appartient à N. Donc, le $\mathcal{X}$-orbite $\mathcal{O}(u)$ de u est contenu dans N.

Assertion 3 : *Si N est une variété intégrale maximale de $\bar{\mathcal{D}}$, l'ensemble d'accessibilité $\mathcal{A}(u)$ de $u \in N$ est un sous-ensemble dense de N.*

Démonstration. D'après le Théorème 2.2.3, $\mathcal{O}(u)$ contient la variété intégrale maximale N^1 de $\triangle^1$ passant par u et N^1 est dense dans $\mathcal{O}(u)$ (pour la topologie de $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$). Donc, N^1 et $\mathcal{O}(u)$ ont la même clôture dans $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$. Cependant, on a $N^1 \subset \mathcal{O}(u) \subset N$. Comme l'inclusion de N dans $\mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ est continue, on obtient que $\mathcal{O}(u)$ est dense dans N.

De la Proposition 2.2.1, l'ensemble $\mathcal{A}(u)$ est un sous-ensemble dense dans $\mathcal{O}(u)$. D'autre part, de la Proposition 2.2.2, on voit que $\mathcal{A}(u)$ est contenu dans N. Donc, nous obtenons que $\mathcal{A}(u)$ est dense dans N.

Il est clair que la démonstration des propriétés (1),(2) a été faite lors de la démonstration des assertions (1)-(3) . Il reste à démontrer la propriété (3). Nous allons prouver que les assertions (1)-(3) sont vraies sur $\mathcal{A}^L_{\mathcal{P}}$.

Il est facile de voir que toutes les preuves du Lemme 2.5.2 fonctionnent de la même manière sur la variété $\mathcal{A}^L_{\mathcal{P}}$. Cependant, dans $\mathcal{A}^L_{\mathcal{P}}$, la distribution correspondante $\bar{\mathcal{D}}$ est fermée. Donc, chaque variété intégrale maximale de $\bar{\mathcal{D}}$ est une variété hilbertienne faible dont la topologie est la topologie induite par celle de la variété hilbertienne $\mathcal{A}^L_{\mathcal{P}}$. Alors, cette variété est une sous variété hilbertienne de $\mathcal{A}^L_{\mathcal{P}}$.

$\triangle$

Chapitre 3

Transformation de Möbius et serpent hilbertien

Ce chapitre constitue essentiellement la deuxième partie de l'ensemble de nos propres contributions présentées dans [19]. En effet, il s'agit de donner une démonstration simple du théorème d'accessibilité en utilisant l'action du groupe de Möbius de la sphère unité d'un espace de Hilbert sur l'espace des configurations.

3.1 Transformations de Möbius d'un espace de Hilbert

Soient $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et $\{e_i\}_{i\in I}$ une base hilbertienne de $\mathbb{H}$ où I est l'ensemble fini $\{1,\cdots,n\}$ avec $n \geq 2$ ou $I = \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Nous notons par $<\,,\,>$ le produit scalaire de $\mathbb{H}$ et $|\,.\,|$ la norme associée. Avec ces notations, nous pouvons identifier $\mathbb{H}$ et $l^2(I)$ où tout élément $x \in \mathbb{H}$ est identifié à la suite (x_i) avec $x_i =< x, e_i >$, $i \in I$.

Soit maintenant H un hyperplan de $\mathbb{H}$. Nous pouvons toujours choisir une base hilbertienne de $\mathbb{H}$ de sorte que $\{e_i\}_{i>1}$ soit une base hilbertienne de H, $<\,,\,>$ et $|.\,|$ désignent le produit scalaire induit et la norme associée. Nous considérons l'ensemble $\widehat{\mathsf{H}} = \mathsf{H} \cup \Big\{\infty\Big\}$ muni de la topologie suivante : $U \subset \widehat{\mathsf{H}}$ est un ensemble ouvert si et seulement si $U \cap \mathsf{H}$ est un ensemble ouvert et $\mathsf{H}\backslash U$ est borné dans H, si $\infty \in U$.
Dans cette partie, nous allons rappeler les propriétés classiques des transformations de Möbius de H, pour plus de détails le lecteur peut voir [2], [3] et [14]. Nous présentons d'abord les notions suivantes.

• Soient $a \in \mathsf{H}$ et $r, t \in \mathbb{R}$ avec $r > 0$. Une sphère de Möbius dans $\widehat{\mathsf{H}}$ est, soit une sphère classique de H :

$$S(a, r) = \Big\{x \in \mathsf{H}\ : |x-a| = r\Big\}, \tag{3.1}$$

soit un hyperplan auquel on ajoute l'infini :

$$P(a, t) = \Big\{x \in \mathsf{H}\ : \langle x, a\rangle = t\Big\} \cup \Big\{\infty\Big\}. \tag{3.2}$$

• Une réflexion par rapport à une sphère de Möbius S est une transformation de $\widehat{\mathsf{H}}$ qui est soit :

$$\rho(x) = a + \frac{r^2(x-a)}{|x-a|^2}, \quad \rho(a) = \infty \text{ et } \ \rho(\infty) = a,$$

si S est de type $S(a,r)$, soit :

$$\rho(x) = x + \frac{2(t - \langle a, x\rangle)}{|a|^2}a, \ \rho(\infty) = \infty,$$

si S est de type $P(a,t)$.

• Une transformation orthogonale de H est une application linéaire $\omega : \mathsf{H} \to \mathsf{H}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathsf{H} : \qquad |\omega(x) - \omega(y)| = |x - y|.$$

• Une similitude dans $\widehat{\mathsf{H}}$ est une transformation σ telle que

$$\sigma(x) = \alpha\omega(x) + a, \ \ \rho(\infty) = \infty,$$

où ω est une transformation orthogonale de H, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathsf{H}$.

Définition 3.1.1 *(voir [14]). Une transformation de Möbius de $\widehat{\mathsf{H}}$ est une bijection de $\widehat{\mathsf{H}}$ qui est une composition d'un nombre fini de réflexions et similitudes.*

Nous avons les caractérisations suivantes.

Théorème 3.1.2 *(voir [14]).*

1. *Une bijection ϕ de $\widehat{\mathsf{H}}$ est une transformation de Möbius de $\widehat{\mathsf{H}}$ si et seulement si l'image et l'image inverse par ϕ des sphères de Möbius sont des sphères de Möbius .*
2. *Une transformation de Möbius ϕ est une similitude si et seulement si $\phi(\infty) = \infty$.*

Parmi les réflexions, il y en a une particulière qui est la réflexion par rapport à $S(0,1)$; c-à-d.

$$\rho_0(x) = \frac{x}{|x|^2}, \ \ \rho_0(0) = \infty \ \text{ et } \ \rho_0(\infty) = 0.$$

D'après [3], nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.1.3 *(voir [3]) Soit μ une transformation de Möbius. Si $\mu(S(0,1)) = S(a,r)$, alors $\mu \circ \rho_0 \circ \mu^{-1}$ est la réflexion par rapport à $S(a,r)$. Si $\mu(S(0,1)) = P(a,t) \cup \left\{\infty\right\}$, alors $\mu \circ \rho_0 \circ \mu^{-1}$ est la réflexion par rapport à $P(a,t)$.*

Considérons maintenant S une sphère de Möbius telle que

— Si $S = S(a,r)$, alors les deux sous-ensembles
$S^-(a,r) = \Big\{x \in \mathsf{H} : |x-a|^2 < r^2\Big\}$,

$S^+(a,r) = \Big\{x \in \mathsf{H} : |x-a|^2 > r^2\Big\} \cup \Big\{\infty\Big\}$,

sont appelés **les côtés** de S

— Si $S = P(a,t)$, ses deux côtés sont définis par :
$P^-(t,a) = \Big\{x \in \mathsf{H} : \langle a, x\rangle < t\Big\}$,

$P^+(t,a) = \Big\{x \in \mathsf{H} : \langle a, x\rangle > t\Big\}$.

Proposition 3.1.4 *(voir[3]) Soient S_1 et S_2 les deux côtés de la sphère de Möbius S. Si μ est une transformation de Möbius, alors $\mu(S_1)$ et $\mu(S_2)$ sont les côtés de la sphère de Möbius $\mu(S)$. De plus, si Σ est un côté de S, alors $\mu(\Sigma) = \Sigma$ implique que $\mu(S) = S$.*

Soit $\{x_1, \cdots, x_n\}$ une famille de vecteurs linéairement indépendants de H et $x \in \mathsf{H}$. Un *n-hyperplan* P_n dans H est un ensemble de type

$$\Big\{x + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \cdots, n\Big\}.$$

Une **n-sphère de Möbius** est, soit un n-hyperplan $P_n \cup \Big\{\infty\Big\}$, soit un ensemble de type $P_{n+1} \cap S(a,r)$ où P_{n+1} est un $(n+1)$-hyperplan qui contient a.

Proposition 3.1.5 *(voir [3]) Pour une transformation de Möbius, l'image d'une n-sphère de Möbius est une n-sphère de Möbius.*

A partir de ce paragraphe, nous fixons la base $\{e_i\}_{i \in I}$ de $\mathbb{H}$ et nous considérons H l'hyperplan orthogonal à e_1. Tout élément $x \in \mathbb{H}$ sera écrit comme $x = (x_1, \bar{x})$ avec $\bar{x} \in \mathsf{H}$. Notons par $\mathsf{H}^+ = \{x \in \mathbb{H}\ : x_1 > 0\}$ et remarquons que H^+ est un côté de la sphère de Möbius $\widehat{\mathsf{H}}$.

Nous désignons par $\mathfrak{M}(\mathbb{H})$ le groupe de toutes les transformations de Möbius de $\widehat{\mathbb{H}}$ tel que $\mu(\mathsf{H}^+) = \mathsf{H}^+$. Alors, de la Proposition 3.1.4, pour $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{H})$, on a $\mu(\widehat{\mathsf{H}}) = (\widehat{\mathsf{H}})$. L'inverse est également vrai ; c-à-d :

Si μ est une réflexion de $\widehat{\mathsf{H}}$ par rapport à $P(a,t)$, considérons $\tilde{\mu}$ la réflexion de $\widehat{\mathbb{H}}$ par rapport à $\hat{P}((0,a),t)$ dans $\widehat{\mathbb{H}}$.

Si μ est une réflexion de $\widehat{\mathsf{H}}$ par rapport à $S(a,r)$, considérons $\tilde{\mu}$ la réflexion de $\widehat{\mathbb{H}}$ par rapport à $\tilde{S}((0,a),r)$ dans $\widehat{\mathbb{H}}$.

Si $\mu = \alpha\omega + a$ est une similitude de $\widehat{\mathsf{H}}$, considérons $\tilde{\mu} = \alpha\tilde{\omega} + (0,a)$ la similitude dans $\widehat{\mathbb{H}}$ où $\tilde{\omega}_{|\mathsf{H}} = \omega$ et $\tilde{\omega}(e_1) = e_1$.

Dans tous les cas, $\tilde{\mu}$ préserve H^+ et H. Il s'ensuit que le groupe $\mathfrak{M}(\mathsf{H})$ des transformations de Möbius de $\widehat{\mathsf{H}}$ est isomorphe à $\mathfrak{M}(\mathbb{H})$.

D'autre part, sur $\mathbb{H}$, nous considérons la distance hyperbolique δ donnée dans [3]

$$\cosh\delta(x,y) = \sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2} - < x, y > \ \text{ et } \delta(x,y) \geq 0.$$

Nous donnons la définition suivante.

Définition 3.1.6 *Une bijection ϕ de $\mathbb{H}$ est appelée une transformation hyperbolique si on a*

$$\delta(\phi(x),\phi(y)) = \delta(x,y) \text{ , pour tout } x, y \in \mathbb{H}.$$

Considérons le difféomorphisme $h : \mathsf{H}^+ \to \mathbb{H}$ défini par

$$h(x_1,\bar{x}) = \Big(\frac{|x|^2-1}{2x_1}, \frac{\bar{x}}{x_1}\Big).$$

Le lien entre les transformations hyperboliques et les transformations de Möbius est donné dans le résultat suivant.

Théorème 3.1.7 *(voir [4])*

1. *Le groupe $\mathfrak{G}(\mathbb{H})$ des transformations hyperboliques de $\mathbb{H}$ est l'ensemble*

$$\{\phi = h \circ \mu \circ h^{-1}, \ : \mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{H})\}.$$

2. *Toute application $\phi \in \mathfrak{G}(\mathbb{H})$ peut s'écrire comme une similitude β ou bien comme un produit $\alpha \circ \rho_0 \circ \beta$ avec*
   (i) $\alpha(x) = kx + v$ où $k > 0$, $v \in \mathsf{H}$,
   (ii) $\beta = k'\omega(x) + v'$ avec $k' > 0$, $v' \in \mathsf{H}$, ω une transformatin orthogonale de $\mathbb{H}$ telle que $\omega(v') = v'$.

A partir de maintenant, nous identifions les groupes $\mathfrak{M}(\mathbb{H})$ et $\mathfrak{G}(\mathbb{H})$.

Remarque 3.1.8

1. D'après [4], le couple $(\mathsf{H}^+, \mathfrak{M}(\mathbb{H}))$ est appelé le modèle de Poincaré de la géométrie hyperbolique. En effet, soit $g_{\mathsf{H}^+} = \frac{1}{x_1} g$ la métrique conforme à la métrique riemmanienne canonique où g est induite par le produit scalaire $< , >$ de $\mathbb{H}$. Alors, l'application $h : (\mathsf{H}^+, g_{\mathsf{H}^+}) \to (\mathbb{H}, \delta)$ est une isométrie.
2. Si $\mathbb{H}$ est de dimension finie, toute isométrie est une bijection mais cette propriété n'est pas vraie en général si $\mathbb{H}$ est de dimension infinie (voir [3]).

3.2 Transformations de Möbius et groupe de Lorentz

Dans cette section, on considère l'espace $\mathcal{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}$. La base $\{e_i\}_{i\in I}$ est fixée et H est l'orthogonal de e_1 dans $\mathbb{H}$. Nous définissons sur $\mathcal{H}$ le produit lorentzien suivant

$$< (s, x), (t, y) >_L = < x, y > -st.$$

Notons donc par $|\ \ |_L$ la pseudo-norme associée et par $\mathcal{K}$ *le cône lumière*; c-à-d. l'ensemble $\mathcal{K} = \{u = (s, x) \in \mathcal{H} \ :< u, u >_L = 0\}$.
Soit $\mathcal{K}^+ = \{u = (s, x) \in \mathcal{K} \ : s > 0\}$.

Définition 3.2.1 *Une bijection λ de $\mathcal{H}$ est dite transformation de Lorentz si*

$$\forall u, v \in \mathcal{H},\ |\lambda(u) - \lambda(v)|_L = |u - v|_L.$$

D'autre part, nous considérons l'hyperboloïd $\mathcal{H}_1 = \{u = (s, x) \in \mathcal{H} \ : |u|_L^2 = -1, \ \}$ et son cône positif de type temps $\mathcal{H}_1^+ = \{u = (s, x) \in \mathcal{H}_1 \ : s > 0 \ \}$. Soit $g : \mathbb{H} \to \mathcal{H}_1^+$ une bijection définie par : $g(x) = (\sqrt{1 + |x|^2}, x)$.
Le lien entre les transformations de Lorentz et les transformations hyperboliques de $\mathbb{H}$ est donné par le théorème suivant (voir [3])

Théorème 3.2.2 *Soit ϕ une transformation hyperbolique, alors il existe une unique transformation de Lorentz $\lambda = \tau(\phi)$ telle que*

$$\lambda(0) = 0 \ , \ \lambda(\mathcal{H}_1^+) = \mathcal{H}_1^+ \ et \quad g(\phi(x)) = \lambda(g(x)), \ \ \forall x \in \mathbb{H}$$

De plus, la restriction à $\mathcal{H}_1^+$ de la transformation de Lorentz $\tau(\phi)$ associée à ϕ est *donnée par*

$$\tau(\phi)_{|\mathcal{H}_1^+} = g \circ \phi \circ g^{-1}.$$

De ce résultat, la transformation de Lorentz de type $\lambda = \tau(\phi)$, où ϕ est une transformation hyperbolique, est une application linéaire qui sera appelée la transformation de *Lorentz orthochrone*.

Notons par $O(\mathbb{H}, 1)$ le groupe de toutes les transformations linéaires de Lorentz. L'ensemble $SO(\mathbb{H}, 1)$ des transformations linéaires de Lorentz λ telle que $\lambda(\mathcal{K}^+) = \mathcal{K}^+$ est un sous-groupe de $O(\mathbb{H}, 1)$ et l'ensemble $SO_0(\mathbb{H}, 1)$ des applications linéaires orthochrones de Lorentz est un sous-groupe de $SO(\mathbb{H}, 1)$. De plus, d'après le Théorème 3.1.7, la Remarque 3.1.8 et le Théorème 3.2.2, il existe un isomorphisme naturel $\mathcal{L}$ entre le groupe de transformations de Möbius $\mathfrak{M}(\mathbb{H})$ et le groupe $SO_0(\mathbb{H}, 1)$. Plus précisément, on a

$$\mathcal{L}(\lambda) = (g \circ h)^{-1} \circ \lambda_{|\mathcal{H}_1^+} \circ (g \circ h)$$

En effet, comme $\mathcal{H}_1^+ = \{(s, x) \in \mathcal{H} \text{ tel que } s = \sqrt{1 + |x|^2}\}$, cela implique que $\mathcal{H}_1^+$ est une hypersurface. On restreint le produit lorentzien à $\mathcal{H}_1^+$ on trouve que

$$< (s, x), (t, y) >_L = < x, y > - \sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}.$$

Donc, la restriction à $\mathcal{H}_1^+$, $\cosh \delta(s, x), (t, y) = - < (s, x), (t, y) >_L$ définit une distance hyperbolique. L'application $g(x) = (\sqrt{1 + |x|^2}, x)$ est un difféomorphisme de $\mathbb{H}$ à $\mathcal{H}_1^+$ qui est une isométrie. D'après le Théorème 3.1.7 et le Théorème 3.2.2, on obtient une identification du groupe $\mathfrak{M}(\mathbb{H})$ au groupe de la restriction à $\mathcal{H}_1^+$ des éléments de $SO_0(\mathbb{H}, 1)$.

Nous terminons ce paragraphe en rappelant une caractérisation du groupe $SO(\mathbb{H}, 1)$ et de son algèbre de Lie (voir [8] et [14]) où nous adoptons la présentation de [14].

D'après la décomposition $\mathcal{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}$, en prenant p_1 (resp. p_2) la projection naturelle de $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{H}$), toute application linéaire continue A de $\mathcal{H}$ peut s'écrire sous la forme matricielle évidente

$$\begin{pmatrix} c & [v]^* \\ [u] & B \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

où $c = p_1(A(1, 0))$, $B = p_2 \circ A_{|\mathbb{H}}$ et u (resp. v) est un élément de $\mathbb{H}$ tel que $p_2 \circ A(1, 0) = u$ et $[u](s) = su$ (resp. $p_1 \circ A(0, x) =< v, x >$ et $[v]^*(x) =< v, x >$).

Soit J l'endomorphisme continu de $\mathcal{H}$ défini par $J(s,x) = (-s,x)$. Etant donné un endomorphisme continu A de $\mathcal{H}$, son pseudo-adjoint $A^\#$ est un endomorphisme continu caractérisé par

$$< Au, v >_L = < u, A^\# v >_L, \text{ pour tout } u, v \in \mathcal{H}.$$

Donc, A appartient à $O(\mathbb{H},1)$ (resp. $SO(\mathbb{H},1)$) si et seulement si $A^\# A = Id$ (resp. $A^\# A = Id$ et $A^\# \in SO(\mathbb{H},1)$).

De la forme matricielle (3.3), $A^\#$ a une forme matricielle du type

$$\begin{pmatrix} c & -[u]^* \\ -[v] & B^* \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

où B^* est l'endomorphisme adjoint (dans $\mathbb{H}$) de B. Donc, A appartient à $O(\mathbb{H},1)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} c & -[u]^* \\ -[v] & B^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & [v]^* \\ [u] & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

où Id est l'identité de $\mathbb{H}$. De plus, un élément $A \in O(\mathbb{H},1)$ appartient à $SO(\mathbb{H},1)$ si et seulement si $c > 0$ (voir [14]).
Le résultat suivant est classique en dimension finie et en dimension infinie il peut être trouvé dans [3] ou [14].

Proposition 3.2.3 *Soit $A \in O(\mathbb{H},1)$. Alors, il existe $v \in \mathbb{H}$ avec $v \neq 0$; tel que A a la décomposition suivante*

$$A = PT, \tag{3.6}$$

où $P = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = Q^*$, $\varepsilon = \pm 1$ et T est tel que :
si H_v est l'orthogonal de $\mathbb{R}.v$ dans $\mathbb{H}$ alors $T_{|\mathsf{H}_v} = Id_{\mathsf{H}_v}$ et $T(\mathbb{R}.v \oplus \mathbb{R}) = \mathbb{R}.v \oplus \mathbb{R}$. De plus, il existe $\alpha \geq 0$ tel que les valeurs propres de $T_{|\mathbb{R}.v\oplus\mathbb{R}}$ sont e^α et $e^{-\alpha}$ avec les vecteurs propres associés $(\frac{v}{|v|}, 1)$ et $(\frac{v}{|v|}, -1)$ respectivement.

Notons que, dans la décomposition précédente, T est appelé *boost de Lorentz* . Il est caractérisé par $v \in \mathbb{H}$ et $\alpha > 0$, donc il sera noté par $B_{v,\alpha}$. D'après le théorème 3.2.2, T est associé à une *translation hyperbolique* générée par v. (voir [3]). Notons que si $\{u_i\}_{i\in I, i>1}$ est une base orthonormale de H_v et que si Q l'isométrie linéaire dans $\mathbb{H}$ telle que $Q(e_1) = \frac{v}{|v|}$ et $Q(e_i) = u_i, i \in I, i > 1$, alors

$$B_{v,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 \\ 0 & 0 & Id_{\mathsf{H}_v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^* \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Donc, on obtient le corollaire suivant (voir [3]).

Corollaire 3.2.4
Pour tout $A \in O(\mathbb{H}, 1)$, il existe Q et Q' dans $SO(\mathbb{H})$ et $\alpha > 0$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & Q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 \\ 0 & 0 & Id_{\mathsf{H}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^* \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.2.5 D'après [3] et avec les identifications ci-dessus, tout boost est une translation hyperbolique. De plus, comme en dimension finie et dans l'espace métrique $(\mathsf{H}^+, g_{\mathsf{H}^+})$ (voir Remarque 3.1.8 (1)), tout boost $B_{e_1,\alpha}$ correspond à l'homothétie $x \mapsto e^\alpha.x$ dans H^+ et donc à la transformation de Möbius $x \mapsto e^\alpha.x$ dans $\widehat{\mathsf{H}}$.

La démonstration de la proposition 3.2.3 est une adaptation pour notre contexte du résultat comparable en dimension finie de [8].

Démonstration de la Proposition 3.2.3 : D'après (3.3), (3.4)et (3.5), on a

$$B^*B = Id_{\mathbb{H}} + [v][v]^*, \quad [u]^*[u] = c^2 - 1, \quad [u]^*B = c[v]^*, \quad B^*u = cv,$$

et

$$BB^* = Id_{\mathbb{H}} + [u][u]^*, \quad [v]^*[v] = c^2 - 1, \quad [v]^*B = c[u]^* \text{ et } \quad Bv = cu.$$

Comme $[v]^*[v] = |v|^2$, nous obtenons, d'une part, $c^2 = 1 + |v|^2$, $c^2 = 1 + |u|^2$ et en particulier $u \neq 0$. D'autre part, le noyau de $[v][v]^*$ est l'orthogonal H_v de $\mathbb{R}.v$ dans $\mathbb{H}$. Il s'ensuit que la restriction de $[v][v]^*$ à H_v est zéro et la restriction de $[v][v]^*$ à $\mathbb{R}.v$ satisfait : $[v][v]^*(v) = |v|^2.v = (c^2 - 1)v$.

On déduit que $(Id_{\mathbb{H}} + [v][v]^*)_{|\mathsf{H}_v} = Id_{\mathsf{H}_v}$ et que v est un vecteur propre de $Id_{\mathbb{H}} + [v][v]^*$ associé à la valeur propre c^2 de multiplicité 1. D'après le théorème de la décomposition polaire dans un espace de Hilbert, il existe une isométrie linéaire Q de $\mathbb{H}$ et un opérateur auto-adjoint défini positif S (sur $\mathbb{H}$) tels que $B = QS$.
De plus, on a $B^*B = S^2$ et donc $S_{|\mathsf{H}_v} = Id_{\mathsf{H}_v}$ et $S(v) = \pm cv$. Nous pouvons supposer que cette valeur propre c est positive après un éventuel changement de c par $-c$. Alors, on a $S(v) = cv$.
Supposons d'abord que $c > 0$. Comme $Bv = cu$, alors $QS(v) = cQ(v) = cu$ et donc $Q(v) = u$. On obtient

$$\begin{pmatrix} c & [v]^* \\ [u] & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & [v]^* \\ Qv & QS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & [v]^* \\ [v] & S \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

avec $c = \sqrt{|v|^2+1}$ et $\varepsilon = 1$. Posons $T = \begin{pmatrix} c & [v]^* \\ [v] & S \end{pmatrix}$.

Si $c < 0$, par un argument analogue a celui utilisé dans le cas précédent, nous obtenons la décomposition (3.8) mais avec $\varepsilon = -1$.
La restriction de T à H_v est Id_{H_v} et $T(\mathbb{R}.v \oplus \mathbb{R}) = \mathbb{R}.v \oplus \mathbb{R}$ (dans $\mathcal{H}$). Par les mêmes arguments utilisés dans la démonstration de la Proposition 2.4 de [8], nous terminons la démonstration de la Proposition 3.2.3. △

Dans la suite, nous notons par $\sqrt{Id_{\mathbb{H}} + [v][v]^*}$ l'opérateur S et donc on a

$$T = \begin{pmatrix} c & [v]^* \\ [v] & \sqrt{Id_{\mathbb{H}} + [v][v]^*} \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & [v]^* \\ [v] & \sqrt{Id_{\mathbb{H}} + [v][v]^*} \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Supposons maintenant que $I = \{1, \cdots, n\}$. De la Proposition 3.2.3 (voir [8]), toute matrice $A \in O(n,1)$ peut s'écrire comme un produit de matrices de type

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & [v]^* \\ [v] & \sqrt{Id_n + [v].[v]^*} \end{pmatrix},$$

où Q appartient à $O(n)$, $[v]$ est un vecteur colonne de $\mathbb{H}$, $c = \sqrt{|v|^2+1}$ et $\varepsilon = \pm 1$.
Le groupe de Lie $O(n,1)$ a quatre composantes connexes, et de la décomposition précédente, nous avons $\det Q = \pm 1$ et $\varepsilon = \pm 1$. Le groupe de transformations de Lorentz $SO(n,1)$ est le groupe correspondant à $\det Q = \varepsilon = \pm 1$. D'après la propo-

sition précédente et le Théorème 3.1.7, le groupe $\mathfrak{M}(\mathsf{H})$ est isomorphe à $SO(n,1)$ et donc le groupe $\mathfrak{M}^+(\mathsf{H})$ qui préserve l'orientation est isomorphe à $SO_0(n,1)$, la composante connexe de l'identité de $SO(n,1)$, qui est le sous-groupe correspondant au cas où $\det Q = \varepsilon = 1$.
D'autre part (voir [8]), l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n,1)$ de $SO_0(n,1)$ est l'ensemble des matrices de type

$$\begin{pmatrix} 0 & [u]^* \\ [u] & B \end{pmatrix},$$

où B est une matrice carrée de dimension n telle que $B^* = -B$. Nous avons donc une décomposition naturelle

$$\mathfrak{so}(n,1) = \mathfrak{h}_n \oplus \mathfrak{s}_n,$$

où

$$\mathfrak{h}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & [u]^* \\ [u] & 0 \end{pmatrix} \text{ où } [u] \text{ vecteur colonne de } \mathbb{R}^n \right\},$$

$$\mathfrak{s}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \; B^* = -B \right\}.$$

L'espace vectoriel $\mathfrak{h}_n$ est engendré par $U_i = \begin{pmatrix} 0 & [e_i]^* \\ [e_i] & 0 \end{pmatrix}$, pour $i = 1, \cdots, n$ et $\mathfrak{s}_n$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{so}(n,1)$ engendrée par $\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega_{ij} \end{pmatrix}$ $1 \leq i < j \leq n$, où ω_{ij} est la matrice $(a_{\alpha\beta})$ avec

$$\begin{cases} a_{\alpha\beta} = 0 & \text{si} \quad (\alpha\beta) \neq (ij) \\ a_{\alpha\beta} = 1, a_{\beta\alpha} = -1 & \text{si} \quad (\alpha\beta) = (ij) \end{cases}$$

Remarque 3.2.6

1. Quand $I = \mathbb{N}$, le groupe $O(\mathbb{H}, 1)$ est un sous-groupe de Lie du groupe $GL(\mathcal{H})$ d'automorphismes continus de $\mathcal{H}$. Cependant, ce groupe a seulement deux composantes connexes et en particulier $SO_0(\mathbb{H}, 1) = SO(\mathbb{H}, 1)$.
   D'autre part, dans la décomposition 3.9, T appartient à $SO(\mathbb{H}, 1)$ donc A donné dans (3.9) appartient à $SO(\mathbb{H}, 1)$ si et seulement si $\varepsilon = 1$.
   L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(\mathbb{H}, 1)$ de $SO(\mathbb{H}, 1)$ a aussi une décomposition de type $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s}$ avec $\mathfrak{h}$ l'ensemble des endomorphismes de type $\begin{pmatrix} 0 & [u]^* \\ [u] & 0 \end{pmatrix}$ où $u \in \mathbb{H}$ et $\mathfrak{s}$ est

une algèbre de Lie de l'ensemble des endomorphismes de type $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $B^* = -B$. En effet, $\mathfrak{s}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe d'isométries linéaires de $\mathbb{H}$ (voir [14]).

2. Considérons l'application exponentielle : $\text{Exp} : \mathfrak{so}(\mathbb{H}, 1) \to SO(\mathbb{H}, 1)$.
Quand $I = \{1, \cdots, n\}$, tout boost T peut s'écrire comme $\text{Exp}(U)$, avec $U \in \mathfrak{h}_n$ (voir [8]).
D'autre part, tout $P \in SO(n)$ peut aussi s'écrire comme $\text{Exp}(\Omega)$ où Ω est élément de l'algèbre de Lie de $SO(n)$. Cela implique que, tout élément de $SO(n, 1)$ peut s'écrire $\text{Exp}(\Omega)\text{Exp}(U)$ pour $\Omega \in \mathfrak{s}_n$ et $U \in \mathfrak{h}_n$. Malheureusement, Ω et U ne commutent pas et donc $\text{Exp}(\Omega)\text{Exp}(U) \neq \text{Exp}(\Omega + U)$ et nous n'avons pas la surjectivité de Exp. Cependant, $\text{Exp} : \mathfrak{so}(n, 1) \to SO_0(n, 1)$ est surjective (voir [8], section 4.5).

3.3 Groupe de Möbius-Hilbert-Schmidt de la sphère unité de $\mathbb{H}$

3.3.1 Groupe de Hilbert-Schmidt des transformations de Lorentz orthochrones

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert. Nous rappelons d'abord les résultats de [10] concernant les sous-algèbres de Lie particulières de l'algèbre de Lie $L(\mathbb{H})$ des opérateurs bornés de $\mathbb{H}$.

Soit $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-groupes de Lie connexes de dimension finie de $GL(\mathbb{H})$ tels que

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset \cdots \subset GL(\mathbb{H}),$$

où $GL(\mathbb{H})$ est le groupe des opérateurs bornés inversibles Soit $\mathfrak{g}_n$ L'algèbre de Lie de G_n et $\mathfrak{g} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{g}_n$. Alors, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie.

Hypothèses 3.3.1 *Il existe un sous-espace $\mathfrak{g}_\infty$ dans $L(\mathbb{H})$ contenant $\mathfrak{g}$ tel que le produit scalaire $<\,,\,>$ sur $\mathfrak{g}$ peut se prolonger en un produit scalaire $<\,,\,>$ sur $\mathfrak{g}_\infty$*

qui est complet pour la norme associée $|\ .\ |$ *et telle que* $\mathfrak{g}$ *est dense dans* $\mathfrak{g}_\infty$. *En outre, on suppose que* $\mathfrak{g}_\infty$ *est stable par le crochet de Lie de* $L(\mathbb{H})$ *et qu'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$|[A, B]| \leq C|A|.|B|. \tag{3.10}$$

Soit $C^1_{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des chemins γ, C^1 par morceaux de $[0, 1]$ dans la variété banachique $GL(\mathbb{H})$ tels que
$\gamma' = \gamma^{-1} \circ \dot{\gamma}$ appartient à $\mathfrak{g}_\infty$ et γ' est continu par morceaux pour la norme $|\ .|$ (sur $\mathfrak{g}_\infty$).
Sur $GL(\mathbb{H})$, nous définissons

$$d(A, B) = \inf \left\{ \int_0^1 |\gamma'(s)| ds \ :\ \gamma \in C^1_{\mathfrak{g}} \ \text{ tel que } \ \gamma(0) = A,\ \gamma(1) = B \right\},$$
$$d(A, B) = \infty \text{ s'il n'existe pas de } \gamma \in C^1_{\mathfrak{g}} \ \text{ tel que } \gamma(0) = A,\ \gamma(1) = B.$$

Théorème 3.3.1 *(voir [10]). Sous les hypothèses précédentes, nous avons :*

1. *Soit* $G_\infty = \{A \in GL(\mathbb{H})\ : d(A, Id_{\mathbb{H}}) < \infty\}$. *Alors,* G_∞ *est un sous-groupe de* $GL(\mathbb{H})$ *et* d *est une distance invariante à gauche sur cet ensemble.*
2. *Pour la topologie associée à* d, *le groupe* G_∞ *est fermé et le groupe* $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ *est dense dans* G_∞.
3. *Soit* d_n *la distance associée à la norme* $|\ |$ *sur* g_n. *Alors la distance* $d_\infty = \inf_{n\in\mathbb{N}} d_n$ *sur* G *coïncide avec la restriction de* d.
4. *L'application exponentielle* $\mathrm{Exp} : \mathfrak{g}_\infty \to G_\infty$ *est un difféomorphisme local en* 0 *dans* $\mathfrak{g}_\infty$.

En particulier, G_∞ *est un groupe de Lie modelé sur l'espace de Hilbert* $\mathfrak{g}_\infty$.

Le groupe G_∞ est appelé un **groupe de Cameron-Martin** (voir [10]).

A partir de ce paragraphe jusqu'à la fain de ce chapitre, nous fixons une base hilbertienne $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ de $\mathbb{H}$ et $\mathcal{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}$ est muni du produit scalaire hilbertien

$$< (s, x), (t, y) >= st+ < x, y > .$$

Nous pouvons identifier $\mathcal{H}$ à $l^2(\mathbb{N})$. Soit $L_{HS}(\mathcal{H})$ le sous-espace des opérateurs de

Hilbert-Schmidt de $\mathcal{H}$ donné par

$$L_{HS}(\mathcal{H}) = \Big\{ \mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ \text{ tel que } \sum_{\mathrm{i}\in\mathbb{N}} |\mathrm{Ae_i}|^2 < \infty \Big\}.$$

Rappelons que, sur $L_{HS}(\mathcal{H})$, nous avons un produit scalaire

$$< A, B >_{HS} = \sum_{i\in\mathbb{N}} < Ae_i, Be_i >,$$

sa norme associée est

$$|A|_{HS} = (\sum_{i\in\mathbb{N}} |Ae_i|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Notons que $L_{HS}(\mathcal{H})$ est un espace de Hilbert.
On peut considérer chaque opérateur $A \in L_{HS}(\mathcal{H})$ comme une matrice infinie $A = ((a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}})$ telle que $\sum_{i,j\in\mathbb{N}} |a_{ij}|^2 < \infty$. Par conséquent, si e_{ij} désigne la matrice infinie définie par

$$a_{ij} = 1 \text{ et les autres terms sont nuls,}$$

on obtient une base orthonormale $\{e_{ij}\}$ de $L_{HS}(\mathcal{H})$ (relativement au produit scalaire $< \, , \, >_{HS}$). Notons que $L_{HS}(\mathcal{H})$ est une algèbre de Banach (sans unité) pour la norme $| \, |_{HS}$ (voir [21]). Dans le groupe de Lie banachique $GL(\mathcal{H})$ des opérateurs inversibles bornés, le groupe général de Hilbert-Schmidt est

$$GL_{HS}(\mathcal{H}) = \{U \in L(\mathcal{H}) \text{ tel que } Id_{\mathcal{H}} - U \in L_{HS}(\mathcal{H})\}.$$

D'autre part, notons par $\mathbb{H}_n$ l'espace vectoriel engendré par $\{e_1, \cdots, e_n\}$ et par $\mathcal{H}_n$ l'espace vectoriel $\mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_n$.
Maintenant, on peut identifier $L(\mathcal{H}_n)$ à l'ensemble

$$L_n(\mathcal{H}) = \{A \in L_{HS}(\mathcal{H}) \ : \mathcal{H}_n^{\perp} \subset \ker A \text{ et } ImA \subset \mathcal{H}_n\}.$$

Comme $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_{n+1}$, on a $\mathcal{H}_{n+1}^{\perp} \subset \mathcal{H}_n^{\perp}$. Donc, si $A \in L_n(\mathcal{H})$, alors A appartient à $L_{n+1}(\mathcal{H})$. On obtient une famille ascendante

$$L_1(\mathcal{H}) \subset L_2(\mathcal{H}) \subset \cdots \subset L_n(\mathcal{H}) \subset \cdots \subset L_{HS}(\mathcal{H}) \subset L(\mathcal{H}). \tag{3.11}$$

De la même manière, on peut identifier $GL(\mathcal{H}_n)$ à l'ensemble

$$GL_n(\mathcal{H}) = \left\{ A \in GL_{HS}(\mathcal{H}) \text{ de type } \begin{pmatrix} Id_{\mathcal{H}_n^\perp} & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix} \bar{A} \in GL(\mathcal{H}_n) \right\}$$

En utilisant les même arguments, on aura également une famille ascendante

$$GL_1(\mathcal{H}) \subset GL_2(\mathcal{H}) \subset \cdots \subset GL_n(\mathcal{H}) \subset \cdots \subset GL_{HS}(\mathcal{H}) \subset GL(\mathcal{H}). \tag{3.12}$$

Si A appartient à $GL_{HS}(\mathcal{H})$, alors le déterminant de A est bien défini et $\det(A) \neq 0$. De plus, d'après la construction précédente, tout élément $A \in GL_{HS}(\mathcal{H})$ induit d'une manière naturelle un endomorphisme $A_n \in GL_n(\mathcal{H})$. On aura donc (voir [23])

$$\det(A) = \lim_{n\to\infty} \det(A_n). \tag{3.13}$$

Maintenant, modulo l'identification précédente et selon la section 3.2, la famille $(\mathfrak{so}(n,1)))_{n\in\mathbb{N}}$ devient une famille des sous-algèbres de Lie de $L_{HS}(\mathcal{H})$ et la famille des groupes de Lie $(SO_0(n,1))_{n\in\mathbb{N}}$ devient une famille ascendante des sous-groupes de Lie de $GL(\mathcal{H})$ dont les algèbres de Lie est la famille $(\mathfrak{so}(n,1)))_{n\in\mathbb{N}}$.

De la fin de la sous-section 3.2 et des notations précédentes, soient $U_i \in L_{HS}(\mathcal{H})$ tel que $U_i = e_{0i} + e_{i0}$ pour $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\Omega_{ij} = e_{ij} - e_{ji}$ pour $0 < i < j, \ , i, j \in \mathbb{N}$. On note par $\mathfrak{h}_\infty \subset L_{HS}(\mathcal{H})$ l'espace de Hilbert engendré par $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ et par $\mathfrak{s}_\infty \subset L_{HS}(\mathcal{H})$ l'espace de Hilbert engendré par $\{\Omega_{ij}\}_{0<i<j,\ ,i,j\in\mathbb{N}}$ et posons $\mathfrak{g}_\infty = \mathfrak{h}_\infty \oplus \mathfrak{s}_\infty$. D'après l'identification de $L(\mathcal{H}_n)$ à $L_n(\mathcal{H})$, on peut considérer $\mathfrak{so}(n,1)$ comme un sous-espace de $\mathfrak{g}_\infty$.

Donc, du Théorème 3.3.1, on obtient :

Proposition 3.3.2

1. *L'espace vectoriel $\mathfrak{g}_\infty$ est la clôture de $\mathfrak{g} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{so}(n,1)$ dans $L_{HS}(\mathcal{H})$. En outre, $\mathfrak{g}_\infty$ est un sous-algèbre de Lie de $L_{HS}(\mathcal{H})$ qui satisfait l'hypothèse 3.3.1.*

2. *Le groupe de Cameron-Martin G_∞ associé à la suite ascendante $(SO_0(n,1))_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L(\mathcal{H})$ est un sous-groupe de Lie de $GL_{HS}(\mathcal{H})$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} SO_0(n,1)$ est dense dans G_∞. En outre, $\mathfrak{g}_\infty$ est l'algèbre de Lie de G_∞.*

3. *Tout élément A de G_∞ peut s'écrire $A = PT$ où T est un boost*

et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ *avec* $Q^{-1} = Q^*$ *et* $\det(Q) = 1$. *En particulier,* $SO(\mathbb{H}, 1) \cap GL_{HS}(\mathcal{H})$ *a deux composantes connexes et* G_∞ *est la composante connexe de* $Id_{\mathcal{H}}$.

4. *L'application* $\mathrm{Exp} : \mathfrak{g}_\infty \to G_\infty$ *est un difféomorphisme local en* $0 \in \mathfrak{g}_\infty$ *et elle est surjective.*

Remarque 3.3.3 Notons que le groupe de Lie $SO(\mathbb{H}, 1)$ est connexe (voir Remarque 3.2.6, partie 1), alors que $SO(\mathbb{H}, 1) \cap GL_{HS}(\mathcal{H})$ a deux composantes connexes.

Définition 3.3.4 *Le sous-groupe* G_∞ *de* $SO(\mathbb{H}, 1)$ *construit dans la proposition 3.3.2 est appelé le groupe de Lorentz orthochrone de Hilbert-Schmidt qui sera noté* $SO_{HS}(\mathbb{H}, 1)$. *L'algèbre de Lie correspondante* $\mathfrak{g}_\infty$ *sera notée* $\mathfrak{so}_{HS}(\mathbb{H}, 1)$.

Dans la suite de ce travail, nous noterons simplement par $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{s}$) tout sous-espace $\mathfrak{h}_\infty \subset \mathfrak{g}_\infty$ (resp. $\mathfrak{s}_\infty \subset \mathfrak{g}_\infty$). On obtient

$$\mathfrak{so}_{HS}(\mathbb{H}, 1) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s}. \tag{3.14}$$

Si nous considérons maintenant l'isomorphisme naturel $\mathcal{L} : SO(\mathbb{H}, 1) \to \mathfrak{M}(\mathbb{H})$ (voir la sous-section 3.2), on obtient un sous-groupe $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{H}) = \mathcal{L}(SO_{HS}(\mathbb{H}, 1))$ de $\mathfrak{M}(\mathbb{H})$. Dans ce cas, $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{H})$ peut être muni d'une structure de groupe de Lie et son algèbre de Lie $\mathfrak{m}_{HS}(\mathbb{H})$ est isomorphe à $\mathfrak{so}_{HS}(\mathbb{H}, 1)$.

Définition 3.3.5 *Le groupe* $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{H})$ *est appelé le groupe des transformations de Möbius- Hilbert-Schmidt de* $\mathbb{H}$.

En dimension finie, dans [9], les auteurs donnent une description complète de l'application $\mathrm{Exp} : \mathfrak{so}(n) \to SO(n)$. En utilisant des résultats similaires dans le contexte d'un espace de Hilbert de dimension infinie, on obtient le théorème suivant.

Théorème 3.3.6 *Considérons l'application* $\mathrm{Exp} : \mathfrak{so}_{HS}(\mathbb{H}, 1) \to SO_{HS}(\mathbb{H}, 1)$ *et fixons un certain élément* $A = PT \in SO_{HS}(\mathbb{H}, 1)$. *D'après (3.14), il existe* $U \in \mathfrak{h}$, *une famille* $B_j \in \mathfrak{s}$ *des opérateurs de rang fini et une suite non croissante* $(\theta_j)_{j \in J}$ *de nombres réels avec* $J \subset \mathbb{N}$, $0 < \theta_j \leq \pi$ *ayant les propriétés suivantes :*

(i) $[B_k, B_j] = 0$, *pour* $k \neq j$.

(ii) $A = \prod_{j\in J} Exp(\theta_j B_j)Exp(U)$.

Comme la démonstration du Théorème 3.3.6 est technique et n'a pas de relation directe avec le contexte des transformation de Möbius, nous donnerons sa démonstration dans l'annexe B.1.

Démonstration de la Proposition 3.3.2. D'après le Théorème 3.3.1, il suffit de prouver que $\mathfrak{g}_\infty$ satisfait l'hypothèse 3.3.1. Tout d'abord, par construction et comme $\mathfrak{so}(n,1)$ est un sous-ensemble de $L_n(\mathcal{H})$ pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\mathfrak{so}(n,1)$ est engendrée par $\{U_i\}_{1\leq i\leq n}, \{\Omega_{ij}\}_{1<i<j\leq n}$, donc $\mathfrak{g} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{so}(n,1)$ est dense dans $\mathfrak{g}_\infty$.
Aussi, par construction, le produit scalaire naturel sur $L_n(\mathcal{H})$ est isométrique au produit scalaire canonique de $L(\mathcal{H}_n)$. Alors $\{e_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est la base orthonormée canonique. Il en résulte que $\mathfrak{g}_\infty$ est un sous-espace fermé de $L_{HS}(\mathcal{H})$ muni d'un produit scalaire qui prolonge le produit scalaire sur chaque $\mathfrak{so}(n,1)$. D'autre part, par un calcul élémentaire, on obtient les relations suivantes.

$$[U_i, U_j] = \Omega_{jk},\ [U_i, \Omega_{jl}] = \delta_{ij}U_l - \delta_{il}U_j,\ [\Omega_{ij}, \Omega_{kl}] = \delta_{il}\Omega_{jk} + \delta_{jk}\Omega_{il} - \delta_{ik}\Omega_{jl} - \delta_{jl}\Omega_{ik} \tag{3.15}$$

Donc, $\mathfrak{g}_\infty$ est stable par le crochet de Lie de $L_{HS}(\mathcal{H})$. Il reste à montrer que la relation (3.10) est satisfaite pour tout A et B dans $\mathfrak{g}_\infty$. De (3.15), de la définition de U_i, Ω_{ij} et du fait que $\{e_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée dans $L_{HS}(\mathcal{H})$, nous avons les majorations suivantes.

$$||[U_i, U_j]||_{HS} \leq 2, \qquad ||[U_i, \Omega_{jk}]||_{HS} \leq 4 \qquad ||[\Omega_{ij}, \Omega_{kl}]||_{HS} \leq 8. \tag{3.16}$$

Maintenant, tout $A \in \mathfrak{g}_\infty$ peut s'écrire (en utilisant la convention d'Einstein)

$$A = u^i U_i + a^{ij}\Omega_{ij},$$

donc, $|A|^2_{HS} = 2(\sum_{i\in\mathbb{N}}(u^i)^2 + \sum_{0\leq i<j, i,j\in\mathbb{N}}(a^{ij})^2)$. Selon la bi-linéarité de [,], les relations (3.15) et (3.16), on obtient facilement une relation de type (3.10) pour le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}_\infty$.
Les autres propriétés dans (1) et (2) sont des conséquences directes du Théorème 3.3.1.

Tout $M \in GL_{HS}(\mathcal{H})$ induit un élément naturel $M_n \in GL_n(\mathcal{H})$ et, bien sûr, $GL_{HS}(\mathcal{H})$ est le groupe de Cameron-Martin associé à la famille ascendante (3.12). En particulier, d'après les notations du Théorème 3.3.1, on a

$$\lim_{n\to\infty} d_\infty(M, M_n) = 0. \tag{3.17}$$

Soit $A \in G_\infty$, comme $G_\infty \subset SO(\mathbb{H}, 1)$ et de la Proposition 3.2.3 , on peut écrire $A = PT$ où T est un boost et $P = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ avec $Q^{-1} = Q^*$. Avec la convention précédente et pour chaque n, on a $A_n = P_n T_n$ où T_n est un boost dans $\mathcal{H}_n$ et $P_n = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & Q_n \end{pmatrix}$ avec $(Q_n)^{-1} = (Q_n)^*$. Par construction de G_∞, A_n appartient à $SO_0(n, 1)$ et, par conséquent, $\varepsilon = 1$ et $\det(Q_n) = 1$. De (3.17), on doit avoir $\varepsilon = 1$ et $\det(Q) = 1$ dans P. Les mêmes arguments appliqués à $A \in SO(\mathbb{H}, 1) \cap GL_{HS}(\mathcal{H})$ impliquent que $A = PT$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ et $\det(Q) = \pm 1$, cela termine la partie (3).

Comme Exp : $\mathfrak{g}_\infty \to G_\infty$ est une application lisse, la Partie (2) est alors une conséquence de la Remarque 3.2.6(partie (2)) et la de construction de G_∞. $\triangle$

3.3.2 Groupe de transformation de Möbius-Hilbert-Schmidt de la sphère unité

Etant donnée une base hilbertienne $\{e_i\}_{i\in I}$, nous noterons encore par H l'orthogonal de e_1. Considérons un élément $v \in \mathbb{H}$ avec $v \neq 0$, H_v est l'orthogonal de $\mathbb{R}.v$ dans $\mathbb{H}$. Si e_1 et v sont linéairement indépendants, après un changement de v par $-v$ si nécessaire, on peut supposer que $< v, e_1 >= v_1 \geq 0$; donc v appartient à $\mathsf{H}^+ = \{x\ : x_1 \geq 0\}$.
Si on pose $e = \dfrac{v}{|v|}$, on a une isométrie orthogonale R_v telle que $R_v(e) = e_1$ et alors $R_v(\mathsf{H}_v) = \mathsf{H}$. On obtient donc un isomorphisme du groupe $\mathfrak{M}(\mathsf{H})$ dans le groupe $\mathfrak{M}(\mathsf{H}_v)$ des transformations de Möbius de $\widehat{\mathsf{H}_v} = \mathsf{H}_v \cup \{\infty\}$. Par conséquent, nous pouvons identifier ces groupes.

Dans $\mathbb{H}$, nous considérons la sphère unité $\mathbb{S}^\infty = \Big\{z \in \mathbb{H}, |z| = 1\Big\}$ et le point

$N = (1, \bar{0})$. La projection stéréographique (voir [3]) est une application :

$$\Pi : \mathbb{S}^\infty \backslash \{N\} \longrightarrow \mathsf{H}\ , \qquad\qquad (x_1, \bar{x}) \longmapsto \frac{\bar{x}}{1 - x_1}.$$

Nous pouvons prolonger Π à $\mathbb{S}^\infty$ dans $\widehat{\mathsf{H}}$ en posant $\Pi(1, \bar{0}) = \infty$. Alors, Π est un homéomorphisme de $\mathbb{S}^\infty$ dans $\widehat{\mathsf{H}}$. l'inverse de Π est une application donnée par

$$\bar{x} \longmapsto \Big(\frac{2\bar{x}}{|\bar{x}|^2 + 1}, \frac{|\bar{x}|^2 - 1}{|\bar{x}|^2 + 1}\Big) \ \text{ et } \infty \longmapsto N$$

Définition 3.3.7 *Un difféomorphisme ϕ de $\mathbb{S}^\infty$ est dit transformation de Möbius de $\mathbb{S}^\infty$ si $\Pi \circ \phi \circ \Pi^{-1}$ appartient à $\mathfrak{M}(\mathsf{H})$.*

Le groupe des transformations de Möbius de $\mathbb{S}^\infty$ est noté $\mathfrak{M}(\mathbb{S}^\infty)$. Ainsi, modulo un choix d'une base hilbertienne nous obtenons un isomorphisme

$$\mathcal{P} : \mathfrak{M}(\mathbb{S}^\infty) \to \mathfrak{M}_{HS}(\mathsf{H}).$$

Soit $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ le sous-groupe associé à $\mathfrak{M}_{HS}(\mathsf{H}) = \{\mu_{|\mathsf{H}},\ \mu \in \mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{H})\}$ via l'isomorphisme $\mathcal{P}$. Ce groupe sera appelé le *groupe de Möbius-Hilbert-Schmidt* de $\mathbb{S}^\infty$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{m}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ de ce groupe est isomorphe à $\mathfrak{g}_\infty$.

Considérons $v \in \mathbb{H}$ avec $v \neq 0$. Il existe $R_v \in O(\mathbb{H})$ tel que $R_v(\mathsf{H}_v) = \mathsf{H}$ (voir le début de cette sous-section), donc on a $\Pi_v = \Pi \circ R_v$. Il en résulte que ϕ appartient à $\mathfrak{M}(\mathbb{S}^\infty)$ si et seulement si $\Pi_v \circ \phi \circ \Pi_v^{-1}$ appartient à $\mathfrak{M}(\mathsf{H}_v)$, ce qui signifie que notre définition de $\mathfrak{M}(\mathbb{S}^\infty)$ est indépendante du choix de la base $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{H}$.

Maintenant, la sphère unité $\mathbb{S}^\infty$ est une sous-variété hilbertienne de $\mathbb{H}$ et son espace tangent $T_z\mathbb{S}^\infty$ au point $z \in \mathbb{S}^\infty$ peut s'identifier à l'hyperplan H_v. On note par $g_{\mathbb{S}^\infty}$ la métrique riemannienne sur $T\mathbb{S}^\infty$ induite par $< \ , \ >$. Soit φ_v une fonction sur $\mathbb{S}^\infty$ définie par $\varphi_v(x) =< \frac{v}{|v|}, x >$. Le gradient de φ_v (relativement à la métrique riemannienne $g_{\mathbb{S}^\infty}$) est le champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^\infty$ défini par

$$\operatorname{grad}(\varphi_v)(x) = \frac{v}{|v|} - \Big\langle \frac{v}{|v|}, x \Big\rangle x. \tag{3.18}$$

Soit δ_v la dilatation de H_v de coefficient $e^{t.|v|}$. De la Remarque 3.2.5 et pour tout

$v \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ et $t \in \mathbb{R}$, la famille des transformations

$$\Gamma_t^v(x) = ((\Pi_v)^{-1} \circ \delta_v \circ \Pi_v)(x)$$

est une famille à un paramètre des transformations de Möbius de $\mathbb{S}^\infty$.

Similairement à [12], nous avons la proposition suivante.

Proposition 3.3.8

(i) Pour t fixé, chaque transformation de Möbius Γ_t^v appartient à $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$.

(ii) Soit Φ_t^v le flot de grad(φ_v). Alors, on a $\Phi_t^v = \Gamma_t^v$.

(iii) Pour toute paire (v, w) de vecteurs indépendants de $\mathbb{H}\setminus\{0\}$, le flot généré par le crochet de Lie [grad(φ_v), grad(φ_w)] est une rotation dans le plan $P(v, w)$ générée par v et w avec un angle de rotation de valeur $-t$.

Démonstration . Si I est fini, la démonstration est donnée dans [12] et [20], donc on suppose que $I = \mathbb{N}$. Fixons un $v \in \mathbb{H}$ et choisissons une base hilbertienne $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de sorte que $e_1 = \dfrac{v}{|v|}$. Donc, $\mathsf{H} \equiv \mathsf{H}_v$ et $\Pi_v \equiv \Pi$, pour chaque n, on note par H_n le sous-espace $\{e_1\}^\perp$ dans $\mathbb{H}_n$. Par induction, nous pouvons mettre sur chaque H_n une orientation telle que l'orientation donnée par H_n et e_{n+1} est l'orientation de H_{n+1}. Comme δ_v préserve l'orientation en restriction à H_n, il en résulte que $((\Pi)\circ\delta_v\circ(\Pi)^{-1}$ préserve l'orientation de H_n et, finalement, $[\Pi \circ \Gamma_t^v \circ \Pi^{-1}]$ préserve l'orientation pour tout n. Par conséquent, $A_n = \mathcal{L}^{-1} \circ [\Pi \circ \Gamma_t^v \circ \Pi^{-1}]_{|\mathsf{H}_n}$ appartient à $SO(\mathbb{H}_n, 1)$.
En outre, si $A = \mathcal{L}^{-1} \circ [\Pi \circ \Gamma_t^v \circ \Pi^{-1}]$, alors $[A]_{|\mathcal{H}_n} = A_n$, ceci implique que A_n est une suite de Cauchy dans G_∞ pour la distance d_∞. On en déduit que A est la limite de A_n et donc A appartient à G_∞. Cela termine la Partie (i) de la démonstration.

La démonstration de la Partie (ii) (resp. Partie (iii)) est formellement la même que la démonstration du Lemme 3.1 (resp. Lemme 3.3) de [12], donc nous allons donner un résumé de ces preuves.
Comme $\Gamma_t^{\lambda v} = \Gamma_{\lambda t}^v$ et sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $|v| = 1$. D'abord $x = \pm v$ sont les point fixes de Φ_t^v et Γ_t^v, choisissons un $z \in \mathbb{S}^\infty$ avec $z \neq \pm v$ et soit P le plan dans $\mathbb{H}$ engendré par v et z. Par les mêmes arguments que dans la preuve du Lemme 3.1 de [12], nous montrons que grad$\phi_v(x)$ appartient à P pour tout $x \in P$ et donc Φ_t^v préserve P. D'autre part, par construction, Γ_t^v préserve P également. Maintenant, du Lemme 2.2 de [12], on obtient que Γ_t^v et Φ_t^v coïncident

sur le cercle $P \cap \mathbb{S}^\infty$, donc on obtient la Partie (ii).

Soit P le plan engendré par v et w où ces derniers sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{H} \setminus \{0\}$. Comme $\Phi_t^v = \Gamma_t^v$ et $\Phi_t^w = \Gamma_t^w$, ces flots conservent P. Donc le crochet de Lie $[\mathrm{grad}(\varphi_v), \mathrm{grad}(\varphi_w)]$ est tangent à P sur P. Alors, le flot de $[\mathrm{grad}(\varphi_v), \mathrm{grad}(\varphi_w)]$ préserve P. De plus d'après le Lemme 2.2 de [12] et en restriction à P, ce flot est une rotation avec un angle de valeur $-t$. Il reste à montrer que, pour $x \in \mathbb{S}^\infty$ orthogonal à P, ce flot garde x fixe et le problème se réduit à un problème de dimension 3 qui peut être résolu de la même manière que dans la preuve du Lemme 3.1 dans [12]. $\triangle$

Maintenant, si $\{e_i^*\}_{i\in I}$ est la base duale de $\{e_i\}_{i\in I}$, alors l'application φ_{e_i} est exactement la forme duale e_i^* et on note ξ_i le gradient de e_i^*. Comme ξ_i est un champ de vecteurs, nous avons la décomposition suivante (voir [20] et [18])

$$\xi_i(z) = \frac{\partial}{\partial x_i} - z_i \sum_{l\in I} z_l \frac{\partial}{\partial x_l}. \tag{3.19}$$

Donc, le crochet $[\xi_i, \xi_j]$ a la décomposition

$$[\xi_i, \xi_j](z) = z_i \frac{\partial}{\partial x_j} - z_j \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.20}$$

Considérons l'action naturelle $\mathfrak{A} : \mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty) \times \mathbb{S}^\infty \to \mathbb{S}^\infty$ sur $\mathbb{S}^\infty$ et notons par $\mathfrak{a} : \mathfrak{m}_{HS}(\mathbb{S}^\infty) \to \mathrm{Vect}(\mathbb{S}^\infty)$ l'action infinitésimale associée où $\mathrm{Vect}(\mathbb{S}^\infty)$ est l'espace de champs de vecteurs sur $\mathbb{S}^\infty$. Si nous identifions $\mathfrak{m}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ à $\mathfrak{g}_\infty$, nous aurons (voir [13] ou [20])

$$\mathfrak{a}([U_i, U_j] = -[\mathfrak{a}(U_i), \mathfrak{a}(U_j)].$$

Comme dans le cas de dimension finie (voir [20]) nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.3.9

1. *L'action $\mathfrak{A}$ est effective.* [1]
2. *Le morphisme $\mathfrak{a}$ est injectif et $\mathfrak{a}(U_i) = \xi_i$.*

Démonstration. (1) Soit $\phi \in \mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ tel que $\phi(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{S}^\infty$. De la Proposition 3.1.5 et pour chaque n, la restriction de ϕ à $\mathbb{H}_n \cap \mathbb{S}^\infty$ est une

1. Une action $\mathfrak{A}$ est appelée effective si pour tout z $\mathfrak{A}(g, z) = z$ implique g=Id.

transformation de Möbius de la sphère de dimension finie $\mathbb{H}_n \cap \mathbb{S}^\infty$. Comme dans la dimension finie, cette action est effective et la restriction de ϕ à $\mathbb{H}_n \cap \mathbb{S}^\infty$ est l' identité. Donc, l'application $\Pi \circ \phi \circ \Pi^{-1}$ de H dans H est l'identité sur chaque sous-espace $\mathsf{H}_{n-1} = \mathsf{H} \cap \mathbb{H}_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que $\Pi \circ \phi \circ \Pi^{-1} = Id_{\mathsf{H}}$ et alors $\phi = Id_{\mathbb{S}^\infty}$. Donc, l'action $\mathfrak{A}$ est effective.
(2) Pour l'injectivité de $\mathfrak{a}$, voir la démonstration de la Proposition 2.9 de [20] (Partie (5)). D'autre part, avec nos identifications et de la Proposition 3.3.8, on obtient que $\mathfrak{a}(U_i) = \xi_i$. △

3.4 La structure sous-riemannienne sur $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$

Soit M une variété hilbertienne et $\mathcal{D}$ un sous-fibré de TM. Une *structure sous riemannienne sur* M est un triplet $(M, \mathcal{D}, g)$ où g est une métrique riemannienne sur $\mathcal{D}$. La donnée d'une métrique riemannienne $\bar{g}$ sur M permet, bien sûr, d'obtenir une métrique riemannienne g sur $\mathcal{D}$ par restriction. D'autre part, il existe toujours un complément $\mathcal{V}$ de $\mathcal{D}$, c-à-d. $TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{V}$; donc on peut prolonger g à une métrique riemannienne $\bar{g}$ sur M .

Soit $\bar{g}$ une métrique riemannienne sur M. Une courbe $\gamma : [0,T] \to M$ est de classe L^1 si on a $\displaystyle\int_0^T \sqrt{\bar{g}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}dt < \infty$.
Cette propriété ne dépend pas du choix de $\bar{g}$. Pour une telle courbe γ, sa longueur $l(\gamma)$ est précisément la quantité $\displaystyle\int_0^T \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)}dt$ et, bien sûr, $l(\gamma)$ ne dépend pas de sa paramétrisation. Une courbe de classe L^1 est dite horizontale si $\dot{\gamma}(t)$ appartient à $\mathcal{D}(\gamma(t))$.
Etant donnée une métrique-riemannienne g sur $\mathcal{D}$, la longueur d'une courbe horizontale γ est bien définie. Notons que nous avons également

$$l(\gamma) = \int_0^T |\gamma(t)^{-1}\dot{\gamma}(t)|dt. \tag{3.21}$$

Soit $\mathcal{C}_H(x_0, x_1)$ l'ensemble (éventuellement vide) des courbes horizontales de classe L^1, $\gamma : [0,T] \to M$ telles que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(T) = x_1$ pour $T \geq 0$, où x_0 et x_1 sont deux points de M. La *distance horizontale* $d_H(x_0, x_1)$ entre x_0 et x_1 est définie par

$$d_H(x_0, x_1) = \inf\left\{l(\gamma), \gamma \in \mathcal{C}_H(x_0, x_1)\right\} \text{ et } d_H(x_0, x_1) = \infty \text{ si } \mathcal{C}_H(x_0, x_1) = \emptyset. \tag{3.22}$$

En dimension finie, l'infinimum dans (3.22) est toujours atteint. De plus, le théorème de Chow donne des conditions suffisantes sous lesquelles deux points de M peuvent être reliés par une courbe horizontale. Donc, dans ce cas, d_H devient une distance. En dimension infinie, comme dans le cas riemannien, si $\mathcal{C}_H(x_0, x_1) \neq \emptyset$, l'infinimum dans (3.22) pourrait ne pas être atteint. De plus, dans ce contexte et à notre connaissance, il n'existe aucun résultat général similaire au théorème de Chow. Donc, nous ne pouvons pas espérer que d_H soit une distance dans un contexte large.

Revenons maintenant au groupe de Lie $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{m}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{HS}(\mathbb{H}, 1) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s}$ étant identifiés, munissons cette algèbre de Lie du produit scalaire induit par la distance $\frac{1}{2} < \ , \ >_{HS}$. Alors, l'isomorphisme $u \mapsto \begin{pmatrix} 0 & [u]^* \\ [u] & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{H}$ à $\mathfrak{h}$ est une isométrie. Pour plus de simplicité, le produit scalaire sur $\mathfrak{h}$ sera désigné $< \ , \ >$. Par conséquent, le sous-espace de Hilbert $(\mathfrak{h}, < \ , \ >)$ engendre une distribution invariante à gauche $\triangle$ et aussi une métrique riemannienne, g sur $\triangle$, invariante à gauche, donc $(\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty), \triangle, g)$ est une structure sous-riemannienne sur $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$. Soit $\phi \in \mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$, l'ensemble d'accessibilité de ϕ est
$\mathcal{A}(\phi) = \Big\{\psi \in \mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty) :$ il existe une courbe horizontale $\gamma : [0, T] \to \mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ avec $\gamma(0) = \phi \ \ \gamma(T) = \psi\Big\}$.
D'autre part, dans la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$, nous considérons l'espace de Banach

$$\mathfrak{s}_1 = \Big\{P \in \mathfrak{s} \text{ tel que } P = \sum_{k,l\in I, k<l} \lambda_{kl}\Omega_{kl}, \sum_{k,l\in I,k<l} |\lambda_{kl}| < \infty\Big\},$$

muni de la norme $|P|_1 = \sum_{k,l\in I,k<l} |\lambda_{kl}|$. Notons que $|P|_1 = \sum_{i\in I} | < e_i, Pe_i > |$ est la trace L^1 de P et donc $|P|_1$ ne dépend pas du choix de la base hilbertienne fixée de $\mathbb{H}$. On note par $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s}_1$ et on munit $\mathfrak{g}_1$ de la norme

$$||(B, P)||_1 = |B| + |P|_1.$$

Bien sûr, l'inclusion naturelle de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}$ est continue et la famille $\{U_i\}_{i\in I} \cup \{\Omega_{kl}\}_{k,l\in I,k<l}$ est une base de Schauder de $\mathfrak{g}_1$. On note par $\mathfrak{M}^1_{HS}(\mathbb{S}^\infty) = \mathrm{Exp}(\mathfrak{g}_1)$, alors il est clair que $\mathfrak{M}^1_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ a une structure de groupe de Lie banachique modelée sur $\mathfrak{g}_1$. En outre, $\mathfrak{M}^1_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ est dense dans $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$. D'après la terminologie d'une sous-variété banachique faible (voir [18]), nous dirons

que $\mathfrak{M}^1_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ est un sous-groupe de Lie faible de $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$. Alors, nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.4.1

(i) Deux éléments A_0 et A_1 de $\mathfrak{M}^1_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ peuvent être joints par une courbe horizontale.

(ii) d_H est une distance sur $\mathfrak{M}^1_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$.

Démonstration. De la construction de $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$, nous pouvons supposer que $\mathfrak{M}^1_{HS}(\mathbb{S}^\infty) = SO^1_{HS}(\mathbb{H}, 1)$. D'autre part, il suffit de prouver la partie (i) pour $A_0 = Id$ et A_1 un point de $\mathfrak{M}^1_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$. Nous fixons $A \in \mathfrak{M}^1_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$. D'après le Théorème 3.3.6, on a
$A = \prod_{j\in J} \text{Exp}(\theta_j B_j)\text{Exp (U)}$ où chaque B_j est un élément de rang fini de $\mathfrak{s}$ et $U \in \mathfrak{h}$.
Donc, la courbe $t \mapsto \text{Exp}(tU)$ est une courbe horizontale définie sur $[0, 1]$ qui joint Id à $\text{Exp}(U)$. Donc, il suffit de prouver le résultat pour $A = \prod_{j\in J} \text{Exp}(\theta_j B_j)$.
On note par $A_j = \text{Exp}(\theta_j B_j)$ et on fixe un tel point A_j. Par construction de B_j (voir Annexe B.1), si on pose $\mathbb{E}_j = B_j(\mathbb{H})$, alors $\mathbb{E}_j$ est un espace de Hilbert de dimension finie tel que $\ker(B_j) = (\mathbb{E}_j)^\perp$. Donc $\bar{B}_j = B_{j|\mathbb{E}_j}$ appartient à $\mathfrak{so}(\mathbb{E}_j, 1)$. De plus, on a la décomposition $\mathfrak{so}(\mathbb{E}_j, 1) = \mathfrak{h}_j \oplus \mathfrak{s}_j$ et $\bar{B}_j$ appartient à $\mathfrak{s}_j$. Dans la base de $\mathbb{E}_j$ construite dans l'annexe B.1, l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(\mathbb{E}_j, 1)$ est engendrée par $\{\bar{U}_r = U_{rs|\mathbb{E}_j},\ l_1 \leq 2l_j\}$ et $\{\bar{\Omega}_{rs} = \Omega_{rs|\mathbb{E}_j}, l_1 \leq r < s \leq l_j\}$. Considérons la structure sous-riemannienne (invariante à gauche) sur $SO(\mathbb{E}_j, 1)$ engendrée par $\mathfrak{h}_j$ et munie d'un produit scalaire tel que $\{\bar{U}_r,\ \ r = 1, \cdots n_j\}$ est une base orthonormée. Selon le théorème classique de Chow, il existe une courbe horizontale $\bar{\gamma}_j : [0, T_j] \mapsto SO(\mathbb{E}_j, 1)$ telle que $\bar{\gamma}_j(0) = Id_{\mathbb{E}_j}$ et $\bar{\gamma}_j(T_j) = \bar{A}_j = A_{j|\mathbb{E}_j}$. Considérons $\gamma_j : [0, T_j] \mapsto SO_{HS}(\mathbb{H}, 1)$ définie par

$$\gamma_j(t)_{|\mathbb{E}_j} = \bar{\gamma}_j(t)\ \ \text{et}\gamma_j(t)_{|(\mathbb{E}_j)^\perp} = Id_{|(\mathbb{E}_j)^\perp}.$$

Alors, γ_j est une courbe horizontale reliant $Id_{\mathcal{H}}$ et A_j.
Si J est fini, on peut supposer que $J = \{1, \cdots, N\}$. Autrement dit, on peut supposer que $J = \mathbb{N}$. Nous paramétrons γ_j par une courbe c_j sur $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ en posant

$$c_j(s) = \gamma_j(s - \tau_{j-1}).$$

Pour tout entier $n \in J$, considérons la composition finie $C_n : [0, \tau_n] \to SO_{HS}(\mathbb{H}, 1)$

définie par

$$C_n(s) = C_{n-1}(s) \text{ pour } s \in [0, \tau_{n-1}],$$

$$C_n(s) = c_n(s) C_{n-1}(\tau_{n-1}) \text{ pour } s \in [\tau_{n-1}, \tau_n].$$

Alors, C_n est une courbe horizontale de classe L^1 joignant $Id_{\mathcal{H}}$ à $\prod_{j=1}^{n} A_j$. Donc, si J est fini, la démonstration est terminée. Supposons maintenant que $J = \mathbb{N}$ et posons $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$, si cette limite est finie ; sinon, posons $\tau = \infty$. Nous devons montrer que $\lim_{n\to\infty} C_n(s)$ est bien définie pour tout $s \in [0, \tau]$. D'abord, comme $A = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} A_j$, alors $\lim_{n\to\infty} C_n(\tau_n) = A$. Cependant, par construction et pour tout $m > n$, on obtient que $C_{m|[0,\tau_n]} = C_n$. Donc, pour tout $s \in [0, \tau[$, il existe n tel que $s \in [0, \tau_n]$ et donc $C(s) = C_n(s)$ est bien définie. Une telle construction est differentiable presque partout mais, en général et sans un bon choix de la courbe $\bar{\gamma}_j$, $\tau = \infty$ et même si τ est fini, C n'est pas de classe L^1. En particulier, nous pouvons avoir $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\tau_n} \sqrt{g(\dot{C}_n(s), \dot{C}_n(s))}ds = \infty$.

Pour terminer cette démonstration, nous allons utiliser les résultats de la structure sous-riemannienne de $SU(1,1)$ pour obtenir le lemme suivant.

Lemme 3.4.2 *Pour tout j et avec les notations précédentes, nous pouvons choisir une courbe horizontale $\bar{\gamma}_: [0, T_j] \to SO(\mathbb{E}_j, 1)$ paramétrée par longueur d'arc telle que*

$$\bar{\gamma}_j(0) = Id_{\mathbb{E}_j}, \quad \bar{\gamma}_j(T_j) = \bar{A}_j, \quad \textit{et } l(\bar{\gamma}_j) = n_j\theta_j = T_j.$$

Pour tout $j \in J$, $C_n(\tau_n) = \prod_{j=1}^{n} A_j$. Alors, par construction de la famille A_j, l'endomorphisme $C_n(\tau_n)$ est une isométrie de $\mathbb{H}$ qui préserve l'espace $\mathbb{K} \oplus \mathbb{E}_1 \oplus \cdots, \oplus \mathbb{E}_n$. Comme γ_{n+1} est paramétrée par longueur d'arc, alors

$$\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \sqrt{g(\dot{C}(s), \dot{C}(s))}ds = \int_0^{T_{n+1}} \sqrt{g(\dot{\gamma}_{n+1}(s), \dot{\gamma}_{n+1}(s))}ds = T_j = n_j|\theta_j|. \quad (3.23)$$

Cependant, de la décomposition de A, on aura

$$|A|_1 = 2\sum_{j\in J} n_j\theta_j.$$

Donc, d'après (3.23) et de la construction de C, on obtient

$$l(C) = \int_0^\tau \sqrt{g(\dot{C}(s), \dot{C}(s))}ds = \sum_{j \in J} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_j} \sqrt{g(\dot{C}(s), \dot{C}(s))}ds = \frac{1}{2}|A|_1,$$

ce qui termine la Partie (i) du Théorème 3.4.1.

De la définition de la distance d sur $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ et pour tout ψ et ψ' dans $\mathfrak{M}^1_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$, on obtient que $d_H(\psi, \psi') \geq d(\psi, \psi')$. De la Partie (i), la restriction de d_H à $\mathfrak{M}^1_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ signifie que d_H est une distance et donc la Partie (ii) du Théorème 3.4.1 est démontrée.

3.4.1 Résulats d'accessibilité du serpent hilbertien

Rappelons que pour une courbe continue $c : [0, 1] \to \mathbb{H}$, C^k par morceaux, un relèvement de c est une courbe $\tilde{c} : [0, 1] \to \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$, C^k par morceaux, telle que $\mathcal{E}(\tilde{c}(t)) = c(t)$. Donc, pour un serpent hilbertien on peut considérer le problème de contrôle optimal suivant :

Etant donnée une courbe continue $c : [0, 1] \to \mathbb{H}$, C^k par morceaux, on cherche un relèvement $\tilde{c} : [0, 1] \to \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$, $t \mapsto u_t$, tel que :

– La famille des serpents associée $\{S_t\}_{t\in[0,1]}$ satisfasse $S_t(L) = c(t)$.

– L'énergie cinétique infinitésimale : $\frac{1}{2}||\dot{\tilde{c}}(t)||^2_{L^2} = \frac{1}{2}G(\dot{\tilde{c}}(t), \dot{\tilde{c}}(t))$ soit minimale.

Ce problème a une solution optimale si et seulement si la courbe c a un relèvement horizontal. Nous dirons que ce relèvement horizontal est un **contrôle optimal** .

L'ensemble d'accessibilité $\mathcal{A}(u)$, pour $u \in \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$, est l'ensemble des états finaux $\tilde{c}(1)$ d'une courbe horizontale lisse par morceaux $\tilde{c} : [0, 1] \to \mathcal{C}^L_{\mathcal{P}}$ telle que $\tilde{c}(0) = u$. Dans ce cas et si $x_0 = S_u(L)$, alors un $z = S_{u'}(L)$ peut être joint à x_0 par une courbe absolument continue c qui a un contrôle optimal si u' appartient à $\mathcal{A}(u)$.

Quand $\mathbb{H}$ est de dimension finie, l'ensemble $\mathcal{A}(u)$ est exactement l'orbite de l'action du groupe de Möbius sur l'espace des configurations.

Etant donnée une distribution horizontale $\mathcal{D}$ sur une variété de dimension finie M, le célèbre *Théorème de Sussmann* (voir [22]) affirme que chaque ensemble d'accessibilité est une sous-variété lisse immergée qui est une variété intégrale d'une distribution $\hat{\mathcal{D}}$ conttenant $\mathcal{D}$ (c-à-d. $\mathcal{D}_x \subset \hat{\mathcal{D}}_x$ pour tout $x \in M$). Grâce à cet argument, E. Rodriguez a montré que l'ensemble $\mathcal{A}(u)$ est une sous-variété immergée de $\mathcal{C}_\mathcal{P}^L$ de dimension finie (voir [20]).

Dans la sous-section suivante, nous allons donner une nouvelle démonstration du problème de contrôlabilité du serpent hilbertien. En utilisant l'action naturelle de $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ sur $\mathcal{C}_\mathcal{P}^L$, la structure sous-riemannienne de $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ et le Théorème 3.4.1. Nous obtenons également une interprétation géométrique de la variété intégrale maximale de $\mathcal{D}$.

Le théorème ci-dessous est une généralisation du théorème principal de [20].

Théorème 1

1. *L'orbite de la restriction à $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ de l'action $\mathfrak{A}$ passant par $u \in \mathcal{C}_\mathcal{P}^L$ est précisément la variété intégrale maximale $\mathcal{L}(u)$ de $\bar{\mathcal{D}}$ qui contient u.*
2. *L'orbite $\mathcal{O}^1(u)$ de la restriction à $\mathfrak{M}^1_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ de l'action $\mathfrak{A}$ passant par $u \in \mathcal{C}_\mathcal{P}^L$ est contenue dans $\mathcal{A}(u)$ et elle dense dans $\mathcal{L}(u)$. En particulier $\mathcal{A}(u)$ est un sous-ensemble dense de $\mathcal{L}(u)$.*

3.4.2 Démonstration du Théorème 1

Comme chaque configuration $u \in \mathcal{C}_\mathcal{P}^L$ est une courbe $u : [0, L] \to \mathbb{S}^\infty$, nous pouvons naturellement définir une action de $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ sur $\mathcal{C}_\mathcal{P}^L$ (notée $\mathfrak{A}$) par

$$\mathfrak{A}(\phi, u)(s) = \phi(u(s)) \text{ pour } s \in [0, L].$$

Puisque l'action $\mathfrak{M}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ sur $\mathbb{S}^\infty$ est lisse et effective, la même chose est vraie pour l'action sur $\mathcal{C}_\mathcal{P}^L$.

Soit $\mathfrak{a} : \mathfrak{m}_{HS}(\mathbb{S}^\infty) \to \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_\mathcal{P}^L)$ l'action infinitésimale associée où $\mathrm{Vect}(\mathcal{C}_\mathcal{P}^L)$ dénote l'espace des champs de vecteurs sur $\mathcal{C}_\mathcal{P}^L$. Comme précédemment, nous identifions $\mathfrak{m}_{HS}(\mathbb{S}^\infty)$ à $\mathfrak{g}_\infty$, et on a (voir [13] ou [20])

$$\mathfrak{a}([U_i, U_j] = -[\mathfrak{a}(U_i), \mathfrak{a}(U_j)].$$

En outre, de la Proposition 3.3.9, la caractérisation (1.10) de gradϕ et la définition de E_i, on a

$$\mathfrak{a}(U_i) = E_i \text{ et } \mathfrak{a}([U_i, U_j]) = \mathfrak{a}(\Omega_{ij}) = -[E_i, E_j]. \tag{3.24}$$

Nous avons aussi un morphisme de fibrés (noté aussi $\mathfrak{a}$)

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{g} \times \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^{L} \to T\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^{L}.$$

Considérons maintenant la restriction $\mathfrak{A}^1$ de l'action précédente $\mathfrak{A}$ à $\mathfrak{M}_{HS}^1(\mathbb{S}^\infty)$ sur $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^{L}$ et nous avons également la même relation (3.24) pour la restriction $\mathfrak{a}^1$ de $\mathfrak{a}$ à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{m}_{HS}^1(\mathbb{S}^\infty)$ de $\mathfrak{M}_{HS}^1(\mathbb{S}^\infty)$. Selon les arguments de la section 4.3 de [18], l'espace de Banach $\mathbb{G}^2$ est isomorphe à $\mathfrak{g}$. Donc, on a $\mathfrak{a}(\mathfrak{g} \times \{u\}) = \mathcal{D}(u)$. Par conséquent, de la démonstration du Lemme 4.4 et de l'assertion 1, on obtient que l'orbite de u de l'action $\mathfrak{A}$ est exactement la variété intégrale maximale de $\mathcal{D}$ passant par $u \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^{L}$.
D'autre part, l'orbite $\mathcal{O}^1(u)$ de $u \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^{L}$ de l'action $\mathfrak{A}^1$ est contenue dans l'orbite $\mathcal{O}(u)$ de $\mathfrak{A}$. De plus, $\mathcal{O}^1(u)$ est dense dans $\mathcal{O}(u)$. Cependant et d'après le Théorème 3.4.1, nous pouvons obtenir l'inclusion $\mathcal{O}^1(u) \subset \mathcal{A}(u)$. Par conséquent, la démonstration du Théorème 1 est terminée.

$\triangle$

Conclusion

Etant donné un serpent S, l'algorithme du charmeur de serpents à été introduit par Rodriguez dans [20], il consiste à chercher une déformation à un-paramètre S_t de S telle que son *museau* $S_t(L)$ suive une courbe $c : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ de classe C^1 par morceaux avec $S_t(L) = c(t)$. La solution S_t de l'algorithme est l'unique déformation de S suivant c qui minimise l'énergie cinétique infinitésimale. Un serpent S de longueur L dans $\mathbb{R}^d$ peut se donner par une courbe $u : [0, L] \to \mathbb{S}^{d-1}$, continue par morceaux, telle que $S(s) = \int_0^s u(\tau)d\tau$. Dans [20], l'auteur a construit une distribution horizontale $\mathcal{D}$ dans l'espace des configurations $Conf$ telle que $t \mapsto u_t$ est tangente à $\mathcal{D}$. Dans cette thèse, nous avons généralisé ce problème dans le contexte d'un espace de Hilbert séparable et de dimension infinie.

Dans la dimension finie, l'action du groupe de Möbius sur la sphère induit une action de ce même groupe sur l'espace des configurations. Cela permet de déduire que deux configurations peuvent êtres reliées par une courbe horizontale. Dans notre cas on a étudié ce problème par deux méthodes différentes. La première est basée sur des résultats d'intégrabilité d'une distribution et les orbites des champs de vecteurs sur une variété banachique. La deuxième est une approche en termes d'action d'un groupe de Möbius généralisé sur l'espace des configurations.

Annexe A

Notions de géométrie différentielle en dimension infinie

Dans cet annexe, nous donnons quelques rappels concernant les résultats de base de la géométrie différentielle en dimension infinie.

A.1 Variété banachique

Définition A.1.1 *Un espace topologique M est une variété banachique lisse s'il existe un ensemble de cartes $\{(U_i, \varphi_i)\}$ tels que*

1. *les U_i sont ouverts et recouvrent M,*
2. *pour tout i, l'application $\varphi_i : U_i \to E$ est un homéomorphisme de U_i vers un ouvert $\varphi_i(U_i)$ d'un espace de Banach E,*
3. *pour tout les i, j le changement de cartes $\varphi_i \circ \varphi_j : \varphi_i(U_i \cap_j) \to \varphi_j(U_i \cap_j)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

De nombreuses notions de géométrie différentielle en dimension finie restent valables en dimension infinie. Nous en mentionnons certaines qui sont utiles dans notre travail. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux livres [6], [15]

Définition A.1.2 *Soient M une variété banachique et N un sous ensemble de M muni de la topologie induite. N est une sous variété-banachique de M si pour tout $x \in N$ il existe une carte (U, φ) de M, appelée carte adaptée à N en x, telle que $x \in U$ et φ induise un homéomorphisme de $U \cap N$ sur l'intersection de $\varphi(U)$ avec un sous-espace fermé de E admettant un supplémentaire toplologique.*

Définition A.1.3 *Soient M et N deux variétés banachiques de classe C^k et $f : M \to N$. On dit que f est un morphisme de variétés de classe C^k si pour toutes cartes (U, φ) de M et (V, ψ) de N l'application $\varphi \circ f \circ \psi^{-1} : \varphi(U) \to F$ est de classe C^k, où F est l'espace de Banach sur lequel N est modelée.*

A.2 Espace tangent et application tangente

Soient M une variété banachique lisse et $x \in M$. Soient $c_i : I \to M$; $i = 1, 2$, deux courbes de classe C^1.

Un vecteur tangent à M en x est une classe d'équivalence pour la relation suivante

$$c_1 \sim c_2 \text{ si et seulement si} \begin{cases} c_1(0) = c_2(0) = x \in U, \\ (\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0). \end{cases}$$

où (U, φ) est une carte de M centrée en x.

L'espace tangent $T_x M$ en un point $x \in M$ est l'espace vectoriel formé par les vecteurs tangents à M en x. La réunion $\bigcup_{x \in M} T_x M$ de tous les espaces tangents possède une structure de variété banachique lisse que l'on note TM et qu'on appelle le ***fibré tangent*** à M.

Définition A.2.1 *Soient M et N deux variétés banachiques de classe C^k et f un morphisme de variétés de M dans N, (U, φ) une carte en $x \in M$ et (V, ψ) en $f(x)$ telle que $f(U) \subset V$. La différentielle $d_{\varphi(x)}\phi$ de l'application $\phi = \varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ de l'ouvert $\varphi(U)$ dans l'espace de Banach F est une application linéaire indépendante des cartes choisies. On la note $T_x f$ et on l'appelle l'application tangente de f en $x \in M$.*

Définition A.2.2 *Soient M et N deux variétés banachiques et $f : M \to N$ un morphisme de variétés. On dit que f est une immersion en $x \in M$ si*

- *$T_x f : T_x M \to T_x N$ est injective et son image est fermée et admet un supplémentaire topologique dans $T_{f(x)} N$.*

On dit que f est une immersion, si c'est une immersion en tout point de M.

Proposition A.2.3 *Soit f une immersion d'une variété banachique M dans une variété banachique N. On suppose que f induise un homéomorphisme de M sur $f(M)$. Alors $f(M)$ est une sous-variété de M.*

Définition A.2.4 *Soient M et N deux variétés banachiques, et $f : M \to N$ un morphisme de variétés. On dit que f est une submersion en $x \in M$ si*

- *$T_x f : T_x M \to T_x N$ est surjective et son noyau est fermé et admet un supplémentaire topologique dans $T_x M$.*

On dit que f est une submersion, si c'est une submersion en tout point de M.

Proposition A.2.5 *L'image réciproque d'un point $c \in N$ par une submersion $f : M \to N$ est une sous-variété banachique de M.*

A.3 Groupe de Lie et algèbre de Lie banachiques

Définition A.3.1 *Un groupe de Lie banachique G est une variété banachique de classe $\mathcal{C}^\infty$ muni d'une structure de groupe telle que la multiplication*

$G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$, ainsi que l'inversion $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ soient des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Définition A.3.2 *On appelle algèbre de Lie d'un groupe de Lie G l'espace tangent à G en l'élément neutre du groupe. Elle est souvent notée $\mathfrak{g} = Lie(G)$.*

A.4 Métrique faiblement riemannienne

Définition A.4.1 *Soient M une variété banachique réelle (lisse) et g une section du fibré $T'M \bigodot T'M$ des formes bilinéaires symétriques de TM. On dit que g est une métrique* **faiblement riemannienne** *sur M si et seulement si, pour tout $x \in M$, g_x est une application bilinéaire définie positive sur T_xM, c-à-d*

1. $\forall X \in T_xM, \quad g_x(X, X) \geq 0,$
2. $g_x(X, X) = 0 \Longleftrightarrow X = 0.$

Remarque A.4.2 *La seconde condition ci-dessus implique, en particulier, que g_x réalise une injection de T_xM dans son dual T'_xM par :*

$$\begin{aligned} \tilde{g}_x : T_xM &\to T'_xM \\ X &\mapsto (i_X g_x : Y \to g_x(X, Y)) \end{aligned}$$

Définition A.4.3 *On dit que g est une métrique fortement riemannienne si $\tilde{g}_x$ réalise un isomorphisme entre T_xM et T'_xM.*

Exemple A.4.4 *Tout espace de Hilbert réel est une variété fortement riemannienne pour la métrique donnée par le produit scalaire.*

A.5 Structure sous-riemannienne sur une variété banachique

Soit M une variété banachique. On définit une structure sous-riemannienne sur M de façon analogue à la dimension finie.

Définition A.5.1 *Une structure sous-riemannienne sur M est la donnée d'un triplet (M, D, g) où M est une variété banachique, D est une distribution sur M et g est une métrique riemannienne sur D.*

Une première différence avec la dimension finie est la dichotomie entre le cas des structures dites ***fortes***, et celui des structures ***faibles***.

Annexe B

Démonstration du Théorème 3.3.6 et du Lemme 3.4.2

Le but de cet annexe est de démontrer le Théorème 3.3.6 et le Lemme 3.4.2

B.1 Démonstration du Théorème 3.3.6

Considérons un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ et notons par $SO_{HS}(\mathbb{H}) = SO(\mathbb{H}) \cap GL_{HS}(\mathbb{H})$ le groupe de Lie de Hilbert-Schmidt muni de la topologie induite par la norme de Hilbert-Schmidt et par $\mathfrak{so}_{HS}(\mathbb{H})$ son algèbre de Lie. Tout d'abord nous démontrons le résultat suivant (voir [9] pour la dimension finie).

Proposition B.1.1 *L'application* $\mathrm{Exp} : \mathfrak{so}_{HS}(\mathbb{H}) \to SO_{HS}(\mathbb{H})$ *est surjective. Plus précisément, pour chaque* $Q \in SO_{HS}(\mathbb{H})$*, il existe une famille* $\{\theta_j\}_{j\in J}$ *avec* $0 < \theta_j \leq \pi$ *et une famille* $\{B_j\}_{j\in J}$ *avec* $B_j \in \mathfrak{so}_{HS}(\mathbb{H})$ *telles que* $[B_k, B_j] = 0$ *pour* $k \neq j$ *et* $(B_j)^3 = -B_j$ *et de sorte que*

$$Q = \prod_{j\in J} \mathrm{Exp}(\theta_j B_j) = \mathrm{Exp}(\sum_{j\in J} \theta_j B_j).$$

Et, si n_j *est le rang de* B_j*, alors* $(|B|_{HS})^2 = \sum_{j\in J} n_j(\theta_j)^2$ *où* $B = (\sum_{j\in J} \theta_j B_j)$.

Démonstration. Soit $B \in \mathfrak{so}_{HS}(\mathbb{H})$, B est un opérateur compact anti-adjoint. Donc dans la complexification $\mathbb{H}^C$ de $\mathbb{H}$, on peut écrire $B = iA$ où A est un opérateur auto-adjoint compact. Il en découle que les valeurs propres de B sont de type $\{\pm i\lambda_j\}_{j\in J}$ où J est un ensemble fini ou dénombrable et $\{\lambda_j\}$ est une suite décroissante strictement positive qui converge vers 0 si J est dénombrable. De la théorie spectrale classique on a

$$\mathbb{H} = \bigoplus_{j\in J} \mathbb{E}_j \oplus \mathbb{K}, \tag{B.1}$$

où $\mathbb{E}_j$ est le sous-espace tel que la restriction de B à $\mathbb{E}_j$ est $\pm i\lambda_j Id_{\mathbb{E}_j}$ et $\mathbb{K}$ est le noyau de B. En outre, chaque $\mathbb{E}_j$ est orthogonale à $\mathbb{E}_k$ et $\mathbb{K}$ pour $k \neq j$. En particulier, $\mathbb{E}_j$ est un espace de dimension finie. On peut choisir une base hilbertienne $\cup_{j\in J}\{e_{l_1}, \cdots, e_{2l_j}\} \cup \{e_l, l \in L\}$ de $\mathbb{H}$ telle que $\{e_{l_1}, \cdots, e_{2l_j}\}$ est une base de $\mathbb{E}_j$ et $\{e_l, l \in L\}$ est une base de $\mathbb{K}$. Un tel choix peut être fait de sorte que la restriction de B à $\mathbb{E}_j$ soit de type $\lambda_j \bar{B}_j$ où $\bar{B}_j$ a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} J_{l_1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & J_{l_r} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & J_{l_j} \end{pmatrix}, \tag{B.2}$$

où chaque bloc J_{l_r} est donné par $J_{l_r} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. De cette construction, notons que $\{\pm i\lambda_j\}_{j\in j}$ est l'ensemble des valeurs propres non nulles de B et que $\mathbb{E}_j$ est l'espace propre associé à $\pm i\lambda_j$.

Soit B_j l'endomorphisme dont la restriction à $\mathbb{E}_j$ est $\frac{1}{\lambda_j} B_{|\mathbb{E}_j}$ et qui est 0 sur $(\mathbb{E}_j)^{\perp}$. Par construction, nous avons

$$B = \sum_{j\in J} \lambda_j B_j, \quad [B_k, B_j] = 0 \text{ pour } k \neq j, \text{ et } (B_j)^3 = -B_j.$$

Il en résulte que

$$Q = \text{Exp}B = \text{Exp}(\sum_{j\in J} \lambda_j B_j) = \prod_{j\in J} \text{Exp}(\lambda_j B_j). \tag{B.3}$$

En particulier, les valeurs propres de Q qui sont différentes de 1 sont données par la famille $e^{\pm i\lambda_j}$. Donc, dans (B.3), chaque $e^{\pm i\lambda_j}$ peut s'écrire comme $e^{\pm i\theta_j}$ avec $0 < \theta_j \leq \pi$ et, nous avons

$$(|B|_{HS})^2 = 2\sum_{j\in J} n_j(\theta_j)^2,$$

où $n_j = dim\mathrm{E}_j$.

Réciproquement, considérons un élément $Q \in SO_{HS}(\mathbb{H})$. Alors, $C = Q - Id$ est compact et donc l'ensemble des valeurs propres de Q différentes de 1 est dénombrable. Comme Q est unitaire dans un espace de Hilbert réel, on peut écrire cet ensemble comme suit $\{e^{\pm i\theta_j}\}_{j\in J}$. Notons que chaque espace propre de Q est un espace propre de C et vice-versa. De plus, l'ensemble des valeurs propres non nulles de C est $\{e^{\pm i\theta_j} - 1\}_{j\in J}$. Donc, on a une décomposition spectrale associée à C de type (B.1) où $\mathbb{K}$ est le noyau de C. Notons que la restriction Q_j de Q sur chaque espace de dimension finie $\mathbb{E}_j$ est une isométrie de cet espace dont l'ensemble des valeurs propres est $\{e^{\pm i\theta_j}\}$. D'après le lemme classique de la décomposition d'une rotation en dimension finie (voir [1]), on a une base orthogonale $\{e_{l_1}, \cdots, e_{2l_j}\}$ de $\mathbb{E}_j$ dans laquelle Q_j a une matrice de type

$$\begin{pmatrix} R_{l_1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & R_{l_r} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & R_{l_j} \end{pmatrix},$$

où chaque bloc R_{l_r} est donné par $R_{l_r} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{l_r} & -\sin\theta_{l_r} \\ \sin\theta_{l_r} & \cos\theta_{l_r} \end{pmatrix}$.

$$\theta_{l_r} \equiv \theta_j(\text{ modulo } \pi).$$

Il en résulte que $Q_j = \operatorname{Exp}(\theta_j \bar{B}_j)$ où $\bar{B}_j$ a une matrice de type (B.2) dans la base précédente . Comme dans la première partie, soit B_j l'endomorphisme qui est égale à $\bar{B}_j$ sur $\mathbb{E}_j$ et qui est zéro sur $(\mathbb{E}_j)^{\perp}$.
D'autre part, soit $\hat{Q}_j$ l'opérateur inversible dont la restriction à $\mathbb{E}_j$ est égale à Q_j et qui est l'identité sur $(\mathbb{E}_j)^{\perp}$. Bien sûr, la composition infinie $\prod_{j\in J} \hat{Q}_j$ est égale à Q et on obtient

$$Q = \prod_{j\in J} \operatorname{Exp}(\theta_j B_j).$$

Comme dans la première partie, par construction, on a aussi $[B_k, B_j] = 0$. Il en résulte que $B = \sum_{j\in J} \theta_j B_j$ est bien défini et $|B|^2_{HS} = 2\sum_{j\in J} n_j(\theta_j)^2$.

$\triangle$

Nous avons besoin également du résultat suivant (voir [8] pour la dimension finie).

Proposition B.1.2 *Soit un boost $T \in SO_{HS}(\mathbb{H}, 1)$, alors il existe $U \in \mathfrak{h}$ tel que $T = \operatorname{Exp}(U)$.*

la démonstration de cette Proposition est une adaptation formelle du résultat correspondant en dimension finie de [8]. On donne seulement les arguments essentiels.

Démonstration. Soit $U \in \mathfrak{h}$, $U = \begin{pmatrix} 0 & [u]^* \\ [u] & 0 \end{pmatrix}$ où $u \in \mathbb{H}$. On a $U^3 = \omega^2 U$ avec $\omega = |u|$. Par application de ce résultat on obtient facilement

$$\mathrm{Exp}(U) = Id_{\mathcal{H}} + \frac{\sinh \omega}{\omega} U + \frac{\cosh \omega - 1}{\omega^2} U^2.$$

Comme en dimension finie on obtient

$$\mathrm{Exp}(U) = \begin{pmatrix} \cosh \omega & \frac{\sinh \omega}{\omega}[u]^* \\ \frac{\sinh \omega}{\omega}[u] & Id_{\mathbb{H}} + \frac{\cosh \omega - 1}{\omega^2}[u][u]^* \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, nous avons la relation

$$\left(Id_{\mathbb{H}} + \frac{\cosh \omega - 1}{\omega^2}[u][u]^*\right)^2 = Id_{\mathbb{H}} + \frac{\sinh^2 \omega}{\omega^2}[u][u]^*.$$

Finalement, nous obtenons

$$\mathrm{Exp}(U) = \begin{pmatrix} \cosh \omega & \frac{\sinh \omega}{\omega}[u]^* \\ \frac{\sinh \omega}{\omega}[u] & \sqrt{Id_{\mathbb{H}} + \frac{\sinh^2 \omega}{\omega^2}[u][u]^*} \end{pmatrix}.$$

D'autre part, de la démonstration de la Proposition 3.2.3, on a

$$T = \begin{pmatrix} c & [v]^* \\ [v] & \sqrt{Id_{\mathbb{H}} + [v].[v]^*} \end{pmatrix},$$

avec $v \in \mathbb{H}$.
Soit $v \in \mathbb{H}$, on cherche donc à trouver $u \in \mathbb{H}$ qui satisfait l'équation suivante

$$\begin{pmatrix} c & [v]^* \\ [v] & \sqrt{Id_{\mathbb{H}} + [v].[v]^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \omega & \frac{\sinh \omega}{\omega}[u]^* \\ \frac{\sinh \omega}{\omega}[u] & \sqrt{Id_{\mathbb{H}} + \frac{\sinh^2 \omega}{\omega^2}[u][u]^*} \end{pmatrix}.$$

Cette équation peut être résolue point par point comme en dimension finie (voir [8]).

$\triangle$

Démonstration du Théorème 3.3.6. Soit $A \in SO_{HS}(\mathbb{H}, 1)$. De la Proposition 3.3.2, on a $A = PT$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, Q appartient à $SO(\mathbb{H})$ et T est un boost.
D'après la Proposition B.1.2, il existe une famille d'endomorphismes $\{B_j\}_{j \in J}$ avec $B_j \in \mathfrak{so}_{HS}(\mathbb{H})$ tels que $[B_k, B_j] = 0$ pour $j \neq k$ et une suite $\{\theta_j\}_{i \in J}$ avec $0 < \theta_j \leq \pi$

telle que $Q = \prod_{j \in J} \mathrm{Exp}(\theta_j B_j)$. De l'isomorphisme $Q \mapsto P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{so}_{HS}(\mathbb{H})$ dans $\mathfrak{s}$, on peut supposer que B_j appartient à $\mathfrak{s}$. Par conséquent

$$P = \prod_{j \in J} \mathrm{Exp}(\theta_j B_j).$$

De la Proposition B.1.2 on termine la démonstration.

$\triangle$

B.2 Démonstration du Lemme 3.4.2

D'abord nous rappelons quelques résultats de géométrie sous-riemannienne sur $SU(1,1)$. Premièrement, on peut identifier $\mathbb{R}^2$ à l'espace complexe $\mathbb{C}$. Classiquement, $SO_0(2,1)$ est isomorphe à $PSU(1,1)$ qui est la composante connexe de l'identité du groupe de Lie $SU(1,1)$. Il découle que $SU(1,1)$ est le groupe des matrices inversibles de type $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{pmatrix}$ où z_1 et z_2 appartiennent à $\mathbb{C}$. Notons que $SU(1,1)$ peut s'identifier à $\mathbb{C} \times \mathbb{S}^1$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$ de $SU(1,1)$ est engendrée par

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et } Z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Nous avons les relations

$$[X,Y] = -Z, \qquad [X,Z] = -Y, \qquad [Y,Z] = X,$$

Sur $SU(1,1)$, nous considérons la distribution invariante à gauche $\triangle$ engendrée par X et Y, la métrique riemannienne invariante à gauche est induite par $\frac{1}{2}Tr(X_1X_2)$ sur le sous-espace engendré par X et Y. On obtient une structure sous-riemannienne $(SU(1,1), \triangle, g)$ sur $SU(1,1)$. Soit δ la distance horizontale invariante à gauche associée a cette structure. Le revêtement universel $\tilde{SU}(1,1)$ peut s'identifier à $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. La projection canonique $\rho : \tilde{SU}(1,1) \to SU(1,1)$ est donnée par

$$(z,t) \to \begin{pmatrix} \sqrt{1+|z|^2}e^{it} & z \\ \bar{z} & \sqrt{1+|z|^2}e^{-it} \end{pmatrix}.$$

Dans notre travail, nous avons besoin du résultat suivant [11].

Proposition B.2.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$ *avec* $t \neq 0$. *Il existe une géodésique horizontale (normale) d'une longueur minimale qui relie* Id *et* A *et la distance horizontale* $\delta(Id, A) = |\theta|$ *pour* $0 < |\theta| \leq \pi$ *et* $\pm\theta \equiv t$ *(mod* π*).*

Maintenant, on a un isomorphisme de $SU(1,1)$ dans $SO(2,1)$ donné par :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1+|z|^2}e^{it} & z \\ \bar{z} & \sqrt{1+|z|^2}e^{-it} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+|z|^2} & \mathrm{Re}(z) & \mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Re}(z) & a & b \\ \mathrm{Im}(z) & b & c \end{pmatrix},$$

où $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z)^2 & \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) & \mathrm{Im}(z)^2 \end{pmatrix}$.
L'isomorphisme induit des algèbres de Lie est donc

$$\begin{pmatrix} it & z \\ \bar{z} & -it \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{Re}(z) & \mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Re}(z) & \cos t & -\sin t \\ \mathrm{Im}(z) & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Par consequent, il existe un isomorphisme entre la structure sous-riemannienne sur $SU(1,1)$ et la structure sous-riemannienne sur $SO(2,1)$.

Démonstration du Lemme 3.4.2. On rappelle que $\bar{A}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Exp}(\bar{\mathcal{B}}_j) \end{pmatrix}$ et que $\bar{\mathcal{B}}_j$ a une décomposition (B.2) en blocs diagonaux $\theta_j J_{l_r}$. Chaque bloc J_{l_r} donne un élément de $SO(\mathbb{F}_{l_r}, 1)$ où $\mathbb{F}_{l_r}$ est un plan en $\mathbb{E}_j$. Alors, d'après la Proposition B.2.1 et via l'isomorphisme précédent, nous avons une courbe horizontale
$\bar{\gamma}_{l_r} : [0, T_{l_r}] \to SO(\mathbb{F}_{l_r}, 1)$ paramétrée par longueur-d'arc dont la longueur est θ_j telle que $\bar{\gamma}_{l_r}(0) = Id_{\mathbb{F}_{l_r}}$ et $\bar{\gamma}_{l_r}(T_{l_r}) = \theta_j J_{l_r}$. En particulier, $T_{l_r} = |\theta_j|$. On obtient une courbe $\gamma_{l_r} : [0, \theta_j] \to SO(\mathbb{E}_j, 1)$ de longueur θ_j, qui relie $Id_{\mathbb{E}_j}$ et un certain élément $\theta_j \hat{J}_{l_r}$ de $SO(\mathbb{E}_j, 1)$ telle que

$$(\gamma_{l_r})_{|\mathbb{F}_{l_r}} = \bar{\gamma}_{l_r}, \quad \text{et } (\gamma_{l_r})_{|[\mathbb{F}_{l_r}]^\perp} = id.$$

Ce qui signifie que la courbe γ_j, obtenue par concaténation de la famille γ_{l_r} pour $l_r = 1, \cdots l_j$, est définie sur $[0, n_j\theta_j]$, et que γ_j est une courbe horizontale dans $SO(\mathbb{E}_j, 1)$, de longueur $n_j\theta_j$, qui relie $Id_{\mathbb{E}_j}$ et A_j. $\triangle$

Bibliographie

[1] M. Audin, *Geometry*, Springer, 2003.

[2] W.Benz, *Hyperbolic distances in Hilbert spaces*, Aequat. Math. **58** (1999) 16-30.

[3] W.Benz, *Geometry in inner Real Inner Product Spaces*, Springer, 2005.

[4] W.Benz, *Möbius Sphere Geometry in Inner Product Spaces*, Aequat. Math. **66** (2003) 284-320.

[5] P. Cabau, F. Pelletier, *Almost Lie algebroid structure on an anchored Banach bundle*, J. Geom. Phys. **62** (2012) 2147-2169.

[6] H.Cartan, *Cours de Calcul Différentiel*, Hermann Paris, Collection Méthodes, (1977).

[7] J. Dieudonné, *Fondements de l'analyse moderne*, Cahiers scientifiques Fasc XXVII, Gauthier-Villars, Paris (1967).

[8] J. Gallier, *Notes on group actions. Manifolds, Lie Groups and Lie Algebra*, http ://www.cis.upenn.edu/cis610/lie1.pdf.

[9] J. Gallier, D. Xu, *Computing exponentials of skew-symmetric matrices and logarithms of orthogonal matrices*, Int. J. Robot. Autom. **17**(4) (2002).

[10] M. Gordina, *Hilbert-Schmidt groups as infinite-dimensional Lie groups and their Riemannian geometry*, J.Funct. Anal. **227** (2005) 245-272.

[11] E. Grong A. Vasilèv, *Sub-Riemannian and sub-Lorentzian geometry on SU(1,1), and on its universal cover*, J. Geom. Mech.**3** (2) (2011) 225-260.

[12] J-C. Hausmann, *Contrôle des bras articulés et transformations de Moëbus*, Enseign. Math.(2) **51** (2005) 87-115

[13] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces* American Mathematical Society, Providence, 2001.

[14] J.D.Lawson, *Semigroups in Möbius and Lorentzian geometry*, Geom. Dedic **70** (1998) 139-180.

[15] S. Lang, *Differential manifolds*, Addison- Wesley Publishing Company, Inc. (1972).

[16] A. Lathuille, F. Pelletier, *On Sussmann theorem for orbits of set of vector fields on Banach manifolds*, Bul. Sci. Math. **136**(2012) 579-616.

[17] F. Pelletier, *Integrability of weak distributions on Banach manifolds*, Indag. Math. **23** (2012) 214-242.

[18] F. Pelletier, R. Saffidine, *Snakes and articulated arms in an Hilbert space*, Ann. Fac. Sci. Toulouse. **22** (3) (2013) 525-557.

[19] F. Pelletier, R. Saffidine, N. Bensalem, *Möbius transformations and the configuration space of a Hilbert snake*, Bul. Sci. Math. **139** (2015) 847-879.

[20] E. Rodriguez, *L'algorithme du charmeur de serpents*, PhD Thesis, University of Geneva,
http ://www.unige.ch/cyberdocuments/theses2006/Rodriguez/these.pdf.

[21] B. Simon,*Trace ideals and their applications*, Lon. Math. Soc. Lect. Note Ser, vol.35, Cambridge University Press, Cambridge-New York 1979.

[22] H.-J. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1973) 171-188.

[23] A. Wirzba,*Quantum mechanics and semiclassics of hyperbolic n-disk scattering systems*, appendix A, Phys Rep **309** (1999) 1-116.