

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE

SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS- Sétif-1

THESE

Présentée à la Faculté des Sciences.

Département de Physique

Pour l'Obtention du Diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Physique Théorique

Par

Mr. Medjedel Soheyb

Thème

**Calcul des Densités de Courants dans les Systèmes
Quantiques Confinés par des Pièges Harmoniques
en Dimensions Réduites**

Soutenue Publiquement Le 14/04/2016 Devant La Commission D'examen :

Pr. S. Lamari	Univ. Ferhat Abbas - Sétif-1	Président
Pr. M. Benarous	Univ. Hassiba Benbouali - Chlef	Examineur
Pr. A. Bouljedri	Univ. Hadj Lakhdar - Batna	Examineur
Pr. K. Bencheikh	U. Ferhat Abbas - Sétif-1	Rapporteur

THESE

Présentée à la Faculté des Sciences
Département de Physique
Université de Sétif-1
Pour l'Obtention du Diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCE

Spécialité : Physique théorique
Par

Mr. Medjedel Soheyb

Thème

**Calcul des Densités de Courants dans les Systèmes
Quantiques Confinés par des Pièges Harmoniques
en Dimension Réduites**

2016

Abstract

We present in this thesis a Theoretical study in the field of quantum gases. The system we consider is a two dimensional gas of an ultra-cold neutral fermions confined by an isotropic harmonic potential and set in a very fast rotation. We study the distribution of the particle density, the matter current density and the pseudo-magnetization, we show that in the regime of a fast rotation, the particle density exhibits a structure of a series of regions of constant density separated by regions where the density is decreasing. We discuss the influence of this structure on the distribution of the mass currents and it is found that these currents flow in opposed directions in going from an incompressible region to the neighboring and that this current is composed of a two types of currents. We also show that in this limit of fast rotation, there exist only one type of current in each region. The inversion of the signs of the current is related to the oscillations of the pseudo-magnetization of the system in a similar way as exits in the physics of the electrons subjected to ultra-strong magnetic fields. The integrated current of the system is calculated and it is found that it represents the pseudo-magnetization at the center of the trap. We also show that this integrated current is quantized.

In the same context, we extend the treatment to the case of an anisotropic harmonic confining potential, we calculated the corresponding density profile in Fourier space. In order to probe the spatial distribution of the quantum gas, we propose to apply the result of this density profile in Fourier space in the study of elastic light scattering by the an ultra-cold atomic gas

Résumé

Nous présentons dans cette thèse une étude théorique dans le domaine des gaz quantiques. Le système que nous considérons est à deux dimensions, formé d'un gaz d'atomes de fermions ultra-froid électriquement neutres confiné par un potentiel harmonique isotrope et mis en rotation très rapide. Nous étudions les distributions de la densité de particules, de courant de matière et de pseudo-magnétisation comme réponse du système à cette rotation. Nous montrons que dans le régime de rotation ultra rapide, la densité de particules présente une structure sous forme d'une suite des régions de densité constante séparées par des régions où la densité est décroissante, nous avons discuté l'influence de cette structure sur la distribution des courants de masse et on a trouvé que ces courants circulent dans des directions opposées en passant d'une région à une autre adjacente. Nous montrons que ce courant est composé de deux types de courants. Nous avons montré aussi que dans ce régime, il n'existe qu'un seul type de courant dans chacune des régions. Le renversement des signes du courant est lié aux oscillations de la pseudo-magnétisation du système similaire à la physique des électrons en présence d'un champ magnétique très intense. Le courant total du système a été calculé et on a trouvé qu'il représente la pseudo-magnétisation au centre du piège. Nous avons montré aussi que ce courant intégré est quantifié.

Dans le même contexte, nous avons généralisé le formalisme au cas où le potentiel confinant le système devient anisotrope, et on a calculé le profil de densité dans l'espace de Fourier et proposé d'appliquer ce résultat pour étudier la diffusion élastique de la lumière par un nuage atomique ultra froid dans le but de sonder la distribution spatiale du gaz.

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein de l'équipe 3 (systèmes quantiques en dimensions réduites) du laboratoire de physique quantique et systèmes dynamiques de l'université Ferhat Abbas de Sétif_1.

Je veux exprimer toute ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur Bencheikh Kamel, mon directeur de thèse. Je tiens en premier lieu à vous saluer chaleureusement, Monsieur, et à vous remercier fortement de m'avoir proposé ce sujet de thèse sur les atomes ultra froids qui est très intéressant et très prometteur. J'ai beaucoup appris à votre contact, tout en prenant un très grand plaisir à être votre étudiant et membre de l'équipe 3 de recherche. Mr Bencheikh, vous êtes déjà connu chez tout le monde par votre gentillesse, bonté et tout le sérieux, je vous remercie pour ces qualités humaines, mais en particulier pour vos qualités scientifiques comme un chercheur physicien théoricien, vous m'avez étonné plusieurs fois par vos capacités intellectuelles. En ce qui concerne la réalisation de cette thèse, je vous présente mes sincères remerciements infinis pour vos qualités que vous avez fait preuve en tant que directeur de ma thèse tout au long de ce travail, la patience, le dévouement, et surtout en ce qui me concerne, votre compréhension et disponibilité. En petits mots, vous étiez mon exemple et vous le serez pour toujours.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Mr le Professeur G. Vignale de l'université de Missouri-Columbia (USA), avec qui nous avons collaboré. Cette collaboration a été fructueuse dans l'avancée de cette thèse.

Je remercie vivement les membres de jury qui ont accepté de juger ce travail et d'y apporter leur caution.

Le premier merci est à Mr le Professeur S. Lamari, de l'université de Sétif-1, qui m'a fait un grand honneur d'accepter la présidence de mon jury de thèse.

Ensuite, je remercie vivement Mr le professeur M. Benarous, de l'université de Hassiba Benbouali-Chlef, pour son acceptation d'examiner ma thèse. En raison de ses travaux sur les gaz quantiques ultra-froids, c'est pour moi un immense honneur qu'il fasse partie du jury de thèse.

Je suis très content que Mr le Professeur A. Bouldjedri, de l'université de Hadj Lakhdar -Batna, a accepté d'être un examinateur de ma thèse, ça me fait un grand honneur et je le remercie infiniment.

En cette occasion je ne peux oublier de remercier Cher Ami et collègue Benazi Makhoulouf informaticien de l'université de M'sila pour son aide efficace et incontournable dans la réalisation et développement du programme numérique utilisé dans ce travail.

Dédicace

Je dédie ce travail de toutes ces années

À mes très chers parents

À toute ma famille

À ma fiancée.

Table des Matières

Résumé	I
Remerciements	II
Dédicace	III
Table des Matières	IV
Abréviations	VII
Introduction Générale	1
Chapitre 1	
Refroidissement et Piégeage des Atomes	
1. Introduction	8
2. Des atomes ultra-froids, Pourquoi ?	9
3. Pression de radiation	11
4. Piégeage magnétique	13
Piégeage magnétique harmonique	15
5. Refroidissement par évaporation	16
6. La mise en rotation d'un gaz ultra-froid	17
Chapitre 2	
Description d'un Système de N particules dans le Repère Tournant	
1. Introduction	23
2. Hamiltonien d'une particule dans le repère tournant	24
2.1 Dérivation classique	24
2.2 Dérivation quantique	26
3. Analogie entre mouvement d'une particule neutre dans le repère tournant et particule chargée soumise à un champ magnétique	28
3.1 Confinement par un potentiel quelconque $V(\vec{r})$	28
3.2 Cas du potentiel harmonique	30
4. Système de N particules en rotation	32
5. Evolution du spectre des énergies à une particule en fonction de la vitesse de rotation	33

Chapitre 3

Densités de Particules, de Courant de Matière et de Pseudo-Magnétisation d'un Gaz de Fermions Neutres dans un Piège Harmonique Isotrope en Rotation Rapide

1. Introduction.....	36
1^{ère} Partie	
2. Traitement Exact du Problème	40
2.1 Densités de particules et de courant de matière	40
2.1.1 Formalisme de la matrice densité ou propagateur de Bloch	40
2.1.1.A. La Matrice Densité de Bloch (MDB)	40
2.1.1.B. Spectre d'énergie du système à partir de MDB	44
2.1.1.C. Calcul de la matrice densité $\rho(\vec{r}, \vec{r}')$ et la densité locale $\rho(\vec{r})$..	45
2.1.1.D. Calcul de la densité de courant de matière $\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r})$	46
2.1.2 Calcul des densités à partir des fonctions d'ondes à une particule	49
2.1.2.A. Les fonctions d'ondes à une particule	49
2.1.2.B. Calcul de la matrice densité $\rho(\vec{r}, \vec{r}')$ et la densité locale $\rho(\vec{r})$..	50
2.1.2.C. Calcul de la densité de courant de matière $\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r})$	51
2.2 La Pseudo-Magnétisation	52
2.3 Etude numérique et tracés des densités	54
2.3.1 Relation explicite entre le potentiel chimique μ (niveau de Fermi) et le nombre total de particules N	54
2.3.2 Régions compressibles et incompressibles de la densité de distribution ...	57
2.3.3 Densité de courant dans les régions compressibles et incompressibles	58
2.3.4 Oscillations de la pseudo-magnétisation.....	62
2.3.5 Résultats.....	63
2^{ème} Partie	
3. Traitement Approximatif de la Limite $\Omega \approx \omega_0$	64
3.1 Densités de particules et du courant de matière dans la limite $\Omega \approx \omega_0$	64
3.1.1 Densité de particules	64
3.1.2 Densité de courant de matière	66
3.2 Le Courant intégré et sa Quantification	69
3.3 Relation exacte entre le courant intégré et la pseudo-magnétisation	71

Chapitre 4

Profil de Densité dans l'Espace de Fourier d'un Gaz Ultra-Froid de Fermions neutres Piégé par un Potentiel Harmonique Anisotrope en Rotation Rapide

1. Introduction	73
2. Description du système et Formalisme MDB $C(\vec{r}, \vec{r}'; \beta)$	74
3. Profil de densité dans l'espace de Fourier $n(\vec{k})$	78
4. Etude à trois dimensions	81
5. La fonction facteur de forme de diffusion élastique	83
Les coefficients de l'expression de MDB.....	85
6. Conclusion.....	86
Conclusion Générale	88
Références bibliographiques	91

Abréviations

MDB :	Matrice Densité de Bloch.
BEC :	Bose-Einstein Condensate (Condensat de Bose-Einstein).
BCS :	Bardeen- Cooper- Schrieffer.
Ω :	Vitesse angulaire de rotation.
ω_0 :	Pulsation du potentiel de confinement (fréquence).
k_B :	Constante de Boltzmann.
B :	Champ magnétique.
$V(\vec{r})$:	Potentiel de piégeage.
N :	Nombre de particules.
M :	Masse d'une particule.
H_0 :	Hamiltonien du système dans le repère du laboratoire.
\vec{L} :	Moment cinétique orbital.
$H_{rot} = H_0 - \vec{\Omega} \cdot \vec{L}$:	Hamiltonien du système dans le repère tournant.
$\varepsilon_{n,m}, E_{n,m}$:	Niveaux d'énergie du système.
Z :	Fonction de partition.
$C(\vec{r}, \vec{r}', \beta)$:	Eléments de matrice du propagateur de Bloch $\exp(-\beta\hat{H})$.
$\Omega_{\pm} = \omega_0 \pm \Omega$:	Fréquences du potentiel harmonique anisotrope à deux dimensions.
$V_{eff}(\vec{r})$:	Potentiel effectif.

\vec{R}, \vec{s} :	Coordonnées de centre de masse et relative respectivement.
L_k^d :	Polynômes de Laguerre généralisés d'ordre d et de degré k .
Θ :	Fonction saut de Heaviside.
μ :	Potentiel chimique ou Energie de Fermi à température zéro.
$\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu)$:	Matrice densité à une particule. dite aussi de Dirac.
\mathcal{L}_μ^{-1} :	Transformée de Laplace inverse.
β :	Un nombre complexe (n'a rien à voir avec $1/k_B T$).
T :	Température.
$\rho(\vec{r})$:	Densité locale.
$\vec{J}_{int}(\vec{r})$:	Densité de courant de matière dans le repère tournant, (intrinsèque).
$\vec{J}_{bulk}(\vec{r})$:	Courant de volume (<i>Bulk current</i>).
$\vec{J}_{edge}(\vec{r})$:	Courant de bord (<i>Edge current</i>).
$a = \sqrt{\hbar/M \omega_0}$:	Longueur de l'oscillateur harmonique.
$\mathcal{M}(\vec{r})$:	La Pseudo-Magnétisation orbitale.
$\alpha = \Omega/\omega_0$:	Rapport de rotation.
$I = \int_0^\infty \vec{J}_{int}(\vec{r}) \vec{e}_\varphi dr$:	Courant intégré (courant par section radiale).
$n(\vec{k})$:	Transformée de Fourier de la densité locale.
$S_{el}(\vec{k})$:	Facteur de Forme élastique.
$\delta = \omega_y / \omega_x$:	Paramètre de l'anisotropie.
$\eta = \Omega/\omega_x$:	Ratio de rotation (dans le cas anisotrope).

Introduction Générale

Introduction Générale

Depuis deux décennies, les recherches sur les gaz quantiques dilués dégénérés ne cessent de connaître un développement spectaculaire. Grâce au progrès technique de piégeage et de refroidissement par laser (le gaz est piégé grâce à un champ magnétique inhomogène, qui le maintient en lévitation au centre d'une enceinte où règne un vide très poussé de l'ordre de 10^{-9} Pa), il a été possible de réaliser les premiers condensats de Bose-Einstein (BEC) d'atomes ultra-froids en 1995 [1-3], il s'agit de la découverte de la condensation de gaz atomiques. Ceci a constitué une avancée majeure dans le domaine de la physique et a permis de vérifier une théorie vieille de 80 ans prédite par Bose et Einstein, à savoir la manifestation d'un état macroscopique quantique où tous les atomes se condensent dans le même état quantique à une particule [4]. Les atomes ultra-froids de rubidium, de sodium et de lithium furent les 3 premiers BEC observés expérimentalement durant l'année 1995. Six années plus tard Carl Wieman, Eric Cornell et Wolfgang Ketterle ont obtenu le prix Nobel de physique en 2001 pour leurs travaux sur ce nouvel état de la matière dictée par la statistique quantique de Bose-Einstein. Depuis cette année d'autres espèces chimiques ont rejoint la famille des condensats de Bose-Einstein pour citer la vapeur d'hydrogène en 1998, de potassium et d'Hélium en 2001, puis Césium et ytterbium en 2003. Les références [5] et [6] sont d'excellents articles de revue qui traitent de l'état du domaine des condensats de Bose-Einstein tant sur le plan expérimental que théorique.

Bien que les premières années de ce nouveau domaine des gaz quantiques ultra-froids les études ont porté principalement sur les atomes bosoniques, ensuite des investigations théoriques et expérimentales ont porté sur les gaz atomiques de Fermi dégénérés et ceci une fois résolu le problème de refroidissement, dû au principe de Pauli. En effet, 4 années après l'observation de la condensation de Bose-Einstein, les premiers gaz atomiques de fermions dégénérés ont été obtenues en 1999 correspondant à des températures de l'ordre $0.3T_F$ où T_F est la température de Fermi du gaz [7-8]. Une issue intéressante dans l'étude des gaz de Fermi dégénérés est le cas où les atomes du gaz sont produits dans deux états internes différents

(spins différents). En effet, les interactions atome-atome peuvent donc avoir lieu dans ce cas et il en résulte un phénomène connu sous le nom d'appariement de paires de fermions appelé aussi paires de Cooper. Le système devient ainsi équivalent à celui de paires de bosons et peut donc acquérir un état superfluide similaire à celui d'un condensat de Bose (superfluidité fermionique). La théorie de ce phénomène a été développée il y'a longtemps en physique du solide et porte le nom de théorie de Bardeen Cooper et Schrieffer (BCS) [10], puis utilisée en physique nucléaire [11]. L'observation d'une transition de type BCS dans les gaz de Fermi dégénérés fut un succès [9].

Un autre aspect important des atomes ultra-froids est leur réponse à des potentiels extérieurs. En particulier la rotation des atomes ultra-froids s'est révélée comme un moyen efficace de simuler des effets similaires à ceux d'un champ magnétique sur les gaz ultra-froids d'atomes neutres. Ces dernières années, beaucoup d'efforts tant sur le plan théorique et expérimental [9], [12-17], ont été réalisés afin de comprendre et d'étudier les propriétés de condensats atomiques (les bosons dans la phase superfluide) en rotation. En effet, il est bien connu depuis les études sur l'Hélium 4 que la mise en rotation de ce fluide dans sa phase superfluide développe des Vortex (mouvement vertical de fluide ceci correspond à la rotation locale du fluide) [4]. L'observation de vortex quantifiés dans les condensats atomiques dont le nombre varie au fur et à mesure que la vitesse de rotation augmente a été un succès supplémentaire pour ce domaine des gaz quantiques et constitue une signature de l'existence de l'état superfluide du condensat [9].

La formation de vortex a été aussi observée pour les gaz de Fermi ultra-froids en rotation. Ceci suppose que le gaz se trouve dans un état superfluide. La superfluidité du gaz de Fermi est due au mécanisme de formation de paires de Cooper (existence d'une interaction résiduelle attractive entre les atomes), le gaz est donc décrit par la théorie de BCS mentionnée plus haut et si le gaz est refroidi au voisinage de la température de Fermi et est mis en rotation on observe la transition BCS-BEC[6].

Dans cette thèse nous nous intéressons aux propriétés d'un gaz de Fermi ultra-froids bidimensionnels soumis à la rotation. On suppose que le gaz est produit dans un seul état de spin (gaz polarisé) afin de négliger au 1^{er} ordre les interactions atome-atome et par conséquent utiliser l'approximation de particules indépendantes. Nous voulons examiner les effets de la rotation rapide sur les propriétés du système. La rotation engendre comme le ferait un champ magnétique sur des particules chargées, des courants de masse et une magnétisation, nous nous proposons d'examiner le profil de la densité de particules, des courants de matière et de la pseudo-magnétisation due à la rotation.

Le présent manuscrit contient 4 chapitres organisés comme suit :

Chapitre 1 :

Dans ce chapitre, on présente les techniques de refroidissement et de piégeages des atomes utilisées pour amener un gaz atomique au seuil de dégénérescence, où des phénomènes quantiques se manifestent au niveau macroscopique. Nous avons essayé au même temps de donner une vue claire sur les idées théoriques qui ont été à la base des développements expérimentaux. Malgré leurs diversités, nous avons choisi parmi les techniques utilisées celles qui sont les plus connues. En plus, puisque le sujet de la thèse porte sur des études théoriques des propriétés quantiques des gaz de fermions confinés dans des potentiels harmoniques en rotation, nous présentons les méthodes de confinements et plus particulièrement les pièges harmoniques. A la fin du chapitre on expose brièvement la technique expérimentale de la mise en rotation du potentiel confinant le gaz d'atomes froids.

Chapitre 2 :

Ce chapitre est consacré, par souci pédagogique, à la dérivation de l'hamiltonien d'une particule confinée par un potentiel tournant. Une dérivation basée sur la mécanique classique est aussi donnée. Ensuite, une analogie entre le Hamiltonien dans le repère tournant et celui d'une particule chargée soumise à un champ magnétique est présentée. Cette analogie est en fait très instructive car on s'attend à observer des effets similaires à ceux connus dans les systèmes d'électrons confinés sous l'influence de champs magnétiques, en particulier quand ces champs sont très intenses. Ce chapitre se termine par une étude concernant l'évolution du spectre des énergies à une particule en fonction de la vitesse de rotation du système.

Chapitre 3 :

Dans ce chapitre on présente l'essentiel de notre travail. Nous étudions ici un système de N atomes neutres bidimensionnel mis en rotation et décrit par le Hamiltonien établi au chapitre 2, nous dérivons en premier lieu les expressions analytiques exactes pour la densité de particules, la densité de courant et la densité de pseudo-magnétisation. Deux approches seront présentées, l'une basée sur le formalisme du propagateur de Bloch (Matrice Densité de Bloch ou brièvement **BDM**) et l'autre dans laquelle on utilise directement les expressions analytiques des fonctions d'ondes à une particule solutions de l'équation de Schrödinger régissant le système et qui sont connues pour le type d'hamiltonien que nous considérons ici. Le régime de rotation pour lequel on a dérivé les expressions des densités différentes du système est en premier temps arbitraire, mais le cœur de cette étude est porté sur l'investigation du régime de rotation très rapide où la vitesse de rotation Ω s'approche de la fréquence de confinement ω_0 . En fait, la physique de ce régime est riche de phénomènes quantiques. En plus des caractéristiques intéressantes que présente la densité de particule dans ce régime limite, où on observe l'apparition des régions dites incompressibles dans lesquelles la densité de particule est constante séparées par des régions de gradient de densité dites

régions compressibles et le système entre dans ce cas dans le régime de Landau, nous nous intéressons plus particulièrement dans ce régime du comportement de la densité du courant de matière et le sens de sa circulation dans ces régions. Nous allons montrer que dans ce régime le courant de matière est composé de deux types de courants et qu'il n'existera dans chacune des régions qu'un seul type de courant circulant en sens opposé à l'autre dans la région adjacente, nous avons proposé que ce résultat théorique doit être mené à une vérification expérimentale pour confirmation avec les atomes froids vu le développement technologique des techniques laser atteintes ainsi que les techniques d'imagerie avancées et aussi la contrôlabilité des paramètres de l'expérience dans ce domaine. Pour montrer l'origine et la nature de chaque type de courant, nous ferons toute une étude approximative du système dans la limite $\Omega \approx \omega_0$ et on montre que les courants dans les régions de densité constante (incompressible) sont dus au gradient du potentiel confinant (courant de Hall quantique) alors que ceux circulant dans les régions de densité décroissante (compressible) sont liés par le gradient de celle-ci (courant de bord). Dans ce chapitre aussi, nous donnons la relation qui existe entre la densité de courant et la pseudo-magnétisation locale du système en expliquant que le renversement des sens de ce courant de matière dans deux régions successives revient à l'oscillation de cette pseudo-magnétisation de façon similaire à celles des oscillations de de Haas-van Alphen de la magnétisation dans un système de matière condensée. L'existence de cette pseudo-magnétisation nous a conduits à la quantification du courant persistant total (courant intégré) analogue à la quantification du courant du vortex dans un système bosonique superfluide. Des résultats numériques obtenus pour les diverses densités (de particule, de courant et de pseudo-magnétisation) sont donnés dans le régime en rotation rapide et ultra-rapide pour montrer le comportement de chaque grandeur. Nous signalons ici que l'obtention de ces résultats numériques a nécessité le développement de tout un nouveau logiciel (Delphi) par un collègue informaticien de l'université de M'sila, puisque dans nos calculs nous devons aller à calculer des nombres de l'ordre du factoriel de $2000! \sim 10^{5735}$ quand nous voulons traiter le régime de rotation très rapide, le nombre 2000 ici par exemple représente la dégénérescence du niveau de Landau le plus bas, il n'était pas facile pour nous de faire ces calculs avec un logiciel ordinaire. Une interprétation physique de ces résultats trouvés sera donnée à la suite de ceux-ci. Le chapitre comprend aussi certains détails de calculs numériques du niveau de Fermi correspondant à un nombre d'atomes N fixé et une à vitesse de rotation choisie.

Chapitre 4 :

Dans ce chapitre, nous aborderons un problème un peu différent. En fait, le système traité dans le chapitre 3 consiste à un système fermionique dans un piège harmonique isotrope en rotation pour lequel la densité de particule et de courant sont connues, nous voulons ici traiter un confinement harmonique anisotrope qui est le plus générale (et c'est le cas en fait de la plupart des potentiels générés dans des expériences réels sur des atomes froids) d'un système de fermions en rotation. Des recherches sur la densité locale pour ce système ont été faites, mais qui traitent seulement le cas d'une rotation très rapide où les particules vont

occuper les niveaux de Landau les plus bas et dans ce cas les solutions de l'équation de Schrödinger sont simples (on ne prend que les premières fonctions d'ondes). Aucune expression analytique exacte valide pour n'importe quelle vitesse de rotation n'a été donnée jusqu'à maintenant, ce qui nous a incité à chercher cette densité locale ainsi que la densité de courant. Au lieu de chercher les solutions directes de l'équation de Schrödinger, nous avons préféré utiliser le formalisme de la matrice densité canonique de Bloch qui est reliée, comme on va le voir, à la matrice densité via une transformée de Laplace inverse. Pour un potentiel harmonique anisotrope en rotation nous avons obtenu une expression compacte dans l'espace de Fourier du profil de la densité locale. Cette dernière grandeur est proportionnelle au facteur de forme utilisé dans les processus de diffusion pour explorer les propriétés de la cible, à savoir ici le gaz quantique. A la fin de ce chapitre on présente une étude préliminaire de la diffusion élastique de la lumière par un gaz d'atomes piégé.

Conclusions générale :

Ce dernier chapitre comprend une synthèse des résultats ainsi que des extensions possibles de ce travail.

Chapitre 1

Refroidissement et Piégeage des Atomes

Chapitre 1

Refroidissement et Piégeage des Atomes

1. Introduction

Chaque expérience sur les gaz quantiques dégénérés commence avec le refroidissement des vapeurs d'atomes à partir de la température ambiante ou plus élevée (température de four) jusqu'à des températures extrêmement basses de l'ordre de milli Kelvin. La technique standard pour refroidir ces vapeurs atomiques est « le Refroidissement LASER » qui a été développée pendant les années 80. L'idée principale de cette technique est d'immobiliser un jet d'atomes à l'aide d'un faisceau laser en diminuant la vitesse moyenne d'agitation des atomes et ceci grâce à l'action mécanique de la lumière sur ceux-ci. On est ainsi arrivé à passer de plusieurs centaines de mètres par seconde (température ambiante) à des vitesses de quelques centimètres par seconde.

Il est possible de changer la vitesse d'un atome par interaction de ce dernier avec de la lumière. En plus de son énergie $E = \hbar\omega_L$, un photon possède aussi une impulsion $p = \hbar k$, qui est l'origine de l'action mécanique sur un atome. Quand l'atome absorbe de la lumière, il emmagasine l'énergie en faisant une transition vers un état excité, conserve l'impulsion en reculant avec $\hbar k$. C'est cette variation de la vitesse de l'atome dû à ce processus qui est intéressante à savoir $\Delta v = \hbar k / m \sim$ quelques cm/s . Mais, lorsqu'un seul de ces processus est en jeu, la vitesse, de l'atome est très faible par rapport à la vitesse thermique. Répétée un grand nombre de fois cette interaction peut parvenir à un changement notable de la vitesse de l'atome. En utilisant un faisceau laser intense on est ainsi arrivé à dévier légèrement un jet d'atomes par un faisceau laser [18], mais aussi à modifier le module de la vitesse jusqu'à des valeurs très petites [19,20].

La manipulation des atomes (vitesses, positions, degrés de liberté internes), les refroidir et les piéger, est l'une des réalisations remarquables des techniques Laser. Le piégeage des particules chargées (ions par exemple) par des champs électromagnétiques est un processus simple à cause de leurs charges (piège de Paul 1990) et s'est réalisé avant le

refroidissement par radiation laser pour un temps large (Wineland and Dehmelt 1975; Dehmelt 1990).

2. Des Atomes Ultra-Froids, Pourquoi ?

La réponse à cette question est parce qu'il y a toute une nouvelle physique qui se cache derrière. A très basse température un nouvel état de la matière émerge, des phénomènes quantiques qui ne se manifestent qu'à basses températures au niveau macroscopique, des possibilités d'étudier et de comprendre des phénomènes quantiques tels la supraconductivité, la superfluidité, et d'autres comportements collectifs de la matière, dans un milieu accessible et contrôlable. En fait, on est arrivé à la vérification expérimentale de la condensation de Bose-Einstein dans des gaz dilués, puis étendue plus tard aux gaz fermioniques pour réaliser une mer de Fermi. La possibilité de contrôler l'interaction entre des particules ultra-froides par simple ajustement d'un champ magnétique en jouant sur des résonances dites de Feshbach, et le confinement des atomes froids dans des potentiels électromagnétiques périodiques (créés par des paires de faisceaux laser se propageant dans des directions opposées) pour former des réseaux optiques dont on peut ajuster à volonté tous les paramètres, permet d'obtenir des systèmes modèles. Ces derniers pouvant servir à élucider des problèmes en physique de la matière condensée. Le domaine des gaz quantiques froids s'est révélé riche en application dans des domaines adjacents, par exemple concernant la mesure du temps, puisque le remplacement du jet de césium par des atomes froids a fait gagner un facteur 100 sur la précision des horloges atomiques. La magnétométrie de haute précision a aussi tiré profit de ce développement [21].

A haute température on a une longueur d'onde si courte et par conséquent, les effets ondulatoires sont extrêmement faibles, le gaz est alors décrit en bonne approximation par les lois de la physique classique. En revanche, à basse température les vitesses sont faibles, les longueurs d'ondes deviennent appréciables, et les effets quantiques vont se manifester (Fig.1).

Notons la densité spatiale du gaz (nombre d'atomes par unité de volume) $n = N / \mathcal{V}$ où \mathcal{V} est le volume du gaz, et la concentration quantique par $n_\lambda = 1/\lambda^3$ qui correspond à un atome par volume λ^3 , le rapport entre ces deux grandeurs, $\mathcal{D} = n/n_\lambda$ est une quantité importante qui régit le comportement du gaz. Lorsque $\mathcal{D} \ll 1$, c'est-à-dire $n \ll n_\lambda$, on dira que l'on est dans le régime classique. Dans ce régime, un gaz parfait est un gaz d'atomes sans interactions. Il s'agit d'un gaz avec une densité suffisamment faible et on peut négliger les interactions.

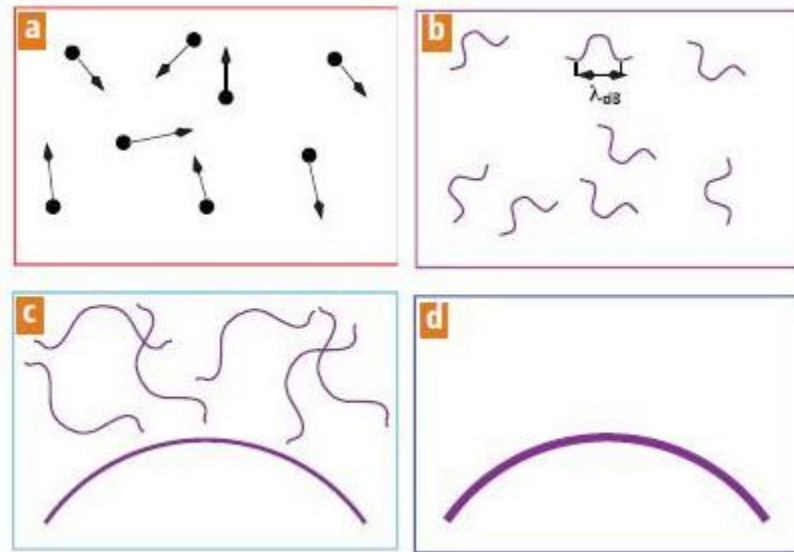


Fig.1. Les deux descriptions possibles d'un gaz d'atomes quand la température diminue. La longueur d'onde associée à un atome très petite par rapport à la distance interatomique correspond à un traitement classique du mouvement des particules, valable à haute température. Cette longueur augmente lorsque la température diminue, les particules sont en fait des objets quantiques, dont il faut prendre en compte la nature ondulatoire. Si les particules du gaz sont identiques, il faut alors distinguer si ce sont des bosons ou des fermions. Pour les bosons, il peut se produire un recouvrement des différents paquets d'ondes au seuil de la dégénérescence quantique. (Image tirée de [21])

Dans ces conditions et pour un gaz à pression et température ambiante, on a donc $\mathcal{D} = 10^{-8}$, et pour des gaz plus dilués utilisés en physique atomique, on peut atteindre $\mathcal{D} = 10^{-15}$. Chaque atome est délocalisé sur un volume typique imposé par la longueur d'onde thermique de de Broglie. Cette distance n'intervient pas tant qu'elle reste négligeable devant la distance moyenne entre les atomes. Quand $\mathcal{D} \geq 1$, ou bien $n \geq n_\lambda$, on rentre donc dans le régime quantique, c'est-à-dire, lorsqu'on diminue suffisamment la température, tout en préservant une densité volumique n assez grande, on atteint le seuil de dégénérescence quantique. En effet, la mécanique quantique commence à influencer les propriétés macroscopiques d'un système à N particules lorsque les fonctions d'ondes des particules commencent à se recouvrir où la longueur d'onde thermique de de Broglie¹ $\lambda = \lambda_{th} = h / \sqrt{2\pi m k_B T}$ devient de l'ordre de la distance interparticule (Fig.1), on aura dans ce cas $n \lambda_{th}^3 \geq 1$.

Définissons une température limite correspondant à $n = n_\lambda$:

¹ k_B est la constante de Boltzmann.

$$T_0 = \frac{h^2}{2\pi m k_B} n^{2/3} \quad (1.1)$$

en dessous de laquelle le gaz est dit dégénéré. On distingue alors deux cas très différents, suivant que le gaz soit formé d'atomes bosoniques ou fermioniques. Dans le cas des bosons, le passage dans le régime quantique s'accompagne d'une accumulation des atomes dans l'état fondamental et le système devient superfluide formant ainsi ce qu'on appelle condensation de Bose-Einstein. Pour des fermions sans interactions le principe de Pauli interdit à deux particules d'occuper le même état quantique et la distribution des fermions se réalise d'une manière différente de celle des bosons. En effet, l'état fondamental de ce système fermionique est déterminé par la tendance des fermions à occuper les niveaux d'énergie du piège les plus bas un par un avec un seul fermion par état quantique pour tout les atomes du gaz. Pour les fermions, l'entrée dans le régime de dégénérescence quantique est caractérisé par l'existence d'une pression résiduelle non nulle à température nulle, dite pression de Fermi qui est la conséquence du principe d'exclusion de Pauli. Au contraire d'un gaz parfait classique pour lequel l'équation des gaz parfaits $p = nk_B T$ prédit une pression p nulle à température nulle [22].

3. Pression de Radiation

Selon les relations de Planck-Einstein, un photon possède une énergie et une quantité de mouvement qui sont données par :

$$E = \hbar\omega, \vec{p} = \hbar\vec{k} \quad (1.2)$$

Où $(\omega = 2\pi\nu, \vec{k} = 2\pi/\lambda)$ sont respectivement la pulsation et le vecteur d'onde du photon. Au cours de chaque processus élémentaire, il y a une conservation de l'énergie et de l'impulsion totales. Si l'énergie de ce photon est égale à la différence entre l'énergie de l'état fondamental de l'atome et l'énergie de son premier état excité, celui-ci, initialement dans son état fondamental, peut donc absorber ce photon pour passer dans son état excité. Mais cet état est instable, et en un temps moyen très court, l'atome retombe dans son état fondamental en émettant spontanément un autre photon, appelé photon de fluorescence, dans une direction **aléatoire**. Lors de l'absorption, le photon transfère à l'atome une impulsion dans le sens de propagation du faisceau lumineux, l'atome alors subit un recul, sa vitesse varie dans le même sens de l'onde excitatrice. Un deuxième recul intervient lors de la désexcitation, mais la direction d'émission spontanée du photon est aléatoire (Fig.2).

Les changements de vitesse qui résultent pour les atomes dans un seul processus d'absorption-émission sont de l'ordre du centimètre par seconde. Ils sont négligeables devant les vitesses d'agitation thermique à température ambiante qui sont de quelques centaines de

mètres par seconde. Par répétition de tels cycles on engendre un ralentissement appréciable des atomes. Pour un faisceau de laser dont la fréquence correspond précisément à une transition entre un niveau atomique fondamental et un niveau atomique excité, les processus d'absorption et d'émission de photons peuvent atteindre plusieurs millions de cycles par atome et par seconde. En effet, comme les photons du laser ont tous la même direction, chaque absorption d'un photon diminue la vitesse de l'atome d'une même quantité et dans le même sens que le faisceau, Mais contrairement aux reculs de l'absorption qui s'ajoutent tous dans la même direction, les reculs correspondant aux émissions spontanées de photons de fluorescence se font dans une direction aléatoire, et donnent par conséquent une contribution nulle en moyenne et ne changent pas la vitesse de l'atome [23,24]. La répétition de tels cycles provoque donc une force moyenne dirigée suivant le faisceau laser, c'est la force de pression de radiation (force de friction). Les vitesses d'agitations thermiques sont réduites à quelques millimètres par seconde seulement ce qui correspond à des vapeurs atomiques de températures inférieures au milli kelvin engendrant ainsi un refroidissement du gaz. La figure ci-dessous illustre un processus élémentaire que nous venons de décrire.

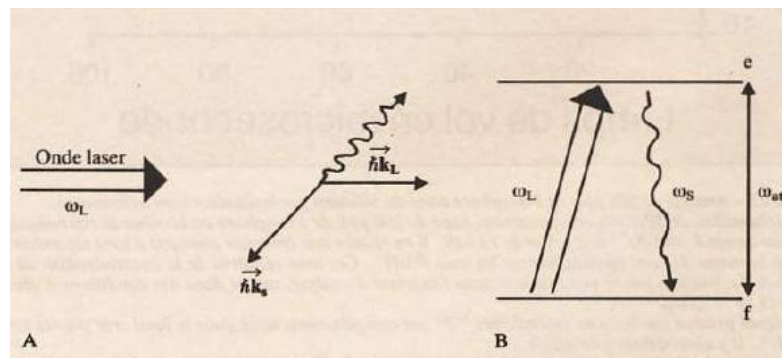


Fig.2. (A et B), Lorsqu' un atome est placé dans une onde lumineuse dont la fréquence est proche de sa fréquence de transition atomique, il peut passer dans l'état excité en absorbant un photon avec lequel il est entré en collision. Il subit durant cette étape d'excitation un premier recul $\hbar\vec{k}_L$. Il subit ensuite un autre recul du fait de l'émission spontanée d'un photon $\hbar\vec{k}_s$ (étape de désexcitation). Le taux de répétitions de ces cycles de fluorescences est d'autant plus élevé que la fréquence lumineuse soit plus proche de celle de la transition atomique. (Image tirée de [23])

Nous n'allons pas nous étaler sur la description des différentes techniques utilisées pour le refroidissement de gaz d'atomes. Citons simplement l'existence du refroidissement par effet Doppler [25-33]. Ce dernier ne permet cependant pas d'obtenir des températures suffisamment basses et la température ne dépasse pas une certaine valeur T_{\min} de l'ordre de 100 microkelvins. Le refroidissement Sisyphes [25] permet d'atteindre des températures minimales de l'ordre de 0.4 microkelvins, donc beaucoup plus basses que celles du refroidissement Doppler. Certains atomes du gaz quantique, refroidit et soumis à la force de friction, peuvent s'échapper à cause de l'échauffement possible (peuvent alors atteindre le

bord de la mélasse optique produite par des faisceaux laser). Afin d'allonger le temps du confinement du gaz on ajoute un champ magnétique statique créant ainsi une force de rappel tendant à ramener les atomes vers l'intérieur du piège. Ce type de piège s'appelle piège magnéto-optique, mais dans ce type de piège on ne peut pas arriver à des températures de dégénérescence quantique. En bref, pour atteindre cette dernière température une combinaison de plusieurs techniques est nécessaire. Tout d'abord le gaz confiné subit un refroidissement laser dans un piège magnéto-optique, ensuite on abaisse encore sa température par une technique appelée refroidissement par évaporation forcée dans un piège magnétique ou optique.

4. Piégeage Magnétique

Le confinement des atomes neutres par un piège magnétique se fait grâce à l'interaction d'un champ magnétique extérieur inhomogène $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ approprié (ce champ peut être créé par des géométries variées) et le moment magnétique $\vec{\mu}$ d'un atome. L'atome acquiert une énergie potentielle de la forme

$$U(\vec{r}) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \quad (1.3)$$

A cette énergie potentielle Zeeman est associée une force agissant sur l'atome $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ et permet de confiner l'atome. Sans vouloir trop s'étaler sur le sujet nous allons discuter tout particulièrement le confinement harmonique qui est largement utilisée dans la physique des gaz ultra-froids. Au début on a pensé à utiliser deux bobines « appelées bobine de Helmholtz » parcourues par des courants en sens inverse créant ainsi un champ magnétique comme présenté dans (Fig.3) [33].

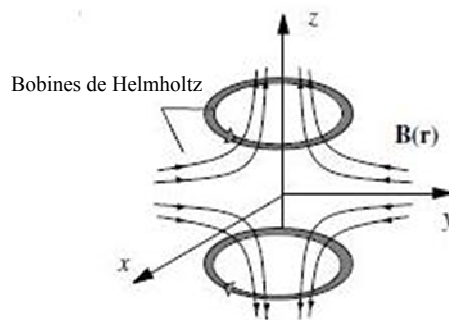


Fig.3. un piège quadrupolaire, les deux bobine de Helmholtz ont le même axe et sont parcourues par des courants opposés. (Image tirée de [33]).

Ceci a un inconvénient majeur pour une expérience de refroidissement des atomes car le champ magnétique produit s'annule au centre, par conséquent on ne peut pas conserver les atomes au centre de piège².

Une disposition alternative est adaptée pour créer un minimum local non nul du champ magnétique, c'est le piège d'Ioffe-Pritchard. Ce piège a été conçu initialement comme une combinaison d'un champ quadripolaire radial créée par quatre fils parallèles, appelés barres de Ioffe, parcourus par des courants deux à deux opposés, qui assurent le confinement transverse (radial) des atomes, et d'une paire de bobines appelées bobines « *pinch* » d'axe parallèle à celui des fils parcourues par un même courant pour assurer le confinement longitudinale (Fig.4-a). Plus tard, d'autres configurations ont été développées produisant de champ magnétique semblable, par exemple (Fig.4-b).

Fig.4-a

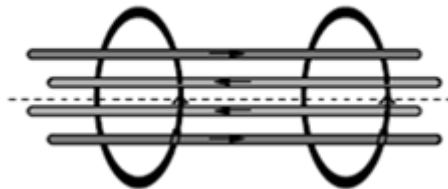


Fig.4-b

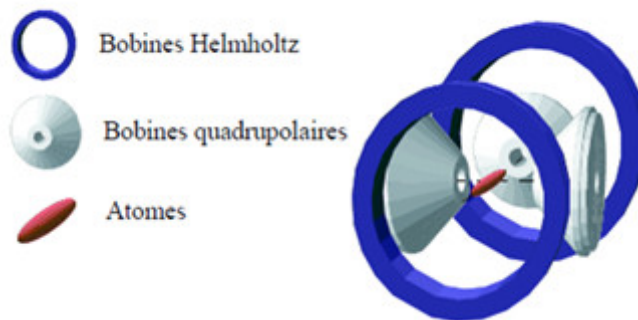


Fig.4. (4-a) piège d'Ioffe-Pritchard originale, La distance entre les deux bobines doit être supérieure à leur rayon pour que le module du champ magnétique présente un minimum au centre. (Tirée de [33]). (4-b) une autre configuration du piège d'Ioffe-Pritchard, les bobine de Helmholtz permettent de modifier le biais du champ B_0 , (Image tirée de [34]).

² À cause de la variation rapide de la direction du champ magnétique en ce point (transition de Majorana) [33].

• Piège magnétique harmonique

Si on choisit l'axe de confinement dans le dispositif de Ioffe-Prichard l'axe (oz), alors l'expression du champ magnétique total crée par ce piège est donné par [26]:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{B''}{2} \begin{pmatrix} xz \\ -yz \\ z^2 - (x^2 + y^2)/2 \end{pmatrix} + B' \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

où B_0 , B' et B'' sont respectivement le biais, le gradient et la courbure du champ. Dans (1.4), les deux premiers termes représentent le champ magnétique crée par les deux bobines, et le dernier est celui crée par les barres de Ioffe. Au voisinage du centre du piège, le module de ce champ $\|\vec{B}(\vec{r})\| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ à l'ordre le plus bas (ordre deux) en x, y et z est :

$$\|\vec{B}(\vec{r})\| \approx B_0 + \left(\frac{B'^2}{2B_0} - \frac{B''}{4} \right) (x^2 + y^2) + \frac{B''}{2} z^2 \quad (1.5)$$

Notons que cette expression du module du champ magnétique présente un minimum local au centre du piège, à condition que $2B'^2 > B_0 B''$. L'énergie d'interaction (1.3) s'écrit donc

$$U(\vec{r}) = \mu B_0 + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{B'^2}{B_0} - \frac{B''}{2} \right) (x^2 + y^2) + \frac{\mu B''}{2} z^2 \quad (1.6)$$

On voit donc que le potentiel de confinement est harmonique dans le voisinage du centre du piège. Introduisons les quantités $\omega_{\perp} = \sqrt{\mu(B'^2/B_0 - (B''/2))}/m$ et $\omega_z = \sqrt{\mu B''}/m$ qui sont respectivement les fréquences de piégeage radiale et axiale et l'expression (1.6) devient

$$U(\vec{r}) = U_0 + \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 \quad (1.7)$$

En examinant les expressions des fréquences de confinement, on voit que la fréquence radiale ω_{\perp} dépend de la valeur B_0 qui peut être modifié à l'aide des deux bobines supplémentaires de Helmholtz³, sans modifier les valeurs de B' et B'' . On peut alors rendre ce potentiel $U(\vec{r})$ isotrope si $B_0 = 2B'^2/3B''$, ou anisotrope en diminuant la valeur de B_0 tel que $\omega_{\perp} \gg \omega_z$ et dans ce cas le nuage du gaz d'atomes piégé prend la forme d'un cigare allongé le long de l'axe (oz).

³ En bleu pour la configuration dans Fig 4-b

Signalons enfin l'existence d'autres possibilités pour créer des potentiels harmoniques. Il s'agit du piégeage dipolaire harmonique où on exploite l'interaction entre le champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ d'un faisceau laser de type gaussien focalisé (l'intensité du champ électrique est approximativement une fonction gaussienne) et le dipôle électrique induit de l'atome \vec{d} dû à l'existence de cet atome dans ce champ électrique [35-39].

5. Refroidissement par Evaporation

Les techniques de piégeage décrites auparavant ne permettent pas de refroidir de façon suffisante le gaz d'atomes, mais seulement de le confiner, par conséquent d'augmenter sa densité, on est encore loin du seuil de dégénérescence quantique. On utilise alors le refroidissement par évaporation qui est une technique efficace amenant un gaz d'atomes initialement piégé à une température de l'ordre du milli Kelvin, vers des températures de l'ordre du micro Kelvin, voire plus bas, ce qui permet d'atteindre ou d'entrer dans le régime quantique. Dans ce dernier régime la densité dans l'espace des phases \mathcal{D} doit être de l'ordre de un ($\mathcal{D} \sim 1$). Dans le piège magnéto-optique la densité dans l'espace des phases reste limitée à 10^{-5} [40], par conséquent pour atteindre le régime quantique on doit gagner pour \mathcal{D} un facteur variant entre $10^5 \sim 10^6$. C'est pourquoi le piège magnéto-optique est souvent utilisé comme un dispositif initial permettant de confiner un gaz et d'obtenir des densités spatiales plus élevées.

Le refroidissement par évaporation est une technique qui permet d'abaisser considérablement la température du gaz d'atomes dans le piège de hauteur finie U_i [voir fig.5]. Ce refroidissement est basé sur le fait que les atomes les plus énergiques qui atteignent le sommet du potentiel confinant s'échappent du piège en laissant derrière eux des atomes moins énergiques et à cause des collisions, entre atomes restants, des échanges d'énergie ont lieu et une re-thermalisation se produit (redistribution de l'énergie cinétique entre les atomes) donc la température du gaz diminue.

Dans la réalité le refroidissement par évaporation comprend deux étapes. La première dite évaporation libre et la seconde forcée. Durant la première étape la profondeur ou hauteur du piège U_i est maintenue fixe et les atomes s'évaporent librement (les plus énergiques sortent du piège) par conséquent le nombre d'atomes restants piégés et la température de l'échantillon décroissent et tout naturellement ce processus se ralentit progressivement. Afin d'éviter ce ralentissement de l'évaporation, on procède à la deuxième étape de refroidissement forcé. Tout d'abord si on diminuait la hauteur du potentiel en réduisant le courant dans les bobines du piège, cette réduction s'accompagnerait d'une diminution du pouvoir de confinement du piège en d'autres termes on aurait moins d'atomes piégés dans le gaz à étudier. Une méthode efficace qui a été utilisée pour le refroidissement forcé consiste en

l'utilisation, dans un piège magnétique par exemple, d'une onde radiofréquence de pulsation ω_f ajustable dont le rôle est double. Ces deux rôles sont effectués simultanément. Le premier est que cette onde permet de réduire progressivement la hauteur du puits de potentiel U_t , sur une échelle de temps longue devant le temps de thermalisation. Mais d'autre part, comme les atomes les plus énergétiques peuvent se trouver dans les régions où le champ magnétique est intense, le champ de l'onde radiofréquence tronque le piège au-delà d'une certaine distance spatiale \vec{r}_{evap} . Cette onde fait basculer les moments magnétiques résonnants avec elle, c'est-à-dire ceux situés sur une surface de champ magnétique donné, telle que $\hbar\omega_f = \mu \|\vec{B}(\vec{r}_{evap})\|$, (μ est le moment magnétique d'un atome) et ceci engendre des transitions radiofréquences, sélectives en énergie, entre les différents sous-niveaux magnétiques piégeant et anti-piégeant et le piège conserve ainsi tout son pouvoir confinant. Au cours de cette évaporation, le nombre d'atomes est divisé par un facteur $10^2 \sim 10^3$. Dans le piège on dispose ainsi d'un nombre final d'atomes dans le régime de dégénérescence, suivant les conditions de l'expérience, variant entre $10^3 \sim 10^8$ [41].

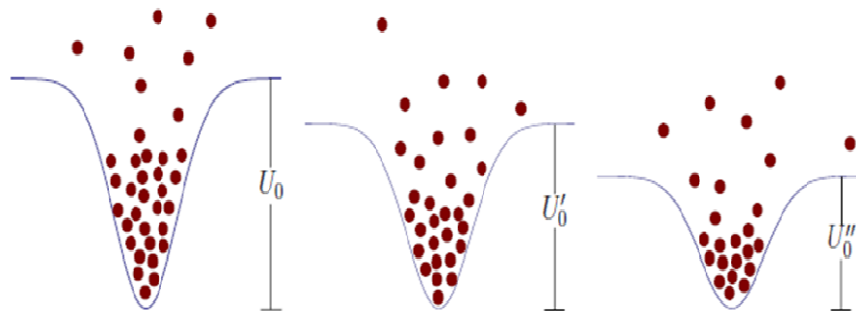


Fig.5. Principe du refroidissement par évaporation. Elimination des atomes énergétiques par troncature du piège. La plupart des atomes occupent le fond du piège mais une fraction d'atomes qui ont une énergie supérieure à la profondeur du potentiel s'échappent du piège. Le reste des atomes se re-thermalise à une température inférieure. Et ainsi de suite jusqu'à atteindre la dégénérescence quantique. (Image tirée de [42])

6. Mise en Rotation d'un Gaz Ultra-Froid : Pourquoi et Comment.

Un fluide normal contenu dans un récipient et soumis à une rotation globale, à l'équilibre thermique, tournera dans son ensemble avec le récipient comme un corps solide. Par contre un fluide quantique, et plus particulièrement quand il est dans l'état superfluide (état où le fluide s'écoule sans viscosité), ne tourne pas pour des petites vitesses de rotation, par contre au dessus d'une certaine vitesse critique il commence à développer des vortex (tourbillons de circulations) correspondant à une rotation locale du fluide. Le nombre de

vortex augmente au fur et à mesure que la rotation est plus rapide. Pour l'histoire, c'est en 1937, que Kapitza, Allen et Meisner ont mis en évidence la superfluidité de l'hélium (^4He) à basse température [43]. En 1938, F. London proposa de relier ce phénomène comme une manifestation de la condensation de Bose-Einstein [44]. En fait un superfluide ne peut tourner qu'avec la formation des vortex dans lesquels la densité s'annule et la circulation du champ de vitesse autour d'un contour fermé (vortex) est quantifiée [45].

Dans l'étude des atomes froids, la réponse d'un gaz ultra-froid à la rotation constitue un domaine de recherche très intéressant et riche en phénomènes. Par exemple à température suffisamment faible, un condensat de Bose-Einstein est également superfluide ceci revient à l'existence d'une fonction d'onde macroscopique décrivant ce condensat. L'observation de la nucléation des tourbillons quantifiés (vortex) lors d'une expérience de mise en rotation constitue une signature expérimentale de la superfluidité des condensats de Bose-Einstein. Ceci étant, dans un contexte plus général, la mise en rotation de gaz ultra-froids de bosons ou de fermions fournit un lien entre la physique des atomes froids piégés et des phénomènes de la physique des systèmes de la matière condensée tels que la superfluidité, l'effet Hall quantique, et la supraconductivité [46]. Ce lien est fourni par le fait de l'analogie qui existe entre un champ magnétique agissant sur des particules chargées et le vecteur vitesse angulaire avec lequel tourne le piège agissant sur des atomes neutres d'un gaz quantique ultra-froid. Nous reviendrons plus loin en détail sur cette analogie.

Pour effectuer une rotation d'un nuage d'atomes froids (gaz dégénéré), plusieurs techniques ont été développées [47-52]. Nous décrivons ici la technique développée par l'équipe de Jean Dalibard et ses collaborateurs [50]. Dans ce type d'expérience, des moyens optiques ont été utilisés pour générer des potentiels quelconques, en déplaçant rapidement un faisceau laser. Si le faisceau est très désaccordé, il génère un potentiel dipolaire permettant d'agir sur les atomes. En effet, c'est une agitation mécanique du nuage [34]. Avant d'aller plus loin, juste quelques mots sur le piégeage dipolaire.

Le piégeage dipolaire des atomes neutres utilise l'interaction entre la composante électrique oscillante du faisceau lumineux $\vec{E}(\vec{r})$ et le dipôle électrique induit de l'atome \vec{d} . Cette énergie d'interaction vaut :

$$V(\vec{r}) = -\frac{1}{2} \langle \vec{d} \cdot \vec{E} \rangle \quad (1.8)$$

Où le facteur un demi vient du fait que le dipôle électrique est un dipôle induit et n'est pas permanent, et $\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne temporelle. On rappelle la relation entre ce dipôle et le champ électrique qui est, $\vec{d} = \alpha \vec{E}$ où α est la polarisabilité complexe de l'atome. Dans ce cas, l'énergie potentielle d'interaction devient $V(\vec{r}) = -(1/4) \text{Re}(\alpha) \cdot \|\vec{E}(\vec{r})\|^2$. Sachant que

l'intensité lumineuse est $I = \frac{\varepsilon_0 c}{2} |\vec{E}|^2$, l'expression de cette énergie d'interaction s'écrit alors $V(\vec{r}) = -\text{Re}(\alpha) \cdot I(\vec{r}) / (2\varepsilon_0 c)$. Dans le cas d'un faisceau laser de profil Gaussien l'intensité est donnée par [36] :

$$I(x, y, z) = \left[I_0 / \left(1 + z^2 / z_R^2 \right) \right] \exp \left[-2(x^2 + y^2) / w^2(z) \right] \quad (1.9)$$

Où:

- I_0 est l'intensité maximale du faisceau

- $w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}$ est le rayon du profil d'intensité à la cote z ,

- w_0 est le rayon du profil d'intensité au niveau du col (en $z = 0$) appelé «waist», Il correspond au rayon minimum du faisceau gaussien.

- $z_R = \pi w_0^2 / \lambda$ est la longueur de Rayleigh où $I(0, 0, z = z_R) = I_0 / 2$, et λ est la longueur d'onde.

Au voisinage du centre du piège, le potentiel de confinement dipolaire peut être développé au deuxième ordre pour donner une forme d'un potentiel harmonique [35-38].

La mise en rotation du nuage atomique, refroidi jusqu'à la limite de la dégénérescence et de taille donnée par une largeur $\Delta_{\perp} = 2.6 \mu m$ et une longueur $\Delta_z = 49 \mu m$, consiste à superposer au potentiel magnétique harmonique de piégeage, un autre potentiel dipolaire créé par un faisceau laser qui se propage le long de l'axe longitudinale (oz) (axe de confinement faible) du nuage et qui peut être déplacé à volonté par rapport à cet axe. La taille typique du col du faisceau au niveau des atomes est de $w_0 = 20 \mu m$ et la longueur de Rayleigh vaut $z_R = 1.5 mm$. Cet unique faisceau saute très rapidement ($\sim 100 kHz$) d'une position à une autre, qui sont symétriques par rapport à (oz) et séparé par une distance $\approx 16 \mu m$, de sorte que les atomes voient un potentiel dipolaire moyenné qui leur semble provenir d'une paire de faisceaux. Cette paire de faisceaux laser peut être mise en rotation, à une fréquence de rotation Ω contrôlée très précisément. Cet ensemble de deux faisceaux en rotation autour de l'axe z constitue un agitateur mécanique appelé aussi une cuillère (voir Fig.6).

Si on fait un développement de Taylor de l'exponentielle de l'intensité $I(x, y, z)$ donnée auparavant, le potentiel dipolaire moyen vu par les atomes en présence du champ laser, qui est proportionnel à l'intensité du faisceau laser, peut être approximé à un potentiel harmonique anisotrope. Dans le repère tournant (XY) ce potentiel s'écrit comme [50]:

$$V(X, Y) = \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 (\varepsilon_X X^2 + \varepsilon_Y Y^2) \quad (1.10)$$

Où $\varepsilon_X, \varepsilon_Y$ des paramètres sans dimensions et dépendent de l'intensité lumineuse, le col du faisceau et la distance entre les deux positions extrêmes du faisceau par rapport à l'axe (oz). Et ω_{\perp} est la pulsation transversale du piège magnétique.

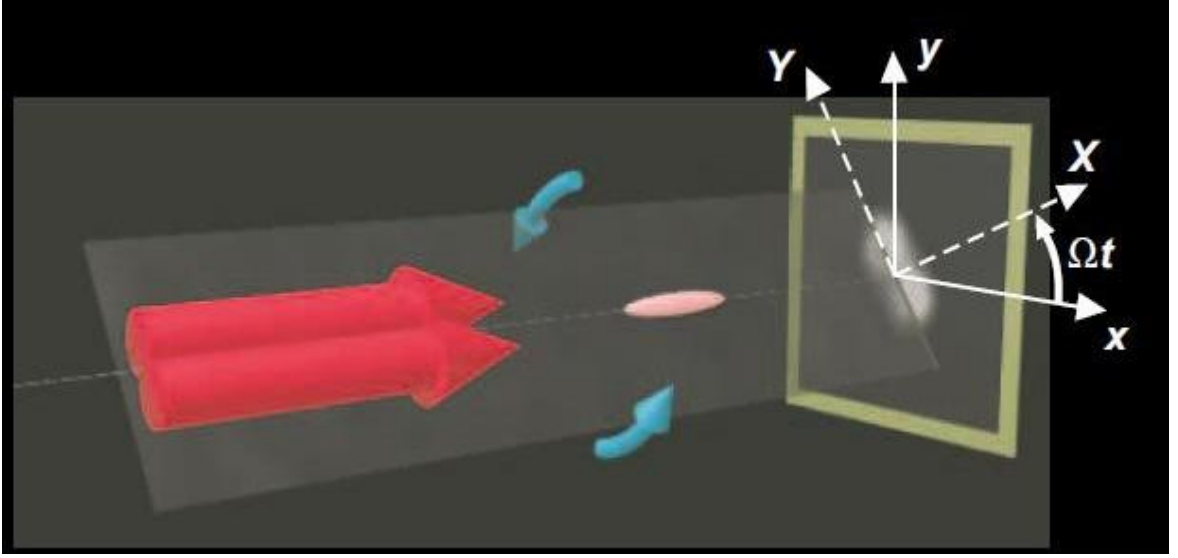


Fig.6. – En tournant autour d'un axe commun, les deux faisceaux composant la cuillère créent un potentiel tournant au niveau des atomes (au centre). (Image tirée de [53])

L'action du potentiel dipolaire (1.10) est principalement de modifier légèrement les fréquences transverses du piège magnétique. La superposition de ces deux potentiels peut se mettre sous la forme [34]:

$$V(X, Y, Z) = \frac{m \tilde{\omega}_{\perp}^2}{2} (X^2 + Y^2) + \varepsilon \frac{m \tilde{\omega}_{\perp}^2}{2} (X^2 - Y^2) + \frac{m \omega_z^2}{2} Z^2 \quad (1.11)$$

Où $\tilde{\omega}_{\perp}^2 = \omega_{\perp}^2 (2 + \varepsilon_X + \varepsilon_Y) / 2$ qui peut s'interpréter comme la fréquence moyenne transverse du piège en présence de la cuillère, alors que $\varepsilon = (\varepsilon_X - \varepsilon_Y) \omega_{\perp} / 2 \tilde{\omega}_{\perp}$ est le rapport d'anisotropie.

L'étude de la dynamique du nuage sous l'action du potentiel (1.11) tournant avec une vitesse angulaire Ω autour de l'axe (oz) se ramène à un problème de mécanique classique équivalent. Les équations du mouvement s'écrivent dans le référentiel tournant comme :

$$\begin{cases} \ddot{X} = -\tilde{\omega}_\perp^2(1+\varepsilon)X + \Omega^2X + 2\Omega\dot{Y} \\ \ddot{Y} = -\tilde{\omega}_\perp^2(1-\varepsilon)X + \Omega^2Y - 2\Omega\dot{X} \end{cases} \quad (1.12)$$

Dans ce système d'équations différentiels ci-dessus, on reconnaît bien les contributions des forces d'inertie (termes en Ω^2) et de Coriolis (termes en Ω). Pour plus de détails voir [34] et [53].

Chapitre 2

Description d'un Système de N particules dans le Repère Tournant

Chapitre 2

Description d'un Système de N particules dans le Repère Tournant

1. Introduction

On considère un système de N particules non chargées (atomes neutres), confiné par un potentiel $V(\vec{r})$ et mis en rotation autour de l'axe (oz) avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$. On désigne par M la masse d'un atome et le système étudié dans notre travail est supposé confiné à deux dimensions. En fait, le mouvement des particules de ce système suivant l'axe (oz) est presque gelé à cause d'un fort confinement le long de cet axe afin qu'on puisse le considérer comme un système bidimensionnel. Un tel système est réalisable expérimentalement [54]. Néanmoins, l'étude faite dans ce chapitre présente un caractère général.

L'étude théorique de ce type de problème est grandement simplifiée si on choisit de travailler dans le repère tournant lié au potentiel confinant tournant, c'est-à-dire, tourne à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$.

Ce chapitre est structuré comme suit : le paragraphe 2 est consacré à une dérivation classique et ensuite une autre quantique de l'hamiltonien du système de N particules, dans le repère tournant non inertiel (non Galiléen). A cause de la forte similitude entre cette forme que prend l'hamiltonien de ce système dans un repère tournant et celle de l'hamiltonien d'un système de particules chargées soumis à un champ magnétique \vec{B} , une discussion détaillée est faite sur cette analogie en paragraphe 3 et on s'attend ainsi à observer des effets physiques similaires. Cette analogie n'est pas une surprise si on compare la force de Lorentz $\vec{F}_{Lor} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ qui a la même forme que la force de Coriolis $\vec{F}_{Cor} = -2M(\vec{v} \times \vec{\Omega})$. Les deux derniers paragraphes 4 et 5 sont consacrés respectivement à l'étude de l'hamiltonien à une particule et le spectre de l'énergie du système en fonction de la vitesse de rotation.

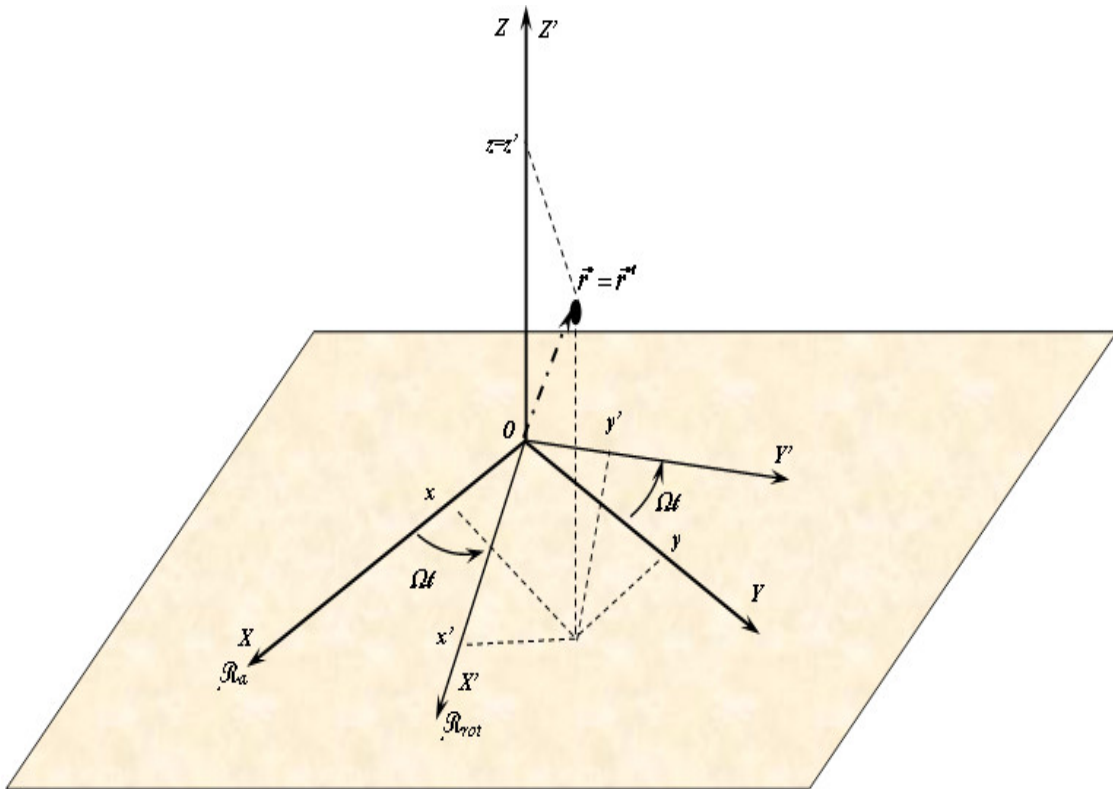
2. Hamiltonien d'une Particule dans le Repère Tournant.

2.1. Dérivation classique

On considère tout d'abord une particule neutre soumise à un potentiel $V(\vec{r})$ tournant avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ autour de l'axe (oz) . On désigne par x, y et z les coordonnées de cette particule dans le repère du laboratoire (repère absolu, ou au repos (\mathcal{R}_a)) et par x', y' et z' ses coordonnées dans le repère tournant autour de l'axe (oz) (repère relatif (\mathcal{R}_{rot})). Ces deux repères possèdent la même origine \mathcal{O} , et en particulier on a la relation entre les vecteurs positions $\vec{r} = \vec{r}'$.

Les coordonnées de la particule dans les deux repères (\mathcal{R}_a) et (\mathcal{R}_{rot}) sont reliées par :

$$\begin{cases} x = x' \cos(\Omega t) - y' \sin(\Omega t) \\ y = x' \sin(\Omega t) + y' \cos(\Omega t) \\ z = z' \end{cases} \quad (2.1)$$



L'énergie cinétique de la particule de masse M est $T = M(x'^2 + y'^2 + z'^2)/2$ peut s'écrire en fonction des coordonnées x', y' et z' et de ses dérivées temporelles comme:

$$T = \frac{1}{2}M \left[(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2\Omega(x'y' - y'x') + \Omega^2(x'^2 + y'^2) \right] \quad (2.2)$$

Pour trouver les équations du mouvement, on utilise la fonction de Lagrange $\mathcal{L} = T - V(x', y', z')$ où le potentiel a été exprimé en fonctions des coordonnées relatives.

Les équations de Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i'} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i'} = 0$, pour $i = x, y, z$ conduisent à :

$$M\ddot{x}' = -\frac{\partial V}{\partial x'} + 2M\Omega\dot{y}' + M\Omega^2x', \quad M\ddot{y}' = -\frac{\partial V}{\partial y'} - 2M\Omega\dot{x}' + M\Omega^2y', \quad M\ddot{z}' = -\frac{\partial V}{\partial z'} \quad (2.3)$$

Ces trois équations peuvent se résumer sous forme vectorielle comme:

$$M \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = -\vec{\nabla} V - 2M \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} - M \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \quad (2.4)$$

où on reconnaît les forces de Coriolis $-2M \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$ et centrifuge $-M \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$ qui agissent

sur la particule. Le moment canonique est défini par $p_i' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i'}$, il est facile alors de vérifier

que la fonction de Hamilton dans le repère tournant $\mathcal{H}_{rot} = \sum_i \dot{x}_i' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i'} - \mathcal{L}$ devient :

$$\mathcal{H}_{rot} = \left[\frac{1}{2M} (p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2) + V(x', y', z') \right] - \Omega (x'p_y' - y'p_x') \quad (2.5)$$

Si on pose $\Omega = 0$, $\mathcal{H}_{rot} = \mathcal{H}_0$ ne serait que l'hamiltonien du système sans rotation. Le terme $(x'p_y' - y'p_x')$ n'est que la composante du moment cinétique orbital suivant l'axe (oz). On peut donc écrire :

$$\mathcal{H}_{rot} = \mathcal{H}_0 - \vec{\Omega} \cdot \vec{L} \quad (2.6)$$

2.2. Dérivation quantique

L'hamiltonien de ce système dans le référentiel du laboratoire (repère absolu (\mathcal{R}_a)) est:

$$H = \frac{1}{2M} \vec{p}^2 + V(\vec{r}) \quad (2.7)$$

où \vec{r} et \vec{p} sont respectivement les vecteurs position et quantité de mouvement dans le repère (\mathcal{R}_a) , et $V(\vec{r})$ est le potentiel de piégeage tournant (voir chapitre 1, §6). Ce hamiltonien est dépendant du temps, alors l'équation de Schrödinger dépendante du temps qui gouverne la dynamique du système est :

$$i \hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H |\psi\rangle \quad (2.8)$$

L'étude de ce système dans le repère tournant (\mathcal{R}_{rot}) se fait par le passage du repère du laboratoire au repère relatif et ça nous exige, par conséquent, la recherche de la nouvelle forme de l'hamiltonien dans ce dernier repère. On sait que la rotation spatiale d'un système quantique au cours du temps d'un angle $\theta = \Omega t$ autour de l'axe de rotation est décrite par l'opérateur de rotation [55]:

$$\hat{R}_z(t) = \exp\left(i \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{L}\right) t / \hbar\right) \quad (2.9)$$

où \vec{L} est l'opérateur du moment cinétique orbitale défini par $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Si on désigne par $|\psi\rangle$ le vecteur d'état d'une particule de masse m dans le repère absolu (\mathcal{R}_a) et par $|\psi_{rot}\rangle$ celui dans le repère tournant (\mathcal{R}_{rot}) , On peut dire alors que le vecteur d'état $|\psi_{rot}\rangle$ n'est que la transformée du vecteur $|\psi\rangle$ par l'action de l'opérateur $\hat{R}_z(t)$ sur ce dernier. En fait, l'opérateur de rotation $\hat{R}_z(t)$ transforme l'état $|\psi\rangle$ à $|\psi_{rot}\rangle$ tel que :

$$|\psi_{rot}\rangle = \hat{R}_z(t) |\psi\rangle = \exp\left(i \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{L}\right) t / \hbar\right) |\psi\rangle \quad (2.10)$$

Ou inversement :

$$|\psi\rangle = \hat{R}_z^\dagger(t) |\psi_{rot}\rangle = \exp\left(-i \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{L}\right) t / \hbar\right) |\psi_{rot}\rangle \quad (2.11)$$

En insérant la dernière formule (2.11) dans l'équation de Schrödinger (2.8), on obtient:

$$\begin{aligned}
 H \exp\left(-i \frac{\bar{\Omega}\vec{L}}{\hbar} t\right) |\psi_{rot}\rangle &= i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(\exp\left(-i \frac{\bar{\Omega}\vec{L}}{\hbar} t\right) |\psi_{rot}\rangle \right) \\
 &= \bar{\Omega}\vec{L} \exp\left(-i \frac{\bar{\Omega}\vec{L}}{\hbar} t\right) |\psi_{rot}\rangle + \exp\left(-i \frac{\bar{\Omega}\vec{L}}{\hbar} t\right) i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_{rot}\rangle
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Le terme $\bar{\Omega}\vec{L}$ résulte de la dépendance en temps de l'opérateur de rotation $\hat{R}_z(t)$. Multiplions les deux membres par $e^{i(\bar{\Omega}\vec{L})t/\hbar}$, on trouve:

$$\left[\exp\left(+i \frac{\bar{\Omega}\vec{L}}{\hbar} t\right) H \exp\left(-i \frac{\bar{\Omega}\vec{L}}{\hbar} t\right) - \bar{\Omega}\vec{L} \right] |\psi_{rot}\rangle = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_{rot}\rangle \tag{2.13}$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme $i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_{rot}\rangle = H_{rot} |\psi_{rot}\rangle$, où H_{rot} est l'hamiltonien du système dans le repère tournant avec :

$$H_{rot} = \exp\left(+i \frac{\bar{\Omega}\vec{L}}{\hbar} t\right) H \exp\left(-i \frac{\bar{\Omega}\vec{L}}{\hbar} t\right) - \bar{\Omega}\vec{L} \tag{2.14}$$

Pour obtenir une relation explicite entre les deux hamiltoniens dans les deux repères (\mathcal{R}_a) et (\mathcal{R}_{rot}) plus explicite, on doit chercher comment se transforme l'hamiltonien H sous l'action de la transformation $\hat{R}_z H \hat{R}_z^+$. Revenons alors à l'expression (2.7) de l'hamiltonien H dans (\mathcal{R}_a). Puisque l'opérateur \vec{p}^2 reste inchangé par cette transformation, $\hat{R}_z \vec{p}^2 \hat{R}_z^+ = \vec{p}^2$, alors que le potentiel $V(\vec{r})$ devient $V(\vec{r}') = \hat{R}_z V(\vec{r}) \hat{R}_z^+$, où \vec{r}' est le vecteur position dans le repère tournant, on arrive alors à voir que la transformée de l'hamiltonien dans le repère absolu $\hat{R}_z H \hat{R}_z^+$ n'est que lui-même mais exprimé en fonction des coordonnées du repère relatif, qu'on note H_0 comme on l'a fait dans le traitement classique. Enfin, l'hamiltonien du système dans le repère tournant est alors lié à celui dans le repère du laboratoire par la relation :

$$H_{rot} = H_0 - \bar{\Omega}\vec{L} \tag{2.15}$$

On voit que la particule subit l'effet d'un terme supplémentaire $-\bar{\Omega}\vec{L}$. En fait, ce terme contient les effets combinés de la force de Coriolis et centrifuge comme nous allons voir dans ce qui suit. L'hamiltonien (2.15) porte le nom de hamiltonien de cranking.

Remarque :

1. Cette dérivation de l'hamiltonien H_{rot} en fonction de H_0 à partir de l'équation de Schrödinger n'introduit aucune exigence concernant la forme du potentiel de piégeage $V(\vec{r})$, et par suite elle est valable pour un potentiel confinant quelconque.
2. L'hamiltonien dérivé et donné en (2.15) est indépendant du temps, par conséquent dans le repère tournant nous pouvons chercher les états propres stationnaires de la particule dans ce repère relatif.

3. Analogie Entre Mouvement d'une Particule Neutre dans le Repère Tournant et Particule Chargée Soumise à un Champ Magnétique

3.1. Confinement par un potentiel quelconque $V(\vec{r})$

Le but de ce paragraphe est de discuter en détail l'analogie existant entre le mouvement d'une particule neutre, confiné par un potentiel $V(\vec{r})$ tournant autour de l'axe (oz) , avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ et le mouvement d'une particule chargée, de charge q , soumise à un champ magnétique \vec{B} dirigé suivant la même direction que celle de l'axe de rotation du système, et confiné par un potentiel scalaire quelconque qu'on désignera par $V_{mag}(\vec{r})$.

La présence de ces deux potentiels V et V_{mag} de formes quelconques, dans les deux systèmes décrits ci-dessus, a pour objet de faire une étude générale de l'analogie existante entre les hamiltoniens des deux systèmes. L'absence de chacun d'eux dans les expressions des hamiltoniens ne modifie pas l'idée générale concernant la similitude entre eux. La relation entre les quantités $\Omega, V(\vec{r})$ d'une part et les quantités \vec{B} et $V_{mag}(\vec{r})$ d'autre part, sera donnée en faisant l'analyse des hamiltonien correspondants à chaque système.

Commençons par le système en rotation que nous avons étudié précédemment. En se plaçant dans le repère tournant, l'hamiltonien régissant l'évolution de ce système est donnée par (2.15). L'écriture explicite de cette relation est :

$$H_{rot} = \frac{1}{2M} \vec{p}^2 + V(\vec{r}) - \vec{\Omega} \cdot \vec{L} \quad (2.16)$$

Ecrivons le terme de cranking $\vec{\Omega} \cdot \vec{L}$ comme :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{L} = \vec{\Omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{p} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (2.17)$$

Alors l'hamiltonien H_{rot} prend alors une nouvelle forme:

$$\begin{aligned} H_{rot} &= \frac{1}{2M} \vec{p}^2 + V(\vec{r}) - \vec{p} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{1}{2M} (\vec{p} - M \vec{\Omega} \times \vec{r})^2 + V(\vec{r}) - \frac{1}{2} M \vec{\Omega}^2 \vec{r}^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Sous cette forme de H_{rot} , il apparait, en plus du potentiel confinant $V(\vec{r})$, un potentiel de répulsion (centrifuge) qui pousse les particules loin de l'axe de rotation. Si on définit un potentiel scalaire effectif $V_{eff}(\vec{r}) = V(\vec{r}) - \frac{1}{2} M \vec{\Omega}^2 \vec{r}^2$, on a donc

$$H_{rot} = \frac{1}{2M} (\vec{p} - M \vec{\Omega} \times \vec{r})^2 + V_{eff}(\vec{r}) \quad (2.19)$$

D'autre part, l'hamiltonien d'une particule chargée de charge q , placé dans un champ magnétique \vec{B} dirigé selon l'axe (oz), et en présence d'un potentiel scalaire quelconque $V_{mag}(\vec{r})$, est (dans le repère du laboratoire):

$$H_{mag} = \frac{1}{2M} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + V_{mag}(\vec{r}) \quad (2.20)$$

où \vec{A} est le potentiel vecteur associé au champ magnétique \vec{B} avec $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. En comparant les deux expressions (2.19) et (2.20), on voit que les deux hamiltoniens H_{rot} et H_{mag} ont des formes similaires, ce qui permet de faire la correspondance suivante :

$$\begin{cases} q\vec{A} \Leftrightarrow M(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ V_{mag}(\vec{r}) \Leftrightarrow V_{eff}(\vec{r}) = V(\vec{r}) - \frac{1}{2} M \vec{\Omega}^2 \vec{r}^2 \end{cases} \quad (2.21)$$

Ceci étant, on peut dire que le problème d'une particule neutre dans le repère tournant est analogue au problème d'une particule chargée soumise à un champ magnétique.

Dans le cas d'un champ magnétique constant \vec{B} , le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ peut être écrit, avec un choix convenable de jauge (la gauge symétrique), comme $\vec{A}(\vec{r}) = (\vec{B} \times \vec{r})/2$.

L'hamiltonien H_{mag} s'écrit alors :

$$H_{mag} = \frac{1}{2M} \left(\vec{p} - \frac{q}{2} (\vec{B} \times \vec{r}) \right)^2 + V_{mag}(\vec{r}) \quad (2.22)$$

Ce qui permet d'écrire la correspondance de façon explicite comme:

$$\vec{B} \leftrightarrow \frac{2M \bar{\Omega}}{q} \quad \text{et} \quad \bar{\Omega} \leftrightarrow \frac{q \vec{B}}{2M} \quad (2.23)$$

Signalons que cette dernière correspondance peut être déduite d'une façon simple. En effet, en se rappelant qu'en présence d'un champ magnétique \vec{B} , une particule de charge q et soumise à la force magnétique de Lorentz $\vec{F}_{Lorentz} = q(\vec{v} \times \vec{B})$, où \vec{v} est la vitesse de la particule, cette force de Lorentz est analogue dans la forme à la force de Coriolis $\vec{F}_{Coriolis} = 2M(\vec{v} \times \bar{\Omega})$ ressentie par une particule en mouvement dans un repère tournant. On peut formuler cette équivalence en disant que dans le repère tournant la particule neutre est soumise à un champ magnétique effectif $\vec{B}_{eff} = 2M \bar{\Omega}/q$.

3.2. Cas du potentiel harmonique

Retournons maintenant aux hamiltoniens H_{rot} et H_{mag} . Nous voulons traiter dans ce qui suit le cas particulier suivant : Supposons d'une part que le potentiel confinant la particule chargée est nul $V_{mag} = 0$, l'hamiltonien H_{mag} se réduit alors à :

$$H_{mag} = \frac{1}{2M} \left(\vec{p} - \frac{q}{2} (\vec{B} \times \vec{r}) \right)^2 \quad (2.24)$$

D'autre part, nous avons procédé au cours de la dérivation de l'hamiltonien H_{rot} dans le repère tournant sans faire aucune condition préalable sur la forme de potentiel confinant, nous allons discuter ici le cas d'un potentiel d'oscillateur harmonique isotrope de fréquence ω_0 , $V(\vec{r}) = M\omega_0^2 \vec{r}^2 / 2 = M\omega_0^2 (x^2 + y^2) / 2$, et qui tourne à la vitesse angulaire Ω . L'expression (2.19) de l'hamiltonien H_{rot} peut se mettre dans ce cas sous la forme :

$$H_{rot} = \frac{1}{2M} \left(\vec{p} - M(\bar{\Omega} \times \vec{r}) \right)^2 + \frac{1}{2} M (\omega_0^2 - \Omega^2) r^2 \quad (2.25)$$

On voit que si $\Omega = \omega_0$, c'est-à-dire si la vitesse angulaire de rotation atteint la vitesse limite (vitesse critique) ω_0 , le terme $M(\omega_0^2 - \Omega^2)r^2/2$ s'annule. Par conséquent l'hamiltonien

H_{rot} devient $H_{rot} = \frac{1}{2M} \left(\vec{p} - M \left(\vec{\Omega} \times \vec{r} \right) \right)^2$ qui est strictement similaire à (2.24). Physiquement dans cette limite de rotation très rapide la force centrifuge $M \Omega^2 \vec{r}$, est compensée par la force attractive du potentiel confinant d'oscillateur harmonique $-M \omega_0^2 \vec{r}$, il en résulte que la particule ne ressent donc que l'effet de la force de Coriolis. Notons que lorsque $\Omega \neq \omega_0$, la particule subit, en plus de la force due au potentiel et la force de Coriolis, la force centrifuge, qui n'a pas d'analogue en magnétisme, et dont l'effet se manifeste par le terme $-M \Omega^2 r^2 / 2$ dans l'Hamiltonien (2.25) et induit une réduction du potentiel effectif $V_{eff} = M (\omega_0^2 - \Omega^2) r^2 / 2$ auquel est soumise la particule.

Revenons à l'hamiltonien magnétique (2.24) qui peut s'écrire comme :

$$H_{magn} = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2} M \bar{\omega}_L^2 \vec{r}^2 - \bar{\omega}_L \vec{L} \quad (2.26)$$

Avec $\bar{\omega}_L = \frac{q}{2M} \vec{B}$ est la fréquence de Larmor. Dans les études portées sur les systèmes gouvernés par cet hamiltonien, le spectre d'énergie quantifié est connu et a été obtenu par Landau, il est donné par :

$$\varepsilon_n = (2n + 1) \hbar \omega_L, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

Ces niveaux d'énergies s'appellent les niveaux de Landau [55]. Un spectre de ce type a été obtenu dans les systèmes électroniques à deux dimensions. En effet, si on considère un gaz d'électrons bidimensionnel soumis à un champ magnétique perpendiculaire au plan contenant les électrons et confiné par un potentiel (structure obtenue en interposant une hétérojonction avec une couche conductrice entre deux semi-conducteurs d'où l'existence d'un potentiel confinant) et si le champ magnétique est très intense alors les niveaux de Landau et la présence du désordre permettent d'expliquer l'effet hall quantique entier [56].

En se basant sur l'analogie discutée ci-dessus, on s'attend donc (voir équation (2.25)) que dans la limite $\Omega = \omega_0$, un système de gaz d'atomes ultra-froids en rotation très rapide présente des effets similaires à ceux dans les systèmes d'électrons bidimensionnels, à savoir l'effet hall quantique et la formation d'une structure des niveaux d'énergie de type Landau. Dans cette thèse nous nous intéressons alors aux propriétés d'un système constitué de N particules dont l'hamiltonien quantique à une particule est de la forme donnée par l'équation (2.25) et dont la vitesse de rotation Ω est proche de la vitesse critique ω_0 , c'est-à-dire le cas de la rotation ultra rapide $\Omega \leq \omega_0$ et plus exactement $\Delta\omega = (\omega_0 - \Omega) / \omega_0 \ll 1$.

4. Système de N Particules en Rotation

Le problème que nous traitons dans cette thèse est un problème à N particules. L'équation (2.25) qui représente l'hamiltonien à une particule est en fait obtenue en partant de l'hamiltonien total du système qui est :

$$H_N = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{P}_i^2}{2M} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} M \omega_0^2 \vec{r}_i^2 - \vec{\Omega} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{L}_i \quad (2.28)$$

Il s'agit d'un hamiltonien de particules indépendantes. Soit $|\Psi\rangle$ un déterminant de Slater construit sur N états à une particule $\{\varphi_{i=1,2,\dots,N}\}$. L'énergie totale est donc la valeur moyenne :

$$\langle \Psi | H_N | \Psi \rangle = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^N \int d\vec{r} \varphi_i^* \nabla^2 \varphi_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} M \omega_0^2 \int d\vec{r} \varphi_i^* \varphi_i \vec{r}^2 - \vec{\Omega} \cdot \sum_{i=1}^N \int d\vec{r} \varphi_i^* \left(\vec{r} \times \frac{\hbar}{i} \nabla \right) \varphi_i \quad (2.29)$$

Pour trouver les φ_i qui correspondent à l'état fondamental, on doit minimiser l'énergie totale en tenant compte de la normalisation des états à une particule. Ce qui consiste à résoudre le problème variationnel suivant:

$$\delta \left[\langle \Psi | H_N | \Psi \rangle - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \int d\vec{r} \varphi_i^* \varphi_i \right] = 0 \quad (2.30)$$

avec ε_i sont des paramètres de Lagrange qui tiennent compte de la normalisation des $\{\varphi_{i=1,2,\dots,N}\}$, c'est-à-dire :

$$\int d\vec{r} \varphi_i^* \varphi_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.31)$$

La minimisation (2.30) conduit donc à :

$$H \varphi_i = \varepsilon_i \varphi_i \quad (2.32)$$

Où H est donné par l'équation (2.25) qui représente l'hamiltonien à une particule et ε_i est l'énergie associée.

5. Evolution du Spectre des Energies à une Particule en Fonction de la Vitesse de Rotation

Toutes les densités qui seront dérivées dans le chapitre 3 dépendent des fonctions d'ondes à une particule des états occupés mais aussi de leurs énergies. Dans ce paragraphe on se propose de discuter les points suivants :

- Existence de deux expressions analytiques des énergies à une particule
- Lien entre ces deux expressions.
- Evolution du spectre en fonction de Ω et en particulier quand $\Omega \rightarrow \omega_0$

Par résolution de l'équation de Schrödinger en coordonnées cartésiennes on peut montrer que les niveaux d'énergies à une particule sont :

$$\varepsilon_{n_+,n_-} = \hbar(\omega_0 + \Omega)(n_+ + 1/2) + \hbar(\omega_0 - \Omega)(n_- + 1/2) \quad (2.33)$$

Avec $n_+ = 0, 1, \dots; n_- = 0, 1, \dots$. On voit que ce spectre d'énergie est celui d'un potentiel d'oscillateur harmonique anisotrope à deux dimensions qui a pour fréquences respectives $(\omega_0 + \Omega)$ et $(\omega_0 - \Omega)$. Sur cette équation, on remarque que la fréquence ω_0 apparait comme une valeur maximale ou critique de la vitesse angulaire de rotation Ω , la stabilité du gaz exige la condition $\Omega \leq \omega_0$.

Ceci étant, il existe une autre expression des énergies à une particule provenant de la résolution de l'équation de Schrödinger en coordonnées polaires, elle est donnée par la relation :

$$\varepsilon_{n,m} = (2n + |m| + 1)\hbar\omega_0 - m\hbar\Omega \quad (2.34)$$

ce spectre est caractérisé par les nombres quantiques $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ et $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Afin de comparer les deux expressions de $\varepsilon_{n,m}$ et ε_{n_+,n_-} , il est préférable de réécrire le spectre ε_{n_+,n_-} sous la forme suivante:

$$\varepsilon_{n_+,n_-} = \hbar\omega_0(n_+ + n_- + 1) - \hbar\Omega(n_- - n_+) \quad (2.35)$$

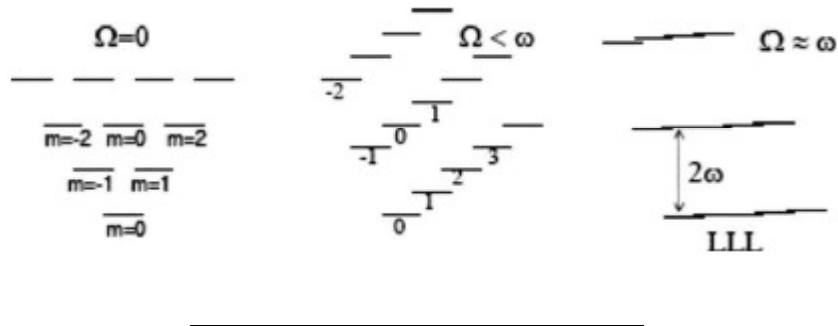
Une simple comparaison entre (2.34) et (2.35) conduit à :

$$\begin{cases} n_+ + n_- = 2n + |m| \\ n_- - n_+ = m \end{cases} \quad (2.36)$$

Pour étudier l'évolution du spectre en fonction de la vitesse angulaire Ω , en particulier en régime de rotation très rapide, on pose dans l'équation (2.35) $\Omega = \omega_0 - \Delta\omega$ on obtient alors :

$$\varepsilon_{n_+, n_-} = (2n_+ + 1)\hbar\omega_0 - (n_- - n_+)\hbar\Delta\omega \quad (2.37)$$

On voit l'apparition du terme $(2n_+ + 1)\hbar\omega_0$, qui représente la séquence des niveaux de Landau où n_+ est le nombre quantique qui caractérise chaque niveau. Le second terme $(n_- - n_+)\hbar\Delta\omega$ tient compte de la déviation du spectre par rapport à celui des niveaux de Landau (il engendre une levée de dégénérescence). La figure ci-dessous illustre le spectre d'énergie en fonction de la vitesse de rotation [6]. On voit que le spectre évolue entre deux cas limites, commençant par un spectre d'oscillateur harmonique bidimensionnel isotrope pour $\Omega = 0$ (sans rotation), passant par un spectre intermédiaire, celui d'un oscillateur anisotrope à 2D, pour terminer enfin par un spectre de type Landau pour $\Omega = \omega_0$. Nous donnerons dans le chapitre suivant les valeurs numériques maximales pour ces nombres quantiques (n, m) , ou leurs équivalents (n_+, n_-) pour les cas que nous allons considérer dans cette thèse.



Chapitre 3

Densités de particules, de Courant de Matière et de Pseudo-Magnétisation d'un Gaz de Fermions Neutres dans un Piège Harmonique Isotrope en Rotation Rapide

Chapitre 3

Densités de particules, de Courant de Matière et de Pseudo-Magnétisation d'un Gaz de Fermions Neutres dans un Piège Harmonique Isotrope en Rotation Rapide

1. Introduction

Les études théoriques portées sur les propriétés des gaz quantiques de fermions confinés par un potentiel (piège) harmonique ont pris de l'ampleur depuis l'observation expérimentale par DeMarco et Jin d'un gaz d'atomes quantique de Fermions dégénéré [7-8]. Expérimentalement, des températures de l'ordre d'une fraction de la température de Fermi ont pu être atteintes. La recherche sur les gaz quantiques soit pour les gaz de bosons ou de fermions est un domaine de recherche en plein développement et ceci se manifeste par le nombre impressionnant de travaux publiés sur le sujet. En fait, les systèmes des gaz quantiques d'atomes ultra froids offrent une opportunité d'étudier des concepts physiques essentiels de la théorie de la matière condensée et c'est grâce aux techniques expérimentales sophistiquées qui ont été développées aux cours de ces deux dernières décennies et qui fournissent des milieux d'études avec des conditions contrôlables à travers des faisceaux lumineux (laser). Ainsi, des interactions comme le couplage spin-orbite et les potentiels périodiques qui peuvent avoir lieu dans un environnement d'état solide seront simulées par celles qui se produisent dans des systèmes formés par des atomes froids.

Pendant les années dernières, des investigations intensives ont été consacrées à l'examen de la réponse des gaz d'atomes froids à une rotation rapide. La réponse d'un gaz quantique soumis à une rotation révèle des propriétés physiques très intéressantes que ce soit pour des fermions ou pour des bosons (formation de vortex, structure du spectre d'énergie de type Landau, effet Hall quantique, ...). En effet, quand la fréquence de la rotation augmente, un condensat de Bose Einstein (BEC) établit un vortex avec un nombre de vortex croissant pendant que la rotation devient plus rapide et dans la limite d'une rotation très rapide (au sens où la fréquence de rotation devient proche de celle du potentiel du confinement harmonique)

le système développe des états de Hall quantiques et le condensat de Bose Einstein (BEC) peut être décrit par l'ensemble des états des niveaux de Landau les plus bas [9]. Ce spectre d'énergie des quasi-niveaux de Landau apparaît aussi dans le régime d'une rotation ultra rapide d'un gaz de Fermions dégénéré [13] et cette structure est reflétée dans les profils de densité [9], [13-16].

Les systèmes des gaz de fermions dégénérés subissant une rotation se traitent généralement dans des repères tournants afin d'éliminer la dépendance en temps du potentiel confinant et par suite l'hamiltonien du système. Dans ce repère tournant, il est bien connu, comme nous l'avons vu au chapitre 2, que l'hamiltonien du système est modifié par l'addition du terme $-\bar{\Omega}\vec{L}$ [57], $\bar{\Omega}$ est la vitesse angulaire de la rotation et \vec{L} est le moment angulaire totale du système. Ce moment angulaire du gaz présente des oscillations quantiques en fonction du nombre de particules [58] analogues aux oscillations de de Haas-van Alphen de la magnétisation dans les systèmes d'état solide [59]. Ces oscillations quantiques sont des manifestations macroscopiques dues à la quantification des niveaux d'énergie des électrons en présence du champ magnétique. En fait, un gaz d'électron dans un métal montre une dépendance oscillatoire des observables physiques en fonction de l'intensité du champ magnétique comme par exemple les oscillations de la résistivité (oscillations de Shubnikov-de Haas), oscillation de la magnétisation, la résistance de Hall ou la chaleur spécifique. Ces oscillations ont été prévues par Landau [60] et observées par de Haas-van Alphen. Parmi les phénomènes quantiques importants qui peuvent se manifester au sein d'un gaz fermionique dégénéré, l'effet Hall quantique présente un exemple excellent à cause de sa relation avec la formation des niveaux de Landau. Pour les systèmes des gaz d'électrons bidimensionnels, soumis à un champ magnétique intense, les niveaux d'énergie s'organisent dans une structure des niveaux de Landau fortement dégénérés. Les études théoriques portées sur les gaz de fermions dégénérés ont confirmé qu'une organisation similaire se produit dans un gaz de fermions neutres sous l'effet d'une rotation très rapide conduisant à des divers effets quantiques macroscopiques [13]. Il est important de mentionner que Dalibard et autres ont utilisé une interaction d'atome-lumière pour "simuler" des champs de jauge artificiels agissant sur la matière neutre d'une manière semblable comme des particules dans un référentiel tournant [17].

Dans la limite de la rotation ultra rapide, le profil de densité prend la forme d'une série de plateaux de densité dits régions de densité incompressible où la densité est constante, séparés par des régions dans lesquelles la densité dépend de la position des particules dites régions compressibles. Chaque plateau de densité correspond à une occupation d'un nouveau quasi niveau de Landau, en accord avec les résultats trouvés pour la densité d'un gaz d'électron [61-63]. L'importance des régions compressibles émerge quand on considère le profil de densité de courant de matière $\vec{J}(\vec{r})$ dans le repère tournant, c'est-à-dire, la densité de courant intrinsèque. C'est une propriété mesurable que nous calculons ici sans aucune approximation. L'existence des courants d'équilibre appelés aussi courants persistants est un phénomène purement quantique. En effet, c'est une propriété des systèmes électroniques

mésoscopiques subissant un champ magnétique [64,67] ou soumis à une rotation rapide [68]. En exploitant l'analogie entre les systèmes de particules chargées en mouvement dans un champ magnétique et atomes neutres dans un référentiel tournant, on s'attend qu'un courant de masse persistant apparaisse comme une réponse à la rotation d'un gaz d'atomes ultra-froid. La connaissance détaillée de l'image de distribution des courants de masse induits par la rotation est importante pour comprendre leur nature physique. Dans ce chapitre, nous étudierons l'influence de la formation des quasi-niveaux de Landau, apparaissant dans le régime de la rotation ultra rapide, sur ces courants de masse induits.

Notre étude ici est portée sur un système de fermions dégénéré confiné par un potentiel harmonique isotrope et mis en rotation à température nulle. Cette étude est divisée en deux parties. Une est consacrée à l'étude exacte des propriétés du système où tous les résultats sont obtenus sans aucune approximation. Malgré que nous sommes intéressés plus particulièrement par le cas des rotations ultra-rapides, ces résultats sont sans doute valables pour n'importe quelle valeur de la vitesse de rotation¹. Dans cette première partie, nous allons tout d'abord chercher les expressions exactes de la densité locale $\rho(\vec{r})$ et la densité de courant $\vec{J}(\vec{r})$ du system et c'est en procédant de deux manières différentes. La première méthode consiste en l'introduction dans le paragraphe 2.1.1 de l'outil mathématique appelé Matrice densité de Bloch que nous la référons brièvement **MDB** dans tout le reste de cette thèse. En fait, ce n'est pas seulement grâce à son pouvoir calculatoire de la dérivation, à partir de laquelle, des autres quantités thermodynamiques du système² que nous avons choisi de travailler au premier plan avec elle, mais aussi parce qu'elle permet la recherche de la nature des courants persistants au sein du système, l'obtentions de leurs expressions et aussi la dérivation de l'expression de la pseudo-magnétisation $\overline{\mathcal{M}}(\vec{r})$ reliée au densité de courant par $\vec{j}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \overline{\mathcal{M}}(\vec{r})$. La deuxième méthode développée dans le paragraphe 2.1.2 se base sur l'utilisation directe des fonctions d'onde solutions de l'équation de Schrödinger du système puisque elles sont connues. Mais cette méthode cesse d'être efficace dans la suite de notre étude quand nous voulons obtenir la pseudo-magnétisation. Une fois présenter ces deux formalismes, nous passerons ensuite au calcul de la densité de particules que nous allons voir, à travers son expression ainsi que son tracé, qu'elle montre une structure formée d'une suite des régions de densités constantes dites régions de densité incompressibles séparées par d'autres dans lesquelles la densité est variable (décroissante) avec la position, et qui seront qualifiées de régions de densité compressibles. La formation de cette structure dans le profil de la densité locale est une confirmation de l'apparition des niveaux de Landau dans le spectre d'énergie du système, ce qui va affecter la physique des courants induits par la rotation dans ces régions. En effet, nos calculs qui seront faits sur la densité de courant de masse prouvent qu'elle est composée de deux types de courants et qu'il n'y aura qu'un seul type de ces

¹ Bien évident que ces vitesses angulaires de rotations doivent toujours être inférieures à la fréquence du potentiel de piégeage afin de préserver le système dans un état confinant, sinon on détruit le système en passant au-delà de la fréquence du confinement à cause de la force centrifuge.

² Et c'est sans avoir besoin de connaître les fonctions d'onde du système étudié [69].

courants dans chacune des régions. Les courants persistants dans les régions de densité compressibles seront appelés courants de bord ou en anglais *Edge currents*, et les courants persistants dans les régions de densité incompressibles seront dits courant de volume ou *Bulk currents*. Nous allons montrer que ces deux types de courants, qui ne coexistent pas dans une même région dans la limite d'une rotation ultra rapide, circulent en directions opposées, c'est-à-dire que les courants de bord dans les régions compressibles s'écoulent en sens inverse à celui des courants de volume régnants dans les régions incompressibles. Ce phénomène d'inversion de sens des courants est lié à l'oscillation de la pseudo-magnétisation³ du système en rotation à l'instar de l'oscillation de la magnétisation dans un système électronique en présence du champ magnétique, et c'est pour cela que nous calculons l'expression de cette quantité, une discussion des résultats trouvés couronne la première partie de cette étude.

Dans une étape suivante et pour le but de chercher et comprendre l'origine et la nature différente des deux types de courants persistants, nous traiterons le système d'une manière approximative dans le cas critique où la fréquence de rotation soit très proche de la fréquence de confinement, on arrivera à conclure que les courants de bords sont dus au gradient de la densité de particules dans ces régions et qui seront alors négatifs puisque la densité locale est décroissante dans ces régions en s'éloignant du centre du piège, tandis que les courant de volumes sont dus au gradient du potentiel de confinement, alors semblables au courants de Hall, qui seront positifs vu qu'on a un potentiel de piégeage. Pour finir cette deuxième partie, nous présenterons, en plus de ces résultats, une étude sur le courant intégré (total) du système. Nous allons voir que ce courant n'est que la pseudo-magnétisation au centre du système et montré que sa valeur en fonction du nombre des particules est quantifiée. En fait, on verra que cette valeur quantifiée de ce courant ne dépend pas des dimensions des régions compressibles et incompressibles ce qui termine ce chapitre.

³ Système d'atomes électriquement neutres d'où l'appellation pseudo-magnétisation.

2. Traitement Exact du Problème

2.1. Densités de Particules et de Courant de Matière

Nous allons étudier dans cette section les effets de la rotation sur les propriétés d'un système de gaz ultra-froid constitué d'atomes fermioniques polarisés, électriquement neutres, confiné à deux dimensions par un potentiel d'oscillateur harmonique qui tourne autour de l'axe perpendiculaire au plan (x, y) qui contient les atomes avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$. Nous nous proposons de calculer la densité de particules $\rho(\vec{r})$ et la densité de courant de matière $\vec{J}(\vec{r})$. Ces densités seront calculées en utilisant deux méthodes, la première utilise le formalisme de la Matrice Densité de Bloch appelée aussi propagateur de Bloch comme outil de base, et la seconde méthode utilise directement les fonctions d'ondes à une particule (solutions de l'équation de Schrödinger).

2.1.1. Formalisme de la matrice densité ou propagateur de Bloch

2.1.1. A. Matrice Densité de Bloch (MDB) :

La matrice densité canonique ou de Bloch $C(\vec{r}, \vec{r}'; \beta)$ présente un intérêt considérable comme un outil mathématique utile pour l'étude des propriétés statistiques des systèmes physiques constitués de N particules. À température zéro cette matrice est définie par [69]:

$$C(\vec{r}, \vec{r}'; \beta) = \sum_i \phi_i(\vec{r}) \phi_i^*(\vec{r}') \exp(-\beta \varepsilon_i) \quad (3.1)$$

qui n'est en fait que les éléments de matrice dans la représentation position de l'opérateur de Bloch $[\exp(-\beta \hat{H})]$. Les ϕ_i sont les solutions normalisées de l'équation de Schrödinger indépendante du temps $H \phi_i(\vec{r}) = \varepsilon_i \phi_i(\vec{r})$ avec les énergies propres ε_i . L'indice i dans (3.1) indique tout l'ensemble des nombres quantiques caractérisant l'état du système et la sommation est faite sur toutes les valeurs possibles de ces nombres quantiques. Dans cette définition, le paramètre β n'est qu'une variable mathématique complexe qui a la dimension d'inverse d'une énergie et n'a rien à voir avec le paramètre défini en thermodynamique

comme égale à $1/k_B T$. Cette MDB vérifie l'équation $HC(\vec{r}, \vec{r}'; \beta) = -\partial C(\vec{r}, \vec{r}'; \beta) / \partial \beta$ dite équation de Bloch, avec la condition $C(\vec{r}, \vec{r}'; 0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$. L'importance physique de la MDB vient du fait que sa connaissance conduit à la dérivation de la matrice densité réduite d'ordre un $\rho(\vec{r}, \vec{r}')$, appelée aussi Matrice densité de Dirac, à travers une transformée de Laplace inverse.

D'après la définition (3.1), il apparaît que l'évaluation de cette matrice nécessite la connaissance préalable de la forme explicite des fonctions φ_i et les valeurs conjuguées ε_i , mais ce n'était pas indispensable dans la plupart des systèmes physiques étudiés par cet outil. En effet, pour des formes de potentiels spécifiques, qui sont de grands intérêts physiques, des expressions analytiques exactes pour la MDB ont été obtenues sans avoir besoin de faire recours à la résolution de l'équation de Schrödinger pour obtenir les fonctions d'ondes de ces systèmes [69-87]. Par exemple pour un potentiel d'oscillateur harmonique à d dimensions on a :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + \frac{1}{2} M \omega_0^2 \vec{r}^2 \quad (3.2)$$

Où $\vec{r}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2$. Le propagateur de Bloch correspondant à l'hamiltonien (3.2) est donné par [69]:

$$C(\vec{r}, \vec{r}'; \beta) = \left(\frac{M \omega_0}{2\pi \hbar \sinh(\beta \hbar \omega_0)} \right)^{d/2} \exp \left\{ -\frac{M \omega_0}{\hbar} \left[\tanh\left(\frac{\beta \hbar \omega_0}{2}\right) \left(\frac{\vec{r} + \vec{r}'}{2}\right)^2 + \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega_0}{2}\right) \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{2}\right)^2 \right] \right\} \quad (3.3)$$

L'ajout du terme de rotation $-\vec{\Omega} \cdot \vec{L}$ à l'hamiltonien (3.2) va certainement modifier l'expression (3.3) de la MDB trouvée pour d dimensions. Mais en fait, nous sommes intéressés par un système bidimensionnel que nous décrivons comme suivant : On suppose que ce système est constitué de N atomes fermioniques indépendants (sans interaction) électriquement neutres et de spins polarisés, chacun de masse M , assujetti de rester dans le plans (x, y) à l'aide d'un potentiel fort confinant suivant l'axe (oz) alors qu'il est de forme harmonique isotrope $V(\vec{r}) = M \omega_0^2 \vec{r}^2 / 2$ dans le plan (x, y) avec une fréquence de piégeage ω_0 , et qui tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ autour de l'axe (oz) . Dans un repère tournant lié au système, l'hamiltonien à une particule est alors donnée par (voir ch.2):

$$H = \frac{1}{2M} \vec{p}^2 + \frac{1}{2} M \omega_0^2 \vec{r}^2 - \vec{\Omega} \cdot \vec{L} \quad (3.4)$$

Où $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ et $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ sont respectivement la quantité de mouvement et le moment cinétique orbitale de la particule. L'expression (3.4) peut être réécrite sous une autre forme :

$$H = \frac{1}{2M} (\vec{p} - M \vec{\Omega} \times \vec{r})^2 + V_{eff}(\vec{r}) \quad (3.5)$$

Forme similaire à celle d'un hamiltonien d'une particule de charge q subissant un champ magnétique uniforme $\vec{B} = (2M/q)\vec{\Omega}$ et confinée par un potentiel harmonique effectif $V_{eff}(\vec{r}) = M(\omega_0^2 - \Omega^2)/2$ avec une fréquence $\omega_{osc} = \sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2}$. La MDB du système magnétique équivalent a été dérivée par March et Tosi [82] par un simple *ansatz* en étendant sa forme déjà obtenue pour le cas d'une charge en l'absence du champ magnétique [80]. En utilisant l'analogie entre ces deux systèmes, on peut récrire directement⁴ la MDB correspondant à l'hamiltonien dans l'équation (3.4) ou (3.5), [74,78]:

$$\begin{aligned} C(\vec{r}, \vec{r}'; \beta) &= \frac{M \omega_0}{2\pi\hbar \sinh(\beta\hbar\omega_0)} \exp \left[-i \frac{M \omega_0 \sinh(\beta\hbar\Omega)}{\hbar \sinh(\beta\hbar\omega_0)} (\vec{r} \times \vec{r}') \cdot \vec{e}_z \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{M \omega_0 \sinh(\beta\hbar(\omega_0 + \Omega)/2) \sinh(\beta\hbar(\omega_0 - \Omega)/2)}{2\hbar \sinh(\beta\hbar\omega_0)} (\vec{r} + \vec{r}')^2 \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{M \omega_0 \cosh(\beta\hbar(\omega_0 + \Omega)/2) \cosh(\beta\hbar(\omega_0 - \Omega)/2)}{2\hbar \sinh(\beta\hbar\omega_0)} (\vec{r} - \vec{r}')^2 \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Il sera plus commode d'utiliser les coordonnées du centre de masse $\vec{R} = (\vec{r} + \vec{r}')/2$ et relative $\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}'$ pour avoir:

$$\begin{aligned} C(\vec{R}, \vec{s}, \beta) &= \frac{M \omega_0}{2\pi\hbar \sinh(\beta\hbar\omega_0)} \exp \left[\frac{iM \omega_0 \sinh(\beta\hbar\Omega)}{\hbar \sinh(\beta\hbar\omega_0)} (\vec{R} \times \vec{s}) \cdot \vec{e}_z \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{M \omega_0}{\hbar} \left(\coth(\beta\hbar\omega_0) - \frac{\cosh(\beta\hbar\Omega)}{\sinh(\beta\hbar\omega_0)} \right) \vec{R}^2 \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{M \omega_0}{4\hbar} \left(\coth(\beta\hbar\omega_0) + \frac{\cosh(\beta\hbar\Omega)}{\sinh(\beta\hbar\omega_0)} \right) \vec{s}^2 \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

On remarque que si la vitesse angulaire de rotation est nulle, $\Omega = 0$, l'équation ci-dessus se réduit à celle donnée par (3.3) pour $d = 2$. L'élément diagonale de cette matrice de Bloch est $C(\vec{r}, \beta)$ tel que :

⁴ En utilisant les correspondances (2.22)-(2.24) mentionnées au §3 du chapitre 2

$$C(\vec{r}, \beta) = \frac{M \omega_0}{2\pi \hbar \sinh(\beta \hbar \omega_0)} \exp \left[-\frac{M \omega_0}{\hbar} \left(\coth(\beta \hbar \omega_0) - \frac{\cosh(\beta \hbar \Omega)}{\sinh(\beta \hbar \omega_0)} \right) \vec{r}^2 \right] \quad (3.8)$$

Dans le paragraphe prochain, nous allons calculer la matrice densité de Dirac $\rho(\vec{r}, \vec{r}')$ à partir de la MDB. Afin de faciliter l'évaluation de la transformée de Laplace inverse, nous voulons développer ici l'expression (3.7) pour obtenir une forme convenable de MDB. Introduisons pour cela les deux quantités A et B définies comme :

$$A = \frac{M \omega_0}{\hbar} \left(\vec{R}^2 + \frac{\vec{s}^2}{4} \right) \quad \text{et} \quad \begin{cases} B = \frac{M \omega_0}{\hbar} \left[\left(\vec{R}^2 - \frac{\vec{s}^2}{4} \right) + i (\vec{R} \times \vec{s}) \cdot \vec{e}_z \right] \\ B^* = \frac{M \omega_0}{\hbar} \left[\left(\vec{R}^2 - \frac{\vec{s}^2}{4} \right) - i (\vec{R} \times \vec{s}) \cdot \vec{e}_z \right] \end{cases} \quad (3.9)$$

Où B^* désigne le complexe conjugué de B . L'équation (3.7) devient donc :

$$C(\vec{R}, \vec{s}, \beta) = \frac{M \omega_0}{2\pi \hbar \sinh(\beta \hbar \omega_0)} \times \exp(-A \coth(\beta \hbar \omega_0)) \times \exp \left(B \frac{e^{\beta \hbar \Omega}}{(e^{\beta \hbar \omega_0} - e^{-\beta \hbar \omega_0})} + B^* \frac{e^{-\beta \hbar \Omega}}{(e^{\beta \hbar \omega_0} - e^{-\beta \hbar \omega_0})} \right) \quad (3.10)$$

En utilisant les relations suivantes:

$$\exp \left(\frac{B e^{\beta \hbar \Omega}}{(e^{\beta \hbar \omega_0} - e^{-\beta \hbar \omega_0})} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} B^n e^{n \beta \hbar \Omega} / \left[(e^{\beta \hbar \omega_0} - e^{-\beta \hbar \omega_0})^n n! \right] \quad (3.11)$$

$$\exp \left(\frac{B^* e^{-\beta \hbar \Omega}}{(e^{\beta \hbar \omega_0} - e^{-\beta \hbar \omega_0})} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} B^{*m} e^{-m \beta \hbar \Omega} / \left[(e^{\beta \hbar \omega_0} - e^{-\beta \hbar \omega_0})^m m! \right]$$

Ainsi que le développement [74,88] :

$$\frac{\exp(-A \coth(\beta \hbar \omega_0))}{(e^{\beta \hbar \omega_0} - e^{-\beta \hbar \omega_0})^{d/2}} = e^{-A} \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{d/2-1} (2A) e^{-\left(2k + \frac{d}{2}\right) \beta \hbar \omega_0} \quad (3.12)$$

Où $L_k^{d/2-1}$ sont les polynômes de Laguerre généralisés d'ordre $(d/2-1)$ et de degré k . L'injection de (3.11) suivie par (3.12) dans (3.10) nous conduit à la forme utile suivante de la MDB:

$$C(\vec{R}, \vec{s}, \beta) = \frac{M \omega_0}{\pi \hbar} \exp(-A) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} L_k^{m+n} (2A) \frac{B^m B^{*n}}{m! n!} \times \exp\left[-\beta(2k \hbar \omega_0 + (n+m+1) \hbar \omega_0 + (n-m) \hbar \Omega)\right] \quad (3.13)$$

2.1.1. B. Spectre d'énergie du système à partir de MDB

Nous avons donné au paragraphe 5 du chapitre 2 les valeurs de l'énergie du système (éq (2.33)). On peut les trouver ici facilement à partir de l'utilisation de l'expression de la MDB (3.8). En effet, c'est à l'aide de la relation entre la fonction de partition du système donnée par :

$$Z = \sum_i \exp(-\beta \varepsilon_i) \quad (3.14)$$

ce qui peut être réécrite en utilisant la définition (3.1) de MDB comme $Z = \int C(\vec{r}, \beta) d^2 \vec{r}$. On peut évaluer cette intégrale en y injectant l'expression (3.8) et utilisant la formule $\int_{-\infty}^{+\infty} dt. \exp(-\alpha t^2) = \sqrt{\pi/\alpha}$. Une fois cette intégrale calculée, on peut utiliser le développement de Taylor suivant : $\sinh^{-1} x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-(2n+1)x]$, pour arriver finalement à l'expression suivante de la fonction de partition Z :

$$Z = \sum_{n_+=0}^{\infty} \sum_{n_-=0}^{\infty} \exp\left\{-\beta[\hbar(\omega_0 + \Omega)(n+1/2) + \hbar(\omega_0 - \Omega)(m+1/2)]\right\} \quad (3.15)$$

Où $n, m = 0, 1, 2, \dots$ sont deux nombres entiers. Si nous comparons (3.15) avec (3.14), on peut obtenir les énergies du système :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n,m} &= \hbar(\omega_0 + \Omega)(n+1/2) + \hbar(\omega_0 - \Omega)(m+1/2) \\ &= \hbar\omega_0(n+m+1) + \hbar\Omega(n-m) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ce spectre d'énergie est identique au spectre d'énergie d'un potentiel d'oscillateur harmonique anisotrope à deux dimensions qui a pour fréquences $(\omega_0 + \Omega)$ et $(\omega_0 - \Omega)$. Dans l'expression (3.16), la fréquence ω_0 apparait comme une valeur critique de Ω vu que la stabilité du système exige la condition $\Omega \leq \omega_0$. Dans la limite $\Omega = \omega_0$ la force centrifuge $M \Omega^2 \vec{r}$ est balancée par la force de confinement $-M \omega_0^2 \vec{r}$ et le spectre d'énergie se réduit à $\varepsilon_{n,m} = \hbar\omega_0(2n+1)$ qui est de type niveaux de Landau. Le nombre n identifie chaque niveau et m c'est un indice de dégénérescence du niveau de Landau correspondant. Le nombre de dégénérescence m prend des valeurs considérables dans le cas du régime de rotation très

rapide et les niveaux de Landau sont alors fortement dégénérés. Dans nos calculs, ce nombre peut atteindre $m \sim 2000$. Nous reviendrons plus loin à cette expression pour calculer l'énergie de Fermi du système.

Après cette étude sur la matrice densité de Bloch et le spectre d'énergie du système, nous passons maintenant au calcul des densités.

2.1.1. C. Calcul de la matrice densité $\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu)$ et de la densité locale $\rho(\vec{r})$:

La matrice densité de premier ordre $\rho(\vec{r}, \vec{r}')$ associé au système constitué de N fermions indépendants est définie par :

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu) &= \sum_{i=1}^N \phi_i(\vec{r}) \phi_i^*(\vec{r}') \\ &= \sum_{i=1}^N \phi_i(\vec{r}) \phi_i^*(\vec{r}') \Theta(\mu - \varepsilon_i) \end{aligned} \quad (3.17)$$

où la sommation est étendue sur tout le spectre. La fonction saut de Heaviside $\Theta(x)$, définie par $\Theta(x) = 1$ ou 0 si $x > 0$ ou $x < 0$ respectivement, a été introduite pour n'inclure que les états occupés, le potentiel chimique, qui est ici le niveau de Fermi, est noté par μ . La fonction $\Theta(x)$ peut s'exprimer comme une transformée de Laplace inverse [89] :

$$\Theta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(\alpha x)}{\alpha} d\alpha \quad (3.18)$$

Par conséquent on peut écrire :

$$\Theta(\mu - x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\beta \frac{\exp(\beta(\mu - x))}{\beta} = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{\exp(-\beta x)}{\beta} \right\} \quad (3.19)$$

où l'intégration porte sur le paramètre complexe β . En utilisant la définition de la MDB (3.1) et la relation (3.19), on peut écrire la matrice densité $\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu)$ donnée par (3.17) comme la transformée de Laplace inverse de la MDB [69]:

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu) = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left[\frac{C(\vec{r}, \vec{r}', \beta)}{\beta} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(\beta\mu) \frac{C(\vec{r}, \vec{r}', \beta)}{\beta} d\beta \quad (3.20)$$

Pour obtenir l'expression explicite de la matrice $\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu)$, nous substituons dans (3.20) la formule de MDB donnée par (3.13) en fonctions des coordonnées relative et centre de masse et en utilisant ensuite la relation (3.19), nous arrivons à:

$$\rho(\vec{R}, \vec{s}, \mu) = \frac{M \omega_0 \exp(-A)}{\pi \hbar} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} L_k^{n+m} (2A) \frac{B^m B^{*n}}{m! n!} \Theta[\mu - (2k \hbar \omega_0 + \varepsilon_{n,m})] \quad (3.21)$$

La densité locale ou la densité à une particule $\rho(\vec{r})$ est l'élément diagonal de la matrice densité $\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu)$:

$$\rho(\vec{r}) = \rho(\vec{R}, \vec{s}, \mu) \Big|_{\vec{s}=\vec{0}} \quad (3.22)$$

elle est alors obtenue en posant $\vec{r} = \vec{r}'$ ($\vec{R} = \vec{r}$ et $\vec{s} = \vec{0}$) dans les expressions (3.9) des quantités A et B qui deviennent :

$$A = B = B^* = \frac{M \omega_0}{\hbar} \vec{r}^2 = \frac{\vec{r}^2}{a^2} \quad (3.23)$$

Où pour alléger les notations, on a introduit la grandeur $a = \sqrt{\hbar/M \omega_0}$ qui est une longueur caractérisant le potentiel harmonique, appelée longueur de l'oscillateur. En substituant ces relations dans l'expression (3.21) pour $\rho(\vec{R}, \vec{s}, \mu) \Big|_{\vec{s}=\vec{0}}$ on trouve:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\exp(-r^2/a^2)}{\pi a^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(r/a)^{2(m+n)}}{m! n!} L_k^{m+n} (2r^2/a^2) \Theta[\mu - (2k \hbar \omega_0 + \varepsilon_{n,m})] \quad (3.24)$$

La densité locale $\rho(\vec{r})$ vérifie la condition normalisation:

$$\int \rho(\vec{r}) d\vec{r} = N \quad (3.25)$$

Où l'intégrale est étendue sur tout l'espace physique du système.

2.1.1.D. Calcul de la densité de courant de matière $\vec{J}_{int}(\vec{r})$

On se propose de calculer la distribution du courant de masse engendrée par la rotation. À partir de l'équation de Schrödinger, nous dérivons l'équation de continuité $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{int}(\vec{r}) = 0$, où $\vec{J}_{int}(\vec{r})$ est la densité de courant de masse dans le repère tournant, c'est-à-dire, la distribution intrinsèque du courant de matière. En effet, l'équation de Schrödinger pour ce système correspondant à l'hamiltonien (3.4) dans le repère tournant est:

$$i \hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H |\psi\rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}^2 + \frac{1}{2} M \omega_0^2 \vec{r}^2 - \vec{\Omega} \cdot \vec{L} \right) |\psi\rangle \quad (3.26)$$

La dérivation de l'expression du courant qui vérifie l'équation de continuité $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{int}(\vec{r}) = 0$ conduit à :

$$\vec{J}_{int}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2iM} \sum_{i=1}^N \left[\phi_i^* \vec{\nabla} \phi_i - \phi_i \vec{\nabla} \phi_i^* \right] - (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \rho(\vec{r}) \quad (3.27)$$

où le deuxième terme du second membre tient compte de l'effet de la rotation sur la particule dans le repère tournant, et qui peut être simplifié si nous utilisons la relation vectorielle $\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{e}_\phi$, avec $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$ sont respectivement les vecteurs unitaires radial et azimutal.

Sachant que $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ et $\vec{r} = r \vec{e}_r$, on peut donc écrire $(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \rho(\vec{r}) = \Omega r \rho(\vec{r}) \vec{e}_\phi$. En plus, Il est possible d'exprimer le premier terme du second membre de la relation (3.27) en fonction de la matrice densité $\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu)$, par conséquent :

$$\vec{J}_{int}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2Mi} \underbrace{\left[(\vec{\nabla}_{\vec{r}} - \vec{\nabla}_{\vec{r}'}) \rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu) \right]_{\vec{r}'=\vec{r}}}_{\vec{J}_{kin}(\vec{r})} - \Omega r \rho(\vec{r}) \vec{e}_\phi \quad (3.28)$$

où $\vec{J}_{kin}(\vec{r})$ est la partie cinétique de la densité de courant qui peut être aussi regardée comme la densité de courant dans le référentiel du laboratoire. Pour calculer le courant intrinsèque, on doit chercher l'expression explicite de la partie cinétique de courant $\vec{J}_{kin}(\vec{r})$. Si on utilise la relation (3.20) et en notant en même temps que $\vec{\nabla}_{\vec{r}} - \vec{\nabla}_{\vec{r}'} = 2\vec{\nabla}_{\vec{r}-\vec{r}'} = 2\vec{\nabla}_{\vec{s}}$, alors on peut écrire :

$$\vec{J}_{kin}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{Mi} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left[\frac{1}{\beta} \vec{\nabla}_{\vec{s}} C(\vec{R}, \vec{s}, \beta) \right]_{\vec{s}=\vec{0}} \quad (3.29)$$

En utilisant l'expression (3.7) de la MDB, on obtient :

$$\vec{J}_{kin}(\vec{r}) = \frac{(\vec{e}_z \times \vec{r})}{2\pi a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{\omega_0 \sinh(\beta \hbar \Omega)}{\sinh^2(\beta \hbar \omega_0)} \exp \left[- \left(\coth(\beta \hbar \omega_0) - \frac{\cosh(\beta \hbar \Omega)}{\sinh(\beta \hbar \omega_0)} \right) \frac{\vec{r}^2}{a^2} \right] \right\} \quad (3.30)$$

D'autre part, pour le deuxième terme qui contient la densité locale, on peut utiliser la relation (3.8) des éléments diagonaux de la MDB et (3.20) pour que la densité locale $\rho(\vec{r})$ soit réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}) &= \mathcal{L}_\mu^{-1} \left[\frac{C(\vec{r}, \beta)}{\beta} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\beta \sinh(\beta \hbar \omega_0)} \exp \left[- \left(\coth(\beta \hbar \omega_0) - \frac{\cosh(\beta \hbar \Omega)}{\sinh(\beta \hbar \omega_0)} \right) \frac{\vec{r}^2}{a^2} \right] \right\}\end{aligned}\quad (3.31)$$

alors le courant de matière intrinsèque (3.28) devient :

$$\begin{aligned}\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r}) &= \frac{r}{2\pi a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\beta} \left(\frac{\omega_0 \sinh(\beta \hbar \Omega)}{\sinh^2(\beta \hbar \omega_0)} - \frac{\Omega}{\sinh(\beta \hbar \omega_0)} \right) \right\} \times \\ &\quad \exp \left[- \left(\coth(\beta \hbar \omega_0) - \frac{\cosh(\beta \hbar \Omega)}{\sinh(\beta \hbar \omega_0)} \right) \frac{\vec{r}^2}{a^2} \right] \vec{e}_\varphi\end{aligned}\quad (3.32)$$

On note déjà à ce niveau que la densité de courant de matière n'a pas de composante radiale mais seulement une composante azimutale le long du vecteur unitaire \vec{e}_φ . En faisant quelques développements et manipulations juste comme nous avons fait pour obtenir la matrice densité $\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu)$, à savoir les développements (3.11), (3.12) et la relation (3.19), on obtient le résultat final suivant :

$$\begin{aligned}\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r}) &= J_{\text{int}}(\vec{r}) \vec{e}_\varphi \\ &= \frac{\omega_0 r}{\pi a^2} \exp \left(- \frac{r^2}{a^2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n! m!} \left(\frac{r}{a} \right)^{2(m+n)} \left\{ L_k^{m+n+1} \left(2 \frac{r^2}{a^2} \right) \times \right. \\ &\quad \left[\Theta \left(\tilde{\mu} - 2k - (n+m+2) - (n-m-1) \frac{\Omega}{\omega_0} \right) - \Theta \left(\tilde{\mu} - 2k - (n+m+2) - (n-m+1) \frac{\Omega}{\omega_0} \right) \right] - \\ &\quad \left. \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right) L_k^{m+n} \left(2 \frac{r^2}{a^2} \right) \Theta \left(\tilde{\mu} - 2k - (n+m+1) - (n-m) \frac{\Omega}{\omega_0} \right) \right\} \vec{e}_\varphi\end{aligned}\quad (3.33)$$

Où $\tilde{\mu} = (\mu/\hbar\omega_0)$. Pour obtenir ce dernier résultat, on peut, au lieu de passer par la relation (3.31), utiliser directement la formule explicite de la densité locale donnée par (3.24) avec le développement de (3.30).

Nous allons dériver dans le paragraphe suivant les formules de la matrice densité $\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu)$, la densité locale $\rho(\vec{r})$ et la densité de courant de matière $\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r})$ d'une autre manière où nous utiliserons les expressions des fonctions d'onde du système. Les formes des nouvelles expressions, qui seront obtenues par cette deuxième méthode, diffèrent des formules trouvées auparavant mais représentent certainement les mêmes quantités et donnent évidemment des résultats numériques tout à fait identiques.

2.1.2. Calcul des densités à partir des fonctions d'ondes à une particule.

2.1.2. A. Les Fonctions d'ondes à une particule.

En deux dimensions les fonctions d'ondes de l'hamiltonien $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + \frac{1}{2}M\omega_0^2 r^2$, qui satisfont à l'équation aux valeurs propres $H_0\phi_{n,m} = E_{n,m}^0\phi_{n,m}$, sont données en coordonnées polaires (r, φ) par [55,90]:

$$\phi_{n,m}(r, \varphi) = \frac{1}{a} \sqrt{\left(\frac{n!}{\pi(n+|m|)!}\right)} (r/a)^{|m|} L_n^{|m|}(r^2/a^2) \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) e^{im\varphi} \quad (3.34)$$

Le nombre quantique⁵ n s'appelle le nombre quantique radial et prend les valeurs entières positives $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. En plus, si on remarque que H_0 et L_z commutent entre eux $[H_0, L_z] = 0$, alors les fonction $\phi_{n,m}(r, \varphi)$ sont aussi fonctions propres de l'opérateur L_z , c'est-à-dire, $L_z\phi_{n,m} = (-i\hbar\partial/\partial\varphi)\phi_{n,m} = \hbar m\phi_{n,m}$, où la quantité $\hbar m$ (avec $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) est la projection du moment cinétique \vec{L} sur l'axe (oz).

Les énergies propres à une particule $E_{n,m}^0$ de l'hamiltonien H_0 sont données par:

$$E_{n,m}^0 = \hbar\omega_0(2n + |m| + 1) \quad (3.35)$$

On peut vérifier que les fonctions $\phi_{n,m}(r, \varphi)$ sont orthonormalisées. En effet:

$$\int_{r=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |\phi_{n,m}(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi = 1 \quad (3.36)$$

Où nous avons utilisé [88] :

$$\int_{x=0}^{\infty} x^p \exp(-x) (L_n^p(x))^2 dx = \frac{(n+p)!}{n!} \quad (3.37)$$

Pour l'hamiltonien de notre système donné par la relation $H = H_0 - \Omega L_z$, les $\phi_{n,m}$ sont aussi des fonctions propres vu la commutativité entre H_0 et L_z . On a donc :

⁵ Il faut noter que ce nouvel ensemble des nombres quantiques est totalement différent de celui étudié précédemment en §2.1.1.B par le formalisme BDM, pour voir la relation entre eux voir §5 du chapitre 2.

$$H\phi_{n,m}(r,\varphi) = \left(-\frac{\hbar^2}{2M^*} \nabla^2 + \frac{1}{2} M^* \omega_0^2 \vec{r}^2 - \Omega L_z \right) \phi_{n,m}(r,\varphi) = E_{n,m} \phi_{n,m}(r,\varphi) \quad (3.38)$$

Avec les énergies propres $E_{n,m}$:

$$E_{n,m} = (2n + |m| + 1) \hbar \omega_0 - m \hbar \Omega, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.39)$$

Nous avons obtenu ainsi une autre expression du spectre des énergies à une particule du système, on rappelle que nous disposons déjà d'une autre donnée par (3.16). La différence entre ces deux expressions réside dans les nombres quantiques utilisés pour caractériser les états quantiques à une particule.

D'après cette dernière équation, on remarque que dans le régime de rotation ultra rapide $\Omega \approx \omega_0$, les énergies à une particule deviennent $E_{n,m} \approx (2n + 1 + |m| - m) \hbar \omega_0$, par conséquent, pour n fixé tous les états quantiques ayant leur nombre quantique $m \geq 0$ sont fortement dégénérés. On a alors :

$$E_n \approx (2n + 1) \hbar \omega_0 \quad (3.40)$$

Ce spectre d'énergie s'appelle spectre des niveaux de Landau, car il est similaire à celui d'une particule chargée dans un champ magnétique.

Une fois connue les fonctions d'ondes et les énergies associées, on peut maintenant construire la densité de particules $\rho(\vec{r})$ et la densité de courant de matière $\vec{J}_{int}(\vec{r})$.

2.1.2. B. Calcul de la matrice densité $\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu)$ et de la densité locale $\rho(\vec{r})$

La matrice densité associée au système est définie par (3.17), alors en substituant les expressions des fonctions d'onde $\phi_{n,m}(r, \varphi)$ données par (3.34) dans (3.17) on arrive à :

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{n,m}(r, \varphi) \phi_{n,m}^*(r', \varphi') \Theta(\mu - \varepsilon_{n,m}) \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \exp\left(-\frac{r^2 + r'^2}{2a^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{n!}{(n+|m|)!} \left(\frac{r^{|m|} r'^{|m|}}{a^{2|m|}}\right) \times \\ &\quad L_n^{|m|}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) L_n^{|m|}\left(\frac{r'^2}{a^2}\right) \exp[im(\varphi - \varphi')] \Theta(\mu - E_{n,m}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$E_{n,m}$ sont données par (3.39).

La densité locale est alors :

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= [\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu)]_{\vec{r}=\vec{r}'} \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{n!}{(n+|m|)!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2|m|} \times \\ &\quad \left(L_n^{|m|}\left(\frac{r^2}{a^2}\right)\right)^2 \Theta\left(\mu - (2n + |m| + 1)\hbar\omega_0 + m\hbar\Omega\right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ces deux expressions (3.41), (3.42) pour $\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu)$ et $\rho(\vec{r})$ sont respectivement différentes de (3.21), (3.24) qui sont obtenues à partir du formalisme de la MDB, mais en fait présentent les mêmes fonctions. On peut par exemple représenter la distribution de la densité locale en utilisant l'une ou l'autre des expressions mentionnées.

2.1.2. C. Calcul de la densité de courant de matière $\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r})$

Rappelons que la densité de courant de masse dans le repère tournant est donnée par la relation (3.27), que nous pouvons réécrire en utilisant les nombres quantiques n et m comme suit:

$$\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2M^*i} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\phi_{n,m}^* \cdot \vec{\nabla} \phi_{n,m} - \phi_{n,m} \cdot \vec{\nabla} \phi_{n,m}^* \right)}_{\vec{J}_{\text{kin}}(\vec{r})} \Theta(\mu - \varepsilon_{n,m}) - \Omega r \rho(\vec{r}) \vec{e}_\varphi \quad (3.43)$$

L'expression explicite du premier terme dans le second membre, qui est la partie cinétique de courant $\vec{J}_{\text{kin}}(\vec{r})$, se calcule en utilisant l'expression (3.34) des fonctions $\phi_{n,m}(r, \varphi)$ et celle de

l'opérateur gradient en coordonnées polaire $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$, nous trouvons que:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\text{kin}}(\vec{r}) &= \frac{\omega_0}{\pi a} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m \frac{n!}{(n+|m|)!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2|m|-1} \times \\ &\quad \left(L_n^{|m|}\left(\frac{r^2}{a^2}\right)\right)^2 \Theta\left(\mu - (2n + |m| + 1)\hbar\omega_0 + m\hbar\Omega\right) \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (3.44)$$

Maintenant, d'après les expressions (3.42), (3.43) et (3.44), nous obtenons la formule de la densité de courant de matière :

$$\begin{aligned}
 \vec{J}_{\text{int}}(\vec{r}) &= J_{\text{int}}(\vec{r}) \vec{e}_\varphi \\
 &= \frac{\omega_0}{\pi a} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{n!}{(n+|m|)!} \left(L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{a^2} \right) \right)^2 \left(\frac{r}{a} \right)^{2|m|-1} \times \\
 &\quad \left(m - \frac{\Omega}{\omega_0} \frac{r^2}{a^2} \right) \Theta \left(\tilde{\mu} - (2n + |m| + 1) + m \frac{\Omega}{\omega_0} \right) \vec{e}_\varphi
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

C'est une expression exacte de la densité de courant de masse $\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r})$ trouvée dans le cadre du formalisme des fonctions d'ondes à une particule du système.

Comme nous avons signalé pour les densités $\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu)$ et $\rho(\vec{r})$, nous remarquons ici aussi que les expressions (3.45) et (3.33) sont deux formes mathématiques différentes pour la même fonction $\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r})$. Cette différence n'est que formelle, nous avons alors tout le choix entre ces deux expressions pour représenter la distribution du courant $\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r})$. En plus, il est à noter que toutes les formules obtenues précédemment dans les deux formalismes sont dérivées sans aucune approximation, elles sont par conséquent toutes exactes.

2.2. La Pseudo-Magnétisation

A partir de l'équation de la continuité $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{\text{int}}(\vec{r}) = 0$ satisfaite par la densité de courant dans le repère tournant, on a toujours la possibilité d'écrire la densité $\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r})$ comme le rotationnel d'un vecteur, soit :

$$\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \overline{\mathcal{M}}(\vec{r}) \tag{3.46}$$

Où par analogie avec le magnétisme, le vecteur $\overline{\mathcal{M}}(\vec{r})$ sera appelé **pseudo-magnétisation orbitale**. Ce vecteur $\overline{\mathcal{M}}(\vec{r}) = \mathcal{M}(\vec{r}) \vec{e}_z$ est dirigé en chaque point de l'espace à deux dimensions suivant l'axe (oz). Cette dernière relation permet d'écrire le courant $\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r})$ comme :

$$\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \mathcal{M}(\vec{r}) \times \vec{e}_z \tag{3.47}$$

Il est possible d'établir une expression de la pseudo-magnétisation et ceci en utilisant l'équation (3.32)⁶. Une simple comparaison permet d'écrire :

⁶ Pour cela on utilise $\vec{\nabla} \mathcal{M} \times \vec{e}_z = \left[(\partial \mathcal{M} / \partial r) \vec{e}_r + (1/r) (\partial \mathcal{M} / \partial \varphi) \vec{e}_\varphi \right] \times \vec{e}_z$

$$\mathcal{M}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\beta} \left(\frac{\omega_0 \sinh(\beta \hbar \Omega)}{\sinh(\beta \hbar \omega_0)} - \Omega \right) \frac{\exp \left[- \left(\coth(\beta \hbar \omega_0) - \frac{\cosh(\beta \hbar \Omega)}{\sinh(\beta \hbar \omega_0)} \right) \frac{\vec{r}^2}{a^2} \right]}{(\cosh(\beta \hbar \omega_0) - \cosh(\beta \hbar \Omega))} \right\} \quad (3.48)$$

Pour obtenir une expression explicite de cette quantité locale, il est possible d'effectuer la transformation de Laplace inverse à l'aide des développements comme ceux faits pour évaluer les expressions des densités locale et de courant, nous donnons ici le résultat final :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\vec{r}) = & \frac{\omega_0}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2(n+m)} L_k^{n+m} \left(2\frac{r^2}{a^2}\right) \times \\ & \left\{ \Theta(\mu - 2k\hbar\omega_0 - \varepsilon_{n,m} - \varepsilon_{q,p} + \hbar\Omega) - \Theta(\mu - 2k\hbar\omega_0 - \varepsilon_{n,m} - \varepsilon_{q,p} - \hbar\Omega) - \right. \\ & \left. (\Omega/\omega_0) \left[\Theta(\mu - 2k\hbar\omega_0 - \varepsilon_{n,m} - \varepsilon_{q,p} + \hbar\omega_0) - \Theta(\mu - 2k\hbar\omega_0 - \varepsilon_{n,m} - \varepsilon_{q,p} - \hbar\omega_0) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Où $\varepsilon_{n,m}$ est donnée par (3.16) et $\varepsilon_{q,p}$ est:

$$\varepsilon_{q,p} = (2q + |p| + 1) \hbar\omega_0 - p \hbar\Omega \quad (3.50)$$

Un des intérêts physique de l'introduction de ce vecteur $\overline{\mathcal{M}}(\vec{r})$ est qu'il est relié au moment cinétique orbital. En effet, on peut montrer que si $|\Psi\rangle$ est un déterminant de Slater alors le moment cinétique orbital total dans le repère tournant, qui est défini en valeur moyenne par $\vec{L} = \langle \Psi | \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) | \Psi \rangle$, peut s'exprimer comme :

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{J}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (3.51)$$

Si on remplace le courant par son expression $\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \overline{\mathcal{M}}(\vec{r})$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int \vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \overline{\mathcal{M}}(\vec{r})) d\vec{r} \\ &= 2 \int \overline{\mathcal{M}}(\vec{r}) d\vec{r} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ce qui montre que le moment cinétique total dans le repère relatif est égal à 2 fois la pseudo-magnétisation totale. Aussi, d'après la définition (3.51) ci-dessus, on peut écrire :

$$\int \overline{\mathcal{M}}(\vec{r}) d\vec{r} = (1/2) \int (\vec{r} \times \vec{J}(\vec{r})) d\vec{r} \quad (3.53)$$

2.3. Etude Numérique et Tracés des Densités

Dans cette section, nous nous proposons de calculer numériquement et de tracer le profil des différentes densités évaluées analytiquement d'une façon exacte dans la 1^{ère} partie de cette étude, et qui sont données par les formules (3.24) et (3.42) pour la densité locale $\rho(\vec{r})$, par (3.33) et (3.45) pour la densité de courant de matière $J_{\text{int}}(\vec{r})$ et par (3.49) pour la pseudo magnétisation $\mathcal{M}(\vec{r})$. Pour évaluer ces densités, on aura besoin de connaître exactement le niveau de Fermi $\mu(N, \Omega)$ en fonction du nombre des fermion N et la vitesse de rotation Ω . Pour cela, nous indiquons dans le paragraphe suivant la méthode que nous avons utilisé pour la détermination de μ .

2.3.1. Relation explicite entre le potentiel chimique μ (niveau de Fermi) et le nombre total de particules N

La condition de normalisation de la densité au nombre total de particules N est donnée par la relation (3.25) $\int \rho(\vec{r}) d\vec{r} = N$, si on substitue dans cette condition de normalisation la définition de la densité locale exprimée par les fonctions d'onde du système $\rho(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |\phi_{n,m}(\vec{r})|^2 \Theta(\mu - \varepsilon_{n,m})$, et si on utilise le fait que ces fonctions d'ondes sont normalisées à l'unité. On a donc :

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Theta(\mu - \varepsilon_{n,m}) \quad (3.54)$$

Cette équation permet de trouver le niveau de Fermi μ . Pour N fixé, il faut chercher donc toutes les valeurs possibles de n et m qui vérifient la condition $\varepsilon_{n,m} \leq \mu$. On rappelle que le spectre d'énergie est donné par (3.16) et qui devient en posant $\Omega_+ = \omega_0 + \Omega$ et $\Omega_- = \omega_0 - \Omega$, comme :

$$\varepsilon_{n,m} = \hbar\Omega_+(n + 1/2) + \hbar\Omega_-(m + 1/2) \quad (3.55)$$

Alors, on doit chercher n et m de telle sorte que :

$$\hbar\Omega_+(n + 1/2) + \hbar\Omega_-(m + 1/2) \leq \mu \quad (3.56)$$

On note que la valeur maximale n_{max} de n est⁷ :

⁷ En fait, il faut prendre la partie entière puisque n et m sont des entiers.

$$n_{\max} = \frac{\mu}{\hbar\Omega_+} - \frac{\omega_0}{\Omega_+} \quad (3.57)$$

et pour une valeur donné de n , la valeur maximale m_{\max} de m est :

$$m_{\max} = \frac{\mu}{\hbar\Omega_-} - \frac{\Omega_+}{\Omega_-} n - \frac{\omega_0}{\Omega_-} \quad (3.58)$$

La relation (3.54) devient dans ce cas $N = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^{m_{\max}} (1)$, une évaluation de cette somme avec les deux relations (3.57) et (3.58) conduit à :

$$N = \frac{1}{2\Omega_+\Omega_-} \left[\mu^2 + (\Omega_+ + 2\Omega_- - 2\omega_0)\mu - (\Omega_+ + 2\Omega_-)\omega_0 + \omega_0^2 + 2\Omega_+\Omega_- \right] \quad (3.59)$$

Pour la suite, il est convenable de mesurer μ en unités $\hbar\omega_0$ et utiliser la quantité $\tilde{\mu} = (\mu/\hbar\omega_0)$, et afin d'alléger la notation, on introduit le rapport $\alpha = \Omega/\omega_0$. Finalement, on peut réécrire (3.59) après simplification comme suivant :

$$N = \frac{\tilde{\mu}^2 + (1-\alpha)\tilde{\mu} + \alpha - 2\alpha^2}{2(1-\alpha^2)} \quad (3.60)$$

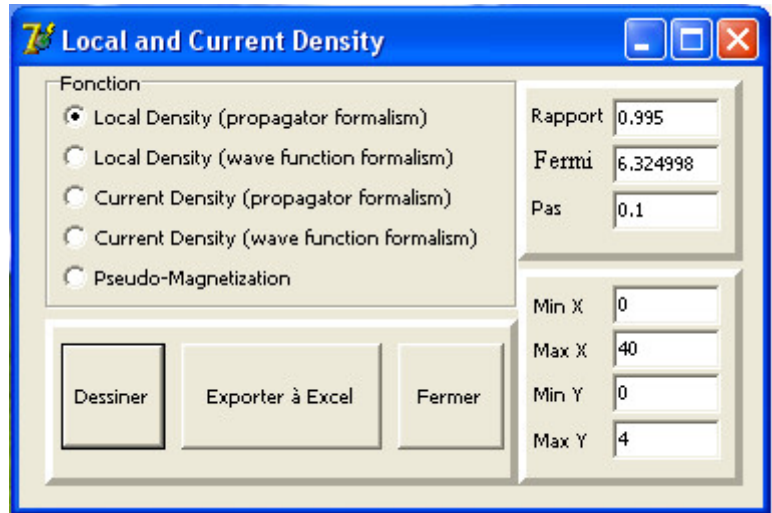
En fait cette équation du second degré en $\tilde{\mu}$ n'est pas exacte, mais elle donne une très bonne estimation du niveau de Fermi pour N et α choisis. Une fois obtenu cet estimé, nous avons réalisé un programme en **fortran 90** qui permet de trouver les valeurs exactes de $\tilde{\mu}$.

D'autre part, nous voulons signaler à ce stade les grandes valeurs que prend le nombre quantique m quand la rotation devient très rapide, c'est dans la limite où le rapport α devient très proche de 1. Pour cela, on réécrit l'expression (3.58) en fonction du rapport α et la quantité $\tilde{\mu}$, on aura :

$$m_{\max} = \frac{\tilde{\mu} - 1 - (1+\alpha)n}{1-\alpha} \quad (3.61)$$

On voit clairement d'après cette dernière équation que les valeurs maximales des nombres m sont inversement proportionnels à $(1-\alpha)$. Par exemple, dans le niveau d'énergie $n = 0$ et pour un nombre de particules $N = 2000$, et un rapport $\alpha = 0.995$, la quantité $\tilde{\mu} = 6.325$ et par suite l'équation (3.61) nous donne le nombre $m_{\max} = 1065$. Ce nombre peut dépasser 2000, alors que la valeur maximale du nombre quantique n , qui caractérise dans ce cas le niveau de Landau, ne prend que $n_{\max} = 2$ pour l'exemple précédent. Maintenant, si nous examinons les

expressions différentes des densités (3.24),(3.42), (3.33), (3.45) et (3.49) de $\rho(\vec{r})$, $J_{\text{int}}(\vec{r})$ et $\mathcal{M}(\vec{r})$, on trouve qu'elles contiennent chacune d'elles, non pas le nombre quantique m mais sa factorielle dans les dénominateurs $m!$. Ainsi, pour l'exemple précédent, on doit inclure dans nos calculs des sommations des 1065 termes qui peuvent contenir de leur part des nombres de l'ordre de $1065! \approx 3.248 \times 10^{2763}$ et des polynômes de Laguerre d'ordre m . Ce n'était pas possible pour nous de les faire avec un logiciel de calcul ordinaire, il nous a fallut réaliser et développer un code de calcul en utilisant un logiciel particulier qui calcule avec exactitude toutes ces formules quand le nombre m prend des grandes valeurs. Ce calcul exact des différents ingrédients permet de tracer et de visualiser les profils des densités dans les moindres détails. Pour un nombre d'atomes N choisi et pour un rapport $\alpha = \Omega/\omega_0$ fixé on détermine d'abord le niveau de Fermi μ , le programme calcule alors les densités en chaque point de la variable réduite r/a . Nous présentons dans la figure à coté l'interface de notre programme numérique.



Nous voulons finalement donner les valeurs de l'énergie de Fermi $\tilde{\mu}$ mesurée en unité de $\hbar\omega_0$ pour les cas que nous allons traiter dans ce travail. Dans le tableau ci-dessous on a récapitulé nos résultats, pour un système constitué de $N = 1000$, 2000 et 3000 particules respectivement associés aux valeurs de α choisies d'une manière croissante afin de voir ce qui se passe en passant du régime des faibles rotations à ceux de rotations très rapide.

		Le rapport $\alpha = \Omega/\omega_0$		
		$\alpha=0.95$	$\alpha=0.99$	$\alpha=0.995$
Nombre de particules	$N=1000$	$\tilde{\mu} = 13.95001$	$\tilde{\mu} = 6.32000$	$\tilde{\mu} = 4.494998$
	$N=2000$	$\tilde{\mu} = 19.75$	$\tilde{\mu} = 8.975$	$\tilde{\mu} = 6.324998$
	$N=3000$	$\tilde{\mu} = 24.2$	$\tilde{\mu} = 10.969995$	$\tilde{\mu} = 7.739996$

2.3.2. Régions compressibles et incompressibles de la densité de distribution

Sur les figures 3.1, 3.2 et 3.3 on a tracé la densité de particules pour $N = 1000$, 2000 et 3000 atomes, et pour différentes valeurs de la vitesse de rotation proche de la valeur critique ω_0 . Sur ces figures nous avons utilisé des variables convenables, à savoir en abscisse on a exprimé la distance au centre du système en unité de a et en ordonnée la densité en unité de $1/\pi a^2$.

Fig.3.1. La densité de particules pour $N=1000$ particules. On peut observer sur cette figure l'apparition d'une alternance plateaux-régions compressibles dès que la vitesse de rotation soit proche de la fréquence du potentiel indiquant ainsi le passage au régime de Landau.

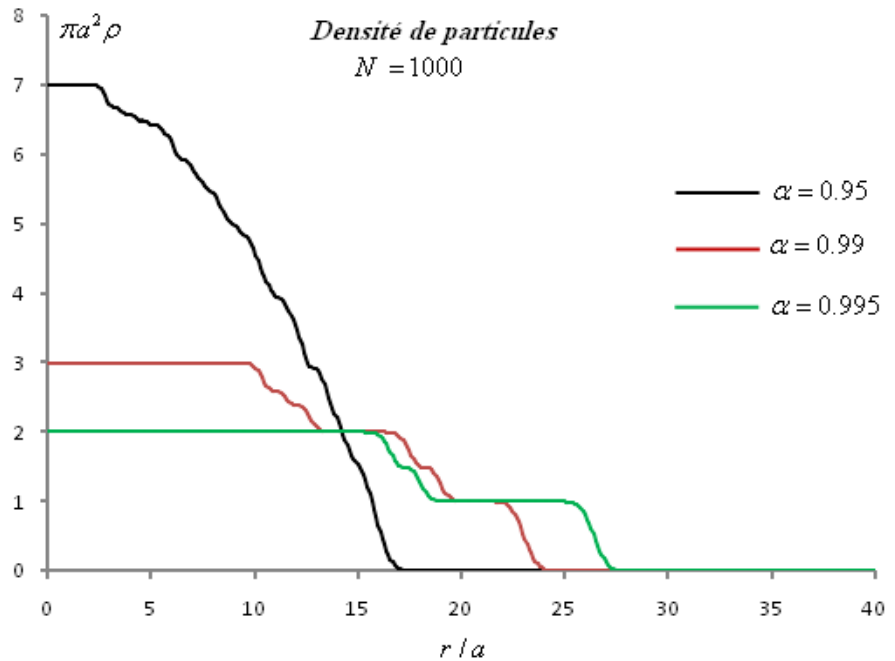


Fig.3.2. La densité de particules pour $N=2000$ particules. De même, on observe la formation de régions de densité constante suivies par des régions où la densité est décroissante.

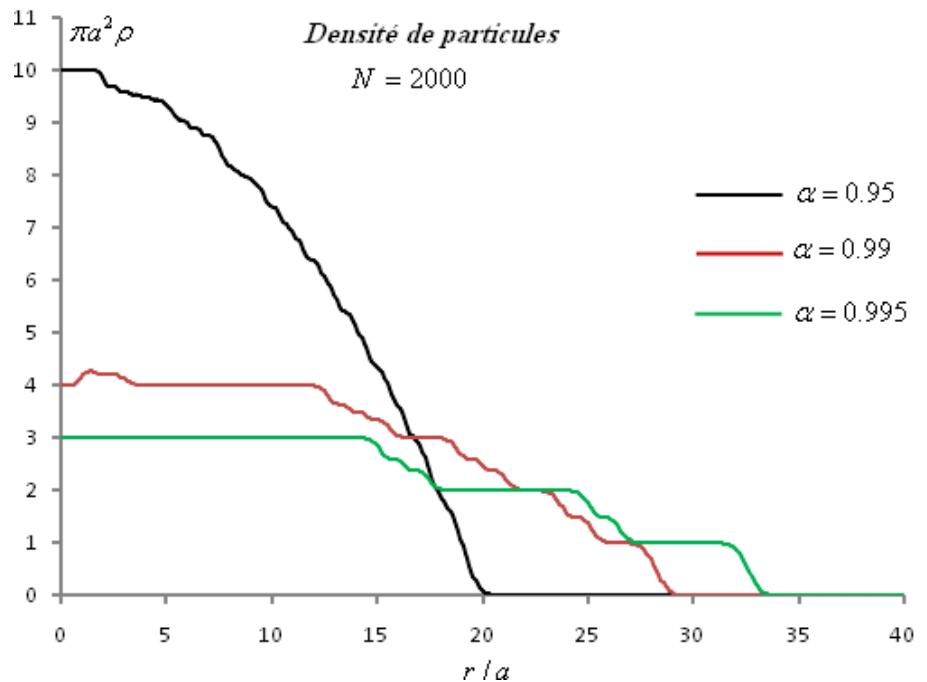
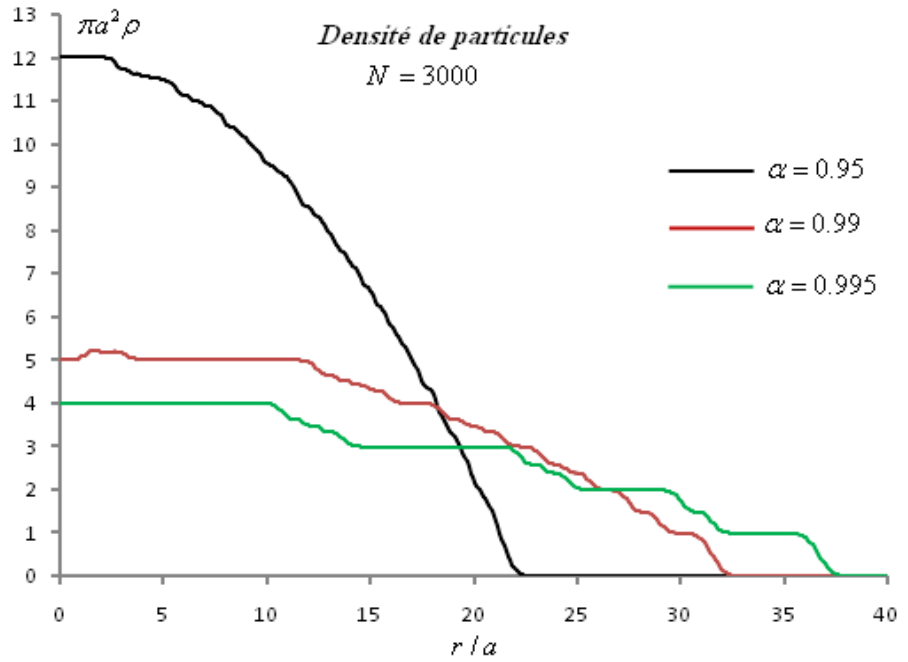


Fig.3.3. La densité de particules pour $N=3000$ particules. La même organisation dans la forme de la densité locale s'installe en rotation ultra rapide comme les cas précédents, succession de régions de densité incompressibles- compressibles.



On observe qu'au fur et à mesure que la vitesse de rotation augmente, en plus de l'étalement de la densité qui est du ici à la force de Coriolis, il y'a formation d'une série de régions où la densité est constante (structure en plateaux) suivie par des régions où la densité varie avec la position. Il faut noter que ces plateaux de densités ont lieu exactement pour des valeurs quantifiées de la densité $\rho = \nu/\pi a^2$ avec $\nu = 1, 2, \dots$. Le nombre entier ν est appelé facteur de remplissage (*filling factor*). Cette structure de densités, formée par des suites successives des régions incompressibles-compressibles une adjacente à l'autre, a été prédite pour la première fois dans les quantum dots (appelés aussi atomes artificiels) à deux dimensions où les électrons sont confinés et soumis à un champ magnétique très intense [63]. Dans les gaz quantiques cette structure a été aussi obtenue [13], [15] mais sans indiquer ou mettre l'accent sur l'importance des régions compressibles. Nous allons, en effet dans le prochain paragraphe examiner la structure de la distribution du courant générée par la rotation.

2.3.3. Densité de courant dans les régions compressibles et incompressibles

Sur les figures 3.4, 3.5 et 3.6, nous avons successivement représenté la densité de courant dans le repère tournant pour $N = 1000$, 2000 et 3000 atomes, respectivement. De même sur ces figures des variables appropriées sont utilisées. Sur l'axe des ordonnées on a exprimé la densité de courant de matière en unité de $(\omega_0/\pi a)$.

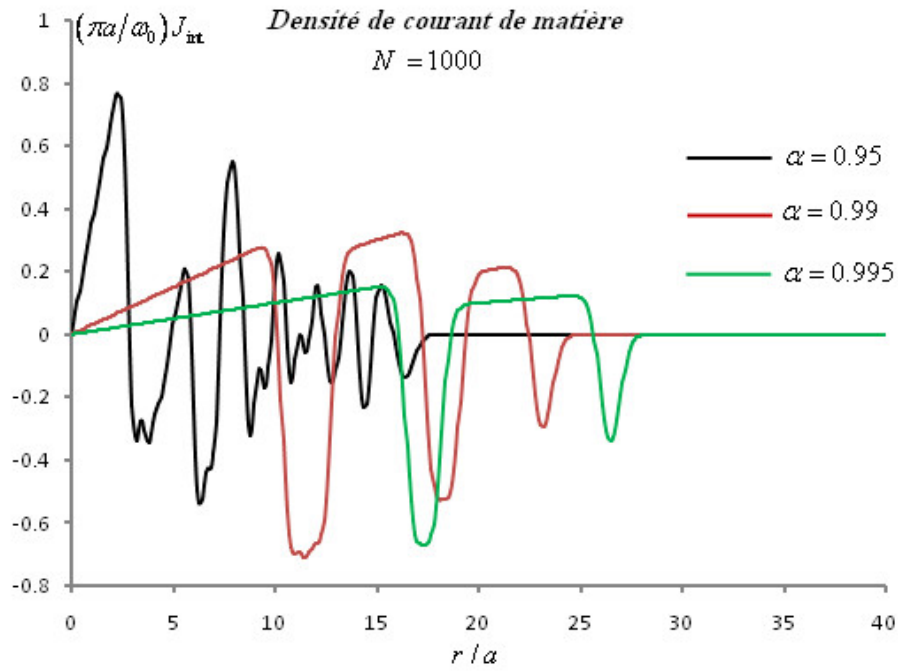


Fig.3.4. La densité de courant de masse pour $N=1000$ particules. On observe que le courant présente des oscillations d'une façon irrégulière quand le rapport de rotation soit inférieur à l'unité, mais dès que cette valeur devient proche de 1, c'est-à-dire on est dans le régime de rotation ultra rapide, le tracé de la densité de courant prend une forme régulière reflétant la formation des régions compressibles et incompressibles et par suite l'entrée en régime des niveaux de Landau.

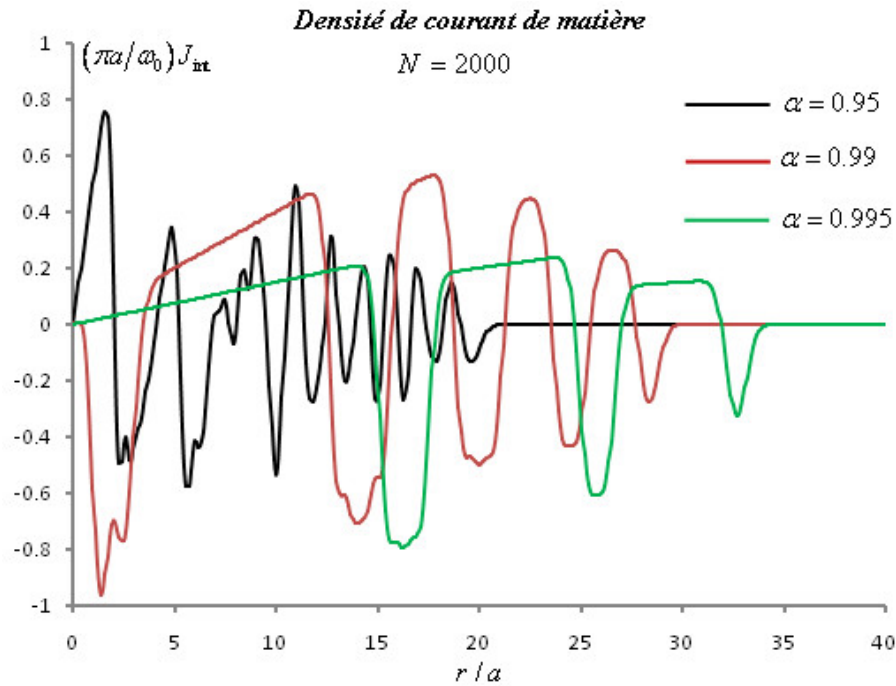


Fig.3.5. la densité de courant de masse pour $N=2000$ particules.

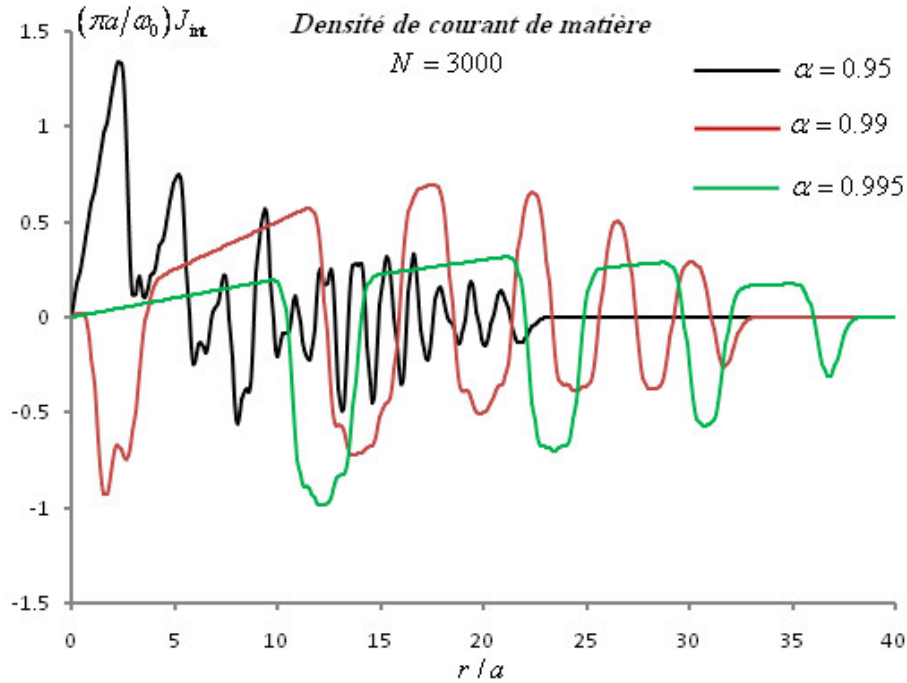


Fig.3.6. la densité de courant de masse pour $N=3000$ particules

On observe que dans le régime de rotation rapide la distribution du courant présente des fortes oscillations, par contre en rotation ultra-rapide le courant acquiert une structure régulière et ceci correspond exactement au régime où la densité de particules présente une structure régulière de régions alternées incompressibles et compressibles. On observe que le courant de matière circule dans le sens de la rotation dans les régions de densité constante (régions incompressibles), par contre dans les régions où la densité varie (régions compressibles) le courant circule dans le sens inverse. Cette inversion du signe du courant de matière n'a pas été mentionnée auparavant dans ce domaine des gaz quantiques. Pour voir ces reversements du sens du courant de masse, nous avons représenté sur une même figure (Fig.3.7) les distributions de la densité de particules $\rho(\vec{r})$ et de la densité de courant $J_{\text{int}}(\vec{r})$ dans le régime de rotation ultra rapide $\alpha = 0.995$ pour un système de $N = 2000$ fermions.

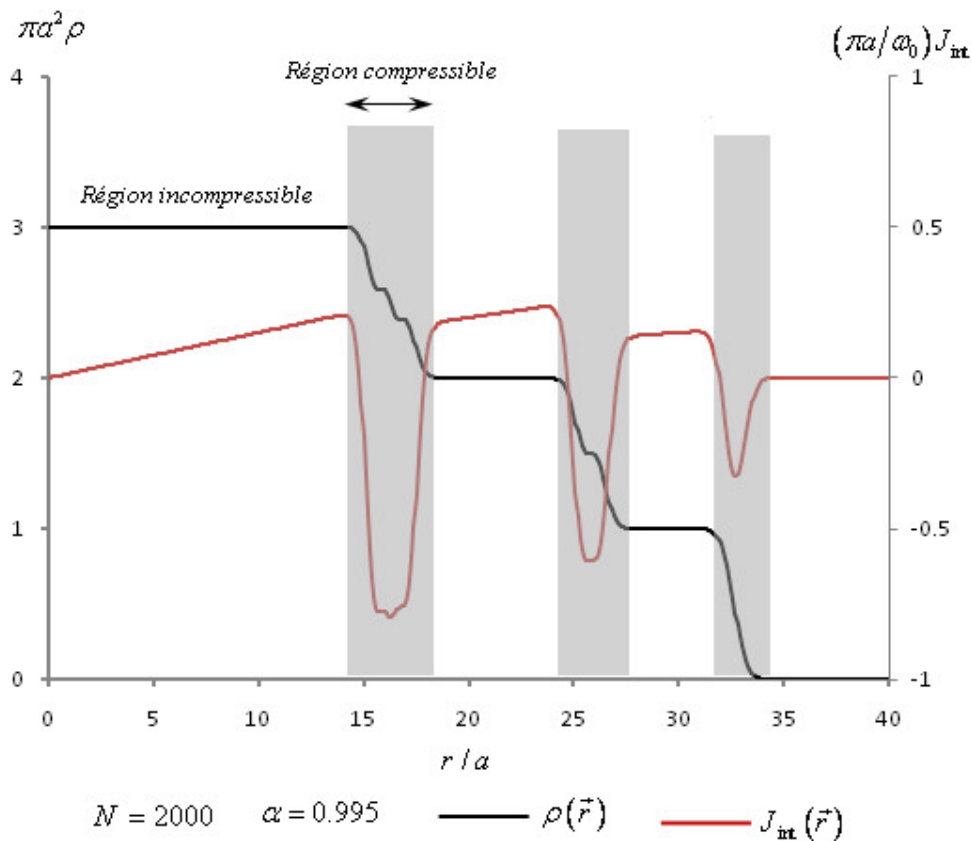


Fig.3.7. Profils des densités de particules et de courant de matière pour $N=2000$ particules avec un rapport de rotation très proche de 1, donc on est dans le régime de rotation ultra rapide. Les valeurs de la densité locale $\rho(\vec{r})$ sont données sur l'axe des ordonnées à gauche, alors que celles de la densité de courant sont mises à droite. Dans les régions incompressibles la densité est un multiple entier de $1/\pi a^2$ et le courant circule dans le sens positif de rotation, tandis que dans les régions compressibles (zones grises) la densité de particules est décroissante et le courant circule dans le sens inverse (négatif) de rotation.

2.3.4. Oscillations de la pseudo-magnétisation

Nous voulons maintenant voir la conséquence de la formation des régions de densité incompressibles-compressibles et de l'inversion du signe de courant de matière en rotation ultra-rapide sur la pseudo-magnétisation. Sur la figure 3.8 on a tracé la distribution de la pseudo-magnétisation dans le cas d'une rotation ultra rapide $\alpha = 0.995$ pour $N = 2000$ atomes.

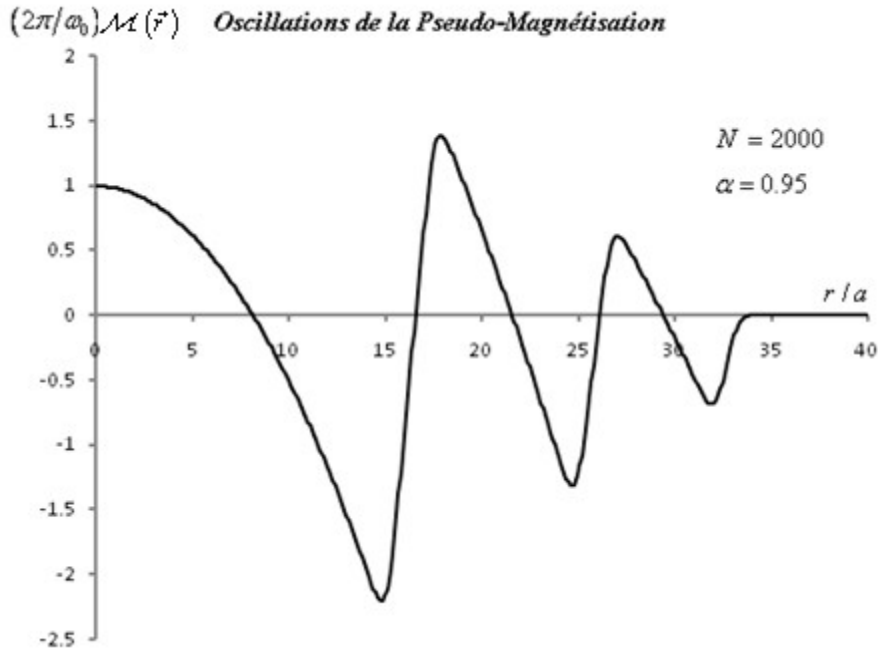


Fig.3.8. le comportement oscillatoire de la pseudo-magnétisation locale du système d'atomes neutres subissant une rotation très rapide. Ces oscillations de $M(r)$ provoque une inversion du sens d'écoulement de la matière en allant d'une région incompressible à son adjacente compressible et vice versa. Ces oscillations sont analogues à celle de de Haas-van Alphen dans les systèmes électroniques en présence du champ magnétique intense, à l'exception que notre système est électriquement neutre.

Avec la formation des régions de densité incompressibles et compressible, nous avons trouvé que le courant de matière dans le repère tournant $J_{\text{int}}(\vec{r})$ présente un comportement intéressant en inversant sa direction de flux (il s'agit d'un flux radial qui sera clairement défini plus loin) en passant d'une région à une autre.

L'existence de cette pseudo-magnétisation locale satisfaisant la relation $\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{M}}(\vec{r})$, implique aussi une quantification du courant persistant total (courant intégré), analogue à la quantification du courant de vortex dans les condensats de bosons superfluides. Nous allons démontrer dans la deuxième partie qu'en effet, dans ce régime de

rotation très rapide, le courant de matière est la somme de deux types de courants et qu'il n'existe qu'un seul type dans chacune des régions. Nous allons voir que dans la région de densité incompressible le courant est proportionnel au gradient du potentiel effectif similaire à un courant de Hall quantique, et dans la région de densité compressible le courant est proportionnel au gradient de la densité de particules et par suite a une structure de courant de bord (*edge current*).

2.3.5. Nos résultats

Pour un système d'électrons en deux dimensions soumis à un champ magnétique perpendiculaire très intense M. R. Geller et G. Vignale [63] ont prédit l'existence de plateaux de densité (alternance de régions incompressibles et compressibles) en utilisant le formalisme de la fonction de Green. L'expression de la distribution du courant de charge dans ces régions a été aussi établie. Dans ce travail nous avons prédit la même organisation pour un système d'atomes neutres en rotation ultra-rapide. Nos calculs effectués dans cette première partie sont tous exacts et nous n'avons introduit aucune approximation, nous avons étudié les régions de densité compressibles dont l'existence n'a été pas discuté auparavant, et nous avons prévu le phénomène de renversement du sens de flux des courants de matière entre deux régions adjacentes dans les gaz quantiques de fermions en rotations très rapide, ainsi que l'existence des courant de Hall et de bord caractéristiques des systèmes électroniques. Vu la difficulté de la vérification expérimentale sur des systèmes électroniques d'une part, et d'autre part les développements spectaculaires des techniques expérimentales dans le domaine des gaz quantiques en générale et dans les régimes des rotations rapides en particulier, nous croyons que travailler avec ces systèmes offrent une opportunité idéal pour que nos prédictions et nos résultats sur la distribution spatiale du courants quantiques persistants soient mises à une vérification expérimentale, Il a été proposé l'utilisation des techniques dites en anglais « Spatially resolved Doppler velocimetry techniques » pour détecter les directions d'écoulements des atomes et leurs inversions [101].

2^{ème} Partie.

3. Traitement Approximatif de la Limite $\Omega \approx \omega_0$

Dans cette deuxième partie, nous nous occupons par l'étude du système dans le régime de rotation très rapide au sens où la vitesse de rotation Ω rapproche la fréquence du potentiel confinant appelée sa fréquence critique ω_0 , où l'approximation $\omega_0 - \Omega = \Delta\omega$, avec $\Delta\omega \ll \omega_0$, soit justifiée. Dans ce cas le potentiel effectif $V_{eff}(\vec{r}) = M(\omega_0^2 - \Omega^2)r^2/2$ devient très faible, et c'est pourquoi nous avons consacré cette section pour cette étude approximative. Avec ces conditions, nous allons voir clairement l'origine de l'alternance dans la direction de courant de matière dans les deux régions de densité compressibles et incompressibles et comprendre la nature du courant dans chacune des régions. Nous passerons ensuite à l'étude du courant intégré du système (courant à travers une section radiale) et sa relation avec la pseudo-magnétisation et nous allons montrer que ce courant prend des valeurs quantifiées, c'est la **quantification du courant intégré** dans la limite de la rotation ultra rapide. Pour ce faire, nous allons chercher des expressions approchées de la densité de particules et du courant de masse dans la limite $\Omega \approx \omega_0$. Nous adoptons le formalisme de la Matrice densité de Bloch pour le calcul de ces expressions pour sa simplicité.

3.1. Densités de Particules et du Courant de Matière dans la Limite $\Omega \approx \omega_0$

3.1.1. Densité de particules.

On se propose de trouver la forme approximative de la densité de particules quand la vitesse de rotation Ω s'approche de la fréquence critique ω_0 . Revenons à l'équation (3.6) que nous écrivons sous la forme :

$$\begin{aligned} C(\vec{r}, \vec{r}'; \beta) &= \frac{M \omega_0}{2\pi\hbar \sinh(\beta\hbar\omega_0)} \exp \left[-i \frac{M^* \omega_0 \sinh(\beta\hbar\Omega)}{\hbar \sinh(\beta\hbar\omega_0)} (\vec{r} \times \vec{r}') \cdot \vec{e}_z \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{M \omega_0 \sinh(\beta\hbar(\omega_0 + \Omega)/2) \sinh(\beta\hbar(\omega_0 - \Omega)/2)}{2\hbar \sinh(\beta\hbar\omega_0)} (\vec{r} + \vec{r}')^2 \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{M \omega_0 \cosh(\beta\hbar(\omega_0 + \Omega)/2) \cosh(\beta\hbar(\omega_0 - \Omega)/2)}{2\hbar \sinh(\beta\hbar\omega_0)} (\vec{r} - \vec{r}')^2 \right] \end{aligned}$$

D'après (3.20), la matrice densité est :

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu) = & \frac{1}{2\pi a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\beta \sinh(\beta \hbar \omega_0)} \exp \left[\frac{-i \sinh(\beta \hbar \Omega)}{a^2 \sinh(\beta \hbar \omega_0)} (\vec{r} \times \vec{r}') \cdot \vec{e}_z \right] \times \right. \\ & \exp \left[-\frac{\sinh(\beta \hbar (\omega_0 + \Omega)/2) \sinh(\beta \hbar (\omega_0 - \Omega)/2)}{2a^2 \sinh(\beta \hbar \omega_0)} (\vec{r} + \vec{r}')^2 \right] \\ & \left. \times \exp \left[-\frac{\cosh(\beta \hbar (\omega_0 + \Omega)/2) \cosh(\beta \hbar (\omega_0 - \Omega)/2)}{2a^2 \sinh(\beta \hbar \omega_0)} (\vec{r} - \vec{r}')^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Pour $\vec{r} = \vec{r}'$ cette dernière expression conduit à la densité locale $\rho(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) = & \frac{1}{2\pi a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\beta \sinh(\beta \hbar \omega_0)} \times \right. \\ & \left. \exp \left[-\frac{2 \sinh(\beta \hbar (\omega_0 + \Omega)/2) \sinh(\beta \hbar (\omega_0 - \Omega)/2)}{a^2 \sinh(\beta \hbar \omega_0)} \vec{r}^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Dans la limite de la rotation très rapide, on aura $\omega_0 - \Omega = \Delta\omega$, avec $\Delta\omega \ll \omega_0, \Omega$. Dans cette approximation, la matrice densité (3.65) devient:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu) \approx & \frac{1}{2\pi a^2} \exp \left(\frac{-i}{a^2} (\vec{r} \times \vec{r}') \cdot \vec{e}_z \right) \mathcal{L}_{\beta \rightarrow \mu}^{-1} \left\{ \frac{1}{\beta \sinh(\beta \hbar \omega_0)} \times \right. \\ & \left. \exp \left(-\beta \frac{M^*}{8} (\omega_0^2 - \Omega^2) (\vec{r} + \vec{r}')^2 \right) \exp \left(-\frac{\coth(\beta \hbar \omega_0)}{2a^2} (\vec{r} - \vec{r}')^2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Où nous avons utilisé l'approximation suivante :

$$\omega_0 (\omega_0 - \Omega) \approx (\omega_0 + \Omega)(\omega_0 - \Omega)/2 = (\omega_0^2 - \Omega^2)/2 \quad (3.65)$$

Pour évaluer la transformée de Laplace inverse, on utilise le développement en termes de polynômes de Laguerre généralisés:

$$\frac{\exp \left(-\frac{\coth(\beta \hbar \omega_0)}{2a^2} \vec{b}^2 \right)}{(\exp(\beta \hbar \omega_0) - \exp(-\beta \hbar \omega_0))^{\frac{d}{2}}} = \exp \left(-\frac{\vec{b}^2}{2a^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{\vec{b}^2}{a^2} \right) \exp \left(-\left(2n + \frac{d}{2} \right) \beta \hbar \omega_0 \right) \quad (3.66)$$

Si on remplace cette relation dans (3.64) pour $\vec{b} = \vec{r} - \vec{r}'$ et $d = 2$, on aura donc:

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu) \approx \frac{1}{\pi a^2} \exp\left(\frac{-i}{a^2}(\vec{r} \times \vec{r}') \cdot \vec{e}_z\right) \exp\left(-\frac{1}{2a^2}(\vec{r} - \vec{r}')^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} L_n\left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{a^2}\right) \times \mathcal{L}_{\mu}^{-1} \left\{ \frac{1}{\beta} \exp\left[-\beta(1/8)M^*(\omega_0^2 - \Omega^2)(\vec{r} + \vec{r}')^2\right] \exp\left[-(2n+1)\beta\hbar\omega_0\right] \right\} \quad (3.67)$$

En utilisant l'identité (3.19), on aboutit à la forme approximative pour la matrice densité :

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu) \approx \frac{1}{\pi a^2} \exp\left(\frac{-i}{a^2}(\vec{r} \times \vec{r}') \cdot \vec{e}_z\right) \exp\left(-\frac{1}{2a^2}(\vec{r} - \vec{r}')^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} L_n\left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{a^2}\right) \times \Theta\left(\mu - (1/8)M^*(\omega_0^2 - \Omega^2)(\vec{r} + \vec{r}')^2 - (2n+1)\hbar\omega_0\right) \quad (3.68)$$

et par conséquent la densité locale est :

$$\rho(\vec{r}) \approx \frac{1}{\pi a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \Theta\left[\mu - (1/2)M^*(\omega_0^2 - \Omega^2)\vec{r}^2 - (2n+1)\hbar\omega_0\right] \quad (3.69)$$

3.1.2. Densité de courant de matière

Dans les paragraphes 2.1.1.D et 2.1.2.C nous avons obtenu deux expressions exactes⁸ de la distribution du courant de matière dans le référentiel tournant $\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r})$ (distribution intrinsèque), données par les relations (3.33) et (3.45). Mais ces expressions n'expliquent pas d'une façon claire l'alternance observée numériquement dans les directions du courant de masse dans le système étudié (écoulement soit dans le même sens que celui de la rotation du système soit dans le sens contraire). Pour comprendre cet effet remarquable de la densité de courant, nous allons établir des expressions approchées de ces courants afin de mieux élucider leurs natures dans chacune des zones compressibles et incompressibles observées dans la structure de la densité locale. Nous allons alors montrer et discuter, dans ce qui suit, la nature purement quantique de cet effet de renversement de sens de circulation de la matière et voir que le courant est en fait se divise en deux types de courant différents chacun appartient à une région où il se manifeste. La structure de chaque type met en évidence la similarité avec le courant de Hall quantique et les courants de bord dans des systèmes électronique sous champs magnétiques intense.

Pour dériver une expression approximative de la densité de courant, nous partons de la forme de $\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r})$ donnée par (3.32) et qui peut se mettre sous cette forme :

⁸ Nous avons vu que numériquement ces deux résultats sont identiques et représentent la même fonction.

$$\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r}) = \frac{M \omega_0 r}{2\pi\hbar} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\beta} \left(\frac{\omega_0 \sinh(\beta\hbar\Omega)}{\sinh^2(\beta\hbar\omega_0)} - \frac{\Omega}{\sinh(\beta\hbar\omega_0)} \right) \times \right. \\ \left. \exp \left[-\frac{2M \omega_0 \sinh(\beta\hbar(\omega_0 + \Omega)/2) \sinh(\beta\hbar(\omega_0 - \Omega)/2)}{\hbar \sinh(\beta\hbar\omega_0)} \vec{r}^2 \right] \right\} \vec{e}_\varphi \quad (3.70)$$

Dans la limite $\Delta\omega \ll \omega_0$, on peut écrire $\sinh(\beta\hbar\Omega) \approx \sinh(\beta\hbar\omega_0) - \beta\hbar(\omega_0 - \Omega) \cosh(\beta\hbar\omega_0)$, dans ce cas l'équation (3.70) se réduit à :

$$\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r}) \approx \frac{M(\omega_0^2 - \Omega^2)r}{4\pi\hbar} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \left[\frac{1}{\beta \sinh(\beta\hbar\omega_0)} - \frac{\hbar\omega_0 \cosh(\beta\hbar\omega_0)}{\sinh^2(\beta\hbar\omega_0)} \right] \times \right. \\ \left. \exp \left(-(1/2) \beta M (\omega_0^2 - \Omega^2) \vec{r}^2 \right) \right\} \vec{e}_\varphi \quad (3.71)$$

où la relation (3.65) a été utilisée. Cette expression de la densité de courant peut être écrite sous la forme d'une somme de deux densités de courant $\vec{J}_{\text{int}} \approx \vec{J}_a + \vec{J}_b$ avec :

$$\vec{J}_a(\vec{r}) = \frac{M(\omega_0^2 - \Omega^2)r}{4\pi\hbar} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\beta \sinh(\beta\hbar\omega_0)} \exp \left(-(1/2) \beta M (\omega_0^2 - \Omega^2) \vec{r}^2 \right) \right\} \vec{e}_\varphi \quad (3.72)$$

et

$$\vec{J}_b(\vec{r}) = -\frac{M \omega_0 (\omega_0^2 - \Omega^2)r}{4\pi} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{\cosh(\beta\hbar\omega_0)}{\sinh^2(\beta\hbar\omega_0)} \exp \left(-(1/2) \beta M (\omega_0^2 - \Omega^2) \vec{r}^2 \right) \right\} \vec{e}_\varphi \quad (3.73)$$

Afin d'obtenir une forme explicite de ces deux densités, on doit calculer la transformée de Laplace inverse correspondante à chaque expression. Pour la première, nous utilisons le développement suivant [88,89]:

$$\sinh^{-1}(\beta\hbar\omega_0) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[-(2n+1) \beta\hbar\omega_0 \right] \quad (3.74)$$

Injectons cette formule dans (3.72) et utilisant la relation(3.19), nous arrivons alors à :

$$\vec{J}_a(\vec{r}) = \frac{M(\omega_0^2 - \Omega^2)r}{2\pi\hbar} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \Theta \left(\mu - (1/2) M (\omega_0^2 - \Omega^2) \vec{r}^2 - (2n+1) \hbar\omega_0 \right) \right] \vec{e}_\varphi \quad (3.75)$$

Pour l'expression de $\vec{J}_b(\vec{r})$, nous allons utiliser la formule suivante (qui découle facilement de (3.74) par la dérivation de cette dernière par rapport à β):

$$\frac{\cosh(\beta\hbar\omega_0)}{\sinh^2(\beta\hbar\omega_0)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \exp[-(2n+1)\beta\hbar\omega_0] \quad (3.76)$$

Insérée dans (3.73) suivie de la relation :

$$\mathcal{L}_\mu^{-1} \{ \exp(-\beta x) \} = \delta(\mu - x) \quad (3.77)$$

conduit à :

$$\vec{J}_b(\vec{r}) = -\frac{M\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)r}{2\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \delta(\mu - (1/2)M(\omega_0^2 - \Omega^2)r^2 - (2n+1)\hbar\omega_0) \right] \vec{e}_\varphi \quad (3.78)$$

Pour faire apparaître la structure et l'origine de ces deux composantes \vec{J}_a et \vec{J}_b , nous devons les exprimer en fonction du potentiel effectif $V_{eff}(\vec{r}) = M(\omega_0^2 - \Omega^2)r^2/2$, de son gradient $\vec{\nabla}V_{eff}(\vec{r})$, de la densité locale $\rho(\vec{r})$, et de son gradient. Une simple manipulation algébrique nous mène à écrire pour \vec{J}_a :

$$\vec{J}_a(\vec{r}) = \vec{J}_{bulk}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{2M\omega_0} (\vec{e}_z \times \vec{\nabla}V_{eff}(\vec{r})) \rho(\vec{r})}_{\text{courant de volume}} \quad (3.79)$$

Evidemment cette écriture de la première composante de la densité de courant de matière met en évidence sa nature, c'est ce qu'on appelle en anglais «*Bulk Current*» ou courant de volume qui est proportionnel au gradient du potentiel confinant effectif.

Aussi pour \vec{J}_b :

$$\vec{J}_b(\vec{r}) = \vec{J}_{edge}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\hbar}{M} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) (\vec{e}_z \times \vec{\nabla} \rho_n)}_{\text{courant de bord}} \quad (3.80)$$

où ρ_n est défini à partir de (3.69) par :

$$\rho_n(\vec{r}) = \frac{1}{\pi a^2} \Theta \left[\mu - (1/2)M(\omega_0^2 - \Omega^2)r^2 - (2n+1)\hbar\omega_0 \right] \quad (3.81)$$

La formule (3.80) nous explicite la nature de ce courant. Il s'agit d'un courant de bord ou «*Edge Current*» qui est proportionnel au gradient de la densité locale.

3.2. Le Courant Intégré et Sa Quantification

Le sens des courants données par (3.75) et (3.78) ou (3.79) et (3.80) n'est pas triviale. Pour chercher un effet global, nous allons évaluer le courant azimutale total à travers une section radiale appelé aussi « **courant intégré** » défini par :

$$I = \int_0^{\infty} \vec{J}_{\text{int}}(\vec{r}) \cdot \vec{e}_{\varphi} dr \quad (3.82)$$

Puisque $\vec{J}_{\text{int}} = \vec{J}_{\text{bulk}} + \vec{J}_{\text{edge}}$, on peut alors écrire $I = I_{\text{bulk}} + I_{\text{edge}}$ avec :

$$I_{\text{bulk}} = \int_0^{\infty} \vec{J}_{\text{bulk}}(\vec{r}) \cdot \vec{e}_{\varphi} dr \quad (3.83)$$

$$I_{\text{edge}} = \int_0^{\infty} \vec{J}_{\text{edge}}(\vec{r}) \cdot \vec{e}_{\varphi} dr \quad (3.84)$$

Pour évaluer I_{bulk} , I_{edge} et I , nous définissons le nombre quantique n_0 de tel sorte que l'énergie de Fermi soit donnée par :

$$\mu = (2n_0 + 1)\hbar\omega_0 \quad (3.85)$$

Le nombre n_0 peut être obtenu à partir de l'application de la condition de normalisation sur la densité de particules (3.69) en coordonnées polaires $\int \rho(r) r dr d\varphi = N$, qui nous conduit à :

$$N = \frac{2\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} n_0 (n_0 + 1) \quad (3.86)$$

Maintenant, substituons (3.75) dans (3.83) et faisons le changement $x = r^2$ on obtient :

$$I_{\text{bulk}} = \frac{M(\omega_0^2 - \Omega^2)}{4\pi\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \Theta(\mu - (1/2)M(\omega_0^2 - \Omega^2)x - (2n+1)\hbar\omega_0) dx \quad (3.87)$$

Si $x_{\text{max}}(n)$ est la valeur maximale de x pour une valeur donnée de n , nous aurons $x_{\text{max}}(n) = (4\hbar\omega_0/M(\omega_0^2 - \Omega^2))(n_0 - n)$. Il est évident que $x_{\text{max}}(n) \geq 0$, alors on a $0 \leq n_0 \leq n$, et par suite l'équation (3.87) peut être réduite à :

$$\begin{aligned}
 I_{bulk} &= \frac{M^* (\omega_0^2 - \Omega^2)}{4\pi\hbar} \sum_{n=0}^{n_0} x_{\max}(n) \\
 &= \frac{\omega_0}{2\pi} n_0 (n_0 + 1)
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

Revenant maintenant à l'évaluation de I_{edge} , pour cela, nous substituons (3.78) dans (3.84) avec le changement de variable $x = r^2$, nous obtenons alors :

$$I_{edge} = -\frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_0^{\infty} \delta \left(x + \frac{4(n-n_0)}{M^* (\omega_0^2 - \Omega^2)} \right) dx \tag{3.89}$$

Où nous avons utilisé la propriété $\delta(\alpha x) = \delta(x)/|\alpha|$. L'expression (3.89) peut être réécrite sous la forme suivante:

$$I_{edge} = -\frac{\omega_0}{2\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{n_0} (2n+1) \int_0^{\infty} \delta \left(x + \frac{4(n-n_0)}{M^* (\omega_0^2 - \Omega^2)} \right) dx + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (2n+1) \int_0^{\infty} \delta \left(x + \frac{4(n-n_0)}{M^* (\omega_0^2 - \Omega^2)} \right) dx \right\} \tag{3.90}$$

Remarquons que l'argument de la fonction delta dans la deuxième somme est toujours positif et par suite la deuxième intégrale est nulle, alors que l'argument de delta dans le premier terme s'annule dans des valeurs spécifiques de x dans le domaine d'intégration, alors l'intégrale correspondante donne des contributions non nulles, et l'équation (3.90) se simplifie à:

$$\begin{aligned}
 I_{edge} &= -\frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{n_0} (2n+1) \\
 &= -\frac{\omega_0}{2\pi} (n_0 + 1)^2
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

Enfin, en utilisant les équations (3.88) et (3.91), nous obtenons pour le courant total intégré $I = I_{bulk} + I_{edge}$, le résultat suivant :

$$I = -\frac{\omega_0}{2\pi} (n_0 + 1) \tag{3.92}$$

Remarquablement, nous trouvons dans le régime de rotation très rapide que la valeur du courant de matière intégré I en fonction du nombre de particules est **quantifiée** en unité de $(\omega_0/2\pi)$.

3.3. Relation Exacte entre le Courant Intégré et la Pseudo-Magnétisation.

Chercher la relation entre la pseudo-magnétisation et le courant intégré va nous permettre de clarifier plus la signification physique de cette dernière quantité. Pour cela, nous substituons l'expression exacte du courant de masse (3.70) dans la définition (3.82) et en effectuant l'intégration sur la variable radiale nous obtenons :

$$I = \frac{1}{8\pi} \mathcal{L}_{\beta \rightarrow \mu}^{-1} \left\{ \frac{1}{\beta} \left(\frac{\omega_0 \sinh(\beta \hbar \Omega)}{\sinh(\beta \hbar \omega_0)} - \Omega \right) \frac{1}{\sinh(\beta \hbar (\omega_0 + \Omega)/2) \sinh(\beta \hbar (\omega_0 - \Omega)/2)} \right\} \quad (3.93)$$

En utilisant $(\cosh(\beta \hbar \omega_0) - \cosh(\beta \hbar \Omega)) = 2 \sinh(\beta \hbar (\omega_0 + \Omega)/2) \sinh(\beta \hbar (\omega_0 - \Omega)/2)$ dans l'expression de la pseudo-magnétisation (3.48) et si ensuite on pose $\vec{r} = \vec{0}$, on trouve que $\mathcal{M}(\vec{r} = \vec{0})$ est égal au second membre de l'équation (3.93), soit

$$I = \mathcal{M}(\vec{r} = \vec{0}) \quad (3.94)$$

Par conséquent le courant intégré n'est que la pseudo-magnétisation orbitale évaluée au centre du piège harmonique. Cette relation exacte est valide quelque soit les valeurs des fréquences ω_0 et Ω . Notons que le résultat (3.94) peut être établi différemment en partant de la relation (3.47) que l'on écrit comme :

$$\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r}) = -\frac{d\mathcal{M}}{dr} \vec{e}_\varphi \Rightarrow d\mathcal{M} = -\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r}) \vec{e}_\varphi dr \quad (3.95)$$

En intégrant cette relation on obtient:

$$\mathcal{M}(r) = -\int_0^r \vec{J}_{\text{int}}(\vec{r}) \vec{e}_\varphi dr + \mathcal{M}(r=0) \quad (3.96)$$

qui conduit pour $r \rightarrow \infty$, à la relation $I = \mathcal{M}(0)$ qui est le résultat donné en (3.94).

Chapitre 4

**Profil de Densité dans l'Espace de Fourier d'un Gaz Ultra
Froid de Fermions Neutres Piégé par un Potentiel
Harmonique Anisotrope en Rotation Rapide.**

Chapitre 4

Profil de Densité dans l'Espace de Fourier d'un Gaz Ultra-Froid de Fermions Neutres Piégé par un Potentiel Harmonique Anisotrope en Rotation Rapide.

1. Introduction

Les expériences sur les gaz d'atomes ultra froids utilisent généralement, pour les confiner, des pièges avec des potentiels harmoniques anisotropes. Par suite, nous allons considérer dans ce chapitre un système constitué d'un gaz ultra froid de fermions neutres de spins polarisés (ou sans spin) sans interaction confiné par un potentiel harmonique anisotrope et on le met en rotation ou sous l'action d'un champ magnétique synthétique. Pour l'étude des propriétés de tels systèmes physiques, on a vu dans les chapitres précédents que la connaissance de la matrice densité de premier ordre $\rho(\vec{r}, \vec{r}', \mu)$ suffit pour déterminer les propriétés du système. Travailler avec un potentiel confinant anisotrope constitue une issue intéressante non seulement pour les gaz d'atomes de bosons mais aussi pour les gaz de fermions et en particulier si le potentiel est mis en rotation. Le traitement théorique est plus compliqué du fait de cette anisotropie. A ce jour les expressions analytiques exactes de ce problème ne sont pas disponibles, c'est pourquoi on se propose dans ce travail de combler ce vide. Par conséquent on se propose de

- 1) Présenter la forme analytique exacte de la matrice densité de Bloch (**MDB**).
- 2) Utilisant le résultat ci-dessus, on va dériver une expression analytique exacte du profil de densité locale dans l'espace de Fourier qu'on notera par la suite $n(\vec{k})$. Il s'agit de la transformée Fourier de la densité locale $\rho(\vec{r})$. L'intérêt de cette quantité, à savoir $n(\vec{k})$, vient aussi, outre de sa relation réciproque avec la densité locale, du fait qu'elle puisse être utilisée pratiquement en théorie de la diffusion de la lumière par un gaz d'atomes piégé, puisque elle est liée à ce qu'on appelle le facteur de forme élastique noté parfois $S_{el}(\vec{k}) = |n(\vec{k})|^2$ qui sera examiné plus bas [91-94].

L'étude présentée ici concerne un système tournant, mais comme nous l'avons montré dans les chapitres précédents, c'est par l'analogie entre un système de particules chargées dans un champ magnétique et un système de particules neutres mis en rotation qu'on peut toujours transposer les résultats trouvés ici entre les deux systèmes tout en faisant les correspondances appropriées.

Il est à noter aussi que la présentation de cette étude est portée sur un système bidimensionnel, c'est-à-dire un système au sein duquel le mouvement de toutes ses particules est confiné dans un plan. La généralisation du traitement à trois dimensions sera aussi examinée à la fin du chapitre.

Ce chapitre est organisé comme suit, dans le paragraphe 2 nous présentons l'expression exacte de la matrice densité de Bloch pour notre système physique, ainsi que l'utilisation de ce formalisme comme moyen d'obtention du profil de densité dans l'espace de Fourier. Ensuite dans le paragraphe 3 nous établissons l'expression analytique pour cette transformée de Fourier et nous nous concentrons sur le cas du régime de rotation ultra rapide et du confinement fort. Dans le paragraphe 4 on présente la généralisation en trois dimensions de cette étude. Dans les deux derniers paragraphes on présentera respectivement une discussion de la diffusion élastique d'un faisceau de lumière sur un gaz d'atomes en deux dimensions comme moyen de sonder la distribution spatiale du gaz et une conclusion.

2. Description du Système et Formalisme de la MDB $C(\vec{r}, \vec{r}'; \beta)$

Le système que nous voulons étudier est un gaz formé de N atomes fermioniques neutres de spins polarisés, chacun de masse M . Le système est astreint de se mouvoir seulement dans le plan (xy) , et piégé par un potentiel harmonique anisotrope bidimensionnel:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}M(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) \quad (4.1)$$

Où ω_x et ω_y sont les fréquences de confinement le long des axes ox et oy respectivement et \vec{r} est le vecteur position dans le repère tournant. Prenons l'anisotropie du piège tel que $\omega_x \leq \omega_y$, ainsi les axes ox et oy seront qualifiés par les directions de confinement faible et fort respectivement. Soit δ le paramètre de l'anisotropie:

$$\delta = \frac{\omega_y}{\omega_x} \geq 1 \quad (4.2)$$

Défini comme le rapport entre les deux fréquences de piégeage et qui sera utile quand nous étudierons les changements d'états du système engendrés par la modification du paramètre δ

qui traduit aussi l'intensité de l'anisotropie du potentiel confinant. Si nous mettons le système en rotation autour de l'axe oz et en sens positif (contre sens des aiguilles d'une montre) avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$. L'hamiltonien à une particule du system dans le repère tournant s'écrit alors :

$$H = \frac{1}{2M} \vec{P}^2 + \frac{1}{2} M (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) - \vec{\Omega} \cdot \vec{L} \quad (4.3)$$

Avec \vec{P} est l'impulsion de particule et \vec{L} son moment angulaire. Pour décrire le comportement du système sous l'action de la rotation, Il convient d'introduire un autre paramètre η , similaire à δ , qui contrôle l'influence de la vitesse de rotation sur les caractéristiques quantiques du système. Ce paramètre est défini comme le rapport :

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_x} \quad (4.4)$$

L'hamiltonien (4.3) peut s'écrire sous une autre forme analogue à celle d'un hamiltonien correspondant à un système de particules chargées en présence d'un potentiel harmonique et un champ magnétique comme suit :

$$H = \frac{1}{2M} (\vec{P} - M \vec{\Omega} \times \vec{r})^2 + \frac{1}{2} M [(\omega_x^2 - \Omega^2) x^2 + (\omega_y^2 - \Omega^2) y^2] \quad (4.5)$$

La fréquence cyclotron du problème équivalent est $\omega_c = 2\Omega$. Cette dernière écriture de notre hamiltonien montre que la stabilité du système confiné dépend de la vitesse angulaire de rotation et qui exige qu'elle soit inférieure ou égale à la fréquence suivant la direction du faible confinement ω_x . On aura alors $\eta \leq 1$.

L'outil théorique central utilisé dans notre analyse est la matrice densité canonique à partir duquel toutes les propriétés thermodynamiques du système peuvent être dérivées. Définie comme $C(\vec{r}, \vec{r}'; \beta) = \sum_{n,m} \phi_{n,m}(\vec{r}) \phi_{n,m}^*(\vec{r}') \exp(-\beta E_{n,m})$ où $\phi_{n,m}$ et $E_{n,m}$ sont les fonctions et énergies propres de l'hamiltonien (4.3). La sommation est prise sur toutes les valeurs possibles des nombres quantiques.

Des calculs et utilisations de cette MDB $C(\vec{r}, \vec{r}'; \beta)$ pour des systèmes physiques variés ont été l'objet de plusieurs travaux [69-87]. Pour un système de particules chargées dans un potentiel harmonique anisotrope et en présence d'un champ magnétique, M.A.Z. Habeeb [85], a exploité l'analogie avec le système en rotation discuté ci-dessus, et en appliquant la méthode

des transformations canoniques¹, a pu convertir le problème à celui d'un oscillateur harmonique anisotrope pour lequel la formule de MDB est déjà connue [86]. L'expression dérivée par Habeeb contient des erreurs typographiques qui ont été corrigées après par K. Yonei [87] qui a développé pour le même système une méthode alternative basée sur une factorisation simple de l'opérateur de Bloch $\exp(-\beta\hat{H})$. Une méthode plus simple que les traitements précédents de MDB. Mais, malheureusement, l'expression finale de Yonei contient aussi des erreurs typographiques dans certains facteurs qui y apparaissent. Nous avons refait tous les calculs et corrigé toutes les erreurs apparues dans les facteurs (3.34c), (3.35a), (3.35b), (3.35c), (3.35d) dans [87]. Pour notre système en question ici, on peut transposer ces résultats en faisant les correspondances appropriées entre les deux systèmes, alors l'expression analytique exacte de MDB s'écrit:

$$C(\vec{r}; \vec{r}'; \beta) \equiv C(x, y; x', y'; \beta) = g(\beta) \exp[-(iA/\hbar B)(xy - x'y')] \times \exp\left\{a(x+x')^2 + a'(x-x')^2 + b(y+y')^2 + b'(y-y')^2 + c(x+x')(y-y') + c'(x-x')(y+y')\right\} \quad (4.6)$$

Où les coefficients $g(\beta)$, A , B , a , a' , b , b' , c et c' sont des fonctions dépendants des fréquences de confinement ω_x et ω_y , de vitesse de rotation Ω , et du nombre complexe β , et sont donnés à la fin de ce chapitre.

Si nous désignons par $C(\vec{r}; \beta)$ les éléments diagonaux de MDB, tel que $C(\vec{r}; \beta) = C(\vec{r}, \vec{r}'; \beta)|_{\vec{r}=\vec{r}'}$, la fonction de partition de notre problème, donnée par la relation $Z = \int C(\vec{r}; \beta) d\vec{r}$, peut être calculée sans difficulté et on trouve :

$$Z = 1/\left[4 \sinh(\beta\hbar\Omega_+/2) \sinh(\beta\hbar\Omega_-/2)\right] \quad (4.7)$$

où les deux fréquences (modes) Ω_+ et Ω_- sont données par :

$$\Omega_+^2 = \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\Omega^2 + S), \quad \Omega_-^2 = \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\Omega^2 - S) \quad (4.8)$$

Avec $S = \sqrt{(\omega_y^2 - \omega_x^2)^2 + 8\Omega^2(\omega_x^2 + \omega_y^2)}$. L'expression (4.7) ressemble à la formule de la fonction de partition d'un système de particules dans un potentiel harmonique anisotrope à deux dimensions $V(x, y) = M(\Omega_+^2 x^2 + \Omega_-^2 y^2)/2$. En utilisant le développement en séries de

¹ C'est une méthode utilisée par D. Glas essentiellement pour simplifier le problème dit « cranked harmonic oscillator » en physique nucléaire et la transformer en un problème d'un simple oscillateur harmonique anisotrope sans rotation.

Taylor suivant $\sinh^{-1} x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-(2n+1)x]$, alors pour $x = \beta \hbar \Omega_{1,2}/2$, on obtient pour la fonction de partition de notre système la forme suivante : $Z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\beta E_{n,m})$, avec $E_{n,m}$ sont les niveaux d'énergies correspondants à l'hamiltonien (4.3) :

$$E_{n,m} = \hbar \Omega_+ \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar \Omega_- \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

Avec cette dernière expression, on peut examiner les différentes limites², analogue à celles faites dans [12,14], en particulier le cas de la rotation très rapide quand la vitesse angulaire approche la fréquence de confinement suivant l'axe (ox), $\Omega \approx \omega_x$ alors on aura $\Omega_+ \gg \Omega_-$ (dans ce cas Ω_- tend vers zéro alors que Ω_+ prend une valeur finie) où on va observer la formation d'un spectre similaire à celui des niveaux de Landau dégénérés.

À température nulle, la matrice densité de premier ordre à l'état fondamentale prend la forme $\rho(\vec{r}, \vec{r}', \mu) = \sum_{n,m} \phi_{n,m}(\vec{r}) \phi_{n,m}^*(\vec{r}') \Theta(\mu - E_{n,m})$, μ est l'énergie du niveau de Fermi. Cette matrice de Dirac peut être obtenue à partir de la MDB comme nous l'avons vu au chapitre précédent :

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}', \mu) = \mathcal{L}_{\mu}^{-1} \left[\frac{C(\vec{r}, \vec{r}'; \beta)}{\beta} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(\beta\mu) \frac{C(\vec{r}, \vec{r}'; \beta)}{\beta} d\beta \quad (4.10)$$

La densité locale est donnée par $\rho(\vec{r}) \equiv \rho(\vec{r}, \vec{r}' = \vec{r}, \mu)$, et satisfait la condition de normalisation $\int \rho(\vec{r}) d\vec{r} = N$, où N est le nombre de particules.

Comme l'expression analytique exacte de la matrice densité de premier ordre ou de la densité locale pour le système considéré ici n'est pas encore donnée dans la littérature jusqu'à présent. Ici nous avons présenté l'expression exacte et corrigée de la matrice densité de Bloch que l'on peut utiliser pour obtenir à travers une transformée de Laplace inverse la matrice $\rho(\vec{r}, \vec{r}', \mu)$. Dans ce travail on va directement calculer le profil de la distribution de la densité dans l'espace de Fourier sans passer par la matrice densité dans l'espace réel.

² Ses différentes limites d'anisotropie et de rotation.

3. Profil de Densité dans L'espace de Fourier $n(\vec{k})$

Avant de procéder le calcul de cette fonction, nous rappelons la relation entre la densité dans l'espace de Fourier et la matrice de Bloch locale $C(\vec{r}; \beta)$. À partir de (4.10), on peut écrire la densité locale comme $\rho(\vec{r})$ suivant :

$$\rho(\vec{r}) = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left[\frac{C(\vec{r}; \beta)}{\beta} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(\beta\mu) \frac{C(\vec{r}; \beta)}{\beta} d\beta \quad (4.11)$$

La transformée de Fourier de cette quantité s'écrit:

$$n(\vec{k}) = \int \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\vec{r} \quad (4.12)$$

Où l'intégrale est étendue sur tout le plan (intégrale double). Il découle de la relation de normalisation de $\rho(\vec{r})$ la condition $n(\vec{k} = \vec{0}) = N$ que nous allons l'exploiter pour déterminer la valeur du niveau de Fermi. Évidemment la transformée de Fourier inverse en deux dimensions est $\rho(\vec{r}) = \int \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) n(\vec{k}) \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2}$.

En utilisant le formalisme de MDB avec les relations ci-dessus, nous pouvons dériver une forme analytique exacte de $n(\vec{k})$. En effet, à partir de (4.11) et (4.12) on trouve que :

$$n(\vec{k}) = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left[\tilde{C}(\vec{k}; \beta) \right] \quad (4.13)$$

Avec $\tilde{C}(\vec{k}; \beta) = \int \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) C(\vec{r}; \beta) d\vec{r}$ est la transformée de Fourier de la densité de Bloch.

D'après l'équation (4.6), la densité de Bloch a pour structure :

$$C(\vec{r}; \beta) \equiv C(x, y; \beta) = g(\beta) \exp(4ax^2 + 4by^2) \quad (4.14)$$

On déduit donc que sa transformée de Fourier est :

$$\tilde{C}(\vec{k}; \beta) = g(\beta) \iint \exp(4ax^2 + 4by^2) \exp(-ik_x x - ik_y y) dx dy \quad (4.15)$$

k_x et k_y sont les composantes du vecteur \vec{k} .

L'évaluation de (4.15) donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\vec{k}; \beta) = & \exp\left[-\frac{1}{4}\left(1 + \frac{\hbar^2 B^2}{\lambda_x^2 \lambda_y^2}\right)(\lambda_x^2 k_x^2 + \lambda_y^2 k_y^2)\right] \times \\ & \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} L_n\left(\frac{\lambda_x^2 k_x^2}{2} + \frac{\hbar^2 B^2 k_y^2}{2\lambda_x^2}\right) L_m\left(\frac{\hbar^2 B^2 k_x^2}{2\lambda_y^2} + \frac{\lambda_y^2 k_y^2}{2}\right) \exp(-\beta E_{n,m}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

où nous avons introduit dans cette expression les deux longueurs $\lambda_x = \sqrt{\hbar/\mu_- \Omega_-}$ et $\lambda_y = \sqrt{\hbar/\mu_+ \Omega_+}$. Les expressions des masses μ_- , μ_+ et le coefficient B sont données à la fin du chapitre. L_n et L_m désignent les polynômes de Laguerre de degré n et m respectivement. Maintenant, en insérant l'équation (4.16) dans (4.13) et en utilisant l'identité $\mathcal{L}_\mu^{-1}\{\exp[\beta(\mu - E_{n,m})]\} = \Theta(\mu - E_{n,m})$, nous obtenons l'expression finale de la densité dans l'espace de Fourier sous la forme :

$$\begin{aligned} n(\vec{k}) = & \exp\left[-\frac{1}{4}\left(1 + \frac{\hbar^2 B^2}{\lambda_x^2 \lambda_y^2}\right)(\lambda_x^2 k_x^2 + \lambda_y^2 k_y^2)\right] \times \\ & \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} L_n\left(\frac{\lambda_x^2 k_x^2}{2} + \frac{\hbar^2 B^2 k_y^2}{2\lambda_x^2}\right) L_m\left(\frac{\hbar^2 B^2 k_x^2}{2\lambda_y^2} + \frac{\lambda_y^2 k_y^2}{2}\right) \Theta(\mu - E_{n,m}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

La relation ci-dessus est le principal résultat de ce chapitre et cette forme ne semble pas avoir, à notre connaissance, été établie auparavant. Il est facile de vérifier que les quantités apparaissant dans (4.17) deviennent dans le cas d'un potentiel harmonique isotrope ($\omega_x = \omega_y = \omega_0$) comme suit:

$$\begin{aligned} \Omega_- = \omega_0 - \Omega & \quad \Omega_+ = \omega_0 + \Omega \\ \mu_- = 2M \omega_0 / (\omega_0 - \Omega) & \quad \mu_+ = 2M \omega_0 / (\omega_0 + \Omega) \\ B = 1/2M \omega_0 & \quad \lambda_x = \lambda_y = \sqrt{\hbar/2M \omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} a_{oh} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$a_{oh} = \sqrt{\hbar/M \omega_0}$ est la longueur de l'oscillateur. L'expression (4.17) se réduit alors à la forme suivante :

$$n(\vec{k}) = \exp\left(-\frac{a_{oh}^2 \vec{k}^2}{4}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} L_n\left(\frac{a_{oh}^2 \vec{k}^2}{4}\right) L_m\left(\frac{a_{oh}^2 \vec{k}^2}{4}\right) \Theta(\mu - E_{n,m}) \quad (4.19)$$

qui est identique au résultat trouvé par les auteurs de [78] pour un système (en rotation ou en champ magnétique) dans un piège harmonique isotrope. Signalons enfin qu'il est en principe

possible d'extraire une expression de la densité locale $\rho(\vec{r})$ pour le cas anisotrope à partir de (4.17) en utilisant la transformée de Fourier inverse.

Revenons au résultat (4.17) où il est possible d'éliminer la fonction de saut de Heaviside en tenant compte du fait que les termes qui contribuent à la sommation sont seulement ceux qui correspondent à un argument de la fonction saut de Heaviside supérieur à zéro, d'où $\mu - E_{nm} = \mu - \hbar\Omega_+(n+1/2) - \hbar\Omega_-(m+1/2) \geq 0$. On a donc la forme adéquate :

$$n(\vec{k}) = \exp\left[-\frac{1}{4}\left(1 + \frac{\hbar^2 B^2}{\lambda_x^2 \lambda_y^2}\right)(\lambda_x^2 k_x^2 + \lambda_y^2 k_y^2)\right] \times \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^{m_{\max}} L_n\left(\frac{\lambda_x^2 k_x^2}{2} + \frac{\hbar^2 B^2 k_y^2}{2\lambda_x^2}\right) L_m\left(\frac{\hbar^2 B^2 k_x^2}{2\lambda_y^2} + \frac{\lambda_y^2 k_y^2}{2}\right) \quad (4.20)$$

L'entier n_{\max} est la valeur maximale permise au nombre quantique n , et m_{\max} est la valeur maximale permise au nombre quantique m pour une valeur donnée du nombre n . D'après (4.9) on aura :

$$n_{\max} = \text{int}\left[\frac{\mu}{\hbar\Omega_+} - \frac{\Omega_+ + \Omega_-}{2\Omega_+}\right] \quad (4.21)$$

$$m_{\max} = \text{int}\left[\frac{\mu}{\hbar\Omega_-} - \frac{\Omega_+}{\Omega_-} n - \frac{\Omega_+ + \Omega_-}{2\Omega_-}\right]$$

$\text{int}[x]$ est la partie entière de x . L'énergie de Fermi μ est obtenue en utilisant la condition

$n(\vec{k} = \vec{0}) = N$ qui nous mène à $\sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^{m_{\max}} 1 = N$, un calcul directe donne :

$$N \approx \frac{1}{2\Omega_+ \Omega_-} \left[\frac{1}{\hbar^2} \mu^2 + \frac{\Omega_-}{\hbar} \mu - \frac{1}{4} (\Omega_+ - \Omega_-) (\Omega_+ - 3\Omega_-) \right] \quad (4.22)$$

Nous pouvons chercher dans l'espace de Fourier le cas d'une rotation très rapide et de forte anisotropie. Dans la figure 1, on peut voir le passage au régime à une dimension où la distribution de particules serai restreint le long de l'axe (ox) de faible confinement et présente une forme elliptique dans l'espace réel à cause du fort confinement sur (oy) et associée à la formation des niveaux de Landau occupés au sein du système, alors que la forme de $n(\vec{k})$ est allongée sur l'axe des composantes k_y (cette propriété est connue entre une fonction et sa transformée de Fourier; un étalement dans l'espace réel donne un confinement dans l'espace de Fourier et vice-versa).

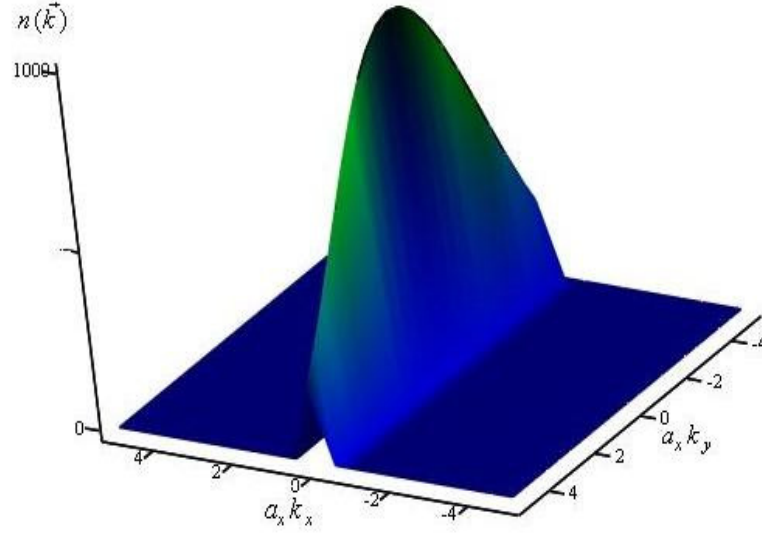


Fig. 1 : Le profil de densité dans l'espace de Fourier pour un système formé de $N = 1000$ particules, soumis à une forte anisotropie $\delta = 10$ et une rotation très rapide $\eta = 0.999$.

4. Etude à Trois Dimensions

La généralisation de cette étude à un système dans l'espace à trois dimensions exige la connaissance de la matrice densité de Bloch correspondante. Supposons que nous avons un gaz quantique ultra froid formé de N fermions et confiné par un potentiel harmonique anisotrope $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}M(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$, et mis en rotation. Prenons pour simplifier l'étude $\omega_y = \omega_z = \omega_r$, et définissons le paramètre de l'anisotropie comme $\delta = \omega_r/\omega_0$ (rapport entre la fréquence radiale ω_r et axiale ω_x). L'hamiltonien de ce système dans le repère tournant est :

$$H = \frac{1}{2M}\vec{P}^2 + \frac{1}{2}M(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) - \vec{\Omega}\cdot\vec{L} \quad (4.23)$$

Le paramètre η qui contrôle la rotation du système conserve la même définition(4.4).

L'expression de MDB de ce système dans sa forme la plus générale est :

$$C(\vec{r}; \vec{r}'; \beta) = Q(\beta) \exp[-(iA/\hbar B)(xy - x'y')] \times \exp\{a(x+x')^2 + a'(x-x')^2 + b(y+y')^2 + b'(y-y')^2 + d(z'+z')^2 + d'(z-z')^2 + c(x+x')(y-y') + c'(x-x')(y+y')\} \quad (4.24)$$

où $Q(\beta)$ et les deux nouveaux coefficients d et d' représentant la contribution de la troisième dimension, sont données aussi à la fin du chapitre.

La fonction de partition de ce système se dérive de la relation $Z = \int C(\vec{r}; \beta) d\vec{r}$ et on trouve $Z = 1/\left[8 \sinh(\beta\hbar\Omega_+/2) \sinh(\beta\hbar\Omega_-/2) \sinh(\beta\hbar\omega_z/2)\right]$, Comme nous l'avons fait auparavant, cette fonction peut être écrite sous la forme $Z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \exp(-\beta E_{n,m,l})$ où $E_{n,m,l}$ sont les niveaux d'énergies correspondants à l'hamiltonien (4.23). On a :

$$E_{n,m,l} = \hbar\Omega_+(n+1/2) + \hbar\Omega_-(m+1/2) + \hbar\omega_z(l+1/2), \quad n, m, l = 0, 1, 2, \dots \quad (4.25)$$

En suivant la même démarche du paragraphe précédent nous trouverons pour le profil de densité la forme suivante :

$$n(\vec{k}) \equiv n(k_x, k_y, k_z) = \exp\left\{-\frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{\hbar^2 B^2}{\lambda_x^2 \lambda_y^2}\right) (\lambda_x^2 k_x^2 + \lambda_y^2 k_y^2) + \lambda_z^2 k_z^2 \right]\right\} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} L_n\left(\frac{\lambda_x^2 k_x^2}{2} + \frac{\hbar^2 B^2 k_y^2}{2\lambda_x^2}\right) L_m\left(\frac{\hbar^2 B^2 k_x^2}{2\lambda_y^2} + \frac{\lambda_y^2 k_y^2}{2}\right) L_l\left(\frac{\lambda_z^2 k_z^2}{2}\right) \Theta(\mu - E_{n,m,l}) \quad (4.26)$$

et la réduction à un système en présence d'un piège harmonique isotrope donne :

$$n(\vec{k}) = \exp\left(-\frac{a_{oh}^2 \vec{k}^2}{4}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} L_n\left(\frac{a_{oh}^2 \vec{k}^2}{4}\right) L_m\left(\frac{a_{oh}^2 \vec{k}^2}{4}\right) L_l\left(\frac{a_{oh}^2 \vec{k}^2}{4}\right) \Theta(\mu - E_{n,m,l}) \quad (4.27)$$

Comme une application de cette quantité, on donne le facteur de forme élastique avec une expression pratique pour un processus de diffusion.

5. La Fonction Facteur de Forme de Diffusion Élastique

Dans ce paragraphe nous signalons juste une possible utilisation pratique du profil de densité dans l'espace de Fourier $n(\vec{k})$.

Les informations sur les systèmes des gaz atomiques ultra-froids peuvent être obtenues par la méthode de l'imagerie directe après l'expansion du nuage (temps de vol), mais cette méthode exige la destruction du système puisque le potentiel de confinement doit être supprimé et on regarde l'expansion balistique du nuage en temps de vol [95-96]. Une méthode alternative est d'étudier la diffraction de la lumière par la densité de distribution du système, par exemple pour des fermions chargés la densité de charge peut être mesurée par une diffusion élastique de particules (rayons X et électrons) sans autant perturber l'état fondamental du système en ajoutant une portion d'énergie aux électrons. Le processus de diffusion comporte deux termes, l'un est la diffraction de la lumière par la densité de gaz qui ne cause aucune excitation dans l'état du système et le laisse inchangé, c'est la diffusion élastique. Le second est la partie inélastique qui produit des excitations au sein du gaz où des transferts d'énergies entre la lumière et les particules aura lieu. Si la fréquence de la lumière utilisée pour sonder le nuage est loin de la résonance d'excitation des états quantiques internes du gaz, la diffusion élastique détermine la distribution angulaire de l'intensité et plus particulièrement pour les petits angles de diffusion [93], [97-99]. La contribution de la diffusion élastique est déterminée par le facteur statique élastique (facteur de forme élastique) donné par :

$$S_{el}(\vec{k}) = \left| \int \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\vec{r} \right|^2 = \left| n(\vec{k}) \right|^2 \quad (4.28)$$

Où ici \vec{k} désigne le moment transféré $\vec{k} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$ avec \vec{k}_i est le vecteur d'onde incident et \vec{k}_f est le vecteur d'onde final.

Supposons que le faisceau de la lumière incidente se propage le long de l'axe (oz), alors $\vec{k}_i = k_i \vec{z}$. Les photons de la lumière se diffusent en une autre direction définie par les angles sphériques (θ, φ) avec le vecteur d'onde final \vec{k}_f , pour une diffusion élastique on a $\|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}_f\| = k_0$, et les composantes du vecteur d'onde transféré suivant les axes ox , oy et oz sont respectivement: $k_x = -k_0 \cos(\varphi) \sin(\theta)$, $k_y = -k_0 \sin(\varphi) \sin(\theta)$ et $k_z = k_0 (1 - \cos \theta)$. Dans ce cas, l'expression de $S_{el}(\vec{k})$ suivant (4.28) et (4.26) ainsi que les considérations précédentes est la suivante :

$$\begin{aligned}
 S_{el}(\vec{k}) = & \left\{ \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{\hbar^2 B^2}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} \right) (\lambda_x^2 \cos^2(\varphi) + \lambda_y^2 \sin^2(\varphi)) \sin^2(\theta) + \lambda_z^2 (1 - \cos(\theta))^2 \right] k_0^2 \right\} \right. \\
 & \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^{m_{\max}} \sum_{l=0}^{l_{\max}} L_n \left[\left(\frac{\lambda_x^2 \cos^2(\varphi)}{2} + \frac{\hbar^2 B^2 \sin^2(\varphi)}{2\lambda_x^2} \right) \sin^2(\theta) k_0^2 \right] \\
 & \left. L_m \left[\left(\frac{\hbar^2 B^2 \cos^2(\varphi)}{2\lambda_y^2} + \frac{\lambda_y^2 \sin^2(\varphi)}{2} \right) \sin^2(\theta) k_0^2 \right] L_l \left[\frac{\lambda_z^2 (1 - \cos(\theta))^2}{2} k_0^2 \right] \right\}^2
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

et les nombre n_{\max} , m_{\max} et l_{\max} sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 n_{\max} &= \text{int} \left[\frac{\mu}{\hbar\Omega_+} - \frac{\Omega_+ + \Omega_- + \omega_z}{2\Omega_+} \right] \\
 m_{\max} &= \text{int} \left[\frac{\mu}{\hbar\Omega_-} - \frac{\Omega_+}{\Omega_-} n - \frac{\Omega_+ + \Omega_- + \omega_z}{2\Omega_-} \right] \\
 l_{\max} &= \text{int} \left[\frac{\mu}{\hbar\omega_z} - \frac{\Omega_+}{\omega_z} n - \frac{\Omega_-}{\omega_z} m - \frac{\Omega_+ + \Omega_- + \omega_z}{2\omega_z} \right]
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Aussi on peut exploiter ce facteur de forme élastique pour l'étude de la diffusion élastique des électrons par le noyau atomique afin de sonder la distribution de charge de celui-ci dans le cadre de l'approximation de Born [100].

Nous n'allons pas développer plus cet aspect et laissons cela pour une étude plus détaillée pour le futur.

Coefficients des expressions (4.6) et (4.24) de la Matrice Densité de Bloch

$$S = \sqrt{(\omega_y^2 - \omega_x^2)^2 + 8\Omega^2(\omega_x^2 + \omega_y^2)}$$

$$\Omega_+^2 = \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\Omega^2 + S)$$

$$\Omega_-^2 = \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\Omega^2 - S)$$

$$A = \frac{\omega_y^2 - \omega_x^2 + S}{2S}, \quad \mathcal{B} = \frac{2\Omega}{MS}$$

$$\mu_+ = \frac{2MS}{S + (\omega_y^2 - \omega_x^2) + 4\Omega^2}$$

$$\mu_- = \frac{2MS}{S + (\omega_y^2 - \omega_x^2) - 4\Omega^2}$$

$$a = -(4\hbar\gamma_1)^{-1}$$

$$a' = -(4\hbar\gamma_1')^{-1}$$

$$b = -(4\hbar\gamma_2)^{-1}$$

$$b' = -(4\hbar\gamma_2')^{-1}$$

$$\gamma_1 = \frac{\coth(\beta\hbar\Omega_-/2)}{\mu_- \Omega_-} + \mu_+ \Omega_+ \mathcal{B}^2 \coth(\beta\hbar\Omega_+/2)$$

$$\gamma_1' = \frac{\tanh(\beta\hbar\Omega_-/2)}{\mu_- \Omega_-} + \mu_+ \Omega_+ \mathcal{B}^2 \tanh(\beta\hbar\Omega_+/2)$$

$$\gamma_2 = \frac{\coth(\beta\hbar\Omega_+/2)}{\mu_+ \Omega_+} + \mu_- \Omega_- \mathcal{B}^2 \coth(\beta\hbar\Omega_-/2)$$

$$\gamma_2' = \frac{\tanh(\beta\hbar\Omega_+/2)}{\mu_+ \Omega_+} + \mu_- \Omega_- \mathcal{B}^2 \tanh(\beta\hbar\Omega_-/2)$$

$$g(\beta) = \frac{1}{2\pi\hbar} \left(\frac{\mu_+ \Omega_+}{\mu_- \Omega_-} \right)^{1/2} [\gamma_1 \gamma_1' \sinh(\beta\hbar\Omega_+) \sinh(\beta\hbar\Omega_-)]^{-1/2}$$

$$Q(\beta) = \left(\frac{M \omega_z}{2\pi\hbar \sinh(\beta\hbar\omega_z)} \right)^{1/2} g(\beta)$$

$$c = \frac{i \coth(\beta\hbar\Omega_-/2)}{2\mu_- \Omega_- \mathcal{B} \hbar \gamma_1}$$

$$c' = \frac{i \tanh(\beta\hbar\Omega_-/2)}{2\mu_- \Omega_- \mathcal{B} \hbar \gamma_1'}$$

$$d = -\frac{M \omega_z}{4\hbar} \tanh(\beta\hbar\omega_z)$$

$$d' = -\frac{M \omega_z}{4\hbar} \coth(\beta\hbar\omega_z)$$

6. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une étude sur un système de fermions neutres ultra froid confiné par un potentiel harmonique anisotrope à deux et à trois dimensions, ce système est mis en rotation ou soumis à un champ magnétique synthétique. La recherche de la matrice densité de Dirac ainsi que la densité locale est encore un sujet d'actualité. Notre contribution se résume en trois points. Le premier a consisté à vérifier et corriger l'expression analytique de la matrice densité de Bloch existant dans la littérature. Le deuxième point la dérivation d'une expression exacte de la distribution de la densité dans l'espace de Fourier. Enfin l'appliquer au calcul du facteur de diffusion de forme élastique.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Nous avons étudié dans cette thèse quelques propriétés d'un système de gaz d'atomes fermioniques ultra-froids piégé par un potentiel harmonique isotrope bidimensionnels et soumis à des rotations rapides. Le confinement le long de l'axe perpendiculaire au plan du système est supposé tellement fort qu'on peut considérer que le mouvement le long de cet axe est gelé. Le principal but de traiter ce type de systèmes est d'observer des effets similaires à ceux observés dans les systèmes électroniques à deux dimensions en présence de champ magnétique très intense (formation des niveaux de Landau, effet hall quantique, ...etc.). En effet, suite aux progrès technologiques réalisés dans ce domaine de gaz quantiques ultra-froids, ces systèmes d'atomes froids fournissent un milieu contrôlable et accessible pour tester la validité des théories élaborées initialement pour des systèmes de matière condensée dans lesquelles ces vérifications ne sont pas toujours faciles.

Nous avons donné tout d'abord une vue générale sur l'historique de ce domaine en l'introduction ainsi que les buts à atteindre, suivie par tout un premier chapitre que nous avons consacré à l'exposition des idées théoriques fondatrices menant à franchir le seuil de dégénérescence des gaz quantiques couronnées par la réalisation expérimentale des condensats de Bose-Einstein et nous avons aussi présenter quelques techniques expérimentales conduisant à la mise en rotation d'un nuage atomique refroidi jusqu'à la dégénérescence. Après avoir exposé la problématique dans l'introduction, nous nous sommes intéressés dans le chapitre 2 à l'obtention de l'équation de Schrödinger et son hamiltonien associé dans le repère tournant. Par ailleurs, pour une meilleure compréhension de la physique du problème sur le plan pédagogique, une dérivation de l'hamiltonien en utilisant la mécanique classique est donnée. On montre ainsi la compétition entre les différentes forces (force du potentiel confinant- force centrifuge- force de Coriolis) qui agissent sur la particule dans ce repère non-inertiel (tournant). Une discussion du spectre de l'énergie est aussi incluse dans ce chapitre

Ensuite dans le chapitre 3, la structure des densités de particules et de courant de matière d'un gaz d'atomes neutres de fermions ultra-froid dans un piège harmonique bidimensionnel en rotation sont examinées. Deux méthodes sont présentées pour le calcul analytique de ces densités pour un nombre de particules N et pour une vitesse de rotation Ω choisie. En accord avec des études précédentes, on observe la formation, dans le régime ultra-rapide de rotation, des régions de densité constante (régions incompressibles ou plateaux),

chaque plateau correspond à une valeur quantifiée de la densité ($\rho = \nu/\pi a^2$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$). A cause du traitement numérique exact fait dans ce travail, nous avons montré aussi l'existence de régions de densités variables (régions compressibles) qui n'ont jamais été signalées auparavant dans les gaz quantiques ultra-froids.

Pour une meilleure et profonde compréhension de cette structure de la densité, nous avons étudié la distribution du courant générée par la rotation du fluide. Il est intéressant de rappeler que si on prend un fluide normale en rotation, après un certain temps ce fluide va tourner avec la même vitesse angulaire que celle du récipient qui le contient, par conséquent la vitesse relative du fluide dans le repère tournant est nulle. Par contre le fluide considéré dans ce travail est de nature quantique et par conséquent le courant dans le repère tournant (qui montre la déviation par rapport à la rotation rigide) est non nulle, mais présente une structure non triviale en particulier en régime de rotation ultra rapide. Par ailleurs nous avons trouvé que dans les régions de densité constante le courant circule dans le sens de rotation par contre dans les régions compressibles, le courant circule dans le sens inverse. Cette alternance dans la distribution du courant en rotation rapide, est liée, comme on l'a vu, par les oscillations dans la pseudo-magnétisation. Nous avons montré que le courant de matière dans ce régime est composé de deux types de courants et que dans une région de densité donnée on n'aura qu'un seul type de ces deux courants. Pour mieux comprendre l'origine physique de ces deux courants, nous avons fait une étude approximative du système et on est arrivé à expliquer leurs natures en reliant leurs expressions aux gradients de potentiel confinant effectif et densité de particules respectivement. Nous avons montré aussi que le courant totale appelé aussi courant intégré, en fonction du nombre de particules du système, est quantifié en unité ($\omega_0/2\pi$) et qui représente la pseudo-magnétisation au centre du piège.

Dans le chapitre 4, nous avons généralisé le traitement au cas d'un potentiel harmonique anisotrope. Les expressions analytiques exactes des densités du système pour une valeur quelconque de la rotation ne sont pas disponibles jusqu'au présent, mais juste des approximations où le système peut être traité dans le régime des niveaux de Landau les plus bas où on ne somme que sur un nombre limité d'états quantiques. Notre contribution a consisté au calcul de l'expression exacte du profil de la densité de particules dans l'espace de Fourier pour une rotation arbitraire, mais aussi avant cela nous avons corrigé l'expression de la matrice densité de Bloch où des erreurs figurent dans sa formulation originale [87]. Ensuite nous avons proposé une généralisation pour le cas à 3 dimensions. Enfin nous avons suggéré une application pour la transformée de Fourier dans le domaine de la diffusion de la lumière par un nuage atomique afin de sonder la distribution de ce dernier.

Ce travail peut donner lieu à plusieurs extensions, inclusion des interactions atome-atome, inclusion de l'effet de température qui ouvre aussi la voie à l'étude de gaz de bosons, certainement ces effets induiront des modifications importantes dans les différentes densités (matière, courant, pseudo-magnétisation) qui caractérisent le système.

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

- [1] M. H. Anderson et *al.*, *Science* **269**, 198 (1995).
- [2] C. C. Bradley et *al.*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
- [3] K. B. Davis et *al.*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics IX, Statistical Physics*, part 2 (Pergamon Press, 1981).
- [5] F. Dalfovo et *al.*, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [6] A. L. Fetter, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 647 (2009).
- [7] B. DeMarco et *al.*, *Science* **285**, 1703 (1999). B. DeMarco et *al.*, *Phys. Rev. Lett.* **86** 5409, (2001).
- [8] A. G. Truscott et *al.*, *Science* **291**, 2570 (2001). Partridge G B et *al.*, *Science*, **311** 503, (2006).
- [9] N. R. Cooper, *Adv. Phys.* **57**, 539 (2008). N. R. Cooper et *al.*, *Phys. Rev. B* **60**, R16279 (1999); N. R. Cooper et *al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120405 (2001); N. R. Cooper, *ibid.* **92**, 220405 (2004).
- [10] P-G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, Benjamin, (1966).
- [11] M. A. Preston and R. K. Bhaduri, *Structure of the nucleus* (Addison-Wesley Publishing Company, INC, 1975).
- [12] A. L. Fetter, *Phys. Rev. A* **75**, 013620 (2007). A. L. Fetter, *Phys. Rev. A* **64**, 063608 (2001).
- [13] T.-L. Ho et *al.*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4648 (2000).
- [14] N. Ghazanfari et *al.*, *Eur. Phys. J. D* **59**, 435 (2010).
- [15] N. Regnault et *al.*, *Phys. Rev. B* **70**, 241307(R) (2004).
- [16] Z. Akdeniz et *al.*, *Physica B* **365** 208 (2005).
- [17] J. Dalibard et *al.*, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1523 (2011).
- [18] P. Jacquinet et *al.*, *Opt. Commun.* **8**,163, (1973). R. Schieder et *al.*, *Opt. Commun.* **5**,337 (1972).
- [19] J. v. Prodan et *al.*, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 992 (1985).
- [20] W. Ertmer et *al.*, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 996 (1985).
- [21] E. JAHIER. *Photoniques*, revue des solutions optiques. **51** janvier/février (2011).
- [22] F. Chevy et *al.*, *Les gaz de fermions ultra-froids*, Images de la physique, p.90 (2005). G. Andrew et *al.*, *Science* **291**, 2570 (2001).

- [23] A. Aspect et *al.*, *Atomes refroidis par laser: vers le microkelvin*, Images de la physique, p.74 (1990).
- [24] J. Dalibard, *Immobiliser les atomes à coup de lumière laser*, La Recherche, p.934, Volume 16 N° **168** Juillet-Aout (1985).
- [25] A. Aspect et *al.*, *Le refroidissement des atomes par laser*, La Recherche, P.30, volume 25, **261** janvier (1994).
- [26] J. Dalibard, *Cours Atomes ultra-froids*, année (2006).
- [27] S. Chu et *al.*, Phys. Rev. Lett. **55**, 48 (1985).
- [28] P. Lett et *al.*, Phys. Rev. Lett. **64**, 169 (1988).
- [29] J. Dalibard et *al.*, J. Opt. Soc. Am. **B6**, 2023 (1989).
- [30] P.J. Ungar et *al.*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, 2058 (1989).
- [31] J.-P. Barrat et *al.*, J. Phys. Rad., **22**, 329 et 4443 (1961).
- [32] C. Cohen-Tannoudji, *Piégeage non dissipatif et refroidissement évaporatif*, (1996-1997), Cours du Collège de France.
- [33] V. Letokhov, *Laser control of atoms and molecules*. (Oxford University Press 2007), pp.101.
- [34] F. Chevy. *Dynamique d'un condensat de Bose-Einstein*. Thèse de doctorat Atomic Physics. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI (2001). French.
- [35] R. Grimm et *al.*, *Optical Dipole Traps for Neutral Atoms*. Adv. At. Mol. Opt. Phys., vol. **42**, pages 95–170 (2000).
- [36] N. Schlosser, *Étude et réalisation de micro-pièges dipolaires optiques pour atomes neutres*, Thèse de doctorat, Université Paris XI (2001).
- [37] B. Darquié, *Manipulation d'atomes dans des pièges dipolaires microscopiques et émission contrôlée de photons par un atome unique*. Thèse de doctorat, Université Paris XI (2005).
- [38] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, et G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes, Savoirs actuels* (InterEditions/Editions du CNRS, 1988).
- [39] J. Dalibard et *al.*, Journal of the Optical Society of America B, Vol. **2**, page 1707, November (1985)
- [40] C. G. Townsend, et *al.*, Phys. Rev. A **52** (2), 1423 (1995)
- [41] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge university press (2008). Chapter 4 and 5.
- [42] A. Faber, *All-optical formation of a Rubidium Bose-Einstein condensate for experiments on interacting Rydberg atoms*. Diploma thesis, Department of Physics and Astronomy University of Heidelberg (2011).
- [43] J. F. Allen et *al.*, *Flow of liquid helium II*, Nature **141**, 75 (1938).
- [44] F. London, *The λ -phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy*, Nature **141**, 643 (1938).
- [45] R. J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [46] A. A. Abrikosov, Sov. Phys. JETP **5**, 1174 (1957).
- [47] J.R. Abo-Shaeer et *al.*, Science **292**, 476 (2001).

- [48] M.R. Matthews et *al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2498 (1999).
- [49] A.E. Leanhardt et *al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 190403 (2002).
- [50] K.W. Madison et *al.*, Phys. Rev. Lett. **84**, 806 (2000).
- [51] P.C. Haljan et *al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 210403 (2001).
- [52] E. Hodby et *al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 010405 (2001).
- [53] V. Bretin. *Rotations d'un condensat de Bose-Einstein*. Thèse de doctorat. Atomic Physics. (Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004). France.
- [54] A. Görlitz et *al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001). V. Schweikhard et *al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 040404 (2004). D. Rychtarik et *al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 173003 (2004). N. L. Smith et *al.*, J. Phys. B **38**, 223-235 (2005). S. Burger et *al.*, Europhys. Lett. **57**, 1-6 (2002). Z. Hadzibabic et *al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 180403 (2004). M. Köhl et *al.*, J. Low Temp. Phys. **138**, 635-644 (2005).
- [55] C. Cohen- Tannoudji, Bernard Diu, Franck, Laloe, *Mécanique Quantique*, Tome 1, Hermann (1977) Paris. Pour l'opérateur de rotation, p. 445. Pour les niveaux de Landau, p. 751.
- [56] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983)
- [57] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics V, Statistical Physics Part I* (Pergamon Press, Oxford, 1993), Sec. 26.
- [58] Ch. Grenier et *al.*, Phys. Rev. A **87**, 033603 (2013).
- [59] W. J. de Haas et *al.*, Leiden. Comm. **208d**, 212a (1930); **208**, 220d (1932).
- [60] L. Landau, Z. Phys. **64**, 629 (1930).
- [61] Y. Avishai et *al.*, Phys. Rev. Lett. **71**, 279 (1993).
- [62] D. B. Chklovskii et *al.*, Phys. Rev. B **46**, 4026 (1992); **46**, 15606 (1992).
- [63] M. R. Geller et *al.*, Phys. Rev. B **50**, 11714 (1994).
- [64] M. Büttiker et *al.*, Phys. Lett. A **96**, 365 (1983).
- [65] L. P. Lévy et *al.*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2074 (1990).
- [66] V. Chandrasekhar et *al.*, Phys. Rev. Lett. **67**, 3578 (1991).
- [67] D. Maily et *al.*, Phys. Rev. Lett. **70**, 2020 (1993).
- [68] G. Vignale et *al.*, Phys. Lett. A **197**, 444 (1995).
- [69] M. Brack, R. K. Bhaduri, *Semiclassical Physics* (Frontiers in Physics, vol. **96**, Westview, Boulder, 2003)
- [70] M. Brack et *al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 1574 (2001).
- [71] M. Brack et *al.*, J. Phys. A **36**, 1111 (2003).
- [72] B.P. van Zyl et *al.*, Phys. Rev. A **67**, 023609 (2003).
- [73] P. Shea et *al.*, Phys. Rev. B **74**, 205334 (2006).
- [74] P. Shea et *al.*, J. Phys. A **40**, 10589 (2007).
- [75] P. Shea et *al.*, J. Phys. A. **41**, 135305 (2008).
- [76] B.P. van Zyl et *al.*, Phys. Rev. B **69**, 024520 (2004).
- [77] K. Bencheikh et *al.*, Phys. Rev. A **78**, 053614 (2008).
- [78] H. Naidja et *al.*, Phys. Rev. A **83**, 053631 (2011).
- [79] K. Husimi, Proc. Phys. Math. Soc. Jpn **22**, 264 (1940).
- [80] E. H. Sondheimer et *al.*, Proc. R. Soc. A, **210**, 173 (1951).

- [81] N H March et *al.*, Phys. Rev. **120** 830 (1960).
- [82] N. H. March et *al.*, J. Phys. A: Math. Gen. **18** L643 (1985).
- [83] J. M. Manoyant, Phys. A: Math. Gen. **19**. 3013 (1986).
- [84] M. L. Glasser, J. Phys. A: Math. Gen. **20**. L125 (1987).
- [85] M. A. Habeeb, J. Phys. A: Math. Gen. **20**, 5549-5554 (1987).
- [86] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York: McGraw-Hill) (1965). ch 10.
- [87] K. Yonei, J. Phys. A: Math. Gen. **22**. 2415 (1989).
- [88] I S Gradshteyn and I M Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 5th edition, 1994).
- [89] M. Abramowitz and I.A. Stegun: *Handbook of Mathematical Function* (Dover Publication, 9th printing, New York, 1970).
- [90] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999) Germany.
- [91] F. Gleisberg et *al.*, Phys. Rev.A **62** 063602 (2000).
- [92] K. Bencheikh et *al.*, J. Phys. A: Math. Theor **40** 13503 (2007).
- [93] P. Vignolo et *al.*, Phys. Rev. A **64** 023421 (2001).
- [94] Z. Akdeniz et *al.*, Physica B **365** 208 (2005).
- [95] I. Bloch, et *al.*, *Many-Body Physics with Ultracold Gases*, Rev. Mod. Phys. **80**, 885 (2008).
- [96] W. Ketterle et *al.*, *Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates*, Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, (IOS Press, Amsterdam) (1999), pp. 67–176.
- [97] J. Javanainen et *al.*, Phys. Rev. A **52**, 3033 (1995).
- [98] B. DeMarco et *al.*, Phys. Rev. A **58**, R4267 (1998).
- [99] J. S. Douglas et *al.*, Phys. Rev. A **84**, 033637 (2011).
- [100] R. W. Robinett, *Quantum Mechanics*, second edition (2006), Oxford University Press, pp 614-618.
- [101] K. Bencheikh et *al.*, Phys. Rev. A **89**, 063620 (2014).

Current reversals in rapidly rotating ultracold Fermi gases

K. Bencheikh and S. Medjedel

Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques, Département de physique, Université Ferhat Abbas Sétif, Sétif 19000, Algeria

G. Vignale

Department of Physics and Astronomy, University of Missouri, Columbia, Missouri 65211, USA

(Received 7 February 2014; published 25 June 2014)

We study the equilibrium current density profiles of harmonically trapped ultracold Fermi gases in quantum Hall-like states that appear when the quasi-two-dimensional trap is set in fast rotation. The density profile of the gas (in the rotating reference frame) consists of incompressible strips of constant quantized density separated by compressible regions in which the density varies. Remarkably, we find that the atomic currents flow in opposite directions in the compressible and incompressible regions—a prediction that should be amenable to experimental verification.

DOI: [10.1103/PhysRevA.89.063620](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.063620)

PACS number(s): 03.75.Ss, 05.30.Fk, 67.85.-d

Starting with the discovery of BECs in trapped ultracold gases of bosonic atoms, the field of quantum gases has experienced an explosive growth [1–11]. Indeed, cold atomic systems offer the opportunity to study, in clean and controlled conditions, key concepts of condensed matter theory and also to simulate, via the application of suitable optical fields, interactions (such as spin-orbit interactions and periodic potentials) which, in a conventional solid-state environment, arise from microscopic, hardly controllable processes. One of the fields that can be artificially simulated in cold atoms is the one arising by the fast rotation of the “vessel” that contains the particles [11]. It is well known [12] that, in the rotating frame, the Hamiltonian of the system is modified by the addition of the field $H_{\text{rot}} = -\vec{\Omega} \cdot \vec{L}$, where $\vec{\Omega}$ is the angular velocity of the vessel, and \vec{L} is the operator of the total angular momentum of the system. This is similar to the coupling of a charged particle to a magnetic field \vec{B} , but the diamagnetic term (quadratic in \vec{B}) is absent. The response of bosonic or fermionic atomic gases to such a “rotation field” has been a subject of intensive investigations during the last decade. As the frequency of rotation increases, an increasing number of vortices appears in a Bose-Einstein condensate (BEC). In the fast-rotation limit, defined by the condition $\Omega \gg \frac{\hbar\rho}{2M^*}$, where ρ is the (two-dimensional) atomic density and M^* is the mass of an atom, the system exhibits atomic quantum Hall states and the BEC can be described in terms of Landau-level single-particle states [1–7]. More recently, theoretical studies on rotating Fermi gases have confirmed the existence of Landau-like energy levels [8] and have shown how the Fermi statistics imprints the structure of these energy levels in the density profiles [7–10]. In the limit of fast-rotating traps these density profiles are found to consist of a series of density plateaus at quantized densities $\rho = \frac{\nu}{\pi\ell^2}$, where ν is an integer and $\ell^2 = \frac{\hbar}{M^*\Omega}$ is the square of the “magnetic length,” separated by compressible regions, in which the density varies (see Fig. 1). These findings are in perfect agreement with corresponding results for the density of a two-dimensional electron gas at high magnetic field [13–15]. Each plateau corresponds to the occupation of a new pseudo-Landau-level (see Fig. 2 below). In addition, the angular momentum of the gas has been shown to display quantum oscillations [16] as a function of particle

number, which are analogous to the de Haas–van Alphen oscillations [17] of the magnetization in solid-state systems.

The importance of the compressible regions emerges when one considers the mass-current density profile $\vec{j}(\vec{r})$ in the rotating frame, i.e., the intrinsic current. This is a measurable property that we calculate here without approximations. The existence of equilibrium currents—also known as persistent currents—is a purely quantum-mechanical phenomenon, which has been widely studied in mesoscopic electronic system subjected to magnetic fields [18–21] or set in rapid rotation [22]. Exploiting the analogy between the motion of charged particles in a magnetic field and neutral atoms in a rotating frame, one expects persistent mass current to arise in response to the rotation of an ultracold atomic gas. Our calculations show that the persistent current in the compressible regions flows in a direction *opposite* to that of the persistent currents in the incompressible regions.

There is a good reason for this, since the nature of the persistent current is quite different in the two types of regions. In the incompressible regions it is a Hall-like current, proportional to the gradient of the effective potential acting on the particles, which must be positive to ensure confinement. By contrast, in the compressible regions we find an edge current, proportional to the gradient of the particle density, which is negative since the density decreases from the center of the trap towards the periphery. The reversal of the sign of the current in going from an incompressible region to the neighboring compressible region can be viewed as a manifestation of the oscillatory behavior of the local pseudomagnetization $\vec{M}(\vec{r})$, which is related to the current by the standard relation

$$\vec{j}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}). \quad (1)$$

The possibility of this representation follows immediately from the continuity equation $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0$, and the magnetization $\vec{M}(\vec{r})$ is defined up to an arbitrary curl-free field. The oscillations of $\vec{M}(\vec{r})$ are completely analogous to the de Haas–van Alphen oscillations of the magnetization of an electronic system, with the difference that our system is charge-neutral, and there is no magnetization: yet the pseudomagnetization behaves exactly as the true magnetization of a system of charged particles! The existence of a

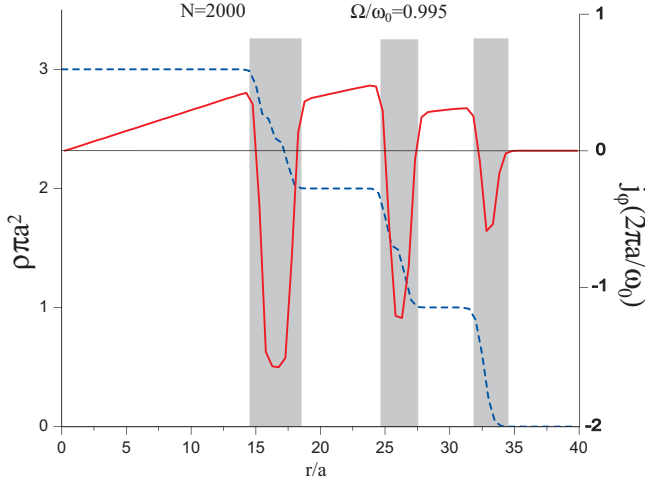


FIG. 1. (Color online) Particle and current density profile for $N = 2000$ atoms in a parabolic trap with characteristic frequency ω_0 rotating at frequency Ω , with $\Omega/\omega_0 = 0.995$. The radial coordinate r from the center of the trap is in units of $a = (\frac{\hbar}{M^*\omega_0})^{1/2}$, which practically coincides with ℓ at this value of Ω . The dashed blue line represents the particle density, ρ , whose value is given on the left scale in units of $\frac{1}{\pi a^2}$. The solid red line represents the azimuthal component of the particle current density j_ϕ , whose value is given on the right scale in units of $\frac{\omega_0}{2\pi a}$. In the incompressible regions (shown on white background) the density is quantized to an integer, and the current is positive. In the compressible regions (shown on gray background) the density is unquantized and the current is negative.

local pseudomagnetization satisfying Eq. (1) also implies a quantization of the total (integrated) persistent current—which is reminiscent of the quantization of the vortex current in the superfluid bosonic system. We believe that our predictions on the current density profile are accessible to experimental verification more easily in this system than in conventional semiconductor-based electron liquids at high magnetic field. Spatially resolved Doppler velocimetry techniques can be employed to detect the direction of the flow of the atoms. A detailed verification of this intriguing prediction will thus be possible for the first time.

Consider a system of N noninteracting fermions of mass M^* moving in a two-dimensional parabolic trap potential $V(r) = \frac{1}{2}M^*\omega_0^2 r^2$, where $r^2 = x^2 + y^2$. When the trap is set in rotation with angular frequency $\vec{\Omega}$ the Hamiltonian in the rotating frame takes the form

$$H = \frac{1}{2M^*}(\vec{p} - M^*\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 + V_{\text{eff}}(r), \quad (2)$$

with

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{M^*}{2}(\omega_0^2 - \Omega^2)r^2. \quad (3)$$

Equation (2) shows the equivalence of our system to a system of charged particles in a harmonic trap with characteristic frequency $\omega_{\text{eff}} = (\omega_0^2 - \Omega^2)^{1/2}$ subjected to uniform magnetic field B such that the cyclotron frequency of the equivalent magnetic problem is $\omega_c = \frac{eB}{M^*} = 2\Omega$.

The density and the current density are both computed from the single-particle density matrix, which at the absolute zero

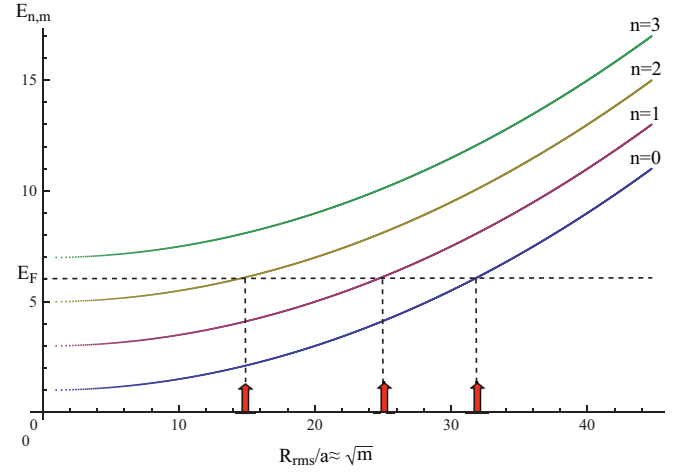


FIG. 2. (Color online) Energy spectrum in units of $\hbar\omega_0$ for the four lowest-lying Landau levels in a rotating two-dimensional trap with $\Omega/\omega_0 = 0.995$. Plotted on the horizontal axis is the root-mean-square distance of the orbital with quantum numbers n and m from the center of the trap: $R_{\text{rms}}/a = \sqrt{|m|}$ for large positive m . The Fermi energy E_F is also shown for $N = 2000$ atoms. The positions at which the energy spectrum crosses the Fermi energy are marked by vertical arrows and closely correspond to the centers of the transitions between different incompressible regions shown in Fig. 1.

of temperature has the form

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}', \mu) = \sum_{n,m} \varphi_{n,m}(\vec{r}) \varphi_{n,m}^*(\vec{r}') \Theta(\mu - E_{n,m}), \quad (4)$$

where $\Theta(x) = 1$ or 0 if $x > 0$ or < 0 respectively, μ is the Fermi energy (chemical potential at zero temperature) and $\varphi_{n,m}(\vec{r})$ are the eigenfunctions of the Schrödinger equation with Hamiltonian (2). Using polar coordinates r and ϕ the normalized eigenfunctions of the Hamiltonian (2) are given by

$$\varphi_{n,m}(\vec{r}) = \frac{C_{n,m}}{\sqrt{\pi}a} \left(\frac{r}{a}\right)^{|m|} L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{a^2}\right) e^{-\frac{r^2}{2a^2}} e^{im\phi}, \quad (5)$$

where $C_{n,m} = \sqrt{n!/(n+|m|)!}$ is the normalization constant, L_k^α denotes the generalized Laguerre polynomial [23], and $a \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{M^*\omega_0}}$. Here n is the radial quantum number, with values $n = 0, 1, 2, \dots$ and $\hbar m$ is the angular momentum along the \hat{z} axis, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Notice that the length scale a coincides with ℓ in the limit of fast rotation $\Omega \rightarrow \omega_0$. The eigenvalues are given by

$$E_{n,m} = (2n + |m| + 1)\hbar\omega_0 - m\hbar\Omega. \quad (6)$$

In the above energy spectrum (depicted in Fig. 2), the frequency ω_0 appears as the maximum admissible value of Ω since the stability of the gas requires that $\Omega \leq \omega_0$ (in the absence of any additional repulsive potential). In the limit, $\Omega = \omega_0$ the centrifugal force, varying as $M^*\Omega^2 \vec{r}$ is balanced by the trapping force $-M^*\omega_0^2 \vec{r}$ and the energy spectrum reduces to $E_{n,m} = \hbar\omega_0(2n + |m| - m + 1)$ which is a Landau-level-like energy spectrum, where $n + (|m| - m)/2$ is the ordinal number of the Landau level (starting from 0 and increasing). Notice that a negative value of the angular momentum m is allowed only in Landau levels with ordinal number larger than $|m|$.

The particle density $\rho(\vec{r}) = \rho(\vec{r}, \vec{r}, \mu)$ is then given by

$$\rho(\vec{r}) = \frac{e^{-r^2/a^2}}{\pi a^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} |C_{n,m}|^2 \left(\frac{r}{a}\right)^{2|m|} \left[L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{a^2}\right) \right]^2 \times \Theta(\mu - E_{n,m}) \quad (7)$$

and obeys the normalization condition $\int \rho(\vec{r}) d\vec{r} = N$, which determines the Fermi energy μ as a function of N .

The particle current density in the rotating frame is given by

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2M^*i} [(\vec{\nabla}_{\vec{r}} - \vec{\nabla}_{\vec{r}'})\rho(\vec{r}, \vec{r}', \mu)]_{\vec{r}'=\vec{r}} - (\vec{\Omega} \times \vec{r})\rho(\vec{r}), \quad (8)$$

which represents the deviation of the actual current distribution from the rigid flow and reflects quantum-mechanical effects present in the current. The full current in the laboratory frame is simply given by $\vec{j}^{\text{lab}} = \vec{j} + \rho\vec{\Omega} \times \vec{r}$. Upon substitution of Eq. (4) we get

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2M^*i} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} [\varphi_{n,m}^*(\vec{r})\vec{\nabla}\varphi_{n,m}(\vec{r}) - \varphi_{n,m}(\vec{r})\vec{\nabla}\varphi_{n,m}^*(\vec{r})] \Theta(\mu - E_{n,m}) \right\} - (\vec{\Omega} \times \vec{r})\rho(\vec{r}). \quad (9)$$

Making use of the expressions for $\varphi_{n,m}(\vec{r})$ and recalling that $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}$ we find that the current is purely azimuthal, $\vec{j}(\vec{r}) = j(\vec{r})\vec{e}_\phi$, where \vec{e}_ϕ is the unit vector in the azimuthal direction, and $j(\vec{r})$ is given by the formula

$$j(\vec{r}) = \frac{\omega_0 e^{-r^2/a^2}}{\pi a} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} m |C_{n,m}|^2 \left(\frac{r}{a}\right)^{2|m|-1} \times \left[L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{a^2}\right) \right]^2 \Theta(\mu - E_{n,m}) \right\} - \Omega r \rho(\vec{r}). \quad (10)$$

The explicit formulas (7) and (10) can be evaluated numerically with a high degree of accuracy. As an example, in Fig. 1 the density and current profiles obtained in this manner have been plotted in units of $1/(\pi a^2)$ and $\omega_0/(2\pi a)$, respectively, for $\Omega/\omega_0 = 0.995$ and $N = 2000$ fermions.

With the formation of incompressible and compressible regions at very fast rotation, the current flow exhibits a distinctive pattern of reversals. As can clearly be seen in Fig. 1, the current density flows in opposite directions in these two types of regions. In particular, it can be shown [15,24] that the current in the incompressible regions in the regime of fast rotation has the form

$$\vec{j}_{\text{bulk}}(\vec{r}) = \frac{1}{2M^*\omega_0} (\hat{z} \times \vec{\nabla} V_{\text{eff}})\rho(\vec{r}), \quad (11)$$

which is proportional to the gradient of the effective confinement potential. This has the structure of a quantum Hall current. Whereas in the compressible regions we have

$$\vec{j}_{\text{edge}}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2M^*} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) [\hat{z} \times \vec{\nabla} \rho_n(\vec{r})], \quad (12)$$

with $\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n$ and $\rho_n(\vec{r}) \simeq \frac{1}{\pi \ell^2} \Theta[\mu - V_{\text{eff}}(\vec{r}) - (2n+1)\hbar\omega_0]$, which is proportional to the gradient of the particle

density and therefore has the structure of an edge current. The above results, Eqs. (11) and (12), were derived for the case of electrons in a strong magnetic field from a careful expansion of the Green's function in the limit of a slowly varying potential (see Eq. 2.25 of Ref. [15]). They can be similarly derived in the present case from the Bloch propagator formalism of Ref. [24].

The inversions in the direction of circulation of the *intrinsic* current density in the rotating frame are striking because they occur even as the total integrated current in the rotating reference frame is different from zero. Indeed, from Eq. (1) one can easily see that the integrated current

$$\int_0^{\infty} \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{e}_\phi dr = M(0), \quad (13)$$

where $M(0)$ is the pseudomagnetization density at the center of the trap. A naïve expectation would have been that $j(r) \equiv \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{e}_\phi$ has everywhere the same sign equal to the sign of $M(0)$, but we see that this is not the case. The observed inversions in the sign of the current are related, via Eq. (1), to the oscillatory behavior of the pseudomagnetization as a function of r . The physics of these oscillations is essentially the same as the physics of the de Haas-van Alphen effect [17] for electronic systems in a magnetic field. In the limit in which the density is slowly varying (on the scale of the pseudomagnetic length ℓ) the pseudomagnetization is simply a function of the local density, and this function has the same form that it would have in an *infinite* uniform gas at the same density in the presence of the magnetic field $B = 2M^*\Omega/e$. Thus we have $j(r) = -(\partial M/\partial \rho)_B \rho'(r)$ where the partial derivative is taken at constant B . Now, according to standard thermodynamic relations, the derivative of the magnetization of a uniform gas (in the thermodynamic limit) with respect to density at constant magnetic field equals the derivative of the density with respect to magnetic field at constant chemical potential. Thus we have

$$j(r) \simeq -\frac{\partial \rho}{\partial B} \Big|_{\mu} \rho'(r). \quad (14)$$

The thermodynamic derivative $(\partial \rho/\partial B)_\mu$ is the same that appears in the Streda formula [25] for the quantum Hall conductance: this quantity is positive when μ lies in a gap between Landau levels (i.e., in the incompressible regions) because the increasing B increases the degeneracy of each Landau level. But it becomes negative whenever μ crosses a Landau level (compressible region) for, in this case, the density must decrease to compensate the upward shift of the Landau level energy with increasing B . Hence we see that an oscillatory behavior of ρ as a function of B is responsible for the oscillations of M as a function of ρ , hence for the reversals in the direction of flow of the current, which we observe in Fig. 1. Although the above arguments are suggestive, we emphasize that our calculations are in no way dependent on local approximations or other heuristic arguments: they are exact results following from the solution of the Schrödinger equation for noninteracting particles. We believe that rapidly rotating gases of fermionic atoms offer an ideal opportunity to verify, for the first time, the striking spatial distribution of persistent quantum currents.

G.V. acknowledges support from NSF Grant No. DMR-1104788.

- [1] D. A. Butts and D. S. Rokhsar, *Nature (London)* **397**, 327 (1999).
- [2] F. Dalfovo *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [3] B. Mottelson, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2695 (1999); G. F. Bertsch and T. Papenbrock, *ibid.* **83**, 5412 (1999); A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis, B. Mottelson, and S. M. Reimann, *ibid.* **86**, 945 (2001).
- [4] N. R. Cooper and N. K. Wilkin, *Phys. Rev. B* **60**, R16279 (1999); N. R. Cooper, N. K. Wilkin, and J. M. F. Gunn, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120405 (2001); N. R. Cooper, *ibid.* **92**, 220405 (2004).
- [5] A. L. Fetter, *Phys. Rev. A* **64**, 063608 (2001); **75**, 013620 (2007); *Rev. Mod. Phys.* **81**, 647 (2009).
- [6] J. Sinova, C. B. Hanna, and A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 030403 (2002); **90**, 120401 (2003).
- [7] N. R. Cooper, *Adv. Phys.* **57**, 539 (2008).
- [8] T.-L. Ho and C. V. Ciobanu, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4648 (2000).
- [9] N. Regnault and Th. Jolicoeur, *Phys. Rev. B* **70**, 241307(R) (2004).
- [10] Z. Akdeniz, P. Vignolo, and M. P. Tosi, *Phys. B (Amsterdam, Neth.)* **365**, 208 (2005).
- [11] J. Dalibard, F. Gerbier, G. Juzeliūnas, and P. Öhberg, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1523 (2011).
- [12] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics V, Statistical Physics Part I* (Pergamon Press, Oxford, 1993), Sec. 26.
- [13] Y. Avishai and M. Kohmoto, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 279 (1993).
- [14] D. B. Chklovskii, B. I. Shklovskii, and L. I. Glazman, *Phys. Rev. B* **46**, 4026 (1992); **46**, 15606 (1992).
- [15] M. R. Geller and G. Vignale, *Phys. Rev. B* **50**, 11714 (1994).
- [16] Ch. Grenier, C. Kollath, and A. Georges, *Phys. Rev. A* **87**, 033603 (2013).
- [17] W. J. de Haas and P. M. van Alphen, *Leiden. Comm.* **208d**, 212a (1930); **208**, 220d (1932).
- [18] M. Büttiker, Y. Imry, and R. Landauer, *Phys. Lett. A* **96**, 365 (1983).
- [19] L. P. Lévy, G. Dolan, J. Dunsmuir, and H. Bouchiat, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2074 (1990).
- [20] V. Chandrasekhar, R. A. Webb, M. J. Brady, M. B. Ketchen, W. J. Gallagher, and A. Kleinsasser, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3578 (1991).
- [21] D. Mailly, C. Chapelier, and A. Benoit, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2020 (1993).
- [22] G. Vignale and B. Mashhoon, *Phys. Lett. A* **197**, 444 (1995).
- [23] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 5th ed. (Academic Press, New York, 1994).
- [24] S. Medjedel, Ph.D. thesis, Université Ferhat Abbas Sétif, 2014.
- [25] P. Streda, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **15**, L717 (1982).

ملخص:

نقدم في هذه الأطروحة دراسة نظرية في حقل الغازات الكوانتية. النظام الفيزيائي المدروس عبارة عن غاز من الفرميونات بدون شحنة كهربائية تحت عتبة الانحلال الكوانتي خاضع لكمون هزاز توافقي متمائل المناحي ويدور بسرعة زاوية عالية. قمنا بدراسة كثافات كل من الجسيمات و تيار المادة وأيضا شبه المغناطيسية. بيئاً أنه في حالة سرعات الدوران الكبيرة جدا فإن كثافة الجسيمات تعكس بنية خاصة عبارة عن تتالي من المناطق التي تكون فيها الكثافة ثابتة مفصولة فيما بينها بمناطق أخرى تكون فيها الكثافة متغيرة (متناقصة). كما ناقشنا تأثير هذه البنية على كثافة توزيع تيار المادة فوجدنا أن التيار يتدفق بصورة متعكسة من منطقة إلى أخرى و أثبتنا انه في الحقيقة مكون من نوعين من التيارات وانه لا يوجد في كل منطقة إلا نوع واحد من هذه التيارات. إن هذا التقلب في اتجاهات تيار المادة يمكن أن يُربط باهتزازات شبه المغناطيسية تماما كما يحدث في نظام مكون من الكترونات خاضعة إلى حقل مغناطيسي شديد جدا. قمنا أيضا بحساب التيار الكلي لهذه الجملة فوجدنا أنه ليس إلا شبه المغناطيسية عند مركز الكمون كما أثبتنا أن هذا التيار يكون مكتم في حالة سرعات الدوران الكبيرة.

في سياق آخر مماثل، قمنا بتوسيع هذه الدراسة لتشمل حالة خضوع النظام الفيزيائي لكمون هزاز توافقي لا متمائل المناحي. قمنا بحساب كثافة الجسيمات في فضاء فورييه. ولغرض استكشاف التوزيع الفضائي لغاز كوانتي اقترحنا استخدام هذه النتيجة في دراسة التشتت المرن للضوء على سحابة مكونة من غاز فارمي مُنجل.

الكلمات المفتاحية: غاز فارمي، الدوران السريع، الكمون التوافقي، كثافة تيار المادة، انقلابات التيار، التيار الكلي. كثافة الجسيمات في فضاء فورييه.

Abstract:

We present in this thesis a Theoretical study in the field of quantum gases. The system we consider is a two dimensional gas of an ultra-cold neutral fermions confined by an isotropic harmonic potential and set in a very fast rotation. We study the distribution of the particle density, the matter current density and the pseudo-magnetization, we show that in the regime of a fast rotation, the particle density exhibits a structure of a series of regions of constant density separated by regions where the density is decreasing. We discuss the influence of this structure on the distribution of the mass currents and it is found that these currents flow in opposed directions in going from an incompressible region to the neighboring and that this current is composed of a two types of currents. We also show that in this limit of fast rotation, there exist only one type of current in each region. The inversion of the signs of the current is related to the oscillations of the pseudo-magnetization of the system in a similar way as exits in the physics of the electrons subjected to ultra-strong magnetic fields. The integrated current of the system is calculated and it is found that it represents the pseudo-magnetization at the center of the trap. We also show that this integrated current is quantized.

In the same context, we extend the treatment to the case of an anisotropic harmonic confining potential, we calculated the corresponding density profile in Fourier space. In order to probe the spatial distribution of the quantum gas, we propose to apply the result of this density profile in Fourier space in the study of elastic light scattering by the an ultra-cold atomic gas

Key-words: Fermi gas, Fast rotation, harmonic trap, matter current density, current reversals, integrated current, density profile in Fourier space.

Résumé :

Nous présentons dans cette thèse une étude théorique dans le domaine des gaz quantiques. Le système que nous considérons est à deux dimensions, formé d'un gaz d'atomes de fermions ultra-froid électriquement neutres confiné par un potentiel harmonique isotrope et mis en rotation très rapide. Nous étudions les distributions de la densité de particules, de courant de matière et de pseudo-magnétisation comme réponse du système à cette rotation. Nous montrons que dans le régime de rotation ultra rapide, la densité de particules présente une structure sous forme d'une suite des régions de densité constante séparées par des régions où la densité est décroissante, nous avons discuté l'influence de cette structure sur la distribution des courants de masse et on a trouvé que ces courants circulent dans des directions opposées en passant d'une région à une autre adjacente. Nous montrons que ce courant est composé de deux types de courants. Nous avons montré aussi que dans ce régime, il n'existe qu'un seul type de courant dans chacune des régions. Le renversement des signes du courant est lié aux oscillations de la pseudo-magnétisation du système similaire à la physique des électrons en présence d'un champ magnétique très intense. Le courant total du système a été calculé et on a trouvé qu'il représente la pseudo-magnétisation au centre du piège. Nous avons montré aussi que ce courant intégré est quantifié.

Dans le même contexte, nous avons généralisé le formalisme au cas où le potentiel confinant le système devient anisotrope, et on a calculé le profil de densité dans l'espace de Fourier et proposé d'appliquer ce résultat pour étudier la diffusion élastique de la lumière par un nuage atomique ultra froid dans le but de sonder la distribution spatiale du gaz.

Mots-clés : gaz de Fermi, rotation rapide, piège harmonique, densité de courant de matière, renversements du courant, Courant intégré, densité dans l'espace de Fourier.