République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Sétif 1

THESE

Présentée à la faculté des sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématiques Appliquées

Par

Mme BOUDIAF AMEL

THEME

Analyse asymptotique de quelques problèmes en thermoélasticité et en thermoviscoélasticité

Soutenue publiquement le : 18 /05 /2016, devant le jury composé de :

Prof. N. HEMICI	Université Ferhat Abbas de Sétif 1	Président
Prof. S. DRABLA	Université Ferhat Abbas de Sétif 1	Rapporteur
Prof. N. KECHKAR	Université Mentouri- Constantine	Examinateur
Prof. B. BENYATTOU	Université Mohamed Boudiaf M'sila	Examinateur
Prof. S. A. MESSAOUDI	Université KFUPM de Saudi Arabia	Invité

Remerciements

Je tiens tout d’abord à remercier ***ALLAH*** le tout puissant et miséricordieux, qui m’a donné la force et la patience pour accomplir ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse : Monsieur ***Drabla Salah***, pour sa patience, ses encouragements, sa direction avisé et exigeant de ce travail et pour l’avoir suivie avec beaucoup d’enthousiasme et d’efficacité. Je lui suis également très reconnaissant pour sa disponibilité, l’aide et le temps qu’il a consacré pour diriger ce travail. Je vous remercie très sincèrement.

Je remercie vivement Professeur ***Hemici Nacerdine,*** pour l’honneur qu’il me fait en présidant le jury de cette thèse, ainsi pour ses encouragements.

Un très grand merci aux Monsieurs ***khechkar***, Professeur à l’université Mentouri- Constantine, ***Benyattou Benabderrahmane***, Professeur à l’université Mohamed Boudiaf de M’sila, de m’avoir fait l’honneur d’être les rapporteurs de cette thèse.

Mes sincères remerciements vont à Monsieur ***Messaoudi Salim***, Professeur à l’université KFUPM de Saudi Arabia, d’accepter l’invitation pour participer à ma soutenance, ainsi qui n’a épargné aucun effort pour m’aider. Merci pour tout Monsieur ***Messaoudi.***
Je voudrais également remerciée ma collègue ***Boulanouar Fairouz*** pour son aide et leur soutien.

Je tiens aussi à remercier tous mes collègues à l’université de Sétif -1 et mes collègues à l’université de M’sila.

Je réserve une pensée toute particulière à mon mari Mr Saoudi Amer qui a toujours été à mes cotés pour m’encourager et me soutenir, à mes enfants Amani et Maher, j’adresse mes remerciements les plus affectueux à mon père Ahmed, à toute ma famille et tous mes amis. Enfin je n’oublie pas de remercier tous ceux qui m’ont aidé durant mes années d’étude.

Table des matières

Introduction

Thermoélasticité et thermoviscoélasticité

Thermoélasticité

La thermoélasticité est une branche de la mécanique appliquée. Comme son nom l'indique, elle s'intéresse aux effets de la chaleur sur les contraintes et déformations dans les corps solides élastiques et inversement. Ainsi, c'est une extension de la théorie conventionnelle d'élasticité isotherme. Cette extension prend en compte les processus où les contraintes et les déformations proviennent non seulement des forces mécaniques mais également des variations de la température.

II est connu expérimentalement que la déformation d'un corps produit un changement de sa température. En d'autres termes, la déformation agit comme une source ou un puits de chaleur. II suffit de citer l'exemple du test de traction rapide d'une éprouvette de caoutchouc. Au moment de la rupture, l'échantillon est si chaud qu'on ne peut pas le toucher.

La thermoélasticité qui contient la théorie générale de la conduction de chaleur et la théorie générale des contraintes thermiques décrit la distribution de température produite par la déformation et enfin elle contient une description du phénomène de dissipation thermoélastique. En dépit de sa complexité mathématique, la thermoélasticité nous permet d'examiner plus profondément que précédemment le mécanisme de la déformation et les procédés thermiques se produisant dans les corps élastiques. La thermoélasticité était l'un des premiers domaines en théorie des champs couplés qui a attiré l'attention des mathématiciens. L'intérêt pour les modèles caractérisant le couplage thermomécanique a été motivé par de nouveaux problèmes pratiques importants, y compris ceux qui sont à la fine pointe des innovations technologiques actuelles.

Thermoviscoélasticité

Dans le cadre thermodynamique décrit au paragraphe précédent, on peut citer les modèles de thermodynamique Kelvin-Voigt et de Maxwell. Ces modèles s'appliquent principalement au comportement viscoélastique des polymères.

La viscoélasticité sert à décrire le comportement de matériaux réversibles, mais sensibles à la vitesse de déformation. On peut citer par exemple les polymères et dans une moindre mesure, le béton et le bois, comme matériaux à comportement viscoélastique. Une des propriétés essentielles définissant la viscoélasticité est la relaxation qui est la propriété que possèdent certains systèmes, lorsqu'ils sont sollicités, de réagir avec un certain retard, globalement défini comme le temps de relaxation. La sollicitation pouvant être une contrainte ou une déformation, le processus correspondant est appelé respectivement relaxation de déformation (fluage/recouvrance) ou relaxation de contrainte. La durée de ces processus correspond au temps de relaxation. Les temps réels de relaxation peuvent varier sur plusieurs ordres de grandeurs. Ainsi, quand un polymère est soumis à une sollicitation de déformation, sa première réponse est le développement d'une contrainte locale relativement élevée, qui a tendance à diminuer au cours du temps. C'est le phénomène de relaxation de contrainte. Les longues chaînes sous forme de pelotes retrouvent, en fonction du temps, une position d'équilibre par l'intermédiaire de mouvements plus au moins rapides. A contrario, il existe aussi, par comparaison, une relaxation de déformation. Dans ce cas, la contrainte appliquée engendre une déformation dépendante du temps, c'est le fluage. La suppression de la contrainte induit à son tour une évolution retardée de la déformation qu'on appelle la recouvrance.

Après plus d'un siècle de recherches sur la thermoélasticité et la thermoviscoélasticité, de nombreux problèmes restent difficiles à résoudre analytiquement et de ce fait la simulation numérique sera l'ultime moyen d'y parvenir. Cette thèse représente une contribution d'étude de la stabilisation de quelques problèmes en thermoélasticité et en thermoviscoélasticité. La stabilisation consiste à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation. Plus précisément, le problème de stabilisation auquel on s'intéresse revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note $E(t)$ (c'est la norme des solutions dans l'espace d'état). Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier. Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e.

$$E(t) \to 0, \quad \text{lorsque} \quad t \to +\infty,$$

cette stabilisation est appelée stabilisation forte.

Pour le second degré, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle :

$$E(t) \leq Ce^{-\delta t}, \quad \forall t > 0,$$

où C et δ sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Le troisième degré concerne certaines situations intermédiaires dans lesquelles la décroissance des solutions est de type exponentiel, par exemple :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^\alpha}, \ \forall t > 0,$$

Dans ce travail, nous traitons la décroissance générale de l'énergie où la décroissance exponentielle ou polynomiale est des cas particuliers.

Avant d'introduire la description générale de nos résultats on va donner quelques types d'amortissement utilisés dans notre travail.

• Amortissement produit par la viscosité

Il a plusieurs formes comme par exemple l'amortissement produit par le modèle de Boltzmann. Si on met par exemple le matériau élastique dans un fluide viscoélastique, ce fluide fournit un amortissement naturel. Du point de vue mathématique, ces effets d'amortissement sont modélisés par un terme sous forme d'intégral (systèmes étudiés dans le premier et deuxième chapitre).

• Amortissement par la friction

Il s'exprime en fonction des vitesses u_t, θ_t (système étudié dans le dernier chapitre).

Description et résultats principaux

Cette thèse est consacrée à l'étude du comportement asymptotique de certains systèmes thermoélastiques et thermoviscoélastiques. On généralise et on améliore divers résultats qui seront mentionnés dans cette thèse. Nous commençons par une introduction où nous présentons l'historique des systèmes thermoélastiques et thermoviscoélastiques. De plus, nous rappelons certaines notions préliminaires qui seront utilisées par la suite. Notre étude a été divisée en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on considère un système thermoélastique avec source non linéaire de type polynomial où l'amortissement est de type mémoire agissant sur une partie de la frontière. Ce système est le suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu \triangle u - (\mu + \lambda) \nabla (divu) + \beta \nabla \theta = |u|^{p-2} u, & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\ c\theta_t - k \triangle \theta + \beta divu_t = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\ u(x,t) = -\int_0^t g(t-s) \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu + \lambda)(divu) \nu \right)(s)\, ds, & \text{sur } \Gamma_1 \times [0,\infty) \\ u(.,0) = u_0,\ u_t(.,0) = u_1,\ \theta(.,0) = \theta_0, & x \in \Omega \\ u_0 = 0,\ x \in \Gamma_1,\ \theta = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \geq 0 \\ u = 0, & x \in \Gamma_0,\ t \geq 0, \end{cases}$$

où β, c, k sont des constantes strictement positives, μ, $\lambda > 0$ sont des coefficients de Lamé, Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\partial\Omega$ subdivisée en deux parties mesurables Γ_0 et Γ_1, ν est la normale extérieure unitaire à $\partial\Omega$, $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^n$, avec $2 < p \leq 2n/(n-2)$, $g(t)$ est une fonction de relaxation considérée positive et différentiable. Sous certaines hypothèses sur les données initiales, on montre la décroissance générale de l'énergie de la solution. Ce travail peut être considéré comme une extension de [21] où le terme source est supposé nul.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un problème thermoviscoélastique avec terme source non linéaire de type polynomial et des conditions aux limites de type mémoire dans un domaine Ω ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ de frontière régulière Γ. Ce système s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} u_{tt} - k_0 \triangle u(t) - (\mu+\lambda)\nabla(divu) + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)\,ds & \\ +bu_t + \beta\nabla\theta = u|u|^{p-2}, & \text{dans } \Omega \times (0,\infty) \\ c\theta_t - \triangle\theta + \beta divu_t = 0, & \text{dans } \Omega \times (0,\infty) \\ k_0\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu+\lambda)\,divu.\nu - \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s))\,\nu ds + h(u_t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0,\ u_t(x,0) = u_1,\ \theta(x,0) = \theta_0, & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times [0,\infty) \\ \theta = 0, & \text{sur } \Gamma \times [0,\infty) \end{cases}$$

où k_0, b, β, c, sont des constantes positives, h est une fonction satisfaisant certaines conditions. Nous verrons que les hypothèses qui ont été proposées dans [30] sur les deux fonctions g et h ont été suffisantes dans notre cas. En se basant sur cette hypothèse nous allons démontrer la décroissance uniforme de l'énergie; cette décroissance n'est pas nécessairement exponentielle ou polynômiale.

Dans le dernier chapitre, nous considérons le système précédent en introduisant un second terme d'amortissement interne sous forme $\alpha(t)\, w(u_t)$. Le système s'écrit

$$\begin{cases} u_{tt} - k_0 \triangle u(t) - (\mu+\lambda) \nabla (divu) + \int_0^t g(t-s) \Delta u(s)\, ds & \\ +\alpha(t)\, w(u_t) + \beta \nabla \theta = u\, |u|^{p-2}, & \text{dans } \Omega \times (0,\infty) \\ c\theta_t - \triangle \theta + \beta div u_t = 0, & \text{dans } \Omega \times (0,\infty) \\ k_0 \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu+\lambda)\, divu.\nu - \int_0^t g(t-s) (\nabla u(s))\, \nu ds + h(u_t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0,\ u_t(x,0) = u_1,\ \theta(x,0) = \theta_0, & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times [0,\infty) \\ \theta = 0. & \text{sur } \Gamma \times [0,\infty) \end{cases}$$

On obtient un résultat de décroissance en fonction de g et α pour lesquels les deux taux de décroissance exponentielle et polynômiale ne sont que des cas particuliers. Plus précisément, nous allons obtenir une relation entre le taux de décroissance de l'énergie (lorsque t tend vers l'infini) et les fonctions g et α. On trouve un résultat de décroissance générale et explicite de l'énergie. Ce résultat a fait l'objet d'une publication (voir [6]).

Pour obtenir les résultats souhaités, on se base principalement sur la construction des fonctionnelles de Lyapunov appropriées qui sont équivalentes à l'énergie des solutions de chaque problème. Aussi, on utilise la méthode du puits potentiel, quelques propriétés des fonctions convexes, l'inégalité de Poincaré, l'inégalité de Jensen, des hypothèses avec des modifications nécessaires et convenables pour chaque problème.

Aperçu historique

Problèmes thermoélastiques

Au cours des dernières décennies, les systèmes d'équations thermoélastiques ont été étudiés par de nombreux auteurs et de nombreux résultats intéressants ont été obtenus. Ces résultats portent principalement sur l'étude de l'existence locale et globale, comportement asymptotique et explosion en temps fini de la solution de ces systèmes dans le cas unidimensionnels et multidimensionnels.

On commence par le travail pionnier de Slemrod [31] où il a considéré un problème thermoélastique unidimensionnel non-linéaire et a établi l'existence globale et la décroissance de la solution classique, pour des données initiales petites, où la frontière est sans traction et à température constante ou rigidement maintenu et isolée thermiquement (c'est-à-dire des conditions aux limites de type Neumann-Dirichlet ou de type Dirichlet-Neumann).

Pour des conditions aux limites de type Dirichlet-Dirichlet, le problème d'existence globale des solutions régulières est resté en suspens pendant une longue période. En 1991, Racke et Shibata [28] ont utilisé les méthodes d'analyse spectrale et ont prouvé la décroissance polynômiale de la solution dans le cas linéaire et non-linéaire. Ils ont montré aussi que le taux de décroissance dépend de la régularité des données initiales et ont prouvé que le résultat d'existence globale dépend de la petitesse des données initiales dans l'espace $H^m(0,L)$, où m est un grand nombre.

Dans [23], Muñoz Rivera a prouvé la décroissance exponentielle des solutions des problèmes aux limites de type Dirichlet-Dirichlet en thermoélasticité linéaire en utilisant la méthode d'énergie d'une manière unique et originale. Plus tard, Racke, Shibata et Zheng [29] ont étendu les résultats de [23] aux systèmes thermoélastiques non-linéaires et ont amélioré le résultat de Racke et Shibata [28] pour des données initiales (u_0, u_1) dans $H^3(0,L) \times H^2(0,L)$. Rivera et Barreto [24] ont amélioré les résultats de [28], ils ont montré qu'il est possible d'utiliser la méthode d'énergie uniquement pour des données initiales (u_0, u_1) dans $H^2(0,L) \times H^1(0,L)$.

Le problème de Cauchy où le corps thermoélastique occupe la ligne réelle toute entière a été traité par Zheng et Shen [35] et Hrusa et Tarabek [14] qui ont montré l'existence globale dans le temps. En particulier, Hrusa et Tarabek [14] ont combiné certaines estimations de Slemrod [31] qui sont restées valables pour les intervalles non bornés où l'inégalité de Poincaré n'est plus utilisable. Avec quelques estimations supplémentaires, ces auteurs ont obtenue l'estimation de l'énergie avec des données assez petites.

Pour le cas multidimensionnel, la situation est différente que celle dans le cas unidimensionnel. Dans le cas multidimensionnel, il a été prouvé que la dissipation donnée par la variation de température n'est pas assez forte pour obtenir un taux de décroissance uniforme des solutions. Cela a été confirmé par le travail pionnier de Dafermos [13], dans lequel il a démontré un résultat de stabilité asymptotique. Il a également indiqué qu'il n'y a pas de décroissance de solution si le domaine est une boule. Plus tard, Lebeau et Zuazua [17] ont amélioré le travail de [13], où les auteurs ont prouvé que le taux de décroissance n'était jamais uniforme lorsque le domaine est convexe. Ainsi, des mécanismes d'amortissement supplémentaires sont nécessaires pour obtenir la décroissance uniforme.
En particulier, Jian, Muñoz Rivera et Racke [15] ont montré la décroissance uniforme de la solution à symétrie radiale dans un espace de deux ou trois dimensions.
En outre, Pereira et Menzala [27] ont introduit un amortissement linéaire interne et ont établi également la décroissance uniforme de la solution. Un résultat similaire a été obtenu par Liu [18] pour un système avec un amortissement frontière linéaire dépendant de la vitesse agissant sur le composant élastique du système et par Liu et Zuazua [19] au moyen d'un amortissement frontière non linéaire.
Rivera et Racke [25] ont considéré un modèle magnéto-thermoélastique au moyen d'un amortissement de type mémoire agissant sur la frontière. Pour g et k, fonction de relaxation et le noyau résolvant de $(-g'/g(0))$ respectivement, ils ont montré que l'énergie associée à la solution décroît de façon exponentielle (polynômiale) si k et $-k'$ décroissent de façon exponentielle (polynômiale). Messaoudi et Al-Shehri [21] ont

considéré le système suivant

$$\begin{cases} u_{tt}-\mu\triangle u-(\mu+\lambda)\nabla(divu)+\beta\nabla\theta=0, & \text{dans } \Omega\times(0,\infty)\\ c\theta_t-k\triangle\theta+\beta divu_t=0, & \text{dans } \ \Omega\times(0,\infty)\\ u(x,0)=u_0,\ u_t(x,0)=u_1,\ \theta(x,0)=\theta_0, & x\in\Omega\\ u(x,t)=-\int_0^t g(t-s)\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\nu}+(\mu+\lambda)(divu)\nu\right)(s)\,ds, & \text{sur } \Gamma_1\times[0,\infty)\\ u=0, & \text{sur } \Gamma_0\times[0,\infty)\\ \theta=0, & \text{sur } \Gamma\times[0,\infty), \end{cases}$$

où le corps Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, avec une frontière $\Gamma=\Gamma_0\cup\Gamma_1$, $u=u(x,t)\in\mathbb{R}^n$, μ, λ, β, c, k sont des constantes positives, ils ont trouvé un résultat de décroissance générale si la fonction k décroît d'une manière générale. Récemment, Mustafa [26] a traité le système précédent pour k vérifie l'hypothèse suivante

$$\begin{aligned} k(0) &> 0,\ \lim_{t\to\infty}k(t)=0,\ k'(t)\leq 0\\ k''(t) &\geq H(-k'(t)),\ \forall t>0, \end{aligned}$$

telle que H est une fonction positive, linéaire ou strictement croissante, strictement convexe de classe C^2 sur $(0,r]$, $r<1$, et $H(0)=0$. Il a prouvé pour $u_0=0$ sur Γ_1, une décroissance explicite de l'énergie où la décroissance exponentielle et la décroissance polynômiale sont seulement des cas particuliers.

Boulanouar et Drabla [7] ont étendu le résultat de Mustafa [26], pour le cas où $u_0\neq 0$ avec quelques modifications et hypothèses additionnelles.

Problèmes thermoviscoélastiques

Concernant les systèmes en thermoviscoélasticité, on peut citer le travail de Weijiu Liu [32] où il a considéré le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu \triangle u - (\mu+\lambda)\nabla(divu) + \alpha\nabla\theta + \mu g * \Delta u & \\ +(\lambda+\mu)\, g * \nabla div\ u = 0, & \text{dans } \Omega\times(0,\infty) \\ \theta_t - \triangle\theta + \beta div\ u_t = 0, & \text{dans } \Omega\times(0,\infty) \\ u(x,t) = \theta(x,t) = 0, & \text{sur } \Gamma\times[0,\infty) \\ u(x,0) = u_0,\ u_t(x,0) = u_1,\ \theta(x,0) = \theta_0, & x\in\Omega \\ u(x,0) - u(x,-s) = w_0(x,s), & \text{dans } \Omega\times[0,\infty), \end{cases}$$

où le corps Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, de frontière régulière $\partial\Gamma$, μ, $\lambda > 0$ sont des coefficients de Lamé, α, β sont des constantes strictement positives, $g(t)$ est une fonction de relaxation vérifie les hypothèses suivants :

(H_1) $g \in C^1[0,\infty) \cap L^1(0,\infty)$,

(H_2) $g(t) \geq 0$ et $g'(t) \leq 0$, $t > 0$,

(H_3) $k = 1 - \int_0^\infty g(t)\,dt > 0$.

Sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3), l'auteur a prouvé la décroissance exponentielle de l'énergie de la solution.

Keddi [16] a considéré le système de type thermoviscoélastique avec une source suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu \triangle u - (\mu+\lambda)\nabla(divu) + \beta\nabla\theta & \\ +\int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds = f(x,t), & \text{dans } \Omega\times(0,\infty) \\ c\theta_t - k\triangle\theta + \beta divu_t = h(x,t), & \text{dans } \Omega\times(0,\infty) \\ u(x,0) = u_0,\ u_t(x,0) = u_1,\ \theta(x,0) = \theta_0, & x\in\Omega \\ u(x,t) = \theta(x,t) = 0, & x\in\partial\Gamma, \end{cases}$$

Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, de frontière régulière $\partial\Gamma$, f représente une source externe et h est une source externe de la chaleur, il a prouvé la décroissance générale de l'énergie.

Yuming et Zhiyong [33] ont étendu le résultat de [22] pour le système en thermo-viscoélasticité suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + \int_0^t g(t-s) \triangle u(s)\,ds + \nabla\vartheta = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty) \\ \vartheta_{tt} - \triangle\vartheta_t - \triangle\vartheta + div u_{tt} = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} - g * \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + H(u_t) = 0, & (x,t) \in \Gamma_1 \times (0,+\infty) \\ u = 0, & (x,t) \in \Gamma_0 \times (0,+\infty) \\ \vartheta = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,+\infty), \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \; u_t(x,0) = u_1(x), \; \vartheta(x,0) = \vartheta_0(x), \\ \vartheta_t(x,0) = \vartheta_1(x), \;\; x \in \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Pour rappel quelques problèmes en élasticité isotherme ont été considérés par de nombreux auteurs ([4], [5], [10], [11], [20]). En particulier, Shun et Hsueh [30] ont considéré le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - k_0 \triangle u(t) + \int_0^t g(t-s)\, div(a(x)\nabla u(s))\,ds & \\ +b(x)\,u_t = |u|^{p-2}u, & \text{dans } \Omega \times (0,\infty) \\ k_0 \dfrac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-s)(a(x)\nabla u(s)).\nu ds + h(u_t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ u(0) = u_0, \;\; u_t(0) = u_1, & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0,\infty), \end{cases}$$

Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, de frontière régulière $\partial\Gamma$, $g(t)$ est une fonction de relaxation vérifie les hypothèses suivants : (G_1) $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ est une fonction de classe C^1, bornée et vérifie

$$g(0) > 0, \;\; k_0 - \int_0^\infty g(s)\,ds = l > 0.$$

(G_2) Il existe une fonction ζ positive et décroissante telle que

$$g'(t) \leq -\zeta(t)\,g(t), \;\; \forall t \geq 0, \quad \int_0^\infty \zeta(s)\,ds = \infty.$$

(G_3) $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ est une fonction croissante telle que

$$h(s)\,s\geq\alpha\left|s\right|^{2},\ \ \forall s\in\mathbb{R},$$

$$\left|h(s)\right|\leq\gamma\left|s\right|,\ \ \forall s\in\mathbb{R}.$$

Sous les hypothèses $(G1)-(G3)$ avec certaines conditions sur les données initiales, l'auteur a prouvé une décroissance explicite de l'énergie où la décroissance exponentielle et la décroissance polynômiale sont seulement des cas particuliers.

Cavalcanti et al [9] ont considéré le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt}-\triangle u+\int_0^t g(t-s)\triangle u(s)\,ds+a(x)\,u_t & \\ +\left|u\right|^{\gamma}u=0, & \text{dans } \Omega\times(0,\infty) \\ u(x,0)=u_0(x)\,,\ u_t(x,0)=u_t(x)\,, & x\in\Omega \\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t\geq0, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ $(n\geq1)$ de frontière régulière $\partial\Omega$, $a:\Omega\rightarrow\mathbb{R}^+$. Il a établi la décroissance exponentielle de la solution où les fonctions g et a satisfaisant les hypothèses suivantes :

$$a(x)\geq a_0>0 \text{ sur } \omega\subset\Omega,$$

$$-\xi_1 g(t)\leq g'(t)\leq-\xi_2 g(t)\,,\ \ t\geq0.$$

Notations et notions préliminaires

On va présenter les notations et les inégalités, ainsi que d'autres résultats d'analyse fonctionnelle qu'on utilise tout au long de ce travail.

Pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ régulière, on note :

$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|$.

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$: Le gradient de u.

$\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$: Laplacien de u.

Pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ régulière avec $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, on note :

$\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, ..., \Delta u_n)$.

$div\ u = \nabla . u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$: La divergence de u.

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, de frontière $\partial\Omega$. On note :

$C(\Omega)$: Ensemble des fonctions continues dans Ω.

$C^k(\Omega)$: Ensemble des fonctions de classe k dans Ω.

$C^\infty(\Omega)$: Ensemble des fonctions indéfiniment différentiables.

$D(\Omega)$: Ensemble des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact.

Définitions et propriétés élémentaires

Espace de Lebesgue $\mathbb{L}^p(\Omega)$

Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, Ω un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ au sens de Lebesgue, on définit

$$\mathbb{L}^p(\Omega) = \left\{ u \colon \Omega \to \mathbb{R}, \text{ telle que } u \text{ mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

Muni de la norme suivante

$$\|u\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^\infty(\Omega) &= \{ u \colon \Omega \to \mathbb{R}, \ u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et il existe } C \\ & \quad \text{tel que } |u(x)| \leq C \ \text{ p.p. sur } \Omega \}. \end{aligned}$$

Muni de cette norme

$$\|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} = \inf \{ C, \ |u(x)| \leq C, \ \text{ p.p. sur } \Omega \}.$$

Pour plus détail voir [1], [3].

Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugué de p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Inégalité de Hölder

Soient $u \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ et $v \in \mathbb{L}^{p'}(\Omega)$, avec $1 \leq p \leq \infty$, alors $u.v \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |u.v| \leq \|u\|_{\mathbb{L}^p} \ \|v\|_{\mathbb{L}^{p'}}.$$

Inégalité de Young

Soit $1 < p < \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p, alors on a

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \ \ \forall x \geq 0, \ \ \forall y \geq 0$$

et pour $x = \sqrt{a}X$ et $y = \frac{Y}{\sqrt{a}}$ et $p = q = 2$, on a

$$xy \leq \frac{a}{2}X^2 + \frac{1}{2a}Y^2$$

où $a > 0$.

Inégalité de Poincaré

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, il existe une constante positive $c_p = (p,\Omega)$ telle que

$$\|u\|_{\mathbb{L}^p} \leq c_p \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}, \quad \forall u \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \ (1 \leq p < \infty). \tag{1}$$

Formule de Green généralisée

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière Γ, soient $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ et $w \in (H^1(\Omega))^n$, alors

$$\int_\Omega v\Delta u \ dx = -\int_\Omega \nabla v.\nabla u \ dx + \int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial \upsilon}d\Gamma$$

$$\int_\Omega \nabla u.w \ dx = -\int_\Omega udiv \ w \ dx + \int_\Gamma u(w.\upsilon)\,d\Gamma,$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial \upsilon} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\upsilon_i, \ \nu \text{ est la normale extérieure unitaire à } \partial\Omega.$$

Produit de convolution

Soient $u(x)$, $v(x)$ deux fonctions définies sur $L^1(\mathbb{R}^n)$, le produit de convolution de $u(x)$ et $v(x)$ est une autre fonction qui se note généralement $u * v$ et qui est définie par

$$(u * v)(x) = \int_0^x u(x-y)\,v(y)\,dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Equation intégrale de Volterra

L'équation intégrale de Volterra de seconde espèce, s'écrit sous la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) + \lambda(R * \varphi),$$

où φ est l'inconnue, f et R sont des fonctions données, $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction R s'appelle le noyau de l'équation intégrale de Volterra. Sa solution est donnée par la formule suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x-s)\,f(s)\,ds = f(x) + \lambda(k * f)(x), \tag{3}$$

où la fonction k est le noyau résolvant de R et est définie par

$$k(x) = R(x) + \lambda(R * k)(x). \tag{4}$$

Règle de Leibniz

Elle est donnée par la formule

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{d}{dt} f(x,t)\,dx,$$

et dans le cas général

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\ dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx + f(b(t),t)\,\frac{d\ b(t)}{dt} - f(a(t),t)\,\frac{d\ a(t)}{dt}. \tag{5}$$

Inégalité de Jensen

Si F est une fonction convexe sur $[a,b]$, $f : \Omega \to [a,b]$ et h sont des fonctions intégrables sur Ω, $h(x) \geq 0$ et $\int_\Omega h(x)\,dx = \ell$, alors l'inégalité de Jensen affirme que

$$F\left[\frac{1}{\ell}\int_\Omega f(x)\,h(x)\,dx\right] \leq \frac{1}{\ell}\int_\Omega F[f(x)]\,h(x)\,dx.$$

Chapitre 1

Stabilisation frontière de type mémoire en thermoélasticité

Sommaire

1.1 Position du problème

Dans ce chapitre, nous allons considérer un système thermoélastique avec un terme source non linéaire de type polynomial et un amortissement frontière. Le système est le suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu \triangle u - (\mu + \lambda) \nabla (divu) + \beta \nabla \theta = |u|^{p-2} u, & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\ c\theta_t - k \triangle \theta + \beta divu_t = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\ u(x,t) = -\int_0^t g(t-s) \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu + \lambda)(divu) \nu \right)(s) \, ds, & \text{sur } \Gamma_1 \times [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0, \, u_t(x,0) = u_1, \, \theta(x,0) = \theta_0, & x \in \Omega \\ u_0 = 0, \, \theta = 0, & x \in \partial\Omega, \, t \geq 0 \\ u = 0, & x \in \Gamma_0, \, t \geq 0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

où β, c, k sont des constantes strictement positives, μ, $\lambda > 0$ sont des coefficients de Lamé, le corps Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, de frontière régulière $\partial\Omega$ subdivisée en deux parties mesurables Γ_0 et Γ_1, ν la normale extérieure unitaire à $\partial\Omega$, $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^n$, c'est le vecteur de déplacement, $\theta = \theta(x,t)$ représente la différence de température, $f(u) = |u|^{p-2} u$ représente une source non linéaire avec $2 < p \leq 2n/(n-2)$. Le noyau g est la fonction de relaxation qui est positive et différentiable avec $g(0) \neq 0$. La condition au bord sur Γ_1 désigne une équation intégrale qui exprime l'amortissement non local de l'effet de mémoire. En fait, les conditions aux limites non locales apparaissent principalement lorsque les données sur la frontière ne peuvent pas êtres mesurées directement, mais seules leurs valeurs moyennes sont connues. D'un point de vue physique, cette condition et la condition $u = 0$ sur Γ_0 signifient que le domaine Ω est maintenu par un corps solide sur la première partie de sa frontière Γ_0 et par un corps viscoélastique sur l'autre partie Γ_1. On va voir que la dissipation donnée par ce terme de type mémoire est suffisamment forte pour obtenir la stabilisation du système (1.1.1).

1.2 Notations et Préliminaires

Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance de la fonction u par rapport à x où par rapport à t.

Afin d'établir notre résultat, on aura besoin des hypothèses suivantes :

• Fixons un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et posons $m(x) = x - x_0$, on note par $R = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}$. On suppose que les partitions Γ_0, Γ_1 sont fermées, disjointes et meas $(\Gamma_0) > 0$, telles que

$$\begin{cases} \Gamma_0 = \{x \in \partial\Omega : \ m(x).\nu \leq 0\} \\ \Gamma_1 = \{x \in \partial\Omega : \ m(x).\nu > 0\}, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

il existe une constante positive α telle que

$$m(x).\nu \geq \alpha > 0, \ \ \forall x \in \Gamma_1. \tag{1.2.2}$$

Estimation du terme au bord : $u(x,t) = -\int_0^t g(t-s)\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\mu+\lambda)(divu)\nu\right)(s)\,ds.$

On dérive ce terme par rapport à t, en utilisant la formule de Leibniz (5) et le produit de convolution qui est défini dans (2), il résulte

$$\begin{aligned} u_t &= -\left[g(0)\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\mu+\lambda)(divu)\nu\right) + \int_0^t \left(g'(t-s)\left\{\mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\mu+\lambda)(divu)\nu\right\}\right)(s)\,ds\right] \\ &= -\left[g(0)\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\mu+\lambda)(divu)\nu\right) + g' * \left\{\mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\mu+\lambda)(divu)\nu\right\}(s)\,ds\right], \end{aligned}$$

on divise par $g(0)$, on arrive à

$$\mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\mu+\lambda)(divu)\nu = \frac{-1}{g(0)}\left[u_t + g' * \left\{\mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\mu+\lambda)(divu)\nu\right\}\right], \text{ sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+.$$

L'équation ci-dessus est une forme d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce et d'après (3), sa solution est donnée par

$$\begin{aligned} \mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\mu+\lambda)(divu)\nu &= \frac{-1}{g(0)}\left[u_t + \int_0^t k(t-s)\,u_t(s)\,ds\right] \\ &= \frac{-1}{g(0)}\left[u_t + k * u_t\right], \text{ sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

où k est le noyau résolvant de $(-g'/g(0))$, (voir (4)).

On note par $\eta = \dfrac{1}{g(0)}$, on obtient

$$\mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\mu+\lambda)(divu)\nu = -\eta\,(u_t + k * u_t).$$

On utilise l'intégration par partie et la condition $u_0 = 0$ sur $\partial\Omega$, nous arrivons à

$$\begin{aligned} \mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu+\lambda)(divu)\,\nu &= -\eta\left[u_t + k(t-s)\,u(s)|_0^t + \int_0^t k'(t-s)\,u(s)\,ds\right] \\ &= -\eta\left[u_t + k(0)\,u + k' * u\right] \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Puisque nous nous sommes intéressés par les fonctions de relaxation à décroissance plus générale, il est important de savoir si la fonction k vérifie quelques propriétés de la fonction de relaxation g. Le lemme suivant répond à cette question.

Soit $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$, une fonction continue et k son noyau de résolvant, c'est-à-dire

$$k(t) = h(t) + (k * h)(t), \tag{1.2.4}$$

alors la fonction k est continue et positive (voir [12], [25]).

Lemme 1.2.1. *Supposons que*

$$h(t) \le c_0 e^{-\int_0^t \gamma(\varsigma)d\varsigma}, \tag{1.2.5}$$

où $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$, *est une fonction décroissante satisfaisant pour une constante positive* $\varepsilon < 1$,

$$c_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^s (1-\varepsilon)\gamma(\varsigma)d\varsigma} ds < \frac{1}{c_0},$$

alors la fonction k *satisfait*

$$k(t) \le \frac{c_0}{1 - c_0 c_1} e^{-\epsilon \int_0^t \gamma(\varsigma)d\varsigma}.$$

Démonstration. *Voir [21].* ■

Remarque 1.2.2. Le résultat du Lemme 1.2.1 n'est qu'un cas particulier, voir [21] pour plus de détails.

Maintenant nous définissons les deux relations suivantes

$$(g \otimes \varphi)(t) = \int_0^t g(t-s)\,|\varphi(t) - \varphi(s)|^2\,ds \tag{1.2.6}$$

$$(g \circ \varphi)(t) = \int_0^t g(t-s)(\varphi(t) - \varphi(s))\, ds. \tag{1.2.7}$$

Lemme 1.2.3. *Nous avons pour* $0 \leq \mu_1 \leq 1$,

$$|(g \circ \varphi)(t)|^2 \leq \left(\int_0^t |g(s)|^{2(1-\mu_1)}\, ds \right) \left(|g|^{2\mu_1} \otimes \varphi \right)(t). \tag{1.2.8}$$

Démonstration. De (1.2.7), nous avons

$$\begin{aligned} (g \circ \varphi)(t) &= \int_0^t g^{(1-\mu_1+\mu_1)}(t-s)(\varphi(t) - \varphi(s))\, ds \\ &= \int_0^t g^{1-\mu_1} \left[g^{\mu_1} (\varphi(t) - \varphi(s)) \right] ds, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned} (g \circ \varphi)(t) &\leq \left(\int_0^t g^{2(1-\mu_1)}(s)\, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t g^{2\mu_1}(t-s) |\varphi(t) - \varphi(s)|^2\, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^t g^{2(1-\mu_1)}(s)\, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(g^{2\mu_1} \otimes \varphi \right)^{\frac{1}{2}}(t), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$(g \circ \varphi)^2(t) \leq \left(\int_0^t g^{2(1-\mu_1)}(s) \right) \left(g^{2\mu_1} \otimes \varphi \right)(t), \tag{1.2.9}$$

d'où, on trouve le résultat désiré.

Lemme 1.2.4. *Si* $g, \varphi \in C^1(\mathbb{R}^+)$, *alors*

$$(g * \varphi)\varphi_t = -\frac{1}{2} g(t) |\varphi(t)|^2 + \frac{1}{2} g' \otimes \varphi - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(g \otimes \varphi - \left(\int_0^t g(s)\, ds \right) |\varphi(t)|^2 \right). \tag{1.2.10}$$

Démonstration. Voir [21]. ■

■

1.3 Résultats principaux

Dans cette section on va étudier le comportement asymptotique de la solution du système (1.1.1), en se basant sur le lemme 1.2.1 et dans toute la suite on va utiliser l'équation (1.2.3) à la place de la troisième équation du système (1.1.1).

De plus, supposons que la fonction k vérifie l'hypothèse suivante

$$k(0) > 0, \ \ k(t) \geq 0, \ \ k'(t) \leq 0, \ \ k''(t) \geq \gamma(t)(-k'(t)), \tag{1.3.1}$$

où γ: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction satisfait les conditions suivantes

$$\gamma(t) > 0, \ \ \gamma'(t) \leq 0, \ \ \int_0^{+\infty} \gamma(t)\, dt = +\infty. \tag{1.3.2}$$

Avant de définir la solution du système (1.1.1), on considère l'espace suivant

$$V = H^1_{\Gamma_0} = \left\{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\right\}.$$

On introduit la fonctionnelle d'énergie totale associée au problème (1.1.1) par :

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\mu|\nabla u|^2 + |u_t|^2 + (\mu+\lambda)(divu)^2 + c|\theta|^2\right] dx \\ &\quad -\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\, dx - \frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} k' \otimes u\ d\Gamma + \frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} k(t)|u|^2\, d\Gamma. \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Lemme 1.3.5. *L'énergie associée au problème (1.1.1) vérifie*

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq -k\int_\Omega |\nabla\theta|^2\, dx - \eta\int_{\Gamma_1} |u_t|^2\, d\Gamma + \frac{\eta}{2}k'(t)\int_{\Gamma_1} |u|^2\, d\Gamma \\ &\quad -\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''(t-s)|u(t)-u(s)|^2\, ds \leq 0. \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Démonstration. Multiplions l'équation $(1.1.1)_1$ par u_t et l'équation $(1.1.1)_2$ par θ, intégrons par partie et, en utilisant la formule de Green ainsi que les conditions aux limites, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega \mu\left|\nabla u\right|^2 dx + \int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx + (\mu+\lambda)\int_\Omega (divu)^2\, dx + c\int_\Omega \left|\theta\right|^2 dx \right.\\
&\left. -\frac{2}{p}\int_\Omega \left|u\right|^p dx - \eta\int_{\Gamma_1} k'\otimes u\; d\Gamma + \eta\int_{\Gamma_1} k\left(t\right)\left|u\right|^2 d\Gamma\right]\\
\leq\; & -k\int_\Omega \left|\nabla\theta\right|^2 dx - \eta\int_{\Gamma_1}\left|u_t\right|^2 d\Gamma + \frac{\eta}{2}k'\left(t\right)\int_{\Gamma_1}\left|u\right|^2 d\Gamma\\
&-\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''\left(t-s\right)\left|u\left(t\right)-u\left(s\right)\right|^2 ds, \qquad (1.3.5)
\end{aligned}$$

par conséquent, on obtient (1.3.4). ■

Maintenant, on pose

$$\begin{cases}
I\left(t\right) = \mu\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx - \int_\Omega \left|u\right|^p dx,\\
J\left(t\right) = \frac{\mu}{2}\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx - \frac{1}{p}\int_\Omega \left|u\right|^p dx,\\
W = \left\{(v,w,\phi)\in H^1_{\Gamma_0}\times L^2\left(\Omega\right)\times H^1_0\left(\Omega\right)\ /\ I\left(v,w,\phi\right)>0\right\}\cup\left\{0\right\},
\end{cases} \qquad (1.3.6)$$

alors $E\left(t\right)$ s'écrit

$$\begin{aligned}
E\left(t\right) \;=\;& J\left(t\right) + \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left|u_t\right|^2 + (\mu+\lambda)\left(divu\right)^2 + c\theta^2\right] \qquad (1.3.7)\\
&-\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|u\left(t\right)-u\left(s\right)\right|^2 ds + \frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} k\left(t\right)\left|u\right|^2 d\Gamma.
\end{aligned}$$

On a le résultat suivant

Lemme 1.3.6. *Sous les hypothèses* (1.2.1), (1.2.2) *et pour* $2 < p \leq 2n/\left(n-2\right)$, $n \geq 3$, *alors pour* $(u_0,u_1,\theta_0)\in W$ *vérifiant*

$$\frac{C_*^p}{\mu}\left(\frac{2p}{\mu\left(p-2\right)}E\left(u_0,u_1,\theta_0\right)\right)^{(p-2)/2} = \alpha < 1, \qquad (1.3.8)$$

la solution $(u,u_t,\theta)\left(t\right)\in W$, $\forall t>0$ *et en plus*

$$\left\|u\left(.,\right)\right\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \mu\left\|\nabla u\left(.,t\right)\right\|^2_2, \qquad (1.3.9)$$

où C_*, μ *sont des constantes positives, telle que*

$$\left\|\nu\right\|_{L^q(\Omega)} \leq C_*\left\|\nabla\nu\right\|_2, \qquad (1.3.10)$$

et $2 \leq q \leq 2n/(n-2)$.

Remarque 1.3.7. D'après le Lemme (1.3.6) on trouve

$$\|u(.,t)\|_{L^q(\Gamma)}^q \leq \alpha \|\nabla u(.,t)\|_2^2. \tag{1.3.11}$$

Démonstration. Puisque $(u_0,u_1,\theta_0) \in W$, alors $I(u_0,u_1,\theta_0) > 0$. Par continuité, il existe $T_m > 0$ tel que $I(u(t)) \geq 0$, pour tout $t \in [0,T_m)$. D'après la définition de I et J, on a la relation suivante :

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{\mu}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx \\ &= \frac{\mu(p-2)}{2p}\|\nabla u(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{p}I(t) \\ &\geq \frac{\mu(p-2)}{2p}\|\nabla u(.,t)\|_2^2, \;\; \forall t \leq T_m, \end{aligned}$$

par conséquent on obtient d'après (1.3.7)

$$\|\nabla u(.,t)\|_2^2 \leq \frac{2p}{\mu(p-2)}E(t) \leq \frac{2p}{\mu(p-2)}E(u_0,u_1,\theta_0), \forall t \in [0,T_m). \tag{1.3.12}$$

En utilisant (1.3.10) et (1.3.12), on arrive à

$$\begin{aligned} \|u\|_p^p &\leq C_*^p \|\nabla u(.,t)\|_2^p = C_*^p \|\nabla u(.,t)\|_2^{p-2}\|\nabla u(.,t)\|_2^2 \\ &\leq C_*^p\left(\frac{2p}{\mu(p-2)}E(0)\right)^{(p-2)/2}\|\nabla u(.,t)\|_2^2, \forall t \in [0,T_m), \end{aligned} \tag{1.3.13}$$

d'où, en utilisant le Lemme (1.3.6)

$$\|u(.,)\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \mu \|\nabla u(.,t)\|_2^2, \;\; \forall t \in [0,T_m),$$

ce qui implique que

$$(u,u_t,\theta)(t) \in W, \forall t \in [0,T_m), \;\; \forall m > 0.$$

Puisque l'énergie $E(t)$ est strictement décroissante, on a les inégalités suivantes

$$\lim_{t \to T_m} \frac{C_*^p}{\mu}\left(\frac{2p}{\mu(p-2)}E(t)\right)^{(p-2)/2} < \frac{C_*^p}{\mu}\left(\frac{2p}{\mu(p-2)}E(0)\right)^{(p-2)/2} < 1.$$

Ainsi, en répétant cette procédure, l'inéquation (1.3.13) reste vraie pour tout $t \geq 0$.

■

On suppose, dans la suite, que la solution du problème (1.1.1) existe, unique et suffisamment régulière. Dans ce qui suit, nous énonçons le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 1.3.8. *Soit* $(u_0,u_1,\theta_0) \in \left(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right)$, *sous les hypothèses* (1.2.1), (1.2.2), (1.3.1) *et* (1.3.2) *avec*

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = 0, \tag{1.3.14}$$

alors pour t_0 *assez grand, la solution du problème* (1.1.1) *vérifie*

$$E(t) \leq cE(0)\, e^{-a\int_0^t \gamma(s)ds}, \quad \forall t \geq t_0$$

où a, c *sont des constantes positives.*

Pour montrer ce théorème, nous allons commencer par démontrer les lemmes suivants.

Lemme 1.3.9. *Sous les hypothèses du théorème* 1.3.8, *la solution du problème* (1.1.1) *vérifie*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t.\left[M + (n-1)u\right] \leq\ & -\int_\Omega |u_t|^2\,dx - \mu\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{\mu+\lambda}{2}\int_\Omega (div\ u)^2\,dx + C\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx \\
& -(\mu+\lambda)\,\delta\int_{\Gamma_1}(div\ u)^2\,d\Gamma - \frac{\mu\delta}{2}\int_{\Gamma_1}|\nabla u|^2\,d\Gamma + \frac{C}{\mu}\int_{\Gamma_1}|u_t|^2\,d\Gamma \\
& + Ck^2(t)\int_{\Gamma_1}|u|^2\,d\Gamma - C\mu\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'(t-s)\,|u(t)-u(s)|^2\,d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma_1}|u|^2\,d\Gamma - \left(\frac{2n}{p}-(n-1)\right)\int_\Omega |u|^p + \frac{2\delta}{p}\int_{\Gamma_1}|u|^p\,d\Gamma,
\end{aligned} \tag{1.3.15}$$

où

$$M = (M_1,M_2,...,M_n)^T, \quad M_i = 2m.\nabla u^i \quad et \quad m = (x-x_0),$$

et C est une constante positive.

Démonstration. Multiplions l'équation $(1.1.1)_1$ par $M + (n-1)\,u$, on trouve

$$\int_\Omega \left[u_{tt} - \mu \triangle u + \beta \nabla \theta - (\mu + \lambda) \nabla (divu) - |u|^{p-2} u\right].\left[M + (n-1)\,u\right] dx = 0. \tag{1.3.16}$$

Maintenant, on va estimer le premier terme dans (1.3.16) suivant

$$\int_\Omega u_{tt}.\left[M + (n-1)\,u\right] dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega u_t.\left[M + (n-1)\,u\right] - \int_\Omega u_t.M_t - (n-1)\int_\Omega |u_t|^2,$$

sachant que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_t.M_t\ dx &= \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega u_t^i\left(2m.\nabla u_t^i\right) dx = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega m.\left|\nabla u_t^i\right|^2 dx \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|u_t^i\right|^2 div\ m dx + \sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\left|u_t^i\right|^2 (m.\nu)\, d\Gamma \\
&= -n\int_\Omega |u_t|^2 dx + \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 (m.\nu)\, d\Gamma,
\end{aligned}$$

on déduit que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_{tt}.\left[M + (n-1)\,u\right] dx &= \frac{d}{dt}\int_\Omega u_t.\left[M + (n-1)\,u\right] dx \\
&\quad + \int_\Omega |u_t|^2 dx - \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 (m.\nu)\, d\Gamma.
\end{aligned} \tag{1.3.17}$$

Pour le deuxième terme dans $(1.3.16)$, on commence par

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \triangle u.M dx &= -\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \triangle u^i\left(2m.\nabla u^i\right) dx \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \nabla u^i\left(2m.\nabla u^i\right) dx - 2\sum_{i=1}^{n}\int_\Gamma \left(m.\nabla u^i\right)\frac{\partial u^i}{\partial \nu} d\Gamma.
\end{aligned}$$

On applique la formule suivante

$$\nabla u^i.\nabla\left(2m.\nabla u^i\right) = 2\left|\nabla u^i\right|^2 + m.\nabla\left(\left|\nabla u^i\right|^2\right),$$

on trouve

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \triangle u.M dx &= 2\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\nabla u^i\right|^2 dx + \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} m.\nabla\left(\left|\nabla u^i\right|^2\right) dx \\ &\quad -2\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma}\left(m.\nabla u^i\right)\frac{\partial u^i}{\partial\nu}d\Gamma \\ &= -(n-2)\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma}|\nabla u|^2(m.\nu)\,d\Gamma \\ &\quad -2\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma}\left(m.\nabla u^i\right)\frac{\partial u^i}{\partial\nu}d\Gamma. \end{aligned} \tag{1.3.18}$$

Pour le dernier terme dans (1.3.18), on a

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_0}\left(m.\nabla u^i\right)\frac{\partial u^i}{\partial\nu}d\Gamma = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_0}(m.\nu)\left(\frac{\partial u^i}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} &-\int_{\Omega} M.\triangle u = -(n-2)\int_{\Omega}|\nabla u|^2 + \int_{\Gamma}|\nabla u|^2(m.\nu) \\ &-2\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\left(m.\nabla u^i\right)\frac{\partial u^i}{\partial\nu} - 2\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_0}\left(\frac{\partial u^i}{\partial\nu}\right)^2(m.\nu)\,. \end{aligned} \tag{1.3.19}$$

D'autre part on a

$$-\int_{\Omega} u.\triangle u\; dx = \int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx - \int_{\Gamma} u.\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma = \int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx - \int_{\Gamma_1} u.\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma. \tag{1.3.20}$$

Combinons (1.3.19) et (1.3.20), on obtient

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega}\triangle u.\left[M+(n-1)u\right]dx &= \int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma}|\nabla u|^2(m.\nu)\,d\Gamma - 2\int_{\Gamma_0}|\nabla u|^2(m.\nu)\,d\Gamma \\ &\quad -\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u^i}{\partial\nu}\left(2m.\nabla u^i + (n-1)u^i\right)d\Gamma. \end{aligned} \tag{1.3.21}$$

Maintenant, pour le troisième terme dans (1.3.16) on a

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega}\nabla(divu).\left[M+(n-1)u\right]dx &= -(n-1)\int_{\Omega} u.\nabla(div\ u)\,dx - \int_{\Omega} M.\nabla(div\ u)\,dx \\ &= (n-1)\int_{\Omega}(div\ u)^2 dx - (n-1)\int_{\Gamma}(u.\nu)\,div\ u\ d\Gamma \\ &\quad -\int_{\Omega} M.\nabla(div\ u)\,dx, \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega M.\nabla\,(div\ u)\,dx &= -\sum_{i=1}^n\int_\Omega 2\left(m.\nabla u^i\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\,(div\ u)\,dx = 2\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_i}\left(m.\nabla u^i\right)div\ u\ d\Gamma\\
&\quad -2\sum_{i=1}^n\int_\Gamma (div\ u)\times\left(m.\nabla u^i\right)\nu_i\ d\Gamma\\
&= 2\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_i}\left[m_j\frac{\partial u^i}{\partial x_j}\right]div\ u\ dx-2\sum_{i,j=1}^n\int_\Gamma (div\ u)\left(m_j.\frac{\partial u^i}{\partial x_j}\right)\nu_i\ d\Gamma\\
&= 2\int_\Omega (div\ u)^2\,dx+2\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega m_j\frac{\partial^2u^i}{\partial x_i\partial x_j}\,(div\ u)\,d\Gamma\\
&\quad -2\sum_{i,j=1}^n\int_\Gamma (div\ u)\left(m_j.\frac{\partial u^i}{\partial x_j}\right)\nu_i\ d\Gamma,
\end{aligned}$$

on applique la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned}
2\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega m_j\frac{\partial u^i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j}\right)div\ u\ dx &= \sum_{j=1}^n\int_\Omega m_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left((divu)^2\right)dx\\
&= -\sum_{j=1}^n\int_\Omega\frac{\partial m_j}{\partial x_j}\left((divu)^2\right)dx+\sum_{j=1}^n\int_\Gamma (divu)^2\,(m_j\nu_j)\,d\Gamma\\
&= -n\int_\Omega (divu)^2\,dx+\int_\Gamma (divu)^2\,(m.\nu)\,d\Gamma,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega\nabla\,(div\ u)\,M &= -(n-2)\int_\Omega (div\ u)^2+\int_{\Gamma_0}(div\ u)^2\,(m.\nu)\\
&\quad -2\sum_{i,j=1}^n\int_\Gamma (div\ u)\left(m_j\frac{\partial u^i}{\partial x_j}\right)\nu_i d\Gamma
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
2\sum_{i,j=1}^n\int_{\Gamma_0}(div\ u)\left(m_j\frac{\partial u^i}{\partial x_j}\right)\nu_i\ d\Gamma &= 2\sum_{i,j=1}^n\int_{\Gamma_0}(div\ u)\left(m_j\frac{\partial u^i}{\partial\nu}\nu_i\right)d\Gamma\\
&= 2\sum_{i=1}^n\int_{\Gamma_0}(m.\nu)\,div\ u\frac{\partial u^i}{\partial\nu}\nu_i d\Gamma\\
&= 2\sum_{i=1}^n\int_{\Gamma_0}(m.\nu)\,div\ u\frac{\partial u^i}{\partial x_i}d\Gamma = 2\int_{\Gamma_0}(div\ u)^2\,(m.\nu)\,,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} M.\nabla\left(div\ u\right)dx &= -\left(n-2\right)\int_{\Omega}\left(div\ u\right)^{2}dx + \int_{\Gamma_0}\left(div\ u\right)^{2}\left(m.\nu\right)d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_1}\left(div\ u\right)^{2}\left(m.\nu\right)d\Gamma - 2\int_{\Gamma_0}\left(divu\right)^{2}\left(m.\nu\right)d\Gamma \\
&\quad -2\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\left(div\ u\right)\left(m.\nabla u^{i}\right)\nu_i d\Gamma.
\end{aligned}$$

Nous concluons que

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega}\nabla\left(div\ u\right).\left[M+\left(n-1\right)u\right]dx &= \int_{\Omega}\left(div\ u\right)^{2}dx - \left(n-1\right)\int_{\Gamma_1}\left(u.\nu\right)div\ u\ d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Gamma_0}\left(div\ u\right)^{2}\left(m.\nu\right)d\Gamma + \int_{\Gamma_1}\left(div\ u\right)^{2}\left(m.\nu\right) \qquad (1.3.22) \\
&\quad -2\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\left(div\ u\right)\left(m.\nabla u^{i}\right)\nu_i - \int_{\Gamma_0}\left(div\ u\right)^{2}\left(m.\nu\right)d\Gamma.
\end{aligned}$$

Le quatrième terme dans (1.3.16)

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} M.\nabla\theta dx &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}2m_j\frac{\partial u^{i}}{\partial x_j}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}dx = -2\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\theta\frac{\partial}{\partial x_i}\left(m_j\frac{\partial u^{i}}{\partial x_j}\right)dx \\
&= -2\int_{\Omega}\theta div\ u\ dx - 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}m_j\theta\frac{\partial^{2}u^{i}}{\partial x_i\partial x_j}\ dx \\
&= -2\int_{\Omega}\theta div\ u\ dx + 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(m_j\theta\right)\frac{\partial u^{i}}{\partial x_i}dx \\
&= -2\int_{\Omega}\theta div\ u\ dx + 2\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}\left(div\ u\right)\left[\frac{\partial m_j}{\partial x_j}\theta + m_j\frac{\partial\theta}{\partial xj}\right]dx \\
&= 2\left(n-1\right)\int_{\Omega}\theta div\ u\ dx + 2\int_{\Omega}\left(div\ u\right)\left(m.\nabla\theta\right)dx.
\end{aligned}$$

En intégrant par partie, on obtient

$$\left(n-1\right)\int_{\Omega}u.\nabla\theta dx = -\left(n-1\right)\int_{\Omega}\theta div\ u\ dx,$$

et par suite, on a

$$\int_{\Omega}\nabla\theta.\left[M+\left(n-1\right)u\right]dx = \left(n-1\right)\int_{\Omega}\theta div\ u\ dx + 2\int_{\Omega}\left(div\ u\right)\left(m.\nabla\theta\right)dx. \quad (1.3.23)$$

Finalement, pour le cinquième terme dans (1.3.16) , on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^{p-2} u \left[M + (n-1) u\right] dx &= (n-1) \int_\Omega |u|^p \, dx + \int_\Omega M. |u|^{p-2} u \, dx \\
&= (n-1) \int_\Omega |u|^p \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega M_i \, |u_i|^{p-2} u_i dx \\
&= (n-1) \int_\Omega |u|^p \, dx + 2 \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (m.\nabla u_i) \, |u_i|^{p-2} u_i dx \\
&= (n-1) \int_\Omega |u|^p \, dx + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega m_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \, |u_i|^{p-2} u_i dx \\
&= (n-1) \int_\Omega |u|^p \, dx + \frac{2}{p} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega m_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(|u_i|^p\right) dx,
\end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^{p-2} u \left[M + (n-1) u\right] dx &= (n-1) \int_\Omega |u|^p \, dx - \frac{2}{p} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_k} m_k\right) |u_i|^p \, dx \\
&\quad + \frac{2}{p} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \int_\Gamma |u_i|^p \, m_k.\nu_k d\Gamma \\
&= (n-1) \int_\Omega |u|^p \, dx - \frac{2}{p} n \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |u_i|^p + \frac{2}{p} \sum_{i=1}^{n} \int_\Gamma |u_i|^p \, (m.\nu) \, d\Gamma,
\end{aligned}$$

sachant que

$$\frac{\partial}{\partial x_k} m_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} m_k = n, \quad \sum_{k=1}^{n} (m_k.\nu_k) = m.\nu,$$

alors

$$\int_\Omega |u|^{p-2} u \left[M + (n-1) u\right] dx = -\left(\frac{2n}{p} - (n-1)\right) \int_\Omega |u|^p \, dx + \frac{2}{p} \int_{\Gamma_1} |u|^p \, (m.\nu) \, . \tag{1.3.24}$$

Combinant (1.3.17) et (1.3.21) – (1.3.24) , on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u_t.\left[M+(n-1)\,u\right]dx \;=\;& -\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx+\int_{\Gamma_1}|u_t|^2\,(m.\nu)\,d\Gamma-\mu\left[\int_{\Omega}|\nabla u|^2-\int_{\Gamma_0}|\nabla u|^2\,(m.\nu)\,d\Gamma\right.\\
&\left.+\int_{\Gamma_1}|\nabla u|^2\,(m.\nu)\,d\Gamma-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u^i}{\partial\nu}\left(2m.\nabla u^i+(n-1)\,u\right)d\Gamma\right]\\
&-(\mu+\lambda)\left[\int_{\Omega}(div\ u)^2-(n-1)\int_{\Gamma_1}(u.\nu)\,div\ u\right.\\
&-\int_{\Gamma_0}(div\ u)^2\,(m.\nu)+\int_{\Gamma_1}(divu)^2\,(m.\nu)\\
&\left.-2\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}(div\ u)\left(m.\nabla u^i\right)\nu_i\right]\\
&-\beta\left[(n-1)\int_{\Omega}\theta div\ udx+2\int_{\Omega}(div\ u)\,(m.\nabla\theta)\,dx\right]\\
&+\left[-\left(\frac{2n}{p}-(n-1)\right)\int_{\Omega}|u|^p\,dx+\frac{2}{p}\int_{\Gamma_1}|u|^p\,(m.\nu)\,d\Gamma_1\right]. \qquad (1.3.25)
\end{aligned}$$

En utilisant (1.2.1), alors (1.3.25) devient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u_t.\left[M+(n-1)\,u\right]dx \;\leq\;& -\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx-\mu\int_{\Omega}|\nabla u|^2+\int_{\Gamma_1}|u_t|^2-(\mu+\lambda)\int_{\Omega}(divu)^2\\
&-\beta\,(n-1)\int_{\Omega}\theta divu-2\beta\int_{\Omega}(divu)\,(m.\nabla\theta)-\mu\int_{\Gamma_1}|\nabla u|^2\,(m.\nu)\\
&+\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u^i}{\partial\nu}\left(2m.\nabla u^i+(n-1)\,u^i\right)+(n-1)\,(\mu+\lambda)\\
&\times\int_{\Gamma_1}(divu)\,(\nu.u)-(\mu+\lambda)\int_{\Gamma_1}(divu)^2\,(m.\nu)\\
&+\sum_{i=1}^{n}(\mu+\lambda)\int_{\Gamma_1}(divu)\left(m.\nabla u^i\right)\nu_i.\\
&-\left(\frac{2n}{p}-(n-1)\right)\int_{\Omega}|u|^p\,dx+\frac{2}{p}\int_{\Gamma_1}|u|^p\,(m.\nu)\,d\Gamma_1, \qquad (1.3.26)
\end{aligned}$$

En utilisant (1.2.3) , alors l'estimation (1.3.26) se réduit à

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u_t.\left[M+(n-1)\,u\right]dx \quad \leq \quad & -\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx-\mu\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx+\int_{\Gamma_1}|u_t|^2-(\mu+\lambda)\int_{\Omega}(div\ u)^2\,dx \\
& -\beta\,(n-1)\int_{\Omega}\theta div\ u\ dx-2\beta\int_{\Omega}(div\ u)\,(m.\nabla\theta)\,dx \\
& -\mu\int_{\Gamma_1}|\nabla u|^2\,(m.\nu)\,d\Gamma-\eta\int_{\Gamma_1}\sum_{i=1}^{n}u^i\left(u_t^i-k'\circ u^i+k\,(t)\,u^i\right)d\Gamma \\
& -(\mu+\lambda)\int_{\Gamma_1}(divu)^2\,(m.\nu)\,d\Gamma \\
& +(n-1)\times\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}u^i\left(u_t^i-k'\circ u^i+k\,(t)\,u^i\right)d\Gamma \\
& -\left(\frac{2n}{p}-(n-1)\right)\int_{\Omega}|u|^p\,dx+\frac{2}{p}\int_{\Gamma_1}|u|^p\,(m.\nu)\,d\Gamma.
\end{aligned}$$

De (1.2.8),(1.2.1) et (1.2.2) on trouve l'estimation (1.3.15). ■

Maintenant on définit la fonctionnelle de Lyapunov $L\,(t)$ comme suit

$$L\,(t)=NE\,(t)+\int_{\Omega}u_t\left[M+(n-1)\,u\right]dx, \tag{1.3.27}$$

où $M=2m.\nabla u$.

Lemme 1.3.10. *Pour N suffisamment grand, les fonctionnelles $L\,(t)$ et $E\,(t)$ sont équivalentes, c'est-à-dire*

$$E\,(t)\leq L\,(t)\leq 2N\ E\,(t)\,. \tag{1.3.28}$$

Démonstration. On utilise l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
L\,(t) \quad \leq \quad & N\ E\,(t)+\int_{\Omega}(2m.\nabla u)\,.u_t\ dx+(n-1)\int_{\Omega}u.u_t\ dx \\
\leq \quad & N\ E\,(t)+\frac{1}{2}\int_{\Omega}|2m.\nabla u|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx \\
& +\frac{(n-1)}{2}\int_{\Omega}|u|^2\,dx+\frac{(n-1)}{2}\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx \\
\leq \quad & N\ E\,(t)+R^2\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx+\frac{(n-1)}{2}\int_{\Omega}|u|^2\,dx+\frac{n}{2}\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx
\end{aligned}$$

on utilise l'inégalité de Poincaré (1), on obtient

$$L(t) \leq N\ E(t) + \left(R^2 + \frac{(n-1)\, c_p}{2} \right) \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |u_t|^2\, dx,$$

d'après (1.3.3) et pour N suffisamment grand, on arrive à

$$L(t) \leq (N + P_1)\ E(t) \leq 2N\ E(t). \tag{1.3.29}$$

De même, nous avons

$$\begin{aligned} L(t) \quad &\geq \quad N\ E(t) - \frac{1}{2} \int_\Omega |2m.\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{2} \int_\Omega |u_t|^2\, dx - \frac{(n-1)}{2} \int_\Omega |u|^2\, dx \\ &\quad - \frac{(n-1)}{2} \int_\Omega |u_t|^2\, dx, \end{aligned}$$

on utilise l'inégalité de Poincaré (1) et (1.3.3), on arrive à

$$L(t) \geq P_2 E(t) \geq E(t), \tag{1.3.30}$$

où P_1, P_2 sont des constantes positives. De (1.3.29) et (1.3.30), on trouve le résultat désiré.

Preuve du Théorème 1.3.8. On dérive par rapport à t la fonctionnelle $L(t)$ définie dans (1.3.27), on obtient

$$L'(t) = N\ E'(t) + \frac{d}{dt} \int_\Omega \left[(2m.\nabla u + (n-1)\, u)\, .u_t \right] dx, \tag{1.3.31}$$

à partir de (1.3.4) et (1.3.15), nous avons

$$\begin{aligned} L'(t) \quad \leq \quad & -(Nk - C) \int_\Omega |\nabla \theta|^2\, dx - \frac{N}{2} \eta \int_{\Gamma_1} |u_t|^2\, d\Gamma - \frac{N}{2} \eta \int_{\Gamma_1} k'' \otimes u d\Gamma \\ & - \int_\Omega |u_t|^2\, dx - \mu \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{\mu \delta}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla u|^2\, d\Gamma - \frac{1}{2} (\mu + \lambda) \int_\Omega (div\ u)^2\, dx \\ & - (\mu + \lambda) \int_{\Gamma_1} (div\ u)^2\, d\Gamma + \frac{C}{\mu} \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 \\ & + Ck^2(t) \int_{\Gamma_1} |u|^2\, d\Gamma - C\mu \int_{\Gamma_1} k' \otimes u\ d\Gamma + \int_{\Gamma_1} |u|^2\, d\Gamma \\ & - \left(\frac{2n}{p} - (n-1) \right) \int_\Omega |u|^p\, dx + \frac{2R}{p} \int_{\Gamma_1} |u|^p\, d\Gamma, \end{aligned}$$

où $R = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}$.

On utilise (1.3.10) et (1.3.11), on trouve

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -(Nk - C)\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx - \left(\mu - c_0 - Ck^2(t) - \alpha\frac{2R}{p}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ & - \int_\Omega |u_t|^2 dx - \frac{1}{2}(\mu+\lambda)\int_\Omega (div\ u)^2 dx \\ & - \left(\frac{N}{2}\eta - \frac{C}{\mu}\right)\int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma - \frac{N}{2}\eta\int_{\Gamma_1} k'' \otimes ud\Gamma - C\mu\int_{\Gamma_1} k' \otimes u\ d\Gamma \\ & - (\mu+\lambda)\int_{\Gamma_1} (divu)^2 d\Gamma - \left(\frac{2n}{p} - (n-1)\right)\int_\Omega |u|^p dx. \end{aligned} \tag{1.3.32}$$

Maintenant, en utilisant le fait que $\lim_{t\to+\infty} k(t) = 0$, on choisit les constantes positives c_0, α assez petites et N assez grand tels que

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -\int_\Omega |u_t|^2 dx - a_1\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx - a_2\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - a_3\int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma \\ & -\frac{1}{2}(\mu+\lambda)\int_\Omega (divu)^2 dx - C\mu\int_{\Gamma_1} k' \otimes ud\Gamma - \left(\frac{2n}{p} - (n-1)\right)\int_\Omega |u|^p dx, \end{aligned} \tag{1.3.33}$$

où

$$a_1 = (Nk - C) > 0, a_2 = \mu - c_0 - Ck^2(t) - \alpha\frac{2R}{p}, a_3 = \frac{N}{2}\eta - \frac{C}{\mu} > 0.$$

Ainsi, pour t_0 suffisamment grand, (1.3.32) se réduit à

$$L'(t) \leq -\alpha E(t) - \lambda\int_{\Gamma_1} k' \otimes u\ d\Gamma,\ \ \forall t \geq t_0, \tag{1.3.34}$$

où α, λ sont des constantes positives.

Multiplions (1.3.34) par $\gamma(t)$ et on utilise (1.3.1) et (1.3.2), on trouve

$$\begin{aligned} \gamma(t) L'(t) & \leq -\alpha\gamma(t) E(t) - \lambda\gamma(t)\int_{\Gamma_1} k' \otimes u\ d\Gamma, \forall t \geq t_0 \\ \gamma(t) L'(t) & \leq -\alpha\gamma(t) E(t) + c\int_{\Gamma_1} k'' \otimes u\ d\Gamma, \forall t \geq t_0, \end{aligned}$$

c est une constante positive.

On conclut à partir de (1.3.4) que

$$\gamma(t) L'(t) \leq -\alpha\gamma(t) E(t) - cE'(t), \forall t \geq t_0,$$

donc

$$\gamma(t) L'(t) + cE'(t) \leq -\alpha\gamma(t) E(t), \ \ \forall t \geq t_0$$

par suite

$$\frac{d}{dt}(\gamma(t) L(t) + cE(t)) - \gamma'(t) L(t) \leq -\alpha\gamma(t) E(t), \forall t \geq t_0. \tag{1.3.35}$$

On note par

$$H(t) = \gamma(t) L(t) + cE(t) \sim E(t), \tag{1.3.36}$$

on obtient

$$H'(t) \leq -a\gamma(t) H(t), \ \ \forall t \geq t_0, \tag{1.3.37}$$

c'est-à-dire

$$\frac{dH}{dt} \leq -a\gamma(t) H(t), \ \ \forall t \geq t_0, \tag{1.3.38}$$

une intégration simple de (1.3.38) sur (t_0, t) nos donne

$$H(t) \leq H(t_0) e^{-a\int_{t_0}^{t}\gamma(s)ds}, \ \ \forall t \geq t_0,$$

d'après $(1.3.36)$, on obtient pour une constante positive c

$$E(t) \leq cE(t_0) e^{-a\int_{t_0}^{t}\gamma(s)ds}, \ \ \forall t \geq t_0,$$

on utilise (1.3.4), on obtient

$$E(t) \leq cE(0) e^{a\int_0^{t_0}\gamma(s)ds} e^{-a\int_0^{t}\gamma(s)ds}, \ \ \forall t \geq t_0.$$

Ceci termine la preuve du théorème 1.3.8. ■

Chapitre 2

Stabilisation frontière de type mémoire en thermoviscoélasticité

Sommaire

Ce chapitre est consacré à l'étude la stabilisation d'un problème thermoviscoélastique avec un terme source non linéaire de type polynomial et des conditions aux limites de type mémoire dans un domaine Ω ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ de frontière régulière Γ. Supposons que Γ est constituée de deux parties fermés et disjointes Γ_0 et Γ_1. En se basant sur les hypothèses qui ont été proposées dans [30], nous allons démontrer la décroissance uniforme de l'énergie.

2.1 Position du problème

On considère le système suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - k_0 \triangle u(t) - (\mu+\lambda)\nabla(divu) + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)\,ds & \\ +bu_t + \beta\nabla\theta = u|u|^{p-2}, & \text{dans } \Omega\times(0,\infty) \\ c\theta_t - \triangle\theta + \beta divu_t = 0, & \text{dans } \Omega\times(0,\infty) \\ k_0\dfrac{\partial u}{\partial\nu} + (\mu+\lambda)\,divu.\nu - \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s)).\nu\,ds + h(u_t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1\times[0,\infty) \\ u(x,0)=u_0,\ u_t(x,0)=u_1,\ \theta(x,0)=\theta_0, & x\in\Omega \\ u=0, & \text{sur } \Gamma_0\times[0,\infty) \\ \theta=0, & \text{sur } \Gamma\times[0,\infty), \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où k_0, b, β, c, sont des constantes positives, μ, $\lambda > 0$, sont des coefficients de Lamé, $p > 2$, $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^n$, c'est le vecteur de déplacement, $\theta = \theta(x,t)$ représente la différence de température. g est une fonction de relaxation, h est une fonction satisfaisant certaines conditions donner dans $(G3)$. Le système (2.1.1) est un modèle d'un corps thermoviscoélastique du type de Boltzmann avec une source.

2.2 Hypothèses et résultats principaux

Afin d'étudier la stabilisation de la solution du problème (2.1.1), nous introduisons les hypothèses suivantes :

- **Hypothèses**

$(G1)$ $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction de classe C^1, bornée et vérifie

$$g(0) > 0,\ \ k_0 - \int_0^\infty g(s)\,ds = l > 0. \tag{2.2.1}$$

$(G2)$ $\xi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante et différentiable telle que

$$g'(t) \le -\xi(t)\,g(t),\ \ \forall t\ge 0, \qquad \int_0^\infty \xi(s)\,ds = +\infty. \tag{2.2.2}$$

$(G3)$ $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante qui vérifie

$$h(s)\,s \geq \alpha\,|s|^2\,,\ \ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{2.2.3}$$

$$|h(s)| \leq \gamma\,|s|\,,\ \ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{2.2.4}$$

où α, γ sont des constantes positives.

• Il existe une constante positive B telle que

$$\forall u \in V,\ \ \|u(t)\|_p \leq B\,\|\nabla u(t)\|_2\,, \tag{2.2.5}$$

où

$$\begin{aligned} 2 &< p \leq 2n/(n-2)\,,\, n \geq 3, \\ p &> 2,\ \ n = 1{,}2, \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

et on considère l'espace suivant

$$V = H^1_{\Gamma_0} = \left\{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\right\}.$$

On pose

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2}\left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{p}\|u\|_p^p\,, \\ E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + (\mu+\lambda)\,\|div\ u\|_2^2 + \frac{c}{2}\|\theta\|_2^2 + J(u(t))\,,\ \text{ pour } t \in [0{,}T)\,, \\ I(t) &= I(u(t)) = \left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) - \|u\|_p^p\,, \\ H &= \{u \in V,\, I(t) > 0\} \cup \{0\}\,, \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

où $E(t)$ c'est la fonctionnelle d'énergie associée au problème (2.1.1) et

$$(g \circ v)(t) = \int_0^t g(t-s)\,|v(t) - v(s)|^2\,ds. \tag{2.2.8}$$

Nous avons encore les résultats suivants

Lemme 2.2.11. *Pour tout* $u \in C^1(0,T;V)$, *on a*

$$\int_\Omega \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\nabla u_t(t)\,dsdx = -\frac{1}{2}\int_\Omega g(t)|\nabla u(t)|^2\,dx + \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(g \circ \nabla u)(t) - \int_\Omega \int_0^t g(s)\,ds\,|\nabla u(t)|^2\,dx\right] \tag{2.2.9}$$

et

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)|\nabla u(t) - \nabla u(s)|\,ds\right)^2 dx \leq (k_0 - l)(g \circ \nabla u)(t). \tag{2.2.10}$$

Lemme 2.2.12. *Selon les hypothèses* $(G1)$-$(G2)$*, la fonctionnelle d'énergie définie dans* (2.2.7) *est décroissante sur* $[0,\infty)$ *et on a*

$$E'(t) = -\frac{1}{2}\int_\Omega g(t)|\nabla u(t)|^2\,dx + \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - b\int_\Omega |u_t(t)|^2\,dx$$
$$-\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx - \int_{\Gamma_1} u_t h(u_t)\,d\Gamma, \quad \textit{pour tout } t > 0. \tag{2.2.11}$$

Démonstration. Multiplions la première équation dans (2.1.1) par u_t et la seconde équation dans (2.1.1) par θ respectivement, intégrons le résultat obtenu sur Ω, utilisons la formule de Green, les conditions aux limites et les hypothèses $(G1)$, $(G2)$, on obtient alors $(2.2.11)$. ■

Lemme 2.2.13. *Supposons que* $2 < p \leq 2n/(n-2)$, $n \geq 3$. *Sous les hypothèses* $(G1)$, $(G2)$, *avec* $(u_0,u_1,\theta_0) \in H \times L^2(\Omega) \times H_0^1$, *tels que*

$$\beta = \frac{B^p}{l}\left(\frac{2p}{(p-2)\,l}E(0)\right)^{(p-2)/2} < 1, \tag{2.2.12}$$

alors $u(t) \in H$, *pour tout* $t \in [0,T)$, *où* B *est la constante de Poincaré et* $E(0)$ *désigne l'énergie initiale.*

Démonstration. puisque $u_0 \in H$, alors $I(u_0) > 0$, donc par continuité, il existe $T_m < T$ tel que

$$I(u(t)) \geq 0, \quad \text{pour tout } t \in [0,T_m],$$

par conséquent on obtient

$$\begin{aligned}
J(t) &= \frac{1}{2}\left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{p}\|u\|_p^p, \\
&= \left(\frac{p-2}{2p}\right)\left(\left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 + (g\circ\nabla u)(t)\right) + \frac{1}{p}I(t) \\
&\geq \left(\frac{p-2}{2p}\right)\left(\left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 + (g\circ\nabla u)(t)\right). \qquad (2.2.13)
\end{aligned}$$

En utilisant $(G1)$, (2.2.7), (2.2.11) et (2.2.13) , nous avons

$$\begin{aligned}
l\|\nabla u\|_2^2 &\leq \left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \left(\frac{2p}{p-2}\right)J(t) \\
&\leq \left(\frac{2p}{p-2}\right)E(t) \leq \left(\frac{2p}{p-2}\right)E(0), \quad \forall t\in[0,T_m], \qquad (2.2.14)
\end{aligned}$$

exploitons $(G1)$, (2.2.5) , (2.2.12) et (2.2.14), il résulte

$$\begin{aligned}
\|u\|_p^p &\leq B^p\|\nabla u(t)\|_2^p \\
&\leq \frac{B^p}{l}\|\nabla u(t)\|_2^{p-2}\, l\,\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \beta l\|\nabla u(t)\|_2^2 \\
&\leq \beta\left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 \\
&< \left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2, \quad \forall t\in[0,T_m], \qquad (2.2.15)
\end{aligned}$$

donc

$$I(t) = \left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|_2^2 + (g\circ\nabla u)(t) - \|u\|_p^p > 0,$$

pour tout $t\in[0,T_m]$. En répétant cette procédure et en utilisant le fait que

$$\lim_{t\to T_m}\frac{B^p}{l}\left(\frac{2p}{(p-2)\,l}E(t)\right)^{(p-2)/2} \leq \frac{B^p}{l}\left(\frac{2p}{(p-2)\,l}E(0)\right)^{(p-2)/2} < 1.$$

Ainsi T_m est étendue à T, c'est-à-dire $u(t)\in H$ pour tout $t\in[0,T)$. ■

Maintenant, on va étudier le comportement asymptotique de l'énergie $E(t)$.

Tout d'abord, nous définissons certaines fonctionnelles et établissons lemme 2.2.14.

Soit :

$$G(t) = E(t) + \varepsilon_1\Phi(t) + \varepsilon_2\Psi(t), \qquad (2.2.16)$$

où

$$\Phi(t) = \int_\Omega u.u_t \, dx, \tag{2.2.17}$$

et

$$\Psi(t) = -\int_\Omega u_t \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\, ds\, dx, \tag{2.2.18}$$

et ε_1, ε_2 sont des constantes positives à choisir ultérieurement.

Lemme 2.2.14. *Il existe deux constantes positives β_1 et β_2 telles que*

$$\beta_1 E(t) \leq G(t) \leq \beta_2 E(t), \tag{2.2.19}$$

pour ε_1, ε_2 assez petit.

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Young, (2.2.10), on déduit que

$$|\Phi(t)| \leq \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{B^2}{2}\|\nabla u\|_2^2, \tag{2.2.20}$$

$$\begin{aligned} |\Psi(t)| &\leq \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\, ds\right)^2 dx \qquad (2.2.21)\\ &\leq \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_0^t g(s)\, ds \int_\Omega \int_0^t g(t-s)|u(t)-u(s)|^2\, ds\, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{(k_0-l)B^2}{2}(g\circ\nabla u)(t). \end{aligned}$$

Par conséquent, remplaçons (2.2.20) , (2.2.21) dans (2.2.16), on obtient

$$\begin{aligned} G(t) &= E(t) + \varepsilon_1\Phi(t) + \varepsilon_2\Psi(t) \\ &\leq E(t) + c_1\|u_t\|_2^2 + c_2\|\nabla u\|_2^2 + c_3(g\circ\nabla u)(t), \qquad (2.2.22)\\ G(t) &\geq E(t) - c_4\left(\|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + (g\circ\nabla u)(t)\right), \qquad (2.2.23) \end{aligned}$$

où $c_1 = (\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2$, $c_2 = \varepsilon_1 B^2/2$, $c_3 = (k_0-l)B^2\varepsilon_2/2$ et $c_4 = \max(c_1,c_2,c_3)$. Donc, pour ε_1, ε_2 suffisamment petits, il existe deux constantes positives β_1 et β_2 telles que

$$\beta_1 E(t) \leq G(t) \leq \beta_2 E(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.2.24}$$

■

Lemme 2.2.15. *En utilisant* $(G1)$*-*$(G3)$ *et* (2.2.5)*, alors la fonctionnelle définie par*

$$\Phi(t) = \int_\Omega u u_t \; dx,$$

vérifie

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &\leq -\frac{l}{4}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \left(1 + \frac{2(Bb)^2}{l}\right)\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{(k_0 - l)}{2l}(g \circ \nabla u)(t) \\ &\quad - (\mu + \lambda)\int_\Omega |div \; u|^2 dx + \frac{2(\gamma B)^2}{l}\int_{\Gamma_1} u_t^2 \; d\Gamma \\ &\quad + \int_\Omega |u|^p dx + \frac{\beta^2}{2l}\int_\Omega |\theta|^2 dx. \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

Démonstration. En utilisant la première équation dans (2.1.1), on voit facilement que

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \int_\Omega u_t^2 dx - k_0\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - (\mu + \lambda)\int_\Omega |div \; u|^2 dx \\ &\quad + \int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\, ds \; dx - \int_{\Gamma_1} h(u_t)\, u \; d\Gamma \\ &\quad - b\int_\Omega u u_t dx + \beta\int_\Omega \nabla u.\theta dx + \int_\Omega |u|^p dx. \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

Les quatrième et cinquième termes du deuxième membre de (2.2.26) peut être estimé à partir de l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Young et $(G1)$ comme suit

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\, ds dx \\ \leq \; &\frac{k_0}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2k_0}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\, ds\right)^2 dx \\ \leq \; &\frac{k_0}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2k_0}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t) + \nabla u(t))\, ds\right)^2 dx, \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

sachant que

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\left(\nabla u(s) - \nabla u(t) + \nabla u(t)\right) ds \right)^2 dx \\
\leq \; & \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\left(|\nabla u(s) - \nabla u(t)| + |\nabla u(t)|\right) ds \right)^2 dx \\
\leq \; & \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\left(|\nabla u(s) - \nabla u(t)|\right) ds \right)^2 dx + \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\left(|\nabla u(t)|\right) ds \right)^2 dx \\
& +2 \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\left(|\nabla u(s) - \nabla u(t)|\right) ds \right) \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\left(|\nabla u(t)|\right) ds \right) dx \\
\leq \; & (1+\eta) \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\left(|\nabla u(t)|\right) ds \right)^2 dx \\
& + \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\left(|\nabla u(s) - \nabla u(t)|\right) ds \right)^2 dx, \; \eta > 0, \qquad (2.2.28)
\end{aligned}$$

ainsi, on utilise le fait que

$$\int_0^t g(s)\, ds \leq \int_0^\infty g(s)\, ds = k_0 - l, \qquad (2.2.29)$$

alors

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s) \nabla u(s)\, ds \; dx \\
\leq \; & \left[\frac{k_0}{2} + \frac{1}{2k_0}(1+\eta)(k_0 - l)^2 \right] \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2k_0}\left(1 + \frac{1}{\eta}\right)(k_0 - l)(g \circ \nabla u)(t).
\end{aligned} \qquad (2.2.30)$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Young, (G_3) et (2.2.5), pour δ_1, $\delta_2 > 0$, nous constatons que

$$\int_{\Gamma_1} h(u_t)\, u \; d\Gamma \leq \delta_1 B^2 \|\nabla u\|_2^2 + \frac{\gamma^2}{4\delta_1} \int_{\Gamma_1} u_t^2 \; d\Gamma, \qquad (2.2.31)$$

$$b \int_\Omega u u_t dx \leq \delta_2 B^2 \|\nabla u\|_2^2 + \frac{b^2}{4\delta_2} \int_\Omega u_t^2 \; dx \qquad (2.2.32)$$

et pour $\delta_3 > 0$, on a

$$\beta \int_\Omega \nabla u . \theta dx \leq \delta_3 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\beta^2}{4\delta_3} \int_\Omega |\theta|^2 dx. \qquad (2.2.33)$$

En remplaçant (2.2.30) - (2.2.33) dans (2.2.26) , on obtient

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) \leq & -\left(\frac{k_0}{2}-\frac{1}{2k_0}(1+\eta)(k_0-l)^2-B^2(\delta_1+\delta_2)-\delta_3\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
& \left(1+\frac{b^2}{4\delta_2}\right)\int_\Omega u_t^2dx+\frac{1}{2k_0}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)(k_0-l)(g\circ\nabla u)(t)-(\mu+\lambda)\int_\Omega |div\ u|^2\,dx \\
& +\frac{\gamma^2}{4\delta_1}\int_{\Gamma_1} u_t^2\ d\Gamma+\frac{\beta^2}{4\delta_3}\int_\Omega |\theta|^2\,dx+\int_\Omega |u|^p\,dx. \qquad (2.2.34)
\end{aligned}$$

Maintenant, on choisit $\eta = l/(k_0-l)$ et $\delta_1=\delta_2=l/8B^2$, $\delta_3=l/2$.

Ainsi, (2.2.25) est établie. ■

Lemme 2.2.16. *En utilisant* $(G1)$-$(G3)$ *et* (2.2.6)*, alors la fonctionnelle*

$$\Psi(t) = -\int_\Omega u_t\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\ dx,$$

satisfait pour certaines constantes positives c_5, c_6,

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) \leq & -\left(\int_0^t g(s)\,ds-\delta\left(b^2+1\right)\right)\|u_t\|_2^2+\delta c_5\|\nabla u\|_2^2+c_6(g\circ\nabla u)(t) \\
& +(\mu+\lambda)^2\delta\int_\Omega (div\ u)^2\,dx+\delta\gamma^2\int_{\Gamma_1} u_t^2\ d\Gamma \\
& -\frac{g(0)B^2}{4\delta}(g'\circ\nabla u)(t)+\beta^2\delta\int_\Omega |\theta|^2\,dx. \qquad (2.2.35)
\end{aligned}$$

Démonstration. Un calcul direct nous donne

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) = & -\int_\Omega u_{tt}\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\ dx-\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\int_\Omega u_t^2\ dx, \\
& -\int_\Omega u_t\int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))\,dsdx, \qquad (2.2.36)
\end{aligned}$$

en utilisant (2.1.1) on trouve

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &= \int_\Omega k_0 \nabla u(t) \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\, ds \right) dx \\
&+ (\mu+\lambda) \int_\Omega div\ u \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\, ds \right) dx \\
&- \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) \nabla u(s)\, ds \right) \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\, ds \right) dx \\
&+ b \int_\Omega u_t \left(\int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s))\, ds \right) dx \\
&+ \int_{\Gamma_1} h(u_t) \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s))\, ds\ d\Gamma \\
&- \int_\Omega u\,|u|^{p-2} \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s))\, ds\ dx \\
&- \int_\Omega u_t \int_0^t g'(t-s)(u(t) - u(s))\, ds\ dx - \left(\int_0^t g(s)\, ds \right) \int_\Omega u_t^2\ dx \\
&- \beta \int_\Omega \theta \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\, ds\ dx. \qquad (2.2.37)
\end{aligned}$$

De façon similaire à (2.2.26), nous estimons le second membre de (2.2.37). En utilisant l'inégalité de Young, l'inégalité de Hölder, (2.2.10), (G_1), (G_2) et (G_3), pour $\delta > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
& \left| \int_\Omega k_0 \nabla u(t) \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\, ds \right) dx \right| \\
\leq\ & k_0^2 \delta \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{4\delta} \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\, ds \right)^2 dx \\
\leq\ & k_0^2 \delta \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{4\delta} \int_0^t g(s)\, ds \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\, |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2\, ds\ dx \\
\leq\ & k_0^2 \delta \|\nabla u\|_2^2 + \frac{k_0 - l}{4\delta} (g \circ \nabla u)(t), \qquad (2.2.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mu+\lambda) \int_\Omega div\ u \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\, ds \right) dx \\
\leq\ & (\mu+\lambda)^2 \delta \int_\Omega (div\ u)^2 + \frac{k_0 - l}{4\delta} (g \circ \nabla u)(t), \qquad (2.2.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\,ds\right)\left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,ds\right)dx \\
\leq\;& \delta\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\,ds\right)^2 dx \\
&+\frac{1}{4\delta}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,ds\right)^2 dx \\
\leq\;& 2\delta(k_0-l)^2\|\nabla u\|_2^2+\left(2\delta+\frac{1}{4\delta}\right)(k_0-l)(g\circ\nabla u)(t). \qquad (2.2.40)
\end{aligned}$$

Pour le quatrième et le cinquième terme dans le second membre de (2.2.37), nous avons

$$\begin{aligned}
&b\int_{\Omega}u_t\left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\right)dx \\
\leq\;& \delta b^2\int_{\Omega}u_t^2\,dx+\frac{(k_0-l)B^2}{4\delta}(g\circ\nabla u)(t), \qquad (2.2.41)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_1}h(u_t)\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\;d\Gamma \\
\leq\;& \delta\gamma^2\int_{\Gamma_1}u_t^2\,d\Gamma+\frac{(k_0-l)B^2}{4\delta}(g\circ\nabla u)(t). \qquad (2.2.42)
\end{aligned}$$

Encore une fois, en utilisant l'inégalité de Young, l'inégalité de Hölder, (2.2.1) , (2.2.5) et (2.2.14) , on estime le sixième terme dans le second membre de (2.2.37), par

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}u|u|^{p-2}\left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\right)dx \\
\leq\;& \delta\|u\|_{2(p-1)}^{2(p-1)}+\frac{(k_0-l)B^2}{4\delta}(g\circ\nabla u)(t) \\
\leq\;& \delta B^{2(p-1)}\left(\frac{2pE(0)}{l(p-2)}\right)^{p-2}\|\nabla u\|_2^2+\frac{(k_0-l)B^2}{4\delta}(g\circ\nabla u)(t). \qquad (2.2.43)
\end{aligned}$$

Concernant le septième et le huitième terme dans le second membre de (2.2.37), en utilisant l'inégalité de Young, l'inégalité de Hölder, (G_1) et (G_2), nous avons

$$\int_{\Omega}u_t\int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\;dx\leq\delta\|u_t\|_2^2-\frac{g(0)B^2}{4\delta}(g'\circ\nabla u)(t), \qquad (2.2.44)$$

$$\beta\int_{\Omega}\theta\left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,ds\right)dx\leq\beta^2\delta\int_{\Omega}|\theta|^2\,dx+\frac{(k_0-l)}{4\delta}(g\circ\nabla u)(t). \qquad (2.2.45)$$

En combinant des estimations (2.2.38)-(2.2.45) , alors (2.2.36) devient

$$\begin{aligned}\Psi'(t) \leq & -\left(\int_0^t g(s)\,ds - \delta\left(b^2+1\right)\right)\|u_t\|_2^2 + \delta c_5 \|\nabla u\|_2^2 + c_6 (g \circ \nabla u)(t) \\ & + (\mu+\lambda)^2 \delta \int_\Omega (div\ u)^2\,dx + \delta\gamma^2 \int_{\Gamma_1} u_t^2\ d\Gamma \\ & - \frac{g(0)\,B^2}{4\delta}(g' \circ \nabla u)(t) + \beta^2\delta \int_\Omega |\theta|^2\,dx, \end{aligned} \tag{2.2.46}$$

où

$$\begin{aligned} c_5 &= k_0^2 + 2(k_0-l)^2 + B^{2(p-1)}\left(\frac{2pE(0)}{l(p-2)}\right)^{p-2} > 0, \\ c_6 &= (k_0-l)\left(\frac{1}{\delta} + 2\delta + \frac{3B^2}{4\delta}\right) > 0, \end{aligned}$$

d'où la preuve du 2.2.16. ■

2.3 Résultat de décroissance générale

On suppose, dans la suite, que la solution du problème (2.1.1) existe, unique et suffisamment régulière. Nous pouvons maintenant énoncer et prouver notre résultat principal.

Théorème 2.3.17. *Soit* $(u_0,u_1,\theta_0) \in \left(V \times L^2(\Omega) \times H_0^1\right)$ *donné et satisfaisant* (2.2.12), *supposons* (2.2.6) *et que les hypothèses* (G_1) *et* (G_2) *sont vérifiées, alors, pour tout* $t_0 > 0$, *il existe deux constantes positives* k_1 *et* k_2 *telles que l'énergie associée au problème* (2.1.1) *satisfait*

$$E(t) \leq k_1 e^{-k_2 \int_{t_0}^t \xi(s)ds}, \quad pour\ t \geq t_0. \tag{2.3.1}$$

Démonstration. A l'aide de (2.2.11), (2.2.3), (2.2.16), (2.2.25) et (2.2.35), on trouve

$$\begin{aligned} G'(t) &\leq -\left(b+\varepsilon_2\left(g_0-\delta b^2\right)-\varepsilon_1\left(1+\frac{2(Bb)^2}{l}\right)\right)\|u_t\|_2^2 \\ &\quad -\left(\frac{\varepsilon_1 l}{4}-\varepsilon_2\delta c_5\right)\|\nabla u\|_2^2+\left(\varepsilon_2 c_6+\frac{(k_0-l)\,\varepsilon_1}{2l}\right)(g\circ\nabla u)(t) \\ &\quad -(\mu+\lambda)\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\delta(\mu+\lambda)\right)\int_\Omega |div\ u|^2\,dx \\ &\quad -\left(B'-\beta^2\left(\frac{\varepsilon_1}{2l}+\delta\varepsilon_2\right)\right)\|\theta\|_2^2+\varepsilon_1\|u\|_p^p \\ &\quad -\left(\alpha-\frac{\varepsilon_1 2(\gamma B)^2}{l}-\varepsilon_2\delta\gamma^2\right)\int_{\Gamma_1} u_t^2\,d\Gamma \\ &\quad +\left(\frac{1}{2}-\varepsilon_2\frac{g(0)\,B^2}{4\delta}\right)(g'\circ\nabla u)(t), \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

on utilise le fait que

$$\int_0^t g(s)\,ds \geq \int_0^{t_0} g(s)\,ds = g_0, \quad \forall t\geq t_0, \tag{2.3.3}$$

et que g est positive et continue avec $g(0)>0$, on choisit ε_1, ε_2, δ suffisamment petites de sorte que

$$k_1 = b+\varepsilon_2\left(g_0-\delta\left(b^2+1\right)\right)-\varepsilon_1\left(1+\frac{2(Bb)^2}{l}\right) > 0, \tag{2.3.4}$$

$$k_2 = \frac{\varepsilon_1 l}{4}-\varepsilon_2\delta c_5 > 0,$$

$$k_3 = (\mu+\lambda)\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2(\mu+\lambda)\,\delta\right) > 0,$$

$$k_4 = B'-\beta^2\left(\frac{\varepsilon_1}{2l}+\delta\varepsilon_2\right) > 0, \tag{2.3.5}$$

$$k_5 = \alpha-\frac{\varepsilon_1 2(\gamma B)^2}{l}-\varepsilon_2\delta\gamma^2 > 0, \tag{2.3.6}$$

$$k_6 = \frac{1}{2}-\varepsilon_2\frac{g(0)\,B^2}{4\delta} > 0.$$

Ainsi, pour toute $t_0>0$, on arrive à

$$\begin{aligned} G'(t) &\leq -k_1\|u_t\|_2^2-k_2\|\nabla u\|_2^2+c_7(g\circ\nabla u)(t)-k_3\int_\Omega |div\ u|^2\,dx \\ &\quad -k_4\|\theta\|_2^2-k_5\int_{\Gamma_1} u_t^2\,d\Gamma+\varepsilon_1\|u\|_p^p+c_8(g'\circ\nabla u)(t), \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

par suite

$$G'(t) \leq -c_9 E(t) + c_{10} (g \circ \nabla u)(t). \tag{2.3.8}$$

Il résulte d'après (2.3.8), (2.2.2) et (2.2.11) que

$$\begin{aligned} \xi(t) G'(t) &\leq -c_9 \xi(t) E(t) + c_{10} \xi(t) (g \circ \nabla u)(t) \\ &\leq -c_9 \xi(t) E(t) - c_{10} (g' \circ \nabla u)(t) \\ &\leq -c_9 \xi(t) E(t) - 2c_{10} E'(t) \quad \text{pour } t \geq 0, \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

où c_i, $i = 7{,}8{,}9{,}10$ sont des constantes positives.

Dans la suite, nous introduisons la fonctionnelle $L(t)$ comme suite

$$L(t) = \xi(t) G(t) + 2c_{10} E(t),$$

il est facile de montrer que $L(t) \sim E(t)$.

De (2.3.9) il résulte

$$L'(t) \leq -c_9 \xi(t) E(t) \leq -k \xi(t) L(t), \quad \text{pour } t \geq 0, \tag{2.3.10}$$

où k est une constante positive.

L'intégration de l'inégalité précédente entre t_0 et t, conduit à

$$L(t) \leq L(t_0) e^{-k \int_{t_0}^{t} \xi(s) ds}, \quad \text{pour } t \geq t_0. \tag{2.3.11}$$

Encore une fois, en utilisant le fait que $L(t)$ est équivalent à $E(t)$, on conclut que

$$E(t) \leq k_1 e^{-k_2 \int_{t_0}^{t} \xi(s) ds}, \text{ pour } t \geq t_0, \tag{2.3.12}$$

où k_1, k_2 sont des constantes positives. Ceci termine la preuve du théorème 2.3.17. ■

Chapitre 3

Stabilisation distribuée et frontière en thermoviscoélasticité

Sommaire

3.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ de frontière suffisamment régulière Γ. Notre objectif est d'étudier la stabilisation du problème thermoviscoélastique avec amortissement interne et frontière et source non linéaire suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - k_0 \triangle u(t) - (\mu+\lambda) \nabla (divu) + \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) \, ds & \\ +\alpha(t) w(u_t) + \beta \nabla \theta = u |u|^{p-2}, & \text{dans } \Omega \times (0,\infty) \\ c\theta_t - \triangle \theta + \beta divu_t = 0, & \text{dans } \Omega \times (0,\infty) \\ k_0 \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu+\lambda) divu.\nu - \int_0^t g(t-s) (\nabla u(s)) \nu ds + h(u_t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0, \, u_t(x,0) = u_1, \, \theta(x,0) = \theta_0, & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times [0,\infty) \\ \theta = 0, & \text{sur } \Gamma \times [0,\infty), \end{cases} \tag{3.1.1}$$

avec les mêmes notations qu'au chapitre précédent, où α et w sont des fonctions positives particulières.

Ce travail est organisé de la manière suivante. Dans la section 2, nous présentons quelques lemmes et notations nécessaires pour la démonstration. La preuve de notre résultat principal sera donnée dans la section 3.

3.2 Notations et hypothèses

(G_1) $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ est une fonction de classe C^1, bornée et vérifie

$$g(0) > 0, \;\; k_0 - \int_0^\infty g(s) \, ds = l > 0. \tag{3.2.1}$$

(G_2) $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante différentiable telle que

$$g'(t) \leq -\alpha(t) g(t), \;\; \forall t \geq 0. \tag{3.2.2}$$

(G_3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante telle que

$$h(s) s \geq \alpha |s|^2, \;\; \forall s \in \mathbb{R} \tag{3.2.3}$$

$$|h(s)| \leq \gamma |s|, \;\; \forall s \in \mathbb{R}, \tag{3.2.4}$$

où α, γ sont des constantes positives.

(G_4) $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante dans C^0 telle que il existe des constantes ε, c_1, $c_2 > 0$ et une fonction croissante $G \in C^2([0, +\infty))$, avec $G(0) = 0$ et G est une fonction linéaire ou strictement convexe dans C^2 sur $[0,\varepsilon)$, telle que

$$\begin{aligned} c_1 |s| &\leq |w(s)| \leq c_2 \min \{|s|, |s|^q\} \quad \text{si } |s| \geq \varepsilon \\ s^2 + w^2(s) &\leq G^{-1}(sw(s)) \quad \text{si } |s| \leq \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

q satisfait

$$\begin{aligned} 1 &< q \leq \frac{n+2}{n-2}, \quad n \geq 3, \\ q &> 1, \quad n = 1,2. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Remarque 3.2.18. L'hypothèse (G_4) implique que $s.w(s) > 0$, pour tout $s \neq 0$.

On définit l'espace de Hilbert suivant

$$V = H^1_{\Gamma_0} = \left\{ u \in \left(H^1(\Omega)\right)^n ; \, u = 0 \text{ on } \Gamma_0 \right\}.$$

On s'intéresse dans la suit à l'étude de la stabilisation de la solution du problème (3.1.1).

Nous définissons les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2}\left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{p}\|u\|_p^p, \\ E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + (\mu + \lambda)\|div\ u\|_2^2 + \frac{c}{2}\|\theta\|_2^2 + J(u(t)), \ \text{ pour } t \in [0,T), \\ I(t) &= I(u(t)) = \left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) - \|u\|_p^p, \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

où $E(t)$ c'est la fonctionnelle d'énergie associée au problème (3.1.1) et

$$(g \circ v)(t) = \int_0^t g(t-s)\,|v(t) - v(s)|^2\,ds. \tag{3.2.8}$$

En adoptant la preuve du [34], nous avons les résultats suivants.

Lemme 3.2.19. *Pour toute solution* $u \in C^1(0,T;H^1(\Omega))$ *du système, nous avons*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\nabla u_t ds dx &= -\frac{1}{2}\int_\Omega g(t)|\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) \\ &\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(g\circ \nabla u)(t) - \int_\Omega \int_0^t g(s)ds|\nabla u(t)|^2 dx\right].\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Lemme 3.2.20. *Soit* $u(x,t)$ *solution du problème* (3.1.1), *sous les hypothèses* (G_1)-(G_4), *alors la fonctionnelle d'énergie* $E(t)$ *est décroissante sur* $[0,T)$ *et vérifie*

$$E'(t) = -\frac{1}{2}\int_\Omega g(t)|\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{2}(g'\circ \nabla u)(t) - \alpha(t)\int_\Omega u_t w(u_t)dx$$

$$-\int_\Omega |\nabla \theta|^2 dx - \int_{\Gamma_1} u_t h(u_t)d\Gamma \leq 0. \tag{3.2.10}$$

Démonstration. Multiplions la première équation dans (3.1.1) par u_t et la seconde équation dans (3.1.1) par θ respectivement, intégrons le résultat obtenu sur Ω, utilisons la formule de Green, les conditions aux bords et les hypothèses (G_1), (G_2), on obtient alors (3.2.10). ■

Lemme 3.2.21. *En utilisant* (G_1), (G_2), *si* $(u_0,u_1,\theta_0) \in V \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, *de sorte que*

$$\beta = \frac{B^p}{l}\left(\frac{2p}{(p-2)l}E(0)\right)^{(p-2)/2} < 1, \tag{3.2.11}$$

avec $I(u_0) > 0$, *alors* $I(u(t)) > 0$, *pour* $t > 0$, *où* B *est une constante de Poincaré et* $E(0) = E(u_0,u_1,\theta_0)$.

Démonstration. Puisque $I(u_0) > 0$, alors il existe (par continuité) $T_m < T$ tel que

$$I(u(t)) \geq 0, \ \ \forall t \in [0,T_m).$$

Par conséquent on obtient

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2}\left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{p}\|u\|_p^p \\ &= \left(\frac{p-2}{2p}\right)\left(\left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 + (g\circ\nabla u)(t)\right) + \frac{1}{p}I(t) \\ &\geq \left(\frac{p-2}{2p}\right)\left(\left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 + (g\circ\nabla u)(t)\right). \qquad (3.2.12) \end{aligned}$$

En utilisant (G_1), (3.2.7), (3.2.10) et (3.2.12) , on obtient

$$\begin{aligned} l\|\nabla u\|_2^2 &\leq \left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \left(\frac{2p}{p-2}\right)J(t) \\ &\leq \left(\frac{2p}{p-2}\right)E(t) \leq \left(\frac{2p}{p-2}\right)E(0), \quad \forall t\in[0,T_m). \qquad (3.2.13) \end{aligned}$$

Exploitons $(G1)$, (3.2.11), (3.2.13) et l'inégalité de Poincaré, il résulte

$$\begin{aligned} \|u\|_p^p &\leq B^p\|\nabla u(t)\|_2^p \\ &\leq \frac{B^p}{l}\|\nabla u(t)\|_2^{p-2}\, l\,\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \beta l\|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\leq \beta\left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &< \left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2, \quad \forall t\in[0,T_m). \qquad (3.2.14) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$I(t) = \left(k_0 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|_2^2 + (g\circ\nabla u)(t) - \|u\|_p^p > 0,$$

pour tout $t\in[0,T_m)$. En répétant cette procédure et en utilisant le fait que

$$\lim_{t\to T_m}\frac{B^p}{l}\left(\frac{2p}{(p-2)\,l}E(t)\right)^{(p-2)/2} \leq \frac{B^p}{l}\left(\frac{2p}{(p-2)\,l}E(0)\right)^{(p-2)/2} < 1,$$

T_m est étendue à T. ■

3.3 Résultat de décroissance générale

Dans ce qui suit, on suppose que la solution du problème (3.1.1) existe, unique et suffisamment régulière. Afin d'établir notre résultat principal de décroissance, définissons, tout d'abord, certaines fonctionnelles et établissons quelques résultats préliminaires.

On définit la fonctionnelle de Lyapunov $\mathcal{F}$ comme suit

$$\mathcal{F}(t) = E(t) + \varepsilon_1 \Phi(t) + \varepsilon_2 \Psi(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{3.3.1}$$

où

$$\Phi(t) = \int_\Omega u.u_t \, dx, \tag{3.3.2}$$

$$\Psi(t) = -\int_\Omega u_t \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s)) \, ds \, dx, \tag{3.3.3}$$

et ε_1, ε_2 sont des constantes positives à choisir ultérieurement.

Lemme 3.3.22. *Il existe deux constantes positives β_1 et β_2 telles que*

$$\beta_1 E(t) \leq \mathcal{F}(t) \leq \beta_2 E(t), \tag{3.3.4}$$

pour ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ suffisamment petits.

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$|\Phi(t)| \leq \frac{1}{2} \|u_t\|_2^2 + \frac{B^2}{2} \|\nabla u\|_2^2, \tag{3.3.5}$$

$$\begin{aligned} |\Psi(t)| &\leq \frac{1}{2} \|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s)) \, ds \right)^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \int_0^t g(s) \, ds \int_\Omega \int_0^t g(t-s) |u(t) - u(s)|^2 \, ds \, dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_t\|_2^2 + \frac{(k_0 - l) B^2}{2} (g \circ \nabla u)(t). \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) &= E(t) + \varepsilon_1 \Phi(t) + \varepsilon_2 \Psi(t) \\ &\leq E(t) + c_1 \|u_t\|_2^2 + c_2 \|\nabla u\|_2^2 + c_3 (g \circ \nabla u)(t), \\ \mathcal{F}(t) &\geq E(t) - c_4 \left(\|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) \right), \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

où

$$c_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2,\ c_2 = \varepsilon_1 B^2/2,\ c_3 = (k_0 - l) B^2 \varepsilon_2/2 \ \ et\ c_4 = \max(c_1, c_2, c_3).$$

Pour ε_1, ε_2 suffisamment petits, il existe deux constantes positives β_1 et β_2 telles que

$$\beta_1 E(t) \leq \mathcal{F}(t) \leq \beta_2 E(t). \tag{3.3.8}$$

■

Lemme 3.3.23. *Sous les hypothèses* (G_1)-(G_4), *alors la fonctionnelle*

$$\Phi(t) = \int_\Omega u.u_t\, dx,$$

vérifie

$$\begin{aligned} \Phi'(t) \ \leq\ & -\frac{l}{4}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega u_t^2 dx + \frac{(k_0 - l)}{2l}(g \circ \nabla u)(t) \\ & -(\mu+\lambda)\int_\Omega |div\ u|^2 dx + \frac{2(\gamma B)^2}{l}\int_{\Gamma_1} u_t^2\ d\Gamma \\ & -\alpha(t)\int_\Omega uw(u_t)\, dx + \frac{\beta^2}{2l}\int_\Omega |\theta|^2 dx + \int_\Omega |u|^p dx. \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Démonstration. On dérive la fonctionnelle Φ par rapport à t et on utilise la première équation du problème (3.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} \Phi'(t) \ =\ & \int_\Omega u_t^2 dx - k_0\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - (\mu+\lambda)\int_\Omega |div\ u|^2 dx \\ & + \int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\, ds\ dx - \int_{\Gamma_1} h(u_t)\, u\ d\Gamma \\ & -\alpha(t)\int_\Omega uw(u_t)\, dx + \beta\int_\Omega \nabla u.\theta dx + \int_\Omega |u|^p dx. \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

L'hypothèse (G_1), l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Young, nous permettent d'estimer le quatrième et le cinquième terme du deuxième membre de l'égalité précédente comme suit pour $\eta > 0$, on a

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s) \nabla u(s)\, ds dx \\
\leq \;& \frac{k_0}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2k_0} \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) \nabla u(s)\, ds \right)^2 dx \\
\leq \;& \frac{k_0}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2k_0} \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t) + \nabla u(t))\, ds \right)^2 dx,
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

sachant que

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t) + \nabla u(t))\, ds \right)^2 dx \\
\leq \;& \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) (|\nabla u(s) - \nabla u(t)| + |\nabla u(t)|)\, ds \right)^2 dx \\
\leq \;& \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) (|\nabla u(s) - \nabla u(t)|)\, ds \right)^2 dx + \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) (|\nabla u(t)|)\, ds \right)^2 dx \\
& +2 \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) (|\nabla u(s) - \nabla u(t)|)\, ds \right) \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) (|\nabla u(t)|)\, ds \right) dx \\
\leq \;& (1+\eta) \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) (|\nabla u(t)|)\, ds \right)^2 dx \\
& + \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) (|\nabla u(s) - \nabla u(t)|)\, ds \right)^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Ainsi, on utilise le fait que

$$\int_0^t g(s)\, ds \leq \int_0^\infty g(s)\, ds = k_0 - l, \tag{3.3.13}$$

alors

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s) \nabla u(s)\, ds\ dx \\
\leq \;& \left[\frac{k_0}{2} + \frac{1}{2k_0} (1+\eta)(k_0 - l)^2 \right] \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2k_0} \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) (k_0 - l)(g \circ \nabla u)(t).
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Young, (G_3), pour δ_1, $\delta_2 > 0$, nous constatons que

$$\int_{\Gamma_1} h(u_t)\, u\ d\Gamma \leq \delta_1 B_1^2 \|\nabla u\|_2^2 + \frac{\gamma^2}{4\delta_1} \int_{\Gamma_1} u_t^2\ d\Gamma \tag{3.3.15}$$

et

$$\beta \int_{\Omega} \nabla u.\theta dx \leq \delta_3 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{\beta^2}{4\delta_3} \int_{\Omega} |\theta|^2 \, dx. \tag{3.3.16}$$

Remplaçons (3.3.14) - (3.3.16) dans (3.3.10) , on obtient

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) \leq & -\left(\frac{k_0}{2} - \frac{1}{2k_0}(1+\eta)(k_0-l)^2 - B^2(\delta_1) - \delta_3\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \\
& + \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2k_0}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)(k_0-l)(g \circ \nabla u)(t) - (\mu+\lambda) \int_{\Omega} |div \; u|^2 \, dx \\
& + \frac{\gamma^2}{4\delta_1} \int_{\Gamma_1} u_t^2 \; d\Gamma - \alpha(t) \int_{\Omega} uw(u_t) \, dx + \frac{\beta^2}{4\delta_3} \int_{\Omega} |\theta|^2 \, dx + \int_{\Omega} |u|^p \, dx.
\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

On choisit $\eta = l/(k_0 - l)$, $\delta_1 = l/4B^2$ et $\delta_3 = l/2$.

Ainsi (3.3.9) est établie. ■

Lemme 3.3.24. *Supposons les hypothèses* (G_1)-(G_3) *vérifiées, alors la fonctionnelle* Ψ *définie par*

$$\Psi(t) = -\int_{\Omega} u_t \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s)) \, ds \; dx,$$

satisfait pour certaines constantes positives c_5, c_6,

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) \leq & -\left(\int_0^t g(s) \, ds - \delta\right) \|u_t\|_2^2 + \delta c_5 \|\nabla u\|_2^2 + c_6 (g \circ \nabla u)(t) \\
& + (\mu+\lambda)^2 \delta \int_{\Omega} (div \; u)^2 \, dx + \delta\gamma^2 \int_{\Gamma_1} u_t^2 \; d\Gamma - \frac{g(0) B^2}{4\delta} (g' \circ \nabla u)(t) \\
& + \alpha^2(t) \delta \int_{\Omega} w^2(u_t) \, dx + \beta^2 \delta \int_{\Omega} |\theta|^2 \, dx.
\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Démonstration. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) = & -\int_{\Omega} u_{tt} \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s)) \, ds \; dx - \left(\int_0^t g(s) \, ds\right) \int_{\Omega} u_t^2 \; dx, \\
& -\int_{\Omega} u_t \int_0^t g'(t-s)(u(t) - u(s)) \, ds dx,
\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

en utilisant la première équation du problème (3.1.1), on obtient

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &= k_0 \int_\Omega \nabla u(t) \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\, ds \right) dx \\
&\quad + (\mu+\lambda) \int_\Omega div\ u \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\, ds \right) dx \\
&\quad - \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) \nabla u(s)\, ds \right) \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\, ds \right) dx \\
&\quad + \alpha(t) \int_\Omega w(u_t) \left(\int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s))\, ds \right) dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} h(u_t) \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s))\, ds\ d\Gamma \\
&\quad - \int_\Omega u\, |u|^{p-2} \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s))\, ds\ dx \\
&\quad - \int_\Omega u_t \int_0^t g'(t-s)(u(t) - u(s))\, ds\ dx - \left(\int_0^t g(s)\, ds \right) \int_\Omega u_t^2\ dx \\
&\quad - \beta \int_\Omega \theta \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\, ds\ dx. \qquad (3.3.20)
\end{aligned}$$

De la même façon dans (3.3.10), nous estimons le deuxième membre du (3.3.20). On utilise l'inégalité de Young, l'inégalité de Hölder, (G_1)-(G_3), pour $\delta > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega k_0 \nabla u(t) \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\, ds \right) dx \right| \\
\leq\ & k_0^2 \delta \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{4\delta} \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\, ds \right)^2 dx \\
\leq\ & k_0^2 \delta \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{4\delta} \int_0^t g(s)\, ds \int_\Omega \int_0^t g(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2\, ds\ dx \\
\leq\ & k_0^2 \delta \|\nabla u\|_2^2 + \frac{k_0 - l}{4\delta} (g \circ \nabla u)(t), \qquad (3.3.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\mu+\lambda) \int_\Omega div\ u \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\, ds \right) dx \\
\leq\ & (\mu+\lambda)^2 \delta \int_\Omega (div\ u)^2 + \frac{k_0 - l}{4\delta} (g \circ \nabla u)(t), \qquad (3.3.22)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\,ds\right)\left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,ds\right)dx \\
\leq\ & \delta\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\,ds\right)^2 dx \\
&+\frac{1}{4\delta}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,ds\right)^2 dx \\
\leq\ & 2\delta(k_0-l)^2\|\nabla u\|_2^2+\left(2\delta+\frac{1}{4\delta}\right)(k_0-l)(g\circ\nabla u)(t). \qquad (3.3.23)
\end{aligned}
$$

Pour les quatrième et cinquième termes du membre droit de (3.3.20), nous avons que

$$
\begin{aligned}
&\alpha(t)\int_{\Omega} w(u_t)\left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\right)dx \\
\leq\ & \alpha^2(t)\,\delta\int_{\Omega} w^2(u_t)\ dx+\frac{(k_0-l)B^2}{4\delta}(g\circ\nabla u)(t), \qquad (3.3.24)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_1} h(u_t)\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\ d\Gamma \\
\leq\ & \delta\gamma^2\int_{\Gamma_1} u_t^2\ d\Gamma+\frac{(k_0-l)B^2}{4\delta}(g\circ\nabla u)(t). \qquad (3.3.25)
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité de Young, l'inégalité de Hölder, (3.2.1) et (3.2.13), le sixième terme du deuxième membre du (3.3.20) peut être estimé comme suit

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega} u|u|^{p-2}\left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\right)dx \\
\leq\ & \delta\|u\|_{2(p-1)}^{2(p-1)}+\frac{(k_0-l)B^2}{4\delta}(g\circ\nabla u)(t) \\
\leq\ & \delta B^{2(p-1)}\left(\frac{2pE(0)}{l(p-2)}\right)^{p-2}\|\nabla u\|_2^2+\frac{(k_0-l)B^2}{4\delta}(g\circ\nabla u)(t). \qquad (3.3.26)
\end{aligned}
$$

Pour le septième et huitième terme de (3.3.20), en utilisant l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Young, (G_1) et (G_2), nous obtenons

$$
\int_{\Omega} u_t\int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\ dx\leq\delta\|u_t\|_2^2-\frac{g(0)B^2}{4\delta}(g'\circ\nabla u)(t), \qquad (3.3.27)
$$

et

$$
\beta\int_{\Omega}\theta\left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,ds\right)dx\leq\beta^2\delta\int_{\Omega}|\theta|^2\,dx+\frac{(k_0-l)}{4\delta}(g\circ\nabla u)(t). \qquad (3.3.28)
$$

En combinant (3.3.21)-(3.3.28) , alors (3.3.20) devient

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) \leq & -\left(\int_0^t g(s)\,ds - \delta\right)\|u_t\|_2^2 + \delta c_5 \|\nabla u\|_2^2 + c_6 (g \circ \nabla u)(t) \\
& + (\mu+\lambda)^2 \delta \int_\Omega (div\ u)^2\,dx + \delta\gamma^2 \int_{\Gamma_1} u_t^2\,d\Gamma - \frac{g(0)\,B^2}{4\delta}(g' \circ \nabla u)(t) \\
& + \alpha^2(t)\,\delta \int_\Omega w^2(u_t)\,dx + \beta^2\delta \int_\Omega |\theta|^2\,dx, \qquad (3.3.29)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
c_5 &= k_0^2 + 2(k_0 - l)^2 + B^{2(q)}\left(\frac{2pE(0)}{l(p-2)}\right)^{p-2} > 0, \\
c_6 &= (k_0 - l)\left(\frac{1}{\delta} + 2\delta + \frac{3B^2}{4\delta}\right) > 0,
\end{aligned}$$

d'où on obtient (3.3.18). ■

Maintenant, à partir de (3.2.10), (3.2.3), (3.3.1), (3.3.9) et (3.3.18), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'(t) \leq & -(c + \varepsilon_2(g_0) - \varepsilon_1)\int_\Omega u_t^2 dx + \left(c\int_\Omega u_t^2 dx - \alpha(t)\,\varepsilon_1 \int_\Omega uw(u_t)\,dx\right) \\
& -\alpha(t)\int_\Omega u_t w(u_t)\,dx - \left(\frac{\varepsilon_1 l}{4} - \varepsilon_2\delta c_5\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
& + \left(\varepsilon_2 c_6 + \frac{(k_0 - l)\,\varepsilon_1}{2l}\right)(g \circ \nabla u)(t) \\
& - (\mu+\lambda)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\delta(\mu+\lambda))\int_\Omega |div\ u|^2\,dx + \alpha^2(t)\,\delta\varepsilon_2 \int_\Omega w^2(u_t)\,dx \\
& - \left(B' - \beta^2\left(\frac{\varepsilon_1}{2l} + \delta\varepsilon_2\right)\right)\int_\Omega |\theta|^2\,dx + \varepsilon_1 \int_\Omega |u|^p\,dx \\
& - \left(\alpha - \frac{\varepsilon_1 2(\gamma B)^2}{l} - \varepsilon_2\delta\gamma^2\right)\int_{\Gamma_1} u_t^2\,d\Gamma \\
& + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_2 \frac{g(0)\,B^2}{4\delta}\right)(g' \circ \nabla u)(t), \qquad (3.3.30)
\end{aligned}$$

où c, $B' > 0$ et en utilisant le fait que

$$\int_0^t g(s)\,ds \geq \int_0^{t_0} g(s)\,ds = g_0, \quad \forall t \geq t_0, \qquad (3.3.31)$$

sachant que g positive, continue et $g(0) > 0$. Dans ce cas, on choisit δ, ε_1 et ε_2 assez petites de sorte que

$$\max\left\{\frac{4\varepsilon_2\delta c_5}{l},\varepsilon_2(\mu+\lambda)\delta\right\} < \varepsilon_1 < \varepsilon_2(g_0),$$

$$k_1 = c + \varepsilon_2(g_0) - \varepsilon_1 > 0, \tag{3.3.32}$$

$$k_2 = \frac{\varepsilon_1 l}{4} - \varepsilon_2\delta c_5 > 0, \tag{3.3.33}$$

$$k_3 = (\mu+\lambda)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2(\mu+\lambda)\delta) > 0, \tag{3.3.34}$$

$$k_4 = B' - \beta^2\left(\frac{\varepsilon_1}{2l} + \delta\varepsilon_2\right) > 0, \tag{3.3.35}$$

$$k_5 = \alpha - \frac{\varepsilon_1 2(\gamma B)^2}{l} - \varepsilon_2\delta\gamma^2 > 0, \tag{3.3.36}$$

$$k_6 = \frac{1}{2} - \varepsilon_2\frac{g(0)B^2}{4\delta} > 0. \tag{3.3.37}$$

Ainsi, pour tout $t_0 > 0$, nous arrivons à

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'(t) \leq\ & -k_1\|u_t\|_2^2 - k_2\|\nabla u\|_2^2 + c_7(g\circ\nabla u)(t) + \alpha^2(t)\delta\varepsilon_2\int_\Omega w^2(u_t)\,dx \\ & -k_3\int_\Omega |div\ u|^2\,dx + c_{\varepsilon_1}\int_\Omega\left(u_t^2 + |uw(u_t)|\right)dx - \alpha(t)\int_\Omega u_t w(u_t)\,dx \\ & -k_4\|\theta\|_2^2 - k_5\int_{\Gamma_1} u_t^2\ d\Gamma + \varepsilon_1\|u\|_p^p + c_8(g'\circ\nabla u)(t),\end{aligned} \tag{3.3.38}$$

on déduit

$$\mathcal{F}'(t) \leq -c_9E(t) + c_{10}(g\circ\nabla u)(t) + c\left(\int_\Omega w^2(u_t)\,dx + \int_\Omega\left(u_t^2 + |uw(u_t)|\right)dx\right). \tag{3.3.39}$$

Maintenant, on choisit $0 < \varepsilon_3 \leq \varepsilon$ telle que

$$sw(s) \leq \min\{\varepsilon, G(\varepsilon)\}, \quad \text{pour tout } |s| \leq \varepsilon_3. \tag{3.3.40}$$

il n'est pas difficile de montrer que

$$\begin{cases} c_1'|s| \leq |w(s)| \leq c_2'\min\{|s|, |s|^q\} & \text{si } |s| \geq \varepsilon_3, \\ s^2 + w^2(s) \leq G^{-1}(sw(s)) & \text{si } |s| \leq \varepsilon_3. \end{cases} \tag{3.3.41}$$

Nous considérons la partition de Ω suivante

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \ : \ |u_t| \leq \varepsilon_3\}, \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega \ : \ |u_t| > \varepsilon_3\}.$$

à partir de (3.3.41), on obtient

Si $\min\{|u_t|, |u_t|^q\} = |u_t|$, alors

$$\int_{\Omega_2} w^2(u_t)\, dx \leq c_2' \int_{\Omega_2} u_t w(u_t)\, dx \leq -c_{11} E'(t). \tag{3.3.42}$$

Si $\min\{|u_t|, |u_t|^q\} = |u_t|^q$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} w^2(u_t)\, dx &\leq \int_{\Omega_2} |u_t|^q w(u_t) dx \\ &\leq \int_{\Omega_2} u_t w(u_t) dx \leq -c_{11} E'(t). \end{aligned} \tag{3.3.43}$$

Ainsi, de (3.3.42) et (3.3.43), on conclut que

$$\int_{\Omega_2} w^2(u_t)\, dx \leq -c_{11} E'(t). \tag{3.3.44}$$

Aussi, utilisons (3.3.40), (3.3.41), l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Young, nous constatons que

Si $\min\{|u_t|, |u_t|^q\} = |u_t|$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} |uw(u_t)|\, dx &\leq \int_{\Omega_2} |u||u_t| dx \\ &\leq Bc\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u_t\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c_{13} E(t). \end{aligned} \tag{3.3.45}$$

Si $\min\{|u_t|, |u_t|^q\} = |u_t|^q$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} |uw(u_t)|\, dx &\leq \left(\int_{\Omega_2} |u|^{q+1} dx\right)^{\frac{1}{q+1}} \left(\int_{\Omega_2} |w(u_t)|^{1+\frac{1}{q}} dx\right)^{\frac{q}{q+1}} \\ &\leq cB \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_2} |w(u_t)|^{1+\frac{1}{q}} dx\right)^{\frac{q}{q+1}} \\ &\leq cB \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_2} u_t w(u_t) dx\right)^{\frac{q}{q+1}}, \end{aligned} \tag{3.3.46}$$

à partir de (3.3.45) et (3.3.46) , on déduit que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2}\left(|u_t|^2+|uw(u_t)|\right)dx &\leq c\int_{\Omega_2}u_tw(u_t)dx+cB\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega_2}u_tw(u_t)dx\right)^{\frac{q}{q+1}}\\ &+ c_{13}E(t)\\ &\leq -cE'(t)+cE(t)^{\frac{1}{2}}\left(-E'(t)\right)^{\frac{q}{q+1}}+c_{13}E(t).\end{aligned}$$

Utilisons (3.3.43), l'inégalité de Young et les propriétés de $E(t)$, nous arrivons à

$$\int_{\Omega_2}w^2(u_t)\,dx+\int_{\Omega_2}\left(u_t^2+|uw(u_t)|\right)dx\leq c\varepsilon E(t)-(c_\varepsilon+c_{11})\,E'(t)\,, \tag{3.3.47}$$

et aussi

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1}w^2(u_t)\,dx+\int_{\Omega_1}\left(u_t^2+|uw(u_t)|\right)dx &\leq \int_{\Omega_1}u_t^2dx+\varepsilon\int_{\Omega_1}u^2dx+(C_\varepsilon+1)\int_{\Omega_1}w^2(u_t)\,dx\\ &\leq \int_{\Omega_1}u_t^2dx+c\varepsilon E(t)+(C_\varepsilon+1)\int_{\Omega_1}w^2(u_t)\,dx.\end{aligned} \tag{3.3.48}$$

Les résultats du lemme 3.3.22, (3.3.47) et (3.3.48) implique que, pour ε assez petit, la fonction $\mathcal{L}=\mathcal{F}+C_\varepsilon E$ satisfait

$$\mathcal{L}'(t)\leq -dE(t)+c_{10}\,(g\circ\nabla u)(t)+c\int_{\Omega_1}\left(u_t^2+w^2(u_t)\right)dx, \tag{3.3.49}$$

où d, c_{10}, c, sont des constantes positives. Il est claire que

$$\mathcal{L}(t)\sim E(t)\,. \tag{3.3.50}$$

Notre résultat principal est donné par le théorème suivant

Théorème 3.3.25. *Soit* $(u_0,u_1,\theta_0)\in H^1_{\Gamma_0}\times L^2(\Omega)\times H^1_0$ *donné et satisfaisant* (3.2.11), *sous les hypothèses* (G_1)-(G_4), *alors, il existe des constantes positives* c_1, c_2, c_3 *et* ε_0, *telles que la solution du problème* (3.1.1) *satisfait*

$$E(t)\leq c_3G_1^{-1}\left(c_1\int_0^t\alpha(s)\,ds+c_2\right),\quad \forall t\geq 0, \tag{3.3.51}$$

où

$$G_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{G_2(s)} ds \quad et \quad G_2(t) = tG'(\varepsilon_0 t).$$

Notons ici, à partir des propriétés de la fonction G, que la fonction G_1 est une fonction strictement décroissante et convexe sur $(0,1]$, *avec* $\lim\limits_{t\to 0} G_1(t) = +\infty$.

Démonstration. À partir de $(3.3.49)$, $(3.2.2)$ et $(3.2.10)$, il résulte

$$\begin{aligned}
\alpha(t)\mathcal{L}'(t) &\leq -d\alpha(t)E(t) + c_{10}\alpha(t)(g\circ\nabla u)(t) + c\alpha(t)\int_{\Omega_1}\left(u_t^2 + w^2(u_t)\right)dx \\
&\leq -d\alpha(t)E(t) - c_{13}(g'\circ\nabla u)(t) + c\alpha(t)\int_{\Omega_1}\left(u_t^2 + w^2(u_t)\right)dx \\
&\leq -d\alpha(t)E(t) - mE'(t) + c\alpha(t)\int_{\Omega_1}\left(u_t^2 + w^2(u_t)\right)dx, \quad \forall t \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.3.52}$$

où m est une constante positive.

Ensuite, nous introduisons la fonction $\mathcal{H}$ comme suit

$$\mathcal{H}(t) = \alpha(t)\mathcal{L}(t) + mE(t),$$

il est aisé de montrer que $\mathcal{H}(t) \sim E(t)$. A l'aide de $(G2)$, $(3.3.52)$ devient

$$\mathcal{H}'(t) \leq -d\alpha(t)E(t) + c\alpha(t)\int_{\Omega_1}\left(u_t^2 + w^2(u_t)\right)dx. \tag{3.3.53}$$

Distinguons deux cas :

$Cas 1$. G est linéaire sur $[0,\varepsilon)$: alors on déduit que

$$\mathcal{H}'(t) \leq -d\alpha(t)E(t) + c\alpha(t)\int_{\Omega_1} u_t w(u_t)\,dx = -d\alpha(t)E(t) - cE'(t),$$

ce qui donne

$$(\mathcal{H}+cE)'(t) \leq -d\alpha(t)E(t).$$

En utilisant le fait que $\mathcal{H}+cE \sim E$, nous obtenons facilement

$$E(t) \leq c'e^{-c''\int_0^t \alpha(s)ds} = c'G_1^{-1}\left(c''\int_0^t \alpha(s)\,ds\right).$$

Cas 2. G est non linéaire sur $[0,\varepsilon)$: Pour estimer la dernière intégrale dans (3.3.53), nous utilisons la fonction I définie par

$$I(t) = \frac{1}{|\Omega_1|}\int_{\Omega_1} u_t w(u_t)dx,$$

d'après l'inégalité de Jensen, nous obtenons

$$G^{-1}(I(t)) \geq c\int_{\Omega_1} G^{-1}(u_t w(u_t))dx. \tag{3.3.54}$$

Ainsi, en utilisant (G_4), (3.3.54), on trouve

$$\alpha(t)\int_{\Omega_1}(|u_t|^2 + w(u_t)^2)dx \leq \alpha(t)\int_{\Omega_1} G^{-1}(u_t w(u_t))dx \leq c\alpha(t)G^{-1}(I(t)).$$

Par conséquent, (3.3.53) devient

$$R_0'(t) \leq -d\alpha(t)E(t) + c\alpha(t)G^{-1}(I(t)), \tag{3.3.55}$$

où $R_0 = \alpha\mathcal{L} + E$, nous avons d'après (3.3.50) que $R_0 \sim E$.

Maintenant, pour $\varepsilon_0 < \varepsilon$, $c_0 > 0$ et de (3.3.55) et le fait que $E' \leq 0$, $G' > 0$, $G'' > 0$ sur $[0,\varepsilon)$, nous constatons que la fonctionnelle R_1 définie par

$$R_1(t) = G'(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)})R_0(t) + c_0E(t),$$

satisfait pour a_1, $a_2 > 0$,

$$a_1R_1(t) \leq E(t) \leq a_2R_1(t) \tag{3.3.56}$$

et

$$\begin{aligned} R_1'(t) &= \varepsilon_0\frac{E'(t)}{E(0)}G''(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)})R_0(t) + G'(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)})R_0'(t) + c_0E'(t) \\ &\leq -d\alpha(t)E(t)G'(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}) + c\alpha(t)G'(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)})G^{-1}(I(t)) + c_0E'(t). \end{aligned} \tag{3.3.57}$$

Soit G^* la fonction convexe conjuguée de G au sens de Young (voir [3,p.61 − 64]), elle vérifie

$$G^*(s) = s(G')^{-1}(s) - G[(G')^{-1}(s)], \text{ si } s \in [0,G'(\varepsilon)) \tag{3.3.58}$$

et satisfait l'inégalité de Young généralisée suivante

$$AB \leq G^*(A) + G(B), \text{ si } A \in [0,G'(\varepsilon)), B \in [0,\varepsilon), \tag{3.3.59}$$

avec $A = G'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right)$ et $B = G^{-1}(I(t))$.

Utilisons (3.2.10),(3.3.40), (3.3.57)-(3.3.59), nous arrivons à

$$\begin{aligned} R_1'(t) &\leq -d\alpha(t)E(t)G'(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}) + c\alpha(t)G^*\left(G'(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)})\right) + c\alpha(t)I(t) + c_0 E'(t) \\ &\leq -d\alpha(t)E(t)G'(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}) + c\varepsilon_0\alpha(t)\frac{E(t)}{E(0)}G'(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}) - cE'(t) + c_0 E'(t). \end{aligned}$$

Par conséquent, avec un choix convenable de ε_0 et c_0, on obtient

$$R_1'(t) \leq -k\alpha(t)\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right)G'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) = -k\alpha(t)G_2(\frac{E(t)}{E(0)}), \tag{3.3.60}$$

où $G_2(t) = tG'(\varepsilon_0 t)$.

Puisque

$$G_2'(t) = G'(\varepsilon_0 t) + \varepsilon_0 t G''(\varepsilon_0 t)$$

et en utilisant la convexité de G sur $[0,\varepsilon)$, nous constatons que $G_2'(t),G_2(t) > 0$ sur $(0,1]$. Ainsi, en utilisant la fonction R définie par

$$R(t) = \frac{a_1 R_1(t)}{E(0)}$$

et à partir de (3.3.56) et (3.3.60), nous avons

$$R(t) \sim E(t), \tag{3.3.61}$$

pour $k_1 > 0$, on a

$$R'(t) \leq -k_1\alpha(t)G_2(R(t)).$$

Ensuite, une intégration simple nous donne

$$R(t) \leq G_1^{-1}(k_1 \int_0^t \alpha(s)ds + k_2) \tag{3.3.62}$$

où $G_1(t) = \int_t^1 \dfrac{1}{G_2(s)} ds$ et $k_2 > 0$. Ici, nous avons utilisé les propriétés de G_2 et le fait que G_1 est strictement décroissante sur $[0,1]$. Finalement, en utilisant (3.3.61)-(3.3.62), nous obtenons (3.3.51).

Remarque 3.3.26. Alabau-Boussouira [2] et Liu et Zuazua [34] ont proposé les hypothèses suivantes sur la fonction g

$$\begin{cases} g_0(|s|) \leq |g(s)| \leq g_0^{-1}(|s|) \quad \text{pour tout } |s| \leq \varepsilon \\ c_1 |s| \leq |g(s)| \leq c_2 |s| \quad \text{pour tout } |s| \geq \varepsilon \end{cases} \tag{3.3.63}$$

pour une certaine fonction strictement croissante $g_0 \in C^1([0, +\infty))$, avec $g_0(0) = 0$, où c_1, c_2, ε sont des constantes positives et la fonction G définie par

$$G(s) = \sqrt{\frac{s}{2}} g_0\left(\sqrt{\frac{s}{2}}\right),$$

est strictement convexe dans C^2 sur $[0,\varepsilon)$ si la fonction g_0 est non-linéaire.

$\blacksquare$

Donnons quelques exemples afin d'illustrer le taux de décroissance donné par le Théorème 3.3.25

Exemple 3.3.27. On suppose que la fonction g vérifie (3.3.63).

(**1**) Si $g_0(s) = cs^q$ et $q \geq 1$, alors

$$G(s) = cs^{\frac{q+1}{2}}$$

satisfait à l'hypothèse $(G4)$. En utilisant le théorème 3.3.25, nous obtenons

$$\begin{aligned} E(t) &\leq c \exp\left(-c' \int_0^t \alpha(s)\, ds\right) \quad \text{si } q = 1, \\ E(t) &\leq c \left(c' \int_0^t \alpha(s)\, ds + c''\right)^{\frac{-2}{q-1}} \quad \text{si } q > 1. \end{aligned}$$

(**2**) Si $g_0(s) = \exp\left(\dfrac{-1}{s}\right)$, alors $(G4)$ est satisfaite pour

$$G(s) = \sqrt{\frac{s}{2}} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s}}\right),$$

ainsi, on aura

$$E(t) \leq c\left(\ln\left(c'\int_0^t \alpha(s)\,ds + c''\right)\right)^{-2}.$$

(**3**) Si $g_0(s) = \frac{1}{S}\exp\left(\frac{-1}{s^2}\right)$, alors $(G4)$ est satisfaite pour

$$G(s) = \exp\left(-\frac{2}{s}\right),$$

ainsi, on trouve

$$E(t) \leq c\left(\ln\left(c'\int_0^t \alpha(s)\,ds + c''\right)\right)^{-1}.$$

(**4**) Si $g_0(s) = \frac{1}{S}\exp\left(-(\ln s)^2\right)$, alors $(G4)$ est satisfaite pour

$$G(s) = \exp\left(-\frac{1}{4}\left(\ln\frac{s}{2}\right)^2\right).$$

Par suite, nous obtenons le taux de décroissance suivant

$$E(t) \leq c\exp\left(-2\left(\ln\left(c'\int_0^t \alpha(s)\,ds + c''\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour plus de détails voir [8], [22].

Conclusion et perspectives

Conclusion

Ce travail a permis d'apporter une contribution assez importante à l'étude de la stabilisation de quelques problèmes thermoélastiques et thermoviscoélastiques. Dans cette étude, on a généralisé et amélioré divers résultats antérieurs en se basant sur des techniques récentes d'analyse mathématique.

Nous avons commencé par un système en thermoélasticité avec un terme source non linéaire et un terme amortissement frontière de type mémoire. Sous certaines hypothèses sur les données initiales, nous avons obtenu le taux de décroissance générale qui dépend des propriétés de la fonction noyau g. La preuve est basée sur la méthode du puits de potentiel, la méthode de construction de la fonctionnelle de Lyapunov équivalente à la fonctionnelle d'énergie. Ce travail peut être considéré comme une extension de celle de Messaoudi, S. A.; Al-Shehri, A [21], qui ont étudié la stabilisation de ce problème sans terme source.

Dans le second chapitre, nous avons étudié le comportement asymptotique de la solution d'un système en thermoviscoélasticité où on a utilisé les mêmes hypothèses proposées dans [30].

Dans le dernier chapitre, on a introduit un terme amortissant distribué de la forme $\alpha(t)\, w(u_t)$ dans notre second système et on a obtenu un résultat de décroissance générale de l'énergie de la solution.

Perspectives

Après la réalisation de ce travail, notre objectif est le suivant :

• Obtenir les mêmes résultats en éliminant quelques hypothèses sur les données et sur l'énergie initiale qui ont été considérées auparavant, en affaiblissant les conditions sur la fonction noyau g.

• Traiter d'autres problèmes mixtes comme par exemple les systèmes de Timoshinko non linéaire, les systèmes en thermoplasticité.

• Conforter les résultats théoriques par une simulation numérique.

Bibliographie

[1] Adams, R. A.; Fournier J. J. F.; Sobolev spaces, Academic Press. (2003).

[2] Alabau, B. F.; Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems. Applied Mathematics and Optimization, vol. 51, no. 1, 61–105, (2005).

[3] Arnold, V. I.; Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, New York, (1989).

[4] Berrimi, S.; Messaoudi, S. A.; Exponential decay of solutions to a viscoelastic equation with nonlinear localized damping. Electronic Journal of Differential Equations, vol. 88, 1–10, (2004).

[5] Berrimi, S.; Messaoudi, S. A.; Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, vol. 64, no. 10, 2314–2331, (2006).

[6] Boudiaf, A.; Drabla, S.; Boulanouar, F.; General Decay rate for nonlinear thermo-viscelastic system with a weak damping and nonlinear source term. Mediterranean Journal of Mathematics. Doi/ s00009-0674-4, (2015).

[7] Boulanouar, F.; Drabla, S.; General boundary stabilization result of memory-type thermoelasticity with second sound, Electron. J. Di.er. Equ. Vol. 2014 No. 202, 1-18, (2014).

[8] Boulanouar, F.; Stabilisation frontière et distribuée de quelques problèmes en thermoélasticité. Thèse de Doctorat LMD, Faculté des Sciences, Université Ferhat

Abbas de Setif 1, (2015) .

[9] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Soriano, J. A.; Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping. Electronic Journal of Differential Equations. Vol. 44, 1–14, (2002).

[10] Cavalcanti, M. M.; Existence and uniform decay of the wave equation with nonlinear boundary damping and boundary memory source term. Progress in analysis, Vol. I, II, 1289-1300, World Sci. Publ., River Edge, NJ, (2003).

[11] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N. ; Soriano, J. A. ; and Souza, J. S. ; Homogenization and uniform stabilization for a nonlinear hyperbolic equation in domains with holes of small capacity, Electron. J. Di.er. Equ. Vol. 55, 1-19, (2004).

[12] Cavalcanti, M. M.; Guesmia, A.; General decay rates of solutions to a nonlinear wave equation with boundary conditions of memory type. Di. Integral Equ. 18. 5, 583-600, (2005).

[13] Dafermos, C. M.; On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity, Arch. Rational Mech. Anal. 29, 241-271, (1968).

[14] Hrusa, W. J.; Tarabek, M. A.; On smooth solutions of the Cauchy problem in one-dimensional nonlinear thermoelasticity, Quart. Appl. Math. 47, 631-644,(1989).

[15] Jian, S.; Muñoz Rivera, J. E.; and Racke, R.; Asymptotic stability and global existence in thermoelasticity with symmetry, Quart. Appl. Math. 56#2, 259-275, (1998).

[16] Keddi, A.; Etude de quelques problèmes de thermovisco-élasticité. Thèse de Magister, département de mathématiques et informatiques, université de Ouargla (2013).

[17] Lebeau, G.; Zuazua, E.; Sur la décroissance non uniforme de l'énergie dans le système de la thermoélasticité linéaire. C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 324, 409-415, (1997).

[18] Liu W. J.; Partial exact controllability and exponential stability of the higher-dimensional linear thermoelasticity, ESAIM. Control. Optm. Calc. Var. 3, 23-48, (1998).

[19] Liu, W. J.; Zuazua, E.; Uniform stabilization of the higher dimensional system of thermoelasticity with a nonlinear boundary feedback, Quart. Appl. Math. 59#2, 269-314, (2001).

[20] Messaoudi, S. A.; General decay of the solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, vol. 69, no. 8, 2589–2598, (2008).

[21] Messaoudi, S. A.; Al-Shehri, A.; General boundary stabilization of memory-type thermoelasticity, J. Math. Phys. 51, 103514 (2010).

[22] Messaoudi, S. A.; Muhammad, I. Mustafa.; On convexity for energy decay rates of a viscoelastic equation with boundary feedback. Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications, vol. 72, no. 9-10, 3602–3611, (2010).

[23] Muñoz Rivera, J. E.; Energy decay rates in linear thermoelasticity, Funkcial Ekvac. 35, 19-30, (1992).

[24] Muñoz Rivera, J. E.; Barreto, R. K. ; Existence and exponential decay in nonlinear thermoelasticity, Nonlinear Analysis 31, 149-162, (1998).

[25] Muñoz Rivera, J. E.; Racke, R.; Magneto-thermo-elasticity-large time behavior for linear systems, Adv. Di.erential Equations 6 (3), 359-384, (2001).

[26] Mustafa, M. I.; Boundary stabilization of memory-type thermoelastic systems, Electron. J. Di.er. Equ. No. 52 (2013), 1-16, (2013).

[27] Pereira, D.C.; Menzala G.P.; Exponential stability in linear thermoelasticity : the inhomogeneous case, Appl. Anal. 44 , 21-36, (1992).

[28] Racke, R.; Shibata, Y.; Global smooth solutions and asymptotic stability in one-dimensional nonlinear thermoelasticity, Arch. Rational. Mech. Anal. 116, 1-34, (1991).

[29] Racke, R.; Shibata, Y.; and Zheng, S.; Global solvability and exponential stability in one dimensional nonlinear Permoelasticity, Quart. Appl. Math. 51, 751-763, (1993).

[30] Shun-Tang, W.; Hsueh-Fang Chen.; Uniform decay of solutions for a nonlinear viscoelastic wave equation with boundary dissipation. Journal of Function Spaczs and Applications. Article ID 421847, 17 pages, (2012).

[31] Slemrod, M.; Global existence, uniqueness, and asymptotic stability of classical solutions in one-dimensional non-linear thermoelasticity, Arch. Rational. Mech. Anal. 76, 97-133, (1981).

[32] Weijiu Liu.; The exponential stabilization of the higher-dimensional linear system of thermoviscoelasticity. J. Math. Pures Appl. 77, p. 355-386, (1998).

[33] Yuming, Qin.; Zhiyong, Ma.; Energy decay and global attractors for thermoviscoelastic systems. Acta Appl Math. DIO 10.1007 /s 10440-011-9657, (2011).

[34] Zhao, F. Li. Z.; Chen, Y.; Global existence uniqueness and decay estimates for nonlinear viscoelastic wave equation with boundary dissipation. Nonlinear Analysis: Real World Applications, vol. 12, no. 3, 1759–1773, (2011).

[35] Zheng, S.; Shen, M.; and Wei Xi.; Global solutions to the Cauchy problem of quasilinear hyperbolic parabolic coupled systems, Sci. Sinica Ser. A 30, 1133-1149, (1987) .

الملخص

في هذه الأطروحة، تمت دراسة الاستقرار العام لبعض الأنظمة للمرونة الحرارية و المرونة الحرارية اللزجة ، ويعطى التبديد لهده الأنظمة على صورة حد لزوجة مرنة او حد الإحتكاك ، مع وجود منبع غير خطى. حاولنا إيجاد شروط ملائمة تمكننا من برهنت الاضمحلال العام لطاقة الحل لهذه الأنظمة. لادراك هدا الهدف اتبعنا طرق مختلفة كطريقة الطاقة، تابعي ليابونوف، طريقة عمق البئر الكموني وخاصية التحدب، مع إدخال بعض التغييرات الملائمة لنوعية مسائلنا.

الكلمات المفتاحية: المرونة الحرارية، المرونة الحرارية اللزجة'، الاضمحلال العام، نواة الحل، منبع غير خطى، مخمد، التحدب. ذاكرة،

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de la stabilisation de trois systèmes en thermoélasticité et en thermoviscoélasticité avec source non linéaire. Les amortissements sont de types frontière ou distribué de type viscoélastique. On a introduit des conditions convenables sur les données qui nous permis de démontrer la décroissance générale de l'énergie de chaque système. Pour obtenir ces résultats, différentes méthodes ont été utilisées telles que la méthode de l'énergie, la fonctionnelle de Lyapunov, le puits du potentiel et les propriétés des fonctions convexes.

Mots Clés : thermoélasticité, thermoviscoélasticité, décroissance générale, noyau résolvant, Source non-linéaire, amortissement, mémoire, convexité.

Abstract

This thesis is devoted to the study of the stabilization of some thermoelastic and thermoviscoélastics systems with nonlinear source term. The dissipation is given by a boundary and distributed viscoelastic term. We tried to find suitable conditions on the data which allow us to prove the general decay results. To achieve this goal, we use the multiplier method such as the energy method, the Lyapunov functional, the well-depth method and convexity argument.

Key words: Thermoelasticity, thermoviscoelasticity, general decay, resolvent kernel, nonlinear source, damping, memory, convexity.