

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

جامعة فرحات عباس - سطيف

UNIVERSITE FERHAT ABBAS- SETIF
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR

Mémoire de Magistère

Thème

Commande à modèle de référence des systèmes linéaires perturbés à paramètres variables

Soutenue le 21/ 05/ 2008 devant la commission d'examen composée de:

LAMAMRA Othmane	MC à l'Université de Sétif	Président
HEMSAS Kamel eddine	MC à l'Université de Sétif	Directeur de thèse
SAIT Belkacem	MC à l'Université de Sétif	Examineur
KHEMLICHE Mabrouk	MC à l'Université de Sétif	Examineur
RAHMANI Lazhar	MC à l'Université de Sétif	Examineur

Avant-Propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au département d'électrotechnique, faculté des Sciences de l'ingénieur, université Ferhat Abbas de Sétif.

Je tiens à exprimer en premier lieu mes remerciements les plus sincères à Monsieur *Kamel Elddine HAMSAS*, Maître de conférences à l'université de Sétif, et directeur de mémoire, pour la confiance qu'il m'a toujours témoignée. J'ai tout particulièrement apprécié ses encouragements et ses conseils, surtout en fin de thèse.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à Monsieur *Mourad Abdeaziz* Maître de conférences à l'université de Sétif et mon mari pour son aide et les conseils qu'il m'a prodigués.

J'adresse mes sincères remerciements aux membres de jury pour avoir accepté de faire partie de la commission d'examen.

En fin je n'oublie pas d'adresser mes vifs remerciements à tous ceux du département d'électrotechnique, faculté des Sciences de l'ingénieur, université Ferhat Abbas de Sétif qui m'ont aidé de près ou de loin dans l'accomplissement de ce travail.

Acronymes Anglophones

APSR	Almost Strictly Positive Real Presque strictement réelle positive
BIBO	Bounded Input Bounded Output Entrée bornée sortie bornée
CGT	Command Generator Tracker Générateur de commande pour la poursuite
LTI	Linear Time Invariant Système linéaire stationnaire
MRC	Model Reference Control Commande à modèle de référence
MRAC	Model Reference Adaptive Control Commande adaptative à modèle de référence
MIMO	Multi Input Multi Output Système à plusieurs entrées et plusieurs sorties
MEMS	Multi entrée multi sorties
SAC	Simplified Adaptive Controller Contrôleur adaptatif simple
SISO	Single Input Single Output Système à une entrée et une sortie
PR	Positive Real Réelle positive
SPR	Strictly Positive Real Strictement réelle positive

Sommaire

INTRODUCTION	1
<u>CHAPITRE I</u> VERS LA COMMANDE ADAPTATIVE A MODELE DE REFERENCE	
I.1 Introduction à la commande adaptative	4
I.1.1 Définition.....	4
I.1.2 Domaine d’application de la commande adaptative	5
I.1.3 Commande conventionnelle à contre-réaction et commande adaptative. Similarités et Différences.....	5
I.1.4 Techniques de commande adaptative	6
I.2 Systèmes de commande adaptative à modèle de référence.....	7
I.2.1 Introduction	7
I.2.2 Principe de la commande adaptative à modèle de référence	7
I.2.3 Les avantages de la commande adaptative à modèle de référence	8
I.2.4 Commande adaptative directe et indirecte.....	8
I.2.5 Différents schémas de la commande adaptative à modèle de référence.	10
<u>CHAPITRE II:</u> CONTROLEUR ADAPTATIF SIMPLE (SAC)	
II.1 Introduction.....	11
II.2 Poursuite de sortie du modèle.....	11
II.3 Générateur de commande pour la poursuite (CGT).....	12
II.3.1 Système à paramètres invariables	12
II.3.2 Système à paramètres variables.....	15
II.4 Concepts de stabilité et de positivité.....	17
II.4.1 Stabilité:	17
II.4.2 Positivité	18
II.5 Contrôleur adaptatif basé sur le CGT.....	21
II.5.1 Analyse de la stabilité.....	22
II.6 Extension du SAC de base pour éviter la contrainte de positivité.....	34
II.6.1 Augmentation du système par un compensateur en parallèle.....	34
II.6.2 Augmentation du système et du modèle de référence.....	41
II.7 Conception du compensateur dans le domaine temporel.....	47
II.8. Conception du compensateur dans le domaine fréquentiel.....	48
II.9 Conclusion	49

CHAPITRE III : PROCEDURES DE COMPENSATION DES SYSTEMES

POUR L'APPLICATION DU SAC

III.1 Introduction	50
III.2 Conception de compensateur par la méthode de Bar Kana	50
III.3 Conception dans le domaine temporel en utilisant le théorème de Kharitonov.....	51
III.3.1 Analyse de la robustesse par le théorème de Kharitonov	53
III.3.2 Conception du compensateur	54
III.4 Conception du compensateur en utilisant la première colonne de la table de Routh...	57
III.5 Résultats de simulations	61
III.6 Conclusion.....	73

CHAPITRE IV : CONTROLEUR ADAPTATIF SIMPLE (SAC) ROBUSTE

IV.1 Introduction	74
IV.2 L'incertitude de modélisation des systèmes.....	74
IV.3 Conception du compensateur dans le domaine fréquentiel.....	75
IV.5 Résultats de simulations	79
IV.6 Conclusion.....	85
Conclusion générale.....	86
Bibliographie	
Annexe Démonstration du théorème (II.2)	

Introduction

L'origine de la commande adaptative remonte aux années 1950 les automaticiens se sont vite aperçus en effet qu'un contrôleur avec des paramètres fixes n'était pas toujours capable d'assurer les performances voulues, par exemple dans le cas où les paramètres du système varient avec le temps, un ensemble de chercheurs ont entrepris des travaux de recherches dans le sens de la commande adaptative.

Les nouvelles contributions apportées dans les années 1960 dans le domaine de la commande telle que l'espace d'état, la théorie de la stabilité et l'identification ont donné un grand développement à la *Commande Adaptative*. C'est à partir des années 1970 que des preuves correctes de stabilité sont apparues.

L'idée d'adapter en continu des paramètres dans le but d'améliorer les performances du procédé était née avec l'algorithme du gradient. Durant cette période où la commande adaptative suscita un réel intérêt, deux approches allèrent se dégager pour élaborer un contrôleur adaptatif. L'une s'appelle la *commande adaptative par modèle de référence* ou MRAC (Model Reference Adaptive Control) la seconde concerne l'*auto-régleur* (Self-Tuning Regulator).

Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser à la commande adaptative à modèle de référence.

Le contrôle adaptatif à modèle de référence (MRAC), représente l'une des principales configurations utilisées dans les systèmes adaptatifs. Depuis que les problèmes de stabilité et de robustesse ont été partiellement résolus, plusieurs chercheurs ont tracé pour objectif, l'amélioration des performances d'une part, et la simplification de conception et d'implantation d'autre part. Les MRAC directs qui existent de nos jours, ont émergé de l'une de trois différentes approches [Ozc-1997].

La première décrite par Landau [Lan-1979], est basée sur le principe d'accessibilité complète des états du système. Elle suppose que tous les états du système sont mesurables. Cette supposition est très limitative, car la plupart des systèmes réels ne la vérifient pas. Ce type de MRAC est donc très peu utilisé.

La deuxième approche décrite par Monopoli's citer dans [Ozc-1997] est basée sur l'intégration d'observateur adaptatif des états du système pour contourner le problème de leur accessibilité. Les MRAC basés sur cette approche, sont pratiquement les contrôleurs

adaptatifs les plus utilisés et les plus traités dans la littérature de contrôle adaptatif, ce qui explique son appellation "MRAC standard".

La troisième approche, introduite par Sobel et al [**Sob-1982**], est basée sur le CGT "Command Generator Tracker" [**Bro-1979**]. Le MRAC basé sur cette approche présente des caractéristiques très attirantes, parmi ces caractéristiques la simplicité (ce qui explique son appellation "Simplified Adaptive Controller" SAC), l'indépendance sur l'ordre du système et la possibilité de contrôler des systèmes qui ne sont pas à phase minimale. Cependant, l'inconvénient majeur de ce MRAC est qu'il exige que le système sous contrôle soit ASPR, c'est-à-dire qu'il existe un gain de retour constant qui stabilise le système en boucle fermée. Cette condition constitue un obstacle pour l'applicabilité de ce MRAC. Alors, elle a été allégée en utilisant un compensateur en parallèle avec le système de telle sorte que le système augmenté soit ASPR [**Bar-1985,1987**]. Cette méthode n'est devenue efficace qu'après les modifications introduites dans [**Kau-1993**], où le modèle est aussi augmenté et non seulement le système. Cependant, un nouveau problème apparaît, c'est qu'il faut concevoir un compensateur qui rend le système augmenté ASPR. Il faut alors mettre au point des méthodes de conception d'un tel compensateur.

Dans ce domaine, les résultats présentés par Barkana et al [**Bar-1991**], montrent la relation entre la stricte positivité des systèmes et la possibilité de les rendre stables, constitue la théorie de base pour l'établissement de telles méthodes. Ainsi, nous exploitons des méthodes pour la conception du compensateur. Ces méthodes sont dédiées principalement aux systèmes intervalles (leurs paramètres peuvent varier dans des intervalles connus d'avance) [**Bak-1996, Barm-1992**]. Alors, le compensateur doit assurer que le système augmenté reste ASPR sur tous les intervalles de variations des paramètres.

Ozcelik et Kaufman [**Ozc-1995**], ont développé et appliqué une procédure d'adaptation systématique en utilisant une technique d'optimisation pour les systèmes présentant des incertitudes paramétriques ou fréquentielle dans les cas SISO et MIMO.

Des applications de la commande adaptative à modèle de référence sur des processus industriels et des phénomènes réels comme par exemple le contrôle de l'insuline et la pression cardiaque sont décrites dans les références [**Kau-1984, Pal-2003**].

Barkana [**Bar-2005a**] a présenté une étude sur la convergence des gains d'adaptation et la positivité des systèmes.

Ce mémoire comporte quatre chapitres :

- Dans Le premier nous présentons une approche à la commande adaptative et une description de la commande adaptative à modèle de référence et les différents schémas utilisés par les chercheurs.
- Le deuxième est consacré à l'étude de la théorie inhérente au MRAC basée sur la troisième approche (SAC) et une analyse de la condition de positivité qu'il impose pour son applicabilité.
- Le troisième traite les méthodes de conception du compensateur pour répondre à la condition ASPR imposée par le SAC.
- Le dernier présente la conception de l'algorithme de contrôle adaptatif à modèle de référence direct et robuste en présence de dynamiques inconnues.

CHAPITRE I VERS LA COMMANDE ADAPTATIVE A MODELE DE REFERENCE

I.1 Introduction à la commande adaptative

Adapter veut dire changer un comportement en conformité avec de nouvelles circonstances. Intuitivement, un contrôleur adaptatif est un régulateur qui peut modifier son comportement en réponses aux changements dues aux dynamiques d'un système et aux perturbations.

Le contrôle adaptatif consiste à éliminer les perturbations structurelles (les variations des paramètres) agissant sur la performance du système de contrôle.

Un système de contrôle est adaptatif, si en plus d'une contre réaction conventionnelle, il contient une boucle fermée de contrôle de son indice de performance.

I.1.1 Définition

La commande adaptative est un ensemble de techniques utilisées pour l'ajustement automatique en ligne des régulateurs des boucles de commande afin de réaliser ou de maintenir un certain niveau de performances quand les paramètres du procédé à commander sont soit inconnus soit/et varient dans le temps [Lan-1989].

Un système de commande adaptative traite l'écart entre l'indice de performance désiré et celui qui est mesuré dans le système réel. Le mécanisme d'adaptation intervient lors de l'ajustement des coefficients du régulateur afin de réaliser un comportement souhaité du système en boucle fermée.

L'utilisation des systèmes de commande adaptative connaît aujourd'hui un essor certain d'une part à cause de leur complexité raisonnable et d'autre part à cause du développement de micro-processeurs pouvant servir de support pour leur mise en œuvre.

A la question : "Quand faut-il utiliser la commande adaptative ?"

On peut répondre comme suit :

- 1 - Quand c'est techniquement nécessaire.
- 2 - Quand c'est économiquement rentable.

L'adaptation est souhaitable pour les raisons principales :

- 1 - Soit pour affiner au cours du temps le réglage initiale du système de commande.
- 2 - Soit pour tenir compte des variations des paramètres à commander.

I.1.2 Domaine d'application de la commande adaptative

Les principales fonctions des systèmes de commande adaptative sont :

- 1 - La détection de la variation des caractéristiques du système à commander.
- 2- Le maintien des performances du système de commande quand les caractéristique du système à commander changent.
- 3 - La détermination automatique des paramètres optimaux des régulateurs dans les divers points de fonctionnement du système à commander.
- 4 - L'ajustement automatique des paramètres au cours du fonctionnement.
- 5 - La commande de nouveaux procédés technologiques dont les modèles sont connus avec beaucoup d'imprécisions [Lan-1989].

I.1.3 Commande conventionnelle à contre-réaction et commande adaptative. Similarités et différences

La question suivante est souvent posée :

Quelle est la différence entre les "systèmes de commande adaptative" et les "systèmes conventionnelles de commande à contre-réaction"?

Les variations non-mesurables et inconnues des paramètres d'un procédé affectent les performances d'un système de commande à contre-réaction utilisant un régulateur à paramètres fixes. Ces variations sont provoquées par des perturbations paramétriques agissant sur le procédé en plus des perturbations agissant sur les variables à réguler.

Nous pouvons donc distinguer deux types de perturbations :

- 1- perturbations agissant sur les variables à réguler
- 2-perturbations (paramétriques) agissant sur les performances du système de commande.

La contre-réaction est essentiellement utilisée dans les systèmes de régulation conventionnels pour réduire (ou éliminer) l'effet des perturbations agissant sur les variables à réguler. Pour réaliser ceci, on mesure les variables, on les compare aux valeurs désirées et les différences sont appliquées à l'entrée du régulateur qui engendre la commande appropriée.

Une approche conceptuellement similaire peut être considérée pour le problème du maintien des performances désirées d'un système de commande en présence de perturbations paramétriques. Il faut définir d'abord un indice de performance (IP) du système qui est une mesure des performances du système (exp : facteur d'amortissement

pour des systèmes caractérisés par une fonction de transfert du deuxième ordre). Il faut après mesurer cet IP et le comparer avec le IP désiré. L'écart entre l'IP désiré et l'IP mesuré va être traité par un "mécanisme d'adaptation".

La sortie du "mécanisme d'adaptation" va agir sur les paramètres du régulateur ou directement sur le signal de commande afin de modifier d'une manière appropriée les performances du système [Lan-1989].

I.1.4 Techniques de commande adaptative

Il existe différents types de schémas destinés à assurer des performances acceptables quand les paramètres du procédé sont inconnus ou varient dans le temps, mais seulement celles qui ont une boucle de contre-réaction sur la mesure de performance sont réellement des schémas de commande adaptative.

Par exemple les systèmes utilisant des régulateurs à "gain programmé" sont des schémas de commande adaptative en boucle ouverte. On suppose une relation rigide entre certaines variables de l'environnement et les paramètres du procédé. Les valeurs des paramètres du régulateur sont lues dans une table associée aux mesures de l'environnement.

Dans ce schéma, les modifications des performances causées par la modification des paramètres du régulateur ne sont pas mesurées et comparées avec les performances désirées.

Les performances de ces schémas peuvent être catastrophiques si pour une raison ou une autre, les relations entre les mesures de l'environnement et les paramètres dynamiques du procédé changent. A noter néanmoins que ce type de schéma est utilisé avec des résultats satisfaisants dans de nombreuses applications.

Il faut aussi souligner que malgré la simplicité du principe, sa mise en œuvre peut être coûteuse car elle peut requérir l'introduction de capteurs additionnels.

Par contraste, un système de commande adaptative en boucle fermée ne demande pas des mesures additionnelles mais uniquement une puissance de calcul supplémentaire

I.2 Systèmes de commande adaptative à modèle de référence

I.2.1 Introduction

Parmi plusieurs stratégies de commande adaptative, les systèmes de commande adaptative à modèle de référence (MRAC) jouent un rôle important, leur objectif est de

concevoir un modèle de référence qui convient aux performances désirées d'un système en boucle fermée.

La fonction de la commande est d'éliminer toute divergence entre la réponse du modèle et celle du système pour n'importe quel signal d'entrée et les conditions de perturbation (internes ou externes).

I.2.2 Principe de la commande adaptative à modèle de référence

Les systèmes de commande adaptative à modèle de référence ont un schéma de base représenté par la figure. 1.1.

Whitaker H. P (en 1958) [**Lan-1979**] a proposé un système de commande adaptative à modèle de référence (figure.1.1), largement développé par plusieurs spécialistes. De tels systèmes sont composées par deux boucles fermées : une boucle interne (principale) et l'autre externe.

La boucle interne comprend le système à commander et le régulateur dont les paramètres sont ajustés selon un algorithme établi au niveau de la boucle externe de façon à ce que la différence entre la sortie du modèle de référence et celle du processus soit minimale.

Le modèle de référence doit générer la réponse instantanée désirée $y_m(t)$. Les signaux de sortie de la boucle interne (du système à commander) et de la boucle externe (du modèle de référence) sont comparés et leur différence est utilisée pour concevoir la loi d'ajustement des paramètres du régulateur. Cet ajustement est nécessaire pour compenser les changements externes et internes qui provoquent des déviations des caractéristiques de la boucle interne par rapport à celle du modèle de référence.

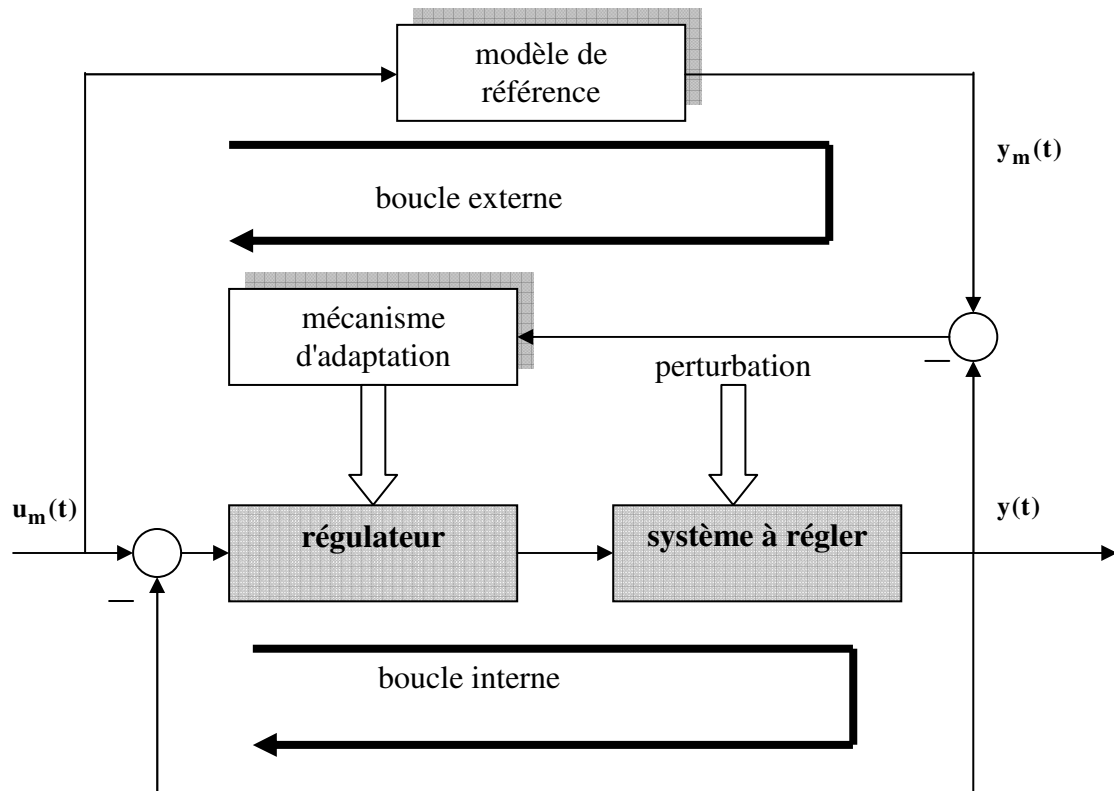


FIG. 1.1 - Schéma de commande adaptative à modèle de référence

I.2.3 Les avantages de la commande adaptative à modèle de référence

L'intérêt suscité de la commande adaptative à modèle de référence par rapport aux systèmes de réglage classique, comprend certains avantages :

- 1-elle assure la stabilité et la qualité de commande pour compenser les variations des caractéristiques du système à commander.
- 2-elle est simple à réaliser.

Par conséquent sa fiabilité est relativement élevée par rapport aux systèmes classiques.

I.2.4 Commande adaptative directe et indirecte

Le schéma de la commande adaptative avec modèle de référence explicite donné (figure 1.1), est un schéma de commande adaptative directe, les paramètres du régulateur étant ajustés en une seule étape.

Dans le schéma de la commande adaptative indirecte (figure.1.2), l'adaptation des paramètres du régulateur se fait en deux étapes :

- 1- estimation des paramètres du modèle du procédé.
- 2- calcul des paramètres du régulateur à partir des paramètres estimés.

La commande se calcule à partir des paramètres estimés des procédés et elle s'applique simultanément au procédé et prédicteur. On déduit que la sortie du prédicteur va se comporter en concordance avec les performances désirées quelles que soient les valeurs des paramètres estimés. On conclut donc que l'erreur de prédiction devient une mesure de l'écart entre les performances réelles et celles désirées. Dans le cas où les performances désirées sont spécifiées sous la forme d'une fonction de transfert, la commande calculée va assurer l'identité entre la sortie du prédicteur et celle d'un modèle de référence explicite.

La commande adaptative directe est une approche très attrayante en raison de sa simplicité et de l'élimination de certains problèmes numériques associés dans beaucoup de cas aux calculs de la commande à partir des paramètres estimés du procédé [Lan-1989].

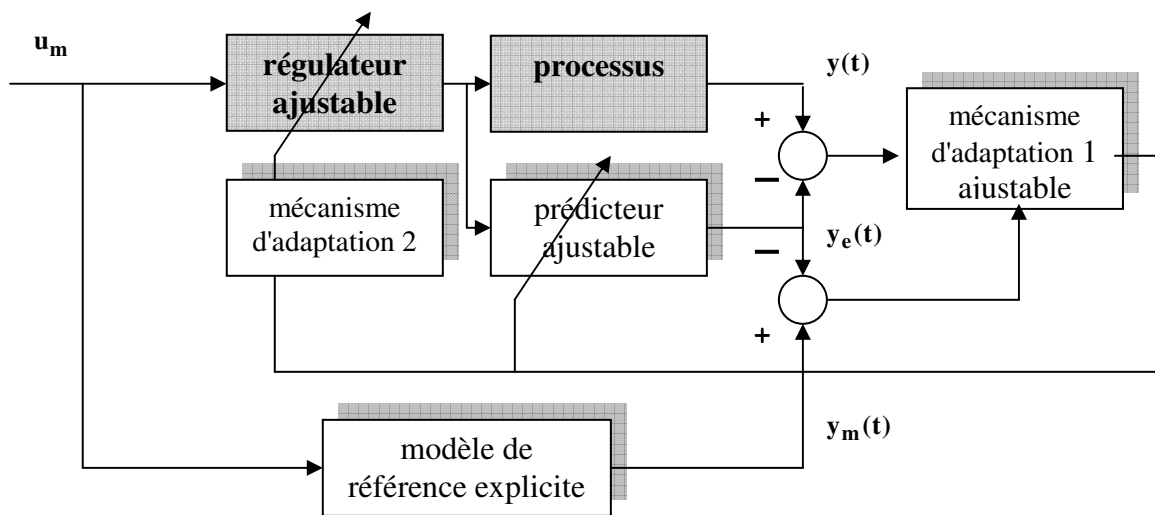


FIG. 1.2 - Schéma de la commande adaptative indirecte

I.2.5 Différents schémas de la commande adaptative à modèle de référence

En plus du schéma de base (figure.1.1), il existe d'autres schémas des M.R.A.C classés suivant plusieurs critères à savoir : la structure, l'indice de performance, le type d'application et le mode d'adaptation.

D'après le premier critère, on distingue deux structures de base des M.R.A.C qui sont :

- 1 - parallèle : est souvent utilisée pour l'asservissement des systèmes (figure.1.3).
- 2 - série : elle trouve une large application en régulation des processus industriels (figure.1.4).

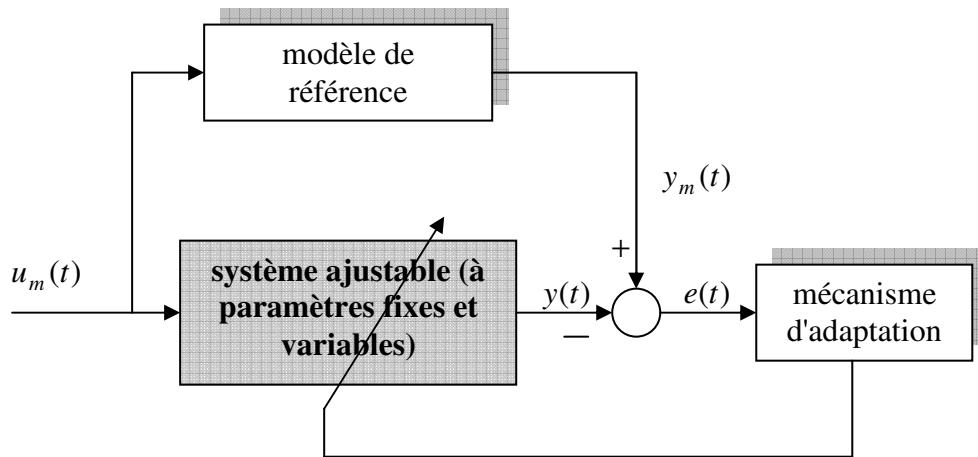


FIG. 1.3 - Structure d'un MRAC parallèle

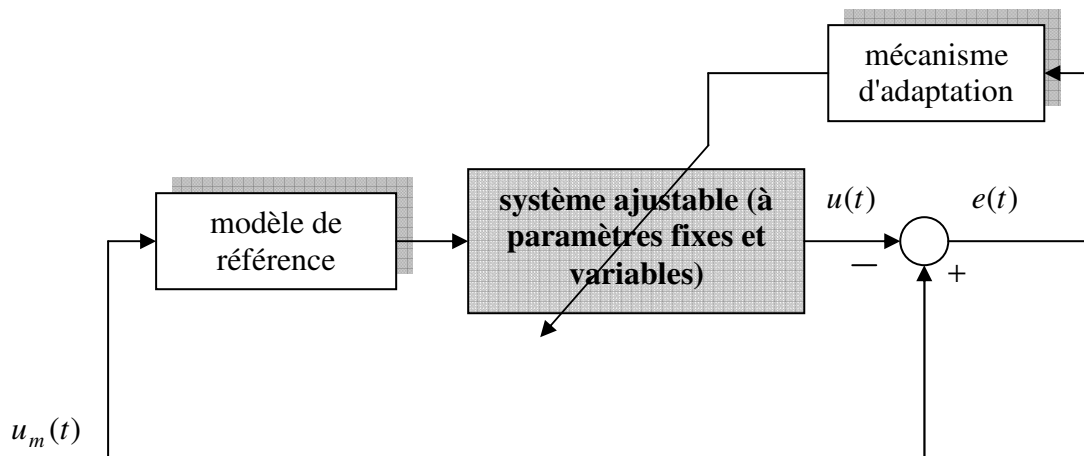


FIG. 1.4 - Structure d'un MRAC en série

CHAPITRE II: CONTROLEUR ADAPTATIF SIMPLE (SAC)

II.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons analyser le contrôleur adaptatif direct à modèle de référence présenté sous sa forme originelle par Sobel et al [Sob-1982]. Ce type de MRAC présente par rapport aux autres MRAC les avantages suivants :

1. Les conditions suffisantes pour assurer la stabilité et une poursuite asymptotique sont indépendantes de l'ordre du système.
2. Le calcul des entrées de contrôle n'impose ni l'utilisation d'un observateur, ni un retour d'états, en plus, le nombre des paramètres adaptativement ajustés, ne dépend pas de l'ordre du système.
3. Facilité d'implantation par rapport aux autres MRAC.
4. Une validation expérimentale réussie [Pal-2003, Bar-1985 a, Kau-1984].
5. Applicabilité directe aux systèmes multi-entrées multi-sorties (MIMO).

Ce MRAC est basé sur le principe de poursuite de sortie du modèle, mais pas celle des états, il présente une extension au cas adaptatif du générateur de commande pour la poursuite "Command Generator Tracker CGT " présenté dans [Bro-1979]. A cause de la simplicité d'implantation qu'il présente et de l'indépendance du nombre de paramètres devant être ajustés sur l'ordre du système, ce contrôleur adaptatif est appelé "Simplified Adaptive Controller, (SAC)".

II.2 Poursuite de sortie du modèle

Le problème de contrôle linéaire à modèle de référence est résolu pour l'équation de processus linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Où $x_p(t)$ est le vecteur d'état de dimension $(n \times 1)$, $u_p(t)$ est le vecteur de contrôle de dimension $(m \times 1)$, $y_p(t)$ est le vecteur de sortie de dimension $(q \times 1)$. A_p , B_p et C_p sont des matrices de dimension appropriée. Le rang de variation des paramètres est supposé borné comme suit :

$$\begin{aligned}a_{-ij} \leq a_p(i, j) \leq \bar{a}_{ij}, i = 1 \dots n, j = 1 \dots n \\ b_{-ij} \leq b_p(i, j) \leq \bar{b}_{ij}, i = 1 \dots n, j = 1 \dots m\end{aligned}\tag{2.2}$$

Où $a_p(i, j)$ et $b_p(i, j)$ sont les i, j ième élément de A_p et B_p respectivement. Il est aussi supposé que :

1. Toutes les paires possibles A_p, B_p sont contrôlables et stabilisables par un gain de retour de sortie.
2. Toutes les paires possibles A_p, C_p sont observables.
3. B_p est une matrice de rang maximal.

L'objectif est de trouver, sans connaissance explicite de A_p et B_p , le vecteur de contrôle $u_p(t)$ telle que le vecteur de sortie du système $y_p(t)$ serait une approximation raisonnable du vecteur de sortie du modèle de référence défini par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \\ y_m(t) &= C_m x_m(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Où $x_m(t)$ est le vecteur d'état de dimension $(n_m \times 1)$, $u_m(t)$ est le vecteur de contrôle de dimension $(q \times 1)$, $y_m(t)$ est le vecteur de sortie du modèle de dimension $(q \times 1)$. A_m, B_m et C_m sont des matrices de dimension appropriée. Le modèle est supposé "BIBO" stable. Il est important de noter que la dimension de l'état du modèle peut être inférieure à celle du processus, mais les deux doivent avoir le même nombre de sorties [Abd-1992].

II.3 Générateur de commande pour la poursuite (CGT)

Le CGT est une loi de contrôle à modèle de référence destinée aux systèmes linéaires invariants ou variants dont les paramètres sont connus, cette loi de contrôle est une combinaison entre les états du modèle, l'entrée de référence et l'erreur entre la sortie de modèle et celle du système [Bro-1979].

II.3.1 Système à paramètres invariables

Quand une poursuite parfaite de sortie est atteinte, c'est à dire $y_p(t) = y_m(t)$ pour $t \geq 0$, les trajectoires de contrôle et d'états correspondants sont dites trajectoires idéales et sont notées $x_p^*(t)$ et $u_p^*(t)$ et par définition, le système idéal est tel qu'il satisfait la même dynamique que celle du système réel. En plus, la sortie du système idéal est identiquement égale à la sortie du modèle de référence, mathématiquement parlant :

$$\dot{x}_p^*(t) = A_p x_p^*(t) + B_p u_p^*(t) \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (2.4.a)$$

$$y_p^*(t) = y_m = C_p x_p^*(t) = C_m x_m(t) \quad (2.4.b)$$

Il est supposé [Bro-1979] que les trajectoires idéales sont des fonctions linéaires des états et des entrées du modèle de référence :

$$\begin{bmatrix} x_p^*(t) \\ u_p^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Ici $u_m(t)$ est supposée constante, sinon ses dérivées doivent être disponibles, cette supposition peut être allégée. La trajectoire idéale vérifie l'équation (2.1),c-à-d :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p^*(t) \\ y_p^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p^*(t) \\ u_p^*(t) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

En remplaçant (2.5) dans (2.6), on aura :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p^*(t) \\ y_p^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

La dérivation de l'équation (2.5), en considérant que $u_m(t)$ est une constante donne :

$$\dot{x}_p^*(t) = S_{11}(t) \dot{x}_m(t) + S_{12} \dot{u}_m(t) = S_{11} \dot{x}_m(t) \quad (2.8)$$

Si on remplace $\dot{x}_m(t)$ de (2.3) dans (2.8), on trouve :

$$\dot{x}_p^*(t) = S_{11} A_m x_m(t) + S_{11} B_m u_m(t) \quad (2.9)$$

La forme compacte de (2.9) et (2.4) est :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p^*(t) \\ y_p^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} A_m & S_{11} B_m \\ C_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

De (2.7) et (2.10) et sachant que $x_m(t)$ et $u_m(t)$ sont arbitraire, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} S_{11} A_m & S_{11} B_m \\ C_m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

L'équation matricielle (2.11) représente un système d'équations linéaires qui doit être résolu pour les matrices S_{ij} . Il y a $(n+q) \times (n+m)$ équations avec $(mn_m + nm + mn + m^2)$ inconnus. Quand mn le nombre d'entrée de contrôle est supérieure à q (le nombre de sortie du système), il y a au moins autant d'équations que d'inconnus, alors, la solution CGT

existe presque toujours. Dans le cas très rare où une situation singulière est présente, on peut changer les valeurs des paramètres du modèle de référence pour éliminer la singularité.

Une méthode élégante mais qui ne donne pas toujours de solution, consiste à définir :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p(t) & B_p(t) \\ C_p & 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.12)$$

Alors, l'équation (2.11) est équivalente au système d'équations suivant :

$$S_{11} = \Omega_{11} S_{11} A_m + \Omega_{12} C_m \quad (2.13)$$

$$S_{12} = \Omega_{11} S_{11} B_m \quad (2.14)$$

$$S_{21} = \Omega_{21} S_{11} A_m + \Omega_{22} C_m \quad (2.15)$$

$$S_{22} = \Omega_{21} S_{11} B_m \quad (2.16)$$

L'existence de la matrice inverse dans (2.12) impose que le nombre d'entrées m soit être égal au nombre de sorties q . Si $m > q$, on peut alors utiliser la pseudo- inverse [Abd-1992].

Notons que l'équation (2.13) est une équation de Lyapunov [Ioa-2003] qui n'a de solution que si aucune valeur propre de Ω_{11} n'est égale à l'inverse d'une valeur propre de A_p .

Pour voir sous quelles conditions une poursuite asymptotique est assurée, écrivons l'équation de l'erreur sous la forme :

$$\dot{e}_x = \dot{x}_p^* - \dot{x}_p = A_p x_p^* + B_p u_p^* - A_p x_p - B_p u_p = A_p e_x + B_p (u_p^* - u_p) \quad (2.17)$$

Si la loi de contrôle à la forme suivante :

$$u_p = u_p^* + K (y_m - y_p) = u_p^* + K C_p e_x \quad (2.18)$$

Alors, l'équation de l'erreur devient :

$$\dot{e}_x = (A_p - B_p K C_p) e_x \quad (2.19)$$

Ainsi, l'erreur e_x tend vers zéro quand t tend vers l'infini, s'il existe un gain constant K qui stabilise le système en boucle fermée. Quand e_x tend vers zéro et en prenant en considération l'équation (2.4), on peut écrire :

$$y_p(t) = C_p x_p(t) = C_p x_p^*(t) = y_m(t) = C_m x_m(t)$$

Ce qui est l'objectif du CGT.

Si on remplace u_p^* par son équivalent de (2.5) dans (2.18) on aura la forme finale de

la loi de contrôle :

$$u_p(t) = S_{21}x_m(t) + S_{22}u_m(t) + K(y_m(t) - y_p(t)) \quad (2.20)$$

où S_{21} et S_{22} sont les solutions des équations (2.13) à (2.16) avec :

$$R_e[\lambda(A_p - B_p K C_p)] < 0 \quad (2.21)$$

On note que le CGT établi pour le cas où u_m est une constante peut être étendu à une entrée plus générale [Bro-1979]. Pour les problèmes réels, il est possible qu'un système d'ordre très élevé doit suivre un modèle d'ordre très petit et avec une entrée de référence arbitraire. Cela est pratiquement impossible à atteindre par un contrôleur à gains fixes. Alors, il est raisonnable et pratiquement suffisant de ne pas imposer une poursuite parfaite du modèle, mais seulement que l'erreur entre le modèle et le système soit borné et assez petite. En plus, les gains ne seront pas fixes mais adaptatifs.

II.3.2 Système à paramètres variables

Le système linéaire à paramètres variables peut être décrit par les équations suivantes :

$$\dot{x}_p(t) = A_p(t)x_p(t) + B_p(t)u_p(t) \quad (2.22)$$

$$y_p(t) = C_p x_p(t) \quad (2.23)$$

Le modèle linéaire continue invariant à suivre est décrit par :

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \quad (2.24)$$

$$y_m(t) = C_m x_m(t) \quad (2.25)$$

Les variables et les matrices sont comme dans le cas précédent à l'exception que les matrices A_p et B_p sont dans ce cas fonction du temps.

Si le suivi parfait s'établit, c-à-d, $y_p(t) = y_m(t)$ pour $t \geq 0$, les trajectoires résultantes du contrôle et de l'état sont notées respectivement $u_p^*(t)$ et $x_p^*(t)$.

Par définition, les variables idéales doivent satisfaire :

$$(i) \quad C_p x_p^*(t) = C_m x_m(t) \quad (2.26)$$

$$(ii) \quad \dot{x}_p^*(t) = A_p(t)x_p^*(t) + B_p(t)u_p^*(t) \quad (2.27)$$

$$(iii) \quad \begin{bmatrix} x_p^*(t) \\ u_p^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Avec S_{11}, S_{12}, S_{21} et S_{22} sont des matrices dépendantes du temps, de dimension appropriée.

Sous la supposition que $\dot{u}_m(t) = 0$, Les équations à résoudre sont :

$$A_p(t) S_{11}(t) + B_p(t) S_{21}(t) = \dot{S}_{11}(t) + S_{11}(t)A_m \quad (2.29)$$

$$A_p(t) S_{12}(t) + B_p(t) S_{22}(t) = \dot{S}_{12}(t) + S_{11}(t)B_m \quad (2.30)$$

$$C_p S_{11}(t) = C_m \quad (2.31)$$

$$C_p S_{12}(t) = 0 \quad (2.32)$$

Les équations (2.29) – (2.32) peuvent être mises sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} A_p(t) & B_p(t) \\ C_p & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{S}_{11}(t) + S_{11}(t)A_m & \dot{S}_{12}(t) + S_{11}(t)B_m \\ C_m & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

On assume que $m = q$, donc, si la matrice

$$\begin{bmatrix} A_p(t) & B_p(t) \\ C_p & 0 \end{bmatrix}$$

est inversible, l'équation (2.33) donne :

$$\begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11}(t) & \Omega_{12}(t) \\ \Omega_{21}(t) & \Omega_{22}(t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{S}_{11}(t) + S_{11}(t)A_m & \dot{S}_{12}(t) + S_{11}(t)B_m \\ C_m & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

avec

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11}(t) & \Omega_{12}(t) \\ \Omega_{21}(t) & \Omega_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p(t) & B_p(t) \\ C_p & 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.35)$$

On voit que le produit

$$C_p \Omega_{11}(t) = 0, \quad \forall t$$

et comme C_p est une matrice différente de l'identité, La matrice $\Omega_{11}(t)$ est alors singulière pour tout t .

Le développement de l'égalité (2.34) donne le système différentiel algébrique suivant :

$$\Omega_{11}(t) \dot{S}_{11}(t) = S_{11}(t) - \Omega_{11}(t) S_{11}(t)A_m - \Omega_{12}(t)C_m \quad (2.36)$$

$$\Omega_{11}(t) \dot{S}_{12}(t) = S_{12}(t) - \Omega_{11}(t) S_{11}(t)B_m \quad (2.37)$$

$$S_{21}(t) = \Omega_{21}(t) \dot{S}_{11}(t) + \Omega_{21}(t) S_{11}(t)A_m + \Omega_{22}(t)C_m \quad (2.38)$$

$$S_{22}(t) = \Omega_{21}(t) \dot{S}_{12}(t) + \Omega_{21}(t) S_{11}(t)B_m \quad (2.39)$$

On voit bien que $S_{21}(t)$ et $S_{22}(t)$ dépendent de $S_{11}(t)$ et $S_{12}(t)$ via les équations (2.38) et (2.39), donc, seulement l'équation (2.36) nécessite d'être résolue.

Pour la résolution des systèmes d'équations (2.36-2.39), on transforme les équations différentielles en équations aux différences en appliquant la formule d'approximation de la dérivée.

$$\dot{x}(kT) = \frac{x(kT + T) - x(kT)}{T}$$

Avec T la période d'échantillonnage [Abd-1992].

II.4 Concepts de stabilité et de positivité

Dans cette section, nous présentons les concepts nécessaires à l'analyse du MRAC développé dans ce chapitre. Ces concepts seront utilisés pour l'analyse de la stabilité du SAC et pour montrer les conditions de son applicabilité.

II.4.1 Stabilité

Quand on traite des contrôleurs adaptatifs ou non linéaires, on ne peut pas utiliser les procédures d'analyse de stabilité dans le domaine fréquentiel qui sont devenus très intuitives. Par contre, les techniques de Lyapunov [Ioa-2003] constituent des moyens très utiles et convenables pour la démonstration de la stabilité et de la robustesse du MRAC. Pour illustrer ce concept, on considère le système :

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.40)$$

Pour démontrer la stabilité du système défini par l'équation (2.40), on lui associe une fonction définie positive $V(x, t)$, dite "fonction de Lyapunov", qui doit décroître quand x décroît et croître quand x croît. C'est à dire que sa dérivée :

$$\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \dot{x}(t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, t) \quad (2.41)$$

est une fonction définie négative.

Ainsi il est facile de montrer que pour le système linéaire présenté par l'équation (2.1), la fonction :

$$V(x) = x^T(t) P x(t) \quad (2.42)$$

est une fonction de Lyapunov pour ce système seulement si P est définie positive et :

$$\dot{V}(x) = x^T(t) P \dot{x}(t) + \dot{x}^T(t) P x(t) = x^T(t) [P A_p + A_p^T P] x(t) \quad (2.43)$$

est définie négative, ceci est vérifiée si :

$$PA_p + A_p^T P = -Q \quad (2.44)$$

Où Q est une matrice définie positive.

Théorème (II.1) [Isi-1995]

Le système défini par l'équation (2.1) est asymptotiquement stable si pour toute matrice Q définie positive, il existe une matrice P définie positive, telle que l'équation (2.44) est vérifiée. Si Q est seulement semi définie positive, alors, le système est seulement stable.

Les différentes formes de la stabilité (asymptotique, uniforme, globale, locale) sont données dans [Ioa-2003].

II.4.2 Positivité

Nous donnons ici des lemmes utiles concernant la positivité des systèmes linéaire invariant dans le temps. Quelques définitions sur la positivité sont d'abord présentées dans le domaine temporel, ensuite dans le domaine fréquentiel. Les conditions de positivité difficiles à tester pour les systèmes réels sont ramenées à des conditions de stabilité faciles à tester en utilisant les méthodes conventionnelles. La fonction de transfert donnée par :

$$G(s) = C_p (sI - A_p)^{-1} B_p + D_p \quad (2.45)$$

est propre si $D_p \neq 0$, sinon, elle est dite strictement propre.

Définition (II.1) [Ioa-1987]

Une fonction de transfert $G(s)$ est réelle positive si :

1. $G(s)$ est réelle pour s réelle.
2. $\operatorname{Re}\{G(s)\}_{\operatorname{Re}(s) \geq 0} \geq 0$

La stricte positivité est très utile pour la démonstration de la stabilité des systèmes adaptatifs, mais les systèmes réels ne satisfont pas cette condition, alors, plusieurs techniques ont été proposées pour palier à ce problème.

Définition (II.2) [Bar-1985 b]

Soit $G(s)$ une matrice de transfert de dimension $m \times m$, et supposons qu'il existe une

matrice de gain constante K_e telle que la fonction de transfert du système en boucle fermé :

$$G_a(s) = [I + G(s)K_e]^{-1}G(s) \quad (2.46)$$

soit SPR. Puisque seulement un gain de retour constant est requis pour satisfaire la stricte positivité, la matrice de transfert $G(s)$ est dite " Presque strictement réelle positive ", "Almost Strictly Positive Real "ASPR.

Lemme (II.1) [Bar-1991 a]

Soit $G(s)$ une matrice de transfert strictement à phase minimale, de dimension $m \times m$, et de degré relatif $(n - m)/n$ (pour plus de détail sur les pôles et les zéros et le degré relatif pour les systèmes MIMO (voir [Bor-1992])). Soit (A, B, C) une réalisation minimale de $G(s)$. Si $CB > 0$ (défini positif), alors $G(s)$ est ASPR.

Lemme (II.2) [Bar-1991 a]

Toute matrice de transfert $G(s)$ de dimension $m \times m$ propre et strictement à phase minimale est ASPR.

Lemme (II.3) [Bar-1991 a]

Soit $G(s)$ une matrice de transfert ASPR et soit $K_{e\min}$ une matrice de gain constante qui satisfait la condition (2.46). Alors $G_a(s)$ reste SPR pour toute matrice de gain $K_e > K_{e\min}$

Lemme (II.4) [Bar-1991 a]

Soit la matrice de transfert $G(s)$ de dimension $m \times m$ et ayant un degré de McMillan (l'extension du degré relatif de systèmes SISO aux système MIMO [Bor-1992]) arbitraire, $G(s)$ n'est pas nécessairement stable ou à phase minimale. On suppose que $G(s)$ est strictement propre. Soit K_y une matrice de gain de retour constant et non singulière telle que le système en boucle fermée :

$$G_{BF}(s) = [I + G(s)K_y]^{-1}G(s) \quad (2.47)$$

soit asymptotiquement stable. Alors la matrice de transfert augmentée suivante :

$$G_a(s) = G(s) + K_y^{-1} \quad (2.48)$$

est ASPR.

Lemme (II.5) [Bar-1991 a]

Soit $G(s)$ définie comme dans lemme (II.4) et soit :

$$H(s) = K(1 + qs) \tag{2.49}$$

un contrôleur telle que le système en boucle fermée de la figure 2.1 soit stable. Alors le système augmenté :

$$G_a(s) = G(s) + H^{-1}(s) = G(s) + \frac{K^{-1}}{1 + qs} \tag{2.50}$$

est ASPR.

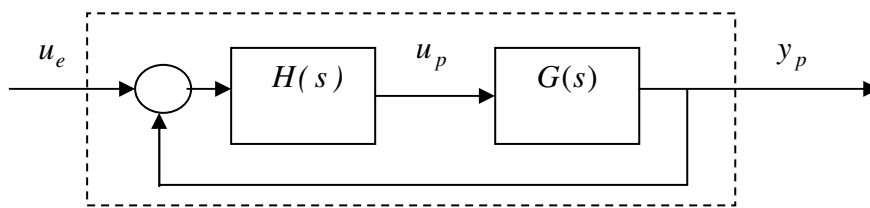


FIG. 2.1 - Système fictif en boucle fermée

Lemme (II.6) [Bar-1991 a]

Soit $G(s)$ définie comme dans lemme (II.4). Soit $H(s)$ une dynamique arbitraire qui stabilise le système de la figure 2.1, alors le système :

$$G_a(s) = G(s) + H^{-1}(s) \tag{2.51}$$

est ASPR si le degré de McMillan du $G_a(s)$ est p/p ou $(p-m)p$ quel que soit p . Si $G(s)$ et $H(s)$ sont des systèmes SISO, alors pour que le système augmenté $G_a(s)$ soit ASPR, il suffit que son degré relatif soit égal à l'unité et que le système de la figure 2.1 soit stable.

Pour les lemmes (II.5) et (II.6), le système fictif qui sera strictement positif réel (SPR) est représenté par la figure 2.2.

Il est à noter que dans la figure 2.2, $H^{-1}(s)$ n'est pas une partie du système réel (dont l'entrée peut être un débit d'un liquide et la sortie une concentration ou une température). $H^{-1}(s)$ est en réalité une partie du contrôleur et n'affecte que les valeurs mesurées, comme le fait n'importe quel contrôleur

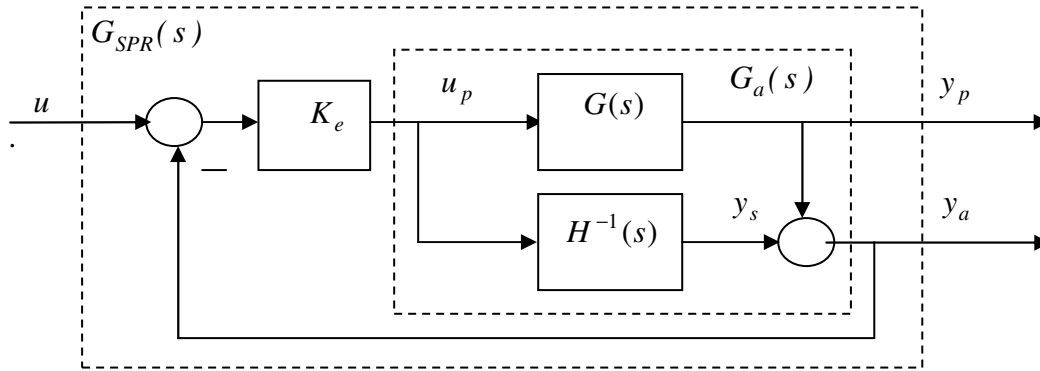


FIG. 2.2 - Le système fictif SPR

II.5 Contrôleur adaptatif basé sur le CGT [Sob-1982]

Nous allons voir maintenant l'extension du CGT au cas adaptatif. Pour ce MRAC, seulement les sorties du système sous contrôle et les états du modèle de référence doivent être mesurables. Plus encore, l'ordre du système peut être très grand par rapport à l'ordre du modèle de référence. L'algorithme de base présenté dans cette section suppose que le système sous contrôle est ASPR. Cette restriction sera allégée par la suite.

Rappelons la loi de contrôle du CGT pour les systèmes à paramètres connus, déjà donnée par l'équation (2.20)

$$u_p(t) = S_{21}x_m(t) + S_{22}u_m(t) + K(y_m(t) - y_p(t))$$

La loi de contrôle du MRAC adaptatif basée sur l'approche CGT est choisie comme ayant la même forme que celle donnée par (2.20)

$$u_p(t) = K_x(t)x_m(t) + K_u(t)u_m(t) + K_e(t)(y_m(t) - y_p(t)) \quad (2.52)$$

En substituant (2.4) dans (2.52) nous obtenons :

$$u_p(t) = K_x(t)x_m(t) + K_u(t)u_m(t) + K_e(t)C_p e_x(t) \quad (2.53)$$

Où les gains $K_x(t)$, $K_u(t)$ et $K_e(t)$ sont adaptés progressivement de telle sorte que l'erreur s'annule. Pour simplifier la présentation, les trois gains précédents sont compactés sous forme d'une seule matrice K_r de dimension $m \times n_r$:

$$K_r(t) = [K_e(t), K_x(t), K_u(t)] \quad (2.54)$$

et de la même manière, on écrit le vecteur :

$$r(t) = \begin{bmatrix} C_p e_x(t) \\ x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_m(t) - y_p(t) \\ x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

De dimension $n_r \times 1$, alors :

$$u_p(t) = K_r(t)r(t) \quad (2.56)$$

Le gain $K_r(t)$ est défini comme étant la somme d'un gain proportionnel et d'un gain intégral. Chacun de ces deux gains est adapté comme suit :

$$K_r(t) = K_p(t) + K_I(t) \quad (2.57)$$

$$K_p(t) = v(t)r^T(t)T_p, \quad v(t) = y_m(t) - y_p(t) \quad (2.58)$$

$$\dot{K}_I(t) = v(t)r^T(t)T_i \quad (2.59)$$

$$K_I(0) = K_{I0} \quad (2.60)$$

Où T_i et T_p sont des matrices de pondération, invariantes dans le temps de dimension $n_r \times n_r$, K_{I0} est le gain intégral initial et C_p est la matrice de sortie du système de dimension $q \times n$. La sélection des matrices T_i et T_p est limitée par les conditions suffisantes pour la stabilité [Bar-2004 b].

II.5.1 Analyse de la stabilité

La stabilité asymptotique de l'erreur de sortie du SAC peut être examinée en utilisant l'approche de Lyapunov qui exige :

1. L'existence d'une fonction candidate de Lyapunov V , définie positive.
2. L'analyse de la stabilité asymptotique du système en boucle fermée en examinant le signe de \dot{V}

Le théorème (II.2) suivant donne les résultats de stabilité du SAC.

Théorème (II.2) [Pal-2003]

Supposons qu'il existe une matrice réelle symétrique et définie positive P et des matrices réelles Q et \tilde{K}_e telles que :

$$P(A_p - B_p \tilde{K}_e C_p) + (A_p - B_p \tilde{K}_e C_p)^T P = -Q \leq 0 \quad (2.61)$$

$$C_p = B_p^T P \quad (2.62)$$

et supposons que les matrices T_i et T_p sont respectivement symétrique définie positive et

symétrique semi définie positive, alors, tous les signaux du système en boucle fermée sont bornés, de plus, l'erreur entre la sortie du modèle et celle du système est asymptotiquement stable.

Les contraintes données par les équations (2.61) et (2.62) impliquent que le système sous contrôle doit être ASPR. La démonstration du théorème (II.2) est dans l'annexe.

Le résumé du SAC est donné par le tableau 2.1 et le schéma fonctionnel de ce contrôleur est représenté sur la figure 2.3.

Système et Modèle	$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t), \quad \dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t)$ $y_p(t) = C_p x_p(t), \quad y_m(t) = C_m x_m(t)$
Loi de contrôle	$u_p(t) = K_r(t) r(t) \text{ où}$ $K_r(t) = [K_e(t) \ K_x(t) \ K_u(t)], \quad r^T(t) = [(y_m - y_p)^T \ x_m^T \ u_m^T]$
Loi d'adaptation	$K_r(t) = K_p(t) + K_I(t)$ $\dot{K}_I(t) = (y_m(t) - y_p(t)) r^T(t) T_i, T_i > 0$ $K_p(t) = (y_m(t) - y_p(t)) r^T(t) T_p, T_p \geq 0$
Propriétés	$y_p \rightarrow y_m \text{ ii } H(s) = C_p (sI - A_p + B_p K_e C_p)^{-1} B_p \text{ est SPR et les}$ <p>équations (2.12) à (2.16) ont une solution</p>

TAB 2.1 - Résumé du SAC de base

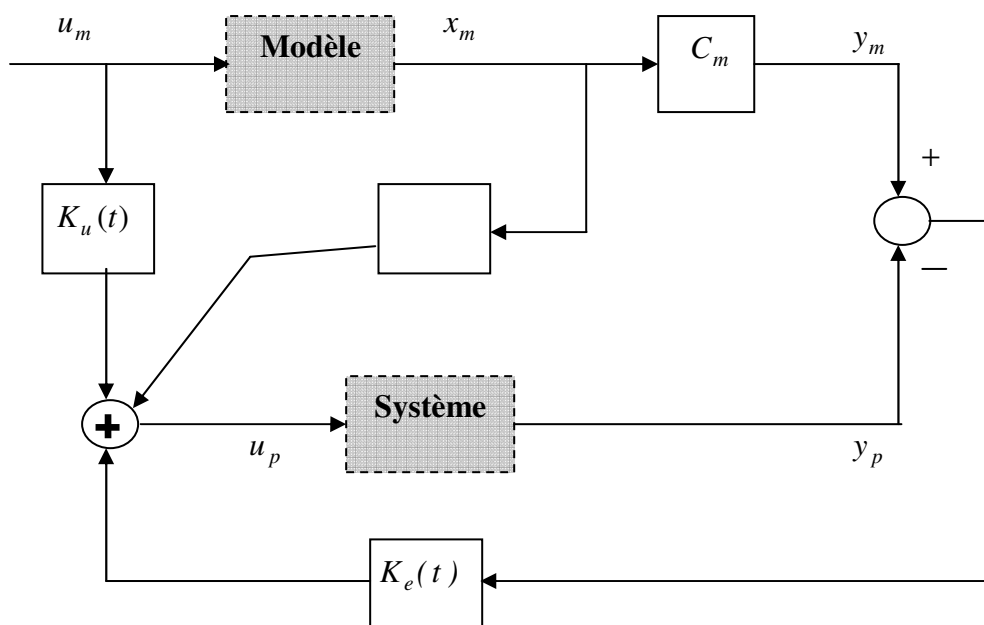


FIG. 2.3 - Schéma fonctionnel du SAC de base

Afin de montrer l'efficacité du contrôleur adaptatif basé sur le CGT, deux exemples ont été pris pour les cas SISO et MIMO.

Exemple 2.1

Soit un système SISO de fonction de transfert

$$G(s) = \frac{k(s+c)}{s^2 + a_1s + a_0}$$

Sa représentation d'état est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t)\end{aligned}$$

Où

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_p = [k.c \quad k]$$

La fonction de transfert du modèle de référence est donnée par :

$$G_m(s) = \frac{1}{s+1}$$

Sa représentation d'état est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \\ y_m(t) &= C_m x_m(t)\end{aligned}$$

Où

$$A_m = [-1], B_m = [1], C_m = [1]$$

Le déterminant de la matrice

$$S = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix}$$

(Voir l'équation 2.12) vaut $k.c$ et donc la matrice est inversible pour $k \neq 0$ et $c \neq 0$.

Les matrices S_{ij} , solutions des équations (2.13-2.16) sont données par :

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 1/x \\ -5/x \end{bmatrix}, S_{12} = \begin{bmatrix} -5/(cx) \\ 5/x \end{bmatrix}, S_{21} = (-5a_1 + 25 + a_0)/x, S_{22} = 5((a_1 - 5).c - a_0)/(c.x)$$

avec

$$x = k(c - 5)$$

et on voit bien que l'équation (2.11) est vérifiée.

D'autre part, le système est de degré relatif égal à un et est à phase minimale pour $c > 0$, et donc, il est ASPR.

L'application du contrôleur adaptatif basé sur le CGT à ce système (voir équation 2.52) conduit à une erreur asymptotiquement stable, ce qui a comme conséquence la convergence de l'algorithme adaptatif.

La simulation a été faite en prenant $c=3$ et la variation permise des paramètres est donnée par le tableau 2.2.

Paramètres	Valeurs nominales	Intervalles de variation
k	1	0.8 à 1.2
a_1	1	-2 à 2
a_0	1	-1.5 à 2.1

TAB 2.2 - Valeurs nominales et intervalles de variations des paramètres

Les cas considérés pour la simulation sont donnés par le tableau 2.3.

Les figures 2.4 et 2.5 représentent les sorties du système et du modèle et les commandes correspondantes pour une entrée carré d'amplitude ± 1 et de période 60 secondes. La figure 2.6 montre la norme d'ordre deux de la matrice des gains $K_r(t)$ pour le cas 4 (voir équation 2.54). De l'équation (2.56), on conclut que la grandeur de commande est aussi bornée.

Paramètre	Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3	Cas n° 4
k	1	1.1	0.8	1.2
a_1	1	2	-2	-2
a_0	1	-1.5	2.1	-1.5
c	3	3	3	3
K_e	3	3	10	10
P	$\begin{bmatrix} 20 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 20 & 3.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 33 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 20 & 3.6 \end{bmatrix}$
Q	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.3 & 1.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.6 & 1.2 \end{bmatrix}$
$\lambda_1(A_p)$	$\begin{bmatrix} 60 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 55.44 & 6.73 \\ 6.73 & 5.06 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7712 & 1867 \\ 1867 & 452 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 248.4 & 57.4 \\ 57.4 & 16.80 \end{bmatrix}$
$\lambda_2(A_p)$	-0.5+0.866i -0.5-0.866i	0.5811 -2.5811	1+0.0488i 1-0.0488i	-0.5811 2.5811

TAB 2.3 - Les cas considérés pour les simulations

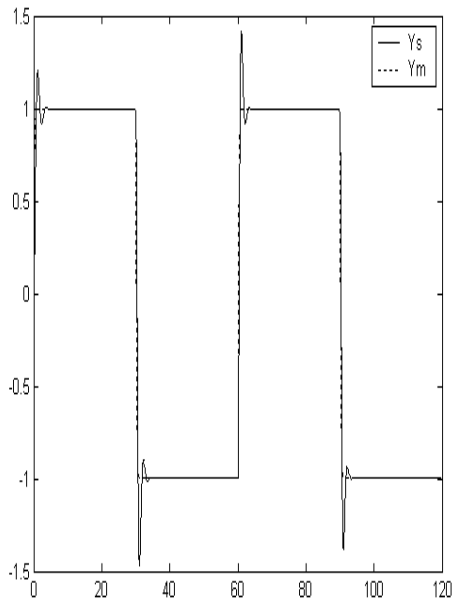


FIG. 2.4.a - Sorties du système et du modèle,
Cas 1

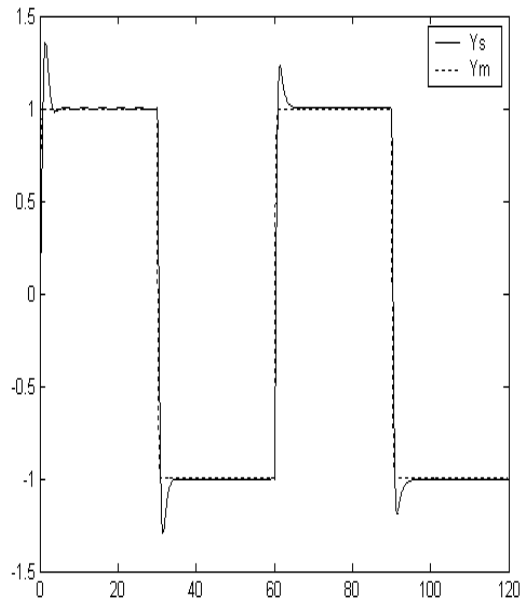


FIG. 2.4.b - Sorties du système et du modèle,
Cas 2

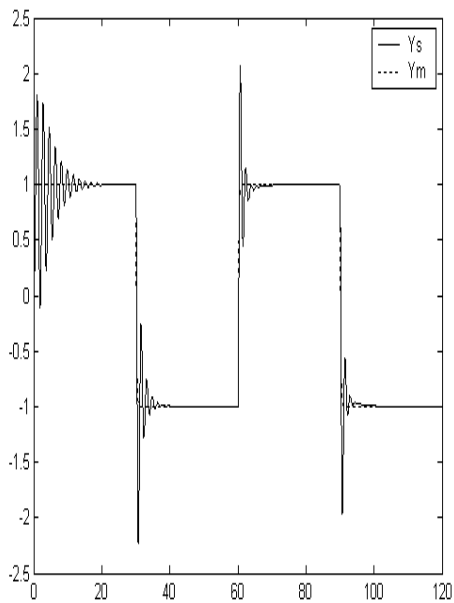


FIG. 2.4.c - Sorties du système et du modèle,
Cas 3

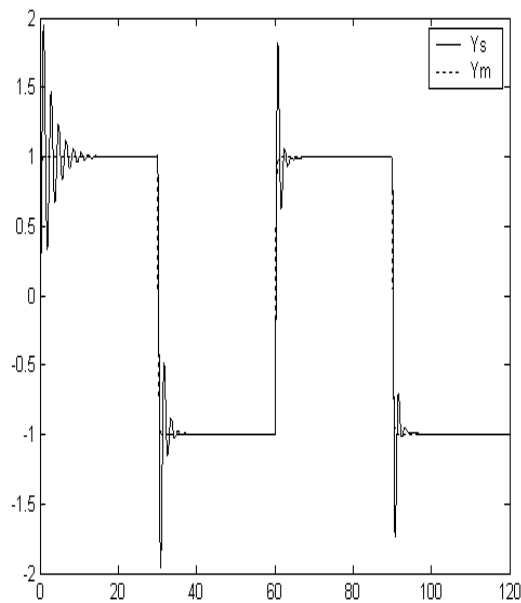


FIG. 2.4.d - Sorties du système et du modèle,
Cas 4

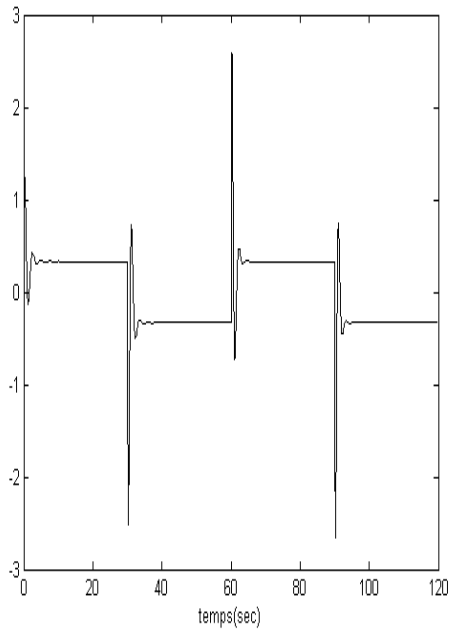


FIG. 2.5.a - Signal de commande, Cas 1

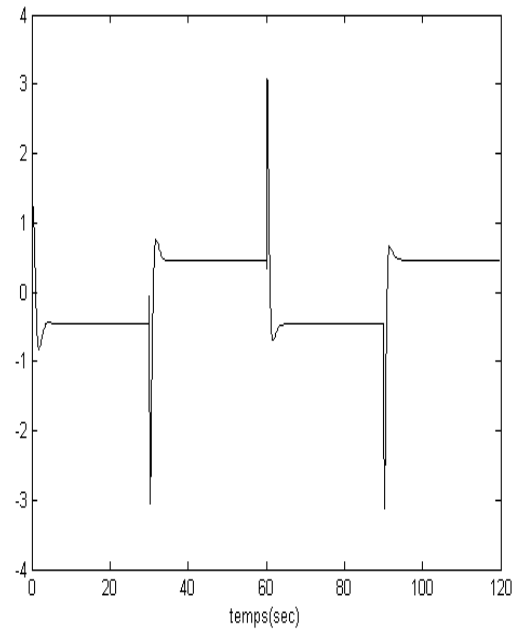


FIG. 2.5.b - Signal de commande, Cas 2

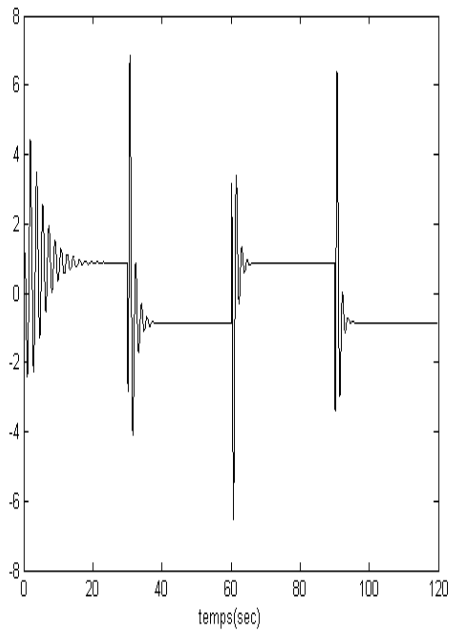


FIG. 2.5.c - Signal de commande, Cas 3

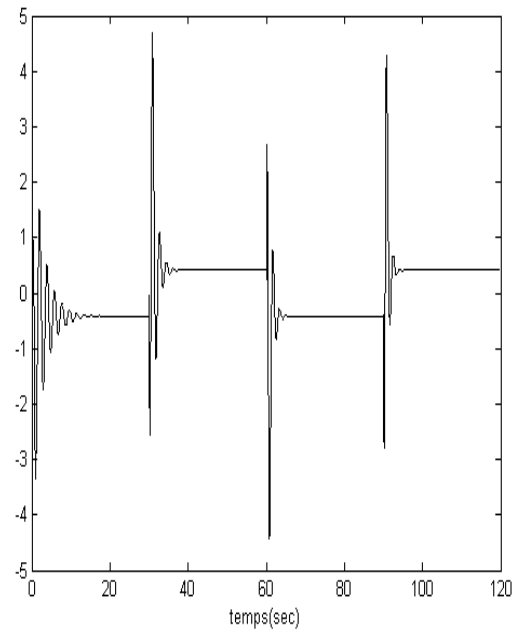


FIG. 2.5.d - Signal de commande, Ca4

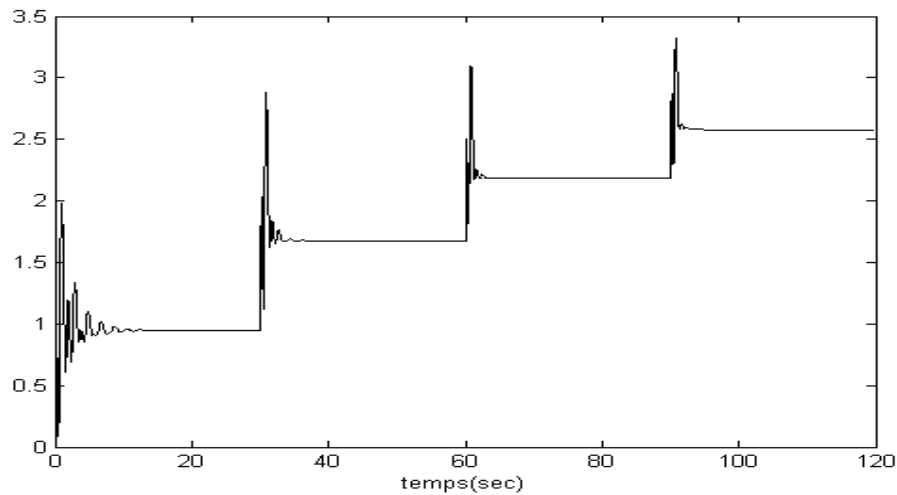


FIG. 2.6 - Norme d'ordre deux de la de la matrice $K_r(t)$, Cas 4

Exemple 2.2

Soit un système MIMO à deux entrées et deux sorties représenté par :

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t)\end{aligned}$$

Avec

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_p = C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sa matrice de transfert est donnée par :

$$G_p(s) = C_p (sI - A_p)^{-1} B_p = \frac{1}{(s-1)^2} \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix},$$

avec I la matrice identité

Les valeurs propres sont données par :

$$\lambda(A_p) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

C'est un système instable

Le modèle de référence est donné par :

$$\begin{aligned}\dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \\ y_m(t) &= C_m x_m(t)\end{aligned}$$

Avec

$$A_m = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_m = C_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sa matrice de transfert est donnée par :

$$G_m(s) = C_m(sI - A_m)^{-1}B_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

C'est un modèle découplé, donc, facile à commander et de gain

$$G_m(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et donc, les valeurs finales sont données par :

$$y_m(\infty) = G_m(0)u_m = \begin{bmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \end{bmatrix}$$

1- Vérification des conditions du CGT (voir équation 2.11).

Les conditions du CGT sont vérifiées pour les matrices

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, S_{21} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, S_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2- Vérification des conditions ASPR.

Si on choisit les matrices positives

$$Q = P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et pour

$$\tilde{K}_e = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

alors

$$P(A_p - B_p \tilde{K}_e C_p) + (A_p - B_p \tilde{K}_e C_p)^T P = -Q < 0$$

et

$$C_p = B_p^T P$$

et donc, le système est ASPR (voir théorème II.2)

Les conditions (1) et (2) impliquent que le contrôleur donné par l'équation (2.56) conduit à une erreur de poursuite asymptotiquement stable entre les sorties du système et celles du modèle.

Les figures 2.7 et 2.8 représentent le résultat de la simulation pour des entrées u_{m1} et u_{m2} en forme d'onde carrée d'amplitude 1 et 1.5 et de période 60 secondes.

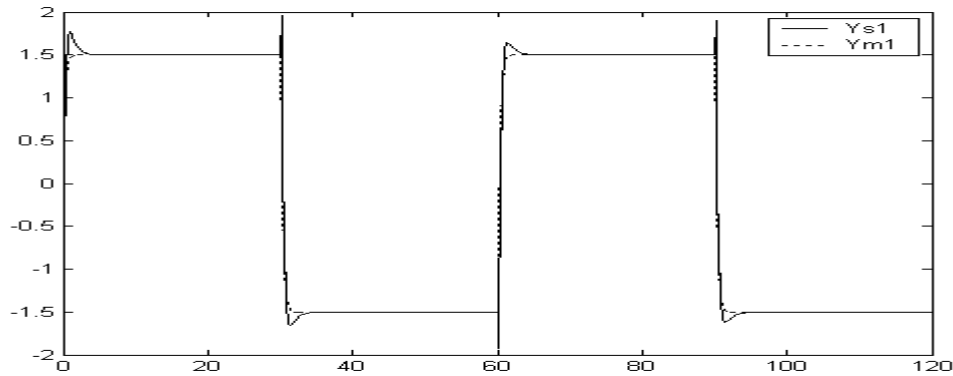


FIG. 2.7.a - Sorties du système et du modèle (première sortie)

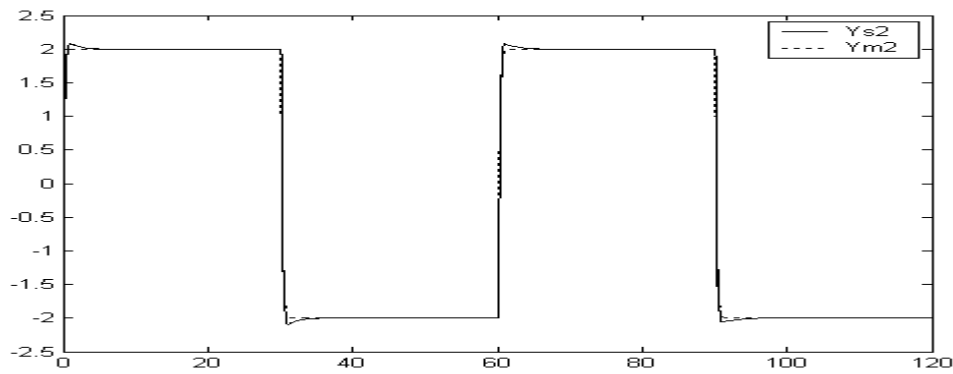


FIG. 2.7.b - Sorties du système et du modèle (deuxième sortie)

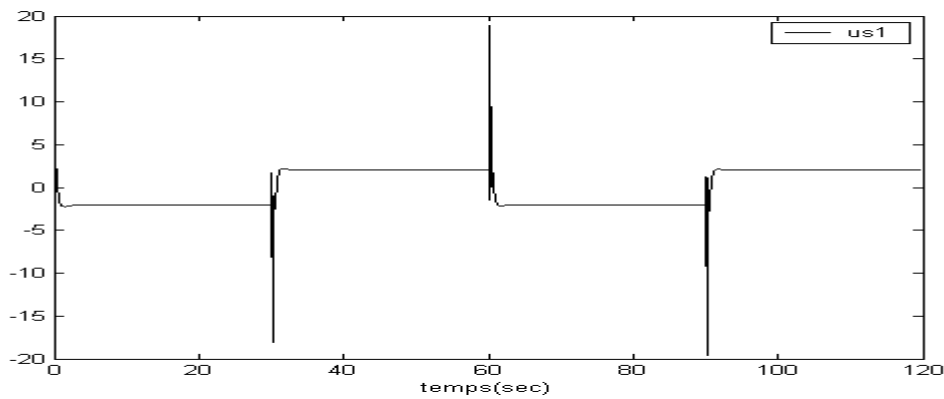


FIG. 2.8.a - Signal de commande, (première entrée)

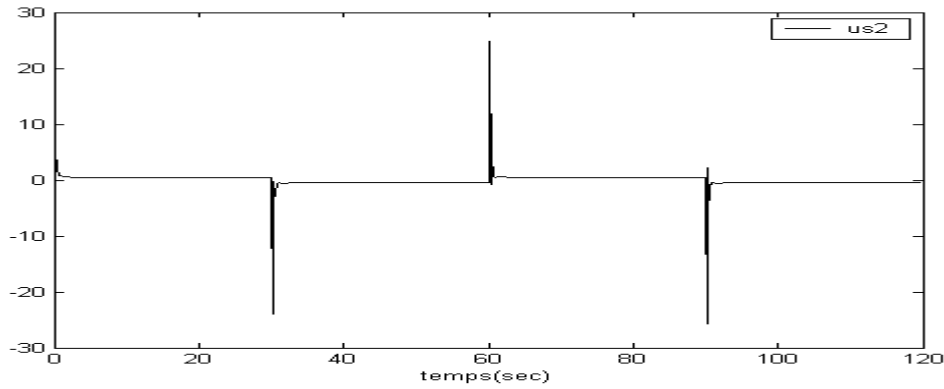


FIG. 2.8.b - Signal de commande, (deuxième entrée)

La figure 2.9 représente la norme d'ordre deux de la matrice des gains $K_r(t)$ (voir équation 2.54). On voit bien que les gains sont bornés, d'où des grandeurs de commande bornées elles aussi (voir équation 2.56).

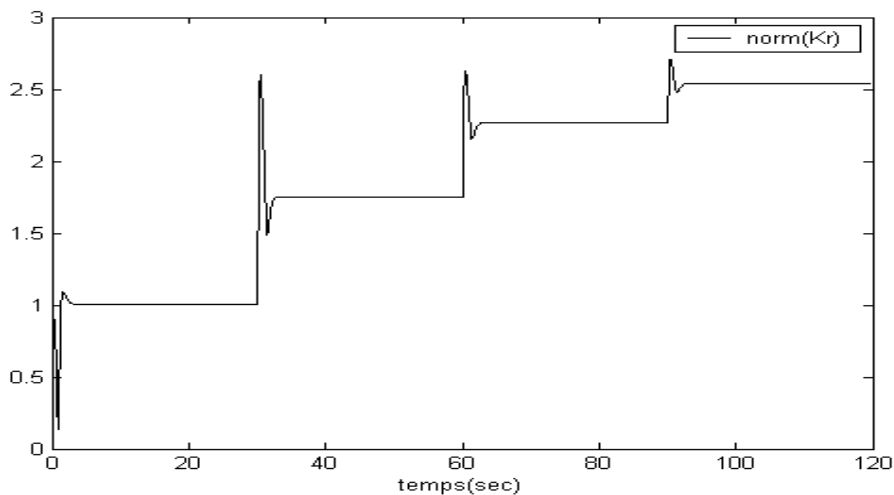


FIG. 2.9 - Norme d'ordre deux de la de la matrice $K_r(t)$

II.6 Extension du SAC de base pour éviter la contrainte de positivité

Vu que le SAC n'est applicable que pour les systèmes qui satisfont les conditions ASPR, plusieurs modifications de base lui ont été introduites [Kau-1993]. Ceci pour étendre la classe des systèmes pouvant être contrôlés par ce MRAC. Ces modifications utilisent les propriétés de base de stabilisation des systèmes, pour augmenter soit le système soit l'algorithme d'adaptation dans le but de satisfaire les conditions ASPR. Dans cette section nous discutons les principales modifications du SAC.

II.6.1 Augmentation du système par un compensateur en parallèle

En utilisant les lemmes (II.4) à (II.6), on peut concevoir un compensateur $H(s)$ de telle sorte que le système augmenté par la figure 2.10 soit ASPR.

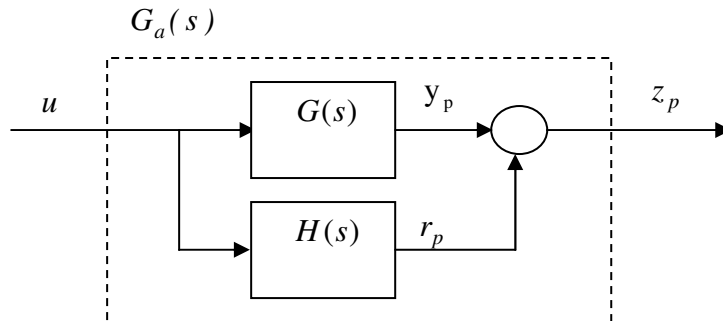


FIG. 2.10 – Système augmenté (ASPR)

Il faut aussi veiller à ce que la sortie du système augmenté soit une approximation acceptable de la sortie du système réel, c-à-d, qu'il faut que la contribution du compensateur soit minimale.

L'utilisation d'un compensateur en parallèle avec le processus sous contrôle suppose que le concepteur peut concevoir une dynamique qui stabilise le système fictif en boucle fermée de la figure 2.1. Il est en réalité raisonnable de supposer que parmi les méthodes de contrôle robuste, on peut trouver au moins une configuration stabilisante.

Système	$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t)$ $y_p(t) = C_p x_p(t)$
Modèle de référence	$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t)$ $y_m(t) = C_m x_m(t)$
Compensateur	$\dot{s}_p(t) = A_s s_p(t) + B_s u_p(t)$ $r_p(t) = C_s s_p(t)$
Sortie augmentée	$z_p(t) = y_p(t) + r_p(t)$
Erreur augmentée	$e_{ya}(t) = y_m(t) - z_p(t) = y_m(t) - y_p(t) - r_p(t)$
Loi de contrôle	$u_p(t) = K_r(t)r(t)$ <p>où</p> $K_r(t) = [K_e(t) \ K_x(t) \ K_u(t)]$ $r^T(t) = [(y_m - z_p)^T \ x_m^T \ u_m^T]$
Loi d'adaptation	$K_r(t) = K_p(t) + K_I(t)$ $\dot{K}_I(t) = (y_m(t) - y_p(t))r^T(t)T_i, T_i > 0$ $K_p(t) = (y_m(t) - y_p(t))r^T(t)T_p, T_p \geq 0$

TAB 2.4 - Résumé du SAC, avec augmentation du système

L'idée d'utiliser un compensateur en parallèle a été introduite pour la première fois dans [Bar-1985 a, Bar-1985 b], ou un compensateur de type PD a été utilisé.

Ensuite, on a utilisé un compensateur qui contient un zéro à l'origine (dérivé) pour minimiser la contribution du filtre et par conséquent l'erreur en régime permanent. La forme du compensateur est mieux élaborée après les résultats de [Iwa-1992] où on commence à établir des méthodes pour sa conception.

Le nouveau contrôleur est pratiquement le même que celui résumé dans le tableau 2.1, la seule différence est que cette fois ci c'est le système présenté par la figure 2.10 qui est adaptativement contrôlé et non le système réel.

Cette approche est susceptible de produire une erreur en régime permanent constante et non nulle. Le schéma fonctionnel du nouveau contrôleur ainsi obtenu est représenté par la figure 2.11. Cette approche n'est utile que si l'objectif du contrôle n'est pas une poursuite parfaite du modèle (l'erreur tend vers zéro à l'infini), mais seulement une

poursuite asymptotique (erreur en régime permanent constante mais non nulle).

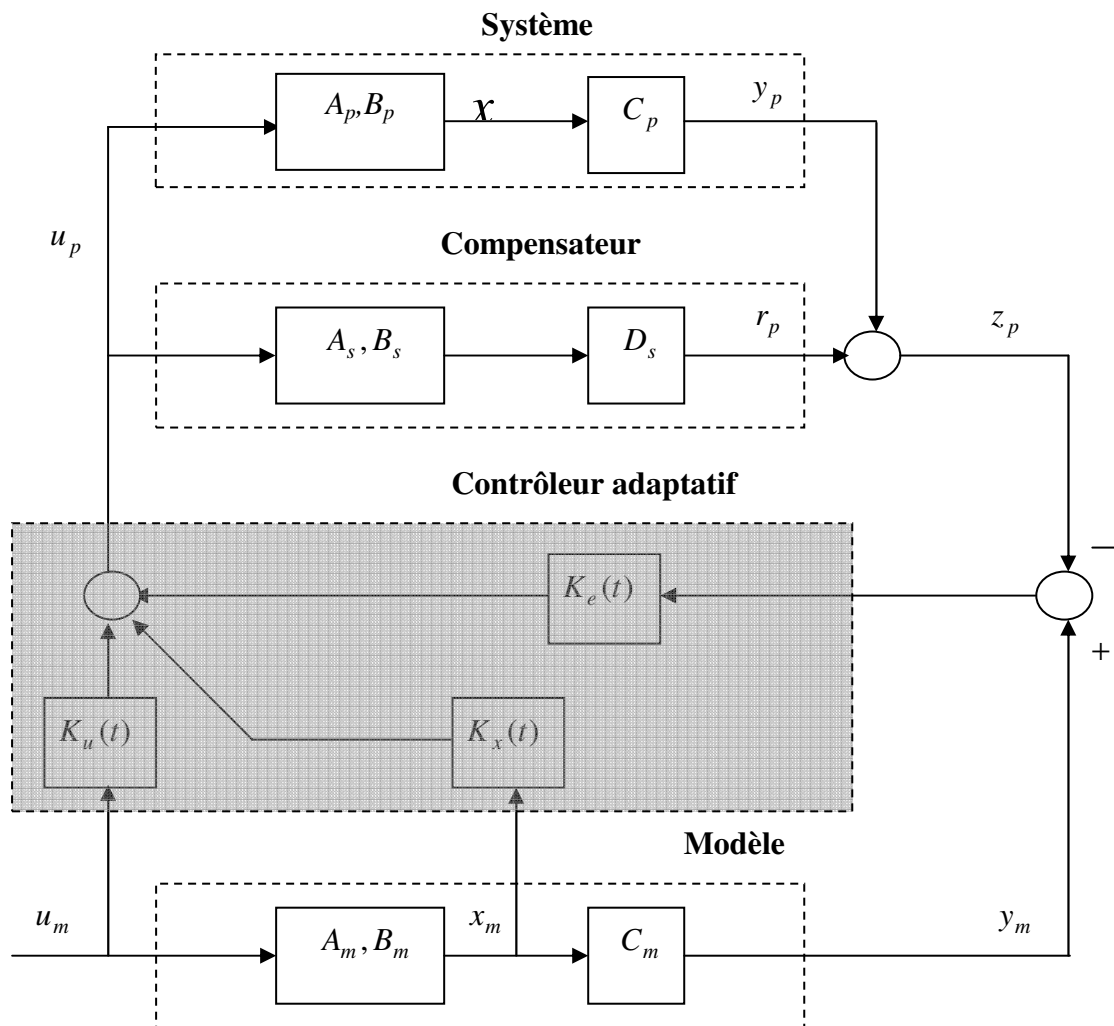


FIG. 2.11 - SAC avec augmentation du système

Exemple 2.3

Pour montrer l'inconvénient de cette approche, nous allons l'utiliser pour le contrôle du système suivant :

$$G_p(s) = \frac{y_p(s)}{u_p(s)} = \frac{k}{s^3 + a_3s^2 + a_2s + a_1}$$

Dont les paramètres peuvent varier dans certains intervalles :

Les valeurs nominales des paramètres sont : $k = 1, a_3 = 3, a_2 = 4, a_1 = 2$.

La variation permise de ces paramètres est $\Delta a_i = 2, i = 1, 2, 3, \Delta k = 2$.

Ce système doit suivre le modèle suivant :

$$G_m(s) = \frac{y_m(s)}{u_m(s)} = \frac{1}{2s+1}$$

L'entrée de référence $u_m(t)$ est un signal carré de période 60 sec et d'amplitude ± 1 .

Notons que pour la simulation nous avons considéré les cas suivants :

Paramètre	Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3
k	1	1.2	1.3
a_3	3.3	3.5	1.2
a_2	4.1	3	3.5
a_1	2.1	1.2	1.3

TAB2.5 - Les cas considérés pour la simulation

Le plus crucial pour cette méthode est la conception du compensateur pour assurer la condition ASPR sur tous les intervalles de variation des paramètres. Si on choisit un compensateur de la même forme que celui proposé par Bar kana [Bar-87], alors :

$$H(s) = \frac{D}{1 + \tau s}$$

Où D est le gain du compensateur et τ sa constante de temps. La constante de temps du compensateur est choisie très inférieure à celle du modèle de référence car on veut que le régime transitoire du compensateur s'annule plus vite par rapport à celui du modèle, ici on choisit $\tau = 0.2$. Le gain D est choisi de manière à assurer la condition ASPR sur tout l'intervalle de variation des paramètres du processus. Une analyse de cet exemple sur tout l'intervalle des paramètres donne comme condition sur D : $D \geq 0.7$.

Les simulations avec les trois cas, montrent qu'un compromis est obtenu pour $D = 10$ quand les matrices T_i et T_p sont des matrices identité.

$$H(s) = \frac{D}{1 + \tau s} \text{ où } D=10 \text{ et } \tau=0.2.$$

Cas 1)

$$G_a(s) = G(s) + H(s) = \frac{1}{s^3 + 3.3s^2 + 4.1s + 2.1} + \frac{10}{0.2s + 1} = \frac{10s^3 + 33s^2 + 41.2s + 22}{0.2s^4 + 1.66s^3 + 4.12s^2 + 4.52s + 2.1}$$

Deg (den)- Deg (num)=1

Les zéros sont données par :

$$Z_1 = -5$$

$$Z_2 = -1.5$$

$$Z_3 = -0.9 - 0.7681j$$

$$Z_4 = -0.9 + 0.7681j$$

Cas 2)

$$G_a(s) = G(s) + H(s) = \frac{1.2}{s^3 + 3.5s^2 + 3s + 1.2} + \frac{10}{0.2s + 1} = \frac{10s^3 + 35s^2 + 30.24s + 13.2}{0.2s^4 + 1.7s^3 + 4.1s^2 + 3.2s + 1.2}$$

Deg (den)- Deg (num)=1

Les zéros sont données par :

$$Z_1 = -5$$

$$Z_2 = -2.4881$$

$$Z_3 = -0.5059 + 0.4757j$$

$$Z_4 = -0.5059 - 0.4757j$$

Cas 3)

$$G_a(s) = G(s) + H(s) = \frac{1.3}{s^3 + 1.2s^2 + 3.5s + 1.3} + \frac{10}{0.2s + 1} = \frac{10s^3 + 12s^2 + 35.26s + 14.3}{0.2s^4 + 1.24s^3 + 1.9s^2 + 3.76s + 1.3}$$

Deg (den)- Deg (num)=1

Les zéros sont données par :

$$Z_1 = -5$$

$$Z_2 = -0.3954 + 1.7378j$$

$$Z_3 = -0.3954 - 1.7378j$$

$$Z_4 = -0.4093$$

Tous les zéros se trouvent dans le demi plan gauche, donc le système est à phase minimale et par conséquent $G_a(s)$ est ASPR.

La figure 2.12 représente la sortie du système et celle du modèle pour cet exemple et pour les trois cas déjà spécifiés.

Elle montre aussi l'existence d'une erreur importante en régime permanent entre la sortie du système et celle du modèle, quoique le système augmenté suive parfaitement le modèle, ceci est dû à la contribution du compensateur qui est importante.

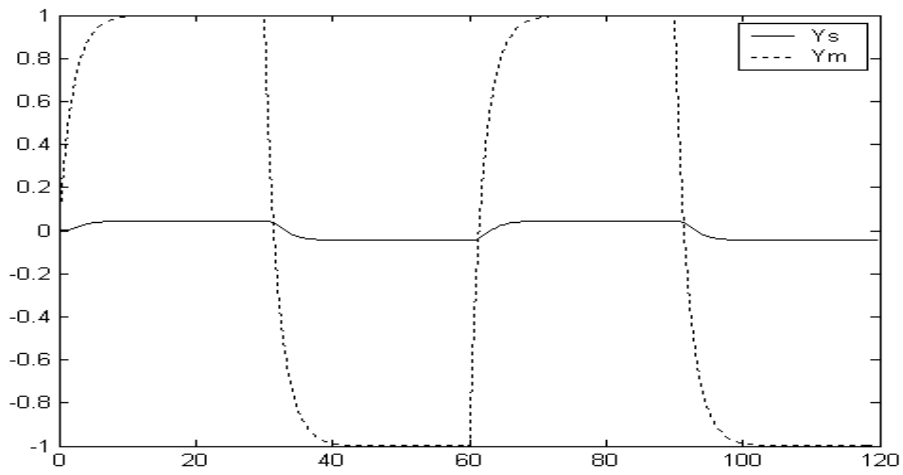


FIG. 2.12.a - Sorties du système et du modèle, Cas1

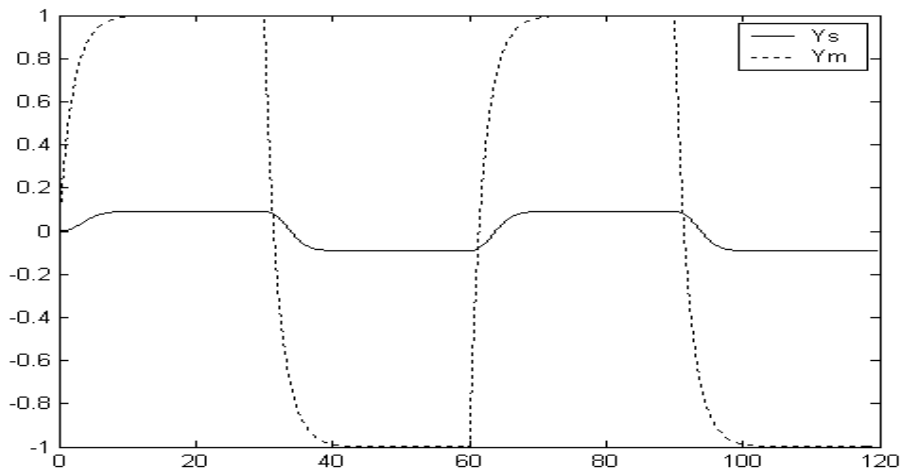


FIG. 2.12.b - Sorties du système et du modèle, Cas 2

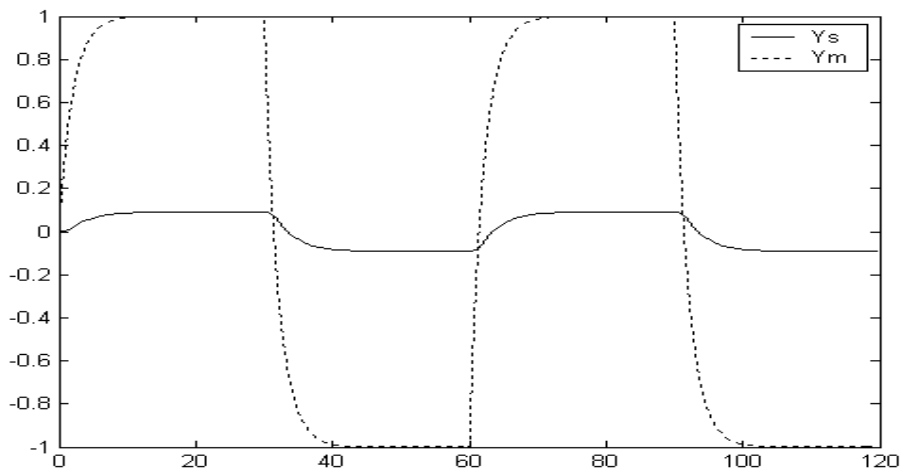


FIG. 2.12.c - Sorties du système et du modèle, Cas 3

On constate que l'erreur entre le système et le modèle de référence est constante et afin d'annuler cette erreur on procède à la compensation du système et du modèle.

II.6.2 Augmentation du système et du modèle de référence

Pour éviter le problème rencontré en augmentant seulement le système, une autre modification a été introduite sur l'algorithme de base [Kau-1993]. Cette fois ci, en plus de l'augmentation du système, le modèle de référence est aussi augmenté. Ceci de telle sorte que si une poursuite parfaite entre le système augmenté et le modèle augmenté est atteint, alors, une poursuite parfaite entre le système réel et le modèle de référence est aussi atteint.

Pour généraliser cette approche, nous allons utiliser le compensateur $H(s)$ en parallèle avec le processus de la figure 2.10. Ainsi, la sortie du système modifié sera encore :

$$z_p(t) = y_p(t) + r_p(t) \quad (2.63)$$

où $r_p(t)$ est le résultat de l'application de l'opérateur $H(s)$ sur l'entrée de contrôle $u_p(t)$.

Il faut noter aussi que le système augmenté de la figure 2.10 doit être ASPR.

D'une manière similaire, la sortie du modèle de référence augmenté est définie par :

$$z_m(t) = y_m(t) + r_m(t) \quad (2.64)$$

Où la nouvelle composante $r_m(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{s}_m(t) &= A_s s_m(t) + B_s [u_p(t) - K_e(t)(z_m(t) - z_p(t))] \\ r_m(t) &= C_s s_m(t) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Notons que $r_m(t) = H[u_p(t) - K_e(t)(z_m(t) - z_p(t))]$

Où

$$H[u_p(t) - K_e(t)(z_m(t) - z_p(t))]$$

Est l'opérateur qui correspond au compensateur $H(s)$ et $K_e(t)$ le gain adaptatif qui est une fonction de l'erreur augmenté $e_z(t)$. Cette dernière est donnée par :

$$e_z(t) = z_m(t) - z_p(t) = y_m(t) - y_p(t) + r_m(t) - r_p(t) \quad (2.66)$$

Soit enfin :

$$e_z(t) = y_m(t) - y_p(t) - H[K_e(t)e_z(t)] \quad (2.67)$$

Il est devient de l'équation (2.67), que si $e_z(t) \rightarrow 0$ et $H(s)$ est stable, alors, $e_y(t) = y_m(t) - y_p(t) \rightarrow 0$ aussi, ce qui est le résultat désiré.

Le schéma fonctionnel du contrôleur adaptatif ainsi obtenu est représenté par la figure 2.13.

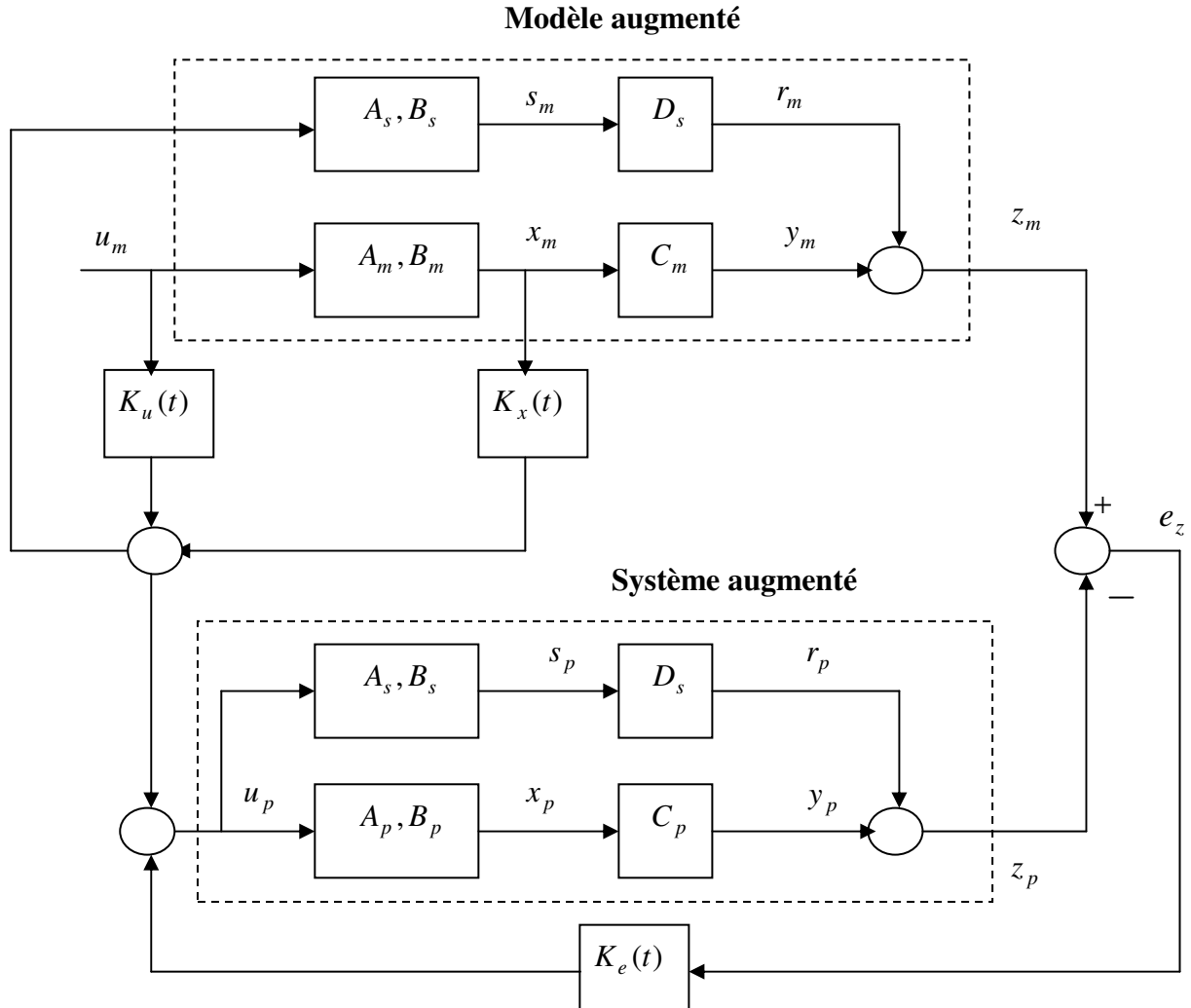


FIG. 2.13 - Augmentation du système et du modèle de référence

Le théorème suivant résume la stabilité de ce MARC.

Théorème (II.3)

Considérons le contrôleur adaptatif suivant :

$$u_p(t) = K_e(t)((z_m(t) - z_p(t)) + K_x(t)x_m(t) + K_u(t)u_m(t) = K_r(t)r(t) \quad (2.68)$$

Avec

$$K_r(t) = [K_e(t) \quad K_x(t) \quad K_u(t)] \quad (2.69)$$

$$r^T(t) = [(z_m(t) - z_p(t))^T, x_m^T, u_m^T] \quad (2.70)$$

Où le gain $K_r(t)$ est généré par la loi d'adaptation suivante :

$$K_r(t) = K_I(t) + K_p(t) \quad (2.71)$$

$$\dot{K}_I(t) = v(t)r^T(t)T_i, \quad T_i > 0, \quad v(t) = y_m(t) - y_p(t) \quad (2.72)$$

$$K_p(t) = v(t)r^T(t)T_p, \quad T_p \geq 0 \quad (2.73)$$

Si

1. $G_a(s) = G(s) + H(s)$ est ASPR, où $G_a(s) = G(s) + H(s)$ est la fonction de transfert du système et $H(s)$ la fonction de transfert de compensateur.

2. Une solution existe au système d'équation du CGT variable dans le temps [Bar-1990 b].

3- Le compensateur $H(s)$ est stable, c-à-d $H(s)$ a toutes ses valeurs propres dans le demi plan gauche.

Alors, l'erreur de sortie $y_m(t) - y_p(t)$ s'annule asymptotiquement et tous les états et les gains seront bornés [Kau-1993].

Le MRAC ainsi obtenu est résumé dans le tableau 2.6.

Système et modèle de référence	$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) & \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t) & y_m(t) &= C_m x_m(t) \end{aligned}$
Compensateur	$\begin{aligned} \dot{s}_p(t) &= A_s s_p(t) + B_s u_p(t) & \text{pour le système} \\ r_p(t) &= C_s s_p(t) \\ \dot{s}_m(t) &= A_s s_m(t) + B_s [u_p(t) - K_e(t)(z_m(t) - z_p(t))] & \text{pour le modèle} \\ r_m(t) &= C_s s_m(t) \end{aligned}$
Sortie augmentée du système et du modèle	$\begin{aligned} z_p(t) &= y_p(t) + r_p(t) \\ z_m(t) &= y_m(t) + r_m(t) \end{aligned}$
Erreur augmentée	$e_{ya}(t) = z_m(t) - z_p(t) = y_m(t) - y_p(t) + r_m(t) - r_p(t)$
Loi de contrôle	$\begin{aligned} u_p(t) &= K_r(t)r(t) \text{ avec} \\ K_r(t) &= [K_e(t) \quad K_x(t) \quad K_u(t)], \quad r^T(t) = [(z_m - z_p)^T \quad x_m^T \quad u_m^T] \end{aligned}$

Loi d'adaptation	$K_r(t) = K_p(t) + K_I(t)$ $\dot{K}_I(t) = (y_m(t) - y_p(t)) r^T(t) T_i, T_i > 0$ $K_p(t) = (y_m(t) - y_p(t)) r^T(t) T_p, T_p \geq 0$
-------------------------	---

TAB2.6 - Résumé du SAC avec augmentation du système et du modèle

Exemple 2.4

Pour montrer l'avantage du SAC utilisé avec augmentation du système et modèle de référence, nous allons l'appliquer au système de l'exemple 2.3, en gardant le même modèle de référence, les mêmes cas pour les paramètres du système (trois cas) et le même compensateur

$$H(s) = \frac{10}{0.2s + 1}$$

Les matrices T_i et T_p sont aussi des matrices identité.

Les figures 2.14 et 2.15 représentent le résultat de la simulation pour une entrée u_m en forme d'onde carrée d'amplitude 1 et de période 60 secondes.

On remarque que l'erreur entre la sortie du système et celle du modèle $e_y(t) = y_m(t) - y_p(t) \rightarrow 0$. Dans le cas de l'exemple 2.3, cette erreur tendait vers une constante.

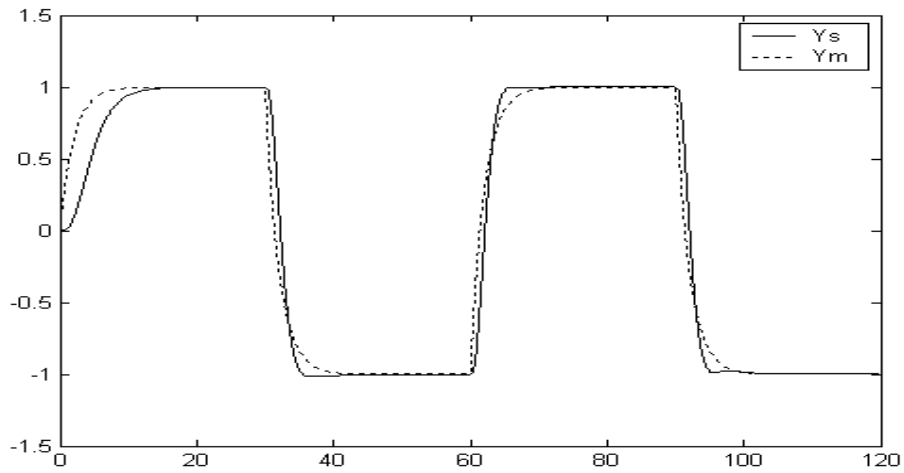


FIG. 2.14.a - Sorties du système et du modèle avec augmentation du système et du modèle de référence, Cas 1

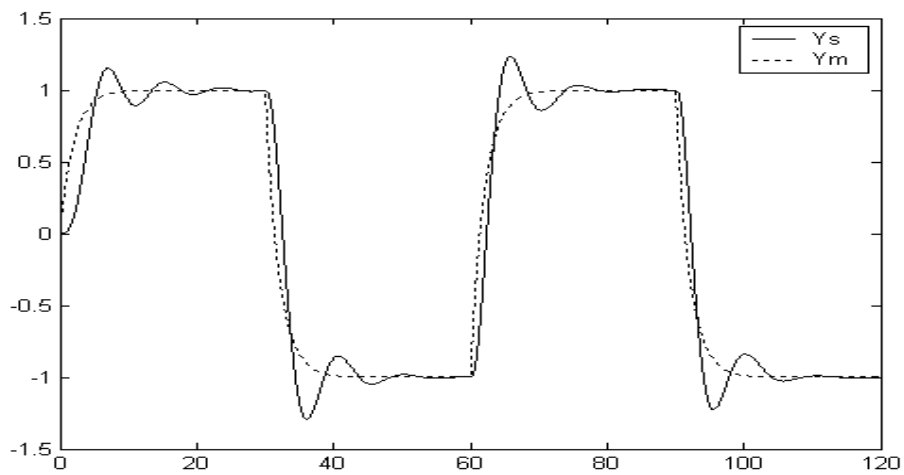


FIG. 2.14.b - Sorties du système et du modèle avec augmentation du système et du modèle de référence, Cas 2

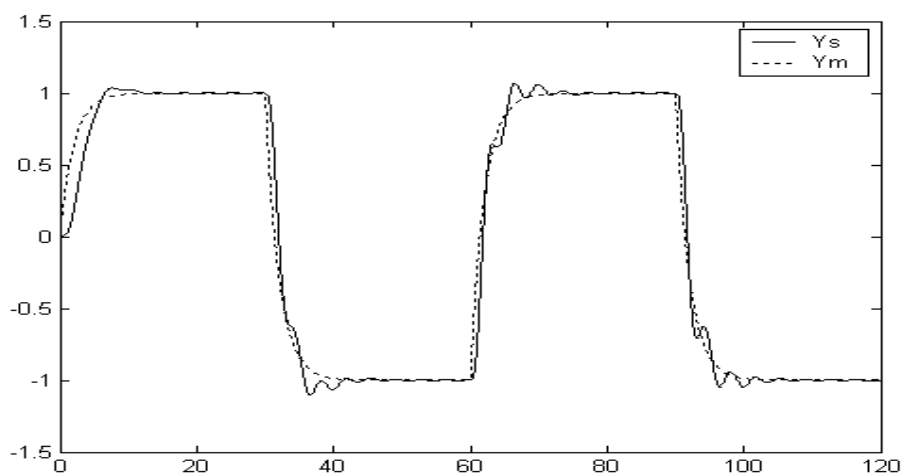


FIG. 2.14.c - Sorties du système et du modèle avec augmentation du système et du modèle de référence, Cas 3

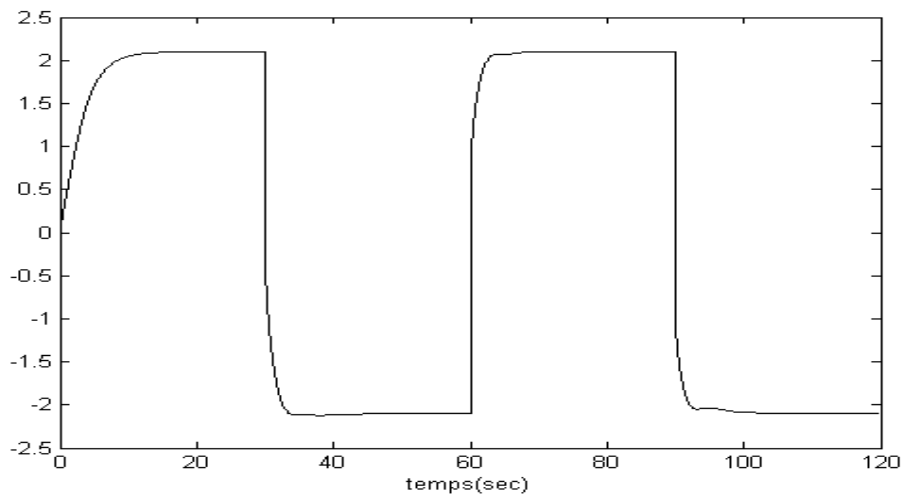


FIG. 2.15.a - Signal de commande, Cas 1

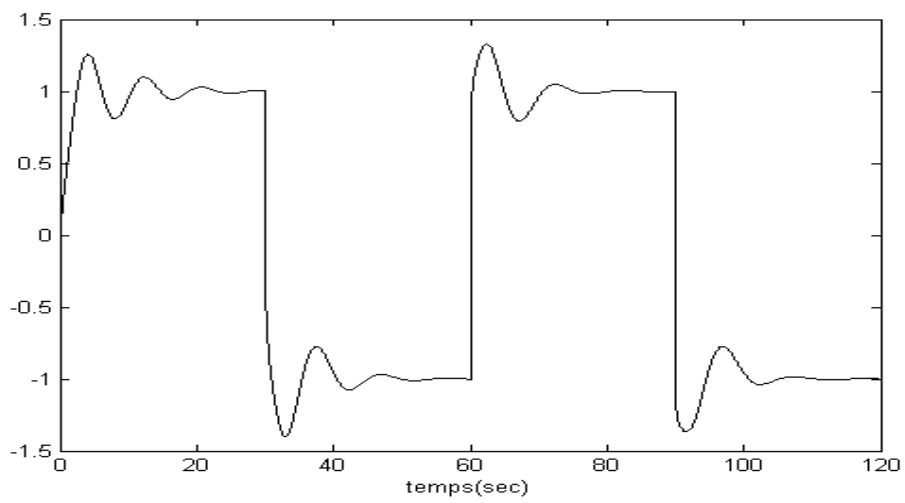


FIG. 2.15.b - Signal de commande, Cas 2

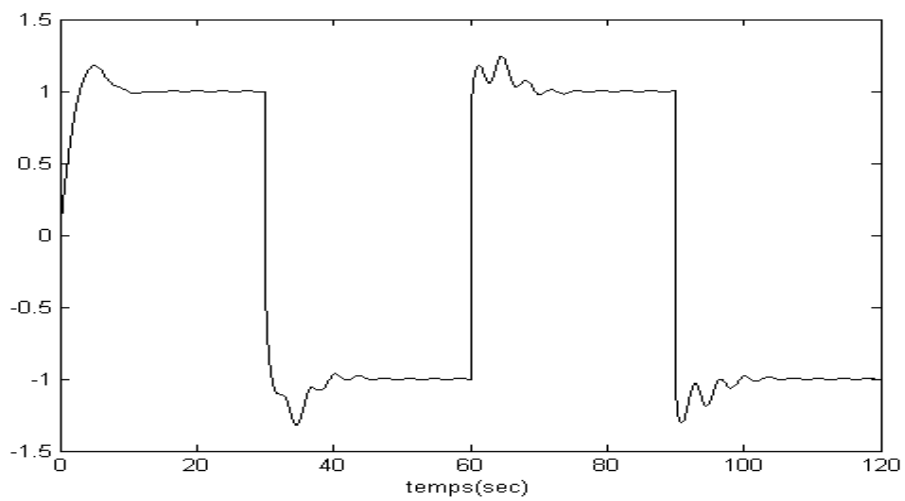


FIG. 2.15.c - Signal de commande, Cas 3

L'apparition de l'idée qui concerne l'augmentation du système et du modèle de référence en même temps a rendu très critique le problème de conception du compensateur.

Ainsi plusieurs recherches ont pour objective la mise au point de méthodes assurant ceci. Les principaux résultats dans ce domaine sont ceux établis dans [Iwa-1992]. Dans [Iwa-1994], on trouve une méthode de conception du compensateur domaine temporelle, tandis que dans [Ozc-1997], on trouve une méthode de conception de ce compensateur dans le domaine fréquentiel.

II.7 Conception du compensateur dans le domaine temporel

Cette méthode est une méthode paramétrique, elle concerne les systèmes décrits

Par :

$$G_p(s) = k_p \frac{B_p(s)}{A_p(s)}, \quad k_p \geq 0 \quad (2.74)$$

Où

$B_p(s)$, $A_p(s)$ sont des polynômes monics d'ordre m et n respectivement et leurs paramètres varient dans des intervalles prédéfinis.

On suppose que :

1. Une borne supérieure γ^* de degré relatif $n^* = n - m$ du système est connue.
2. $B_p(s)$ est un polynôme stable.
3. Des valeurs approximatives de k_p et $|G_p(j0)|$ sont connues.

La procédure de conception du compensateur est donnée par le théorème suivant :

Théorème (II.4) [Iwa-1992]

Considérons le système augmenté suivant :

$$G_a(s) = G_p(s) + F(s)$$

$$F(s) = \sum_{i=1}^{\gamma^*-1} F_i(s), \quad \gamma^* \geq 2$$

$$F_i(s) = \frac{f_i}{D_i(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, \gamma^* - 1$$

Où $D_i(s)$ est un polynôme monic et stable avec $\deg(D_i(s)) = \gamma^* - i$.

$F(s)$ est conçue telle que :

1. $k_p \gg f_1 \gg \dots \gg f_{\gamma^*-1} > 0$

2. $|G_p(j0)| \geq |F(j0)|$.

Alors $G_a(s)$ est ASPR et $\exists \omega_0 > 0$ telle que pour un $\varepsilon > 0$, $\|G_a(j\omega) - G_p(j\omega)\| \leq \varepsilon$ pour tout ω vérifiant $0 \leq \omega \leq \omega_0$.

II.8 Conception du compensateur dans le domaine fréquentiel

Cette méthode est très utile dans le cas où une dynamique inconnue serait présente, elle concerne les systèmes décrits par :

$$G_p(s) = G_{p0}(s)[1 + \Delta(s)], \text{ pour une incertitude multiplicative} \quad (2.75.a)$$

$$G_p(s) = G_{p0}(s) + \Delta(s), \text{ pour une incertitude additive.} \quad (2.75.b)$$

Où $\Delta(s)$ est l'erreur de modélisation.

On suppose que :

1. Les paramètres du système nominal sont connus, c'est-à-dire $G_{p0}(s)$ est connu.
2. $\Delta(s)$ est une fonction rationnelle à paramètres réels, en plus, elle est stable et au moins propre.
3. Il existe une fonction rationnelle et connue $W(s)$ vérifiant elle aussi, la condition 2 telle que : $|\Delta(j\omega)| \leq |W(j\omega)|, \forall \omega$.

Théorème (II.5)

Le système augmenté $G_a(s) = G_p(s) + H(s)$ serait ASPR dans le cas où une dynamique inconnue serait présente si $H(s)$ est conçu selon les conditions suivantes :

1. $H(s)$ est stable et son degré relatif est zéro ou un.
2. Le système nominal en boucle fermée est stable.
3. Les coefficients de la fonction de transfert rationnelle $\Delta(s)$ sont réels. $\Delta(s)$ est propre ou strictement propre et n'a pas de pôles dans le demi plan droit. Elle est définie par :

$$\Delta(s) = \frac{G_{p0}(s)W(s)}{G_{p0}(s) + R_p(s)} \quad (2.76)$$

Pour une incertitude multiplicative et

$$\Delta(s) = \frac{W(s)}{G_{p0}(s) + R_p(s)} \quad (2.77)$$

Pour une incertitude additive.

4. Le gain H_∞ de $\Delta(s)$ est inférieur à l'unité ($\|\Delta(s)\|_\infty < 1$)

II.9 Conclusion

Le SAC constitue un contrôleur adaptatif à modèle de référence direct. Il présente de précieux avantages par rapport aux autres MRAC. Parmi ces avantages, la simplicité d'implantation et d'analyse, l'indépendance de l'ordre du système et de ses états et la possibilité de contrôler des systèmes qui ne sont pas à phase minimale.

Cependant, le SAC sous sa forme initiale, ne constitue pas une solution générale à un problème général. Ceci du fait qu'il impose que le système sous contrôle soit ASPR ou au moins, qu'il existe un compensateur pouvant rendre le système augmenté ASPR. Alors, la conception d'un tel compensateur est une tâche qui accompagne toujours l'application du SAC aux systèmes réels qui ne sont pas généralement ASPR. Ainsi des méthodes systématiques pour la conception de ce compensateur s'imposent.

CHAPITRE III : PROCEDURES DE COMPENSATION DES SYSTEMES POUR L'APPLICATION DU SAC

III.1 Introduction

Nous avons vu dans le deuxième chapitre que le SAC constitue un contrôleur adaptatif à modèle de référence simple, du point de vue implémentation. Il n'exige ni la connaissance de l'ordre de système ni celle de son gain en haute fréquence. La seule condition exigée du système pour garantir une poursuite asymptotique est qu'il soit ASPR (concept déjà défini dans le deuxième chapitre). Cette condition peut être contournée en augmentant le système et le modèle de référence comme présenté dans le même chapitre.

Avec cette solution, une tâche supplémentaire apparaît : on doit concevoir un compensateur pour rendre le système dont les paramètres varient dans certains intervalles connus d'avance ASPR pour toutes les valeurs permises de ces paramètres. Aussi, pour que la supposition que le système augmenté est une approximation raisonnable du système réel soit valable, il est préférable que la contribution de ce compensateur soit assez petite.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour la conception d'un tel compensateur [**Bar-1991 a, Bar-1996, Kau-1993**], mais aucune de ces méthodes n'est procédurale pour le cas des système intervalles. Certaines méthodes [**Bar-1990 a, Iwa-1992**] ne prennent pas en considération d'une manière stricte la condition de stabilité de système en boucle fermée fictif représenté par la figure 2.1. Ainsi, elles ne garantissent pas que le système augmenté soit ASPR sur tout l'intervalle de variation des paramètres du système réel.

Dans ce chapitre, en se basant sur les lemmes cités dans le deuxième chapitre, nous allons étendre l'application de certaines méthodes de conception du compensateur et les rendre plus procédurales. Certaines de ces procédures sont propres aux systèmes SISO, d'autres peuvent être étendues aux systèmes MIMO.

L'efficacité de ces méthodes est testée en les appliquant à certains exemples.

III.2 Conception de compensateur par la méthode de Bar Kana

Le compensateur proposé par Bar Kana est de la forme suivante :

$$H(s) = \frac{D}{1 + \tau s}$$

Où D est le gain du compensateur et τ sa constante de temps. La constante de temps du compensateur est choisie très inférieure à celle du modèle de référence, car on veut que le régime transitoire du compensateur s'annule plus vite par rapport à celui du modèle.

Le gain D est choisi de manière à assurer la condition ASPR sur tout l'intervalle de variation des paramètres.

III.3 Conception dans le domaine temporel en utilisant le théorème de Kharitonov

Dans cette section, nous considérons le théorème (II.4) établi dans [Iwa-1992]. Ce théorème exploite la relation entre la positivité et la stabilité, et ne prend en compte qu'une forme particulière du compensateur. Quoique ce théorème se base sur le lemme (II.6), il ne prend pas en compte d'une manière stricte, en réalité, la stabilité du système fictif en boucle fermée (figure 2.1) pendant le choix des paramètres du compensateur. Ceci rend le système augmenté conçu en se basant sur ce théorème non ASPR pour certaines valeurs permises des paramètres du système réel. Nous utilisons ici le théorème de Kharitonov (dédié à l'analyse de la robustesse) pour guider le choix des paramètres du compensateur, de telle manière que le système soit ASPR pour toutes les valeurs des paramètres.

Le système sous contrôle est donné par sa fonction de transfert :

$$G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B = K_p \frac{N(s)}{D(s)} \quad K_p > 0 \quad (3.1)$$

Où $N(s)$ et $D(s)$ sont des polynômes "monics" d'ordres m et n respectivement.

On suppose que :

1. Une borne supérieure de degré relatif $\gamma_p = n - m$ est connue et est notée n^* .
2. $N(s)$ est stable (le système est à phase minimale).
3. Des valeurs approximatives de K_p et de $|G_p(j0)|$ sont connues.

Nous utilisons la forme du compensateur donnée par le théorème (II.4).

Le système augmenté est donné par sa fonction de transfert :

$$G_a(s) = G_p(s) + H(s) \quad (3.2)$$

Le compensateur est décrit par :

$$H(s) = \sum_{i=1}^{n^*-1} F_i(s) \quad n^* \geq 2 \quad (3.3)$$

Où

$$F_i(s) = \frac{f_i}{Q_i(s)} \quad i = 1, \dots, n^* - 1 \quad (3.4)$$

$Q_i(s)$ est un polynôme "monic" stable avec degré $(Q_i(s)) = n^* - i$.

$$K_p \gg f_i \gg \dots \gg f_{n^*-1} \quad \text{et} \quad |G_p(j0)| \gg |H(j0)| \quad (3.5)$$

$Q_i(s)$ peut être choisi comme étant égal à $(s + \alpha_i)^{n^* - i}$, $\alpha_i > 0$ [Iwa-1994].

Alors, $H(s)$ prend la forme :

$$H(s) = \sum_{i=1}^{n^*-1} F_i(s) = \sum_{i=1}^{n^*-1} \frac{f_i}{(s + \alpha_i)^{n^* - i}} \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1 \quad (3.6)$$

où f_i et α_i sont des paramètres à calculer.

Le système augmenté s'écrit alors :

$$G_i(s) = G_{i-1}(s) + F_i(s) = G_{i-1}(s) + \frac{f_i}{(s + \alpha_i)^{n^* - i}} \quad (3.7)$$

Ici, selon l'estimation de n^* , on obtient deux cas

1. Si $n^* - i \geq \gamma_p$, le degré relatif de $G_i(s)$ est γ_p .
2. Si $n^* - i \leq \gamma_p - 1$, le degré relatif de $G_i(s)$ est $\gamma_p - 1$ (il diminue d'une unité).

Ainsi, à la fin de la procédure de conception du compensateur, nous aurons un système augmenté dont le degré relatif égal à un.

Dans [Iwa-1992], la condition imposée est que si les paramètres f_i sont choisis suffisamment petits à chaque itération, le système

$$G_{CL_i}(s) = \frac{G_{i-1}(s)}{1 + G_{i-1}(s)F_i^{-1}(s)}$$

sera stable.

Alors le système augmenté à l'étape i

$$G_i(s) = G_{i-1}(s) + F_i(s)$$

sera à phase minimale.

Ainsi, si ces conditions sont satisfaites pour toutes les itérations, le système augmenté global

$$G_a(s) = G_p(s) + H(s)$$

sera à phase minimale et de degré relatif égal à un. Ceci remplit les conditions du lemme (II.6) et garantit que le système augmenté soit ASPR. Mais il n'y a pas de méthode permettant de tester si les paramètres f_i choisis sont suffisamment petits pour garantir que $G_{CL_i}(s)$ soit stable. Nous proposons donc, d'utiliser le théorème de Kharitonov [Bar-1988]

pour tester la stabilité de ce système pour toutes les valeurs des paramètres du processus. Ceci permettra de décider quant à la validité du choix du paramètre f_i .

III.3.1 Analyse de la robustesse par le théorème de Kharitonov

Considérons la famille suivante de polynômes:

$$P(s, a) = \sum_{k=0}^n a_k s^k, \quad 0 \leq \underline{a}_k \leq a_k \leq \bar{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

où les nombres réels \underline{a}_k et \bar{a}_k sont respectivement, les valeurs minimale et maximale du paramètre a_k . Soit $a = (a_0, \dots, a_n)$, alors, on définit la famille de polynôme

$$A = \left\{ a \in R^{n+1}, \quad \underline{a}_k \leq a_k \leq \bar{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (3.9)$$

A est "Hurwitz" si tous les polynômes appartenant à A le sont. On définit les quatre polynômes de Kharitonov comme suit [Kau-1985, Barm-1992].

$$\begin{aligned} K_{11}(s) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \underline{a}_4 s^4 + \underline{a}_5 s^5 + \dots \\ K_{12}(s) &= \underline{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \underline{a}_4 s^4 + \bar{a}_5 s^5 + \dots \\ K_{21}(s) &= \bar{a}_0 + \underline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \bar{a}_4 s^4 + \underline{a}_5 s^5 + \dots \\ K_{22}(s) &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \bar{a}_4 s^4 + \bar{a}_5 s^5 + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Théorème (3.1). Théorème de Kharitonov [Barm-1992]

La famille de polynômes A définie ci-dessus est stable si et seulement si les quatre polynômes de Kharitonov sont stables.

III.3.2 Conception du compensateur

Considérons maintenant le système non ASPR à une seule entrée et une seule sortie :

$$G_p(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{C_m s^m + C_{m-1} s^{m-1} + \dots + C_0}{s^n + B_{n-1} s^{n-1} + \dots + B_0} \quad (3.11)$$

Où les coefficients peuvent varier dans les intervalles définis comme suit :

$$\begin{aligned} \underline{C}_i &\leq C_i \leq \bar{C}_i & i = 0, 1, \dots, m \\ \underline{B}_j &\leq B_j \leq \bar{B}_j & j = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

On suppose que :

1. Une valeur maximale de n^* est connue.

2. Le polynôme $N(s)$ est "Hurwitz".

Soit le compensateur déjà citer de la forme :

$$F_i(s) = \frac{f_i}{Q_i(s)} = \frac{f_i}{(s + \alpha_i)^{n^* - i}} \quad i = 1, \dots, n^* - 1 \quad (3.13)$$

Où f_i et α_i sont les paramètres de conception. Les paramètres α_i sont initialement choisis de telle sorte que le compensateur soit plus rapide que le modèle de référence.

Ceci permet au régime transitoire du compensateur de s'annuler très vite devant celui du modèle de référence . Les autres paramètres f_i peuvent être choisis tels que [Iwa-1992] :

$$\begin{aligned} f_i &<< f_{i-1} \quad \text{Pour } i = 2, 3, \dots, n^* - 1 \\ f_1 &<< \min\{C_j > 0, j = 0, 1, \dots, m\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ainsi, la fonction de transfert du système augmenté à l'étape i peut être écrite sous

La forme :

$$\begin{aligned} G_i(s) &= \frac{N_i(s)}{D_i(s)} = G_{i-1}(s) + F(s) = G_{i-1}(s) + \frac{f_i}{(s + \alpha_i)^{n^* - i}} \\ &= \frac{N_{i-1}(s)(s + \alpha_i)^{n^* - i} + f_i D_{i-1}(s)}{D_{i-1}(s)(s + \alpha_i)^{n^* - i}} \quad , i = 1, 2, \dots, n^* - 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Où $G_0(s) = G_p(s)$

Soit la fonction

$$G_i(s) = \frac{N_i(s)}{D_i(s)} = \frac{C_{m_i}^i s^{m_i} + C_{m_i-1}^i s^{m_i-1} + \dots + C_0^i}{s^{n_i} + B_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + B_{n_i-2}^i s^{n_i-2} + \dots + B_0^i} \quad (3.16)$$

Telle que :

$$n_i = \deg(D_i(s)) \text{ et } m_i = \deg(N_i(s)), \quad m_0 = m, n_0 = n, C_j^0 = C_j, B_j^0 = B_0$$

Cette fonction de transfert est strictement défini par le vecteur suivant :

$$V_i = [C_{m_i}^i \quad C_{m_i-1}^i \quad \dots \quad C_0^i \quad B_{n_i-1}^i \quad \dots \quad B_0^i] \quad (3.17)$$

avec

$$V_0 = [C_m \quad C_{m-1} \quad \dots \quad C_0 \quad B_n \quad \dots \quad B_0] \quad (3.18)$$

Il faut noter que chaque composante du vecteur V_i est une fonction des composantes du vecteur V_{i-1} et du paramètre f_i , choisis à l'étape i . Ainsi, ces paramètres peuvent varier dans des intervalles qu'on peut calculer connaissant les intervalles donnés par l'équation (3.12).

Les valeurs minimales et maximales de ces paramètres sont écrites comme suit :

$$\bar{V}_i = \left[\bar{C}_{m_i}^i \quad \bar{C}_{m_{i-1}}^i \quad \dots \quad \bar{C}_0^i \quad \bar{B}_{n_{i-1}}^i \quad \dots \quad \bar{B}_0^i \right] \quad (3.19)$$

$$\underline{V}_i = \left[\underline{C}_{m_i}^i \quad \underline{C}_{m_{i-1}}^i \quad \dots \quad \underline{C}_0^i \quad \underline{B}_{n_{i-1}}^i \quad \dots \quad \underline{B}_0^i \right] \quad (3.20)$$

Les composantes de ces deux vecteurs sont données par les équations suivantes :

$$\underline{C}_l^i = \min_{V_{i-1}} \left[C_l^i \right] \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1, \quad l = 0, 1, \dots, m_i$$

Soumise à :

$$\begin{cases} \underline{C}_r^{i-1} \leq C_r^{i-1} \leq \bar{C}_r^{i-1}, & r = 0, 1, 2, \dots, m_{i-1} \\ \underline{B}_p^{i-1} \leq B_p^{i-1} \leq \bar{B}_p^{i-1}, & p = 0, 1, 2, \dots, n_{i-1} - 1 \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\bar{C}_l^i = \max_{V_{i-1}} \left[C_l^i \right] \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1, \quad l = 0, 1, \dots, m_i$$

Soumise à :

$$\begin{cases} \underline{C}_r^{i-1} \leq C_r^{i-1} \leq \bar{C}_r^{i-1}, & r = 0, 1, 2, \dots, m_{i-1} \\ \underline{B}_p^{i-1} \leq B_p^{i-1} \leq \bar{B}_p^{i-1}, & p = 0, 1, 2, \dots, n_{i-1} - 1 \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\underline{B}_k^i = \min_{V_{i-1}} \left[B_k^i \right] \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1, \quad k = 0, 1, \dots, n_i - 1$$

Soumise à :

$$\begin{cases} \underline{C}_r^{i-1} \leq C_r^{i-1} \leq \bar{C}_r^{i-1}, & r = 0, 1, 2, \dots, m_{i-1} \\ \underline{B}_p^{i-1} \leq B_p^{i-1} \leq \bar{B}_p^{i-1}, & p = 0, 1, 2, \dots, n_{i-1} - 1 \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\bar{B}_k^i = \max_{V_{i-1}} \left[B_k^i \right] \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1, \quad k = 0, 1, \dots, n_i - 1$$

Soumise à :

$$\begin{cases} \underline{C}_r^{i-1} \leq C_r^{i-1} \leq \bar{C}_r^{i-1}, & r = 0, 1, 2, \dots, m_{i-1} \\ \underline{B}_p^{i-1} \leq B_p^{i-1} \leq \bar{B}_p^{i-1}, & p = 0, 1, 2, \dots, n_{i-1} - 1 \end{cases} \quad (3.24)$$

Le polynôme caractéristique du système fictif en boucle fermée formé de $G_{i-1}(s)$ dans la chaîne directe et de $F_i^{-1}(s)$ dans la chaîne de retour est :

$$P_i(s) = N_{i-1}(s)(s + \alpha_i)^{n^* - i} + f_i D_{i-1}(s) = \sum_{j=1}^n q_j^i s^j \quad (3.25)$$

$$i = 1, 2, \dots, n^* - 1 \quad \text{et} \quad q_j^i = q_j^i(V_i, f_i), \quad j = 0, 1, \dots, p_i$$

Où p_i est le degré de P_i .

Les coefficients de $P_i(s)$ dépendent des composantes de V_i et du paramètre choisi f_i .

Les valeurs maximale et minimale des paramètres du polynôme caractéristique $P_i(s)$ sont déterminées par la procédure d'optimisation des fonctions avec contraintes :

$$q_{-j}^i = \min_{V_i} [q_j^i(V_i, f_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, p_i. \quad (3.26)$$

Soumise à :

$$\underline{V}_i(h) \leq V_i(h) \leq \bar{V}_i(h), \quad h = 0, 1, 2, \dots, m_i + n_i + 1$$

$$\bar{q}_j^{-i} = \max_{V_i} [q_j^i(V_i, f_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, p_i. \quad (3.27)$$

Soumise à :

$$\underline{V}_i(h) \leq V_i(h) \leq \bar{V}_i(h), \quad h = 0, 1, 2, \dots, m_i + n_i + 1$$

Où $X(h)$ est la h ième composante du vecteur X .

Les quatre polynômes de Kharitonov correspondants au polynôme $P_i(s)$ peuvent être formés et la stabilité de $P_i(s)$ peut être testée sur tout l'intervalle de variation des paramètres du système $G_p(s)$. En effet, les paramètres de $P_i(s)$ sont fonctions des paramètres de $G_p(s)$. Si ces quatre polynômes sont stables, on passe à l'étape $i+1$. Sinon, il faut changer les valeurs de α_i et de f_i déjà choisis et refaire le test. Dans ce cas et conformément à l'inégalité (3.14), une petite diminution de f_i et une petite augmentation de α_i résolvent généralement le problème. La procédure est répétée jusqu'à ce que toutes les fonctions $F_i(s)$ soient calculées.

III.4 Conception du compensateur en utilisant la première colonne de la table de Routh

La méthode proposée dans la section précédente est utilisée pour guider le choix des paramètres du compensateur ayant la forme particulière donnée dans [Iwa-1992, Iwa-1994]. Dans cette section, nous proposons une autre procédure de conception basée sur le lemme (II.6). Ensuite, nous utilisons des contraintes générées à partir de la première colonne de la table de Routh pour assurer que le système fictif en boucle fermée soit stable pour toutes les valeurs permises des paramètres du processus. Le système peut ne pas être à phase minimale, dans ce cas, seulement son ordre et les valeurs nominales des paramètres ainsi que leurs intervalles de variation doivent être connus.

Le système est décrit par la fonction de transfert donnée par l'équation (3.11). Les intervalles de variation des paramètres sont définis par l'équation (3.12). Pour répondre aux conditions du lemme (II.6), il faut que le système augmenté ait un degré relatif égal à l'unité et que le système fictif en boucle fermée soit stable.

On suppose que :

1. Les valeurs nominales des paramètres du système sont connues, ainsi que les intervalles dans lesquels ces paramètres peuvent varier.
2. L'ordre du système est connu, ceci pour pouvoir répondre à la condition sur le degré relatif du système augmenté.

La condition 2 n'est pas nouvelle en contrôle adaptatif et peut être satisfaite pour les systèmes linéaires.

Le compensateur est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$R_p(s) = \frac{f_{n-1}s^{n-1} + f_{n-2}s^{n-2} + \dots + f_0}{s^n + h_{n-1}s^{n-1} + h_{n-2}s^{n-2} + \dots + h_0} = \frac{N_R(s)}{D_R(s)} \quad (3.28)$$

Notons que ce compensateur satisfait la condition imposée sur le degré relatif du système augmenté par le lemme (II.6). Le dénominateur de $R_p(s)$ doit être choisi d'avance de telle sorte que les constantes de temps du compensateur soient plus petites que celles du modèle de référence. Les coefficients du numérateur sont des paramètres à concevoir. La deuxième condition devant être vérifiée est que $R_p^{-1}(s)$ stabilise le système fictif en boucle fermée. En d'autres termes, il faut que le polynôme caractéristique de ce système soit stable. Ce polynôme est donné par l'équation suivante :

$$P(s) = a_{2n-1}s^{2n-1} + a_{2n-2}s^{2n-2} + \dots + a_0 = N(s)D_R(s) + D(s)N_R(s) \quad (3.29)$$

Où

$$a_k = f(C_i, B_j, \dots, f_l) \text{ avec } \begin{cases} k = 0, 1, \dots, 2n-1 \\ i = 0, 1, \dots, m \\ j = 0, 1, \dots, n-1 \\ l = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.30)$$

On sait déjà que la contribution du compensateur doit être minimale pour garantir que l'erreur en régime permanent soit suffisamment petite. Il faut alors trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour garantir que le système augmenté soit ASPR et que la contribution du filtre soit minimale. Il faut noter que la fonction de transfert du compensateur peut être écrite sous la forme :

$$R_p(s) = \frac{f_{n-1}s^{n-1}}{s^n + h_{n-1}s^{n-1} + h_{n-2}s^{n-2} + \dots + h_0} + \frac{f_{n-2}s^{n-2}}{s^n + h_{n-1}s^{n-1} + h_{n-2}s^{n-2} + \dots + h_0} + \dots + \frac{f_0}{s^n + h_{n-1}s^{n-1} + h_{n-2}s^{n-2} + \dots + h_0} \quad (3.31)$$

Ainsi, pour minimiser la contribution du compensateur, il faut que le gain de chacune de ses composantes soit minimisé, c'est-à-dire qu'il faut minimiser tous les paramètres $f_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$. Alors il suffit de minimiser le critère suivant :

$$J = \sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 \quad (3.32)$$

La minimisation de ce critère est effectuée pour toutes les valeurs permises des paramètres du processus en prenant en compte la stabilité du polynôme caractéristique donné par l'équation (3.29). Ceci est accompli par la procédure de minimisation avec contrainte suivante :

$$\min_F \left[\sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 \right] \\ \text{Soumise à : } \left[\begin{array}{l} \min_V [R_{1,k}(V, F)] \\ \text{soumise à } \underline{V} \leq V \leq \bar{V} \end{array} \right] \geq 0, k = 1, 2, \dots, 2n \quad (3.33)$$

Où $F = [f_{n-1} \ f_{n-2} \ \dots \ f_0]$ est un vecteur formé des paramètres du compensateur et les vecteurs \underline{V}, V et \bar{V} ont été déjà défini. $R_{1,k}(V, F), k = 0, 1, \dots, 2n$, sont les éléments de la première colonne de la table de Routh qui correspond au polynôme (3.29).

Il faut noter que la calcul explicite des gradients des éléments de la première colonne de la table de Routh est très bénéfique pour leurs minimisations [Ban-1994]. Nous allons

établi une telle procédure de calcul en se basant sur la récursivité de calcul de la table de Routh elle-même. La table de Routh correspondant au polynôme donné par l'équation (3.29) est donnée par le tableau 3.1.

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{2n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ R_{2n,1} & R_{2n,2} & R_{2n,3} & \dots & R_{2n,n} \end{bmatrix}$$

TAB 3.1 - Table de Routh pour le polynôme caractéristique de l'équation (3.29)

Les éléments des deux premières lignes sont établis directement des coefficients du polynôme caractéristique de l'équation (3.29) et sont donnés par la convolution suivante :

$$p(s) = N \otimes D_R + D \otimes N_R = a_{2n-1}s^{2n-1} + a_{2n-2}s^{2n-2} + \dots + a_0 \quad (3.34)$$

Où \otimes dénote l'opération de convolution et

$$N = [C_m \ C_{m-1} \dots \ C_0], \quad D = [B_{n-1} \ B_{n-2} \dots \ B_0]$$

$$N_R = [f_{n-1} \ f_{n-2} \dots \ f_0], \quad D_R = [h_{n-1} \ h_{n-2} \dots \ h_0]$$

On peut alors directement déduire les dérivées partielles

$$\frac{\partial a_k}{\partial V(i)}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1, \quad i = 1, 2, \dots, n+m+1$$

Les autres éléments sont donnés par :

$$R_{i,j} = R_{i-2,j+1} - \frac{R_{i-2,1}R_{i-1,j+1}}{R_{i-1,1}} \quad (3.35)$$

Alors, leurs dérivées partielles sont données par :

$$\frac{\partial R_{i,j}}{\partial V(k)} = \frac{\partial R_{i-2,j+1}}{\partial V(k)} - \frac{\left(\frac{\partial R_{i-2,1}}{\partial V(k)} R_{i-1,j+1} + \frac{\partial R_{i-1,j+1}}{\partial V(k)} R_{i-2,1} \right) R_{i-1,1} - \frac{\partial R_{i-1,1}}{\partial V(k)} (R_{i-2,1} R_{i-1,j+1})}{(R_{i-2,1})^2} \quad (3.36)$$

$$i = 3, 4, \dots, 2n, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n+m+1, \quad \frac{\partial R_{i,n}}{\partial V(k)} = 0$$

Ainsi, les gradients des fonctions $R_{i,k}(V, F), k = 1, 2, \dots, 2n$ peuvent être calculés et leurs minimisations seront rapides

Il faut noter que f_{n-1} donné dans l'équation (3.28) doit être non nul pour satisfaire la condition sur le degré relatif. Dans la procédure de l'équation (3.33), pendant que la contrainte assure que le système fictif en boucle fermée reste stable, la minimisation du

critère de performance assure que la contribution du compensateur sera minimale. Ainsi, cette procédure réalise un compromis entre ces deux contraintes.

Remarque

Supposons que les éléments $R_{i,k}, k = 2, \dots, 2n$ peuvent varier dans leurs intervalles correspondants $\left| R_{-1,k}, \bar{R}_{1,k} \right|$, alors l'opération d'optimisation définie par l'équation (3.33)

s'arrête au premier intervalle $\left| R_{-1,k}, \bar{R}_{1,k} \right|$ contenant un zéro [Ban-1994], car l'élément $R_{1,k}$ étant un pivot pour la prochaine ligne de la table de Routh, les éléments de cette ligne ne seront pas bornés. Ainsi, il faut changer le vecteur F donné comme valeur initiale à l'opération d'optimisation de l'équation (3.33).

III.5 Résultats de simulations

Exemple 3.1

Dans cet exemple, nous appliquons la méthode de conception du compensateur, proposée par Bar Kana [Bar-1987].

Le système à contrôler est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G_p(s) = \frac{C_0}{s^2 + B_1s + B_0}$$

Les paramètres de ce système peuvent varier dans les intervalles du tableau suivant :

Paramètres	Valeurs nominales	Intervalles de variation
C_0	1.5	1 à 2
B_1	2	1 à 3
B_0	1	0.5 à 1.5

TAB 3.2 - Valeurs nominales et intervalles de variations des paramètres

Le modèle de référence est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G_m(s) = \frac{1}{2s + 1}$$

L'entrée de référence est un signal carré d'amplitude ± 1 et de période 60 secondes.

Après les essais (variation des valeurs de D et τ), le compensateur est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{30}{1 + 0.4 s}$$

Les cas considérés pour les simulations sont donnés par le tableau 3.3.

Paramètres	Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3
C_0	1.5	1	2
B_1	2	3	1
B_0	1	1.5	0.5

TAB 3.3 - Les cas considérés pour les simulations

On remarque que pour les cas considérés pour la simulation, le compensateur assure un suivi parfait malgré le changement des paramètres du système.

Les figures 3.1. (a,b,c) représentent les sorties du système et du modèle de référence, tandis que les figures 3.2.(a,b,c) représentent les grandeurs de commande correspondantes.

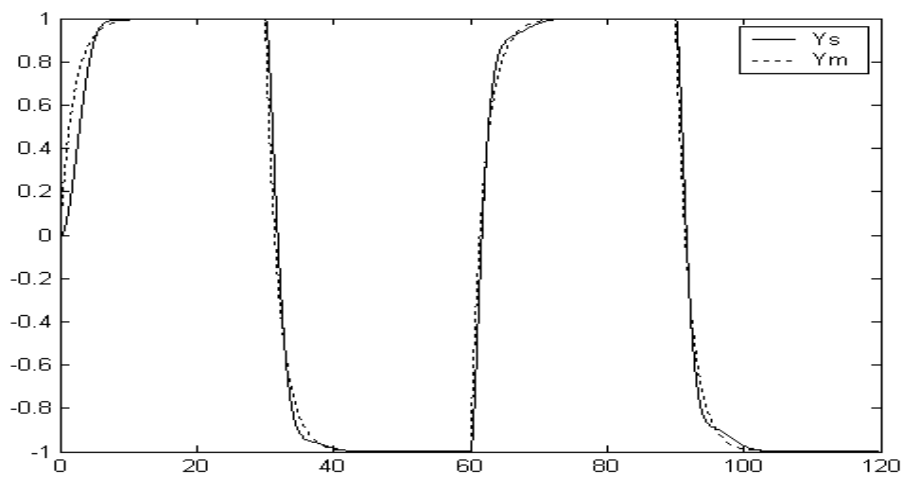


FIG. 3.1.a - Sorties du système et du modèle, Cas 1

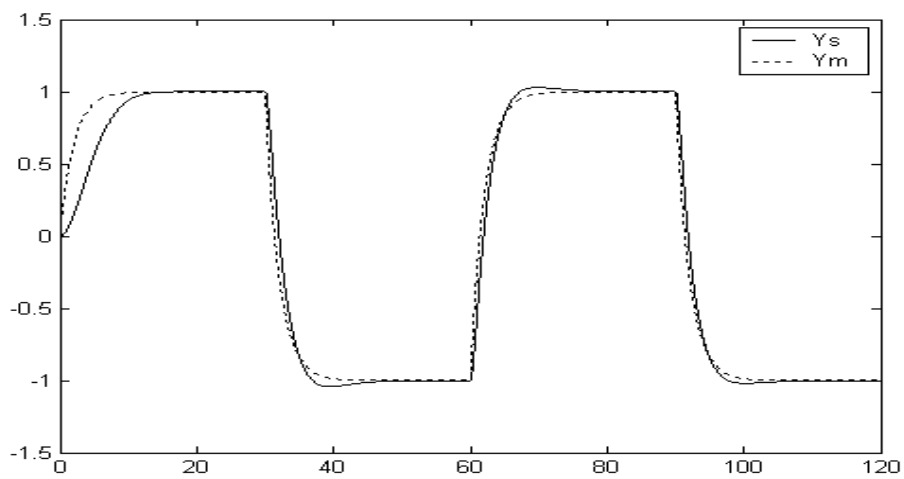


FIG. 3.1.b - Sorties du système et du modèle, Cas 2

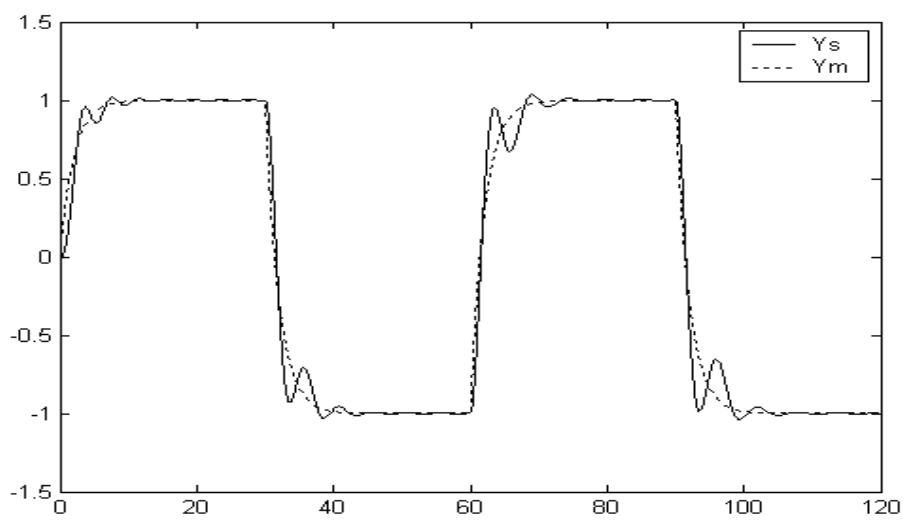


FIG. 3.1.c - Sorties du système et du modèle, Cas 3

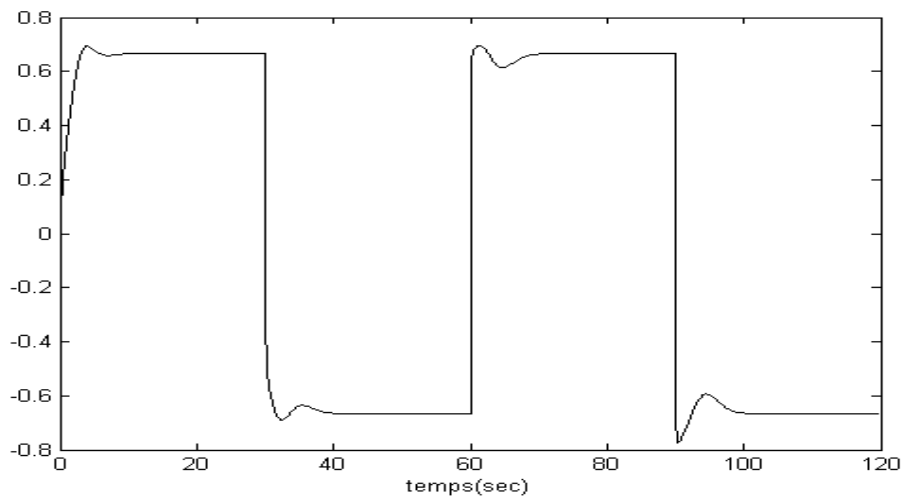


FIG. 3.2.a - Signal de commande, Cas 1

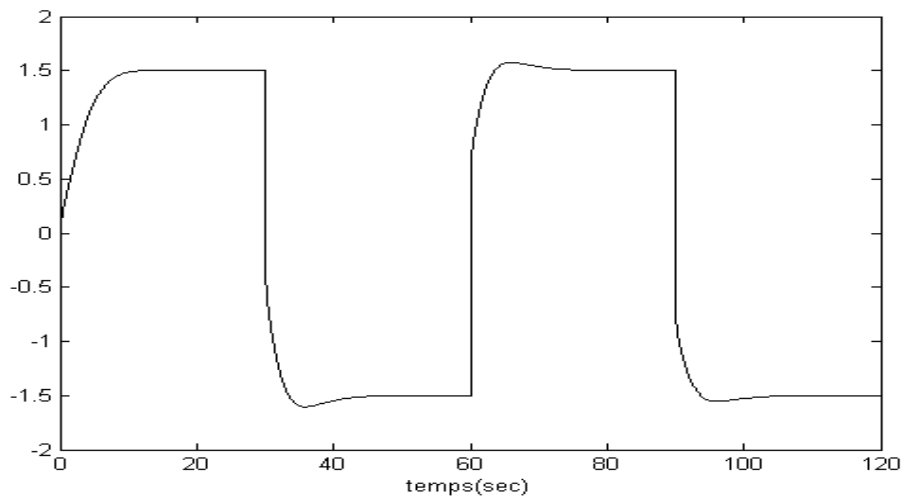


FIG. 3.2.b - Signal de commande, Cas 2

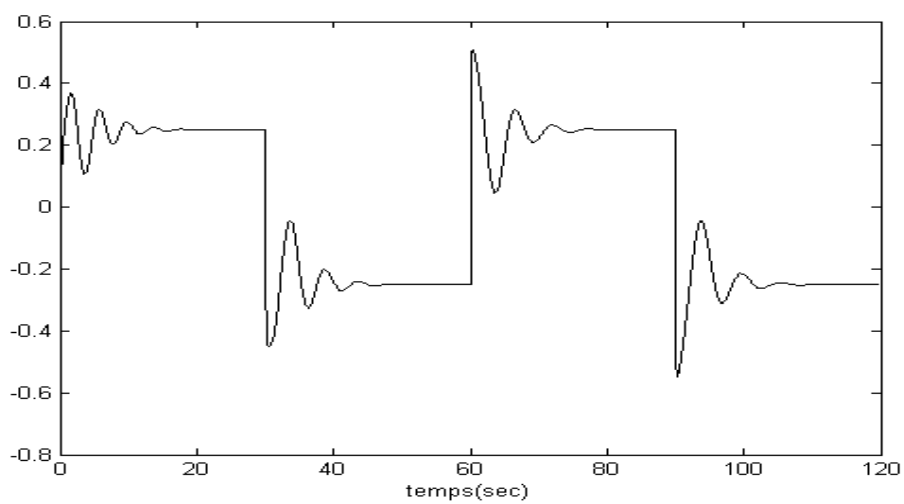


FIG. 3.2.c - Signal de commande, Cas 3

Exemple 3.2

Dans cet exemple, nous appliquons la méthode de conception du compensateur proposée par le théorème de Kharitonov en gardant le même système et le même modèle que l'exemple 3.1.

La fonction de transfert du système est de la forme :

$$G_p(s) = \frac{C_0}{s^2 + B_1s + B_0}$$

Le modèle de référence est donné par :

$$G_m(s) = \frac{1}{2s + 1}$$

L'entrée de référence est un signal carré d'amplitude ± 1 et de période 60 secondes.

Pour l'élaboration du compensateur en utilisant le théorème de Kharitonov, on procède ainsi :

1. D'après l'équation (3.7)

Pour l'étape $i=1$

$$G_1(s) = G_0(s) + F_1(s) = G_0(s) + \frac{f_1}{(s + \alpha_1)}$$

avec $G_0(s) = G_p(s)$

On a sélectionné $f_1=0.5$, $\alpha_1=2$.

En utilisant le polynôme $P(s, a)$ (équation 3.8), les quatre polynômes de Kharitonov sont donnés par :

$$K_{11}(s) = \underline{a}_0 + \underline{a}_1s + \overline{a}_2s^2 + \overline{a}_3s^3 + \underline{a}_4s^4 + \underline{a}_5s^5 + \dots = 4.5 + 3s + 0.5s^2$$

$$K_{12}(s) = \underline{a}_0 + \overline{a}_1s + \overline{a}_2s^2 + \underline{a}_3s^3 + \underline{a}_4s^4 + \overline{a}_5s^5 + \dots = 4.5 + 4s + 0.5s^2$$

$$K_{21}(s) = \overline{a}_0 + \underline{a}_1s + \underline{a}_2s^2 + \overline{a}_3s^3 + \overline{a}_4s^4 + \underline{a}_5s^5 + \dots = 5.5 + 3s + 0.5s^2$$

$$K_{22}(s) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1s + \underline{a}_2s^2 + \underline{a}_3s^3 + \overline{a}_4s^4 + \overline{a}_5s^5 + \dots = 5.5 + 4s + 0.5s^2$$

Et on vérifie qu'ils sont stables.

Alors le système $G_1(s)$ est à phase minimale et de degré relatif égal à un.

Finalement, le compensateur est donné par :

$$F(s) = \frac{f_1}{(s + \alpha_1)} = \frac{0.5}{(s + 2)}$$

Les résultats de la simulation avec augmentation du système et du modèle pour chaque cas sont donnés par les figures suivantes :

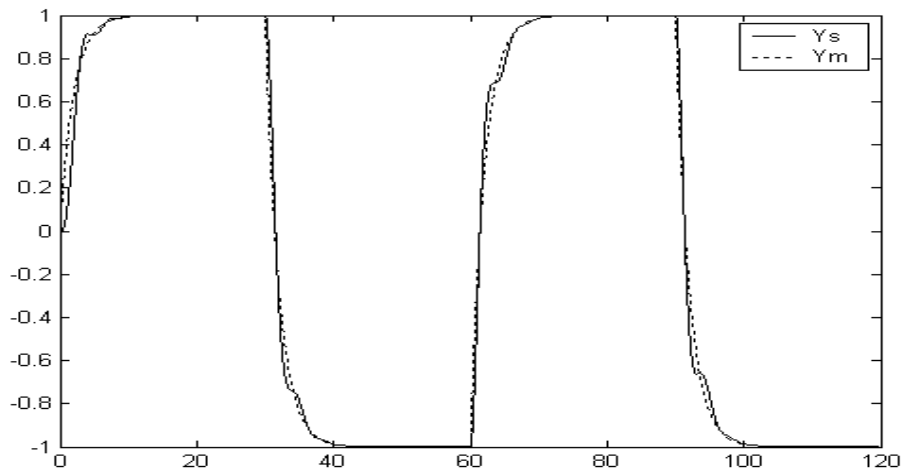


FIG. 3.3.a - Sorties du système et du modèle, Cas 1

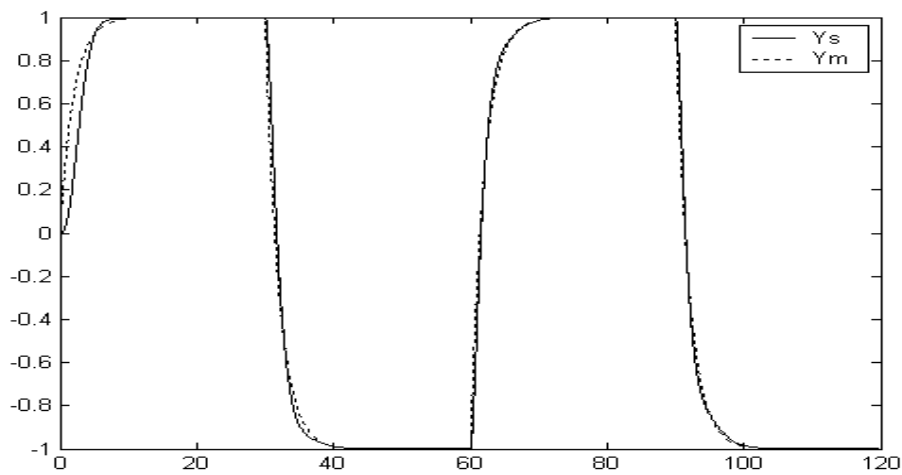


FIG. 3.3.b - Sorties du système et du modèle, Cas 2

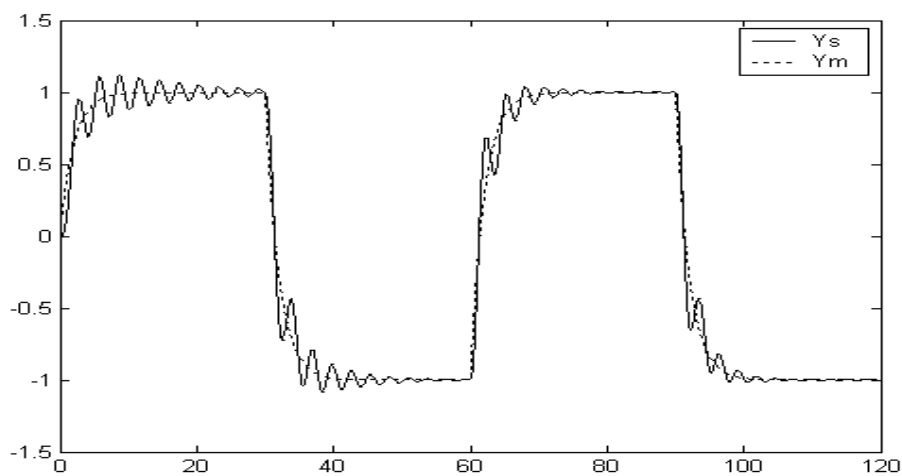


FIG. 3.3.c - Sorties du système et du modèle, Cas 3

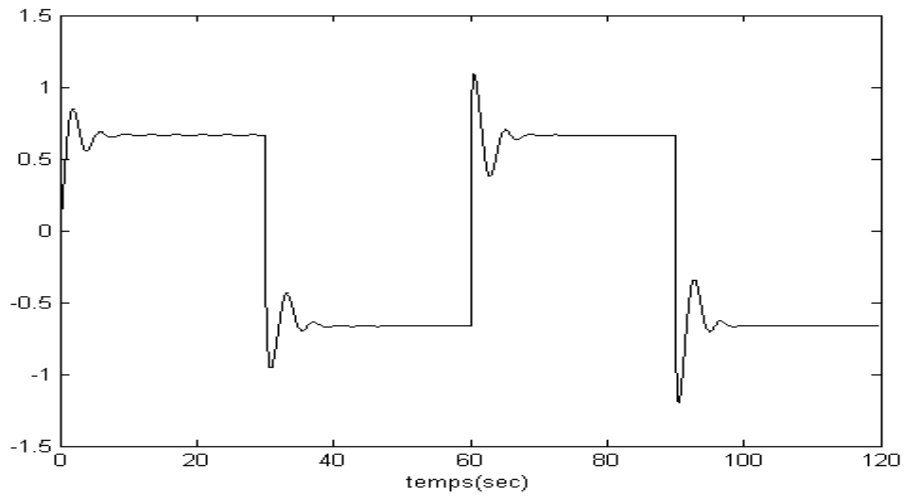


FIG. 3.4.a - Signal de commande, Cas 1

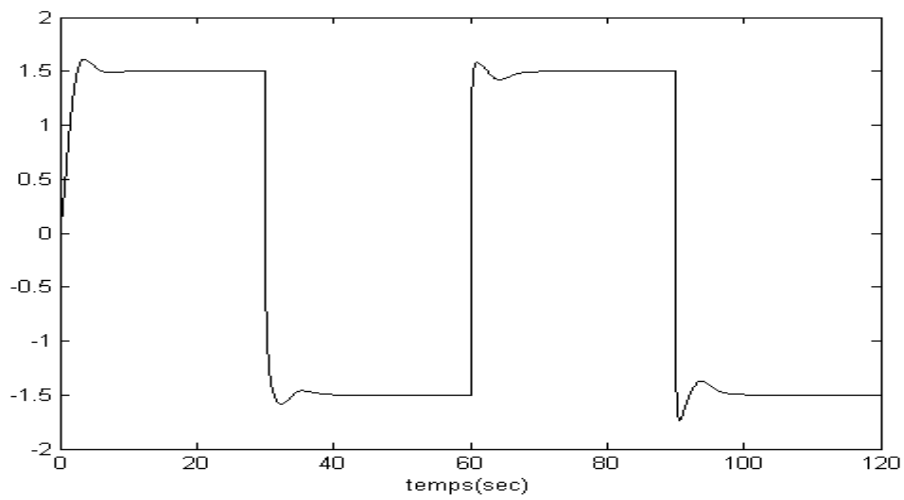


FIG. 3.4.b - Signal de commande, Cas 2

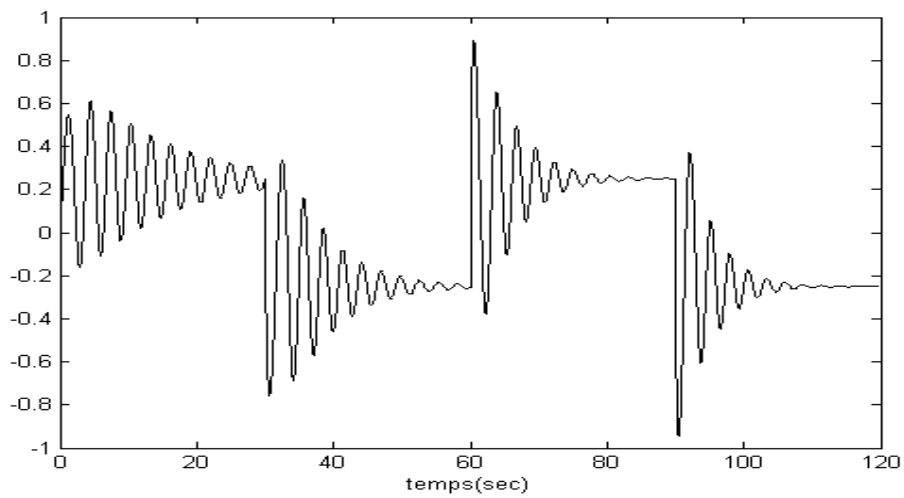


FIG. 3.4.c - Signal de commande, Cas 3

Exemple 3.3

Dans cet exemple, nous appliquons la méthode de conception du compensateur proposée dans la section (III.4) pour contourner la condition ASPR. Le système à contrôler est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G_p(s) = \frac{C_0 + C_1s}{s^2 + B_1s + B_0}$$

Les paramètres de ce système peuvent varier dans les intervalles du tableau 3.4.

Parameters	Valeurs nominales	Intervalles de variation
C_0	1.5	1 à 2
C_1	1.2	0 à 2
B_0	0.1	-2 à 2
B_1	0.2	-3 à 3

TAB 3.4 - Paramètres nominaux et intervalles de variation

Il est important de noter que le degré relatif du système peut changer de 1 à 2 selon la variation des paramètres du système.

Le modèle de référence est donné par :

$$G_m(s) = \frac{1}{2s + 1}$$

Le compensateur est choisi de la forme que celle de l'équation 3.31.

Pour le calcul des paramètres f_i du compensateur, l'opération d'optimisation donnée par l'équation (3.33) a été effectuée. Il faut noter que le plus intéressant n'est pas de trouver un minimum global exact pour l'équation (3.33), mais c'est qu'il n'y a pas violation de la contrainte.

Le compensateur ainsi conçu est donné par :

$$R_p(s) = \frac{f_0}{s + 3}$$

Ainsi, la constante de temps du compensateur est petite par rapport à celle du modèle de référence.

Le système augmenté est donné par :

$$G_a(s) = G_p(s) + R_p(s) = \frac{N_a(s)}{D_a(s)} = \frac{s^2(C_1 + f_0) + s(C_0 + 3C_1 + f_0B_1) + 3C_0 + f_0B_0}{s^3 + s^2(3 + B_1) + s(3B_1 + B_0) + 3B_0}$$

Le système augmenté $G_a(s)$ est ASPR si :

1) le degré relatif vaut un

2) $N_a(s)$ stable

La première condition est vérifiée si $C_1 + f_0 > 0$ pour toute variation de C_1 et donc, f_0 devra vérifier $f_0 > \max(-C_1)$. La deuxième condition est vérifiée en sélectionnant le paramètre f_0 afin de stabiliser le polynôme $N_a(s)$ en utilisant la méthode de Routh et en minimisant le critère

$$J = \frac{1}{2} f_0^2$$

Et donc, $N_a(s)$ est stable si

$$C_1 + f_0 > 0$$

$$C_0 + 3C_1 + f_0 B_1 > 0$$

$$3C_0 + f_0 B_0 > 0$$

Pour toute variation des paramètres C_0, C_1, B_0 et B_1 .

Dans notre exemple, les paramètres du système varient suivant le tableau 3.4 ci-dessus. Le critère $J = \frac{1}{2} f_0^2$ est minimisé pour toute valeur petite de f_0 , donc, en sélectionnant $f_0 = 0.5/3$, les inégalités ci-dessus sont vérifiées pour toute variation permise des paramètres C_0, C_1, B_0 et B_1 .

L'entrée de référence est un signal carré d'amplitude ± 1 et de période 60 secondes.

Les cas considérés pour les simulations sont donnés par le tableau 3.5 avec $T_i = T_p = 1$.

Paramètre	Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3
C_0	1.5	1.5	1
C_1	1.2	0.1	0.1
B_0	0.1	-1	1
B_1	0.2	2	-2

TAB 3.5 - Les cas considérés pour les simulations

Les figures 3.5. (a, b, c) représentent les sorties du système et du modèle de référence.

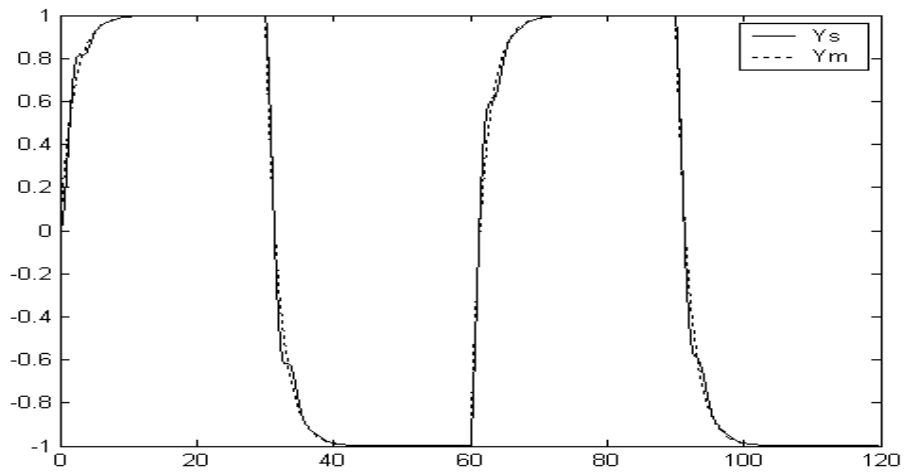


FIG. 3.5.a - Sorties du système et du modèle, Cas 1

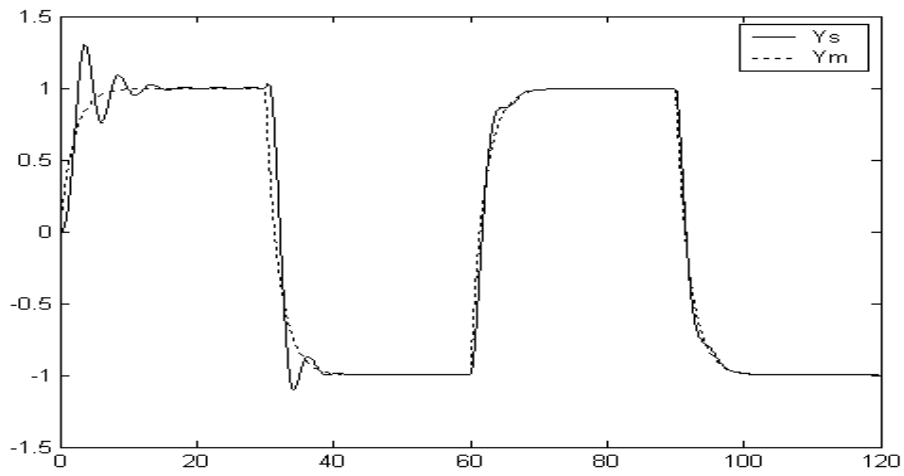


FIG. 3.5.b - Sorties du système et du modèle, Cas 2

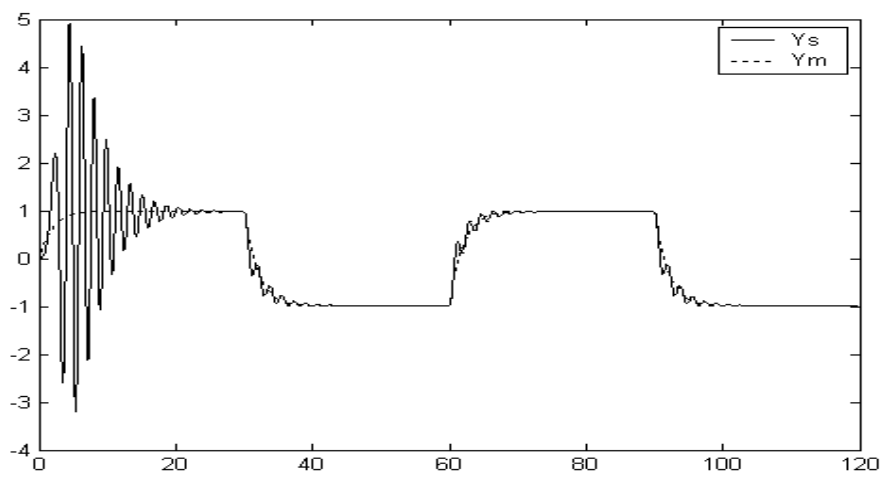


FIG. 3.5.c - Sorties du système et du modèle, Cas 3

Les commandes correspondantes sont données en figures 3.6. (a, b,c).

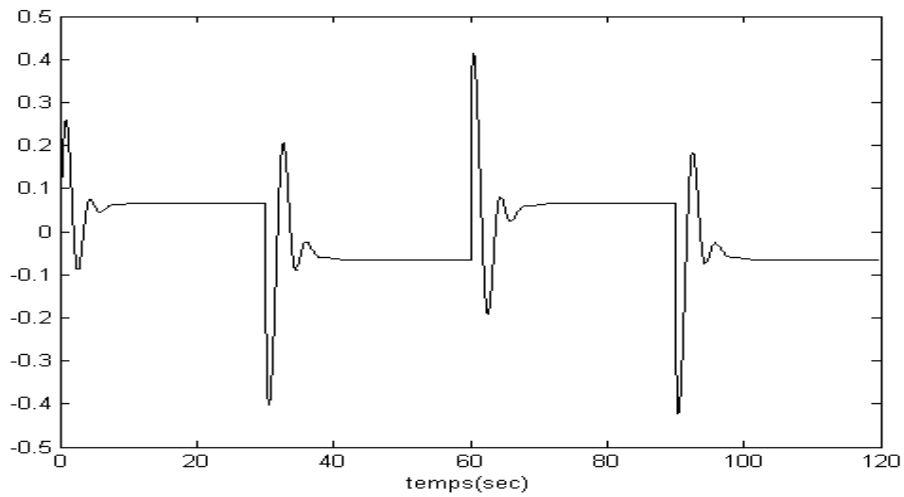


FIG. 3.6.a - Signal de commande, Cas 1

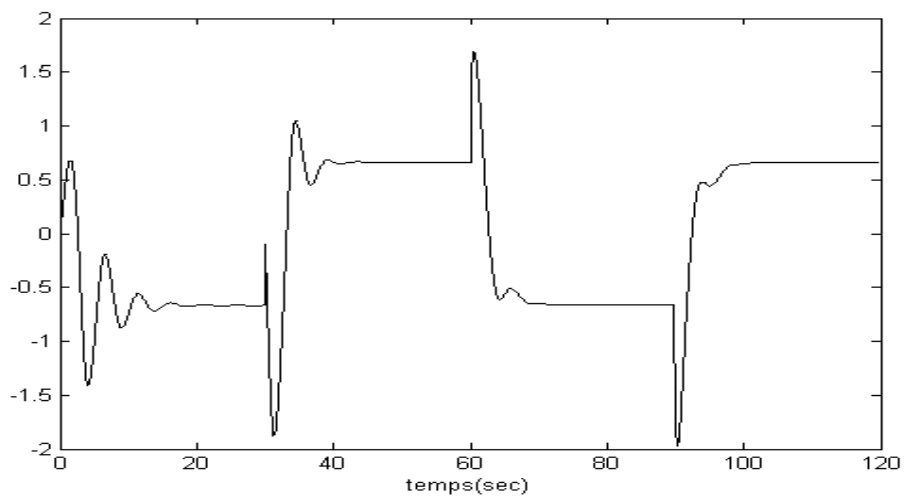


FIG. 3.6.b - Signal de commande, Cas 2

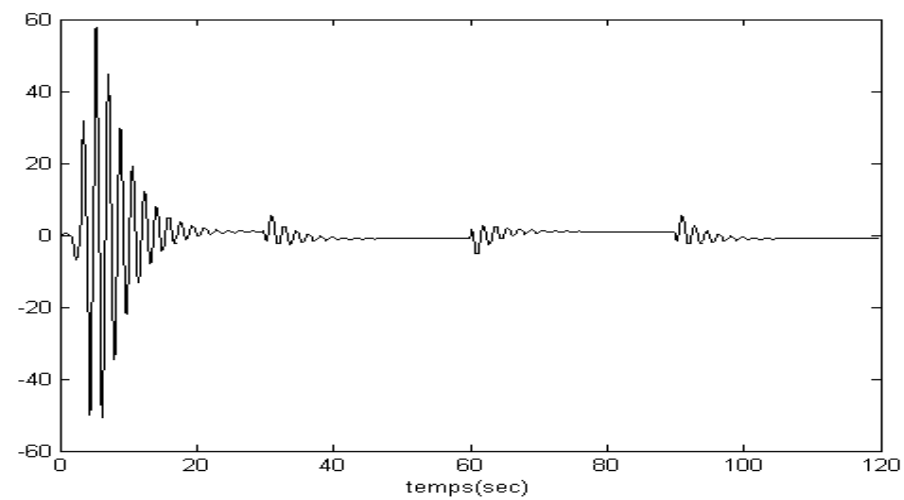


FIG. 3.6.c - Signal de commande, Cas 3

La norme d'ordre deux de la matrice K_r , et pour chaque cas est donnée en figures 3.7.(a,b,c).

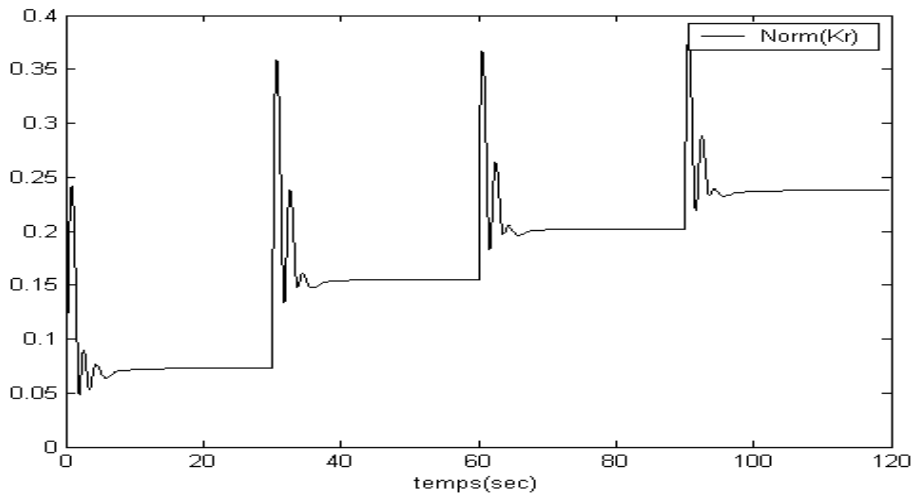


FIG. 3.7.a - Module du vecteur $K_r(t)$, Cas 1

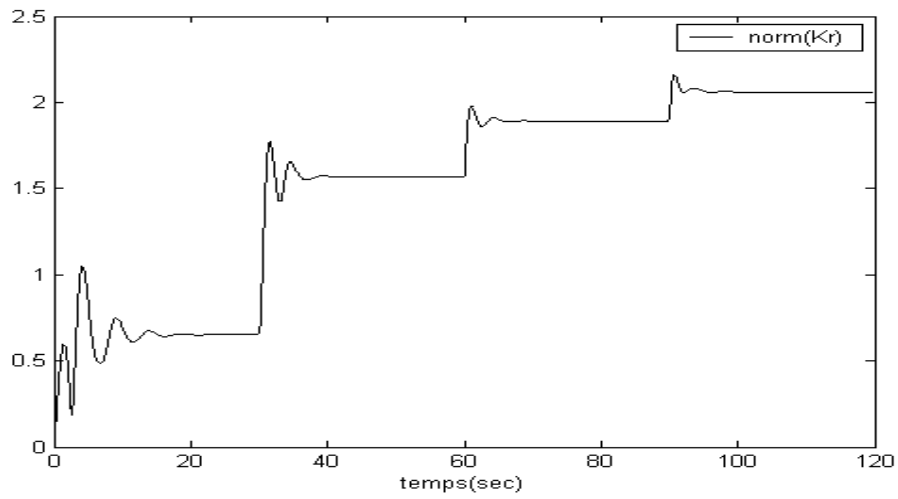


FIG. 3.7.b - Module du vecteur $K_r(t)$, Cas 2

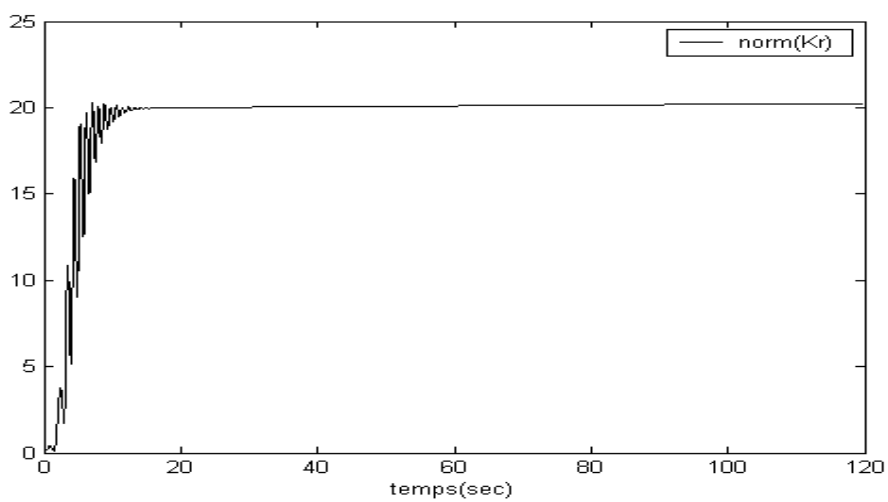


FIG. 3.7.c - Module du vecteur $K_r(t)$, Cas 3

III.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de contrôle des systèmes intervalles en utilisant le SAC. Nous avons alors proposé deux méthodes pour la compensation de ces systèmes afin de contourner la condition ASPR.

La première méthode est basée sur le théorème (II.4). Elle ne considère alors que la forme particulière du compensateur proposer par ce théorème et elle exige qu'une borne supérieure du degré relatif du système soit connue. Le choix des paramètres du compensateur est guidé par le théorème de Kharitonov. Cette méthode permet de concevoir une infinité de compensateur, ceci permet le choix du compensateur le plus adéquat en simulant le système en boucle fermée

La deuxième méthode est basée sur le lemme (II.6). La forme du compensateur est plus générale pourvue que le degré relatif du système augmenté soit l'unité. Pour vérifier la condition du lemme (II.6) concernant la stabilité du système fictif en boucle fermée, la méthode génère des contraintes à partir de la première colonne de la table de Routh. Ces contraintes seront utilisées pour générer une combinaison optimale des paramètres du compensateur. Cependant, cette méthode n'est pas très robuste car les éléments de la première colonne de la table de Routh peuvent ne pas être sur tous les intervalles de variation des paramètres du système.

CHAPITRE IV : CONTROLEUR ADAPTATIF SIMPLE (SAC) ROBUSTE

IV.1 Introduction

Ce chapitre présente la conception de l'algorithme de contrôle adaptatif à modèle de référence direct et robuste (RSAC) *Robust Simplified Adaptive Control* avec la concentration sur la satisfaction de la condition presque positive réelle ASPR en présence de dynamiques inconnues, ces dynamiques sont présentées sous forme de perturbation additive ou multiplicative dans la fonction de transfert.

Les conditions de conception dans le domaine fréquentiel pour le compensateur ont été développées, des exemples d'illustration sont présentés pour valider l'applicabilité de l'algorithme pour le contrôle des systèmes avec la présence de dynamique inconnue.

IV.2 L'incertitude de modélisation des systèmes :

L'incertitude sur les paramètres du système est ramenée à une dynamique supplémentaire sous forme d'une incertitude multiplicative ou additive. Cette dynamique est ajoutée au système nominal supposé connu ou multiplié par celui-ci.

L'incertitude de modélisation des systèmes est généralement divisée en deux catégories, incertitudes structurées et incertitudes non structurées. Pour l'incertitude structurée, le modèle de l'incertitude et le rang de variation de ses paramètres sont supposés connus. Par exemple, lorsqu'un modèle valide pour la fonction de transfert d'un système est connu, mais l'emplacement exact des pôles, des zéros ou la valeur de son gain ne sont pas connues. Pour l'incertitude non structurée, le système est moins connu et on suppose seulement que le réponse fréquentielle reste toujours entre deux bornes.

L'incertitude structurée peut être modélisée de plusieurs façons dont l'incertitude additive et l'incertitude multiplicative. Supposons que le système est modélisé par la fonction de transfert $G(s)$ et le système réel par la fonction de transfert $\tilde{G}(s)$ avec :

$$\tilde{G}(s) = G(s) + \Delta_a(s)$$

où l'erreur de modélisation ou incertitude additive est donnée par :

$$\Delta_a(s) = \tilde{G}(s) - G(s)$$

L'incertitude additive est utilisée pour modéliser les erreurs en haute fréquence qui sont négligées soit par ignorance soit par réduction du modèle.

Dans le cas de l'incertitude multiplicative, on suppose que le système réel est décrit par :

$$\tilde{G}(s) = G(s)[1 + \Delta_m(s)]$$

Où l'incertitude multiplicative (l'erreur de modélisation) est donnée par :

$$\Delta_m(s) = \frac{\tilde{G}(s) - G(s)}{G(s)}$$

Ce type d'incertitude peut être utilisé pour modéliser les erreurs dues à la dynamique des actionneurs ou à celle des capteurs.

On remarque que l'incertitude multiplicative représente l'erreur relative de modélisation, tandis que l'incertitude additive représente l'erreur absolue [Fen-1994].

IV.3 Conception du compensateur dans le domaine fréquentiel

Dans cette section, nous allons considérer une méthode de conception du compensateur pour les systèmes contenant une dynamique inconnue. Cette méthode est étendue de manière à être applicable aux systèmes intervalles déjà donnés par les équations (3.11) et (3.12).

Considérons maintenant le système intervalle donné par les équations (3.11) et (3.12). Quand les paramètres prennent leurs valeurs nominales, le système est dit nominal et est décrit par :

$$G_{p0}(s) = \frac{C_m^0 s^m + C_{m-1}^0 s^{m-1} + \dots + C_0^0}{s^n + B_{n-1}^0 s^{n-1} + B_{n-2}^0 s^{n-2} + \dots + B_0^0} \quad (4.1)$$

L'incertitude sur les paramètres peut être représentée par une incertitude multiplicative $\Delta_m(s)$ telle que :

$$G_p(s) = G_{p0}(s)[1 + \Delta_m(s)] \quad (4.2)$$

Ainsi

$$\Delta_m(s) = \frac{G_p(s) - G_{p0}(s)}{G_{p0}(s)} \quad (4.3)$$

On peut aussi la représenter sous forme d'incertitude additive :

$$G_p(s) = G_{p0}(s) + \Delta_a(s) \quad (4.4)$$

avec

$$\Delta_a(s) = G_p(s) - G_{p0}(s) \quad (4.5)$$

Les équations (4.3) et (4.5) montrent que les incertitudes multiplicative et additive dépendent des paramètres du système réel. Ces paramètres varient pour les systèmes intervalles dans des intervalles connus d'avance. Alors, dans la conception du compensateur qui assure que le système augmenté (contenant la dynamique inconnue supplémentaire) soit ASPR, on considère le cas le plus défavorable pour cette incertitude.

A cet effet, nous introduisons une procédure d'optimisation qui détermine le maximum de l'incertitude pour chaque fréquence (c'est-à-dire pour un nombre convenable de fréquences).

Considérons le vecteur V déjà défini

$$V = [C_m \ C_{m-1} \dots \ C_0 \ B_{n-1} \dots \ B_0]$$

et le vecteur Z contenant les échantillons de fréquence pour lesquelles s'effectue l'optimisation

$$Z = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_n] \quad (4.6)$$

Alors

$$\begin{aligned} |\Delta_{max}(j\omega_k)| &= \text{maximiser}_V [|\Delta(j\omega_k)|] \quad k = 1, 2, \dots, p \\ \text{soumise à } &\begin{cases} C_i \leq C_i \leq \bar{C}_i & i = 0, 1, \dots, m \\ B_j \leq B_j \leq \bar{B}_j & j = 0, 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Il est important de noter que cette optimisation est effectuée pour chaque fréquence du vecteur dont les composantes doivent être choisies de telle manière que Δ_{max} décrive bien le maximum de $\Delta(j\omega), \forall \omega$. La quantité $\Delta(j\omega)$ représente soit l'incertitude multiplicative soit l'incertitude additive selon la modélisation considérée ou les paramètres du système varient dans les intervalles prédéfinis.

Pour pouvoir appliquer la méthode de conception du compensateur dédiée aux systèmes contenant une dynamique inconnue (qui est dans notre cas, l'incertitude sur les paramètres) [Ozc-1995], nous supposons qu'il existe une fonction de transfert rationnelle connue $W(s)$, vérifiant les conditions suivantes.

1. $W(s)$ est une fonction rationnelle à paramètres réels.
2. $W(s)$ est propre ou strictement propre ($|W(j\infty)|$ est fini) et n'a pas de pôles dans le demi plan droit ($W(s)$ stable), en plus, $W(s)$ vérifie :

$$|W(j\omega)| \geq |\Delta_{\max}(j\omega)| \quad \forall \omega \quad (4.8)$$

Nous supposons que le système nominal $G_{p0}(s)$ décrit par l'équation (4.1) est connu.

Considérons maintenant le système augmenté :

$$G_a(s) = G_{p0}(s) + R_p(s) \quad (4.9)$$

Alors le théorème (II.5) peut être appliqué au système intervalle représenté par $G_{p0}(s)$ et $\Delta_{\max}(s)$. Ainsi, pour que le système augmenté $G_a(s) = G_{p0}(s) + R_p(s)$ contenant l'incertitude $\Delta(s)$ soit ASPR, le compensateur $R_p(s)$ doit être conçu selon les conditions suivantes :

1. $R_p(s)$ est stable avec un degré relatif égal à un ou zéro.
2. Le système nominal fictif en boucle fermée est stable.
3. Les coefficients de la fonction de transfert rationnelle $\tilde{\Delta}(s)$ sont réels. $\tilde{\Delta}(s)$ est propre ou strictement propre et n'a pas de pôles dans le demi-plan droit, elle est définie par :

$$\tilde{\Delta}(s) = \frac{G_{p0}(s)W(s)}{G_{p0}(s) + R_p(s)} \quad (4.10)$$

Pour une incertitude multiplicative et

$$\tilde{\Delta}(s) = \frac{W(s)}{G_{p0}(s) + R_p(s)} \quad (4.11)$$

Pour une incertitude additive.

4. Le gain H_∞ de $\tilde{\Delta}(s)$ est inférieur à l'unité ($\|\tilde{\Delta}(s)\|_\infty < 1$).

Ainsi, il suffit de choisir $R_p(s)$ de telle sorte que $\|\tilde{\Delta}(s)\|_\infty < 1$ et $\tilde{\Delta}(s)$ soit stable. Le compensateur que nous considérons ici, a la même forme que celui donné par l'équation (3.28).

Les paramètres du dénominateur du compensateur sont toujours choisis d'avance de telle sorte que les constantes de temps du compensateur soient plus petites que celles du modèle de référence. Ensuite, on choisit une combinaison des paramètres f_i qui vérifie à la fois que $\tilde{\Delta}(s)$ est stable et que $\|\tilde{\Delta}(s)\|_\infty < 1$.

Les méthodes classiques pour la stabilisation des systèmes peuvent être utilisées [Fen-1994].

IV.5 Résultats de simulation

Exemple 1

Dans cet exemple, nous appliquons la méthode de conception du compensateur proposée dans la section (IV.3)

Le système réel considéré dans cet exemple est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G_p(s) = \frac{C_1s + C_0}{B_2s^2 + B_1s + B_0}$$

Les valeurs nominales des paramètres et leurs rangs de variation sont données par le tableau 4.1.

Paramètre	Valeur nominale	Rang de variation
C_1	0	-0.2 à 2
C_0	1.5	1 à 2
B_2	0.5	0.4 à 1.1
B_1	0.4	0.4 à 4
B_0	1.1	1.1 à 3

TAB 4.1 - Paramètres nominaux et intervalles de variation

Le modèle de référence est donné par :

$$G_m(s) = \frac{1}{s+1}$$

L'entrée de référence est un signal carré de période 60 sec et d'amplitude ± 1 .

Le système est modélisé comme suit :

$$G_p(s) = G_{p0}(s) + \Delta_a(s)$$

Où $\Delta_a(s)$ est donnée par :

$$\Delta_a(s) = \frac{C_1s^3 + (C_1 - B_2 + C_0)s^2 + (4C_1 + C_0 - B_1)s + 4C_0 - B_0}{B_2s^4 + (B_1 + B_2)s^3 + (B_0 + B_1 + 4B_2)s + 4B_0}$$

Ainsi, $\Delta_a(s)$ dépend des paramètres du système réel.

Le maximum sur l'incertitude additive a été calculé pour 100 fréquences différentes par la procédure d'optimisation donnée par les équations (4.7), il est représenté sur la figure 4.1.

La fonction $W(s)$ définie par l'équation (4.8) est choisie comme étant :

$$W(s) = \frac{2.55}{1 + 0.5s}$$

Le module de cette fonction est représenté sur la figure 4.1. On remarque qu'il vérifie bien l'inégalité (4.8).

Pour assurer que le système nominal fictif en boucle fermée soit stable, nous avons utilisé le lieu d'Evans correspondant à ce système afin de choisir les paramètres du compensateur. Ceci permet aussi de déterminer le gain du compensateur de telle sorte que la norme H_∞ de $\tilde{\Delta}(s)$, donnée par l'équation (4.11) soit inférieure à l'unité.

Le compensateur conçu est donné par la fonction de transfert suivante :

$$R_p(s) = \frac{3.75}{1+0.5s}$$

La norme H_∞ de $\tilde{\Delta}(s)$ est $\left\| \tilde{\Delta}(s) \right\|_\infty = 0.6800 < 1$.

Les matrices de pondération T_i et T_p sont choisies comme étant des matrices identité

Les cas considérés pour la simulation sont donnés par le tableau 4.2. Pour chaque cas, nous représentons les sorties du système et du modèle, les grandeurs de commande et le module du vecteur $K_r(t)$.

Paramètre	Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3	Cas n° 4
C_1	-0.2	0	1.5	1.1
C_0	1	1.5	2	1.5
B_2	1	0.5	0.4	1.1
B_1	4	0.4	0.4	4
B_0	3	1.1	1.1	3

TAB 4.2 - Les cas considérés pour la simulation

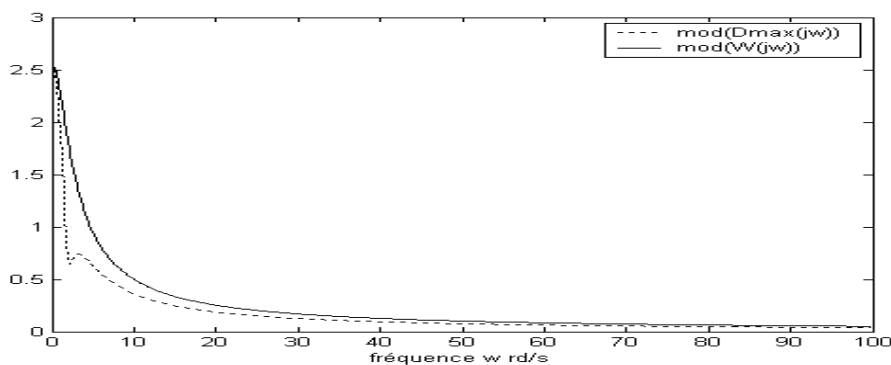


FIG. 4.1 - $|\Delta_{\max}(j\omega)|$ et $|W(j\omega)|$ pour 100 valeurs de la fréquence

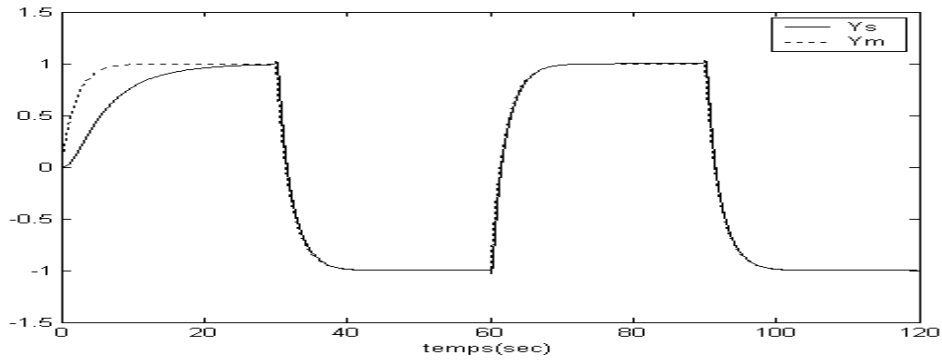


FIG. 4.2.a - Sorties du système et du modèle, Cas 1

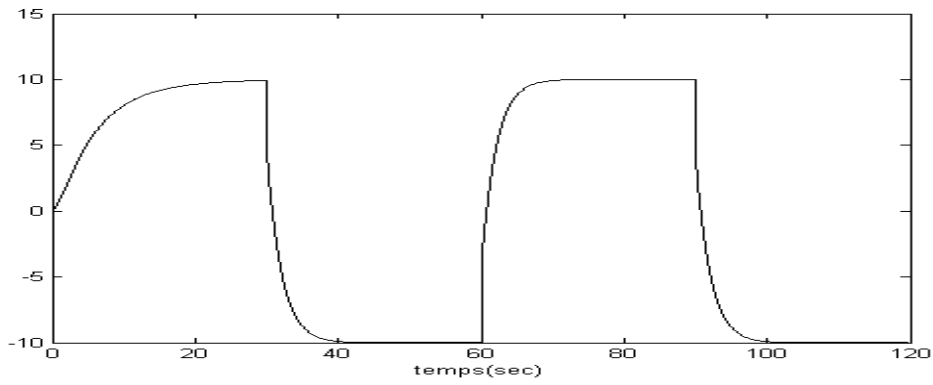


FIG. 4.2.b - Signal de commande, Cas 1

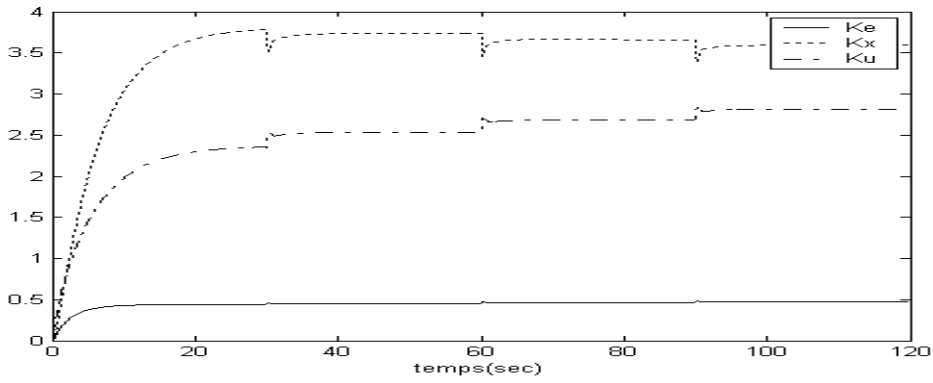


FIG. 4.2.c - Signaux $K_e(t)$, $K_x(t)$ et $K_u(t)$, Cas 1

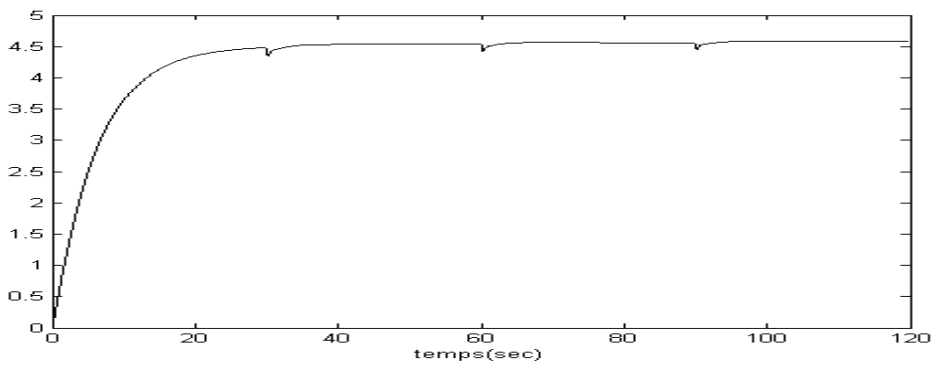


FIG. 4.2.d - Module du vecteur $K_r(t) = \sqrt{K_e^2 + K_x^2 + K_u^2}$, Cas 1

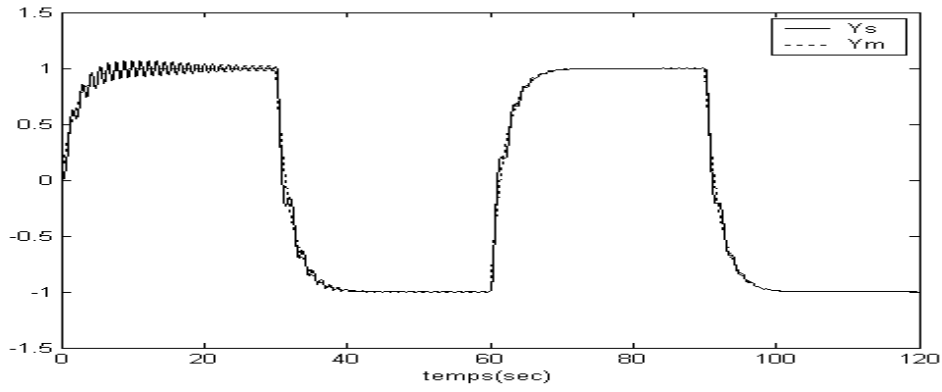


FIG. 4.3.a - Sorties du système et du modèle, Cas 2

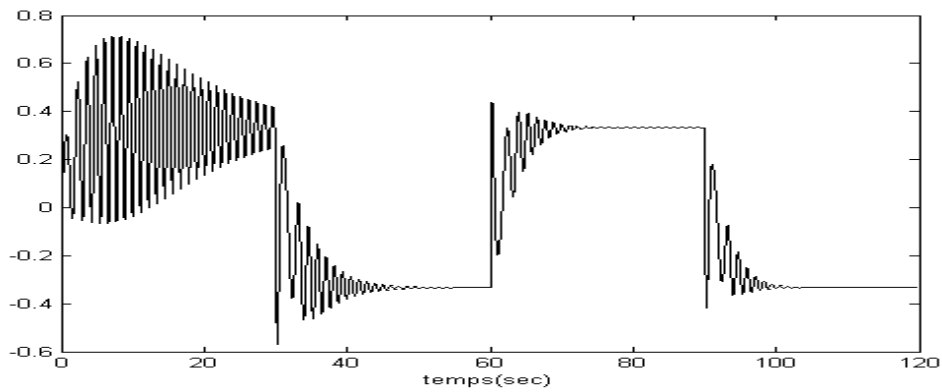


FIG. 4.3.b - Signal de commande, Cas 2

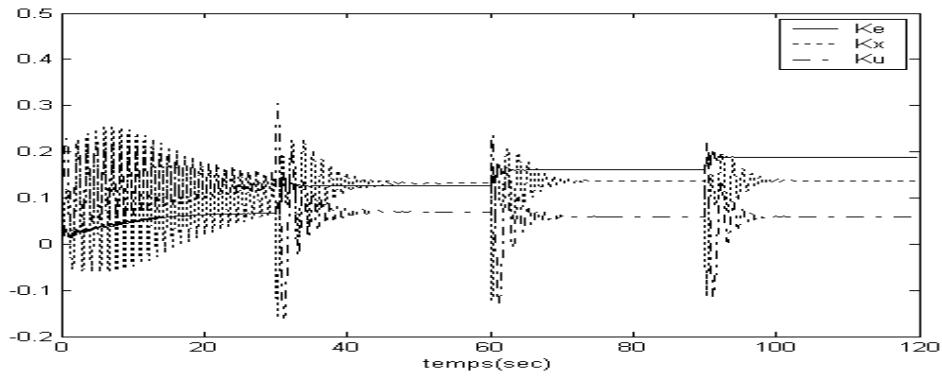


FIG. 4.3.c - Signaux $K_e(t)$, $K_x(t)$ et $K_u(t)$, Cas 2

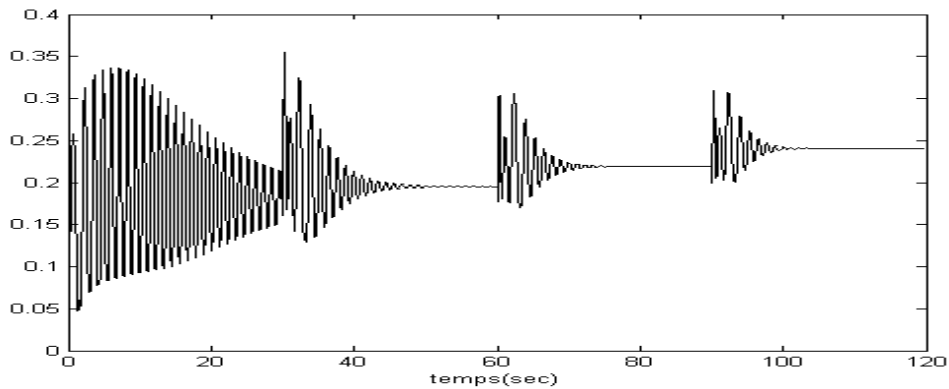


FIG. 4.3.d - Module du vecteur $K_r(t) = \sqrt{K_e^2 + K_x^2 + K_u^2}$, Cas 2

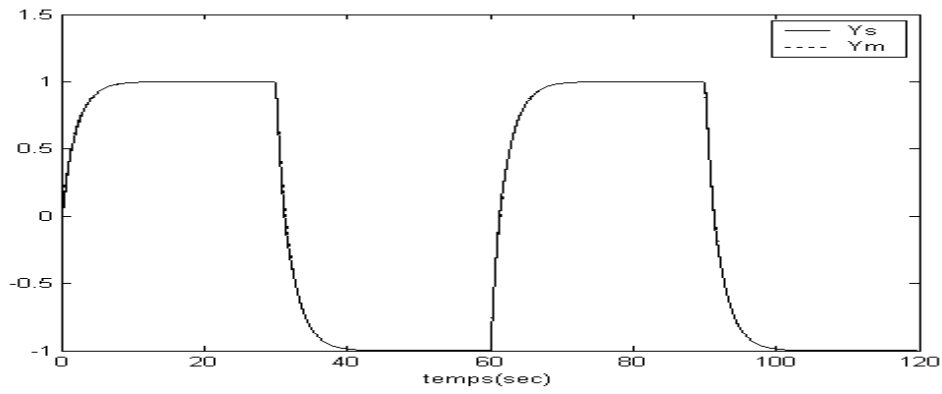


FIG. 4.4.a - Sorties du système et du modèle, Cas 3

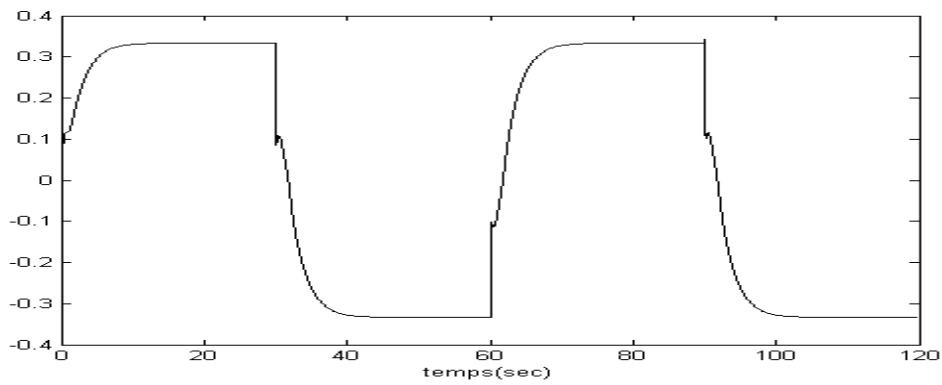


FIG. 4.4.b - Signal de commande, Cas 3

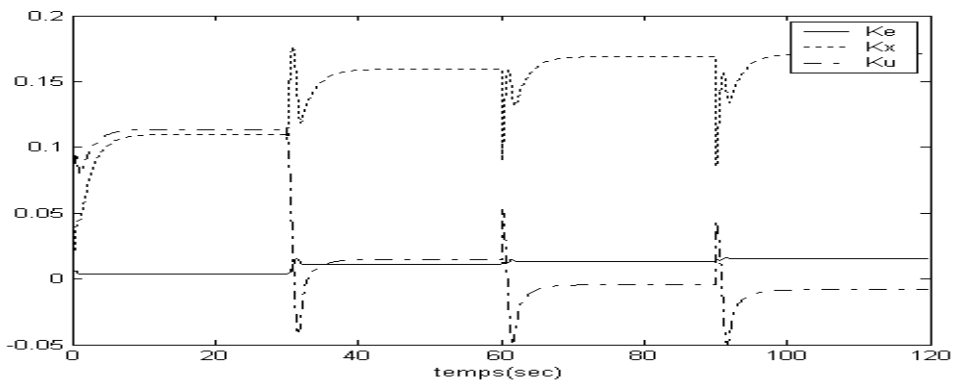


FIG. 4.4.c - Signaux $K_e(t)$, $K_x(t)$ et $K_u(t)$, Cas 3

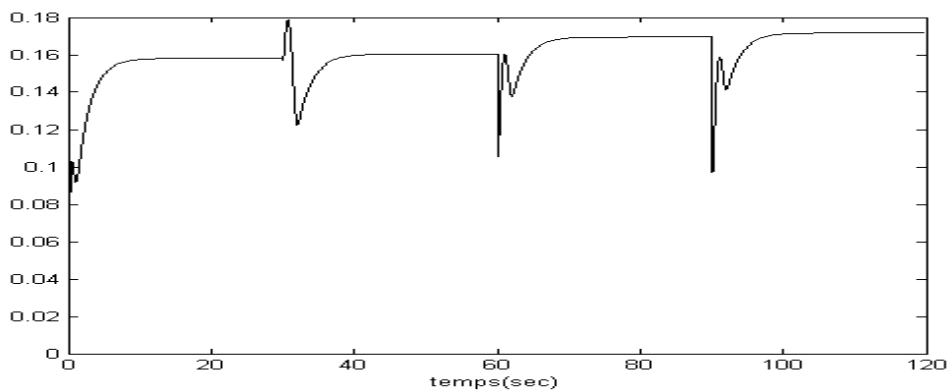


FIG. 4.4.d - Module du vecteur $K_r(t) = \sqrt{K_e^2 + K_x^2 + K_u^2}$, Cas 3

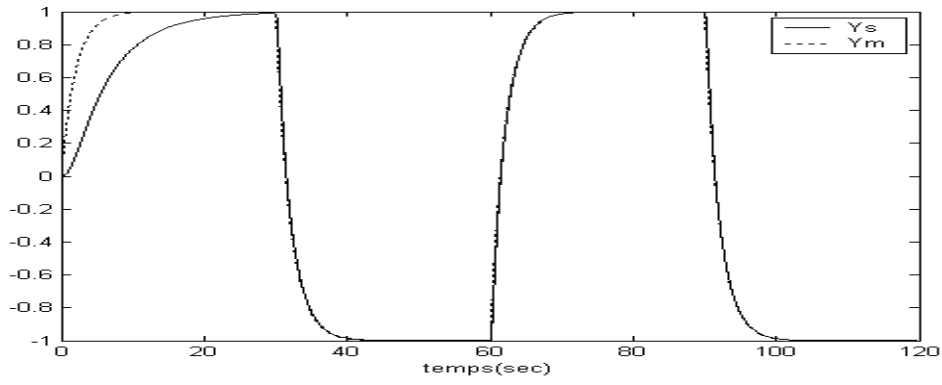


FIG. 4.5.a - Sorties du système et du modèle, Cas 4

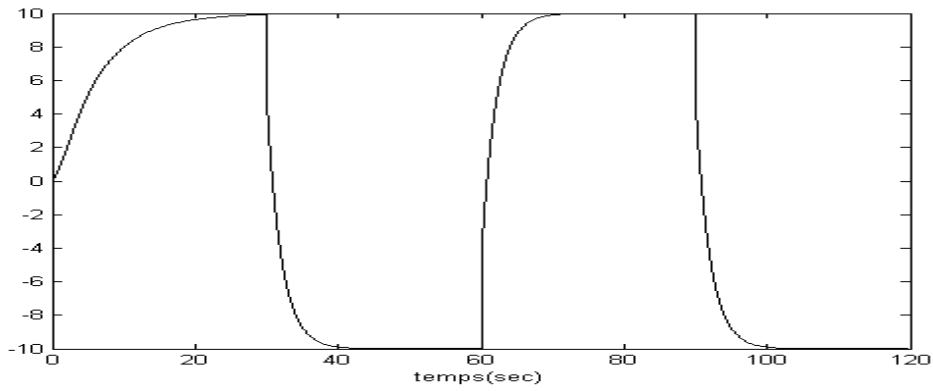


FIG. 4.5.b - Signal de commande, Cas 4

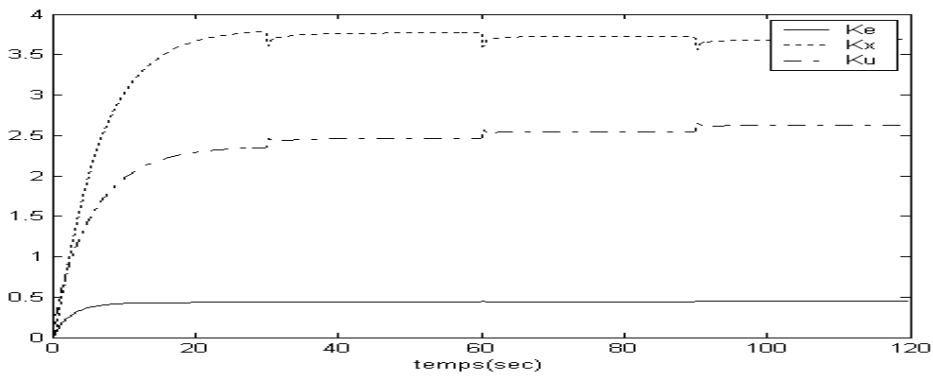


FIG. 4.5.c - Signaux $K_e(t)$, $K_x(t)$ et $K_u(t)$, Cas 4

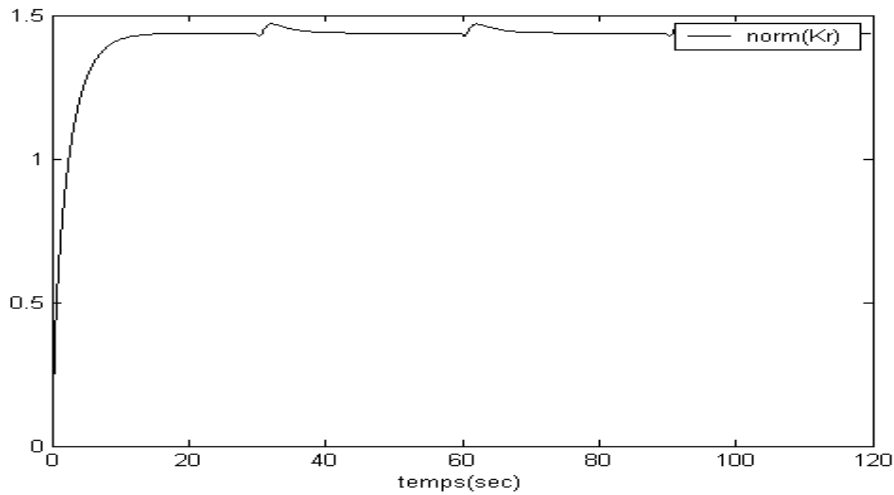


FIG. 4.5.d - Module du vecteur $K_r(t) = \sqrt{K_e^2 + K_x^2 + K_u^2}$, Cas 4

IV.6 Conclusion :

Pour la méthode de conception du compensateur dans le domaine fréquentiel, l'incertitude sur les paramètres est ramenée à une dynamique inconnue, pour laquelle nous avons considéré le cas le plus défavorable. Le système intervalle est alors représenté par un système nominal, qui doit être connu et une dynamique inconnue, qui est fonction de l'incertitude sur les paramètres, ensuite nous appliquons le théorème (II.5) dédié à ce cas. Les résultats de la simulation montrent que ces méthodes constituent des procédures systématiques pour la compensation des systèmes intervalles. Ce qui étend le domaine d'applicabilité du SAC en surmontant la condition ASPR et en bénéficiant de tous les avantages de ce dernier.

Conclusions générales et perspectives

Afin d'éviter la condition ASPR requise pour l'applicabilité du SAC, Nous avons exploité trois méthodes pour la compensation des systèmes à paramètres variant dans des intervalles prédéfinis.

La méthode qui utilise le théorème Kharitonov et le modèle du compensateur proposé par Iwai [Iwa-1992- Iwa-1994]. L'utilisation du théorème de Kharitonov guide le choix des paramètres du compensateur et assure la condition du "presque positivité" du système augmenté sur tout l'intervalle de variation des paramètres.

La deuxième méthode utilise une forme de compensateur qui assure que le degré relatif du système augmenté soit l'unité, et tente de minimiser son gain en prenant en compte la stabilité du système fictif en boucle fermée. Cette méthode est plus procédurale mais elle ne garantit pas toujours une solution pour les paramètres du compensateur.

La méthode de conception du compensateur dans le domaine fréquentiel, ramène l'incertitude sur les paramètres du système intervalle à une dynamique inconnue et applique ensuite la méthode de compensation dédiée à ce cas.

Ces méthodes ont été utilisées afin de concevoir des compensateurs pour des exemples de systèmes intervalles qui ne sont pas forcément ASPR sur tout l'intervalle de variation des paramètres. Ensuite, le SAC a été utilisé pour contrôler le système augmenté résultant. Les simulations ont été effectuées dans l'environnement MATLAB [Mok-1997]. Les résultats obtenus montrent qu'avec ces méthodes le SAC peut être utilisé pour le contrôle des systèmes non ASPR ce qui permet de profiter de ses avantages.

Ce travail nous a permis de mettre à la disposition des automaticiens et concepteurs de commande des programmes leurs permettant de choisir d'une manière facile et rapide des contrôleurs adaptatifs pour les systèmes perturbés, l'ingénieur spécifie ses paramètres sous forme de cahier de charges, et le programme lui donne le compensateur adéquat.

Comme perspectives, les points suivants peuvent être développés.

- Extension du contrôleur développé aux systèmes MEMS (MIMO).
- Extension du contrôleur développé aux systèmes à retard.
- Etude de l'influence de la saturation des commandes.

Bibliographie

[Abd-1992]

Abdelaziz M, " Commande à Modèle de Référence de Systèmes " Thèse de Magistère Électronique, Université de Constantine 1992.

[Bak-1996]

Bakker R, Annaswamy A.M, " Stability and robustness properties of a simple adaptive controller ", IEEE Trans. Automat. Contr., vol.41, n° 9, pp.1352-1358, 1996.

[Ban-1994]

Bandyopadhyay B, Ismail O, Gorez R, " Routh-Pade approximation for interval systems ", IEEE Trans. Automat. Contr., vol.39,n° 12,pp.2454-2456,1994.

[Bar-1985 a]

BarKana I, Kaufman H, " Robust simplified adaptive control for a class of multivariable continuous time systems ", Proceedings of the 24th Conference On Decision and Control, Lauderdal, pp.141-146,1985.

[Bar-1985 b]

BarKana I, Kaufman H, " Global stability and performance of a simplified adaptive algorithm ", Int.J.Control, vol 42,n°6,pp.1491-1505,1985.

[Bar-1987]

BarKana I, " Adaptive control-A simplified approach " in C. Leondes (Ed), " Control and Dynamic systems –Advances in theory and Applications, "academic Press, vol. XXXI, pp. 187-236, 1987.

[Bar-1989]

BarKana I, " Absolute stability and robust discrete adaptive control of multivariable systems ", Contr., And Dynamique Systems, vol.31, Part1, pp.157-183,1989.

[Bar-1988]

BarKana I, " Comments on a paper by Kidd ", Int.J.Contr., vol.48,n° 1pp.1011-1023 1988.

[Bar-1990 a]

BarKana I, Guez A, " Simple adaptive control for a class of non-linear systems with application to robotics ", Int.J. Contr., vol.52,n° 1,pp.77-99,1990.

[Bar-1990 b]

BarKana I, " Almost-passivity and simple adaptive control of non-stationary continuous linear systems ", Int.J.Systems Sci., vol,21,n°5,pp. 835-862,1990

[Bar-1991 a]

BarKana I, " Positive realness in multivariable stationary linear systems ", J.of the Franklin Institute, vol.238,n° 4, pp. 403-417,1991.

[Bar-1991 b]

BarKana I, Guez A, " Simplified Techniques for Adaptive Control of Robot ", in Control and Dynamic Systems - Advances in Theory and Applications (C. Leondes, ed.), 40, pp. 147-203, 1991.

[Bar-1992]

BarKana I, Fischl R, " A Simple Adaptive Enhancer of Voltage Stability for Generator Excitation Control ", Proceedings of American Control Conference, pp.1705-1709, 1992.

[Bar-1996]

BarKana I, Kulick, Soffa, " Parallel feedforward and robustness of simple adaptive control " Draxel University, pp. 1-15, 1996.

[Bar-2004 a]

BarKana I, " Comments on 'Design of Strictly Positive Real Systems Using Constant Output Feedback " , IEEE Transactions on Automatic Control, 49, pp.2091-2093, 2004.

[Bar2004 b]

BarKana I, " Simple Adaptive Control for Non-Minimum Phase Autopilot Design ", AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Providence, RI, paper AIAA 2004-4868, 2004.

[Bar-2005 a]

BarKana I, " Gain Conditions and Convergence of Simple Adaptive Control ", International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 19, pp.13-40, 2005.

[Bar-2005 b]

BarKana I, " On Output Feedback Stability and Passivity in Discrete Linear Systems ", Proceedings of the 16th Triennial IFAC World Congress, Prague, Czech Republic, 2005.

[Barm-1992]

Barmish B. R, Hollot C.V, Kraus F.J, Tempo R, " Extreme point results for robust stabilization of interval plants with first order compensators ", IEEE Trans. Automat Contr., vol.37, n° 6, pp. 707-714, 1992.

[Bor-1992]

Borne P, Dauphin G, Richard J.P, Rotella F, Zambettakis I, "Modélisation et identification de processus ", Tome 1, Edition Technique, 1992.

[Bro-1979]

Broussard J.R, O'Brien S.J, " Feedforward control to track the output of a forced model ", Proceedings of the 17th Conference on Decision and Control, pp.1149-1155, 1979.

[Fen-1994]

Feng G, " A robust approach to adaptive control algorithms ", IEEE Trans. Automat Contr., vol.39, n° 8, pp. 1738-1742, August 1994.

[Ioa-1987]

Ioannou P, Tao G, " Frequency domain conditions for strictly positive real functions ", IEEE Trans.Automat. Contr., vol.AC-32,n^o1,pp 53-54,1987.

[Ioa-1991]

Ioannon P.A, Datta A, " Robust adaptive control: A unified approach ", Proceedings of the IEEE, vol. 79, n^o 12, pp 1736-1786, December 1991.

[Ioa-2003]

Ioannou P.A, Sun J, " Robuste adaptive control " , Prentice-Hall, 2003.

[Isi-1995]

Isidori A., "Nonlinear control systems, "Third edition, Springer-Verlag, 1995.

[Iwa-1992]

Iwai Z. and Mizumoto I, " Robust and simple Adaptive Control Systems ", Int.J .of Contr., vol.55,n^o6,pp 1453-1470,1992

[Iwa-1993]

Iwai Z, Mizumoto I, Douzono H, " Decentralized simple adaptive control ", 12th Word Congress, IFAC, Sydney,vol.33,pp.9-16,1993.

[Iwa-1994]

Iwai Z, Mizumoto I, " Realisation of simple Adaptive Control by using a parallel feedforward compensator ", Int.J.of Contr.,vol.59,n^o6,pp 1534-1565,1994.

[Kau-1984]

Kaufman H, Roy R.J, Xu X, " Model reference adaptive control of Drug infusion rate ", Automatica, vol.20, pp.205-210,1984.

[Kau-1985]

Kaufman H, Gulberson C, Ultiana C, " Model reference and optimal design of digital drives for computerized numerical control machine tools " Proceeding of the 24th Conference on Decision and Control ", Lauderred, pp.1701-1702, 1985.

[Kau-1993]

Kaufman H, Neat G.W," Asymptotically stable Multi input Multi output direct model reference adaptive controller for processes not necessarily satisfying a positive real constraint "Int.J.Contr., vol.58,n^o 5,1011-1031,1993.

[Lan-1979]

Landau I.D, " Adaptive control: The model reference approach ", Marcel Dekker, Inc., New York, 1979.

[Lan-1989]

Landau I.D, Dugard L, " Commande adaptative aspects pratiques et théorique ", Masson1989.

[Mok-1997]

Mokhtari M, Mesbah A, "Apprendre et Maîtriser MATLAB"1997.

[Ozc-1995]

Ozcelik S, Kaufman H, " Robust direct model reference adaptive controllers ", in Proceedings, CDC, IEEE, pp. 3955-3960. 1995.

[Ozc-1997]

Ozcelik S, Kaufman H, " Frequency Domain Design Conditions for Robust t Direct Model reference adaptive controllers ", in Proceedings, ACC, IEEE ,O-7803-3832-4 1997.

[Pal-2003]

Palem R.C.C, " Drug infusion control: An extend direct model reference adaptive control strategy ", PHD thesis, Faculty RPI. Troy New York, 16-july-2003.

[Sob-1982]

Sobel K, Kaufman H, Mabius L, "Implicit adaptive control for a class of MIMO Systems", IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, vol. 18, pp.576-590,1982.

Annexe

Démonstration du théorème (II.2)

[Pal-2003]

La première étape dans la démonstration est de former une fonction quadratique positive définie selon les variables d'états du système adaptative $e_x(t)$ et $K_I(t)$. Avant de faire ceci, il est supposé que T_i^{-1} est une matrice positive définie, selon la première condition suffisante. Alors un choix approprié de la fonction de Lyapunov est :

$$V = e_x^T P e_x + Tr \left[S(K_I - \tilde{K}) T_i^{-1} (K_I - \tilde{K})^T S^T \right] \quad (1)$$

Où Tr : représente la trace d'une matrice

Sa dérivée dans le temps est :

$$\dot{V} = e_x^T P \dot{e}_x + \dot{e}_x^T P e_x + 2Tr \left[S(K_I - \tilde{K}) T_i^{-1} (\dot{K}_I - \dot{\tilde{K}}) S^T \right] \quad (2)$$

Où P est une matrice définie positive de dimension $n \times n$, \tilde{K} est une matrice de dimension $m \times n_r$, et S est une matrice non singulière de dimension $m \times m$.

Puisque la matrice \tilde{K} apparaît seulement dans la fonction et non dans l'algorithme de contrôle, elle est dite matrice de gain fictif. Elle a la même dimension que $K_r(t)$

$$\tilde{K}_r = \tilde{K}_e C_p e_x + \tilde{K}_u u_m + \tilde{K}_x x_m \quad (3)$$

où les trois gains \tilde{K}_x , \tilde{K}_u et \tilde{K}_e sont comme \tilde{K} fictif.

Ensuite nous allons tirer l'équation de l'erreur en utilisant le fait que $e_x = x_p^* - x_p$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= A_p x_p^* + B_p u_p^* - A_p x_p - B_p u_p \\ &= A_p [x_p^* - x_p] + B_p [u_p^* - u_p] \\ &= A_p e_x + B_p [u_p^* - u_p] \end{aligned} \quad (4)$$

En substituant la définition pour u_p^* de (2.5) et u_p de (2.53), nous obtenons :

$$\dot{e}_x = A_p e_x + B_p [S_{21} x_m + S_{22} u_m - K_x x_m - K_u u_m - K_e C_p e_x] \quad (5.a)$$

$$= A_p e_x + B_p [S_{21} x_m + S_{22} u_m - K_I r - C_p e_x r^T T_p r] \quad (5.b)$$

Alors le système adaptative sera décrit par :

$$\dot{e}_x = A_p e_x + B_p [S_{21} x_m + S_{22} u_m - K_I r - C_p e_x r^T T_p r] \quad (6)$$

$$\dot{K}_I = C_p e_x r^T T_i \quad (7)$$

La substitution de (6) et (7) dans (2) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V} = e_x^T P [A_p e_x - B_p C_p e_x r^T T_p r - B_p K_I r B_p S_{21} x_m + B_p S_{22} u_m] \\ + [A_p e_x - B_p C_p e_x r^T T_p r - B_p K_I r + B_p S_{22} u_m]^T P e_x + 2e_x^T C_p^T S^T S (K_I - \tilde{K}) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = e_x^T (PA_p + A_p P) e_x - e_x^T (PB_p C_p + C_p^T B_p^T P) e_x r^T T_p r - 2e_x^T PB_p K_I r \\ + 2e_x^T PB_p (S_{21} x_m + S_{22} u_m) + 2e_x^T C_p^T S^T S (K_I - \tilde{K}) r \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = e_x^T (PA_p + A_p P) e_x - e_x^T (PB_p C_p + C_p^T B_p^T P) e_x r^T T_p r \\ + 2e_x^T [C_p^T S^T S - PB_p] K_I r - 2e_x^T C_p^T S^T S \tilde{K} r \\ + 2e_x^T PB_p (S_{21} x_m + S_{22} u_m) \end{aligned} \quad (10)$$

En posant :

$$C_p = QB_p^T P \quad \forall A_p, B_p \quad \text{Où } Q = (S^T S)^{-1}$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov devient :

$$\begin{aligned} \dot{V} = e_x^T (PA_p + A_p P) e_x - 2e_x^T PB_p (S^T S)^{-1} B_p^T P e_x r^T T_p r \\ - 2e_x^T C_p^T S^T S \tilde{K} r + 2e_x^T PB_p (S_{21} x_m + S_{22} u_m) \end{aligned} \quad (11)$$

En substituant

$$\tilde{K} r = \tilde{K}_e C_p e_x + \tilde{K}_u u_m + \tilde{K}_x x_m$$

dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V} = e_x^T \left[P(A_p - B_p \tilde{K}_e C_p) + A_p - B_p \tilde{K}_e C_p \right]^T P e_x \\ - 2e_x^T PB_p (S^T S)^{-1} B_p^T P e_x r^T T_p r + \\ 2e_x^T PB_p \left[(S_{21} - \tilde{K}_x) x_m + (S_{22} - \tilde{K}_u) u_m \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Ainsi, si on pose $\tilde{K}_x = S_{21}$ et $\tilde{K}_u = S_{22}$ (aucune d'elles n'est requise pour l'implémentation), la dérivée de V devient :

$$\begin{aligned} \dot{V} = e_x^T & \left[P(A_p - B_p \tilde{K}_e C_p) + (A_p - B_p \tilde{K}_e C_p)^T P \right] e_x \\ & - 2e_x^T P B_p (S^T S)^{-1} B_p^T P e_x r^T T_p r \end{aligned} \quad (13)$$

Cette dérivée consiste en deux termes. Si T_p est une matrice positive semi-définie (la troisième condition suffisante), alors le deuxième terme est négatif semi-défini en e_x^T . La première condition suffisante implique que le premier terme quadratique est négatif défini en e_x^T . Ce qui implique que la dérivée de V est négative définie en e_x^T , c'est-à-dire que la sortie du système tend asymptotiquement vers la sortie du modèle de référence. De même pour l'état augmenté $[e_x^T, K_I(t)]$ ainsi les gains d'adaptation sont bornés.