

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
جامعة فرحات عباس سطيف  
UNIVERSITE FERHAT ABBAS — SETIF  
UFAS (ALGERIE)

## **Mémoire de Magister**

présenté au département d'Electrotechnique  
Faculté des Sciences de l'Ingénieur  
pour obtenir le diplôme de

### **Magister en Automatique**

Par

***BOURAHALA Fayçal***

Thème

***Relâchement des conditions de stabilité des  
systèmes flous de Takagi-Sugeno : Approche LMI***

*Soutenu le 01/06/2008 devant la commission d'examen composée de :*

<i>LAMAMRA Athmane</i>	<i>M. C. à l'université Ferhat ABBAS de Sétif</i>	<i>Président</i>
<i>KHABER Farid</i>	<i>M. C. à l'université Ferhat ABBAS de Sétif</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>Abdelaziz Mourad</i>	<i>M. C. à l'université Ferhat ABBAS de Sétif</i>	<i>Examineur</i>
<i>SAIT Belkacem</i>	<i>M. C. à l'université Ferhat ABBAS de Sétif</i>	<i>Examineur</i>

# *Dédicace*

*Je dédier ce modeste travail :*

*A* *Ma source éternelle d'inspiration, de motivation et de bénédiction ... Ma mère*  
*Mon maître de passion, de patience et de persévérance ... Mon père*  
*Mes soeurs et mes frères*  
*Mes amis*  
*Ma promotion*

*F. Bourahala*

# *Remerciements*

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au laboratoire QUERE du département d'électrotechnique à l'université Ferhat Abbas de Sétif, Algérie.

Mes remerciements vont tout d'abord à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il m'a donné durant toutes ces années d'études.

Je tiens aussi à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à monsieur **KHABER Farid**, docteur à l'université Ferhat Abbas et directeur de mon mémoire, pour m'avoir encadré, initié à la recherche et pour sa patience et soutien permanent. J'ai tout particulièrement apprécié ses encouragements et ses conseils qui m'ont été très précieux et qui m'ont permis de mener à bien mon travail.

Mes profonds remerciements à monsieur **A. LAMAMRA**, docteur à l'université Ferhat Abbas qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens également à remercier vivement monsieur **M. ABDELAZIZ**, docteur à l'université Ferhat Abbas et Monsieur **B. SAIT**, docteur à l'université Ferhat Abbas pour avoir consacré leurs temps précieux à lire et à évaluer ce travail.

Je tiens à remercier aussi le professeur **K. ZEHAR**, directeur du laboratoire QUERE d'avoir accepté de m'accueillir au sein de son laboratoire de recherche.

*F. Bourahala*

# ***SOMMAIRE***

<b>Introduction générale</b> .....	1
 <b>CHAPITRE I: Modèles flous de Takagi-Sugeno et Inégalités Matricielles Linéaires (LMI)</b>	
1.1 Introduction .....	4
1.2 Modèle flou de type Takagi-Sugeno.....	4
1.3 Obtention d'un modèle flou de T-S.....	7
1.3.1 Transformation d'un système non linéaire en un modèle flou de T-S.....	7
1.3.1.1 Conditions d'obtention d'un modèle flou de T-S.....	8
1.4 Analyses convexes et inégalités matricielles linéaires.....	12
1.4.1 Analyses convexes .....	12
1.4.2 Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs).....	14
1.4.2.1 Conversion des inégalités matricielles non linéaires en LMIs.....	15
1.4.2.2 Regroupement des LMIs.....	16
1.4.2.3 Région LMIs.....	17
1.4.2.4 Problèmes classiques LMIs.....	18
1.5 Les régions d'attraction (ROA) et les LMIs faisables.....	19
1.5.1 Les régions d'attraction (ROA) .....	19
1.5.2 Préliminaires sur les LMIs faisables.....	22
1.6 Conclusion.....	25
 <b>CHAPITRE II: Stabilité et stabilisation quadratique des modèles flous de Takagi-Sugeno</b>	
2.1 Introduction.....	26
2.2 Stabilité quadratique.....	27
2.3 Fonctions de Lyapunov usuelles.....	27
2.3.1 Fonction de Lyapunov quadratique.....	27
2.3.2 Fonction affine paramétrique.....	28
2.3.3 Fonction polyquadratique.....	28
2.3.4 Fonctions continues par morceaux.....	28
2.4 Stabilisation quadratique des modèles flous de Takagi-Sugeno.....	30

2.4.1	Loi de commande PDC .....	30
2.4.1.1	Conditions de stabilité du modèle bouclé.....	32
2.4.1.2	Linéarisation des conditions de stabilité.....	34
2.4.2	Taux de décroissance.....	35
2.4.3	Contraintes sur la commande d'entrée.....	37
2.4.4	Contraintes sur la sortie.....	38
2.5	Exemples d'illustrations .....	39
2.5.1	Exemple 2.1: Conception d'un régulateur flou avec un taux de décroissance.....	40
2.5.2	Exemple 2.2 : Taux de décroissance + Contraintes sur l'entrée.....	42
2.5.3	Exemple 2.3 : Contrôleur stable + Contraintes sur l'entrée.....	43
2.5.4	Exemple 2.4:Contrôleur stable+Contraintes sur l'entrée+Contraintes sur la sortie	44
2.6	Stabilisation avec observateur flou .....	46
2.6.1	Conditions de stabilité du modèle bouclé avec observateur.....	49
2.6.1.1	Linéarisation des conditions de stabilité.....	50
2.7	Stabilité du modèle flou de T-S augmenté.....	51
2.7.1	Variables de prémisse mesurables.....	51
2.7.1.1	Propriété de séparation .....	53
2.7.2	Variables de prémisse non mesurables .....	56
2.7.3	Exemple illustratif.....	58
2.8	Conclusion .....	63

## **CHAPITRE III : Relâchement des conditions de stabilité**

3.1	Introduction .....	64
3.2	Conditions de stabilité relâchées des modèles flous de T-S.....	65
3.2.1	Exemple illustratif .....	71
3.3	Les LMIs pour les régulateurs flous.....	73
3.3.1	La stabilité .....	73
3.3.2	Le taux de décroissance.....	75
3.3.3	Contraintes sur la commande d'entrée .....	76
3.3.4	Contraintes sur la sortie.....	76
3.4	Exemples d'illustrations.....	77
3.4.1	Exemple 3.1: Conception d'un régulateur flou de taux de décroissance.....	77
3.4.2	Exemple 3.2 : Taux de décroissance + Contraintes sur l'entrée.....	78

3.4.3 Exemple 3.3 : Contrôleur stable + Contraintes sur l'entrée .....	80
3.4.4 Exemple 3.4:Contrôleur stable+Contraintes sur l'entrée+Contraintes sur la sortie	81
3.5 Les LMIs pour les systèmes augmentés.....	83
3.6 Exemple illustratif.....	85
3.7 La stabilisation adaptative pour les modèles flous de T-S.....	88
3.7.1 Exemple illustratif.....	90
3.8 Analyse de la stabilité globale des modèles flous de T-S.....	93
3.8.1 Exemple illustratif.....	95
3.9 Conclusion.....	98
<b>Conclusion et perspectives.....</b>	<b>100</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>102</b>

## **Introduction générale**

La logique floue qui repose sur la théorie mathématique des ensembles flous a été initiée dans les années soixante par Lotfi Zadeh à l'université de Berkeley. L'intérêt principal de la logique floue est de permettre la représentation et le traitement de connaissances imprécises. Elle est utilisée dans des domaines aussi variés que les systèmes expert, la classification de données, le traitement du signal, la gestion des bases de données, la modélisation ainsi que la commande des systèmes automatiques. La première application de la commande floue a été réalisée par Mamdani en 1974 sur un moteur à vapeur, et la première application industrielle a porté sur la commande d'un four à ciment par logique floue.

Habituellement la logique floue est exprimée par un ensemble de règles linguistiques dites règles floues, elles sont utilisées pour décrire le comportement dynamique d'un système inconnu ou mal défini. De ce point de vu, on distingue deux types principaux de systèmes flous: les systèmes flous à conclusion symbolique (systèmes flous linguistiques ou de Mamdani) et ceux à conclusion fonctionnelle (systèmes flous de Takagi-Sugeno). Dans les deux types, les prémisses des règles sont exprimées symboliquement, seule l'expression des conclusions des règles permet alors de dissocier les deux types de systèmes. Pour les systèmes flous de type T-S la partie conclusion est exprimée sous la forme d'une constante ou de manière générale d'une fonction ou d'une équation différentielle dépendant des variables d'entrées. Les modèles flous de type Takagi-Sugeno, peuvent s'interpréter comme un ensemble de modèles linéaires affines interconnectés par des fonctions non linéaires dépendantes des variables de prémisses. Ces fonctions peuvent être obtenues par différentes méthodes, soit par identification ou par linéarisation autour d'un ensemble de points de fonctionnement, soit directement à partir d'un modèle mathématique non linéaire [Morère 01], [Chad 02]. Cette dernière est la méthode utilisée le long de ce mémoire, dans ce cas les modèles non linéaires peuvent se mettre sous la forme de modèles T-S représentant exactement le modèle non linéaire dans l'espace d'état.

La loi de commande couramment utilisée dans ce type de modèles est le retour d'état linéaire appelée PDC (Parallel Distributed Compensation) [Wang 95], [Tanaka 98]. L'analyse de la stabilité et de la stabilisation de ces modèles dans la plupart des travaux est basée généralement sur la fonction de Lyapunov quadratique qui produit des conditions suffisantes de stabilité [Tanaka 98], [Kim 00], [Wang 96]. Ces conditions peuvent être exprimées sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI). L'intérêt principal de la fonction quadratique

est que la recherche d'une matrice commune et les gains de retour d'état est facile à mettre en œuvre et peut être exprimée comme un problème d'optimisation convexe en terme de LMI résolu efficacement par différentes méthodes. Dans notre travail, la méthode utilisée est celle du point intérieur [Boyd 94]. Cependant, les conditions de stabilité obtenues étant seulement suffisantes et assez conservatives car elles exigent la stabilité de tous les modèles locaux (sous modèles). Pour réduire ce conservatisme ou relâcher ces conditions de stabilité, plusieurs travaux traitant la relaxation LMI ont été publiés ces dernières années [Tanaka 98], [Tanaka 01], [Kim 00], [Teixeira 03], [Chun 06]. Notre travail se focalise sur le relâchement des conditions de stabilité des systèmes flous de T-S exprimées sous forme d'LMI. On propose deux types de relâchement et on fait la comparaison avec les conditions classiques au niveau de la faisabilité de LMI à travers des exemples illustratifs simulés sous l'environnement MATLAB.

Ce mémoire, décomposé en trois chapitres, est organisé de la manière suivante:

Le chapitre 1 est consacré aux notions et aux outils utilisés le long de ce mémoire. Il présente les modèles flous de T-S. Il présente également l'outil numérique LMI et différentes propriétés matricielles et problèmes classiques utilisées dans la suite de ce mémoire. La notion de la région de l'attraction (ROA) et de la faisabilité est également présentée.

Dans le chapitre 2 on présente l'étude de la stabilité et de la stabilisation des modèles flous de T-S. Les conditions de stabilité et/ou stabilisation sont obtenues à l'aide de la fonction de Lyapunov de type quadratique et s'expriment sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI). La loi de commande utilisée dans ce cas est du type PDC (Parallel distributed Compensation). Dans ce cadre, nous représentons des conditions suffisantes satisfaisant le taux de décroissance, les contraintes sur la commande et sur la sortie. Enfin nous représentons quelques résultats obtenus en utilisant un observateur flou pour estimer les états non observables. Les exemples présentés dans ce chapitre montrent l'efficacité de l'estimation d'état d'une part, et l'efficacité de l'approche LMI d'une autre part.

Dans le troisième chapitre, nous présentons de nouvelles conditions de stabilité permettant de réduire le conservatisme des résultats précédents en utilisant deux types de relâchement. Dans le premier type, on suppose que le nombre de règle actives à chaque instant est inférieure au nombre total de règles. Dans le deuxième, on introduit des variables supplémentaires permettant de regrouper les intersections entre les modèles locaux dans une matrice unique. Des exemples de simulation permettent d'une part d'illustrer l'efficacité des

## *Introduction générale*

---

---

deux types de relâchement, et d'autre part de voir la comparaison avec les conditions classiques au niveau de la faisabilité des LMI. Un autre point développé dans ce chapitre, est de proposer un exemple de la stabilisation adaptative, dans le cas où les incertitudes existent sur le système. De nouvelles conditions LMIs de la stabilité globale sont présentées. Puis, des exemples illustratifs permettent de montrer que les conditions obtenues sont moins conservatives que leurs équivalentes classiques.

Nous terminons par une conclusion qui rassemble les travaux réalisés dans le cadre de ce mémoire et perspectives envisagées.

## **CHAPITRE I**

# **Modèles flous de Takagi-Sugeno et Inégalités Matricielles Linéaires (LMI)**

### **1.1. Introduction**

Ce chapitre a pour objet de présenter les modèles flous de type Takagi-Sugeno continus et discrets [T-S 85]. Dans la première partie, on donne leurs définitions et nous présentons les différentes techniques de les obtenir à partir d'un modèle non linéaire avec des exemples illustratifs sur la méthode la plus utilisée pour obtenir ces modèles. La deuxième partie présente l'outil LMI et les différentes techniques d'analyse et de réduction utilisées dans ce travail.

### **1.2. Modèle flou de type Takagi-Sugeno**

Le modèle flou de Takagi - Sugeno est décrit par un ensemble de règles floues SI-ALORS, représentant des relations locales d'entrées/sorties linéaires en différents points de fonctionnement d'un système [T-S 85]. Ces représentations locales, appelées "sous-modèles", permettent d'exprimer la dynamique d'un système autour de points de fonctionnement particuliers de l'espace d'état.

La particularité d'un modèle flou de T-S est que la logique floue est seulement utilisée dans la partie prémisses des règles. La partie conclusion utilise des variables numériques plutôt que des variables linguistiques et s'exprime sous la forme d'une constante ou de manière générale

d'une fonction ou d'une équation différentielle dépendant des variables d'entrées.

Les modèles flous de T-S sont représentés dans l'espace d'état sous la forme continue (MFC) et discret (MFD):

**Modèle flou continu (MFC)**

**Règle  $i$  du procédé :**

$$\text{SI } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et ... et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \quad \text{ALORS} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.1)$$

où  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  représente le vecteur d'état du modèle,  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  le vecteur des entrées et  $y(t) \in \mathfrak{R}^q$  le vecteur des sorties.  $A_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) la matrice d'état,  $B_i \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  la matrice des entrées et  $C_i \in \mathfrak{R}^{q \times n}$  la matrice des sorties.  $z(t) \in \mathfrak{R}^p$  ( $p = 1, 2, \dots, r$ ) est appelé vecteur des prémisses. Ce dernier ne possède pas de caractéristiques particulières et peut donc être composé de variables d'état ou de fonctions de variables d'état.

Chaque équation de sortie est représentée sous la forme d'état  $A_i x(t) + B_i u(t)$  appelée un "sous-modèle". A chaque règle  $R^i$  est attribué un poids  $w_i(z(t))$  qui dépend du degré d'appartenance de  $z_j(t)$  aux sous ensembles flous  $F_j^i$ , et du choix de la modélisation de l'opérateur 'ET' reliant les prémisses d'où:

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_j^i(z(t)) \quad (1.2)$$

$F_i^j(z(t))$  est la valeur de la fonction d'appartenance  $z_j$  dans l'ensemble flou  $F_j^i$  et  $\forall t \geq 0$  :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0 \\ w_i(z(t)) \geq 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.3)$$

Les sorties finales du modèle flou de T-S sont décrites de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \\ y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \end{cases} \quad (1.4)$$

En posant

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (1.5)$$

où

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \\ h_i(z(t)) \geq 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.6)$$

Donc l'équation (1.4) peut être réécrite comme suite :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

De la même manière, le modèle flou discret est défini comme suit :

**Modèle flou discret (MFD)**

**Règle  $i$  du procédé :**

SI  $z_1(k)$  est  $F_1^i$  et...et  $z_p(k)$  est  $F_p^i$  ALORS  $\begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) \\ y(k) = C_i x(k) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.8)$

Les sorties finales du modèle flou sont définies par :

$$\begin{cases} x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(k)) \{A_i x(k) + B_i u(k)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(k))} \\ y(k) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(k)) C_i x(k)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(k))} \end{cases} \quad (1.9)$$

En posant

$$h_i(z(k)) = \frac{w_i(z(k))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(k))} \quad (1.10)$$

L'équation (1.9) peut être réécrite comme suite :

$$\begin{cases} x(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(k)) \{A_i x(k) + B_i u(k)\} \\ y(k) = \sum_{i=1}^r h_i(z(k)) C_i x(k) \end{cases} \quad (1.11)$$

Généralement, il est plus difficile de justifier le mot "flou" pour ce type de modèles. Effectivement si on peut considérer que l'approche historique consistait à utiliser des connaissances a priori sur la commande d'un système pour les intégrer dans un régulateur, dans le cas des modèles flous de T-S on ne retrouve pas cette philosophie. On peut simplement dire, que la représentation sous la forme d'un modèle flou de T-S est une "astuce" permettant une réécriture du modèle non linéaire en "reportant" les non linéarités dans la partie prémisses des règles [Morère 01].

### 1.3. Obtention d'un modèle flou de T-S

Les modèles flous de T-S peuvent être obtenus de trois façons:

- Par identification, à partir des signaux d'entrées/sorties on peut identifier les paramètres du modèle local correspondant aux différents points de fonctionnement [Gasso 00].
- La seconde méthode consiste à linéariser le modèle autour d'un ensemble de points de fonctionnement [Tanaka 01].
- La troisième méthode permettant de passer d'un modèle non linéaire affine en la commande à un modèle flou de T-S. Elle permet d'obtenir un représentant de type T-S d'un modèle non linéaire (Il ne s'agit pas d'une linéarisation autour de points de fonctionnement) [Thier 01], [Morère 01]. Cette troisième approche qui est utilisée dans la suite de ce mémoire. Notons aussi que pour un système donné, l'obtention d'un modèle de T-S n'est pas unique.

#### 1.3.1. Transformation d'un système non linéaire en un modèle flou de T-S

Cette méthode permettant de passer d'un modèle non linéaire affine en la commande, de la forme (1.12) dans le cas continu et (1.13) dans le cas discret, à un modèle flou de T-S est appelée aussi approche par secteur non linéaire.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + B(x(t))u(t) \\ y(t) = g(x(t)) + D(x(t))u(t) \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) + B(x(k))u(k) \\ y(k) = g(x(k)) + D(x(k))u(k) \end{cases} \quad (1.13)$$

où  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $x(k+1) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathfrak{R}^q$ ,  $y(k) \in \mathfrak{R}^q$ ,  $f(x(t)) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $f(x(k)) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $g(x(t)) \in \mathfrak{R}^q$ ,  $g(x(k)) \in \mathfrak{R}^q$ ,  $B(x(t)) \in \mathfrak{R}^{n.m}$ ,  $B(x(k)) \in \mathfrak{R}^{n.m}$ ,  $D(x(t)) \in \mathfrak{R}^{q.m}$ ,  $D(x(k)) \in \mathfrak{R}^{q.m}$ .

Elle permet d'obtenir un représentant de type T-S d'un modèle non linéaire. L'avantage de

cette méthode et de réduire le nombre de modèles locaux par rapport à la méthode de linéarisation. En effet, le nombre de contraintes matricielles se trouve généralement réduit par cette méthode. Dans toute la suite, seul le cas continu est pris en compte, le cas discret se traitant de la même manière.

**1.3.1.1. Conditions d’obtention d’un modèle flou de T-S**

Le cas le plus utilisé est la transformation d’un modèle non linéaire à un modèle flou de T-S sur des fonctions à une variable [Tanaka 98]. Supposons dans la suite que le système se stabilise autour d’un point d’équilibre 0 (zéro).

**Lemme 1.1 :** [Morère 01] Si  $\forall x \in [-a, b]$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction bornée sur  $[-a, b]$ , alors il existe deux fonctions  $h_1(x), \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $h_2(x), \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :  $h_1(x) + h_2(x) = 1, h_1(x) \geq 0, h_2(x) \geq 0$  et;

$$f(x) = h_1(x)\alpha + h_2(x)\beta \tag{1.14}$$

**Preuve:** On considère la fonction  $f(x)$  bornée telle que  $\beta \leq f(x(t)) \leq \alpha$ , on peut toujours écrire:

$$f(x) = h_1(x)\alpha + h_2(x)\beta$$

avec

$$h_1(x) = \frac{f(x) - \beta}{\alpha - \beta}, \quad h_2(x) = \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - \beta} \tag{1.15}$$

$$\alpha = \max_{x \in [-a, b]} f(x) \quad \text{et} \quad \beta = \min_{x \in [-a, b]} f(x) \tag{1.16}$$

**Exemple 1.1 :** Considérons le modèle non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = 2x(t)\sin(x(t))$$

Pour traiter la non linéarité, il faut prendre en compte la fonction non linéaire  $f(x) = \sin(x)$  qui est bornée pour  $x \in [-x_0, x_0]$ ,  $x_0 > \pi / 2$ .

Selon (1.14) on peut écrire la fonction  $\sin(x)$  comme suit:

$$\sin(x) = \frac{\sin(x) + 1}{2} \times 1 + \frac{1 - \sin(x)}{2} \times (-1) \tag{1.17}$$

On obtient donc le modèle flou de T-S suivant :

SI  $x$  est  $h_1(x)$  ALORS  $\dot{x}(t) = 2x(t) \times 1$

SI  $x$  est  $h_2(x)$  ALORS  $\dot{x}(t) = 2x(t) \times (-1)$

où

$$h_1(x) = \frac{\sin(x)+1}{2}, \quad h_2(x) = \frac{1-\sin(x)}{2}, \quad \alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta = -1 \quad (1.18)$$

Pour éviter d’avoir des modèles ayant des termes constants, le traitement des non linéarités peut se faire suivant la manière générale suivante.

Le modèle non linéaire doit être transformé pour aboutir à :

$$\dot{x}(t) = L(x(t))x(t) + g(x(t))u(t) \quad (1.19)$$

Pour  $g(x(t))$ , il suffit de considérer les non linéarités bornées, pour  $L(x(t))$ , cela revient à considérer les fonctions de type  $f_i(x_j)/x_j$ , qui est évidemment bornée, donc il faut obligatoirement avoir  $\lim_{x_j \rightarrow 0} f_i(x_j)/x_j < \infty$ .

**Exemple 1.2 :** Considérons le modèle non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = \cos(x)$$

Pour traiter cette non linéarité, il faut prendre en compte la fonction non linéaire

$f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$  qui est bornée pour  $x \in [-x_0 \ x_0]$ ,  $x_0 \leq \pi$ , selon (1.14) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x)}{x} &= \frac{\frac{\cos(x)}{x} - \frac{\cos(x_0)}{x_0}}{1 - \frac{\cos(x_0)}{x_0}} \times 1 + \frac{1 - \frac{\cos(x)}{x}}{1 - \frac{\cos(x_0)}{x_0}} \times \frac{\cos(x_0)}{x_0} \\ &= \frac{x_0 \cos(x) - x \cos(x_0)}{x(x_0 - \cos(x_0))} \times 1 + \frac{x_0(x - \cos(x))}{x(x_0 - \cos(x_0))} \times \frac{\cos(x_0)}{x_0} \end{aligned} \quad (1.20)$$

On obtient donc le modèle flou de T-S suivant :

SI  $x$  est  $h_1(x)$  ALORS  $\dot{x}(t) = x(t) \times 1$

SI  $x$  est  $h_2(x)$  ALORS  $\dot{x}(t) = x(t) \times \frac{\cos(x_0)}{x_0}$

Notons que la transformation du modèle non linéaire conduit à un certain nombre de modèles locaux LTI (Linéaire à Temps Invariant) dépendant du nombre de termes non linéaires constants contenus dans le modèle.

En général, le nombre de règles obtenu est  $2^p$ , avec  $p$  représente le nombre de transformations effectuées. Il est possible d'obtenir des modèles ayant un nombre de règles minimal [Morère 01].

**Exemple 1.3 :** Considérons le modèle non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = 3 \sin(x(t)) - 2x(t)^3 + x \cos(x(t))$$

Premièrement on considère chaque non linéarité séparément, ce qui revient à devoir transformer les termes non linéaires suivants :  $3 \frac{\sin(x(t))}{x}$ ,  $2x(t)^2$  et  $\cos(x(t))$  et qui aboutit à un modèle flou de T-S à 8 règles. On peut très facilement aboutir à un modèle flou de T-S à 2 règles, cela en considérant directement la fonction non linéaire suivante :

$$f(x) = 3 \frac{\sin(x(t))}{x(t)} - 2x(t)^2 + \cos(x(t))$$

qui est évidemment bornée par exemple pour  $x \in [-\pi \pi]$ . On trouve  $f_{\min} = -1 - 2\pi^2$  et  $f_{\max} = 4$ , ce qui permet d'obtenir le modèle flou de T-S à deux règles suivant :

SI  $x$  est  $h_1(x)$  ALORS  $\dot{x}(t) = x(t) \times 4$   
 SI  $x$  est  $h_2(x)$  ALORS  $\dot{x}(t) = x(t) \times (-1 - 2\pi^2)$

Notons que les exemples précédents n'utilisent qu'une seule variable d'état, avec plusieurs variables d'état, le problème est encore plus complexe.

On propose maintenant un traitement par équation d'état. On prend en compte chaque équation différentielle correspondant à une variable d'état, c'est à dire pour la  $i^{\text{ème}}$  variable d'état on peut écrire :

$\dot{x}_i(t) = f_i(x) = \sum_{j=1}^n f_i^j(x) x_j$ , où  $f_i^j(x)$  est une fonction bornée. Dans ce cas, on peut obtenir un modèle flou de T-S représentant exactement le modèle non linéaire avec  $2^{n^2}$  règles.

**Preuve:** Considérons  $z(t) = [z_1^1, \dots, z_i^j, \dots, z_n^n]^T$  avec  $z_i^j = f_i^j(x)$  On peut écrire :

$$z_i^j = h_{i1}^j(z_i^j) \times z_{\max}^j + h_{i2}^j(z_i^j) \times z_{\min}^j = \frac{z_i^j - z_{\min}^j}{z_{\max}^j - z_{\min}^j} \times z_{\max}^j + \frac{z_{\max}^j - z_i^j}{z_{\max}^j - z_{\min}^j} \times z_{\min}^j \quad (1.21)$$

On obtient donc au maximum  $n^2$  variables de prémisses, ce qui donne au plus  $2^{n^2}$  règles.

**Exemple 1.4 :** Considérons le modèle non linéaire affine en la commande suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \sin(x_1) + u(t) \\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2^2 - 3x_2 + x_2^2u(t) \\ y(t) &= x_2^2x_1 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Ce modèle peut être représenté comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \sin(x_1) \\ 2x_2^2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ x_2^2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} x_2^2 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

Les deux termes non linéaires sont:  $\sin(x_1)$  et  $x_2^2$  qui sont bornés pour  $x_1 > \frac{\pi}{2}$  et  $x_2 \in [-a, a]$  et qui aboutit à un modèle flou de T-S à 4 règles. On peut transformer les termes non linéaires suivant le lemme 1.1 comme suit :

$$\sin(x_1) = \frac{\sin(x_1) + 1}{2} \times 1 + \frac{1 - \sin(x_1)}{2} \times (-1) \quad (1.23)$$

$$x_2^2 = \frac{x_2^2}{a^2} \times a^2 + \frac{a^2 - x_2^2}{a^2} \times 0 \quad (1.24)$$

avec

$$h_1^1 = \frac{1}{2}(\sin(x) + 1), \quad h_1^2 = \frac{1}{2}(1 - \sin(x)) \quad (1.25)$$

$$h_2^1 = \frac{x_2^2}{a^2}, \quad h_2^2 = 1 - \frac{x_2^2}{a^2} \quad (1.26)$$

Ainsi, on aboutit à 4 modèles locaux, obtenus à partir des 4 combinaisons possibles des bornes des termes non linéaires  $\sin(x_1)$  et  $x_2^2$ , décrits par les matrices suivantes :

$$\begin{cases} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2a^2 & -3 \end{bmatrix} \\ B_1 = [1 \quad a^2]^T \\ C_1 = [a^2 \quad 0] \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \\ B_2 = [1 \quad 0]^T \\ C_2 = [0 \quad 0] \end{cases} \quad (1.27)$$

$$\begin{cases} A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2a^2 & -3 \end{bmatrix} \\ B_3 = B_1 \\ C_3 = C_1 \end{cases} \quad \begin{cases} A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \\ B_4 = B_2 \\ C_4 = C_2 \end{cases}$$

Enfin, le système non linéaire (1.22) peut être représenté par le modèle flou de T-S suivant:

**Règle 01:**

$$\text{SI } x_1(t) \text{ est } h_1^1 \text{ et } x_2(t) \text{ est } h_2^1 \quad \text{ALORS} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t) \\ y(t) = C_1x(t) \end{cases}$$

**Règle 02:**

$$\text{SI } x_1(t) \text{ est } h_1^1 \text{ et } x_2(t) \text{ est } h_2^2 \quad \text{ALORS} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t) \\ y(t) = C_2x(t) \end{cases}$$

**Règle 03:**

$$\text{SI } x_1(t) \text{ est } h_1^2 \text{ et } x_2(t) \text{ est } h_2^1 \quad \text{ALORS} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t) \\ y(t) = C_3x(t) \end{cases}$$

**Règle 04:**

$$\text{SI } x_1(t) \text{ est } h_1^2 \text{ et } x_2(t) \text{ est } h_2^2 \quad \text{ALORS} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_4x(t) + B_4u(t) \\ y(t) = C_4x(t) \end{cases}$$

En prenant l'opérateur produit comme opérateur de conjonction, les fonctions d'activation, au nombre de 4, sont obtenues à partir des produits :  $h_1^{1 \text{ ou } 2} \times h_2^{1 \text{ ou } 2}$

$$\begin{aligned} \mu_1(x) &= h_1^1(x_1) \times h_2^1(x_2) & \mu_2(x) &= h_1^1(x_1) \times h_2^2(x_2) \\ \mu_3(x) &= h_1^2(x_1) \times h_2^1(x_2) & \mu_4(x) &= h_1^2(x_1) \times h_2^2(x_2) \end{aligned}$$

Le modèle flou de T-S obtenu représente exactement le modèle non linéaire (1.22) où  $x_1 > \frac{\pi}{2}$  et  $x_2 \in [-a, a]$ .

## 1.4. Analyses convexes et inégalités matricielles linéaires

### 1.4.1. Analyses convexes

Un grand nombre de problème concernant les systèmes incertains peuvent se résoudre par l'intermédiaire de problèmes convexe d'un type particulier, les programmes semidéfinis (SDP) [Boyd 94]. Ils sont aussi connus sous le nom de LMI (Linear Matrix Inequality) en automatique. Les problèmes d'analyse et de synthèse dont il est question sont formulés, lorsque cela est possible, en termes d'optimisation convexe [Chad 02].

La convexité d'un problème d'optimisation a un double avantage :

- Les temps de calcul pour trouver une solution sont raisonnables
- Il n'existe pas de minimum local de la fonction coût à optimiser; le résultat obtenu correspond à un minimum global unique.

La convexité est une notion à la fois ensembliste et fonctionnelle, voici les définitions dans chacun des cas [Boyd 94].

**Définition 1.1 : Ensemble convexe**

Soit un ensemble  $E \subset \mathfrak{R}^n$ ,  $E$  est un ensemble convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0 \ 1] \subset \mathfrak{R}, \quad \forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in E \quad (1.28)$$

**Définition 1.2 : Fonction convexe**

Soit une fonction  $f : E \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $E$  un ensemble convexe, alors  $f$  est une fonction convexe si et seulement si

$$\forall \lambda \in [0 \ 1] \subset \mathfrak{R}, \quad \forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (1.29)$$

**Définition 1.3 : Fonction quasi convexe**

Une fonction  $f : S \rightarrow \mathfrak{R}$  est dite quasi convexe si le sous ensemble  $S_\lambda$  est convexe pour tout  $\lambda \in R$ , tel que

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max(f(x_1), f(x_2)) \quad (1.30)$$

et ceci,  $\forall \lambda \in [0 \ 1]$  et pour tout  $x_1, x_2 \in S$

**Définition 1.4 : Combinaison convexe**

Soit  $S$  un sous ensemble d'un espace vectoriel et soient  $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$

Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  est un ensemble réel non négatif avec  $\sum_1^n \lambda_i = 1$  alors  $\sum_1^n \lambda_i x_i$  est appelée une combinaison convexe de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Supposons qu'on prenne  $n$  points  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dans  $S$ ; alors il est facile de voir que l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  est lui-même convexe, c'est à dire  $C = \{x / x \text{ est une combinaison convexe de } x_1, \dots, x_n\}$ .

**Définition 1.5 : Points intérieures**

Soit  $S$  un sous ensemble d'un espace normé  $\Pi$ , le point  $x \in S$  est appelé un point intérieur de  $S$  s'il existe un  $\varepsilon > 0$ , tel que tous les points  $y \in \Pi$  avec  $\|x - y\| < \varepsilon$  aussi appartiennent à  $S$ .

L'intérieur de  $S$  est la collection de tous les points intérieurs de  $S$ .

**Définition 1.6 : Enveloppe convexe**

L'enveloppe convexe  $Co(S)$  d'un ensemble convexe  $S$  est l'intersection de tous les ensembles convexes contenant  $S$ .

**Définition 1.7 : Minimum local et global**

Une fonction  $f : S \rightarrow R$  possède un minimum local en  $x_0 \in S$  s'il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ pour tout } x \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

L'intervalle  $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$  est appelé voisinage de  $x_0$ .

$x_0$  est minimum local de  $f$  si  $f(x_0) \leq f(x)$  pour tout  $x \in \mathfrak{R}$ .

Un problème d'optimisation convexe s'énonce donc comme suit:  $\min_{x \in E} (f(x))$ , où  $E$  est un ensemble convexe et  $f$  est une fonction convexe. De même, une contrainte  $f_i(x) \leq 0$  est dite convexe si la fonction  $f_i$  est convexe. Un des avantages de la convexité est que toute optimisation d'une fonction convexe définie sur un ensemble convexe peut se traiter localement car toute solution locale devient globale.

**1.4.2. Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs)**

Depuis quelques années, de nombreux travaux ayant pour principal objectif de réduire une grande variété de problèmes de synthèse ou d'analyse à des problèmes d'optimisation convexe impliquant des LMI a vu le jour. Parallèlement, des méthodes efficaces de résolution des problèmes d'optimisation convexes ont été développées. Ces méthodes, appelées méthodes de point-intérieur, développées initialement par Karmarkar [Karm 84] pour la programmation linéaire, furent étendues ensuite par Nesterov et Nemirovskii [Nest 94] au cas de la programmation convexe dans l'espace des matrices définies positives.

L'approche d'inégalités matricielles, et en particulier l'approche LMI sont de plus en plus utilisées en automatique. Parmi les raisons de son succès, on peut citer :

- L'existence de méthodes de résolution numérique efficaces (coût polynomial)
- La possibilité de reformuler de nombreux problèmes d'analyse : (stabilité, certaines performances, etc.) en termes de LMI
- La capacité de traiter des problèmes à données incertaines en commande robuste, qui a joué pour beaucoup dans l'essor de cette approche ces dernières années.

Dans cette partie, différents lemmes de l'approche LMI sont présentés. Ils permettent de manipuler les inégalités matricielles afin de les rendre linéaires en les inconnues quand cela est possible.

**Définition 1.8 :**

Une inégalité matricielle linéaire (LMI) est une expression du type.

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (1.31)$$

où  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathfrak{R}^m$  est un vecteur de valeurs inconnues.  $F_0$  et  $F_i = F_i^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$   $i = 1, 2, \dots, m$  sont des matrices symétriques et l'inégalité " $> 0$ " signifie "défini positif", c'est à dire,  $u^T F(x) u > 0$  pour tout  $u \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u \neq 0$ . De manière équivalente, la valeur propre la plus petite de  $F(x)$  est positive.

**Remarque 1 :** L'ensemble  $E$  défini par  $E = \{x \in \mathfrak{R} : F(x) > 0\}$  est convexe, ce qui nous amène à considérer une contrainte LMI comme une contrainte convexe.

**Remarque 2 :** On peut avoir une égalité matricielle linéaire non stricte dénotée par le symbole " $\geq$ ".

**Remarque 3 :** L'expression  $F(x) < 0$  est un cas spécial de (1.31), qui peut être réécrit comme  $-F(x) > 0$ .

**1.4.2.1. Conversion des inégalités matricielles non linéaires en LMIs**

Les lemmes suivants montrent que certains types d'inégalités matricielles non linéaires peuvent être converties en LMIs qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire, citons :

**Lemme 2.1 (Compliment de Schur) :** Soient les matrices  $S(x) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  et les matrices symétriques  $Q(x) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  et  $R(x) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , les inégalités suivantes sont équivalentes :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (1.32)$$

$$R(x) > 0; \quad Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0 \quad (1.33)$$

$$Q(x) > 0; \quad R(x) - S(x)^T Q^{-1}(x)S(x) > 0 \quad (1.34)$$

**Preuve :** Soient

$$M_1 = \begin{bmatrix} I & -Q^{-1}S \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}S^T & I \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

La multiplication de (1.32) à gauche par  $M_1^T$  et à droite par  $M_1$ , donne :

$$\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R - S^T Q^{-1} S \end{bmatrix} > 0 \quad (1.36)$$

de la même manière, la multiplication de (1.32) à gauche par  $M_2^T$  et à droite par  $M_2$ , donne :

$$\begin{bmatrix} Q - S^T R^{-1} S & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} > 0 \quad (1.37)$$

**Lemme 3.1 (Contraintes quadratiques convexes) :** La contrainte sur la norme  $\|Z(x)\| < 1$ , avec  $Z(x) \in \mathfrak{R}^{p \times q}$  est représentée par :

$$\begin{bmatrix} I_p & Z(x) \\ Z^T(x) & I_q \end{bmatrix} > 0 \quad (1.38)$$

**Lemme 4.1 :** Soient  $A, G, L, P$  et  $Q$  des matrices de tailles appropriées. Les inégalités suivantes sont équivalentes [Krus 06]:

$$A^T P A - Q < 0, P > 0 \quad (1.39)$$

$$\begin{bmatrix} -Q & A^T \\ A & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (1.40)$$

$$\exists G; \begin{bmatrix} -Q & A^T G \\ G^T A & -G - G^T + P \end{bmatrix} < 0, P > 0 \quad (1.41)$$

$$\exists G, L; \begin{bmatrix} -Q + A^T L^T + L A & -L + A^T G \\ -L^T + G^T A & -G - G^T + D \end{bmatrix} < 0, P > 0 \quad (1.42)$$

#### 1.4.2.2. Regroupement des LMIs

Les LMIs multiples  $F_1(x) > 0, F_2(x) > 0, \dots, F_p(x) > 0$  peuvent être exprimées comme une simple LMI comme suit:

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & F_p(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (1.43)$$

On remarque que la LMI (1.43) est symétrique  $\forall x$ , de plus l'ensemble des valeurs propres de  $F(x)$  est simplement l'union des valeurs propres de  $F_1(x), F_2(x), \dots, F_p(x)$ , et n'importe quel

$x$  satisfait  $F(x) > 0$  satisfait également le système LMI (1.31) et vice-versa. En conclusion, les contraintes LMI multiples peuvent toujours être converties en une LMI simple.

**1.4.2.3. Régions LMIs**

**Définitions 1.9 :** [Chilali 96] Une région  $S$  du plan complexe est appelée une région LMI s'il existe une matrice symétrique  $M \in \mathfrak{R}^{m,m}$  et une matrice  $N \in \mathfrak{R}^{m,m}$  telles que :

$$S = \{z \in \mathbb{C} : f_s(z) < 0\} \tag{1.44}$$

avec  $f_s(z) = M + zN + z^*N^T$ . La notation  $z^*$  désigne le conjugué de  $z$ .  $f_s(z)$  est appelée la fonction caractéristique de  $S$ .

En d'autres termes, une région LMI est une région du plan complexe qui est caractérisée par une LMI en fonction de  $z$  et  $z^*$ , ou de  $a = \text{Re}(z)$  et  $b = \text{Im}(z)$ . Les régions LMI sont donc des ensembles convexes

**Exemples 1.5:** Supposons que  $a = \text{Re}(z)$  et  $b = \text{Im}(z)$ , on obtient donc

$$a = \frac{z + z^*}{2} \text{ et } b = \frac{z - z^*}{2j} \tag{1.45}$$

Le demi-plan gauche pouvant être caractérisé par  $a < 0$ , donc la fonction caractéristique du demi-plan gauche du plan complexe est comme suit:

$$f_s(z) = z + z^* \tag{1.46}$$

Considérons les trois régions du demi-plan complexe gauche illustrées sur la figure suivante.

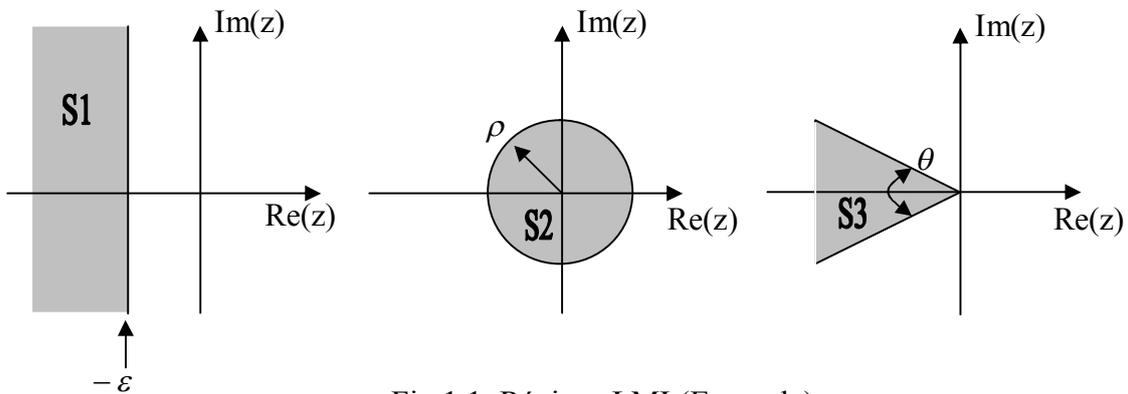


Fig.1.1. Régions LMI (Exemple)

La région  $S_1$  du plan complexe,  $a < -\epsilon$  est une région LMI caractérisée par la fonction  $f_{S1}(z)$  suivante :

$$f_{S1}(z) = z^* + z + 2\epsilon \tag{1.47}$$

Le disque centre à l'origine  $S_2$  du plan complexe est une région caractérisée par la relation suivante :

$$z^*z - \rho^2 < 0 \quad (1.48)$$

En utilisant le complément de Schur on obtient:

$$f_{S_2}(z) = \begin{bmatrix} -\rho^2 & z \\ z^* & -1 \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

La région  $S_3$ ,  $a \tan(z) < -|b|$ , du plan complexe est une région LMI caractérisée par la fonction  $f_{S_3}(z)$  suivante (en utilisant le complément de Schur) :

$$f_{S_3}(z) = \begin{bmatrix} \sin \theta(z + z^*) & \cos \theta(z - z^*) \\ \cos \theta(z - z^*) & \sin \theta(z + z^*) \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

#### 1.4.2.4. Problèmes classiques LMI

Les trois problèmes d'optimisation convexe les plus utilisés sous forme de LMI sont :

- **Problème de réalisabilité (Faisabilité) :** Il s'agit de trouver un vecteur  $S$  tel que la contrainte convexe  $F(x) > 0$  est satisfaite. Ce problème peut être résolu en cherchant le vecteur  $x$  minimisant le scalaire  $t$  tel que :

$$-F(x) < t \times I \quad (1.51)$$

Si la valeur minimale de  $t$  est négative, le problème est réalisable (faisable).

- **Problème de valeurs propres (EVP, Eigenvalue Problems) :** Il s'agit de minimiser la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique sous une contrainte de type LMI :

$$\begin{cases} \text{minimiser } \lambda \\ \text{sous les contraintes} \end{cases} \begin{cases} \lambda I - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \quad (1.52)$$

- **Problème de valeurs propres généralisées (GEVP, Generalized Eigenvalue Problems) :** Il s'agit de minimiser la plus grande valeur propre généralisée d'une paire matrices, par rapport à une contrainte LMI :

$$\begin{cases} \text{minimiser } \lambda \\ \text{sous les contraintes} \end{cases} \begin{cases} \lambda B(x) - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ C(x) > 0 \end{cases} \quad (1.53)$$

Ces problèmes d'optimisation convexe peuvent alors être résolus par différents types de méthodes grâce aux outils disponibles comme le "LMI control Toolbox" de MATLAB [Gahi 95] ou encore la résolution des SDP par le logiciel Scilab. Il existe aussi :

- Méthode des plans sécants
- Méthode de l'ellipsoïde
- Méthode du type simplexe
- Méthode des points intérieurs

## 1.5. Les régions d'attraction (ROA) et les LMIs faisables

Dans cette section, on présente un exemple pour expliquer la dépendance de la stabilité des systèmes flous de T-S sur la faisabilité des LMIs et sur les fonctions d'appartenance aussi. Nous soulignons particulièrement les points suivants :

- La région de l'attraction (ROA)
- La région de l'espace d'état avec LMIs faisables

### 1.5.1. Les régions d'attraction (ROA)

D'abord, on établit un rapport entre le polynôme caractéristique d'intervalle stable et la condition nécessaire d'un ensemble LMIs faisables en appliquant la méthode de Lyapunov sur une enveloppe convexe de sous-systèmes flous. Selon le théorème de Kharitonov, si un des quatre polynômes particulièrement construits pour le polynôme caractéristique du système ne peut pas satisfaire la propriété stricte de Hurwitz, alors les LMIs du modèle flou de T-S doivent être infaisables [Kuang 06].

Afin de stabiliser le système, nous choisissons un univers approprié du discours pour avoir le polynôme caractéristique Hurwitz, puis on résout un ensemble des LMIs pour trouver les gains du contrôleur.

**Exemple 1.6:** Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_1 x_2 - 2x_2 \end{aligned} \quad (1.54)$$

Supposons que  $x_1$  et  $x_2$  évoluent dans les régions  $[d_1 D_1]$  et  $[d_2 D_2]$  respectivement. En conséquence, le système (1.54) peut être exactement représenté par l'un ou l'autre des deux modèles flous de T-S suivants:

**Modèle A**

**Règle 1** SI  $x_1(t)$  est  $F_1^1$  ALORS  $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 + D_1 \end{bmatrix} x(t)$

**Règle 2** SI  $x_1(t)$  est  $F_1^2$  ALORS  $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 + d_1 \end{bmatrix} x(t)$

**Modèle B**

**Règle 1** SI  $x_2(t)$  est  $F_2^1$  ALORS  $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + D_2 & -2 \end{bmatrix} x(t)$

**Règle 2** SI  $x_2(t)$  est  $F_2^2$  ALORS  $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + d_2 & -2 \end{bmatrix} x(t)$

Où les fonctions d'appartenance pour les modèles  $A$  et  $B$  sont définis comme suites :

$$F_1^1 = \frac{D_1 - x_1}{D_1 - d_1}, \quad F_1^2 = 1 - F_1^1 \quad (1.55)$$

$$F_2^1 = \frac{D_2 - x_2}{D_2 - d_2}, \quad F_2^2 = 1 - F_2^1 \quad (1.56)$$

La condition standard pour les fonctions d'appartenance est  $F_{ij} \in [0 1]$ . La sortie finale pour les modèles flous  $A$  et  $B$  est comme suit:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_i x(t) \quad (1.57)$$

où  $h_i(z)$  et  $A_i$  dénotent la fonction d'activation et la matrice de système de la  $i^{eme}$  règle floue, respectivement. Selon la seconde méthode de Lyapunov, la condition suffisante pour la stabilité quadratique du système (1.57) est de vérifier la faisabilité de l'LMI suivante:

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad i = 1, 2 \quad (1.58)$$

Pour une matrice définie positive  $P$ .

On constate que la LMI (1.58) pour le modèle  $A$  est faisable si  $d_1 < D_1 < 2$ , tandis que la LMI (1.58) pour le modèle  $B$  est faisable si  $d_2 < D_2 < 1$ . En conséquence, l'univers de

discours des variables d'état  $x_1$  et  $x_2$ , pour les modèles  $A$  et  $B$ , doit être confiné en  $R_A = [(x_1, x_2)/x_1 < 2]$  et  $R_B = [(x_1, x_2)/x_2 < 1]$  respectivement.

La région de l'attraction est la région dans laquelle tous les points commençant dans cette région seront attirés au point fixe à l'origine.

Dans notre exemple nous présentons une approche classique utilisée couramment pour trouver une région d'attraction basée sur une fonction de Lyapunov  $V$ . Dans cette approche, la région d'attraction est déterminée comme un ensemble de sous-niveau de la fonction de Lyapunov  $V$ , c'est à dire, un ensemble  $R_{V < C}$  défini par

$$R_{V < C} = \{x \in (R^n | V(x) \leq C)\} \tag{1.59}$$

Il est intéressant de noter que  $R_A$  n'est pas une ROA, alors que  $R_B$  l'est. Ceci peut être vérifié par les champs de vecteur sur la limite, qui sont montrés dans les figures 1.2 et 1.3.

Pour le modèle  $A$ , la région de l'attraction est définie par (1.59), où  $C = \min \{V(x) | x \in \partial(R_A)\}$ , avec  $\partial(R_A)$  dénote la borne de  $R_A$ . La ROA du modèle  $A$  est représentée dans fig.1.2.

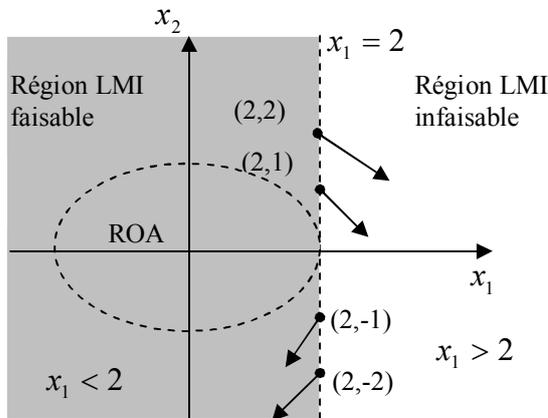


Fig.1.2. Champ de vecteur sur la limite  $x_1 = 2$

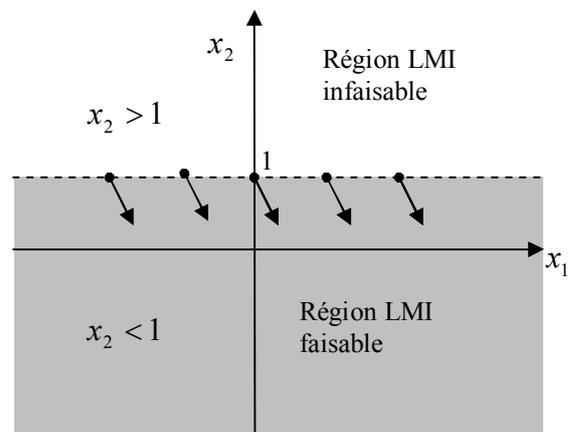


Fig.1.3. Champ de vecteur sur la limite  $x_2 = 1$

De cet exemple, on a les observations et les questions suivantes :

- La stabilité quadratique est garantie seulement dans ROA mais pas dans une région globale ou dans l'univers du discours.
- Non seulement les conditions de stabilité sous forme LMIs, mais aussi la condition sur les fonctions d'appartenance déterminent la région de stabilité.
- Est ce que la solution faisable est affectée par la taille de l'univers de discours pour les ensembles flous ?

- Puisque la solution faisable des LMI dépend de l'efficacité des algorithmes numériques, pouvons nous trouver la région faisable par les méthodes analytiques ?

Nous répondrons à ces questions dans la suite de ce mémoire.

### 1.5.2. Préliminaires sur les LMIs faisables

L'exemple suivant illustre les LMIs faisables.

Considérons le système non linéaire en boucle ouverte décrit sous la forme générale suivante:

$$\dot{x}(t) = f(x) \quad (1.60)$$

où  $x(t) = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathfrak{R}^n$  et  $f(x)$  est une fonction non linéaire. La représentation de ce système sous forme d'un modèle flou de T-S se compose de règles suivantes:

**Règle i :**

$$\text{SI } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et } \dots \text{ et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \quad \text{ALORS} \quad \dot{x}(t) = A_i x(t) \quad (1.61)$$

où,  $z_1, \dots, z_p$  sont les variables des prémisses,  $F_i^j$  sont les ensembles flous,  $r$  est le nombre de règles flous et  $A_i$  sont les matrices d'évolution du système avec des dimensions appropriées.

La sortie impliquée (1.61) est :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \{A_i x(t)\} = A(z)x(t) \quad (1.62)$$

$$\text{avec} \quad A(z) = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_i \quad (1.63)$$

où,  $h_i(z)$  sont les fonctions d'activation définies dans (1.5).

Selon la seconde méthode de Lyapunov la condition suffisante pour la stabilité de (1.63) est :

$$\begin{aligned} P = P^T > 0 \\ A^T(z)P + PA(z) < 0. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Notons que la condition indiquée ci-dessus dépend de l'état  $z$  (variable de prémisses) qui change selon  $x \in \Omega$ , où  $\Omega$  dénote l'univers du discours de variable d'état  $x$ .

Une condition suffisante qui satisfait l'inégalité (1.64) consiste à vérifier la condition suivante:

$$A^T(\theta^*)P + PA(\theta^*) < 0, \quad \forall \theta^* \in \Omega. \quad (1.65)$$

Notons qu'il est difficile d'obtenir une matrice commune définie positive  $P$  qui satisfait la LMI (1.65) parce qu'il y a les points infinis  $\theta^* \in \Omega$  à vérifier. Pour éviter cette difficulté,

on pose  $conv(A_1, A_2, \dots, A_r)$  qui dénote l'enveloppe convexe des matrices  $(A_1, A_2, \dots, A_r)$  c'est à dire  $conv(A_1, A_2, \dots, A_r) \equiv \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_r A_r$ , avec  $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$  et  $\alpha_i > 0$  donc il suffit d'étudier la faisabilité des LMIs suivantes:

$$\begin{aligned} P = P^T > 0 \\ A_i^T P + P A_i < 0 \quad i = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (1.66)$$

**Lemme 5.1 :** [Kuang 06] Le système (1.62) est quadratiquement stable si les inégalités (1.66) sont faisables.

L'inégalité (1.66) peut être représentée de la manière suivante:

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} < 0. \quad \forall \bar{A} \in conv(A_1, A_2, \dots, A_r) \quad (1.67)$$

Selon le théorème de Lyapunov, la faisabilité de (1.67) est un résultat de la stabilité du système suivant :

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) \quad \forall \bar{A} \in conv(A_1, A_2, \dots, A_r) \quad (1.68)$$

Le théorème de Kharitonov peut être appliqué pour étudier la stabilité de (1.68) par l'intermédiaire du polynôme caractéristique de type intervalle suivant :

$$\Delta(s) = |sI - \bar{A}| \quad (1.69)$$

Ce qui est assumé avec la forme suivante :

$$\Delta(s) = \sum_{i=0}^n d_i s^i = \sum_{i=0}^n [d_i^-, d_i^+] s^i \quad (1.70)$$

où  $d_i^-$  et  $d_i^+$  sont les limites inférieure et supérieure de  $d_i$ , respectivement. Le théorème de Kharitonov dénote que la propriété stricte de Hurwitz de la famille entière  $\Delta(s)$  est équivalente à la propriété stricte de Hurwitz de quatre polynômes particulièrement construits [Kuang 06]:

$$\begin{aligned} \Delta_1(s) &= d_0^- + d_1^- s + d_2^+ s^2 + d_3^+ s^3 + d_4^- s^4 + \dots \\ \Delta_2(s) &= d_0^+ + d_1^+ s + d_2^- s^2 + d_3^- s^3 + d_4^+ s^4 + \dots \\ \Delta_3(s) &= d_0^+ + d_1^- s + d_2^- s^2 + d_3^+ s^3 + d_4^+ s^4 + \dots \\ \Delta_4(s) &= d_0^- + d_1^+ s + d_2^+ s^2 + d_3^- s^3 + d_4^- s^4 + \dots \end{aligned} \quad (1.71)$$

**Lemme 6.1 :** [Kuang 06] La condition nécessaire pour la faisabilité de (1.66) est que le polynôme caractéristique de type intervalle est Hurwitz strict.

Combinant les lemmes 5.1 et 6.1, nous avons les relations suivantes [Kuang 06]:

$$\Delta(s) \text{ est Hurwitz strict} \Rightarrow (1.66) \text{ est faisable; } (1.62) \Rightarrow \text{est quadratiquement stable.}$$

En général, la stabilité de  $\Delta(s)$  peut donner un indice pour définir les matrices  $A_i$  du sous-système tel que les LMIs (1.66) sont faisables.

**Exemple 1.7:** Considérons le même exemple précédant :

D'après (1.69), pour le modèle  $A$  :

$$\Delta = s^2 + [2 - D_1, 2 - d_1]s + 1 = 0.$$

**Preuve :** On a  $\Delta(s) = |sI - \bar{A}|$ , alors

$$\Delta(s) = \left| s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 + D_1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{matrix} s & -1 \\ 1 & s + 2 - D_1 \end{matrix} \right| = s^2 + (2 - D_1)s + 1 \quad \text{pour } A_1$$

$$\Delta(s) = \left| s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 + d_1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{matrix} s & -1 \\ 1 & s + 2 - d_1 \end{matrix} \right| = s^2 + (2 - d_1)s + 1 \quad \text{pour } A_2$$

On peut écrire  $\Delta = s^2 + [2 - D_1, 2 - d_1]s + 1 = 0$ . puisque  $D_1 > d_1$

donc les polynômes caractéristiques  $\Delta_i(s)$  pour le modèle  $A$  sont :

$$\Delta_1(s) = \Delta_3(s) = 1 + (2 - D_1)s + s^2 = 0.$$

$$\Delta_2(s) = \Delta_4(s) = 1 + (2 - d_1)s + s^2 = 0.$$

Par conséquent la LMI (1.66) est infaisable si  $D_1 > d_1 > 2$  par le lemme 6.1.

Et d'après (1.69), pour le modèle  $B$ , on trouve

$$\Delta = s^2 + 2s + [1 - D_2, 1 - d_2] = 0.$$

donc les polynômes caractéristiques  $\Delta_i(s)$  pour le modèle  $B$  sont :

$$\Delta_1(s) = \Delta_4(s) = (1 - D_2) + 2s + s^2 = 0$$

$$\Delta_2(s) = \Delta_3(s) = (1 - d_2) + 2s + s^2 = 0$$

Par conséquent la LMI (1.66) est infaisable si  $D_2 > d_2 > 1$  par le lemme 6.1. Combinons les résultats des lemmes 5.1 et 6.1, nous avons la propriété suivante:

**Lemme 7.1 :** [Kuang 06] La taille la plus grande de l'univers de discours conduit à des LMIs moins faisables.

A partir des lemmes 6.1 et 7.1, on peut tirer les résultats suivants:

- La solution faisable est affectée par la taille de l'univers de discours pour les ensembles flous
- On peut trouver la région faisable par les méthodes analytiques
- La faisabilité des LMIs est liée au choix de l'univers de discours (la taille plus petite de l'univers de discours conduit à une LMI plus faisable).

## **1.6. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les outils et les principes fondamentaux que nous allons utiliser dans ce mémoire, à savoir, les modèles flous de T-S continus et discrets et les inégalités matricielles linéaires LMIs. Nous avons présenté également la méthode d'obtention d'un modèle flou de type T-S à partir d'un modèle mathématique non linéaire. Nous avons introduit aussi la notion de la convexité d'un problème d'optimisation impliquant les LMIs qui présente des avantages multiples concernant les problèmes d'analyse et de synthèse, et plus particulièrement, l'analyse de la stabilité/stabilisation des systèmes dynamiques non linéaires décrits par les modèles flous de T-S. A la fin de ce premier chapitre, nous avons expliqué la dépendance de la stabilité des systèmes flous de T-S sur la faisabilité des LMIs et sur les fonctions d'appartenance où la notion de la ROA et quelques préliminaires sur les LMIs faisables sont explicités. Dans le chapitre suivant, nous combinerons les deux parties précédentes, les modèles flous de T-S et les LMIs pour étudier la stabilité et la stabilisation quadratique des systèmes non linéaire de ces modèles flous.

## **CHAPITRE II**

# **Stabilité et stabilisation quadratique des modèles flous de Takagi-Sugeno**

### **2.1. Introduction**

Ce chapitre traite de la stabilité et de la stabilisation de modèles flous continus et discrets de type T-S dans le cadre de l'utilisation d'une loi de commande basée sur le retour d'état appelée PDC (Parallel Distributed Compensation). Ces dernières années, plusieurs travaux concernant l'analyse de la stabilité des modèles flous de T-S basées sur cette loi de commande ont été publiés [Wang 95], [Tanaka 98], [Kim 00], [Ma 98], [Zhi 05], [Cheng 06], [Thier 01], [Ting 06]. L'étude de la stabilité et de la stabilisation de ce type de modèles flous fait appel, dans la grande majorité des cas, à la fonction de Lyapunov de type quadratique qui produit des conditions suffisantes de stabilité, par exemple [Tanaka 98], [Guesta 99], [Kim 00], [Wang 96], [Ting 06], [Feng 01]. Plusieurs travaux également publiés dans ces derniers années utilisant la représentation d'état et des observateurs flous [Tanaka 94], [Breg 02], [Chad 03], [Valc 99], [Tanaka 97]. La boucle fermée complète composée de l'état du système et l'erreur d'estimation, permet de définir le système augmenté. Dans le cas où les prémisses de règles utilisent des variables mesurables, un principe de séparation a également été démontré [Ma 98], [Chad 02]. Les résultats également exprimés sous forme d'LMI seront illustrés à travers des exemples de simulation.

## 2.2. Stabilité quadratique des modèles flous de T-S

L'analyse de la stabilité des modèles flous est généralement basée sur les fonctions de Lyapunov candidates. Nous nous intéressons dans ce travail à l'utilisation de fonctions de Lyapunov quadratiques. Il s'agit de chercher une matrice symétrique définie positive et sa fonction de Lyapunov quadratique associée telles que certaines conditions garantissent les propriétés de stabilité. Dans toute la suite, sans perte de généralité on suppose que le point d'équilibre est l'origine.

Le principe de stabilité selon Lyapunov s'appuie sur une observation physique fondamentale sur le comportement du système dynamique du point de vue de son énergie totale. Si cette énergie (qui est généralement scalaire), est continûment dissipée, on parle alors de système dissipatif. Dans ce cas, on peut espérer que le système tende vers un point d'équilibre. Ainsi l'idée de Lyapunov est d'examiner la variation d'une fonction scalaire pour étudier la variation d'énergie d'un système donné. D'abord, on présente les différentes fonctions de Lyapunov le plus souvent employées dans la théorie de stabilité des modèles flous de T-S.

## 2.3. Fonctions de Lyapunov usuelles

En général, il n'existe pas de méthodes systématiques pour trouver une fonction candidate de Lyapunov. Dès lors, la théorie de Lyapunov conduit à des conditions suffisantes de stabilité dépendants de la forme particulière imposée à la fonction  $V(x)$  et de la structure du système. Cependant, la fonction de Lyapunov est choisie parmi une famille de fonctions prédéfinies [Chad 02], la plus utilisée est la famille des fonctions quadratique. On distingue les formes suivantes:

### 2.3.1. Fonction de Lyapunov quadratique

La fonction candidate de Lyapunov la plus couramment utilisée est dite quadratique. Elle est définie par la forme quadratique suivante:

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \quad P \in R^{n,n}, \quad P = P^T > 0 \quad (2.1)$$

Si on étudie la stabilité avec ce type de fonction de Lyapunov on parlera de stabilité quadratique. Donc trouver une fonction de Lyapunov revient à trouver une matrice symétrique définie positive  $P$ . L'inconvénient de cette fonction réside dans l'obtention des conditions de stabilités très conservatives, d'où l'intérêt de chercher des conditions qui le sont beaucoup

moins conservative (conditions relâchées) comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

### 2.3.2. Fonction affine paramétrique

Cette fonction est de la forme suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t)P(\theta)x(t), \quad P_i > 0 \quad (2.2)$$

avec  $P(\theta) = P_0 + \theta_1 P_1 + \dots + \theta_k P_k > 0$  et est souvent utilisée pour étudier les systèmes linéaires à paramètres incertains variants dans le temps du type

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) \quad (2.3)$$

avec  $A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \dots + \theta_k A_k$  où les paramètres  $\theta_i$  et leurs variation sont bornés [Gahi 96].

### 2.3.3. Fonction polyquadratique

La forme de cette fonction est la suivante [Cao 96]:

$$V(x(t), z(t)) = x^T(t) \sum_{i=1}^n h_i(z(t)) P_i x(t), \quad P_i > 0 \quad (2.4)$$

où les  $h_i$  sont les fonctions d'activation définies par (1.5). Dans le cas des modèles flous de T-S, cette fonction permet de relâcher les contraintes imposées par la méthode quadratique. En effet, trouver une matrice pour chaque modèle local est plus facile que trouver une matrice commune entre tout les modèles locaux, elle permet de réduire un problème de stabilité globale d'un modèle non linéaire à l'analyse indépendante de la stabilité locale de modèles linéaires.

Cette fonction représente le cas le plus général de fonctions quadratiques. En effet, il suffit de choisir  $P_i = P$  pour se ramener au cas des fonctions quadratiques. Plusieurs travaux utilisent ce type de fonctions que ce soit dans le cas continu [Morère 01], [Tanaka 01b], ou bien dans le cas discret [Morère 01], [Wang 96].

### 2.3.4. Fonctions continues par morceaux

Ce type de fonctions est donné par la forme suivante [Feng 03]:

$$V(x(t)) = \max(V_1(x(t)), \dots, V_i(x(t)), \dots, V_n(x(t))) \quad (2.5)$$

avec

$$V(x(t)) = x(t)^T P_i x(t), \quad P_i > 0 \quad (2.6)$$

Ce type de fonctions fait l'objet d'applications dans le cas des systèmes flous [Cao 99], [Joh 99], il présente l'avantage d'être moins conservative que la fonction quadratique,

Les théorèmes de stabilité suivants basés sur la fonction de Lyapunov quadratique donnent les conditions suffisantes permettant de garantir la stabilité de modèles flous continus et discrets décrits respectivement par l'expressions (1.7) dans le cas continu et (1.11) dans le cas discret.

**MFC**

Soit le modèle flou de T-S continu suivant en régime libre :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i x(t) \quad (2.7)$$

La stabilité quadratique s'étudie en calculant la dérivée de la fonction (2.1) :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \frac{d}{dt}(x(t)^T P x(t)) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \quad (2.8)$$

ou encore en utilisant (2.7) :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i x(t) \right)^T P x(t) + x(t)^T P \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i x(t) \right) \quad (2.9)$$

En utilisant la relation (1.6), on obtient :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = x(t)^T (A_i^T P + P A_i) x(t) \quad (2.10)$$

**Théorème 2.1 :** [Tanaka 98] L'équilibre d'un modèle flou continu décrit par (2.7) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune  $P$  définie positive telle que:

$$P > 0, \quad A_i^T P + P A_i < 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.11)$$

**MFD**

Soit le modèle flou de T-S discret suivant en régime libre :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(k))A_i x(k) \quad (2.12)$$

La stabilité quadratique s'étudie en calculant la variation de la fonction  $V(x(k)) = x(k)^T P_i x(k)$  comme suit :

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) = x(k+1)^T P x(k+1) - x(k)^T P x(k) \quad (2.13)$$

En calculant (2.13) le long des trajectoires du modèle (2.12), on obtient :

$$\Delta V(x(k+1)) = \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(k))A_i x(k) \right)^T P \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(k))A_i x(k) \right) - x(k)^T P x(k) \quad (2.14)$$

alors 
$$\Delta V(x(k+1)) = x(k)^T (A_i^T P A_i - P)x(k) \tag{2.15}$$

**Théorème 2.2 :** [Tanaka 98] L'équilibre d'un modèle flou discret décrit par (2.12) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune  $P$  définie positive telle que :

$$P > 0, \quad A_i^T P A_i - P < 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \tag{2.16}$$

Les conditions de stabilité obtenues sont évidemment conservatives puisque la partie prémisse des règles n'est pas prise en compte. Pour la suite, chaque sous-modèle est supposé vérifier les propriétés de commandabilité et d'observabilité suivantes [Morère 01] :

- Si les paires  $((A_i, B_i), i = 1, 2, \dots, r)$  sont commandables, alors les modèles flous (1.7) et (1.11) sont localement commandables.
- Si les paires  $((A_i, C_i), i = 1, 2, \dots, r)$  sont observables, alors les modèles flous (1.7) et (1.11) sont localement observables.

## 2.4. Stabilisation quadratique des modèles flous de T-S

Pour garantir la stabilité d'un modèle flou de T-S, nous avons recours à la synthèse d'une commande stabilisante. Pour ce faire, en s'inspirant des résultats d'analyse de stabilité des systèmes dynamiques, on aboutit à des conditions de synthèse de commande par retour d'état. Les conditions sur les gains de commande ainsi obtenues, ne sont pas nécessairement formulées directement en un problème LMI. En effet, dans certains cas, on obtient des inégalités matricielles non linéaires, qui nécessitent un ensemble de transformations matricielles pour les rendre linéaires. Alors pour générer un signal de commande stabilisant pour le système (1.7) ou (1.11), plusieurs formules de commande floue sont proposées dans la littérature, on ne citera ici que la plus utilisée, c'est la loi de commande basée sur le retour d'état et connue sous le nom de PDC (Parallel Distributed Compensation).

Dans cette loi de commande, les matrices de la représentation d'état du système en boucle ouverte sont remplacées par celles du système bouclé.

### 2.4.1. Loi de commande PDC

Le concept PDC est utilisé pour élaborer une loi de commande pour les modèles flous de type T-S. L'idée est de calculer une loi de commande linéaire par retour d'état pour chaque sous-modèle du modèle flou. La détermination d'une loi de commande revient à déterminer pour chaque modèle local (sous-modèle) des gains matriciels. Chaque modèle local est

stabilisé localement par une loi de commande linéaire. La loi de commande globale qui en général est non linéaire est obtenue par interpolation des lois de commande linéaires locales.

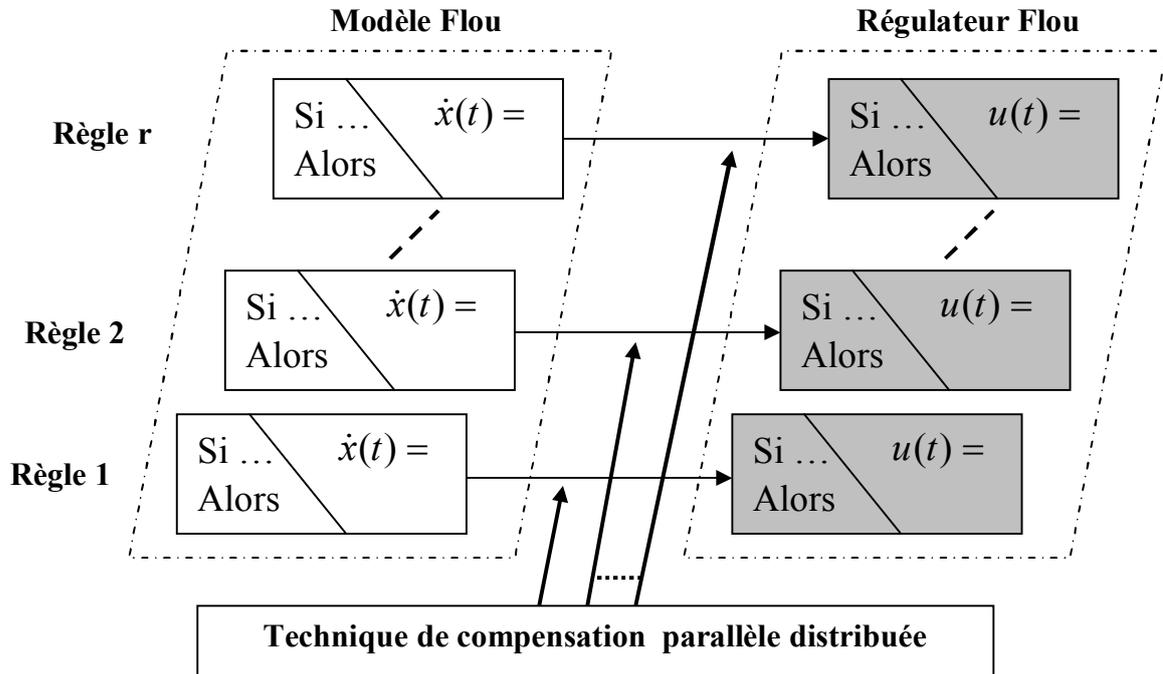


Fig. 2.1 : Représentation du concept PDC.

Le régulateur flou PDC partage les mêmes ensembles flous que celle du modèle flou de T-S, donc, il garde les mêmes parties prémisses ainsi que les mêmes fonctions d'appartenance. L'avantage majeur de cette loi de commande, est de respecter la même structure de découpage des non linéarités que celle utilisée pour l'obtention du modèle T-S. La figur.2.1 illustre cette loi de commande.

Pour les modèles flous continus (1.1) et discrets (1.8), la réalisation du régulateur se fait de la façon suivante :

**Règle *i* du régulateur :**

$$\text{SI } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et ... et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \quad \text{ALORS } u(t) = -F_i x(t) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.17)$$

La sortie finale du régulateur est inférée par l'équation suivante :

$$u(t) = -\frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) F_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t) \quad (2.18)$$

La conception du régulateur revient à déterminer les gains locaux de retour d'état  $F_i$  dans la partie conclusion des règles de la loi de commande PDC.

### 2.4.1.1. Conditions de stabilité du modèle bouclé

Pour obtenir l'expression de la boucle fermée, il suffit de substituer (2.18) à (1.7) (cas continu). Ainsi l'expression obtenue est la suivante :

**MFC**

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\{A_i - B_i F_j\}x(t) \quad (2.19)$$

De la même façon, on obtient l'expression dans le cas discret comme suit :

**MFD**

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))\{A_i - B_i F_j\}x(k) \quad (2.20)$$

Les équations (2.19) et (2.20) peuvent être réécrites de la manière suivante :

**MFC**

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))G_{ii}x(t) + 2 \sum_{i<j}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\left\{\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right\}x(t) \quad (2.21)$$

**MFD**

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i^2(z(k))G_{ii}x(k) + 2 \sum_{i<j}^r h_i(z(k))h_j(z(k))\left\{\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right\}x(k) \quad (2.22)$$

où  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ .

En appliquant les théorèmes 2.1 et 2.2 respectivement à (2.21) et (2.22), il est possible de tirer des conditions de stabilité pour les MFC et MFD. Le même raisonnement précédent est utilisé pour trouver les conditions de stabilité de (2.21) et (2.22) respectivement.

**MFC**

**Théorème 2.3 :** [Tanaka 98] L'équilibre d'un modèle flou, continu, décrit par (2.21) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune  $P$  définie positive telle que :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (2.23)$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right) < 0 \quad i < j \quad (2.24)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$  avec  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$

**Preuve :** Soit le modèle flou de T-S décrit par (2.21), la stabilité quadratique s'étudie en calculant la dérivée de la fonction (2.1) (qui est représentée en (2.8)) ou encore en utilisant (2.21) :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}V(x(t)) &= \left( \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))G_{ii}x(t) + 2 \sum_{i<j}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \right)^T Px(t) \\
 &\quad + x(t)^T P \left( \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))G_{ii}x(t) + 2 \sum_{i<j}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \right) \\
 \frac{d}{dt}V(x(t)) &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))x(t)^T G_{ii}^T Px(t) + 2 \sum_{i<j}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x(t)^T \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T Px(t) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))x(t)^T PG_{ii}x(t) + 2 \sum_{i<j}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x(t)^T P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \\
 &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))x(t)^T (G_{ii}^T P + PG_{ii})x(t) \\
 &\quad + 2 \sum_{i<j}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x(t)^T \left( \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \right) x(t)
 \end{aligned}$$

Selon les conditions (2.23) et (2.24), on obtient  $\dot{V}(x(t)) < 0$  et le système est quadratiquement stable.

### MFD

**Théorème 2.4 :** [Tanaka 98] L'équilibre d'un modèle flou discret, décrit par (2.22) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune  $P$  définie positive telle que :

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (2.25)$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P < 0 \quad i < j \quad (2.26)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(k))h_j(z(k)) = 0$  avec  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ .

**Preuve :** Le même raisonnement que pour la stabilité du système (2.21) est suivi.

Le fait d'utiliser la condition (2.24) pour les MFC et (2.26) pour les MFD, avec  $i < j$  permet de réduire un peu la conservativité des résultats puisqu'il n'est pas obligatoire d'avoir tous les sous-modèles croisés  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$  stables.

L'obtention du régulateur flou PDC consiste donc à déterminer les matrices de gains de retour d'état  $F_i (i = 1, \dots, r)$  satisfaisant les conditions du théorème 2.3 (MFC) ou du théorème 2.4 (MFD) pour une matrice commune  $P$  définie positive.

Afin de trouver la matrice commune  $P$  et les gains  $F_i$ , il est possible d'opérer en deux étapes:

La détermination des gains  $F_i$ , puis la vérification de l'existence d'une matrice commune  $P$ .

Mais cette méthode reste assez empirique et ne garantit pas l'existence de la matrice

commune  $P$ . Il peut donc être intéressant de trouver simultanément les gains  $F_i$  et la matrice commune  $P$ , grâce aux LMIs

### 2.4.1.2. Linéarisation des conditions de stabilité

Les théorèmes 2.3 et 2.4 donnent les conditions suffisantes pour la stabilité des systèmes bouclés (2.21) et (2.22). Mais les inégalités matricielles (2.23)~(2.26) ne sont pas linéaires en  $P$  et  $F_i$ . On peut exprimer ces conditions de stabilité sous la forme d'un problème d'optimisation avec contrainte LMI. En effectuant des changements de variables, il est possible de rendre les inégalités matricielles (2.23)~(2.26) linéaires c'est à dire des LMIs en de nouvelles variables.

#### ▪ Les LMIs pour le théorème 2.3

Les conditions de stabilité (2.23) et (2.24) (pour le MFC) peuvent être mises sous forme d'LMI après avoir effectuer le changement de variable classique:  $X = P^{-1}$ ,  $M_i = F_i P^{-1}$  et en pré- et post- multipliant (2.23) et (2.24) par  $X = P^{-1}$  on obtient les LMIs suivantes en  $X$  et  $M_i$

$$\begin{cases} X > 0 \\ XA_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - B_i M_i < 0 & i = 1, \dots, r \\ XA_i^T + A_i X + XA_j^T + A_j X - M_j^T B_i^T - B_i M_j - M_i^T B_j^T - B_j M_i < 0 & i < j \end{cases} \quad (2.27)$$

Les gains du régulateur  $F_i$  sont donnés par  $F_i = M_i P$

#### ▪ Les LMIs pour le théorème 2.4

En pré- et post- multipliant (2.25) et (2.26) par  $X = P^{-1}$  avec l'utilisation du compliment de Schur on obtient les LMIs suivantes en  $X$  et  $M_i$

$$\begin{cases} X > 0 \\ \begin{bmatrix} X & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X - B_i M_i & X \end{bmatrix} > 0 & i = 1, \dots, r \\ \begin{bmatrix} X & \frac{1}{2} \{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i\}^T \\ \frac{1}{2} \{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i\} & X \end{bmatrix} > 0 & i < j \\ P = X^{-1}, F_i = M_i P \end{cases} \quad (2.28)$$

$$(2.29)$$

**Remarque :** Supposons que les matrices de commande sont  $B_1 = B_2 = \dots = B_r$ , dans ce cas, les conditions de stabilité des théorèmes 2.3 et 2.4 sont exprimées comme suit:

- L'équilibre d'un modèle flou, continu, décrit par (2.21) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune  $P$  définie positive telle que :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, r$$

- L'équilibre d'un modèle flou, discret, décrit par (2.22) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune  $P$  définie positive telle que :

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0 \quad i = 1, \dots, r$$

Les théorèmes de stabilité 2.3 et 2.4 garantissent uniquement la stabilité asymptotique. Cependant, il est possible de considérer non seulement la stabilité, mais également d'autres performances tel que la vitesse de réponse, les contraintes sur l'entrée et sur la sortie.

### 2.4.2. Taux de décroissance

Afin de garantir un certain taux de décroissance, les auteurs de [Tanaka 98] ont proposés des contraintes supplémentaires faisant intervenir les termes dominants  $G_{ii}$  et termes croisés  $G_{ij}$ . Le degré de stabilité où le taux de décroissance du système (2.21), est le plus grand scalaire  $\alpha$  tel que, quelque soit la trajectoire vérifiant (2.21), on a pour  $\alpha > 0$ :  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \|x(t)\| = 0$ . En d'autres termes prouver la stabilité de système (2.21) revient à assurer que, pour toutes les trajectoires  $x(t)$  vérifiant (2.21) on a pour  $\alpha > 0$

#### MFC

$$\exists P > 0 : \frac{dV(x(t))}{dt} + 2\alpha V(x(t)) < 0 \quad (2.30)$$

La condition (2.30) pour toutes les trajectoires de  $x(t)$  vérifiant (2.21) est équivalent à:

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + 2\alpha P < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (2.31)$$

$$\frac{(G_{ij} + G_{ji})^T}{2} P + P \frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} + 2\alpha P < 0 \quad i < j \quad (2.32)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$  avec  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ .

$\alpha > 0$  représente le taux de décroissance de la fonction de Lyapunov quadratique, qu'on doit maximiser. Notons que maximiser le taux de décroissance est un problème de minimisation de la plus grande valeur propre généralisée (GEVP) en  $P$  et  $\alpha$ . La formulation est la suivante :

Maximiser  $\alpha$

$X, M_1, \dots, M_r$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} X > 0 \\ XA_i^T + A_iX - M_i^T B_i^T - B_i M_i + 2\alpha X < 0 & i = 1, \dots, r \\ XA_i^T + A_iX + XA_j^T + A_jX \\ \quad - M_j^T B_i^T - B_i M_j - M_i^T B_j^T - B_j M_i + 4\alpha X < 0 & i < j \end{cases} \quad (2.33)$$

où  $X = P^{-1}$ ,  $M_i = F_i X$ .

### MFD

La condition  $\Delta V(x(k)) \leq (\alpha^2 - 1)V(x(k))$  pour toutes les trajectoires de  $x(k)$  vérifiant (2.22) est équivalente à :

$$G_{ii}^T P G_{ii} - \alpha^2 P < 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.34)$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - \alpha^2 P < 0 \quad i < j \quad (2.35)$$

où  $\alpha < 1$ , par conséquent, on définit le (GEVP) suivant en  $P$  et  $\beta$  où  $\beta = \alpha^2$  ( $0 \leq \beta < 1$ )

Minimiser  $\beta$

$X, M_1, \dots, M_r$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} X > 0 \\ \begin{bmatrix} \beta X & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X - B_i M_i & X \end{bmatrix} > 0 & i = 1, \dots, r \\ \begin{bmatrix} \beta X & \frac{1}{2} \{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i\}^T \\ \frac{1}{2} \{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i\} & X \end{bmatrix} > 0 & i < j \end{cases} \quad (2.36)$$

où  $X = P^{-1}$ ,  $M_i = F_i X$ .

**Remarque:** La conception du contrôleur flou avec taux de décroissance revient à la conception du contrôleur flou stable quand  $\alpha = 0$  et  $\beta = 1$ . Par conséquent, le contrôleur flou qui satisfait les LMIs (2.33) et (2.36) est un contrôleur flou stable. En d'autres termes, les LMIs (2.27) et (2.28) sont des cas spéciaux de ceux de (2.33) et (2.36) respectivement (quand  $\alpha = 0$  et  $\beta = 1$ ).

Pour obtenir une meilleure représentation des systèmes physiques, on pose des contraintes sur la commande et sur la sortie sous forme de contraintes LMIs.

### 2.4.3. Contraintes sur la commande d'entrée

Supposons que la condition initiale  $x(0)$  est connue. Si  $\mu$  est la borne supérieure de  $\|u(t)\|_2$ , la contrainte  $\|u(t)\|_2 < \mu$  est imposée à  $t \geq 0$  si les LMIs suivantes sont satisfaites [Tanaka 01].

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.37)$$

$$\begin{bmatrix} X & M_i^T \\ M_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.38)$$

où  $X = P^{-1}$ ,  $M_i = F_i X$ .

**Preuve:** Supposons la fonction candidate de Lyapunov suivante:  $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$  et  $x(0)^T P x(0) \leq 1$  alors

$$1 - x(0)^T P x(0) \geq 0. \quad (2.39)$$

avec  $P = X^{-1}$ . L'inégalité (2.39) est transformée en (2.37) par le procédé du complément de Schur.

La contrainte  $\|u(t)\|_2 < \mu$  conduite à

$$u(t)^T u(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x(t)^T F_i^T F_j x(t) \leq \mu^2$$

donc

$$\frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x(t)^T F_i^T F_j x(t) \leq 1 \quad (2.40)$$

avec  $x(t)^T X^{-1} x(t) < x(0)^T X^{-1} x(0) \leq 1 \quad \forall t > 0$  si:

$$\frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x(t)^T F_i^T F_j x(t) \leq x(t)^T X^{-1} x(t) \quad (2.41)$$

par conséquent, nous avons,

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x(t)^T \left( \frac{1}{\mu^2} F_i^T F_j - X^{-1} \right) x(t) \leq 0 \quad (2.42)$$

Le coté gauche de (2.42) nous avons

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x(t)^T \left( \frac{1}{\mu^2} F_i^T F_j - X^{-1} + \frac{1}{\mu^2} F_j^T F_i - 2X^{-1} \right) x(t) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x(t)^T \\
 & \quad \times \left[ \frac{1}{\mu^2} (F_i^T F_i + F_j^T F_j) - \frac{1}{\mu^2} (F_i^T - F_j^T)(F_i - F_j) - 2X^{-1} \right] x(t) \\
 & \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x(t)^T \left[ \frac{1}{\mu^2} (F_i^T F_i + F_j^T F_i) - 2X^{-1} \right] x(t) \\
 &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) x(t)^T \left( \frac{1}{\mu^2} F_i^T F_i - X^{-1} \right) x(t)
 \end{aligned}$$

si 
$$\frac{1}{\mu^2} F_i^T F_i - X^{-1} \leq 0 \tag{2.43}$$

alors (2.42) est satisfaite, on pose  $M_i = F_i X$ , la relation (2.43) peut être réécrite sous la forme suivante:

$$\frac{1}{\mu^2} M_i^T M_i - X \leq 0 \tag{2.44}$$

L'inégalité (2.38) peut être obtenue à partir de (2.44) par le procédé du complément de Schur. Les LMIs (2.37) et (2.38) sont disponibles pour MFC et MFD. Le problème de conception d'un régulateur flou stable satisfaisant la contrainte d'entrée peut être défini de la manière suivante :

*Trouver*  $X > 0, M_1, \dots, M_r$   
*Satisfaisants les LMIs*  $\{(2.27) \text{ ou } [(2.28)], (2.37) \text{ et } (2.38)\}$ .

#### 2.4.4. Contraintes sur la sortie

Supposons que la condition initiale  $x(0)$  est connue. La contrainte  $\|y(t)\|_2 < \lambda$  est imposée à  $t \geq 0$  si les LMIs suivantes sont satisfaites.

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0 \tag{2.45}$$

$$\begin{bmatrix} X & XC_i^T \\ C_i X & \lambda^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.46)$$

avec  $X = P^{-1}$

**Preuve:** La preuve peut être accomplie similairement au cas précédent.

Le problème de conception d'un régulateur flou stable satisfaisant la contrainte sur la sortie est défini de la manière suivante :

Trouver  $X > 0, M_1, \dots, M_r$

Satisfaisants les LMIs  $\{(2.27) \text{ ou } [(2.28)], (2.45) \text{ et } (2.46)\}$ .

## 2.5. Exemples d'illustrations

Considérons le système non linéaire (un pendule inversé commandé par un moteur à courant continu [Kawa 96]) décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= k_1 \sin(x_1) + k_2 x_3 \\ \dot{x}_3 &= k_3 x_2 + k_4 x_3 + k_5 u \end{aligned}$$

avec  $k_1 = 9.8, k_2 = 1, k_3 = k_4 = -10, k_5 = 10$

Ce système peut être représenté par deux modèles flous de T-S en supposant ici que  $x_1(t)$  est une variable de prémisse. Les règles floues décrivent ce pendule sont :

**Règle 1 :**

$$\text{SI } x_1(t) \text{ est } F_1^1 \quad \text{ALORS} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t) \\ y(t) = C_1 x(t) \end{cases}$$

**Règle 2 :**

$$\text{SI } x_1(t) \text{ est } F_1^2 \quad \text{ALORS} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) \end{cases}$$

où  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$ , avec  $x_1(t)$  représente l'angle du pendule,  $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$  représente la vitesse angulaire et  $x_3(t)$  représente le courant du moteur.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 9.8 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -10 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \ 0 \ 0], \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -10 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [1 \ 0 \ 0], \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$F_1^1(x_1(t))$  et  $F_1^2(x_1(t))$  sont les fonctions d'appartenance de la variable d'état  $x_1(t)$  définies par:

$$F_1^1(x_1(t)) = \begin{cases} \frac{\sin(x_1(t))}{x_1(t)}, & x_1(t) \neq 0 \\ 1, & x_1(t) = 0 \end{cases}$$

$$F_1^2(x_1(t)) = 1 - F_1^1(x_1(t))$$

Ce modèle flou représente exactement la dynamique du système non linéaire lorsque  $-\pi \leq x_1(t) \leq \pi$ . Notons que la matrice de commande  $B$  dans ce modèle est commune c'est à dire  $B_1 = B_2$ . Généralement, la conception du régulateur flou dans ce cas est simple. Pour illustrer l'influence de la technique LMI, on propose un cas plus difficile c'est à dire nous changeons  $B_2$  comme suite:  $B_2 = [0 \ 20 \ 0]^T$

Les exemples illustratifs suivants sont spécifiques seulement pour les modèles flous continus.

### 2.5.1. Exemple 2.1: Conception d'un régulateur flou avec un taux de décroissance

D'abord, on conçoit un régulateur flou stable avec un taux de décroissance. Le problème de conception pour un MFC est défini comme suit :

Maximiser  $\alpha$

$X, M_1, M_2$

Sous la contrainte {(2.33)}

Dans le LMI control toolbox de MATLAB, la fonction '*feasp*' est utilisée pour résoudre les problèmes de faisabilité. Les variables  $M_i$  et  $X$  peuvent être obtenues en utilisant le vecteur de décision à l'aide de la fonction '*dec2mat*'

On obtient les résultats suivants, pour un degré de stabilité  $\alpha = 4$

$$P = 10^3 \times \begin{bmatrix} 1.8165 & 0.4539 & 0.0297 \\ 0.4539 & 0.1190 & 0.0082 \\ 0.0297 & 0.0082 & 0.0007 \end{bmatrix} > 0$$

$$F_1 = [214.8714 \ 57.9745 \ 3.7930], \quad F_2 = [83.0103 \ 22.8201 \ 1.4541]$$

La condition initiale pour les simulations est  $x(0) = [0 \ 10 \ 0]^T$ , on retrouve la réponse du système  $y(t) = x_1(t)$  qui est l'évolution de l'angle du pendule  $\theta$  (figure 2.2) et la commande d'entrée (figure 2.3).

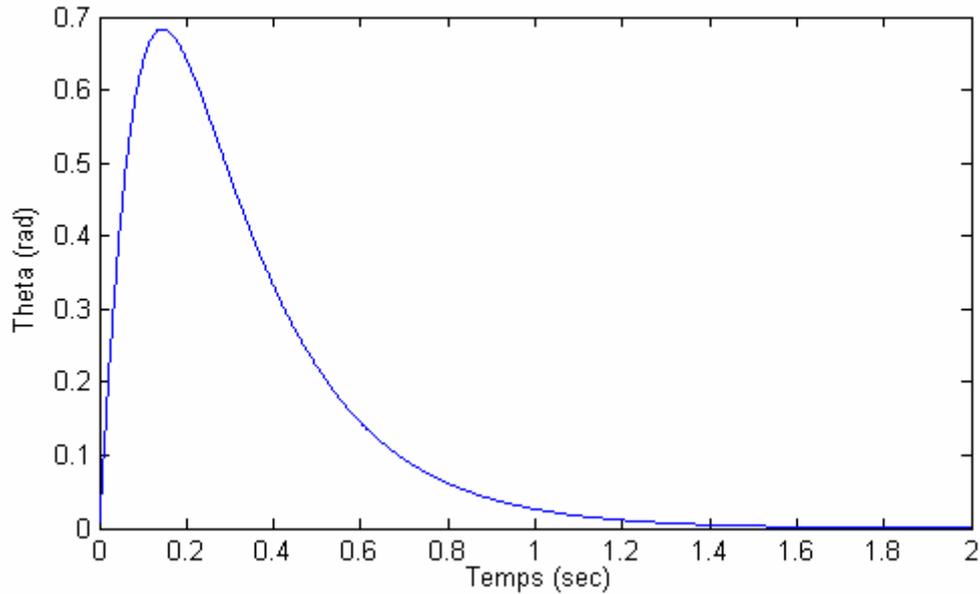


Fig.2.2. La réponse du système  $y(t) = x_1(t)$ .

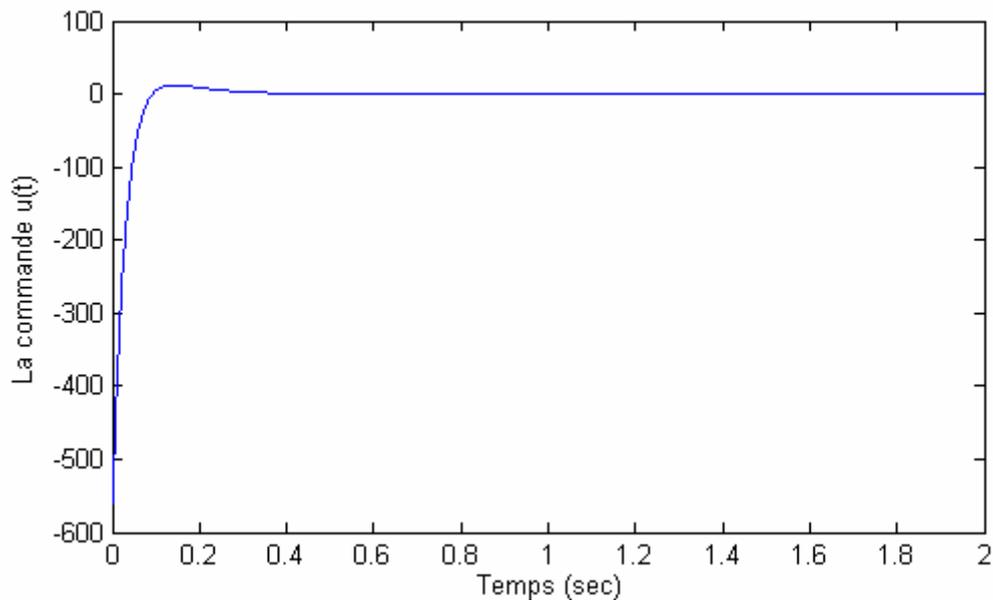


Fig.2.3. La commande d'entrée  $u(t)$ .

Le contrôleur conçu qui satisfait le taux de décroissance pour le MFC pour la condition initiale  $x(0) = [0 \ 10 \ 0]^T$  est faisable, de plus, il a stabilisé le système ( $x_1 \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ ).

Dans le deuxième exemple, on considère de plus les contraintes sur la commande d'entrée dans la conception du régulateur.

**2.5.2. Exemple 2.2 : Taux de décroissance + Contraintes sur l'entrée**

On remarque dans l'exemple 2.1 que le  $\max_t \|u(t)\|_2 = 559.848$ . Pratiquement, il y a une limitation de la commande d'entrée, alors il est important de considérer non seulement le taux de décroissance mais également les contraintes sur la commande d'entrée. Ce problème est défini comme suit:

*Maximiser*  $\alpha$

$X, M_1, M_2$

*Sous les contraintes*  $\{(2.33), (2.37) \text{ et } (2.38)\}$

avec  $\mu = 100$

On obtient les résultats suivants pour un degré de stabilité  $\alpha = 3.23$

$$P = \begin{bmatrix} 0.1187 & 0.0320 & 0.0024 \\ 0.0320 & 0.0090 & 0.0007 \\ 0.0024 & 0.0007 & 0.0001 \end{bmatrix} > 0$$

$$F_1 = [32.6503 \quad 9.0983 \quad 0.6912], \quad F_2 = [18.3241 \quad 6.5162 \quad 0.5296]$$

La réponse  $y(t) = x_1(t)$  est montrée sur la figure 2.4, et la commande correspondante est montrée sur la figure 2.5.

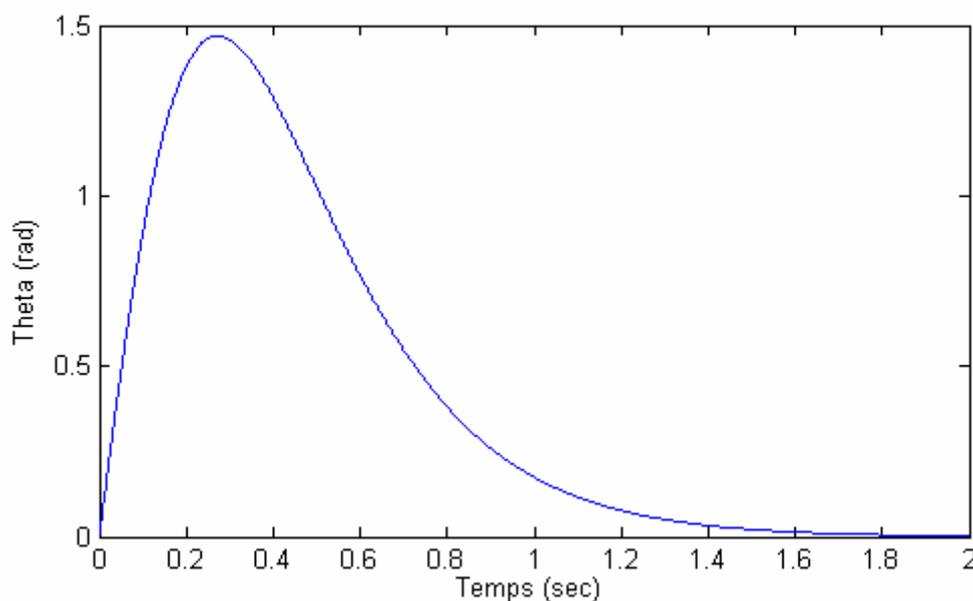
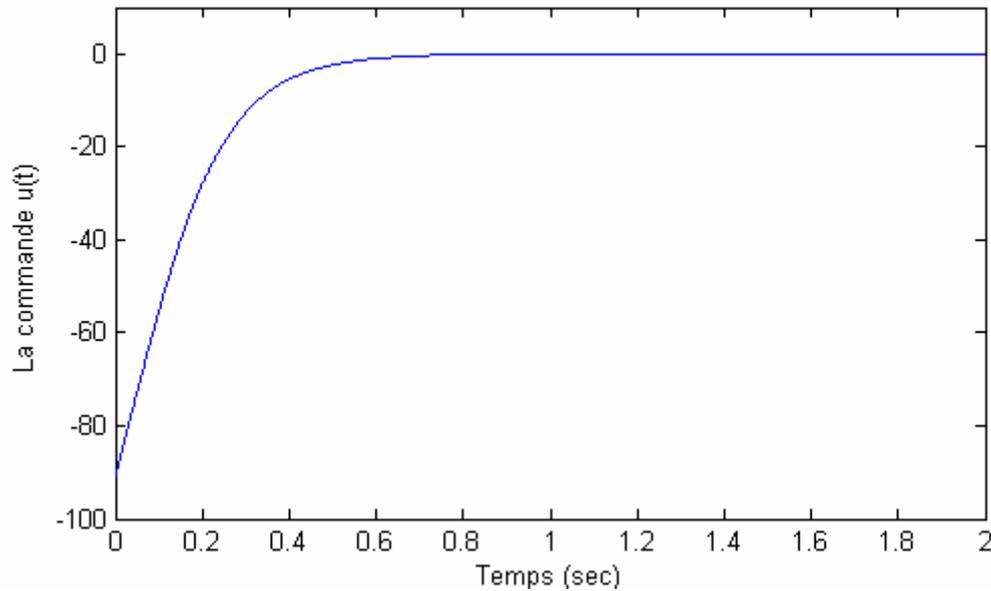


Fig.2.4. La réponse du système  $y(t) = x_1(t)$ .

Fig.2.5. La commande d'entrée  $u(t)$ .

Le contrôleur conçu qui satisfait la stabilité et le taux de décroissance pour le MFC est faisable, de plus le  $\max_t \|u(t)\|_2$  est réduit de  $\max_t \|u(t)\|_2 = 559.848$  sans contraintes à  $\max_t \|u(t)\|_2 = 90.612 < \mu$  avec contraintes, ce qui implique que ce contrôleur satisfait une contrainte sur l'entrée.

### 2.5.3. Exemple 2.3 : Contrôleur stable + Contraintes sur l'entrée

Il est possible aussi de construire un contrôleur flou stable satisfaisant les contraintes sur la commande d'entrée où  $\mu = 100$ . Le problème se pose comme suit:

Trouver  $X > 0$ ,  $M_1$  et  $M_2$

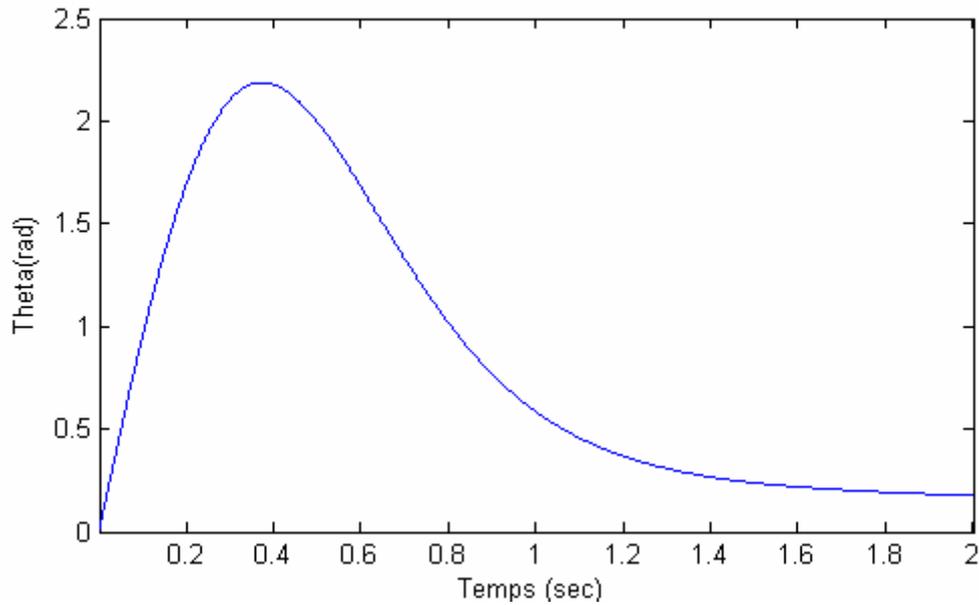
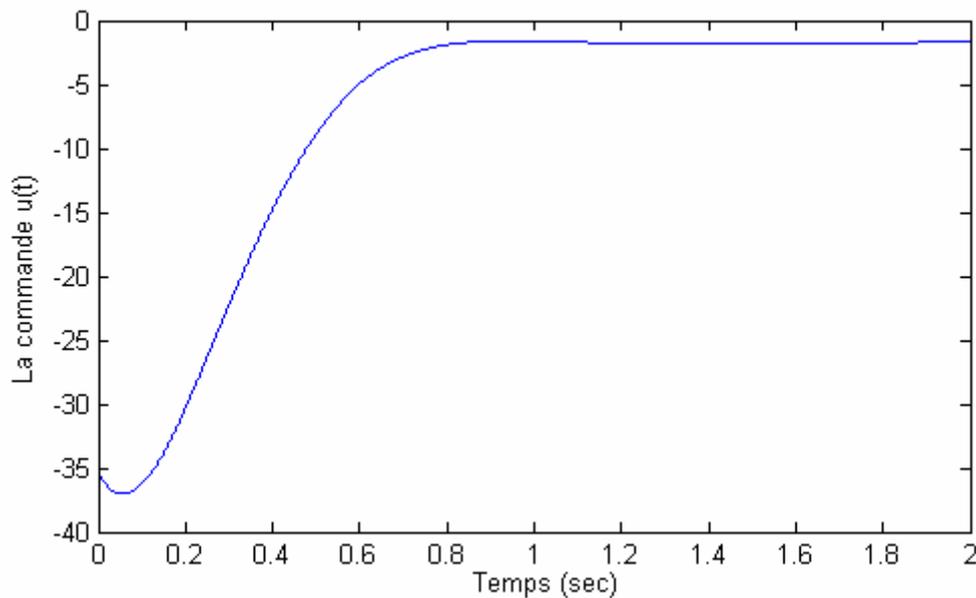
Satisfaisants  $\{(2.27), (2.37) \text{ et } (2.38)\}$

La matrice commune  $P$  et les gains de retour d'état  $F_i$  obtenus sont:

$$P = \begin{bmatrix} 0.0340 & 0.0109 & 0.0017 \\ 0.0109 & 0.0038 & 0.0006 \\ 0.0017 & 0.0006 & 0.0001 \end{bmatrix} > 0$$

$$F_1 = [12.1565 \quad 3.5422 \quad 0.1392], \quad F_2 = [6.5870 \quad 2.2115 \quad 0.0219]$$

La réponse  $y(t) = x_1(t)$  et le signal de commande d'entrée sont montrés respectivement sur les figures 2.6 et 2.7.

Fig.2.6. La réponse du système  $y(t) = x_1(t)$ .Fig.2.7. La commande d'entrée  $u(t)$ .

Le contrôleur conçu qui satisfait la stabilité et les contraintes sur l'entrée  $\max_t \|u(t)\|_2 = 35.48 < \mu$  pour le MFC est faisable. Mais la réponse  $y(t) = x_1(t)$  présente une grande erreur de sortie, ce qui permet d'introduire des contraintes sur la sortie.

#### 2.5.4. Exemple 2.4: Contrôleur stable + Contraintes sur l'entrée + Contraintes sur la sortie

La réponse du système  $y(t) = x_1(t)$  dans l'exemple précédent présente une grande erreur de

sortie,  $\max_t \|y(t)\|_2 = 2.188$  puisque la contrainte sur la sortie n'est pas considérée lors de la conception de régulateur flou. Pour améliorer la réponse, on ajoute des contraintes sur la sortie, le problème est posé de la manière suivante :

Trouver  $X > 0$ ,  $M_1$  et  $M_2$   
 Satisfaisants  $\{(2.27), (2.37), (2.38) \text{ et } (2.46)\}$ .  
 avec  $\mu = 100$  et  $\lambda = 2$

La matrice commune  $P$  et les gains de retour d'état  $F_i$  obtenus sont:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5568 & 0.0521 & 0.0029 \\ 0.0521 & 0.0097 & 0.0006 \\ 0.0029 & 0.0006 & 0.0000 \end{bmatrix} > 0$$

$$F_1 = [53.0262 \quad 9.2605 \quad 0.5599], \quad F_2 = [35.5471 \quad 7.4951 \quad 0.4711]$$

La réponse  $y(t) = x_1(t)$  et le signal de commande d'entrée sont donnés respectivement par les figures 2.8 et 2.9.

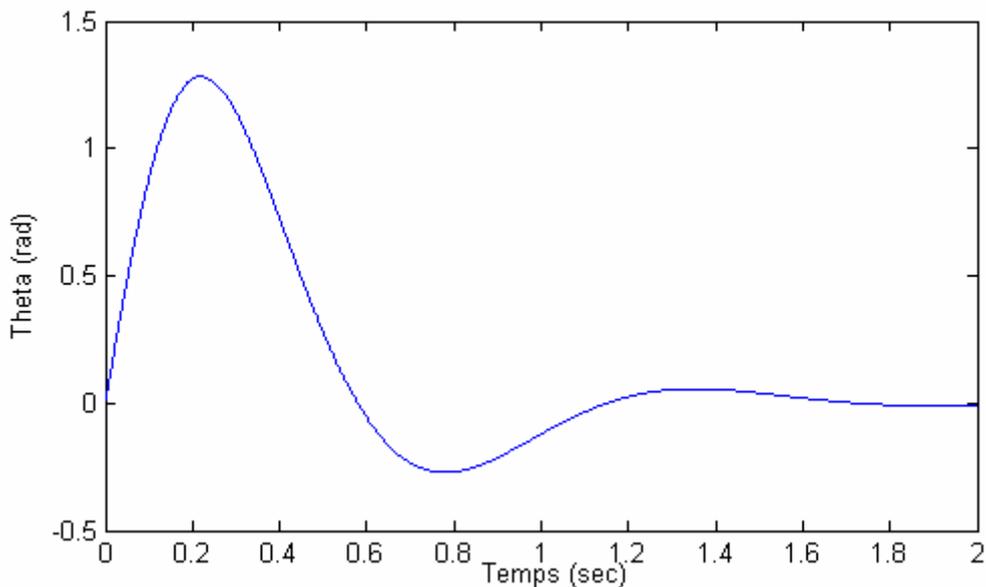


Fig.2.8. La réponse du système  $y(t) = x_1(t)$ .

Le contrôleur conçu qui satisfait la stabilité, les contraintes sur l'entrée et les contraintes sur la sortie pour le MFC est faisable où  $\mu = 100$  et  $\lambda = 2$ .

On peut souligner que ce contrôleur a satisfait les contraintes sur la commande d'entrée,  $\max_t \|u(t)\|_2 = 92.559 \leq \mu$  et sur la sortie  $\max_t \|y(t)\|_2 = 1.282 < \lambda$ .

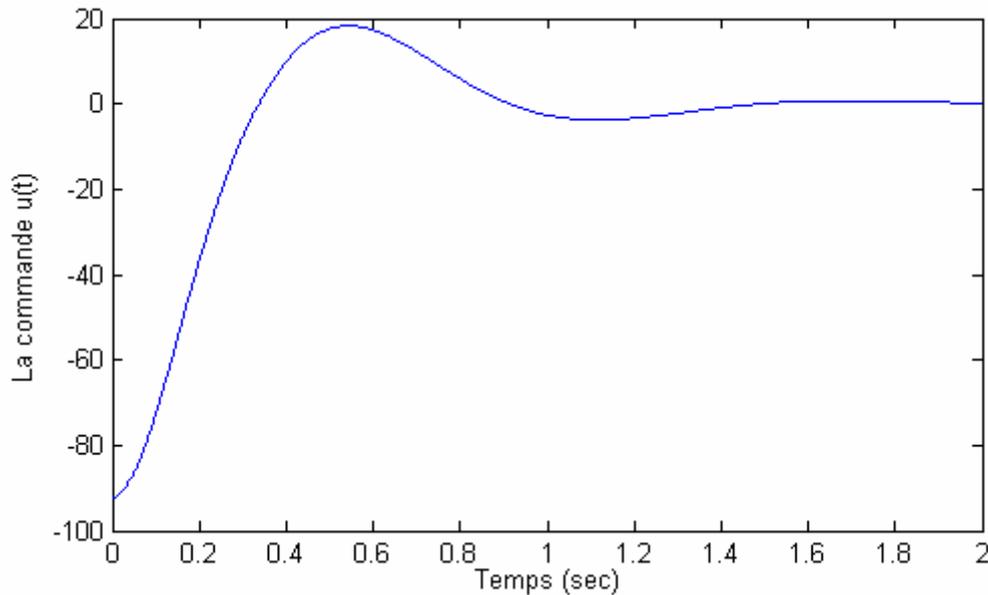


Fig.2.9. La commande d'entrée  $u(t)$ .

Nous avons montré à partir du modèle flou de T-S, une méthode de synthèse de commande du type PDC. Cette loi de commande très utilisée, est basée sur la connaissance de l'état. Par conséquence, dans le cas où l'état du système n'est pas totalement disponible, il est nécessaire d'utiliser un observateur permettant d'estimer l'état non observable du système.

Dans le cas des modèles flous de T-S, les observateurs flous de T-S se basant généralement sur des modèles linéaires de type Luenberger. Ces derniers, ont pour avantage d'avoir la même structure que les modèles flous de T-S.

## 2.6. Stabilisation avec observateur flou

L'observabilité d'un processus est un concept très important en automatique. En effet, pour reconstruire l'état et la sortie d'un système, il faut savoir, a priori, si les variables d'état sont observables ou non. Alors un observateur est nécessaire lorsque une partie de l'état n'est pas accessible. Le but étant d'obtenir une convergence asymptotique de l'erreur de prédiction d'état c'est à dire  $x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , où  $\hat{x}(t)$  représente le vecteur d'état estimé par un observateur flou.

Plusieurs travaux concernant la synthèse de commande avec un observateur flou ont été élaborés pour la stabilisation des modèles flous de T-S, par exemple [Tanaka 94], [Tanaka 98], [Chad 02c], [Chad 03]. Les résultats existant pour ce type d'observateur sont très variés selon la fonction de Lyapunov choisie et selon le type de commande utilisé pour stabiliser le modèle flou. Les principes de base de ce type d'observateurs sont synthétisées dans ce qui suit.

Les observateurs flous continus (OFC) et discrets (OFD), sont définis comme suit :

**OFC**

**Règle  $i$  de l'observateur**

$$\text{SI } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et } \dots z_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ ALORS } \begin{cases} \hat{x}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.47)$$

La structure la plus simple d'un observateur flou de T-S est obtenue par interconnexion de plusieurs observateurs locaux de type Luenberger. Il s'écrit d'une façon générale comme suit :

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) \{A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))\} \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.48)$$

avec la notation suivante :

$$\begin{cases} h_i(\hat{z}(t)) = \frac{w_i(\hat{z}(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(\hat{z}(t))} \\ \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) = 1 \end{cases} \quad (2.49)$$

où  $\hat{x}(t) \in \mathfrak{R}^{n,n}$  et  $\hat{y}(t) \in \mathfrak{R}^q$  représentent respectivement le vecteur d'état et le vecteur de sortie estimés,  $L_i$  sont les matrices de gains d'observation et les  $\hat{z}_1(t), \dots, \hat{z}_p(t)$  sont les variables de prémisse estimées et  $h_i(\hat{z}(t))$  sont les fonctions d'activation.

L'équation (2.48) peut être réécrite comme suit:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) \{A_i \hat{x}(t) + B_i u(t)\} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\hat{z}(t)) h_j(\hat{z}(t)) L_i C_j \{x(t) - \hat{x}(t)\} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\hat{z}(t)) h_j(\hat{z}(t)) \{(A_i - L_i C_j) \hat{x}(t) - B_i F_j \hat{x}(t) + L_i C_j x(t)\} \end{aligned} \quad (2.50)$$

où

$$u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\hat{z}(t)) F_i \hat{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(\hat{z}(t))} = - \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) F_i \hat{x}(t) \quad (2.51)$$

En substituant (2.51) dans (1.7), on obtient donc l'équation du système en boucle fermée suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\hat{z}(t))h_j(\hat{z}(t))\{A_i x(t) - B_i F_j \hat{x}(t)\} \quad (2.52)$$

Pour évaluer la convergence de l'observateur flou (2.50), on considère l'erreur d'estimation du vecteur d'état donnée par :

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.53)$$

En tenant compte de (2.52) et (2.53), la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\hat{z}(t))h_j(\hat{z}(t))\{(A_i - L_i C_j)\} \tilde{x}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))H_{ii}\tilde{x}(t) + 2\sum_{j=1}^r h_i(\hat{z}(t))h_j(\hat{z}(t))\left(\frac{H_{ij} + H_{ji}}{2}\right)\tilde{x}(t) \end{aligned} \quad (2.54)$$

où  $H_{ij} = A_i - L_i C_j$ .

La conception d'observateur consiste à déterminer les gains  $L_i$  afin d'assurer la convergence de la dynamique de l'erreur d'estimation (2.54) vers zéro.

## OFD

### Règle $i$ d'observateur

$$\text{SI } z_1(k) \text{ est } F_1^i \text{ et } \dots z_p(k) \text{ est } F_p^i \text{ ALORS } \begin{cases} \hat{x}(k+1) = A_i \hat{x}(k) + B_i u(k) + L_i (y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) = C_i \hat{x}(k) \quad i = 1, \dots, r \end{cases} \quad (2.55)$$

L'observateur flou discret de T-S est obtenu par interconnexion de plusieurs observateurs locaux de type Luenberger. Il s'écrit d'une façon générale comme suit :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(k))\{A_i \hat{x}(k) + B_i u(k) + L_i (y(k) - \hat{y}(k))\} \\ \hat{y}(k) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(k))C_i \hat{x}(k) \end{cases} \quad (2.56)$$

où

$$\begin{cases} h_i(\hat{z}(k)) = \frac{w_i(\hat{z}(k))}{\sum_{i=1}^r w_i(\hat{z}(k))} \\ \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(k)) = 1 \end{cases} \quad (2.57)$$

L'équation (2.56) peut être réécrite comme suit:

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(k))\{A_i\hat{x}(k) + B_i u(k)\} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\hat{z}(k))h_j(\hat{z}(k))L_i C_j \{x(k) - \hat{x}(k)\} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\hat{z}(k))h_j(\hat{z}(k))\{(A_i - L_i C_j)\hat{x}(k) - B_i F_j \hat{x}(k) + L_i C_j x(k)\}\end{aligned}\quad (2.58)$$

où

$$u(k) = -\frac{\sum_{i=1}^r w_i(\hat{z}(k))F_i \hat{x}(k)}{\sum_{i=1}^r w_i(\hat{z}(k))} = -\sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(k))F_i \hat{x}(k)\quad (2.59)$$

En remplaçant (2.59) dans (1.11), on obtient l'équation du système en boucle fermée suivante:

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\hat{z}(k))h_j(\hat{z}(k))\{A_i x(k) - B_i F_j \hat{x}(k)\}\quad (2.60)$$

En tenant compte de l'erreur d'estimation du vecteur d'état  $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ , et de (2.60), la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k+1) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\hat{z}(k))h_j(\hat{z}(k))\{(A_i - L_i C_j)\}\tilde{x}(k) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(\hat{z}(k))H_{ii}\tilde{x}(k) + 2\sum_{j=1}^r h_i(\hat{z}(k))h_j(\hat{z}(k))\left(\frac{H_{ij} + H_{ji}}{2}\right)\tilde{x}(k)\end{aligned}\quad (2.61)$$

où  $H_{ij} = A_i - L_i C_j$

**Remarque :** Tout au long de ce travail, on supposera que toutes les variables de prémisses sont mesurables c'est à dire  $\hat{z}(t) = z(t)$  et que les fonctions d'activation de l'observateur sont les mêmes que celles caractérisant le modèle flous de T-S (2.21).

### 2.6.1. Conditions de stabilité du modèle bouclé avec observateur

Par extension des théorèmes 2.3 et 2.4, les théorèmes suivants sont obtenus pour les observateurs flous continus (OFC) et discret (OFD)

#### Observateur flou continu (OFC)

**Théorème 2.5 :**[Chad 02b] L'équilibre d'un modèle flou continu décrit par (2.54) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune  $P_2$  définie positive telle que :

$$H_{ii}^T P_2 + P_2 H_{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, r\quad (2.62)$$

$$\left(\frac{H_{ij} + H_{ji}}{2}\right)^T P_2 + P_2 \left(\frac{H_{ij} + H_{ji}}{2}\right) < 0 \quad i < j\quad (2.63)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$  avec  $H_{ij} = A_i - L_i C_j$

**Observateur flou discret (OFD)**

**Théorème 2.6 :** [Chad 02b] L'équilibre d'un modèle flou discret décrit par (2.61) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune et définie positive  $P_2$  telle que:

$$H_{ii}^T P_2 H_{ii} - P_2 < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (2.64)$$

$$\left( \frac{H_{ij} + H_{ji}}{2} \right)^T P_2 \left( \frac{H_{ij} + H_{ji}}{2} \right) - P_2 < 0 \quad i < j \quad (2.65)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(k))h_j(z(k)) = 0$  avec  $H_{ij} = A_i - L_i C_j$ .

**2.6.1.1. Linéarisation des conditions de stabilité**

Les théorèmes 2.5 et 2.6 donnent les conditions suffisantes pour la stabilité des systèmes en boucle fermée (2.54) et (2.61). Mais les inégalités matricielles (2.62) ~ (2.65) ne sont pas linéaires en les variables  $P_2$  et  $L_i$ . Des changements de variables permettent de rendre les inégalités matricielles (2.62) ~ (2.65) des LMIs en de nouvelles variables.

▪ **Les LMIs pour le théorème 2.5**

Les conditions de stabilité (2.62) ~ (2.65) peuvent être mis sous la forme LMI et après avoir effectué le changement de variable classique :  $N_i = P_2 L_i$  on obtient les LMIs suivantes en  $P_2$  et  $L_i$

$$\begin{cases} P_2 > 0 \\ A_i^T P_2 + P_2 A_i - C_i^T N_i^T - N_i C_i < 0 & i = 1, 2, \dots, r \\ A_i^T P_2 + P_2 A_i + A_j^T P_2 + P_2 A_j - C_j^T N_i^T - N_i C_j - C_i^T N_j^T - N_j C_i < 0 & i < j \end{cases} \quad (2.66)$$

▪ **Les LMIs pour le théorème 2.6**

En suivant le même raisonnement que pour le théorème précédent, avec l'utilisation du compliment de Schur, on obtient les LMIs suivantes en  $P_2$  et  $L_i$

$$\begin{cases} P_2 > 0 \\ \begin{bmatrix} P_2 & (P_2 A_i - N_i C_i)^T \\ (P_2 A_i - N_i C_i) & P_2 \end{bmatrix} > 0 & i = 1, 2, \dots, r \\ \begin{bmatrix} P_2 & (P_2 A_i + P_2 A_j - N_i C_j - N_j C_i)^T \\ (P_2 A_i + P_2 A_j - N_i C_j - N_j C_i) & P_2 \end{bmatrix} > 0 & i < j \end{cases} \quad (2.67)$$

## 2.7. Stabilité du modèle flou de T-S augmenté

Le modèle flou T-S augmenté est composé d'un modèle flou, d'un régulateur flou et d'un observateur flou, figure.2.10.

Dans ce cas, le calcul des poids de chaque règle s'effectue à partir des variables de prémisse. Deux cas sont à envisager :

- Les variables de prémisse sont mesurables et il est possible de calculer les poids des règles de l'observateur en remplaçant  $h_i(\hat{z}(t))$  par  $h_i(z(t))$  comme dans [Ma 98], [Tanaka 98], [Verm 98], [Chad 02b].
- Les variables de prémisse ne sont pas mesurables, il faut donc les reconstruire et utiliser leurs estimées dans le calcul des poids des règles de l'observateur par  $h_i(\hat{z}(t))$ . [Chad 02c], [Blanco 01], [Lauber 03].

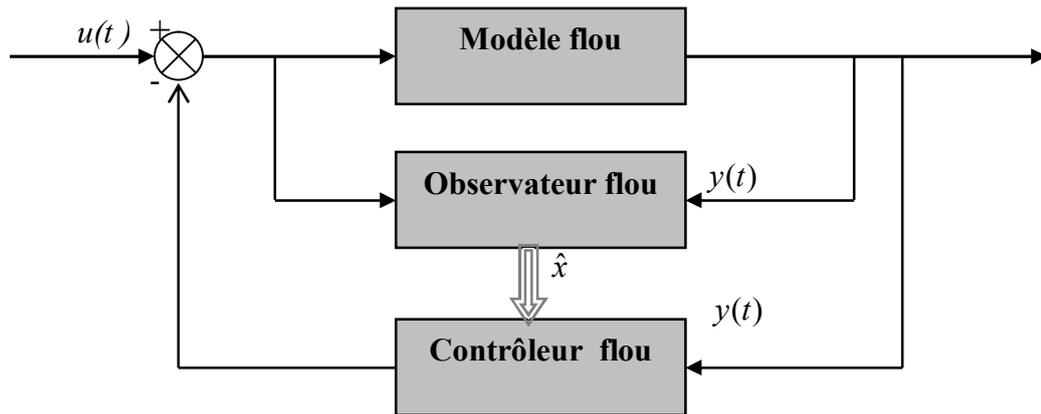


Fig.2.10 : Représentation du système augmenté.

La stabilité du modèle augmenté sera donc étudiée suivant les deux cas précédents.

### 2.7.1. Variables de prémisse mesurables

Dans ce cas, la loi de commande de type PDC est donnée par (2.68) pour le MFC et (2.69) pour le MFD:

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t))F_i\hat{x}(t) \quad (2.68)$$

$$u(k) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(k))F_i\hat{x}(k) \quad (2.69)$$

En substituant (2.48) et (2.68) dans (1.7) pour le MFC, le système augmenté est représenté par :

**MFC**

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\{A_i x(t) - B_i F_j \hat{x}(t)\} \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\{A_i x(t) - B_i F_j (x - \tilde{x})\} \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\{(A_i - B_i F_j)x(t) + B_i F_j \tilde{x}\}
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

avec

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\{(A_i - L_i C_j)\tilde{x}(t)\} \tag{2.71}$$

En combinant (2.70) et (2.71), on obtient le système augmenté suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \underbrace{\begin{bmatrix} A_i - B_i F_j & B_i F_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix}}_{V_{ij}} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

alors on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))V_{ij}x_a(t) \\
 &= \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_i(z(t))V_{ii}x_a(t) + 2\sum_{i<j}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\left(\frac{V_{ij} + V_{ji}}{2}\right)^T x_a(t)
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

avec

$$V_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i F_j & B_i F_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

$$x_a(t) = [x(t) \quad \tilde{x}(t)]^T \tag{2.75}$$

En substituant (2.56) et (2.69) dans (1.11) pour le MFD, on obtient :

**MFD**

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}(k+1) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))\{A_i x(k) - B_i F_j \tilde{x}(k)\} \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))\{(A_i - B_i F_j)x(k) + B_i F_j \tilde{x}(k)\}
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

avec

$$\tilde{x}(k+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))\{(A_i - L_i C_j)\tilde{x}(k)\} \tag{2.77}$$

En Combinant (2.76) et (2.77), on obtient le système discret augmenté suivant :

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \tilde{x}(k+1) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k)) \underbrace{\begin{bmatrix} A_i - B_i F_j & B_i F_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix}}_{V_{ij}} \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} x_a(k+1) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))V_{ij}x_a(k) \\ &= \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_i(z(k))V_{ii}x_a(k) + 2 \sum_{i<j}^r h_i(z(k))h_j(z(k)) \left( \frac{V_{ij} + V_{ji}}{2} \right)^T x_a(k) \end{aligned} \quad (2.79)$$

En appliquant les théorèmes 2.3 et 2.4 aux systèmes augmentés (2.73) et (2.79) respectivement, on dérive les théorèmes suivants :

### MFC

**Théorème 2.7 :** [Tanaka 98] L'équilibre d'un système augmenté continu décrit par (2.73) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune  $P$  définie positive telle que:

$$V_{ii}^T P + P V_{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (2.80)$$

$$\left( \frac{V_{ij} + V_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{V_{ij} + V_{ji}}{2} \right) < 0 \quad i < j \quad (2.81)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$ .

### MFD

**Théorème 2.8 :** [Tanaka 98] L'équilibre d'un système discret augmenté décrit par (2.79) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune  $P$  définie positive telle que:

$$V_{ii}^T P V_{ii} - P < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (2.82)$$

$$\left( \frac{V_{ij} + V_{ji}}{2} \right)^T P \left( \frac{V_{ij} + V_{ji}}{2} \right) - P < 0 \quad i < j \quad (2.83)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(k))h_j(z(k)) = 0$ .

**Remarque :** Il est possible, dans le cas où les variables de prémisse sont mesurables, de déterminer séparément les gains de commande  $F_i$  et les gains d'observation  $L_i$ .

#### 2.7.1.1. Propriété de séparation

La propriété de séparation, garantie pour les systèmes linéaires, est également valide dans le cas des modèles flous de T-S augmenté dont les variables de prémisse sont mesurables [Ma 98], [Yone 00]. Cette propriété garantit l'existence d'une fonction de Lyapunov, paramétrée par un scalaire positif  $\sigma$ , de la forme suivante:

$$V(x(t)) = x(t)^T P(\sigma)x(t) \quad (2.84)$$

$$P(\sigma) = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \sigma P_2 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

La fonction (2.84) avec  $\sigma \geq \max(\sigma_1, \sigma_2)$  respectant les conditions (2.86) et (2.87), est une fonction de Lyapunov qui prouve la stabilité du système augmenté continu (2.73).

$$\sigma_1 = \frac{PB_i F_i \{H_{ii}^T P_2 + P_2 H_{ii}\}^{-1} (PB_i F_i)^T}{G_{ii}^T P + PG_{ii}} \quad (2.86)$$

$$\sigma_2 = \frac{P(B_i F_j + B_j F_i) \{(H_{ij} + H_{ji})^T P_2 + P_2 (H_{ij} + H_{ji})\}^{-1} \{P(B_i F_j + B_j F_i)\}^T}{(G_{ij} + G_{ji})^T P + P(G_{ij} + G_{ji})} \quad (2.87)$$

**Preuve :** La stabilité du système augmenté décrit en (2.73) est assurée tel que (2.80) et (2.81). En substituant  $P(\sigma)$  dans (2.80) et (2.81) et en tenant compte de (2.74), on obtient :

$$\begin{bmatrix} G_{ii}^T P + PG_{ii} & PB_i F_i \\ (PB_i F_i)^T & \sigma(H_{ii}^T P_2 + P_2 H_{ii}) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.88)$$

$$\begin{bmatrix} (G_{ij} + G_{ji})^T P + P(G_{ij} + G_{ji}) & P(B_i F_j + B_j F_i) \\ (P(B_i F_j + B_j F_i))^T & \sigma((H_{ij} + H_{ji})^T P_2 + P_2 (H_{ij} + H_{ji})) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.89)$$

En appliquant le compliment de Schur aux inégalités (2.88) et (2.89), on trouve respectivement  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Il suffit de choisir  $\sigma$  suffisamment grand tel que  $\sigma \geq \max(\sigma_1, \sigma_2)$  pour que la fonction (2.84) soit une fonction de Lyapunov du système augmenté (2.73).

**Remarque :** La propriété de séparation pour le cas discret est obtenue de la même manière que pour le cas continu.

Dans ce qui suit, nous définissons les LMIs qui satisfaites le taux de décroissance pour les systèmes augmentés décrits par (2.73) pour le MFC et (2.79) pour le MFD.

Prouver la stabilité du système flou augmenté continu revient à s'assurer que, pour toutes les trajectoires  $x_a(t)$  vérifiant (2.73), on a pour  $\alpha > 0$

$$\exists P > 0 : \frac{dV(x_a(t))}{dt} + 2\alpha V(x_a(t)) < 0 \quad (2.90)$$

### MFC

**Théorème 2.9 :** [Tanaka 98] L'équilibre d'un système flou augmenté continu décrit par (2.73) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune  $P$  définie positive telle que:

$$V_{ii}^T P + P V_{ii} + 2\alpha P < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (2.91)$$

$$\left( \frac{V_{ij} + V_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{V_{ij} + V_{ji}}{2} \right) + 2\alpha P < 0 \quad i < j \quad (2.92)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$ .

où  $\alpha > 0$  représente le taux de décroissance de la fonction de Lyapunov quadratique (2.90), qu'on doit maximiser.

Prouver la stabilité de système flou augmenté discret revient à s'assurer que, pour toutes les trajectoires  $x_a(k)$  vérifiant (2.79), on a pour  $\alpha < 1$

$$\exists P > 0 : \Delta V(x_a(k)) \leq (\alpha^2 - 1)V(x_a(k)) \quad (2.93)$$

### MFD

**Théorème 2.10 :** [Tanaka 98] L'équilibre d'un système flou augmenté discret décrit par (2.79) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune définie positive  $P$  tels que:

$$V_{ii}^T P V_{ii} - \alpha^2 P < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (2.94)$$

$$\left( \frac{V_{ij} + V_{ji}}{2} \right)^T P \left( \frac{V_{ij} + V_{ji}}{2} \right) - \alpha^2 P < 0 \quad i < j \quad (2.95)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(k))h_j(z(k)) = 0$  et  $\alpha < 1$ .

Les conditions de stabilité (2.91)~(2.95) peuvent être mises sous la forme LMI en suivant le même raisonnement que dans la section (2.4.1.2).

Notons que la maximisation du taux de décroissance  $\alpha$  est un problème de minimisation de la plus grande valeur propre généralisée (GEVP) en  $P$  et  $\alpha$ . Sa formulation est la suivante:

Maximiser  $\alpha$

Sous les contraintes:

$$\begin{cases} X > 0 \\ P_2 > 0 \\ XA_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - B_i M_i + 2\alpha X < 0 & i = 1, \dots, r \\ A_i^T P_2 + P_2 A_i - C_i^T N_i^T - N_i C_i + 2\alpha P_2 < 0 & i = 1, \dots, r \\ XA_i^T + A_i X + XA_j^T + A_j X - M_j^T B_j^T - B_j M_j - M_i^T B_j^T - B_j M_i + 4\alpha X < 0 & i < j \\ A_i^T P_2 + P_2 A_i + A_j^T P_2 + P_2 A_j - C_i^T N_j^T - N_j C_i - C_j^T N_i^T - N_i C_j + 4\alpha P_2 < 0 & i < j \end{cases} \quad (2.96)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$ , où  $M_i = F_i X$  et  $N_i = P_2 L_i$

**Remarque:** Le problème ci-dessus est réduit à un problème de conception d'un contrôleur flou stable si  $\alpha = 0$ , les gains de contrôleur  $F_i$  et les gains d'observateur  $L_i$  sont obtenus comme suit :  $F_i = M_i P_1^{-1}$  et  $L_i = P_2^{-1} N_i$ .

La chose importante dans ce cas (variable de prémisse mesurable) est que les gains du régulateur et les gains d'observateur peuvent être conçus séparément c'est à dire on peut déterminer les gains  $F_i$  à partir des conditions du théorème 2.3, et les gains d'observateur  $L_i$  sont déterminés à partir des conditions du théorème 2.5.

### 2.7.2. Variables de prémisse non mesurables

Supposons qu'une partie des variables de prémisse ne sont pas mesurables, on note dans ce cas  $\hat{z}(t)$  une estimation de ces variables qui dépendent des variables d'état estimées  $\hat{x}(t)$ . Ainsi les fonctions d'activation du régulateur PDC sont différentes de celles des modèles flous (1.7) dans le cas continu et (1.11) dans le cas discret. Dans ce cas, la loi de commande est décrite par (2.51) pour le MFC, et par (2.59) pour le MFD:

En remplaçant (2.48) et (2.51) dans (1.7) pour le MFC, le système augmenté est représenté par:

**MFC**

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) V_{ijs} x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_j(\hat{z}(t)) V_{ijj} x_a(t) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s}^r h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) \left( \frac{V_{ijs} + V_{isj}}{2} \right) x_a(t) \end{aligned} \quad (2.97)$$

avec

$$V_{ijs} = \begin{bmatrix} A_i - B_i F_s & B_i F_s \\ S_{ijs}^1 & S_{ijs}^2 \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} S_{ijs}^1 &= (A_i - A_j) - (B_i - B_j) F_s + L_j (C_s - C_i) \\ S_{ijs}^2 &= A_j - L_j C_s + (B_i - B_j) F_s \end{aligned} \quad (2.99)$$

$F_s$  et  $L_j$  représente respectivement, les gains du régulateur et les gains d'observateur du vecteur d'état  $x_a(k) = [x(k) \quad \tilde{x}(k)]^T$  où  $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ .

En remplaçant (2.56) et (2.59) dans (1.11) pour le MFD, le système augmenté est représenté par:

**MFD**

$$\begin{aligned}
 x_a(k+1) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r h_i(z(k))h_j(\hat{z}(k))h_s(\hat{z}(k))V_{ijs}x_a(k) \\
 x_a(k+1) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(\hat{z}(k))h_j(\hat{z}(k))V_{ijj}x_a(k) \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j<s}^r h_i(z(k))h_j(\hat{z}(k))h_s(\hat{z}(k)) \left( \frac{V_{ijs} + V_{isj}}{2} \right) x_a(k) \quad (2.100)
 \end{aligned}$$

En appliquant les théorèmes 2.3 et 2.4 aux systèmes augmentés (2.97) et (2.100) respectivement, on obtient les théorèmes suivants :

**MFC**

**Théorème 2.11 :** [Tanaka 98] Le système augmenté continu décrit par (2.97) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune  $P$  définie positive tels que :

$$V_{ijj}^T P + P V_{ijj} < 0 \quad i = 1, \dots, r, \quad i \neq j, \quad j = 1, \dots, r \quad (2.101)$$

$$\left( \frac{V_{ijs} + V_{isj}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{V_{ijs} + V_{isj}}{2} \right) < 0 \quad i = 1, \dots, r-2, \quad j = 1, \dots, r-1, \quad s = 1, \dots, r \quad (2.102)$$

pour tous les  $i, j$  et  $s$ , sauf les triplets  $(i, j, s)$  tels que  $h_i(z(t))h_j(\hat{z}(t))h_s(\hat{z}(t)) = 0$ .

**MFD**

**Théorème 2.12 :** [Tanaka 98] Le système augmenté discret décrit par (2.100) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune  $P$  définie positive tels que :

$$V_{ijj}^T P V_{ijj} - P < 0 \quad i = 1, \dots, r, \quad i \neq j, \quad j = 1, \dots, r \quad (2.103)$$

$$\left( \frac{V_{ijs} + V_{isj}}{2} \right)^T P \left( \frac{V_{ijs} + V_{isj}}{2} \right) - P < 0 \quad i = 1, \dots, r-2, \quad j = 1, \dots, r-1, \quad s = 1, \dots, r \quad (2.104)$$

pour tous les  $i, j$  et  $s$ , sauf les triplets  $(i, j, s)$  tels que  $h_i(z(k))h_j(\hat{z}(k))h_s(\hat{z}(k)) = 0$ .

**Remarque:** Considérons le cas où la matrice  $C$  est commune, c'est à dire,  $C_1 = \dots = C_r = C$ .

Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
 S_{ijs}^1 &= (A_i - A_j) - (B_i - B_j)F_s \\
 S_{ijs}^2 &= (A_j - L_j C) + (B_i - B_j)F_s
 \end{aligned} \quad (2.105)$$

Les conditions des théorèmes 2.11 et 2.12 impliquent ceux des théorèmes 2.7 et 2.8, respectivement. Dans ce cas, il est difficile de transformer les conditions de stabilité (2.101) et

(2.102) dans le cas continu en LMIs par les techniques classiques de changement de variables. Une méthode proposée par [Chad 02] permet de synthétiser le régulateur PDC et l'observateur séparément mais non simultanément.

### 2.7.3. Exemple illustratif

L'objectif de cet exemple est de construire un régulateur flou et un observateur flou pour un système non linéaire, composé de quatre modèles locaux et comportant deux sorties et quatre états, décrit comme suit:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + \sin x_3(t) + (x_1^2(t) + 1)u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + 2x_2(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_1^2(t)x_2(t) + x_1(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = \sin x_3(t)$$

$$y_1(t) = (x_1^2(t) + 1)x_4(t) + x_2(t)$$

$$y_2(t) = x_2(t) + x_3(t)$$

Supposons que  $x_1(t)$  et  $x_3(t)$  sont observables. En d'autres termes,  $x_2(t)$  et  $x_4(t)$  sont estimés en utilisant un observateur flou. On suppose également que  $x_1(t)$  et  $x_3(t)$  sont dévalés dans les régions suivantes :

$$x_1(t) \in [-a \ a], \quad x_3(t) \in [-b \ b]$$

où  $a$  et  $b$  sont des valeurs positives. Les termes non linéaires sont  $x_1^2(t)$  et  $\sin(x_3(t))$ .

En utilisant la même procédure que dans la section (1.3.1), les termes non linéaires peuvent être représentés par:

$$x_1^2(t) = F_1^1(x_1(t)) \times a^2 + F_1^2(x_1(t)) \times 0$$

$$\sin x_3(t) = F_2^1(x_3(t)) \times 1 + F_2^2(x_3(t)) \times \frac{\sin b}{b}$$

où

$$\{F_1^1(x_1(t)), F_1^2(x_1(t)), F_2^1(x_3(t)), F_2^2(x_3(t))\} \in [0 \ 1]$$

$$F_1^1(x_1(t)) + F_1^2(x_1(t)) = 1, \quad F_2^1(x_3(t)) + F_2^2(x_3(t)) = 1$$

La solution de ces équations donne les fonctions d'appartenance des ensembles flous suivantes :

$$F_1^1(x_1(t)) = \frac{x_1^2}{a^2}$$

$$F_1^2(x_1(t)) = 1 - F_1^1(x_1(t)) = 1 - \frac{x_1^2}{a^2}$$

$$F_2^1(x_3(t)) = \begin{cases} \frac{b \cdot \sin x_3(t) - x_3(t) \cdot \sin b}{x_3(t) \cdot (b - \sin b)}, & x_3(t) \neq 0 \\ 1 & x_3(t) = 0 \end{cases} \quad (2.106)$$

$$F_2^2(x_3(t)) = 1 - F_2^1(x_3(t))$$

$$= \begin{cases} \frac{b \cdot (x_3(t) - \sin x_3(t))}{x_3(t) \cdot (b - \sin b)}, & x_3(t) \neq 0 \\ 0 & x_3(t) = 0 \end{cases}$$

Par l'utilisation de ces ensembles flous, le système non linéaire peut être représenté par le modèle flou de T-S suivant:

**Règle 01:**

$$\text{SI } x_1(t) \text{ est } F_1^1 \text{ et } x_3(t) \text{ est } F_2^1 \quad \text{ALORS} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t) \\ y(t) = C_1 x(t) \end{cases}$$

**Règle 02:**

$$\text{SI } x_1(t) \text{ est } F_1^1 \text{ et } x_3(t) \text{ est } F_2^2 \quad \text{ALORS} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) \end{cases}$$

**Règle 03:**

$$\text{SI } x_1(t) \text{ est } F_1^2 \text{ et } x_3(t) \text{ est } F_2^1 \quad \text{ALORS} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_3 x(t) + B_3 u(t) \\ y(t) = C_3 x(t) \end{cases}$$

**Règle 04:**

$$\text{SI } x_1(t) \text{ est } F_1^2 \text{ et } x_3(t) \text{ est } F_2^2 \quad \text{ALORS} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_4 x(t) + B_4 u(t) \\ y(t) = C_4 x(t) \end{cases}$$

$$\text{où } x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \quad x_4(t)]^T$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 + a^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 + a^2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \sin b/b & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin b/b & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1+a^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1+a^2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \sin b/b & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin b/b & 0 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notons que ce modèle flou de T-S représente exactement le système non linéaire dans les conditions suivantes:  $x_1(t) \in [-a \ a]$ ,  $x_3(t) \in [-b \ b]$  avec  $a = 0.8$  et  $b = 0.6$ .

Dans cet exemple, les variables de prémisse sont indépendantes des variables à estimer  $x_2(t)$  et  $x_4(t)$ , ce qui permet d'utiliser la procédure de conception du premier cas (variable de prémisse mesurables)

D'abord, les inégalités matricielles (2.80) et (2.81) sont non linéaires, on suit le même raisonnement que dans la section (2.4.1.2) pour les rendre sous forme LMIs.

Le problème de conception du régulateur flou et d'un d'observateur flou est posé de la manière suivante :

Trouver  $X > 0$ ,  $P_2 > 0$ ,  $M_1, \dots, M_4$  et  $N_1, \dots, N_4$

Satisfaisants :

$$\left\{ \begin{array}{l} X > 0 \\ P_2 > 0 \\ XA_i^T + A_iX - M_i^T B_i^T - B_i M_i < 0 \quad i = 1, \dots, 4 \\ A_i^T P_2 + P_2 A_i - C_i^T N_i^T - N_i C_i < 0 \quad i = 1, \dots, 4 \\ XA_i^T + A_iX + XA_j^T + A_jX - M_j^T B_i^T - B_i M_j - M_i^T B_j^T - B_j M_i < 0 \quad i < j \\ A_i^T P_2 + P_2 A_i + A_j^T P_2 + P_2 A_j - C_i^T N_j^T - N_j C_i - C_j^T N_i^T - N_i C_j < 0 \quad i < j \end{array} \right.$$

où  $P_1 = X^{-1}$ ,  $F_i = M_i P_1$ ,  $L_i = P_2^{-1} N_i$

Les gains du régulateur  $F_i$  et d'observateur  $L_i$  satisfaisant les LMIs ci-dessus sont:

$$F_1 = [22.3792 \ 172.6104 \ -47.4784 \ -16.9102], \quad F_2 = [22.3338 \ 172.2200 \ -47.4046 \ -16.8649]$$

$$F_3 = [31.8901 \ 245.2304 \ -66.9256 \ -23.9672], \quad F_4 = [31.8096 \ 244.5895 \ -66.7800 \ -23.8978]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.2616 & -3.2779 \\ -0.2223 & 22.3731 \\ 0.5161 & -13.8333 \\ 0.5606 & -16.1130 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0.2545 & -3.3219 \\ -0.1429 & 22.4151 \\ 0.4627 & -13.8610 \\ 0.5090 & -16.1775 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0.2638 & -0.8396 \\ 0.1131 & 11.7570 \\ 0.2754 & -7.1700 \\ 0.4229 & -7.7307 \end{bmatrix}, \quad L_4 = \begin{bmatrix} 0.2566 & -0.8836 \\ 0.2044 & 11.7929 \\ 0.2136 & -7.1936 \\ 0.3649 & -7.7921 \end{bmatrix}$$

Les figures suivantes montrent les résultats de simulation où : la variation des états  $x_1(t)$  et  $x_3(t)$  est représentée sur les figures 2.11 et 2.13 respectivement. La variation des états estimés  $\hat{x}_2(t)$  et  $\hat{x}_4(t)$  par l'observateur flou est représentée sur les figures 2.12 et 2.14 respectivement. La commande  $u(t)$  est montrée dans la figure 2.15.

Le contrôleur flou conçu stabilise le système augmenté pour les conditions initiales  $\hat{x}(0) = [0 \ 0.05 \ 0 \ 0]$  c'est à dire  $x(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , ainsi que l'observateur flou estime les états non observables du système non linéaire c'est à dire  $x_{2,4}(t) - \hat{x}_{2,4}(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  pour  $x_1(t) \in [-0.8 \ 0.8]$  et  $x_3(t) \in [-0.6 \ 0.6]$ .

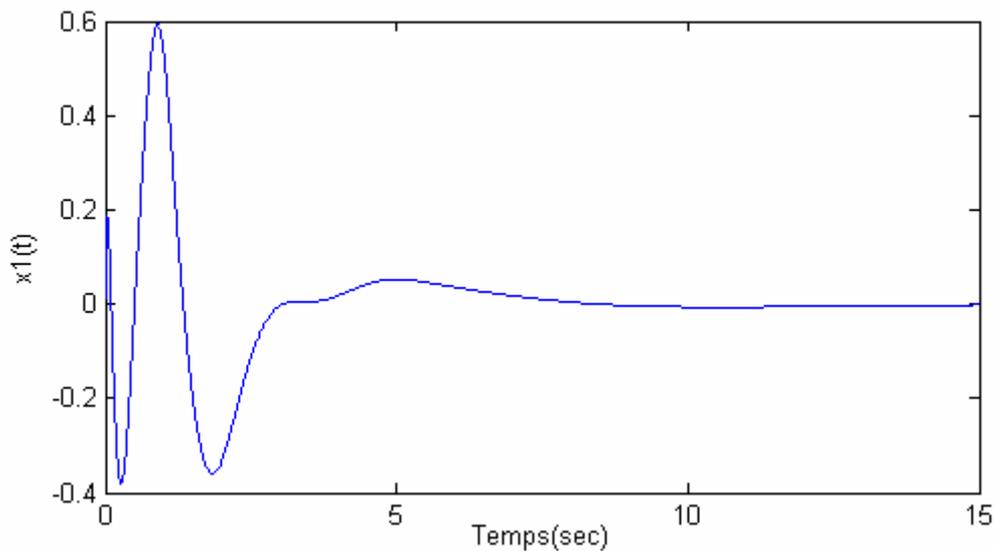


Fig.2.11. La variation de l'état  $x_1(t)$ .

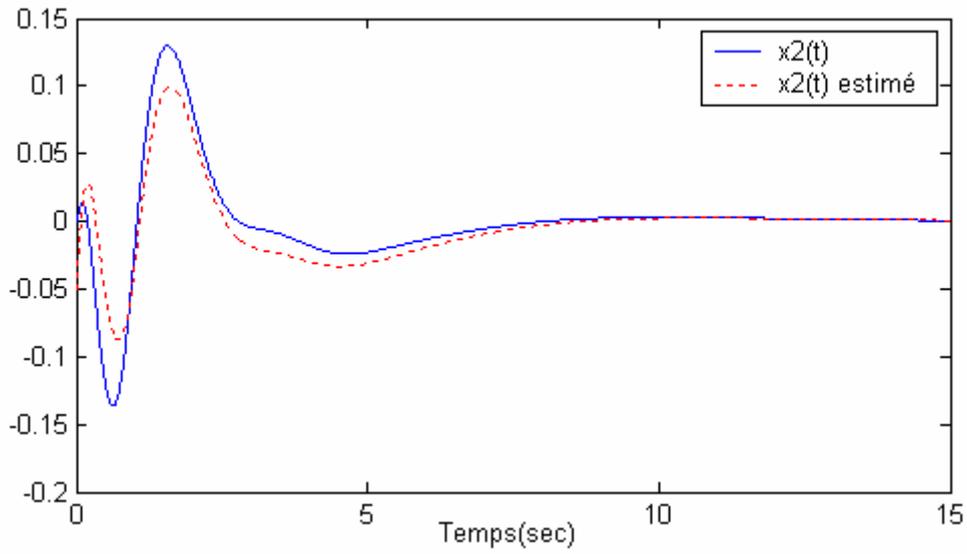


Fig 2.12 La variation de l'état  $x_2(t)$  et son estimé

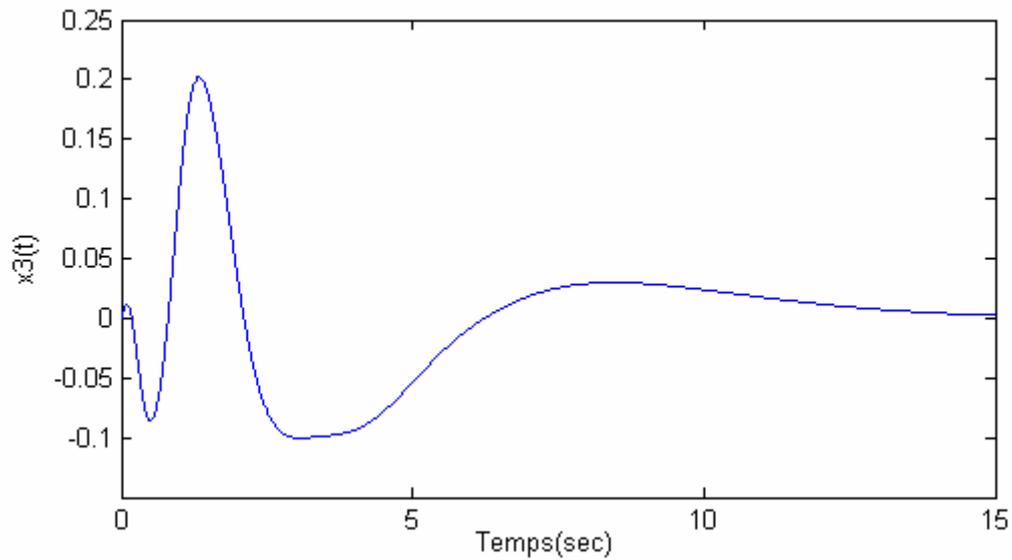


Fig.2.13. La variation de l'état  $x_3(t)$ .

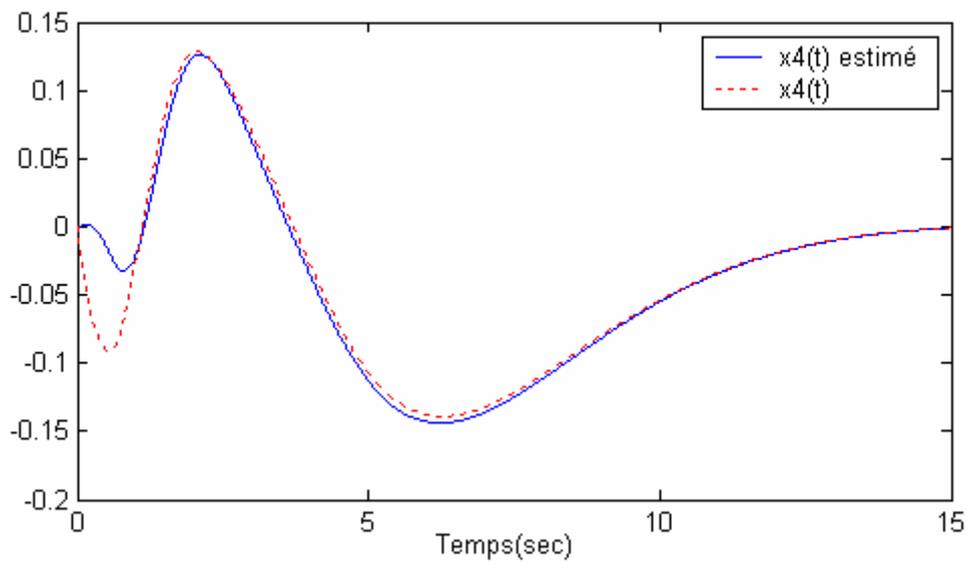
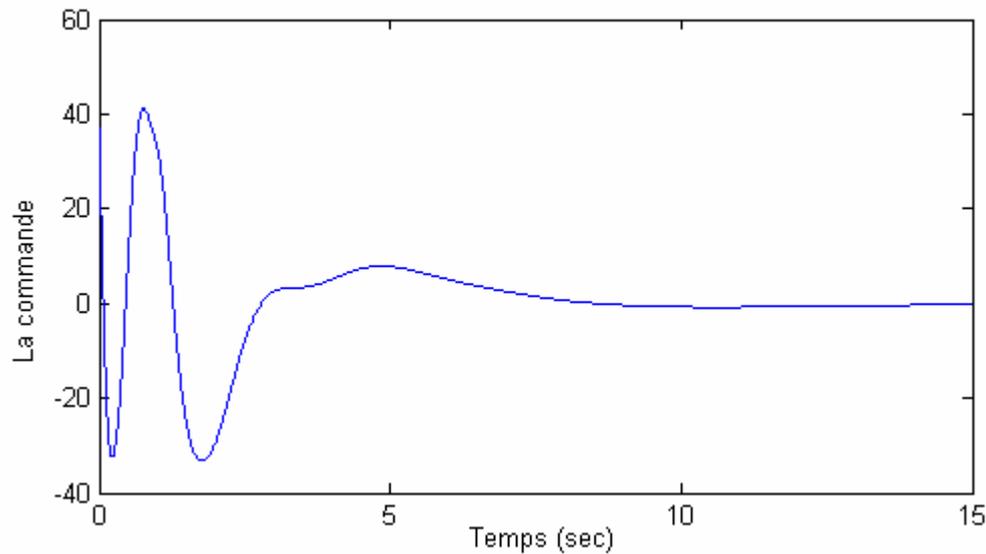


Fig.2.14. La variation de l'état  $x_4(t)$  et son estimé.

Fig.2.15. La commande  $u(t)$ .

## 2.8. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié les problèmes de la stabilité et de la stabilisation basée sur la fonction de Lyapunov de type quadratique pour les modèles flous de T-S continus et discrets en utilisant le concept PDC. Différents résultats obtenus avec de telles fonctions, en stabilité, stabilisation avec et sans taux de décroissance ont également été rappelés. Des méthodes de linéarisation existantes sont appliquées, ce qui permet de transformer les conditions de stabilité en LMIs résolubles par les outils numériques.

L'estimation d'état à base de modèle flou de T-S est également considérée. Dans ce sens, la commande de système augmenté continu et discret dans le cas des variables de prémisse mesurables est considérée. Une propriété de séparation a été établie. Des exemples de simulation ont également été présentés concernant l'approche LMI.

Les conditions de stabilité obtenues sont assez conservatives car elles demandent la stabilité de tous les modèles (dominants et croisées). Dans le chapitre suivant, on propose des conditions plus relâchées permettant de réduire le conservatisme d'obtention des gains de commande.

## CHAPITRE III

# Relâchement des conditions de stabilité

### 3.1. Introduction

Le chapitre précédent montre que les analyses de la stabilité des modèles flous de T-S sont réduites à un problème de détermination d'une matrice commune  $P = P^T$  entre toutes les règles. Ainsi, disposant d'un modèle de T-S, le problème fondamental qui se pose lors de la synthèse de commande du type PDC est celui du conservatisme des résultats de stabilité. En effet, si le nombre de règles  $r$  est grand, il serait difficile de trouver une matrice  $P$  commune qui satisfait les conditions de stabilité classique. Il est alors clair que le nombre de règles est un facteur essentiel pour réduire le conservatisme des résultats issus des conditions classiques de stabilité. Pour alléger ce problème, de nouvelles conditions moins conservatives seront données dans ce chapitre.

Dans le but d'avoir des résultats beaucoup moins conservatifs, des conditions de relaxation LMI ont fait l'objet de plusieurs travaux notamment ceux développés dans [Tanaka 98] où les auteurs se basent sur le nombre maximal de règles actives à chaque instant pour réduire le conservatisme de conditions de stabilisation. Kim et Lee [Kim 00], Chun-Hsiung et al [Chun 06] s'inspirent de ces travaux, en introduisant des conditions supplémentaires. Dans [Teixeira 03], les auteurs proposent d'utiliser des fonctions de Lyapunov multiples pour rechercher plusieurs matrices définies positives au lieu de chercher qu'une seule matrice commune, comme dans le cas de stabilisation par la fonction de Lyapunov quadratique.

On peut regrouper ces relaxations en deux familles. La première famille est celle des relaxations qui n'introduisent aucune variable supplémentaire. La deuxième famille regroupe les autres types de relaxations. La principale différence en termes d'efficacité est que les relaxations introduisant des variables supplémentaires produisent des problèmes LMI qui sont moins conservatifs mais plus longs à résoudre voire impossible à cause de la puissance de calcul des micro-ordinateurs standards.

Parmi les résultats de relaxation utilisant une fonction de Lyapunov quadratique, nous pouvons citer des conditions de relaxations très pertinentes proposées par [Tanaka 98], [Kim 00] qui sont détaillées dans ce chapitre. On présente également un exemple de la stabilisation adaptative quand il existe des incertitudes sur le système. En conclusion, on obtient de nouvelles conditions LMI satisfaisant la stabilité globale si les fonctions d'appartenance se trouvent à l'extérieur de l'intervalle  $[0, 1]$ .

### 3.2. Conditions de stabilité relâchées des modèles flous de T-S

Nous avons montré que l'analyse de la stabilité du système flou est réduite à un problème de détermination d'une matrice commune  $P$ . Le problème fondamental qui se pose dans ce cas est celui du conservatisme des conditions sur les gains de retour d'état  $F_i$ . Par conséquent, pour avoir des résultats beaucoup moins conservatifs, on propose deux types de conditions relâchées suffisantes faisant intervenir ou non des variables additionnelles. Le premier qui est le plus intéressant, permet d'obtenir des conditions sans variables additionnelles et ainsi d'alléger la résolution des problèmes à base de contraintes LMI. En effet, si le nombre de règles  $r$  est grand, il serait difficile de trouver une matrice commune  $P$  qui satisfait les conditions de stabilité du théorème 2.3 dans le cas continu et 2.4 dans le cas discret. Les théorèmes suivants proposent des conditions relâchées qui améliorent la conservativité des conditions précédentes.

D'abord, on utilise deux propriétés concernant le nombre maximal de règles actives à chaque instant. Ces propriétés sont explicitées dans les corollaires suivants [Tanaka 98] :

**Corollaire 3.1 :**

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) - \frac{1}{r-1} \sum_{i < j} 2h_i(z(t))h_j(z(t)) \geq 0 \quad (3.1)$$

où  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$  et  $h_i(z(t)) \geq 0$  pour tous les  $i$ , vérifie la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) - \frac{1}{r-1} \sum_{i < j}^r 2h_i(z(t))h_j(z(t)) = \frac{1}{r-1} \sum_{i < j}^r \{h_i(z(t)) - h_j(z(t))\}^2 \geq 0 \quad (3.2)$$

**Corollaire 3.2** : Si  $s$  est le nombre maximal de règles actives à chaque instant  $t$ , où  $1 < s \leq r$ , alors :

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) - \frac{1}{s-1} \sum_{i < j}^r 2h_i(z(t))h_j(z(t)) \geq 0 \quad (3.3)$$

où  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$  et  $h_i(z(t)) \geq 0$  pour tous les  $i$ .

Les nouvelles conditions de stabilité sont définies par les théorèmes suivants :

### MFC

**Théorèmes 3.1** : [Tanaka 98] L'équilibre d'un système flou continu décrit par (2.21) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune définie positive  $P$  et une matrice commune semi-définie positive  $Q$  telle que:

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + (s-1)Q < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.4)$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - Q < 0 \quad i < j \quad (3.5)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$  avec  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ ,  $s$  est le nombre de règles activées simultanément, tel que  $1 < s \leq r$ , avec  $r$  le nombre de règles.

**Preuve** : Considérons la fonction de Lyapunov suivante:

$V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$ ,  $P > 0$ . On obtient alors

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x(t)^T (A_i - B_i F_j)^T P x(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T(t) P (A_i - B_i F_j) x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x(t)^T \left\{ (A_i - B_i F_j)^T P + P (A_i - B_i F_j) \right\} x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) x(t)^T \{ G_{ii}^T P + P G_{ii} \} x(t) \\ &\quad + 2 \sum_{i < j}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T(t) \left\{ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \right\} x(t) \end{aligned}$$

où  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$

De la condition (3.5) et du corollaire 3.2, on obtient:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))x(t)^T \left\{ (G_{ii}^T P + P G_{ii}) \right\} x(t) + 2 \sum_{i<j}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x(t)^T Q x(t) \\ &\leq \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))x(t)^T \left\{ (G_{ii}^T P + P G_{ii}) \right\} x(t) + (s-1) \sum_{i<j}^r h_i^2(z(t))x(t)^T Q x(t) \\ \dot{V}(x(t)) &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))x(t)^T \left\{ (G_{ii}^T P + P G_{ii} + (s-1)Q) \right\} x(t). \end{aligned}$$

Si la condition (3.4) est vérifiée, alors  $\dot{V}(x(t)) < 0$ .

▪ **Les LMIs pour le théorème 3.1**

Les conditions de stabilité (3.4) et (3.5) peuvent être mis sous la forme d'LMI après avoir effectué le changement de variable classique :  $X = P^{-1}, M_i = F_i P^{-1}, Y = X Q X$ .

En pré- et post- multipliant par  $X = P^{-1}$ , on obtient les LMIs suivantes en  $X, Y$  et  $M_i$

$$\begin{cases} X > 0 \\ Y \geq 0 \\ X A_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - B_i M_i + (s-1)Y < 0 & i = 1, \dots, r \\ X A_i^T + A_i X + X A_j^T + A_j X - M_j^T B_i^T - B_i M_j - M_i^T B_j^T - B_j M_i - 2Y < 0 & i < j \end{cases} \quad (3.6)$$

**MFD**

**Théorèmes 3.2 :** [Tanaka 98] L'équilibre d'un système flou discret décrit par (2.22) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune définie positive  $P$  et une matrice commune semi-définie positive  $Q$  telle que:

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P + (s-1)Q < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.7)$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P - Q < 0 \quad i < j \quad (3.8)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(k))h_j(z(k)) = 0$  avec  $G_{ij} = A_i - B_i F_j, s$  le nombre de règles activées simultanément, tel que  $1 < s \leq r$ , avec  $r$  le nombre de règles.

**Preuve :** Considérons la fonction de Lyapunov suivante:

$$V(x(k)) = x^T(k) P x(k), \quad P > 0.$$

alors

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$$

$$\begin{aligned}
 \Delta V(x(k)) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))h_k(z(k))h_l(z(k))x(k)^T \{G_{ij}^T P G_{kl} - P\}x(k) \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))h_k(z(k))h_l(z(k))x(k)^T \\
 &\quad \times \{(G_{ij} + G_{ji})^T P (G_{kl} + G_{lk}) - 4P\}x(k) \\
 &\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))x(k)^T \{(G_{ij} + G_{ji})^T P (G_{ij} + G_{ji}) - 4P\}x(k) \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))x(k)^T \left\{ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P \right\} x(k) \\
 &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(k))x(k)^T \{G_{ii} P G_{ii} - P\}x(k) \\
 &\quad + 2 \sum_{i < j}^r h_i(z(k))h_j(z(k)) \left\{ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P \right\} x(k)
 \end{aligned}$$

De (3.8) et du corollaire 3.2, le membre côté droit de l'inégalité ci-dessus devient:

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{i=1}^r h_i^2(z(k))x(k)^T (G_{ii} P G_{ii} - P)x(k) + 2 \sum_{i < j}^r h_i(z(k))h_j(z(k))x(k)^T Qx(k) \\
 &\leq \sum_{i=1}^r h_i^2(z(k))x(k)^T (G_{ii} P G_{ii} - P)x(k) + (s-1) \sum_{i=1}^r h_i^2(z(k))x(k)^T Qx(k) \\
 &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(k))x(k)^T \{G_{ii} P G_{ii} - P + (s-1)Q\}x(k).
 \end{aligned}$$

Si la condition (3.7) est vérifiée, alors  $\Delta V(x(k)) < 0$ .

▪ **Les LMIs pour le théorème 3.2**

En pré- et post- multipliant par  $X = P^{-1}$  avec l'utilisation du compliment de Schur, on obtient les LMIs suivantes en  $X, Y$  et  $M_i$

$$\begin{cases}
 X > 0 \\
 Y \geq 0 \\
 \begin{bmatrix} X - (s-1)Y & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X - B_i M_i & X \end{bmatrix} > 0 & i = 1, \dots, r \\
 \begin{bmatrix} X + Y & \frac{1}{2} \{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i\}^T \\ \frac{1}{2} \{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i\} & X \end{bmatrix} > 0 & i < j
 \end{cases} \quad (3.9)$$

Par la suite, on propose de nouvelles conditions de relaxation plus efficaces qui nécessitent l'introduction de variables additionnelles permettant de réduire le degré de conservatisme des résultats précédents par la représentation des interactions entre les sous-modèles flous dans une matrice unique. Ces conditions sont données par les théorèmes suivants:

**MFC**

**Théorème 3.3 :** [Kim 00] L'équilibre d'un modèle flou continu (2.21) est quadratiquement stable s'il existe des matrices symétriques  $P$  et  $Q_{ij}$  telles que:

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + Q_{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.10)$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) + Q_{ij} < 0 \quad i < j \quad (3.11)$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1r} \\ Q_{12} & Q_{22} & \cdots & Q_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1r} & Q_{2r} & \cdots & Q_{rr} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.12)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$  avec  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ .

**Preuve:** Considérons la fonction de Lyapunov suivante:  $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$

La dérivé par rapport au temps de  $V(x(t))$  le long de la trajectoire de  $x(t)$  vérifiant (2.21) est:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2 x^T G_{ii}^T P x + 2 \sum_{i < j} h_i h_j x^T \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P x \\ &\quad + \sum_{i=1}^r h_i^2 x^T P G_{ii} x + \sum_{i < j} h_i h_j x^T P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2 x^T \{ G_{ii}^T P + P G_{ii} \} x \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} h_i h_j x^T \left\{ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \right\} x \\ &\leq - \sum_{i=1}^r h_i^2 x^T Q_{ii} x - 2 \sum_{i < j} h_i h_j x^T Q_{ij} x \\ &= - \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 x \\ h_2 x \\ \vdots \\ h_r x \end{bmatrix}}_{H^T} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1r} \\ Q_{12} & Q_{22} & \cdots & Q_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1r} & Q_{2r} & \cdots & Q_{rr} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 x \\ h_2 x \\ \vdots \\ h_r x \end{bmatrix}}_H \\ &= x^T H^T (-\tilde{Q}) H x \end{aligned}$$

Si la condition (3.12) est vérifiée, alors  $\dot{V}(x(t)) < 0$  et le système flou continu (2.21) est quadratiquement stable.

▪ **Les LMIs pour le théorème 3.3**

En pré- et post- multipliant par  $X = P^{-1}$ , on obtient les LMIs suivantes en  $X, Y$  et  $M_i$ .

$$\begin{cases} X > 0 \\ XA_i^T + A_iX - M_i^T B_i^T - B_i M_i + Y_{ii} < 0 & i = 1, \dots, r \\ XA_i^T + A_iX + XA_j^T + A_jX - M_j^T B_i^T - B_i M_j - M_i^T B_j^T - B_j M_i + 2Y_{ij} < 0 & i < j \\ \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1r} \\ Y_{12} & Y_{22} & \dots & Y_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{1r} & Y_{2r} & \dots & Y_{rr} \end{bmatrix} > 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

avec  $Y_{ij} = XQ_{ij}X$  et  $F_i = M_i X^{-1}$

Dans ce théorème, comparé avec le théorème 3.1, les interactions entre les sous-modèles sont regroupés dans une matrice unique  $\tilde{Q}$  et le conservatisme produit à cause de ces interactions est réduit.

**MFD**

**Théorème 3.4 :** [Kim 00] L'équilibre d'un modèle flou discret (2.22) est quadratiquement stable s'il existe des matrices symétriques  $P$  et  $Q_{ij}$  telles que:

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P + Q_{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.14)$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P + Q_{ij} < 0 \quad i < j \quad (3.15)$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1r} \\ Q_{12} & Q_{22} & \dots & Q_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1r} & Q_{2r} & \dots & Q_{rr} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.16)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(k))h_j(z(k)) = 0$  avec  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ .

**Preuve :** Le même raisonnement que pour la preuve précédente est adopté.

▪ **Les LMIs pour le théorème 3.4**

En pré- et post- multipliant par  $X = P^{-1}$  et en utilisant le compliment de Schur, on obtient

les LMIs suivantes en  $X, Y$  et  $M_i$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} X > 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} X - Y_{ii} & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X - B_i M_i & X \end{array} \right] > 0 \quad i = 1, \dots, r \\ \left[ \begin{array}{cc} X - Y_{ij} & \frac{1}{2} \{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i\}^T \\ \frac{1}{2} \{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i\} & X \end{array} \right] > 0 \quad i < j \\ \left[ \begin{array}{cccc} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1r} \\ Y_{12} & Y_{22} & \cdots & Y_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{1r} & Y_{2r} & \cdots & Y_{rr} \end{array} \right] > 0 \end{array} \right. \quad (3.17)$$

avec  $Y_{ij} = XQ_{ij}X$  et  $F_i = M_i X^{-1}$

Pour montrer l'efficacité des nouvelles conditions relâchées, nous comparons les résultats des théorèmes 2.3, 3.1 et 3.3 pour les MFC à trouver l'exemple illustratif suivant :

### 3.2.1. Exemple illustratif

Considérons à titre d'exemple le modèle flou continu décrit par deux modèles locaux instables paramétrés par  $a$  et  $b$ , selon les deux règles suivantes:

#### Règle 1:

SI  $x_1$  est  $F_1^1$  ALORS  $\dot{x}(t) = A_1 x + B_1 u$  avec  $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

#### Règle 2:

SI  $x_2$  est  $F_1^2$  ALORS  $\dot{x}(t) = A_2 x + B_2 u$  avec  $A_2 = \begin{bmatrix} a & -10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B_2 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$

Les gains locaux  $F_i$  de retour d'état sont déterminés par la sélection des valeurs propres  $[-1 \ -2]$  appropriées à chaque modèle local de la loi de commande PDC. On varie les paramètres  $a$  en fonction des paramètres  $b$ . Les résultats obtenus sont montrés sur les figures 3.1, 3.2 et 3.3.

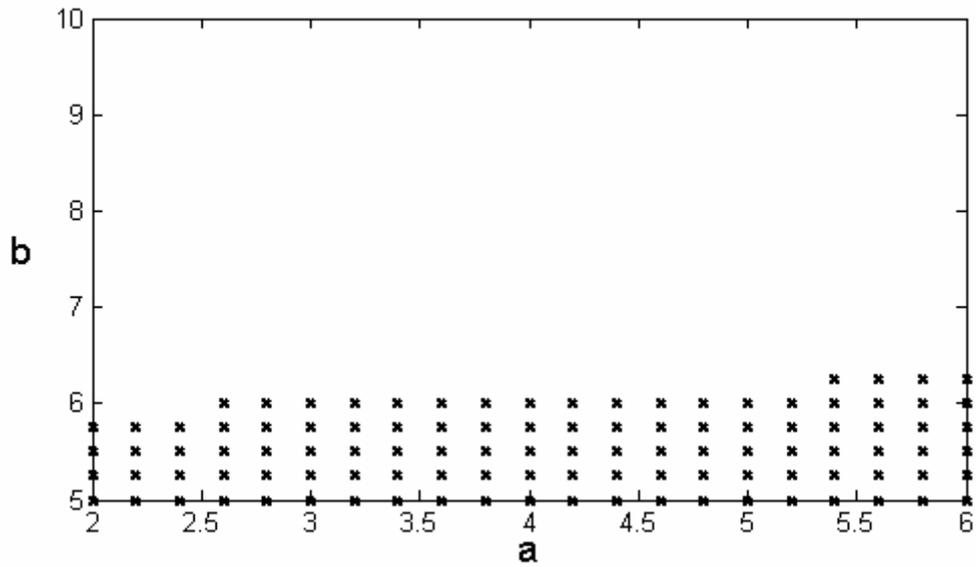


Fig.3.1. Le champ de faisabilité du théorème 2.3.

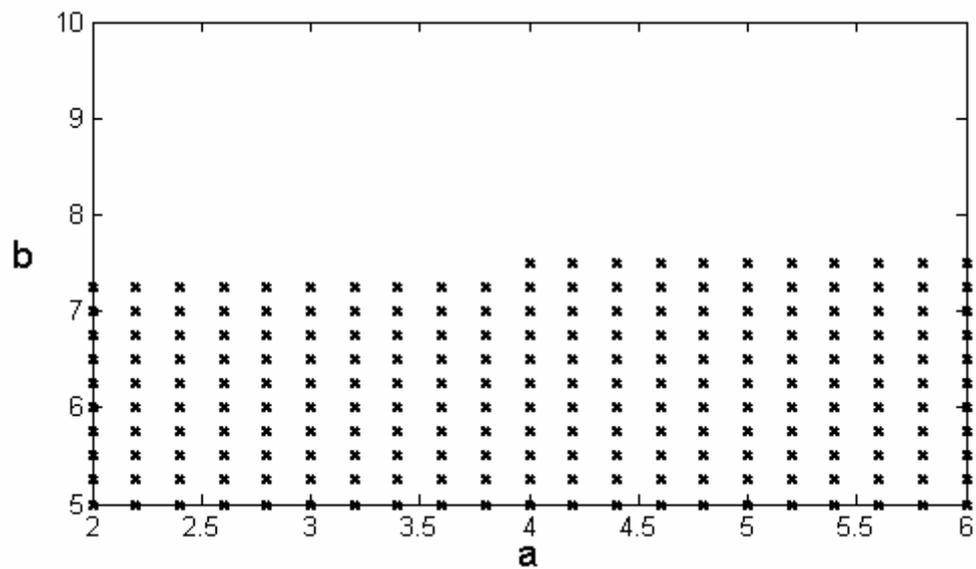


Fig.3.2. Le champ de faisabilité du théorème 3.1.

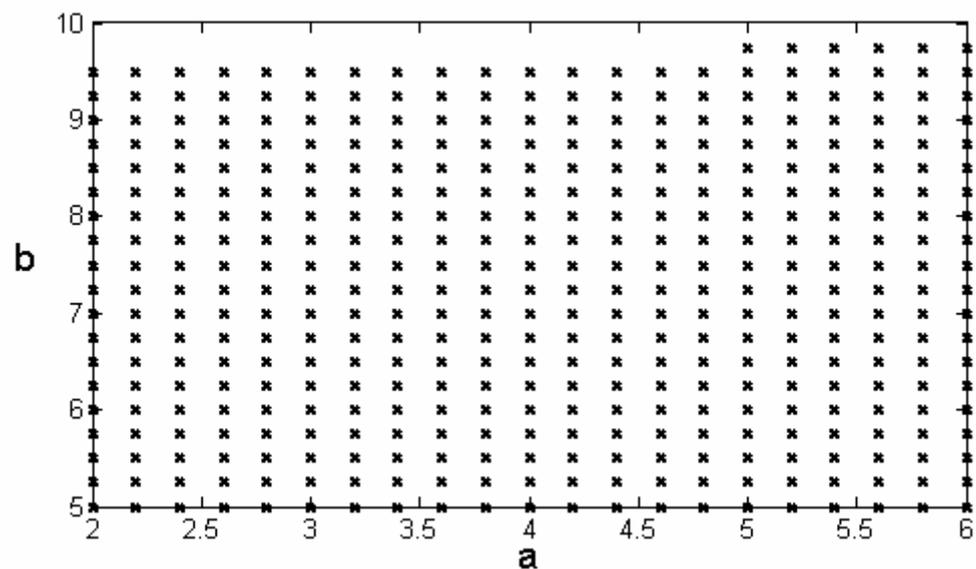


Fig.3.3. Champ de faisabilité du théorème 3.3.

Les figures 3.1, 3.2 et 3.3 montrent les champs de faisabilité des conditions de stabilité des théorèmes 2.3, 3.1 et 3.3 respectivement, où la marque  $\mathbf{x}$  dénote que ces conditions décrites sous forme LMIs sont faisables. Ces surfaces sont obtenues pour les paramètres  $a > 2$  et  $b > 5$ . Grâce à l'existence de la matrice commune  $Q > 0$  dans le théorème 3.1, le champ faisable est plus large comparé à celui du théorème 2.3, de même grâce à l'existence des matrice commune  $Q_{ij} > 0$  dans le théorème 3.3, on trouve que le champ faisable est plus large comparé à celui du théorème 3.1. Cela montre bien que les conditions du théorème 2.3 sont plus conservatives.

La figure suivante montre les relations entre les conditions relâchées et les conditions conventionnelles (classiques).

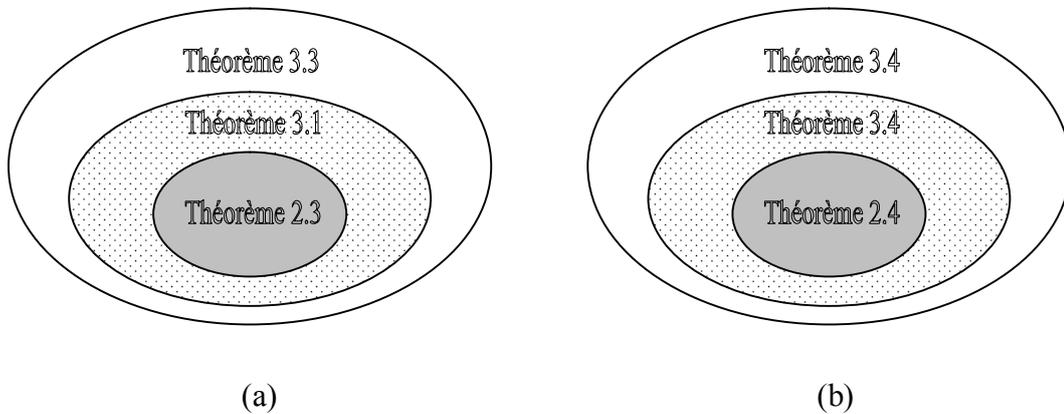


Fig.3.4. Les relations entre les conditions relâchées et les conditions conventionnelles.

(a) Cas continu. (b) Cas discret.

### 3.3. Les LMIs pour les régulateurs flous

Dans cette section on présente les nouvelles conditions de stabilité sous forme d'LMIs satisfaisant les régulateurs flous. Notons qu'il y a d'autres moyens d'introduire des notions de performances à l'aide de contraintes LMI, par exemple: Pour garantir une vitesse de convergence à l'état on peut introduire un paramètre dans la fonction de Lyapunov (taux de décroissance), c'est à dire trouver  $\alpha > 0$  telle que  $\dot{V}(x) + 2\alpha V(x) < 0$ .

Introduire des contraintes sur l'entrée et/ou la sortie. Cela se fait par l'ajout de contraintes LMI supplémentaires.

#### 3.3.1. La stabilité

A partir des conditions relâchées du théorème 3.1, le problème de trouver les gains de retour d'état  $F_i$  pour le MFC est défini comme suit:

**MFC**

Trouver  $X > 0$ ,  $Y \geq 0$  et  $M_1, \dots, M_r$

Satisfaisants les LMIs suivantes

$$\begin{cases} X > 0 \\ Y \geq 0 \\ XA_i^T + A_iX - M_i^T B_i^T - B_i M_i + (s-1)Y < 0 & i = 1, \dots, r \\ XA_i^T + A_iX + XA_j^T + A_jX - M_j^T B_i^T - B_i M_j - M_i^T B_j^T - B_j M_i - 2Y < 0 & i < j \end{cases} \quad (3.18)$$

où

$$X = P^{-1}, M_i = F_i X \text{ et } Y = XQX \quad (3.19)$$

Les conditions ci-dessus sont des LMIs en  $X, Y$  et  $M_i$ , le problème de détermination de ces matrices est un problème convexe de faisabilité. Numériquement, ce problème peut être résolu très efficacement à l'aide de la méthode des points intérieurs. Les gains  $F_i$ , la matrice commune  $P$  et la matrice commune  $Q$  peuvent être obtenus comme suit:

$$P = X^{-1}, F_i = M_i X^{-1} \text{ et } Q = PYP \quad (3.20)$$

A partir des conditions relâchées du théorème 3.2, le problème d'obtention des gains de retour d'état  $F_i$  pour le MFD est défini comme suit:

**MFD**

Trouver  $X > 0$ ,  $Y \geq 0$  et  $M_1, \dots, M_r$

Satisfaisant les LMIs suivantes

$$\begin{cases} X > 0 \\ Y \geq 0 \\ \begin{bmatrix} X - (s-1)Y & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X - B_i M_i & X \end{bmatrix} > 0 & i = 1, \dots, r \\ \begin{bmatrix} X + Y & \frac{1}{2} \{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i\}^T \\ \frac{1}{2} \{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i\} & X \end{bmatrix} > 0 & i < j \end{cases} \quad (3.21)$$

où  $X = P^{-1}$ ,  $M_i = F_i X$  et  $Y = XQX$

Les gains  $F_i$ , la matrice commune  $P$  et la matrice commune  $Q$  peuvent être obtenus comme suit:

$$P = X^{-1}, F_i = M_i X^{-1} \text{ et } Q = PYP$$

### 3.3.2. Le taux de décroissance

Le taux de décroissance (le degré de stabilité) est lié à la vitesse de réponse, c'est à dire le plus grand scalaire  $\alpha$  satisfaisant la condition  $\dot{V}(x(t)) + 2\alpha V(x(t)) \leq 0$  dans le cas continu (ou la condition  $\Delta V(x(k)) - (\alpha^2 - 1)V(x(k)) \leq 0$ ) dans le cas discret. On peut dériver les théorèmes suivants:

#### MFC

**Théorème 3.5:** [Tanaka 98] L'équilibre d'un modèle flou continu, décrit par (2.21) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices communes  $P > 0$  et  $Q \geq 0$ , et un scalaire  $\alpha > 0$  tels que :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + (s-1)Q + 2\alpha P < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.22)$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - Q + 2\alpha P < 0 \quad i < j \quad (3.23)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$  avec  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ ,  $s$  est le nombre de règles activées simultanément, tel que  $1 < s \leq r$ , avec  $r$  le nombre de règles. où  $\alpha > 0$  représente le taux de décroissance de la fonction de Lyapunov quadratique, qu'on doit maximiser. Notons que la maximisation du taux de décroissance est un GEVP en  $P$  et  $\alpha$ . Sa formulation est la suivante :

Maximiser  $\alpha$

$X, Y, M_1, \dots, M_r$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} X > 0 \\ Y \geq 0 \\ XA_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - B_i M_i + (s-1)Y + 2\alpha X < 0 & i = 1, \dots, r \\ XA_i^T + A_i X + XA_j^T + A_j X \\ \quad - M_j^T B_i^T - B_i M_j - M_i^T B_j^T - B_j M_i - 2Y + 4\alpha X < 0 & i < j \end{cases} \quad (3.24)$$

où  $X = P^{-1}$ ,  $M_i = F_i X$  et  $Y = X Q X$

#### MFD

**Théorème 3.6:** [Tanaka 98] L'équilibre d'un modèle flou discret, décrit par (2.22) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices communes  $P > 0$  et  $Q \geq 0$ , et un scalaire  $\alpha < 1$  tels que :

$$G_{ii}^T P G_{ii} - \alpha^2 P + (s-1)Q < 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.25)$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - \alpha^2 P - Q < 0 \quad i < j \quad (3.26)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(k))h_j(z(k)) = 0$  avec  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ ,  $s$  est le nombre de règles activées simultanément, tel que  $1 < s \leq r$ , avec  $r$  le nombre de règles.

Par conséquent, on peut définir le GEVP suivant en  $P$  et  $\beta$  où  $\beta = \alpha^2$

Minimiser  $\beta$

$X, Y, M_1, \dots, M_r$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} X > 0 \\ Y \geq 0 \\ \begin{bmatrix} \beta X - (s-1)Y & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X - B_i M_i & X \end{bmatrix} > 0 & i = 1, \dots, r \\ \begin{bmatrix} \beta X + Y & \frac{1}{2} \{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i\}^T \\ \frac{1}{2} \{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i\} & X \end{bmatrix} < 0 & i < j \end{cases} \quad (3.27)$$

où  $X = P^{-1}$ ,  $M_i = F_i X$  et  $Y = X Q X$

### 3.3.3. Contraintes sur la commande d'entrée

Supposons que la condition initiale  $x(0)$  est connue. Si  $\mu$  est la borne supérieure de  $\|u(t)\|_2$ .

La contrainte  $\|u(t)\|_2 < \mu$  est imposée à  $t \geq 0$  si les LMIs (2.37) et (2.38) sont satisfaites.

Alors le problème de conception d'un régulateur flou satisfaisant la contrainte sur l'entrée est défini comme suit:

Maximiser  $\alpha$

$X, Y, M_1, \dots, M_r$

Sous les contraintes  $\{(3.24), (2.37) \text{ et } (2.38)\}$

### 3.3.4. Contraintes sur la sortie

Supposons que la condition initiale  $x(0)$  est connue. La contrainte  $\|y(t)\|_2 < \lambda$  est imposée à

$t \geq 0$  si les LMIs (2.45) (2.46) sont satisfaites.

Le problème de conception de régulateur flou satisfaisant la contrainte sur la sortie est défini comme suit:

Maximiser  $\mathcal{A}$

$X, Y, M_1, \dots, M_r$

Sous les contraintes {(3.24), (2.37) et (2.46)}

Pour faire la comparaison entre les conditions classiques présentées au chapitre 2 et les conditions relâchées, nous prenons le même exemple illustratif présenté au chapitre 2 et nous concevons un régulateur flou satisfaisant le taux de décroissance, les contraintes sur l'entrée et les contraintes sur la sortie pour les nouvelles conditions de stabilité.

### 3.4. Exemples d'illustrations

#### 3.4.1. Exemple 3.1: Conception d'un régulateur flou de taux de décroissance

Pour mettre en valeur la puissance des LMIs, on prend le même exemple présenté dans la section 2.5 et on traite les mêmes cas étudiés par les conditions classiques.

D'abord, on conçoit un régulateur flou stable avec un taux de décroissance pour le MFC. Ce problème est défini comme suit :

Maximiser  $\mathcal{A}$

$X, Y, M_1$  et  $M_2$

Sous les contraintes {(3.24)}

On obtient les résultats suivants, pour un degré de stabilité  $\alpha = 5$

$$P = \begin{bmatrix} 105.1085 & 20.4393 & 1.0529 \\ 20.4393 & 4.9299 & 0.2368 \\ 1.0529 & 0.2368 & 0.0157 \end{bmatrix} > 0$$

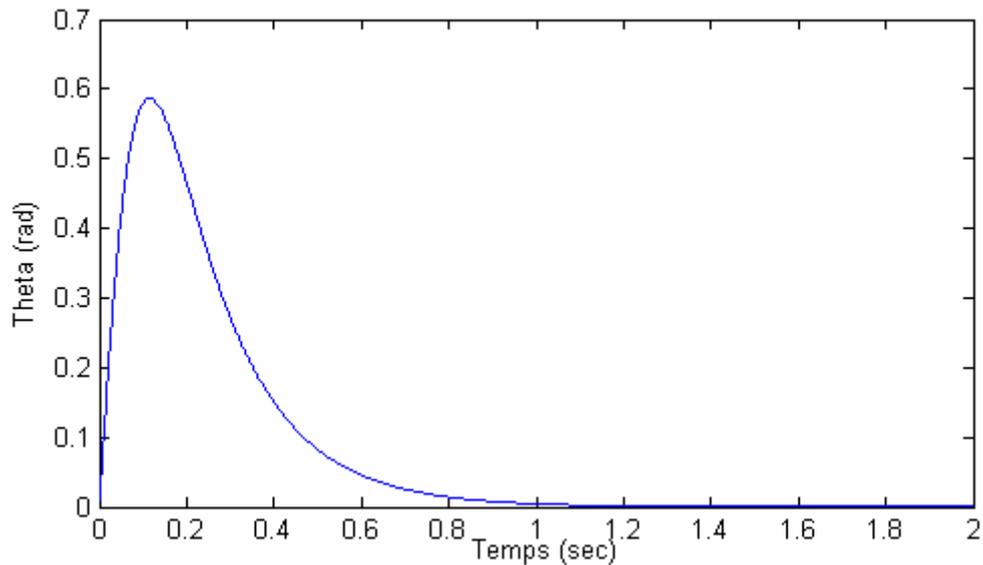
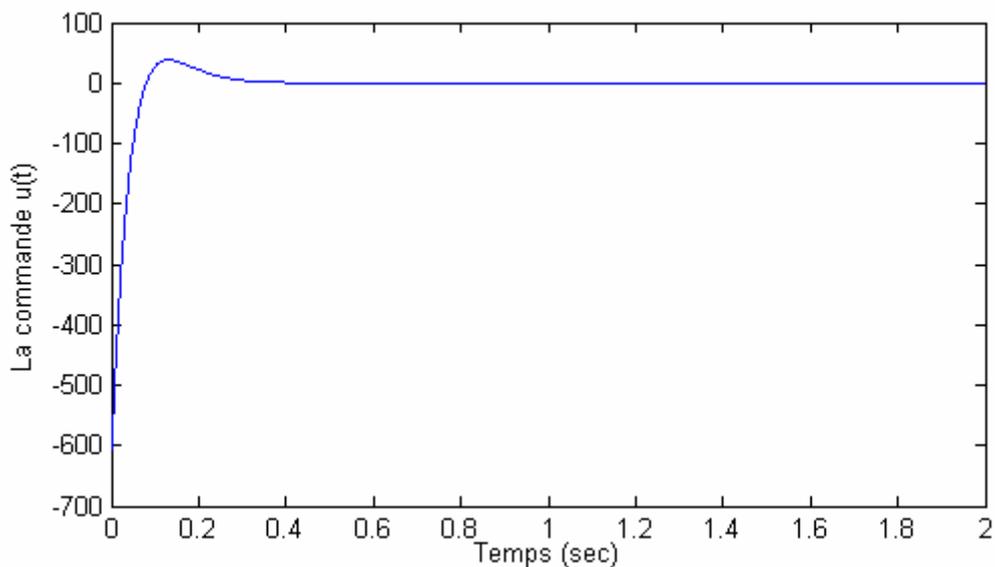
$$Q = \begin{bmatrix} 1432.034 & 299.8039 & 16.2677 \\ 299.8039 & 63.1918 & 3.4498 \\ 16.2677 & 3.4498 & 0.1907 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$F_1 = [282.3129 \quad 62.4176 \quad 3.2238], \quad F_2 = [110.4644 \quad 24.9381 \quad 1.2716]$$

La figure 3.5 montre la réponse du système  $y = x_1(t)$ , et la figure 3.6 montre sa commande correspondante.

Le contrôleur conçu qui satisfait le taux de décroissance pour le MFC est faisable, La simulation du modèle (2.21), en respectant la contrainte (3.24) à partir des conditions initiales  $x(0) = [0 \quad 10 \quad 0]^T$ , montre que toutes les trajectoires du système convergent vers zéro c'est à dire ( $x_1 \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ ).

La vitesse de la réponse du contrôleur de taux de décroissance, conçu à partir des conditions relâchées (contrôleur de relâchement), est plus grande que celle conçu à partir des conditions classiques (contrôleur classique).

Fig. 3.5. La réponse  $y(t) = x_1(t)$ Fig.3.6. La commande d'entrée  $u(t)$ 

### 3.4.2. Exemple 3.2 : Taux de décroissance + Contraintes sur l'entrée

De la même façon que pour l'exemple 2.2 du chapitre précédent, On remarque dans l'exemple 3.1 que le  $\max_t \|u(t)\|_2 = 606.74$ , pour réduire cette valeur, on ajoute des contraintes sur l'entrée et le problème devient comme suit:

Maximiser  $\alpha$

$X, Y, M_1$  et  $M_2$

Sous les contraintes  $\{(3.24), (2.37) \text{ et } (2.38)\}$

avec  $\mu = 100$ , on obtient les résultats suivants pour un taux de décroissance  $\alpha = 4.23$

$$P = \begin{bmatrix} 0.1578 & 0.0385 & 0.0027 \\ 0.0385 & 0.0100 & 0.0007 \\ 0.0027 & 0.0007 & 0.0001 \end{bmatrix} > 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0012 & 0.0003 & 0.0000 \\ 0.0003 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$F_1 = [38.3637 \quad 9.9338 \quad 0.7203], \quad F_2 = [18.2429 \quad 6.4771 \quad 0.5118]$$

La figure 3.7 montre la réponse du système  $y = x_1(t)$ , et la figure 3.8 montre sa commande correspondante.

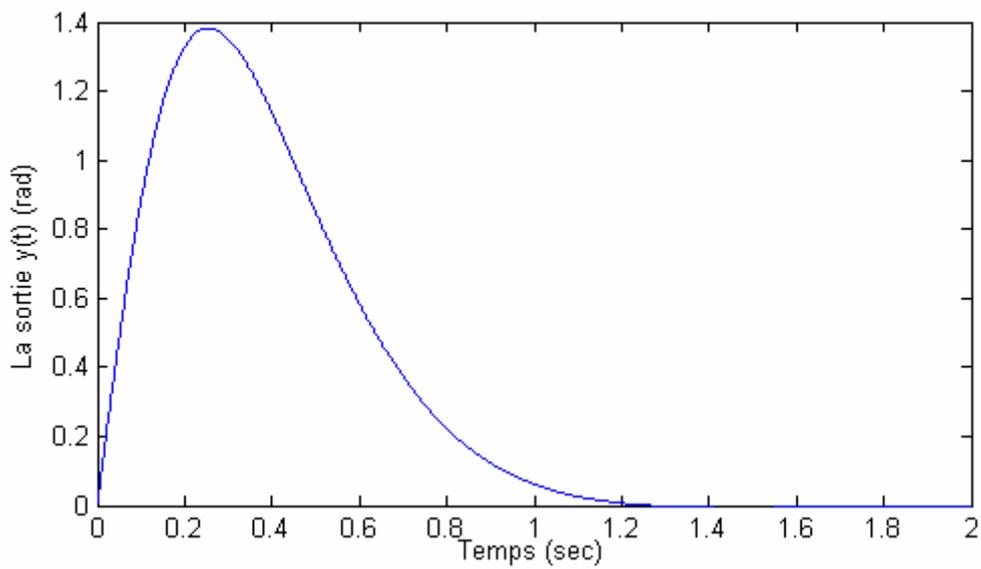


Fig. 3.7. La réponse  $y(t) = x_1(t)$

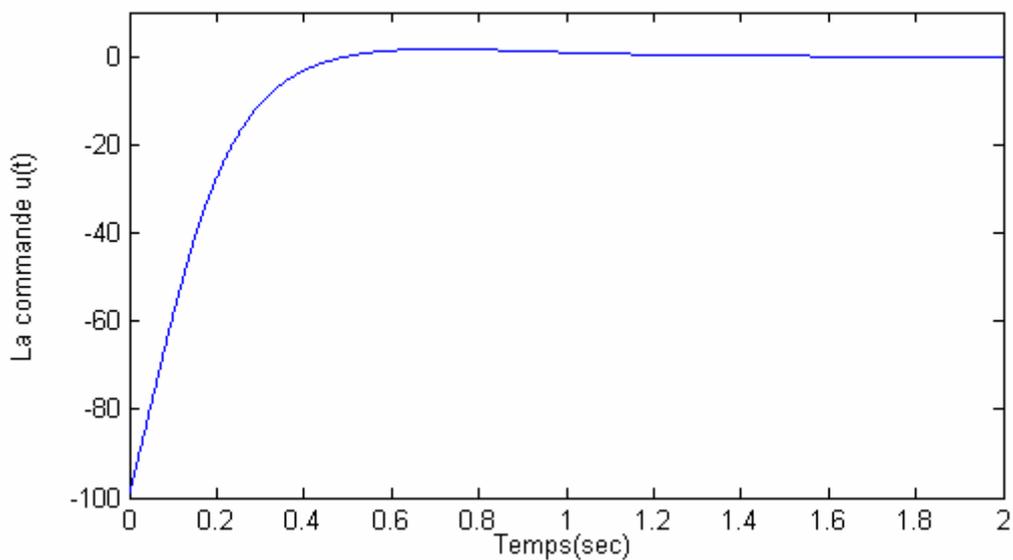


Fig.3.8. La commande d'entrée  $u(t)$

Le contrôleur conçu qui satisfait la stabilité et les contraintes sur l'entrée pour le MFC est faisable. Le  $\max_t \|u(t)\|_2$  est réduit de  $\max_t \|u(t)\|_2 = 606.74$  sans contraintes à  $\max_t \|u(t)\|_2 = 98.934 < \mu$  avec contraintes. De plus, la vitesse de la réponse du système avec ce contrôleur est plus grande que celle produit par le contrôleur classique.

### 3.4.3. Exemple 3.3 : Contrôleur stable + Contraintes sur l'entrée

Il est possible aussi de construire un contrôleur flou stable qui satisfait les contraintes sur la commande d'entrée où  $\mu = 100$ . Le problème se pose comme suit:

*Trouver*  $X > 0, Y \geq 0, M_1$  et  $M_2$

*Satisfaisants*  $\{(3.18), (3.37) \text{ et } (3.38)\}$

On obtient les résultats suivants:

$$P = \begin{bmatrix} 0.0335 & 0.0106 & 0.0015 \\ 0.0106 & 0.0036 & 0.0005 \\ 0.0015 & 0.0005 & 0.0001 \end{bmatrix} > 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0522 & 0.0203 & 0.0040 \\ 0.0203 & 0.0082 & 0.0016 \\ 0.0040 & 0.0016 & 0.0003 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$F_1 = [13.0065 \quad 3.6948 \quad 0.1786], \quad F_2 = [7.7309 \quad 02.7900 \quad 0.1163]$$

La figure 3.9 montre la réponse du système  $y = x_1(t)$ , et la figure 3.10 montre sa commande correspondante.

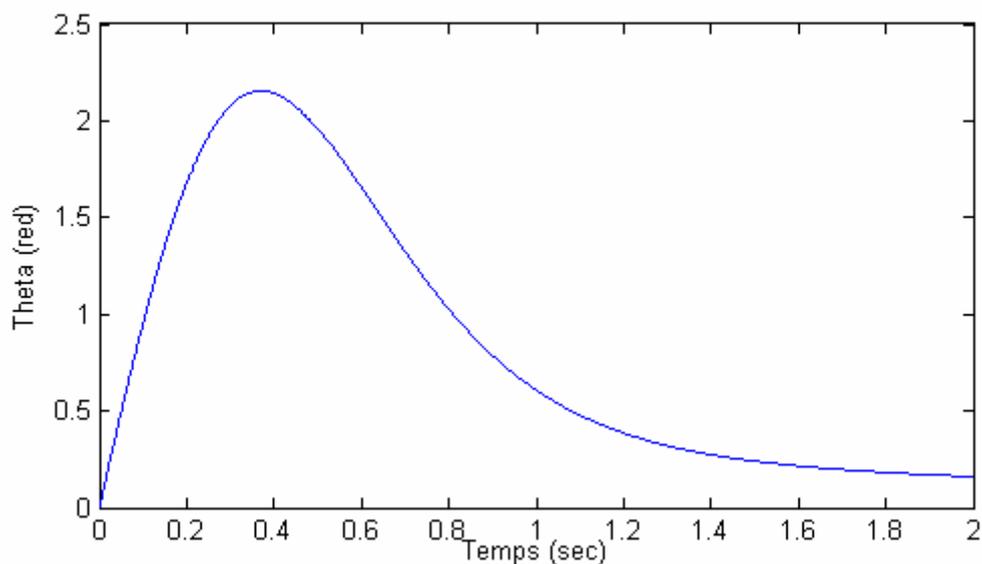
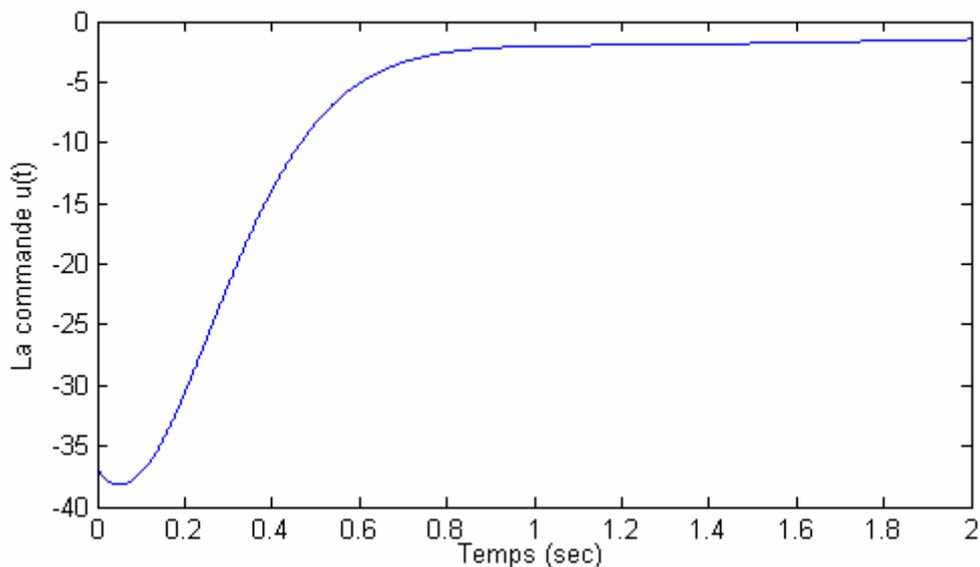


Fig. 3.9. La réponse  $y(t) = x_1(t)$

Fig.3.10. La commande d'entrée  $u(t)$ 

Le contrôleur conçu qui satisfait la stabilité et la contrainte sur l'entrée ( $\max_t \|u(t)\|_2 = 36.994 < \mu$ ) pour le MFC est faisable. Mais la réponse de  $y(t) = x_1(t)$  présente une grande erreur de sortie, ce qui permet d'introduire des contraintes sur la sortie.

### 3.4.4. Exemple 3.4: Contrôleur stable + Contraintes sur l'entrée + Contraintes sur la sortie

La réponse du système  $y(t) = x_1(t)$  dans l'exemple 3.3 a une grande erreur de sortie ( $\max_t \|y(t)\|_2 = 2.154$ ) puisque la contrainte sur la sortie n'est pas considérée dans la conception de régulateur flou. Pour améliorer la réponse, on ajoute des contraintes sur la sortie et le problème sera posé de la manière suivante :

Trouver  $X > 0$ ,  $Y \geq 0$ ,  $M_1$  et  $M_2$

Satisfaisants  $\{(3.18), (2.37) \text{ et } (2.46)\}$

avec  $\mu = 100$  et  $\lambda = 2$ . On obtient les résultats suivants:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5478 & 0.0519 & 0.0034 \\ 0.0519 & 0.0098 & 0.0006 \\ 0.0034 & 0.0006 & 0.0001 \end{bmatrix} > 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.9936 & 0.0334 & 0.0075 \\ 0.0334 & 0.0118 & 0.0008 \\ 0.0075 & 0.0008 & 0.0001 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$F_1 = [59.2819 \quad 9.3038 \quad 0.5580], \quad F_2 = [33.7254 \quad 7.4115 \quad 0.4122]$$

La figure 3.11 montre la réponse du système  $y = x_1(t)$ , et la figure 3.12 montre sa commande correspondante.

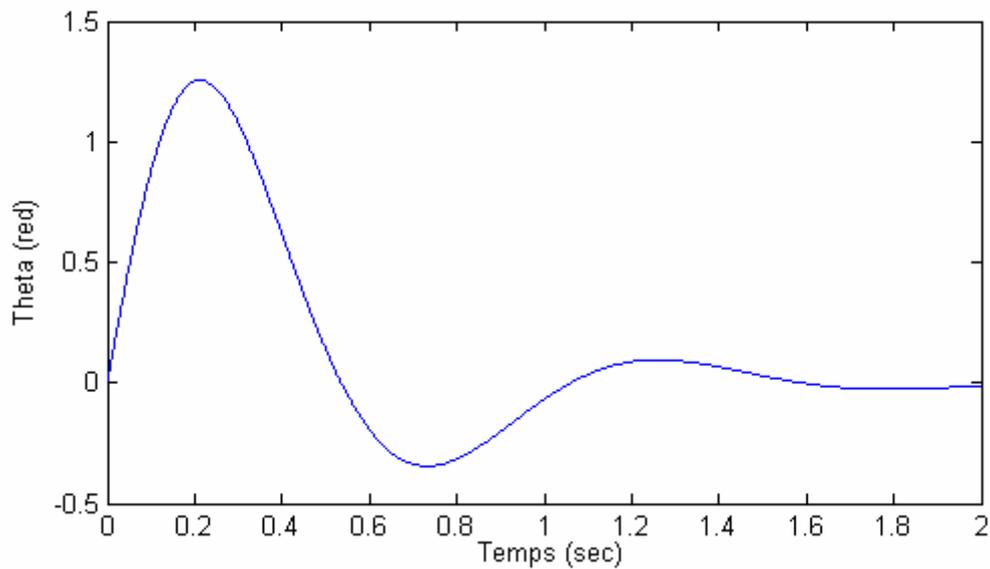


Fig. 3.11. La réponse  $y(t) = x_1(t)$

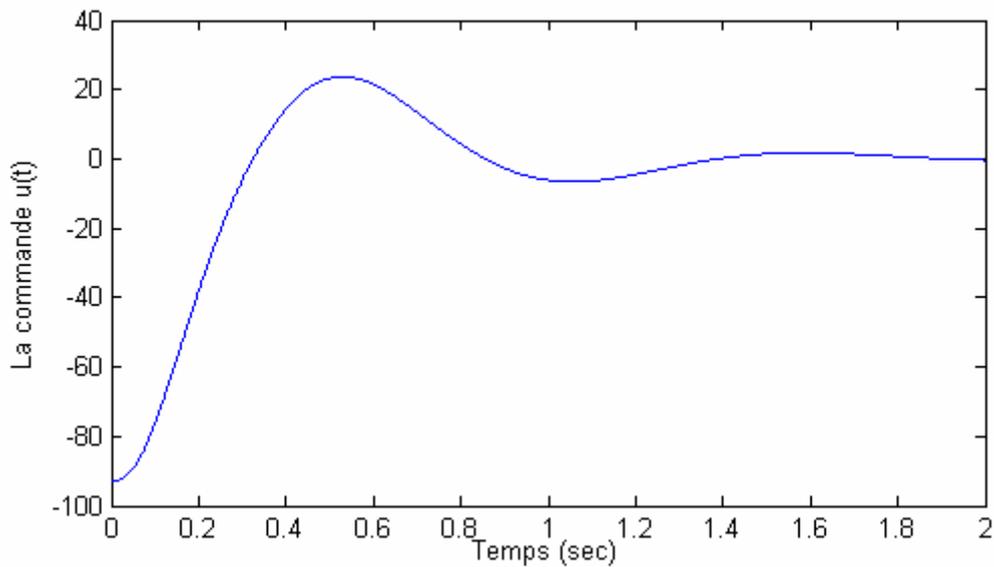


Fig.3.12. La commande d'entrée  $u(t)$

Le contrôleur conçu qui satisfait la stabilité et les contraintes sur l'entrée pour le MFC est faisable où  $\mu = 100$  et  $\lambda = 2$ .

On peut souligner que ce contrôleur satisfait des contraintes sur la commande d'entrée et sur la sortie c'est à dire le  $\max_t \|u(t)\|_2 = 93.055 \leq \mu$  et le  $\max_t \|y(t)\|_2 = 1.255 < \lambda$ , de plus, la vitesse de la réponse du système avec ce contrôleur est plus grande que celle produite par le contrôleur classique.

### 3.5. Les LMIs pour les systèmes augmentés

Rappelons que le système augmenté est composé d'un modèle flou, d'un régulateur flou et d'un observateur flou. Dans le cas où toutes les variables de prémisses sont mesurables, la boucle fermée complète, composée de l'état du système et l'erreur d'estimation, permet d'écrire les systèmes augmentés continus (2.73) et discrets (2.79).

On peut dériver des conditions plus relâchées pour les systèmes augmentés en appliquant les théorèmes 3.1 et 3.2 à (2.73) et (2.79), respectivement.

#### MFC

**Théorème 3.7:** [Tanaka 98] L'équilibre d'un système augmenté continu décrit par (2.73) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune définie positive  $P$  et une matrice commune semi définie positive  $Q$  telles que:

$$V_{ii}^T P + P V_{ii} + (s-1)Q < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.28)$$

$$\left( \frac{V_{ij} + V_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{V_{ij} + V_{ji}}{2} \right) - Q < 0 \quad i < j \quad (3.29)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$  avec  $V_{ij} = \begin{bmatrix} G_{ij} & B_i F_j \\ 0 & H_{ij} \end{bmatrix}$

Les conditions de stabilité (3.28) et (3.29) peuvent être mis sous forme d'LMIs, on effectue le changement de variable classique:  $X = P_1^{-1}$ ,  $M_i = F_i X$ ,  $N_i = P_2 L_i$ ,  $Y_1 = X Q_1 X$ . On obtient les LMIs suivantes en  $X$ ,  $P_2$ ,  $M_i$ ,  $N_i$ ,  $Y_1$ , et  $Q_2$  où  $Q = \text{diag}(Q_1, Q_2)$

$$\begin{cases} X > 0 \\ P_2 > 0 \\ X A_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - B_i M_i + (s-1)Y_1 < 0 & i = 1, \dots, r \\ A_i^T P_2 + P_2 A_i - C_i^T N_i^T - N_i C_i + (s-1)Q_2 < 0 & i = 1, \dots, r \\ X A_i^T + A_i X + X A_j^T + A_j X - M_j^T B_i^T - B_i M_j - M_i^T B_j^T - B_j M_i - 2Y_1 < 0 & i < j \\ A_i^T P_2 + P_2 A_i + A_j^T P_2 + P_2 A_j - C_i^T N_j^T - N_j C_i - C_j^T N_i^T - N_i C_j - 2Q_2 < 0 & i < j \end{cases} \quad (3.30)$$

Les gains de régulateur  $F_i$  et les gains d'observateur  $L_i$  sont obtenus comme suit:

$$P_1 = X^{-1}, \quad F_i = M_i P_1, \quad L_i = P_2^{-1} N_i \quad (3.31)$$

#### MFD

**Théorème 3.8:** [Tanaka 98] L'équilibre d'un système augmenté discret décrit par (2.79) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune définie positive  $P$  et une matrice

commune semi définie positive  $Q$  telles que:

$$V_{ii}^T P V_{ii} - P + (s-1)Q < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.32)$$

$$\left( \frac{V_{ij} + V_{ji}}{2} \right)^T P \left( \frac{V_{ij} + V_{ji}}{2} \right) - P - Q < 0 \quad i < j \quad (3.33)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(k))h_j(z(k)) = 0$  avec  $V_{ij} = \begin{bmatrix} G_{ij} & B_i F_j \\ 0 & H_{ij} \end{bmatrix}$

Les inégalités matricielles (3.32) et (3.33) peuvent être mis sous forme d'LMI en effectuant les mêmes changements de variables précédents.

On peut définir aussi les LMIs de taux de décroissance pour les systèmes augmentés. En appliquant les théorèmes 2.9 et 2.10 à (2.73) et (2.79), respectivement, on dérive les théorèmes suivants:

### MFC

**Théorème 3.9 :** [Tanaka 98] L'équilibre d'un système augmenté continu décrit par (2.73) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune définie positive  $P$  telle que:

$$V_{ii}^T P + P V_{ii} + (s-1)Q + 2\alpha P < 0 \quad (3.34)$$

$$\left( \frac{V_{ij} + V_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{V_{ij} + V_{ji}}{2} \right) - Q + 2\alpha P < 0 \quad i < j \quad (3.35)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$ . avec  $V_{ij} = \begin{bmatrix} G_{ij} & B_i F_j \\ 0 & H_{ij} \end{bmatrix}$

On obtient les LMIs suivants en  $X, P_2, M_i, N_i, Y_1$ , et  $Q_2$  où  $Q = \text{diag}(Q_1, Q_2)$

$$\begin{cases} X > 0 \\ P_2 > 0 \\ XA_i^T - M_i^T B_i^T + A_i X - B_i M_i + (s-1)Y_1 + 2\alpha P_1 < 0 & i = 1, \dots, r \\ A_i^T P_2 - C_i^T N_i^T + P_2 A_i - N_i C_i + (s-1)Q_2 + 2\alpha P_2 < 0 & i = 1, \dots, r \\ XA_i^T + A_i X + XA_j^T + A_j X - M_j^T B_i^T - B_i M_j - M_i^T B_j^T - B_j M_i - 2Y_1 + 4\alpha P_1 < 0 & i < j \\ A_i^T P_2 + P_2 A_i + A_j^T P_2 + P_2 A_j - C_i^T N_j^T - N_j C_i - C_j^T N_i^T - N_i C_j - 2Q_2 + 2\alpha P_2 < 0 & i < j \end{cases} \quad (3.36)$$

$$P_1 = X^{-1}, \quad F_i = M_i P_1, \quad L_i = P_2^{-1} N_i$$

### MFD

**Théorème 3.10 :** [Tanaka 98] L'équilibre d'un système flou augmenté discret décrit par (2.79) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune définie positive  $P$  telle que:

$$V_{ii}^T P V_{ii} - \alpha^2 P + (s-1)Q < 0 \quad (3.37)$$

$$\left(\frac{V_{ij} + V_{ji}}{2}\right)^T P \left(\frac{V_{ij} + V_{ji}}{2}\right) - \alpha^2 P - Q < 0 \quad i < j \quad (3.38)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(k))h_j(z(k)) = 0$  et  $\alpha < 1$ .

Les inégalités matricielles (3.37) et (3.38) peuvent être mis sous forme d'LMI en effectuant les mêmes changements de variables précédents.

### 3.6. Exemple illustratif

Pour illustrer la validité des résultats de relaxation obtenus dans le théorème 3.3, considérons à titre d'exemple le modèle non linéaire suivant qui est semblable à l'exemple utilisé dans la section (2.7.3).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + \sin x_3(t) - 0.1x_4(t) + (x_1^2(t) + 1)u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_1^2(t)x_2(t) + x_1(t) \\ \dot{x}_4(t) &= \sin x_3(t) \end{aligned} \quad (3.39)$$

avec  $x_1(t) \in [-a \ a]$  et  $x_3(t) \in [-b \ b]$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives. Ce système non linéaire peut être représenté par un système flou de T-S composé de quatre modèles locaux selon les règles suivantes :

**Règle1:**

SI  $x_1(t)$  est  $F_1^1$  et  $x_3(t)$  est  $F_2^1$  ALORS  $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$

**Règle2:**

SI  $x_1(t)$  est  $F_1^1$  et  $x_3(t)$  est  $F_2^2$  ALORS  $\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t)$

**Règle3:**

SI  $x_1(t)$  est  $F_1^2$  et  $x_3(t)$  est  $F_2^1$  ALORS  $\dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t)$

**Règle4:**

SI  $x_1(t)$  est  $F_1^2$  et  $x_3(t)$  est  $F_2^2$  ALORS  $\dot{x}(t) = A_4x(t) + B_4u(t)$

où les fonctions d'appartenance de  $x_1(t)$  et  $x_3(t)$  sont définies par (2.106) avec les matrices suivantes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -0.1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 + a^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & (\sin b)/b & -0.1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sin b)/b & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1+a^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -0.1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & (\sin b)/b & -0.1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sin b)/b & 0 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour comparer les conditions de stabilité du théorème 3.3 et les conditions conventionnelles et montrer l'intérêt de la relaxation des conditions de stabilité de ce théorème, d'autres contraintes sont imposées à la conception du contrôleur flou. Dans cet exemple, la contrainte sur la commande d'entrée  $\|u(t)\|_2 \leq \mu$  est ajoutée pour  $\mu = 5.5$ . La contrainte sur la commande d'entrée est exprimée sous la forme de LMI (les conditions (2.37) et (2.38)).

Dans cette simulation, on suppose que  $a = 1.4$  et  $b = 0.7$  et la conditions initiales  $x(0) = [-1.2 \ 0.5 \ 0.7 \ -0.6]^T$ .

Le problème de la conception du régulateur flou qui satisfait les conditions de stabilité du théorème 3.3 avec les contraintes sur la commande d'entrée est défini comme suit:

*Trouver*  $X > 0, Y_{ij} > 0$

*Satisfaisants*  $\{(3.13), (2.37) \text{ et } (2.38)\}$

Les gains locaux du contrôleur de retour d'état  $F_i$  et la matrice commune  $P$  sont obtenus comme suit:

$$P = \begin{bmatrix} 1.3590 & 09.88320 & -3.8442 & -0.0684 \\ 9.8832 & 102.3557 & -48.5407 & -0.8560 \\ -3.8442 & -48.5407 & 26.1131 & 0.4606 \\ -0.0684 & -0.8560 & 0.4606 & 0.01100 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = [5.9882 \ 40.1959 \ -14.7488 \ -0.2932], F_2 = [6.0881 \ 40.9750 \ -15.0883 \ -0.2984]$$

$$F_3 = [5.6587 \ 34.7254 \ -10.2981 \ -0.2864], F_4 = [5.6680 \ 34.7756 \ -10.3468 \ -0.2864]$$

(3.40)

La figure 3.13 montre les variations des états du système non linéaire (3.39) en utilisant (3.40) avec la condition initiale  $x(0) = [-1.2 \ 0.5 \ 0.7 \ -0.6]^T$  et la figure 3.14 montre la commande  $u(t)$  correspondante.

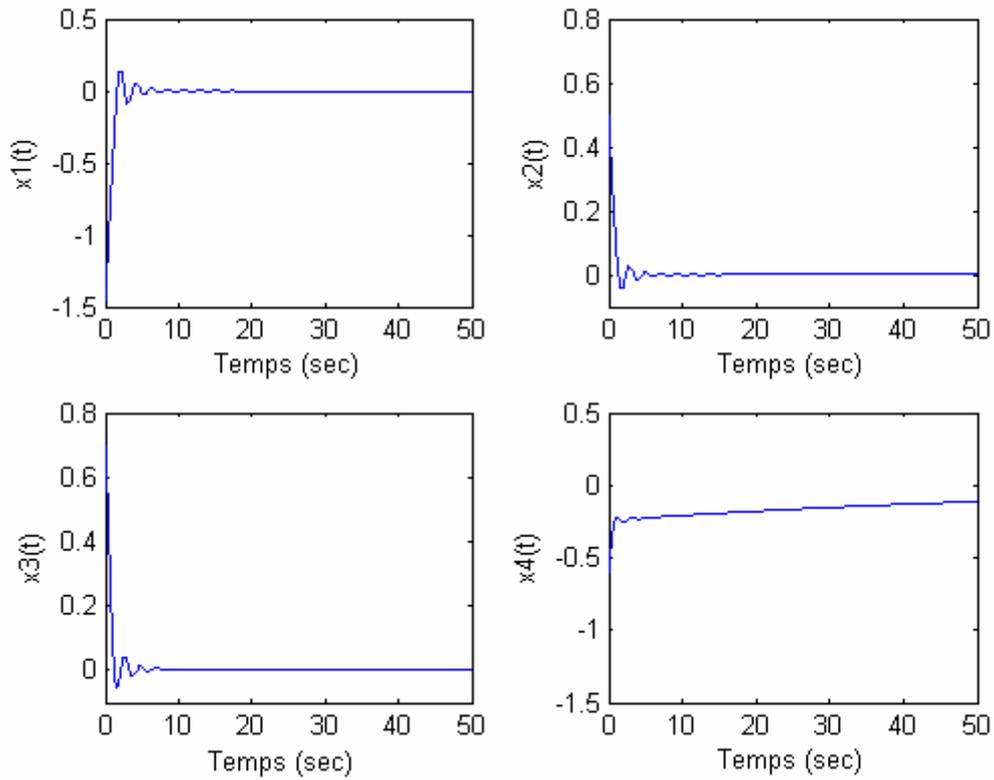


Fig.3.13. Les variations des états du système  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  et  $x_4(t)$ .

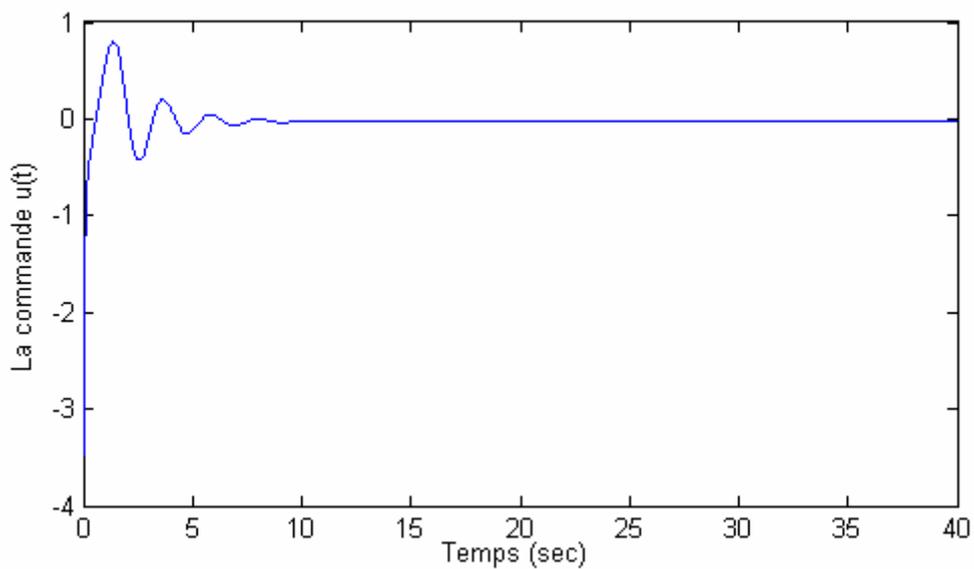


Fig.3.14. La commande  $u(t)$

Le contrôleur conçu qui satisfait la stabilité du système ( $x_i (i = 1, \dots, 4) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ ) et les contraintes sur l'entrée ( $\|u(t)\|_2 = 2.9514 \leq \mu$ ) selon les conditions du théorème 3.3 pour le MFC, est faisable.

### 3.7. Stabilisation adaptative pour les modèles flous de T-S

Dans cette section, on présente deux façons différentes pour traiter le problème de la stabilisation adaptative lorsque il existe des termes d'incertitudes sur le système. Dans le premier cas, on suppose que les fonctions d'appartenance du système et du contrôleur sont égales, et dans le deuxième cas, on suppose qu'ils sont différents.

Considérons le système non linéaire décrit par l'équation suivante:

$$\dot{x} = A(x, \theta)x + B(x, \theta)u \quad (3.41)$$

où  $\theta$  est le vecteur qui contient les termes d'incertitudes dans le système,  $\hat{\theta}$  dénote la valeur estimée de  $\theta$  et  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  est l'erreur d'estimation. Si  $\hat{\theta}$  est substituée à  $\theta$ , l'équation (3.41) peut être réécrite comme suite:

$$\dot{x} = A(x, \hat{\theta})x + B(x, \hat{\theta})u + W\tilde{\theta} \quad (3.42)$$

où  $W$  est une matrice de dimensions appropriées. Ce système peut être représenté sous forme d'un modèle flou de T-S. Les règles du modèle flou et du contrôleur sont représentées par (1.1) et (2.17) respectivement. Le système (3.42) peut alors être réécrit comme suit:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x, \hat{\theta}) h_j(x, \hat{\theta}) (A_i - B_i F_j) x + W\tilde{\theta} \quad (3.43)$$

où  $A_i$  et  $B_i$  sont les matrices du système.

Dans la suite, la stabilité de (3.43) sera étudiée.

**Théorème 3.11 :** [Kuang 06] L'équilibre d'un système flou continu décrit par (3.43) avec la loi d'adaptation

$$\dot{\hat{\theta}} = W^T P x \quad (3.44)$$

et les fonctions d'activation  $h_i(x, \hat{\theta}) \in [0, 1]$  est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune  $P$  définie positive telle que :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.45)$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) < 0 \quad i < j \quad (3.46)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$  avec  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$

**Preuve :** Considérons la fonction de Lyapunov suivante:

$$V(x) = x^T P x + \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \quad (3.47)$$

En prenant la dérivé par rapport au temps de  $V(x(t))$  le long de la trajectoire de (3.43), on obtient:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) + 2\tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{V} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j x^T \left\{ (A_i - B_i F_j)^T P + P (A_i - B_i F_j) \right\} x + 2x^T P W \tilde{\theta} + 2\tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \end{aligned} \quad (3.48)$$

et puisque  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  alors  $\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$  donc ;

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j x^T (G_{ii}^T P + P G_{ii}) x \\ &= \sum_{j=1}^r h_j^2 x^T (G_{jj}^T P + P G_{jj}) x + 2 \sum_{j=1}^r h_j x^T \left\{ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \right\} x \end{aligned} \quad (3.49)$$

S'il existe une matrice définie positive  $P$  satisfaisant (3.45) et (3.46), alors  $\dot{V} \leq 0$ .

#### ▪ Obtention de la loi d'adaptation

Pour avoir  $\dot{V}(x) < 0$  dans la relation (3.48), il faut garantir que :

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j x^T \left\{ (A_i - B_i F_j)^T P + P (A_i - B_i F_j) \right\} x < 0 \quad (3.50)$$

La condition (3.50) est déjà vérifiée par la relation (3.49). De plus, les paramètres d'incertitudes tendent vers à zéro c'est à dire:

$$2x^T P W \tilde{\theta} + 2\tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} = 0 \Rightarrow 2(x^T P W + \dot{\tilde{\theta}}^T) \tilde{\theta} = 0$$

Sachant que  $\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$ , on obtient  $x^T P W - \dot{\hat{\theta}}^T = 0$ . Enfin, la loi d'adaptation obtenue est:

$\dot{\hat{\theta}} = W^T P x$ . Ainsi,  $V \in L_\infty$  et  $\tilde{\theta} \in L_\infty$ . Ensuite, il existe un  $\varepsilon > 0$  satisfaisant :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < -\varepsilon I$$

En intégrant les deux membres de (3.49) on obtient :

$$\begin{aligned} V(t) - V(0) &= \int_0^t \dot{V} dt \leq - \int_0^t \sum_{i=1}^r \varepsilon h_i^2 x^T x dt \\ &\leq - \frac{\varepsilon}{r} \int_0^t x^T x dt \end{aligned}$$

En outre, cette dernière relation peut être réécrite comme suit:

$$\int_0^t x^T x dt \leq \frac{r}{\varepsilon} V(0) \quad (3.51)$$

La relation (3.51) signifie que  $\int_0^t |x|^2 dt$  est bornée, c'est à dire que  $x \in L_2$ .

A partir de (3.43), la loi d'adaptation affecte seulement les fonctions d'activation. Notons quand les LMIs de (3.45) et (3.46) sont faisables et  $h_i(\hat{\theta})$  variant dans  $[0 \ 1]$ , les fonctions d'activation du contrôleur restent constantes sans l'adaptation de  $\hat{\theta}$ .

Si on n'adapte pas  $\hat{\theta}$  dans le contrôleur, la loi d'adaptation (3.44) est seulement une dynamique interne. En conséquence, le système bouclé est réécrit comme suit:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x, \hat{\theta}) h_j(x, \hat{\theta}_0) \{A_i - B_i F_j\} x + W \tilde{\theta} \quad (3.52)$$

où  $\hat{\theta}_0$  c'est la valeur initiale de  $\hat{\theta}$ . Selon la preuve du théorème 3.11, on a:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x, \hat{\theta}) h_j(x, \hat{\theta}_0) x^T \{G_{ij}^T P + P G_{ij}\} x \quad (3.53)$$

La différence entre  $h_i(x, \hat{\theta})$  et  $h_j(x, \hat{\theta}_0)$  mène à des conditions LMIs plus limitées. Ces conditions sont définies par le théorème suivant :

**Théorème 3.12 :** [Kuang 06] L'équilibre d'un système flou continu décrit par (3.52) avec la loi d'adaptation (3.44) et les fonctions d'activation  $h_i(x, \hat{\theta}) \in [0 \ 1]$ , est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune définie positive  $P$  telle que :

$$(A_i - B_i F_j)^T P + P (A_i - B_i F_j) < 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, r. \quad (3.54)$$

### 3.7.1. Exemple illustratif

Supposons dans cet exemple qu'il existe des termes d'incertitudes sur le système, le problème de la stabilisation adaptative se traite selon deux cas: Le premier avec la loi d'adaptation (3.44) et le deuxième sans l'utilisation de la loi d'adaptation dans le contrôleur.

Considérons un système non linéaire avec des paramètres inconnus décrit par les équations suivantes:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) + x_1^2(t)\theta_1 \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) + x_2^2(t)\theta_2 \\ \dot{x}_3(t) &= u(t)\end{aligned}$$

Ce système peut être réécrit sous la forme générale suivante :

$$\dot{x} = \hat{A}x + Bu + W\tilde{\theta}$$

où

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} x_1\theta_1 & 1 & 0 \\ 0 & x_2\theta_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} x_1^2 & 0 \\ 0 & x_2^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\theta} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

où  $\hat{\theta}_i$  est la valeur estimée de  $\theta_i$  et  $\tilde{\theta}_i = \theta_i - \hat{\theta}_i$  est l'erreur d'estimation.

Supposons que  $x_1\theta_1 \in [-2 \ 2]$  et  $x_2\theta_2 \in [-2 \ 2]$  avec les conditions initiales  $\hat{\theta}_{10} = \hat{\theta}_{20} = 1$

Ce système peut être représenté par le modèle flou de T-S suivant :

**Règle i :**

SI  $x_1$  est  $F_1^i$  et  $x_2$  est  $F_2^i$  ALORS  $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad i = 1, \dots, 4$

où les fonctions d'activation sont:

$$F_1^1 = F_1^3 = \frac{\hat{\theta}_1 x_1 + 2}{4}, \quad F_1^2 = F_1^4 = \frac{2 - \hat{\theta}_1 x_1}{4}, \quad F_2^1 = F_2^3 = \frac{\hat{\theta}_2 x_2 + 2}{4}, \quad F_2^2 = F_2^4 = \frac{2 - \hat{\theta}_2 x_2}{4}$$

Les matrices  $A_i$  et  $B_i$  du système sont:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

les inégalités matricielles de (3.45) et (3.46) peuvent être mis sous forme d'LMI comme suit:

$$\begin{cases} X > 0 \\ XA_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - B_i M_i < 0 & i = 1, \dots, 4 \\ XA_i^T + A_i X + XA_j^T + A_j X - M_j^T B_j^T - B_j M_j - M_i^T B_j^T - B_j M_i < 0 & i < j \end{cases} \quad (3.55)$$

où  $X = P^{-1}, M_i = F_i X$

On obtient à partir de (3.55) la matrice commune  $P = X^{-1}$  et les gains du contrôleur  $F_1, F_2, F_3$  et  $F_4$  comme suit:

$$P = \begin{bmatrix} 0.4737 & 0.1576 & 0.0134 \\ 0.1576 & 0.0567 & 0.0048 \\ 0.0134 & 0.0048 & 0.0005 \end{bmatrix} > 0$$

$$F_1 = [1140.4 \quad 421.9 \quad 35.3], \quad F_2 = [1663.1 \quad 609.8 \quad 51.0]$$

$$F_3 = [1241.2 \quad 455.4 \quad 38.1], \quad F_4 = [1764.0 \quad 643.4 \quad 53.9]$$

Puis, la loi d'adaptation ou la dynamique interne (3.44) est exprimée par:

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} 0.14737x_1^3 + 0.1576x_1^2x_2 + 0.0134x_1^2x_3 \\ 0.1576x_2^2x_1 + 0.0567x_2^3 + 0.00480x_2^2x_3 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

La figure 3.15 représente les réponses du système avec la loi d'adaptation (3.44), et la figure 3.16 représente les réponses du système sans utiliser la loi d'adaptation dans le contrôleur.

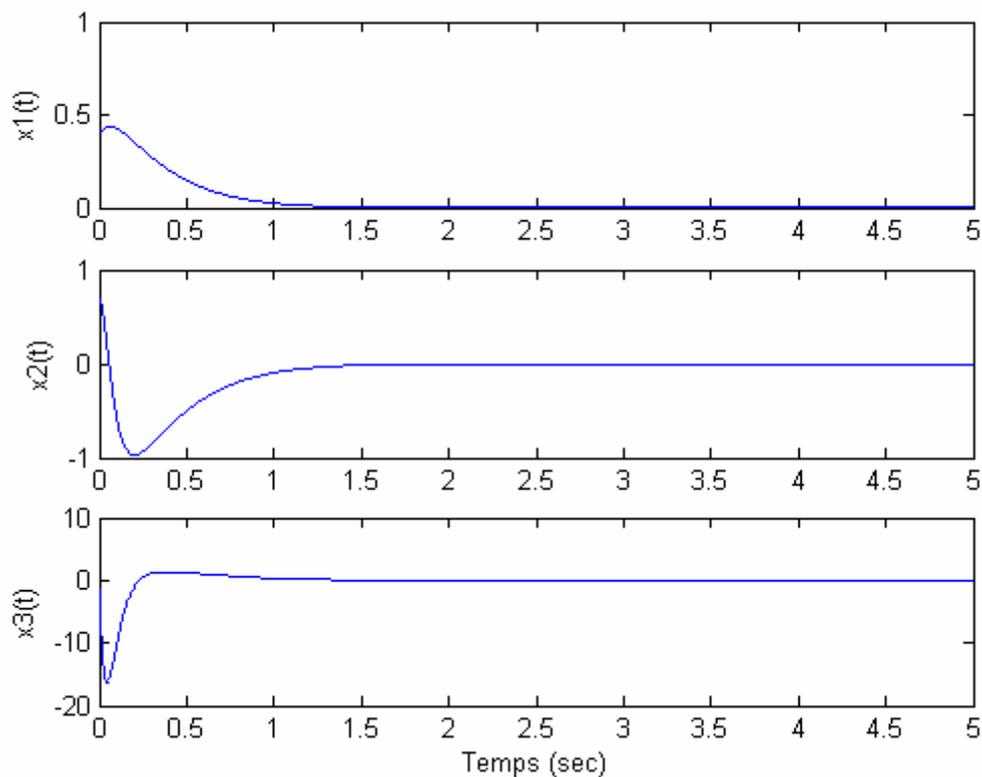


Fig.3.15 Stabilisation des états  $x_1(t), x_2(t)$  et  $x_3(t)$  avec la loi d'adaptation.

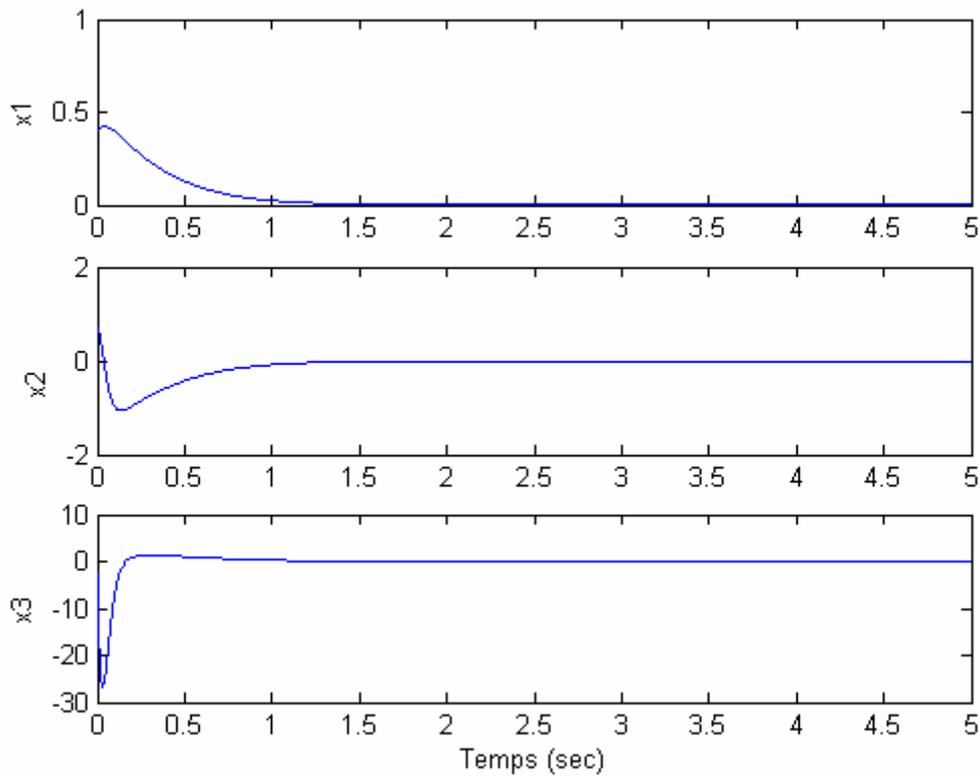


Fig.3.16 Stabilisation des états  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  et  $x_3(t)$  sans la loi d'adaptation.

La figure 3.15, montre la convergence des trajectoires  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  et  $x_3(t)$  vers zéro à partir conditions initiales  $x(0) = [0.4 \ 0.7 \ -0.5]^T$  en utilisant la loi d'adaptation (3.44). Les trajectoires convergent également vers zéro sans utiliser la loi d'adaptation dans le contrôleur comme montré sur la figure 3.16.

Jusqu'à maintenant, toutes les situations que nous avons discutées sont avec la restriction des fonctions d'appartenance entre 0 et 1. Réellement, il est possible de trouver des fonctions d'appartenance à l'extérieur de la région  $[0 \ 1]$ , mais les LMIs correspondantes sont très difficiles à résoudre, de plus elles sont très limitées.

Ce phénomène sera discuté dans la section suivante.

### 3.8. Analyse de la stabilité globale des modèles flous de T-S

Dans cette section, on propose un résultat de la stabilité globale pour les modèles flous de T-S. Dans les analyses précédentes, les fonctions d'activation doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, & i = 1, 2, \dots, r \\ 0 \leq h_i(z(t)) \leq 1 \end{cases}$$

Supposons que les fonctions d'activation doivent satisfaire la condition  $F_i^j \notin [0 \ 1]$ .

La seule restriction est que la somme des fonctions d'activation soit égale à un

( $\sum_{i=1}^r \mu_i(t) = 1$ ). On utilise le concept PDC pour construire le contrôleur de retour d'état. Le

système en boucle fermée peut être représenté comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))G_{ij}x(t) \quad (3.57)$$

où  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$

**Théorème 3.13 :** [Kuang 96] Le système (3.57) est globalement quadratiquement stable s'il existe une matrice commune définie positive  $P = P^T$  telle que :

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \cdots & \Lambda_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{r1} & \cdots & \Lambda_{rr} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.58)$$

$$\Lambda_{ii} = XA_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - B_i M_i < 0 \quad i = 1, \dots, r$$

$$\Lambda_{ij} = A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i \leq 0 \quad i < j$$

où  $X = P^{-1}$ ,  $M_i = F_i X$  et  $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ji}^T$

**Preuve :** Soit la fonction de Lyapunov  $V(x(t)) = x^T P x$ . La dérivée par rapport au temps de  $V(x)$  le long de la trajectoire de (3.57) donne:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(G_{ij}^T P + P G_{ij})x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))(Px)^T \times \{X(A_i^T - F_i^T B_i^T) + (A_i - B_i F_i)X\}Px \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(Px)^T \times \{X(A_i^T + A_j^T - F_i^T B_j^T - F_j^T B_i^T) \\ &\quad + (A_i + A_j - B_i F_j - B_j F_i)X\}Px \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))(Px)^T \Lambda_{ii} Px + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(Px)^T \Lambda_{ij} Px \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(Px)^T \Lambda_{ji} Px \\ &= \begin{bmatrix} h_1(z)Px \\ \vdots \\ h_r(z)Px \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \cdots & \Lambda_{r1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{1r} & \cdots & \Lambda_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(z)Px \\ \vdots \\ h_r(z)Px \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La LMI (3.58) conduit à  $\dot{V}(x) < 0$

Généralement, il est difficile de trouver la solution faisable pour la LMI (3.58) parce que la dimension de la matrice (3.58) est grande.

Puisque la stabilité globale est indépendante à l'univers de discours dans ce théorème, il peut être aussi possible de trouver la solution faisable si nous réduisons l'univers de discours.

### 3.8.1. Exemple illustratif

On propose l'exemple suivant pour vérifier le théorème 3.13. Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & x_1 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 - 2 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.59)$$

Ce système peut être représenté par un modèle flou de T-S avec les règles SI -ALORS suivantes:

**Règle i :** SI  $x_1(t)$  est  $F_1^i$  ALORS  $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad i = 1, 2$

Nous choisissons  $x_1(t)$  comme une variable de prémisse dont les fonctions d'appartenance sont définies par:

$$F_1^1 = \frac{x_1 - d}{D - d}, \quad F_1^2 = 1 - F_1^1$$

avec les matrices d'évolution et de commande suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & D - 3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ D - 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & d - 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ d - 2 \end{bmatrix}$$

où  $D$  et  $d$  sont les limites supérieure et inférieure de  $x_1$  respectivement.

Considérons deux gammes différentes de  $x_1(t)$  et toutes les simulations sont effectuées en assumant la même condition initiale  $x(0) = [10 \quad -10]^T$ .

**Cas 1 :** Supposons d'abord que  $D = 8 \quad d = 5.9$ . Dans cette situation, les fonctions d'appartenance ne sont pas incluses dans  $[0 \quad 1]$  à cause de l'état initial de  $x_1$  qui se trouve à l'extérieur de  $[d \quad D]$ .

En résolvant la LMI (3.58), on trouve la matrice commune définie positive  $P$  et les gains de retour d'état  $F_i$  comme suit:

$$P = \begin{bmatrix} 0.0049 & 0.0015 \\ 0.0015 & 0.0056 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = [-0.7287 \quad 1.16666], \quad F_2 = [-0.8034 \quad 1.2258]$$

Les résultats de la stabilisation des états et de commande d'entrée sont montrés sur la figure 3.17. Les fonctions d'appartenance  $F_1^1$  et  $F_1^2$  montrées sur la figure 3.18, ne sont pas incluses dans [0 1].

**Cas 2 :** Considérons une marge plus étendue de l'univers de discours  $D = 50$ ,  $d = -50$ .

La matrice commune définie positive  $P$  et les gains de retour d'état  $F_1$  et  $F_2$  obtenus sont :

$$P = \begin{bmatrix} 7.4394 & 1.5966 \\ 1.5966 & 2.0642 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = [0.2059 \quad 1.0918], \quad F_2 = [0.0183 \quad 0.9185]$$

Les résultats de la stabilisation des états et de commande sont montrés sur figure 3.19 et les fonctions d'appartenance qui varient dans [0 1] sont montrées sur la figure 3.20.

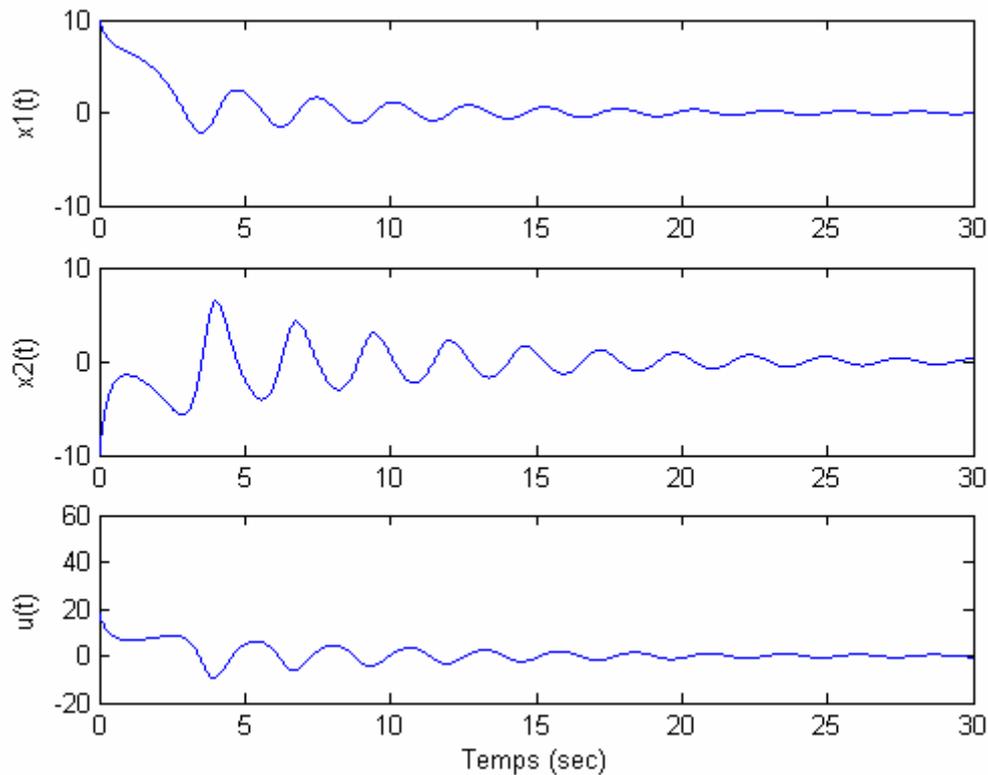


Fig.3.17. Les réponses d'états  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  et de commande  $u(t)$  avec  $D = 8$  et  $d = 5.9$

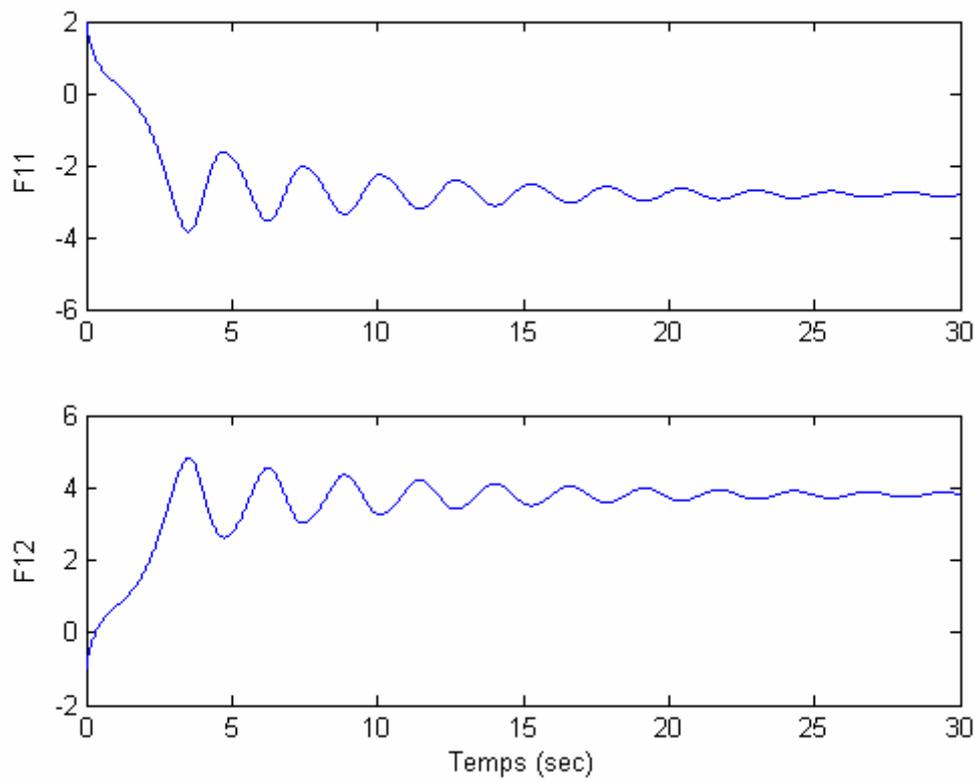


Fig.3.18. Les fonctions d'appartenance  $F_1^1$  et  $F_1^2$ , avec  $D = 8$  et  $d = 5.9$

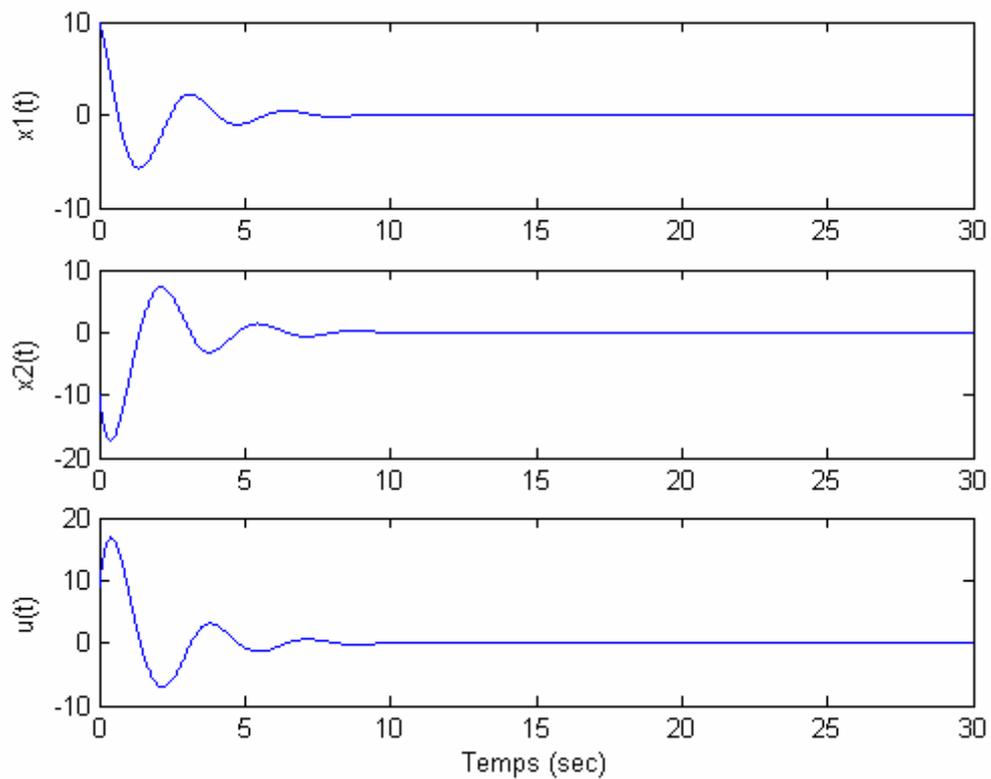


Fig.3.19. Les réponses d'états  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  et de commande  $u(t)$  avec  $D = 50$  et  $d = -50$

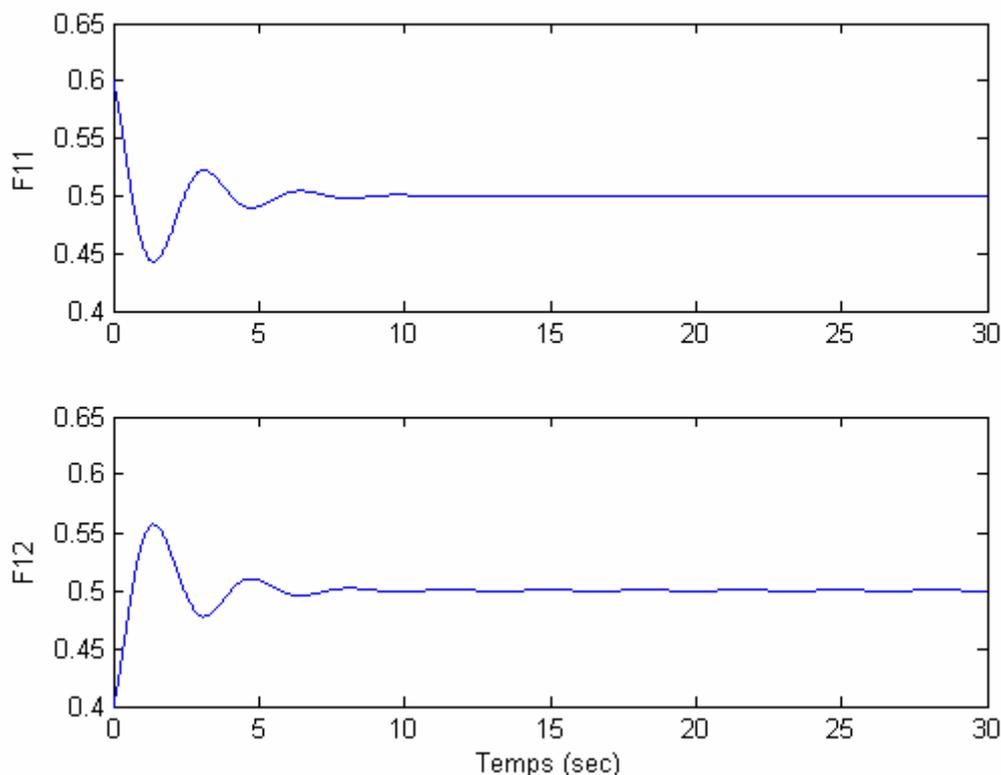


Fig.3.20. Les fonctions d'appartenance  $F_1^1$  et  $F_1^2$ , avec  $D = 50$  et  $d = -50$

#### Résultats :

- En réduisant l'univers du discours, il est possible de rendre une LMI faisable.
- Il est possible de choisir n'importe quel univers de discours, s'il existe une matrice  $P$  commune satisfaisant une LMI faisable.
- Un petit univers de discours mène à une réponse lente du système. D'autre part, pour un grand univers de discours la réponse du système devient rapide.

### 3.9. Conclusion

Dans ce chapitre, de nouvelles conditions de stabilité des systèmes flous de T-S continus et discrets sont proposées. Ces conditions relâchées sont exprimées en termes d'LMIs et permettent de réduire le conservatisme produit par les conditions classiques présentées dans le chapitre précédent. Elles se basent principalement sur le nombre maximal de règles actives à chaque instant d'une part, et par l'introduction des conditions supplémentaires d'autre part. Pour montrer l'intérêt de relâchement, nous avons présenté un exemple illustratif pour comparer les trois théorèmes au niveau de la faisabilité des LMIs. Nous avons présenté

également un exemple de la stabilisation adaptative floue quand il existe des termes d'incertitudes sur le système. Différentes conditions de stabilité exprimées sous forme d'LMI sont obtenues si les fonctions d'appartenance du système et du contrôleur sont différentes. Enfin, pour arriver à la stabilité globale, nous avons obtenu de nouvelles conditions LMIs, et ceci signifie que les fonctions d'appartenance peuvent être négatives ou plus grande que 1. Cette approche est prouvée à travers un exemple illustratif.

## **Conclusion et perspectives**

Les méthodologies traitées dans ce mémoire sont essentiellement théoriques, elles sont consacrées à la relaxation des conditions de stabilité pour les systèmes non linéaires décrits par les modèles flous de Takagi-Sugeno. Leur établissement fait appel à la fonction de Lyapunov quadratique. L'étude que nous avons menée est organisée en deux parties: la première traite l'analyse de la stabilité et de la stabilisation des modèles flous de type T-S où les résultats obtenus sont conservatifs. Dans la deuxième partie nous avons proposé de nouvelles conditions permettant de réduire la conservativité de résultats.

En effet, après avoir donné un rappel sur les systèmes flous de T-S continus et discrets, nous avons présenté la notion d'inégalités matricielles linéaires (LMIs) appliquée à la commande des systèmes non linéaires.

L'analyse de la stabilité et de la stabilisation des modèles flous de T-S, basée sur la fonction de Lyapunov quadratique conduit à l'élaboration de conditions suffisantes de stabilité et de stabilisation avec l'utilisation de la loi de commande PDC. Les conditions obtenues sont formulées en terme d'inégalités matricielles non linéaires qui peuvent être transformées en LMIs par les techniques classiques de changement de variables pour l'exploitation numérique de ces conditions.

Nous avons montré à partir du modèle T-S, une méthode de commande de type PDC. Cette loi de commande très utilisée, est basée sur la connaissance de l'état, c'est-à-dire, elle nécessite la disponibilité de tous les états. Comme cette condition est rarement vérifiée, l'utilisation d'un observateur permettant d'estimer l'état du système devient nécessaire. L'observateur flou de T-S est alors construit par interpolation d'observateurs locaux de type Luenberger. Ces derniers, ont pour avantage le fait d'avoir la même structure que les modèles de T-S. Le principe de séparation permet de trouver séparément les gains de l'observateur et du régulateur (dans le cas des prémisses mesurables) a été utilisé. Dans ce cas la recherche de la matrice commune  $P$  et les gains (d'observateur et du régulateur) est facile à mettre en œuvre et peut être énoncée comme un problème d'optimisation convexe en terme d'LMI résolu efficacement. Les résultats de simulation d'un système non linéaire ont permis d'illustrer l'efficacité de l'approche LMI et les performances d'observation. Cependant, les conditions de stabilité obtenues sont assez conservatives car elles exigent la stabilité de tous les modèles locaux. Nous avons montré qu'il est possible d'améliorer cette conservativité des LMI en proposant deux méthodes de relâchement, la première se base sur le nombre maximal

de règles actives à chaque instant. On a supposé que ce nombre est inférieur au nombre total de règles. La deuxième méthode s'inspire de la première en introduisant des variables supplémentaires permettant de regrouper les intersections entre les modèles locaux dans une seule matrice. Un exemple de simulation est illustré pour montrer l'intérêt du relâchement, et également pour comparer les nouvelles conditions de stabilité avec les conditions classiques au niveau de la faisabilité des LMIs. Nous avons constaté que les conditions proposées contiennent des conditions plus relâchées que les autres conditions. Des exemples de simulation concernant la construction d'un régulateur flou (et d'un observateur dans le cas de systèmes augmentés) basé sur les conditions relâchées LMI satisfaisant la stabilité, le taux de décroissance, les contraintes sur l'entrée et sur la sortie ont prouvé l'efficacité des nouvelles conditions, et par conséquent, l'efficacité de l'approche LMI. Nous avons ensuite étudié un problème de la stabilisation adaptative dans le cas où les incertitudes existent. On a traité deux cas, dans le premier, les fonctions d'appartenance du système et du contrôleur sont supposées égales, et dans le deuxième cas on a supposé qu'elles sont différentes. Les LMIs obtenues dans les deux cas permettent de stabiliser le système. Enfin, on a montré qu'il est possible de trouver des fonctions d'appartenance à l'extérieur de la région  $[0, 1]$ , bien que la résolution du problème de la faisabilité de l'LMI devienne plus difficile. Dans ce cas la stabilité globale du système flou est assurée. Un exemple de simulation est traité pour prouver l'approche de la stabilité globale. Cet exemple illustre aussi l'influence des fonctions d'appartenance sur la stabilité des systèmes flous de T-S.

Deux perspectives principales sont envisageables dans le sens de la diminution du conservatisme des conditions de stabilité qui peuvent intervenir aux niveaux suivants:

- Nous avons montré que la fonction de Lyapunov permet de déterminer de manière rapide et précise les conditions de stabilité et de stabilisation des modèles flous de T-S, mais dans certains cas, ces conditions se montrent très conservatrices. Parmi les causes du conservatisme de cette méthode: les fonctions d'activation, généralement dépendantes de l'état, sont totalement ignorées, c'est-à-dire, toute l'information contenue dans ces fonctions est non utilisée. L'utilisation des fonctions de Lyapunov non quadratiques permet de réduire ce conservatisme en prenant en compte les prémisses des modèles flous.
- La loi de commande PDC utilisée le long de ce travail permet de trouver les conditions suffisantes de stabilité et de stabilisation. L'utilisation de la loi de commande de type CDF (Compensation et Division pour modèles Flous) permet de décrire de nouvelles conditions de stabilité et de stabilisation qui peuvent être moins conservatrices en réduisant le nombre de conditions mise en œuvre (cette méthode permet d'éviter l'utilisation des modèles croisés).

## **BIBLIOGRAPHIE**

- [Blanco 01] Blanco Y., Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno et leur usage pour la commande des systèmes non linéaires, Thèse de doctorat, l'école centrale de Lille, 2001.
- [Boyd 94] Boyd S., El Ghaoui L., Linear Matrix Inequalities in system and control theory, Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [Breg 02] Bregsten P., Palm R., Driankov D., Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 32, No. 1, pp. 114-121, 2002.
- [Cao 96] Cao G., Rees N.W., Feng S.G., Stability analysis and design for a class of continuous-time fuzzy control systems, *International Journal of Control*, Vol. 64, No. 6, pp. 1069-1087, 1996.
- [Cao 99] Cao S. G., Rees N.W., Feng S.G., Analysis and design of fuzzy control systems using dynamic fuzzy state space models, *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*. Vol. 7, No. 2, pp. 192-200, 1999.
- [Chad 02] Chadli M., Stabilité et commande des systèmes décrits par des multimodèles, Thèse de doctorat, L'institut National Polytechnique de Lorraine, 2002
- [Chad 02b] Chadli M., Maquin D., Ragot J., Output stabilization in multiple model approach, *IEEE Conference on control Application (CCA'02)*, pp. 1315-1320. Glasgow, Scotland, 2002.
- [Chad 02c] Chadli M., Maquin D., Ragot J., Observer-based controller for Takagi-Sugeno models, *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC'2002)*, Tunisia, 2002.
- [Chad 03] Chadli M., Maquin D., Ragot J., Multiple observers for discrete-time multiple model, *IFAC Congres, Safeprocess*, Washington, 2003.
- [Cheng 06] Cheng W.C., Stability conditions of fuzzy systems and its application to structural and mechanical systems, *ELSEVIER, Advances in Engineering Software* 37 (2006) 624-629.
- [Chilali 96] Chilali M., Gabinet P.,  $H_\infty$  design with pole placement constraints: An LMI approach, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 41, No. 3, pp. 358-367, 1996.
- [Chun 06] Chun H.F., Yung S.L., Shih W.K., Lin H., Ching H.L., A new LMI-Based approach to relaxed quadratic stabilization of T-S fuzzy control systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vo. 14, No. 3, pp. 386-397, 2006.

## ***Bibliographies***

---

- [Feng 01] Feng G., An approach to quadratic stabilisation of uncertain fuzzy dynamic systems, *IEEE. Transaction on Circuits and systems*, Vol. 7, No. 6, pp. 760-796, 2001.
- [Feng 03] Feng G., Controller synthesis of fuzzy dynamical systems based on piecewise Lyapunov functions, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 11, No. 5, pp. 605-612, 2003.
- [Gahi 95] Gahinet P., Nemirovski A., Laub A., Chilali M., LMI control toolbox for use with MATLAB, 1995.
- [Gahi 96] Gahinet P., Apkarian P., Chilali M., Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 41, No. 3, pp. 436- 442, 1996.
- [Gasso 00] Gasso K., Identification des systèmes dynamiques non linéaires: Approche multimodèle, Thèse de doctorat, L'institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, 2000.
- [Guesta 99] Guesta F., Gordillo F., Aracil J., Ollero A., Stability analyses of nonlinear multivariable T-S fuzzy control systems, *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*. Vol. 7, No. 5, pp. 508-519, 1999.
- [Joh 99] Johanson M., Rantzer A., Arzen K., Piecewise quadratic stability of fuzzy systems, *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, Vol. 7, No. 6, pp. 713-721, 1999.
- [Karm 84] Karmarkar N., A new polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, Vol. 4, No. 4, pp. 373-395, 1984.
- [Kawa 96] Kawamoto S., Nonlinear control and rigorous stability analysis based on fuzzy system for inverted pendulum, in *Proc. FUZZ. IEEE*, Vol. 2, pp. 1427-1432, 1996.
- [Kim 00] Kim E., Lee H., New approaches to relaxed quadratic stability of fuzzy control systems, *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, Vol. 8, No. 5, pp. 523-534, 2000.
- [Krus 06] Kruszewski A., Lois de commande pour une classe de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno : Mise sous forme LMI, Thèse doctorat, L'université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis, 2006.
- [Kuang 06] Kuang Y.L., Hui W.T., Jieh J.L., Stability conditions for LMI-based Fuzzy control from viewpoint of membership functions, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 14, No. 6, pp. 874-884, 2006.
- [Lauer 03] Lauber J., Moteur à allumage commandé avec EGR: Modélisation et commande non linéaire, Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 2003.

## ***Bibliographies***

---

- [Ma 98] MA X.J., SUN Z.Q., HE Y.Y., Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 6, No. 1, pp. 41-50, 1998.
- [Morère 01] Morère Y., Mise en œuvre de la loi de commande pour les modèles flous de Type Takagi-Sugeno, Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 2001.
- [Nest 94] Nesterov Y., Balakrishnan J., A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 12, pp. 2469-2471, 1994.
- [T-S 85] Takagi T., Sugeno M., Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control, *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, Vol. 15, No. 1, pp.116-132, 1985.
- [Tanaka 94] Tanaka K., Sano M., On the concept of fuzzy regulators and fuzzy observers, in *Proc. 3rd IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Vol. 2, pp. 767-772, Orlando,1994.
- [Tanaka 97] Tanaka K., Wang H.O., Fuzzy regulators and fuzzy observers: A Linear Matrix Inequality approach, *IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 2, pp. 1315-1320, San Diego, 1997.
- [Tanaka 98] Tanaka K., Ikeda T., Wang H.O., Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 6, No. 2, pp. 250-265, 1998.
- [Tanaka 01] Tanaka K., Hua O., Wang H.O., Fuzzy control systems design and analysis a Linear Matrix Inequality, *John Wiley and Sons*, New York, 2001.
- [Tanaka 01b] Tanaka K., Hori T., Wang H.O., New parallel distributed compensation using time derivative of membership functions: a fuzzy Lyapunov approach, *IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 4, pp. 3942-3947, 2001.
- [Teixeira 03] Teixeira M., Assunção E., Avellar R.G., On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 11, No. 5, pp. 613-623, 2003.
- [Thier 01] Thierry M.G., Vermeiren L., Control laws for Takagi-Sugeno fuzzy models, *ELSEVIER, Fuzzy Sets and Systems* 120 (2001) 95 -108.
- [Ting 06] Ting C.S., Stability analysis and design of Takagi-Sugeno fuzzy systems, *ELSEVIER, Information Sciences* 176 (2006) 2817-2845.
- [Valc 99] Valcher M.E., State observers for discrete-time linear systems with unknown inputs, *IEEE, Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 2, pp. 397-401, 1999.

## ***Bibliographies***

---

- [Verm 98] Vermeiren L., Proposition de lois de commande pour la stabilisation de modèles flous, Thèse de doctorat, L'université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis, 1998.
- [Wang 95] Wang H.O., Tanaka K., Griffin M. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model, *in Proc. FUZZ-IEEE/IFES*, Vol. 95, pp. 531-538, 1995.
- [Wang 96] Wang H.O., Tanaka K., Griffin M., An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 4, No. 1, pp. 14-19. 1996.
- [Yone 00] Yoneyama J., Nishikawa M., Katayama H., Ichikawa A., Output stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems, *ELSEVIER, Fuzzy Sets and Systems* 111 (2000) 253-266
- [Zhi 05] Xiu Z.H., Ren G., Stability analysis and systematic design of Takagi -Sugeno fuzzy control systems, *ELSEVIER, Fuzzy Sets and Systems* 151 (2005) 119-138.

## **Résumé:**

Ce mémoire a pour objet la proposition de nouvelles conditions de stabilité des systèmes flous de T-S, obtenues par le relâchement des conditions classiques formulées en termes LMI. Dans le premier chapitre, les modèles flous de T-S continus et discret sont rappelés, ainsi que l'outil numérique LMI et leurs propriétés matricielles. Le second chapitre s'intéresse à l'étude de la stabilité et de la stabilisation de ce type de modèles flous. Cette étude est faite par une approche utilisant une fonction de Lyapunov quadratique. Celle-ci permettant d'écrire facilement des conditions sous la forme de contraintes LMI. Des conditions de stabilisation avec un observateur d'état sont également données. Les conditions obtenues étant seulement conservatives. Dans le dernier chapitre, deux types de relâchement sont proposés pour réduire cette conservativité. Dans le premier, on suppose que le nombre de règles actives à chaque instant est inférieur au nombre total de règles, et le deuxième consiste à introduire des variables supplémentaires. Enfin, un exemple de la stabilisation adaptative est traité, et la stabilité globale des modèles flous T-S est assurée.

**Mots clés :** Modèle flou de Takagi-Sugeno, Inégalité Matricielle Linéaire (LMI), Concept PDC, Conditions de stabilité, Observateur flou, Relâchement, Systèmes non linéaires.

## **Abstract:**

This memory has for object the proposition of new conditions of stability of T-S fuzzy systems obtained by relaxing the classic conditions formulated in terms LMI. In the first chapter, the continue and discrete T-S fuzzy model is recalled, as well as numerical tool LMI and their matrix properties. The second chapter is interested in survey of the stability and the stabilization of this type of fuzzy models. This survey is made by an approach using a quadratic Lyapunov function. This one permitting to write some conditions easily in the form of LMIs constraints. The conditions of stabilization with an observer of state are also given. The conditions obtained being only conservatives. In the final chapter, two types different of relaxation are proposed to reduce this conservativity. In the first, we assume that the number of active rules at every instant is lower than the total number of rules, and the second consists in introducing supplementary variables. Finally, an example of the adaptive stabilization is treated, and the total stability of the T-S fuzzy model is guaranteed.

**Keywords:** Takagi-Sugeno fuzzy model, Linear Matrix Inequality (LMI), Concept PDC, Conditions of stability, Fuzzy observer, Relaxation. Nonlinear systems,

## **ملخص:**

هذه المذكرة تهدف إلى اقتراح شروط استقرار جديدة للأنظمة الغامضة من نوع T-S على شكل متراجحات المصفوفات الخطية. قمنا في الفصل الأول بإبراز النمط الغامض من نوع T-S المستمر و المتقطع، وكذلك قمنا بالتذكير بالوسيلة الرقمية LMI و دراسة خصائصها المصفوفاتية. أما في الفصل الثاني، اهتمنا بدراسة الاستقرار و الاستقرارية لهذا النمط من الأنظمة الغامضة، حيث استعملنا لذلك دالة ليابونوف الرباعية التي تمكننا من كتابة شروط استقرار على شكل LMI. قمنا كذلك بإعطاء شروط استقرار في حالة استعمال ملاحظ حالة. إلي هنا، جميع شروط الاستقرار المتحصل عليها محدودة. اقترحنا في الفصل الأخير طريقتين للتقليل من محدودية هذه الشروط. حيث اعتبرنا في الطريقة الأولى أن عدد النماذج النشطة في كل لحظة أقل من العدد الكلي للنماذج، أما في الثانية، فحاولنا إدخال متغيرات إضافية مكنتنا من التقليل من محدودية الشروط السابقة. في النهاية عالجتنا مشكلة متعلقة بالاستقرارية الملائمة و استخلصنا كذلك شروطا للاستقرار الإجمالي لهذا النوع من الأنظمة الغامضة.

**كلمات مفتاحية:** النظام الغامض T-S، متراجحة المصفوفات الخطية LMI، تصور PDC، شروط الاستقرار، الملاحظ الغامض، الإرخاء، الأنظمة غير الخطية.