

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université Ferhat Abbas Sétif 1
UFAS (ALGERIE)

Thèse

Présentée à la Faculté des sciences
Département de Physique

Pour l'Obtention du Diplôme de

Doctorat en Sciences

Option : Physique théorique

Par : Salim MEDJBER

Thème

Contribution à la solution de certains problèmes
quantiques non stationnaires

Soutenue publiquement le : 05/ 01/ 2017

Devant le Jury :

Pr. A. Boucenna	Président	Université Ferhat Abbas Sétif1
Pr. H. Bekkar	Rapporteur	Université Ferhat Abbas Sétif1
Pr. A. Maireche	Examineur	Université de M'sila.
Pr. M. Boussahel	Examineur	Université de M'sila.

Remerciements

Ce travail de thèse à été effectué à l'université de Ferhat Abbas de Sétif, sous la direction du professeur: HaceneBekkar. Je tiens à lui d'exprimer ma reconnaissance et mes remerciements pour m'avoir constamment guidé et conseillé tout au long de la réalisation de cette thèse. Mes remerciements vont également à tous les membres du jury: Monsieur le professeur: A. Boucenna de l'université Ferhat Abbas de Sétif qui a bien voulu présider ce jury. Messieurs: le professeur: A. Maireche de l'université Mohamed Boudiaf de M'sila et le professeur: M. Boussahel de l'université Mohamed Boudiaf de M'sila pour m'avoir honoré de leurs participation à ce jury.

Je tiens à remercier le professeur: S. Menouar de l'université Ferhat Abbas pour son encouragement et ses aides dans les calculs mathématiques concernant le sujet.

Je tiens à remercier le professeur: A. Roumili de l'université Ferhat Abbas pour son aide dans la rédaction de cette thèse.

Je tiens aussi à remercier le professeur: JeongRyeol Choi de la Corée pour sa collaboration et ses discussions riches dans le domaine des systèmes dépendants du temps.

J'adresse aussi mes remerciements à tous les enseignants qui, par leurs enseignements, leurs encouragements et leurs aides, ont contribué à ma formation durant tous mes études dès le primaire à l'université.

Dédicace

Je remercie le Dieu pour m'avoir donné la force d'accomplir ce travail pour aller plus loin In Chaa Allah.

Je dédie ce travail à ma mère, pour ses encouragements et ses prières tout au long de mes études et à la mémoire de mon père.

Je le dédie à ma petite famille: ma femme Sarra et ma fleur de vie Maria.

Ainsi qu'à ma sœur Razika, mes frères Abd el Karim et Bouzid et à ma grande famille.

À tous mes amis sans citer les noms. À mes collègues de l'université de Constantine, Sétif et M'sila sans citer les noms. À tous ceux qui aiment Salim et ceux que Salim aime.

Salim

Table des matières

Introduction	3
Chapitre 1 : Systèmes quantiques non stationnaires	
1.1 Introduction.....	6
1.2 Equation de Schrödinger.....	6
1.2.1 Propriétés de l'équation de Schrödinger.....	7
1.3 Equation de Schrödinger stationnaire.....	7
1.4 Equation de Schrödinger non stationnaire.....	9
1.4.1 Transformation unitaire.....	9
1.4.2 La théorie des invariants.....	10
1.5 L'équation différentielle de Nikiforov-Uvarov (N-U).....	13
Chapitre 2 : Système quantiques non stationnaires unidimensionnels :	
2.1 Introduction.....	20
2.2 Potentiel de Morse.....	20
2.3 Potentiel de Woods-Saxon.....	24
Chapitre 3 : Systèmes quantiques non stationnaires à trois dimensions :	
3.1 Introduction.....	30
3.2 Potentiel central (O.H.I).....	31
3.2.1 L'opérateur invariant I.....	32
3.2.2 Valeurs propres.....	34
3.2.3 Fonctions propres.....	37
Chapitre 4 : La théorie d'Ehrenfest et les systèmes non stationnaires	
4.1 Introduction.....	40
4.2 La théorie d'Ehrenfest.....	41
4.3 L'oscillateur de Caldirola-Kanai forcé dépendant du temps.....	42
4.3.1 Traitement classique.....	42
4.3.2 Analyse quantique.....	43
4.4 Test du théorème d'Ehrenfest.....	46
Conclusion	50
Références bibliographiques	51

INTRODUCTION

Introduction

Introduction:

En mécanique quantique, les systèmes non stationnaires sont représentés par un hamiltonien dépendant explicitement du temps. Ces systèmes sont difficiles à résoudre exactement, particulièrement la solution analytique de l'équation de Schrödinger.

L'équation de Schrödinger joue un rôle fondamental en mécanique quantique car c'est elle qui régit l'évolution dans le temps du système physique. Depuis la publication du travail de Schrödinger [1], les physiciens théoriciens se sont penchés à trouver les solutions analytiques à l'équation de Schrödinger pour différents systèmes physiques. À partir de ces solutions on obtient une fonction d'onde qui nous permet d'identifier le système quantique étudié. Pour les systèmes stationnaires on sépare les variables (espace-temps) et on obtient ainsi l'équation de Schrödinger stationnaire qui a été résolue analytiquement seulement pour quelques systèmes simples, alors que la plupart des autres cas sont restés sans solutions, ils n'ont pas pu être résolus que par des méthodes approximatives où numériques. Cependant, pour les systèmes non stationnaires, on utilise les méthodes approximatives dont leurs applications étaient très limitées, ce qui a poussé les physiciens à proposer plusieurs méthodes et techniques différentes pour étudier les systèmes physiques dont l'hamiltonien dépend des paramètres variants en fonction du temps. La méthode la plus employée est la méthode d'invariant [2], qui se base sur la définition d'un opérateur invariant. Elle vérifie avec l'hamiltonien du système l'équation de Liouville-Von Neumann, ce qui signifie que les vecteurs propres de l'hamiltonien ne sont que ceux de l'opérateur invariant multiplié par un facteur de phase complexe. La recherche d'un tel invariant pour les systèmes quantiques plus complexes s'avère toujours une tâche très difficile qui continue à constituer l'un des domaines de recherches actives en physique théorique. La deuxième méthode c'est la méthode de transformation unitaire qui est basé sur la notion d'un opérateur unitaire permettant de transformer le système physique compliqué à un autre plus simple et facile à résoudre.

Le choix d'une meilleure méthode est selon la forme de l'hamiltonien du système et la fonction d'onde qu'on peut trouver.

Plusieurs études sur des invariants pour des classes de potentiels ont été faites. Citons par exemple l'oscillateur harmonique généralisé et l'oscillateur singulier [3-20], la particule libre dans un potentiel linéaire [21-24], le système à deux niveaux [25], la particule chargée dans un champ magnétique [2,26-28], l'oscillateur singulier plus le terme $(1/x)p + p(1/x)$ [29] et les oscillateurs couplés en présence d'un champ magnétique dépendant du temps [30].

Alors, les sujets de la plupart de ces recherches ont été limités au cas d'un système à une ou deux dimensions seulement en raison de la difficulté de développer des calculs mathématiques pour un système de trois dimensions contenant des paramètres dépendants du temps. Mais depuis les travaux pionniers de Lewis [2, 31,32], les chercheurs ont étudiés le potentiel central non stationnaire. On peut citer l'oscillateur harmonique dépendant du temps qui a suscité un intérêt considérable dans la littérature, car il offre des modèles qu'on peut résoudre avec exactitude dans les différents domaines de la physique. Bien que l'oscillateur harmonique non stationnaire perturbé par un potentiel quadratique inverse est largement étudié jusqu'à présent [29, 33,34].

Ce succès de la théorie des invariants nous a motivé à l'exploiter dans l'étude des systèmes très intéressants, le potentiel de Morse qui n'est pas étudié dans la littérature et le potentiel

Introduction

central composé d'un oscillateur harmonique plus un potentiel quadratique inverse non stationnaire avec une masse croissante linéairement.

D'une autre part et dans le cadre de chercher la correspondance entre la mécanique classique et la mécanique quantique nous avons étudié un cas spécial classiquement et quantiquement et nous avons obtenu le lien entre la trajectoire classique du mouvement et le centre d'onde quantique puis nous avons confirmé la validité du théorème d'Ehrenfest pour un système physique dépendant du temps: Oscillateur de Caldirola-Kanai forcé dépendant du temps

Avant d'aborder le sujet, on va d'abord faire un bref rappel sur l'équation de Schrödinger stationnaire et non stationnaire et ainsi les méthodes de leurs résolutions, en particulier, la méthode des invariants et la méthode de transformation unitaire et on présente en détail la méthode mathématique de Nikiforov-Uvarov (N-U) [35] pour résoudre l'équation différentielle du deuxième ordre de type hypergéométrique, dont la plupart des cas de l'équation de Schrödinger tend vers cette équation différentielle. Dans le deuxième chapitre nous avons résolu l'équation de Schrödinger non stationnaire pour les deux potentiels, de Morse et de Woods-Saxon à une dimension. Le troisième chapitre est consacré à l'étude quantique d'un potentiel central à trois dimensions associé à un oscillateur harmonique plus un potentiel quadratique inverse dépendant du temps avec une masse croissante linéairement. Dans le quatrième chapitre nous avons testé la validité du théorème d'Ehrenfest pour un simple système physique dépendant du temps: Oscillateur de Caldirola-Kanai forcé dépendant du temps.

Chapitre 1

Systemes quantiques non stationnaires

Chapitre 1: Systèmes quantiques non stationnaires

Systèmes quantiques non stationnaires

1.1 Introduction:

En 1911 le physicien Rutherford détermina l'existence du noyau atomique, il émit l'hypothèse que tous les atomes sont constitués d'un noyau dense chargé positivement autour duquel tournent, comme les planètes autour du soleil, les électrons chargés négativement. La théorie électromagnétique classique développée par le physicien James Maxwell prédit sans équivoque qu'un électron tournant autour du noyau rayonne continuellement de l'énergie électromagnétique jusqu'à épuisement total de son énergie. Ainsi, d'après la théorie classique, un atome tel que décrit par Rutherford serait instable. Cette lacune amena le physicien Niels Bohr, à postuler en 1913 que la théorie classique n'est pas valable pour un atome et que les électrons se déplacent sur des orbites placées à des distances déterminées du noyau et qu'à chaque changement d'orbite d'un électron il y a absorption, ou émission d'énergie. Le premier développement qui conduisit à la résolution des difficultés théoriques que les observations furent amenés l'introduction par le physicien Max Plank de la notion de quantum comme réponse aux études conduites par les physiciens sur le rayonnement du corps noir, son hypothèse indiquait que l'énergie était rayonnée seulement par quanta d'énergie $h\nu$, ou ν la fréquence et $h = 6,62 \times 10^{-34} j.s$, est la constante de Plank. En 1900, Plank affirma donc que la matière ainsi que l'énergie rayonnant ont une structure discontinue et postula que la matière ne peut émettre ou absorber l'énergie rayonnante que par petites unités discrètes appelées quanta. D'après les résultats de (l'effet Compton et l'effet photoélectrique), le physicien Louis-De-Broglie suggère, en 1924 que les particules pourraient aussi dans certain cas, montrer des propriétés d'ondes. Quelques années plus tard, cette prédiction fut vérifiée expérimentalement par les physiciens C.J. Davison et G.P. Thomson. Ils montrèrent qu'un faisceau d'électrons dispersé par un cristal génère une diffraction caractéristique d'une onde. La notion ondulatoire de la particule (L.De-Broglie 1924), permet au physicien Erwin Schrödinger, de développer une équation dit équation d'onde, ou équation de Schrödinger pour décrire les propriétés ondulatoires de la particule.

1.2 Équation de Schrödinger

La notion ondulatoire de la particule permet au physicien Erwin Schrödinger [1] de développer une équation d'onde pour décrire les propriétés ondulatoires de la particule.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H\psi(\vec{r}, t) \quad (1-1)$$

L'hamiltonien H peut être exprimé comme la somme de deux opérateurs: l'un qui correspond à l'énergie cinétique et l'autre à l'énergie potentielle,

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}, t) \quad (1-2)$$

$\psi(\vec{r}, t)$ est la fonction d'onde qui est une amplitude de probabilité, cette fonction d'onde contient toutes les informations sur l'état du système physique.

Chapitre 1: Systèmes quantiques non stationnaires

1.2.1 Propriétés de l'équation de Schrödinger

a- Elle est linéaire et homogène en $\psi(\vec{r}, t)$, par conséquent elle prend en compte le principe de superposition (la solution peut être ajoutée en amplitude ou en phase pour pouvoir reproduire le phénomène d'interférence).

b- C'est une équation différentielle du premier ordre par rapport au temps. Cette condition est nécessaire pour que l'état du système représenté par $\psi(\vec{r}, t_0)$ à l'instant t_0 déterminera son état à tous les instants ultérieurs.

c- La fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$ doit satisfaire les conditions suivantes:

- elle doit être continue.
- elle ne doit pas prendre des valeurs infinies.
- la dérivée de $\psi(\vec{r}, t)$ par rapport à la position doit être continue.
- elle doit être normalisée c'est-à-dire:

$$\int \psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) d\vec{r} = 1 \quad (1-3)$$

1.3 Équation de Schrödinger stationnaire :

Si l'hamiltonien du système ne dépend pas du temps, le système est dit stationnaire (conservatif). Dans ce cas on peut utiliser la méthode de séparation des variables c'est-à-dire la fonction d'onde peut être écrite sous forme d'un produit d'une fonction spatiale $\phi(\vec{r})$ et d'une fonction temporelle $U(t)$:

$$\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r})U(t) \quad (1-4)$$

En substituant ceci dans l'équation (1-1), on trouve que les fonctions $\phi(\vec{r})$ et $U(t)$ vérifient les deux équations:

$$i\hbar \frac{\partial U(t)}{\partial t} = EU(t) \quad (1-5)$$

$$H\phi(\vec{r}) = E\phi(\vec{r}) \quad (1-6)$$

telle que E est une grandeur constante, on démontrera plus tard qu'il représente le spectre d'énergie pour le système physique.

La solution de l'équation (1-5) donne:

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \phi(\vec{r}) \quad (1-7)$$

où A est la constante de normalisation.

Alors que l'équation (1-6) représente l'équation de Schrödinger stationnaire.

Multipliant l'équation (1-6) à gauche par $\phi^*(\vec{r})$, on obtient:

$$\phi^*(\vec{r})H\phi(\vec{r}) = \phi^*(\vec{r})E\phi(\vec{r}) \quad (1-8)$$

d'où :

Chapitre 1: Systèmes quantiques non stationnaires

$$E = \frac{\langle \phi | H | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} \quad (1-9)$$

et qui représente la valeur moyenne de l'hamiltonien, c'est-à-dire, l'énergie du système physique étudié. Pour les systèmes physiques stationnaires, on s'intéresse à la solution de l'équation de Schrödinger stationnaire, on écrit la solution générale sous la forme:

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{-i\frac{Et}{\hbar}}\phi(\vec{r}) \quad (1-10)$$

Donc le problème c'est de résoudre l'équation de Schrödinger stationnaire et de trouver le spectre d'énergie pour le système physique.

Dans le cas de la symétrie sphérique du potentiel $V(\vec{r})$, on peut écrire l'équation de Schrödinger stationnaire dans les coordonnées sphériques comme :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) \right] \phi(r, \theta, \varphi) = E\phi(r, \theta, \varphi) \quad (1-11)$$

Dans ce système de coordonnées, le Laplacien s'écrit :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \quad (1-12)$$

avec :

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}) \right] \quad (1-13)$$

L : est l'opérateur du moment angulaire orbital.

La solution de cette équation s'écrit sous forme :

$$\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (1-14)$$

où $Y_l^m(\theta, \varphi)$ sont les harmoniques sphériques et $R(r)$ la fonction radiale qui doit satisfaire l'équation différentielle suivante:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(r)) \right] R(r) = 0 \quad (1-15)$$

En posant $R(r) = f(r)/r$, on obtient :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{eff}(r)) \right] f(r) = 0 \quad (1-16)$$

avec :

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \quad (1-17)$$

Chapitre 1: Systèmes quantiques non stationnaires

À cause de l'interprétation probabiliste due à M. Born en 1926 [36] des fonctions d'onde, les solutions de l'équation de Schrödinger doivent appartenir à l'espace de Hilbert. En plus de l'équation de Schrödinger, les solutions de cette dernière doivent vérifier l'équation de continuité suivante [37] :

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{J}(\vec{r}, t) = 0 \quad (1-18)$$

avec

$$\rho(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t)^* \psi(\vec{r}, t) \quad (1-19)$$

représente la densité de probabilité et

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = -\frac{i\hbar}{2m} [\psi^*(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi^*(\vec{r}, t)] \quad (1-20)$$

est le vecteur de la densité de courant.

Dans la littérature, la solution analytique de l'équation de Schrödinger stationnaire a été trouvée seulement pour quelques systèmes physiques comme l'atome d'hydrogène, oscillateur harmonique simple..., alors que la plupart des autres potentiels ont été résolus soit par des méthodes approximatives (la méthode de perturbation, la méthode variationnelle), ou par des méthodes numériques (la méthode d'Euler, la méthode de Hann,...).

1.4 Équation de Schrödinger non stationnaire :

Si l'hamiltonien H dépend explicitement du temps, le système physique est dit non stationnaire (non conservatif); où l'hamiltonien $H(t)$ dépend explicitement du temps à travers un ensemble de paramètres dépendants du temps, $\{X_i(t), i = 1, 2, \dots\}$, ces derniers peuvent représenter l'interaction du système considéré avec des champs externes dépendants du temps (champ électrique, champ magnétique, ...) ou, tout simplement, des paramètres internes dépendants du temps (la masse, la charge, la profondeur d'un puits de potentiel, ...). Dans ce cas pour résoudre l'équation (1-1), on ne peut pas séparer les variables (espace-temps). Ce qui a poussé les physiciens à proposer plusieurs méthodes et techniques différentes pour étudier les systèmes physiques dont l'hamiltonien dépend des paramètres variants en fonction du temps. Le choix d'une méthode particulière repose généralement sur la forme du potentiel et sur celle de la fonction d'onde recherchée. On peut citer deux méthodes intéressantes qui ont une relation directe avec ce qui va suivre de notre travail.

1.4.1 Transformation unitaire:

Comme en mécanique classique on utilise les transformations canoniques pour simplifier les systèmes compliqués, en mécanique quantique on utilise les transformations unitaires pour transformer un hamiltonien très compliqué à un autre simple.

Il est important de se rappeler que pour décrire l'évolution du vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ dans l'espace de Hilbert, on doit choisir un système d'axes ou un référentiel. Le choix de référentiel n'a pas de raison d'être unique, c'est-à-dire que l'on est libre de passer à un autre système

Chapitre 1: Systèmes quantiques non stationnaires

d'axes, chaque fois que l'on change de référentiel, on change de point de vue et par conséquent on observe le système physique sous un angle différent. En pratique, pour passer d'un référentiel à un autre, on utilise des opérateurs unitaires U qui peuvent être indépendants ou dépendants du temps et qui satisfont à la condition :

$$UU^+ = U^+U = 1 \quad (1-21)$$

où U^+ est l'opérateur adjoint de U . Généralement, pour un Hamilton dépendent du temps, on utilise des opérateurs unitaires dépendants du temps qui transforment le vecteur d'états de la façon suivant:

$$|\widetilde{\psi}(t)\rangle = U^{-1}(t)|\psi(t)\rangle \quad (1-22)$$

Dans le nouveau référentiel, le nouvel Hamiltonien s'écrit :

$$\widetilde{H}(t) = U^{-1}(t)H(t)U(t) - i\hbar U^{-1}(t)\frac{\partial U(t)}{\partial t} \quad (1-23)$$

Le but général d'un changement de référentiel est de trouver une représentation dans laquelle l'évolution temporelle du système physique parait la plus simple. Souvent, un changement de représentation peut nous apporter de nouvelles interprétations physiques ou des avantages techniques comme par exemple la qualité de convergence numérique d'un calcul.

Donc les transformations unitaires servent d'outils de recherche de nouvelles représentations. Par exemple, dans le nouveau référentiel, on aurait être capable d'effectuer une séparation de variables entre la partie temporelle et la partie spatiale du vecteur d'état $|\widetilde{\psi}(t)\rangle$. En d'autre termes, on cherche des opérateurs unitaires qui mettrait l'Hamiltonien original $H(t)$ sous une forme factorisable, i.e, $\widetilde{H}(t) = \sum_n h_n(t)T_n$ où $\widetilde{H}(t) = g(t)k$, où les T_n et k sont indépendants du temps. Dès alors, on pourrait intégrer analytiquement l'équation de Schrödinger impliquant $\widetilde{H}(t)$ pour obtenir d'évolution temporelle dans le nouveau référentiel.

Plusieurs auteurs ont utilisé cette méthode pour différents systèmes quantiques, on peut citer par exemple l'oscillateur harmonique généralisé et l'oscillateur singulier [3-20], la particule chargée dans un champ magnétique [2,26-28], l'oscillateur singulier plus le terme $(1/x)p + p(1/x)$ [29] et les oscillateurs couplés en présence d'un champ magnétique dépendant du temps [30].

1.4.2 La théorie des invariants :

Parmi les méthodes les plus puissantes et qui donnent des solutions exactes de l'équation de Schrödinger non stationnaire, nous avons la méthode des invariants qui a été introduite par Lewis et Riesenfeld [2].

L'idée de base de la théorie des invariants est la dérivation de la relation entre des états propres de l'invariant et la solution de l'équation de Schrödinger. On peut trouver une transformation de base dépendante du temps pour chaque état propre d'un invariant telle que

Chapitre 1: Systèmes quantiques non stationnaires

la fonction propre devient une solution de l'équation de Schrödinger et la phase est déterminée en résolvant un système d'équations différentielles du premier ordre.

Nous considérons un système dont l'hamiltonien $H(t)$ est explicitement dépendant du temps et nous supposons l'existence d'un autre opérateur hermitien non trivial $I(t)$. $I(t)$ est dit un invariant s'il satisfait l'équation de Liouville-Von Neumann:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] = 0 \quad (1-24)$$

et il doit être hermitien:

$$I = I^\dagger \quad (1-25)$$

L'opérateur invariant est une constante de mouvement, donc ses valeurs propres sont indépendantes du temps.

On peut démontrer l'existence d'une relation entre les vecteurs propre de l'invariant I et la solution de l'équation de Schrödinger comme suit:

L'équation de Schrödinger qui détermine le vecteur d'état dépendant du temps $|\psi\rangle$ est :

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H(t)|\psi\rangle \quad (1-26)$$

En appliquant l'équation (1-24) sur $|\psi\rangle$ et en utilisant l'équation (1-26), nous obtenons la relation :

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\psi\rangle = -\frac{1}{i\hbar} [I, H] |\psi\rangle \quad (1-27)$$

par conséquent

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (I|\psi\rangle) = H(t)(I|\psi\rangle) \quad (1-28)$$

Cette dernière formule implique que l'action de l'invariant sur un vecteur produit une autre solution de l'équation de Schrödinger. Ce résultat nous permet d'écrire la solution de l'équation de Schrödinger sous la forme:

$$\psi_\lambda(\vec{r}, t) = e^{i\alpha_\lambda(t)} \varphi_\lambda(\vec{r}, t) \quad (1-29)$$

où $\varphi_\lambda(\vec{r}, t)$ est la fonction propre de l'invariant I avec la valeur propre λ indépendant du temps:

$$I\varphi_\lambda(\vec{r}, t) = \lambda\varphi_\lambda(\vec{r}, t) \quad (1-30)$$

et $\alpha_\lambda(t)$ est le facteur de phase donné par:

Chapitre 1: Systèmes quantiques non stationnaires

$$\hbar \frac{d\alpha_\lambda(t)}{dt} = \left\langle \varphi_\lambda(\vec{r}, t) \left| \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \right| \varphi_\lambda(\vec{r}, t) \right\rangle \quad (1-31)$$

Dans certains cas, pour résoudre l'équation d'invariant dépendante du temps on utilise une transformation unitaire pour obtenir un invariant plus simple comme suit:

$$\phi_\lambda(\vec{r}) = U(t)\varphi_\lambda(\vec{r}, t) \quad (1-32)$$

avec

$$I_0\phi_\lambda(\vec{r}) = \lambda\phi_\lambda(\vec{r}) \quad (1-33)$$

où :

$$I_0 = UIU^{-1} \quad (1-34)$$

Donc l'équation différentielle obtenue par la transformation est une équation différentielle plus simple qu'on peut résoudre par les méthodes bien connues.

Mais la question qui se pose maintenant c'est comment trouver un invariant pour un système quantique donné ?

Pour certains systèmes on construit l'opérateur invariant \hat{I} à partir des opérateurs de position \hat{x} et d'impulsion \hat{p} et ses multiplications selon la forme de l'hamiltonien H de tel sorte que l'opérateur invariant soit hermitien et vérifiait l'équation de Louville-Von Neumann (1-24).

Pour les autres cas d'un système de dimension finie, il y a un résultat dû à [38] qui stipule qu'on peut avoir un invariant pour le système (1-26) si est seulement si, on peut construire une algèbre de Lie. Dans le cas de dimension infinie, pour qu'un système de la forme (1-26) ait un invariant, il faut que l'algèbre de Lie soit de dimension infinie.

Paradoxalement, plusieurs exemples d'intérêt physique (comme, l'oscillateur harmonique), ont une algèbre de Lie de dimension finie (elle est même de dimension réduite).

Donc on se met là, dans le cas d'un système de dimension infinie, sous l'hypothèse d'avoir une algèbre de Lie de dimension finie. On va voir comment cette hypothèse peut nous aider à trouver l'ensemble des invariants de notre système de Schrödinger.

Supposons par exemple que l'algèbre de Lie engendrée par $H(t)$ est donnée par l'ensemble des opérateurs hermitiens:

$$A = \{T_1, T_2, \dots, T_n\} \quad (1-35)$$

On essaiera donc de trouver des invariants I qui se décomposent complètement sur cette algèbre de Lie. On prend alors I sous la forme :

$$I(t) = \sum_{i=1}^n B_i T_i \quad (1-36)$$

Chapitre 1: Systèmes quantiques non stationnaires

En injectant cette forme dans la formule (1-24) ; on voit bien que les paramètres $B_i(t)$ dépendants du temps doivent vérifier un système d'équations.

Pour retrouver ces équations différentielles, nous avons besoin de connaître la décomposition des commutateurs $[H, T_i]$ dans la base Λ . En faisant cela, on trouvera les coefficients C_i^j :

$$[H, T_i] = \sum_{j=1}^n C_i^j T_j \quad (1-37)$$

Connaissant ces coefficients, on peut donner les équations différentielles, que les $B_i(t)$ doivent vérifier :

$$i\hbar \sum_{i=1}^n \dot{B}_i T_i = \sum_{j=1}^n C_i^j T_j, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (1-38)$$

Aussi, à chaque opérateur T_i qui vérifie l'équation (1-38), est associé une équation différentielle pour l'ensemble des paramètres $B_i(t)$.

Plusieurs auteurs ont étudiés les systèmes quantiques dépendants du temps en résolvant l'équation de Schrödinger par la théorie d'invariant pour différents systèmes, parmi lesquels: l'oscillateur harmonique généralisé et l'oscillateur singulier [3-20], la particule libre dans un potentiel linéaire [21-24], le système à deux niveaux [25], la particule chargée dans un champ magnétique [2,26-28], l'oscillateur singulier plus le terme $(1/x)p + p(1/x)$ [29] et les oscillateurs couplés en présence d'un champ magnétique dépendent du temps [30].

1.5 L'équation différentielle de Nikiforov-Uvarov(N-U) :

Dans un grand nombre de problèmes quantiques, la résolution de l'équation de Schrödinger conduit à la résolution de l'équation différentielle de type:

$$\psi''(z) + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} \psi'(z) + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} \psi(z) = 0 \quad (1-39)$$

où $\sigma(z)$ et $\tilde{\sigma}(z)$ sont des polynômes de degré non supérieur à 2, et $\tilde{\tau}(z)$ un polynôme de degré non supérieur à 1.

Nous utilisons la méthode de Nikiforov-Uvarov (N-U) [35] comme suit:

Nous effectuons la transformation suivante :

$$\psi(z) = \phi(z)y(z) \quad (1-40)$$

Qui permet, par un choix de la fonction $\phi(z)$, de passer à une autre équation de même type, mais plus simple :

$$\sigma(z)y''(z) + \tau(z)y'(z) + \lambda y(z) = 0 \quad (1-41)$$

où la fonction $\phi(s)$ vérifie l'équation différentielle suivant :

Chapitre 1: Systèmes quantiques non stationnaires

$$\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \frac{\pi(z)}{\sigma(z)} \quad (1-42)$$

$y(z)$ est une fonction de type hypergéométrique, sa solution est donnée par la formule de Rodrigues:

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} [\sigma^n(z) \rho(z)] \quad (1-43)$$

où B_n est une constante de normalisation. La fonction de poids $\rho(z)$ satisfait la condition :

$$(\sigma\rho)' = \tau\rho \quad (1-44)$$

La fonction $\pi(z)$ et le paramètre λ requis pour cette méthode sont définis comme suit :

$$\pi(z) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma} \quad (1-45)$$

$$\lambda = k + \pi' \quad (1-46)$$

$\pi(z)$ est un polynôme, la fonction sous la racine carrée doit être le carré d'un polynôme. Pour qu'il soit aussi, il faut que le discriminant du polynôme du second ordre sous le signe de la racine dans l'équation (1-45) soit nul. Cette condition nous conduit, en général à une équation du deuxième degré, pour la constante k . Une fois que k était trouvé, on cherche λ par l'équation (1-46).

On a par définition:

$$\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z) \quad (1-47)$$

Puisque la dérivée de $\tau(z)$ doit être négative, ceci conduit aux choix de k .

Pour :

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2} \sigma'', n = 0,1,2, \dots \quad (1-48)$$

on obtient le spectre du système étudié.

En général, l'équation de Schrödinger qui peut être obtenue avec différents potentiels prend la forme suivante [35]:

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{s^2(1 - \alpha_3 s)^2} \right] \psi = 0 \quad (1-49)$$

Nous pouvons résoudre ceci comme suit. Lorsque l'équation (1-49) est comparée avec l'équation (1-39), nous obtenons :

Chapitre 1: Systèmes quantiques non stationnaires

$$\tilde{\tau} = \alpha_1 - \alpha_2 s \quad (1-50)$$

et

$$\sigma = s(1 - \alpha_3 s) \quad (1-51)$$

et aussi

$$\tilde{\sigma} = -\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3 \quad (1-52)$$

En substituant ceux-ci dans l'équation (1-45), on trouve:

$$\pi(s) = \alpha_4 + \alpha_5 s \pm \sqrt{(\alpha_6 - k\alpha_3)s^2 + (\alpha_7 + k)s + \alpha_8} \quad (1-53)$$

où

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(1 - \alpha_1) \quad (1-54)$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3) \quad (1-55)$$

$$\alpha_6 = \alpha_5^2 + \xi_1 \quad (1-56)$$

$$\alpha_7 = 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2 \quad (1-57)$$

$$\alpha_8 = \alpha_4^2 + \xi_3 \quad (1-58)$$

Dans l'équation (1-53), la fonction sous la racine carrée doit être le carré d'un polynôme conformément à la méthode de (N-U), d'où on tire:

$$k_{1,2} = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) \mp 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} \quad (1-59)$$

où, nous définissons

$$\alpha_9 = \alpha_3\alpha_7 + \alpha_3^2\alpha_8 + \alpha_6 \quad (1-60)$$

Pour chaque k les fonctions π sont obtenues.

Pour le cas:

$$k = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) - 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} \quad (1-61)$$

La fonction π devient :

Chapitre 1: Systèmes quantiques non stationnaires

$$\pi(s) = \alpha_4 + \alpha_5 s - [(\alpha_9 + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8})s - \sqrt{\alpha_8}] \quad (1-62)$$

Pour le même k , en employant les équations (1-47), (1-50) et (1-53), on obtient:

$$\tau = \alpha_1 + 2\alpha_4 - (\alpha_2 - 2\alpha_5)s - 2[(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8})s - \sqrt{\alpha_8}] \quad (1-63)$$

et

$$\tau' = -(\alpha_2 - 2\alpha_5) - 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) = -2\alpha_3 - 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) < 0 \quad (1-64)$$

Quand l'équation (1-46) est employée avec les équations (1-63) et (1-64), l'équation suivante qui détermine le spectre d'énergie est dérivée:

$$\alpha_2 n - (2n + 1)\alpha_5 + (2n + 1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) + n(n - 1)\alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3 \alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8 \alpha_9} = 0 \quad (1-65)$$

À partir de l'équation (1-44), on obtient:

$$\rho(s) = s^{\alpha_{10}-1} (1 - \alpha_3 s)^{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1} \quad (1-66)$$

et lorsque cette équation est utilisée dans l'équation (1-43), on trouve:

$$y_n = P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1)} (1 - 2\alpha_3 s) \quad (1-67)$$

où :

$$\alpha_{10} = \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8} \quad (1-68)$$

et

$$\alpha_{11} = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) \quad (1-69)$$

et $P_n^{(\alpha, \beta)}$ est le polynôme de Jacobi. Utilisant l'équation (1-42), on a abouti à:

$$\emptyset(s) = s^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \quad (1-70)$$

Donc la solution générale devient :

$$\psi(s) = s^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1)} (1 - 2\alpha_3 s) \quad (1-71)$$

Chapitre 1: Systèmes quantiques non stationnaires

où les fonctions alpha au dessus sont données par :

$$\alpha_{12} = \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8} \quad (1-72)$$

et

$$\alpha_{13} = \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \quad (1-73)$$

Pour quelques problèmes on a $\alpha_3 = 0$. Dans ce cas, on peut calculer la limite mathématique pour les deux polynômes suivants comme suit:

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow 0} P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1)}(1 - 2\alpha_3 s) = L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11} s) \quad (1-74)$$

et

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow 0} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} = e^{\alpha_{13} s} \quad (1-75)$$

Donc la solution donnée par l'équation (1-71) devient:

$$\psi = s^{\alpha_{12}} e^{\alpha_{13} s} L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11} s) \quad (1-76)$$

Dans certains cas, on a besoin d'une deuxième solution de l'équation (1-53). Dans ce cas, on utilise la deuxième valeur pour k :

$$k = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} \quad (1-77)$$

Cette solution mène à:

$$\psi(s) = s^{\alpha_{12}^*} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12}^* - \frac{\alpha_{13}^*}{\alpha_3}} P_n^{(\alpha_{10}^*-1, \frac{\alpha_{11}^*}{\alpha_3} - \alpha_{10}^*-1)}(1 - 2\alpha_3 s) \quad (1-78)$$

et le spectre d'énergie est déterminé par l'équation suivante:

$$\alpha_2 n - 2n\alpha_5 + (2n + 1)(\sqrt{\alpha_9} - \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) + n(n - 1)\alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} + \alpha_5 = 0 \quad (1-79)$$

Chapitre 1: Systèmes quantiques non stationnaires

Les paramètres alpha étoile sont les suivants :

$$\alpha_{10}^* = \alpha_1 + 2\alpha_4 - 2\sqrt{\alpha_8} \quad (1-80)$$

$$\alpha_{11}^* = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} - \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \quad (1-81)$$

$$\alpha_{12}^* = \alpha_4 - \sqrt{\alpha_8} \quad (1-82)$$

$$\alpha_{13}^* = \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} - \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \quad (1-83)$$

Chapitre 2

**Systemes quantiques non
stationnaires unidimensionnels**

Systèmes quantiques non stationnaires unidimensionnels

2.1 Introduction:

Dans notre travail, nous avons choisis deux systèmes quantiques non stationnaires unidimensionnels: le potentiel de Morse et le potentiel de Woods-Saxon parce que les problèmes d'une particule qui se meut dans un potentiel central peut être ramené dans certains cas au problème d'une seule dimension. Ces deux potentiels ne sont pas étudiés dans la littérature. On commence par l'étude du mouvement quantique du potentiel non stationnaire unidimensionnel de Morse. On construit un opérateur invariant et on utilise la formulation d'invariant pour trouver les fonctions d'onde de notre système en termes des fonctions propres de l'opérateur invariant. Les fonctions propres seront exprimées sous forme d'une équation différentielle du second ordre. On applique la méthode (N-U) pour réduire l'équation différentielle du deuxième degré à une équation différentielle de type hypergéométrique. Enfin, on obtiendra la forme finale des fonctions d'onde en termes du polynôme de Laguerre. Alors que pour le potentiel de Woods-Saxon on utilise la méthode de séparation des variables. On obtiendra les fonctions d'onde en termes du polynôme de Jacobi.

2.2 Potentiel de Morse:

Le potentiel de Morse, nommé d'après le physicien Philip Morse [39], est un modèle pratique d'énergie potentielle pour une molécule diatomique. C'est une meilleure approximation pour la structure vibrationnelle de la molécule que celle de l'oscillateur harmonique quantique car il comprend de manière explicite les effets d'une rupture d'une liaison, comme l'existence des états non liés. Il prend aussi en compte l'anharmonicité des liaisons réelles et la probabilité non nulle de transition pour les états harmoniques et les bandes de combinaison. Il peut être aussi utilisé pour modélisation des interactions entre l'atome et sa surface.

Le potentiel de Morse non stationnaire unidimensionnel est représenté par l'hamiltonien:

$$H(x, p, t) = Z(t)p^2 + V_1(t)e^{-2a(t)x} + V_2(t)e^{-a(t)x} \quad (2-1)$$

où $Z(t), V_1(t), V_2(t)$ et $a(t)$ sont des coefficients dépendants du temps

Le système évolue dans le temps selon l'équation de Schrödinger:

$$\left[-Z(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_1(t)e^{-2a(t)x} + V_2(t)e^{-a(t)x} \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (2-2)$$

L'opérateur du moment conjugué est défini par $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, la position et l'impulsion vérifient la relation de commutation: $[x, p] = i\hbar$.

Pour résoudre l'équation de Schrödinger non stationnaire (2-2), on introduit un opérateur invariant associé au système. Un invariant $I(t)$ doit vérifier l'équation de Liouville-Von Neumann:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] = 0 \quad (2-3)$$

Chapitre 2: Systèmes quantiques non stationnaires unidimensionnels

Si un tel invariant existe, la condition (2-3) permet de construire des solutions de l'équation de Schrödinger sous la forme:

$$\psi_\lambda(x, t) = e^{i\alpha_\lambda(t)} \varphi_\lambda(x, t) \quad (2-4)$$

où $\varphi_\lambda(x, t)$ est la fonction propre de l'invariant $I(t)$ avec la valeur propre indépendante du temps λ , et $\alpha_\lambda(t)$ est la fonction de phase donnée par:

$$\hbar \frac{d\alpha_\lambda(t)}{dt} = \langle \varphi_\lambda(x, t) | \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right) | \varphi_\lambda(x, t) \rangle \quad (2-5)$$

La première étape consiste donc à trouver un opérateur hermitien $I(t)$ qui obéit à l'équation (2-3). Supposant l'existence de l'invariant hermitique de la forme:

$$I = Ap + Bx + Cp^2 + Dx^2 + Ee^{-2ax} + Fe^{-ax} + G(xp + px) + W\left(\frac{1}{x}p + p\frac{1}{x}\right) \quad (2-6)$$

où $A - W$ sont des fonctions réelles dépendantes du temps à déterminer.

On applique l'équation (2-3) sur l'invariant (2-6), on obtient:

$$A(t) = -2B_0 \int_0^t Z(t') dt' \quad (2-7)$$

$$B(t) = B_0 \quad (2-8)$$

$$C(t) = C_0 \quad (2-9)$$

$$D(t) = 0 \quad (2-10)$$

$$G(t) = 0 \quad (2-11)$$

$$W(t) = 0 \quad (2-12)$$

et les paramètres E et F vérifient les deux relations:

$$E(t) = C_0 \frac{V_1(t)}{Z(t)} \quad (2-13)$$

$$F(t) = C_0 \frac{V_2(t)}{Z(t)} \quad (2-14)$$

où B_0 et C_0 sont des constantes réelles arbitraires différentes de zéro.

On insère les résultats précédents dans l'équation (2-6), on obtient l'expression de l'opérateur invariant:

Chapitre 2: Systèmes quantiques non stationnaires unidimensionnels

$$I(t) = A(t)p + B_0x + C_0p^2 + C_0 \frac{V_1(t)}{Z(t)} e^{-2a(t)x} + C_0 \frac{V_2(t)}{Z(t)} e^{-a(t)x} \quad (2-15)$$

La prochaine étape consiste à trouver les fonctions propres $\varphi_\lambda(x, t)$ de $I(t)$. La fonction propre $\varphi_\lambda(x, t)$ de $I(t)$ correspondante à la valeur propre λ indépendante du temps est la solution de l'équation:

$$I\varphi_\lambda(x, t) = \lambda\varphi_\lambda(x, t) \quad (2-16)$$

On pose :

$$\varphi_\lambda(x, t) = e^{-\frac{iA}{2\hbar C_0}x} \Phi_\lambda(x, t) \quad (2-17)$$

l'équation (2-16) devient:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + f(x, t) \right) \Phi_\lambda(x, t) = 0 \quad (2-18)$$

avec:

$$f(x) = -\frac{B_0}{\hbar^2 C_0} - \frac{E}{\hbar^2 C_0} e^{-2ax} - \frac{F}{\hbar^2 C_0} e^{-ax} + \frac{\lambda}{\hbar^2 C_0} + \frac{A}{4\hbar^2 C_0^2} \quad (2-19)$$

En utilisant le développement de Tylor pour les fonctions exponentielles jusqu'à l'ordre 2, on obtient l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2\Phi_\lambda}{dx^2} - (e + dx + bx^2)\Phi_\lambda = 0 \quad (2-20)$$

où :

$$e = \frac{E+F-\lambda}{\hbar^2 C_0} - \frac{A^2}{4\hbar^2 C_0^2} \quad (2-21)$$

$$d = \frac{B_0 - Fa - 2aE}{\hbar^2 C_0} \quad (2-22)$$

$$b = \frac{a^2(F+4E)}{2\hbar^2 C_0} \quad (2-23)$$

La transformation $\xi = x + \frac{d}{2b}$ et $z = \sqrt{b}\xi^2$ conduit à l'équation différentielle:

$$\frac{d^2\Phi_\lambda}{dz^2} + \frac{1/2}{z} \frac{d\Phi_\lambda}{dz} + \frac{1}{z^2} \left[-\frac{z^2}{4\sqrt{b}} + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{4b^2} - \frac{e}{b} \right) z \right] \Phi_\lambda = 0 \quad (2-24)$$

Cette équation a la forme de l'équation (1-49), avec:

Chapitre 2: Systèmes quantiques non stationnaires unidimensionnels

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \quad (2-25)$$

$$\alpha_2 = 0 \quad (2-26)$$

$$\alpha_3 = 0 \quad (2-27)$$

$$\xi_1 = \frac{1}{4\sqrt{b}} \quad (2-28)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{d}{4b^2} - \frac{e}{b} \right) \quad (2-29)$$

$$\xi_3 = 0 \quad (2-30)$$

En employant les équations (1-54)-(1-58), on obtient:

$$\alpha_4 = \frac{1}{4} \quad (2-31)$$

$$\alpha_5 = 0 \quad (2-32)$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{4\sqrt{b}} \quad (2-33)$$

$$\alpha_7 = \frac{1}{4} \left(\frac{e}{b} - \frac{d}{4b^2} \right) \quad (2-34)$$

$$\alpha_8 = \frac{1}{16} \quad (2-35)$$

et les équations (1-60), (1-68), (1-69), (1-72) et (1-73) donnent:

$$\alpha_9 = \frac{1}{4\sqrt{b}} \quad (2-36)$$

$$\alpha_{10} = \frac{3}{2} \quad (2-37)$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{b^{1/4}} \quad (2-38)$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2} \quad (2-39)$$

$$\alpha_{13} = -\frac{1}{2b^{1/4}} \quad (2-40)$$

En substituant ceux-ci dans l'équation (1-76), on obtient la solution générale de l'équation (2-20) sous la forme:

Chapitre 2: Systèmes quantiques non stationnaires unidimensionnels

$$\phi_{\lambda}(x, t) = C_n b^{\frac{1}{4}} \left(x + \frac{d}{2b}\right) e^{-\frac{(x+\frac{d}{2b})^2 b^{1/4}}{2}} L_n^{\frac{1}{2}} \left(b^{1/4} \left(x + \frac{d}{2b}\right)^2\right) \quad (2-41)$$

où; $L_n^{\alpha}(x)$ est le polynôme de Laguerre et C_n la constante de normalisation.

Ensuite on déduit la solution de l'équation (2-17):

$$\varphi_{\lambda}(x, t) = C_n e^{-\frac{iA}{2\hbar c_0}x} b^{\frac{1}{4}} \left(x + \frac{d}{2b}\right) e^{-\frac{(x+\frac{d}{2b})^2 b^{1/4}}{2}} L_n^{\frac{1}{2}} \left(b^{1/4} \left(x + \frac{d}{2b}\right)^2\right) \quad (2-42)$$

Pour trouver les valeurs propres de I , on utilise l'équation (1-65), on obtient:

$$\lambda = \lambda_n = E + F + \hbar^2 C_0 \left[-\frac{A^2}{4\hbar^2 c_0^2} - \frac{d^2}{4b} + 4 \left(n + \frac{3}{4}\right) b^{\frac{3}{4}} \right] \quad (2-43)$$

tel que n est un nombre entier, $n = 0, 1, 2, \dots$

Finalement, l'évolution générale de l'équation de Schrödinger (2-2) peut s'écrire:

$$\psi(x, t) = C_n e^{i\alpha_{\lambda}(t)} e^{-\frac{iA}{2\hbar c_0}x} b^{\frac{1}{4}} \left(x + \frac{d}{2b}\right) e^{-\frac{(x+\frac{d}{2b})^2 b^{1/4}}{2}} L_n^{\frac{1}{2}} \left(b^{1/4} \left(x + \frac{d}{2b}\right)^2\right) \quad (2-44)$$

où: $C_n = \sqrt{\frac{2n!}{b^{\frac{1}{8}} \Gamma(n + \frac{3}{2})}}$ et $\Gamma(n)$: est la fonction gamma.

2.3 Potentiel de Woods-Saxon:

Le potentiel de Woods-Saxon (W-S) est un potentiel du champ moyen pour les nucléons (protons et neutrons) à l'intérieur du noyau atomique. Il est utilisé pour décrire de manière approximative les forces qui s'appliquent entre les nucléons. Le potentiel a été proposé en 1954 par R.D. Woods et David S. Saxon afin de décrire la diffusion des protons sur les noyaux lourds, tel que le platine ou le nickel [40]. Dans leur article, ils introduisent ce potentiel en remplacement d'un puits du potentiel carré, afin d'obtenir une meilleure reproduction des sections efficaces différentielles de la diffusion élastique. Ce nouveau potentiel permet d'obtenir des résultats plus cohérents que ceux obtenus en considérant une diffusion de Rutherford.

Dans cette partie de notre travail, on va étudier le mouvement quantique du potentiel non stationnaire de Woods-Saxon à une dimension pour le cas particulier $\frac{C(t)}{A(t)} = Const.$

On utilise la méthode de séparation des variables pour trouver les fonctions d'onde exactes et le spectre d'énergie pour notre système.

Chapitre 2: Systèmes quantiques non stationnaires unidimensionnels

Nous nous intéressons à la solution de l'équation de Schrödinger pour une particule plongée dans un potentiel à une dimension de Woods-Saxon dépendant du temps, $V(x, t) = \frac{C(t)}{1+q_0 e^{-\mu_0 x}}$. L'hamiltonien de notre système est donné par:

$$H = A(t)p^2 + \frac{C(t)}{1+q_0 e^{-\mu_0 x}} \quad (2-45)$$

avec $A(t)$ et $C(t)$ sont des fonctions dépendantes du temps, q_0 et μ_0 sont des constantes. Nous essayerons de résoudre l'équation de Schrödinger non stationnaire suivante:

$$\left[-A(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{C(t)}{1+q_0 e^{-\mu_0 x}} \right] \psi(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (2-46)$$

avec ($\hbar = 1$). L'étude du cas général de ce hamiltonien est très difficile, pour cela on a étudié seulement le cas spécial qui correspond à:

$$\frac{C(t)}{A(t)} = \alpha = \text{const} \quad (2-47)$$

Dans ce cas, l'hamiltonien de notre système s'écrit:

$$H = A(t) \left(p^2 + \frac{\alpha}{1+q_0 e^{-\mu_0 x}} \right) \quad (2-48)$$

L'équation (2-46) devient:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = A(t) \left(p^2 + \frac{\alpha}{1+q_0 e^{-\mu_0 x}} \right) \psi(x, t) \quad (2-49)$$

Nous prenons le changement de variable suivant:

$$s = \int A(t) dt \quad (2-50)$$

par conséquent:

$$A(t) \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} \quad (2-51)$$

et

$$\Psi(x, t) = \Psi(x, s) \quad (2-52)$$

Nous sommes ici conduits à l'équation de Schrödinger dépendante de la nouvelle variable s

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, s) = \left(p^2 + \frac{\alpha}{1+q_0 e^{-\mu_0 x}} \right) \psi(x, s) \quad (2-53)$$

Chapitre 2: Systèmes quantiques non stationnaires unidimensionnels

Remarquant qu'on peut séparer les variables (x, s) , donc on pose:

$$\Psi(x, s) = \phi(x)f(s) \quad (2-54)$$

et

$$H_0(x) = (p^2 + \frac{\alpha}{1+q_0 e^{-\mu_0 x}}) \quad (2-55)$$

où $H_0(x)$ est un hamiltonien indépendant du temps. L'application de la méthode de séparation des variables sur l'équation (2-53), conduit à:

$$\frac{1}{f(s)} \frac{\partial f(s)}{\partial s} = \frac{1}{\phi_n(x)} H_0(x) \phi_n(x) = \varepsilon_n \quad (2-56)$$

avec: $\varepsilon_n = \text{Const.}$

Donc, nous obtenons les deux équations suivantes:

$$H_0(x)\phi_n(x) = \varepsilon_n \phi_n(x) \quad (2-57)$$

$$\frac{i}{f(s)} \frac{\partial f(s)}{\partial s} = \varepsilon_n \quad (2-58)$$

La solution de l'équation (2-58) donne:

$$f(s) = C_n e^{-i\varepsilon_n s} \quad (2-59)$$

où C_n est la constante de normalisation.

L'équation (2-57) devient:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon_n - \frac{\alpha}{1+q_0 e^{-\mu_0 x}} \right) \phi_n(x) = 0 \quad (2-60)$$

La transformation $z = 1 + q_0 e^{-\mu_0 x}$, conduit à l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2 \phi_n(z)}{dz^2} - \frac{z}{z(1-z)} \frac{d\phi_n(z)}{dz} + \frac{1}{z^2(1-z)^2} [-\xi_1 z^2 + \xi_2 z] \phi_n(z) = 0 \quad (2-61)$$

Cette équation a la forme de l'équation (1-49), avec:

$$\alpha_1 = 0 \quad (2-62)$$

$$\alpha_2 = 1 \quad (2-63)$$

$$\alpha_3 = 1 \quad (2-64)$$

Chapitre 2: Systèmes quantiques non stationnaires unidimensionnels

$$\xi_1 = -\frac{\varepsilon_n}{\mu_0^2} \quad (2-65)$$

$$\xi_2 = -\frac{\alpha}{\mu_0^2} \quad (2-66)$$

$$\xi_3 = 0 \quad (2-67)$$

En employant les équations (1-54)-(1-58), on obtient:

$$\alpha_4 = \frac{1}{2} \quad (2-68)$$

$$\alpha_5 = -\frac{1}{2} \quad (2-69)$$

$$\alpha_6 = -\frac{\varepsilon_n}{\mu_0^2} + \frac{1}{4} \quad (2-70)$$

$$\alpha_7 = \frac{\alpha}{\mu_0^2} - \frac{1}{2} \quad (2-71)$$

$$\alpha_8 = \frac{1}{4} \quad (2-72)$$

et l'utilisation des équations (1-60), (1-68), (1-69), (1-72) et (1-73) conduit à:

$$\alpha_9 = \frac{1}{\mu_0^2}(\alpha - \varepsilon_n) \quad (2-73)$$

$$\alpha_{10} = 2 \quad (2-74)$$

$$\alpha_{11} = 3 + \frac{2}{\mu_0} \sqrt{\alpha - \varepsilon_n} \quad (2-75)$$

$$\alpha_{12} = 1 \quad (2-76)$$

$$\alpha_{13} = -1 - \frac{1}{\mu_0} \sqrt{\alpha - \varepsilon_n} \quad (2-77)$$

En substituant ceux-ci dans l'équation (1-71), on obtient la solution de l'équation (2-61) sous la forme:

$$\Phi_n(x) = (1 + q_0 e^{-\mu_0 x})(-q_0 e^{-\mu_0 x})^{\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\alpha}{\mu_0^2} + (n+1)^2\right)} P_n^{\left(1, \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\alpha}{\mu_0^2} + (n+1)^2\right)\right)}(-1 - 2q_0 e^{-\mu_0 x}) \quad (2-78)$$

où $P_n^{(a_1, b_1)}(x)$ est le polynôme de Jacobi.

La valeur propre de l'invariant I est obtenue à partir de l'équation (1-65):

Chapitre 2: Systèmes quantiques non stationnaires unidimensionnels

$$\varepsilon_n = \alpha - \frac{\mu_0^2}{4(n+1)^2} \left[\frac{\alpha}{\mu_0^2} + (n+1)^2 \right]^2 \quad (2-79)$$

et le spectre d'énergie est donné par:

$$E_n(t) = A(t) \left\{ \alpha - \frac{\mu_0^2}{4(n+1)^2} \left[\frac{\alpha}{\mu_0^2} + (n+1)^2 \right]^2 \right\} \quad (2-80)$$

La solution générale de l'équation (2-46) est:

$$\psi(x, t) = C_n e^{-i\varepsilon_n \int_0^t A(t') dt'} (1 + q_0 e^{-\mu_0 x}) (-q_0 e^{-\mu_0 x})^{\frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\alpha}{\mu_0^2} + (n+1)^2 \right)} P_n \left(1, \frac{1}{(n+1)} \left(\frac{\alpha}{\mu_0^2} + (n+1)^2 \right) \right) (-1 - 2q_0 e^{-\mu_0 x}) \quad (2-81)$$

où C_n est la constante de normalisation.

Chapitre 3

Systemes quantiques non stationnaires à trois dimensions

Chapitre 3: Systèmes quantiques non stationnaires à trois dimensions

Systèmes quantiques non stationnaires à trois dimensions

3.1 Introduction:

La dynamique quantique des systèmes potentiels centraux, qui est développée à l'origine dans le contexte des systèmes hamiltoniens stationnaires [41 -43], peut être étendue aux systèmes plus complexes qui impliquent des paramètres dépendants du temps. Les hamiltoniens dépendants du temps sont utiles pour décrire les systèmes dynamiques quantiques non stationnaires qui sont omniprésents dans le monde de la physique. Parmi de nombreux systèmes hamiltonien dépendants du temps (SHDT), les systèmes de potentiels centraux possibles avec des paramètres dépendants du temps qui ont suscité un intérêt considérable dans la littérature, car ils fournissent des modèles résolubles de divers systèmes physiques. Par conséquent, des recherches actives ont été menées dans ce contexte, accompagnant beaucoup de rapports à ce jour [4, 6, 10, 11, 12, 14,41 -50]. Par exemple, un oscillateur harmonique dissipatif perturbé par un potentiel quadratique inverse décrit par les paramètres dépendants du temps a été étudié [51]. Les propriétés quantiques du mouvement harmonique d'une particule chargée avec une masse effective dépendante du temps en présence d'un potentiel singulier dépendant du temps a été étudié [52]. Toutefois, les sujets de la plupart de ces recherches ont été limités au cas d'un système à une ou deux dimensions seulement en raison de la difficulté de développer des calculs mathématiques pour un système de trois dimensions contenant des paramètres dépendants du temps. Pour une compréhension complète des propriétés physiques profondes pour un tel système, une analyse quantique des solutions de l'équation de Schrödinger, ainsi que des solutions classiques correspondantes, sont nécessaires. Parmi les systèmes quantiques non stationnaires, un oscillateur harmonique plus un potentiel harmonique inverse à une ou deux dimensions qui représente l'un des problèmes intéressants qui a suscité un intérêt permanent en compte de ces nouvelles applications dans les systèmes physiques réels [12, 50, 53, 54]. Par exemple, les solutions quantiques exactes pour les systèmes à plusieurs corps [55, 56], les molécules polyatomiques [53] et le comportement quantique d'une particule chargée dans un champ électromagnétique [54] peuvent être étudiés par ce modèle. Ces études, pour les systèmes quantiques non stationnaires, peuvent être éventuellement étendues aux systèmes compliqués, tels que les systèmes quantiques dépendants du temps avec des oscillateurs harmoniques plus un potentiel harmonique inverse à trois dimensions. Stimulée par cette tendance pour les recherches récentes, nous avons étudié dans cette partie de notre travail les solutions quantiques exactes d'un système composé d'un potentiel harmonique dépendant du temps perturbé par un potentiel harmonique inverse à trois dimensions. À cet effet, plusieurs méthodes mathématiques particulières seront employées pour surmonter la difficulté mathématique pour développer une théorie quantique en tenant compte des paramètres dépendants du temps à trois dimensions. Typiquement, la solution de l'équation de Schrödinger ou les fonctions d'onde pour un système hamiltonien non stationnaire sont représentés en termes des fonctions propres d'un opérateur invariant du système. Ces fonctions propres sont obtenues en résolvant l'équation de la valeur propre de l'opérateur invariant. Étant donné que l'opérateur invariant est représenté en termes de certaines fonctions dépendantes du temps, l'évaluation directe de

Chapitre 3: Systèmes quantiques non stationnaires à trois dimensions

l'équation de la valeur propre est très difficile. Cette difficulté peut être résolue par l'introduction d'une transformation unitaire et la méthode de Nikiforov-Uvarov (N-U). L'équation aux valeurs propres peut être simplifiée par une transformation unitaire avec un opérateur unitaire approprié. La méthode (N-U) nous permet de résoudre l'équation différentielle du second ordre de type hypergéométrique.

3.2 Potentiel central (O.H.I):

On considère un oscillateur harmonique dépendant du temps plus un potentiel quadratique inverse avec une masse croissante linéairement (O.H.I) qui est défini par:

$$V(r, t) = \frac{1}{2}M_0(1 + \varepsilon t)^2\omega_0^2 e^{kt}r^2 + \frac{\delta}{2M_0(1+\varepsilon t)^2} \frac{1}{r^2} \quad (3.1)$$

où ω_0, M_0, k, δ et ε sont des constantes réelles. Une modélisation classique simple d'un système avec une augmentation linéaire de masse a été effectuée par Kunkel et Harrington [57]. Le modèle d'un système d'accumulation de masse linéaire est décrit dans les références [58] et [59]. Pour plus de commodité, nous considérons ici, seulement une variation lente avec le temps c'est-à-dire, $\varepsilon \ll 1$.

L'hamiltonien du système est donné par:

$$H(\vec{r}, p, t) = \frac{1}{2M_0(1+\varepsilon t)^2} p^2 + \frac{1}{2}M_0(1 + \varepsilon t)^2\omega_0^2 e^{kt}r^2 + \frac{\delta}{2M_0(1+\varepsilon t)^2} \frac{1}{r^2} \quad (3.2)$$

L'opérateur du moment conjugué est défini comme:

$$P^2 = P_r^2 + \frac{L^2}{r^2} \quad (3.3)$$

où:

$$P_r = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) \quad (3.4)$$

et

$$L^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right) \quad (3.5)$$

Notant que la position et l'impulsion satisfont la relation de commutation: $[r, p_r] = i\hbar$ et L est le moment angulaire. Pour étudier les caractéristiques quantiques du système, il est nécessaire de résoudre l'équation de Schrödinger au premier lieu:

$$\left[\frac{1}{2M_0(1+\varepsilon t)^2}\left(p^2 + \frac{\delta}{r^2}\right) + \frac{1}{2}M_0(1 + \varepsilon t)^2\omega_0^2 e^{kt}r^2\right]\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t) \quad (3.6)$$

Chapitre 3: Systèmes quantiques non stationnaires à trois dimensions

Puisque cette équation à trois dimensions qui contient des paramètres dépendants du temps, il ne peut pas être une tâche facile à résoudre. Par conséquent, des techniques mathématiques spéciales sont nécessaires. Pour résoudre cette équation, nous utilisons d'abord la méthode d'invariant dynamique pour l'évaluation des solutions quantiques pour les systèmes non stationnaires conçue par Lewis et Riesenfeld [2]. Cette méthode peut être développée par une construction d'un opérateur hermitien non trivial qui satisfait l'équation suivante:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] = 0 \quad (3.7)$$

Dans le cas où un tel invariant existe pour un système, les solutions de l'équation de Schrödinger (3-6) prennent la forme:

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{i\alpha(t)} \phi(\vec{r}, t) \quad (3.8)$$

où $\phi(\vec{r}, t)$ est la fonction propre de l'invariant qui a une valeur propre indépendante du temps et $\alpha(t)$ est la fonction de phase qui peut être dérivée par l'équation suivante:

$$\hbar \frac{d\alpha}{dt} = \left\langle \phi \left| \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \right| \phi \right\rangle \quad (3.9)$$

3.2.1 L'opérateur invariant I :

Le point clé de l'invariant de la méthode de Lewis et Riesenfeld est la construction de l'opérateur invariant I ; nous utilisons l'algèbre de Lie, sur la base hermitienne $\Lambda = \{T_1, T_2, T_3\}$ avec:

$$T_1 = P^2 + \frac{\delta}{r^2} \quad (3.10)$$

$$T_2 = r^2 \quad (3.11)$$

$$T_3 = rp_r + p_r r \quad (3.12)$$

qui sont fermés par rapport aux générateurs de l'algèbre $Su(1,1)$, c'est-à-dire:

$$[T_1, T_2] = -2i\hbar T_3 \quad (3.13)$$

$$[T_1, T_3] = -4i\hbar T_1 \quad (3.14)$$

$$[T_2, T_3] = 4i\hbar T_2 \quad (3.15)$$

En utilisant la définition précédente de l'invariant donnée par l'équation (1-36), nous cherchons l'invariant sous la forme:

Chapitre 3: Systèmes quantiques non stationnaires à trois dimensions

$$I = \frac{1}{2}(\mu_1 T_1 + \mu_2 T_2 + \mu_3 T_3) \quad (3-16)$$

L'insertion de l'équation (3-16) dans (3-7) permet d'obtenir les coefficients μ_i de l'équation (3-16) comme suit:

$$\dot{\mu}_1 + \frac{2\mu_3}{M_0(1+\varepsilon t)^2} = 0 \quad (3-17)$$

$$\mu_2 - 2M_0(1 + \varepsilon t)^2 \omega_0^2 e^{kt} \mu_3 = 0 \quad (3-18)$$

$$\mu_3 + \frac{\mu_2}{M_0(1+\varepsilon t)^2} - M_0(1 + \varepsilon t)^2 \omega_0^2 e^{kt} \mu_1 = 0 \quad (3-19)$$

ce qui peut être simplifiée par le choix de $\mu_1 = \rho^2$, où ρ est la solution de l'équation auxiliaire suivante:

$$\ddot{\rho} + \frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon t)} \dot{\rho} + \omega_0^2 e^{kt} \rho = \frac{1}{M_0^2(1+\varepsilon t)^4 \rho^3} \quad (3-20)$$

donc on obtient:

$$\mu_2 = -M_0^2(1 + \varepsilon t)^4 \omega_0^2 e^{kt} \rho^2 \quad (3-21)$$

et

$$\mu_3 = -M_0(1 + \varepsilon t)^2 \rho \dot{\rho} \quad (3-22)$$

L'invariant I devient:

$$I = \frac{1}{2} [\rho^2 T_1 + (-M_0^2(1 + \varepsilon t)^4 \omega_0^2 e^{kt} \rho^2) T_2 - (M_0(1 + \varepsilon t)^2 \rho \dot{\rho}) T_3] \quad (3-23)$$

L'expression de l'invariant I (3-23) est très compliquée, on peut la simplifier par l'introduction de la transformation unitaire suivante:

$$U = e^{i \frac{M \dot{\rho}}{2\hbar \rho} r^2} \quad (3-24)$$

Dans ce cas, l'opérateur I se transforme à l'opérateur suivant:

$$I_0 = \frac{1}{2} [\rho^2 \left(P^2 + \frac{\delta}{r^2} \right) + \frac{1}{\rho^2} r^2] \quad (3-25)$$

Chapitre 3: Systèmes quantiques non stationnaires à trois dimensions

Maintenant, nous essayons de résoudre l'équation (3-20). Nous effectuons la transformation suivante $\rho = \frac{1}{1+\varepsilon t} y$, nous obtiendrons l'équation différentielle de Yermakov [60]:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 e^{kt} y = \frac{1}{M_0^2 y^3} \quad (3-26)$$

À l'aide de la solution de cette équation, on obtient la solution de la fonction $\rho(t)$ sous forme:

$$\rho(t) = \frac{W(t)}{\sqrt{C_1(1+\varepsilon t)}} \left[\frac{1}{M_0^2} + (C_2 + C_1 Z(t))^2 \right]^{1/2} \quad (3-27)$$

où C_1, C_2 sont deux constantes réelles arbitraires, $W(t)$ et $Z(t)$ sont deux fonctions données par:

$$W(t) = \frac{1}{x} [d_1 \sin(x) - d_2 \cos(x)] \quad (3-28)$$

$$Z(t) = \frac{2}{K} \left\{ \frac{x \sin(x)}{d_2 [d_2 \cos(x) - d_1 \sin(x)]} + \frac{\ln[d_2 \cos(x) - d_1 \sin(x)]}{d_1^2 + d_2^2} + \frac{d_1}{d_2 (d_1^2 + d_2^2)} x \right\}, x = \frac{2\omega_0}{K} e^{Kt/2} \quad (3-29)$$

où d_1 et d_2 sont deux constantes arbitraires.

3.2.2 Valeurs propres :

Exprimant l'équation aux valeurs propres de l'opérateur invariant I sous la forme:

$$I\Phi(\vec{r}, t) = \lambda\Phi(\vec{r}, t) \quad (3-30)$$

où λ est la valeur propre indépendante du temps.

Du fait que les fonctions d'onde pour le système hamiltonien non stationnaire sont représentées en termes des fonctions propres de l'opérateur invariant, maintenant nous résolvons cette équation afin d'en tirer les états propres de $\Phi(\vec{r}, t)$. Grâce à l'utilisation de la relation de la transformation unitaire U , l'équation (3-30) peut être mise en correspondance, en termes de I_0 donnée dans l'équation (3-25), en:

$$I_0\Phi'(\vec{r}) = \lambda\Phi'(\vec{r}) \quad (3-31)$$

où $\Phi'(\vec{r})$ est la fonction propre de I_0 . On note que la relation entre $\Phi'(\vec{r})$ et $\Phi(\vec{r}, t)$ est donnée par:

$$\Phi'(\vec{r}) = U^{-1}\Phi(\vec{r}, t) \quad (3-32)$$

En utilisant l'équation (3-25), l'équation de la valeur propre donnée par l'équation (3-31) peut être écrite comme suit:

Chapitre 3: Systèmes quantiques non stationnaires à trois dimensions

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{\hbar^2} \left[2\lambda - \frac{L^2 + \delta}{\eta^2} - \eta^2 \right] \right\} \emptyset'(\vec{r}) = 0 \quad (3-33)$$

dans lesquels

$$\eta = \frac{r}{\rho} \quad (3-34)$$

et les angles sphériques (φ, θ) sont définis par:

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3-35)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right) \quad (3-36)$$

où x, y et z sont les coordonnées cartésiennes.

Pour résoudre l'équation (3-33), on utilise la méthode de séparation des variables, en prenant la fonction \emptyset' comme:

$$\emptyset'(\eta, \theta, \varphi) = \frac{1}{\eta} f(\eta) g(\theta, \varphi) \quad (3-37)$$

et en remplaçant ceci dans l'équation (3-33), on obtient les deux équations différentielles radiale et angulaire séparées en tant que:

$$\frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} + \frac{1}{\hbar^2} \left(2\lambda - \frac{\hbar^2 l(l+1) + \delta}{\eta^2} - \eta^2 \right) f(\eta) = 0 \quad (3-38)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + l(l+1) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) g(\theta, \varphi) = 0 \quad (3-39)$$

où l est le nombre du moment angulaire orbital. La solution de l'équation différentielle angulaire (3-39) est juste les harmoniques sphériques:

$$g(\theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (3-40)$$

Pour résoudre l'équation différentielle radiale en prenant la transformation $s = \eta^2$, l'équation différentielle (3-38) devient:

$$f'' + \frac{1}{2s} f' + \frac{1}{4s^2} \left[-\frac{s^2}{\hbar^2} + \frac{2\lambda}{\hbar^2} s - l(l+1) - \frac{\delta}{\hbar^2} \right] f = 0 \quad (3-41)$$

Pour résoudre cette équation, on utilise la méthode (N-U) [35].

L'équation (3-41) a la forme de l'équation (1-49), avec:

Chapitre 3: Systèmes quantiques non stationnaires à trois dimensions

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \quad (3-42)$$

$$\alpha_2 = 0 \quad (3-43)$$

$$\alpha_3 = 0 \quad (3-44)$$

$$\xi_1 = \frac{1}{\hbar^2} \quad (3-45)$$

$$\xi_2 = \frac{2\lambda}{\hbar^2} \quad (3-46)$$

$$\xi_3 = l(l+1) + \frac{\delta}{\hbar^2} \quad (3-47)$$

En employant les équations (1-54)-(1-58), on obtient :

$$\alpha_4 = \frac{1}{4} \quad (3-48)$$

$$\alpha_5 = 0 \quad (3-49)$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{\hbar^2} \quad (3-50)$$

$$\alpha_7 = -\frac{2\lambda}{\hbar^2} \quad (3-51)$$

$$\alpha_8 = \frac{1}{16} + l(l+1) + \frac{\delta}{\hbar^2} \quad (3-52)$$

et en utilisant les équations (1-60), (1-68), (1-69), (1-72) et (1-73), on trouve:

$$\alpha_9 = \frac{1}{\hbar^2} \quad (3-53)$$

$$\alpha_{10} = 1 + 2\sqrt{l(l+1) + \frac{\delta}{\hbar^2} + \frac{1}{16}} \quad (3-54)$$

$$\alpha_{11} = \frac{2}{\hbar} \quad (3-55)$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4} + \sqrt{l(l+1) + \frac{\delta}{\hbar^2} + \frac{1}{16}} \quad (3-56)$$

$$\alpha_{13} = -\frac{1}{\hbar} \quad (3-57)$$

Chapitre 3: Systèmes quantiques non stationnaires à trois dimensions

En substituant ceux-ci dans l'équation (1-76), on obtient la solution de l'équation (3-41) en termes de polynômes de Laguerre généralisés:

$$f(r) = \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{\hbar\rho^2}} L_n^\mu\left(\frac{2r^2}{\hbar\rho^2}\right) \quad (3-58)$$

$$\text{où } \mu = \sqrt{l(l+1) + \frac{1}{16} + \frac{\delta}{\hbar^2}}.$$

et en utilisant l'équation (1-65), on trouve que la valeur propre λ de l'invariant est exprimée comme:

$$\lambda_n = \frac{\hbar}{2}(2n+1-\mu) \quad (3-59)$$

3.2.3 Fonctions d'onde:

Les fonctions propres complètes et normalisées de l'invariant I peuvent être construites en tenant compte de normalisation de l'équation (3-37) à l'aide de la relation suivante:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\mu [L_n^\mu(x)]^2 dx = \frac{\Gamma((\mu+n+1))}{n!} \quad (3-60)$$

Puis, en combinant les équations (3-32), (3-40) et (3-58) et en introduisant un facteur approprié $1/\rho^{\frac{3}{2}}$ dans ces fonctions dans le but de garantir la condition de normalisation, on

obtient:

$$\Phi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) = A_n \frac{1}{\rho^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} L_n^\mu\left(\frac{r^2}{\hbar\rho^2}\right) e^{\left(\frac{iM\rho\dot{\rho}}{2}-1\right)\frac{r^2}{\hbar\rho^2}} Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (3-61)$$

où la constante de normalisation est donnée par:

$$A_n = \sqrt{\frac{2^{\mu+2}n!}{\hbar^{\mu+1}\Gamma((\mu+n+1))}} \quad (3-62)$$

Par conséquent, les solutions exactes de l'équation de Schrödinger originale donnée par l'équation (3-6), qui est associée à un oscillateur l'harmonique central dépendant du temps plus un potentiel quadratique inverse avec une masse croissante linéairement, peuvent maintenant être obtenues en forme:

$$\psi(r, \theta, \varphi, t) = \sqrt{\frac{2^{\mu+2}n!}{\rho^3\hbar^{\mu+1}\Gamma((\mu+n+1))}} e^{i\alpha(t)} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} L_n^\mu\left(\frac{r^2}{\hbar\rho^2}\right) e^{\left(\frac{iM\rho\dot{\rho}}{2}-1\right)\frac{r^2}{\hbar\rho^2}} Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (3-63)$$

Chapitre 3: Systèmes quantiques non stationnaires à trois dimensions

où la phase globale est donnée par:

$$\alpha(t) = -\frac{1}{2}(2n + 1 - \mu) \int_0^t \frac{dt'}{M_0(1+\varepsilon t')^2 \rho^2(t')} \quad (3-64)$$

Ces fonctions d'onde sont utiles pour étudier les propriétés quantiques du système. Par exemple, les relations d'incertitude pour ce système sont obtenues à l'aide d'utilisation de ces fonctions d'onde, telle que

$$\Delta x \Delta p_x = \hbar (1 + M_0^2 (1 + \varepsilon t)^4 \rho^2 \dot{\rho}^2)^{\frac{1}{2}} (n + \frac{1}{2}) \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3-65)$$

Ainsi , l'incertitude minimale résultant sous l'effet de la dépendance du temps est $\frac{\hbar}{2} (1 + M_0^2 (1 + \varepsilon t)^4 \rho^2 \dot{\rho}^2)^{\frac{1}{2}}$.

Si la dépendance temporelle de l'hamiltonien disparaît, les fonctions d'onde sont réduites à celles des classes connues pour l'oscillateur harmonique indépendant du temps perturbé par le potentiel harmonique inverse et la relation d'incertitude devient: $\Delta x \Delta p_x = \hbar (n + \frac{1}{2})$ comme prévu.

Les solutions quantiques pour un système associé à un oscillateur harmonique central dépendant du temps plus un potentiel harmonique inverse avec une masse croissante linéairement à trois dimensions ont été étudiées en utilisant plusieurs techniques mathématiques. D'après la théorie de Lewis et Riesenfeld, les fonctions d'onde du système sont représentées en termes de fonctions propres de l'opérateur invariant.

Un invariant exact est établi sur la base de son définition fondamentale via l'utilisation de la transformation unitaire avec l'opérateur unitaire donné par l'équation (3-24). L'opérateur invariant est représenté en termes d'une fonction dépendante du temps $\rho(t)$. L'équation de la valeur propre de $I(t)$ a été écrite en termes d'une équation différentielle du second ordre. Pour calculer les solutions de cette équation, l'approche de la transformation unitaire et la méthode (N-U) sont utilisées ensemble. La méthode (N-U) nous a permis de réduire l'équation différentielle du deuxième degré à une équation de type hypergéométrique. À partir de ces procédures, nous avons obtenu les fonctions propres et elles sont représentées en termes de polynômes de Laguerre. Les fonctions propres de l'opérateur invariant dérivées de cette manière sont nécessaires pour représenter la solution de l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire les fonctions d'onde. Les fonctions d'onde finales obtenues sont exprimées en termes de ces fonctions propres et les facteurs de phases dépendants du temps, sont donnés par l'équation (3-64), qui correspond à des phases globales.

La différence entre notre recherche et la précédente, effectuée par Ferkous et al. [61], est que nous avons utilisé la méthode (N-U) afin d'en tirer des solutions quantiques exactes du système alors que Ferkous et al. ne l'ont pas utilisée. Les fonctions d'onde quantiques que nous avons tirées dans ce travail étaient représentées en termes d'harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \varphi)$, tandis que celles de Ferkous et al. étaient représentées en termes des polynômes de Jacobi. Nos résultats pour les fonctions d'onde données par l'équation (3-63)

Chapitre 3: Systèmes quantiques non stationnaires à trois dimensions

sont utiles pour étudier diverses propriétés quantiques fondamentales du système. Par exemple, ils peuvent être utilisés pour dériver les fluctuations des variables canoniques, relations d'incertitude, le spectre d'énergie, la densité de probabilité, les fonctions de Wigner, etc... Pour un cas particulier où la dépendance temporelle des paramètres disparaissent, les fonctions d'onde, données par l'équation (3-63) sont réduites à la classe du système stationnaire qui est bien connu dans la mécanique quantique.

Chapitre 4

La théorie d'Ehrenfest et les systèmes non stationnaires

La théorie d'Ehrenfest et les systèmes non stationnaires

4.1 Introduction:

Comme on le sait, la découverte du rayonnement du corps noir en 1900 par Planck a conduit à la naissance de la mécanique quantique, qui est basée sur de nouveaux principes très différents de la mécanique classique. La mécanique ondulatoire des phénomènes quantiques a été développée à ce jour sur la base d'interprétation probabilistique pour l'équation d'onde de Schrödinger pour les systèmes réels. Cela nous a conduit à réussir d'interpréter les mécanismes sous-jacents de différents systèmes dans les domaines allant de la physique de la matière condensée à la physique des particules élémentaires en s'appuyant sur des expériences rigoureuses. Maintenant, sans mécanique quantique, nous ne pouvons pas comprendre la structure des solides, la couleur des lasers, l'action de l'ADN, et la formation de l'univers. La tâche la plus fondamentale et importante dans ce contexte est de trouver des solutions quantiques exactes pour un modèle physique bien établi décrivant le comportement d'un certain système mécanique. De nombreux efforts sont menés pour développer la mécanique quantique dans cette direction jusqu'à présent.

En dépit de ces progrès remarquables pour dériver les solutions quantiques, la correspondance de ces solutions avec les solutions classiques n'a pas été largement vérifiée pour les systèmes hamiltoniens complexes qui ont des paramètres dépendants du temps jusqu'à présent, alors que beaucoup d'efforts ont été faits pour trouver une relation entre la mécanique quantique et classique pour les systèmes statiques simples comme l'oscillateur harmonique ordinaire [62-65]. Historiquement, les efforts pour trouver une telle correspondance conduit au théorème d'Ehrenfest [66].

Le but de ce travail est d'examiner si le théorème d'Ehrenfest est également valable pour des systèmes quantiques dépendants du temps au-delà des systèmes statiques simples. Un oscillateur harmonique dissipatif: l'oscillateur de Caldirola-Kanai forcé dépendant du temps (soumis à une force dépendante du temps) sera choisi pour cet objectif. Les modèles réels de la plupart des systèmes dynamiques peuvent souffrir de dissipation en raison de leurs différentes interactions possibles avec l'environnement. Les détails des processus conduisant au mécanisme de dissipation sont en général décrits par: la friction, la viscosité, la résistance, etc...D'autre part, le terme de force dans le système décrit par le mouvement quantique devient compliqué. L'oscillateur harmonique forcé dépendant du temps a été étudié en détail par plusieurs groupes de recherches par différentes méthodes telles que les fonctions d'essai [67], les intégrales de chemin et formulations du propagateur [54], l'approche de représentation de Heisenberg [15, 68], l'approche des états cohérents [69], etc...

Néanmoins, c'est un problème délicat de vérifier si les descriptions quantiques sont acceptées physiquement pour ces oscillateurs non stationnaires. Afin d'étudier le théorème d'Ehrenfest pour ce système, nous allons tirer une intéressante solution de l'équation de Schrödinger, qui est celle qui correspond à un paquet d'ondes gaussien semi classique.

Les paquets d'ondes gaussiens sont en effet omniprésents dans divers systèmes physiques qui régissent l'évolution temporelle d'une grande classe de mouvements ondulatoires quantiques. Une technique utile pour dériver ce type de solution quantique pour un système dynamique est développée par Ge et Child [70]. Les valeurs moyennes des variables

Chapitre 4: La théorie d'Ehrenfest et les systèmes non stationnaires

canoniques seront dérivées et la validité du théorème d'Ehrenfest sera testée en utilisant un tel paquet d'ondes gaussien dans ce travail.

4.2 La théorie d'Ehrenfest:

Le théorème d'Ehrenfest décrit l'évolution temporelle des valeurs moyennes pour les variables canoniques telles que la position et l'impulsion pour un système quantifié qui obéit aux équations classiques du mouvement. En effet, en cas de systèmes macroscopiques, les effets quantiques sont moins importants et, par conséquent, il est prévu dans une certaine limite que les résultats quantiques se réduisent à ceux de la mécanique classique. Le théorème d'Ehrenfest joue un rôle crucial dans la compréhension heuristique de la validité de la mécanique quantique pour décrire certains systèmes physiques.

Pour comprendre le théorème d'Ehrenfest, considérons un opérateur quantique arbitraire O . Si on note par H l'hamiltonien d'un système, la valeur de la dérivée temporelle de O peut être représentée comme:

$$\frac{d\langle O \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial O}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle [O, H] \rangle \quad (4-1)$$

Dans le cas où le système est soumis à un potentiel dépendant du temps $V(x, t)$, l'hamiltonien a la forme $H = \frac{p^2}{2m} + V(x, t)$. Si O est l'opérateur de quantité du mouvement p , l'équation précédente devient:

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial p}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle [p, H] \rangle \quad (4-2)$$

Maintenant, à partir d'une petite manipulation algébrique, on peut facilement obtenir la formule suivante:

$$\left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle = \langle F \rangle \quad (4-3)$$

où la force externe F est de la forme $F = -\frac{dV}{dx}$. Ceci est la deuxième loi de Newton qui régit les équations classiques du mouvement pour une particule.

D'une manière similaire, on peut également obtenir la dérivée temporelle de la valeur moyenne d'opérateur de position de telle sorte que:

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{1}{m} \langle p \rangle \quad (4-4)$$

Les équations (4-3) et (4-4) impliquent que les valeurs moyennes des variables canoniques conduisent à l'équation du mouvement classique. Ce concept est le cœur du théorème d'Ehrenfest. L'affirmation d'Ehrenfest pour la correspondance de la mécanique quantique avec la deuxième loi de Newton a eu un grand appel à la communauté de la physique car elle garantit la mécanique quantique comme étant une théorie sonore et donc acceptable.

Chapitre 4: La théorie d'Ehrenfest et les systèmes non stationnaires

Pour tester la validité de la théorie d'Ehrenfest pour les systèmes dépendants du temps, nous avons étudié l'oscillateur de Caldirola-Kanai forcé dépendant du temps

4.3 L'oscillateur de Caldirola-Kanai forcé dépendant du temps :

L'oscillateur de Caldirola-Kanai est un modèle fondamental des systèmes dissipatifs qui est habituellement utilisé pour développer une approche d'un système à une seule particule phénoménologique pour l'oscillateur harmonique amorti. Il est bien connu que l'hamiltonien de l'oscillateur Caldirola-Kanai est dépendant du temps. Dans ce modèle, la masse dépend du temps et le potentiel aura la forme suivante [71, 72]:

$$V(x, t) = \Omega_0 e^{\eta t} x^2 \quad (4-5)$$

où η représente le facteur de dissipation et Ω_0 est une constante.

4.3.1 Traitement classique:

Considérons un oscillateur harmonique arbitraire dépendant du temps soumis à une force extérieure $f(t)$. Dans ce cas, l'hamiltonien peut être écrit comme :

$$H(p, x, t) = Z(t)p^2 + \Omega(t)x^2 - f(t)x \quad (4-6)$$

où $Z(t)$, $\Omega(t)$ et $f(t)$ sont des fonctions dépendantes du temps. Les équations du mouvement classique de Hamilton-Jacobi du système sont:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = 2Z(t)p \quad (4-7)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2\Omega(t)x + f(t) \quad (4-8)$$

En combinant ces deux équations, nous pouvons écrire l'équation du mouvement classique pour x comme:

$$\ddot{x} - \frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)}\dot{x} + 4Z(t)\Omega(t)x = 2Z(t)f(t) \quad (4-9)$$

Maintenant, comme une application à un système particulier, nous choisissons les fonctions dépendantes du temps suivantes:

$$Z(t) = Z_0 e^{-4\sqrt{Z_0\Omega_0}t} \quad (4-10)$$

$$\Omega(t) = \Omega_0 e^{4\sqrt{Z_0\Omega_0}t} \quad (4-11)$$

$$f(t) = F_0 e^{4\sqrt{Z_0\Omega_0}t} \cos(\omega t) \quad (4-12)$$

Chapitre 4: La théorie d'Ehrenfest et les systèmes non stationnaires

où Z_0, Ω_0 et F_0 sont des constantes et ω est une fréquence d'entraînement. Après la substitution de $Z(t), \Omega(t)$ et $f(t)$ dans l'équation (4-9), nous obtenons

$$\ddot{x} + 4\sqrt{Z_0\Omega_0}\dot{x} + 4Z_0\Omega_0x = 2Z_0F_0\cos(\omega t) \quad (4-13)$$

Celle-ci est l'équation du mouvement de l'oscillateur Caldirola-Kanai forcé dépendant du temps. Pour étudier la solution de cette équation, écrivons le terme cosinus dans l'équation ci-dessus (4-13) sous forme d'exponentielle, c'est -à-dire,

$$\ddot{x} + 4\sqrt{Z_0\Omega_0}\dot{x} + 4Z_0\Omega_0x = 2Z_0F_0e^{i\omega t} \quad (4-14)$$

Nous considérons une solution particulière de la forme $x_c = Ee^{i\omega t}$, pour cette équation, où E est une constante qui sera déterminée plus tard. Si nous substituons ceci dans l'équation (4-14), nous obtiendrons

$$-\omega^2E + 4i\sqrt{Z_0\Omega_0}\omega E + 4Z_0\Omega_0E = 2Z_0F_0 \quad (4-15)$$

Par conséquent, l'amplitude E dans ce cas devient

$$E = \frac{2Z_0F_0}{4Z_0\Omega_0 - \omega^2 + 4i\sqrt{Z_0\Omega_0}\omega} \quad (4-16)$$

La solution mathématique pour l'équation (4-14) est donnée par:

$$x_c(t) = \frac{2Z_0F_0}{4Z_0\Omega_0 - \omega^2 + 4i\sqrt{Z_0\Omega_0}\omega} e^{i\omega t} \quad (4-17)$$

Physiquement on s'intéresse à la partie réelle de la solution (qui représente la position de la particule en fonction du temps ou la trajectoire classique de la particule):

$$x_c(t) = \frac{2Z_0F_0}{(\omega^2 + 4Z_0\Omega_0)^2} [(4Z_0\Omega_0 - \omega^2)\cos(\omega t) + 4\omega\sqrt{Z_0\Omega_0}\sin(\omega t)] \quad (4-18)$$

En employant l'équation (4-7), on obtient la solution particulière pour l'impulsion comme:

$$p_c(t) = \frac{F_0e^{4\sqrt{Z_0\Omega_0}t}}{(\omega^2 + 4Z_0\Omega_0)^2} [4\omega^2\sqrt{Z_0\Omega_0}\cos(\omega t) + \omega(4Z_0\Omega_0 - \omega^2)\sin(\omega t)] \quad (4-19)$$

4.3.2 Analyse quantique:

Dans la section précédente, les caractéristiques classiques du système sont décrites. Maintenant, nous analysons le système d'un point de vue de la mécanique quantique. Le problème est de trouver la solution de l'équation de Schrödinger et de calculer les valeurs moyennes $\langle x \rangle$ et $\langle p \rangle$. L'équation de Schrödinger est donnée par:

Chapitre 4: La théorie d'Ehrenfest et les systèmes non stationnaires

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H\psi(x, t) \quad (4-20)$$

avec un hamiltonien quantique de la forme:

$$H = Z_0 e^{-4\sqrt{Z_0\Omega_0}t} p^2 + \Omega_0 e^{4\sqrt{Z_0\Omega_0}t} x^2 - F_0 e^{4\sqrt{Z_0\Omega_0}t} \cos(\omega t) x \quad (4-21)$$

Puisque l'hamiltonien dépend explicitement du temps, pour résoudre l'équation (4-20) on utilise la méthode des invariants.

Nous prenons un opérateur invariant linéaire dépendant du temps, de tel sorte que:

$$I = A(t)p + B(t)x + C(t) \quad (4-22)$$

En insérant cette formule dans l'équation Liouville -Von Neumann, on peut facilement obtenir l'équation différentielle de $A(t)$ comme:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + 4\sqrt{Z_0\Omega_0} \frac{dA}{dt} + 4Z_0\Omega_0 A = 0 \quad (4-23)$$

La solution de cette équation est identifiée facilement comme:

$$A(t) = e^{-2\sqrt{Z_0\Omega_0}t} \quad (4-24)$$

Puis, à partir des relations fondamentales de l'opérateur invariant, on obtient également les autres variables dépendantes du temps de $I(t)$ en tant que

$$B(t) = \sqrt{\frac{\Omega_0}{Z_0}} e^{2\sqrt{Z_0\Omega_0}t} \quad (4-25)$$

et

$$C(t) = -\frac{F_0 e^{2\sqrt{Z_0\Omega_0}t}}{\omega^2 + 4Z_0\Omega_0} [2\sqrt{Z_0\Omega_0} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)] \quad (4-26)$$

ainsi, la formule explicite de $I(t)$ pour notre système est identifiée. La fonction propre $\varphi_\lambda(x, t)$ de $I(t)$ peut être dérivée à partir de:

$$I(t)\varphi_\lambda(x, t) = \lambda\varphi_\lambda(x, t) \quad (4-27)$$

La solution de l'équation (4-27) est donnée par:

$$\varphi_\lambda(x, t) = e^{\frac{i[(\lambda - C(t))x - B(t)x^2]}{2A(t)}} \quad (4-28)$$

Chapitre 4: La théorie d'Ehrenfest et les systèmes non stationnaires

L'expression de la phase $\alpha_\lambda(t)$, sous la condition initiale $\alpha_\lambda(0) = 0$ est exprimée comme:

$$\alpha_\lambda(t) = -\frac{Z_0}{\hbar} \left\{ \lambda^2 t + \frac{F_0^2}{(4Z_0\Omega_0 + \omega^2)^2} [\eta_0(t) + (4Z_0\Omega_0 - \omega^2)\eta_1(t) + 4\sqrt{Z_0\Omega_0}\omega\eta_2(t)] + \frac{2\lambda F_0}{4Z_0\Omega_0 + \omega^2} [2\sqrt{Z_0\Omega_0}\eta_3(t) + \omega\eta_4(t)] \right\} - i\sqrt{Z_0\Omega_0}t \quad (4-29)$$

avec :

$$\eta_0(t) = \frac{\omega^2}{4\sqrt{Z_0\Omega_0}} (e^{4\sqrt{Z_0\Omega_0}t} - 1) \quad (4-30)$$

$$\eta_1(t) = \frac{e^{4\sqrt{Z_0\Omega_0}t}}{32\sqrt{Z_0\Omega_0}(4Z_0\Omega_0 + \omega^2)} (32Z_0\Omega_0\cos^2\omega t + 4\omega^2 + 16\sqrt{Z_0\Omega_0}\omega\sin\omega t\cos\omega t) - \frac{8Z_0\Omega_0 + \omega^2}{8\sqrt{Z_0\Omega_0}(4Z_0\Omega_0 + \omega^2)} \quad (4-31)$$

$$\eta_2(t) = \frac{e^{4\sqrt{Z_0\Omega_0}t}}{8(Z_0\Omega_0 + \omega^2)} [8\sqrt{Z_0\Omega_0}\sin\omega t\cos\omega t - \omega(2\cos^2\omega t - 1)] + \frac{\omega}{8(Z_0\Omega_0 + \omega^2)} \quad (4-32)$$

$$\eta_3(t) = \frac{e^{2\sqrt{Z_0\Omega_0}t}}{4Z_0\Omega_0 + \omega^2} (2\sqrt{Z_0\Omega_0}\omega + \omega\sin\omega t) - \frac{2\sqrt{Z_0\Omega_0}}{4Z_0\Omega_0 + \omega^2} \quad (4-33)$$

$$\eta_4(t) = \frac{e^{2\sqrt{Z_0\Omega_0}t}}{4Z_0\Omega_0 + \omega^2} (2\sqrt{Z_0\Omega_0}\sin\omega t - \omega\cos\omega t) + \frac{\omega}{4Z_0\Omega_0 + \omega^2} \quad (4-34)$$

Les solutions de l'équation de Schrödinger (4-20) sont représentées sous la forme:

$$\psi_\lambda(x, t) = e^{i\alpha_\lambda(t)} e^{\frac{i}{\hbar} \left[\frac{(\lambda - C(t))x - B(t)x^2}{2A(t)} \right]} \quad (4-35)$$

Pour faire une comparaison avec l'étude classique, on aura besoin de calculer le paquet d'ondes. Le paquet d'ondes est constitué par la superposition d'une infinité d'ondes de longueurs d'onde différentes plus approchées et de même amplitudes centrées autour d'une valeur particulière λ .

Le paquet d'ondes est la région de l'espace où ces ondes interfèrent de manière constructive. Le centre d'un paquet d'ondes se déplace avec le temps à une vitesse du groupe.

Le paquet d'ondes vérifie les propriétés de la fonction d'onde, il est donné sous la forme [23]:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) \psi_\lambda(x, t) d\lambda \quad (4-36)$$

avec $\psi_\lambda(x, t)$ est la fonction d'onde caractérisée par la grandeur physique λ et $g(\lambda)$ est une fonction poids arbitraire de λ .

Pour la simplicité nous avons choisi [73]:

Chapitre 4: La théorie d'Ehrenfest et les systèmes non stationnaires

$$g(\lambda) = be^{-\lambda^2} \quad (4-37)$$

où b est une constante.

Finalement, ce paquet d'ondes est obtenu et il est donné sous la forme :

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\hbar\sqrt{2\pi}\left(1+i\frac{Z_0}{\hbar}t\right)}} \exp\left(-\frac{t}{\hbar}\mu_1(t)\right) \exp\left(-\frac{\left(-\frac{2}{\hbar}\mu_2(t)+\frac{x}{\hbar A}\right)^2}{4+\frac{1}{\hbar}Z_0t}\right) \exp\left[-\frac{t}{2\hbar A}\left(\sqrt{\frac{\Omega_0}{Z_0}}e^{2\sqrt{Z_0\Omega_0}t}x^2 - \mu_3(t)x\right)\right] \quad (4-38)$$

Le terme $\frac{1}{\sqrt{\hbar\sqrt{2\pi}\left(1+i\frac{Z_0}{\hbar}t\right)}}$ est obtenu à partir de la condition de normalisation de $\Psi(x, t)$.

et

$$\mu_1(t) = \frac{Z_0F_0^2e^{4\sqrt{Z_0\Omega_0}t}}{(4Z_0\Omega_0+\omega^2)^2} \left[\frac{4\sqrt{Z_0\Omega_0}(4Z_0\Omega_0-\omega^2)-16Z_0\Omega_0\omega}{4Z_0\Omega_0+\omega^2} \times \left(\cos^2\omega t - \frac{1}{2}\right) - \frac{2\omega(4Z_0\Omega_0-\omega^2)(\cos\omega t \sin\omega t)}{4Z_0\Omega_0+\omega^2} + \frac{Z_0\Omega_0-\omega^2}{2\sqrt{Z_0\Omega_0}} \right] \quad (4-39)$$

$$\mu_2(t) = \frac{Z_0F_0e^{2\sqrt{Z_0\Omega_0}t}}{(4Z_0\Omega_0+\omega^2)^2} [(4Z_0\Omega_0 - \omega^2)\cos\omega t + 4\omega\sqrt{Z_0\Omega_0}\sin\omega t] \quad (4-40)$$

$$\mu_3(t) = \frac{2F_0e^{2\sqrt{Z_0\Omega_0}t}}{4Z_0\Omega_0+\omega^2} [2\sqrt{Z_0\Omega_0}\cos\omega t + \omega\sin\omega t] \quad (4-41)$$

Ce paquet d'ondes nous permet d'étudier les diverses caractéristiques quantiques du système. Le carré absolu de l'équation (4-38), $|\Psi(x, t)|^2$, est la densité de probabilité, ou sa signification est la probabilité de trouver l'oscillateur en position x au temps t .

Le professeur JeongRyeol Choi a tracé la densité de probabilité ($|\Psi(x, t)|^2$) introduite dans la figure 1 de l'article ci-joint cette thèse [74], en fonction de x et t . Il a utilisé le programme Mathématique (Wolfram Research). Notons que le style et les formes des figures peuvent varier de manière significative selon les détails de la commande Plot. La commande plot qui est utilisée pour la préparation de la figure 1 est la suivante:

```
"rgb[x_]:=RGBColor[1,x,1];
DensityPlot[Abs[Ψ]^2,{x,-0.5,0.5},{t,0.5} DefaultFont->{"Gothic",14},Mesh->
False,PlotRange->{0,0.3},Plot Point->400,ColorFunction->rgb->FrameLabel->{"x","t"};"
```

Il a choisit $\omega = 1$ pour la Fig1-a, $\omega = 2$ pour la Fig1-b et $\omega = 3$ pour la Fig1-c et il a pris $Z_0 = 0.1, \Omega_0 = 1, F_0 = 1$ et $\hbar = 1$.

Il a trouvé que la densité de probabilité a une forme gaussienne.

4.4 Test du théorème d'Ehrenfest:

Chapitre 4: La théorie d'Ehrenfest et les systèmes non stationnaires

L'étude d'évolution temporelle des valeurs moyennes des variables canoniques est nécessaire pour tester la validité du théorème d'Ehrenfest. Comme cela est bien connu, pour un observable arbitraire O , la valeur moyenne dans l'état quantique est évaluée à partir de la formule: $\langle O \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) O \Psi(x, t) dx$. Pour le cas de x et p , on obtient :

$$\langle x \rangle = \frac{2Z_0 F_0}{(\omega^2 + 4Z_0 \Omega_0)^2} [(4Z_0 \Omega_0 - \omega^2) \cos(\omega t) + 4\omega \sqrt{Z_0 \Omega_0} \sin(\omega t)] \quad (4-42)$$

et

$$\langle p \rangle = \frac{F_0 e^{4\sqrt{Z_0 \Omega_0} t}}{(\omega^2 + 4Z_0 \Omega_0)^2} [4\omega^2 \sqrt{Z_0 \Omega_0} \cos(\omega t) + \omega(4Z_0 \Omega_0 - \omega^2) \sin(\omega t)] \quad (4-43)$$

En comparant les résultats quantiques pour les comportements temporels de la position et de l'impulsion moyennes données par les équations (4-42) et (4-43), avec ceux de la position et de l'impulsion classiques, équations (4-18) et (4-19), nous concluons que $\langle x \rangle = x_c$ et $\langle p \rangle = p_c$.

Ceci implique qu'il existe une coïncidence fondamentale entre les valeurs moyennes des opérateurs de position et d'impulsion en mécanique quantique et leurs équations classiques du mouvement correspondantes.

Maintenant, nous testons la validité du théorème d'Ehrenfest pour notre système en utilisant les résultats obtenus à partir de l'analyse de la théorie quantique développée jusqu'à présent. La dérivée temporelle des équations (4-42) et (4-43) donne:

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{2Z_0 F_0}{(4Z_0 \Omega_0 + \omega^2)^2} [4\omega \sqrt{Z_0 \Omega_0} \cos \omega t + \omega(\omega^2 - 4Z_0 \Omega_0) \sin \omega t] = 2Z(t) \langle p \rangle \quad (4-44)$$

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \frac{F_0 e^{4\sqrt{Z_0 \Omega_0} t}}{(4Z_0 \Omega_0 + \omega^2)^2} [(12Z^0 \Omega^0 \omega^2 + \omega^4) \cos \omega t - 16\omega (Z^0 \Omega^0)^{\frac{3}{2}} \sin \omega t] = -2\Omega \langle x \rangle + f(t) \quad (4-45)$$

À partir de l'évaluation explicite des valeurs moyennes des variables canoniques, nous avons confirmé que le théorème d'Ehrenfest, qui indique la correspondance entre la théorie universelle de la mécanique quantique et la mécanique classique, peut être étendu à l'oscillateur de Caldirola-Kanai forcé qui est un système quantique dépendant du temps plus général.

Nous confirmons facilement que ces résultats sont exactement les formules qui sont prédites par le théorème d'Ehrenfest pour un SHDT. Par conséquent, la théorie d'Ehrenfest est satisfaite.

Nous pouvons également confirmer les résultats précédents, en calculant les relations d'incertitude pour x et p , on trouve:

$$\Delta x = e^{2\sqrt{Z_0 \Omega_0} t} \sqrt{(\hbar^2 + Z_0^2 t^2)} \quad (4-46)$$

Chapitre 4: La théorie d'Ehrenfest et les systèmes non stationnaires

$$\Delta p = \frac{1}{\Delta x} \sqrt{\frac{\hbar^2}{4} + \left[\frac{Z_0}{2} t - \hbar^2 \sqrt{\frac{\Omega_0}{Z_0}} \left(1 + \frac{Z_0}{\hbar^2} t \right)^2 \right]^2} \quad (4-47)$$

Il est donc clair que les incertitudes Δx et Δp ne dépendent pas de la force extérieure $f(t)$.

Le produit de ces deux grandeurs conduit à la relation d'incertitude pour notre système de telle sorte que:

$$\Delta x \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4} + \left[\frac{Z_0}{2} t - \hbar^2 \sqrt{\frac{\Omega_0}{Z_0}} \left(1 + \frac{Z_0}{\hbar^2} t \right)^2 \right]^2} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4-48)$$

L'extensibilité du théorème d'Ehrenfest aux systèmes quantiques plus généraux qui ont des paramètres dépendants du temps est cruciale en tant que théorie de soutien à la validité universelle de mécanique quantique. Dans le même temps, les résultats de nos recherches ne signifient pas que le théorème d'Ehrenfest est toujours applicable pour tous les systèmes quantiques. Il est connu que le théorème d'Ehrenfest est violé dans certains cas, tel que le système décrit par les équations de Schrödinger d'invariants qui ont des termes non linéaires qui couplent la phase et l'amplitude des fonctions d'onde [75]. Ceci peut impliquer qu'il existe une difficulté pour des généralisations logiques de la mécanique quantique dans une manière cohérente, en particulier par l'intermédiaire d'éventuelles corrections non linéaires en mécanique quantique. Un test théorique de la mécanique quantique le long de cette ligne est effectué par Weinberg [76]. La compréhension de la mécanique quantique peut être approfondie par l'étude du théorème d'Ehrenfest étendu à des systèmes plus généralisés. Le mécanisme des phénomènes dépendants du temps pour un système complexe peut être compris par cette extension au sein de la mécanique quantique. Au point de vue conceptuel, la mécanique quantique ne peut pas être réduite à la mécanique classique (mécanique newtonienne) par le théorème d'Ehrenfest, mais elle ne donne que les résultats quantiques analogues à ceux de la mécanique classiques [77]. Rappelons que la mécanique quantique est construite sur une base différente intrinsèquement de la mécanique classique et ses manipulations utilisées pour déplier la théorie sont totalement différentes de celles de la mécanique classique. En physique moderne, il est connu que le domaine classique du comportement d'un système mécanique, est prélevé à partir du monde quantique, gouverné par l'équation de Schrödinger, par l'intermédiaire d'un processus particulier qui est appelé " Décohérence ".

Cependant, le mécanisme exact de la transition entre la mécanique quantique et la mécanique classique n'est pas encore complètement connu.

Conclusion

Conclusion

Conclusion:

Dans ce travail de thèse, nous avons trouvé les solutions de l'équation de Schrödinger non stationnaire pour quelques systèmes quantiques ayant des spectres discontinus, à savoir le potentiel de Morse et de Woods-Saxon unidimensionnels et le potentiel central à trois dimensions associé à l'oscillateur harmonique plus un potentiel quadratique inverse non stationnaire du temps avec une masse croissante linéairement. Nous avons testé la validité du théorème d'Ehrenfest pour un simple système physique dépendant du temps: Oscillateur de Caldirola-Kanai soumis à une force non stationnaire.

Pour le potentiel de Woods-Saxon nous n'avons pas pu trouver un invariant général, pour cela nous avons étudié seulement le cas spécial pour l'hamiltonien de la forme $H(t) = A(t)H_0$. Et nous avons utilisé la méthode de séparation des variables pour obtenir la solution de l'équation de Schrödinger. Alors que l'utilisation de la méthode d'invariant pour l'étude du potentiel de Morse a permis d'obtenir la solution approximative de l'équation de Schrödinger.

À travers les équations du mouvement classique et les valeurs moyennes $\langle x \rangle$ et $\langle p \rangle$ quantiques qui définissent l'évolution du centre du paquet d'ondes pour trouver la correspondance entre la mécanique classique et la mécanique quantique pour l'oscillateur de Caldirola-Kanai forcé non stationnaire, nous avons donc confirmé la validité du théorème d'Ehrenfest pour ce système. Ce résultat ne signifie pas que le théorème d'Ehrenfest est valide pour tous les systèmes physiques non stationnaires. Pour vérifier cela on aura besoin d'appliquer ce théorème sur un plus grand nombre de systèmes plus compliqués.

Les fonctions d'onde que nous avons obtenues dans notre travail, nous permettent de connaître les caractéristiques quantiques du système, tels que les fluctuations des variables canoniques, la relation d'incertitude, l'évolution dans le temps de l'hamiltonien et le comportement quantiques de paquet d'ondes. L'étude du propagateur, la distribution de Wigner et la phase géométrique du système seront de bons sujets qui peuvent être accomplis sur la base des fonctions d'onde dérivées dans ce travail. En outre, les propriétés quantiques du système dans les états cohérents peuvent aussi représenter un sujet de recherche important qui peut être mené sur la base des résultats de ce travail de thèse.

Références Bibliographiques:

Références Bibliographiques:

- [1] E. Schrödinger, "The non relativistic équation of the de Broglie waves," Ann. Physik79(1926)361-376.
- [2] H.R. Lewis and W.B. Risenfeld, J. Math. Phys 10 (1969) 1458.
- [3] A.M. Markov, Invariant and the Evolution of Nonstationnary Quantum Systems, (Nova Science Publishers, Commack, New York, 1989).
- [4] C-In. Um, K-H. Yeon and T.F. George, Phys.Rep. 362(2002) 63.
- [5] I.A. Pedrosa and I. Guedes, Int.J.Mod.Phys. B17 (2003) 2903.
- [6] J.R. Choi and Bo. Ha. Kweon, Int.J. Mod. Phys. B 16(2002) 4733.
- [7] M. Maamache, M. Choutri, J.Phys.A: Math.Gen.33 (2000) 6203.
- [8] M. Maamache, J.P.Provost and G. Vallée, Phys.Rev. A59 (1999)1777.
- [9] M. Maamache, Phys.Rev. A52 (1995) 936.
- [10] I.A. Pedrosa, G.P. Sena and I. Guedes, Phys.RevA56(1997)4300.
- [11] D.A.Trifonov, J.Phys.A: Math.Gen.32 (1999) 3649.
- [12] V.V. Dodonov, V.I. Man'ko, L. Rosa, Phys.Rev.A57 (1998) 2851.
- [13] M. Maamache, Phys.Rev.A29 (1996) 2833.
- [14]] M. Maamache, Phys.Rev.A61 (2000) 026102.
- [15] J.R.Choi, Int.J.Th. Phys.43 (2004)947 ; Phys.Lett.A325 (2004)1.
- [16] [4] V. V. Dodonov, I. A. Malkin, and V. I. Man'ko, Physics Letters A, 39 (1972)377.
- [17] J.H. Gweon and J.R. Choi, J.Kor.Phys.Soc, 42(2003) 325.
- [18] D-Y. Song, Phys.Rev.A 62 (2000) 14103.
- [19] D-Y. Song, Phys.Rev.Lett.85 (2000) 1141.
- [20] K.H. Yeon, D.H.Kim, C.I. Um, T.F. George and L.N. pandey, Phys.Rev. A 55 (1997) 023.
- [21] I. Guedes, Phys.Rev.A 63 2(2001)034102.
- [22] J. Bauer, Phys.Rev.A 65 (2002)036101.
- [23] H. bekkar, F.Benamira and M. Maamache; Phys.Rev.A68(2003)016101.
- [24] Pi-G. Luan and C.S. Tang, Phys.Rev.A 71 (2005)1.
- [25] C.J. ganison and E.M.Wright, Phys.Lett.A 128 (1988) 177.
- [26] M. Maamache, A. Bounames and N. ferkous, Phys.Rev.A 731, (2006) 016101.
- [27] B. Bascia, S.S. Mizraki and M.H. Moussa, Phys.Rev.A 49 (1992) 5885.
- [28] M. SebaweAbdallah, Phys.Rev.A 37 (1988) 4026.
- [29] M. Maamache, S. Menouar and L. Krache, Int.J.Theor.Phys, 45(2006)2223.
- [30] S.Menouar, M. Maamache and J.R. Choi, Phys.Scr.82 (2010)065004.
- [31] H. R. Lewis, Jr., Phys. Rev. 172 (1968) 1313, J. Math. Phys. 9 (1968) 1976.
- [32] H. R. Lewis, Jr., Phys. Rev. Lett. 18 (1967) 510.
- [33] M. S. Abdalla, J. Phys A: Math. Gen. 29 (1996) 1997.
- [34]J. R. Choi and J. Y. Oh, Int. J. Theor. Phys. 46 (2007) 259.
- [35] C.Tezcan and R. Sever, Int.J.Theor.Phys 48(2009) 337.
- [36] M. Born, The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics nobel Lecture, December 11, 1954.
- [37] C.C. Tannoudji, B. Diu, F. Laloe-Mecanique Quantique-T1 et T2- Hermann, Paris, novellaedition revue, corrigée et augmentée 1977.

Références Bibliographiques:

- [38] L. Krache, thèse de doctorat, (Université de Sétif, 2010).
- [39] P.M. Morse, Phys. Rev.34 (1929)57.
- [40] R.D. Woods and David S. Saxon, Phys. Rev. 95(1954)577.
- [41] F. Calogero, J. Math. Phys, 10 (1969)2191.
- [42] F. Calogero, J. Math. Phys, 12 (1971) 4196.
- [43] B. Sutherland, Journal of Math-ematical Physics, 12 (1971)246.
- [44] V. V. Dodonov, I. A. Malkin, and V. I. Man'ko, IlNuovoCimento B, 24 (1974) 46.
- [45] M. A. Markov (Ed), Invariants and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems (Nova Science Publishers, Commack, New York, 1989).
- [46] J. R. Choi, Phys.Scr, 70 (2004) 271.
- [47] J. R. Choi, Pramana Journal of Physics, 65 (2005)165.
- [48] J. R. Choi, Phys.Scr, 68 (2003)36.
- [49] J. R. Choi, Int.J.Theor.Phys, 42 (2003) 853.
- [50] S. Menouar and J. R. Choi, Annals of Physics, 353 (2015)307.
- [51] J.E. Avron, A. Elgart, An Adiabatic Theorem without a GapCondition, math-ph/9810004.
- [52] G. Lu, W. Hai, and L. Cai, Phys.Lett A, 357 (2006)181.
- [53] S. M. Chumaov, V. V. Dodonov, V. I. Manko, Journal of Physics A: Mathematical and General, 19 (1986) 3229-3239.
- [54] C. Yuce, Annals of Physics, 308 (2003)599.
- [55] S. Teufel, Adiabatic Theory in Quantum dynamics, Lecture Notes in Mathematics 1821 (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York 2003).
- [56] X.X. Yi, D.M. Tong, L.C. Kweek, C.H.OH, Effective Hamiltonian approach to adiabatic approximation I open systems, quat-ph/0606203.
- [57] W. Kunkel and R. Harrington, The Physics Teacher, 48 (2010)243-245.
- [58] H. Dekker, Phy.Rep, 80 (1981) 1-110.
- [59] J. R. Ray, Lettere Al NuovoCimento, 25 (1979)47.
- [60] V. F. Zaitsev and A. D. Polyanin, Handbook of Exact Solution for Ordinary Differential Equations, (CRC press, Boca Raton, 2002).
- [61] N. Ferkous, A. Bounames, and M. Maamache, Phys.Scr, 88 (2013)035001.
- [62] Planck M 1967 The Genesis and présent State of Developement of the Quantum Theory (Ams-terdam: The Nobel Foundation), Nobel lectures: Physics 1901-1921.
- [63] Heilbron J L 2000 The Dilemmas of an Upright Man: Max Planck and the Fortunes of GermanScience (Cambridge: Harvard University Press).
- [64] Pickover C 2008 Archimedes to Hawking: Laws of Sciences and Great Minds Behind Them (Ox-ford, Oxford University Press).
- [65] Gamow G 1985 Thirty Years that Shook Physics: The Story of Quantum Theory (Dover, DoverPublications).
- [66] Ehrenfest P 1927 Zeits. f. Physik 45 455.
- [67] Gao X C, Xu J B and Qian T Z 1990 Ann. Phys. 204 235.
- [68] Colegrave R K and Abdalla M S 1981 Opt. Act. 28 495.
- [69] Nassar A B 1984 Phys. Lett. A 106 43.
- [70] Ge Y G and Child M S 1997 Phys. Rev. Lett. 78 2507.

Références Bibliographiques:

- [71] P. Calderola, NuovoCimento. 18 (1941) 393.
- [72] E. Kanai, Prog. Theor. Phys. 3 (1948) 440.
- [73] Maamache M, Saadi S, Choi J R and Yeon K H 2010 J. Korean Phys. Soc. 56 1063.
- [74] Medjber S, Bekkar H, Menouar S, and Choi J.R, Chin. Phys. B, 25(2016) 080301.
- [75] Kalbermann G 2004 J. Phys. A: Math. Gen. 37 2999.
- [76] Weinberg S 1989 Ann. Phys. 194 336.
- [77] Jammer M 1966 The Conceptual Development of Quantum Mechanics (New York: Tomash Pub-lishers)14.

ملخص:

تصلنا على حلول معادلة شرودينغر المتعلقة بالزمن لبعض الجمل الكوانتية ذات طيف متقطع وهي كمون مورس و وود ساكسون أحاديا البعد وكمون ثلاثي البعد مكون من هزاز توافقي مضافا إليه حد تربيعي معكوس مع كتلة متغيرة خطيا، وقمنا باختبار صحة نظرية إيرنفسست للهاز كالديرولا-كاني. بالنسبة لكمون وود ساكسون لم نستطع ايجاد اللامتغير العام ، لذلك درسنا الحالة الخاصة للهاملتونيان من الشكل $H(t) = A(t)H_0$ ، اللذي سمح لنا وباستعمال نظرية فصل المتغيرات بايجاد حلول معادلة شرودينجر. أما نظرية اللامتغير فاستعملناها لايجاد حلول معادلة شرودينجر بالنسبة لكمون مورس و كمون ثلاثي البعد. **الكلمات المفتاحية:** معادلة شرودينغر المتعلقة بالزمن، نظرية اللامتغيرات، التحويل الودوي، هزاز كالديرولا-كاني، كمون مورس، كمون وود ساكسون، كمون مركزي.

Résumé:

Nous avons trouvé les solutions de l'équation de Schrödinger non stationnaire (dépendante du temps) pour quelques systèmes quantiques ayant des spectres discontinus, à savoir le potentiel de Morse et de Woods-Saxon unidimensionnels, le potentiel central à trois dimensions associé à l'oscillateur harmonique plus un potentiel quadratique inverse non stationnaire avec une masse croissante linéairement et nous avons testé la validité du théorème d'Ehrenfest pour un système physique dépendant du temps: Oscillateur de Caldirola-Kanai forcé non stationnaire.

Pour le potentiel de Woods-Saxon on n'a pas pu trouver un invariant général, pour cela on a étudié seulement le cas spécial pour l'hamiltonien de la forme $H(t) = A(t)H_0$, ce qui nous a permis d'utiliser la méthode de séparation des variables et on a obtenu la solution de l'équation de Schrödinger. Alors que nous avons utilisé la méthode d'invariant pour étudier le potentiel de Morse et le potentiel central et nous avons obtenu les solutions de l'équation de Schrödinger.

Mots clés: l'équation de Schrödinger non stationnaire, la méthode d'invariant, transformation unitaire, oscillateur de Caldirola-Kanai, le potentiel de Morse, le potentiel de Woods-Saxon, potentiel central.

Abstract:

We found the solutions of the non stationary Schrödinger equation for some quantum systems with discrete spectra, i.e. the one dimensional Morse and Woods-Saxon potential, the three dimensions central potential associated with a non stationary harmonic oscillator and inverse square potential with increasing linearly mass and we tested the validity of the Ehrenfest theorem for a forced non stationary Caldirola-Kanai oscillator physical system.

For the Woods-Saxon potential we could not find a general invariant, for this we only studied the special case for hamiltonien of the form $H(t) = A(t)H_0$, which allowed us by using the separation variables method to obtained the solution of the Schrödinger equation. So we used the invariant method to study the Morse potential and the central potential and we get the solutions of the Schrödinger equation.

Key words: non stationary Schrödinger equation, invariant method, unitary transformation, Caldirola-Kanai oscillator, Morse potential, Woods-Saxon potential, central potential.