

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
جامعة فرحات عباس سطيف  
UNIVERSITE FERHAT ABBAS SETIF  
UFAS (ALGERIE)

## **Mémoire de Magister**

présenté au département d Electrotechnique  
Faculté des Sciences de l Ingénieur  
pour obtenir le diplôme de

### **Magister en Automatique**

Par

**MOKADDEM Sana**

Thème

**Commande adaptative floue de type-2  
pour des systèmes non linéaires incertains**

*Soutenu le 2008 devant la commission d'examen composée de :*

<i>BENMAHAMMED Khier</i>	<i>Prof. à l'université Ferhat ABBAS de Sétif</i>	<i>Président</i>
<i>KHABER Farid</i>	<i>M. C. à l'université Ferhat ABBAS de Sétif</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>KHEMLICHE Mabrouk</i>	<i>M. C. à l'université Ferhat ABBAS de Sétif</i>	<i>Examineur</i>
<i>HARMAS Mohamed Naguib</i>	<i>M. C. à l'université Ferhat ABBAS de Sétif</i>	<i>Examineur</i>

## *Remerciements*

*Tout d'abord merci à ALLAH de m'avoir donné la force pour  
terminer ce travail*

*L'ensemble des travaux présentés dans ce mémoire a été effectué au  
Laboratoire de Qualité d'Energie dans les Réseaux Electriques (Q.U.E.R.E.) du  
Département d'Electrotechnique de l'Université Farhet Abbes- Sétif.*

Je tiens à remercier vivement monsieur **Dr. KHABER Farid** pour son esprit scientifique et compréhensif, qui a consacré beaucoup de son temps à mon travail et m'a beaucoup aidé avec ses idées, ses conseils et surtout ses critiques objectives.

Je remercie le professeur **K. Zehar** pour son aide, ses nombreux conseils précieux et ses encouragements.

Je tiens également à remercier le professeur **K. Benmahammed** d'avoir accepté la présidence du jury, monsieur **M.N. Harmas** et monsieur **M. Khemliche** d'avoir pris de leurs temps pour examiner ce travail.

Merci à tous les autres chercheurs qui ont mis leurs outils, articles et travaux accessibles à travers l'Internet.

J'adresse aussi mes remerciements à tous mes amis et collègues surtout ceux qui m'ont apporté un soutien moral, patience et une amitié inoubliable

Enfin, je ne saurais terminer ce remerciement sans remercier mes parents, qui m'ont accompagné tout au long de mes études par leur amour inconditionnel et leur soutien constant.

## ***Dédicaces***

*A mon père*

*A ma mère*

*A mes frères*

*A toutes ma famille*

*A tous mes amis*

*Sana*

# ***TABLE DES MATIERES***

---

# TABLE DES MATIERES

---

<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I. LES SYSTEMES FLOUS</b>	
I.1. Introduction .....	5
I.2. Ensembles flous .....	6
I.2.1. Ensemble flou type-1.....	7
I.2.1.1. Fonction d'appartenance .....	7
I.2.1.2. Caractéristiques des ensembles flous .....	8
I.2.1.3. Variable linguistique .....	10
I.2.2. Ensemble flou type-2 .....	11
I.2.2.1. Représentation des ensembles flous type-2 .....	13
I.2.3. Opérations sur les ensembles flous .....	15
I.2.3.1. Opérations sur les ensembles flous type-1 .....	15
I.2.3.1.1. T-norme (intersection floue) .....	16
I.2.3.1.2. T-conorme (union floue) .....	16
I.2.3.2. Opérations sur les ensembles flous type-2 .....	16
I.2.3.2.1. Opérations "join" et "meet" sous le minimum t-norme .....	18
I.2.3.2.2. Opération "join " sous le produit t-norme .....	18
I.2.3.2.3. Opération "meet " sous le produit t-norme .....	18
I.2.3.2.4. Complémentation .....	20
I.2.3.2.5. Opérations algébriques .....	20
I.2.4. Relations floues et leur composition .....	21
I.3. Système flou .....	22
I.3.1. Système flou type-1 .....	22
I.3.1.1. Fuzzification .....	22
I.3.1.2. Base de règles d'un système flou .....	23
I.3.1.3. Inférence floue .....	24
I.3.1.4. Défuzzification .....	26
I.3.2. Systèmes flou type-2 .....	26
I.3.2.1. Fuzzification .....	27
I.3.2.2. Base de règles .....	27

I.3.2.3. Mécanisme d'inférence .....	27
I.3.2.3.1. Inférence des systèmes flous type-2 intervalle .....	29
I.3.2.4. Réduction de type .....	30
I.3.2.5. Défuzzification .....	31
I.4. Centroïde d'un ensemble flou type-2 .....	31
I.4.1. Interprétation de l'ensemble type réduit .....	32
I.5. Centroïde d'un ensemble flou type-2 intervalle .....	33
I.5.1. Réduction de type pour les systèmes flous type-2 intervalle .....	36
I.6. Approximation par les systèmes flous .....	38
I.7. Conclusion .....	41
 <b>CHAPITRE II. COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE POUR DES SYSTEMES</b>	
<b>MONOVARIABLES NON LINEAIRES INCERTAINS</b>	
II.1. Introduction .....	42
II.1. Formulation du problème .....	43
II.2. Objectif de la commande .....	43
II.3. Construction du contrôleur adaptatif flou .....	43
II.4. Commande de supervision .....	47
II.5. Lois d'adaptation .....	48
II.5.1. Algorithme de projection .....	50
II.6. Théorème .....	52
II.7. Algorithme de conception de la commande adaptative floue .....	54
II.8. Application .....	55
II.8.1. Commande adaptative floue type-1 .....	57
II.8.1.1. Résultats de simulation .....	58
II.8.2. Commande adaptative floue type-2 .....	62
II.8.2.1. Résultats de simulation .....	64
II.9. Etude comparative .....	68
II.10. Conclusion .....	70
 <b>CHAPITRE III. COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE POUR DES SYSTEMES</b>	
<b>MULTIVARIABLES NON LINEAIRES INCERTAINS</b>	
III.1. Introduction .....	73
III.2. Formulation de problème .....	73
III.3. Objectif de la commande .....	74

III.4. Conception de la commande adaptative floue .....	74
III.4.1. Commande adaptative indirecte .....	75
III.4.1.1. Conception des systèmes flous proposés .....	75
III.4.1.1.1. Systèmes flous type-1 .....	75
III.4.1.1.2. Systèmes flous type-2 .....	76
III.4.1.2. Lois d'adaptation .....	78
III.4.1.3. Loi de commande.....	79
III.4.2. Commande adaptative directe .....	83
III.5. Exemple de simulation .....	86
III.5.1. Cas de la commande adaptative floue indirecte .....	87
III.5.1.1. Type-1 .....	87
III.5.1.2. Type-2 .....	91
III.5.1.3. Etude comparative .....	93
III.5.2. Cas de la commande adaptative floue directe .....	96
III.5.2.1. Type-1 .....	96
III.5.2.2. Type-2 .....	98
III.6. Conclusion .....	98
<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>101</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>102</b>

# ***INTRODUCTION GENERALE***

---



## INTRODUCTION GENERALE

Le but principal de l'automaticien est de contrôler les systèmes, en essayant de comprendre et prédire le comportement des modules qui le composent en déterminant des modèles qui s'accordent avec les observations constatées et leur analyse.

Ces modèles, peuvent être construits comme un ensemble d'équations différentielles linéaires ou non linéaires reliant les entrées, les états et les sorties. Ces équations différentielles formant un modèle mathématique, qui est important pour la synthèse de la loi de commande, sont parfois très difficiles à trouver, notamment pour les procédés non linéaires complexes qui font apparaître beaucoup de paramètres (moteur thermique, procédé chimique, système de puissance...).

Il est possible de résoudre ce problème en représentant le comportement du procédé non linéaire par un modèle flou. Cette technique basée sur la logique floue fait partie des techniques de l'intelligence artificielle, elle exprime la relation entre les entrées, les sorties et les états par des règles floues *SI-ALORS* [Tak-85]. L'idée de base consistait à exploiter l'expérience des opérateurs humains pour construire une loi de commande. Un jeu de règles floues traduit alors le comportement des opérateurs et leur capacité à prendre les décisions et agir d'une manière adéquate malgré le flou des connaissances, en utilisant des outils mathématiques appropriés.

Plusieurs recherches ont prouvées la capacité et la puissance des modèles flous dans l'identification des procédés non linéaires. Cette puissance d'apprentissage est utilisée pour représenter la dynamique des procédés non linéaires [Tak-85] [Mou-95] [Spo-96]. L'identification et la commande floues sont basées sur la propriété d'approximation universelle des systèmes flous. En effet, ceux-ci sont capables d'approximer, avec un degré de précision arbitraire fixé, n'importe quelle dynamique non linéaire sur un ensemble compact [Wan-92-a] [Buc-92].

Après les travaux de Mamdani, la recherche dans le domaine de la logique floue a stagné pendant près de quinze ans. Actuellement, l'utilisation de la logique floue pour le contrôle de processus a largement pénétré le milieu industriel, surtout l'industrie japonaise, où on trouve de nombreux produits "grand public" qui utilisent cette théorie proposée par Zadeh en 1965.

Puisque les systèmes flous sont construits par des connaissances fournies par l'expert humain, elles sont entachées d'incertitude. Cette incertitude va infecter les fonctions d'appartenance des ensembles flous antécédents et conséquents qui seront incertains. Ces systèmes flous appelés les systèmes flous type-1, sont incapables de modéliser ces incertitudes, car ils utilisent des fonctions d'appartenance précises, qui ont une représentation bidimensionnelle. Par conséquent, les systèmes flous type-1 sont étendus à des systèmes flous type-2 qui utilisent des ensembles flous type-2 dont les fonctions d'appartenance elles-mêmes sont floues. Les fonctions d'appartenance type-2 ont une représentation tridimensionnelle, la nouvelle (troisième) dimension des ensembles flous fournit un degré de liberté supplémentaire permettant de prendre en charge les incertitudes.

Malheureusement, les ensembles flous type-2 sont plus difficiles à mettre en oeuvre, cependant leur utilisation est justifiée par leur efficacité dans les circonstances où il est difficile de trouver une fonction d'appartenance exacte, et leur capacité à minimiser l'effet des incertitudes dans la base des règles du système flou.

Nous devons différencier entre deux types principaux d'incertitudes : aléatoires et linguistiques [Men-00]. La théorie des probabilités est utilisée pour modéliser l'incertitude aléatoire, et la logique floue est associée avec les incertitudes linguistiques. Dans la théorie des probabilités, la fonction de distribution de probabilité (pdf) exprime la totalité des informations concernant les incertitudes aléatoires. Dans la plupart des applications pratiques, il est impossible de connaître ou de déterminer la pdf ; ainsi, nous admettons qu'une pdf sera complètement caractérisée par tous ses moments. Alors, nous devons au moins utiliser les deux premiers moments de la pdf, car les incertitudes aléatoires exigent la connaissance de la dispersion autour de la valeur moyenne, et cette information est fournie par la variance (moment d'ordre 2).

Dans ce contexte, on considère que la sortie d'un système flou type-1 correspond à la valeur moyenne d'une densité de probabilité pdf. Donc nous devons considérer que le calcul de la défuzzification pour un système flou de type-1 est équivalent au calcul de la moyenne d'une pdf. La variance nous fournit une mesure de dispersion autour de la valeur moyenne, et elle est généralement utilisée pour capturer plus d'informations concernant les incertitudes statistiques. Par conséquent, les systèmes flous ont aussi besoin d'une certaine mesure de dispersion qui est réalisée par les systèmes flous type-2 qui permettent de capturer plus d'informations concernant les incertitudes au niveau des règles [Kar-99] [Men-00].

Ces dernières années, plusieurs travaux ont été développés à base des systèmes flous type-2. Ils sont utilisés dans la prise de décision [Yag-80], filtres adaptatifs [Lia-00-b], la

commande des robots mobiles [Hag-04] [Wu-96], le prétraitement des images de la radiographie [Lia-01] [Joh-00], et la commande de la dynamique des systèmes non linéaires [Mel-02] [Mel-03].

Les contrôleurs flous sont supposés travailler dans les situations où les paramètres et les structures du système présentent des incertitudes ou des variations structurelles inconnues. En plus, les procédés dynamiques non linéaires sont très complexes, et introduisent un grand nombre de paramètres. Pour faire face à cette complexité, des commandes adaptatives sont développées pour maintenir les performances convenables du système en présence des incertitudes.

La commande adaptative est un ensemble de techniques permettant de fournir une approche systématique pour l'ajustement automatique d'un régulateur en temps réel, dans le but d'obtenir ou de maintenir des performances désirées pour le système de commande lorsque la dynamique du procédé est inconnue et/ou change au cours du temps [Wan-04]. Ce type de commande est aussi caractérisé par la présence d'une boucle d'identification en temps réel.

L'avantage des contrôleurs adaptatifs flous, par rapport aux contrôleurs adaptatifs conventionnels, consiste dans le fait de pouvoir incorporer directement les informations linguistiques fournies par l'expert. Deux classes des contrôleurs adaptatifs flous existent. La classe des contrôleurs adaptatifs flous directs, et la classe des contrôleurs adaptatifs flous indirects. Dans le contrôleur adaptatif direct, les systèmes flous sont vus comme des régulateurs. Cependant, dans le contrôleur adaptatif indirect, les systèmes flous sont utilisés pour modéliser le processus, par la suite le contrôleur est construit en supposant que les systèmes flous représentent approximativement le processus réel.

Dans ce contexte, le travail réalisé dans le cadre de ce mémoire fait l'objet de trois chapitres :

Le premier chapitre présente une étude détaillée de la logique floue type-1 et son extension à la logique floue type-2. Différentes définitions et opérations de base sur ces ensembles flous, ainsi que quelques concepts qui leurs sont associés sont donnés. La structure des deux types des systèmes flous est explicitée. Le module de réduction de type qui est spécifique aux systèmes flous type-2 et les différentes méthodes de sa réalisation sont détaillés.

Dans le deuxième et le troisième chapitre deux commandes adaptatives à base de la logique floue type-1 et type-2 sont développées. La première commande est conçue pour des systèmes monovariables (SISO) incertains, et la deuxième commande prend en charge une classe plus générale des systèmes multivariables (MIMO) incertains. Les conditions de mise

## Introduction générale

---

en œuvre des deux commandes sont étudiées. La stabilité en boucle fermée est analysée par la méthode de Lyapunov. Les résultats de simulation obtenus sous l'environnement MATLAB montrent l'efficacité des deux types de commande floues adaptatives développées mêmes en présence des perturbations. Une étude comparative des commandes adaptatives floues type-1 et type-2 est réalisée notamment dans le cas de la présence de fortes perturbations.

Enfin, le bilan des travaux réalisés et les perspectives envisagées sont donnés en conclusion.

# ***CHAPITRE I***

---

***SYSTEMES FLOUS***

## SYSTEMES FLOUS

### I.1. Introduction

La logique floue a été introduite en 1965 par L.Zadeh comme une description mathématique; bien que, le principe de cette idée a été connu plus tôt chez les philosophes et les logiciens. Cette approche fait partie des méthodologies intelligentes, elle est inspirée de la capacité de l'homme à prendre des décisions et agir de façon convenable malgré le flou (l'incertitude) des connaissances disponibles. Elle a été introduite dans le but d'approcher le raisonnement humain à l'aide d'une représentation adéquate des connaissances telles que la base des règles et les fonctions d'appartenance, qui sont construites par l'introduction des informations linguistiques et numériques fournies par l'expert humain. Mais généralement ces informations sont entachées d'incertitudes qui peuvent parvenir de trois principales sources

- Le sens des mots utilisés dans la construction des règles peut être incertain (un mot veut dire différentes choses pour différentes personnes).
- Les mesures qui activent les systèmes flous type-1 peuvent être bruitées, ce qui introduit une incertitude.
- Les données utilisées pour ajuster les paramètres des systèmes flous type-1 peuvent être aussi bruitées.

Toutes ces incertitudes apparaissent au niveau des fonctions d'appartenance ce qui rend les systèmes flous type-1 incapables de prendre en charge ces incertitudes. Par conséquent, des systèmes flous type-2 (proposés toujours par L.Zadeh comme une extension des systèmes flous type-1) sont introduits, dans ces nouveaux systèmes le degré d'appartenance des antécédent et /ou des conséquents est représenté lui-même par un ensemble flou type-1. Cependant; les ensembles flous type-2 sont très efficaces pour modéliser les incertitudes, minimiser leurs effets dans la base de règles, et trouver une fonction d'appartenance convenable quand la forme de cette dernière ou l'un de ces paramètres sont incertains. Malheureusement, ces ensembles flous type-2 sont plus difficiles à définir et à utiliser que les ensembles flous type-1. Mais, leur bonne manipulation d'incertitudes, non prises en charge par les ensembles flous type-1, justifié leur utilisation.

Dans ce chapitre nous allons présenter les notions de base pour un système flou : propriétés, opérations et relations des ensembles flous, où nous comparons entre les systèmes flous type-1 et les systèmes flous type-2 par la description détaillée de leur structure, et

finalement on présente une certaine classe des systèmes flous (FBF) qui sont des approximateurs universels.

### I.2. Ensembles flous

Dans la théorie des ensembles classiques (non flous), les éléments soient qu'ils appartiennent complètement à un ensemble ou ils n'appartiennent pas. On rappelle que la fonction caractéristique  $\mu_A(x)$ , de  $x$  d'un ensemble classique  $A$  est un sous ensemble de l'univers de discours, est définie par :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Cette classification stricte est utile dans les mathématiques et d'autres sciences qui comptent sur les définitions précises. Mais dans plusieurs problèmes d'engineering, le but est de conserver l'information dans un contexte donné. Dans ce cas, il n'est pas clair si un élément appartient à un ensemble ou pas.

#### Exemple 1

Si l'ensemble  $A$  représente des ordinateurs (PC) qui sont chers par rapport à un budget d'étudiant, c'est évident que cet ensemble n'a pas de bornes précises. Puisque si on dit qu'un PC de 35000 DA est cher, alors on dira quoi des PC qui coûtent 34998DA ou 35002DA ? Sont ils chers ou non ? Si on a précisé la limite de 35000DA pour qu'un PC soit cher, certainement en dessous de la limite de 20000 DA le PC n'est pas cher. Mais entre ces deux limites de prix qu'est ce qu'on peut dire du PC ? Pour cela, dans cet intervalle un degré peut être utilisé afin de classifier le prix comme partiellement cher, et c'est là ou les ensembles flous interviennent.

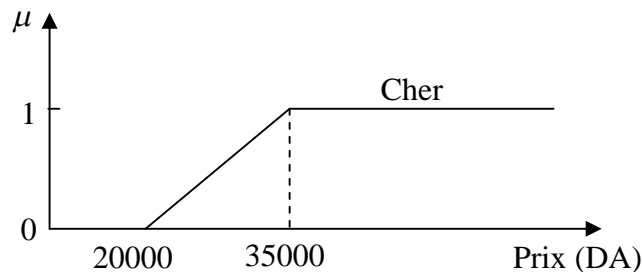


Fig.I.1. L'ensemble flou  $A$  correspondant au prix des PC.

### I.2.1. Ensemble flou type-1

L'ensemble flou type-1  $A$  défini sur l'univers de discours  $X$  est un ensemble caractérisé par sa fonction d'appartenance  $\mu_A(x)$  qui correspond chaque point dans  $X$  à un nombre réel appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$  :

$$\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1] \quad (I.2)$$

Si la valeur de la fonction d'appartenance, appelée le degré d'appartenance (ou l'appartenance), égale à un,  $x$  appartient complètement à l'ensemble flou. Si elle est égale à zéro,  $x$  n'appartient pas à l'ensemble. Si le degré d'appartenance est entre le 0 et 1,  $x$  appartient partiellement à l'ensemble flou :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} = 1 & \text{si } x \text{ est un élément complet de } A \\ \in ]0, 1[ & \text{si } x \text{ est un élément partiel de } A \\ = 0 & \text{si } x \text{ n'est pas un élément de } A \end{cases} \quad (I.3)$$

Dans un domaine discret ou continu, un ensemble flou  $A$  peut être défini par un ensemble de paires : degré d'appartenance / élément

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)/x_i \quad \text{cas discret} \quad (I.4)$$

$$= \int_x \mu_A(x)/x \quad \text{cas continu}$$

#### I.2.1.1. Fonction d'appartenance

Un ensemble flou type-1 peut être décrit analytiquement par une fonction d'appartenance  $\mu_A(x) = f(x)$ . Plusieurs formes de fonction d'appartenance sont utilisées on cite parmi elles

- Fonction d'appartenance trapézoïdale

$$\mu(x; a, b, c, d) = \max\left(0, \min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right)\right) \quad (I.5)$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont les coordonnées des apex du trapèze. Si  $b = c$ , nous obtenons une fonction d'appartenance triangulaire.

- Fonction d'appartenance exponentielle par morceaux

$$\mu(x; c_g, c_d, \sigma_g, \sigma_d) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{x-c_g}{2\sigma_g}\right)^2\right) & \text{si } x < c_g \\ \exp\left(-\left(\frac{x-c_d}{2\sigma_d}\right)^2\right) & \text{si } x > c_d \\ 1 & \text{autrement} \end{cases} \quad (I.6)$$



où  $c_g$  et  $c_d$  sont les limites gauche et droite, respectivement ; et  $\sigma_g, \sigma_d$  sont les largeurs gauche et droite, respectivement. Pour  $c_g = c_d$  et  $\sigma_g = \sigma_d$  on obtient la fonction d'appartenance gaussienne.

- Fonction d'appartenance singleton

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (I.7)$$

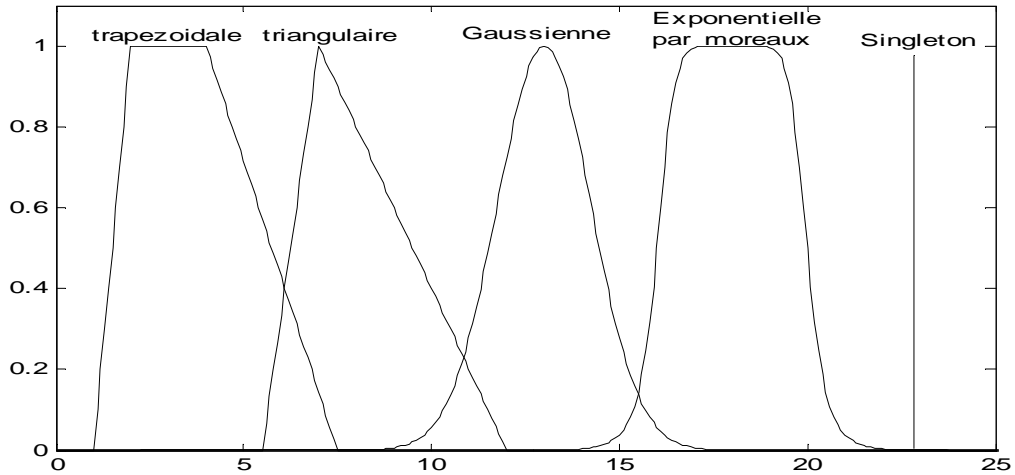


Fig.I.2. Différentes formes des fonctions d'appartenance.

Dans la pratique, les fonctions d'appartenance triangulaires ou trapézoïdales sont les plus utilisées pour la simplification des calculs. Mais les fonctions d'appartenance Gaussiennes ont deux propriétés importantes

- ✓ Elles produisent des fonctions lisses.
- ✓ L'approximation universelle est facilement prouvée.

Une subdivision très fine de l'univers de discours sur plus de sept ensembles flous n'apporte en général aucune amélioration du comportement dynamique du système [Men-95]. Les fonctions d'appartenance peuvent être symétriques, régulièrement distribuées ou avoir une distribution non uniforme. Il est important d'éviter le vide (lacunes), ceci provoque des zones de non intervention (zones mortes), ce qui conduit à une instabilité de la sortie. De même, il faut éviter un grand chevauchement de deux ensembles voisins.

### I.2.1.2. Caractéristiques des ensembles flous

Pour établir la structure mathématique de calcul avec les ensembles flous, plusieurs propriétés des ensembles flous doivent être définies [Bab-01].

- **Hauteur** : La hauteur de l'ensemble flou  $A$  est le suprémum des degrés d'appartenances des éléments de l'ensemble  $A$

$$hgt(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x). \quad (I.8)$$

Si la hauteur est égale à 1, on dit que  $A$  est normalisé.

- **Support** : Le support d'un ensemble flou  $A$  est un sous ensemble ordinaire de l'univers de discours  $X$  dont tous ses éléments ont un degré d'appartenance différent de zéro

$$\text{supp}(A) = \{x | \mu_A(x) > 0\} \quad (I.9)$$

- **Noyau** : Le noyau d'un ensemble flou  $A$  est un sous ensemble ordinaire de l'univers de discours  $X$  dont tous ses éléments ont un degré d'appartenance unitaire

$$\text{noyau}(A) = \{x | \mu_A(x) = 1\}. \quad (I.10)$$

- **$\alpha$ -coupe** :  $\alpha$ -coupe  $A_\alpha$  d'un ensemble flou  $A$  est un sous ensemble ordinaire de l'univers de discours  $X$  dont tous ses éléments ont un degré d'appartenance supérieur ou égale a  $\alpha$

$$A_\alpha = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [0,1] \quad (I.11)$$

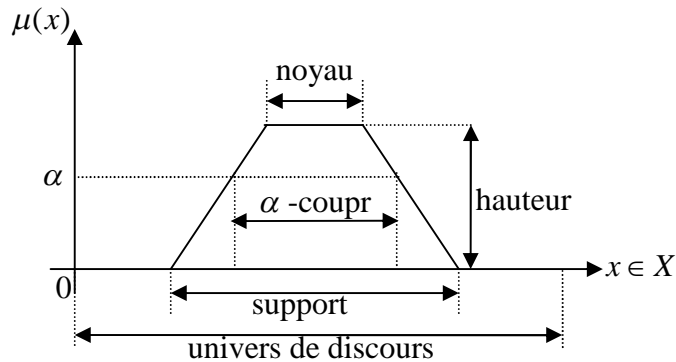


Fig.I.3. Noyau, support, hauteur et  $\alpha$ -coupe d'un ensemble flou.

- **Ensemble flou convexe** : Un ensemble flou  $A$  est convexe s'il possède un seul maximum global, on peut dire aussi que  $A$  est convexe si toutes les  $\alpha$ -coupe sont des ensembles convexes, ou si

$$\mu_A(\lambda x_1 + (\lambda - 1)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)), \quad \text{telque } x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0, 1] \quad (I.12)$$

- **Cardinalité** : Soit  $A = \{\mu_A(x_i) | i = 1, 2, \dots, n\}$  un ensemble flou discret. La cardinalité de cet ensemble flou est définie comme la somme des degrés d'appartenance

$$|A| = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i). \quad (I.13)$$

Pour un domaine continu la cardinalité est définie comme :

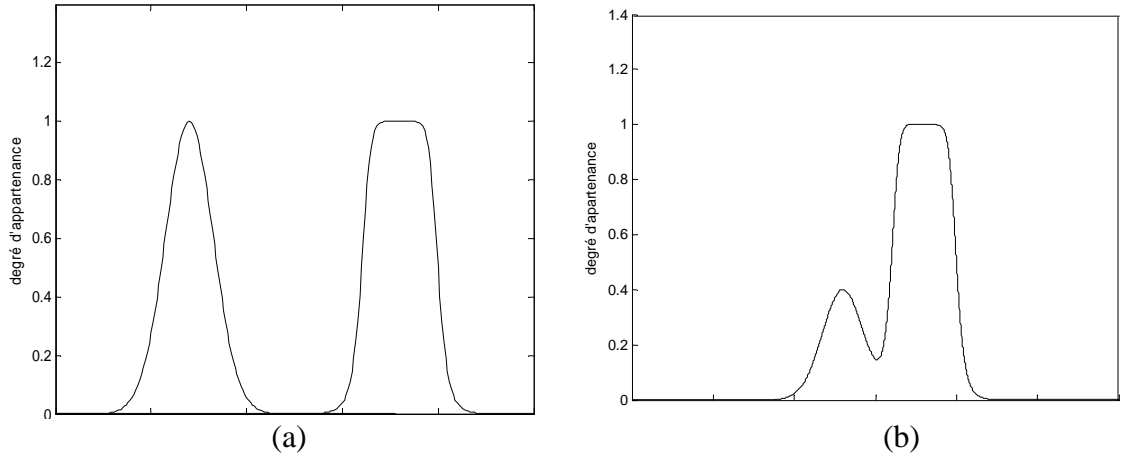


Fig.I.4. a) Deux ensembles convexes, b) Un ensemble non convexe

$$|A| = \int_x \mu_A(x) dx. \quad (I.14)$$

- **Partition floue** :  $N$  ensembles flous  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  définis sur l'univers de discours  $X$  forment une partition floue si

$$\forall x \in X, \sum_{i=1}^N \mu_{A_i}(x) = 1. \quad (I.15)$$

Une partition floue composée des ensembles flous convexes normaux implique que pas plus de deux fonctions d'appartenance se recouvrent.

### I.2.1.3. Variable linguistique

Les ensembles flous peuvent être utilisés pour représenter des termes linguistiques, puisque généralement, les états ou les situations des phénomènes ou des procédés sont décrits par des expressions, par exemple : 'taille' est une variable linguistique si ses valeurs sont : petite, moyenne, grande. On attribue à chaque valeur de la variable linguistique des facteurs d'appartenance  $\mu$  dont la valeur varie entre 0 et 1, elles sont distinguées par  $\mu_E(x)$ . L'argument  $x$  se rapporte à la variable linguistique (taille), tandis que l'indice  $E$  indique l'ensemble concerné (grand, moyen ou petit).

Une variable linguistique est représentée par un triplet  $(V, U, T_v)$  où  $V$  est la variable linguistique,  $U$  est l'univers de discours et  $T_v$  l'ensemble des caractérisations de la variable. Si on prend l'exemple de la variable taille définie sur l'ensemble des entiers positifs caractérisée par les ensembles flous petit, moyen, grand, alors la variable taille peut être représentée par :  $\{taille, R^+, (petit, moyen, grand)\}$ .

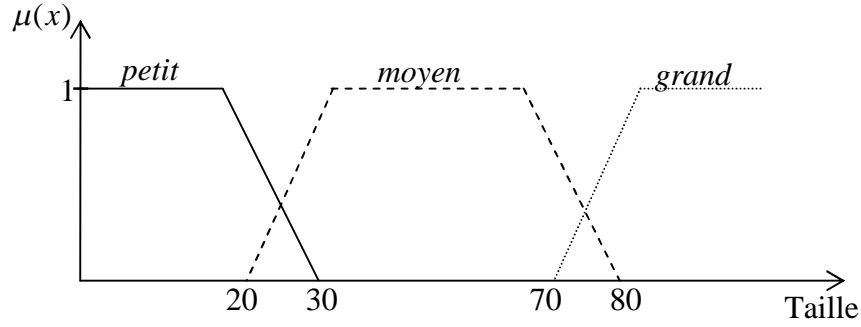


Fig.I.5. Exemple d'une variable linguistique

### I.2.2. Ensemble flou type-2

On se basera sur les définitions des ensembles flous type-1, afin de définir les ensembles flous type-2 où le degré d'appartenance de chaque élément de ces ensembles est un ensemble flou type-1. Dans ce qui vient on va présenter des définitions des ensembles flous type-2 et quelques importants concepts associés [Men-02].

**Définition 1 :** Un ensemble flou type-2 dans  $X$  noté  $\tilde{A}$ , est caractérisé par une fonction d'appartenance tridimensionnelle  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ , où  $x \in X$  et  $u \in J_x \subseteq [0, 1]$  :

$$\tilde{A} = \{(x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u)\} \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0, 1] \quad (I.16)$$

avec  $0 < \mu_{\tilde{A}}(x, u) < 1$ , et  $J_x$  est l'appartenance primaire de  $x$ .

**Définition 2 :** Pour chaque valeur de  $x$ , noté  $x = x'$ , le plan bidimensionnel dont ses axes sont  $u$  et  $\mu_{\tilde{A}}(x', u)$  est appelé une tranche verticale (*vertical slice*) de  $\mu_{\tilde{A}}(x', u)$ , et la fonction d'appartenance secondaire est une tranche verticale de  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ . Pour  $x \in X$  et  $\forall u \in J_x \subseteq [0, 1]$  on a :

$$\mu_{\tilde{A}}(x = x', u) \equiv \mu_{\tilde{A}}(x') = \int_{u \in J_x} f_{x'}(u)/u \quad J_x \subseteq [0, 1] \quad (I.17)$$

où  $0 \leq f_{x'} \leq 1$ . Puisque  $\forall x' \in X$ , alors la fonction d'appartenance secondaire noté par  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  est un ensemble flou type-1 (fig.I.6.b). Basé sur le concept des ensembles secondaires, on peut réinterpréter un ensemble flou type-2 comme l'union de tous les ensembles secondaires :

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)/x = \int_{x \in X} \left[ \int_{u \in J_x} f_x(u)/u \right] / x \quad (I.18)$$

$$J_x \subseteq [0, 1]$$

pour un univers de discours discontinu on remplace l'intégral ( $\int$ ) par la somme ( $\sum$ ).

**Définition 3 :** Le domaine de la fonction d'appartenance secondaire est appelé l'appartenance primaire de  $x$ . Dans (I.18),  $J_x$  est l'appartenance primaire de  $x$ , où  $J_x \subseteq [0, 1] \quad \forall x \in X$ .

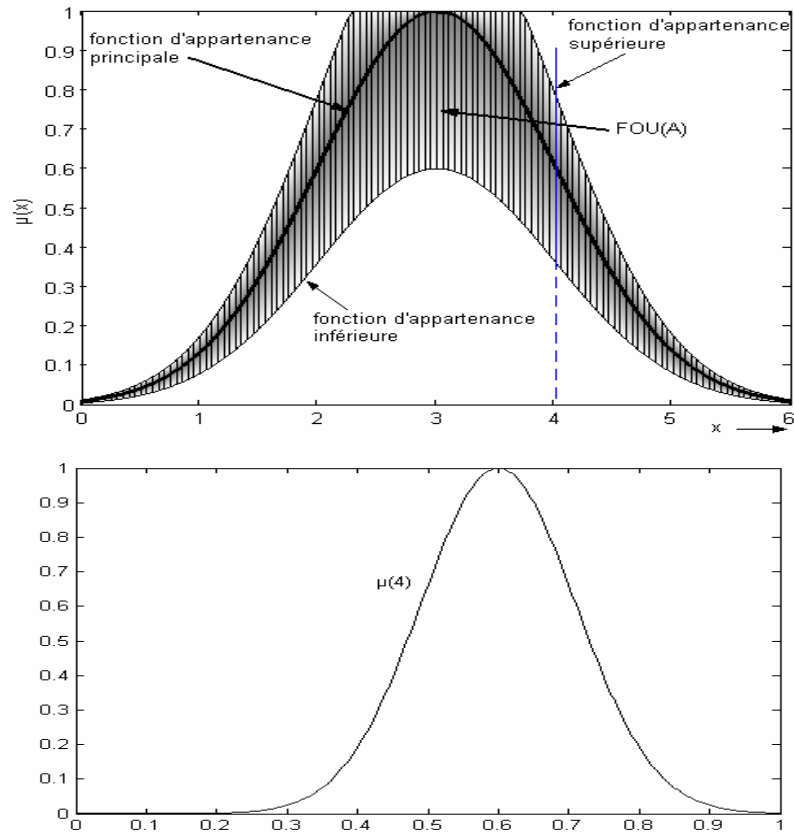


Fig.I.6. (a) Représentation d'un ensemble flou type-2 avec une fonction d'appartenance principale Gaussienne, (b) Représentation de la fonction d'appartenance secondaire de type Gaussienne pour  $x=4$ .

**Définition 4 :** L'amplitude de la fonction d'appartenance secondaire est appelée le degré d'appartenance secondaire. Dans (I.18),  $f_x(u)$  est le degré d'appartenance secondaire (fig.I.6.b).

**Définition 5 :** L'incertitude dans la fonction d'appartenance de l'ensemble flou type-2,  $\tilde{A}$ , consiste en une région bornée appelée l'empreinte d'incertitude (Footprint Of Uncertainty :  $FOU$ ). C'est l'union de toutes les fonctions d'appartenance primaires (la surface sombre dans fig.I.6.a) :

$$FOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x \quad (I.19)$$

**Définition 6 :** Les fonctions d'appartenance supérieure et inférieure de  $\tilde{A}$  sont deux fonctions d'appartenance type-1 qui représentent les frontières du  $FOU$  (fig.I.6.a et fig.I.8). La fonction d'appartenance supérieure correspond à la borne supérieure du  $FOU(\tilde{A})$ , et est notée  $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ ,  $\forall x \in X$ , et la fonction d'appartenance inférieure correspond à la borne inférieure de  $FOU(\tilde{A})$ , et est notée  $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ ,  $\forall x \in X$  :

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \overline{FOU(\tilde{A})} \quad \forall x \in X \quad (I.20)$$

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \underline{FOU(\tilde{A})} \quad \forall x \in X \quad (I.21)$$

**Définition 7 :** Pour chaque entrée, seulement un degré d'appartenance secondaire est égal à 1. On appelle l'ensemble de toutes les appartenances primaires qui ont une appartenance secondaire égale à 1, une fonction d'appartenance principale [Kar-98]. Dans fig.I.6.(a) la fonction d'appartenance principale est tracée par une ligne foncée. Le concept de la fonction d'appartenance principale illustre le fait que les ensembles flous type-1 sont un cas particulier des ensembles flous type-2, ayant une appartenance secondaire égale à l'unité pour une seule appartenance primaire, et zéro pour toutes les autres.

**Définition 8 :** Un ensemble flou type-2 intervalle est un ensemble flou type-2 dont toutes les fonctions d'appartenance secondaires sont des ensembles type-1 de forme intervalle, ce qui fait que toutes les appartenances secondaires sont égales à 1 :

$$f_x(u) = 1, \quad \forall u \in J_x \subseteq [0,1], \forall x \in X. \quad (I.22)$$

Les ensembles flous type-2 intervalle reflètent l'uniformité de l'incertitude au niveau de la fonction d'appartenance primaire, ce type de fonctions d'appartenance est le plus souvent utilisé dans les systèmes flous type-2. Notons que ce type de fonctions d'appartenance est représenté seulement par ses domaines (intervalles) qui peuvent être exprimés en fonction des bornes gauche et droite  $[l, r]$  ou par leurs centre et largeur  $[c-s, c+s]$  où  $c = (l + r)/2$  et  $s = (r - l)/2$ .

### I.2.2.1. Représentation des ensembles flous type-2

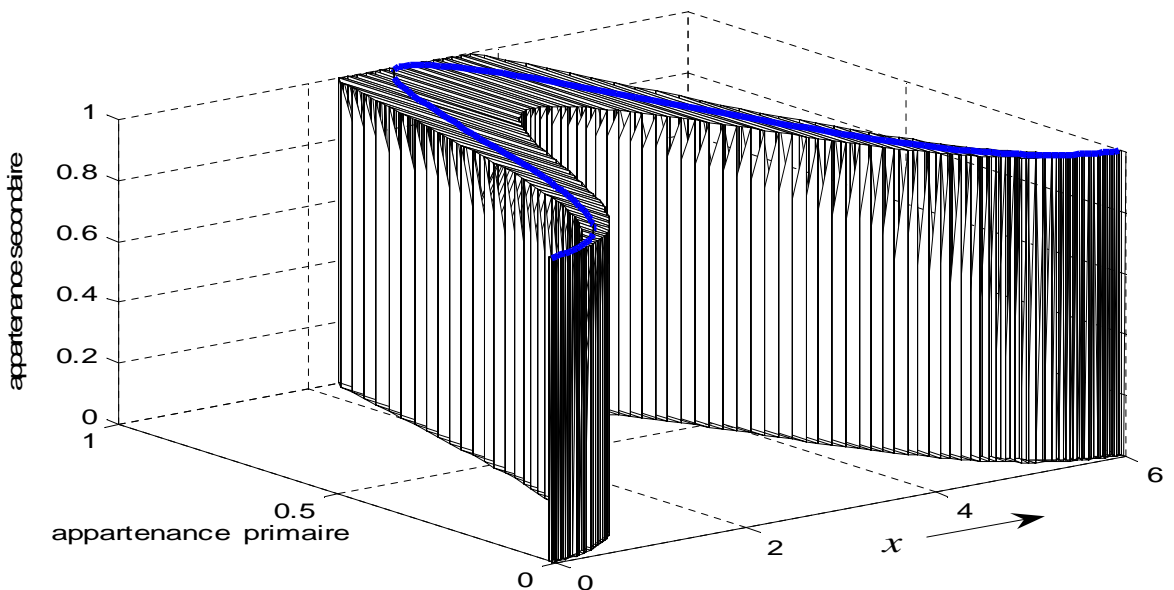


Fig.I.7. Représentation tridimensionnelle d'une fonction d'appartenance d'un ensemble flou type-2 avec un fonction d'appartenance principale gaussienne.

Les ensembles flous type-2 les plus utilisés sont de forme intervalle, Gaussienne, et triangulaire. Le nom du type est pris de la forme du degré d'appartenance primaire. Notons qu'il n'est pas nécessaire que la fonction d'appartenance principale soit de la même forme de type d'ensemble utilisé.

**Exemple 2**

➤ Considérons le cas d'une fonction d'appartenance primaire Gaussienne avec un écart type fixe  $\sigma$  et une moyenne incertaine qui varie dans l'intervalle  $[m_1, m_2]$  (Fig.I.8.(a))

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right], \quad m \in [m_1, m_2] \tag{I.23}$$

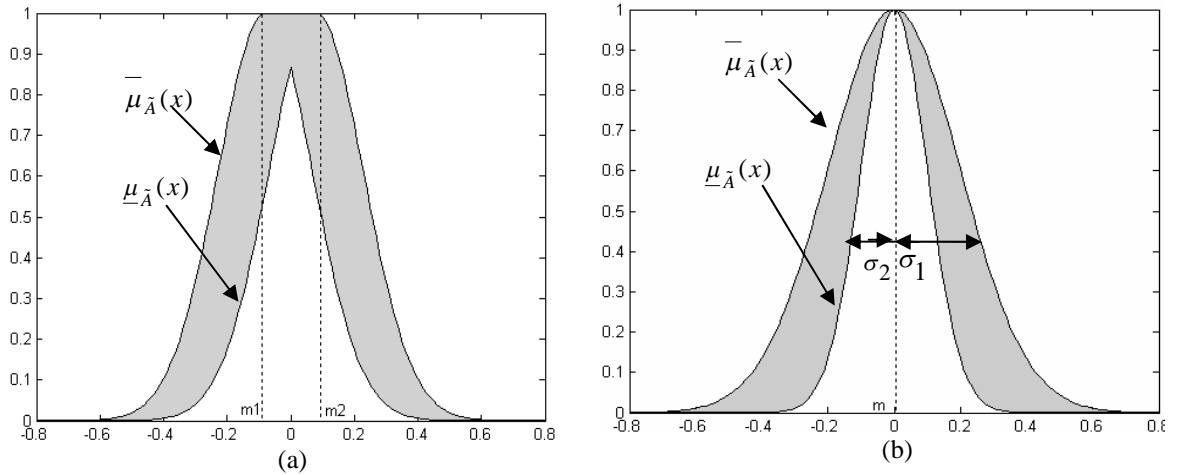


Fig.I.8. Fonction d'appartenance type-2. (a) Ensemble flou type-2 Gaussien avec une moyenne incertaine. (b) Ensemble flou type-2 avec un écart type incertain.

Dans la fig.I.8.(a) les régions sombres représentent l'empreinte d'incertitude *FOU*, la fonction d'appartenance supérieure  $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)$  est exprimée par :

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_1}{\sigma}\right)^2} & x < m_1 \\ 1 & m_1 < x < m_2 \\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_2}{\sigma}\right)^2} & x > m_2 \end{cases} \tag{I.24}$$

et la fonction d'appartenance inférieure  $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$  est exprimée par :

$$\underline{\mu}_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_2}{\sigma}\right)^2} & x \leq \frac{m_1+m_2}{2} \\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_1}{\sigma}\right)^2} & x > \frac{m_1+m_2}{2} \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

- Considérons le cas d'une fonction d'appartenance primaire Gaussienne avec une moyenne fixe  $m$  et un écart type variable dans  $[\sigma_1, \sigma_2]$  (Fig.I.8.(b)) :

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right], \quad \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2] \quad (\text{I.26})$$

La fonction d'appartenance supérieure dans la fig.I.8.(b) est exprimée par :

$$\bar{\mu}_{\bar{A}}(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma_1}\right)^2\right] \quad (\text{I.27})$$

et la fonction d'appartenance inférieure est exprimée par :

$$\underline{\mu}_{\bar{A}}(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma_2}\right)^2\right] \quad (\text{I.28})$$

### I.2.3. Opérations sur les ensembles flous

#### I.2.3.1. Opérations sur les ensembles flous type-1

Les définitions des opérations sur les ensembles flous comme l'intersection, l'union, et la complémentation, peuvent être une extension de la théorie des ensembles ordinaires [Meu-03]. Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles flous de  $X$ , qui sont décrits par leurs fonctions d'appartenance  $\mu_A(x), \mu_B(x)$  respectivement :

- **Complément d'un ensemble flou** : Le complément de  $A$  est un ensemble flou, dénoté  $\bar{A}$  :

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x). \quad (\text{I.29})$$

avec  $A \cup \bar{A} \neq X$   
 $A \cap \bar{A} \neq \phi$

- **Intersection des ensembles flous** : L'intersection de  $A$  et  $B$  est un ensemble flou, dont la fonction d'appartenance est donnée par :

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)). \quad (\text{I.30})$$

- **Union des ensembles flous** : L'union de  $A$  et  $B$  est un ensemble flou, dont la fonction d'appartenance est donnée par :



$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)). \quad (\text{I.31})$$

Puisque le degré d'appartenance ne prend pas que les valeurs  $\{0,1\}$  mais peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle  $[0,1]$ , les opérations précédentes peuvent avoir plusieurs définitions (tableau I.1). Il est clair, cependant, que ces opérations sur les ensembles flous doivent avoir des résultats corrects quand on les applique sur des ensembles ordinaires (un ensemble ordinaire est un cas particulier d'un ensemble flou). L'intersection floue de deux ensembles flous est définie d'une façon plus générale par une opération binaire sur l'intervalle unitaire, c'est à dire  $T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ .

#### I.2.3.1.1. T-norme (intersection floue)

L'intersection générale, appelée la norme triangulaire  $T$  (t-norme), doit satisfaire les conditions suivantes pour tout  $a, b, c \in [0,1]$  :

- $T(a,1) = a$
- $b \leq c \Rightarrow T(a,b) \leq T(a,c)$
- $T(a,b) = T(b,a)$
- $T(a, T(b,c)) = T(T(a,b), c)$

#### I.2.3.1.2. T-conorme (union floue)

L'union générale, appelée la conorme triangulaire  $S$  (t-conorme), doit satisfaire les conditions suivantes pour tout  $a, b, c \in [0,1]$  :

- $S(a,1) = a$
- $b \leq c \Rightarrow S(a,b) \leq S(a,c)$
- $S(a,b) = S(b,a)$
- $S(a, S(b,c)) = S(S(a,b), c)$

#### I.2.3.2. Opérations sur les ensembles flous type-2

On a vu que le degré d'appartenance d'un ensemble flou type-2 est un ensemble flou type-1; par conséquent, pour accomplir les opérations telles que l'union et l'intersection sur les ensembles flous type-2 on a besoin d'être capable d'effectuer la t-conorme et la t-norme entre deux ensembles flous type-1. Cela est fait en utilisant le principe d'extension de Zadeh [Zad-75].

	t-normes	t-conormes
Zadeh (1973)	$\min(x,y)$	$\max(x,y)$
Bendler Kahout (1980)	$x.y$	$x+y-x.y$
Lukasiewicz, Giles (1976)	$\max(x+y-1,0)$	$\max(x+y,1)$
Weber (1983)	$\begin{cases} x & \text{si } y = 1 \\ y & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$\begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ y & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
Hamacher (1978) $\gamma > 0$	$\frac{x.y}{\gamma + (1-\gamma)(x+y-x.y)}$	$\frac{x+y-(2-\gamma)x.y}{1-(1-\gamma)x.y}$
Dubois et Parade (1986) $\alpha \in [0,1]$	$\frac{x.y}{\max(x,y,\alpha)}$	$\frac{x+y+x.y-\min(x,y,1-\alpha)}{\max(1-\alpha,1-y,\alpha)}$

Tableau I.1. Principales t-normes et t-conormes.

Considérons deux ensembles flous type-2,  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$ , dans l'univers  $X$ . Soit  $\mu_{\tilde{A}}$  et  $\mu_{\tilde{B}}$  les degrés d'appartenance (ensembles flous dans  $J_x \in [0,1]$ ) de ces deux ensembles, représenté pour chaque  $x$ , par  $\mu_{\tilde{A}}(x) = \int_u f_x(u)/u$  et  $\mu_{\tilde{B}}(x) = \int_w f_x(w)/w$ , respectivement, où  $u, w \in J_x$  indique les degrés d'appartenance primaire de  $x$ , et  $f_x(u), g_x(w) \in [0,1]$  indique les degrés d'appartenance secondaire de  $x$ . Le degré d'appartenance de l'union, l'intersection et le complément des ensembles flous type-2,  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$ , sont définis comme suit [Joh-98] :

Union: 
$$\tilde{A} \cup \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}} \cup \mu_{\tilde{B}} = \int_u \int_w (f_x(u) * g_x(w)) / (u \vee w) \quad (I.32)$$

Intersection: 
$$\tilde{A} \cap \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}} \cap \mu_{\tilde{B}} = \int_u \int_w (f_x(u) * g_x(w)) / (u * w) \quad (I.33)$$

Complément: 
$$\overline{\tilde{A}} \Leftrightarrow \mu_{\overline{\tilde{A}}}(x) = \neg \mu_{\tilde{A}}(x) = \int_u f_x(u) / (1-u) \quad (I.34)$$

où  $\vee$  représente le maximum t-conorme et  $*$  représente la t-norme. Les intégrales représentent l'union logique. Dans qui va suivre, nous appellerons les opérations,  $\cup, \cap, \neg$  l'opération "join", "meet", et négation, respectivement. Les mêmes notations seront adoptées pour le cas discret en remplaçant les intégrales par des sommations.

Notre but est d'obtenir des algorithmes qui nous permettrons de réaliser les opérations "join", "meet" et la complémentation.

### I.2.3.2.1. Opérations "join" et "meet" sous le minimum t-norme

#### Théorème 2 [Kar-01-a]

Supposons que nous avons  $n$  ensembles flous type-1 réels, normaux et convexes  $F_1, F_2, \dots, F_n$  caractérisés par les fonctions d'appartenance  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , respectivement. Soient  $v_1, v_2, \dots, v_n$  des nombres réels tels que  $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$  et  $f_1(v_1) = f_2(v_2) = \dots = f_n(v_n) = 1$ . En utilisant le maximum t-conorme et le minimum t-norme, l'opération "join" peut être exprimée par :

$$\mu_{\cup_{i=1}^n F_i}(\theta) = \begin{cases} \Lambda_{i=1}^n f_i(\theta), & \theta < v_1, \\ \Lambda_{i=k+1}^n f_i(\theta), & v_k \leq \theta < v_{k+1}, 1 \leq k \leq n-1, \\ \mathbf{V}_{i=1}^n f_i(\theta), & \theta \geq v_n, \end{cases} \quad (\text{I.35})$$

et l'opération "meet" peut être exprimée par :

$$\mu_{\cap_{i=1}^n F_i}(\theta) = \begin{cases} \mathbf{V}_{i=1}^n f_i(\theta), & \theta < v_1, \\ \Lambda_{i=1}^k f_i(\theta), & v_k \leq \theta < v_{k+1}, 1 \leq k \leq n-1, \\ \Lambda_{i=1}^n f_i(\theta), & \theta \geq v_n, \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

La fig.I.9 montre un exemple d'application (pour le cas où  $n = 4$ )

### I.2.3.2.2. Opération "join " sous le produit t-norme

#### Théorème 3 [Kar-01-a]

Supposons que nous avons  $n$  ensembles flous type-1 réels, normaux et convexes  $F_1, F_2, \dots, F_n$  caractérisés par les fonctions d'appartenance  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , respectivement. Soient  $v_1, v_2, \dots, v_n$  des nombres réels tels que  $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$  et  $f_1(v_1) = f_2(v_2) = \dots = f_n(v_n) = 1$ . Alors, l'opération "Join" peut être exprimée par :

$$\mu_{\cup_{i=1}^n F_i}(\theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n f_i(\theta), & \theta < v_1, \\ \prod_{i=1}^n f_i(\theta), & v_k \leq \theta < v_{k+1}, 1 \leq k \leq n-1, \\ \mathbf{V}_{i=1}^n f_i(\theta), & \theta \geq v_n, \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

### I.2.3.2.3. Opération "meet " sous le produit t-norme

L'opération "meet" sous le produit t-norme entre deux ensembles flous type-1,  $F$  et  $G$  caractérisées par des fonctions d'appartenance  $f$  et  $g$  respectivement, peut être exprimée comme :

$$F \cap G = \int_v \int_w f(v)g(w)/(vw) \quad (\text{I.38})$$

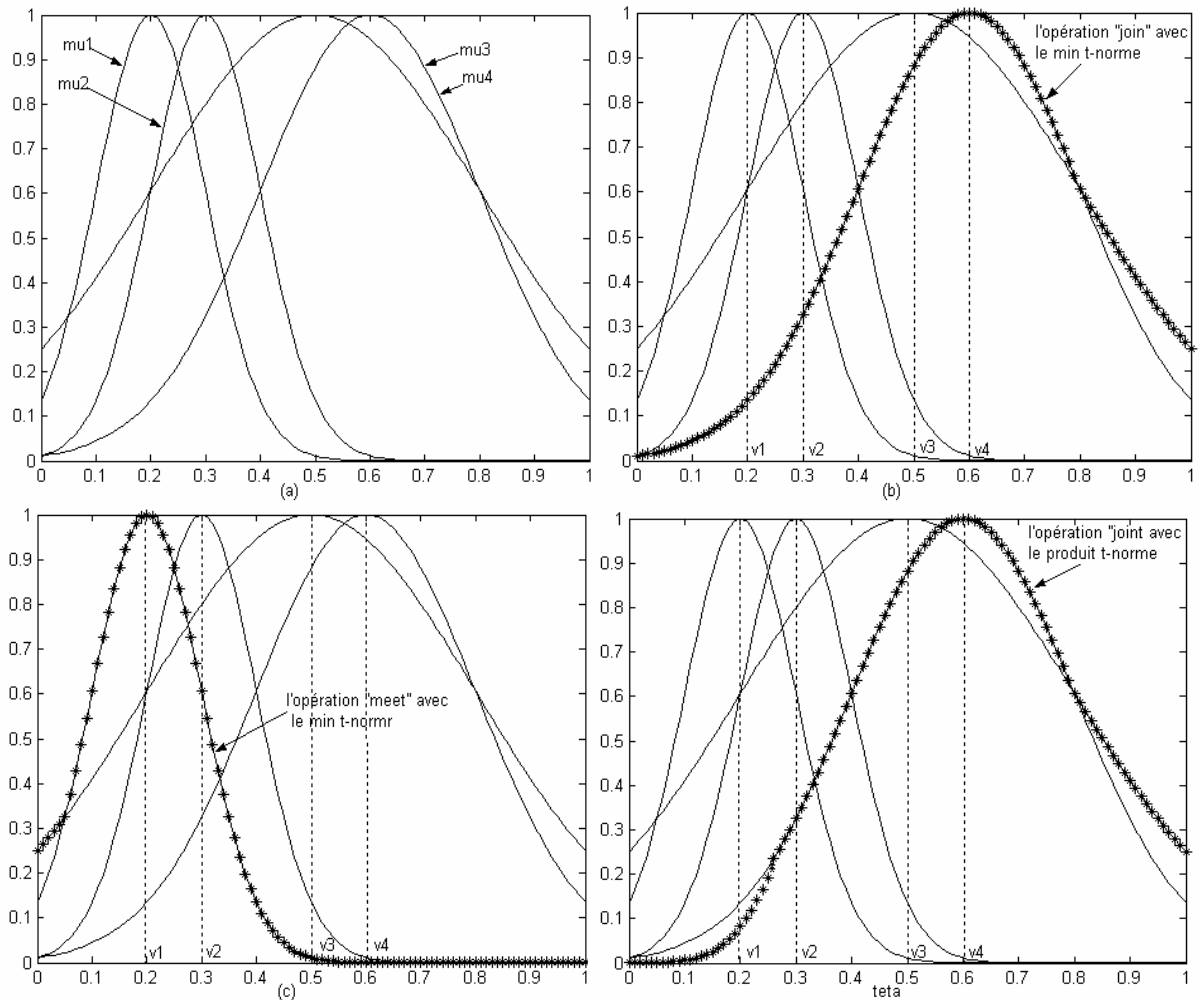


Fig.I.9. Les opérations "join" et "meet" entre des Gaussiennes. (a) Les 4 Gaussiennes utilisées, (b) L'opération "join" avec le minimum t-norme, (c) L'opération "meet" avec le minimum t-norme et (d) L'opération "join" avec le produit t-norme.

**Exemple 3 [Kar-98]**

Soient  $F$  et  $G$  deux ensembles type-1 intervalle, leurs domaines sont  $[l_f, r_f]$  et  $[l_g, r_g]$ , respectivement. En utilisant (I.33), le *meet* entre  $F$  et  $G$ , sous le produit t-norme, peut être obtenu comme suit :

$$F \cap G = \int_{v \in F} \int_{w \in G} (1 \times 1) / vw. \tag{I.39}$$

Chaque terme dans  $F \cap G$  est égal au produit  $vw$  de  $v \in F$  et  $w \in G$ , avec le plus petit terme étant  $l_f l_g$  et le plus grand terme étant  $r_f r_g$ . Puisque  $F$  et  $G$  sont continus, alors  $F \cap G$  est aussi continu, par conséquent,  $F \cap G$  est un ensemble type-1 intervalle défini par le domaine  $[l_f l_g, r_f r_g]$  tel que :

$$F \cap G = \int_{u \in [l_f l_g, r_f r_g]} 1/u \tag{I.40}$$

D'une manière similaire, le *meet* de  $n$  ensembles type-1 intervalles  $F_1, \dots, F_n$ , ayant comme domaines  $[l_1, r_1], \dots, [l_n, r_n]$ , respectivement, est un ensemble intervalle sur le domaine

$$\left[ \prod_{i=1}^n l_i, \prod_{i=1}^n r_i \right].$$

#### I.2.3.2.4. Complémentation

##### Théorème 4 [Kar-01-a]

Si un ensemble flou type-1  $G$  a une fonction d'appartenance  $g(v)$  ( $v \in R$ ), l'ensemble complément  $\neg G$  a une fonction d'appartenance  $g(1-v)$ . La fig.I.10 montre un exemple de l'opération de complémentation.

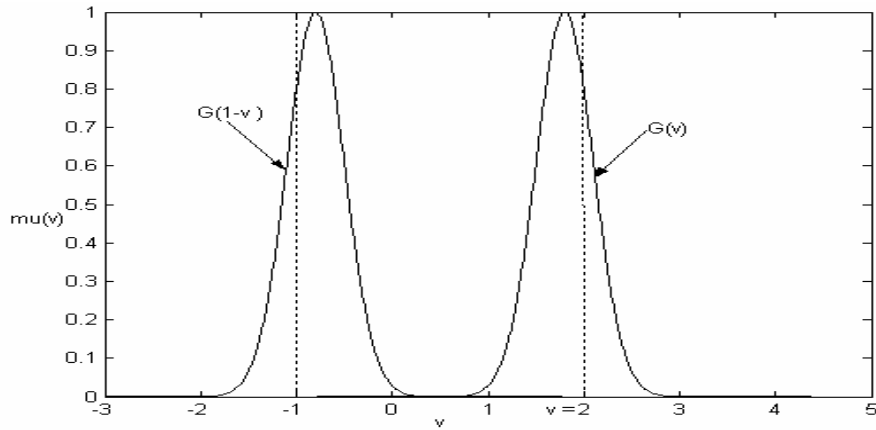


Fig.I.10. Ensemble flou type-1  $G$  et son complément  $\neg G$ .

#### I.2.3.2.5. Opérations algébriques

Comme les opérations de la t-conorme et la t-norme ont été étendues aux degrés d'appartenance des ensembles flous type-2 en utilisant le principe d'extension, des opérations algébriques telles que l'addition et la multiplication entre des ensembles flous type-1 sont aussi définies en utilisant le principe d'extension. Une opération binaire '\*' définie pour les nombres, peut être étendue à deux ensembles flous type-1,  $F = \int_v f(v)/v$  et  $G = \int_w g(w)/w$  comme suit :

$$F * G = \int_v \int_w f(v) * g(w) / (v * w) \quad (I.41)$$

où '\*' indique la t-norme utilisée. L'observation de (I.38) et de (I.41) montre que le produit de  $F$  et  $G$  est le même que le *meet* de  $F$  et  $G$ , c-à-d,  $F \times G = F \cap G$ ; par conséquent, l'opération *meet* sous un produit t-norme sera utilisée pour multiplier deux ensembles flous type-1.

**Théorème 5** [Kar-01-a]

Etant donnés  $n$  intervalles de type-1  $F_1, \dots, F_n$ , avec des moyennes  $m_1, m_2, \dots, m_n$  et des ouvertures  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , leur combinaison  $\sum_{i=1}^n \alpha_i F_i + \beta$ , (où  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) et  $\beta$  sont des constantes) est aussi un intervalle de type-1 avec une moyenne  $\sum_{i=1}^n \alpha_i m_i + \beta$  et une ouverture  $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| s_i$ .

**Théorème 6** [Kar-01-a]

Etant donnés  $n$  Gaussiennes de type-1  $F_1, \dots, F_n$ , avec des moyennes  $m_1, m_2, \dots, m_n$  et des écart types  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ , leur combinaison  $\sum_{i=1}^n \alpha_i F_i + \beta$ , (où  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) et  $\beta$  sont des constantes) est aussi une Gaussienne de type-1 avec une moyenne  $\sum_{i=1}^n \alpha_i m_i + \beta$  et un écart type

$$\sigma' = \begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2} & \text{si le produit t-norme est utilisé.} \\ \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \sigma_i & \text{si le minimum t-norme est utilisé.} \end{cases} \quad (\text{I.42})$$

**I.2.4. Relations floues et leur composition**

Une relation exprime une connexion entre différents ensembles. Une relation ordinaire représente la présence ou l'absence d'une association entre les éléments de deux ou plusieurs ensembles [Kil-95]. Si ce concept est généralisé, il permettra d'avoir plusieurs degrés de relation entre les éléments, de cette manière nous obtenons des relations floues. Puisque une relation floue elle même est un ensemble, on peut lui appliquer toutes les opérations sans aucune modification.

Une relation floue déterministe dans  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  est un sous ensemble numérique du produit cartésien, alors une relation floue type-1 d'ordre  $n$  dans le produit cartésien  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  est un sous ensemble flou type-1 défini sur  $X$ . De la même façon une relation floue type-2 dans  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  est un sous ensemble flou type-2 de l'espace produit cartésien.

On définit une composition comme suit : on suppose la relation floue  $R$  définie dans  $X \times Y$  et  $A$  est un ensemble dans  $X$ , alors le sous ensemble flou  $B$  de  $Y$  peut être déterminé par la composition de  $A$  avec  $R$  :

$$B = A \circ R \quad (\text{I.43})$$

Un opérateur de composition *sup-min* a été proposé par L.A. Zadeh :

$$\mu_B(y) = \sup_x \min(\mu_A(x), \mu_R(x, y)) \quad (\text{I.44})$$

D'une façon plus générale, la t-norme  $T$  est utilisée pour l'intersection :

$$\mu_B(y) = \sup_x T(\mu_A(x), \mu_R(x, y)). \quad (\text{I.45})$$

### I.3. Système flou

On appelle système flou tout système utilisant des ensembles flous et la structure correspondante pour donner une formulation mathématique afin de relier la sortie du système à son entrée. Cette formulation mathématique est obtenue en décrivant le chemin de cette sortie qui passe à travers trois blocs de base. Un fuzzificateur qui convertit l'entrée en un ensemble flou, un mécanisme d'inférence qui combine les règles pour obtenir un ensemble flou de sortie, et un défuzzificateur qui transforme cet ensemble en une sortie numérique.

#### I.3.1. Système flou type-1

Chaque système basé sur la logique floue type-1 contient quatre composantes principales [Kil-95]: règles, fuzzificateur, mécanisme d'inférence, et défuzzificateur

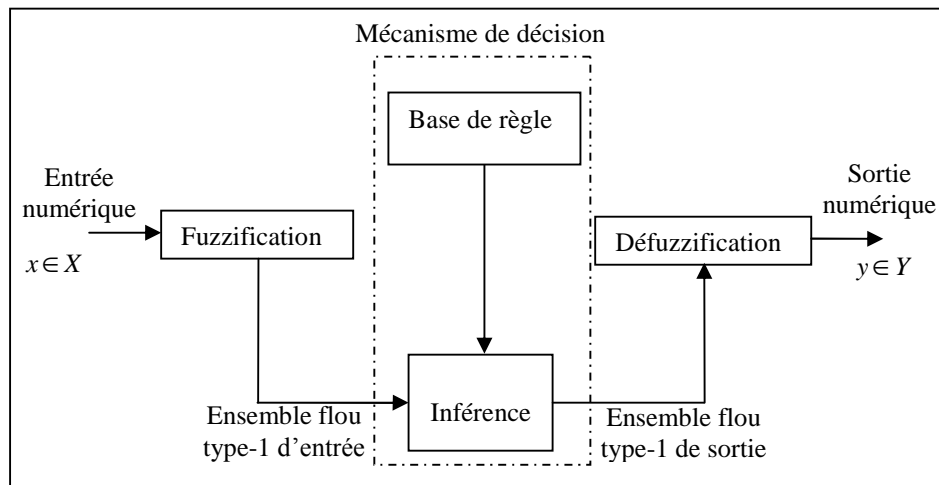


Fig.I.11. Représentation des systèmes flous type-1.

##### I.3.1.1. Fuzzification

C'est l'opération de projection des variables physiques réelles sur des ensembles flous. Deux cas peuvent être envisagés selon le type de l'entrée qui peut être une valeur précise (singleton), ou un ensemble (qui représente l'incertitude sur l'entrée).

### I.3.1.2. Base de règles d'un système flou

Les règles floues sont fournies par des experts, ou par extraction des données numériques. Ces règles sont exprimées comme une collection d'instructions SI-ALORS sous la forme :

**Si** *proposition antécédente* **Alors** *proposition conséquente*

Dans la base de règles des systèmes flous, la relation entre les variables est représentée par des règles floues SI-ALORS. La proposition antécédente est toujours une proposition floue de type ' $x$  est  $A$ ' où  $x$  est la variable linguistique et  $A$  est le terme linguistique (prémisse).

La base de règles d'un système flou doit respecter certaines conditions afin d'assurer le bon fonctionnement de ce dernier. Parmi ces conditions on cite

- La complétude : une base de règles d'un système flou est dite complète si, pour chaque entrée, il existe au moins une règle floue activée. Afin d'assurer cette propriété, les fonctions d'appartenance doivent couvrir toutes les plages possibles des variables d'entrée.
- La consistance : une base de règles d'un système flou est dite inconsistante, s'il existe deux règles floues ayant la même prémisse mais des conclusions différentes. La propriété de consistance permet d'éviter les contradictions dans une base de règles.

#### Exemple 3

Dans cet exemple les règles d'inférences sont décrites par une matrice d'inférence, qui les rassemble toutes sous forme de tableau (tableau.I.2). Dans notre cas le tableau est à deux dimensions, les entrées du tableau représentent les ensembles flous des variables d'entrées ( $T$  et  $V$ ). L'intersection d'une colonne et d'une ligne donne l'ensemble flou de la variable de sortie définie par la règle. Il y a autant de cases que de règles.

Les règles que décrit ce tableau sont (sous forme symbolique)

**SI** ( $T$  est F **ET**  $V$  est F) **ALORS**  $U$  est Z      **OU**  
**SI** ( $T$  est M **ET**  $V$  est F) **ALORS**  $U$  est P      **OU**  
**SI** ( $T$  est E **ET**  $V$  est F) **ALORS**  $U$  est GP      **OU**  
**SI** ( $T$  est F **ET**  $V$  est E) **ALORS**  $U$  est Z      **OU**  
**SI** ( $T$  est M **ET**  $V$  est E) **ALORS**  $U$  est Z      **OU**  
**SI** ( $T$  est E **ET**  $V$  est E) **ALORS**  $U$  est P



$U$		$T$		
		F	M	E
$V$	F	Z	P	GP
	E	Z	Z	P

Tableau.I.2. Matrice d'inférence de l'exemple 3.

Dans cet exemple, on a représenté les règles qui sont activées à un instant donné par des cases sombres :

**SI** ( $T$  est M **ET**  $V$  est F) **ALORS**  $U$  est P **OU**

**SI** ( $T$  est E **ET**  $V$  est F) **ALORS**  $U$  est GP

Il arrive que toutes les cases du tableau ne soient pas remplies, on parle alors de règles d'inférences incomplètes. Cela ne signifie pas que la sortie n'existe pas, mais plutôt que le degré d'appartenance est nul pour la règle en question.

### I.3.1.3. Inférence floue

Les inférences lient les entrées et les variables de sortie par des règles linguistiques. Chaque règle peut être vue comme une relation floue:  $R : (X \times Y) \rightarrow [0,1]$  calculée par :

$$\mu_R(x, y) = I(\mu_A(x), \mu_B(y)). \quad (I.46)$$

$I$  est un opérateur qui peut être, soit une implication floue ou une conjonction (t-norme). On note que  $I(\cdot, \cdot)$  est calculé dans l'espace du produit cartésien  $X \times Y$ . Les opérateurs les plus courants sont de type conjonctif [Kil-95]

$$\begin{cases} \text{l'implication de Mandani (1974) : } \mu_R(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \\ \text{l'implication de Larsen (1980) : } \mu_R(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y) \end{cases}$$

Le mécanisme d'inférence est basé sur le *modus ponens généralisé* qu'on l'appelle aussi le *raisonnement approximatif* [Bab-01] :

$$\text{Règle 1 : } \mathbf{SI} \ x \text{ est } A, \mathbf{ALORS} \ y \text{ est } B \quad (I.47)$$

où  $A$  et  $B$  présentent les propositions floues (ensemble).

Si on introduit un nouveau ensemble  $A'$ , et on considère la règle suivante :

$$\text{Règle 2 : } \mathbf{SI} \ x \text{ est } A', \mathbf{ALORS} \ y \text{ est } B' \quad (I.48)$$

Est-ce que c'est possible de dériver le conséquent ( $B'$ ) de la règle 2, en utilisant l'information de la règle 1? La réponse est oui, par la procédure de la composition floue

$$B' = A \circ R \quad (I.49)$$

Pour le minimum t-norme, la composition max-min est obtenue par :

$$\mu_{B'}(y) = \max_x \min(\mu_{A'}(x), \mu_R(x, y)). \quad (I.50)$$

Si  $A'$  est un singleton  $x_0$ , alors

$$\mu_{B'}(y) = \max_{x \in X} \min(\mu_{A'}(x), \mu_R(x, y)) = \mu_R(x_0, y) \quad (I.51)$$

Pour l'implication de Mandani, on obtient

$$\mu_R(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)). \quad (I.52)$$

Comme on l'a déjà indiqué, il y a plusieurs méthodes d'inférence qui se différencient par la manière de réaliser les opérateurs utilisés dans les règles d'inférence. Les trois méthodes d'inférence les plus usuelles sont : Max-Min, Max-Produit et Somme-Produit. Néanmoins, la méthode Max-Min est la plus utilisée à cause de sa simplicité.

✓ Méthode d'inférence Max-Min

Appelé aussi "implication de Mandani", elle réalise l'opérateur "ET" par la fonction "Min", la conclusion "ALORS" de chaque règle par la fonction "Min" et la liaison entre toutes les règles ( opérateur "OU" ) par la fonction Max.

Reprenons l'exemple précédent où seulement deux règles sont activées

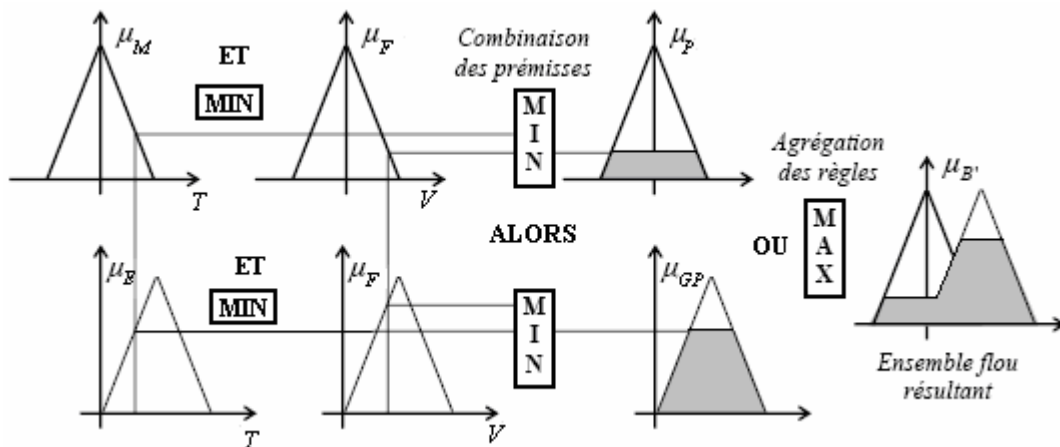


Fig.I.12 Exemple d'inférence Max-Min.

✓ Méthode d'inférence Max-Produit

On l'appelle également "implication de Larsen". La différence par rapport à la méthode précédente réside dans la manière de réaliser la conclusion "ALORS". Dans ce cas, on utilise le produit comme illustré par la fig.I.13.

On remarque que les fonctions d'appartenances partielles ont la même forme que la fonction d'appenance dont elles sont issues multipliées par un facteur d'échelle vertical qui correspond au degré d'appenance obtenu à travers l'opérateur "ET".

✓ Méthode d'inférence Somme-Produit

Dans ce cas, l'opérateur "ET" est réalisé par le produit, de même que la conclusion "ALORS". Cependant, l'opérateur "OU" est réalisé par la valeur moyenne des degrés d'appartenance intervenant dans l'inférence.

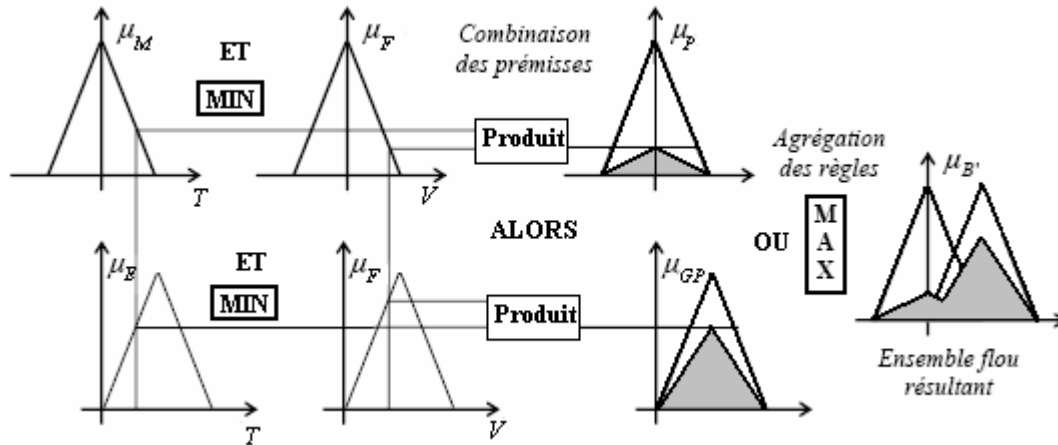


Fig.I.13 Exemple d'inférence Max-Produit.

**I.3.1.4. Défuzzification**

Le résultat du mécanisme d'inférence flou est un ensemble flou  $B'$ . Pour avoir une sortie numérique,  $B'$  doit être défuzzifié. Ce qui fait que la défuzzification est une transformation qui permet de remplacer un ensemble flou par une seule valeur numérique représentant cet ensemble. Plusieurs méthodes de défuzzification sont proposées dans la littérature [Run-94]. La méthode de défuzzification la plus utilisée est celle du centre de gravité qui est donnée par :

$$y' = \frac{\sum_{j=1}^F \mu_{B'}(y_j) y_j}{\sum_{j=1}^F \mu_{B'}(y_j)} \tag{I.53}$$

où  $F$  est le nombre des éléments  $y_j$  dans  $Y$  (le domaine continu  $Y$  doit être discrétisée pour pouvoir calculer le centre de gravité).

**I.3.2. Système flou type-2**

La structure de base d'un système flou type-2 représentée par la fig.I.14 [Kar-98], est semblable à celle d'un système flou type-1. Elle est composée de cinq blocs : l'interface de fuzzification, la base de règles, le mécanisme d'inférence, le réducteur de type et le defuzzificateur. Dans ce qui suit chaque bloc sera présenté en détails.

### I.3.2.1. Fuzzification

L'interface de fuzzification fait correspondre à l'entrée déterministe un ensemble flou qui peut être généralement un ensemble flou type-2. Cependant, dans ce qui suit, nous utilisons seulement une fuzzification par singleton pour laquelle l'ensemble flou d'entrée possède uniquement un seul degré d'appartenance non nul.

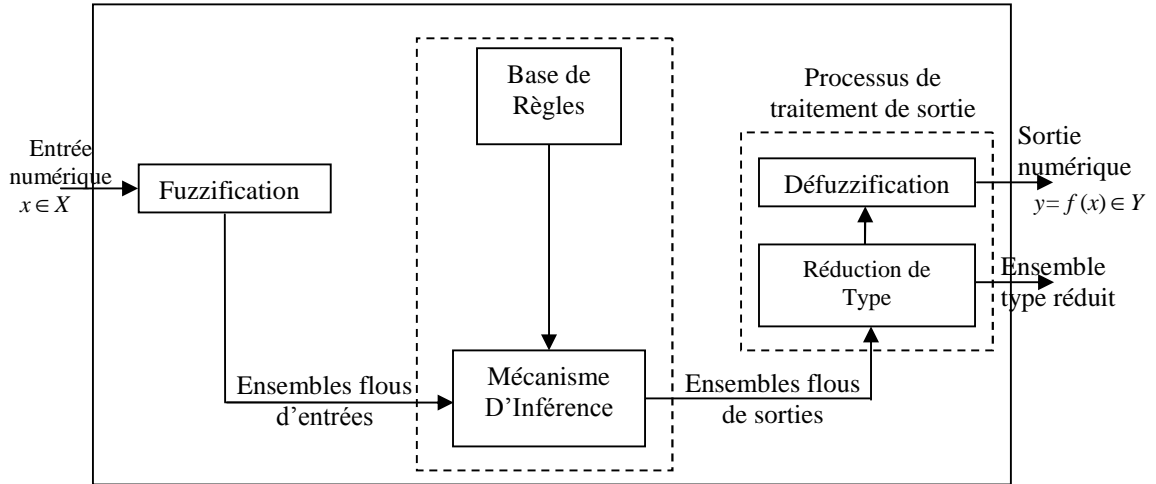


Fig.I.14. Structure de base d'un système flou de type-2.

### I.3.2.2. Base de règles

La structure des règles reste exactement la même comme dans le cas des systèmes flous type-1 sauf que les antécédents et/ou les conséquents sont représentés par des ensembles flous type-2. La  $l^{\text{ème}}$  règle dans un système flou type-2 a la forme suivante :

$$"R^l : \text{si } x_1 \text{ est } \tilde{F}_1 \text{ et } x_2 \text{ est } \tilde{F}_2 \text{ et } \dots \text{ et } x_p \text{ est } \tilde{F}_p, \text{ ALORS } y \text{ est } \tilde{G}^l " \quad (I.54)$$

où les  $x_i$  sont des entrées,  $\tilde{F}_i^l$  sont des ensembles antécédents ( $i = 1, \dots, p$ ),  $y$  est la sortie, et  $\tilde{G}^l$  est l'ensemble conséquent. Pour un système multi-entrées multi-sorties (MIMO) la base de règles peut être considérée comme un groupe de base de règles multi-entrées une seule sortie (MISO); donc, il est suffisant de se concentrer sur la base de règles (MISO) seulement.

### I.3.2.3. Mécanisme d'inférence

Considérons un système flou type-2 ayant  $p$  entrées  $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_p \in X_p$  et une sortie  $y \in Y$ . Supposons qu'on a  $M$  règles où la  $l^{\text{ème}}$  règle a la forme (I.54). Cette règle représente une relation floue de type-2. Nous dénotons la fonction d'appartenance de cette relation floue type-2 par  $\mu_{\tilde{F}_1^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l \rightarrow \tilde{G}^l}(x, y)$  où  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ , et  $\tilde{F}_1^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l$  dénote le produit cartésien de  $\tilde{F}_1^l, \tilde{F}_2^l, \dots, \tilde{F}_p^l$ .

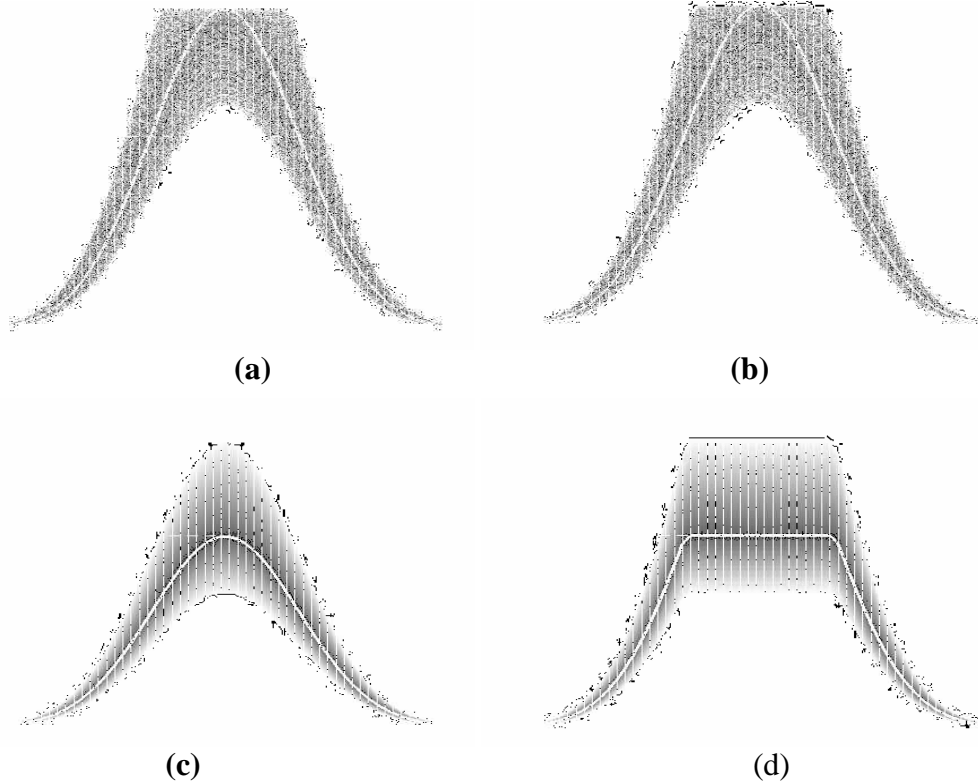


Fig.I.15. Illustrations du produit et du minimum d'inférence dans le cas du type-2  
 (a) ensemble antécédent Gaussien de type-2 pour un système à une entrée, (b) ensemble conséquent correspond à l'ensemble antécédent montré dans (a), (c) ensemble de sortie pour  $x=4$  utilisant le produit d'inférence, (d) ensemble de sortie pour  $x=4$  utilisant le minimum d'inférence.

Quand une entrée  $x'$  est appliquée, la composition de l'ensemble flou  $\tilde{X}'$ , à qui  $x'$  appartient, et la règle  $R^l$  est formée en utilisant une version étendue de la composition "sup-star" :

$$\mu_{\tilde{F}_1^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l \rightarrow \tilde{G}^l}(y) = \cup_{x \in \tilde{X}'} [\mu_{\tilde{X}'}(x) \cap \mu_{\tilde{X}' \circ \tilde{F}_1^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l \rightarrow \tilde{G}^l}(x, y)] \quad (I.55)$$

Nous utilisons une fuzzification par singleton, c'est à dire que l'ensemble flou  $\tilde{X}'$  à un degré d'appartenance égal à 1 pour  $x = x'$  et égal à zéro pour toutes les autres entrées ( $x \neq x'$ ), (chacune des entrées est considérée comme une mesure parfaite), alors la relation (I.55) se réduit à :

$$\mu_{\tilde{X}' \circ \tilde{F}_1^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l \rightarrow \tilde{G}^l}(y) = \mu_{\tilde{F}_1^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l \rightarrow \tilde{G}^l}(x', y) \quad (I.56)$$

Nous désignons la relation  $\tilde{X}' \circ \tilde{F}_1^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l \rightarrow \tilde{G}^l$  par  $\tilde{B}^l$ , qui correspond à l'ensemble de sortie. Le second membre de (I.56) est calculé en utilisant l'implication minimum ou produit [Men-95] (qui correspondra à l'opération *meet* sous le minimum ou le produit t-norme dans le cas du type-2), donc (I.56) peut être écrite comme :

$$\mu_{\tilde{B}^l}(y) = \mu_{\tilde{F}_1^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l}(x') \cap \mu_{\tilde{G}^l}(y) \quad (I.57)$$

La fonction d'appartenance du produit cartésien est obtenue en calculant le "meet" entre les ensembles individuels [Kar-99], et l'expression (I.57) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{B}^l}(y) &= \mu_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \cap \mu_{\tilde{F}_2^l}(x_2) \cap \dots \cap \mu_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \cap \mu_{\tilde{G}^l}(y) \\ &= \mu_{\tilde{G}^l}(y) \cap \left[ \prod_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i^l}(x_i) \right]\end{aligned}\quad (\text{I.58})$$

La fig.I.15 montre un exemple du produit et du minimum d'inférence pour un système flou type-2.

### I.3.2.3.1. Inférence des systèmes flous type-2 intervalle

Généralement, les systèmes flous type-2 engendrent des calculs complexes. Cependant, l'utilisation des fonctions d'appartenance de type intervalle réduit énormément cette complexité. Les éléments théoriques de base de ces systèmes sont détaillés dans les travaux de Mendel [Lia-02]. Dans ce qui va suivre on se contentera de bref aperçu.

Dans un système flou type-2 intervalle utilisant une fuzzification par singleton, le "meet" sous le minimum ou le produit t-norme, le degré d'activation  $F^l \equiv [\underline{f}^l, \overline{f}^l]$  de la  $l^{i\text{ème}}$  règle est donné par :

$$\underline{f}^l = \underline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x_1) * \dots * \underline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \quad (\text{I.59})$$

$$\overline{f}^l = \overline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x_1) * \dots * \overline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \quad (\text{I.60})$$

L'ensemble conséquent de la  $l^{i\text{ème}}$  règle a une appartenance [Lia-00-a] :

$$\mu_{\tilde{B}^l}(y) = \int_{b^l \in [\underline{f}^l * \underline{\mu}_{\tilde{G}^l}(y), \overline{f}^l * \overline{\mu}_{\tilde{G}^l}(y)]} 1/b^l, \quad y \in Y \quad (\text{I.61})$$

où  $\underline{\mu}_{\tilde{G}^l}(x)$  et  $\overline{\mu}_{\tilde{G}^l}(x)$  sont les degrés d'appartenance supérieur et inférieur de  $\mu_{\tilde{G}^l}(x)$ .

L'ensemble  $\mu_{\tilde{B}}(y)$  qui est l'union de tous les ensembles conséquents est obtenu par :

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \int_{b \in \left[ \left[ \underline{f}^1 * \underline{\mu}_{\tilde{G}^1}(y) \right] \vee \dots \vee \left[ \underline{f}^M * \underline{\mu}_{\tilde{G}^M}(y) \right], \left[ \overline{f}^1 * \overline{\mu}_{\tilde{G}^1}(y) \right] \vee \dots \vee \left[ \overline{f}^M * \overline{\mu}_{\tilde{G}^M}(y) \right] \right]} 1/b \quad y \in Y \quad (\text{I.62})$$

#### Exemple 4 [Men-01]

Soit un système flou type-2 intervalle, utilisant une fuzzification par singleton, dont le mécanisme d'inférence est réalisé par le produit t-norme (fig.I.16.(a)). On suppose que deux règles sont activées. La fig.I.16.(a) montre l'opération de projection de l'entrée sur les antécédents d'un système flou type-2 intervalle, où ces antécédents au nombre  $p=2$ , ont des fonctions d'appartenances primaires Gaussiennes exprimées par (I.23).

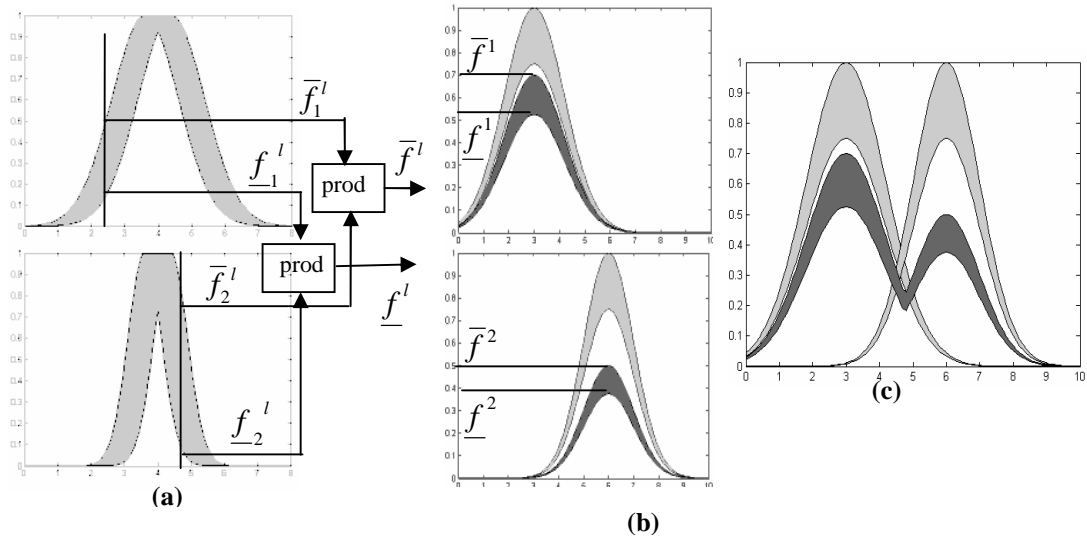


Fig.I.16. Système flou type-2 intervalle (a) Fuzzification de type singleton par le produit t-norme (b) Ensemble conséquent de chaque règle (c) Ensemble de sortie résultant de la combinaison des deux ensembles conséquents présentés dans (b).

La fig.I.16.(b) représente le ensemble de sortie  $\mu_{\bar{B}^l}(y)$  de chaque règle ( $l=2$ ) qui est obtenu par (I.62) pour chaque  $y \in Y$ , et la fig.I.16.(c) montre la combinaison entre les deux ensembles type-2 conséquents par l'utilisation du maximum t-conorme en utilisant (I.62).

#### I.3.2.4. Réduction de type

Dans un système flou type-1, où les ensembles de sortie sont des ensembles flous type-1, nous effectuons la défuzzification dans le but d'obtenir une valeur numérique (ensemble type-0) représentant la combinaison des ensembles de sortie.

Dans le cas du type-2, les ensembles de sortie sont des ensembles de type-2; donc nous devons utiliser des versions étendues des méthodes de défuzzification de type-1 appelées la réduction de type [Kar-98]. Cette opération va transformer l'ensemble flou type-2 résultant en un ensemble flou type-1 appelé ensemble type réduit, qui sera défuzzifié par la suite. Cet ensemble type réduit résultant prend en considération plus d'information au sujet des incertitudes des règles que la valeur défuzzifiée (un nombre).

Parmi les méthodes de réduction de type utilisées on cite :

- La réduction de type par le centre de gravité.
- La réduction de type par la hauteur.
- La réduction de type par le centre des ensembles.

### I.3.2.5. Défuzzification

A la fin de l'étape de réduction de type, on obtient un ensemble type réduit qui est un ensemble flou type-1, alors il est nécessaire de le transformer en une valeur numérique bien déterminée [Kar-99].

La façon la plus naturelle de faire ceci est de trouver le centre de gravité de l'ensemble type réduit. Le calcul du centre de gravité est équivalent à trouver une moyenne pondérée des sorties de tous les ensemble flou type-1 imbriqués dans le système flou type-2, où les poids correspondent aux appartenances dans l'ensemble type réduit.

Si l'ensemble type réduit  $Y$ , pour une entrée  $x$ , est discrétisé en  $N$  points, l'expression de son centre de gravité est :

$$C_Y(x) = \frac{\sum_{k=1}^N y_k \mu_Y(y_k)}{\sum_{k=1}^N \mu_Y(y_k)} \quad (\text{I.63})$$

### I.4. Centroïde d'un ensemble flou type-2

Le centre de gravité d'un ensemble flou type-1  $A$ , est donné par (I.63). Similairement, le centroïde d'un ensemble flou  $\tilde{A}$  de type-2, défini sur un domaine discret de  $N$  points, peut être défini en utilisant le principe d'extension [Men-95]:

$$C_{\tilde{A}} = \int_{\theta_1} \dots \int_{\theta_N} [\mu_{D_1}(\theta_1) * \dots * \mu_{D_N}(\theta_N)] \left/ \frac{\sum_{i=1}^N x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i} \right. \quad (\text{I.64})$$

où  $D_i = \mu_{\tilde{A}}(x_i)$ ,  $\theta_i \in D_i$ .

L'équation (I.64) est interprétée comme suit : chaque point  $x_i$  de  $A$  a un degré d'appartenance flou de type-1 noté  $D_i = \mu_{\tilde{A}}(x_i)$ . Pour trouver le centroïde, nous considérons chaque combinaison  $\{\theta_1 \dots \theta_N\}$  telle que  $\theta_i \in D_i$ . Pour chacune de ces combinaisons, nous calculons un centroïde de type-1 en utilisant l'équation (I.63) dans laquelle nous remplaçons chaque  $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$  par  $\theta_i$ ; et à chaque point centroïde, nous associons un degré d'appartenance égal à la t-norm des degrés d'appartenances des  $\theta_i$  aux  $D_i$ . Si plus d'une combinaison des  $\theta_i$  nous donne le même point centroïde, nous prenons celui qui possède le plus grand degré

d'appartenance. Si nous posons  $x = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i}$ , alors (I.64) peut être écrite comme



$$C_{\tilde{A}} = \int_x \sup_{\{\theta_1, \dots, \theta_N\}} [\mu_{D_1}(\theta_1) * \dots * \mu_{D_N}(\theta_N)] / x \quad (\text{I.65})$$

Chaque combinaison  $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$  peut être vue comme une fonction d'appartenance d'un certain ensemble  $A'$ , qui a le même domaine que  $\tilde{A}$ . On appelle  $A'$  un ensemble flou type-1 imbriqué dans "Embedded type-1 set". Alors, on définit le centroïde  $C_{\tilde{A}}$  comme un ensemble flou type-1 formé par les centroïdes des ensembles flous type-1 imbriqués dans  $\tilde{A}$ . L'appartenance du centre de gravité d'un ensemble imbriqué dans  $C_{\tilde{A}}$ , est calculée comme la t-norme des appartenances secondaires correspondantes à  $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$ . Il est à noter que si le domaine de  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  est continu, le domaine de  $C_{\tilde{A}}$  est aussi continu. Le nombre de tous les ensembles type-1 imbriqués dans  $\tilde{A}$  est infini ; donc, le domaine de  $\tilde{A}$  et chaque  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  ( $x \in \tilde{A}$ ) doit être discrétisé pour pouvoir calculer  $C_{\tilde{A}}$ . Notons aussi, de la relation (I.64), que si le domaine de chaque  $D_i$  est discrétisé en  $M$  points, le nombre de combinaisons possibles de  $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$  est  $M^N$ , qui s'avère très grand même si  $M$  et  $N$  sont petits.

#### I.4.1. Interprétation de l'ensemble type réduit

L'ensemble type réduit d'un système flou type-2 est le centre de gravité de l'ensemble flou type-2 de sortie de ce système. Par conséquent, chaque élément de l'ensemble type réduit est le centre de gravité d'un certain ensemble flou type-1 imbriqué dans l'ensemble de la sortie du système flou type-2 [Kar-01-b].

Le système flou type-2 peut être également considéré comme une collection de plusieurs systèmes flous type-1 différents comme montre le fig.I.17. Chacun de ces systèmes flous type-1 est imbriqué dans le système flou type-2, donc l'ensemble type réduit est une collection des sorties de tous les systèmes flous type-1 qui sont imbriqués dans le système flou type-2, ceci nous permet de représenter la sortie de système flou type-2 comme un ensemble flou plutôt qu'une valeur déterministe [Kar-98].

Si toutes les incertitudes d'un système flou type-2 se réduisent à des incertitudes d'un système flou type-1, qui veut dire, que toutes les fonctions d'appartenance type-2 se réduisent à leurs fonctions d'appartenance principales, les degrés d'appartenance des prémisses et des conséquences de chaque point seront réduits à des points (valeurs ordinaires). Cela va causer bien sûr la réduction de l'ensemble type-2 de sortie à sa fonction d'appartenance principale, et la réduction de l'ensemble de type réduit vers un point singulier qui représente le centre de gravité de la fonction d'appartenance principale de l'ensemble de sortie. Un système flou

type-2 peut alors être vu comme une version perturbée d'un système flou type-1 à cause des incertitudes présentes dans les fonctions d'appartenance. Alors le degré d'appartenance d'un point  $y_1 \in Y$  dans l'ensemble type réduit indique le niveau d'incertitude associé au système flou type-1 dans la sortie est  $y_1$ .

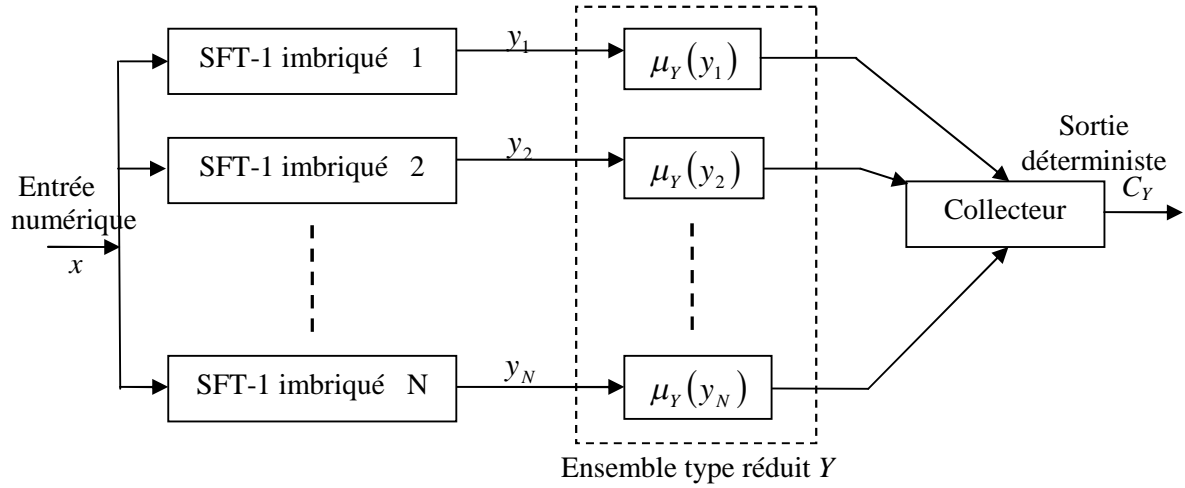


Fig.I.17. Interprétation du système flou type-2 comme une collection de systèmes flous type-1

### I.5. Centroïde d'un ensemble flou type-2 intervalle

Dans cette section nous nous concentrons sur les ensembles flous type-2 intervalle, en présentant une procédure de calcul qui donne le centre de gravité exprimé par (I.64) [Kar-01]. Considérons la forme générale pour calculer l'ensemble type réduit donnée par :

$$Y(Z_1, \dots, Z_N, W_1, \dots, W_N) = \int_{z_1 \in Z} \dots \int_{z_N \in Z} \int_{w_1 \in W} \dots \int_{w_N \in W} [\mathfrak{F}_{l=1}^N \mu_{z_l}(z_l) * \mathfrak{F}_{l=1}^N \mu_{w_l}(w_l)] \Bigg/ \frac{\sum_{l=1}^N w_l z_l}{\sum_{l=1}^N w_l} \quad (\text{II.66})$$

Si  $Z_l$  et  $W_l$  ( $l=1, \dots, N$ ) sont des ensembles flous type-1 intervalle; alors,  $\mu_{z_l}(z_l) = \mu_{w_l}(w_l) = 1$ ,

(I.66) va être écrite comme :

$$Y(Z_1, \dots, Z_N, W_1, \dots, W_N) = \int_{z_1 \in Z} \dots \int_{z_N \in Z} \int_{w_1 \in W} \dots \int_{w_N \in W} 1 \Bigg/ \frac{\sum_{l=1}^N w_l z_l}{\sum_{l=1}^N w_l} = [y_l, y_r] \quad (\text{I.67})$$

Maintenant, nous allons présenter une procédure itérative qui calcule la moyenne pondérée  $Y$  lorsque chaque  $Z_l$  dans (I.67) est un ensemble type-1 intervalle ayant comme centre  $c_l$  et comme largeur  $s_l$  ( $s_l \geq 0$ ), et lorsque chaque  $W_l$  est aussi un ensemble type-1 intervalle ayant

comme centre  $h_l$  et comme ouverture  $\Delta_l$  ( $\Delta_l \geq 0$ ). (Nous supposons que  $h_l \geq \Delta_l$ , afin que  $w_l \geq 0$  pour  $l=1, \dots, N$ ) Soient les deux remarques suivantes :

1. Puisque  $Z_1, \dots, Z_N, W_1, \dots, W_N$  sont des ensembles type-1 intervalle, alors  $Y(Z_1, \dots, Z_N, W_1, \dots, W_N)$  est aussi un ensemble type-1 intervalle; donc, pour trouver  $Y(Z_1, \dots, Z_N, W_1, \dots, W_N)$  il suffi de calculer les deux points limites  $y_l$  et  $y_r$  de cet intervalle.
2. soit  $y = \frac{\sum_{l=1}^N z_l w_l}{\sum_{l=1}^N w_l}$ , puisque  $w_l \geq 0$  pour tout  $l$ , la dérivée partielle  $\partial y / \partial z_k = w_k / \sum_{l=1}^N w_l \geq 0$ ; par conséquent,  $y$  est toujours croissant lorsque  $z_k$  est croissant, et pour n'importe quelle combinaison  $\{w_1, \dots, w_N\}$  tel que  $w_l \in W_l$ ,  $y$  est maximisé que lorsque  $z_l = c_l + s_l$  pour  $l=1, \dots, N$ , et  $y$  sera minimisé que lorsque  $z_l = c_l - s_l$  pour  $l=1, \dots, N$ .  $y_r$  est, donc, obtenu par la maximisation de

$$\left[ \frac{\sum_l w_l (c_l + s_l)}{\sum_l w_l} \right], \text{ sous les contraintes } w_l \in W_l \text{ pour } l=1, \dots, N; \text{ et } y_l \text{ est obtenu en}$$

$$\text{minimisant } \left[ \frac{\sum_l w_l (c_l - s_l)}{\sum_l w_l} \right], \text{ sous les contraintes } w_l \in W_l \text{ pour } l=1, \dots, N.$$

D'après ces deux observations, il est clair que pour calculer  $Y(Z_1, \dots, Z_N, W_1, \dots, W_N)$ , nous aurons besoin seulement de considérer l'optimisation (maximisation/minimisation) de la moyenne pondérée

$$y(w_1, \dots, w_N) = \frac{\sum_{l=1}^N z_l w_l}{\sum_{l=1}^N w_l} \quad (\text{I.68})$$

sous les contraintes  $w_l \in [h_l - \Delta_l, h_l + \Delta_l]$ , où  $h_l \geq \Delta_l$ , pour  $l=1, \dots, N$ . Comme il a été expliqué dans l'observation (2), nous allons poser  $z_l = c_l + s_l$  ( $l=1, \dots, N$ ) lorsque nous maximisons  $y(w_1, \dots, w_N)$  et  $z_l = c_l - s_l$  ( $l=1, \dots, N$ ) lorsque nous minimisons  $y(w_1, \dots, w_N)$ .

La dérivation de  $y(w_1, \dots, w_N)$  par rapport à  $w_k$  nous donne

$$\frac{\partial}{\partial w_k} y(w_1, \dots, w_N) = \frac{\partial}{\partial w_k} \left[ \frac{\sum_{l=1}^N z_l w_l}{\sum_{l=1}^N w_l} \right] = \frac{z_k - y(w_1, \dots, w_N)}{\sum_{l=1}^N w_l} \quad (\text{I.69})$$

Puisque  $\sum_{l=1}^N w_l > 0$ , il est donc clair de (I.69) que

$$\frac{\partial}{\partial w_k} y(w_1, \dots, w_N) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \text{ si } z_k \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} y(w_1, \dots, w_N) \quad (\text{I.70})$$

Mettre  $\partial / \partial w_k$  égale à zéro ne donne pas trop d'information sur la valeur de  $w_k$  quand  $y(w_1, \dots, w_N)$  est maximisé ou minimisé, parce que

$$y(w_1, \dots, w_N) = z_k \Rightarrow \frac{\sum_l z_l w_l}{\sum_l w_l} = z_k \Rightarrow \frac{\sum_{l \neq k} z_l w_l}{\sum_{l \neq k} w_l} = z_k \quad (\text{I.71})$$

On remarque que  $w_k$  n'apparaît pas dans (I.71). Cependant l'équation (I.70) nous donne la direction dans laquelle  $w_k$  doit être changé pour augmenter ou diminuer  $y(w_1, \dots, w_N)$ . De (I.70) nous remarquons que :

- Si  $z_k > y(w_1, \dots, w_N)$ , alors  $y(w_1, \dots, w_N)$  croît avec la croissance de  $w_k$
- Si  $z_k < y(w_1, \dots, w_N)$ , alors  $y(w_1, \dots, w_N)$  croît avec la décroissance de  $w_k$ .

On rappelle que la valeur maximale que peut atteindre  $w_k$  est  $h_k + \Delta_k$ , et la valeur minimale qu'elle peut atteindre est  $h_k - \Delta_k$ . Par conséquent, d'après ce qu'on a dit dans le paragraphe précédent, on trouve que  $y(w_1, \dots, w_N)$  atteint sa valeur maximale si :

- $w_k = h_k + \Delta_k$  pour les valeurs de  $k$  pour lesquelles  $z_k > y(w_1, \dots, w_N)$ , et
- $w_k = h_k - \Delta_k$  pour les valeurs de  $k$  pour lesquelles  $z_k < y(w_1, \dots, w_N)$ .

Similairement,  $y(w_1, \dots, w_N)$  atteint sa valeur minimale si :

- $w_k = h_k - \Delta_k$  pour les valeurs de  $k$  pour lesquelles  $z_k > y(w_1, \dots, w_N)$ , et
- $w_k = h_k + \Delta_k$  pour les valeurs de  $k$  pour lesquelles  $z_k < y(w_1, \dots, w_N)$ .

La valeur maximale de  $y(w_1, \dots, w_N)$  peut alors être obtenue en utilisant la procédure itérative suivante (cet algorithme a été développé par Karnik-Mendel [Kar-01-b] :

Nous posons  $z_l = c_l + s_l$  ( $l = 1, \dots, N$ ) ; et supposons que les  $z_l$  sont arrangés dans l'ordre ascendant  $z_1 < z_2 < \dots < z_N$ , alors

1. poser  $w_l = h_l$  pour  $l = 1, 2, \dots, N$  et calculer  $y' = y(h_1, \dots, h_N)$  en utilisant (I.68).
2. trouver  $K$  ( $1 \leq K \leq N - 1$ ) tel que  $z_K \leq y' \leq z_{K+1}$ .
3. poser  $w_l = h_l - \Delta_l$  pour  $l \leq K$  et  $w_l = h_l + \Delta_l$  pour  $l \geq K + 1$  et calculer  $y'' = y(h_1 - \Delta_1, \dots, h_K - \Delta_K, h_{K+1} + \Delta_{K+1}, \dots, h_N + \Delta_N)$  en utilisant (I.68).
4. vérifier si  $y'' = y'$  ; si oui,  $y''$  est la valeur maximale de  $y(w_1, \dots, w_N)$  ; si non, aller à l'étape 5.
5. poser  $y' = y''$ , revenir à l'étape 2.

Il peut être facilement montré que cette procédure itérative converge dans  $N$  itérations au plus, où une itération consiste à exécuter les étapes 2) à 5).

Le minimum de  $y(w_1, \dots, w_N)$ , peut être obtenu en utilisant une procédure similaire à celle décrite précédemment (recherche du maximum). Il y a seulement deux changements à faire :

- ❖ Poser  $z_l = c_l - s_l$  pour  $l = 1, 2, \dots, N$  ; et

- ❖ Dans l'étape 3 nous devons poser  $w_l = h_l + \Delta_l$  pour  $l \leq K$  et  $w_l = h_l - \Delta_l$  pour  $l \geq K + 1$  afin de calculer le centroïde

$$y'' = y(h_1 + \Delta_1, \dots, h_K + \Delta_K, h_{K+1} - \Delta_{K+1}, \dots, h_N - \Delta_N).$$

### I.5.1. Réduction de type pour les systèmes flous type-2 intervalle

Pour un système flou type-2 intervalle, le degré d'activation ainsi que l'ensemble de sortie, correspondant à chaque règle, sont des ensembles flou type-1 intervalles.

Méthode de réduction de type	Définition de $y_l^i$ et $y_r^i$	Définition de $\underline{f}^i$ et $\bar{f}^i$	M	L'utilisation de la l'algorithme de Karnik et Mendel
Centre des ensembles	les points limites gauche et droite de l'ensemble conséquent du $i^{\text{ème}}$ règle	Le degré d'activation supérieur et inférieur de la $i^{\text{ème}}$ règle	Nombre des règles	$c_l = (L_l^c + R_l^c)/2$ $s_l = (L_l^c - R_l^c)/2$ . $h_i = (L_i + R_i)/2$ $\Delta_i = (R_i - L_i)/2$ .
Centre de gravité (centroid)	$y_l^i = y_r^i = y^i$ le $i^{\text{ème}}$ point dans l'univers de discours discrétisé	Le degré d'appartenance supérieur et inférieur du $i^{\text{ème}}$ point du domaine de la sortie, discrétisé	Le nombre des points de discrétisation	$y_i \equiv c_l, s_l = 0$ , $h_i = (L_i + R_i)/2$ et $\Delta_i = (R_i - L_i)/2$
Hauteur	$y_l^i = y_r^i = y^i$ un point dans le domaine de l'ensemble conséquent de la $i^{\text{ème}}$ règle, généralement choisit comme le point ayant le plus haut degré d'appartenance primaire dans fonction d'appartenance principale de la sortie	Le degré d'activation supérieur et inférieur de la $i^{\text{ème}}$ règle	Nombre des règles	$y_i \equiv c_l, s_l = 0$ , $h_i = (L_i + R_i)/2$ et $\Delta_i = (R_i - L_i)/2$

Tableau.I.3 Significations de  $y_l^i, y_r^i, \underline{f}^i, \bar{f}^i$  et  $M$  pour (I.3)

Nous avons vu que la formule de réduction de type pour un système flou type-2 intervalle et donné par :

$$Y_{TR}(x) = \int_{y^1 \in [y_l^1, y_r^1]} \cdots \int_{y^M \in [y_l^M, y_r^M]} \int_{f^1 \in [\underline{f}^1, \bar{f}^1]} \cdots \int_{f^M \in [\underline{f}^M, \bar{f}^M]} 1 \left/ \frac{\sum_{i=1}^M f^i y^i}{\sum_{i=1}^M f^i} \right. = [y_l(x), y_r(x)] \quad (I.72)$$

Le Tableau.I.3 donne les définitions de  $y_l^i, y_r^i, \underline{f}^i, \bar{f}^i$  et  $M$  de (I.72), ainsi que la manière d'utiliser l'algorithme de Karnik-Mendel pour chaque méthode de réduction de type. Notant que l'intervalle  $[L_i, R_i]$  présente le domaine de l'ensemble de sortie  $\mu_B(y_i)$ . Dans le cas de réduction de type par la méthode des centre des ensembles, la procédure itérative sera appliqué deux fois, une fois pour calculer le centre de gravité  $C_l = [L_l^c, R_l^c]$  de chaque ensemble conséquent de type-2 , et une autre pour calculer le degré d'activation de chaque règle.

**Exemple 5 [Kar-99]**

Dans cet exemple, nous allons illustrer l'utilisation des différentes méthodes de la réduction de type pour un système flou type-2 intervalle. On considère un système flou type-2 SISO (une entrée et une sortie) utilisant le produit t-norme et le produit d'inférence, décrit par des règles de la forme :  $R^l : \text{SI } x \text{ est } F^l \text{ ALORS } y \text{ est } G^l$ , où  $x, y \in [0,10]$ .

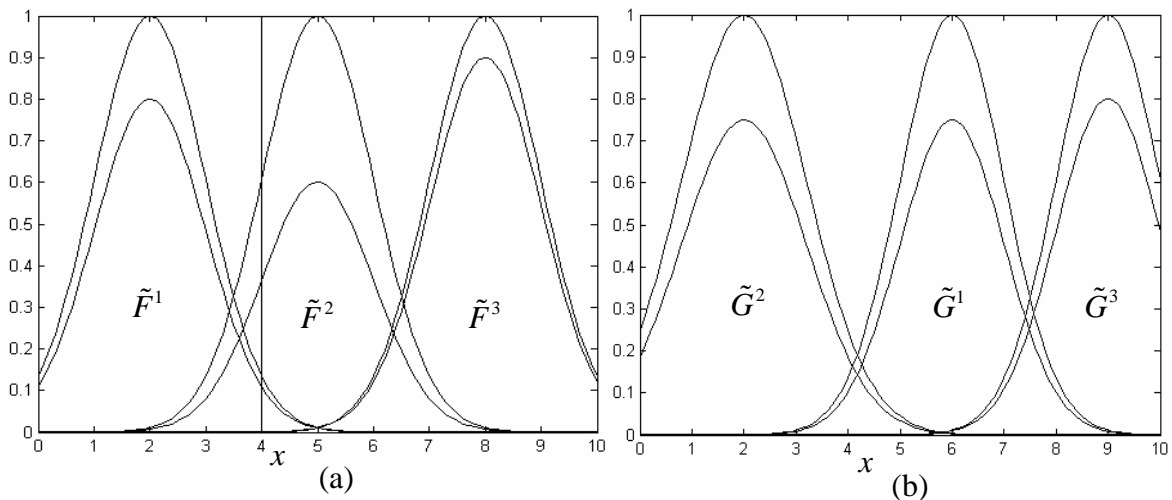


Fig.I.18. a) Les ensembles antécédents, b) Les ensembles conséquents.

La figI.18.(a) et figI.18.(b) représentent les ensembles antécédents et conséquents, respectivement. Chacun de ces ensembles peut être présenté par deux Gaussiennes de même

moyenne  $m$  et même écart-type  $\sigma$ , mais avec des différentes hauteurs  $s$ . La hauteur maximale est égale à l'unité, et la hauteur minimale est égale à  $s$ . Le degré d'appartenance d'une entrée arbitraire  $x'$  est un intervalle  $\left[ s \cdot \exp\left(-0.5(x'-m)^2/\sigma^2\right), \exp\left(-0.5(x'-m)^2/\sigma^2\right) \right]$ . Les paramètres des ensembles antécédents et conséquents sont donnés dans le tableau.I.4.

	Antécédents			Conséquents		
	$\tilde{F}^1$	$\tilde{F}^2$	$\tilde{F}^3$	$\tilde{G}^1$	$\tilde{G}^2$	$\tilde{G}^3$
$m$	2	5	8	6	2	9
$\sigma$	1	1	1	1	1.2	1
$s$	0.8	0.6	0.9	0.75	0.75	0.8

Tableau.I.4. Paramètre des fonctions d'appartenances pour l'exemple 4.

On applique une entrée  $x=4$  (montrée sur la figure I.18(a)). Cette entrée possède deux appartenances non nulles deux dans prémisses  $1, 2$ , par conséquent deux règles sont activées. La figure.I.19 montre l'ensemble de type réduit calculé par la méthode du centre de gravité. Le tableau.I.5 montre les résultats de la réduction de type, par les trois méthodes, qui sont des intervalles représentés par leurs centres et ouvertures.

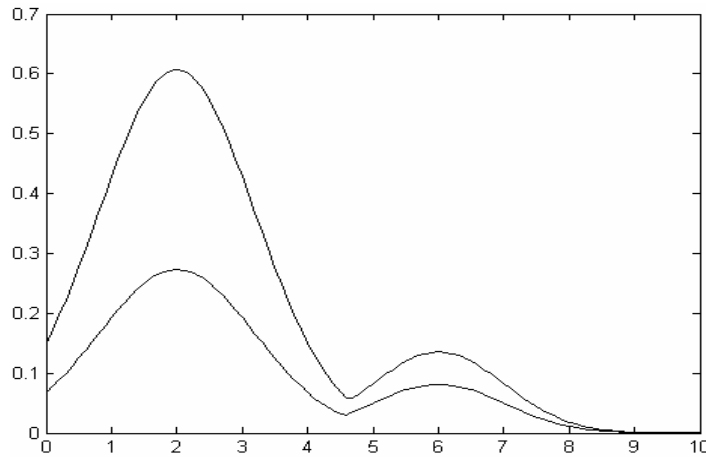


Fig.I.19. Ensemble résultant  $\tilde{B}$  trouvé par la méthode du centre de gravité.

### I.6. Approximation par les systèmes flous

L'interprétation géométrique que nous avons eu du bloc d'inférence du système flou (fig.1.12, fig.1.13) ne décrit pas ce système complètement, pour cela on a besoin d'une formule mathématique qui décrit le chemin de l'entrée  $x$  jusqu'à la sortie  $y=f(x)$ . Pour écrire

cette formule on doit faire un choix du fuzzificateur, fonction d'appartenance, la méthode d'inférence et la méthode de défuzzification.

Méthode de réduction de type	Centre de l'ensemble type réduit	ouverture de l'ensemble type réduit
Centre de gravité	2.8176	0.4917
La hauteur	2.9026	0.4281
Centre des ensembles	2.9462	0.3560

Tableau.I.5. Résultats des différentes méthodes de réduction du type.

La classe des systèmes flous, utilisant la fuzzification par singleton, le produit d'inférence et la défuzzification par centre de gravité, est la plus utilisée et peut la représenté par [Run-94] [Sug-88]

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left( \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i) \right)}{\sum_{l=1}^M \left( \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i) \right)} \quad (I.73)$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  le vecteur d'entrée,  $\bar{y}$  représentent les centres des fonctions d'appartenance des conséquences,  $\mu_{F_i^l}(x_i)$  correspond au fonction d'appartenance de l'entrée  $x_i$  de la règle  $l$ , et la conjonction 'ET' dans les prémisses, est réalisées par le produit.

Le système flou (1.73) peut être réécrit sous la forme suivante

$$f(x) = \theta^T \xi(x) \quad (I.74)$$

où  $\theta = (\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^M)^T$  est un vecteur de paramètres et  $\xi(x) = (\xi^1(x), \dots, \xi^M(x))^T$  est un vecteur régressif avec  $\xi^l(x)$  comme régresser (appelé aussi fonction floue de base). Alors on défini les fonctions floues de base (FBF) comme :

$$\xi^l(x) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i)}{\sum_{l=1}^M \left( \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i) \right)} \quad (I.75)$$

Si  $\mu_{F_i^l}(x_i)$  sont des fonctions d'appartenance gaussiennes, le système représenté par (1.73) sera écrite sous la forme suivante :



$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \prod_{i=1}^n \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right)}{\sum_{i=1}^M \prod_{i=1}^n \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right)} \quad (I.76)$$

où les paramètres  $\bar{y}^l$ ,  $\bar{x}_i^l$ ,  $\sigma_i^l > 0$  sont des paramètres réglables, avec  $\bar{x}_i^l$  sont les centres des gaussiennes et  $\sigma_i^l$  leurs écarts type.

Il a été prouvé par Wang dans [Wan-92-a] que ces systèmes (I.76) sont des approximateurs universels, capables d'approximer toute fonction réelle continue sur un ensemble compact U avec une précision arbitraire donnée.

Pour le cas des systèmes flous type-2, la propriété de l'approximation universelle est conservée et (I.74) reste valable avec une phase supplémentaire de réduction de type. Dans notre thèse on utilisera les système flou type-2 intervalle avec une réduction de type par le centre des ensembles représentée par (I.72).

On observe que chaque ensemble de (I.72) est un intervalle type-1 qui implique que  $Y_{TR}$  est un intervalle type-1 qui peut être déterminé par ses deux points limites. Le maximum de  $y$  est  $y_r$ , et son minimum est  $y_l$ ;  $\forall y \in y_{TR}$ ,  $y$  peut être écrit comme :

$$y = \frac{\sum_{i=1}^M f^i y^i}{\sum_{i=1}^M f^i} \quad (I.77)$$

Le point  $y_r$  est associé seulement avec  $y_r^i$ , de même  $y_l$  est associé seulement avec  $y_l^i$ . D'après l'algorithme Karnik et Mendel [Lia-00-a], les points  $y_r$  et  $y_l$  dépendent seulement d'une mixture des valeurs  $\bar{f}^i$  ou  $\underline{f}^i$ , quand  $f^i \in F^i = [\underline{f}^i, \bar{f}^i]$ , dans ce cas, chaque point  $y_r$  et  $y_l$  peut être représenté par un développement en FBF [Kar-98] :

$$y_l = \frac{\sum_{i=1}^M f_l^i y_f^i}{\sum_{i=1}^M f_l^i} = \sum_{i=1}^M y_l^i \xi_l^i \quad (I.78)$$

où  $f_l^i$  représente le degré d'activation (soit  $\underline{f}^i$  ou  $\bar{f}^i$ ) contribuant au point limite gauche  $y_l$ , et  $\xi_l^i$  exprime la FBF, donner par :

$$\xi_l^i = \frac{f_l^i}{\sum_{i=1}^M f_l^i} \quad (I.79)$$

Similairement

$$y_r = \frac{\sum_{i=1}^M f_r^i y_f^i}{\sum_{i=1}^M f_r^i} = \sum_{i=1}^M y_r^i \xi_r^i \quad (\text{I.80})$$

où  $f_r^i$  représente le degré d'activation (soit  $\underline{f}^i$  ou  $\overline{f}^i$ ) contribuant au point limite droite  $y_r$ , et  $\xi_r^i$  exprime la FBF, donner par :

$$\xi_r^i = \frac{f_r^i}{\sum_{i=1}^M f_r^i} \quad (\text{I.81})$$

On conclut qu'un système flou type-1 est caractérisé par un seul développement en FBF [Wan-92-a], alors qu'un système flou type-2 intervalle est caractérisé par deux développements en FBF. Il est à noter qu'un système flou type-2 de forme générale est caractérisé par un nombre énorme des développements en FBF [Lia-00-a], ce qui signifie que les calculs sont largement réduits par l'utilisation des systèmes flous type-2 intervalle.

## I.7. Conclusion

Dans ce chapitre plusieurs notions de base de la théorie de la logique floue type-1 sont présentées ainsi leur extension à la logique floue type-2 telle que, les propriétés des ensembles flous, les opérations sur ces ensembles, les relations floues et leur composition.

La structure des systèmes flous type-1 et type-2 ainsi le fonctionnement de leurs différents blocs constituant sont détaillés. Le bloc de défuzzification dans le cas des systèmes flous type-2 contient un module supplémentaire qui consiste en une réduction de type. Différentes méthodes de réalisation de cette réduction de type sont exposées.

Dans le chapitre suivant, la propriété d'approximation universelle des systèmes flous sera exploitée pour développer une commande adaptative floue pour des systèmes non linéaires incertains SISO.

## ***CHAPITRE II***

---

***COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE POUR DES  
SYSTEMES MONOVARIABLES NON LINEAIRES  
INCERTAINS***

## COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE POUR DES SYSTEMES MONOVARIABLES NON LINEAIRES INCERTAINS.

### II.1. Introduction

La commande adaptative est une approche où les paramètres du contrôleur sont ajustés on-line afin de maintenir les performances exigées en dépit des (imprévus) changements dans le processus. Elle consiste à identifier un processus et son environnement à partir de quelques mesures entrées-sorties, et d'utiliser ensuite le modèle obtenu pour concevoir la commande.

Le terme de 'système adaptatif' ou 'commande adaptative' a été utilisé depuis 1950, car les méthodes de commande non adaptative conventionnelle exigées que le modèle du système soit connu, et même les méthodes de commande existantes traitent les systèmes linéaires seulement.

Plusieurs méthodes de conception de la commande adaptative ont été introduites, qu'on peut les diviser en deux classes principales [Nar-90], commande adaptative directe qui utilise les systèmes flous comme des régulateurs, et commande adaptative indirecte qui utilise les systèmes flous pour modéliser le processus.

Les systèmes adaptatifs flous ont l'avantage d'être utilisés malgré l'absence de modèle mathématique et les informations linguistiques données par l'expert sont incorporées directement par les règles floues dans le contrôleur.

Dans ce chapitre nous allons voir la manière de construire une commande adaptative floue indirecte, qui utilise une fois les systèmes flous type-1 pour approximer la dynamique des systèmes non linéaire inconnus, et une autre on remplace les systèmes flous type-1 par les systèmes flous type-2. Dans les deux cas les paramètres du contrôleur seront ajustés par une loi d'adaptation munie d'un algorithme de projection. La stabilité du système en boucle fermée est assurée par la synthèse de Lyapunov au sens que tous les signaux soient bornés, à la fin un exemple de simulation sera présenté, pour valider notre structure des deux commandes proposées, et réaliser une étude comparative entre ces deux commandes.

### II.1. Formulation du problème

Considérons le système non linéaire d'ordre  $n$  suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n = f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n)u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

qu'on peut écrire comme :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})u \\ y = x \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions continues inconnues,  $u \in \mathfrak{R}$  et  $y \in \mathfrak{R}$  sont l'entrée et la sortie du système, respectivement, et  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = (x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})^T \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur d'état du système qui est disponible pour la mesure. Pour que (II.1) soit contrôlable, il faut que  $g(x) \neq 0$  pour  $x$  appartenant à une certaine région de contrôlabilité  $U_c \in \mathfrak{R}^n$  ; Puisque  $g(x)$  est continue, nous allons supposer que  $0 < g(x) < \infty$  pour tous  $x \in U_c$ . Dans la littérature de la commande des systèmes non linéaires, ce système est écrit sous la forme normale et possède un degré relatif égal à  $n$ .

### II.2. Objectif de la commande

L'objectif de notre commande est de forcer la sortie du système  $y$  à suivre un signal de référence borné bien déterminé  $y_m(t)$ , sous la contrainte que tous les signaux impliqués soient bornés. Pour cela on détermine une commande par retour d'état  $u = u(x|\theta)$  et une loi d'adaptation pour ajuster le vecteur de paramètres tel que les conditions suivantes soient satisfaites

- i) Le système en boucle fermée doit être stable et robuste dans le sens où toutes les variables estimées soient uniformément bornées.
- ii) L'erreur de poursuite,  $e = y_m - y$  doit être la plus petite possible sous les contraintes définies dans (i).

### II.3. Construction du contrôleur adaptatif flou

On considère le système (II.2), si les fonctions  $f$  et  $g$  sont connues et les perturbations externes sont nulles  $d=0$ , alors la loi de commande est :

$$u = \frac{1}{g(x)} \left[ -f(x) + y_m^{(n)} + k^T e \right] \quad (\text{II.3})$$

où  $e = (e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)})^T$ , et  $k = (k_n, \dots, k_1)^T \in \mathfrak{R}$  est choisi de manière que toutes les racines du polynôme  $h(s) = s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_n$  se trouvent dans le demi-plan gauche de l'espace complexe. En remplaçant la commande (II.3) dans le système (II.2) nous obtenons la dynamique de l'erreur suivante :

$$e^{(n)} + k_1 e^{(n-1)} + \dots + k_n e = 0 \quad (\text{II.4})$$

ce qui implique que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  qui est l'objectif principal du contrôleur. Cependant, dans notre cas les fonctions  $f$  et  $g$  sont inconnues, ce qui rend l'approximation de  $f$  et  $g$  nécessaire, pour cela on utilise les systèmes flous qui sont des approximateurs universels (paragraphe I.7). Les fonctions  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  estimées sont donnés par :

$$\hat{g}(x|\theta) = \theta_f^T \xi_f(x) \quad (\text{II.5})$$

$$\hat{f}(x|\theta) = \theta_g^T \xi_g(x) \quad (\text{II.6})$$

où  $\xi_f(x)$  et  $\xi_g(x)$  sont les vecteurs de fonctions floues de base (FBF) qui sont calculées comme suit :

- Conception des systèmes flous utilisés

Dans notre étude on va approximer les fonctions  $f$  et  $g$  par deux types de systèmes flous : système flou type-1 et système flou type-2. La structure de la commande proposée reste la même dans les deux cas, la seule différence réside dans la construction de  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$ .

Comme on l'a vu dans le premier chapitre I (paragraphe I.6), les systèmes flous type-1 sont caractérisés par un seul vecteur des FBF qui nous permet d'obtenir les estimés  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  simultanément, ceci implique que  $\xi_f(x) = \xi_g(x)$  dans le développement de la commande. Les FBF seront données par :

$$\xi^{(l_1, \dots, l_n)}(x) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^{l_i}}(x_i)}{\sum_{l_1=1}^{m_n} \dots \sum_{l_n=1}^{m_1} \left( \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^{l_i}}(x_i) \right)} \quad (\text{II.7})$$

Ces FBF sont rassemblées dans un vecteur  $\xi(x)$  de dimension  $\prod_{i=1}^n m_i$  pour  $l_1=1, 2, \dots, m_1$ ,  $l_n=1, 2, \dots, m_n$ , avec  $m_i$  est le nombre des ensembles flous ayant  $\mu_{F_i^{l_i}}$  comme fonction d'appartenance.

Dans le cas des systèmes flous type-2 la propriété de l'approximation universelle reste valable, avec une phase supplémentaire celle de la réduction de type pour le calcul des

estimés  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  deux vecteurs de FBF  $\xi_f(x)$  et  $\xi_g(x)$  différents sont utilisés [Lia-00-a]. Les systèmes flous type-2 utilisés sont de type intervalle. La réduction de type est réalisée par la méthode de centre des ensembles. Les ensembles de sortie (ensembles type réduits) pour les systèmes  $\hat{f}(x|\theta_f)$  et  $\hat{g}(x|\theta_g)$  sont donnés par des relations similaires à (I.72) comme suit :

$$\hat{F}_{\cos}(\theta_f^1, \dots, \theta_f^M, W_f^1, \dots, W_f^M) = \int_{\theta_f^1} \dots \int_{\theta_f^M} \int_{w_f^1} \dots \int_{w_f^M} 1 / \frac{\sum_{i=1}^M w_f^i \theta_f^i}{\sum_{i=1}^M w_f^i} \quad (\text{II.8})$$

$$\hat{G}_{\cos}(\theta_g^1, \dots, \theta_g^M, W_g^1, \dots, W_g^M) = \int_{\theta_g^1} \dots \int_{\theta_g^M} \int_{w_g^1} \dots \int_{w_g^M} 1 / \frac{\sum_{i=1}^M w_g^i \theta_g^i}{\sum_{i=1}^M w_g^i} \quad (\text{II.9})$$

où  $w_f^i$  et  $w_g^i$  sont les intervalles d'activations (degré d'appartenance) correspondants à la  $i^{\text{ème}}$  règle des systèmes flous type-2  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$ , respectivement,  $\theta_f^i$  et  $\theta_g^i$  sont les centres des ensembles conséquents qui représentent aussi les paramètres ajustables de notre commande adaptative.

Pour calculer les sorties des systèmes flous type-2  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$ , on doit passer par l'étape de défuzzification qui détermine la sortie numérique correspondante aux ensembles type réduits  $\hat{F}_{\cos}$  et  $\hat{G}_{\cos}$  respectivement. Puisque les systèmes utilisés sont de type intervalle, la défuzzification revient à calculer les moyennes arithmétiques de  $\hat{f}_l$  et  $\hat{f}_r$  pour  $\hat{f}$ , et de  $\hat{g}_l$  et  $\hat{g}_r$  pour  $\hat{g}$  comme suit :

$$\hat{f} = \frac{\hat{f}_l + \hat{f}_r}{2} \quad (\text{II.10})$$

$$\hat{g} = \frac{\hat{g}_l + \hat{g}_r}{2} \quad (\text{II.11})$$

$\hat{f}_l$  et  $\hat{g}_l$  sont obtenus par (I.78), et  $\hat{f}_r$  et  $\hat{g}_r$  par (1.80) comme suit :

$$\hat{f}_l = \frac{\sum_{i=1}^M w_{fl}^i \theta_f^i}{\sum_{i=1}^M w_{fl}^i} = \sum_{i=1}^M \theta_f^i \xi_{fl}^i = \theta_f^T \xi_{fl}(x) \quad (\text{II.12})$$

$$\hat{f}_r = \frac{\sum_{i=1}^M w_{fr}^i \theta_f^i}{\sum_{i=1}^M w_{fr}^i} = \sum_{i=1}^M \theta_f^i \xi_{fr}^i = \theta_f^T \xi_{fr}(x) \quad (\text{II.13})$$

$$\hat{g}_l = \frac{\sum_{i=1}^M w_{gl}^i \theta_g^i}{\sum_{i=1}^M w_{gl}^i} = \sum_{i=1}^M \theta_g^i \xi_{gl}^i = \theta_g^T \xi_{gl}(\mathbf{x}) \quad (\text{II.14})$$

$$\hat{g}_r = \frac{\sum_{i=1}^M w_{gr}^i \theta_g^i}{\sum_{i=1}^M w_{gr}^i} = \sum_{i=1}^M \theta_g^i \xi_{gr}^i = \theta_g^T \xi_{gr}(\mathbf{x}) \quad (\text{II.15})$$

où  $\xi_{fl}^i$  et  $\xi_{gl}^i$  sont données par (I.79),  $\xi_{fr}^i$  et  $\xi_{gr}^i$  sont données par (I.81) comme suit :

$$\xi_{fl}^i = \frac{w_{fl}^i}{\sum_{i=1}^M w_{fl}^i} \quad (\text{II.16})$$

$$\xi_{fr}^i = \frac{w_{fr}^i}{\sum_{i=1}^M w_{fr}^i} \quad (\text{II.17})$$

$$\xi_{gl}^i = \frac{w_{gl}^i}{\sum_{i=1}^M w_{gl}^i} \quad (\text{II.18})$$

$$\xi_{gr}^i = \frac{w_{gr}^i}{\sum_{i=1}^M w_{gr}^i} \quad (\text{II.19})$$

On remplace (II.12) et (II.13) dans (II.10), et (II.14) et (II.15) dans (II.11) on obtient

$$\hat{f} = \frac{\theta_f^T \xi_{fl} + \theta_f^T \xi_{fr}}{2} = \theta_f^T \left[ \frac{\xi_{fl} + \xi_{fr}}{2} \right] = \theta_f^T \xi_f(\mathbf{x}) \quad (\text{II.20})$$

$$\hat{g} = \frac{\theta_g^T \xi_{gl} + \theta_g^T \xi_{gr}}{2} = \theta_g^T \left[ \frac{\xi_{gl} + \xi_{gr}}{2} \right] = \theta_g^T \xi_g(\mathbf{x}) \quad (\text{II.21})$$

où  $\xi_f = (\xi_{fl} + \xi_{fr})/2$  est le vecteur moyen des FBF de  $\hat{f}$  et  $\xi_g = (\xi_{gl} + \xi_{gr})/2$  est le vecteur moyen des FBF de  $\hat{g}$ .

L'algorithme de Karnik et Mendel présenté dans le chapitre I (paragraphe I. 5) est utilisé pour calculer  $w_{fr}^i$ ,  $w_{fl}^i$ ,  $w_{gr}^i$  et  $w_{gl}^i$  et construire les FBF  $\xi_{fl}$ ,  $\xi_{fr}$ ,  $\xi_{gl}$  et  $\xi_{gr}$ .

En utilisant (II.5) et (II.6), la loi de commande (II.3) devient :

$$u_c = \frac{1}{\hat{g}(\mathbf{x}|\theta_g)} \left[ -\hat{f}(\mathbf{x}|\theta_f) + y_m^{(n)} + k^T \mathbf{e} \right] \quad (\text{II.22})$$

qu'on appelle dans la littérature de la commande adaptative, la commande équivalente [Sas-89].



Par l'application de (II.22) au système (II.2), on obtient après quelques simples manipulations l'équation d'erreur suivante :

$$e^{(n)} = -k^T e + \left[ \hat{f}(x|\theta_f) - f(x) \right] + \left[ \hat{g}(x|\theta_g) - g(x) \right] u_c \quad (\text{II.23})$$

qui peut être écrite dans l'espace d'état comme :

$$\dot{e} = A_c e + b_c \left[ \hat{f}(x|\theta_f) - f(x) \right] + \left[ \hat{g}(x|\theta_g) - g(x) \right] u_c \quad (\text{II.24})$$

où

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & -k_1 \end{bmatrix}, b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

Puisque  $A_c$  est une matrice stable, il existe une matrice  $P$  symétrique définie positive  $n \times n$  unique qui satisfait l'équation de Lyapunov [Slo-99] :

$$A_c^T P + P A_c = -Q \quad (\text{II.26})$$

où  $Q$  est une matrice  $n \times n$  définie positive arbitraire.

Soit la fonction de Lyapunov  $V_e = \frac{1}{2} e^T P e$ , en utilisant (II.24) et (II.26) on a :

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= \frac{1}{2} \dot{e}^T P e + \frac{1}{2} e^T P \dot{e} \\ &= -\frac{1}{2} e^T Q e + e^T P b_c \times \left[ \left( \hat{f}(x|\theta_f) - f(x) \right) + \left( \hat{g}(x|\theta_g) - g(x) \right) u_c \right] \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

Donc, nous devons avoir  $\dot{V}_e \leq 0$  lorsque  $V_e$  dépasse une certaine constante  $\tilde{V}$ . Mais d'après (II.27) on remarque qu'il est difficile de concevoir  $u_c$  pour que le dernier terme de (II.27) soit négatif.

#### II.4. Commande de supervision

Pour assurer que  $\dot{V}_e \leq 0$  lorsque  $V_e$  dépasse une certaine constante  $\tilde{V}$ , on ajoute un autre terme de commande  $u_s$ , appelé la commande de supervision, ce qui donne :

$$u = u_c + u_s \quad (\text{II.28})$$

Maintenant, on détermine  $u_s$  afin que  $\dot{V}_e \leq 0$  quand  $V_e > \tilde{V}$ . On remplace (II.28) dans (II.2) en utilisant les mêmes manipulations pour obtenir (II.24). L'équation de l'erreur deviendra :

$$\dot{e} = A_c e + b_c \left[ \hat{f}(x|\theta_f) - f(x) \right] + \left[ \left( \hat{g}(x|\theta_g) - g(x) \right) u_c - g(x) u_s \right] \quad (\text{II.29})$$

L'utilisation de (II.29) et (II.26) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= -\frac{1}{2}e^T Qe + e^T P b_c \times \left[ \left( \hat{f}(x|\theta_f) - f(x) \right) + \left( \hat{g}(x|\theta_g) - g(x) \right) u_c - g(x) u_s \right] \\ &\leq -\frac{1}{2}e^T Qe + |e^T P b_c| \times \left[ \left| \hat{f}(x|\theta_f) \right| + |f(x)| + \left| \hat{g}(x|\theta_g) u_c \right| + |g(x) u_c| \right] - e^T P b_c g(x) u_s \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Pour définir  $u_s$ , telle que (II.30) soit non positive, on a besoin de connaître les bornes de  $f$  et  $g$ , pour cela on considère la supposition suivante :

### Supposition

Considérons les fonctions  $f^U(x)$ ,  $g^U(x)$  et  $g_L(x)$  telles que  $|f(x)| \leq f^U(x)$  et  $g_L(x) \leq g(x) \leq g^U(x)$  pour  $x \in U_c$ , où  $f^U(x) < \infty$ ,  $g^U(x) < \infty$  et  $g_L(x) > 0$  pour  $x \in U_c$ .

En se basant sur  $f^U$ ,  $g^U$  et  $g_L$  et par l'observation de (II.30), on choisit  $u_s$  comme suit :

$$u_s = \begin{cases} \text{sgn}(e^T P b_c) \frac{1}{g_L(x)} \times \left[ \left| \hat{f}(x|\theta_f) \right| + f^U(x) + \left| \hat{g}(x|\theta_g) u_c \right| + |g^U(x) u_c| \right] & V_e > \tilde{V} \\ 0 & V_e < \tilde{V} \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

La commande de supervision  $u_s$  est non nulle quand  $V_e > \tilde{V}$ , et la valeur de  $\tilde{V}$  est généralement grande, ce qui fait que  $u_s$  joue le rôle d'une commande de protection plus qu'une commande active. Si  $x$  a un bon comportement, au sens où  $V_e$  n'est pas trop grande, la commande  $u$  (II.28) devient la commande floue  $u_c$  (II.22).

On remplace (II.31) dans (II.30) quand  $V_e > \tilde{V}$ , on trouve que :

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &\leq -\frac{1}{2}e^T Qe + |e^T P b_c| \times \left[ \left| \hat{f} \right| + |f| + \left| \hat{g} u_c \right| + |g u_c| \right] - \frac{g}{g_L} \times \left( \left| \hat{f} \right| + f^U + \left| \hat{g} u_c \right| + |g^U u_c| \right) \\ &\leq -\frac{1}{2}e^T Qe \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Le résultat obtenu dans (II.32) prouve que l'utilisation de la commande (II.28), où  $u_c$  est donnée par (II.22) et  $u_s$  par (II.31), garantie que  $V_e \leq \tilde{V} < \infty$ . Puisque  $P$  est définie positive, et  $V_e$  est bornée, alors  $e$  est bornée, ce qui implique que l'état  $x$  est aussi borné.

## II.5. Lois d'adaptation

Dans ce qui suit nous allons remplacer  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  par des systèmes flous bien spécifiés (II.5) et (II.6), et développer une loi d'adaptation qui ajuste les paramètres  $\theta_f$  et  $\theta_g$  pour but de forcer l'erreur de poursuite à converger vers zéro. On définit les paramètres optimaux  $\theta_f^*$  et  $\theta_g^*$  par :

$$\theta_f^* = \arg \min_{\theta_f \in \Omega_f} \left[ \sup_{x \in U_c} \left| \hat{f}(x | \theta_f) - f(x) \right| \right] \quad (\text{II.33})$$

$$\theta_g^* = \arg \min_{\theta_g \in \Omega_g} \left[ \sup_{x \in U_c} \left| \hat{g}(x | \theta_g) - g(x) \right| \right] \quad (\text{II.34})$$

où  $\Omega_f$  et  $\Omega_g$  sont des ensembles compacts auxquels  $\theta_f$  et  $\theta_g$  doivent appartenir, respectivement. Ces ensembles sont définis comme :

$$\Omega_f = \{ \theta_f : |\theta_f| < M_f \} \quad (\text{II.35})$$

$$\Omega_g = \{ \theta_g : |\theta_g| < M_g \} \quad (\text{II.36})$$

où  $M_f$  et  $M_g$  sont des constantes positives spécifiées par l'expert.

On définit l'erreur d'approximation minimale par :

$$w = \left( \hat{f}(x | \theta_f^*) - f(x) \right) + \left( \hat{g}(x | \theta_g^*) - g(x) \right) u_c \quad (\text{II.37})$$

alors l'équation de l'erreur (II.29) peut être écrite comme :

$$\dot{e} = A_c e - b_c g(x) u_s + b_c \times \left[ \hat{f}(x | \theta_f) - \hat{f}(x | \theta_f^*) + \left( \hat{g}(x | \theta_g) - \hat{g}(x | \theta_g^*) \right) u_c + w \right] \quad (\text{II.38})$$

Puisque  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  sont des systèmes flous définis par (II.5) et (II.6) respectivement, la dynamique d'erreur (II.38) peut être réécrite comme :

$$\dot{e} = A_c e - b_c g(x) u_s + b_c w + b_c \times \left[ \phi_f^T \xi_f(x) + \phi_g^T \xi_g(x) u_c \right] \quad (\text{II.39})$$

où  $\phi_f = \theta_f - \theta_f^*$ ,  $\phi_g = \theta_g - \theta_g^*$ , et  $\xi_f(x)$ ,  $\xi_g(x)$  sont les fonctions floues de base (FBF). On considère maintenant la fonction de Lyapunov :

$$V = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2\gamma_1} \phi_f^T \phi_f + \frac{1}{2\gamma_2} \phi_g^T \phi_g \quad (\text{II.40})$$

où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ces des constantes positives. En prenant compte de (II.26) et que  $\dot{\phi}_f = \dot{\theta}_f$  et  $\dot{\phi}_g = \dot{\theta}_g$ , la dérivé de  $V$  par rapport au temps est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\frac{1}{2} e^T Q e - g(x) e^T P b_c u_s + e^T P b_c w \\ & + \frac{1}{\gamma_1} \phi_f^T \left[ \dot{\theta}_f + \gamma_1 e^T P b_c \xi_f(x) \right] + \frac{1}{\gamma_2} \phi_g^T \left[ \dot{\theta}_g + \gamma_2 e^T P b_c \xi_g(x) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

D'après (II.31) et  $g(x) > 0$ , on a  $g(x) e^T P b_c u_s \geq 0$ . Si on choisit les lois d'adaptation suivantes :

$$\dot{\theta}_f = -\gamma_1 e^T P b_c \xi_f(x) \quad (\text{II.42})$$

$$\dot{\theta}_g = -\gamma_2 e^T P b_c \xi_g(x) \quad (\text{II.43})$$

alors, on peut écrire à partir de (II.41) que :

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} e^T Q e + e^T P b_c w \quad (\text{II.44})$$

L'influence du terme  $e^T P b_c w$  est minime, d'ordre de l'erreur d'approximation minimale qui est trop petite, ce qui signifie que les systèmes flous  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  ont une capacité d'approximer les fonctions non linéaires  $f$  et  $g$  avec exactitude, puisque nous avons vu dans le chapitre I que les systèmes flous sont des approximateurs universels [Wang-92-b], qui peuvent approximer n'importe quelle fonction réelle continue avec une précision arbitraire. Donc, l'utilisation d'un nombre suffisant de règles pour construire  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  permet d'avoir  $w$  très petite. Si  $w$  tend vers 0, alors (II.44) devient :

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} e^T Q e \leq 0 \quad (\text{II.45})$$

### II.5.1. Algorithme de projection

Pour construire les vecteurs de paramètres  $\theta_f$  et  $\theta_g$  appartenant aux ensembles de contraintes  $\Omega_f$  et  $\Omega_g$ , respectivement, les lois d'adaptation (II.42) et (II.43) ne sont pas suffisantes. Pour résoudre ce problème, on utilise l'algorithme de projection des paramètres [Goo-87].

Si les vecteurs de paramètres  $\theta_f$  et  $\theta_g$  appartiennent à  $\Omega_f$  et  $\Omega_g$ , respectivement, ou sont sur la limite de ces ensembles, mais se dirigent à l'intérieur de ces ensembles, l'utilisation des lois d'adaptation (II.42) et (II.43) sont suffisantes. Autrement (si les vecteurs de paramètres sont sur la limite des ensembles de contraintes mais se dirigent à l'extérieur de ces ensemble) on utilise l'algorithme de projection pour modifier les lois d'adaptation (II.42) et (II.43) de manière à ce que les vecteurs de paramètres demeurent dans les ensembles de contraintes. Les lois d'adaptation modifiées sont définies par :

- Pour ajuster le vecteur de paramètres  $\theta_f$  on utilise :

$$\dot{\theta}_f = \begin{cases} -\gamma_1 e^T P b_c \xi_f(x) & \text{si } (|\theta_f| < M_f \text{ ou } |\theta_f| = M_f \text{ et } e^T P b_c \theta_f^T \xi_f(x) \geq 0) \\ P\{-\gamma_1 e^T P b_c \xi_f(x)\} & \text{si } (|\theta_f| = M_f \text{ et } e^T P b_c \theta_f^T \xi_f(x) < 0) \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

où l'opérateur de projection  $P\{*\}$  est défini par :

$$P\{-\gamma_1 e^T P b_c \xi_f(x)\} = -\gamma_1 e^T P b_c \xi_f(x) + \gamma_1 e^T P b_c \frac{\theta_f \theta_f^T \xi_f(x)}{|\theta_f|^2} \quad (\text{II.47})$$

- Pour ajuster le vecteur de paramètres  $\theta_g$  on utilise :

✦ Si un élément  $\theta_{gi}$  de  $\theta_g = \varepsilon$ , alors :

$$\dot{\theta}_{gi} = \begin{cases} -\gamma_2 e^T P b_c \xi_{gi}(x) u_c & \text{si } e^T P b_c \xi_{gi}(x) u_c < 0 \\ 0 & \text{si } e^T P b_c \xi_{gi}(x) u_c \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

où  $\xi_{gi}(x)$  est le  $i^{\text{ème}}$  composant de  $\xi_g(x)$ .

✦ Autrement, on utilise

$$\dot{\theta}_g = \begin{cases} -\gamma_2 e^T P b_c \xi_g(x) u_c & \text{si } (|\theta_g| < M_g \text{ ou } |\theta_g| = M_g \text{ et } e^T P b_c \xi_g(x) u_c \geq 0) \\ P \{-\gamma_2 e^T P b_c \xi_g(x) u_c\} & \text{si } (|\theta_g| = M_g \text{ et } e^T P b_c \xi_g(x) u_c < 0) \end{cases} \quad (\text{II.49})$$

où l'opérateur de projection  $P\{\ast\}$  est défini, dans ce cas par :

$$P\{-\gamma_2 e^T P b_c \xi_g(x)\} = -\gamma_2 e^T P b_c \xi_g(x) + \gamma_2 e^T P b_c \frac{\theta_g \theta_g^T \xi_g(x) u_c}{|\theta_g|^2} \quad (\text{II.50})$$

La loi de commande adaptative floue indirecte est synthétisée selon la structure de la fig.II.1 suivante :

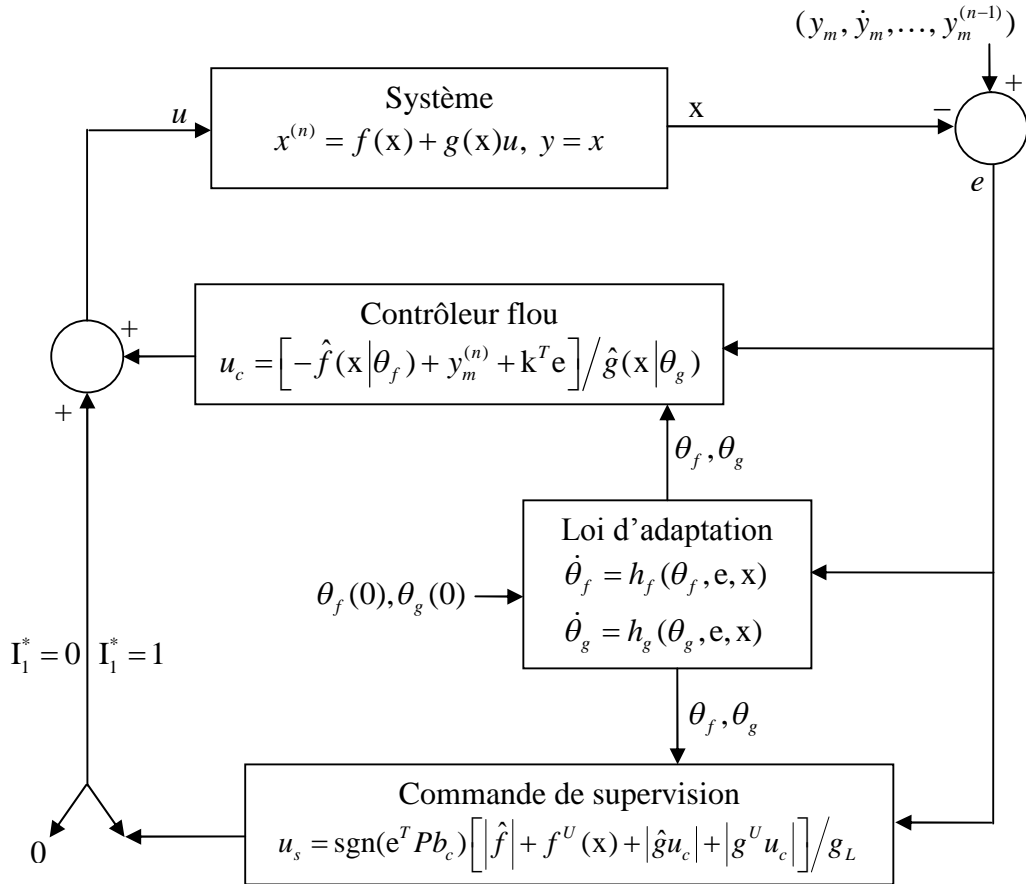


Fig.II.1. Schéma globale de la commande adaptative floue proposée

Les objectifs de cette loi de commande sont explicités par le théorème suivant :

**II.6. Théorème [Wang-96]**

On considère le système (II.1) avec la commande (II.28), où  $u_c$  est donnée par (II.22),  $u_s$  est donnée par (II.31), et  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  sont données par (II.5) et (II.6), respectivement. Soient les vecteurs de paramètres  $\theta_f$  et  $\theta_g$  ajustés par les lois d'adaptation (II.46)-(II.50) et en supposant que la supposition précédente est vraie, alors, la structure de la commande proposée garantie les propriétés suivantes :

i)  $|\theta_f| \leq M_f, \quad |\theta_g| \leq M_g$ , pour tous les éléments de  $\theta_g \geq \varepsilon$

$$|x(t)| \leq |y_m(t)| + \left( \frac{2\tilde{V}}{\lambda_{\min}} \right)^{1/2} \quad (\text{II.51})$$

et

$$\begin{aligned} |u(t)| \leq & \frac{1}{\varepsilon} \left( M_f + |y_m^{(n)}| + |k| \left( \frac{2\tilde{V}}{\lambda_{\min}} \right)^{1/2} \right) \\ & + \frac{1}{g_L(x)} \left[ M_f + |f^U(x)| + \frac{1}{\varepsilon} (M_g + g^U) \times \left( M_f + |y_m^{(n)}| + |k| \left( \frac{2\tilde{V}}{\lambda_{\min}} \right)^{1/2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

Pour tout  $t \geq 0$ , où  $\lambda_{\min}$  est la valeur propre minimale de  $P$ , et  $y_m = (y_m, \dot{y}_m, \dots, y_m^{(n-1)})^T$

ii) 
$$\int_0^t |e(\tau)|^2 d\tau \leq a + b \int_0^t |w(\tau)|^2 d\tau \quad (\text{II.53})$$

Pour tout  $t \geq 0$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes, et  $w$  est l'erreur minimale d'approximation définie par (II.37).

iii) si  $w$  est à carré intégrable, c'est à dire  $\int_0^\infty |w(t)|^2 dt < \infty$ , alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0$ .

**Demonstration**

i)

✦ pour démontrer  $|\theta_f| \leq M_f$  :

Soit  $V_f = \frac{1}{2} \theta_f^T \theta_f$ , si la première ligne de (II.46) est vraie, nous avons soit

$$|\theta_f| \leq M_f \text{ ou } \dot{V}_f = -\gamma_1 e^T P b_c \theta_f^T \xi(x) \leq 0 \text{ quand } |\theta_f| = M_f, \text{ ça veut dire qu'on a}$$

toujours  $|\theta_f| \leq M_f$  ; si la seconde ligne de (II.46) est vraie, on a  $|\theta_f| = M_f$  et

$$\dot{V}_f = -\gamma_1 e^T P b_c \theta_f^T \xi(x) + \gamma_1 e^T P b_c \frac{|\theta_f|^2 \theta_f^T \xi(x)}{|\theta_f|^2} = 0, \text{ qui fait que } |\theta_f| \leq M_f. \text{ Donc, on a}$$

$$|\theta_f| \leq M_f, \forall t \geq 0.$$

✦ De la même manière, on démontre  $|\theta_g| \leq M_g, \forall t \geq 0.$

De (II.48) on remarque si  $\theta_{gi} = \varepsilon$ , alors  $\theta_{gi} \geq 0$ , implique que pour tout élément  $\theta_{gi}$  de  $\theta_g$ .

✦ pour prouver (II.51)

On a prouvé déjà que  $\tilde{V}_e \leq \tilde{V}$  : par conséquent,  $\frac{1}{2} \lambda_{\min} |e|^2 \leq \frac{1}{2} e^T P e \leq \tilde{V}$ , c'est-à-dire,

$$|e| \leq \left( \frac{2\tilde{V}}{\lambda_{\min}} \right)^{1/2}. \text{ Puisque } e = y_m - x, \text{ on a } |x| \leq |y_m| + |e| \leq |y_m| + \left( \frac{2\tilde{V}}{\lambda_{\min}} \right)^{1/2}.$$

✦ pour prouver (II.52)

Puisque  $\hat{f}(x|\theta_f)$  et  $\hat{g}(x|\theta_g)$  sont des moyennes pondérées des éléments de  $\theta_f$  et  $\theta_g$ , respectivement, on a  $|\hat{f}(x|\theta_f)| \leq |\theta_f| \leq M_f$  et  $\hat{g}(x|\theta_g) \geq \varepsilon$  (puisque tous les éléments de  $\theta_g \geq \varepsilon$ ). Donc, de (II.22) on a :

$$|u_c| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left( M_f + |y_m^{(n)}| + |k| \left( \frac{2\tilde{V}}{\lambda_{\min}} \right)^{1/2} \right) \quad (\text{II.54})$$

De (II.31) on a :

$$|u_s| \leq \frac{1}{g_L(x)} \left[ M_f + |f^U(x)| + (M_f + |g^U(x)|) |u_c| \right] \quad (\text{II.55})$$

En combinant (II.54) et (II.55) on trouve (II.52).

ii) De (II.41) et (II.46)- (II.50), on a :

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} e^T Q e - g(x) e^T P b_c u_s + e^T P b_c w \quad (\text{II.56})$$

De (II.31) et  $g(x) > 0$ , on a  $g(x) e^T P b_c u_s \geq 0$ , donc, (II.56) peut être simplifié à

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{1}{2} e^T Q e + e^T P b_c w \\ &\leq -\frac{\lambda_{Q \min} - 1}{2} |e|^2 - \frac{1}{2} \times \left[ |e|^2 - 2e^T P b_c w + |P b_c w|^2 \right] + \frac{1}{2} |P b_c w|^2 \\ &\leq -\frac{\lambda_{Q \min} - 1}{2} |e|^2 + \frac{1}{2} |P b_c w|^2 \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

où  $\lambda_{Q \min}$  est la valeur propre minimale de  $Q$ . l'intégrale des deux membres de (II.57) et en supposant que  $\lambda_{Q \min} > 1$  (puisque  $Q$  est déterminée par le concepteur, nous pouvons choisir  $Q$  librement), on a

$$\int_0^t |e(\tau)|^2 d\tau \leq \frac{2}{\lambda_{Q_{\min}} - 1} [|V(0)| + |V(t)|] + \frac{1}{\lambda_{Q_{\min}} - 1} |Pb_c|^2 \int_0^t |w(\tau)|^2 d\tau \quad (\text{II.58})$$

On définit  $a = \frac{2}{\lambda_{Q_{\min}} - 1} [|V(0)| + \sup_{t \geq 0} |V(t)|]$  et  $b = \frac{1}{\lambda_{Q_{\min}} - 1} |Pb_c|^2$  et par

conséquent (II.58) se réduit à (II.53).

iii) Si  $w \in L_2$ , alors de (II.53) on a  $e \in L_2$  puisque on a prouvé que toutes les variables du membre droite de (II.39) sont bornées. En utilisant le lemme de Barbalat [Goo-87] (Si  $e \in L_2 \cap L_\infty$  et  $\dot{e} \in L_\infty$ , donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0$ ), on trouve  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0$ .

## II.7. Algorithme de conception de la commande adaptative floue

Etape1 : le traitement autonome

- spécifier le gain de commande  $k$ , tel que la matrice  $A_c$  soit stable.
- Choisir une matrice  $Q$  définie positive d'ordre  $n \times n$  et résoudre l'équation de Lyapunov (II.26) en but d'obtenir une matrice symétrique définie positive  $P > 0$ .
- Spécifier les paramètres  $M_f$ ,  $M_g$ ,  $\varepsilon$  et  $\tilde{V}$  en se basant sur des contraintes pratiques.

Etape2 : construction du contrôleur initial

- Définir les  $m_i$  ensembles flous type-1 (type-2)  $F_i^{l_i}$  dont les  $\mu_{F_i^{l_i}}$  sont leurs fonctions d'appartenance qui couvre uniformément tout l'univers de discours  $U_{c_i}$ , avec  $l_i = 1, 2, \dots, m_i$ , et  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Construire les bases de règles pour les systèmes flous  $\hat{f}(x|\theta_f)$  et  $\hat{g}(x|\theta_g)$ , d'une manière que chaque base contienne  $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$  règles. Les parties **SI** des règles comprennent toutes les combinaisons possibles de  $F_i^{l_i}$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . Les bases de règles de  $\hat{f}(x|\theta_f)$  et  $\hat{g}(x|\theta_g)$  ont les formes suivantes :

$$R_f^{(l_1 \dots l_n)} : \text{SI } x_1 \text{ est } F_1^{l_1} \text{ et } \dots \text{ et } x_n \text{ est } F_n^{l_n} \text{ ALORS } \hat{f}(x|\theta_f) \text{ est } G^{(l_1 \dots l_n)} \quad (\text{II.59})$$

$$R_g^{(l_1 \dots l_n)} : \text{SI } x_1 \text{ est } F_1^{l_1} \text{ et } \dots \text{ et } x_n \text{ est } F_n^{l_n} \text{ ALORS } \hat{g}(x|\theta_g) \text{ est } H^{(l_1 \dots l_n)} \quad (\text{II.60})$$

respectivement, où  $H^{(l_1 \dots l_n)}$  et  $G^{(l_1 \dots l_n)}$  sont des ensembles flous dans  $R$

correspondant aux paramètres  $\bar{y}^l$  dans les domaines  $\Omega_f$  et  $\Omega_g$ , respectivement.



- ✦ Construire les fonctions floues de base.
  - Pour les systèmes flous type-1 on utilise (II.7)
  - Pour les systèmes flous type-2 on calcule les FBF par la moyenne des FBF gauche donnée par (II.16) et (II.18) et les FBF droite données par (II.17) et (II.19), ce qui nous permet de concevoir les systèmes flous de (II.5) et (II.6).

Etape3 : l'adaptation en ligne

- ✦ Appliquer la commande (II.28) en boucle fermée au système (II.2), où  $u_c$  est donnée par (II.22) et  $u_s$  est donnée par (II.31).
- ✦ Utiliser les lois d'adaptation (II.46)-(II.50) pour ajuster les vecteurs de paramètres  $\theta_f$  et  $\theta_g$ .

### II.8. Application

Il s'agit de commander un pendule inversé représenté par la fig.II.2, pour suivre une trajectoire de référence  $y_m = \frac{\pi}{30} \sin(t)$ .

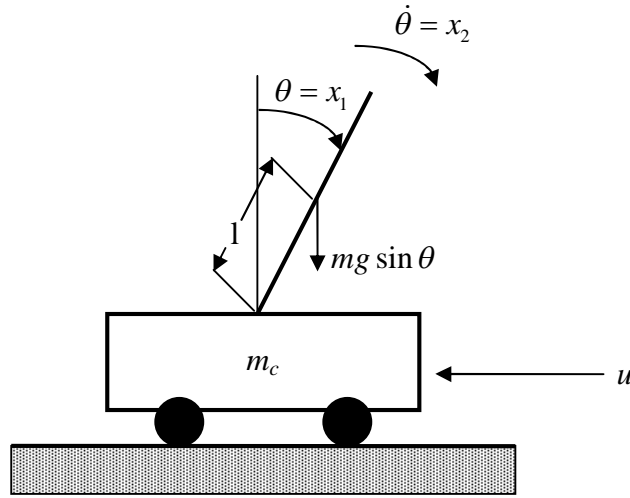


Fig.II.2. Pendule inversé

La dynamique du pendule inversé est décrite par les équations suivantes [Slo-99] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g \sin x_1 - \frac{m l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m}}{l \left( \frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)} + \frac{\cos x_1}{l \left( \frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)} u \end{cases} \quad (\text{II.61})$$

où  $x_1 = \theta$  est l'angle qui fait le pendule avec la verticale,  $x_2 = \dot{\theta}$  est la vitesse angulaire,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  est l'accélération due à la gravité,  $m_c = 1 \text{ Kg}$  est la masse du chariot,  $m = 0.1 \text{ Kg}$  est la masse du pôle,  $l = 0.5 \text{ m}$  est la longueur du demi pôle, et  $u$  est la force appliquée (la commande).

La représentation du pendule inversé (II.61) a la forme de (II.1), donc notre commande adaptative floue, développée précédemment, peut être appliquée à ce système.

Pour appliquer cette commande, on doit préalablement calculer les limites  $f^U$ ,  $g^U$  et  $g_L$  :

$$\begin{aligned}
 |f(x_1, x_2)| &= \left| \frac{g \sin x_1 - \frac{m l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m}}{l \left( \frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)} \right| \\
 &\leq \frac{9.8 + \frac{0.025}{1.1} x_2^2}{\frac{2}{3} - \frac{0.05}{1.1}} \\
 &= 15.78 + 0.0366 x_2^2 = f^U(x_1, x_2)
 \end{aligned} \tag{II.62}$$

$$\begin{aligned}
 |g(x_1, x_2)| &= \left| \frac{\cos x_1 \frac{1}{m_c + m}}{l \left( \frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)} \right| \\
 &\leq \frac{1}{1.1 \left( \frac{2}{3} - \frac{0.05}{1.1} \right)} = 1.46 = g^U(x_1, x_2)
 \end{aligned} \tag{II.63}$$

On exige que  $|x_1| \leq \frac{\pi}{6}$ , alors :

$$|g(x_1, x_2)| \geq \frac{\cos \pi/6}{1.1 \left( \frac{2}{3} - \frac{0.05}{1.1} \cos^2 \pi/6 \right)} = 1.12 = g_L(x_1, x_2) \tag{II.64}$$

et on suppose aussi que :

$$|x_1| \leq \frac{\pi}{6} \text{ et } |u| \leq 180 \tag{II.65}$$

Puisque  $|x_1| \leq \left( |x_1|^2 + |x_2|^2 \right)^{1/2} = |x|$ , si on peut imposer  $|x| \leq \frac{\pi}{6}$ , alors  $|x_1| \leq \frac{\pi}{6}$ . Dans ce cas on a

aussi  $|x_2| \leq \frac{\pi}{6}$ .

En suivant les étapes de l'algorithme précédent la conception de notre commande sera synthétisée comme suit :

Etape1

On définit les paramètres de conception  $\tilde{V}$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\varepsilon$ ,  $M_f$  et  $M_g$  selon (II.51) et (II.52), telle que (II.65) soit satisfaite. puisque  $|y_m| \leq \pi/30$ , si on détermine  $\tilde{V}$  et  $\lambda_{\min}$  d'une manière que  $(2\tilde{V}/\lambda_{\min})^{1/2} \leq 2\pi/15$ , d'après (II.51) on obtient  $|x| \leq \pi/30 + 2\pi/15 = \pi/6$ . Mais on remarque que le nombre des paramètres de conception est plus grand que le nombre des contraintes ((II.51), (II.52) et (II.65)), alors nous avons la liberté de choisir ces paramètres comme suit :

➤ On prend  $k_1 = 2$  et  $k_2 = 1$  afin que  $A_c$  soit stable.

➤ On choisit  $Q = \text{diag}(10,10)$ , la résolution de l'équation de Lyapunov (II.26), donne

$$P = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

➤ La matrice  $P$  est définie positive avec  $\lambda_{\min} = 2.93$ , alors  $\tilde{V} = \frac{\lambda_{\min}}{2} \left( \frac{2\pi}{15} \right)^2 = 0.267$ .

➤ Pour détermine  $M_f$ ,  $M_g$  et  $\varepsilon$  on a aussi le choix pour les désigner tel que  $|u| \leq 180$ , et (II.52) est satisfaite. Alors on choisit  $M_f = 16, M_g = 1.6$ , et  $\varepsilon = 0.7$ .

Etape2

Dans cette seconde étape, la conception de la commande adaptative floue dépend du type des systèmes flous utilisés :

**II.8.1. La commande adaptative floue type-1**

• On choisit  $m_i = 5$  ( $i = 1,2$ ) ensembles flous typ-1, sur l'univers de discours  $\left[ -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$ , leurs fonctions d'appartenance sont définies par les expressions suivantes :

$$\mu_{F_i^1}(x_i) = \left[ -\left( \frac{x_i + \pi/6}{\pi/24} \right)^2 \right], \quad \mu_{F_i^2}(x_i) = \exp \left[ -\left( \frac{x_i + \pi/12}{\pi/24} \right)^2 \right], \quad \mu_{F_i^3}(x_i) = \exp \left[ -\left( \frac{x_i}{\pi/24} \right)^2 \right],$$

$$\mu_{F_i^4}(x_i) = \exp \left[ -\left( \frac{x_i - \pi/12}{\pi/24} \right)^2 \right], \quad \mu_{F_i^5}(x_i) = \exp \left[ -\left( \frac{x_i - \pi/6}{\pi/24} \right)^2 \right].$$

• En se basant sur la description physique et le fonctionnement du système, on obtient les règles flous des fonctions  $f(x_1, x_2)$  et  $g(x_1, x_2)$  décrites par des matrices d'inférence données par le tableau.II.1.

- On construit les FBF par (II.7) et on obtient  $\hat{f}(x|\theta_f)$  et  $\hat{g}(x|\theta_g)$ .
- On calcule la commande  $u$  par (II.28), et on l'applique au système (II.61).
- On choisit  $\gamma_1 = 50$  et  $\gamma_2 = 1$  et on calcule les lois d'adaptation (II.46)-(II.50) pour ajuster les vecteurs de paramètres  $\theta_f$  et  $\theta_g$  qui contiennent initialement les centres des ensembles conséquents représentés dans les matrices d'inférence.

		$g(x_1, x_2)$					$f(x_1, x_2)$					
$x_2$	$F_2^1$	1.26	1.36	1.46	1.36	1.26	$F_2^1$	-8	-4	0	4	8
	$F_2^2$	1.26	1.36	1.46	1.36	1.26	$F_2^2$	-8	-4	0	4	8
	$F_2^3$	1.26	1.36	1.46	1.36	1.26	$F_2^3$	-8	-4	0	4	8
	$F_2^4$	1.26	1.36	1.46	1.36	1.26	$F_2^4$	-8	-4	0	4	8
	$F_2^5$	1.26	1.36	1.46	1.36	1.26	$F_2^5$	-8	-4	0	4	8
		$F_1^1$	$F_1^2$	$F_1^3$	$F_1^4$	$F_1^5$	$F_1^1$	$F_1^2$	$F_1^3$	$F_1^4$	$F_1^5$	
		$x_1$					$x_1$					

Tableau.II.1. Matrices d'inférence pour les fonctions  $f(x_1, x_2)$  et  $g(x_1, x_2)$ .

### II.8.1.1. Résultats de simulation

Les résultats de simulation de la commande adaptative floue type-1 sont obtenus pour deux cas. Le premier cas en absence de perturbations externes avec deux conditions initiales  $x(0)=[-\pi/60, 0]^T$  et  $x(0)=[-\pi/10, 0]^T$ . Le deuxième cas en présence de perturbations externes sous forme d'un bruit aléatoire de distribution normale. Ces perturbations affectent la sortie du système selon le schéma de la fig.II.3.

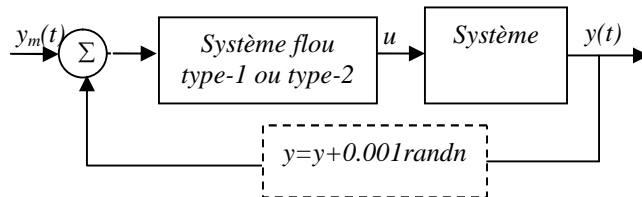
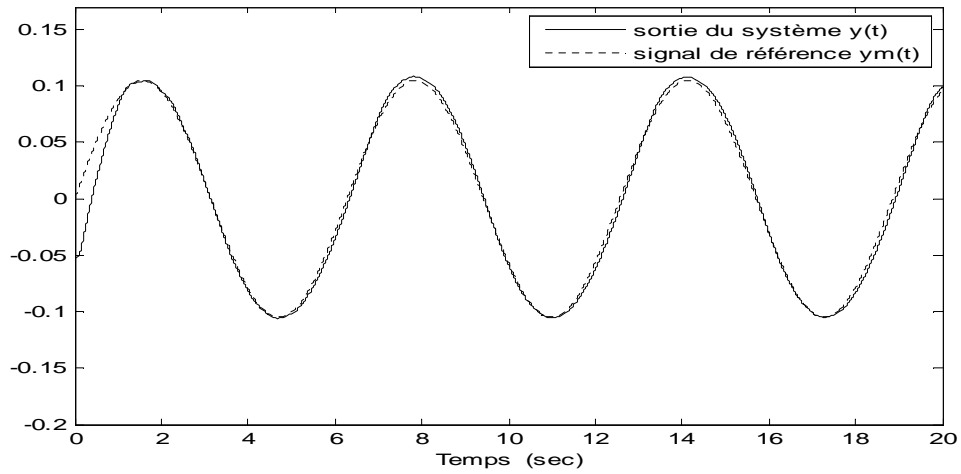


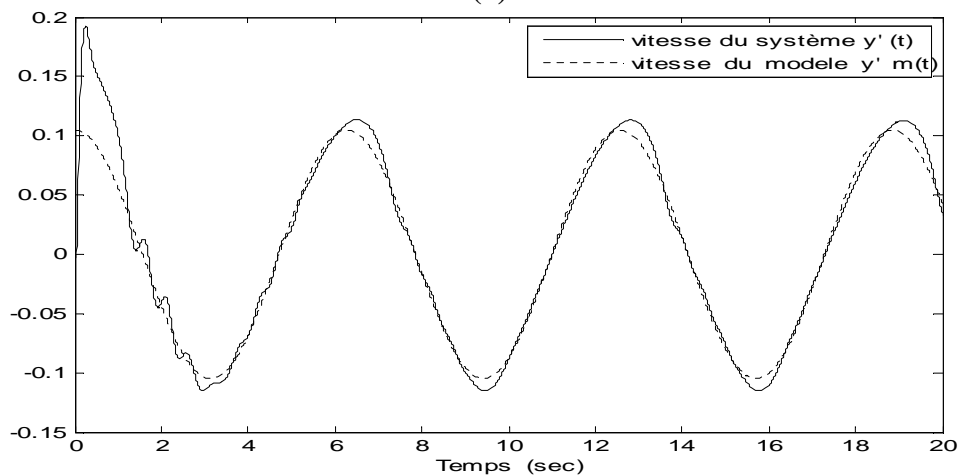
Fig.II.3. Système avec perturbation additive.

✦ Cas 1 : sans perturbations

\* Condition initiale  $x(0) = [-\pi/60, 0]^T$

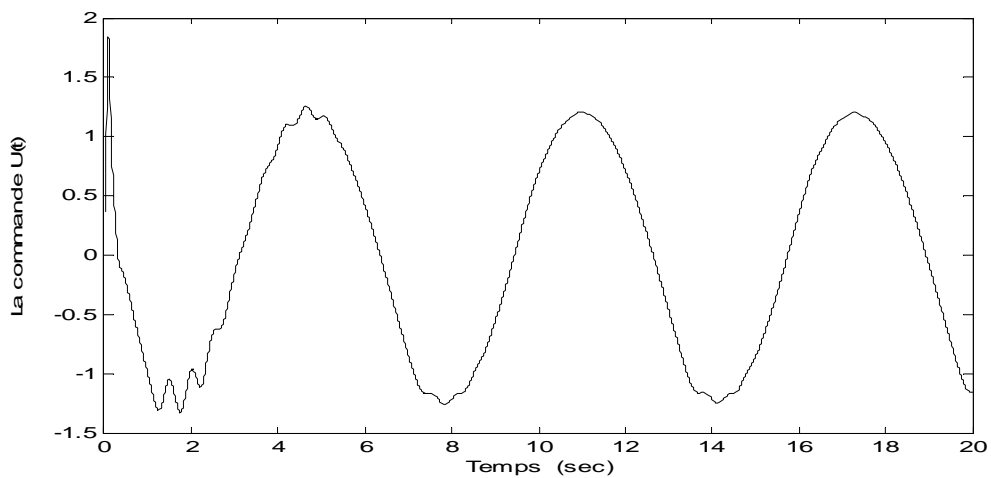


(a)



(b)

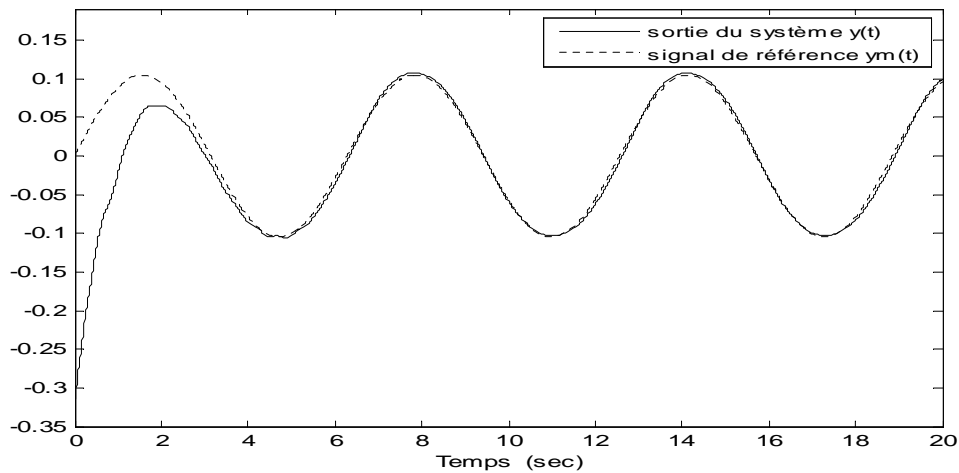
Fig.II.4. Réponses du système (a) Réponse en position (b) Réponse en vitesse



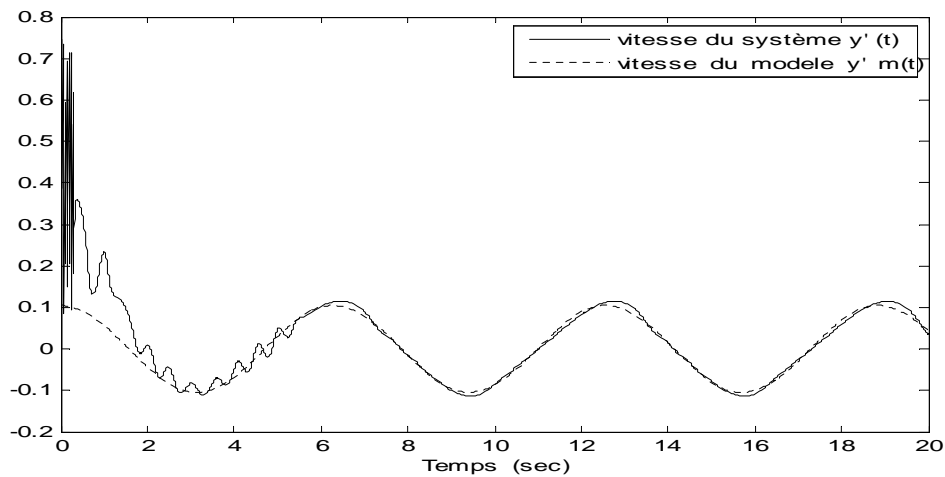
(c)

Fig.II.5. Signal de commande globale  $u(t)$

✦ Condition initiale  $x(0)=[-\pi/10,0]^T$



(a)

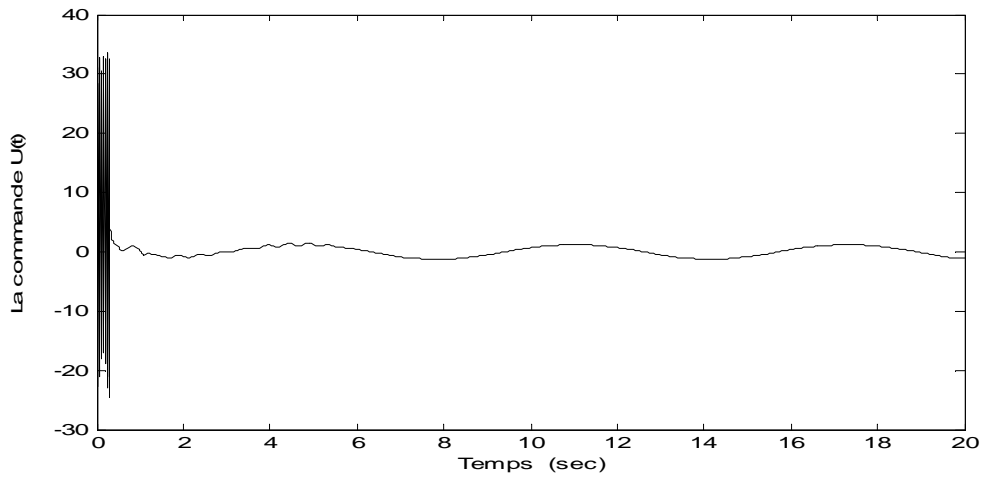


(b)

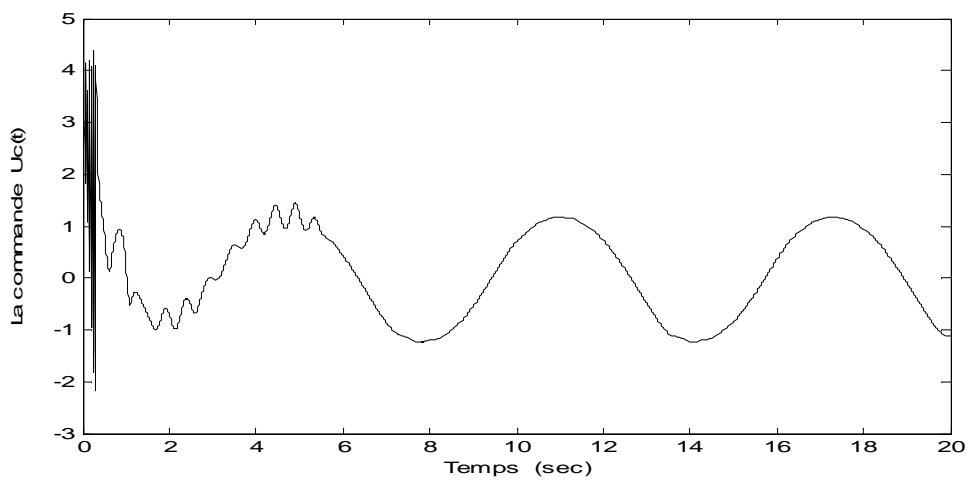
Fig.II.6. Réponses du système (a) Réponse en position (b) Réponse en vitesse.

Les figures fig.II.4.a et fig.II.6.a montrent que la sortie du système  $y(t)$  suit sa référence  $y_r(t)$  pour les deux conditions initiales.

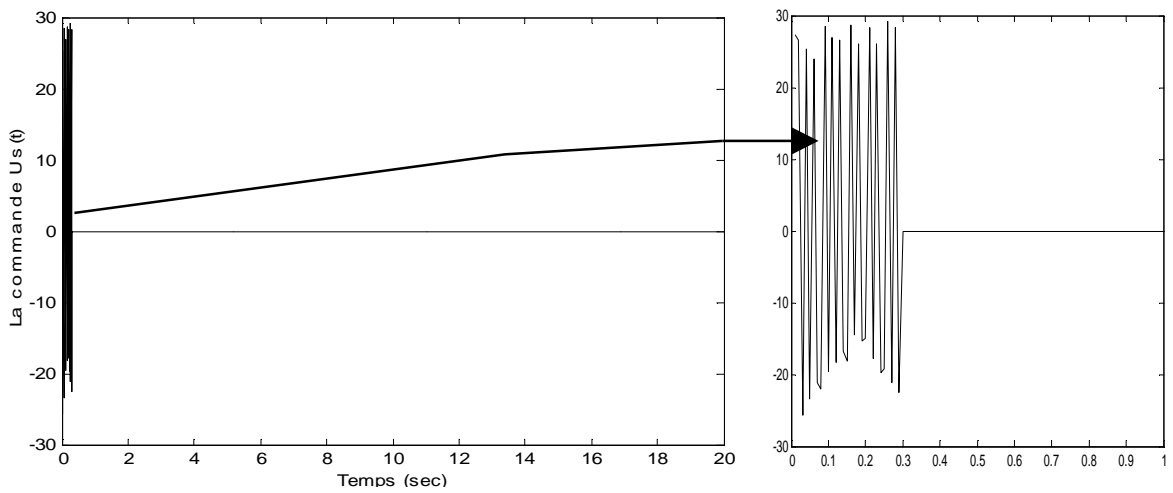
Les figures fig.II.5 et fig.II.6.a donnent l'allure de la commande globale du système pour les deux conditions initiales. Le signal de commande présente des commutations dans le régime transitoire dans le cas où la condition initiale est loin de celle du signal de référence  $x(0)=[-\pi/10,0]^T$ . Ces commutations sont dues à l'activation de la commande de supervision  $u_s$  (fig.II.7.c) qui n'est pas activée (nulle) dans le cas de la condition initiale  $x(0)=[-\pi/60,0]^T$ .



(a)



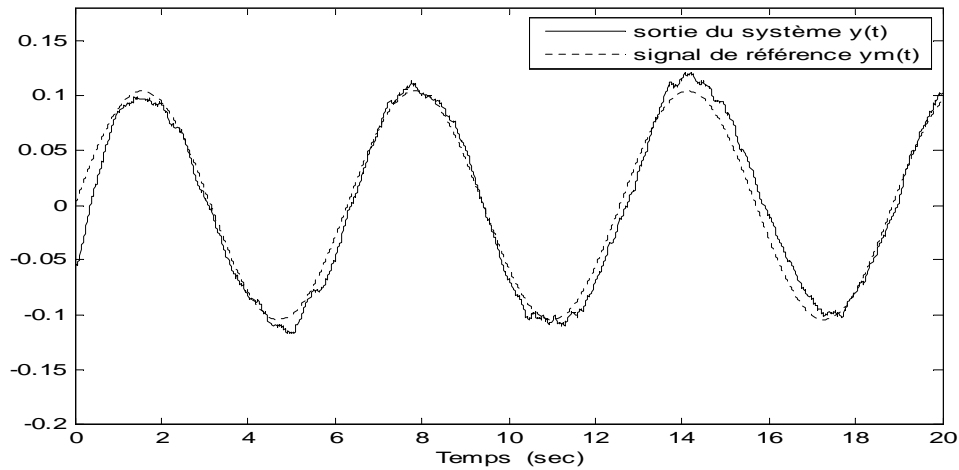
(b)



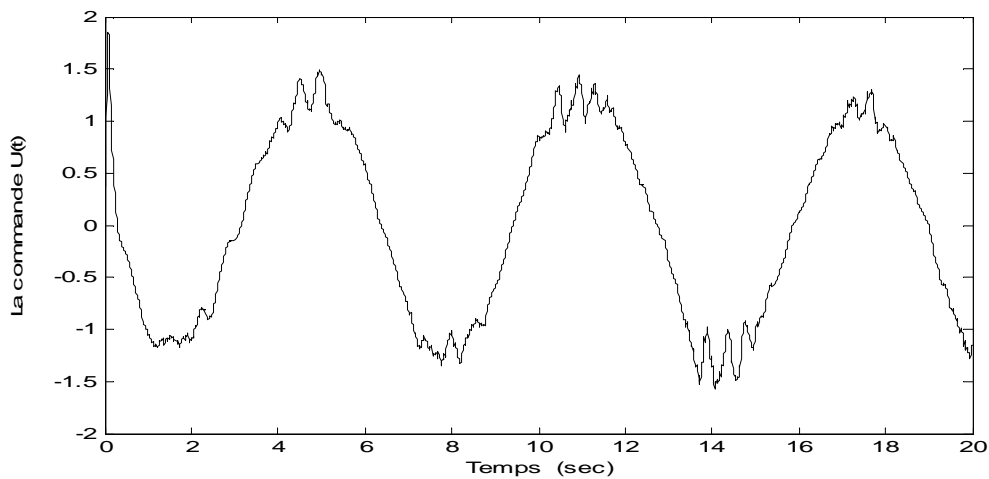
(c)

Fig.II.7. Signaux de commande pour l'état initial  $[-\frac{\pi}{10}, 0]$  a) Signal de commande globale  $u(t)$ , b) Signal de commande  $u_c$ , c) Signal de commande  $u_s$ .

◆ Cas 2 : avec perturbations



(a)



(b)

Fig.II.8. Réponses du système en présence de perturbations externes a) Repense en position, b) Signal de commande globale  $u(t)$ .

La figure II.8.a montre la sortie du système  $y(t)$  qui réalise une poursuite acceptable du signal de référence  $y_m(t)$  malgré la présence de perturbations externes.

### II.8.2. Commande adaptative floue type-2

Les étapes de conception de cette commande reste les mêmes de celle du type-1 à l'exception que  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  seront obtenues par des systèmes flous type-2.

- Dans ce cas on choisit  $m_i = 3$  ( $i = 1,2$ ) ensemble flou typ-2 (fig.II.9), sur l'univers de discours  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ , ces ensembles flous type-2 sont construits à partir des antécédents de type-1, en leur ajoutant une région d'incertitude représentée par la variation de la moyenne



$M \in [M_1, M_2]$  avec un écart-type  $\sigma$  constant. Pour faciliter la manipulation de ces ensembles, chacun d'eux va être représenté par ses fonctions d'appartenance supérieure  $\bar{\mu}_{\tilde{F}_i}(x_i)$  et inférieure  $\underline{\mu}_{\tilde{F}_i}(x_i)$  qui ont la forme suivante :

$$\bar{\mu}_{\tilde{F}_i^K}(x_i) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - M_1(K)}{\sigma}\right)^2} & x_i < M_1(K) \\ 1 & M_1(K) < x_i < M_2(K), \\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - M_2(K)}{\sigma}\right)^2} & x_i > M_2(K) \end{cases}$$

$$\underline{\mu}_{\tilde{F}_i^K}(x_i) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - M_2(K)}{\sigma}\right)^2} & x_i \leq \frac{M_1(K) + M_2(K)}{2} \\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - M_1(K)}{\sigma}\right)^2} & x_i > \frac{M_1(K) + M_2(K)}{2} \end{cases}$$

où  $K=1, \dots, m_i$ ,  $\sigma = \pi/24$ ,  $M_1 = [-0.3491, 0, 0.3491]$  et  $M_2 = [-0.4491, 0, 0.2491]$ .

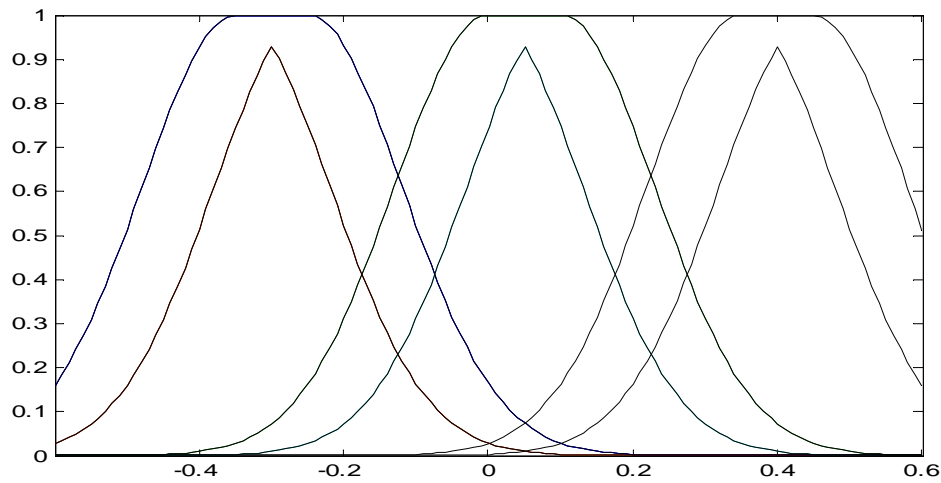


Fig.II.9. Fonctions d'appartenance floues type-2 des ensembles antécédents

- On construit les bases de règle de la même manière que les systèmes flous type-1 (II.60) et (II.61), sauf que les antécédents sont des ensembles flous type-2 représentés dans la fig.II.9, et les ensembles conséquents sont initialement choisis comme les centres des ensembles flous type-1 dans l'intervalle  $[-3, 3]$  pour la fonction  $f(x)$  et dans l'intervalle  $[1, 1.3]$  pour la fonction  $g(x)$ , par la suite ces centres seront ajustés par l'algorithme d'adaptation. On remarque que dans ce cas, chaque base de règle contient 9 règles seulement.

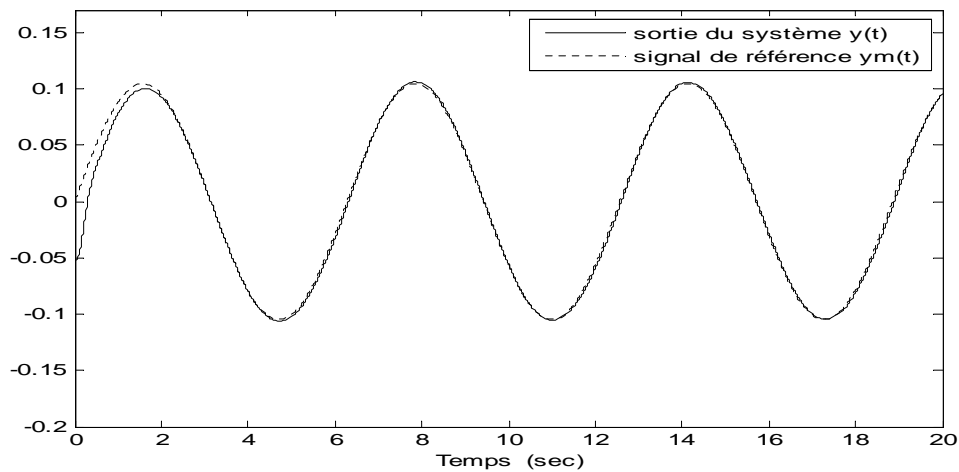
- Calculer les fonctions floues de base gauche  $\xi_{fl}^i$  (II.16),  $\xi_{gl}^i$  (II.18) et droite  $\xi_{fr}^i$  (II.17),  $\xi_{gr}^i$  (II.19), afin de calculer  $\hat{f}(x, \theta_f)$  et  $\hat{g}(x, \theta_g)$  (II.10)-(II.15).

### II.8.2.1. Résultats de simulation

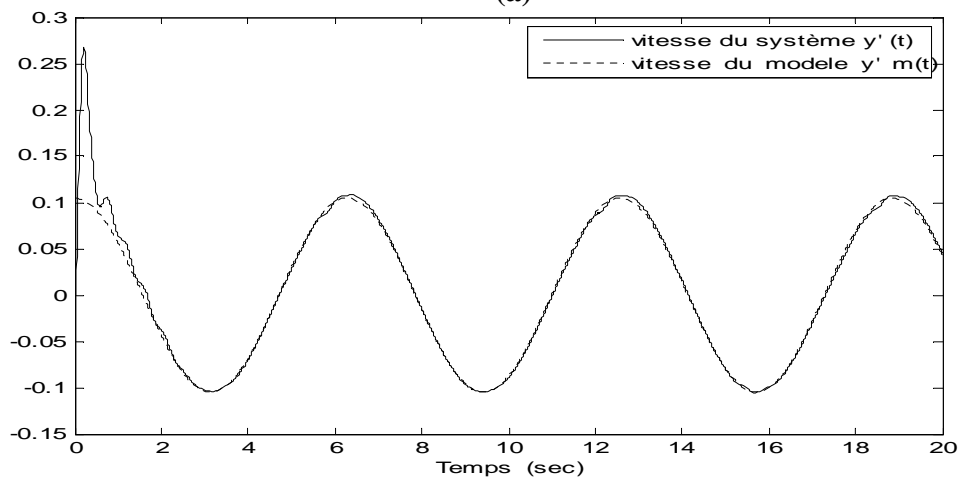
La simulation est réalisée en l'absence de perturbations externes avec deux conditions initiales  $x(0)=[-\pi/60, 0]^T$  et  $x(0)=[-\pi/10, 0]^T$  et en présence des mêmes perturbations utilisées pour le cas des systèmes flous type-1 (fig.II.3) avec la condition initiale  $x(0)=[-\pi/60, 0]^T$ .

✦ Sans perturbations

\*Condition initiale  $x(0)=[-\pi/60, 0]$

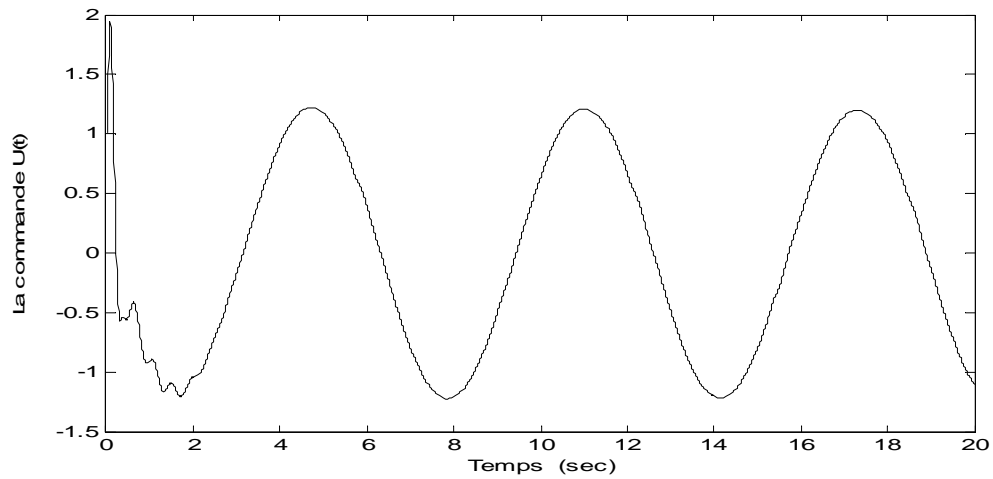


(a)



(b)

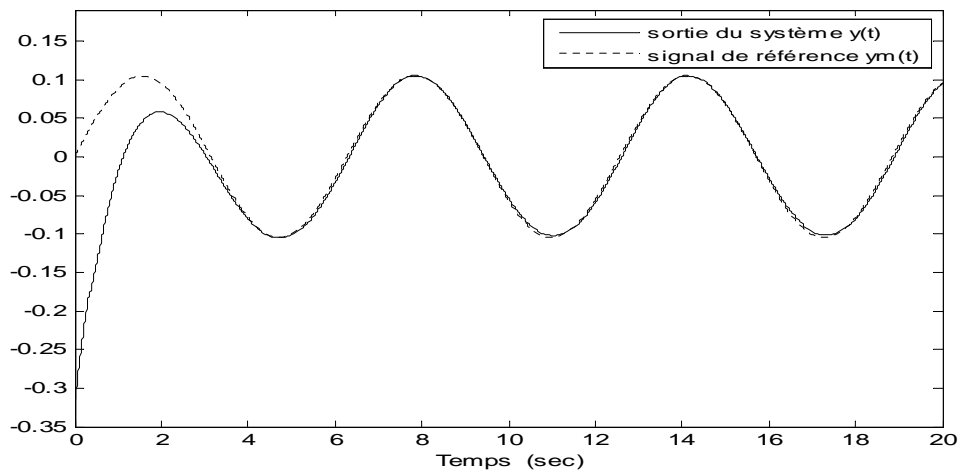
Fig.II.10. Réponses du système pour  $x(0)=[-\pi/60, 0]$  a) Réponse en position, b) Réponse en vitesse.



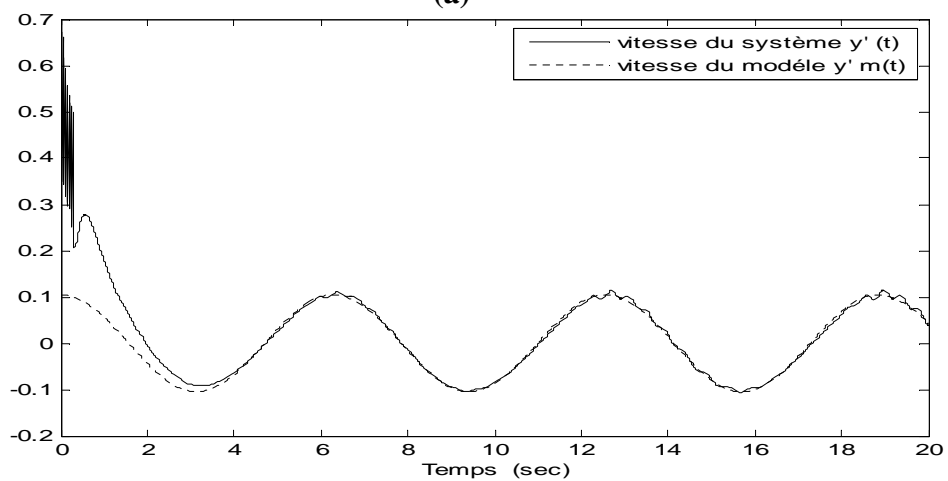
(c)

Fig.II.11. Signal de commande globale  $u(t)$

\*Condition initiale  $x(0) = [-\pi/10, 0]$



(a)



(b)

Fig.II.12. Réponses du système pour  $x(0) = [-\pi/10, 0]$  a) Réponse en position b) Réponse en vitesse.

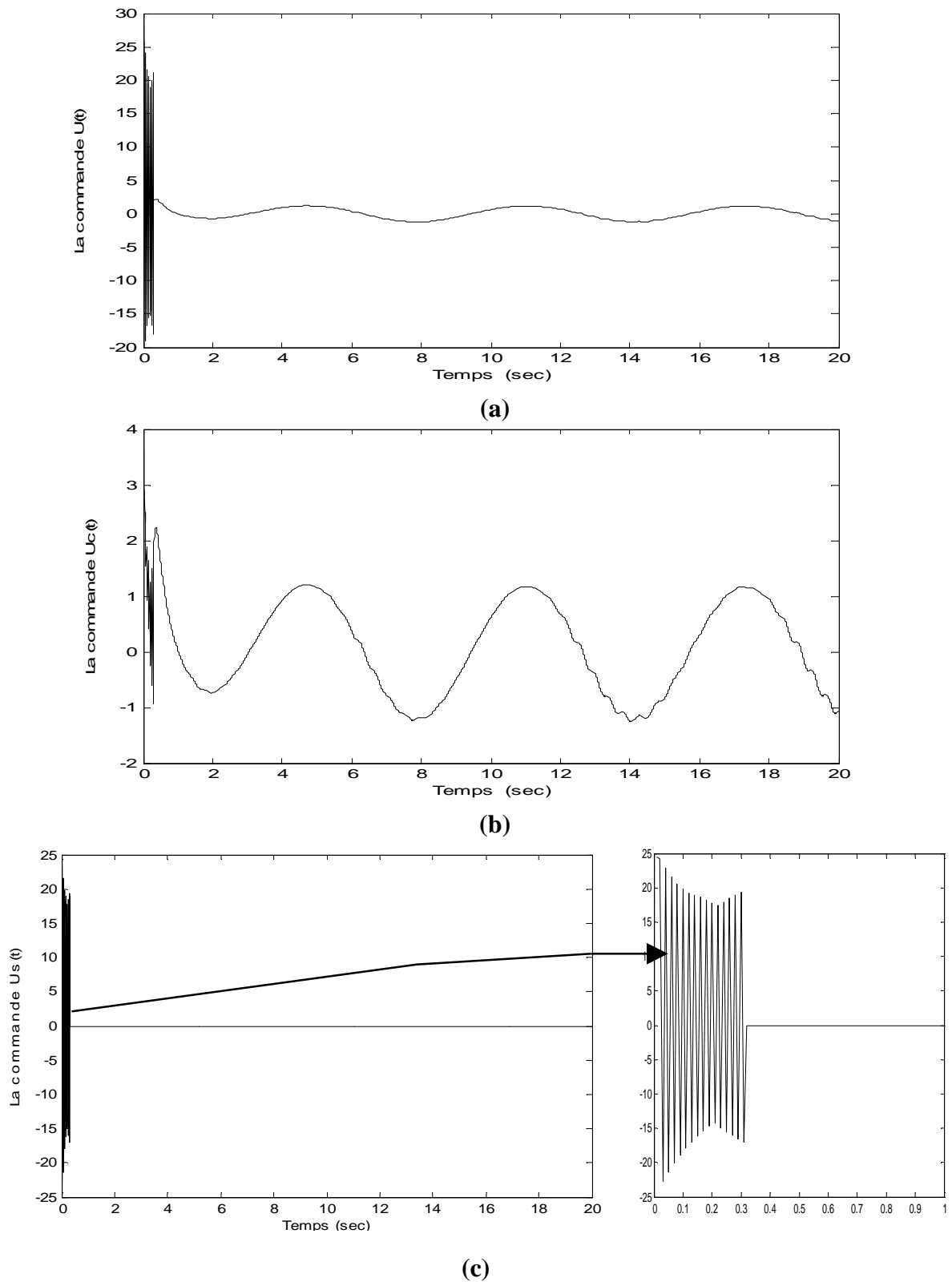


Fig.II.13. Signaux de commande pour l'état initial  $[-\frac{\pi}{10}, 0]$  a) Signal de commande globale  $u(t)$ , b) Signal de la commande  $u_c$ , c) Signal de la commande  $u_s$ .

Les figures fig.II.10.a et la fig.II.12.a montrent que la sortie de notre système  $y(t)$  réalise une bonne poursuite du signal de référence  $y_m(t)$  pour les deux conditions initiales.

Les figures fig.II.11 et fig.II.13.a donnent la commande globale du système pour les deux conditions initiales. Le signal de commande présente des commutations dans le régime transitoire dans le cas où la condition initiale est loin du signal de référence  $x(0)=[-\pi/10,0]^T$ . Ces commutations sont dues à l'activation de la commande de supervision  $u_s$  (fig.II.13.c), cette commande n'est pas activé (nulle) dans le cas de  $x(0)=[-\pi/60,0]^T$ .

✦ Avec perturbations

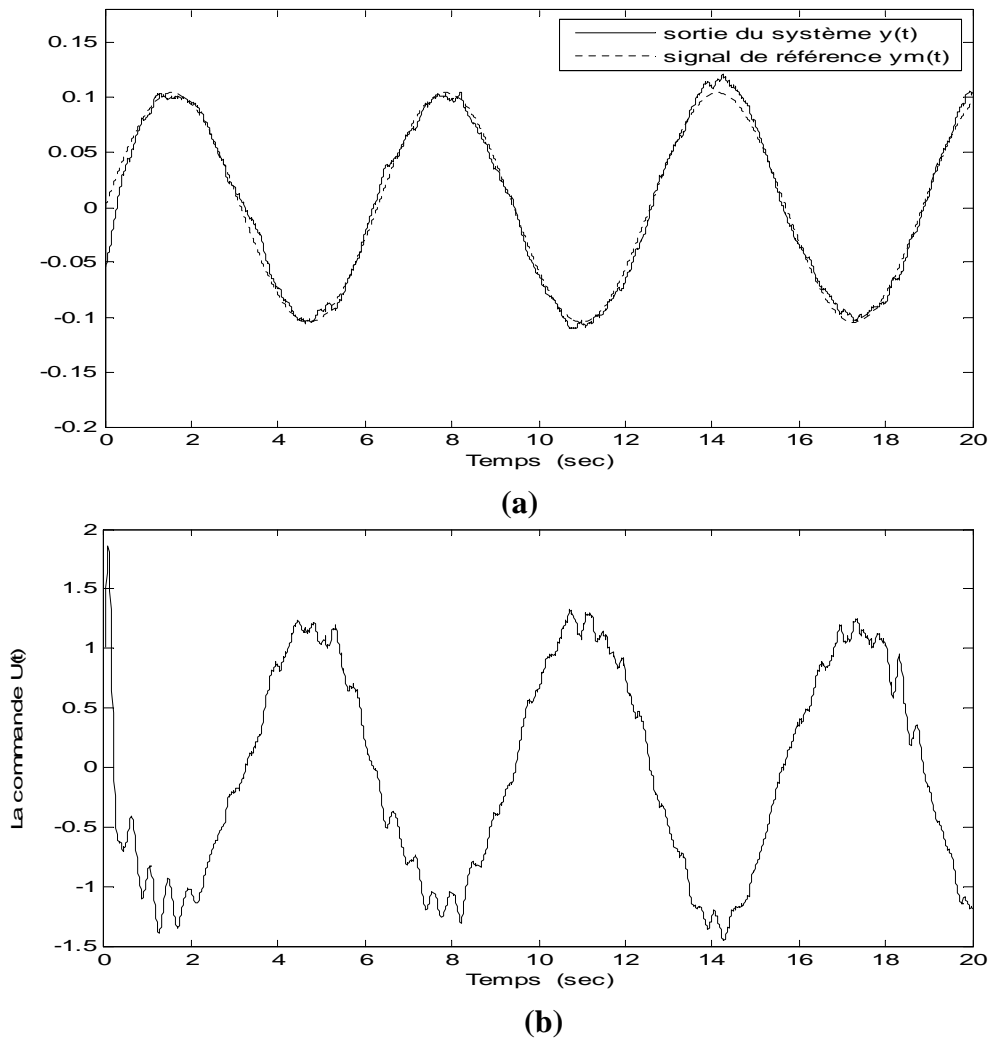


Fig.II.14. Réponse du système en présence d'une perturbation externe a) Repense en position, b) Signal de commande globale.

La figure fig.II.14.a montre que malgré la présence des perturbations externes, la sortie du système garde une bonne poursuite du signal de référence.

### II.9. Etude comparative

D'après les figures fig.II.4.a et fig.II.10.a, on remarque que la poursuite réalisée par le contrôleur flou type-2 est plus précise comparativement à celle produite par le contrôleur flou type-1 malgré l'utilisation d'un nombre réduit de fonctions d'appartenance et de règles flous (3 antécédents et 9 règles pour le type-2 au lieu de 5 antécédents et 25 règles pour le type-1).

Pour mieux mettre en évidence la différence de performance entre les deux commandes adaptatives floues type-1 et type-2, l'erreur de poursuite est quantifiée en utilisant un critère de performance qui calcule l'intégrale de la valeur absolue de l'erreur (IAE) et qui est défini par  $IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$  [Sep-06]. La représentation de ce critère sur un horizon de 20 secondes, pour les deux commandes adaptatives floues type-1 et type-2, en l'absence et en présence de perturbations, est donnée par les figures fig.II.15.a et fig.II.15.b respectivement. Les valeurs numériques correspondantes à ce critère sont données par le tableau II.2.

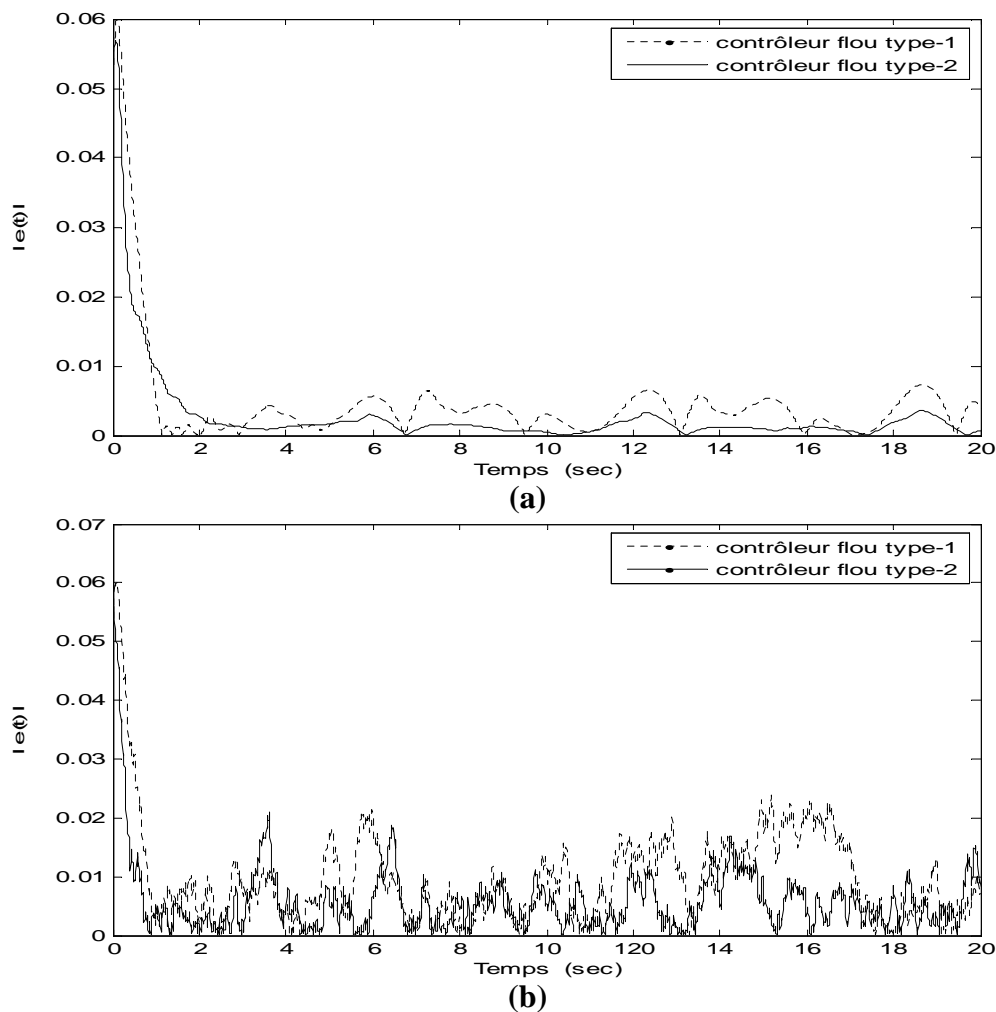


Fig.II.15. Représentation de  $|e(t)|$  du contrôleur flou type-1 et type-2 pour  $x(0)=[-\pi/60, 0]$   
 a) en l'absence de perturbations externes, b) en présence de perturbations externes.

Critère de performance		IAE
Contrôleur flou type-1	Système non perturbé	9.0657
	Système perturbé	19.6464
Contrôleur flou type-2	Système non perturbé	5.4085
	Système perturbé	16.6744

Tableau.II.2. Valeurs du critère de performance IAE du contrôleur flou type-1 et type-2, en l'absence et en présence de perturbations, calculées sur un horizon de 20s.

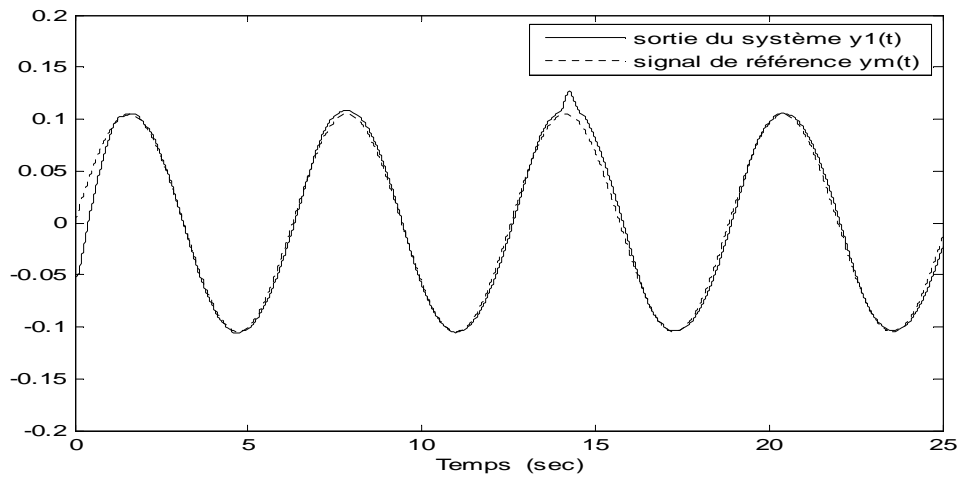
D'autre part, les figures fig.II.5, fig.II.7, fig.II.11, et fig.II.13 montrent que le signal de commande dans le cas du type-2 a une forme plus lisse et présente des variations d'effort moins importantes comparativement à celui du type-1 notamment pour la condition initiale  $x(0)=[-\pi/10, 0]$ .

A titre indicatif, les valeurs maximales des termes de commande sont données par le tableau.II.3.

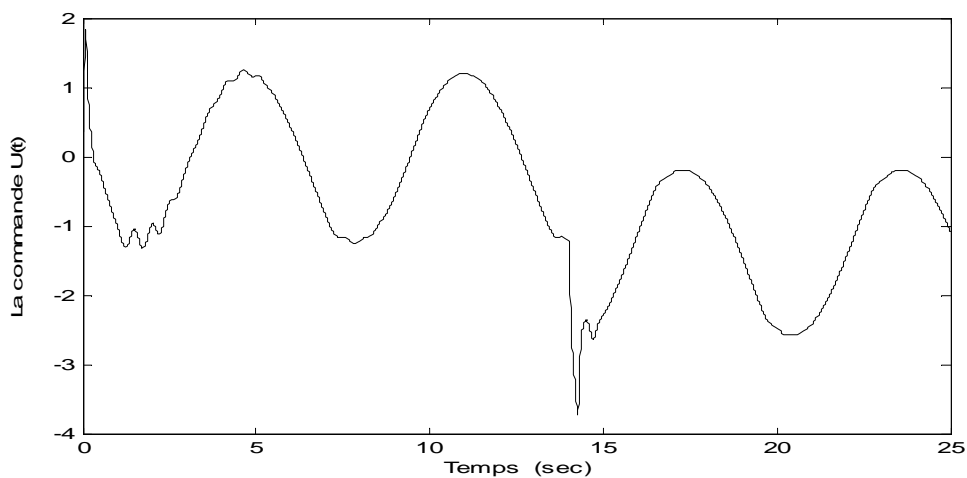
La commande	Valeur maximale	
	Commande floue type-1	Commande floue type-2
$u(t)$	33.59	28.13
$u_c(t)$	4,37	3.59
$u_s(t)$	29.22	24.54

Tableau.II.3. Valeurs maximales des signaux de commande.

Pour mieux apprécier les performances obtenues par l'utilisation des systèmes flous type-2, nous allons considérer une forte perturbation constante d'amplitude  $d=2$  à l'instant  $t=14s$ . Les résultats de simulation relatifs à l'utilisation des systèmes flous type-1 et type-2 sont représentés sur les figures fig.II.16 et fig.II.17, respectivement. On constate la très bonne performance de poursuite obtenue dans les deux cas avec une meilleure atténuation des perturbations dans le cas des systèmes flous type-2.



(a)



(b)

Fig.II.16. Sortie de système et sa commande dans le cas du type-1 en présence d'une forte perturbation  $d=2$  à  $t=14$  s a) trajectoire de sortie du système  $y_1(t)$  b) la commande globale

## II.10. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé deux structures de commande adaptatives floues indirectes. Dans la première structure des systèmes flous type-1 adaptatifs sont utilisés afin d'approximer la dynamique des systèmes sous contrôle. Pour la seconde structure, les systèmes flous type-1 sont remplacés par des systèmes flous type-2 intervalle dont la réduction de type est réalisée par une méthode itérative simple. L'utilisation des systèmes flous type-2, avec un nombre réduit de règles, a permis d'améliorer la performance de poursuite tout en diminuant l'effort de commande.



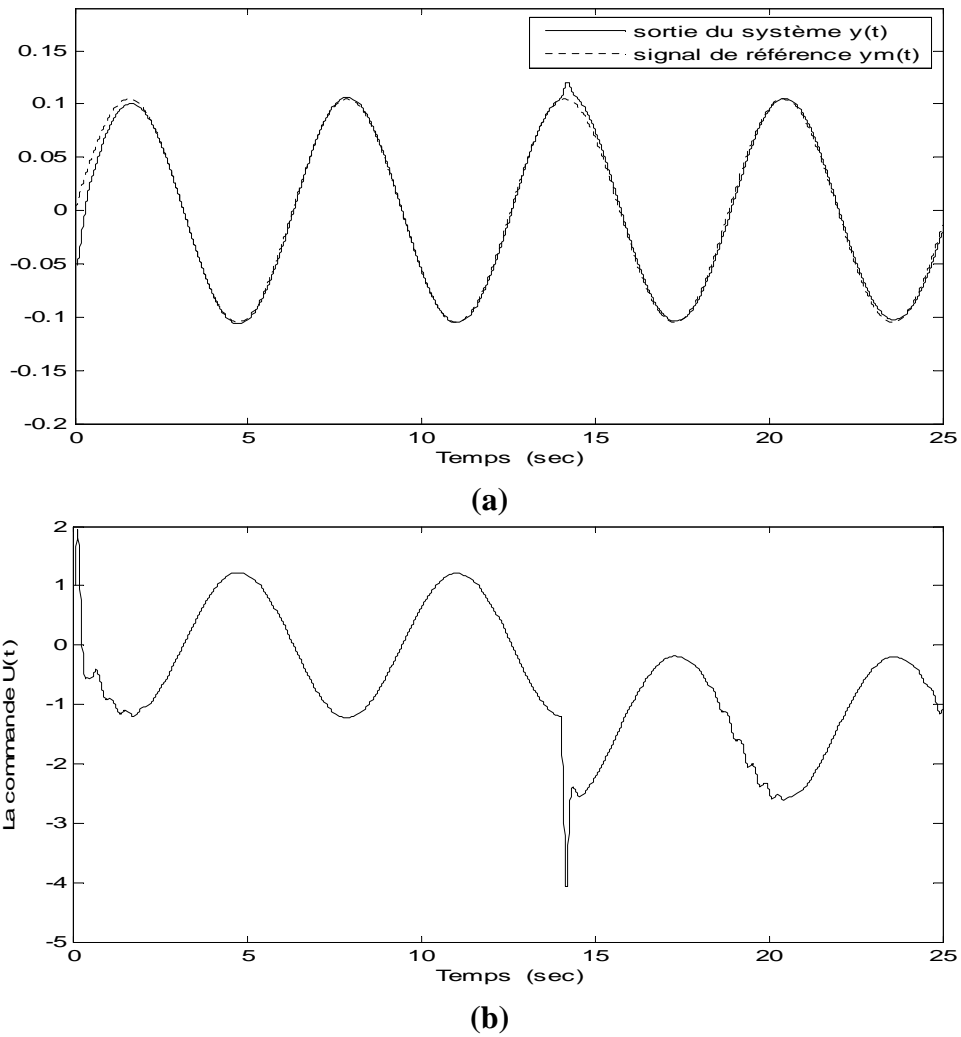


Fig.II.17. Sortie de système et sa commande dans le cas du type-2 en présence d'une forte perturbation  $d=2$  à  $t=14$  s a) trajectoire de sortie du système  $y_1(t)$  b) la commande globale  $u(t)$ .

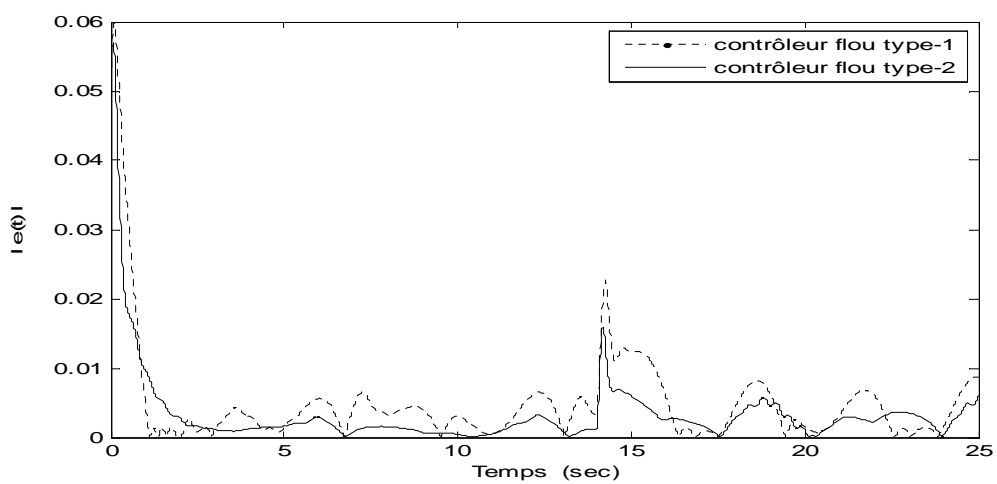


Fig.II.18. Représentation de  $|e(t)|$  du contrôleur flou type-1 et type-2 en présence d'une forte perturbation  $d=2$   $t=14$ s.

Pour mettre en évidence les performances des deux commandes adaptatives floues développées un exemple de simulation est présenté. Les résultats de simulation obtenus ont permis de valider les deux structures de commande proposées.

En outre, l'étude comparative des performances des deux types de commandes a prouvé l'efficacité des systèmes flous type-2.

Pour prendre en charge une classe plus générale de systèmes, en l'occurrence celle des systèmes non linéaires multivariables incertains, l'extension des commandes adaptatives floues développées sera présentée dans le prochain chapitre.

## ***CHAPITRE III***

---

***COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE POUR DES  
SYSTEMES MULTIVARIABLES NON LINEAIRES  
INCERTAINS***

## COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE POUR DES SYSTEMES MULTIVARIABLES NON LINEAIRES INCERTAINS.

### III.1. Introduction

La théorie de la commande adaptative a évolué dans ces dernières années, elle est vue comme une méthodologie puissante de conception des commandes par retour d'état pour des systèmes non linéaires avec des incertitudes paramétriques. En se basant sur la propriété d'approximation universelle des systèmes flous [Wan-92-a], différents algorithmes de commande adaptative floue sont élaborés [Ho-05] [Che-96] [Spo-96]. Cependant, tous ces schémas de commande sont appliqués seulement pour des classes simples de systèmes non linéaires SISO. Dans ce chapitre nous allons considérer une classe plus générale, celle des systèmes non linéaires incertains MIMO perturbés [Cha-00] [Ton-00]. Cette classe de systèmes est représentée par un ensemble d'équations différentielles. L'algorithme des systèmes de commande à structure variable (VSS), la technique  $H^\infty$  et le développement de contrôleurs flous, sont combinés pour construire des commandes adaptatives floues, directe et indirecte. Ces deux commandes sont conçues soit à base de systèmes flous type-1, ou en utilisant des systèmes flous type-2. Les commandes développées garantissent que tous les états et les signaux du système en boucle fermée sont bornés, et une poursuite  $H^\infty$  est accomplie.

Pour valider les commandes adaptatives floues développées et d'établir une étude comparative entre les commandes à base des systèmes flous type-1 et ceux à base des systèmes flous type-2, un exemple de simulation est présenté.

### III.2. Formulation du problème

On considère le système non linéaire multi-entrées-multi-sorties (MIMO) représenté par l'ensemble des équations différentielles :

$$y_i^{(n_i)} = f_i(x) + \sum_{j=1}^p g_{ij}(x)u_j + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (\text{III.1})$$

où  $u = [u_1 \dots u_p]^T$  est le vecteur d'entrée du contrôleur,  $y = [y_1 \dots y_p]^T$  est le vecteur de sortie,  $d = [d_1 \dots d_p]^T$  est le vecteur des perturbations externes,  $y_i^{(j)}$  est la  $j^{\text{ème}}$  dérivée de  $y_i$ ,  $n_i$  est un nombre entier positif,  $f_i(x)$  et  $g_{ij}(x)$  pour  $i, j=1, \dots, p$  sont des fonctions non linéaires

lisses inconnues, et  $x = \begin{bmatrix} y_1 \dots y_1^{(n_1-1)} \dots y_p \dots y_p^{(n_p-1)} \end{bmatrix}^T$  est le vecteur d'état mesuré. La représentation du système (III.1) peut être réécrite sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y^{n_1} \\ \vdots \\ y^{n_p} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & \dots & g_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1} & \dots & g_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix} \\ &= F(x) + G(x)U + d \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

où  $F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \dots f_p(x) \end{bmatrix}^T$  et  $G(x) = \begin{bmatrix} G_1(x) \dots G_p(x) \end{bmatrix}^T$  avec  $G_i(x) = \begin{bmatrix} g_{1i}(x) \dots g_{pi}(x) \end{bmatrix}^T$ .

Etant données les trajectoires de référence  $y_{r_1}(t), \dots, y_{r_p}(t)$ , on définit les erreurs de poursuite

par  $e_1 = y_1 - y_{r_1}, \dots, e_p = y_p - y_{r_p}$ .

### III.3. Objectif de la commande

Notre objectif est de concevoir une commande adaptative robuste basée sur les systèmes flous capable de réaliser une bonne poursuite d'un signal de référence donné, telles que toutes les variables du système en boucle fermée soient bornées.

### III.4. Conception de la commande adaptative floue

On considère le système (III.1), si  $F(x)$  et  $G(x)$  sont connues et  $d=0$ , la commande par retour d'état est :

$$u = G^{-1}(x) \left( -F(x) + y_r^{(n)} - Ke \right) \quad (\text{III.3})$$

où  $e = \begin{bmatrix} e_1, \dot{e}_1, \dots, e_1^{(n_1-1)}, \dots, e_p, \dot{e}_p, \dots, e_p^{(n_p-1)} \end{bmatrix}^T$ ,  $y_r^{(n)} = \begin{bmatrix} y_{r_1}^{(n_1)} \dots y_{r_p}^{(n_p)} \end{bmatrix}^T$ , et  $K = \text{diag} \left[ K_1 \dots K_p \right]$

avec  $K_i = \text{diag} \left[ k_{i1} \dots k_{in_i} \right]$  est choisi telle que la matrice  $A_i = A_{0i} - B_i K_i$  soit Hurwitz où

$$A_{0i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On suppose l'ensemble compact  $\Omega_r$  tel que  $Y_r(t) \in \Omega_r, \forall t \geq 0$ , l'équation dynamique de l'erreur est écrite comme :

$$\dot{e} = A_0 + B \left[ F(x) + G(x)u + d - y_r^{(n)} \right] \quad (\text{III.4})$$

où  $A_0 = \text{diag} \left[ A_{01} \dots A_{0p} \right]$ ,  $B = \text{diag} \left[ B_1 \dots B_p \right]$ .

On définit  $A = \text{diag}[A_1 \dots A_p]$  et (III.4) sera écrite comme :

$$\dot{e} = A + B[Ke + F(x) + G(x)u + d - y_r^{(n)}] \quad (\text{III.5})$$

Dans notre étude, les fonctions  $F(x)$  et  $G(x)$  sont supposées inconnues, et  $d \neq 0$ , donc l'obtention de la loi de commande (III.3) s'avère impossible, ce qui nous mène à introduire les systèmes flous équipés d'un algorithme d'adaptation afin de concevoir notre commande.

Dans ce qui suit nous allons développer deux commandes adaptatives floues, une commande adaptative floue indirecte, où les systèmes flous sont utilisés comme un modèle flou pour estimer la dynamique des fonctions inconnues  $F(x)$  et  $G(x)$  qui seront employées par la suite dans la conception du contrôleur, et une commande adaptative floue directe, où la commande sera directement ajustée par le système flou. Dans les deux cas, l'erreur d'approximation due aux systèmes flous, sera éliminée par l'utilisation de la commande VSS. L'erreur due aux perturbations externes sera atténuée à un niveau prescrit, par l'ajout d'un terme de commande type  $H^\infty$ .

### III.4.1. Commande adaptative floue indirecte

Pour construire la commande adaptative indirecte on doit en premier lieu estimer les fonctions  $F$  et  $G$ .

#### III.4.1.1. Conception des systèmes flous proposés

Dans notre travail, la commande adaptative floue indirecte sera développée par l'utilisation de deux types de systèmes flous, les systèmes flous type-1 et les systèmes flous type-2. La structure de la commande proposée reste la même dans les deux cas, la seule différence réside dans la structure des systèmes flous  $\hat{F}$  et  $\hat{G}$ .

##### III.4.1.1.1. Systèmes flous type-1

On considère le système flou type-1 universel  $\hat{F}(x, \Theta_1)$  avec  $x \in U_x$  pour approximer  $F(x)$ , où  $\Theta_1$  contient les paramètres ajustables. Soit  $\hat{f}_i(x, \Theta_{1i})$  le  $i^{\text{ème}}$  composant de  $\hat{F}(x, \Theta_1)$  qui peut être exprimé comme :

$$\hat{f}_i(x, \Theta_{1i}) = \xi_{1i}^T(x) \Theta_{1i} \quad i = 1, \dots, p \quad (\text{III.6})$$

où  $\Theta_{1i} = [\theta_{1i1} \dots \theta_{1im}]^T \in R^{m_{1i}}$  est un vecteur de paramètres et  $\xi_{1i}(x) = [\xi_{1i1}(x) \dots \xi_{1im_{1i}}(x)]^T \in R^{m_{1i}}$ ,

pour un certain  $m_{1i} < 0$ , est le vecteur des FBF, qui sont définies par :

$$\xi_{1il}(x) = \frac{\prod_{j=1}^n \mu_{F_j^1}(x_j)}{\sum_{l=1}^{m_{1i}} \left( \prod_{j=1}^n \mu_{F_j^1}(x_j) \right)} \quad (\text{III.7})$$

Les fonctions d'appartenance  $\mu_{F_j^1}(x_j)$  pour  $1 \leq l \leq m_{1i}$  et  $1 \leq j \leq n$  sont spécifiées à l'avance.

Donc, le système flou  $\hat{F}(x, \Theta_1)$  peut être exprimé par

$$\hat{F}(x, \Theta_1) = Y_1(x) \Theta_1 \quad (\text{III.8})$$

où  $Y_1(x) = \text{diag} [\xi_{11}^T(x), \dots, \xi_{1p}^T(x)]^T$  est la matrice des FBF et  $\Theta_1 = [\Theta_{11}^T \dots \Theta_{1p}^T]^T \in R^{m_1}$  avec  $m_1 = \sum_{i=1}^p m_{1i}$ .

Maintenant, on construit le système flou type-1  $\hat{G}(x, \Theta_2)$  pour approximer la fonction inconnue  $G(x)$ . Prenant  $\hat{g}_{ij}(x, \Theta_{2ij}) = \xi_{2ij}^T \Theta_{2ij}$  pour  $m_{2ij} > 0$  afin d'approximer  $g_{ij}(x)$ . Alors,  $G_i(x)$  est la  $i^{\text{ième}}$  colonne de  $G(x)$ , qui est approximé par :

$$\hat{G}_i(x, \Theta_{2i}) = Y_{2i}(x) \Theta_{2i}, \quad i = 1, \dots, p \quad (\text{III.9})$$

où  $Y_{2i}(x) = \text{diag} [\xi_{2i1}^T(x), \dots, \xi_{2ip}^T(x)]^T$  et  $\Theta_{2i} = [\Theta_{2i1}^T \dots \Theta_{2ip}^T]^T \in R^{m_{2i}}$  avec  $m_{2i} = \sum_{j=1}^p m_{2ij}$ .

Donc, la matrice  $G(x)$  peut être écrite sous la forme suivante :

$$\hat{G}(x, \Theta_2) = Y_2(x) \Theta_2 \quad (\text{III.10})$$

avec  $Y_2(x) = \text{diag} [\xi_{21}^T(x), \dots, \xi_{2p}^T(x)]^T$  et  $\Theta_2 = [\Theta_{21}^T \dots \Theta_{2p}^T]^T$ .

#### III.4.1.1.2. Systèmes flous type-2

La conception des systèmes flous type-2 est faite de la même manière que dans le chapitre II pour les systèmes non linéaires incertains SISO (paragraphe II.3). Les systèmes flous type-2 employés sont de type intervalle et la réduction de type est réalisée par la méthode des centres des ensembles.

Le système flou type-2 utilisé pour approximer  $F(x)$  garde la même matrice  $\Theta_1$  des paramètres ajustables des systèmes flous type-1, mais le vecteur des FBF  $\xi_{1i}(x)$  sera calculé par :

$$\xi_{1i}(x) = (\xi_{(1i)l} + \xi_{(1i)r}) / 2 \quad (\text{III.11})$$

avec  $\xi_{(li)_l} = \left[ \xi_{(li)l}(x) \dots \xi_{(lim_l)_l}(x) \right]^T$  est le vecteur des FBF gauche, où  $\xi_{(li)l}(x)$  sont données par :

$$\xi_{(li)_l} = \frac{w_{fl}^l}{\sum_{l=1}^{m_{li}} w_{fl}^l} \quad (\text{III.12})$$

et  $\xi_{(li)_r} = \left[ \xi_{(li)r}(x) \dots \xi_{(lim_l)_r}(x) \right]^T$  est le vecteur des FBF droit, où  $\xi_{(li)r}$  sont données par :

$$\xi_{(li)_r} = \frac{w_{fr}^l}{\sum_{l=1}^{m_{li}} w_{fr}^l} \quad (\text{III.13})$$

$w_{fl}^l$  et  $w_{fr}^l$  sont les degrés d'activation correspondants à la  $l^{\text{ième}}$  ( $1 \leq l \leq m_{li}$ ) règle des systèmes flous type-2. Par conséquent, la matrice des FBF  $Y_1(x) = \text{diag} \left[ \xi_{11}^T(x), \dots, \xi_{1p}^T(x) \right]^T$  et  $\hat{F}(x, \Theta_1)$  est calculée par (III.7).

De même pour  $\hat{G}(x, \Theta_2)$  qui sera calculée par (III.9),  $Y_2(x) = \text{diag} \left[ \xi_{21}^T(x), \dots, \xi_{2p}^T(x) \right]^T$ , et  $Y_{2i}(x) = \text{diag} \left[ \xi_{2i1}^T(x), \dots, \xi_{2ip}^T(x) \right]^T$ , mais le vecteur  $\xi_{2ij}(x)$  ( $j=1, \dots, p$ ) sera obtenu par :

$$\xi_{2ij}(x) = \left( \xi_{(2ij)_l} + \xi_{(lij)_r} \right) / 2 \quad (\text{III.14})$$

avec  $\xi_{(2ij)_l} = \left[ \xi_{(2ij1)l}(x) \dots \xi_{(2ijm_{li})l}(x) \right]^T$  est le vecteur des FBF gauche, où  $\xi_{(2ij)l}(x)$  sont données par :

$$\xi_{(2ij)_l} = \frac{w_{fl}^l}{\sum_{l=1}^{m_{li}} w_{fl}^l} \quad (\text{III.15})$$

et  $\xi_{(2ij)_r} = \left[ \xi_{(2ij1)r}(x) \dots \xi_{(2ijm_{li})r}(x) \right]^T$  est le vecteur des FBF droit, où  $\xi_{(2ij)r}$  sont données par :

$$\xi_{(2ij)_r} = \frac{w_{fr}^l}{\sum_{l=1}^{m_{li}} w_{fr}^l} \quad (\text{III.16})$$

$w_{fl}^l$  et  $w_{fr}^l$  sont les degrés d'activation correspondants à la  $l^{\text{ième}}$  ( $1 \leq l \leq m_{li}$ ) règle des systèmes flous type-2.



### III.4.1.2. Loïs d'adaptation

D'après le théorème de l'approximation universelle, il existe des paramètres d'approximation optimaux  $\Theta_1^*$  et  $\Theta_2^*$  tels que  $\hat{F}(x, \Theta_1^*)$  et  $\hat{G}(x, \Theta_2^*)$  soient les meilleurs approximateurs possibles de  $F(x)$  et  $G(x)$ , respectivement [Wan-94]. On peut obtenir ces deux paramètres par l'utilisation d'une loi d'adaptation qui est munie d'un algorithme de projection [Kha-96]. Considérons  $\Omega_{\theta_1} = \{\Theta_1 \mid \Theta_1^T \Theta_1 \leq \beta_1\}$ ,  $\Omega_{\theta_1} = \{\Theta_1 \mid \Theta_1^T \Theta_1 \leq \beta_1 + \delta_1\}$ ,  $\Omega_{\theta_2} = \{\Theta_2 \mid \Theta_{2i}^T \Theta_{2i} \leq \beta_2\}$ ,  $\Omega_{\theta_2} = \{\Theta_2 \mid \Theta_{2i}^T \Theta_{2i} \leq \beta_2 + \delta_2\}$  pour certain  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$ ,  $\delta_1 > 0$  et  $\delta_2 > 0$ .

La loi d'adaptation de  $\Theta_1$  est la suivante :

$$\dot{\Theta}_1 = \gamma_1 \text{Proj}(\Theta_1, \Phi_1) \quad (\text{III.17})$$

où la projection  $\text{proj}(\Theta_1, \Phi_1)$  est définie par :

$$\text{proj}(\Theta_1, \Phi_1) = \begin{cases} \Phi_1 - \frac{(\|\Theta_1\|^2 - \beta_1) \Phi_1^T \Theta_1}{\delta_1 \|\Theta_1\|^2} \Theta_1 & \text{si } \|\Theta_1\|^2 = \beta_1 \text{ et } \Phi_1^T \Theta_1 > 0 \\ \Phi_1 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

avec  $\Phi_1 = Y_1^T B^T P e$ .

La loi d'adaptation de  $\Theta_2$  est la suivante :

$$\dot{\Theta}_{2i} = \gamma_2 \text{Proj}(\Theta_{2i}, \Phi_{2i}) \quad i = 1, \dots, p \quad (\text{III.19})$$

et  $\Phi_{2i} = Y_{2i}^T B^T P e u_i$

Pour mettre en œuvre notre commande adaptative floue indirecte, la matrice  $\hat{G}(x, \Theta_2)$  doit être inversible, on choisit  $\Omega_{\theta_2} = \{\Theta_2 \mid b_{ijk} \leq \theta_{2ijk} \leq c_{2ijk}\}$  et  $\Omega_{\theta_2} = \{\Theta_2 \mid b_{ijk} - \delta_2 \leq \theta_{2ijk} \leq c_{2ijk} + \delta_2\}$  pour  $1 \leq k \leq m_{2ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq p$  où  $b_{ijk}, c_{ijk}$  et  $\delta_2 > 0$  sont arbitrairement spécifiés par le concepteur. L'algorithme de la projection concernant  $\Theta_2$  est obtenu comme :

$$\dot{\theta}_{2ijk} = \begin{cases} \gamma_2 \left(1 + (c_{ijk} - \theta_{2ijk}) / \delta_2\right) \phi_{2ijk} & \text{si } (\theta_{2ijk} > c_{ijk} \text{ et } \phi_{2ijk} > 0) \\ \gamma_2 \left(1 + (\theta_{2ijk} - b_{ijk}) / \delta_2\right) \phi_{2ijk} & \text{si } (\theta_{2ijk} < b_{ijk} \text{ et } \phi_{2ijk} < 0) \\ \gamma_2 \phi_{2ijk} & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

avec  $\phi_{2ijk}$  sont des éléments du vecteur  $\Phi_{2i}$

### III.4.1.3. Loi de commande [Cha-00]

Avant de synthétiser la loi de commande on définit  $\Delta F(x) = F(x) - \hat{F}(x, \Theta_1^*)$  et  $\Delta G(x) = G(x) - \hat{G}(x, \Theta_2^*)$  qui dénote l'erreur minimale de l'approximation. Pour concevoir notre commande adaptative indirecte on a besoin des suppositions suivantes :

A1 : La matrice  $\hat{G}(x, \Theta_2)$  est inversible.

A2 : Il existe une constante positive  $\kappa > 0$  et une fonction positive  $0 \leq M_g(x) < 1$ , telles que

$$\left| \lambda_i \left( \Delta G(x) \hat{G}^{-1}(x, \Theta_2) \right) \right| \leq \kappa \text{ et } \max_i \left( \sum_{j=1}^p \left| \left( \Delta G(x) \hat{G}^{-1}(x, \Theta_2) \right)_{ij} \right| \right) \leq M_g(x) \quad \forall 1 \leq i \leq p.$$

A3 : Il existe une fonction  $M_e(x) > 0$ , telle que

$$\left| \left( \Delta F + \Delta G \hat{G}^{-1} \left( -\hat{F} + y_r^{(n)} - Ke \right) \right) \right| \leq M_e(x) \quad \forall 1 \leq 0 \leq p$$

A4 : Il existe une constante  $M_d > 0$ , telle que  $\int_0^\infty \|d(t)\|^2 dt \leq M_d$  c'est à dire  $d \in L_2[0, \infty)$

La loi de commande est donnée par le théorème suivant :

#### Théorème 1

On considère le système non linéaire MIMO (III.1) avec les suppositions A1-A4. S'il existe une matrice  $P = P^T > 0$  qui satisfait l'équation similaire de Riccati :

$$PA + A^T P + Q + PB \left( \frac{1}{\rho^2} I - (1 - \kappa) R^{-1} \right) B^T P = 0 \quad (\text{III.21})$$

où  $\rho > 0$  est un niveau d'atténuation donné,  $Q = Q^T > 0$  est une matrice de pondération prescrite et  $R = \text{diag}[r_1 I, \dots, r_p I]$  pour certains gains positifs  $r_1, \dots, r_p$ , alors la loi de commande adaptative est :

$$u = \hat{G}^{-1}(x, \Theta_2) \left( -\hat{F}(x, \Theta_1) + y_r^{(n)} - Ke + u_h + u_s \right) \quad (\text{III.22})$$

avec

$$u_h = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T P e \quad (\text{III.23})$$

$$u_s = -\frac{M_e(x)}{1 - M_g(x)} \text{sgn}(B^T P e) \quad (\text{III.24})$$

garantie que :

- i) toutes les variables du système en boucle fermée sont bornées.
- ii) et la performance de poursuite  $H^\infty$  est atteinte.

**Démonstration**

En prenant compte de l'erreur d'approximation et la loi de commande (III.22), l'équation de la dynamique de l'erreur (III.5) peut être exprimée comme :

$$\dot{e} = Ae + B(-Y_1\tilde{\Theta}_1 - Y_2\tilde{\Theta}_2u + \Delta F + \Delta Gu + u_h + u_s + d) \quad (\text{III.25})$$

où  $\tilde{\Theta}_1 = \Theta_1 - \Theta_1^*$  et  $\tilde{\Theta}_2 = \Theta_2 - \Theta_2^*$ . On choisit la fonction de Lyapunov comme suit :

$$V = \frac{1}{2}e^T Pe + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\Theta}_1^T \tilde{\Theta}_1 + \frac{1}{2\gamma_2}Tr(\tilde{\Theta}_2^T \tilde{\Theta}_2) \quad (\text{III.26})$$

La dérivée de  $V$  par rapport au temps le long de trajectoire de l'erreur (III.25) est :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{2}e^T (A^T P + PA)e + u_h^T (I + \Delta G\hat{G}^{-1})^T B^T Pe + d^T B^T Pe \\ & + u_s^T (I + \Delta G\hat{G}^{-1})^T B^T Pe + (\Delta F + \Delta G\hat{G}^{-1}(-\hat{F} + y_r^{(n)} - Ke))^T B^T Pe \\ & - \tilde{\Theta}_1^T Y_1^T B^T Pe + \frac{1}{\gamma_1}\dot{\tilde{\Theta}}_1^T \tilde{\Theta}_1 - u^T \tilde{\Theta}_2^T Y_2^T B^T Pe + \frac{1}{\gamma_2}Tr(\dot{\tilde{\Theta}}_2^T \tilde{\Theta}_2) \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

D'après la loi d'adaptation (III.17) on peut garantir que  $(1/\gamma_1)\dot{\tilde{\Theta}}_1^T \tilde{\Theta}_1 - \tilde{\Theta}_1^T Y_1^T B^T Pe \leq 0$  et  $\Theta_1(t) \in \Omega_{\theta_1}$ , pour tout  $t \geq 0$  si  $\Theta_1(0) \in \Omega_{\theta_1}$  [Kha-96]. On a aussi la loi d'adaptation (III.19) qui

nous assure que  $\frac{1}{\gamma_2}Tr(\dot{\tilde{\Theta}}_2^T \tilde{\Theta}_2) - u^T \tilde{\Theta}_2^T Y_2^T B^T Pe \leq 0$  et  $\Theta_2(t) \in \Omega_{\theta_2}$  pour tout

$t \geq 0$  si  $\Theta_2(0) \in \Omega_{\theta_2}$ . D'autre part, en utilisant  $u_s$  de (III.24) et A2-A3, on obtient

$$u_s^T (I + \Delta G\hat{G}^{-1})^T B^T Pe + (\Delta F + \Delta G\hat{G}^{-1}(-\hat{F} + y_r^{(n)} - Ke))^T B^T Pe \leq 0.$$

Alors on peut conclure que par l'utilisation de la commande  $u_h$  de (III.23) et l'équation similaire de Riccati de (III.22),  $\dot{V}$  peut être bornée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \frac{1}{2}e^T \left( A^T P + AP + PB \left( \frac{1}{\rho^2} I - R^{-1} (I + \Delta G\hat{G}^{-1})^T \right) B^T P \right) e + \frac{1}{2}\rho^2 d^T d \\ \leq & -\frac{1}{2}e^T Qe + \frac{1}{2}\rho^2 d^T d \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

En intégrant l'inégalité ci-dessus de  $t=0$  à  $T$  on trouve :

$$2V(T) + \int_0^T \|e(t)\|_Q^2 dt \leq 2V(0) + \rho^2 \int_0^T \|d(t)\|^2 dt \quad 0 \leq T \leq \infty \quad (\text{III.29})$$

Qui veut dire que, la performance  $H^\infty$  (III.29) est atteinte. De  $V(t)$  dans (III.26) et la supposition A4, il est clair que  $e(t) \in \Omega_e = \left\{ e \mid e^T Pe \leq 2V(0) + \rho^2 M_d \right\}$ , alors, toutes les variables impliquées dans le système en boucle fermée sont bornées.

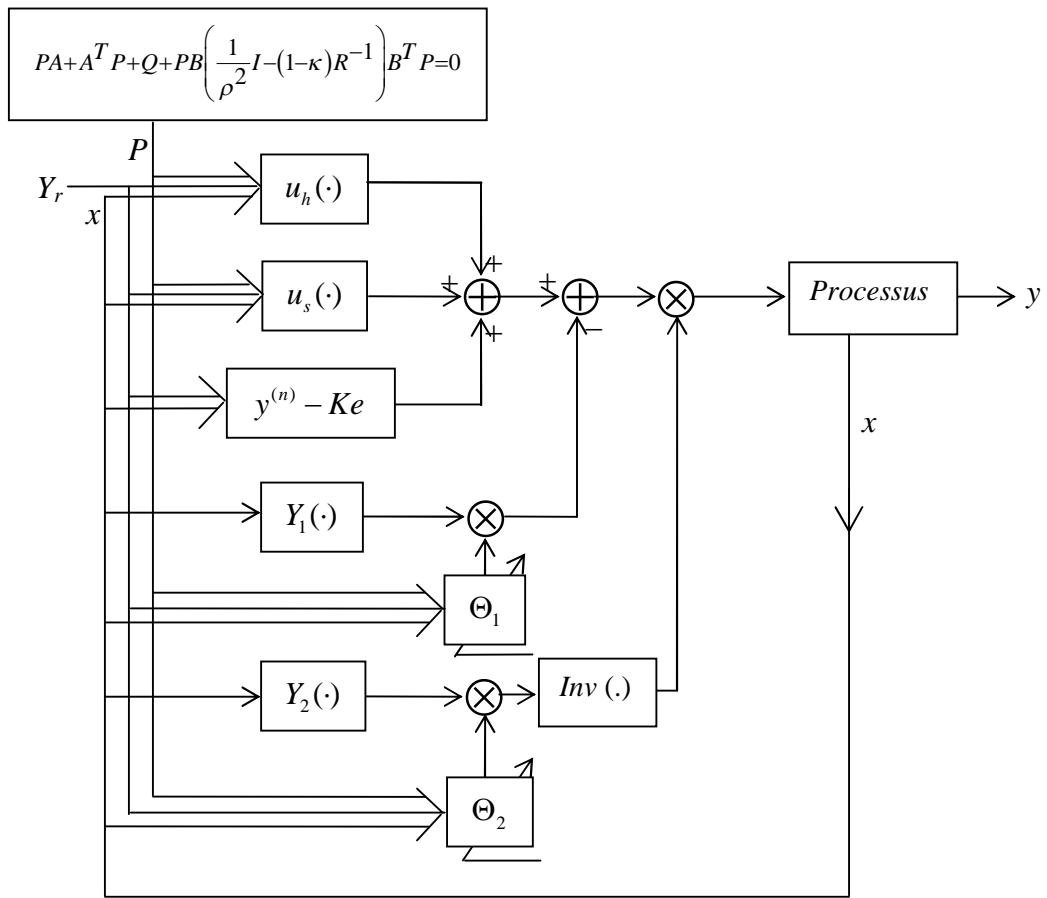


Fig.III.1. Schéma structurel de la commande adaptative floue indirecte.

La structure de la commande adaptative floue indirecte (III.22) avec (III.17), (III.19) et (III.21)-(III.24) est représentée par la fig.III.1. Cette structure de commande est composée de trois parties : les systèmes flous adaptatifs  $\hat{F}(x, \Theta_1)$  et  $\hat{G}(x, \Theta_2)$  pour approximer la dynamique de  $F(x)$  et  $G(x)$ , la commande  $u_s$  pour éliminer l'effet de l'erreur d'approximation et la commande type  $H^\infty$   $u_h$  pour accomplir la performance de poursuite désirée.

**Remarque 1**

1. Pour toutes les conditions initiales bornées, l'ensemble compact  $U_x$  peut être explicitement construit comme  $U_x = \{x | e(t) \in \Omega_e, Y_r(t) \in \Omega_r\}$ .

2. Le terme incertain dû à  $\Delta G(x)$  et  $\Delta F(x)$ , décrit dans A2 et A3, exige seulement d'être borné par les fonctions  $M_g(x)$  et  $M_e(x)$  plutôt que des constantes fixées. Puisque le terme,  $u_s$  est utilisé pour éliminer l'effet de ces incertitudes sur l'erreur de poursuite, ce qui fait que le nombre de règles SI-ALORS peut être considérablement diminué.
3. L'inégalité  $(1/\rho^2)I \leq (1-\kappa)R^{-1}$  est utilisée comme une condition suffisante pour garantir la résolution de (III.21). Pour avoir une meilleure approximation la valeur limite  $\kappa$  doit être la plus petite possible et les éléments diagonaux de  $R^{-1}$  doivent être aussi petits.
4. Pour éviter la discontinuité du terme  $\text{sgn}(B^T P e)$  dans la commande  $u_s$  qui peut présenter un bruit indésirable, on utilise la modification exponentielle [Ioa-96].

### Théorème 2

On considère le système non linéaire MIMO (III.1). Sous les mêmes conditions du théorème 1, si la commande  $u_s$  (III.24) est modifiée en la commande continue :

$$u_s = -\frac{M_E(x) \quad M_E(x)B^T P e}{1 - \kappa \|M_E(x)B^T P e\| + \varepsilon e^{-\nu t}} \quad (\text{III.30})$$

où  $M_E(x) = \sqrt{P}M_e(x)$  et  $\varepsilon > 0$ ,  $\nu > 0$  sont des constantes positives, alors :

- i) toutes les variables du système en boucle fermée sont bornées,
- ii) et la performance de poursuite  $H^\infty$  est atteinte.

### Démonstration

En suivant la démonstration du théorème 1 et en utilisant la commande  $u_s$  de (III.30) on obtient

$$u_s^T \left( I + \Delta G \hat{G}^{-1} \right)^T B^T P e + \left( \Delta F + \Delta G \hat{G}^{-1} (-\hat{F} + y_r^{(n)} - Ke) \right)^T B^T P e \leq \varepsilon e^{-\nu t} \quad (\text{III.31})$$

Par conséquent, la dérivée  $\dot{V}$  peut être bornée comme :

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} e^T Q e + \frac{1}{2} \rho^2 d^T d + \varepsilon e^{-\nu t} \quad (\text{III.32})$$

En intégrant cette inégalité de  $t = 0$  à  $T$  on obtient :

$$2V(T) + \int_0^T \|e(t)\|_Q^2 dt \leq 2V(0) + \frac{2\varepsilon}{\nu} (1 - e^{-\nu T}) + \rho^2 \int_0^T \|d(t)\|^2 dt \quad (\text{III.33})$$

Ce résultat implique que toutes les variables sont bornées et la performance de poursuite type  $H^\infty$  est atteinte.

### III.4.2. Commande adaptative directe

Pour développer la commande adaptative floue directe, on suppose l'hypothèse suivante :  
A5 : la matrice  $G(x)$  est connue et inversible.

Après quelques manipulations, l'équation dynamique de l'erreur de poursuite (III.5) devient :

$$\dot{e} = Ae + BG(x)(H(x, Y_r) + u) + Bd \quad (\text{III.34})$$

où  $H(x, Y_r) = G^{-1}(x)(F(x) + Ke - y_r^{(n)})$ .

Dans cette commande le système flou est utilisé comme un régulateur, pour concevoir la commande sans passer par l'estimation des fonctions  $F(x)$  et  $G(x)$ . Soit le système flou suivant :

$$\hat{H}(x, Y_r, \Theta_3) = Y_3(x, Y_r) \Theta_3 \quad (\text{III.35})$$

avec  $Y_3(x, Y_r) = \text{diag} [\xi_{31}^T(x) \dots \xi_{3p}^T(x)]$  est la matrice des FBF, et  $\xi_{3i} = [\xi_{3i1}(x) \dots \xi_{3im_{3i}}(x)]$  où les FBF  $\xi_{3il}(x)$  sont donnés similairement comme dans (III.6),  $\Theta_{3i} \in R^{m_{3i}}$  pour un certain  $m_{3i} > 0$  et  $\Theta_3 = [\Theta_{31}^T \dots \Theta_{3p}^T]^T \in R^{m_3}$  avec  $m_3 = \sum_{i=1}^p m_{3i}$ , pour approximer  $H(x, Y_r)$ .

On considère  $\Omega_{\theta_3} = \{\Theta_3 \mid \Theta_3^T \Theta_3 \leq \beta_3\}$  et  $\Omega_{\theta_3} = \{\Theta_3 \mid \Theta_3^T \Theta_3 \leq \beta_3 + \delta_3\}$  pour certains  $\beta_3 > 0$  et  $\delta_3 > 0$ . Soit  $\Theta_3^* \in \Omega_{\theta}$  le vecteur optimal des paramètres d'approximation. On définit  $\Delta H(x, Y_r) = H(x, Y_r) - \hat{H}(x, Y_r, \Theta_3^*)$ , et on suppose que :

A6 : il existe une fonction  $M_h(x) > 0$ , telle que  $\left| (G(x) \Delta H(x, Y_r))_i \right| \leq M_h(x), \quad \forall 1 \leq i \leq p$

### Théorème 3

Soit le système non linéaire MIMO (III.1). On considère que les suppositions  $A_4 - A_6$  sont satisfaites. S'il existe une matrice  $P = P^T > 0$  qui satisfait l'équation similaire de Riccati :

$$PA + A^T P + Q + PB \left( \frac{1}{\rho^2} I - R^{-1} \right) B^T P = 0 \quad (\text{III.36})$$

alors, la loi de commande adaptative floue directe est donnée par :

$$u = -\hat{H}(x, Y_r, \Theta_3) + G^{-1}(x)(u_h + u_s) \quad (\text{III.37})$$

avec

$$u_h = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T P e \quad (\text{III.38})$$

$$u_s = -M_h(x) \text{sgn}(B^T P e) \quad (\text{III.39})$$

$$\dot{\Theta}_3 = \gamma_3 \text{Proj}(\Theta_3, \Phi_3) \quad (\text{III.40})$$

où  $\gamma_3 > 0$  et  $\Phi_3 = Y_3^T G^T B^T P e$ , garantie que

i) toutes les variables du système en boucle fermé sont bornées,

ii) et la performance de poursuite  $H^\infty$  est atteinte.

### Démonstration

En substituant la loi de commande (III.37) dans l'équation de la dynamique d'erreur (III.34) on obtient :

$$\dot{e} = A e + B(-GY_3 \tilde{\Theta}_3 - G\Delta H + u_h + u_s + d) \quad (\text{III.41})$$

où  $\tilde{\Theta}_3 = \Theta_3 - \Theta_3^*$ . On choisit la fonction de Lyapunov comme

$$W = \frac{1}{2}e^T P e + \frac{1}{2\gamma_3} \tilde{\Theta}_3^T \tilde{\Theta}_3 \quad (\text{III.42})$$

En tenant compte de la commande  $H^\infty$  (III.38) et de l'équation similaire de Riccati (III.36), la dérivée de  $W$  devient :

$$\dot{W} \leq \frac{1}{2}e^T Q e + \frac{1}{2}\rho^2 d^T d + (u_s + G\Delta H)^T B^T P e - \tilde{\Theta}_3^T Y_3^T G^T B^T P e + \frac{1}{\gamma_3} \dot{\Theta}_3^T \tilde{\Theta}_3 \quad (\text{III.43})$$

A partir de la loi d'adaptation (III.40), on a  $(1/\gamma_3) \dot{\Theta}_3^T \tilde{\Theta}_3 - \tilde{\Theta}_3^T Y_3^T G^T B^T P e \leq 0$  et  $\Theta_3(t) \in \Omega_{\theta_3}$  pour tout  $t \geq 0$ . D'après  $u_s$  (III.31) et la supposition A6, on obtient  $(u_s + G\Delta H)^T B^T P e \leq 0$ .

Donc,  $\dot{W}$  est bornée comme suit :

$$\dot{W} \leq \frac{1}{2}e^T Q e + \frac{1}{2}\rho^2 d^T d \quad (\text{III.44})$$

L'intégration de cette inégalité de  $t=0$  à  $T$  donne :

$$2W(T) + \int_0^T \|e(t)\|_Q^2 dt \leq 2W(0) + \rho^2 \int_0^T \|d(t)\|^2 dt \quad 0 \leq T < \infty \quad (\text{III.45})$$

Ce qui implique que la performance  $H^\infty$  est accomplie. A partir de  $W(t)$  dans (III.42) et la supposition A4, il est clair que  $e(t) \in \Omega_e = \{e \mid e^T P e \leq 2W(0) + \rho^2 M_d\}$ , alors, toutes les variables impliquées dans le système en boucle fermée sont bornées.

Le schéma de contrôle de la commande adaptative floue directe (III.36)-(III.40), garantissons la performance de poursuite  $H^\infty$  est présentée par la figure suivante :

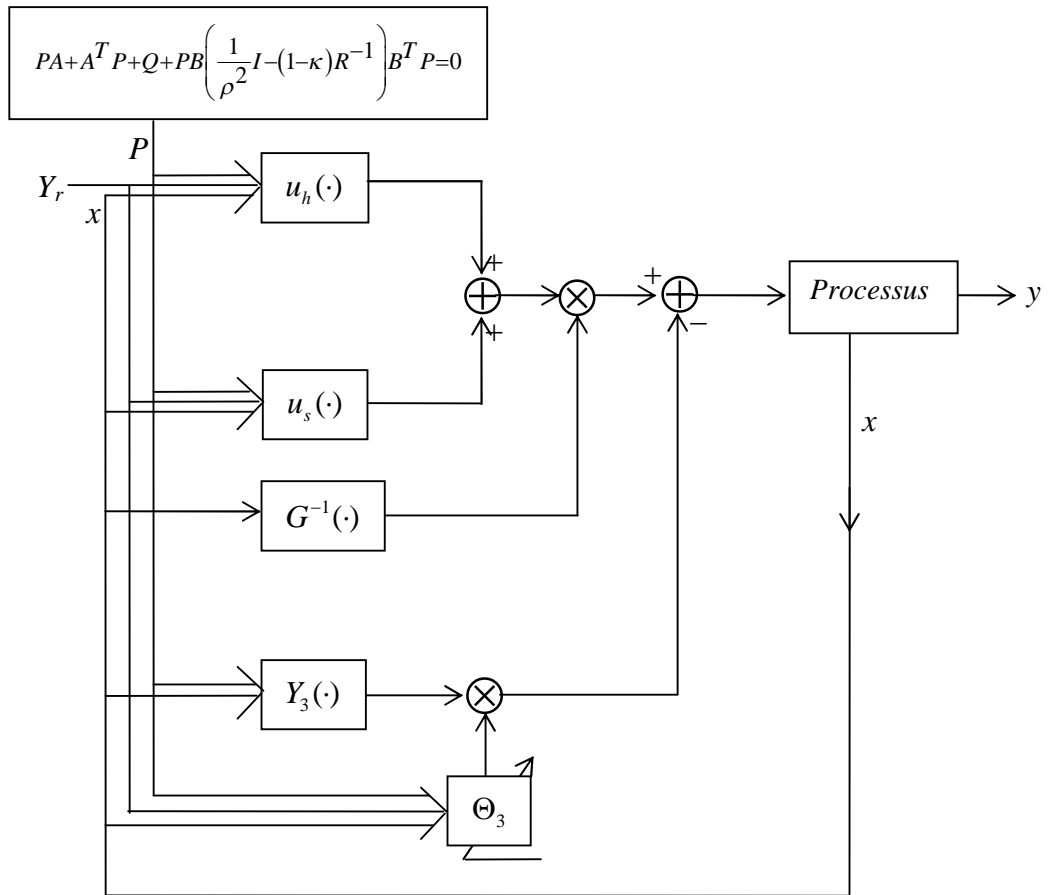


Fig.III.2. Schéma structurel de la commande adaptative floue directe.

Pour éviter la discontinuité du terme  $\text{sgn}(B^T P e)$ , qui peut présenter un bruit indésirable, on utilise la modification exponentielle.

**Théorème 4**

On considère le système non linéaire MIMO (III.1). Sous les mêmes conditions du théorème 3, si la commande  $u_s$  est modifiée en une commande continue :

$$u_s = -M_H(x) \frac{M_H(x) B^T P e}{\|M_H(x) B^T P e\| + \varepsilon e^{-\nu t}} \tag{III.46}$$

alors

- i) toutes les variables sont bornées,
- ii) la performance de poursuite  $H^\infty$  est atteinte.

**Démonstration**

Similairement à la démonstration du théorème 3 et en utilisant de (III.46), la dérivée de la fonction de Lyapunov peut être bornée comme :



$$\dot{W} \leq -\frac{1}{2}e^T Q e + \frac{1}{2}\rho^2 d^T d + \varepsilon e^{-\nu t} \quad (\text{III.47})$$

En intégrant cette inégalité de  $t = 0$  à  $T$ , on obtient :

$$2W(T) + \int_0^T \|e(t)\|_Q^2 dt \leq 2W(0) + \frac{2\varepsilon}{\nu}(1 - e^{-\nu T}) + \rho^2 \int_0^T \|d(t)\|^2 dt \quad (\text{III.48})$$

Ce résultat exprime que toutes les variables impliquées dans le système en boucle fermée sont bornées, et que la performance de poursuite type  $H^\infty$  est accomplie.

### Remarque 2

1. L'erreur de poursuite du système en boucle fermée dépend de l'erreur d'approximation et du choix initial de l'état des fonctions estimées et des paramètres des systèmes flous.

2. Le terme  $\frac{2\varepsilon}{\nu}(1 - e^{-\nu T})$  qui est inclu dans le critère de performance  $H^\infty$  (III.33) et (III.48), apparaît à cause des modifications du terme de commande  $u_s$ , mais il peut être considéré comme une perturbation externe.

### III.5. Exemple de simulation

Il s'agit d'appliquer les commandes adaptatives floues, directes et indirectes, développées ci-dessus au système non linéaire MIMO, masse-ressort-amortisseur, représenté sur la fig.III.3, afin que les sorties du système suivent des trajectoires désirées. Ce système mécanique est décrit par les deux équations différentielles suivantes :

$$M_1 \ddot{y}_1 = u_1 - f_{K_1}(x) - f_{B_1}(x) + f_{K_2}(x) + f_{B_2}(x) - f_{C_1}(x) + f_{C_2}(x) + d_1 \quad (\text{III.49})$$

$$M_2 \ddot{y}_2 = u_2 - f_{K_2}(x) - f_{B_2}(x) - f_{C_2}(x) + d_2 \quad (\text{III.50})$$

où  $x = [y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2]^T$ , les forces des ressorts sont  $f_{K_1}(x) = K_{10}y_1 + \Delta K_1 y_1^3$ ,

$f_{K_2}(x) = K_{20}(y_2 - y_1) + \Delta K_2 (y_2 - y_1)^3$  et les forces de frottements sont  $f_{B_1}(x) = B_{10}\dot{y}_1 + \Delta B_1 \dot{y}_1^2$ ,

$f_{B_2} = B_{20}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + \Delta B_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2$ . Les valeurs des paramètres nominaux sont  $M_{10} = 0.25$ ,

$M_{20} = 0.2$ ,  $K_{10} = 1$ ,  $K_{20} = 2$ ,  $B_{10} = 2$ , et  $B_{20} = 2.2$ . Les perturbations sont données par

$\Delta M_1 = 0.05 \sin(y_1)$ ,  $\Delta M_2 = 0.05 \sin(y_1 - y_2)$ ,  $\Delta K_1 = 0.1$ ,  $\Delta K_2 = 0.12$ ,  $\Delta B_1 = 0.2$ ,  $\Delta B_2 = 0.15$ ,

$d_1 = 0.2 \sin(3t) \exp(-0.2t)$ , et  $d_2 = 0.2 \cos(3t) \exp(-0.1t)$ . Supposant les forces de friction de

coulomb  $f_{C_1} = 0.02 \operatorname{sgn}(\dot{y}_1)$  et  $f_{C_2} = 0.02 \operatorname{sgn}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$ , et une petite force  $\Delta u_{12} = 0.1 u_2$  pour

$M_1$ , et  $\Delta u_{21} = 0.15 u_1$  pour  $M_2$ . On pose  $y = [y_1, y_2]^T$  et  $u = [u_1, u_2]^T$ .

L'objectif de notre commande est de forcer les sorties du système  $y_1$  et  $y_2$  à suivre, respectivement ; les trajectoires désirées sinusoïdales  $y_{r_1}(t) = 0.5\sin(t)$  et  $y_{r_2}(t) = 0.5\cos(t)$ .

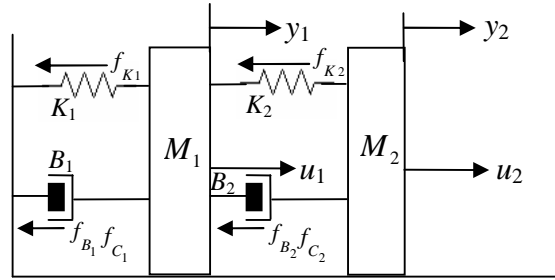


Fig.III.3. Système masse-ressort-amortisseur.

Dans ce qui suit, nous allons appliquer à notre système au premier lieu l'algorithme de la commande adaptative floue indirecte (proposé dans le théorème 2), où on va étudier deux cas : une commande développée à base des systèmes flous type-1, et une commande développée à base des systèmes flous type-2. Une étude comparative sera menée entre ces deux commandes en présence de fortes perturbations.

Au deuxième lieu, l'algorithme de la commande adaptative floue directe (proposé dans le théorème 4) est appliqué, une fois en utilisant les systèmes flous type-1 et une autre par l'utilisation des systèmes flous type-2.

### III.5.1. Cas de la commande adaptative floue indirecte

#### III.5.1.1. Type-1

Dans ce cas, on utilise la commande adaptative floue indirecte proposée dans le théorème 2 pour commander le système masse-ressort-amortisseur, selon les étapes suivantes :

Etape 1

Les fonctions  $F(x)$  et  $G(x)$  sont supposées inconnues, on construit le système flou  $\hat{F}(x, \Theta_1)$  pour approximer  $F(x)$ , qui utilise comme entrée quatre variables  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  et  $x_4(t)$ . Pour chaque variable on définit cinq ensembles flous type-1, dont leurs fonctions d'appartenance sont définies comme suit (Fig.III.4.a):

$$\mu_{F_i^1}(x_i) = \frac{1}{(1+\exp(5(x_i+1)))}, \quad \mu_{F_i^2}(x_i) = \exp(-2(x_i+0.5)^2), \quad \mu_{F_i^3}(x_i) = \exp(-2x_i^2),$$

$$\mu_{F_i^4}(x_i) = \exp(-2(x_i-0.5)^2), \quad \mu_{F_i^5}(x_i) = \frac{1}{(1+\exp(-5(x_i-1)))}.$$

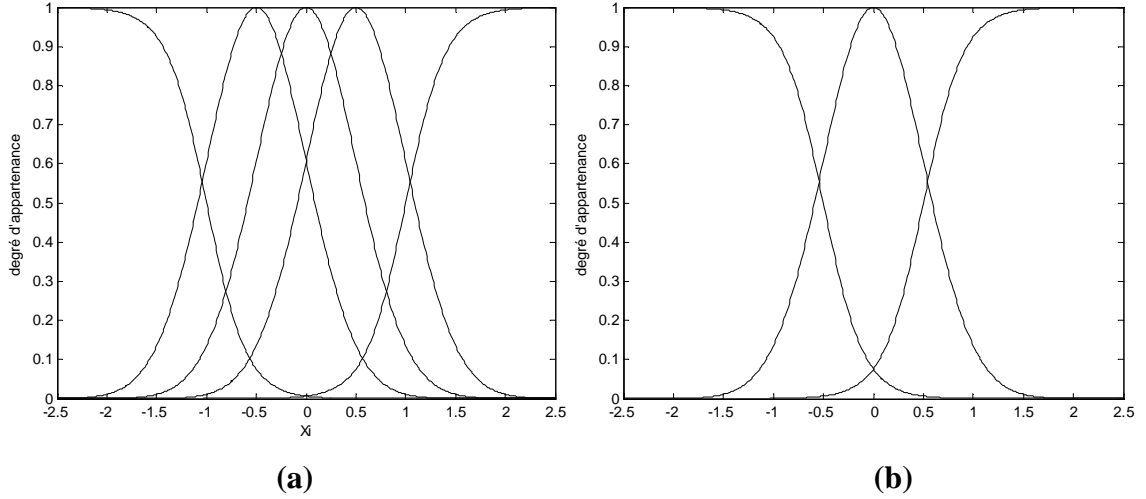


Fig.III.4. Fonction d'appartenance type-1 pour : (a) la fonction  $F(x)$ , (b) la fonction  $G(x)$ .

Par conséquent, la base des règles va contenir  $5^4 = 625$  règles, ce qui représente un nombre énorme, il nécessite un grand temps de calcul et la mise en œuvre de la commande proposée va être plutôt difficile.

Selon la bonne connaissance des propriétés physiques du système (les forces du ressort sont toujours dominées par  $y_1, y_2$ , et les forces de frottement sont dominées par  $\dot{y}_1, \dot{y}_2$ ) et puisque l'erreur d'approximation va être atténuée par l'approche proposée, on utilisera une base de règles qui contient 50 règles seulement. Donc un approximateur flou simplifié et

partitionné est employé dans le sens que  $\sum_{l=1}^{25} \xi_{1il} \theta_{1il}$ ,  $i = 1, 2$  est utilisé pour l'apprentissage du

comportement des forces du ressort, et  $\sum_{l=26}^{50} \xi_{1il} \theta_{1il}$  est utilisé pour l'apprentissage du

comportement des forces de frottement. Les règles utilisées sont :

$$R_{ij}^{(l)}: \text{Si } x_1 \text{ est } F_1^i \text{ et } x_3 \text{ est } F_3^j, \text{ Alors } y \text{ est } F_{ij}^l, \quad i, j = 1, \dots, 5, l = 1, \dots, 5, \quad (\text{III.51})$$

$$R_{ij}^{(l)}: \text{Si } x_2 \text{ est } F_2^i \text{ et } x_4 \text{ est } F_4^j, \text{ Alors } y \text{ est } F_{ij}^l, \quad i, j = 1, \dots, 5, l = 26, \dots, 50. \quad (\text{III.52})$$

Les fonctions floues de base sont obtenues par :

$$\xi_{111}(x) = \mu_{F_1^1}(x_1) \mu_{F_3^1}(x_3) / D_1, \xi_{112}(x) = \mu_{F_1^1}(x_1) \mu_{F_3^2}(x_3) / D_1, \dots, \xi_{1125}(x) = \mu_{F_1^5}(x_1) \mu_{F_3^5}(x_3) / D_1,$$

$$\xi_{1126}(x) = \mu_{F_2^1}(x_2) \mu_{F_4^1}(x_4) / D_2, \dots, \xi_{1125}(x) = \mu_{F_1^5}(x_1) \mu_{F_3^5}(x_3) / D_1$$

avec  $D_1 = \sum_{i,j=1}^5 \mu_{F_1^i}(x_1) \mu_{F_3^j}(x_3)$  et  $D_2 = \sum_{i,j=1}^5 \mu_{F_2^i}(x_2) \mu_{F_4^j}(x_4)$ . La matrice des FBF est donnée

comme  $Y_1 = \text{diag} [\xi_{11}^T, \xi_{12}^T]$  où  $\xi_{11} = [\xi_{111} \xi_{112} \dots \xi_{1150}]^T \in R^{50}$  et  $\xi_{12} = \xi_{11}$ . Donc,  $\hat{F}(x, \Theta_1) =$

$Y_1(x) \Theta_1$  avec  $\Theta_1 = [\Theta_{11}^T \ \Theta_{12}^T]$ ,  $\Theta_{11} = [\theta_{111} \dots \theta_{1150}]^T \in R^{50}$  et  $\Theta_{12} = [\theta_{111} \dots \theta_{1150}]^T \in R^{50}$ .

Le terme  $G(x)$  est approximé par le système flou  $\hat{G}(x, \Theta_2)$  (III.10), qui utilise deux variables d'entrée  $x_1(t)$  et  $x_3(t)$ . On définit trois ensembles flous pour chaque variable, qui sont caractérisées par les fonctions d'appartenance suivantes (Fig.III.4.a) :

$$\mu_{A_1^1}(x_i) = \frac{1}{(1 + \exp(5(x_i + 0.5)))}, \quad \mu_{A_1^2}(x_i) = \exp(-2x_i^2) \quad \text{et} \quad \mu_{A_1^3}(x_i) = \frac{1}{(1 - \exp(5(x_i - 0.5)))}$$

et la base de règles contient 9 règles floues de la forme :

$$R_{ij}^{(l)}: \text{ Si } x_1 \text{ est } A_1^i \text{ et } x_3 \text{ est } A_3^j, \text{ Alors } y \text{ est } G_{ij}^l, \quad i, j = 1, 2, 3, l = 1, \dots, 9. \quad (\text{III.53})$$

On met  $\xi_{211} = \xi_{222} = [\xi_{2111} \dots \xi_{2119}]^T$  avec  $\xi_{2111}(x) = \mu_{A_1^1}(x_1)\mu_{A_3^1}(x_3)/D_3, \dots, \xi_{2119}(x) = \mu_{A_1^1}(x_1)\mu_{A_3^9}(x_3)/D_3$  avec  $D_3 = \sum_{i,j=1}^3 \mu_{A_1^i}(x_1)\mu_{A_3^j}(x_3)$ . Donc,  $\hat{G}(x, \Theta_2) = Y_2(x)\Theta_2$  où  $Y_{21} = \text{diag}[\xi_{211}^T, 0]$ ,  $Y_{22} = \text{diag}[0, \xi_{222}^T]$ ,  $\Theta_{21} = [\Theta_{211}^T \ 0]$ ,  $\Theta_{22} = [0 \ \Theta_{222}^T]$ ,  $\Theta_{211} = [\theta_{2111} \dots \theta_{2119}]^T$  et  $\Theta_{222} = [\theta_{2221} \dots \theta_{2229}]^T$ .

Etape 2

On sélectionne la matrice de gain  $K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ , tel que la matrice  $A$  soit stable.

Etape 3

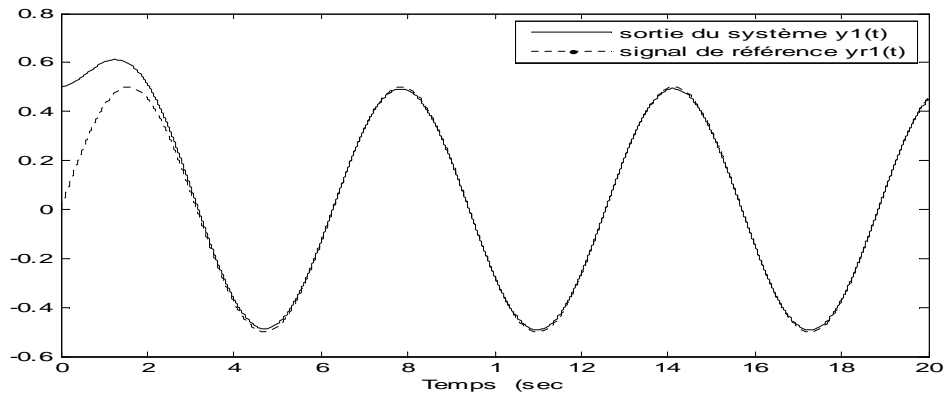
Pour résoudre l'équation similaire de Riccati (III.21), on prend  $\rho = 0.05$  et on choisit

$$Q = 2I_{4 \times 4}, \quad R = 0.8\rho^2 I_{2 \times 2} \quad \text{et} \quad \kappa = 0.2, \quad \text{on obtient} \quad P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

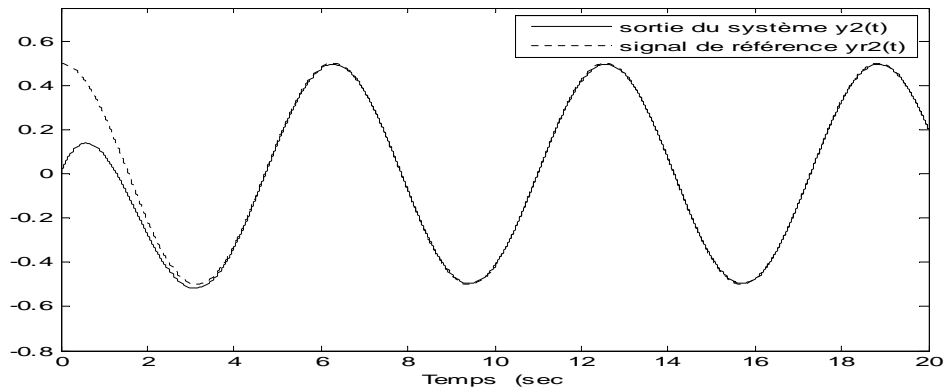
Etape 4

On obtient la commande adaptative floue indirecte de (III.22), (III.23), (III.17), (III.30), (III.20) avec  $M_E(x) = 0.5 + 0.25x^2$ ,  $\gamma_1 = 20$ ,  $\gamma_2 = 2$ ,  $\beta_1 = 2500$ ,  $\delta_1 = 20$ ,  $b_{11k} = b_{22k} = 0.2$ ,  $c_{11k} = c_{22k} = 5$ ,  $k = 1, \dots, 9$ , et  $\delta_2 = 0.1$ .

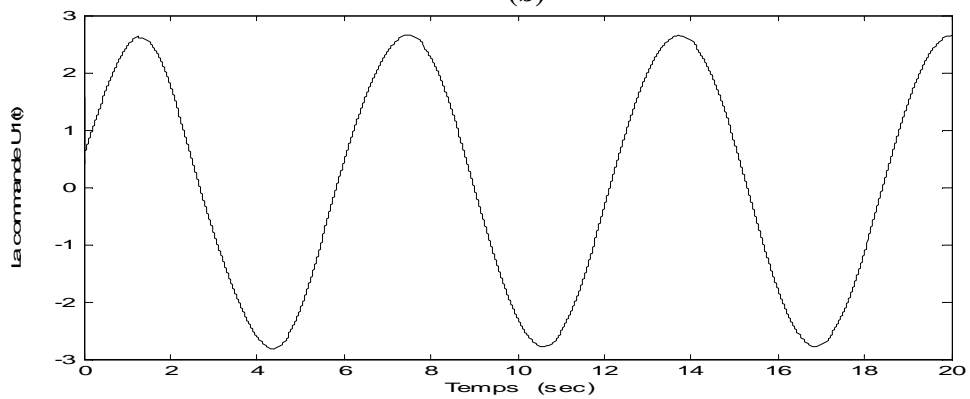
Pour l'état initial on choisit  $y_1(0) = 0.5$ ,  $y_2(0) = \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$ , et les valeurs initiales des paramètres ajustés sont  $\Theta_1(0) = 0_{100 \times 1}$  et  $\Theta_{211}(0) = \Theta_{222}(0) = I_{9 \times 1}$ .



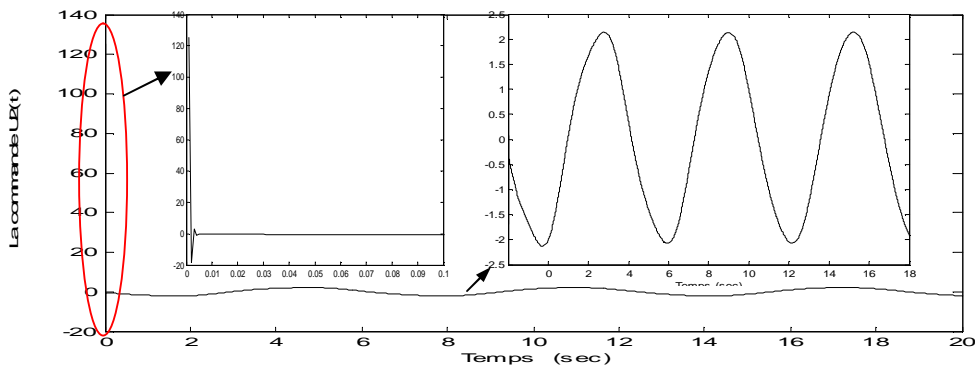
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig.III.5. Sorties du système et ses commandes en utilisant les systèmes flous type-1  
 a) Réponse en position  $y_1(t)$ , b) Réponse en position  $y_2(t)$ , c) Signal de commande  $u_1(t)$ ,  
 d) Signal de commande  $u_2(t)$ .

Les résultats de simulation illustrés dans fig.III.5, nous permettent de constater que les signaux de commande sont lisses et que les trajectoires réelles et désirées sont presque superposées.

Dans le régime transitoire l'erreur est importante entre les deux sorties, réelle et désirée, cela est dû aux choix des conditions initiales et à l'initialisation des paramètres ajustables. Ces résultats montrent l'efficacité de l'approche proposée en utilisant les systèmes flous type-1 surtout qu'on a beaucoup diminué le nombre des règles utilisées.

### III.5.1.2. Type-2

La conception de cette commande reste la même que celle du type-1, sauf que les systèmes flous  $\hat{F}$  et  $\hat{G}$  seront obtenus par l'utilisation de systèmes flous type-2.

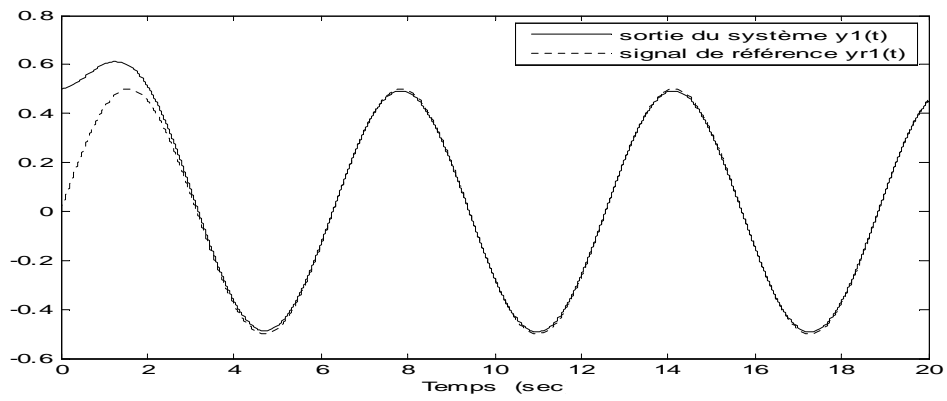
La fonction  $F(x)$  sera approximée par un système flou type-2 à quatre entrées  $x_i$ ,  $i=1,2,3,4$ . Chaque entrée est définie par trois ensembles flous type-2, de forme intervalle, représentés par leurs fonctions d'appartenance supérieures et inférieures suivantes (fig.III.7) :

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{\hat{F}_i^1}(x_i) &= \frac{1}{(1+\exp(5(x_i+1)))} & \underline{\mu}_{\hat{F}_i^1}(x_i) &= \frac{0.92}{(1+\exp(5(x_i+1.5)))} \\ \bar{\mu}_{\hat{F}_i^2}(x) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+0.15}{0.1}\right)^2} & x < -0.15 \\ 1 & -0.15 < x < 0.15 \\ e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-0.15}{0.1}\right)^2} & x > 0.15 \end{cases} & \underline{\mu}_{\hat{F}_i^2}(x) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+0.15}{0.1}\right)^2} & x \leq 0 \\ e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-0.15}{0.1}\right)^2} & x > 0 \end{cases} \\ \bar{\mu}_{\hat{F}_i^3}(x_i) &= \frac{0.92}{(1+\exp(5(x_i-1)))} & \underline{\mu}_{\hat{F}_i^3}(x_i) &= \frac{0.92}{(1+\exp(5(x_i-1.5)))} \end{aligned}$$

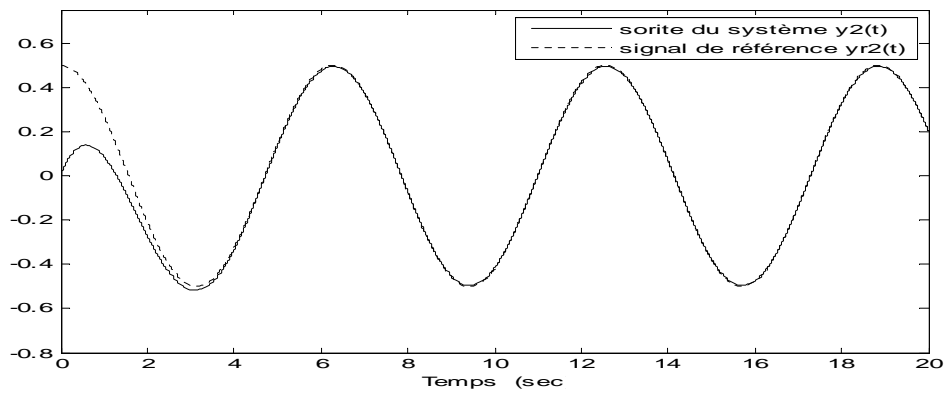
Ceci implique que le vecteur de paramètres devient  $\Theta_1(0) = 0_{36 \times 1}$ .

De même pour la fonction  $G(x)$  qui sera approximée par un système flou type-2 à deux entrées  $x_1, x_3$ . Chacune est définie par trois ensembles flous type-2 intervalle qui sont identiques à ceux utilisés pour approximer  $F(x)$  (fig.III.7).

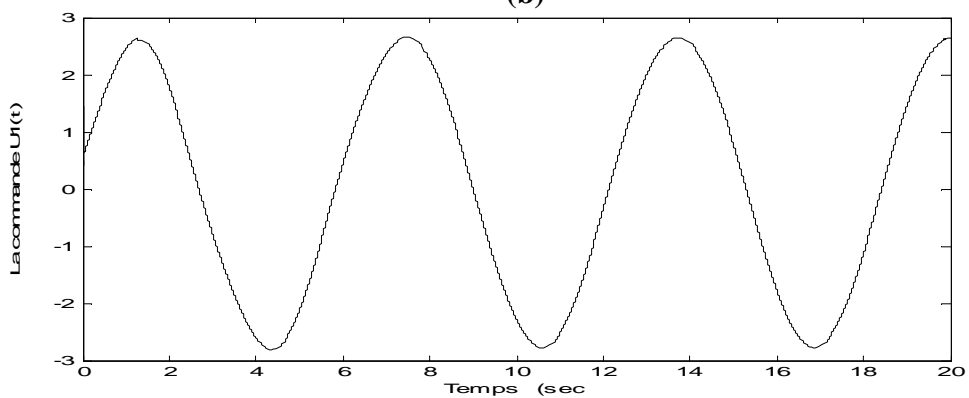
On conçoit la base de règles par (III.51) et (III.52) pour  $\hat{F}$  et par (III.53) pour  $\hat{G}$  où les ensembles antécédents sont de type-2. Les FBF moyennes seront calculées par (III.11)-(III.13) pour  $\hat{F}$  et (III.14)-(III.16) pour  $\hat{G}$ . Les matrices  $Y_1(x)$ ,  $Y_2(x)$ ,  $\Theta_1$ , et  $\Theta_2$  seront construites de la même manière que pour les systèmes flous type-1. Ceci nous permettra de calculer  $\hat{F}(x, \Theta_1) = Y_1(x)\Theta_1$  et  $\hat{G}(x, \Theta_2) = Y_2(x)\Theta_2$ .



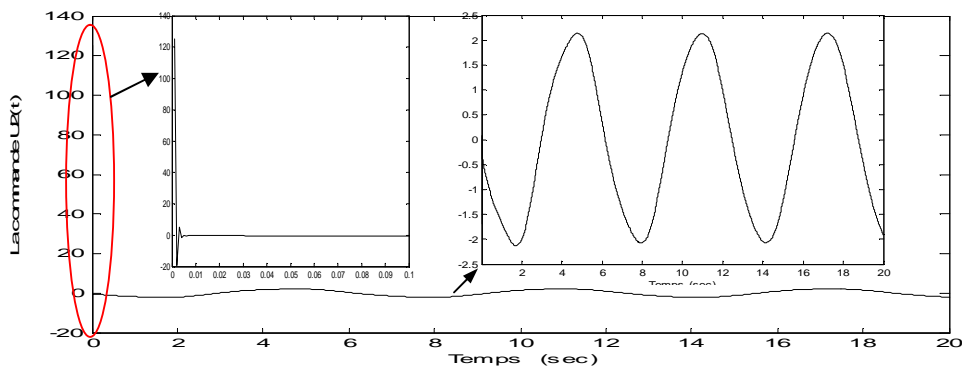
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig.III.6. Sorties du système et ses commandes en utilisant les systèmes flous type-2  
 a) Réponse en position  $y_1(t)$ , b) Réponse en position  $y_2(t)$ , c) Signal de commande  $u_1(t)$ ,  
 d) Signal de commande  $u_2(t)$ .

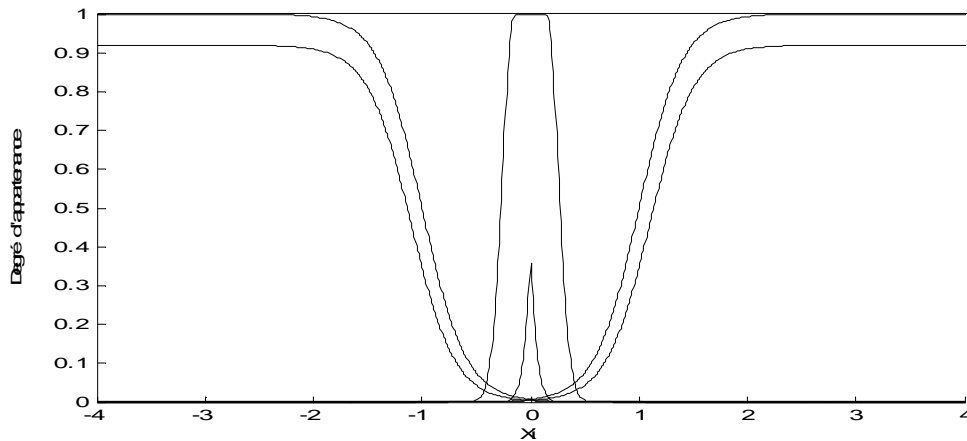


Fig.III.7. Fonction d'appartenance type-2.

Les signaux de réponse du système obtenus dans le cas de l'utilisation des système flous type-2 (fig.III.6) montrent les bonnes performances de poursuite, en utilisant seulement 18 règles pour approximer  $F$  qui a été approximé par 50 règles dans le cas de la commande adaptative floue type-1, ce qui diminue la complexité de calcul.

### III.5.1.3. Etude comparative

Pour tester la robustesse de notre approche et mettre en évidence la différence entre la commande conçue à base de systèmes flous type-1 et celle conçue à base de systèmes flous type-2, on applique une forte perturbation externe périodique de forme rectangulaire d'amplitude 5 comme illustrée sur la fig.III.8.

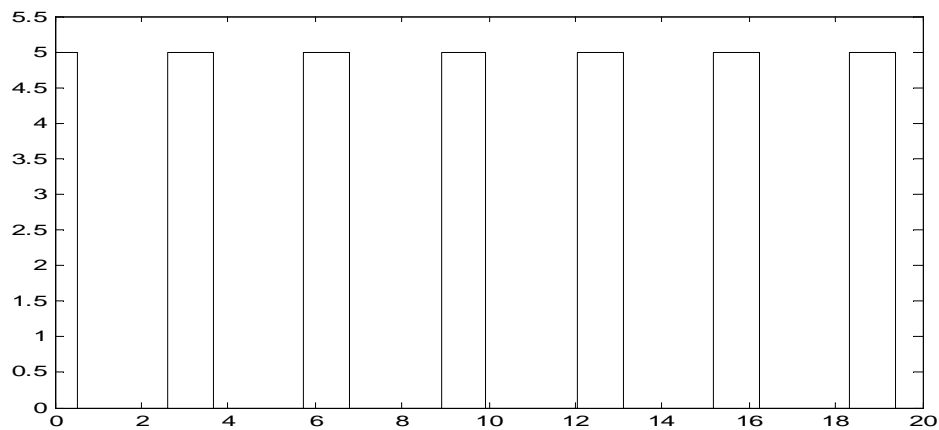


Fig.III.8. Signal de perturbation externe.



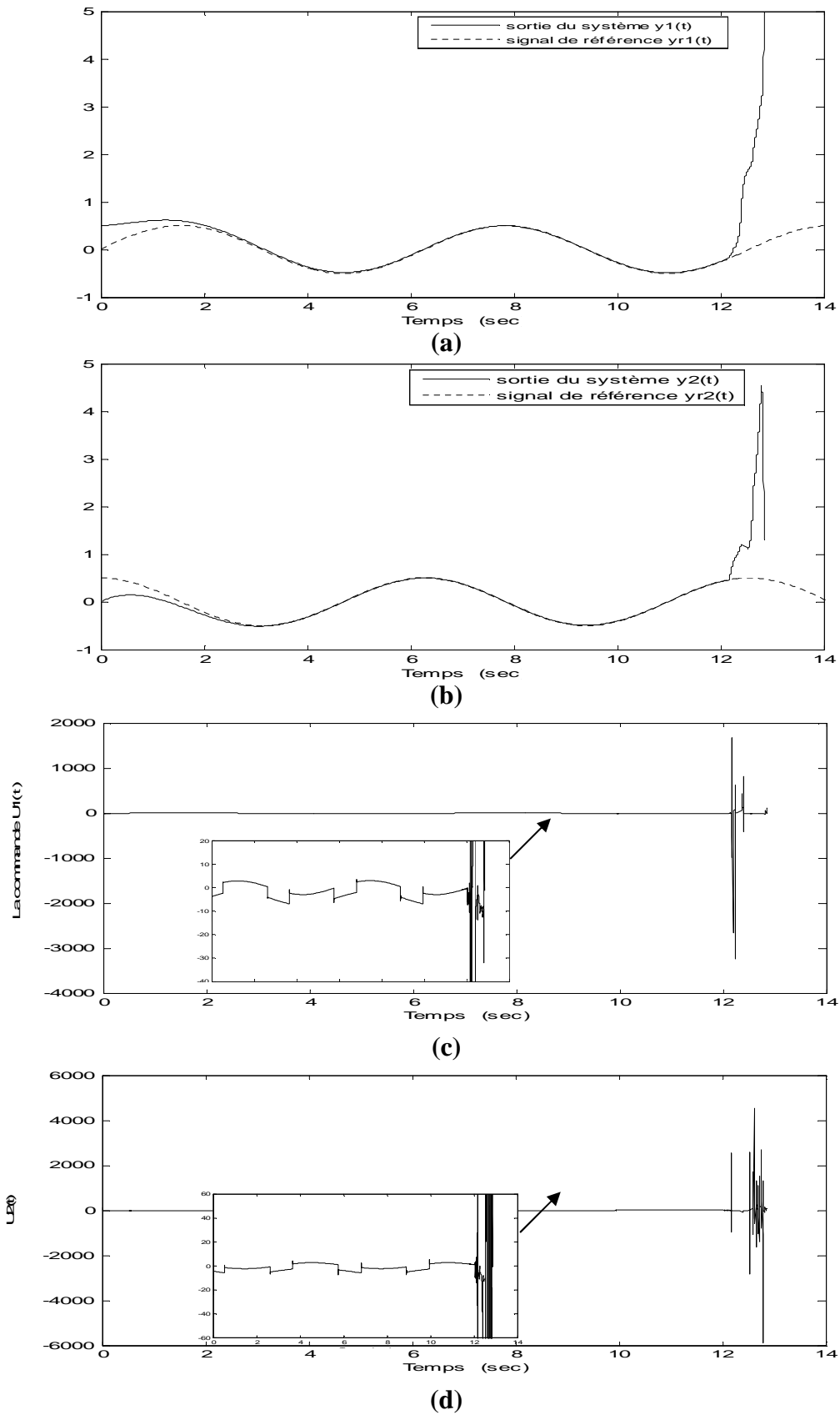


Fig.III.9. Sorties du système et ses commandes en utilisant les systèmes flous type-1 en présence de fortes perturbations a) Réponse en position  $y_1(t)$ , b) Réponse en position  $y_2(t)$ , c) Signal de commande  $u_1(t)$ , d) Signal de commande  $u_2(t)$ .

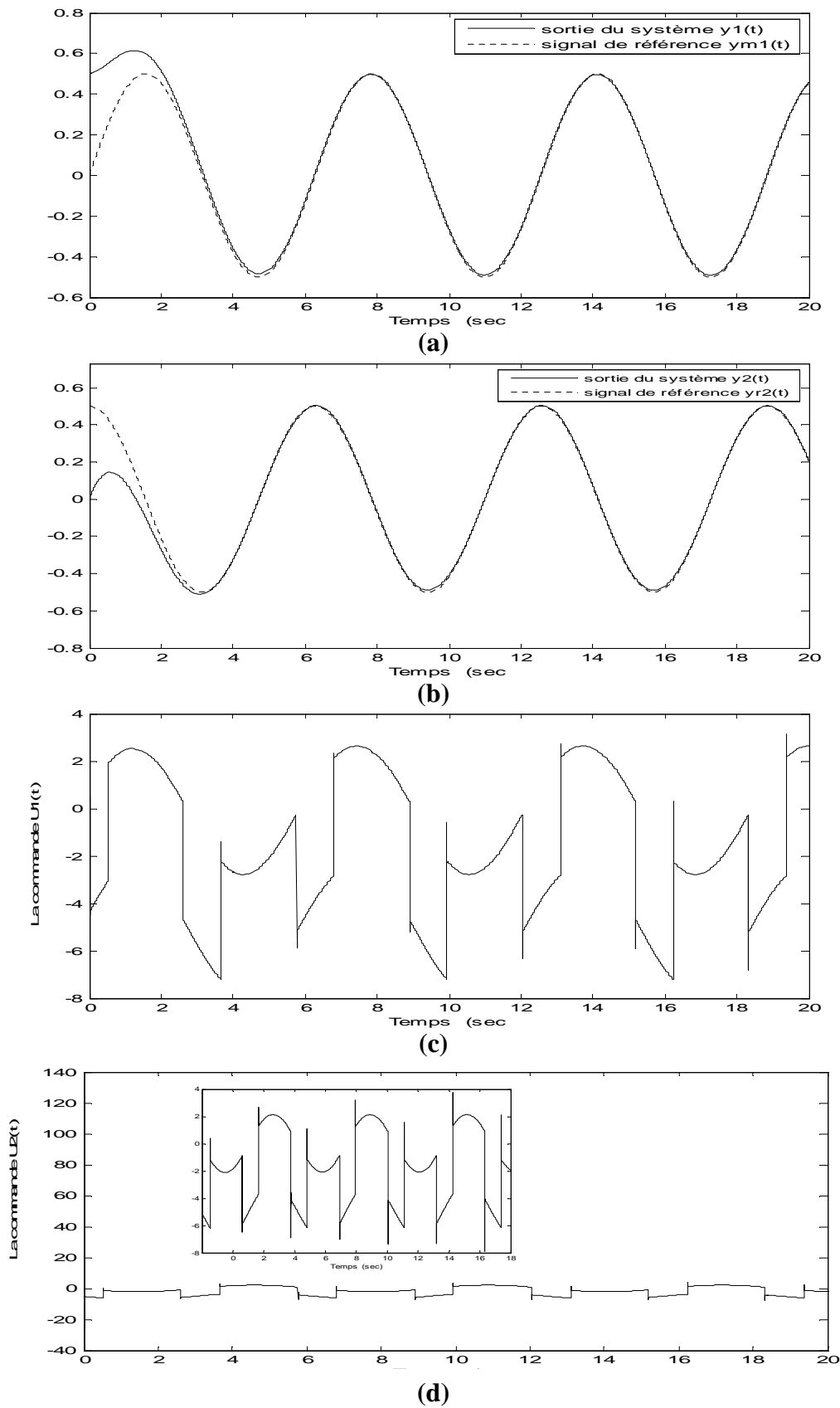


Fig.III.10. Sorties du système et ses commandes en utilisant les systèmes flous type-2 en présence de fortes perturbations a) Réponse en position  $y_1(t)$ , b) Réponse en position  $y_2(t)$ , c) Signal de commande  $u_1(t)$ , d) Signal de commande  $u_2(t)$ .

Les résultats de simulation présentés dans fig.III.9, montrent que la commande adaptative floue type-1 n'a pas pu contrôler le système en présence de fortes perturbations (l'instabilité du système), ce qui a été réalisé avec succès par la commande adaptative floue type-2 comme le montre la fig.III.10. Ceci prouve l'efficacité des systèmes flous type-2 à prendre en charge les fortes perturbations.

### III.5.2. Cas de la commande adaptative floue directe

La commande adaptative floue directe qu'on va utiliser maintenant pour contrôler le système masse-ressort-amortisseur est développée dans le théorème 4. On suppose que  $\Delta u_{12} = 0$ ,  $\Delta u_{21} = 0$ ,  $\Delta M_1 = 0$  et  $\Delta M_2 = 0$ .

Les résultats de simulation sont réalisés par les deux types de systèmes flous (systèmes flous type-1 et systèmes flous type-2), pour les conditions initiales  $y_1(0) = 0.1$ ,  $y_2(0) = 0.4$ ,  $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$ .

#### III.5.2.1. Type-1

La conception de cette commande sera faite selon les étapes suivantes :

Etape 1

On conçoit la base de règles par (III.51) et (III.52), et les FBF sont sélectionnées comme dans la conception de la commande adaptative indirecte. Donc,  $\hat{H}(x, Y_r, \Theta_3) = Y_3(x, Y_r)\Theta_3$  avec  $Y_3 = \text{diag}[\xi_{511}^T, 0]$  et  $\Theta_3 = [\theta_{311} \dots \theta_{3150} \theta_{321} \dots \theta_{3250}]^T$ .

Etape 2

On sélectionne la matrice des gains comme dans le cas précédent  $K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

Etape 3

On prend  $\rho = 0.05$ ,  $Q = 2I_{4 \times 4}$  et  $R = 0.8\rho^2 I_{2 \times 2}$ , alors on peut calculer  $P$  par la résolution

de (III.36), qui donne  $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

Etape 4

On obtient la commande adaptative directe à base de systèmes flous type-1 par (III.37) avec  $M_H(x) = 0.5 + 0.25x^2$ ,  $\gamma_3 = 20$ ,  $\beta_3 = 2500$ ,  $\delta_3 = 20$ , et  $\Theta_3(0) = 0_{100 \times 1}$ .

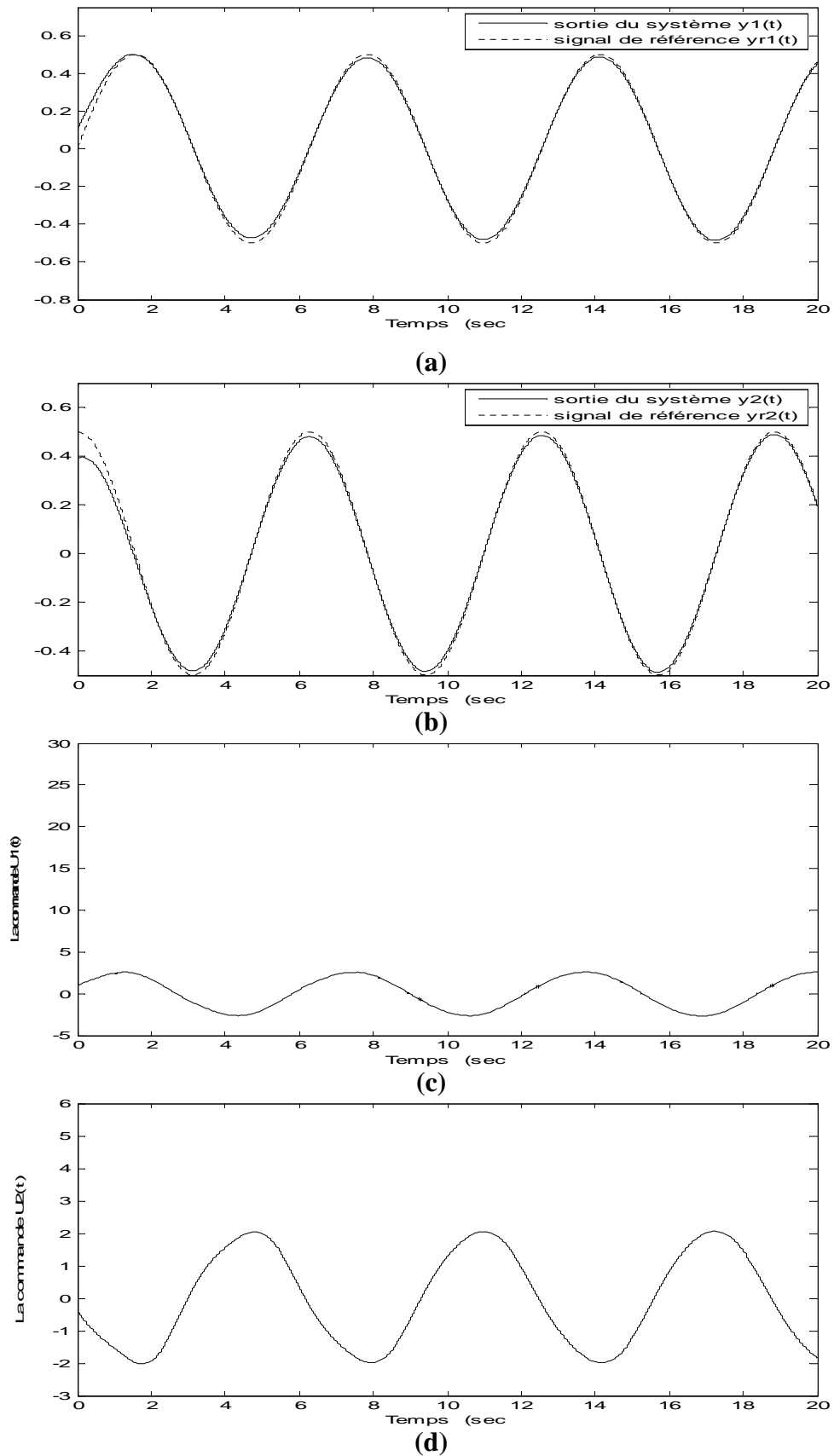


Fig.III.11. Sorties du système et ses commandes pour le contrôleur adaptative floue type-1 directe a) Réponse en position  $y_1(t)$ , b) Réponse en position  $y_2(t)$ , c) Signal de commande  $u_1(t)$ , d) Signal de commande  $u_2(t)$ .

En utilisant la commande adaptative floue type-1, la fig.III.11 montre que les sorties du système suivent parfaitement les trajectoires désirées, et que les commandes appliquées pour assurer cette poursuite, sont lisses.

### III.5.2.2. Type-2

Les mêmes étapes précédentes sont suivies pour concevoir la commande adaptative floue typ-2, avec les mêmes entrées, et les mêmes conditions initiales. Le seul changement consiste à utiliser les systèmes flous type-2 à la place des systèmes flous type-1 pour construire l'approximateur  $\hat{H}(x, \Theta_3)$ , où les ensemble antécédent type-2 seront choisies de la même manière comme dans la commande adaptative floue type-2 indirecte (fig.III.7), qui veut dire qu'on utilisera que trois ensembles antécédents seulement au lieu de cinq, et le vecteur de paramètres devient  $\Theta_3(0) = 0_{36 \times 1}$ .

On conçoit la base de règles par (III.51) et (III.52) où les ensembles antécédents sont de type-2. Les FBF moyennes seront calculées par (III.11)-(III.13). les matrices  $Y_3 = \text{diag} \left[ \xi_{11}^T, 0 \right]$  et  $\Theta_3 = [\theta_{311} \dots \theta_{3118} \theta_{321} \dots \theta_{3218}]^T$ . Les résultats de simulation sont illustrés sur la fig.III.12.

La fig.III.13 représente le critère de performance IAE (II.67), on remarque que l'erreur de poursuite dans le cas où on a utilisé les systèmes flous type-2 est plus petit de celle obtenue dans le cas d'utilisation des systèmes flous type-1 surtout pour la sortie  $y_1(t)$ .

### III.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté deux approches de commande adaptative directe et indirecte basées sur les systèmes flous type-1 et type-2. La méthode de calcul des FBF adoptée dans le chapitre II pour les systèmes SISO, est adaptée pour les systèmes non linéaires MIMO. Le nombre des règles floues SI-ALORS a énormément diminué grâce à la technique VSS. La conception du terme de commande  $H^\infty$  dépend seulement de la solution de l'équation algébrique similaire de Riccati. Les deux commandes adaptatives floues directe et indirecte ont été développées pour atteindre une performance de poursuite type  $H^\infty$  et garantir que toutes les variables impliquées dans le système en boucle fermée sont bornées.

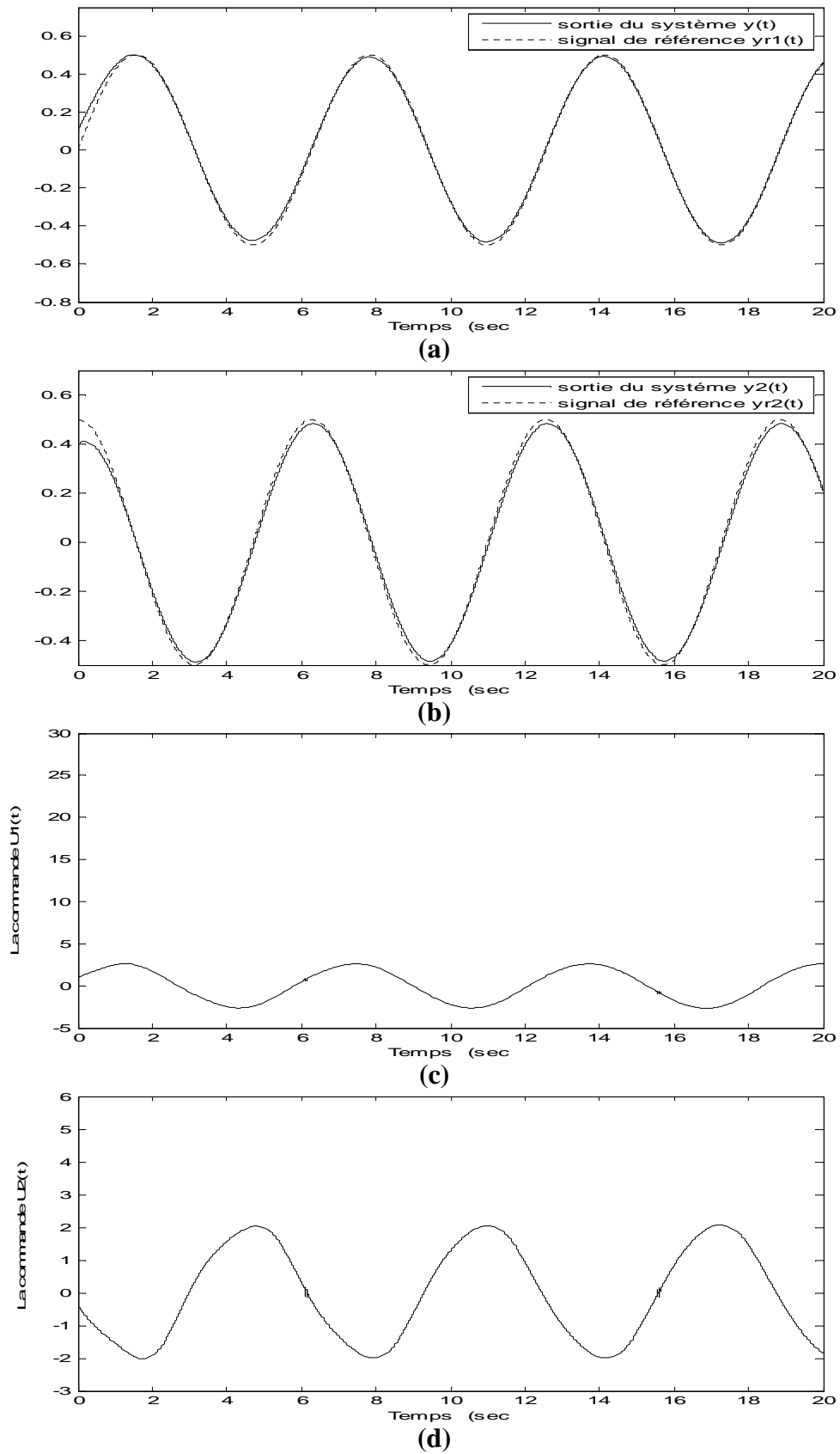
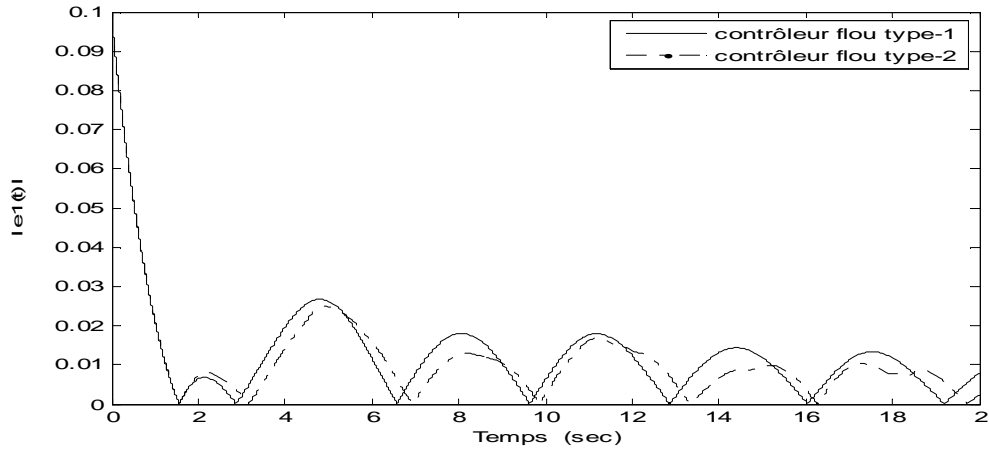
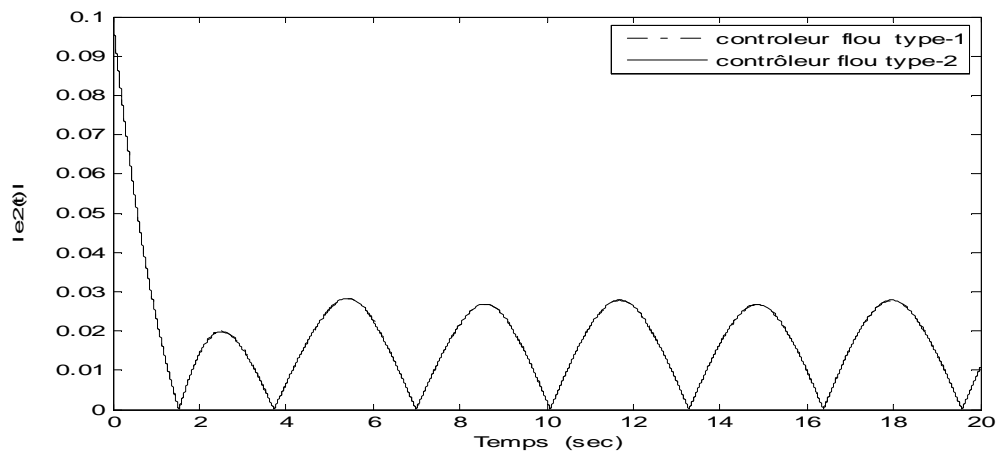


Fig.III.12. Sorties du système et ses commandes pour le contrôleur flou type-2 directe  
 a) Réponse en position  $y_1(t)$ , b) Réponse en position  $y_2(t)$ , c) Signal de commande  $u_1(t)$ ,  
 d) Signal de commande  $u_2(t)$ .



(a)



(b)

Fig.III.13. Valeur absolu de l'erreur de poursuite a) L'erreur de la sortie  $y_1(t)$  b) L'erreur de la sortie  $y_2(t)$

Pour tester l'efficacité des structures des commandes proposées, nous les avons appliqué à un système non linéaire masse-ressort-amortisseur. Les résultats de simulation obtenus ont permis d'établir une étude comparative entre les commandes à base des systèmes flous type-1 et les commandes à base des systèmes flous type-2. Cette étude a montré l'efficacité des systèmes flous type-2 à maintenir le système stable en présence de fortes perturbations tout en diminuant significativement leurs effets sur les sorties du système.

## ***CONCLUSION GENERALE***

---



## CONCLUSION GENERALE

Ce mémoire a pour objectif d'établir une étude comparative entre la logique floue type-1 et la logique floue type-2, en introduisant les systèmes flous type-2 à la commande adaptative pour les systèmes non linéaires incertains, afin de voir les capacités de ces systèmes par rapport aux systèmes flous type-1, leurs avantages et leurs inconvénients. Ce qui nous a mené à détailler la théorie de base pour les deux types de logique floue.

Le travail entrepris dans le cadre de ce mémoire est réalisé en trois phases. Dans un premier temps nous avons présenté la théorie de base de la logique floue type-1 et type-2 où plusieurs points ont été traités. Les définitions et les propriétés des ensembles flous, ainsi que les opérateurs d'union et d'intersection qui les manipulent sont exposés. La structure des systèmes flous type-1 et type-2 ainsi que les différents blocs qui les constituent sont détaillés. La phase de réduction de type, qui est une opération spécifique aux systèmes flous type-2, et les différentes méthodes de sa réalisation sont explicitées.

Dans un deuxième temps nous avons développé deux commandes adaptatives floues type-1 et type-2. La première pour contrôler des systèmes non linéaires incertains SISO. Cette commande est une commande adaptative indirecte, conçue en utilisant une fois les systèmes flous type-1, et une seconde fois les systèmes flous type-2. La deuxième commande adaptative est réalisée par les deux approches adaptatives, directe et indirecte, pour contrôler une classe plus générale de systèmes, en l'occurrence celle des systèmes non linéaires incertains MIMO.

Pour les deux commandes adaptatives floues type-1 et type-2, les paramètres libres des contrôleurs flous proposés ont été ajustés par des lois d'adaptation, menues d'un algorithme de projection. La stabilité des systèmes en boucle fermée est garantie par la synthèse de Lyapunov.

La simulation des systèmes non linéaires incertains SISO et MIMO donne des résultats qui montrent l'efficacité des commandes proposées.

Comme perspective, à court terme, on propose de généraliser le type de systèmes flous type-2 intervalle utilisés. Cette généralisation va engendrer, notamment une réduction de type laborieuse et complexe.

# ***BIBLIOGRAPHIE***

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [Bab-01] Babuska R, “*Fuzzy and neural control*,” Control engineering laboratory, Delft University, Netherlands, 2001.
- [Buckley-92] Buckley J, “Universal Fuzzy Controllers,” *Automatica*, vol. 28, no. 6, pp. 1245-1248, 1992.
- [Buh-94] Bühler. H, “*Réglages par logique floue*”. Presses Polytechniques Romandes, 1994-181p.
- [Cha-00] Chang. Y. C, “Robuste tracking control for nonlinear MIMO system via fuzzy approches,” *Automatica*, vol. 36, pp. 1535-1545, 2000.
- [Che-96] Chen. B. S, Lee. C. H, and Chang. Y. C, “ $H^\infty$  tracking design of uncertain nonlinear SISO systems: Adaptive fuzzy approach,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, pp.32-43, 1996.
- [Goo-87] Goodwin. G. C, and Mayne. D. Q, “A parameter estimation perspective of continuous time model reference adaptive control,” *Autornatica*, vol.23, pp. 57-70, 1987.
- [Hag-04] Hagra. H, “A Hierarchical type-2 fuzzy logic control architecture for autonomous mobile robots,” *IEEE Transactions On Fuzzy Systems*, vol. 12, no. 4, pp. 524-539, August 2004.
- [Ho-05] Ho. H. F, Wong. Y. K, Rad. A. B, and Lo. W. L, “State observer based indirect adaptive fuzzy tracking control,” *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 13, pp. 646–663, 2005.
- [Hoj-02] Hojati. M, and Gazor. S, “Hybride adaptive fuzzy identification and control of nonlinear systems,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst*, vol.10, no. 2, pp. 198-210, Apr. 2002.
- [Ioa-96] Ioannou, P. A, and Sun, J, “*Robust adaptive control*”. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [Joh-98] John, R. I., “Type 2 fuzzy sets for knowledge representation and inferencing,” in *Proc. of IEEE Int'l. Conf. on Fuzzy Systems*, IEEE World Congress on Computational Intelligence, pp. 1003-1008, Anchorage, AK, May, 1998.
- [Joh-00] John. R. I, Innocent. P. R, and Barnes. M. R, “Neuro-Fuzzy Clustering of Radiographic Tibia Images Using Type-2 Fuzzy Sets,” *Information Sciences*, vol. 125, pp. 65-82, 2000.

- [Kar-98] Karnik. N. N, Mendel. J. M, "Type-2 fuzzy logic systems: Type-reduction," *IEEE Syst, Man, Cybern. Conf, Sandiago, CA*, October 1998.
- [Kar-99] Karnik. N. N, Mendel. J. M, and Liang. Q, "type-2 fuzzy logic systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst*, vol. 7, pp. 643-658, December 1999.
- [Kar-01-a] Karnik. N. N, Mendel. J. M, "Operations on type-2 fuzzy sets," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 122, pp. 327-348, 2001.
- [Kar-01-b] Karnik. N. N, and Mendel. J. M, "centroid of a type-2 fuzzy logic systems," *Information sciences*, vol.132, pp.195-220, 2001
- [Kha-96] Khalil, H. K, "Adaptive output feedback control of nonlinear systems represented by input-output models," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, pp. 177-188, 1996.
- [Kil-95] Klir, G. J. and Yuan. B, "*Fuzzy sets and fuzzy logic; theory and applications*". Prentice Hall, 1995.
- [Lia-00-a] Liang. Q, and Mendel. J. M, "Interval type-2 fuzzy logic systems: Theory and design," *IEEE Trans. Fuzzy Syst*, vol. 8, no. 5, pp. 535-550, 2002.
- [Lia-00-b] Liang. Q, and Mendel. J. M, "Equalization of nonlinear time-varying channels using type-2 fuzzy adaptive filters," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 8, pp. 551-563, Oct. 2000.
- [Lia-01] Liang. Q, and Mendel. J. M, "MPEG VBR video traffic modeling and classification using fuzzy techniques," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, pp. 183-193, Feb. 2001.
- [Mel-02] Melin. P. and Castillo. O, "Intelligent control of non-linear dynamic plants using type-2 fuzzy logic and neural networks," in *Proc. of Int'l. Conf. NAFIPS-FLINT 2002*, pp. 22-27, New Orleans, LA, June 2002.
- [Mel-03] Melin. P, and Castillo. O, "A new method for adaptive model-based control of non-linear plants using type-2 fuzzy logic and neural networks," in *Proc. of Int'l. Conf. FUZZ' 2003*, pp. 420-425, St. Louis, MO, May 2003.
- [Men-95] Mendel. J. M, "Fuzzy logic systems for engineering: A tutorial" *Proc. IEEE*, vol. 83, pp. 345-377, Mars. 1995.
- [Men-00] Mendel. J. M, "Uncertainty, fuzzy logic, and signal processing," *Signal Proc*, vol. 80, pp.913-933, 2000.
- [Men-01] Mendel. J. M, "On the Importance of Interval Sets in Type-2 Fuzzy Logic Systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst*.2001.
- [Men-02] Mendel. J. M, Bob John. R. I, "type-2 Fuzzy Sets Made Simple," *IEEE Trans. Fuzzy Syst*, vol. 10, no. 2, pp. 117-127, April 2002.

- [Meu-03] Meunier. B. B, and Marsala. C, "Logique floue, principe, aide à la décision". Paris, Hermès Science Publication, 2003.
- [Mou-95] Moudgal. V. G, Kwong. W. A, Passino. K. M, and Yurkovich. Y, "Fuzzy learning control for a flexible-link robot", *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 3, no. 2, May 1995.
- [Nar-90] Narendra. K. S, and Parthasarathy. K, "Identification and control of dynamical systems using neural networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 1, no. 1, pp. 4-27, 1990.
- [Run-94] Runkler. T. A, and Glesner. M, "defuzzification and ranking in the context of membership value semantics, rule modality, and measurement theory," *In European congress on fuzzy and Intelligent Technologies, Aachen*, September 1994.
- [Sas-89] Sastry. S, and Bodson. M, "Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness". Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [Sep-06] Sepúlveda. R, and al., "Experimental study of intelligent controllers under uncertainty using type-1 and type-2 fuzzy logic," *Informat. Sci.* (2006), dio:10.1016/j.ins.2006.10.004.
- [Slo-99] Slotine. J. E, and Li. W, "Applied Nonlinear Control". Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1999.
- [Spo-96] Spooner. J. T, and Passino. K. M, "Stable adaptive control using fuzzy systems and neural networks", *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 3, pp. 339-359, August 1996.
- [Sug-88] Sugeno. M, and Kang. G. T, "Structure identification of fuzzy model," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 28, pp. 15-33, 1988.
- [Tak-85] Takagi T. and Sugeno M. "Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control," *IEEE Trans. on Syst. Man and Cybernetics*, vol. 15, pp. 116-132, 1985.
- [Ton-00] Tong. S, Tang. J, and Wang. T, "Fuzzy adaptive control of multivariable nonlinear systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 111, pp. 153-167, 2000.
- [Wan-92-a] Wang. L. X, Mendel. J. M, "Fuzzy basis function, universal approximation, and orthogonal least squares learning," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 3, no. 5, pp. 807-814, 1992.
- [Wan-92-b] Wang. L. X, "Fuzzy systems are universal approximators," *Proc. of the IEEE Conf. on Fuzzy Systems (Fuzz IEEE 92), SanDiego*, pp. 1163-1170, 1992.
- [Wan-93] Wang. L. X, "Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 1, pp. 146-155, 1993.
- [Wan-94] Wang. L. X, "Adaptive fuzzy systems and control: design and stability analysis". Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1994.

- [**Wan-96**] Wang. L. X, "Stable adaptive fuzzy controlleurs with application to inverted pendulum tracking," *IEEE Trans. On sys, Man, Cybern-Part B: Cybernetics*, vol. 26, pp.677-691, October 1996.
- [**Wu-96**] Wu. K. C, "Fuzzy interval control of mobile robots," *Computers Elect. Eng*, vol. 22, pp. 211-229, 1996.
- [**Yag-80**] Yager. R. R, "Fuzzy subsets of type II in decisions," *J. of Cybernetics*, vol. 10, pp. 137-159, 1980.
- [**Zad-75**] Zadeh. L. A, "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning – 1," *Inform. Sci*, vol. 8, pp. 199- 249, 1975.

---

## Résumé

---

Dans ce travail, nous présentons le développement de structures de commande adaptative floue basées sur les systèmes flous type-1 et les systèmes flous type-2 pour commander des systèmes non linéaires incertains. Deux structures de commande ont été synthétisées, la première est une commande adaptative floue indirecte pour contrôler une classe de systèmes non linéaires incertains SISO, la seconde prend en charge une classe plus générale de systèmes non linéaires incertains MIMO. Cette seconde structure est développée en utilisant deux approches : l'approche adaptative directe et l'approche adaptative indirecte. La dynamique des systèmes non linéaires est approximée par des systèmes flous type-1 et type-2 dont les paramètres sont ajustés par des lois d'adaptation. La stabilité des systèmes en boucle fermée est garantie par la synthèse de Lyapunov. Les résultats de simulation obtenus montrent l'efficacité des deux structures de commande proposées notamment avec l'utilisation des systèmes flous type-2 où le nombre de règles utilisées a été réduit, et la poursuite a été améliorée.

**Mots clés :** Commande adaptative floue, Commande floue type-2, Réduction de type, Synthèse de Lyapunov, Systèmes non linéaires incertains SISO et MIMO.

---

## Abstract

---

In this work, we present the development of a structures of adaptive fuzzy control based on type-1 fuzzy logic systems and type-2 fuzzy logic systems for a control of uncertain nonlinear systems. Two structures of control have been synthesized, the first is an indirect adaptive fuzzy control for a class of nonlinear uncertain SISO, the second it's to control a more general class of nonlinear MIMO systems with plant uncertainties. This second structure is developed by the use of two approaches: direct adaptive approach and indirect adaptive approach. The dynamic of the nonlinear systems is approximate with type-1 and type-2 fuzzy logic systems in which parameters are adjusted with adaptation laws. The closed-loop system stability is guaranteed by the Lyapunov synthesis. The obtained simulation results show the efficiency of the two proposed control structures mainly with we using the type-2 fuzzy logic systems where the number of the rules has been decreased, and the tracking has been improved.

**Key words:** Adaptive fuzzy control, Type-2 fuzzy control, Type reduction, Lyapunov syntheses, Uncertain nonlinear SISO and MIMO systems.

---

## ملخص

---

في هذه الأطروحة، قمنا باقتراح بنية تحكم آلي تكيفي بالاعتماد على الأنظمة الغامضة نوع-1 و الأنظمة الغامضة نوع-2 للتحكم في الأنظمة غير الخطية المجهولة. حيث قمنا بتكوين آليتي تحكم، الأولى هي آلية تحكم تكيفي غامضة غير مباشرة للأنظمة غير الخطية ذات متغير واحد، أما الثانية فهي آلية تحكم لصنف أكثر شمولية للأنظمة غير الخطية المجهولة ذات عدة متغيرات. هذه الآلية الثانية أنشئت باستعمال طريقتين، طريقة تكيفية مباشرة و طريقة تكيفية غير مباشرة. ديناميكية الأنظمة غير الخطية قربت بواسطة أنظمة غامضة نوع-1 و نوع-2، أين عدلت عناصرها بقوانين تكيفية. المقترحة خاصة في حالة استعمال الأنظمة الغامضة نوع-2 أين تخفض عدد القوانين و تحسن المتابعة.

الكلمات المفتاحية: آلية التحكم الغامضة التكيفية، آلية تحكم نوع-2، تقليص النوع، تركيب ليابونوف، الأنظمة غير الخطية المجهولة.