

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique Et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique

جامعة سطيف 1

Université de Sétif 1

# THESE

Présentée à l'Institut d'Optique et de Mécanique de Précision

Pour l'obtention du diplôme de

## Doctorat en Sciences

Option : Optique et Mécanique de Précision

Par :

**Mr. BENCHEIKH Abdelhalim**

**THÈME :**

**Développement d'une technique d'analyse de la phase dans  
les lasers et interférogrammes**

Soutenue le : \_\_\_\_\_

Devant le jury composé de :

Mr. BOUZID Djamel

Prof. Université de Sétif 1

Président

Mr. BOUAFIA Mohamed

Prof. Université de Sétif 1

Rapporteur

Mr. BENSLMA Malek

Prof. Université de Constantine

Examineur

Mr. BENTABET Abdelouaheb

MCA Université de BBA

Examineur

## ***Remerciements***

Ce travail est réalisé au laboratoire d'optique appliquée au sein de l'institut d'optique et de mécanique de précision de l'université Ferhat Abbas de Sétif dont je remercie ici tous les membres et collègues.

Je suis très sensible à l'honneur que m'a fait l'ensemble des membres du jury en de lire et de juger ce travail: Messieurs: D.Bouزيد, M.Benslama, A.Bentabet pour avoir accepté d'en être les rapporteurs.

Je remercie vivement mon encadreur Pr. Mohamed Bouafia à qui j'exprime toute ma gratitude pour les précieux conseils qu'il a su me prodiguer tout au long de mes travaux de recherche. Qu'il trouve ici ma profonde reconnaissance.

Un grand merci à Dr Kouider ferria qui m'a beaucoup aidé durant cette thèse, merci pour ton soutien, ton aide et tes encouragements.

Je tiens à remercier tous les collègues et amis; Toufik, Nabil, Farouk,... qui m'ont aidé et m'ont encouragé d'une façon ou d'une autres durant toute ma carrière.

Enfin, J'exprime mon profond remerciement à ma famille pour son soutien tout au long de ma formation universitaire.

*Je dédie ce travail à mes très chers parents.*

# Table des matières

## Introduction Générale

01

## Chapitre. I Théorie des faisceaux lasers et les interférogrammes

I.1 Introduction	04
<b><u>Partie A: Théorie des faisceaux lasers</u></b>	
I.2 Constitution du laser	04
I.3. Les cavités lasers	04
I.4. Les faisceaux lasers	06
I.4.1 L'équation d'onde paraxiale et ses solutions	06
I.5. Intégrales de diffraction en régime paraxial	12
I.6-Analyse des fréquences spatiales des faisceaux optiques	14
I.6.1 Amplitude complexe	14
I.6.2 Profile d'intensité du faisceau	14
I.6.3 Spectre angulaire des ondes planes	15
I.6.4 Propagation axiale	15
I.6.5 Résolution numérique de la propagation	16
I.7- Les moments d'un faisceau laser	17
I.7.1 Moment d'ordre 1	18
I.7.2. Transformation des moments d'ordre 1 au cours de la propagation	19
I.7.3. Moments d'ordre 2	19
I.7.4. Transformation des moments d'ordre 2 avec la distance de propagation	19
I.7.5. Moments croisés	21
I.7.6. Axes principaux et faisceaux astigmatiques	21
I.8. Cas particulier: Le faisceau gaussien	21
I.8.1. Distribution dans le domaine spatial et dans le domaine des fréquences spatiales	21
I.8.2. Moments du faisceau gaussien et figure de mérite du faisceau	22
I.9 Facteur de qualité $M^2$ d'un faisceau laser réel	22
I.9.1 Figure de mérite et facteur de qualité	22
I.9.2 Largeur d'un faisceau laser quelconque	23
I.9.3 Facteur de qualité $M^2$ des faisceaux ayant une symétrie cylindrique	24
A-Moment radial d'ordre 2	24
B- Moment radial d'ordre 2 dans le domaine des fréquences spatiales	25
C- Figure de mérite d'un faisceau gaussien $TEM_{00}$ (gaussien) symétrique	25
D- Evolution suivant z de $\bar{r}^2(z)$	26
I.10- Facteur de qualité $M^2$ des modes transverses d'ordre supérieurs	26
I.11. Facteur $M^2$ d'un mélange de mode: (Mélange incohérent)	27
I.11.1. Mélange de modes Hermite-Gauss	27
I.11.2. Mélange de modes de Laguerre-Gauss	27

## **Partie B: Polarisation, interférences et interférogrammes**

I.12 Introduction	28
-------------------	----

I.13 Polarisation de la lumière	28
I.14 Polariseurs et lames à retard de phase	30
I.15 Interférence à deux ondes et interférométrie	31
I.15.1 Analyse des franges	33
I.15.2 Décalage temporel de phase	33
I.15.3 Décalage spatial de phase	35
I.15.4 Décalage de phase géométrique et la phase de Pancharatnam	36
I.16 Conclusion	38
Bibliographie	39

## **Chapitre II Analyse et détermination de la Phase de l'aberration sphérique dans les faisceaux lasers gaussiens.**

II.1 Introduction	42
II.2 Fondement théorique et calcul du facteur de qualité $M^2$ :	42
II.3 Développent mathématique	47
II.3.1 Le coefficient de l'aberration sphérique $C_4$	49
II.3.2 Résultats numériques	50
II.4 Discussion des résultats	53
II.5 Conclusion	54
Bibliographie	55

## **Chapitre III Amélioration de la superrésolution des faisceaux lasers par des éléments optiques de phase**

III.1 Introduction	57
III.2 L'élément optique diffractif de phase binaire utilisé	57
III.3 La transformation d'un faisceau $LG_{p0}$ en un faisceau mono-lobé	59
III.3.1- Caractéristiques du faisceau $LG_{p0}$ incident	59
III.3.2 Les distributions de l'intensité des faisceaux $LG_{p0}$ redressé au plan focal d'une lentille de focale $f=50\text{mm}$	63
III.3.2.1 Transformation de $LG_{10}$	63
III.3.2.2 Transformation de $LG_{20}$	64
III.3.2.3 Transformation de $LG_{30}$	64
III.3.2.4 Transformation de $LG_{40}$	65
III.3.2.5 Transformation de $LG_{50}$	65
III.3.3 Résultat	66
III.3.4 Les fits des courbes	66
III.3.4.1 Transformation de $LG_{10}$ et le fit de la distribution $LG_{00}$ obtenue	66
III.3.4.2 Transformation de $LG_{20}$ et le fit de la distribution $LG_{00}$ obtenue	67
III.3.4.3 Transformation de $LG_{30}$ et le fit de la distribution $LG_{00}$ obtenue	67
III.3.4.4 Transformation de $LG_{40}$ et le fit de la distribution $LG_{00}$ obtenue	68
III.3.4.5 Transformation de $LG_{50}$ et le fit de la distribution $LG_{00}$ obtenue	68
III.4 Résultats de la transformation $LG_{p0}$ en $LG_{00}$ et discussion	69
III.4.1 Les largeurs des faisceaux obtenus	69
III.4.2 Les largeurs de Rayleigh $z_R$ obtenues	70
III.4.3 Discussion	71
III.4.4 le contenu de la puissance	71
III.4.5 Volume focal d'un faisceau laser quelconque	72

III.5 Conclusion	73
Bibliographie	75

## **Chapitre IV Mesure de la distribution de la cohérence spatiale par l'interféromètre de Sagnac**

IV.1 Introduction	77
IV.2 Collimation par l'interféromètre de Murty	77
IV.2.1 Montage utilisé	78
IV.2.2 Interférogrammes obtenus	78
IV.2.3 Interprétation des résultats	79
IV.2.4 Conclusion I	79
IV.3. Exploitation de l'interféromètre de Sagnac	80
IV.3.1. Détermination de la cohérence spatiale d'un laser	80
IV.3.2. Montage expérimental et mis au point	80
IV.3.3 Détermination des axes propres des lames	83
IV.3.4 Mesure de la distribution de la fonction de cohérence spatiale	83
A – mesure de la partie réelle	83
B. Mesure de la partie imaginaire	83
IV.3.5 Détermination du module de la fonction de cohérence spatiale	85
IV.4 Conclusion II	86
Bibliographie	89

<b>Conclusion Générale</b>	90
Annexe	92

# Table des figures

<b>Figure I.1:</b> Schéma d'une cavité laser	05
<b>Figure I.2:</b> Type de cavité laser	05
<b>Figure I.3:</b> représentation des distributions du champ électrique des quatre premiers ordres ( $TEM_{10}$ , $TEM_{20}$ , $TEM_{30}$ , $TEM_{40}$ ) d'Hermite-Gauss	07
<b>Figure I.4:</b> Section transversale des modes laser Hermite-Gauss	
<b>Figure I.5:</b> Représentation de la distribution du champ électrique des quatre premiers ordres ( $TEM_{10}$ , $TEM_{20}$ , $TEM_{30}$ , $TEM_{40}$ ) de Laguerre-Gauss	
<b>Figure I.6:</b> Section transversale des modes laser Hermite-Gauss	09
<b>Figure I.7:</b> Caractéristiques d'un faisceau gaussien	11
<b>Figure I.8:</b> Profile d'intensité gaussienne	11
<b>Figure I.9:</b> distribution d'intensité d'un faisceau laser non gaussien	17
<b>Figure I.10</b> Lumière polarisée elliptiquement orientée selon l'angle $\gamma$ .	29
<b>Figure I.11</b> Evolution de la lumière polarisée elliptiquement dans l'espace et dans le temps	29
<b>Figure I.12</b> Effet d'un polariseur sur une onde optique	30
<b>Figure I.13</b> Effet d'un milieu biréfringent sur une onde plane polarisée linéairement.	31
<b>Figure I.14</b> Principe d'un interféromètre à deux ondes	32
<b>Figure I.15</b> Une image prise par une camera CCD	32
<b>Figure I.16:</b> Décalage de phase temporel, l'incrément de phase se fait par le déplacement du miroir référence d'une quantité qui donne le décalage de phase voulu.	33
<b>Figure. I.17:</b> Interférogramme avec une modulation spatiale	35
<b>Figure. I.18:</b> Spectre de la figure de frange modulée spatialement	36
<b>Figure. I.19</b> Décalage de phase de Pancharatnam avec la configuration QHQ	37
<b>Figure. I.20:</b> Décalage de phase de Pancharatnam avec une lame $(\lambda/4)$ et un polariseur	37
<b>Figure I.21:</b> Les différents arrangements de l'interféromètre à décalage de phase géométrique	38
<b>Figure II.1:</b> Représentation des positions de l'objet et de l'image.	49
<b>Figure II.2:</b> Evolution de $C'_4$ en fonction de la distance objet avec $X=0$ , $f=100\text{mm}$ , $w_0=1\text{mm}$ .	52
<b>Figure II.3:</b> . Evolution de $C'_4$ en fonction de la distance objet avec $X=0$ , $f=200\text{mm}$ ,	52

$w_0=1\text{mm}$ .

**Figure II.4:** Evolution de  $C'_4$  en fonction de la distance objet avec  $X=1$ ,  $f=148\text{mm}$ ,  $w_0=1\text{mm}$  52

**Figure II.5:** Evolution de  $C'_4$  en fonction de la distance objet pour avec  $X=1$ ,  $f=376\text{mm}$ ,  $w_0=1\text{mm}$  52

**Figure III.1:** Schéma représentant l'élément optique diffractif utilisé pour la transformation des faisceaux  $LG_{p0}$  58

**Figure III.2:** Distribution d'intensité des faisceaux de Laguerre-Gauss  $LG_{10}$ ,  $LG_{20}$ ,  $LG_{30}$ . 60

**Figure III.3:** Schéma de base de la transformation d'un faisceau  $LG_{p0}$  en un faisceau  $LG_{00}$  61

**Figure III.4:** Distribution de l'intensité de  $LG_{10}$  redressé 63

**Figure III.5:** Distribution de l'intensité de  $LG_{20}$  redressé 64

**Figure III.6:** Distribution de l'intensité de  $LG_{30}$  redressé 64

**Figure III.7:** Distribution de l'intensité de  $LG_{40}$  redressé 65

**Figure III.8:** Distribution de l'intensité de  $LG_{50}$  redressé 65

**Figure III.9:** Distribution de l'intensité du  $LG_{10}$  Redressé avec le fit gaussien 66

**Figure III.10:** Distribution de l'intensité du  $LG_{20}$  Redressé 67

**Figure III.11:** Distribution de l'intensité du  $LG_{30}$  Redressé 67

**Figure III.12:** Distribution de l'intensité du  $LG_{40}$  Redressé 68

**Figure III.13:** Distribution de l'intensité du  $LG_{50}$  Redressé 68

**Figure III.14:** La distribution de l'intensité transversale des faisceaux  $LG_{p0}$  redressés au foyer d'une lentille de focale  $f=50\text{mm}$  69

**Figure IV.1:** Montage de l'interféromètre de Murty utilisé pour le contrôle des fronts d'ondes 78

**Figure IV.2:** image obtenues pour différent position z. 79

**Figure IV.3:** Montage utilisé pour la mesure de la distribution de la cohérence spatiale 80

**Figure IV.4:** détermination des axes propres des lames ( $\lambda/2$ ,  $\lambda/4$ ) 83

**Figure IV.5:** montage de Sagnac pour mesurer la partie réelle 84

**Figure IV.6:** polarisation à travers les deux lames  $\lambda/4$  85

**Figure IV.7:** Distribution de phase de la fonction de cohérence spatiale 87

## Liste des tableaux

<b>Tableau. I.1:</b> Caractéristiques des faisceaux $LG_p^l$ et $HG_m^n$ en fonction des caractéristiques du faisceau gaussien.	12
<b>Tableau. I.2</b> Signification physique des moments de différents ordres	18
<b>Tableau II.1:</b> valeurs $\beta_r$ de pour différents profile d'entrée.	46
<b>Tableau II.2</b> caractéristiques es lentilles utilisées dans le calcul.	51
<b>Tableau III.1:</b> Les zéros des cinq premiers polynômes de Laguerre $L_p(\rho_i/w) = 0$	58
<b>Tableau III.2:</b> Polynômes de Laguerre $L_p(X)$ d'ordre $p$ .	59
<b>Tableau III.3:</b> Caractéristiques des faisceaux $LG_{p0}$ après focalisation par une lentille de focale $f=50\text{mm}$ et sans EOD.	63
<b>Tableau III.4:</b> Les caractéristiques du faisceau $LG_{p0}$ focalisé	70
<b>Tableau III.5:</b> Les nouvelles valeurs de $Z_R$ après redressement des faisceaux $LG_{p0}$	71
<b>Tableau III.6:</b> Valeurs des rapports des puissances	73
<b>Tableau IV.1.</b> Valeur de la partie réelle $\text{Re} \Gamma_{12} $	85
<b>Tableau IV.4 :</b> Valeur de la partie imaginaire $\text{Im} \Gamma_{12} $	86
<b>Tableau IV.5 :</b> les valeurs de la fonction de cohérence spatiale $ \Gamma_{12} $	87



# Introduction générale

Depuis sa création, le LASER a occupé une place de taille dans un vaste domaine technologique allant de la recherche fondamentale à la recherche appliquée. Un des enjeux importants est le contrôle de son émission, sa forme gaussienne, sa propagation et sa détection. Cette caractérisation a connu déjà un parcours scientifique qui mérite d'être rappelé.

La réalisation du laser a vu le jour en 1960, mais cela a été le fruit d'un travail qu'a commencé en 1887 avec la première cavité de Fabry pérot et jusqu'à son apparition. On rappelle que le second point de départ était la découverte de l'émission stimulée par Einstein en 1917. C'est ce processus qui est à la base du fonctionnement du laser.

En effet, pour faire fonctionner un laser, on doit produire et entretenir un phénomène d'émission stimulée et d'amplification lumineuse. Pour cela, il fallait d'abord trouver le moyen de maintenir une majorité d'atomes à l'état excité grâce à un mécanisme de " pompage " électrique, chimique ou optique. La technique du « **pompage optique** », élaborée pour la première fois en 1950, valut à Alfred Kastler le prix Nobel de physique en 1966.

En effet, à partir de la date 1950, les trois éléments essentiels pour le fonctionnement d'un laser (la cavité, l'émission stimulée et le système de pompage) sont tous réalisés. Cela a conduit à la réalisation du premier maser en 1953 (acronyme de Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation). Ce maser utilisait de l'ammoniac et produisait un rayonnement monochromatique à une longueur d'onde de 1,25 cm. Au cours des années qui suivirent, de nombreux autres masers furent fabriqués. Tous fonctionnaient dans le domaine des micro-ondes, le pas vers le domaine de la lumière visible et de ses courtes longueurs d'onde semblant infranchissable. Les expérimentateurs de l'époque entrevoyaient déjà les possibilités d'un maser optique, mais concevaient difficilement comment le construire.

Le premier laser optique a été conçu par Theodore Maiman en 1960. Maiman réussit à produire le premier faisceau laser optique en déposant une couche d'aluminium réfléchissant à chaque extrémité de la tige d'un barreau de rubis; la lumière monochromatique ainsi piégée dans le milieu actif est amplifiée à chaque réflexion

avant de sortir par un minuscule orifice. On obtient ainsi un faisceau d'énergie monochrome cohérent, concentré et rectiligne.

La connaissance des caractéristiques du faisceau laser à savoir sa longueur d'onde, sa phase ainsi que les aberrations introduites au cours de sa propagation, est nécessaire afin de pouvoir réussir les diverses applications. Dans ce sens plusieurs travaux de recherche ont été consacrés à l'évaluation de la phase des faisceaux lasers et aux facteurs qui l'affectent tout en développant des montages pour les mesurer.

D'autre part, les concepteurs et les utilisateurs des lasers ont en général souhaité disposer d'un faisceau laser le plus apte à générer de petites tâches focales et donc de fortes intensités pour des applications en microscopie et usinage, etc....

La voie utilisée pour obtenir ces faisceaux est l'utilisation de l'optique diffractive sous la forme d'éléments optiques diffractifs de phase et d'amplitude, binaire ou continue.

Ce travail de thèse est composé de trois volets ayant un aspect « études », un aspect « simulations » et un aspect « pratique ». Ces parties ont été réalisées sur les faisceaux lasers, et spécialement sur la *phase*. D'ailleurs, on propose dans ce travail une nouvelle technique pour le calcul de la *phase* qui se manifeste sous forme d'une aberration sphérique dans un faisceau laser. Grace à une simulation innovante, on a montré qu'un élément optique diffractif de *phase* est capable de modifier le profile spatiale de l'intensité d'un faisceau laser, en même temps il a été montré aussi que ces éléments de *phase* sont en mesure d'améliorer la résolution spatiale 3-D des faisceaux lasers.

Ainsi, le manuscrit est composé de quatre chapitres décrivant cette thèse. Il s'agit donc d'un premier chapitre consacré à la théorie des faisceaux lasers et aux phénomènes liés aux interférences et interférogrammes. Ce chapitre est divisé en deux sous-parties théoriques; La première décrit l'essentiel de la théorie des faisceaux lasers, la notion des moments d'intensité et tout ce qui est relatif au facteur de qualité  $M^2$ . La seconde partie a été consacrée à des notions générales sur les interférences et les interférogrammes.

Le deuxième chapitre a été réservé à un nouveau développement mathématique qu'on a proposé pour le calcul de la phase de l'aberration sphérique pour le cas des faisceaux lasers gaussiens. Cela a permis de calculer de manière bien fondée le facteur de qualité  $M^2$  pour le cas des faisceaux lasers affectés par des aberrations.

Le troisième chapitre relate l'utilisation des éléments optiques de *phase* pour transformer des faisceaux lasers d'ordre supérieurs (faisceau Laguerre-Gauss) qui se

manifestent sous forme d'anneaux concentriques en une tâche unifiée de distribution transversale gaussienne. Cela a conduit nécessairement à des résultats intéressants concernant l'amélioration de la résolution tridimensionnelle des faisceaux lasers.

Le dernier chapitre a été consacré conjointement à l'utilisation et l'application des faisceaux lasers, car il s'agit d'utiliser le laser dans l'interféromètre de Sagnac, et d'appliquer ce dernier pour la caractérisation et l'évaluation de la distribution de la cohérence spatiale du faisceau laser utilisé.

Enfin, notons que la thèse s'achèvera par une conclusion générale et que la bibliographie a été répartie selon son utilisation à la fin de chaque chapitre.

## I.1 Introduction

Le mot **LASER** est l'acronyme de l'anglais; *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*, ». Un laser est donc un amplificateur de lumière faisant appel à l'émission stimulée (ou induite). La lumière qu'il émet possède plusieurs propriétés exceptionnelles. D'une part, il permet de concentrer une énergie importante dans des faisceaux étroits, la directivité de son émission est remarquable et d'autre part il présente une monochromatie très grande [1-5].

Vu les caractéristiques importantes du faisceau laser, ce dernier a fait l'objet d'innombrables sujets de recherche sur; l'étude de sa propagation dans différents milieux, sa transformation par les systèmes optiques et l'évaluation de sa qualité. Tous ça dans le but de réussir son utilisation comme outil efficace dans les applications modernes, comme la télécommunication, l'industrie automobile, la médecine, l'environnement [2-4], etc.

Dans ce premier chapitre, on donnera une étude théorique présentée en deux parties pour la compréhension des travaux qui seront présentés dans les chapitres qui suivent. La première sera consacrée aux faisceaux lasers, on commencera par ses constituants, puis on passera aux différents types de faisceaux lasers qu'on peut avoir, avec mode fondamental et mode d'ordre supérieur. En suite on passera aux techniques utilisées pour la caractérisation du faisceau laser, d'où on présentera la notion de facteur qualité  $M^2$ , et la notion des moments du second ordre. La seconde partie est dédiée à la théorie des interférences et des interférogrammes, on verra des notions sur la polarisation de la lumière, les montages d'interférométrie et les systèmes utilisés pour le décalage de phase.

### Partie A: Théorie des faisceaux lasers

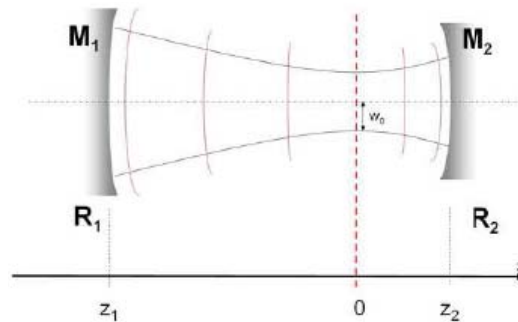
## I.2. Constitution du laser

Les lasers sont constitués d'un milieu amplificateur qui contient des atomes ou des molécules dans un état excité, prêt à se désexciter au passage d'une onde lumineuse de fréquence appropriée, par émission stimulée. Le milieu est généralement placé dans une cavité résonnante optique qui permet d'augmenter considérablement cet effet amplificateur en faisant passer l'onde d'un grand nombre de fois dans le milieu. La cavité optique permet aussi d'augmenter la sélectivité spectrale du dispositif [1-5].

Dans ce chapitre, on n'abordera pas le milieu amplificateur et le système de pompage, on focalisera tout juste notre étude sur les faisceaux lasers sortant de la cavité. Alors, on a jugé qu'un petit rappel sur les cavités lasers résonantes est important pour la compréhension de la notion des modes lasers d'ordres fondamentaux et d'ordres supérieurs.

### I.3. Les cavités lasers

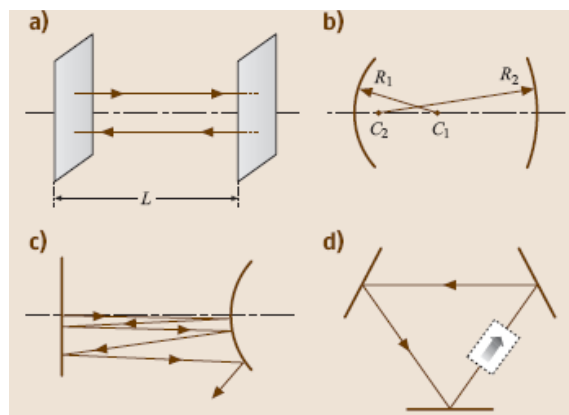
La cavité laser a un rôle très important, elle permet l'amplification de l'onde optique grâce à un système réfléchissant (la plupart du temps des miroirs). C'est aussi la cavité qui permet, via ses pertes (un des miroirs utilisé n'est que partiellement réfléchissant), d'extraire le faisceau laser utile. Enfin la géométrie de la cavité détermine en grande partie les caractéristiques spatiales et spectrales du rayonnement laser émis. Elle est constituée de deux miroirs  $M_1$  et  $M_2$ ; l'un est totalement réfléchissant de rayon de courbure  $R_1$  et l'autre semi réfléchissant de rayon de courbure  $R_2$  pour laisser sortir le faisceau laser ([1-5], (voir figure. I.1)).



**Figure I.1** Schéma d'une cavité laser.

Ils existent plusieurs configurations de la cavité, on cite par exemple; Cavité Fabry Péro, Cavité sphérique, etc. (voir figure.2).

Par conséquent, on distingue deux types de résonateurs : les résonateurs stables, dans lesquels le rayonnement reste confiné dans la cavité, et les résonateurs instables dans lesquels le faisceau sort de la cavité après un nombre fini de réflexions.



**Figure I.2.** Type de cavité laser;

- (a) Cavité en miroirs parallèles; (b) Cavité en miroirs sphériques; (c) Cavité instable;  
(d) Cavité en anneau

Une onde stationnaire résonante ne peut s'installer dans la cavité qu'à la condition suivante [1-6]:

$$0 \leq \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) \leq 1$$

Avec:  $L$  est la longueur de la cavité.

#### I.4. Les faisceaux lasers

Dans cette section, nous présentons les équations et les solutions particulières de base dans le traitement des problèmes de diffraction. Nous présentons d'abord l'équation d'onde paraxiale et ses solutions les plus connues. Ensuite, les intégrales de diffraction sont introduites afin de présenter les principales méthodes numériques de propagation de faisceaux. Nous présentons alors différentes motivations qui supportent l'introduction des moments d'intensité pour décrire les solutions des problèmes de diffraction.

##### I.4.1 L'équation d'onde paraxiale et ses solutions

La propagation des faisceaux lasers est régie par les lois de la diffraction qui découlent, ultimement, des équations de Maxwell [6]. Un traitement vectoriel n'est cependant pas toujours nécessaire. Une approche scalaire et paraxiale permet souvent de décrire les faisceaux lasers de façon convenable. L'amplitude complexe  $E(r, z)$  d'un faisceau est alors une solution de l'équation d'onde paraxiale qui prend la forme suivante [6]:

$$\nabla_r^2 E(r, z) - 2ik \frac{\partial E(r, z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.1})$$

Avec:  $r = (x, y)$ .

$k$ : est le nombre d'onde.

Les solutions obtenues par la méthode de séparation de variables en coordonnées cartésiennes représentent les faisceaux Hermite-Gauss [1-5]. Dans toute position  $z$  le long de l'axe de propagation, ces faisceaux sont décrits par:

$$E_{m,n}(x, y, z) = \left(\frac{W_0}{W(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{W(z)}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{W(z)}\right) \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{W^2(z)}\right] \times \exp\left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2R_c(z)}\right] \times \exp[ik(m+n+1)\phi(z)] \quad (\text{I.2})$$

Avec  $H_m$  est le polynôme d'Hermite d'ordre  $m$ , il est défini comme:

$$H_0 = 1 \quad H_1 = x \quad H_2 = 4x^2 - 2 \quad H_3 = 8x^3 - 12x \quad (\text{I.3})$$

Et la relation de récurrence:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (I.4)$$

Tel que:

$W_0$  est la taille minimale du faisceau.  $W$  est La largeur du faisceau à la distance de propagation  $z$ .

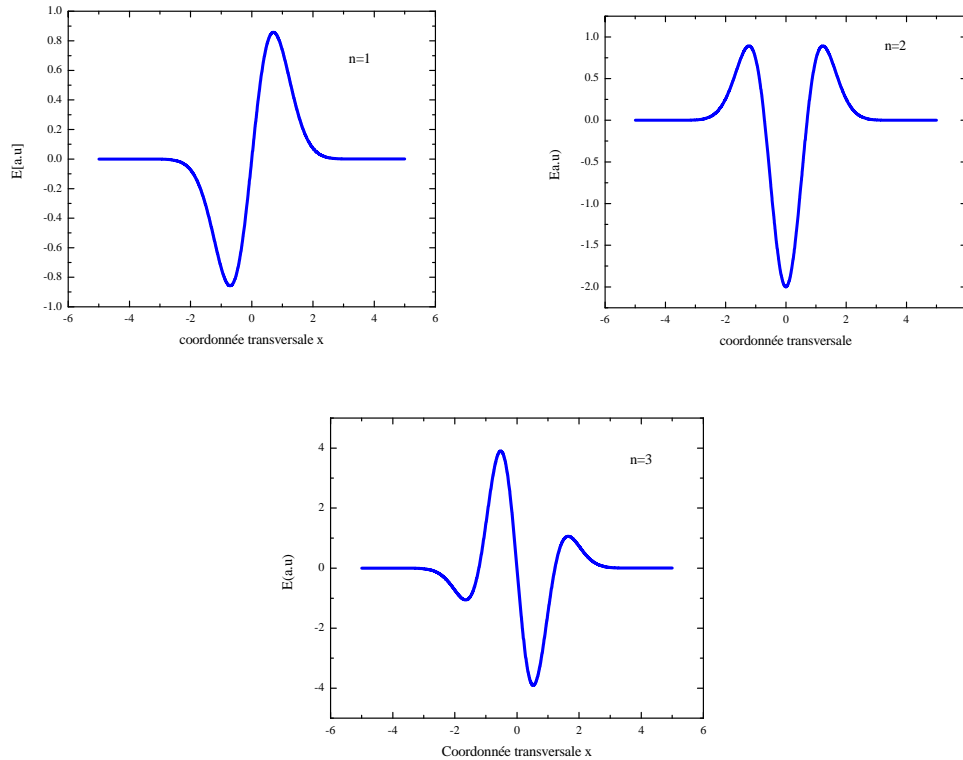
Les ordres latéraux  $m$  et  $n$  donnent le nombre de lignes nodales perpendiculaires aux axes  $x$  et  $y$ .

$\phi$ : La phase.

$R_c$ : Le rayon de courbure du front d'onde.

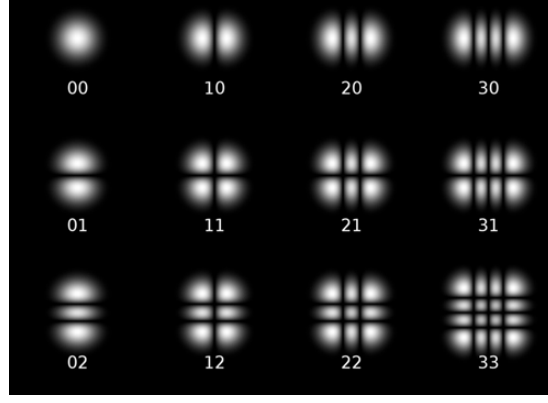
On peut développer les polynômes d'Hermite selon la série suivante:

$$H_n(x) = n! \sum_{s=0}^{n/2} (-1)^s \frac{(2x)^{n-2s}}{(n-2s)!s!}$$



**Figure I.3:** représentation des distributions du champ électrique des quatre premiers ordres ( $TEM_{10}$ ,  $TEM_{20}$ ,  $TEM_{30}$ ,  $TEM_{40}$ ) d'Hermite-Gauss

Les structures spatiales de quelques modes sont représentées dans la figure I.4



**Figure I.4:** Section transversale des modes laser Hermite-Gauss.

Les solutions de l'équation d'onde paraxiale obtenues par la méthode de séparation des variables en coordonnées cylindriques prennent plutôt la forme suivante [1-5] :

$$E_{p,l}(\rho, \theta) = E_0 \left( \frac{\sqrt{2}\rho}{W_0} \right)^l L_p^l \left( \frac{2\rho^2}{W_0^2} \right) \exp \left[ -\frac{\rho^2}{W^2} \right] \exp(+il\theta) \quad (\text{I.5})$$

Avec:

$E_0$  est une constante complexe,  $L_p^l$  est un polynôme de Laguerre généralisé d'ordres  $(p, l)$  et  $W_0$  est la taille minimale du faisceau. Ces solutions représentent les faisceaux Laguerre-Gauss. L'indice  $p$  est l'ordre radial et l'indice  $l$  est l'ordre azimutal. Les ordres  $\pm l$  peuvent être superposés pour donner des faisceaux Laguerre-Gauss présentant  $|l|$  lignes nodales radiales. La solution (1.5) s'exprime alors comme suit:

$$E_{p,l}(\rho, \theta) = E_0 \left( \frac{\sqrt{2}\rho}{W_0} \right)^l L_p^l \left( \frac{2\rho^2}{W_0^2} \right) \exp \left[ -\frac{\rho^2}{W^2} \right] \cos(l\theta) \quad (\text{I.6})$$

Avec  $L_p^0(2\rho^2/W^2)$  représente le polynôme de Laguerre d'ordre  $p$ , il est défini comme suit:

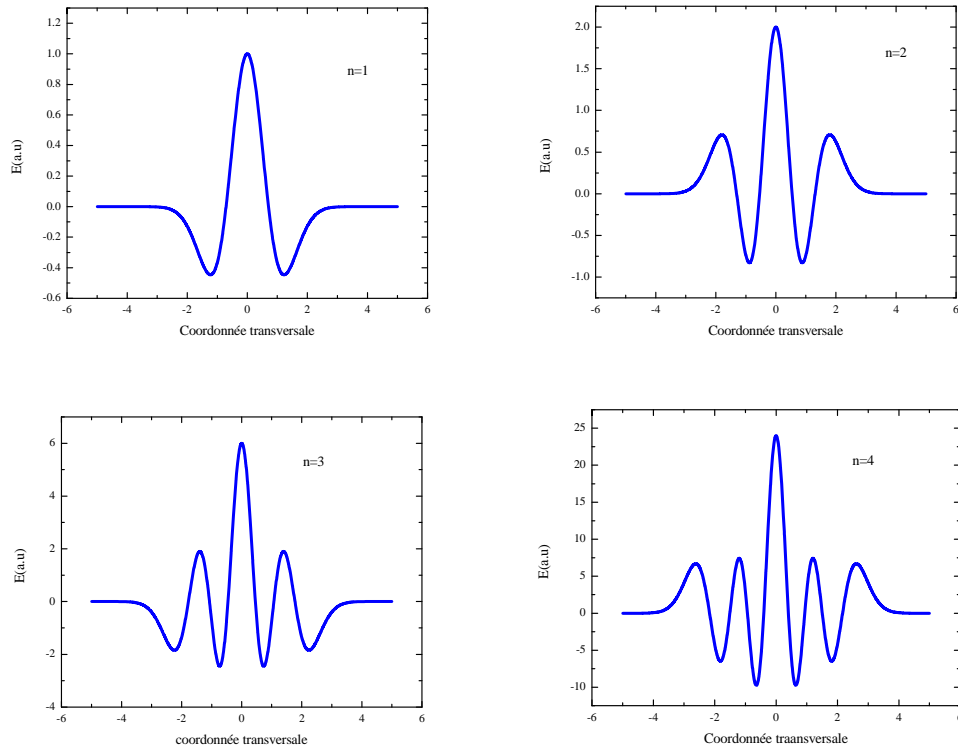
- La relation de récurrence est:

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

- Le développement en série est:

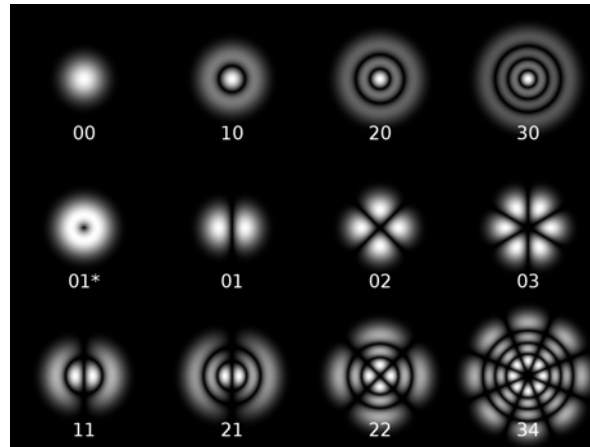
$$L_p(x) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{n! x^r}{(n-r)!(r!)^2}$$





**Figure I.5:** Représentation de la distribution du champ électrique des quatre premiers ordres ( $TEM_{10}$ ,  $TEM_{20}$ ,  $TEM_{30}$  et  $TEM_{40}$ ) de Laguerre-Gauss

Les faisceaux Laguerre-Gauss sont illustrés, sous cette dernière forme dans la figure I.6.



**Figure I.6:** Section transversale des modes laser Hermite-Gauss.

Tout faisceau laser peut être exprimé comme une superposition en amplitude de faisceaux Hermite-Gauss ou de faisceaux Laguerre-Gauss, chacune de ces familles de solutions forme une base complète [1]. Ceci implique également l'existence de relations entre ces deux bases [7-8]. De plus, les faisceaux Hermite-Gauss et Laguerre-Gauss ont la propriété

unique de posséder une distribution transversale d'intensité invariante, à un facteur d'échelle près, avec la distance parcourue le long de l'axe  $z$  [7-8].

A partir des solutions présentées ci-dessus (Laguerre-Gauss et Hermite-Gauss), on peut écrire l'expression du champ électrique d'ordre fondamental d'un faisceau laser sortant de la cavité, pour le cas de  $(m=0, n=0)$  et aussi  $(l=0, p=0)$ , Ce mode fondamental TEM<sub>00</sub> est la base de l'étude des faisceaux lasers, on l'appelle faisceau gaussien, le champ électrique d'un tel faisceau selon la coordonné radiale transversale  $\rho$  s'écrit comme suit [1-6]:

$$E(\rho, z) = E_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right] \exp\left\{i\left(kz - \phi(z) + \frac{k\rho^2}{2R_c(z)}\right)\right\} \quad (I.7)$$

Avec:

$W$  est La largeur du faisceau gaussien, tel que:

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (I.8)$$

$\phi$  est La phase de Gouy, son expression est donnée par:

$$\phi(z) = \arctg\left(\frac{z}{z_R}\right) \quad (I.9)$$

On introduit aussi une grandeur clé qui est la largeur de Rayleigh  $Z_R$ , elle décrit la profondeur de focalisation du faisceau laser:

$$Z_R = \frac{\pi W_0^2}{\lambda} \quad (I.10)$$

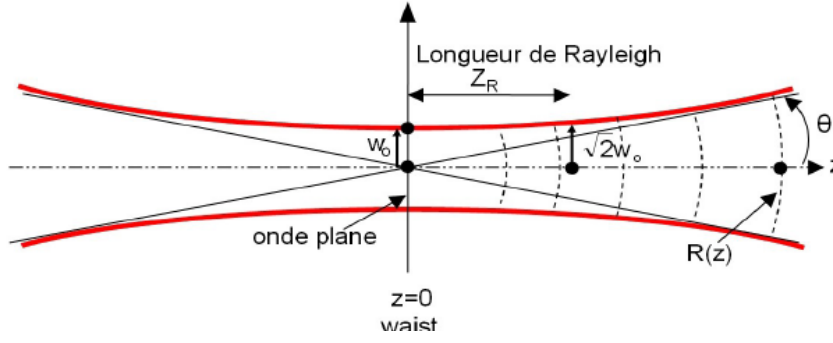
Ici  $W_0$  est la largeur minimale du faisceau laser gaussien, on l'appelle aussi waist.

L'élargissement du faisceau est donné par l'angle de divergence en fonction de la largeur minimale  $W_0$  et longueur d'onde  $\lambda$  comme suit:

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi W_0} \quad (I.11)$$

$R_c$  est le rayon de courbure, il est donné par:

$$R_c(z) = z \left[ 1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2 \right] \quad (I.12)$$

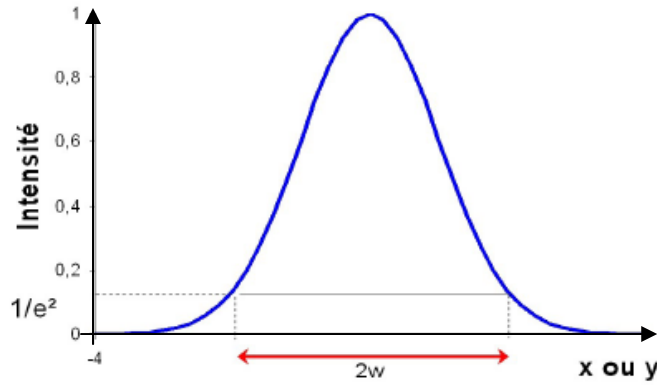


**Figure I.7:** Caractéristiques d'un faisceau gaussien.

A partir de l'expression du champ électrique, on détermine la distribution d'intensité, elle est donnée par:

$$I(\rho, z) = I_0 \left( \frac{W_0}{W(z)} \right)^2 \exp \left[ -2 \frac{\rho^2}{W^2(z)} \right] \quad (\text{I.13})$$

Le profile de l'intensité est représenté dans la figure:



**Figure I.8:** Profile d'intensité gaussienne

Alors on peut déterminer l'expression de l'intensité sur l'axe, elle est donnée par:

$$I(0, z) = I_0 \left( \frac{W_0}{W(z)} \right)^2 = \frac{1}{1 + \left( \frac{z}{Z_R} \right)^2} \quad (\text{I.14})$$

Donc la puissance équivalente à cette intensité est donnée par:

$$P = 2\pi \int_0^\infty I(\rho, z) \rho d\rho = \frac{\pi W_0^2}{2} I_0 \quad (\text{I.15})$$

On remarque que la puissance est indépendante de z.

Alors, les caractéristiques des faisceaux Laguerre-Gauss et Hermite Gauss sont fonction des caractéristiques du faisceau gaussien, cela est résumé dans le tableau [10-15]:

Caractéristiques du faisceau	Faisceau Gaussien	Faisceau Laguerre-Gauss $LG_p^l$	Faisceau Hermite –Gaussien $HG_m^n$
La largeur $W$	$W_G$	$W = W_G \sqrt{2p + l + 1}$	$W_x = W_G \sqrt{2m + 1}$ $W_y = W_G \sqrt{2n + 1}$
La divergence $\theta$	$\theta_G$	$\theta = \theta_G \sqrt{2p + l + 1}$	$\theta_x = \theta_G \sqrt{2m + 1}$ $\theta_y = \theta_G \sqrt{2n + 1}$
Le facteur de qualité $M^2$	$M^2 = 1$	$M^2 = 2p + l + 1$	$M_x^2 = 2m + 1$ $M_y^2 = 2n + 1$

**Tableau. I.1:** Caractéristiques des faisceaux  $LG_p^l$  et  $HG_m^n$  en fonction des caractéristiques du faisceau gaussien.

Nous verrons dans les sections suivantes VI, VII et VIII que les différentes expressions de la largeur du faisceau, la divergence et le rayon de courbure peuvent être généralisées à tout faisceau laser en introduisant les moments d'intensité.

### I.5. Intégrales de diffraction en régime paraxial

L'équation d'onde paraxiale est utile, par sa forme différentielle, pour établir ou valider des solutions analytiques. Toutefois, il existe plusieurs situations dans lesquelles on souhaite déterminer l'évolution, en fonction de la position  $z$ , d'un champ initial connu dans un plan transversal donné. Dans ces situations, il est préférable d'utiliser une forme intégrale de l'équation d'onde paraxiale. Cette forme intégrale est, en fait, une intégrale de diffraction [6] simplifiée à partir de l'approximation paraxiale [1-6]. Dans cette thèse, nous allons utiliser l'intégrale de diffraction de Huygens-Fresnel. Elle prend l'une des deux formes suivantes selon la géométrie cartésienne ou cylindrique [1]:

Pour la géométrie cartésienne, on a:

$$E(x, y) = \exp(-jkd) \frac{j}{\lambda d} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_i(x_i, y_i) \exp \left[ -j\pi \frac{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}{\lambda d} \right] dx_i dy_i \quad (\text{I.16.a})$$

Et pour la géométrie cylindrique, on aussi:

$$E(r, \theta) = \exp(-jkd) \frac{j^{l+1}}{\lambda d} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} E_i(r_i, \theta_i) \exp\left[-\frac{j\pi}{\lambda d} (r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos(\theta - \theta_i))\right] r_i dr_i d\theta_i \quad (\text{I.16b})$$

Avec:

$x, y, x_i$  et  $y_i$  sont les coordonnées transversales.

$r, r_i$  sont les coordonnées radiales.

Dans ces équations,  $E_i$  est l'amplitude dans le plan initial  $z_i$  alors que  $E$  représente l'amplitude dans le plan  $z = z_i + d$ , c'est-à-dire après propagation sur une distance  $d$ .

En géométrie cartésienne, l'intégrale (I.7a) prend la forme d'une convolution [6]. Ceci permet d'établir un algorithme numérique de propagation de faisceaux appelé *méthode de propagation de faisceaux* (BPM) [1]. En coordonnées cylindriques, le fait d'exprimer l'intégrale (I.16.b) sous la forme d'une corrélation permet de définir les *transformées de Hankel quasi-rapides* (QFHT) [9].

Les deux relations (I.16) peuvent être simplifiées davantage lorsque la symétrie des problèmes étudiés permet d'appliquer la méthode de séparation des variables. En géométrie cartésienne, cette méthode permet de définir une intégrale de diffraction pour un faisceau ayant une seule dimension transversale:

$$E(x, y) = E(x)E(y) \quad (\text{I.17.a})$$

$$E(u) = \exp(-jkd) \sqrt{\frac{j}{\lambda d}} \int_{-\infty}^{+\infty} E_i(u_i) \exp\left[-\frac{j\pi}{\lambda d} (u - u_i)^2\right] du_i, \quad u = x, y \quad (\text{I.17.b})$$

Un problème de diffraction à deux dimensions transversales se réduit alors à deux problèmes de diffraction à une seule dimension transversale.

En géométrie cylindrique, il est commun de décomposer les faisceaux en différents ordres azimutaux. Pour chaque ordre azimutal  $n$ , on a alors:

$$E(r, \theta) = E(r) \exp(+jn\theta) \quad (\text{I.18.a})$$

$$E(r) = \exp(-jkd) \frac{2\pi j^{l+1}}{\lambda d} \int_0^{+\infty} E_i(r_i) J_l\left(\frac{2\pi r r_i}{\lambda d}\right) \exp\left[-\frac{j\pi}{\lambda d} (r^2 + r_i^2)\right] r_i dr_i, \quad (\text{I.18.b})$$

Les ordres azimutaux peuvent ainsi être traités séparément et recombinaés, au besoin, après propagation.

L'expression (I.18.b) peut laisser croire, à première vue, que la diffraction en coordonnées cylindriques ne peut être réduite à la propagation d'un faisceau cartésien

Unidimensionnel.

Et pour faire une description complète des faisceaux lasers, on doit passer aussi au domaine des fréquences spatiales, par cette manière l'introduction du fameux facteur de qualité  $M^2$  et autres caractéristiques des faisceaux seront possibles et facile.

### I.6-Analyse des fréquences spatiales des faisceaux optiques

Ce paragraphe, résume les définitions fondamentales et les relations de transformations utilisées dans l'analyse des fréquences spatiales d'un faisceau laser monochromatique et paraxial.

#### I.6.1 Amplitude complexe

Le champ réel  $E$ , fonction de la position et du temps, d'un faisceau laser monochromatique se propageant essentiellement dans la direction  $z$  dans l'espace libre peut être exprimé à l'aide d'une amplitude complexe  $E(x, y, z)$  sous la forme:

$$E(x, y, z) = \text{Re}\{E(x, y, z)e^{i(\omega t - kz)}\} \quad (\text{I.19})$$

Cette distribution d'amplitude complexe peut être exprimée comme la transformée de Fourier (TF) dans le plan transverse  $(x, y)$  de la distribution dans le domaine des fréquences spatiales  $P(S_x, S_y, z)$  par [1-6]:

$$E(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(S_x, S_y, z) \exp[-i2\pi(S_x x + S_y y)] dS_x dS_y \quad (\text{I.20})$$

La distribution  $(S_x, S_y, z)$  est obtenue à partir de la TF inverse:

$$P(S_x, S_y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, y, z) \exp[i2\pi(S_x x + S_y y)] dx dy \quad (\text{I.48})$$

Les variables  $S_x$  et  $S_y$  de la transformation sont appelées " Fréquences spatiales" dans les directions  $x$  et  $y$  et  $P(S_x, S_y, z)$  représente le spectre des fréquences spatiales de l'amplitude complexe  $E(x, y, z)$ .

#### I.6.2 Profile d'intensité du faisceau

Le profile d'intensité dans le domaine spatial est le carré du module de la distribution du champ électrique  $E(x, y, z)$  comme suit:

$$I(x, y, z) = |E(x, y, z)|^2 \quad (\text{I.21})$$

Et dans le domaine des fréquences spatiales:

$$J(S_x, S_y, z) = |P(S_x, S_y, z)|^2 \quad (I.22)$$

On note que la distribution d'intensité des fréquences spatiales  $J(S_x, S_y)$  est indépendante de la distance de propagation  $z$  dans l'espace libre comme nous le verrons dans la suite.

### I.6.3 Spectre angulaire des ondes planes

Chaque composante des fréquences spatiales d'un faisceau laser, caractérisée par la paire  $(S_x, S_y)$ , peut être reliée à une onde plane uniforme se propageant dans une direction faisant un angle  $\theta_x$  et  $\theta_y$  par rapport à l'axe  $z$ .

L'amplitude complexe  $E_p$  associée à une onde plane d'amplitude  $E_0$  se propageant dans une direction inclinée sous les angles  $\theta_x$  et  $\theta_y$  par rapport à l'axe  $z$  s'écrit [3,6]:

$$E_p(x, y, z) = E_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}} = E_0 \exp\{-i[(k \sin \theta_x)x + (k \sin \theta_y)y + k_z z]\} \quad (I.23)$$

L'équation (I.23) est équivalente à l'équation suivante:

$$E_p(x, y, z) = E_0 \exp\{-i[2\pi S_x x + 2\pi S_y y + k_z z]\} \quad (I.24)$$

Avec:

$$2\pi S_x \equiv k \sin \theta_x = \frac{2\pi \sin \theta_x}{\lambda} \quad \text{Et} \quad 2\pi S_y \equiv k \sin \theta_y = \frac{2\pi \sin \theta_y}{\lambda} \quad (I.25)$$

Un faisceau laser se propageant essentiellement dans la direction  $z$  satisfaisant la condition de paraxialité qui peut être simplifiée sous la forme:

$$\lambda S_x = \sin \theta_x \approx \theta_x \quad \text{Et} \quad \lambda S_y = \sin \theta_y \approx \theta_y \quad (I.26)$$

La distribution  $P(S_x, S_y, z)$  des fréquences spatiales correspond donc physiquement à une distribution angulaire d'ondes planes formant le faisceau global avec des directions angulaires  $\theta_x \approx \lambda S_x$  et  $\theta_y \approx \lambda S_y$ .

### I.6.4 Propagation axiale

Le vecteur d'onde d'une onde plane a un module  $k$  tel que  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ , la composante suivant  $z$  du vecteur d'onde plane uniforme se propageant dans une direction faisant les angles  $\theta_x$  et  $\theta_y$ , par rapport à l'axe  $z$ , est donnée par [1-6]:

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = k \sqrt{1 - (\lambda S_x)^2 - (\lambda S_y)^2}$$

Alors

$$k_z \approx k - \pi\lambda(S_x^2 + S_y^2) \quad (I.27)$$

Hypothèse de paraxialité du faisceau (inclinaison limite 30°) [3,6].

Chaque onde plane ou chaque fréquence spatiale résultant de la décomposition spectrale angulaire du faisceau global possède un terme de propagation de la forme:

$$\exp[-ik_z z] = \exp[-ikz] \exp[i\pi\lambda(S_x^2 + S_y^2)] \quad (I.28)$$

Le premier terme  $\exp[-ikz]$  correspond au terme de propagation  $\exp[-ikz]$  de  $\exp[i(\omega t - kz)]$  introduit dans l'amplitude complexe du champ.

La distribution des fréquences spatiales ou la distribution angulaire  $P(S_x, S_y, z)$  a donc une variation selon  $z$  dans l'espace libre donnée par:

$$P(S_x, S_y, z) = P(S_x, S_y, z_0) \exp[i\pi\lambda(S_x^2 + S_y^2)(z - z_0)] \quad (I.29)$$

Où  $P(S_x, S_y, z_0)$  est la distribution initiale dans un plan de référence  $z = z_0$ . Chaque composante de fréquence spatiale  $P(S_x, S_y, z)$ , ne change pas en amplitude mais subit seulement un déphasage dépendant de la distance  $z$ .

Par conséquent la distribution angulaire d'intensité  $J(S_x, S_y) \equiv |P(S_x, S_y, z)|^2$  du faisceau est indépendante de  $z$ .

### I.6.5 Résolution numérique de la propagation

La loi de propagation de  $P(S_x, S_y, z)$  donnée précédemment est à la base des procédures de calcul numérique de la propagation d'un faisceau laser en espace libre, ou plus généralement dans un système optique paraxial quelconque.

On se donne dans un plan de référence  $z_0$  la distribution d'entrée  $E(x, y, z_0)$  et on en déduit la sortie  $E(x, y, z)$  dans un plan  $z$  en espace libre, en tenant compte des effets de diffraction, en utilisant la procédure suivante [16]:

(a)- A partir de la distribution d'entrée du champ  $E(x, y, z_0)$  on calcule la distribution correspondante  $P(S_x, S_y, z_0)$  en utilisant un algorithme de FFT (Fast Fourier Transform) .

(b)- Propager cette distribution  $P(S_x, S_y, z_0)$  jusqu'au plan de sortie  $z$ , en multipliant chaque composante par le facteur de propagation donné par:

$$\exp[i\pi\lambda(z - z_0)(S_x^2 + S_y^2)].$$

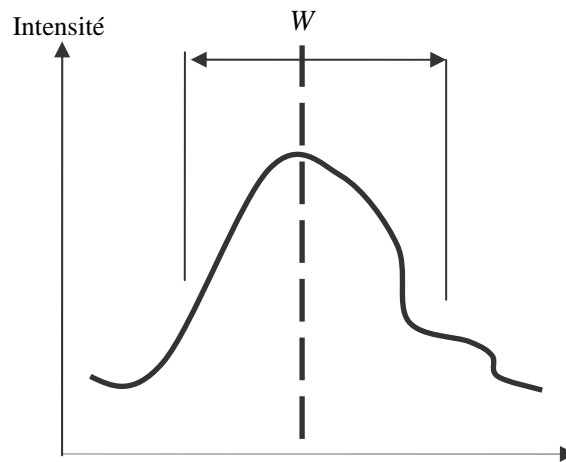


(c)- Transformer la distribution angulaire de sortie  $P(S_x, S_y, z)$  en une distribution de champ  $E(x, y, z)$  à la sortie en utilisant la transformée de Fourier inverse [9,12].

L'avantage de cette procédure est sa rapidité d'exécution puisque la FFT met en jeu une densité d'opération qui varie en  $N \ln(N)$  alors que les méthodes classiques telles que l'intégration directe de l'intégrale de Huygens, la densité d'opération varie comme  $N^2$ , avec  $N$ , c'est le nombre de points.

### I.7- Les moments d'un faisceau laser

Dans la pratique la plus part des lasers sont multimodes et la distribution de leurs intensités n'est pas gaussienne. Le premier problème qu'on trouve avec ces lasers, c'est l'évaluation de la largeur et de la divergence, car le centre n'est pas défini, et peut être même le faisceau n'est pas symétrique (voir figure. I.9). Pour ces raisons Sasnet à proposé dans les années 80 une méthode statistique basée sur les moments d'intensité pour l'évaluation des différentes caractéristiques des faisceaux optiques en général, comme leurs largeurs, leurs divergences, etc, [1, 4, 5].



**Figure. I.9:** distribution d'intensité d'un faisceau laser non gaussien.

Ce paragraphe définit les moments, déterminés à partir de la distribution transverse d'intensité d'un faisceau laser dans le domaine spatial et dans le domaine des fréquences spatiales. On s'intéressera aussi aux lois de la transformation de ces moments lorsque le faisceau se propage.

Ces moments sont à la base de la définition de la largeur d'un faisceau et de son facteur de qualité qui seront abordés aux paragraphes suivants. Dans cette partie on considérera les coordonnées rectangulaires  $(x, y)$ . Le cas des coordonnées cylindriques sera considéré ultérieurement.

Le tableau. I.2 montre la signification physique des moments de différents ordres.

Les moments d'intensité	Les paramètres de champ
Premier ordre	Le centre de gravité
Second ordre	La largeur et la divergence
Troisième ordre	La symétrie
Quatrième ordre	La structure (Flatness)

**Tableau. I.2** Signification physique des moments de différents ordres

### I.7.1 Moment d'ordre 1

L'amplitude complexe  $E$  associée à un faisceau laser peut toujours être normalisée telle que la puissance totale  $P_0$  transportée par le faisceau laser soit égale à l'unité [16-29]:

$$P_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} J(S_x, S_y) dS_x dS_y = 1 \quad (\text{I.30})$$

Les moments d'ordre 1 ou "centres de gravité" d'un faisceau laser quelconque dans le domaine spatiale transverse sont définis par [11-15]:

$$\langle x(z) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x |E(x, y, z)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x I(x, y, z) dx dy \quad (\text{I.31})$$

$$\langle y(z) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y |E(x, y, z)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y I(x, y, z) dx dy \quad (\text{I.32})$$

Les moments d'ordre 1 dans le domaine angulaire ou des fréquences spatiales s'expriment de manière similaire [16-29]:

$$\langle S_x(z) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x |P(S_x, S_y, z)|^2 dS_x dS_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x J(S_x, S_y, z) dS_x dS_y \quad (\text{I.33})$$

$$\langle S_y(z) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_y |P(S_x, S_y, z)|^2 dS_x dS_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_y J(S_x, S_y, z) dS_x dS_y \quad (\text{I.34})$$

On remarque que ces intégrales sont doubles, et  $\langle x(z) \rangle$  et  $\langle y(z) \rangle$  varient avec  $z$ , alors que  $S_x$  et  $S_y$  ne dépendent pas de  $z$  comme il a déjà été remarqué précédemment.

### I.7.2. Transformation des moments d'ordre 1 au cours de la propagation

A partir des formules (TF) reliant  $E(x, y, z)$  et  $P(x, y, z)$  et de la relation (I.11), on peut montrer que les moments d'ordre 1 d'un faisceau quelconque en espace libre évoluent en fonction de  $z$  suivant les relations suivantes [16-29]:

$$\begin{cases} \langle x(z) \rangle = \langle x(z_1) \rangle + \lambda \langle S_x \rangle (z - z_1) \\ \langle y(z) \rangle = \langle y(z_1) \rangle + \lambda \langle S_y \rangle (z - z_1) \end{cases} \quad (\text{I.35})$$

Physiquement les relations (I.35) signifient que le "centre de gravité" du profil d'intensité se propage exactement en ligne droite, suivant une direction faisant un angle  $\langle \theta_x \rangle = \lambda \langle S_x \rangle$  et  $\langle \theta_y \rangle = \lambda \langle S_y \rangle$ .

Avec  $\lambda$  es la longueur d'onde.

### I.7.3. Moments d'ordre 2

L'expansion latérale d'un faisceau autours de son centre de gravité, dans le domaine spatiale et dans le domaine angulaire, peut être caractérisée par la variance ou le moment centré d'ordre 2, dans les deux domaines de représentation. Les variances dans le domaine spatial s'expriment par [16-29]:

$$\sigma_x^2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 |\bar{E}(x, y, z)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 I(x, y, z) dx dy \quad (\text{I.36})$$

$$\sigma_y^2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \langle y \rangle)^2 |\bar{E}(x, y, z)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \langle y \rangle)^2 I(x, y, z) dx dy \quad (\text{I.37})$$

C'est  $\sigma^2$  qui est une variance, elle est homogène à une surface, alors que  $\sigma$  est l'écart quadratique moyen (écart type), il est homogène à une longueur.

Les variances correspondent au domaine des fréquences spatiales [16-29] sont données par:

$$\sigma_{S_x}^2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (S_x - \langle S_x \rangle)^2 |\bar{P}(x, y, z)|^2 dS_x dS_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (S_x - \langle S_x \rangle)^2 I(x, y, z) dS_x dS_y \quad (\text{I.38})$$

$$\sigma_{S_y}^2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (S_y - \langle S_y \rangle)^2 |\bar{P}(x, y, z)|^2 dS_x dS_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (S_y - \langle S_y \rangle)^2 I(x, y, z) dS_x dS_y \quad (\text{I.39})$$

### I.7.4. Transformation des moments d'ordre 2 avec la distance de propagation

A partir d'un calcul plus complexe que pour le moment d'ordre 1 il est possible de montrer que les variances  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  d'un faisceau quelconque monochromatique varient avec  $z$  suivant une loi quadratique [16-29]:

$$\begin{cases} \sigma_x^2(z) = \sigma_x^2(z_1) - A_{1x}(z - z_1) + \lambda^2 \sigma_{S_x}^2 (z - z_1)^2 \\ \sigma_y^2(z) = \sigma_y^2(z_1) - A_{1y}(z - z_1) + \lambda^2 \sigma_{S_y}^2 (z - z_1)^2 \end{cases} \quad (\text{I.40})$$

Où  $A_{1x}$  et  $A_{1y}$  sont les valeurs des intégrales  $A_x$  et  $A_y$  évaluées dans le plan (arbitraire) de référence  $z=z_1$

$$A_x = i \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x \left[ \bar{P}(S_x, z) \frac{\partial \bar{P}^*(S_x, z)}{\partial S_x} - \bar{P}^*(S_x, z) \frac{\partial \bar{P}(S_x, z)}{\partial S_x} \right] dS_x S_y \quad (\text{I.41-a})$$

$$A_y = -i \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_y \left[ \bar{P}(S_y, z) \frac{\partial \bar{P}^*(S_y, z)}{\partial S_y} - \bar{P}^*(S_y, z) \frac{\partial \bar{P}(S_y, z)}{\partial S_y} \right] dS_x S_y \quad (\text{I.41-b})$$

Ces formules montrent que les variances dans les deux directions ont une valeur minimum données par [16-29]:

$$\sigma_{0x}^2(z) = \sigma_x^2(z_1) - \frac{A_{1x}^2}{4\lambda^2 \sigma_{S_x}^2} \quad (\text{I.42-a})$$

$$\sigma_{0y}^2(z) = \sigma_y^2(z_1) - \frac{A_{1y}^2}{4\lambda^2 \sigma_{S_y}^2} \quad (\text{I.42-b})$$

Les valeurs minimales sont prises par  $\sigma_x(z)$  et  $\sigma_y(z)$  dans les plans positions des waists [16-29]:

$$z_{0x}(z) = z_1 - \frac{A_x}{2\lambda^2 \sigma_{S_x}^2} \quad (\text{I.43-a})$$

$$z_{0y}(z) = z_1 - \frac{A_y}{2\lambda^2 \sigma_{S_y}^2} \quad (\text{I.43-b})$$

Les relations des équations (I.42-a) et (I.42-b) peuvent se réduire sous la forme quadratique simplifiée [16-29]:

$$\sigma_x^2(z) = \sigma_{0x}^2 + \lambda^2 \sigma_{S_x}^2 (z - z_{0x})^2 \quad (\text{I.44-a})$$

$$\sigma_y^2(z) = \sigma_{0y}^2 + \lambda^2 \sigma_{S_y}^2 (z - z_{0y})^2 \quad (\text{I.44-b})$$

Il est important de noter que les relations (I.44-a) et (I.44-b) sont valables pour un faisceau quelconque et sont à la base de la définition du facteur de qualité d'un faisceau laser monochromatique.

### I.7.5. Moments croisés

On peut de manière similaire, définir des "moments croisés" entre les directions  $x$  et  $y$ , à la fois dans le domaine spatial et dans le domaine angulaire [16-29]:

Dans le domaine spatial on a:

$$\sigma_{xy}^2(z) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) I(x, y, z) dx dy \quad (I.45)$$

Avec:  $I(x, y, z) = |\bar{E}(x, y, z)|^2$

Et dans le domaine angulaire on a aussi [16-29]:

$$\sigma_{S_x S_y}^2(z) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} (S_x - \langle S_x \rangle)(S_y - \langle S_y \rangle) J(S_x, S_y, z) dx dy \quad (I.46)$$

Avec:  $J(S_x, S_y, z) = |\bar{P}(S_x, S_y, z)|^2$

### I.7.6. Axes principaux et faisceaux astigmatiques

Un faisceau laser réel peut avoir de l'astigmatisme (positions du beam waist différentes,  $z_{0x} \neq z_{0y}$ ) ou de l'asymétrie (différentes valeurs de la largeur du beam waist  $\sigma_{0x}^2 \neq \sigma_{0y}^2$ ) ou une combinaison des deux.

Si un faisceau laser présente de l'astigmatisme ou de l'asymétrie alors la rotation des axes  $x$ - $y$  autour de l'axe  $z$  changera la valeur des différents moments définis précédemment.

Toutes les transformations suivant  $z$  des moments que l'on a vu dans ce paragraphe demeurent valables et indépendantes du fait que les axes  $x$ - $y$  coïncident ou pas avec les axes principaux du faisceau laser. On verra plus loin les formules de transformation des paramètres de faisceau suivant le choix des axes de coordonnées transverses.

## I.8. Cas particulier: Le faisceau gaussien

### I.8.1. Distribution dans le domaine spatial et dans le domaine des fréquences spatiales

On rappelle que l'amplitude complexe associé à un faisceau gaussien s'écrit:

$$E(x, y, z) = \frac{W_0}{W(z)} \exp \left[ -\frac{(x^2 + y^2)}{W^2(z)} - i \frac{\pi}{\lambda} \frac{(x^2 + y^2)}{R(z)} \right] \quad (I.47)$$

Et le profile transverse de l'intensité est exprimé par:

$$I(x, y, z) = I_0 \exp \left[ -2 \frac{(x^2 + y^2)}{W^2(z)} \right] \quad (I.48)$$

L'évolution longitudinale de la largeur  $W(z)$  du faisceau obéit à:

$$W^2(z) = W_0^2 + \frac{\lambda^2}{\pi^2 W_0^2} (z - z_0)^2 \quad (\text{I.49})$$

Avec  $W_0$  est le minimum de  $W$ , ou largeur du beam waist du faisceau gaussien.

La distribution des fréquences spatiales d'un faisceau  $\text{TEM}_{00}$  a une allure qui est gaussienne:

$$P(S_x, S_y, z) = C \exp[-\pi^2 W_0^2 (S_x^2 + S_y^2)] \quad (\text{I.50})$$

Et le profil d'intensité dans le domaine des fréquences spatiales:

$$J(S_x, S_y, z) = C \exp[-2\pi^2 W_0^2 (S_x^2 + S_y^2)] \quad (\text{I.51})$$

Avec  $C$ : est une constante.

### I.8.2. Moments du faisceau gaussien et figure de mérite du faisceau

L'application directe des formules (I.36), (I.37), (I.38) et (I.39) pour le faisceau gaussien conduit à:

$$\sigma_x(z) = \sigma_y(z) = \frac{W(z)}{2} \quad \text{Et} \quad \sigma_{S_x}(z) = \sigma_{S_y}(z) = \frac{1}{2\pi W_0} \quad (\text{I.52})$$

Un faisceau gaussien symétrique possède les mêmes moments dans les deux directions transverses. Un faisceau gaussien asymétrique est caractérisé par des valeurs différentes de largeurs  $W_x(z)$  et  $W_y(z)$  et de différentes largeurs du beam waist  $W_{0x}$  et  $W_{0y}$ .

On définit un paramètre appelé "**figure de mérite**" (Space-beam width product) du faisceau gaussien qui est le produit des moments d'ordre 2 comme suit:

$$\sigma_{0x} \sigma_{Sx} = \sigma_{0y} \sigma_{Sy} = \frac{1}{4\pi} \quad \text{Pour un faisceau TEM}_{00}.$$

### I.9. Facteur de qualité $M^2$ d'un faisceau laser réel

Dans ce paragraphe on va définir les facteurs de qualité  $M_x^2$  et  $M_y^2$  pour un faisceau laser réel à partir des moments d'un faisceau ainsi que de sa figure de mérite.

#### I.9.1 Figure de mérite et facteur de qualité

N'importe quel faisceau laser peut être caractérisé par une figure de mérite dans chaque direction transverse à partir de ses moments de faisceau [30-35]:

$$\sigma_{0x}\sigma_{sx} = \frac{M_x^2}{4\pi} \quad (\text{Faisceau quelconque, } M_x^2 \geq 1) \quad (\text{I.53-a})$$

$$\sigma_{0y}\sigma_{sy} = \frac{M_y^2}{4\pi} \quad (\text{Faisceau quelconque, } M_y^2 \geq 1) \quad (\text{I.53-b})$$

### Remarque

Les facteurs de qualité  $M_x^2$  et  $M_y^2$  sont toujours supérieurs à 1 pour n'importe quel profil autre que celui du faisceau gaussien TEM<sub>00</sub>.

On peut donc écrire:

Facteur de qualité

$$M_x^2 = \frac{\text{Figure de mérite du faisceau réel}}{\text{Figure de mérite du faisceau gaussien}} = 4\pi\sigma_{0x}\sigma_{sx} \quad (\text{I.54-a})$$

$$M_y^2 = \frac{\text{Figure de mérite du faisceau réel}}{\text{Figure de mérite du faisceau gaussien}} = 4\pi\sigma_{0y}\sigma_{sy} \quad (\text{I.54-b})$$

### I.9.2 Largeur d'un faisceau laser quelconque

Par analogie avec la largeur du faisceau gaussien, il est utile de définir la largeur effective  $W_x(z)$  et  $W_y(z)$  d'un faisceau laser réel à partir des variances dans le domaine spatial:

$$W_x(z) = 2\sigma_x(z) \quad \text{Et} \quad W_y(z) = 2\sigma_y(z) \quad (\text{I.55})$$

Evolution longitudinale de la largeur effective:

A partir des équations (I.44-a), (I.44-b) et (I.55) on obtient:

$$W_x^2(Z) = W_{0x}^2(z) + M_x^4 \frac{\lambda^2}{\pi^2 W_{0x}^2} (z - z_{0x})^2 \quad (\text{I.56})$$

$$W_y^2(Z) = W_{0y}^2(z) + M_y^4 \frac{\lambda^2}{\pi^2 W_{0y}^2} (z - z_{0y})^2 \quad (\text{I.57})$$

Il est important de noter qu'un faisceau laser réel possédant un beam waist de largeur  $W_0$  et un facteur de qualité  $M^2$  diverge  $M^2$  fois plus, dans chaque direction transverse, qu'un faisceau gaussien ayant la même largeur de beam waist.

Les équations (I.56) et (I.57) peuvent être exprimées sous la forme:

$$W_x^2(Z) = W_{0x}^2(z) \left[ 1 + \frac{(z - z_{0x})^2}{Z_{Rx}^2} \right] \quad (\text{I.58.a})$$

$$W_y^2(Z) = W_{0y}^2(z) \left[ 1 + \frac{(z - z_{0y})^2}{Z_{Ry}^2} \right] \quad (\text{I.58.b})$$

Où les distances de Rayleigh  $z_{Rx}$  et  $z_{Ry}$  dépendent du facteur  $M^2$ :

$$Z_{Rx} = \frac{\pi W_{0x}^2}{\lambda M_x^2} \quad \text{Et} \quad Z_{Ry} = \frac{\pi W_{0y}^2}{\lambda M_y^2} \quad (\text{I.59})$$

Plus la qualité du faisceau est mauvaise, plus  $M^2$  est élevé et plus la distance de Rayleigh diminue et par conséquent plus le faisceau diverge.

A grande distance ( $z \gg z_R$ ) les équations (I.58.a) (I.58.b) se simplifient:

$$W_x(z) \approx \frac{M_x^2 \lambda}{\pi W_{0x}} (z - z_{0x}) \quad \text{Et} \quad W_y(z) \approx \frac{M_y^2 \lambda}{\pi W_{0y}} (z - z_{0y}) \quad (\text{I.60})$$

Et la divergence angulaire s'écrit comme suit:

$$\theta_x = \frac{W_x(z)}{z - z_{0x}} = M_x^2 \left( \frac{\lambda}{\pi W_{0x}} \right) \quad \text{et} \quad \theta_y = \frac{W_y(z)}{z - z_{0y}} = M_y^2 \left( \frac{\lambda}{\pi W_{0y}} \right) \quad (\text{I.61})$$

La divergence angulaire d'un faisceau laser réel est  $M^2$  plus élevée que la divergence d'un faisceau gaussien ayant la même largeur de beam waist. L'angle  $\frac{1}{\pi W_{0x}}$  (ou  $\frac{1}{\pi W_{0y}}$ ) est appelé "Limite de diffraction"

### I.9.3 Facteur de qualité $M^2$ des faisceaux à symétrie cylindrique

Pour un certain nombre de raison il est préférable d'utiliser les coordonnées rectangulaires pour définir et mesurer la largeur d'un faisceau ainsi que son facteur de qualité. Cependant les valeurs des moments dans le repère x-y peuvent être exprimées par deux paramètres cylindriques  $\langle r^2 \rangle$  et  $\langle p^2 \rangle$  qui permettent de définir un facteur de qualité radial  $M_r^2$  bien utile pour le cas des faisceaux possédant la symétrie cylindrique.

#### A- Moment radial d'ordre 2

En utilisant les coordonnées polaires, le moment du second ordre s'écrit dans le domaine spatial sous la forme suivante [32-35]:

$$\langle r^2 \rangle(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2) |E(x, y, z)|^2 dx dy = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\phi r^2 |E(r, \phi, z)|^2 \equiv \sigma_x^2(z) + \sigma_y^2(z) \quad (\text{I.62})$$



### B- Moment radial d'ordre 2 dans le domaine des fréquences spatiales

La même chose dans le domaine des fréquences spatiales, le moment du second ordre est le suivant [32-35]:

$$\langle p^2 \rangle(z) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} (S_x^2 + S_y^2) P(S_x, S_y, z) dS_x dS_y \equiv \sigma_{S_x}^2(z) + \sigma_{S_y}^2(z) \quad (\text{I.63})$$

Avec:

$$P^2 = (S_x^2 + S_y^2). \quad (\text{I.64})$$

La distance radiale pour n'importe quel faisceau varie en fonction de la distance suivant une loi quadratique similaire à celle observée pour les coordonnées rectangulaires [32-35]:

$$\langle r^2 \rangle(z) = \sigma_x^2(z) + \sigma_y^2(z) = \langle r_0^2 \rangle + \lambda^2 \langle p^2 \rangle (z - z_{0r})^2 \quad (\text{I.65})$$

$z_{0r}$  Position du beam waist,  $\langle r_0^2 \rangle$  dimension du beam waist.

### C- Figure de mérite d'un faisceau gaussien TEM<sub>00</sub> (gaussien) symétrique

Les moments radiaux d'un faisceau gaussien deviennent [32-35]:

$$\langle r_0^2 \rangle = \frac{W_{0r}^2}{2} \quad \text{Et} \quad \langle p_0^2 \rangle = \frac{1}{2\pi^2 W_0^2} \quad (\text{I.66})$$

Ces expressions sont différentes d'un facteur 2 par rapport aux variances d'un faisceau gaussien exprimées dans un système de coordonnées rectangulaires.

La figure de mérite d'un faisceau gaussien est donc [32-35]:

$$\sqrt{\langle r_0^2 \rangle \langle p^2 \rangle} = \frac{1}{2\pi} \quad (\text{I.67})$$

Elle diffère d'un facteur de 2 avec le cas rectangulaire:

$$\sigma_{0x} \sigma_{Sx} = \sigma_{0y} \sigma_{Sy} = \frac{1}{4\pi}. \quad (\text{I.68})$$

La figure de mérite pour un faisceau quelconque peut s'exprimer alors sous la forme:

$$\sqrt{\langle r_0^2 \rangle \langle p^2 \rangle} = \frac{M_r^2}{2\pi} \quad (\text{I.69})$$

Avec  $M_r^2 \geq 1$

Alors, le facteur de qualité d'un faisceau quelconque prend la forme générale suivante:

$$M_r^2 = 2\pi \sqrt{\langle r_0^2 \rangle \langle p^2 \rangle} \quad (\text{I.70})$$

**D- Evolution suivant z de  $\bar{r}^2(z)$** 

De la même façon qu'au cas cartésien, les moments du second ordre suivent la loi de propagation suivante [32-35]:

$$\langle r^2(z) \rangle = \langle r_0^2 \rangle + M_r^4 \frac{\lambda^2 (z - z_{0r})^2}{(2\pi)^2 \langle r_0^2 \rangle} \quad (\text{I.71})$$

A grande distance on a:

$$\langle r^2(z) \rangle \approx M_r^4 \frac{\lambda^2 (z - z_{0r})^2}{(2\pi)^2 \langle r_0^2 \rangle} \quad (\text{I.72})$$

Sachant que:

$$\langle r^2(z) \rangle = \frac{W^2(z)}{2} \quad \text{Et} \quad \langle r_0^2(z) \rangle = \frac{W_0^2}{2} \quad (\text{I.73})$$

On obtient:

$$W^2(z) \approx \frac{M_r^4 \lambda^2}{\pi^2 W_0^2} (z - z_{0r})^2 \rightarrow \frac{W}{z - z_{0r}} = \theta = M_r^2 \frac{\lambda}{\pi W_0} \quad (\text{I.74})$$

Alors;

$$M_r^2 = \theta \frac{\pi W_0}{\lambda} = \frac{\theta}{\theta_{00}} \quad (\text{I.75})$$

On remarque à partir de la dernière équation que le facteur de qualité décrit la divergence d'un faisceau laser réel par rapport à un faisceau gaussien.

**I.10. Facteur de qualité  $M^2$  des modes transverses d'ordre supérieurs**

Le facteur de qualité pour le cas des modes transverses d'ordres supérieurs est fonction de l'ordre du mode, on peut le calculer dans le cas général en utilisant les moments d'intensité.

Dans le cas d'une symétrie cylindrique (faisceaux  $LG_p^l$  purs) [30-35], le facteur de qualité est égale à:

$$M^2 = \sqrt{2p + l + 1}$$

Dans le cas d'une symétrie cartésienne (faisceaux  $HG_m^n$  purs), le facteur de qualité est égale à:

$$\begin{cases} M_x^2 = \sqrt{2m + 1} \\ M_y^2 = \sqrt{2n + 1} \end{cases}$$

Et le facteur de qualité total est égale à  $M^2 = (M_x^2 M_y^2)^{1/2}$

### I.11. Facteur $M^2$ d'un mélange de mode: (Mélange incohérent)

En général une cavité laser ne fournit pas un seul mode, mais elle fournit plusieurs modes qui oscillent en même temps, alors on est dans le cas d'une superposition de modes lasers, par fois cette superposition est cohérente, et dans d'autres incohérentes. Tous ce qu'on a vu dans les sections précédentes, sont des superpositions cohérentes qui donnent à la fin une seule distribution, ainsi le facteur de qualité  $M^2$  on l'évalue directement à partir de l'intensité résultante.

#### I.11.1. Mélange de modes Hermite-Gauss

L'amplitude complexe du champ associe à un faisceau laser composé de modes d'Hermite-Gauss  $U_{mn}(x, y, z)$  de coefficients de pondérations  $C_{mn}$  et de fréquences d'oscillations  $\omega_{mn}$  s'écrit [30-35]:

$$E(x, y, z) = \sum_{m,n} C_{mn} U_{mn}(x, y, z) \exp[i\omega_{mn}t] \quad (I.76)$$

Le facteur  $M^2$  de ce mélange de mode correspond à une moyenne pondérée sur l'intensité relative de chaque mode:

$$M_x^2 = \sum_{m=0} \sum_{n=0} (2m+1) |C_{mn}|^2 \quad (I.77.a)$$

$$M_y^2 = \sum_{m=0} \sum_{n=0} (2n+1) |C_{mn}|^2 \quad (I.77.b)$$

#### I.11.2. Mélange de modes de Laguerre-Gauss

De la même façon que les modes Laguerre-Gauss  $U_{pl}(x, y, z)$  l'amplitude complexe du champ associé à un faisceau laser de coefficients de pondérations  $C_{pl}$  et de fréquences d'oscillations  $\omega_{pl}$  s'écrit [30-35]:

$$E(r, \theta, z) = \sum_{p,l} C_{pl} U_{pl}(r, \theta, z) \exp[i\omega_{pl}t] \quad (I.78)$$

Et le facteur  $M^2$  de ce mélange de mode correspond aussi à une moyenne pondérée sur l'intensité relative de chaque mode:

$$M_r^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=-p}^p (2p+l+1) |C_{pl}|^2 \quad (I.79)$$

## **Partie B: Polarisation, interférences et interférogrammes**

### **I.12 Introduction**

Cette deuxième partie du premier chapitre est consacré à la théorie de la polarisation de la lumière, les interférences et à quelques notions sur les interférogrammes, dans le but de faciliter la compréhension des travaux qui seront présentés au chapitre. IV.

### **I.13 Polarisation de la lumière**

Une onde plane monochromatique se propageant suivant la direction  $z$  est représentée mathématiquement comme suit [36-39]:

$$\vec{E}(z,t) = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = E_{0x} \cos(kz - wt) \vec{i} + E_{0y} \cos(kz - wt - \Delta\phi) \vec{j} \quad (\text{I.80})$$

Avec:

$$k = 2\pi/\lambda \quad w = 2\pi f \quad \Delta\phi = \phi_x - \phi_y \quad (\text{I.81})$$

$(E_{0x}, \phi_x)$  et  $(E_{0y}, \phi_y)$  sont respectivement; l'amplitude et la phase du champ électrique suivant la direction  $x$ , et  $y$ .

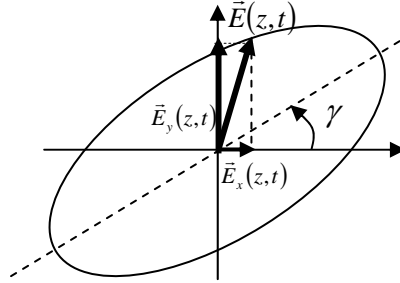
L'orientation du champ à n'importe quel point dans l'espace et dans le temps est déterminée par le rapport  $E_y/E_x$ , la différence de phase  $\Delta\phi = \phi_x - \phi_y$  détermine comment l'orientation du champ électrique varie au cours de la propagation. Si la différence de phase entre les deux composantes du champ varie aléatoirement, on dit que l'orientation du champ électrique est variée aussi aléatoirement, et donc la lumière est non polarisée, comme on peut dire aussi, que les deux constituantes de l'onde sont incohérentes. Par contre, s'il y a une relation de phase fixée entre les deux composantes du champ, alors l'orientation du champ est prédictible et on peut la déterminer à tout moment, on dit que l'onde est totalement polarisée [36-39].

La lumière polarisée est décrite par la géométrie spatiale de courbe de l'équation suivante:

$$\left( \frac{E_x(z,t)}{E_{0x}} \right)^2 + \left( \frac{E_y(z,t)}{E_{0y}} \right)^2 - 2 \left( \frac{E_x(z,t)}{E_{0x}} \right) \left( \frac{E_y(z,t)}{E_{0y}} \right) \cos(\Delta\phi) = \sin^2(\Delta\phi) \quad (\text{I.82})$$

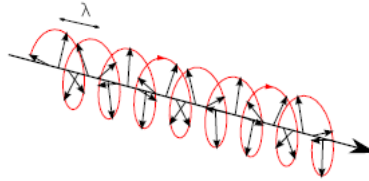
L'équation I.82 est une équation d'ellipse faisant un angle  $\gamma$  avec l'axe  $x$ , tel que:

$$\tan(2\gamma) = \frac{2E_{0x}E_{0y}\cos(\Delta\phi)}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \quad (\text{I.83})$$



**Figure I.10** Lumière polarisée elliptiquement orientée selon l'angle  $\gamma$ .

D'après la figure I.10 on remarque que le champ électrique change dans l'amplitude et dans l'orientation, pour donner un tracé d'une ellipse dans le plan  $xoy$  perpendiculairement à la direction de propagation (voir figure I.11).



**Figure I.11** Evolution de la lumière polarisée elliptiquement dans l'espace et dans le temps

Si la différence de phase entre les deux composantes du champ électrique est multiple de  $\pi$ .  $\Delta\phi = \phi_x - \phi_y = 0 + m\pi$  avec  $m$  est un entier

L'équation de l'ellipse devient:

$$\frac{E_y}{E_x} = \pm \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \quad (\text{I.84})$$

Dans les deux cas  $(\pm)$  l'orientation du champ est stationnaire et la lumière est dite linéairement polarisée.

Si la différence de phase  $\Delta\phi = \phi_x - \phi_y = \pm\pi/2 + 2m\pi$  avec  $m$  est un entier et  $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ , l'équation (IV.5) devient:

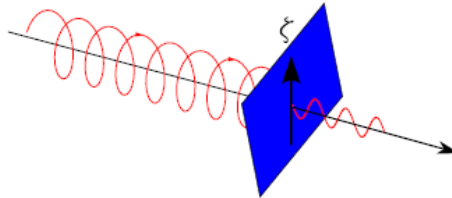
$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 \quad (\text{I.85})$$

Dans ce cas, l'amplitude du champ est constante, par contre l'orientation change pour tracer un cercle de diamètre  $E_0$ , et la polarisation de la lumière est dite polarisée circulairement.

Dans ce type de polarisation on distingue deux cas; lorsque  $\Delta\phi = -\pi/2 + 2m\pi$  la polarisation est circulaire droite, et lorsque  $\Delta\phi = \pi/2 + 2m\pi$  la polarisation est circulaire gauche.

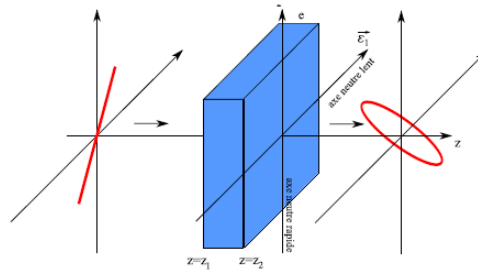
#### I.14 Polariseurs et lames à retard de phase

Dans les paragraphes précédents on a vu que la polarisation de la lumière peut être décomposée en deux composantes orthogonales cohérentes avec des amplitudes et des phases indépendantes, alors, l'état de polarisation dépend du rapport de ces amplitudes et à la différence entre leurs phases. Par conséquent, tout composant qui affecte le rapport des intensités ou la différence de phase entre les deux composantes orthogonales du vecteur champ électrique, affecte nécessairement l'état de polarisation de la lumière incidente. Deux types de ces composants, sont les polariseurs (voir figure IV.5) et les lames à retard (voir figure IV.6). Un polariseur change le rapport entre les amplitudes, tandis que, les lames à retard change la différence de phase entre les deux composantes orthogonales [36,39].



**Figure I.12** Effet d'un polariseur sur une onde optique.

Pour les lames à retard sont composées de matériaux biréfringents comme le quartz et le mica. L'indice de réfraction des matériaux biréfringents dépend de la direction de polarisation de la lumière incidente, si la polarisation est alignée avec l'axe optique, l'indice de réfraction est dit extraordinaire  $n_e$ , et si la polarisation est perpendiculaire avec l'axe optique, l'indice de réfraction est dit ordinaire  $n_o$ .



**Figure I.13** Effet d'un milieu biréfringent sur une onde plane polarisée linéairement.

Supposant qu'un champ normalement incident sur un élément biréfringent d'épaisseur  $e$ , juste à la sortie de cet élément, ce dernier exerce une phase supplémentaire dans la direction de l'axe optique de  $(2\pi/\lambda)n_e e$  et une phase supplémentaire de  $(2\pi/\lambda)n_o e$  selon la direction perpendiculaire à l'axe optique. Le changement dans la différence de phase entre les deux composantes parallèle et perpendiculaire est de  $(2\pi e/\lambda)(n_o - n_e)$ .

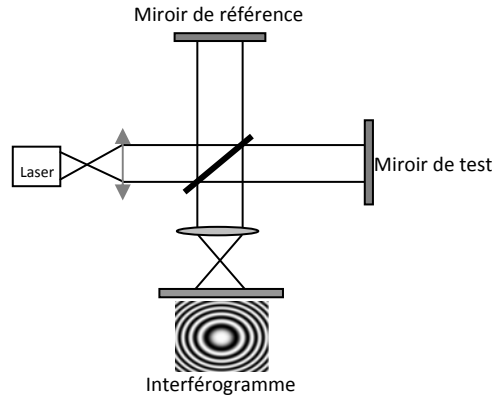
L'axe qui correspond à l'indice de réfraction le plus petit est appelé, axe rapide, et la lumière polarisée le long de cet axe se propage avec une vitesse plus grande que la lumière polarisée selon l'axe avec un indice plus grand, qui s'appelle à son tour axe long. Il est clair d'après la formule de l'équation I.86 qu'un choix approprié de l'épaisseur de la lame, donne la différence de phase désirée entre les deux composantes du champ pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée. Les deux lames à retard les plus connues, sont les lames demi-onde  $\lambda/2$  et les lames quart d'onde  $\lambda/4$ . En passant par une lame demi-onde, cette dernière exerce une différence de phase supplémentaire entre les composantes orthogonales du champ de  $\pi$ . Tandis que pour une lame quart d'onde la différence de phase supplémentaire est de  $\pi/2$ .

### I.15 Interférence à deux ondes et interférométrie

Le but de cette section, est de donner une brève description de l'interférence à deux ondes, aussi de donner les principaux appareils qui produisent ce phénomène et aussi leurs applications courantes.

Les systèmes qui produisent le phénomène d'interférence sont nombreux, on les appelle interféromètres, l'un de ces appareils les plus utilisés, est l'interféromètre de Twyman-Green, il est représenté dans la figure. I.7, il appartient à la famille des interféromètres à

division d'amplitude, il est utilisé souvent pour le contrôle optique, la lumière utilisée est collimatée, elle est issue d'un laser [37].

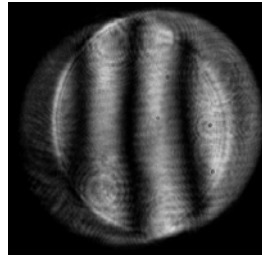


**Figure I.14** Principe d'un interféromètre à deux ondes (interféromètre Twyman-Green).

L'équation de base de l'interférence à deux ondes est:

$$I(x, y) = I_{référence}(x, y) + I_{test}(x, y) + 2\sqrt{I_{référence}I_{test}} \cos(\theta_{test} - \theta_{référence}) \quad (I.86)$$

$I(x, y)$  Est l'intensité de la figure de franges qui est fonction de l'amplitude et la phase des faisceaux de référence et test, la figure. I.8 représente un exemple d'un interférogramme obtenu par un interféromètre à décalage latéral.



**Figure I.15** Une image prise par une camera CCD.

L'équation (I.82) est généralement réduite à:

$$I(x, y) = I_{moy}(1 + \gamma \cos(\theta(x, y))) \quad (I.87)$$

Avec :  $I_{moy} = I_{référence} + I_{test}$  Est un fond d'intensité constant.

$\gamma = \frac{2\sqrt{I_{test}I_{référence}}}{I_{test} + I_{référence}}$  Est la visibilité de la figure d'interférence.



$\theta = \theta_{test} - \theta_{référence}$  Est la différence de phase entre les deux faisceaux.

Cette différence de phase  $\theta(x, y)$  module la distribution de l'intensité en une figure de frange d'interférence qu'on appelle interférogramme qui est composé de franges brillantes et de franges sombres. Les centres des franges brillantes sont localisés aux lieux qui correspondent à  $\cos(\theta(x, y)) = 2m\pi$ , avec  $m$  est un entier. Pour les centres des franges sombres, les lieux sont localisés à  $\cos(\theta(x, y)) = (2m + 1)(\pi/2)$ ,

### I.15.1 Analyse des franges

Le but de l'analyse de la figure de frange est la détermination précise de la distribution de la phase  $\theta(x, y)$  de l'interférogramme, à partir de laquelle on peut tirer plusieurs informations. Ils existent plusieurs techniques pour l'analyse et la détermination de la phase des interférogrammes, on cite à titre d'exemple, les techniques de décalage de phase, temporel, spatiale et géométrique.

### I.15.2 Décalage de phase temporel

Dans cette technique on utilise des algorithmes pour récupérer la phase dans le but de résoudre l'équation générale de l'interférence suivante [38-41]:

$$I(x, y) = I_{référence}(x, y) + I_{test}(x, y) + 2\sqrt{I_{référence}I_{test}} \cos(\theta(x, y)) \quad (I.88)$$

Par exemple, pour mesurer la phase en utilisant un algorithme de décalage de phase à quatre pas, quatre interférogrammes doivent être réalisés, pour ce faire, on ajoute à chaque fois un incrément de phase  $\Delta\Phi$  qu'on connaît au préalable:

Le premier interférogramme sans incrément de phase  $\Delta\Phi=0$ , l'intensité est donnée par l'équation suivante:

$$I_1(x, y) = I_{référence}(x, y) + I_{test}(x, y) + 2\sqrt{I_{référence}I_{test}} \cos(\theta(x, y)) \quad (I.89)$$

Le deuxième interférogramme correspond à un incrément de phase  $\Delta\Phi=\pi/2$ , l'intensité est donnée par:

$$I_2(x, y) = I_{référence}(x, y) + I_{test}(x, y) + 2\sqrt{I_{référence}I_{test}} \cos\left(\theta(x, y) + \frac{\pi}{2}\right) \quad (I.90)$$

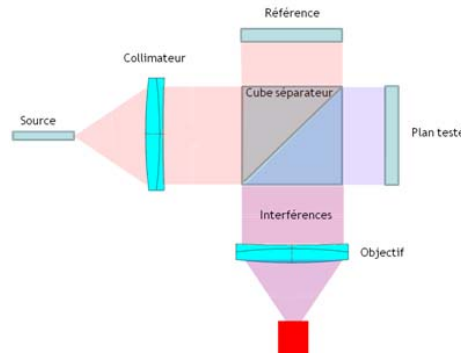
Le troisième interférogramme correspond à un incrément de phase  $\Delta\Phi=\pi$ , l'intensité est donnée par l'équation suivante

$$I_3(x, y) = I_{référence}(x, y) + I_{test}(x, y) + 2\sqrt{I_{référence}I_{test}} \cos(\theta(x, y) + \pi) \quad (I.91)$$

Le dernier interférogramme correspond à un incrément de phase  $\Delta\Phi=3\pi/2$ , l'intensité est donnée par l'équation suivante

$$I_4(x, y) = I_{référence}(x, y) + I_{test}(x, y) + 2\sqrt{I_{référence}I_{test}} \cos\left(\theta(x, y) + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (I.92)$$

Pratiquement on réalise ce type d'algorithme par le déplacement de l'un des deux miroirs de l'interféromètre d'une distance qui correspond à la phase qu'on veut ajouter (voir figure. I.16).



**Figure I.16:** Décalage de phase temporel, l'incrément de phase se fait par le déplacement du miroir référence d'une quantité qui donne le décalage de phase voulu.

A partir des quatre interférogrammes, on peut calculer la distribution de la phase comme suit:

$$\theta(x, y) = \tan^{-1} \left[ \frac{I_4(x, y) - I_2(x, y)}{I_1(x, y) - I_3(x, y)} \right] \quad (I.93)$$

$I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$  sont les intensités mesurées des quatre interférogrammes qui correspondent respectivement aux incréments de phase;  $0, \pi/2, \pi$  et  $3\pi/2$ .

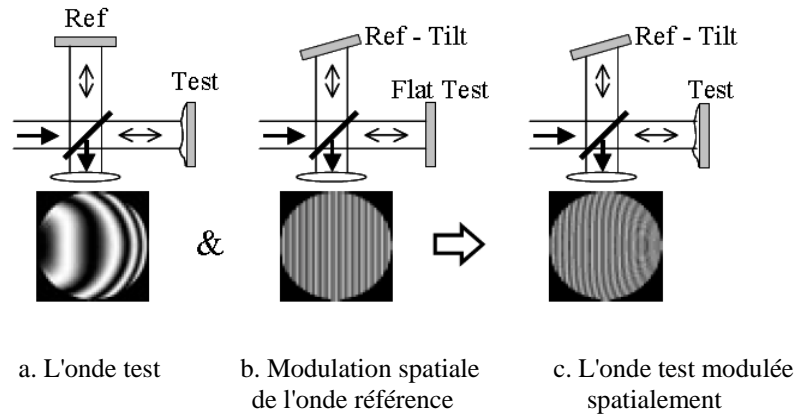
### I.15.3 Décalage de phase spatial

La technique spatiale de mesure utilise un seul interférogramme pour l'extraction de l'information contenue dans la phase. Dans cette technique une modulation linéaire spatiale est appliquée sur l'interférogramme, généralement la modulation est produite par juste une création d'un angle entre les deux faisceaux de test et de référence (voir figure I.17) [42-45].

La figure d'interférence de la figure I.17 est exprimée mathématiquement par l'équation:

$$I(x, y) = I_{avg} (1 + \gamma \cos[2\pi f_c x + \theta(x, y)]) \quad (I.94)$$

Avec  $f_c$  est la fréquence spatiale porteuse et  $\theta(x, y)$  est la phase du front d'onde. Le but de l'ajout du terme de phase  $2\pi f_c x$  est la détermination de la phase  $\theta(x, y)$  à travers un calcul qu'on fait sur l'équation (I.94).



**Figure. I.17:** Interférogramme avec une modulation spatiale. (a) Interférogramme de l'onde test. (b) Introduction de la modulation spatiale par l'inclinaison du miroir de référence, le front d'onde test est plan. (c) Introduction de l'onde test et la modulation spatiale par l'inclinaison du miroir de référence.

L'évaluation de la phase est basée sur la transformée de Fourier de l'équation (I.94).

On commence par un développement simple de l'équation (I.94) en termes d'exponentiels, on a:

$$I(x, y) = I_{avg} + I_{avg} \gamma e^{j[2\pi f_c x + \theta(x, y)]} + I_{avg} \gamma e^{-j[2\pi f_c x + \theta(x, y)]} \quad (I.95)$$

On peut écrire:

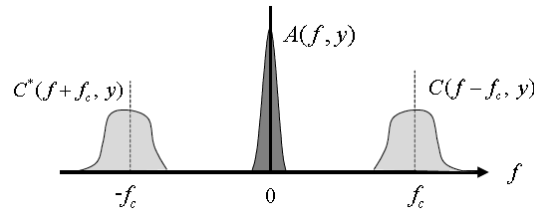
$$I(x, y) = a(x, y) + c(x, y)e^{j[2\pi f_c x]} + c^*(x, y)e^{-j[2\pi f_c x]} \quad (I.96)$$

Avec:  $a(x, y) = I_{avg}$  et  $c(x, y) = I_{avg} e^{i\theta(x, y)}$ .

Appliquant la transformée de Fourier sur l'équation (I.96), on trouve les trois termes du spectre:

$$TF\{I(x, y)\} = A(f, y) + C(f - f_c, y) + C(f + f_c, y) \quad (I.97)$$

Cette technique permet de mettre à l'écart le fond continu de l'intensité  $A(f, y)$  par un filtrage spatial adéquat. Comme on remarque les trois termes sont séparés par la fréquence porteuse  $f_c$  (voir figure I.18)).

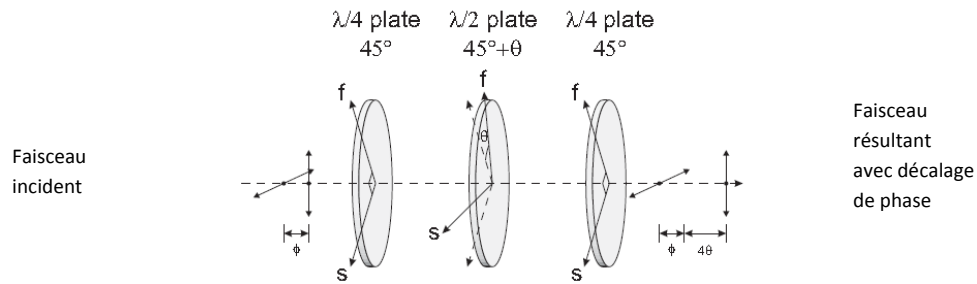


**Figure. I.18:** Spectre de la figure de frange modulée spatialement

Alors comme il est présenté sur la figure IV.11, l'information de la phase est contenue dans l'un des deux lobes qui se situent à droite et à gauche du lobe central. Un simple filtrage permet de récupérer soit  $C(f - f_c, y)$  ou  $C^*(f + f_c, y)$  et de faire une transformée de Fourier inverse pour revenir à la phase du signal [42-45].

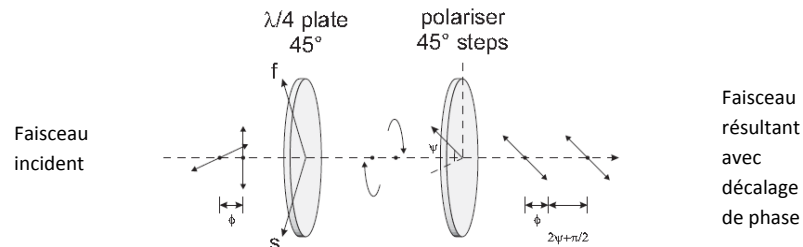
#### I.15.4 Décalage de phase géométrique et la phase de Pancharatnam

Pour les techniques de décalage de phase citées précédemment, le décalage se fait par le déplacement de l'un des miroirs de l'interféromètre, cela est possible pour la lumière monochromatique (laser), tandis que pour la lumière polychromatique (blanche), le déplacement de l'un des miroirs donne différents incréments de phase, puis que la phase est proportionnelle au chemin optique. Pour vaincre ce problème des techniques ont été proposées, parmi lesquelles, celle basée sur le changement de l'état de polarisation de la lumière, à travers cette technique on peut changer la phase sans toucher au chemin optique, ce type de décalage de phase, on l'appelle décalage de phase géométrique [46-48], (voir figure I.19).



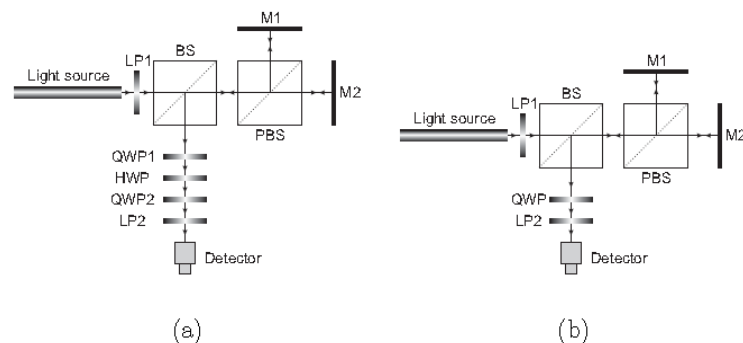
**Figure. I.19** Décalage de phase de Pancharatnam avec la configuration QHQ. Le faisceau résultant présente un décalage de phase additionnel de  $4\theta$ , qui est 4 fois l'angle entre la lame demi onde et la première lame quart d'onde.

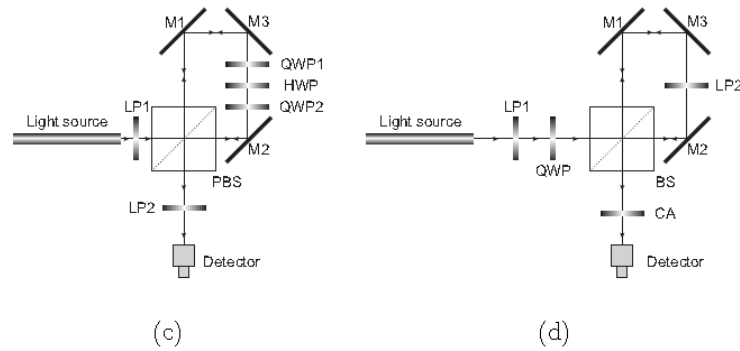
Une autre alternative pour la réalisation du décalage de phase géométrique est représentée dans la figure I.20



**Figure. I.20:** Décalage de phase de Pancharatnam avec une lame ( $\lambda/4$ ) et un polariseur, la configuration montre que le système exerce une phase supplémentaire de  $\psi$ , qui est égale à deux fois l'angle du polariseur linéaire.

Ils existent plusieurs interféromètres qui implémentent ce type de décalage de phase (voir figure I.20)





**Figure I.21:** Les différents arrangements de l'interféromètre à décalage de phase géométrique: **(a)** L'arrangement QHQ à la sortie de l'interféromètre. **(b)** Une lame quart d'onde suivie d'un polariseur linéaire. **(c)** L'arrangement QHQ à l'intérieur de l'interféromètre à chemin commun (Sagnac). **(d)** Lumière polarisée circulairement passant à travers un polariseur à l'intérieur d'un interféromètre à chemin commun, les faisceaux de sortie passent à travers un analyseur circulaire.

En utilisant ces interféromètres, on a plusieurs configurations de décalage de phase géométrique.

### I.16 Conclusion

Ce premier chapitre a été consacré à la théorie des faisceaux lasers et les interférogrammes leurs différents types et leurs caractéristiques, on a vu que les moments d'intensité sont un moyen très utile pour la caractérisation des faisceaux lasers. A partir de ces moments on peut calculer la largeur, la divergence et aussi le facteur de qualité de n'importe quel type de faisceau, que soit monomode ou multimodes.

## Bibliographie

- [1] A.E.Siegman, "**Lasers**", (University Science Books, Mill Valley, California, 1986).
- [2] H.Kogelnik, T.Li, "**Laser beams and resonators**", Appl. Opt. 5, 1550-1567, 1966.
- [3] B.E.A.Saleh et M.C.Teich, "**Fundamentals of photonics**", (Wiley, New York, 1991).
- [4] Y. A. Ananiev, "**Laser Resonators and the Beam Divergence Problem**", (IOP Publishing, Bristol, 1992).
- [5] A. E. Siegman, "**New developments in laser resonators**", in *Optical Resonators*, Proc. SPIE 1224, 2-14, 1990.
- [6] M.Born et E.Wolf, "**Principles of Optics**", (6ième édition, Cambridge University Press, New York, 1980).
- [7] I.Kimel et L.R. Elias, "**Relations between Hermite and Laguerre Gaussian modes**", IEEE J. Quantum Electron. 29, 2562-2567, 1993.
- [8] M. A.Porras, R.Borghi, M.Santarsiero, "**Relationship between élégant Laguerre-Gauss and Bessel-Gauss beams**", J. Opt. Soc. Am. A 18, 177-184, 2001.
- [9] A. E. Siegman, "**Quasi fast Hankel transform**," Opt. Lett. 1, 13-16, 1977.
- [10] R.L.Phillips, L.C.Andrews, "**Spot size and divergence for Laguerre Gaussian beams of any order**", Appl. Opt. 22, 643-644, 1983.
- [11] J.T.Luxon, D.E.Parker, "**Practical spot size definition for single higher-order rectangular-mode laser beams**", Appl. Opt. 20. 1728-1729, 1981.
- [12] J.P. Taché, "**Derivation of the ABCD law for Laguerre-Gaussian beams**", Appl. Opt, 26, 2698-2700, 1987.
- [13] J. T. Luxon, D. E.Parker, J. Karkheck, "**Waist location and Rayleigh range for higher-order mode laser beams**", Appl. Opt, 23, 2088-2090. 1984.
- [14] B.Lü, H.A.Ma, "**compartive study of elegant and standard Hermite-Gaussian beams**", Opt. Commun, 174, 99-104, 1999.
- [15] M.Takeda, H. Ina, S.Kobayashi, "**Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry**", J. Opt. Soc. Am. 72, 156-160, 1982.
- [16] R. Martinez-Herrero, P.M.Mejias, H.Weber, "**On the different definitions of laser beam moments**", Opt. Quantum Electron, 25, 423-428, 1993.
- [17] M.Morin, P.Bernard, P.Galarneau, "**Moment definition of the pointing stability of a laser beam**", Opt. Lett. 19, 1379-1381, 1994.
- [18] A. E. Siegman, "**Defining the effective radius of curvature for a nonideal optical beam**", IEEE J. Quantum Electron. 27, 1146-1148, 1991.

- [19] C. Paré, P.-A. Bélanger, "**Propagation law and quasi-invariance properties of the truncated second-order moment of a diffracted laser beam**", Opt. Commun. **123**, 679-693, 1996.
- [20] R. Martinez-Herrero, P. M. Mejias, "**Second-order spatial characterization of hard-edge diffracted beams**", Opt. Lett. **18**, 1669–1671, 1993.
- [21] R. Borghi, M. Santarsiero et R. Simon, "**Shape invariance and a universal form for the Gouy phase**", J. Opt. Soc. Am. A **21**, 572-579, 2004.
- [22] J. Alda, S. Wang, E. Bernabéu, "**Analytical expression for the complex radius of curvature tensor Q for generalized Gaussian beams**", Opt. Commun. **80**, 350-352, 1991.
- [23] A. E. Siegman, "**Defining the effective radius of curvature for a nonideal optical beam**", IEEE J. Quantum Electron. **27**, 1146-1148, 1991.
- [24] P. A. Bélanger, "**Beam propagation and the ABCD ray matrices**", Opt. Lett. **16**, 196-198, 1991.
- [25] Y. Champagne, "**Second-moment approach to the time-averaged spatial characterization of multipletransverse- mode laser beams**", J. Opt. Soc. Am. A, **12**, 1707-1714, 1995.
- [26] H. Weber, "**Propagation of higher-order intensity moments in quadratic-index media**", Opt. Quantum Electron. **24**, S1027–S1049, 1992.
- [27] G. Gbur, P. S. Carney, "**Convergence criteria and optimization techniques for beam moments**", Pure Appl. Opt. **7**, 1221–1230, 1998.
- [28] M. A. Porras, R. Medina, "**Entropy-based definition of laser beam spot size**", Appl. Opt. **34**, 8247- 8251, 1995.
- [29] M. A. Porras, J. Alda, E. Bernabéu, "**Complex beam parameter and ABCD law for non-Gaussian and nonspherical light beams**", Appl. Opt., **1992**, **31**, 6389-6402.
- [30] A. E. Siegman, "**Laser beam quality-what's it good for ?**", Proceedings of the International Conference on LASERS, Charleston, USA, 1995.
- [31] M. W. Sasnett, "**Propagation of multimode laser beams - The  $M^2$  factor**", in *The Physics and Technology of Laser Resonators*, D. R. Hall et P. E. Jackson, eds., IOP Publishing, New York, chap. 9, pp. 132-142, 1989.
- [32] N. Reng, B. Eppich, "**Definition and measurements of high-power laser beam parameters**", Optical and Quantum Electronics **24**, 973-992, 1992.
- [33] P. Bélanger, Y. Champagne, C. Paré, "**Beam propagation factor of diffracted laser beams**", Opt. Commun. **105**, 233–242, 1994.



- [34] J.Serna, P.M.Mejías, R.Martínez-Herrero, **"Beam quality changes of Gaussian Schell-model fields propagating through Gaussian apertures"**, App.opt / Vol. 31, No. 22 / 1 August 1992
- [35] J.Serna, P.M.Mejías, R.Martínez-Herrero, **Beam quality changes in Hermite-Gauss mode fields propagating through Gaussian apertures**, App.opt / Vol. 32, No. 7 / 1 March 1993.
- [36] R. M. A. Azzam **"Three-dimensional polarization states of monochromatic light fields"**, J. Opt. Soc. Am. A Vol. 28, No. 11, 2011.
- [37] P. Hariharan, **"Optical Interferometry"**, Academic press, Second edition, 2003.
- [38] Thomas R.Ferguson, **"Polarization effects in interferograms of conical optical elements"**, App.opt Vol.21, No.3, 514-517, 1982.
- [39] C.Joenathan, B.Franze, P.Haible, and H.J.Tiziani, **"Speckle interferometry with temporal phase evaluation for measuring large-object deformation"**, Appl. Opt.No.37, 1998.
- [40] K. Creath, **"Phase-shifting speckle interferometry"**, Appl. Opt. No.24, 1985.
- [41] Cho Jui Tay, Chenggen Quan, and Lujie Chen, **"Phase retrieval with a three-frame phase-shifting algorithm with an unknown phase shift"**, App.Opt Vol. 44, No. 8, 2005.
- [42] M.Takeda and K.Mutoh, **"Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes"** Appl. Opt. No.22, 1983.
- [43] C.Roddier, F.Roddier **"Interferogram analysis using Fourier transform techniques"**, App.opt, Vol. 26, No. 9 /, 1987.
- [44] V.G.Cooper, **"Analysis of Fabry-Perot Interferograms by Means of Their Fourier Transforms"**, App.opt, Vol. 10, No. 3, 1971.
- [45] C.Gorecki, **"Interferogram analysis using a Fourier transform method for automatic 3D surface measurement"**, Pure Appl. Opt. No.1, 1992.
- [46] N.Brock, J.Hayes, B.Kimbrough, J.Millerd, M. North-Morris, M.Novak and J.C. Wyant, **"Dynamic Interferometry"**, Proceeding of Spie Vol.58750, Bellingham 2005.
- [47] José A. Ferrari and Eugenio Garbusi, **"Phase-shifting (Sagnac) interferometer with external phase control"** App.Opt, Vol. 44, No. 21, 2005.
- [48] J.Min, B.Yao, P.Gao, B.Ma, S.Yan, F.Peng, J.Zheng, T.Ye, R.Rupp **"Wave-front curvature compensation of polarization phase-shifting digital holography"**, Optik 2011, article in press.

## **II.1 Introduction:**

Lorsqu'un faisceau laser traverse un système optique qui présente des aberrations, il subit généralement une dégradation de sa qualité transversale, cette dégradation se manifeste sous forme d'une phase supplémentaire [1-7].

Les aberrations élémentaires comme, la sphéricité, le coma, et l'astigmatisme peuvent être présentes, dans les systèmes d'élargissement des faisceaux, dans les lentilles de focalisation, et dans d'autres éléments utilisés pour la collimation et la focalisation des faisceaux lasers. Les effets thermiques peuvent aussi causer des aberrations très importantes et spécialement des aberrations sphériques [3-7].

Vu l'importance de l'utilisation des systèmes de focalisation dans toutes les applications lasers, il est important de savoir sérieusement comment une aberration sphérique qui se manifeste sous forme de phase influence et dégrade la qualité transversale d'un faisceau lasers [4-7].

Pour les raisons déjà citées, on a consacré cette partie de la thèse à une nouvelle technique d'analyse et de détermination de la phase de l'aberration sphérique pour un faisceau laser gaussien. Elle est basée sur la comparaison des lois de conjugaison qui relient l'objet et l'image pour le cas de l'optique géométrique appliquée à la lumière blanche, et pour le cas de l'optique des faisceaux gaussiens appliquée aux faisceaux lasers. Vu la différence qui existe entre la lumière blanche et la lumière laser, on a donné un nouveau développement pour le calcul du coefficient de l'aberration sphérique  $C_4$  spécialement pour les faisceaux lasers gaussiens, ce qui permet de calculer la phase de l'aberration sphérique.

La nouvelle formule proposée et les calculs faits, montrent l'importance de notre contribution à l'analyse et la détermination de la phase de l'aberration sphérique des faisceaux lasers.

## **II.2 Fondements théoriques et calcul du facteur de qualité $M^2$ :**

Dans cette partie on va donner les expressions analytiques pour le cas d'un faisceau laser gaussien qui traverse une lentille de focale  $f$ . Tels que les deux termes;  $\exp[j(\pi/\lambda f)r^2]$ , et  $\exp[-j(2\pi/\lambda)C_4r^4]$  représentent; la transmittance de la lentille sans aberration et la transmittance qui décrit aberration sphérique de coefficient  $C_4$ .

Si le champ du faisceau laser d'entrée juste avant la lentille est donné par l'amplitude  $E_0$ , le champ de sortie juste après la lentille est donné par l'amplitude  $E_1$ , exprimée comme suit [3-5]:

$$E_1(r) = E_0(r) \times \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{r^2}{2f} - C_4 r^4 \right) \right] \quad (\text{II.1})$$

On commence par donner la procédure de calcul du facteur de qualité  $M^2$ , et par la suite on va voir qu'il est relié directement à la phase de l'aberration sphérique par son coefficient  $C_4$ , et à la fin on passera au développement qu'on a proposé.

La transformée de Fourier d'un champ quelconque  $E$  est donnée par l'intégrale [1,3]:

$$P(S_x, S_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, y) \exp[j2\pi(S_x x + S_y y)] dx dy \quad (\text{II.2})$$

Avec:  $S_x, S_y$  Sont les fréquences spatiales selon les directions respectivement  $x$  et  $y$ .

Alors que l'élargissement angulaire (ou l'élargissement des fréquences spatiales) du faisceau de sortie, s'écrit en fonction des moments du second ordre [3-6]

$$\langle S_x^2 \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} S_x^2 |P(S_x, S_y)|^2 dS_x dS_y = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial E(x, y)}{\partial x} \right| dx dy \quad (\text{II.3.a})$$

$$\langle S_y^2 \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} S_y^2 |P(S_x, S_y)|^2 dS_x dS_y = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial E(x, y)}{\partial y} \right| dx dy \quad (\text{II.3.a})$$

Si on fait la transformation en coordonnées cylindriques, les moments du second ordre dans le domaine fréquentiel deviennent [5]:

$$\langle p^2 \rangle = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \left| \frac{\partial E(r, \theta)}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial E(r, \theta)}{\partial \theta} \right|^2 \right] r dr d\theta \quad (\text{II.4})$$

Tel que:

$$\langle p^2 \rangle = \langle S_x^2 \rangle + \langle S_y^2 \rangle.$$

Si on remplace l'expression de l'amplitude du faisceau qui présente une aberration sphérique donnée par l'équation (1) dans l'équation (4), on trouve la relation entre l'élargissement spectral du faisceau avant et après l'élément de l'aberration sphérique comme suit [5-7]:

$$\langle p^2 \rangle = \langle p_0^2 \rangle - \left( \frac{2\langle r^2 \rangle}{R_0 \lambda^2} + \frac{8C_4 \langle r^4 \rangle}{\lambda^2} \right) \left( \frac{1}{f} \right) + \frac{\langle r^2 \rangle}{\lambda^2} \left( \frac{1}{f} \right)^2 + \frac{4\langle r^3 \phi_0(r) \rangle}{\pi \lambda} C_4 + \frac{12\langle r^6 \rangle}{\lambda^2} C_4^2 \quad (\text{II.5})$$

Avec:  $\phi_0(r) = \pi r^2 / R_0 \lambda$  et le paramètre  $R_0$  n'est que le rayon de courbure effectif du faisceau initial avant la lentille, il est donné par la relation [6-7]:

$$\frac{1}{R_0} = -j \frac{\lambda}{4\pi \langle r^2 \rangle} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left( r E_0 \frac{\partial E_0^*}{\partial r} - r E_0^* \frac{\partial E_0}{\partial r} \right) r dr d\theta \quad (\text{II.6})$$

On peut aussi écrire l'équation précédente comme suit [6-7]:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{\lambda}{2\pi \langle r^2 \rangle} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left[ r \frac{\partial \phi_0(r, \theta)}{\partial r} \right] |E_0(r, \theta)|^2 r dr d\theta \quad (\text{II.7})$$

Les moments  $\langle r^2 \rangle$  et  $\langle r^4 \rangle$ , sont des coordonnées radiales, alors on les évalue par rapport à l'intensité radiale transversale  $|E_0(r, \theta)|^2$  et les moments croisés  $\langle r^3 \phi_0(r) \rangle$  se calcul par l'intégrale suivante [3-7]:

$$\langle r^3 \phi_0(r) \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r^3 \frac{\partial \phi_0(r, \theta)}{\partial r} |E_0(r, \theta)|^2 r dr d\theta \quad (\text{II.8})$$

Le faisceau laser juste après la lentille de focalisation sera converti en un waist ou en un autre faisceau collimaté. Si on veut avoir un faisceau collimaté, il faut choisir un élargissement angulaire le plus petit possible, cela donne une valeur optimale de  $(1/f)$  donnée par [5]:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{R_0} + \frac{4\langle r^4 \rangle}{\langle r^2 \rangle} C_4 \quad (\text{II.9})$$

L'interprétation physique de cette équation, c'est que lorsqu'une aberration sphérique caractérisée par un coefficient  $C_4$  est présente, la focalisation d'un faisceau laser collimaté ne se fait pas exactement dans le point focal mais ailleurs. Ce décalage est connu dans le domaine des lasers comme "focal shift effect", il est proportionnel à l'aberration comme il est donné dans le deuxième terme de l'équation (II.9).

Remplaçons l'équation (II.9) dans l'équation (II.5), on trouve l'expression de l'élargissement angulaire, il est donné par [3-5]:

$$\langle p^2 \rangle = \langle p_0^2 \rangle - \frac{\langle r^2 \rangle}{R_0^2 \lambda^2} + \left( \frac{4 \langle r^3 \phi_0(r) \rangle}{\pi \lambda} - \frac{8 \langle r^4 \rangle}{R_0 \lambda^2} \right) C_4 + \frac{16}{\lambda^2} \left( \frac{\langle r^2 \rangle \langle r^6 \rangle - \langle r^4 \rangle^2}{\langle r^2 \rangle} \right) C_4^2 \quad (\text{II.10})$$

L'équation (II.9) est le résultat donné par Siegman dans son article [4], il est claire qu'à partir de cette équation, l'élargissement du faisceau dépend du coefficient  $C_4$  de l'aberration sphérique.

Si on remplace aussi  $\phi_0(r) = \pi r^2 / R_0 \lambda$ , alors la quantité  $\langle r^3 \phi_0(r) \rangle$  prend comme valeur  $\langle r^3 \phi_0(r) \rangle = 2\pi \langle r^4 \rangle / R_0 \lambda$ , et l'équation (9) devient [3-5]:

$$\langle p^2 \rangle = \left( \langle p_0^2 \rangle - \frac{\langle r^2 \rangle}{R_0^2 \lambda^2} \right) + \frac{16}{\langle r^2 \rangle \lambda^2} \left( \frac{\langle r^2 \rangle \langle r^6 \rangle - \langle r^4 \rangle^2}{\langle r^4 \rangle^2} \right) (C_4 \langle r^4 \rangle) \quad (\text{II.11})$$

Pour plus de simplification de l'écriture, on note le rapport sans dimension suivant:

$$\beta_r^2 = \frac{(\langle r^2 \rangle \langle r^6 \rangle - \langle r^4 \rangle^2)}{\langle r^4 \rangle^2} \quad (\text{II.12})$$

Le tableau. II.1 suivant donne les valeurs numériques de  $\beta_r$  pour différents profils de faisceaux lasers d'entrée [5]:

Le profile d'intensité du faisceau	$\beta_r$
Carré uniforme, 1	0.354
Super gaussien, $\exp(-r^{10})$	0.406
Super gaussien, $\exp(-r^6)$	0.457
Parabole, $1-r^2$	0.447
Cosinus, $\cos(r)$	0.458
Cône ou triangle, $1- r $	0.474
Super gaussien, $\exp(-r^4)$	0.523
Cosinus carré, $\cos^2(r)$	0.517
gaussien, $\exp(-r^2)$	0.707
exponentiel, $\exp(- r )$	1.049

**Tableau II.1:** valeurs  $\beta_r$  de pour différents profile d'entrée.

L'expression du facteur de qualité en coordonnées cylindriques est donnée pour le cas d'un faisceau laser gaussien collimaté au niveau de son waist par:

$$M_r^2 = 2\pi \left( \langle r^2 \rangle \langle p^2 \rangle \right)^{1/2} \quad (\text{II.13})$$

Le facteur de qualité d'un faisceau laser qui passe à travers un élément optique possédant une aberration, peut se décomposer en deux parties comme montre l'équation suivante [5];

$$M_r^2 = \left[ (M_{r0}^2)^2 + (M_{rq}^2)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{II.14})$$

Tel que:

$M_{r0}^2 = 2\pi\sqrt{\langle r^2 \rangle \langle p^2 \rangle}$  est le facteur de qualité du faisceau initial sans aberration, et  $M_{rq}^2$  est la contribution additionnelle donnée par l'aberration quadratique de phase (l'aberration sphérique), ce dernier est donné par [5]:

$$M_{rq}^2 = \frac{8\pi\beta_r}{\lambda} C_4 \langle r^4 \rangle \quad (\text{II.15})$$

La première conclusion qu'on peut tirer à partir de cette dernière équation (II.15), c'est que le facteur de qualité  $M^2$  est directement proportionnel au coefficient de l'aberration sphérique  $C_4$ .

### **II.3 Développent mathématique:**

Le coefficient de l'aberration sphérique pour une lentille mince est donnée par [5, 17]:

$$C_4 = \frac{1}{4} h^4 K^3 \left\{ \frac{n+2}{n(n-1)^2} X^2 - \frac{4(n+1)}{n(n-1)} XY + \frac{n^2}{(n-1)^2} + \frac{3n+2}{n} Y^2 \right\} \quad (\text{II.16})$$

Où:

$$X = \frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2} \quad Y = \frac{u_2' + u_1}{u_2' - u_1} \quad (\text{II.17})$$

$X$  est le facteur de Coddington,  $Y$  est un facteur de normalisation,  $c_1$  et  $c_2$  représentent les courbures de la lentille,  $h$  est la hauteur de la lentille,  $n$  est l'indice de réfraction de la lentille et  $u_1$ ,  $u_2'$  sont les angles paraxiaux.

Dans le cas de l'optique géométrique l'objet et l'image sont reliés par la loi de conjugaison de Newton [17]:

$$\frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_1} = \frac{1}{f} \quad (\text{II.18})$$

$S_1$ ,  $S_2$  sont respectivement les distances objet et image.

Alors que la position de l'image est liée à la position de l'objet et à la distance focale de la lentille par:

$$S_2 = \frac{S_1 f}{S_1 - f} \quad (\text{II.19})$$

Pour les faisceaux gaussiens, Self [18] a dérivé une formule analogue en considérant que le waist d'un faisceau d'entrée représente l'objet et le waist du faisceau de sortie correspondant représente l'image, ce qui donne une formule qui relie l'objet et l'image différente à celle de l'optique géométrique. Cette formule relie l'objet et l'image d'un faisceau gaussien par une grandeur clé, appelée longueur de Rayleigh  $Z_R$  comme suit :

$$\frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_1 + (Z_R^2 / (S_1 - f))} = \frac{1}{f} \quad (\text{II.20})$$

Sachant que la position image est donnée par la formule:

$$S_2 = \frac{f \cdot s^2 - f^2 \cdot s + f \cdot Z_R^2}{(s - f)^2 + Z_R^2} \quad (\text{II.21})$$

Avec:  $Z_R = \pi w_0^2 / \lambda$ ,  $w_0$  est le waist du faisceau gaussien,  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $f$  est la distance focale de la lentille.

Si on compare les deux formules qui expriment les distances de l'image pour le cas de l'optique géométrique et l'optique des faisceaux gaussiens, on les trouve très différentes, en d'autre terme, la position de l'image est différente pour les deux cas, ce qui donne une différence de marche entre les rayons marginaux et paraxiaux pour le cas de l'optique des faisceaux gaussien différente de celle pour le cas de l'optique géométrique.

On sait bien que la différence de marche entre les rayons marginaux et paraxiaux donne une phase supplémentaire de l'image qui la déforme se manifeste sous forme d'une aberration.

Si les différences de marche ne sont pas les mêmes, elles introduisent des phases supplémentaires différentes, alors, on ne trouve pas la même quantité d'aberrations pour les deux faisceaux.

Spécialement dans notre travail, on s'intéresse qu'à l'aberration sphérique, puisqu'elle est la plus dominante pour le cas des faisceaux lasers gaussiens. Et le développement qu'on va introduire permet de trouver un coefficient de l'aberration sphérique spécialement pour les faisceaux lasers gaussiens, ce qui permet par la suite d'évaluer et d'analyser les phases introduites par l'aberration sphérique.



### II.3.1 Le coefficient d'aberration sphérique $C_4$ :

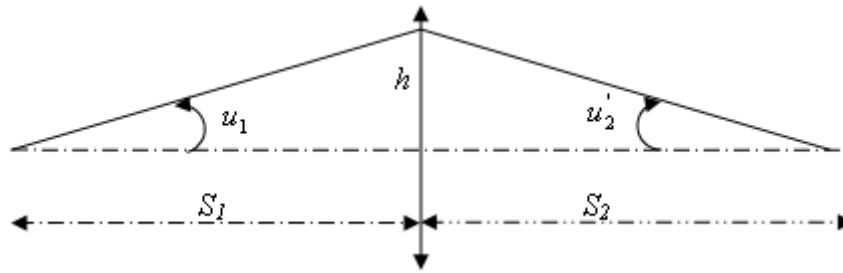
On commence le développement par donner les expressions des rapports  $Y$  dans le cas de l'optique géométrique et dans le cas de l'optique des faisceaux gaussiens (voir figure II.1).

Nous avons:

$$Y = \frac{u_2' + u_1}{u_2' - u_1} \quad \text{Avec} \quad u_2' = \frac{h}{S_2} \quad \text{and} \quad u_1 = \frac{h}{S_1} \quad (\text{II.22})$$

Le facteur  $Y$  s'écrit par la suite comme suit:

$$Y = \frac{S_2 + S_1}{S_1 - S_2} \quad (\text{II.23})$$



**Figure II.1.** Représentation des positions de l'objet et de l'image.

Si on remplace les valeurs de  $S_1$  et  $S_2$  données par les relations (II.19) et (II.21) dans la relation (II.18), on trouve de nouvelles relations pour le facteur  $Y$ :

Pour l'optique géométrique:

$$Y = \frac{S_1}{S_1 - 2.f} \quad (\text{II.24})$$

Pour l'optique des faisceaux gaussiens:

$$Y = \frac{S_1^3 - f.S_1^2 + S_1.Z_R^2 + f.Z_R^2}{S_1^3 + f.S_1^2 + (2.f^2 + Z_R^2).S_1 + f.Z_R^2} \quad (\text{II.25})$$

Si on compare les deux relations de  $Y$ , on remarque qu'elles sont très différentes, et sachant que  $C_4$  est une fonction de  $Y$ , ce qui implique que le coefficient de l'aberration

sphérique  $C_4$  donné dans le domaine de l'optique géométrique doit être différent de celui donné dans le domaine de l'optique des faisceaux gaussien.

On remplace les équations (II.7) et (II.8) dans l'équation (II.1), on obtient les relations des coefficients de l'aberration sphérique  $C_4$  dans le domaine de l'optique géométrique et celui des faisceaux gaussiens:

Dans le cas de l'optique géométrique on obtient:

$$C_4 = \frac{1}{4} h^4 K^3 \left\{ \frac{n+2}{n(n-1)^2} X^2 + \frac{4(n+1)}{n(n-1)} \left( \frac{S_1}{S_1 - 2.f} \right) X + \frac{n^2}{(n-1)^2} + \frac{3n+2}{n} \left( \frac{S_1}{S_1 - 2.f} \right)^2 \right\} \quad (\text{II.26})$$

Dans le domaine de l'optique des faisceaux gaussien, on obtient aussi:

$$C_4 = \frac{1}{4} h^4 K^3 \left\{ \frac{n+2}{n(n-1)^2} X^2 + \frac{4(n+1)}{n(n-1)} \left( \frac{S_1^3 - f.S_1^2 + S_1 Z_R^2 + f.Z_R^2}{S_1^3 + f.S_1^2 + (2.f^2 + Z_R^2)S_1 + f.Z_R^2} \right) X + \frac{n^2}{(n-1)^2} \right. \\ \left. + \frac{3n+2}{n} \left[ \frac{S_1^3 - f.S_1^2 + S_1 Z_R^2 + f.Z_R^2}{S_1^3 + f.S_1^2 + (2.f^2 + Z_R^2)S_1 + f.Z_R^2} \right]^2 \right\} \quad (\text{II.27})$$

Avec:

$h$ : est la hauteur de la lentille comme montré dans la figure 1.

On déduit que le coefficient  $C_4$  dépend des caractéristiques de la lentille  $(n, f, h)$ , de la position de l'objet  $S_1$  et de la caractéristique clé du faisceau gaussien, qui est la longueur de Rayleigh  $Z_R$ .

### **II.3.2 Résultats numériques:**

Pour illustrer le développement, on a appliqué l'ancienne formule du coefficient de l'aberration sphérique  $C_4$  donné dans le cadre de l'optique géométrique et la nouvelle formule qu'on propose donnée dans le cadre de l'optique des faisceaux gaussiens, pour quatre lentilles illustrées dans le tableau II.2

**Chapitre II Analyse et détermination de la Phase de l'aberration sphérique dans les faisceaux lasers gaussiens.**

N°	X	f (mm)	Indice de refraction <i>n</i>	Diametre $D=h$ (mm)	Epaisseur $e$ (mm)
1	0	100	1.52	40	6.05
2	1	148	1.52	29	4.2
3	0	200	1.52	40	3.05
4	1	376	1.52	69	5.61

**Tableau II.2** caractéristiques es lentilles utilisées dans le calcul.

Pour le cas des lentilles biconvexes  $X=0$ , le coefficient de l'aberration sphérique prend la forme:

$$C_4 = \frac{h^4 k^3}{4} \left[ \frac{n^2}{(n-1)^2} + \frac{(3n+2)}{n} Y^2 \right] \quad (\text{II.28.a})$$

D'où la formule empirique:

$$C_4 = C_0 (8.54 + 4.31 \times Y^2) \quad (\text{II.28.b})$$

Pour simplifier le calcul on normalise le coefficient  $C_4$  et on le divise par  $C_0$ , le rapport devient le coefficient  $C'_4$

$$C'_4 = \frac{C_4}{C_0} = (8.54 + 4.31 \times Y^2) \quad (\text{II.29})$$

Avec  $C_0$  est une constante.

De la même façon on traite le cas des lentilles plan-convexes  $X=1$ , le coefficient de l'aberration sphérique devient:

$$C_4 = \frac{h^4 k^3}{4} \left[ \frac{(n+2)}{n(n-1)} + \frac{n^2}{(n-1)^2} + \frac{4(n+1)}{n(n-1)} Y + \frac{(3n+2)}{n} Y^2 \right] \quad (\text{II.30.a})$$

Il en résulte la formule empirique suivante:

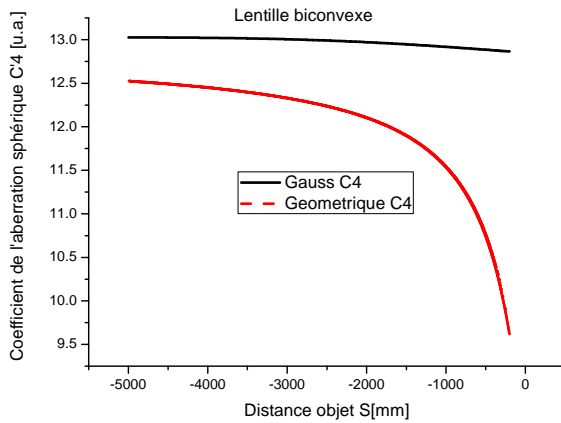
$$C_4 = C_1 (17.1 + 12.75 \times Y + 4.31 \times Y^2) \quad (\text{II.30.b})$$

On divise aussi par  $C_1$  pour simplifier le calcul:

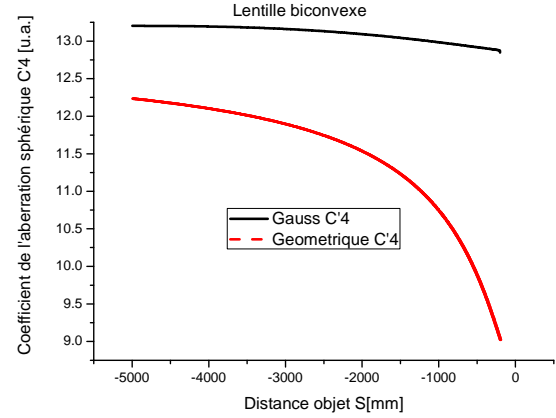
$$C'_4 = \frac{C_4}{C_1} = (17.1 + 12.75 \times Y + 4.31 \times Y^2) \quad (\text{II.31})$$

Avec:  $C_1$  est une constante.

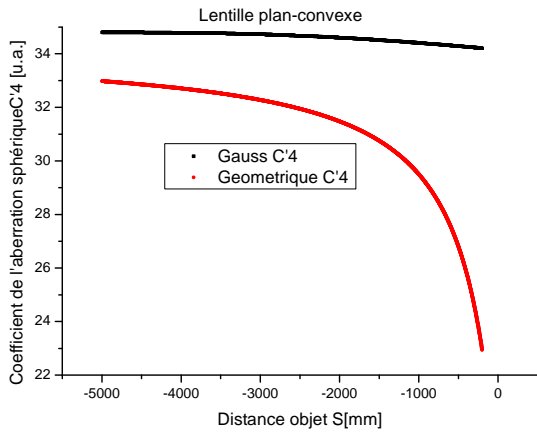
Les courbes des figures (II.2 à II.5) montrent l'évolution des coefficients de l'aberration sphérique  $C_4$  en fonction de la position de l'objet  $S_1$  dans les deux domaines; de l'optique géométrique et de l'optique des faisceaux gaussiens.



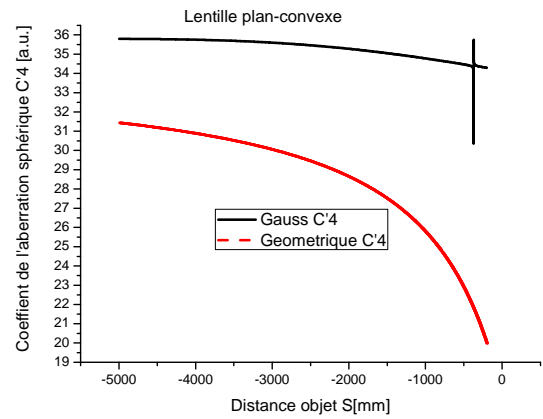
**Figure II.2.** Evolution de  $C'_4$  en fonction de la distance avec  $X=0, f=100\text{mm}, w_0=1\text{mm}$ .



**Figure II.3.** Evolution de  $C'_4$  en fonction de la distance objet avec  $X=0, f=200\text{mm}, w_0=1\text{mm}$ .



**Figure II.4.** Evolution de  $C'_4$  en fonction de la distance objet avec  $X=1, f=148\text{mm}, w_0=1\text{mm}$ .



**Figure II.5.** Evolution de  $C'_4$  en fonction de la distance objet, avec  $X=1, f=376\text{mm}, w_0=1\text{mm}$ .

#### **II.4 Discussion des résultats:**

A partir des courbes des figures (II.2 à II.5), la première conclusion qu'on peut tirer, est que les coefficients de l'aberration sphérique  $C_4$  donnés dans les deux domaines; de l'optique géométrique et de l'optique des faisceaux gaussiens sont complètement différents pour tous les types de lentilles, et sa explique la nature physique de la lumière lasers, qui est différente de celle de la lumière blanche.

On peut expliquer ça en se basant sur la notion du chemin optique, sachant que l'aberration sphérique est une phase supplémentaire notée  $\Delta\Phi$  et cette phase est reliée à la différence de marche notée  $\Delta L$  entre les rayons marginaux et les rayons paraxiaux. En se référant aux lois de conjugaisons qui relient l'objet et l'image dans les deux domaines, de l'optique géométrique et de l'optique des faisceaux gaussiens, on trouve que les chemins effectués sont différents. Ce qui confirme que les deux phases introduites par l'aberration sphérique dans le cas de l'optique géométrique et dans le cas de l'optique des faisceaux gaussiens sont différentes.

Une autre explication de la différence qui se manifeste dans l'aberration sphérique toujours dans les deux domaines, est basée sur le phénomène de décalage focal qui se présente lors de la focalisation des faisceaux lasers:

La focalisation d'un faisceau gaussien collimaté par une lentille ne se fait pas au foyer de cette lentille mais décalée d'une quantité  $\Delta f$  appelée décalage focal, c'est-à-dire que la largeur minimale du faisceau ne se trouve pas au foyer de la lentille mais en avant, ce qui donne au foyer de la lentille une largeur plus grande à celle qui se trouve au foyer.

Par contre pour l'optique géométrique la largeur minimale se trouve au foyer exact de lentille.

Partant de ces deux constatations, on remarque que l'aberration sphérique pour un faisceau gaussien est plus grande que celle obtenue pour la lumière blanche, ce qui clairement représenté sur les quatre courbes des figures (II.2-II.5).

## **II.5 Conclusion**

Cette partie a été consacrée à une nouvelle technique d'analyse et de détermination de la phase de l'aberration sphérique pour un faisceau laser gaussien, elle est basée sur la comparaison des lois de conjugaison qui relient l'objet et l'image pour le cas de l'optique géométrique appliquée à la lumière blanche, et pour le cas de l'optique des faisceaux gaussiens appliquée aux faisceaux lasers.

Vu la différence qui existe entre la lumière blanche et la lumière laser, on a présenté un nouveau développement pour le calcul du coefficient de l'aberration sphérique  $C_4$  spécialement pour les faisceaux lasers gaussiens, ce qui permet de calculer sa phase de l'aberration sphérique.

La nouvelle formule proposée et les calculs menés, montrent l'importance de notre contribution à l'analyse et la détermination de la phase de l'aberration sphérique des faisceaux lasers gaussiens.

## **Bibliographies**

- [1] H.Weber, "**Some historical and technical aspects of beam quality**", Optical and quantum Electronics No.**24**, 1992.
- [2] A.Bencheikh, M.Bouafia, L.Bouamama, H.Weber "**Beam quality factor as a key to mastering laser beam propagation**", Spie " Photonics Europ", France 20-30 April 2004.
- [3] A. E. Siegman and J.Ruff, "**Effects of spherical aberration on laser beam quality**", SPIE Vol.**1834** Laser Energy distribution profiles, 1992.
- [4] J.Alda, "**Quality improvement of coherent and aberrated laser beam using an optimum and smooth pure phase filter**", Opt.Comm, No.**192**, 2001.
- [5] A. E.Siegman, "**Analysis of laser beam quality degradation caused by quartic phase aberrations**", App.Opt. Vol.32, No.30, 1993.
- [6] A.E. Siegman, "**New developments in laser resonators**", in Optical Resonators, D. A. Holmes, ed., Soc. Photo-Opt. Instrum Eng. 1990.
- [7] A.E. Siegman, "**Defining the effective radius of curvature for a nonideal optical beam**", IEEE J. Qua.Ele. No.27, 1991.
- [8] R.M.Herrero, G.Piquero, P.M.Mejias, "**Beam quality changes of radially and azimuthally polarized fields propagating through quartic phase plates**", Opt. Com, No 281, 2008.
- [9] A.Hasnaoui, A.Bencheikh, M.Fromager, E.Cagniot, K.Aït-Ameur, "**Creation of a sharper focus by using a rectified TEM<sub>p0</sub> beam**", Opt Com, No, 2011.
- [10] A.Hasnaoui, A.Bencheikh, K.Aït-Ameur, "**Tailored TEM<sub>p0</sub> beams for large size 3-D laser prototyping**", Opt.Las.Eng, No.**49**, 2011.
- [11] M. A.Golub, V.Shurman, and I.Grossinger, "**Extended focus diffractive optical element for Gaussian laser beams**", App.Opt, Vol. **45**, 2006.
- [12] R. M.Herman and T.A.Wiggins, "**Focusing and magnification in Gaussian**" beams, App.Opt, Vol. **25**, 1986.
- [13] P.Jixiong, "**Focusing Gaussian beams by an annular lens with spherical aberration**", JMO, Vol. 45, 1998.
- [14] V. N.Mahajan, "**Axial irradiance of a focused beam**", J. Opt. Soc. Am. A, Vol. **22**, 2005.
- [15] Y.Zhong, "**Focal shift in focused truncated pulsed-laser beam**", App.Opt, Vol. **46**, 2007.

- [16] V. N.Mahajan, "**Uniform versus Gaussian beams: a comparison of the effects of diffraction, obscuration, and aberrations**", J.Opt.Soc.A . Vol.3, 1986
- [17] Hopkins, "**Wave theory of aberration**", Oxford UNI. London, 1950.
- [18] Sidney, Self A., "**Focusing of spherical Gaussian beams**", App.opt, Vol. **22**, 1983.



### **III.1 Introduction**

De nombreuses applications des lasers nécessitent de focaliser le faisceau dans des volumes de plus en plus petits afin d'assurer une bonne résolution spatiale, tant longitudinale que transversale, comme par exemple [1-8] :

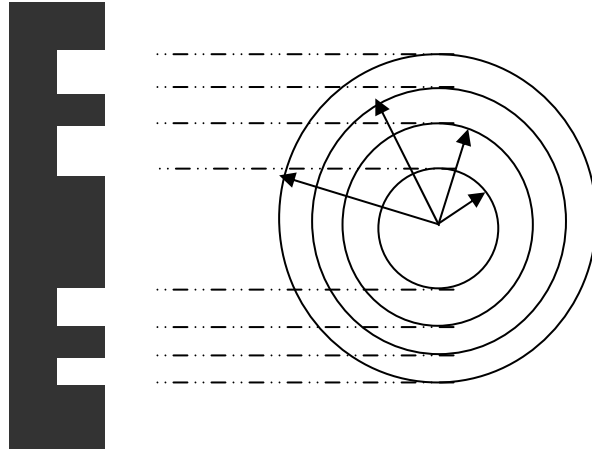
- Prototypage 3-D par laser basée sur la photo-polymérisation à deux photons
- Microscopie de fluorescence linéaire et non-linéaire
- Micro-usinage laser
- Pincettes optiques
- Tomographie cohérente
- ...

On dit qu'un faisceau laser possède la propriété de superrésolution si après avoir été focalisé on obtient une tache focale plus petite que la limite de diffraction [1-8]. Dans ce travail de théorie et de simulation, on va produire un volume focal quelques centaines de fois inférieur à celui que l'on obtiendrait si la focalisation concernait un faisceau gaussien. La technique de superrésolution qui sera mise en œuvre est articulée sur la mise en forme spatiale de faisceaux lasers par optique diffractive de phase. Pour cette raison la présente partie est consacrée à la transformation des faisceaux lasers d'ordres supérieurs, qui sont les faisceaux de Laguerre-Gauss  $LG_{p0}$  en faisceaux gaussiens. On va voir après que cette transformation est accompagnée par une amélioration de la résolution longitudinale (réduction de  $Z_R$ ) et de la résolution transversale (réduction de la largeur du faisceau focalisé  $W_f$ ). La transformation est faite par des éléments optiques diffractifs annulaires de phase binaire.

### **III.2 L'élément optique diffractif de phase binaire utilisé:**

On commence par montrer les caractéristiques de l'élément de phase binaire qu'on a utilisé pour effectuer la transformation.

L'élément est un réseau de phase annulaire composé de  $(p+1)$  rayon tel que  $p$  est l'ordre du mode de Laguerre-Gauss à transformer, ces rayons sont modélisés selon les zéros du polynôme de Laguerre (voir tableau),



**Figure III.1:** Schéma représentant l'élément optique diffractif utilisé pour la transformation des faisceaux  $LG_{p0}$

La différence de phase entre un anneau et son voisin est égal à  $\pi$  ce qui donne une transmittance alternée entre +1 et -1, cette différence de phase est réalisée par le choix de l'épaisseur  $e$  qui donne une phase de  $\pi$  selon la relation:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} e, \text{ avec } \lambda = 1.064\mu m, \Delta\phi = \pi, \text{ ce qui donne une épaisseur } e = \frac{\lambda}{2}.$$

La transmittance de l'élément de phase binaire est donnée par:

$$\tau(\rho) = \begin{cases} -1 & \text{pour } 0 < \rho \leq \rho_1 \\ (-1)^{i+1} & \text{pour } \rho_i < \rho \leq \rho_{i+1} \text{ et } (i+1) < p \\ (-1)^{p+1} & \text{pour } \rho > \rho_p \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Avec les  $\rho_i$  sont les positions radiales pour lesquelles l'intensité du faisceau Laguerre-Gauss  $LG_{p0}$  incident est nulle. Ces positions particulières sont données dans le tableau III.1 [9,10]

	1 <sup>er</sup> zéro	2 <sup>ème</sup> zéro	3 <sup>ème</sup> zéro	4 <sup>ème</sup> zéro	5 <sup>ème</sup> zéro
$LG_{10}$	0.707106				
$LG_{20}$	0.541195	1.306562			
$LG_{30}$	0.455946	1.071046	1.773407		
$LG_{40}$	0.401589	0.934280	1.506090	2.167379	
$LG_{50}$	0.363015	0.840041	1.340975	1.882260	2.51040

**Tableau III.1:** Les zéros des cinq premiers polynômes de Laguerre  $L_p(\rho_i/w) = 0$

### III.3 La transformation d'un faisceau $LG_{p0}$ en un faisceau mono-lobé.

Dans cette partie on va montrer comment transformer un faisceau laser d'ordre supérieur de type Laguerre-Gauss  $LG_{p0}$  en un faisceau mono-lobé de distribution quasi-gaussienne en utilisant le réseau annulaire de phase binaire introduit dans le paragraphe précédent.

#### III.3.1- Caractéristiques du faisceau $LG_{p0}$ incident:

Considérons un faisceau Laguerre-Gauss symétrique et collimaté d'ordre  $p$ , son amplitude est donnée par [9]:

$$E_{in}(\rho) = L_p\left(\frac{2\rho^2}{W^2}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2}\right) \quad (\text{III.2})$$

On donne au faisceau incident une largeur  $W=1\text{mm}$ .

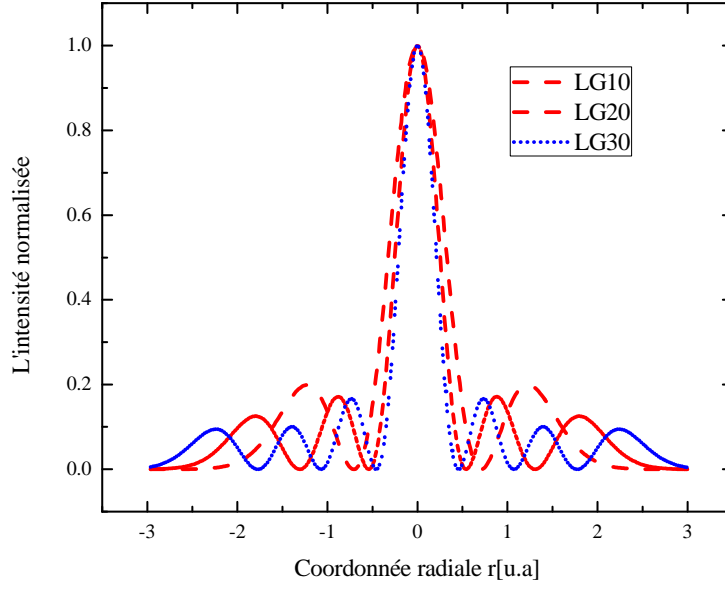
Introduisant la coordonnée transversale réduite  $X = 2\rho^2/W^2$ , le polynôme de Laguerre

$L_p\left(X = \frac{2\rho^2}{W^2}\right)$  suit les expressions données dans le tableau III.2 [9,10].

faisceau	$L_p$	$M_p^2 = 2p+1$
$LG_{00}$	$1$	1
$LG_{10}$	$1-X$	3
$LG_{20}$	$X^2-4X+2$	5
$LG_{30}$	$-X^3+9X^2-18X+6$	7
$LG_{40}$	$X^4-16X^3+72X^2-96X+24$	9
$LG_{50}$	$-X^5+25X^4-200X^3+600X^2-600X+120$	11

**Tableau III.2:** Polynômes de Laguerre  $L_p(X)$  d'ordre  $p$ .

Les ordres supérieurs des faisceaux  $LG_{p0}$  sont constitués d'un lobe central entouré de  $p$  anneaux brillants concentrique comme montré dans la figure III .2



**Figure III.2** Distribution d'intensité des faisceaux de Laguerre-Gauss  $LG_{10}$ ,  $LG_{20}$ ,  $LG_{30}$ .

Le faisceau laser de Laguerre-Gauss a une largeur qui croît lorsque l'ordre  $p$  du faisceau augmente, l'expression de sa taille est donnée par [9]:

$$W_p = W \sqrt{2p+1} \quad (\text{III.3})$$

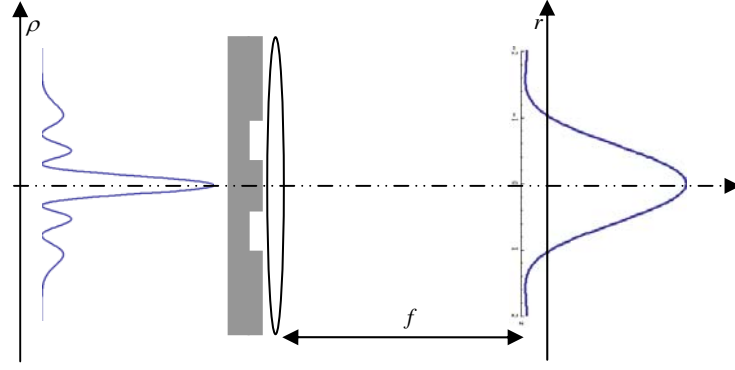
Tel que:  $W$  est la largeur du mode fondamental gaussien.

L'élargissement du faisceau  $LG_{p0}$  peut être décrit par l'angle de divergence du champ lointain  $\theta_p$  qui est plus grand que celui de la divergence d'un faisceau gaussien, il est donné par:

$$\theta_p = \theta_0 \sqrt{2p+1} \quad (\text{III.4})$$

Avec:  $\theta_0$  est la divergence du mode fondamental gaussien.

La transformation d'un faisceau Laguerre-Gauss en un faisceau gaussien est basée sur le schéma de la figure III.1:



**Figure III.3.** Schéma de base de la transformation d'un faisceau  $LG_{p0}$  en un faisceau  $LG_{00}$

Dans ce qui suit, on considère la distribution de l'intensité transversale du faisceau incident après la traversée du système (EOD+lentille) dans le plan focal de la lentille de  $f=50\text{mm}$ .

L'amplitude du champ diffracté est donnée par l'intégrale de Fresnel-Kirchhoff en coordonnées cylindriques par la relation [9]:

$$E(r, z) = \frac{1}{\lambda z} \int_{DOE} \int_0^{2\pi} \tau(\rho) E_{in}(\rho) \exp\left\{ \frac{i\pi\rho^2}{\lambda z} + \frac{i\pi r^2}{\lambda z} - \frac{i2\pi r\rho \cos(\theta)}{\lambda z} \right\} \exp\left\{ -\frac{i\pi\rho^2}{\lambda f} \right\} \rho d\rho d\theta \quad (\text{III.5})$$

Tels que:

$\rho, r$  : représentent respectivement les coordonnées radiales dans les plans; d'entrée (avant la lentille et l'EOD) et celui de sortie (Après l'EOD et la lentille).

$z$ : est la distance de propagation sur l'axe longitudinal.

$\theta$ : représente l'angle radial entre un rayon dans le plan d'entrée et son conjugué dans le plan de sortie.

On peut écrire l'équation (III.5) come suit:

$$E(r, z) = \frac{2\pi}{\lambda z} \exp\left(\frac{i\pi r^2}{\lambda z}\right) \int_{DOE} \int_0^{2\pi} \tau(\rho) E_{in}(\rho) \exp\left(\frac{i\pi\rho^2}{\lambda z}\right) \exp\left(-\frac{i2\pi r\rho \cos(\theta)}{\lambda z}\right) \exp\left(-\frac{i\pi\rho^2}{\lambda f}\right) \rho d\rho d\theta \quad (\text{III.6})$$

On arrange les termes de l'intégrale et on écrit:

$$E(r, z) = \frac{1}{\lambda z} \exp\left(\frac{i\pi r^2}{\lambda z}\right) \int_{DOE} \tau(\rho) E_{in}(\rho) \exp\left(\frac{i\pi\rho^2}{\lambda z} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)\right) \left\{ \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{i2\pi r\rho \cos(\theta)}{\lambda z}\right) d\theta \right\} \rho d\rho \quad (\text{III.7})$$

En utilisant la relation suivante [10-12]:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{i2\pi r\rho \cos(\theta)}{\lambda z}\right) d\theta = 2\pi J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda z} r\rho\right) \quad (\text{III.8})$$

Et en la remplaçant dans l'équation (III.7), on trouve:

$$E(r, z) = \frac{2\pi}{\lambda z} \exp\left(\frac{i\pi r^2}{\lambda z}\right) \int_{DOE} \tau(\rho) E_{in}(\rho) \exp\left\{\frac{i\pi \rho^2}{\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)\right\} J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda z} r \rho\right) \rho d\rho \quad (III.9)$$

L'intensité lumineuse est donnée en élevant au carré l'amplitude du champ, ce qui donne:

$$I(r, z) = \left| \frac{2\pi}{\lambda z} \int_{DOE} \tau(\rho) E_{in}(\rho) \exp\left\{\frac{i\pi \rho^2}{\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)\right\} J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda z} r \rho\right) \rho d\rho \right|^2 \quad (III.10)$$

L'expression de l'équation (III.10) représente la distribution de l'intensité transversale des faisceaux Laguerre-Gauss diffractés par un EOD le long de l'axe de propagation  $z$ .

Un cas particulier correspond à la distribution transversale de l'intensité lumineuse au point focal, on remplace  $z=f$  dans l'équation (III.10), on trouve:

$$I(r, z = f) = \left| \frac{2\pi}{\lambda f} \int_{DOE} \tau(\rho) E_{in}(\rho) J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda f} r \rho\right) \rho d\rho \right|^2 \quad (III.11)$$

C'est l'expression finale qui exprime la distribution de l'intensité transversale au point focal de la lentille.

On note que tous les résultats de cette partie sont basés sur la résolution numérique de l'intégrale de l'équation (III.11) en tenant compte des valeurs numériques:  $\lambda=1064\text{nm}$ ,  $W=1\text{mm}$  et  $f=50\text{mm}$ .

La résolution de l'intégrale (III.11) est réalisée en programme écrit en Fortran version 8.0, le corps du programme est donné dans l'annexe.

On rappelle aussi que la distance de Rayleigh  $Z_R$  d'un faisceau  $LG_{p0}$  focalisé (sans EOD) est donnée par [9]:

$$Z_R = \frac{\lambda f^2}{\pi W^2 M_p^2} \quad (III.12)$$

Avec  $\lambda=1064\text{nm}$  et  $W=1\text{mm}$ ,  $f=50\text{mm}$ .

Comme application numérique on trouve:  $Z_R = 8.5/M_p^2$ .

Le tableau III.3 montre les valeurs de  $z_R$  des faisceaux Laguerre-Gauss pures après focalisation par la lentille de focale  $f$  et sans élément optique diffractif.

$LG_{p0}$	$LG_{10}$	$LG_{20}$	$LG_{30}$	$LG_{40}$	$LG_{50}$
$M^2_p$	3	5	7	9	11
$z_R$ (mm)	2.83	1.7	1.21	0.94	0.77

**Tableau III.3:** Caractéristiques des faisceaux  $LG_{p0}$  après focalisation par une lentille de focale  $f=50\text{mm}$  et sans EOD.

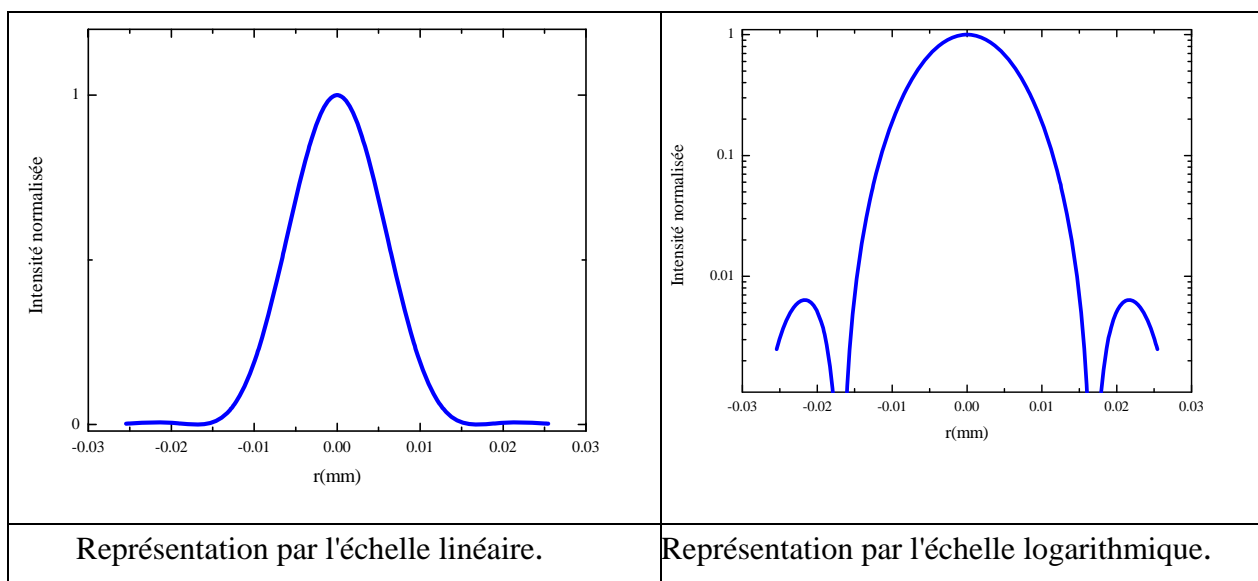
### III.3.2 Les distributions de l'intensité des faisceaux $LG_{p0}$ redressé au plan focal d'une lentille de focale $f=50\text{mm}$

Les résultats de la transformation des cinq premiers ordres de Laguerre-Gauss ( $LG_{10}$ ,  $LG_{20}$ ,  $LG_{30}$ ,  $LG_{40}$ ,  $LG_{50}$ ) en faisceaux quasi-gaussiens sont présentés ci-dessous. Pour s'assurer de la qualité de la transformation, on a appliqué les fits des distributions obtenues par le logiciel ORIGIN.6.0. La qualité des différents fits a été estimée par les paramètres statistiques ( $\chi^2$  et  $R^2$ ), tous les résultats numériques des transformations sont réunis dans le tableau.3

Un autre paramètre qui permet de caractériser la qualité de la transformation c'est l'intensité relative des petits lobes qui se trouve aux cotés de la distribution quasi-gaussienne au plan  $z=f$ . Pour cette raison il est nécessaire de représenter la distribution de l'intensité en utilisant une échelle logarithmique.

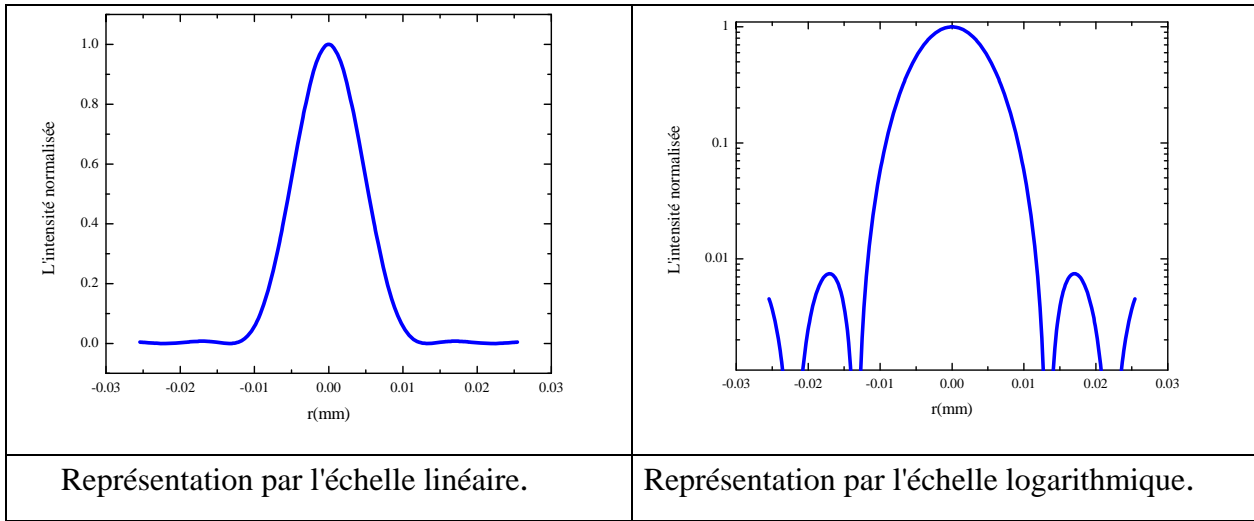
Ci-dessous on voit les distributions des faisceaux  $LG_{p0}$  redressés représentés sur l'échelle linéaire et l'échelle logarithmique.

#### III.3.2.1 Transformation de $LG_{10}$



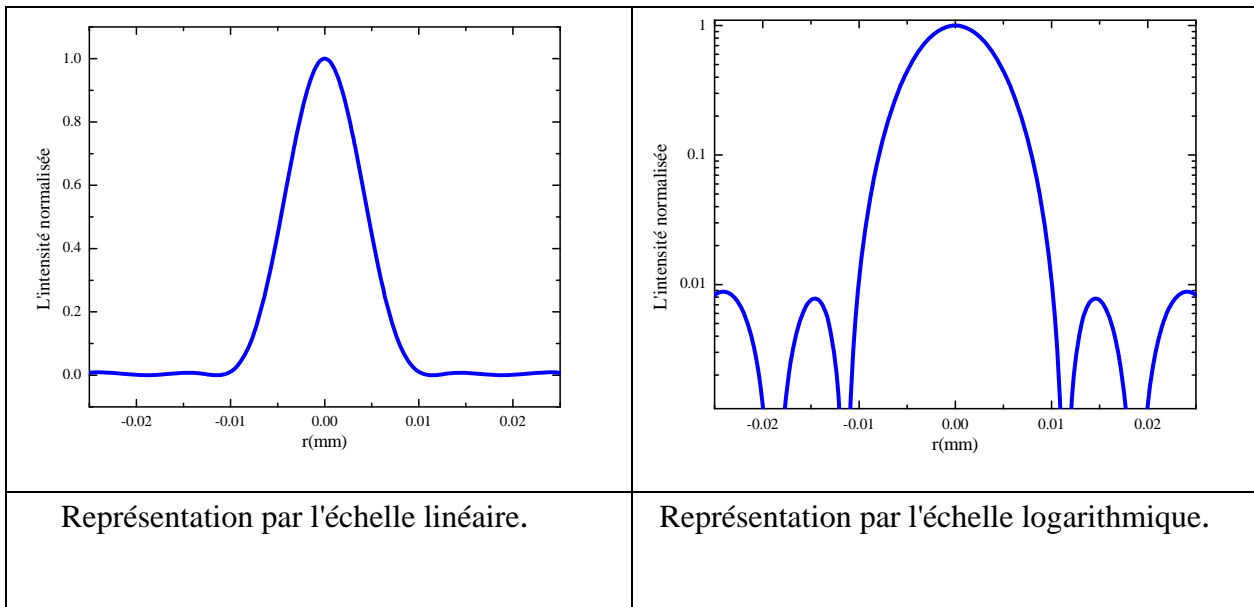
**Figure III.4.** Distribution de l'intensité de  $LG_{10}$  redressé.

### III.3.2.2 Transformation de $LG_{20}$



**Figure III.5.** Distribution de l'intensité de  $LG_{20}$  redressé.

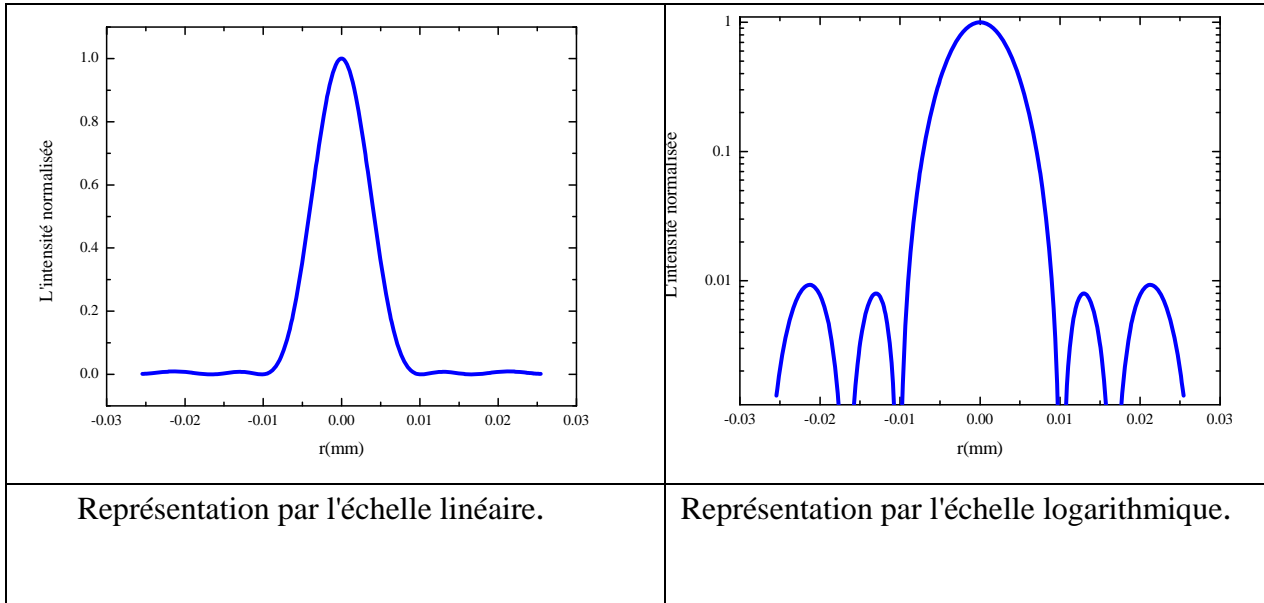
### III.3.2.3 Transformation de $LG_{30}$



**Figure III.6.** Distribution de l'intensité de  $LG_{30}$  redressé.

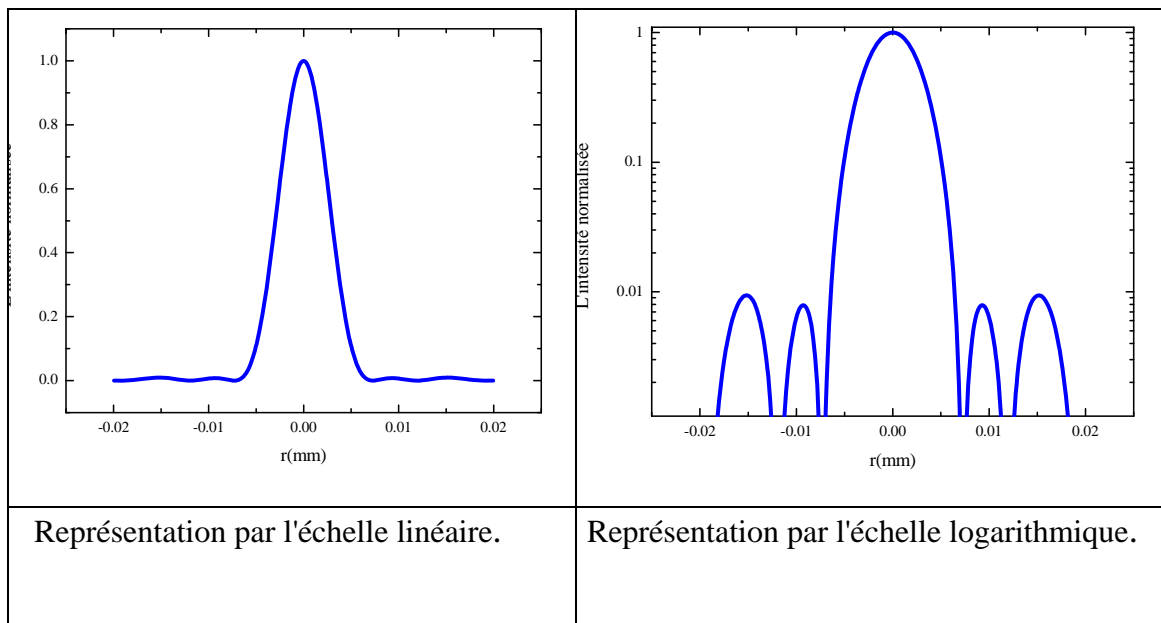


### III.3.2.4 Transformation de $LG_{40}$



**Figure III.7.** Distribution de l'intensité de  $LG_{40}$  redressé.

### III.3.2.5 Transformation de $LG_{50}$



**Figure III.8.** Distribution de l'intensité de  $LG_{50}$  redressé.

### III.3.3 Résultat:

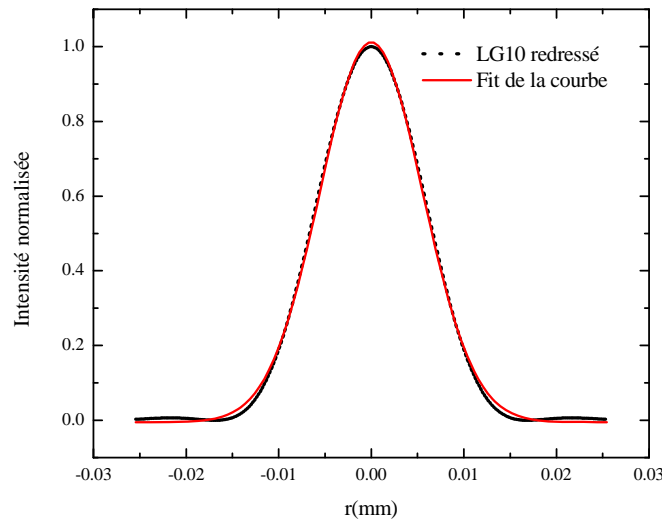
Après les transformations des faisceaux  $LG_{p0}$  par l'élément optique diffractif, on constate que les distributions obtenues se ressemblent à la distribution gaussienne.

Concernant les représentations des distributions des intensités sur les échelles logarithmiques, on remarque que les lobes secondaires des faisceaux Laguerre-Gauss  $LG_{p0}$  redressés n'excèdent pas 1% par rapport au lobe central, ce qui montre la bonne transformation.

### III.3.4 Les fits des courbes

Pour s'assurer de la transformation des faisceaux  $LG_{p0}$  ( $TEM_{p0}$ ) en faisceaux quasi-gaussiens  $LG_{00}$  ( $TEM_{00}$ ) on a appliqué aussi des fits gaussiens pour les distributions obtenues après la transformation par l'EOD et la focalisation par la lentille. Les fits obtenus avec leurs caractéristiques statistiques sont représentés ci-dessous, tel que,  $W_{0f}$  représente la largeur du faisceau transformé au point focal de la lentille de focalisation,  $\chi^2$  et  $R^2$  sont les paramètres statistiques caractérisant le fit.

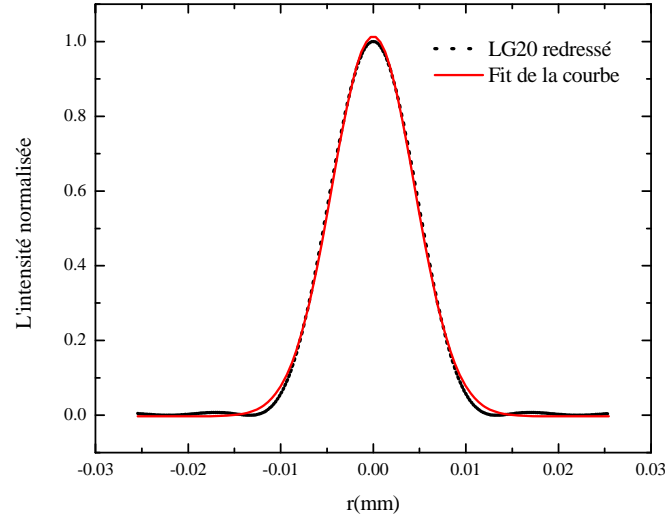
#### III.3.4.1 Transformation de $LG_{10}$ et le fit de la distribution $LG_{00}$ obtenue



**Figure III.9 :** Distribution de l'intensité du  $LG_{10}$  redressé avec le fit gaussien,  $W_{0f}=10.6\mu\text{m}$ ,

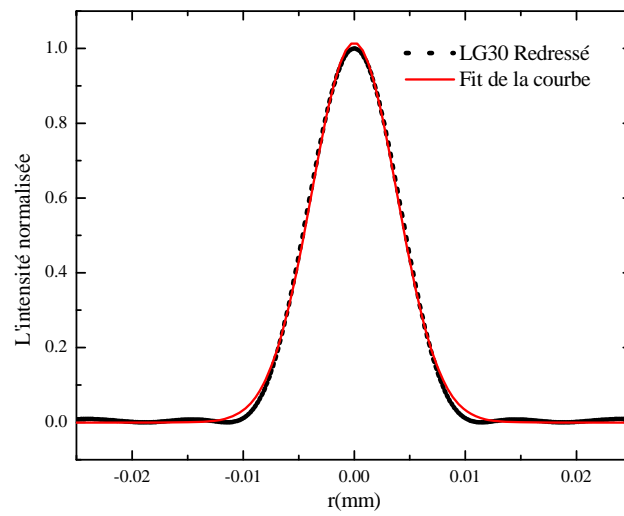
$$\chi^2=0.00011, R^2=0.99913$$

### III.3.4.2 Transformation de $LG_{20}$ et le fit de la distribution $LG_{00}$ obtenue



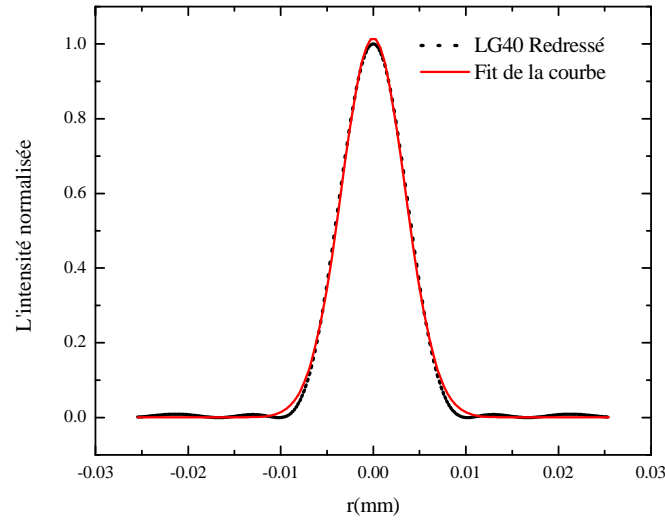
**Figure III.10 :** Distribution de l'intensité du  $LG_{20}$  redressé,  $W_{0f}=8.5 \mu\text{m}$ ;  $\chi^2=0.00011$ ,  $R^2=0.999$

### III.3.4.3 Transformation de $LG_{30}$ et le fit de la distribution $LG_{00}$ obtenue



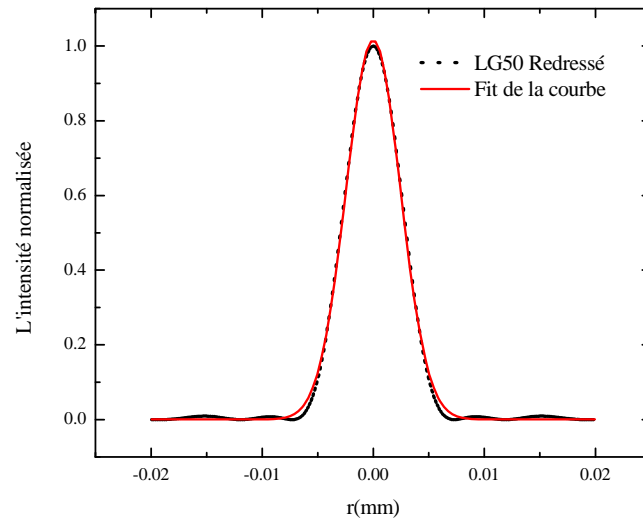
**Figure III. 11:** Distribution de l'intensité du  $LG_{30}$  redressé,  $W_{0f}=7.3\mu\text{m}$ ,  $\chi^2=0.00012$ ,  $R^2=0.99884$

#### III.3.4.4 Transformation de $LG_{40}$ et le fit de la distribution $LG_{00}$ obtenue



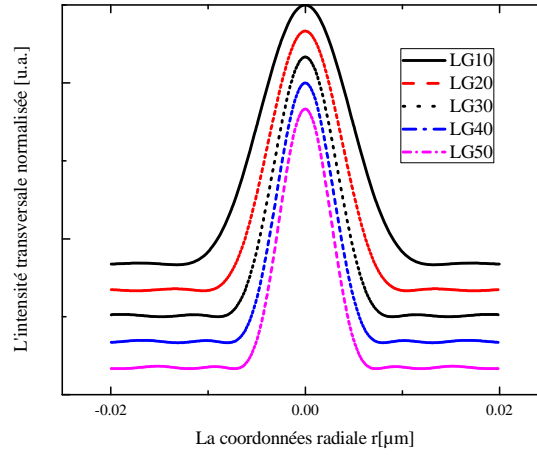
**Figure III.12:** Distribution de l'intensité du  $LG_{40}$  redressé,  $W_{0f}=6.4\mu\text{m}$ ,  $\chi^2=0.00011$ ,  $R^2=0.99881$

#### III.3.4.5 Transformation de $LG_{50}$ et le fit de la distribution $LG_{00}$ obtenue



**Figure III.13:** Distribution de l'intensité du  $LG_{50}$  redressé,  $W_{0f}=5.8\mu\text{m}$ ,  $\chi^2=0.00011$ ,  $R^2=0.99881$ .

On rassemble les cinq courbes dans la figure III.4



**Figure III. 14.** La distribution de l'intensité transversale des faisceaux  $LG_{p0}$  redressés au foyer d'une lentille de focale  $f=50\text{mm}$

### III.4 Résultats de la transformation $LG_{p0}$ en $LG_{00}$ et discussion:

#### III.4.1 Les largeurs des faisceaux obtenus:

On va prendre comme référence un faisceau gaussien pur, la focalisation de ce dernier par une lentille de focale  $f$  sans (EOD) donne au point focal un faisceau de largeur (Waist)  $W_{0f}$  qui obéit à la relation [13-16]:

$$W_{0f} = \frac{\lambda f}{\pi w_0 \left[ 1 + \left( \frac{f}{Z_R} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{III.13})$$

Avec  $W_0$  est la largeur waist du faisceau d'entrée.

Lorsque le faisceau d'entrée est collimaté, la largeur de Rayleigh devient assez grande, et l'équation précédente prend la forme:

$$W_{0f} = \frac{\lambda f}{\pi w_0} \quad (\text{III.14})$$

Une application numérique pour  $W_0=1\text{mm}$ ,  $f=50\text{mm}$  et  $\lambda=1.064\mu\text{m}$  donne la valeur de:

$$\underline{W_{0f}=16.9\mu\text{m}}$$

### Chapitre III Amélioration de la superrésolution des faisceaux lasers par des éléments optiques de phase

Les largeurs des lobes centraux associées aux faisceaux  $LG_{p0}$  rectifiés, sont déduites à partir des courbes des fits obtenus représentées dans la figure.III.14 Les valeurs numériques sont données dans le tableau.3 pour  $p=0$  à 5.

Les valeurs du  $M^2$  après la transformation des faisceaux  $LG_{p0}$  en faisceaux  $LG_{00}$ , restent inchangées, et cela en se basant sur le travail de Siegman publié en 1993 [17], il a montré que le facteur de qualité  $M^2$  d'un faisceau laser reste le même après son passage à travers un élément optique diffractif de phase binaire. D'autres auteurs ont confirmé le résultat de Siegman, et en ajoutant qu'un élément optique diffractif de phase continue affecte le facteur de qualité  $M^2$  des faisceaux lasers [18]. En conclusion les facteurs de qualité  $M^2$  des faisceaux Laguerre-Gauss après transformation gardent les mêmes valeurs qu'avant transformation.

Faisceau incident	$W_{of}(\mu m)$	$\chi^2$	$M_p^2$
$LG_{00}$	16.50	$7 \times 10^{-7}$	1
$LG_{10}$	10.60	$1.2 \times 10^{-5}$	3
$LG_{20}$	08.50	$1.1 \times 10^{-5}$	5
$LG_{30}$	07.30	$9 \times 10^{-6}$	7
$LG_{40}$	06.4	$1.4 \times 10^{-5}$	9
$LG_{50}$	05.8	$1.6 \times 10^{-5}$	11

**Tableau III.4:** Les caractéristiques du faisceau  $LG_{p0}$  focalisé

#### **III.4.2 Les largeurs de Rayleigh $z_R$ obtenues:**

Pour bien exploiter les transformations on a fait des calculs sur les distributions obtenues; tels que, la longueur de Rayleigh  $Z_R$ , et les largeurs des faisceaux  $LG_{p0}$  rectifiés.

A partir de la relation:  $Z_R = \frac{\pi W_{of}^2}{\lambda M^2}$  et les valeurs des largeurs  $W_{of}$  prises du tableau III.4, on obtient de nouvelles valeurs de  $Z_R$  après le redressement, les résultats sont regroupés dans le tableau III.5 suivant:

Faisceau incident	$W_0(\mu m)$	$M_p^2$	$Z_R$ Avec EOD	$Z_R$ Sans EOD
$LG_{00}$	16.50	1	803	803
$LG_{10}$	10.60	3	114	342
$LG_{20}$	08.50	5	44	220
$LG_{30}$	07.30	7	23	161
$LG_{40}$	06.4	9	14	126
$LG_{50}$	05.8	11	9	99

**Tableau III.5:** Les nouvelles valeurs de  $Z_R$  après redressement des faisceaux  $LG_{p0}$ .

### III.4.3 Discussion

Pour discuter les résultats des transformations, on utilise comme référence la valeur de la largeur  $W_0=16.9$  obtenue après la focalisation d'un faisceau gaussien pur de largeur initiale de  $W_0=1mm$  par une lentille de focale  $f=50mm$ , par rapport à laquelle on compare les résultats des largeurs obtenues des faisceaux Laguerre-Gauss après utilisation de EOD et la même lentille de focalisation.

On remarque que la largeur du faisceau  $LG_{p0}$  rectifié focalisé par une lentille est plus petite que celle du faisceau gaussien focalisé par la même lentille et sans EOD.

C'est un résultat qu'on n'a pas attendu, mais si on tenant compte des résultats publiés [19-21] sur le concept de la superrésolution obtenu par des objets de phase binaire, on les trouve très logique.

On rappelle que la technique de superrésolution est utilisée souvent dans l'imagerie optique pour sa capacité de produire une tache centrale de diffraction plus petit que la tache d'Airy, c'est-à-dire de dépasser la limite de diffraction. Comme résultat, la focalisation d'un faisceau  $LG_{p0}$  rectifié au lieu d'un faisceau gaussien  $TEM_{00}$  permet la réduction de la taille de la tache focale d'un facteur de proportionnel à l'ordre  $p$  en utilisant la même lentille.

### III.4.4 le contenu de la puissance:

Pour continuer la description de la qualité de la mise en forme des faisceaux  $LG_{p0}$ , il est nécessaire d'estimer la qualité de la transformation des faisceaux  $LG_{p0}$  en faisceaux de distributions quasi-Gaussiennes dans le plan focal d'une lentille convergente.

### Chapitre III Amélioration de la superrésolution des faisceaux lasers par des éléments optiques de phase

Pour cela on a déterminé numériquement le contenu de la puissance (power content)  $\alpha_r$  dans le lobe central des faisceaux  $LG_{p0}$  purs et rectifiés (redressés).

On calcule le pourcentage de la puissance contenue dans le lobe central par rapport à la puissance totale d'un faisceau Laguerre gauss pur par l'intégrale suivante [21-22]:

$$\alpha_{LG}(\%) = \frac{\int_0^{\rho} (L_p(X) \exp(-X^2))^2 X dX}{\int_0^{\infty} (L_p(X) \exp(-X^2))^2 X dX} \quad (\text{III.15})$$

Le calcul du "**power content**" des faisceaux Laguerre-Gauss redressés se base sur la formule suivante:

$$\alpha_{\text{Redressé}}(\%) = \frac{\int_0^{\rho} (L_p(X) \exp(-X^2))^2 X dX}{\int_0^{\infty} (L_p(X) \exp(-X^2))^2 X dX} \quad (\text{III.16})$$

Les résultats numériques des cinq premiers faisceaux Laguerre-Gauss ( $LG_{10}$ - $LG_{50}$ ) sont rassemblés dans le tableau III.6

#### **III.4.5 Volume focal d'un faisceau laser quelconque:**

La formule générale qui donne le volume focal d'un faisceau gaussien focalisé est donnée par [21-22]:

$$V_G = \int_{-Z_R}^{Z_R} S(z) dz = \frac{\pi^2 W_0^4}{\lambda} = \frac{\pi^2 W_{fG}^4}{\lambda} \quad (\text{III.17})$$

Le volume focal d'un faisceau gaussien réel focalisé par une lentille de focale  $f$  est donnée par:

$$V_R = \frac{\pi^2 W_{0f}^4}{\lambda M^2} \quad (\text{III.18})$$

Pour calculer le rapport entre les volumes d'un faisceau Laguerre -gauss pur et d'un faisceau gaussien, on divise l'équation (III.13) sur l'équation (III.14), on obtient:

$$\eta = \frac{V_G}{V_R} = \frac{1}{M^2} \left( \frac{W_f}{W_{fG}} \right)^4 \quad (\text{III.19})$$



### **Chapitre III Amélioration de la superrésolution des faisceaux lasers par des éléments optiques de phase**

Les résultats des calculs basés sur les relations (III.11), (III.12) et (III.15) sont rassemblés dans le tableau III.6 comme suit.

$p$	$\alpha_{LG} (\%)$	$\alpha_R (\%)$	$\eta$
1	24.4	82.6	17
2	15.6	78.5	68
3	11.2	76.3	172
4	8.6	74.6	366
5	7	73.8	675

**Tableau III.6:** Valeurs des rapports des puissances

D'après les résultats du tableau III.6, on remarque qu'un bon transfert de l'énergie contenue dans le lobe central des différents faisceaux Laguerre-Gauss  $LG_{p0}$  a été fait vers le lobe central du faisceau gaussien après redressement (mise en forme).

En analysant aussi le rapport des volumes focaux  $\eta$ , on remarque qu'une très bonne réduction du volume focal est obtenue, et comme exemple, on prend le cas du  $LG_{30}$ , d'où on remarque une réduction de  $\sqrt{172}$  presque 5 fois le volume initial.

#### **III.5 Conclusion:**

Dans cette partie on a réalisé numériquement la transformation des faisceaux Laguerre-Gauss  $LG_{p0}$  en faisceaux gaussien  $TEM_{00}$  en utilisant un élément optique diffractif sous forme d'un réseau annulaire de phase binaire. A travers cette transformation on obtenu plusieurs résultats:

Le premier réside dans l'obtention d'un faisceau gaussien avec un facteur de qualité important  $(2p+1)$ , ce qui nous a permis l'amélioration de la résolution longitudinale (Largeur de Rayleigh  $z_R$ ) du faisceau, et ça trouve une application dans le prototypage 3-D par laser, qui exige une profondeur de focalisation très petite.

Le deuxième résultat est l'amélioration de résolution transversale, en d'autre terme, la réduction de la largeur du faisceau focalisé au plan focal d'une lentille convergente toujours en utilisant l'élément d'optique diffractif présenté au début de ce chapitre. Ce résultat trouve une application dans la microscopie et l'imagerie optique.

### **Chapitre III Amélioration de la superrésolution des faisceaux lasers par des éléments optiques de phase**

Comme dernier point, on note qu'il faut forcer le laser pour qu'il puisse osciller en mode fondamentale en forme de faisceau  $TEM_{p0}$ , cela est possible par l'insertion soit d'un élément de phase [23-29], soit d'un élément absorbant [29-30] dont sa géométrie est en concordance avec les zéros des polynômes de Laguerre, on note aussi que l'utilisation des éléments de phase est plus efficace pour la sélection des modes d'ordres supérieurs qu'à l'utilisation des éléments absorbant, car ces derniers introduisent des pertes au laser.

**Bibliographie:**

- [1] C-Y.Liao, M.Bouriauand, PL.Baldeck, J-C.Léon, C.Masclet **"Two-dimentional slicing method to speed up the fabrication of micro-objects based o ntwo- photon polymerization"**, Appl Phys Lett, No. 91, 2007.
- [2] K-S.Lee, RH.Kim, D-Y.Yang, SH.Park. **"Advances in 3D nano/ micro fabrication using two-photon initiated polymerization"**, Prog Polym Sci, No.33, 2008.
- [3] W. Denk, J.H. Strickler, W.W. Webb, **"Two photon laser scanning fluorescence microscopy"**, Science No.248,1990.
- [4] K.S. Youngsworth, T.G. Brown, **"Focusing of high numerical aperture cylindrical-vector beams"**. Opt. Exp , No.7, 2000.
- [5] Q. Zhan, J.R. Leger, **"Focus shaping using cylindrical vector beams"**, Opt. Exp, No.10 2002.
- [6] S. Quabis, R. Dorn, M. Eberler, O. Glöckl, G. Leucs, **"Focusing light into a tighter spot"**, Opt. Com, No.1, 2000.
- [7] H. Wang, L. Shi, B. Lukyanchuk, C. Sheppard, C.T. Chong, **"Creation of a needle ... polarized light in vacuum using binary optics"**, Nature Photonics, No.2, 2008.
- [8] J.B. Steward, B.E.A. Saleh, M.C. Teich, J.P. Fourkas, **"Optical Superresolution"**, Opt. Com, No. 241, 2004.
- [9] A.E. Siegman, **"New developments in laser resonators"**, Proc. SPIE,1990.
- [10] A.Jeffrey, Hui-Hui Dai, **"Handbook of Mathematical Formulas and Integrals"**, 4<sup>th</sup> Edition,2008.
- [11] Abramovitz, and I. A. Stegun, **"Handbook of Mathematical Functions"** (Dover, New York, 1972).
- [12] Andrews, **"Special functions"**,
- [13] R.Menzel , **"Photonics"**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 20018 Chap. 6.
- [14] A.E. Siegman, **"Lasers"**, Mill Valley, CA: Univ. Sci., 1986.
- [15] Joseph W. Goodman, **"Introduction to Fourier optics"**, 2<sup>nd</sup> edition, 1996,
- [16] B.E.A Saleh, **"Fundamentals of photonics"**, Wiley, New York, 1991.
- [17] A.E. Siegman, **"Binary phase plates can not improve laser beam quality"**, Opt. Lett, No.18,1993.
- [18] R. Oron, N. Davidson, A.A. Friesem, **"Continuous Phase Elements Can Improve Laser Beam Quality"**, Opt. Lett. No.25, 2000.

- [19] D.M. de Juana, V.F. Canales, P.J. Valle, M.P. Cagigal, **"Focusing properties of annular binary phase filters"**, Opt. Com. No.229, 2004.
- [20] X. Gao, F. Gan, W. Xu, **"Superresolution by three-zone pure phase plate with 0,p,0 phase variation"**, Opt. Laser Tech. No.39, 2007.
- [21] A.Hasnaoui, A.Bencheikh, K.Ait-Ameur, **"Tailored TEM p0 beams for large size 3-D laser prototyping"**, Opt.Las.Eng N0 49, 2011.
- [22] A. Hasnaoui , A. Bencheikh , M. Fromager , E. Cagniot , K. Aït-Ameur, **"Creation of a sharper focus by using a rectified TEMp0 beam"**, Opt. Com, No 284, 2011.
- [23] T.G. Jabbour, M. Petrovich, S.M. Kuebler, **"Design of axially super-resolving phase filters using the method of generalized projections"**, Opt. Com. No.281, 2008.
- [24] G. Machavariani, **"Effect of phase imperfections on high-order mode selection with intracavity phase elements"**, Appl. Opt. No.43, 2004.
- [25] D. Chen, Z. Wang, J.R. Leger, **"Measurements of the Modal Properties of a Diffractive Optic Graded Phase Resonator"**, Opt. Lett, No.20, 1995.
- [26] M. Ciofini, A. Labate, R. Meucci, P.Y. Wang, **"Experimental evidence of selection and stabilization of spatial patterns in a CO2 laser by means of spatial perturbations"**, Opt. Com, No.154, 1998.
- [27] VF.Canales, JE.Oti, MP.Cagigal, **"Three-dimensional control of the focal light intensity distribution by an alytically designed phase masks"**, Opt Com, No.11, 2005.
- [28] SA.Kennedy, MJ.Szabo, H.Teslow, JZ.Porterfield, ERI.Abraham, **"Creation of Laguerre-Gaussian laser modes using diffractive optics"**, Phys Rev A, No.66, 2002.
- [29] A.A. Ishaaya, N. Davidson, G. Machavariani, E. Hasman, A.A. Friesem. **"Efficient selection of high-order Laguerre-Gaussian modes in a Q-switched Nd:YAG Laser"**, IEEE J Quantum Electron, No.39, 2003.
- [30] A. Hasnaoui, K. Aït-Ameur, **"Properties of a laser cavity containing an absorbing ring"**, Appl. Opt. No.49, 2010.
- [31] SN.Khonina, VV.Kotlyar, RV.Skidanov, VA.Soifer, P.Laakkonen, J.Turunen. **"Gauss-Laguerre modes with different indices in prescribed diffraction orders of adiffractive phase element"**. Opt Com, No.8, 2000.

### **IV.1 Introduction**

La cohérence transversale ou spatiale, et de grande importance dans les applications laser; comme dans la structuration des surfaces et la lithographie. Tout dépend de l'application, si elle nécessite une cohérence importante ou non. En tout cas la cohérence doit être définie correctement, et des montages doivent être développés pour quantifier ce paramètre important. Le premier montage classique utilisé pour la caractérisation de la cohérence spatiale était les trous d'Young, mais ce système présente un inconvénient, il donne seulement la distribution de la cohérence spatiale juste pour une seule distance entre les trous du système de Young (on ne peut pas déplacer un trou par rapport à l'autre). Pour cela des montages ont été proposés pour quantifier la distribution de la cohérence spatiale pour une grande plage de valeurs de distance entre les deux trous, un montage basé sur un système de deux fibres a été proposé, avec l'une des fibres est fixe et l'autre déplaçable, cela permet d'avoir un système de trou avec une distance inter-trou variable [1,2].

Dans ce chapitre on propose un autre montage qui permet d'avoir une distribution de la cohérence spatiale en fonction de la distance entre les deux trous, ce qui permet d'avoir toute la fonction d'autocorrélation (La distribution de cohérence spatiale et la même que la fonction d'autocorrélation). Le montage est un interféromètre à dédoublement d'image à chemin commun, il s'appelle Interféromètre de Sagnac, ce montage va nous permettre de mesurer la distribution de la cohérence spatiale d'un laser He-Ne, qui est théoriquement gaussienne. On va voir aussi par la suite que cet interféromètre permet aussi d'évaluer la phase de l'interférogramme résultant de la superposition des deux faisceaux, cette phase est proportionnelle à la phase du faisceau initial.

Le présent travail expérimental est constitué essentiellement de deux parties principales :

La première sera consacrée à la vérification de la collimation d'un faisceau laser He-Ne par l'interféromètre de Murty, qui est très simple à implémenter, il permet une description qualitative de phase du faisceau. La deuxième partie présente l'interféromètre de Sagnac destiné à la détermination de la distribution de la fonction de cohérence spatiale et la distribution de la phase du même faisceau. Chaque partie sera suivie d'une conclusion, et on achèvera le chapitre par une conclusion générale.

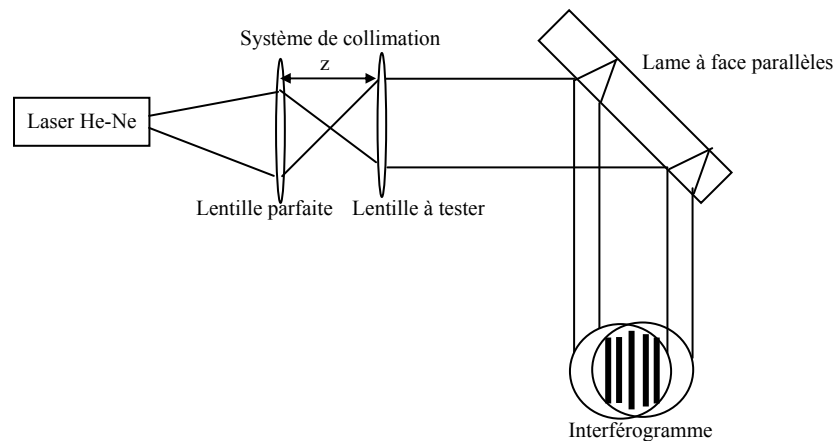
### **IV.2 Collimation par l'interféromètre de Murty**

Avant la mesure de la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction de cohérence spatiale, il faut s'assurer que le faisceau qui traverse l'interféromètre de Sagnac

est bien collimaté. Pour le faire, on utilise l'interféromètre de Murty, basé sur l'utilisation d'une lame à face parallèle [3-6].

#### IV.2.1 Montage utilisé

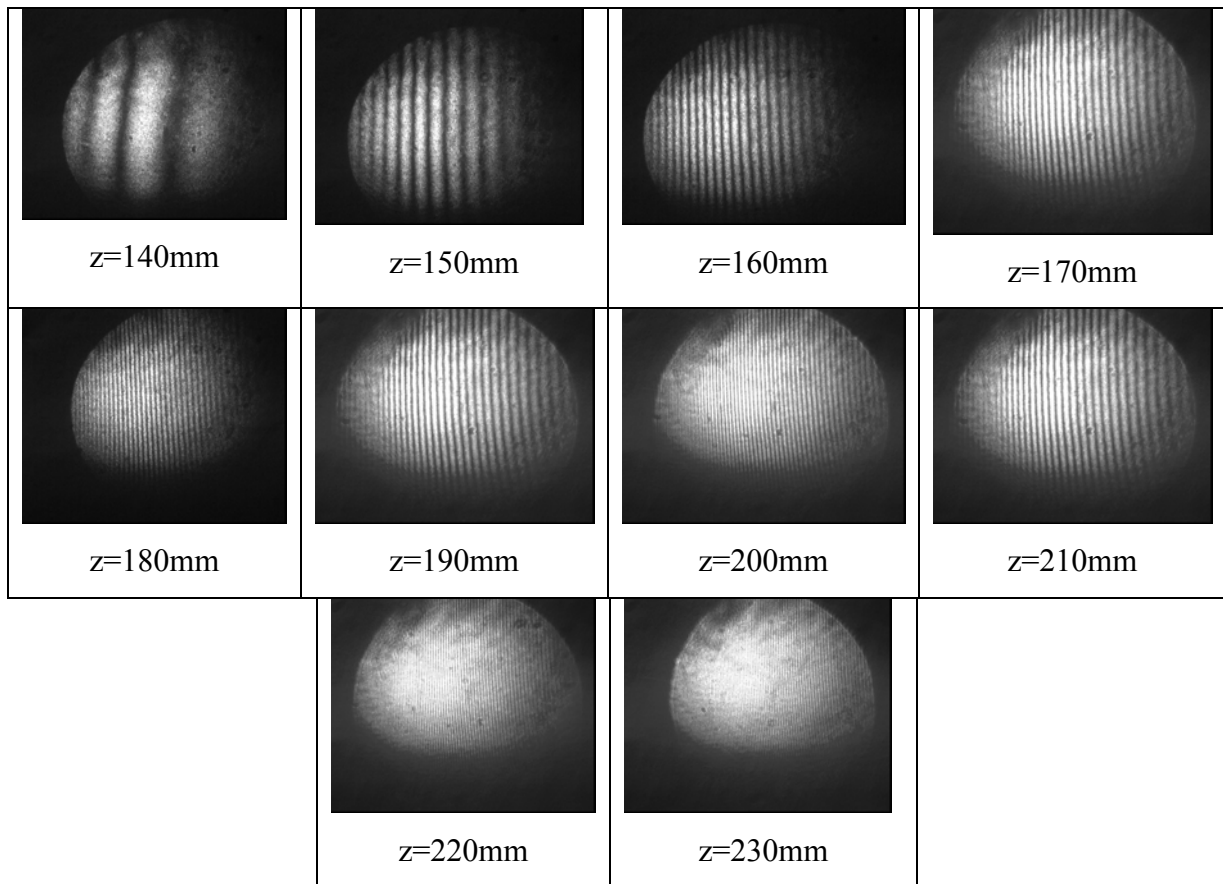
La figure V.1 montre le montage expérimental d'un interféromètre de Murty, il est composé d'un laser He-Ne de longueur d'onde 632.8 nm. La lumière qui sort de ce dernier est focalisée par un système optique parfait, constitué d'un objectif de microscope 16X de focale  $f=20\text{mm}$ . Ensuite un objectif photographique de focale  $f=200\text{mm}$  assure la collimation du faisceau laser. La lumière collimatée tombe sur une lame à faces parallèles, cette dernière produit des franges d'interférences.



**Figure IV.1.** Montage de l'interféromètre de Murty utilisé pour le contrôle des fronts d'ondes.

#### IV.2.2 Interférogrammes obtenus

Dans cette expérience nous avons prélevé les images qui correspondent à différentes distances  $z$  entre l'objectif de Microscope et l'objectif photographique, avant et après la position qui correspond à la collimation, dans le but de vérifier expérimentalement la collimation du faisceau à travers les interférogrammes obtenus. On rappelle que la distance de collimation correspond à une figure d'interférence uniforme, car les franges sont localisées à l'infini. La figure IV.2 présente les images d'interférogrammes obtenues.



**Figure IV.2.** Images d'interférogrammes obtenues pour différent position  $z$ .

#### IV.2.3 Interprétation des résultats

A travers les interférogrammes obtenus, nous avons observé une image uniforme qui correspond à la distance  $z=220$  mm, cette distance correspond à son tour exactement à la somme des distances focales de l'objectif de microscope et de l'objectif photographique ( $f=f_1 + f_2$ ).

Avant et après la distance  $z=220$  mm de collimation on observe des figures de franges d'interférences.

L'apparition des franges d'interférence est due au déphasage (la différence de marche) entre les deux fronts d'ondes des faisceaux réfléchis (convergeants ou divergeants) par la première et la deuxième surface de la lame. Ce déphasage dépend de l'épaisseur de la lame à faces parallèles utilisée dans l'interféromètre de Murty (face1 et face2).

#### IV.2.4 Conclusion I

Dans cette première partie on a utilisé l'interféromètre de Murty basé sur l'utilisation d'une lame à faces parallèles pour vérifier la collimation d'un faisceau laser He-Ne de longueur d'onde  $\lambda=632.8$   $\mu\text{m}$ .

D'après les images d'interférences obtenues on peut donc connaître et vérifier la collimation de n'importe quel faisceau laser, les résultats obtenus sont bien exacte vu la prédiction théorique.

### **IV.3. Exploitation de l'interféromètre de Sagnac**

Un montage interférométrique basé sur l'interféromètre de Sagnac a été configuré en rectangle pour mesurer expérimentalement la distribution de la cohérence spatiale et la phase des faisceaux lasers. Le montage est basé sur le principe des interféromètres à chemin commun [1]. Les deux faisceaux qui s'interfèrent parcourent le même chemin, d'où l'insensibilité du montage aux vibrations. L'utilisation du système est basée sur la phase de Pancharatnam, qui assure le changement de la direction de polarisation des faisceaux lasers à l'intérieur du montage [2], le système est composé d'une lame demi-onde, d'une lame quart d'onde et de polariseurs.

#### **IV.3.1. Détermination de la cohérence spatiale d'un laser**

Dans cette deuxième partie on détermine expérimentalement la distribution de la cohérence spatiale d'un laser en utilisant une méthode interférométrique basée sur l'interférométrie à dédoublement d'image [7].

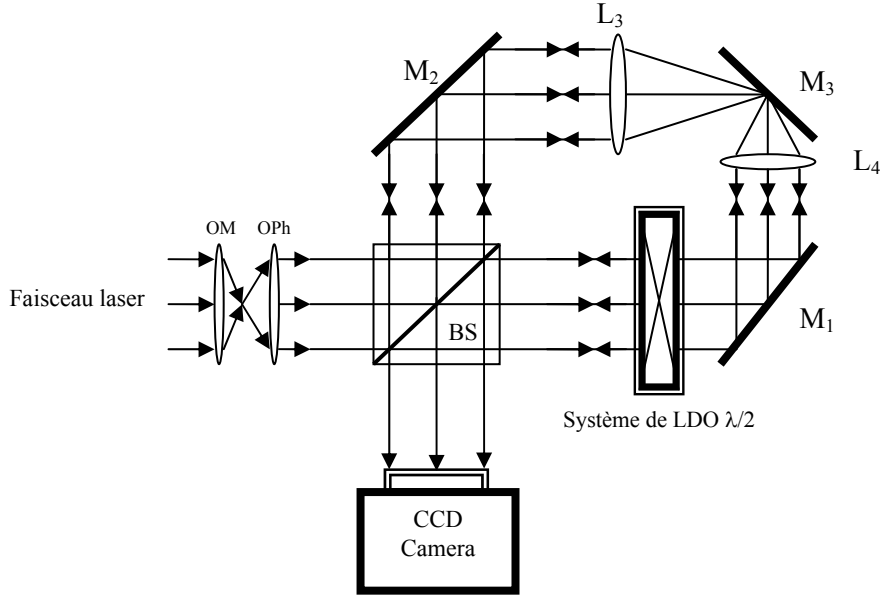
Les images obtenues par l'interféromètre sont exploitées par une méthode basée sur le changement de l'état de polarisation des faisceaux qui permet de faire un décalage de phase géométrique. Elle permet la mesure de la partie réelle, la partie imaginaire et la distribution de la fonction de cohérence spatiale [1-2].

#### **IV.3.2. Montage expérimental et mis au point**

Les éléments du montage utilisés dans cette partie sont:

- Un laser (He-Ne)  $\lambda=632.8\text{nm}$
- Objectif microscopique 16X, Objectif photographique  $f=200\text{mm}$ .
- Cube séparateur.
- Deux polariseurs. Lames d'onde (demi-onde (LDO), quart d'onde (LQD)).
- Miroirs  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ .
- Photo détecteur. Multimètre, et camera CCD.





**Figure IV.3** Montage utilisé pour la mesure de la distribution de la cohérence spatiale.

Le faisceau lumineux passe à travers un system afocal (objectif de microscope et objectif photographique) pour le rendre parallèle, ensuite le faisceau est devisé par le cube séparateur en deux parties d'égales intensités.

Le premier faisceau prend le trajet (les deux lames d'onde,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  et le cube séparateur) dans le sens des aiguilles d'une montre, le deuxième faisceau se propage dans le sens inverse du premier faisceau.

L'interféromètre assure la superposition des deux faisceaux qui se propage l'un contre l'autre.

La distribution de l'intensité à la sortie de l'interféromètre captée par le photo- détecteur est donnée par l'équation [8-10] :

$$I^{(\delta)}(x, s) = \left\langle \left| E(x + s/2) + E(x - s/2) \right|^2 \right\rangle \quad (\text{IV.1})$$

Elle est équivalente à:

$$I^{(\delta)}(x, s) = \left\langle \left| E(x + s/2) \right|^2 \right\rangle + \left\langle \left| E(x - s/2) \right|^2 \right\rangle + \text{Re} \left[ 2 \left\langle E(x + s/2) E^*(x - s/2) \right\rangle \text{Exp}(i\delta) \right] \quad (\text{IV.2})$$

On a :

$$I(x + s/2) = \left\langle \left| E(x + s/2) \right|^2 \right\rangle \text{ et } I(x - s/2) = \left\langle \left| E(x - s/2) \right|^2 \right\rangle$$

Et la fonction d'autocorrélation s'écrit:

$$\Gamma\left(x + \frac{s}{2}, x - \frac{s}{2}\right)(x, s) = \langle E(x + s/2)E^*(x - s/2) \rangle$$

Tel que  $\delta$  est la différence de phase entre les deux faisceaux décalés l'un par rapport à l'autre. Pour pouvoir mesurer la distribution de la fonction de cohérence spatiale  $\Gamma(x, s)$  on mesure l'intensité donnée par l'équation :

$$I^{(\delta)}(x, s) = I\left(x + \frac{s}{2}\right) + I\left(x - \frac{s}{2}\right) + 2 \operatorname{Re} \left[ \Gamma\left(x + \frac{s}{2}, x - \frac{s}{2}\right) \operatorname{Exp}(i\delta) \right] \quad (\text{IV.3})$$

On remarque que les informations sur la cohérence et la phase sont inséparables, et on ne peut pas les reconstruire indépendamment.

Pour mesurer le module et la phase de la fonction de cohérence spatiale, on utilise un système de décalage de phase basé sur l'état de polarisation des lames cristallines. On utilise les lames  $(\lambda/2, \lambda/4)$  pour varier la différence de phase  $\delta$  entre les deux faisceaux, ce qui permet de mesurer séparément les parties réelle et imaginaires de la fonction de cohérence spatiale [1,2,8,9].

Les détails de la méthode sont expliqués sous formes d'équations :

On prend les différentes intensités qui correspondent aux différents déphasages  $\delta$  de  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ , on a :

$$I^{(0)}(x, s) = I\left(x + \frac{s}{2}\right) + I\left(x - \frac{s}{2}\right) + 2 \operatorname{Re} \left[ \Gamma\left(x + \frac{s}{2}, x - \frac{s}{2}\right) \right] \quad (\text{IV.4})$$

$$I^{(90)}(x, s) = I\left(x + \frac{s}{2}\right) + I\left(x - \frac{s}{2}\right) + 2 \operatorname{Im} \left[ \Gamma\left(x + \frac{s}{2}, x - \frac{s}{2}\right) \right] \quad (\text{IV.5})$$

$$I^{(180)}(x, s) = I\left(x + \frac{s}{2}\right) + I\left(x - \frac{s}{2}\right) - 2 \operatorname{Re} \left[ \Gamma\left(x + \frac{s}{2}, x - \frac{s}{2}\right) \right] \quad (\text{IV.6})$$

$$I^{(270)}(x, s) = I\left(x + \frac{s}{2}\right) + I\left(x - \frac{s}{2}\right) - 2 \operatorname{Im} \left[ \Gamma\left(x + \frac{s}{2}, x - \frac{s}{2}\right) \right] \quad (\text{IV.7})$$

D'où, la partie réelle de la fonction de cohérence mutuelle de l'intensité mutuelle est obtenue par la soustraction des équations (IV.4.a et IV.6) tel que :

$$\operatorname{Re}[\Gamma(x + s/2, x - s/2)] = \frac{1}{4} (I^{(0^\circ)}(x) - I^{(180^\circ)}(x)) \quad (\text{IV.8})$$

Et la partie imaginaire de la fonction de cohérence mutuelle est obtenue par la soustraction des équations (IV.5.a et IV.7) tel que :

$$\operatorname{Im}[\Gamma(x + s/2, x - s/2)] = \frac{1}{4} (I^{(90^\circ)}(x) - I^{(270^\circ)}(x)) \quad (\text{IV.9})$$

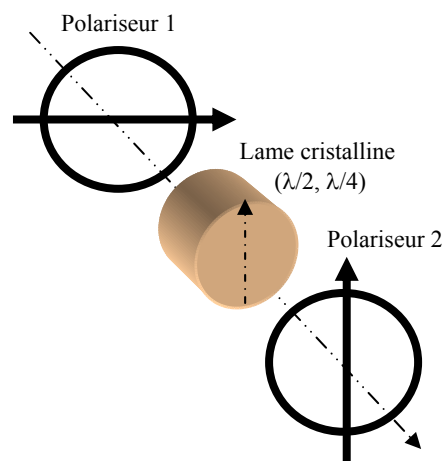
Pour obtenir la fonction de la distribution de la cohérence spatiale complète, on varie la distance latérale (shear)  $s$  entre les deux copies du faisceau, avec :  $0 \leq s \leq D$

$D$  : est le diamètre du faisceau dans le plan d'acquisition.

Après l'ajustage du laser on a placé l'interféromètre de Sagnac configuré en rectangle composé de: un cube séparateur, trois miroirs et un système de polarisation ( $\lambda/2, \lambda/4$ ) ; pour déterminer la fonction de cohérence spatiale. avant d'utiliser les lames polarisantes on détermine en premier lieu les axes propres des lames ( $\lambda/2, \lambda/4$ ) utilisées.

### IV.3.3 Détermination des axes propres des lames

On place un polariseur à la sortie du cube et on le tourne jusqu'à avoir l'extinction de la lumière, puis on le retourne une deuxième fois par un angle de  $90^\circ$  pour la détermination de la direction de polarisation initiale sortante du laser, ensuite on place le deuxième polariseur et on le tourne jusqu'à l'extinction de la lumière, alors les deux polariseurs sont croisés.



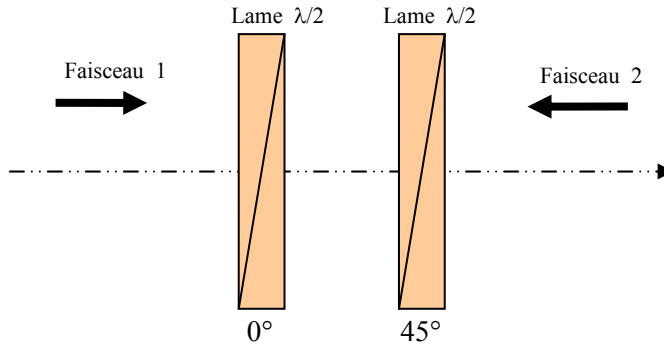
**Figure IV.4** : détermination des axes propres des lames ( $\lambda/2, \lambda/4$ )

On place l'une des lames entre les deux polariseurs, on constate ainsi qu'il y a certaine quantité de lumière qui passe à travers le deuxième polariseur. On fait tourner la lame jusqu'à l'extinction, d'où les axes de la lame seront confondus avec les axes des polariseurs. Et de la même façon on procède avec la deuxième lame.

### IV.3.4 Mesure de la distribution de la fonction de cohérence spatiale

#### A – mesure de la partie réelle

Pour déterminer la partie réelle on doit avoir deux lames demi-ondes qu'on les place dans le montage comme l'indique la figure IV.5.



**Figure IV.5 :** montage de Sagnac pour mesurer la partie réelle

Pour avoir une phase de  $0^\circ$  on oriente les axes neutres des deux lames  $\lambda/2$  avec la même direction de polarisation, et pour avoir une phase de  $90^\circ$  on tourne la deuxième lame par  $45^\circ$ . Pour balayer toute la fonction de la cohérence mutuelle on varie la distance entre les deux faisceaux superposés exprimée par le shear  $s$  (Figure IV.5).

Le faisceau qui rencontre la 1<sup>ère</sup> lame  $\lambda/2$  orientée par  $45^\circ$  subit une phase de  $90^\circ$  et puis trouve la 2<sup>ème</sup> lame orientée par  $0^\circ$ . L'autre faisceau rencontre la lame orientée par  $0^\circ$ , et puis trouve la 2<sup>ème</sup> lame orientée par  $-45^\circ$  c'est-à-dire une phase de  $(-90^\circ)$  dans le sens contraire, alors que la phase résultante sera  $180^\circ$ .

$$\text{Quand } \theta=45^\circ \implies \delta_{\text{res}}=2\theta - (-2\theta)=4\theta=180^\circ$$

$\delta_{\text{res}}$  : la phase résultante.

Après l'enregistrement des intensités  $I_{s,0^\circ}(x)$  et  $I_{s,180^\circ}(x)$ , on calcule les valeurs de la partie réelle de la fonction d'autocorrélation par l'équation suivante:

$$\text{Re}[\Gamma_{12}(x+s/2, x-s/2)] = \frac{1}{4} (I^{(0^\circ)}(x) - I^{(180^\circ)}(x)) \quad (\text{IV.10})$$

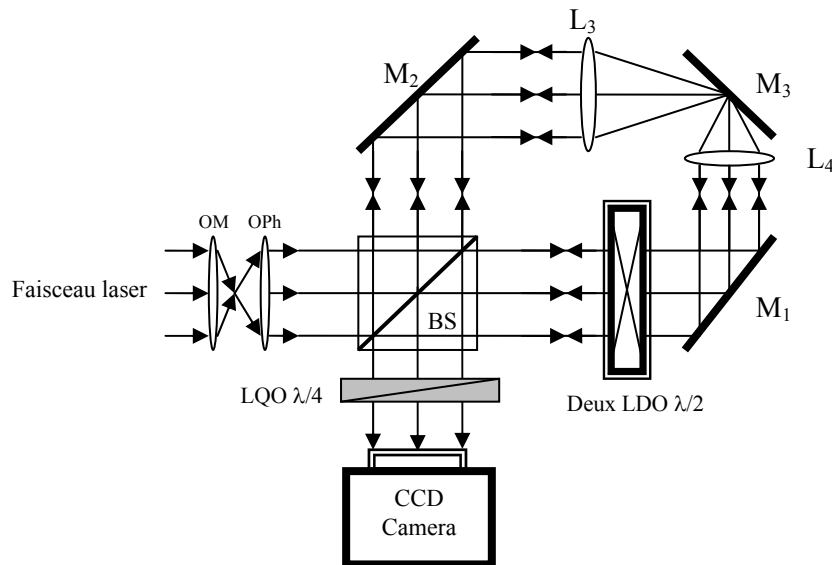
Les mesures effectuées sur les intensités  $I_{s,0^\circ}(x)$  et  $I_{s,180^\circ}(x)$  et les valeurs obtenues de la partie réelle sont rassemblées dans le tableau IV.1 suivant:

s (mm)	$I_{s,0^\circ}(x) [\mu A]$	$I_{s,180^\circ}(x) [\mu A]$	$\text{Re} \Gamma_{12} $
-8	280	325	11.25
-7	311	361	12.5
-6	312	363	12.75
-5	315	369	13.5
-4	319	375	14
-3	321	380	14.75
-2	341	401	15
-1	398	457	14.75
0	409	470	15.25
1	398	457	14.75
2	341	401	15
3	321	380	14.75
4	319	375	14
5	315	369	13.5
6	312	363	12.75
7	311	361	12.5
8	280	325	11.25

**Tableau IV.1.** Valeur de la partie réelle  $\text{Re}|\Gamma_{12}|$

### B. Mesure de la partie imaginaire

Pour obtenir la partie imaginaire on doit avoir les deux lames demi-onde précédentes orientées de la même façon pour la partie réelle, et on ajoute une lame quart d'onde qu'on les place à la sortie du montage pour donner une phase supplémentaire de  $\pi/2$ . Alors que tout ce qui est réel devient imaginaire comme l'indique la figure IV.6.



**Figure IV.6 :** polarisation à travers les deux lames  $\lambda/4$

On enregistre  $I_{s,0^\circ}(x)$  pour différents (s). Les intensités  $I_{s,90^\circ}(x)$ ,  $I_{s,270^\circ}(x)$  sont déterminées dans le tableau IV.3. A partir de ce dernier, on peut tirer la partie imaginaire :

$$\text{Im}[\Gamma_{12}(x + s/2, x - s/2)] = \frac{1}{4} (I^{(90^\circ)}(x) - I^{(270^\circ)}(x)) \quad (\text{IV.11})$$

S(mm)	$I_{s,90^\circ}(x)$	$I_{s,270^\circ}(x)$	$\text{Im} \Gamma $
-8	296	293	0.75
-7	307	302	1.25
-6	311	306	1.25
-5	321	309	3
-4	335	311	6
-3	350	321	7.25
-2	375	350	6.25
-1	419	381	9.5
0	440	400	10
1	419	381	9.5
2	375	350	6.25
3	350	321	7.25
4	335	311	6
5	321	309	3
6	311	306	1.25
7	307	302	1.25
8	293	296	0.75

**Tableau IV.4 :** Valeur de la partie imaginaire  $\text{Im}|\Gamma_{12}|$

#### IV.3.5 Détermination du module de la fonction de cohérence spatiale

A partir des résultats obtenus pour les deux quantités  $\text{Re}|\Gamma_{12}|$  et  $\text{Im}|\Gamma_{12}|$ , on peut déduire le module de la fonction de cohérence spatiale  $|\Gamma_{12}|$ .

Le module est donné par :

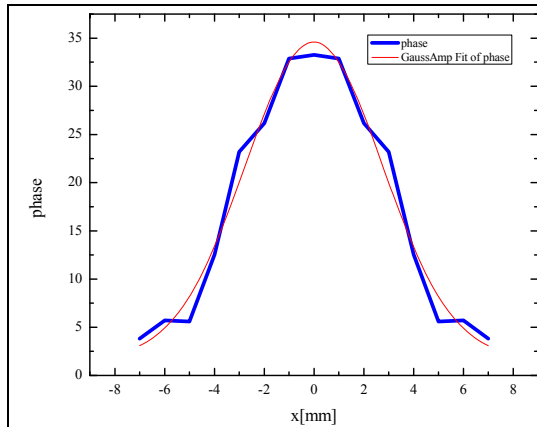
$$|\Gamma_{12}| = \sqrt{\text{Re}|\Gamma_{12}|^2 + \text{Im}|\Gamma_{12}|^2} \quad (\text{IV.12})$$

Les valeurs correspondantes sont données dans le tableau IV.5 en fonction de  $S$  (mm).

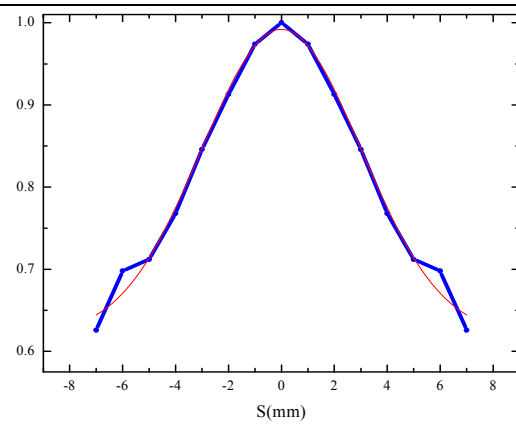
Par une normalisation de  $|\Gamma_{12}|$ , on obtient la distribution du degré de la cohérence spatiale  $|\gamma_{12}|$ .

S(mm)	$\text{Re} \Gamma_{12} $	$\text{Im} \Gamma_{12} $	$ \Gamma_{12} $	$ \gamma_{12} $	Tan $\Phi$	$\Phi$
-7	11.25	0.75	11.27	0.626	0.06667	3.8142
-6	12.5	1.25	12.56	0.698	0.1	5.7105
-5	12.75	1.25	12.81	0.712	0.09804	5.5993
-4	13.5	3	13.83	0.768	0.22222	12.5286
-3	14	6	15.23	0.846	0.42857	23.1985
-2	14.75	7.25	16.43	0.913	0.49153	26.1755
-1	14.75	9.5	17.54	0.974	0.64407	32.8743
0	15.25	10	18	1	0.65574	33.2544
1	14.75	6.5	17.54	0.974	0.64407	32.8743
2	14.75	7.25	16.43	0.913	0.49153	26.1755
3	14	6	15.23	0.846	0.42857	
4	13.5	3	13.83	0.768	0.22222	12.5286
5	12.75	1.25	12.81	0.712	0.09804	5.5993
6	12.5	1.25	12.56	0.698	0.1	5.7105
7	11.25	0.75	11.27	0.626	0.06667	3.814

**Tableau IV.5 :** les valeurs de la fonction de cohérence spatiale  $|\Gamma_{12}|$



**Figure IV.7 :** Distribution de phase de la fonction de cohérence spatiale.



**Figure IV.8:** Distribution de la fonction de cohérence spatiale  $|\gamma_{12}|$

#### **IV.4 Conclusion II**

Dans cette partie expérimentale on a mesuré la partie réelle, la partie imaginaire et le module de la fonction et du degré de la cohérence spatiale d'un faisceau laser He-Ne de longueur d'onde 632.8 nm.

Les mesures de la distribution de la cohérence spatiale et puis la distribution du degré de cohérence spatiale faites sur le faisceau laser ont donné une distribution gaussienne prédite par la théorie.

L'interféromètre de Sagnac est un outil très efficace pour la mesure de plusieurs grandeurs physiques et optiques, il est simple à implémenter, à ajuster et utiliser, il trouve aussi des applications diverses dans l'optique non linéaire et l'imagerie optique [11-13].



**Bibliographie**

- [1] B.Eppich, G.Mann, H.Weber, **"Spatial coherence: definitions and measurements"**, Proceeding 35, International school of quantum Electronics, Erice 2002.
- [2] B.Eppich, G.Mann, H.Weber, **"Spatial coherence: comparaison of interferometric and non interferometric measurements"**. Laser resonators and beam control VI, Proceeding of Spie, 23-30 January 2003, San Jose, California, USA.
- [3] D.Malacara, **"Optical shop testing"**, 2<sup>nd</sup> ed. New York: Wiley Inc; 1992.
- [4] Rongwei Xu, Zhu Luan, Hongzhan Liu and Liren Liu, **"Measurement of the diffraction-limit wavefront with double shearing interferometers"**, J.Opt.A: Pure Appl. Opt. No.8, 2006.
- [5] Shukla RP, **"Some applications of the Murty interferometer: a review"**, Opt.La.Eng, No.26, 1997.
- [6] RP.Shukla , **"Design and fabrication of a variable frequency grating and its application as a lateral-shear interferometer having a variable shear"**, Opt.La.Tec, No.39, 2007.
- [7] Yat Hei Lo, A.R.D. Somervell, T.H.Barnes, **"Wavefront measurement with a phase shifting lateral-shearing Sagnac interferometer operating in broadband light"**, Opt.La.Eng, No.43, 2005.
- [8] Chung-Chieh Cheng, M.G. Raymer. **"A variable lateral shearing Sagnac interferometer with high numerical aperture for measuring the complex spatial coherence function of light"**, JMO, Vol 47, No 7, 2000.
- [9] C. Iaconis, I. A. Walmsley, **"Direct measurement of the two-point field correlation function"**, Opt.Lett, No.21, 1996
- [10] José A. Ferrari and Eugenio Garbusi, **"Phase-shifting (Sagnac) interferometer with external phase control"** App.Opt, Vol. 44, No. 21, 2005.
- [11] J. Hwang, M. M. Fejer, and W. E.Moerner **"Scanning interferometric microscopy for the detection of ultra small phase shifts in condensed matter"** Phy.Rev A, No.73, 2006.
- [12] M.C. Gabriel and N. A. Whitaker, C. W Dirk, M. G. Kuzyk, M. Thakur, **"Measurement of ultrafast optical nonlinearities using a modified Sagnac interferometer"**, Opt.Lett, Vol. 16, No. 17, 1991.
- [13] Michael W. Kudenov, Matthew E. L. Jungwirth, Eustace L. Dereniak, and Grant R. Gerhart, **"White-light Sagnac interferometer for snapshot multispectral imaging"** ,App.Opt, Vol. 49, No. 21, 2010.

# Conclusion générale

Au cours de cette thèse on a abordé plusieurs problèmes concernant la phase dans les faisceaux lasers et les interférogrammes, nos travaux faisaient l'objectif de plusieurs contributions, telles que:

Dans le premier chapitre, nous avons montré la théorie des faisceaux lasers et des interférogrammes; on a commencé la première section de ce chapitre par les bases théoriques des faisceaux lasers gaussiens d'ordre fondamental et d'ordre supérieur. Ensuite on a abordé les caractéristiques spatiales des faisceaux, comme la largeur, la divergence et le fameux facteur de qualité  $M^2$ , on a passé ensuite aux différents modèles qui existent pour les calculer et en expliquant la notion des moments d'intensité et leurs relations avec: la largeur du faisceau, sa divergence, son rayon de courbure et son facteur de qualité. Dans la seconde section de ce premier chapitre on a présenté des notions sur l'interférométrie et les interférogrammes, au cours de ce chapitre, on a abordé la polarisation de la lumière et la notion de la phase géométrique, on a vu aussi comment l'utiliser pour réaliser des montages interférométriques de décalage de phase.

Le deuxième chapitre a fait l'objet d'une modélisation du coefficient de l'aberration sphérique noté  $C_4$ , dans cette contribution, on a fait une analyse basée sur les relations de conjugaison qui relient l'objet et l'image pour déduire des formulations proportionnelles à la phase de l'aberration sphérique pour les faisceaux lasers. Après les calculs et les simulations faites sur un ensemble de lentilles biconvexes et plan-convexes, les résultats étaient très logiques. On a constaté que le coefficient de l'aberration sphérique  $C_4$  pour le cas d'un faisceau laser gaussien est différent de celui donné classiquement dans le domaine de l'optique géométrique, ce résultat va contribuer dans à un calcul exacte du facteur de qualité  $M^2$ .

Le troisième chapitre a été consacré à une mise en forme des faisceaux lasers d'ordres supérieurs dits Laguerre-Gauss en une forme gaussienne quasi pure en utilisant des réseaux optiques annulaires de phase binaire qui présentent un saut de phase entre un anneau et son adjacent égal à  $\pi$ . Cette dernière transformation avait essentiellement pour objectif de réduire la profondeur de focalisation dite aussi zone de Rayleigh  $Z_R$  des faisceaux lasers, mais les résultats obtenus étaient plus prometteurs, on a trouvé que cette transformation a aussi amélioré la résolution

transversale. On a constaté aussi que les éléments optiques diffractifs sont très efficaces à transformer les faisceaux lasers en toute forme.

Le quatrième chapitre englobe nos dernières contributions dans la présente thèse. Le but était d'analyser et de quantifier les résultats contenus « cachés » dans un interférogramme réalisé par l'interféromètre de Sagnac. La technique utilisée était le décalage de phase géométrique réalisé par des lames cristallines et des polarisateurs, cela nous a permis la mesure de la distribution de la fonction de cohérence spatiale d'un laser He-Ne, la distribution mesurée est une gaussienne comme prédit par la théorie.

On ajoute aussi, que le quatrième chapitre avait pour objectif de montrer la simplicité et l'efficacité de l'interféromètre de Sagnac et aussi d'introduire cette notion de décalage de phase basée sur des éléments de polarisation, comme les polarisateurs et les lames cristallines.

Enfin, durant ce travail on a contribué à apporter des innovations concernant la propagation et la transformation des faisceaux lasers d'ordre fondamental et d'ordre supérieur par des éléments optiques de phase, on a vu leurs impacts sur leurs caractéristiques, comme le profil de l'intensité, la largeur du faisceau, la profondeur de focalisation et spécialement la résolution tridimensionnelle. Cette dernière nous a ouvert un axe de recherche très prometteur, c'est la superrésolution des faisceaux lasers, qui fait l'objet d'une technologie de pointe concernant la microscopie et l'usinage laser.

## Annexe 1: Programme écrit en Fortran pour le calcul des intégrales de diffraction

C RADIAL-DIR-lentille-p-1.for

c Transformation d'un TEMp0 en TEM00 par un EOD (trou de phase 0-P)

c calcul de la distribution radiale d'intensité derrière une lentille de longueur focale  $f_t=50\text{mm}$ .

implicit double precision (a-h,o-z)

INTEGER IRULE

PARAMETER(NOBS=800(

c PARAMETER(MAXSUB=4500)

DIMENSION TIDIF(2\*NOBS+2)

DIMENSION ALIST(100000),BLIST(100000),RLIST(100000)

DIMENSION ELIST(100000),IORD(100000)

COMMON/PAM1/WL,Z,alambd,ft,DRL,LL

COMMON/PHASE/GOUY

COMMON/PAM3/R,RSZ,W0

COMMON/LIST/MAXSUB

EXTERNAL FI,LAGO2

EXTERNAL FER

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

MAXSUB=100000

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*ECRITURE RESULTATS\*\*\*\*\*

open(unit=11,file='C:\RESULTATSA\Ipat.dat',status='unknown')

open(unit=12,file='C:\RESULTATSA\Fint-2.dat',status='unknown')

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

pi=4.d0\*datan(1.d0)

alambd=1.06d-3

ZL=0.0d0

c Calcul de la largeur WL et de DRL l'inverse du rayon de

c courbure en ZL:

WL=W0\*DSQRT(1.0d0+(ZL/ZR)\*\*2)

GOUY=datan(ZL/ZR)

IF (ZL.EQ.0.0d0)then

DRL=0.0d0

ELSE

RL=ZL\*(1.0d0+(ZR/ZL)\*\*2)

DRL=1.0d0/RL

ENDIF

print\*,'WL=',WL

\*\*\*\*\*ORDRE DU FAISCEAU D'ENTREE\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

LL=1

\*\*\*\*\*

c PARAMETRE de décalage entre les zéros d'intensité et les

c transitions 0-PI

```

        print*, 'entrer RSZ'
        read(*,*)RSZ
c      RSZ=1
c Z: distance entre la lentille et le plan d'observation
        print*, 'entrer la valeur de Z en mm'=
        read(*,*)Z
*****
        Rmax=2.0d0*WL
        R=0.0d0
        dR=Rmax/DFLOAT(NOBS(
        FAXE=1.0D0
        WZ=W0*DSQRT(1.0d0+((Z+ZL)/ZR)**2)
        FGAUS=(W0/WZ)**2

        DO iz=0,NOBS+1
        R=dR*dfloat(iz)
c intensite de l onde incidente : FINC
        XINTENSITE=FI(R)
        TIDIF(iz)=XINTENSITE/FAXE
        ENDDO
        R=0.0d0
        dR=Rmax/DFLOAT(NOBS)

c recherche du maximum d intensité
        bm=0.0d0
        DO iz=0,NOBS+1
        bel=TIDIF(iz)-bm
        if(bel.gt.0.0d0) then
        bm=TIDIF(iz)
        endif
        enddo
*****
        do i=-(NOBS+1),-2
        write(11,*)dR*dfloat(i+1),TIDIF(abs(i))
        enddo

        do i=1,(NOBS+1)
        write(11,*)dR*dfloat(i-1),TIDIF(i)
        enddo
*****
*****trace de la fonction à intégrer
        DRAU=6.0d0*WL/2000.d0
        do jrau=1,2000
        XRAU=(jrau-1)*DRAU
        enddo
        close (12)
*****

        close(11)
stop

```

```

    print*, 'STOP'
    end
    *****
c Calcul du profil d'intensite diffracte
    FUNCTION FI(UR)
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (a-h,o-z)
    EXTERNAL FER,FEI,dq2ag,FERM,FEIM
    COMMON/PAM1/WL,Z,alambd,ft,DRL,LL
    COMMON/PAM3/R,RSZ,W0
    COMMON/LIST/MAXSUB
    DIMENSION ALIST(80000),BLIST(80000),RLIST(80000)
    DIMENSION ELIST(80000),IORD(80000)

    R=UR
c RAU est la variable radiale dans le plan de l'EOD
c integrale de diffraction en cos
    ERRABS=1.0D-6
    ERRREL=1.0D-7
    IRULE=6
    YA=0.455946d0*RSZ
    Xa=0.0
    Xb=YA*WL

    CALL dqdag(FERM,Xa,Xb,ERRABS,ERRREL,IRULE,SOMR1,ERREST(

    YB=1.071046d0*RSZ
    Xa=YA*WL
    Xb=YB*WL

    CALL dqdag(FER,Xa,Xb,ERRABS,ERRREL,IRULE,SOMR2,ERREST(

    YC=1.773407d0*RSZ
    Xa=YB*WL
    Xb=YC*WL
    CALL dqdag(FERM,Xa,Xb,ERRABS,ERRREL,IRULE,SOMR3,ERREST(

    Xa=YC*WL
    Xb=4.0d0*WL*DFLOAT(2*LL+1(

    CALL dqdag(FER,Xa,Xb,ERRABS,ERRREL,IRULE,SOMR4,ERREST(

    ER=SOMR1+SOMR2+SOMR3+SOMR4
    *****
C integrale de diffraction en sinus
    ERRABS=1.0D-6
    ERRREL=1.0D-7
    IRULE=6
    YA=0.455946d0*RSZ
    Xa=0.0
    Xb=YA*WL

```

```

CALL dqdag(FEIM,Xa,Xb,ERRABS,ERRREL,IRULE,SOMI1,ERREST(

YB=1.071046d0*RSZ
Xa=YA*WL
Xb=YB*WL

CALL dqdag(FEI,Xa,Xb,ERRABS,ERRREL,IRULE,SOMI2,ERREST(

YC=1.773407d0*RSZ
Xa=YB*WL
Xb=YC*WL
CALL dqdag(FEIM,Xa,Xb,ERRABS,ERRREL,IRULE,SOMI3,ERREST(

Xa=YC*WL
Xb=4.0d0*WL*DFLOAT(2*LL+1)
CALL dqdag(FEI,Xa,Xb,ERRABS,ERRREL,IRULE,SOMI4,ERREST(
  EI=SOMI1+SOMI2+SOMI3+SOMI4
  FI=(ER*ER+EI*EI)
  RETURN
end

c  calcul de la fonction a integrer en cos
  FUNCTION FER(XX)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (a-h,o-z)
c    REAL*8 DBSJ0,ER,LAGO2,FER
  DOUBLE PRECISION LAGO2
  EXTERNAL DBSJ0,LAGO2,RJB
  COMMON/PAM1/WL,Z,alambd,ft,DRL,LL
  COMMON/PAM3/R,RSZ,W0
  COMMON/PHASE/GOUY

  RAU=XX
c XL est la variable R normalise pour le poly de Laguerre
  XL=2.0d0*RAU*RAU/WL/WL
  pi=4.d0*datan(1.d0)
C R est la variable radiale dans le plan z
c RAU est la variable radiale dans le plan de l'EOD

c calcul avec lentille
  AGRC=pi*RAU*RAU*(DRL+(1.0d0/Z)-(1.0d0/ft))/alambd
c calcul sans lentille
c    AGRC=pi*RAU*RAU*(DRL+(1.0d0/Z))/alambd
c    CVAR=DCOS(GOUY*DFLOAT(2*LL-1))+AGRC(
  CVAR=DCOS(AGRC)
  !!!!IMPORTANT : l'introduction du déphasage de Gouy perture totalement
  !!le calcul. En particulier on ne retrouve pas qu'une gaussienne qui
cc traverse une lentille est une gaussienne transformée mais une
cc gaussienne tout de même. De plus la phase de Gouy ne dépendant pas
cc de la coordonnée radiale n'apporte rien au calcul de diffraction.
  ANG=2.d0*pi*R*RAU/alambd/Z
  CDV=(W0/WL)*2.0d0*pi/alambd/Z

```

```

FER=CDV*RAU*DEXP(-
XL/2.0d0)*LAGO2(XL,LL)*DBSJ0(ANG)*CVAR

RETURN
end

*calcul de la fonction a integrer en sin
FUNCTION FEI(XX(
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (a-h,o-z(
c REAL*8 DBSJ0,ER,LAGO2,FER
DOUBLE PRECISION LAGO2

EXTERNAL DBSJ0,LAGO2,RJB
COMMON/PAM1/WL,Z,alambd,ft,DRL,LL
COMMON/PAM3/R,RSZ,W0
COMMON/LIST/MAXSUB
COMMON/PHASE/GOUY

RAU=XX
c XL est la variable R normalise pour le poly de Laguerre
XL=2.0d0*RAU*RAU/WL/WL
pi=4.d0*datan(1.d0(
C R est la variable radiale dans le plan z
c RAU est la variable radiale dans le plan de l'EOD

c calcul avec lentille
AGRC=pi*RAU*RAU*(DRL+(1.0d0/Z)-(1.0d0/ft))/alambd
c calcul sans lentille
c AGRC=pi*RAU*RAU*(DRL+(1.0d0/Z))/alambd

c SVAR=DSIN(GOUY*DFLOAT(2*LL-1)+PHI+AGRC(
SVAR=DSIN(AGRC(
!!!IMPORTANT : l'introduction du déphasage de Gouy perturbe
!!le calcul. En particulier on ne retrouve pas qu'une gaussienne qui
cc traverse une lentille est une gaussienne transformée mais une
cc gaussienne tout de même. De plus la phase de Gouy ne dépendant pas
cc de la coordonnée radiale n'apporte rien au calcul de diffraction.
CDV=(W0/WL)*2.0d0*pi/alambd/Z
ANG=2.d0*pi*R*RAU/alambd/Z
FEI=CDV*RAU*DEXP(-XL/2.0d0)*LAGO2(XL,LL)*DBSJ0(ANG)*SVAR

RETURN
end

c ***** la fonction LAGO2 definissant les polynomes de laguerre*****
FUNCTION LAGO2(ZX,LL)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,R-Z)
DOUBLE PRECISION LAGO2
XX=ZX

```



```

EL1=1.0D0
EL2=1.0D0-XX
IF(LL.EQ.1) THEN
  LAGO2=EL1
ELSEIF (LL.EQ.2) THEN
  LAGO2=EL2
ELSE
  DO 10 KK=3,LL
    LAGO2=2.0D0*EL2-EL1-((1.0D0+XX)*EL2-EL1)/DFLOAT(KK-1)
    EL1=EL2
    EL2=LAGO2
  10 CONTINUE
ENDIF
RETURN
END

```

\*\*\*\*\*

c fonction à intégrer avec signe moins

calcul de la fonction a integrer en cos: avec signe moins

```

FUNCTION FERM(XX(
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (a-h,o-z)
c    REAL*8 DBSJ0,ER,LAGO2,FER
    DOUBLE PRECISION LAGO2
    EXTERNAL DBSJ0,LAGO2,RJB
    COMMON/PAM1/WL,Z,alambd,ft,DRL,LL
    COMMON/PAM3/R,RSZ,W0
    COMMON/PHASE/GOUY

```

RAU=XX

c XL est la variable R normalise pour le poly de Laguerre

```

XL=2.0d0*RAU*RAU/WL/WL
pi=4.d0*datan(1.d0)

```

C R est la variable radiale dans le plan z

c RAU est la variable radiale dans le plan de l'EOD

c calcul avec lentille

```

AGRC=pi*RAU*RAU*(DRL+(1.0d0/Z)-(1.0d0/ft))/alambd

```

c calcul sans lentille

```

c    AGRC=pi*RAU*RAU*(DRL+(1.0d0/Z))/alambd

```

```

c    CVAR=DCOS(GOUY*DFLOAT(2*LL-1)+AGRC)
    CVAR=DCOS(AGRC)

```

!!!!IMPORTANT : l'introduction du déphasage de Gouy perturbe

!!le calcul. En particulier on ne retrouve pas qu'une gaussienne qui

cc traverse une lentille est une gaussienne transformée mais une

cc gaussienne tout de même. De plus la phase de Gouy ne dépendant pas

cc de la coordonnée radiale n'apporte rien au calcul de diffraction.

```

ANG=2.d0*pi*R*RAU/alambd/Z
CDV=(W0/WL)*2.0d0*pi/alambd/Z

```

```

    FERM=-CDV*RAU*DEXP(-
XL/2.0d0)*LAGO2(XL,LL)*DBSJ0(ANG)*CVAR
    RETURN
end

```

\*calcul de la fonction a integrer en sin: avec signe moins

```

    FUNCTION FEIM(XX)
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (a-h,o-z)
c      REAL*8 DBSJ0,ER,LAGO2,FER
    DOUBLE PRECISION LAGO2

    EXTERNAL DBSJ0,LAGO2,RJB
    COMMON/PAM1/WL,Z,alambd,ft,DRL,LL
    COMMON/PAM3/R,RSZ,W0
    COMMON/LIST/MAXSUB
    COMMON/PHASE/GOUY

```

```

    RAU=XX

```

c XL est la variable R normalise pour le poly de Laguerre

```

    XL=2.0d0*RAU*RAU/WL/WL

```

```

    pi=4.d0*datan(1.d0(

```

C R est la variable radiale dans le plan z

c RAU est la variable radiale dans le plan de l'EOD

c calcul avec lentille

```

    AGRC=pi*RAU*RAU*(DRL+(1.0d0/Z)-(1.0d0/ft))/alambd

```

c calcul sans lentille

```

c      AGRC=pi*RAU*RAU*(DRL+(1.0d0/Z))/alambd

```

```

c      SVAR=DSIN(GOUY*DFLOAT(2*LL-1)+PHI+AGRC)
    SVAR=DSIN(AGRC)

```

!!!!IMPORTANT : l'introduction du déphasage de Gouy perturbe

!!le calcul. En particulier on ne retrouve pas qu'une gaussienne qui

cc traverse une lentille est une gaussienne transformée mais une

cc gaussienne tout de même. De plus la phase de Gouy ne dépendant pas

cc de la coordonnée radiale n'apporte rien au calcul de diffraction.

```

    CDV=(W0/WL)*2.0d0*pi/alambd/Z

```

```

    ANG=2.d0*pi*R*RAU/alambd/Z

```

```

    FEIM=-CDV*RAU*DEXP(-

```

```

XL/2.0d0)*LAGO2(XL,LL)*DBSJ0(ANG)*SVAR

```

```

    RETURN

```

```

end

```

-----