

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE FERHAT ABBAS SETIF
UFAS (ALGERIE)**

MEMOIRE

**Présenté à la Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département d'Electronique
Pour L'Obtention du Diplôme de**

MAGISTER

Option : Instrumentation

Par

BELGUIDOUM KHAOULA

THÈME

**ÉTUDE DES STRUCTURES POUR
LA DÉTECTION DES SIGNAUX**

Soutenu le : 19/ 05/ 2008 devant la commission d'examen :

Mr. F. DJAHLI	Professeur à l'université de Sétif	Président
Mr. A. KHELLAF	Professeur à l'université de Sétif	Rapporteur
Mr. N. BOUZIT	Professeur à l'université de Sétif	Examineur
Mr.N.BOUKAZZOULA	Maître de conférences à l'université de Sétif	Examineur
Mr. A. BERTIL	Maître de conférences à l'université de Sétif	Examineur

RÉSUMÉ

La récupération d'un signal consiste à estimer ce signal original à partir d'une version bruitée. Elle a donc pour but minimiser le bruit, pour obtenir un signal plus proche à la réalité physique.

Ce signal peut être déterministe ou aléatoire. Dans ce projet nous sommes intéressés aux méthodes utilisées pour extraire le signal noyé dans un bruit, suivant le critère RSB maximal, avec prise d'une décision optimale à un moment précis (l'instant de son apparition).

Il serait donc, nécessaire d'étudier des structures convenables à ce problème. Pour ces raisons on a sélectionné trois types de récepteurs qui sont : le filtre adapté, le système filtrage-quadrature-intégration, et le corrélateur.

Ces dispositifs sont précédés par des structures à seuil qui permettent de déceler la présence ou l'absence du signal. Le fonctionnement optimal qu'il s'agit d'étudier et qui revient à rendre au maximum le RSB, repose essentiellement sur la forme de la structure qui doit être déterminée.

L'objectif s'articule autour de deux aspects fondamentaux :

- la détermination du système de détection;
- l'optimisation de ce système, et l'analyse de son fonctionnement, et de sa performance.

À mes chers parents

À mes sœurs et mon frère

À mon neveu

SOMMAIRE

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE

1

Chapitre 1 : Méthodes en traitement du signal bruité

1.1- Introduction	2
1.2- Extraction d'information d'un signal bruité.....	3
1.2.1- l'observation.....	3
1.2.2- Information intéressante à recherchée.....	3
1.2.3- La résolution du problème	4
1.3- Théorie statistique de la décision	4
1.3.1- Éléments de base	4
1.3.2 - Méthodes bayésiennes et non bayésiennes.....	6
1.4- Classifieurs classiques.....	7
1.4.1 - Classifieur de Bayes.....	7
1.4.2 - Classifieurs MV et MVP en gaussien.....	8
1.5- Détecteurs classiques.....	9
1.5.1- Détecteur à structure libre de Bayes.....	9
1.5.2- Détecteurs à structure imposée.....	10
1.5.2.1- Détecteur par filtrage adapté.....	10
1.5.2.2 - Détecteur par filtrage-carré-moyenne et détecteur par corrélation ...	11
1.6- Estimateurs classiques.....	11
1.6.1 - Estimateurs pour le traitement du signal.....	11

Chapitre 2 : Le filtrage adapté

2.1- Introduction.....	14
2.2- Position du problème.....	14
2.3- Effet du bruit sur les performances du détecteur.....	18
2.4- Réalisation approche d'un filtre adapté.....	22
2.5- Simulation d'un canal de transmission bruité : réception avec un filtre adapté.....	25
2.5.1- construction d'un modèle SIMULINK.....	25
2.6- Conclusion.....	27

Chapitre 3 : Le corrélateur

3.1- Introduction.....	28
3.2- Approche Intuitive.....	28
3.2.1- Cas des signaux numérique.....	29
3.2.2- Cas des signaux analogique.....	30
3.2.2.1- signaux à puissance finie	30
3.2.2.2- signaux à énergie finie.....	31
3.2.3- Propriétés.....	31
3.2.3.1- Parité pour des signaux réels.....	31
3.2.3.2- Valeur maximale.....	31
3.2.3.3- Puissance.....	31
3.2.3.4- Relation avec la convolution.....	31

3.2.3.5- Théorème de Wiener-Kintchine.....	31
3.3- Estimation de la fonction d'autocorrélation.....	32
3.3.1- Estimateur non biaisé.....	32
3.3.2- Estimateur biaisé.....	33
3.4- Le rapport signal bruit à la sortie d'un corrélateur.....	34
3.5- Mise en évidence de périodicités caché dans un bruit.....	35
3.6- Recherche d'un signal périodique noyé dans du bruit.....	36
3.7- Mesure d'un temps par intercorrélation.....	38
3.8- Réception des signaux codés en Bande de Base par un corrélateur.....	39
3.8.1- Définition des signaux codés en Bande de Base	39
3.8.2- Les principes de réception.....	40
3.8.3- Simulation d'un canal de transmission bruité : réception avec un corrélateur	41
3.9- Problèmes poses par la réalisation des corrélateurs.....	43
3.10- Application la méthode de la corrélation : détection d'obstacle.....	43
3.10.1- Forme du signal.....	43
3.10.1.1- Résolution en distance.....	45
3.10.1.2- Energie a fournir pour émettre ce signal	46
3.10.2- Compression d'impulsion.....	46
3.10.2.1- Principe général.....	47
3.10.2.2- Optimisation du rapport signal a bruit par compression d'impulsion.....	47
3.10.3- Les principes de la localisation et de l'estimation.....	48
3.10.3.1- Théorie statistique de l'estimation.....	48
3.10.3.1.1- Maximum de vraisemblance	49
3.10.4- Théorie de la décision.....	50
3.10.4.1- La problématique.....	50
3.10.4.2- Le rapport de vraisemblance	51
3.10.4.3- Le critère de décision.....	51
3.10.4.4- Critère de neyman-pearson	53
3.10.4.5- Décision par seuillage.....	55
3.11- Conclusion.....	

Chapitre 4 : Détecteur Energétique

4.1- Introduction.....	56
4.2- Méthode Energétique.....	56
4.3- Signal ULB.....	57
4.4- Modulations utilisées.....	59
4.4.1- Modulation tout ou rien (ON OFF KEYING OOK).....	59
4.5- Analyse du système de détection.....	60
4.5.1- Problème de décision à seuil.....	62
4.5.2- La statistique de la variable de décision x.....	64
4.5.3- Le seuil de décision optimal.....	65
4.6- L'estimation de l'énergie du bruit et du signal utile.....	65
4.6.1- Estimation initiale.....	67
4.7- Calcul de la probabilité d'erreur.....	67
4.7.1- Calcul de la probabilité $P(0 1)$	68
4.7.2- Calcul de la probabilité $P(1 0)$	69
4.8- Résultat et comparaison avec une modulation cohérente.....	70
4.9- Conclusion.....	

CONCLUSION GENERALE

71

ANNEXE A

ANNEXE B

ANNEXE C

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION
GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

En physique, et dans des nombreuses autres disciplines expérimentales, on se retrouve souvent face au problème de la détection d'un signal "intéressant" de faible intensité dans un enregistrement bruité. Le bruit peut être dû à l'instrument de mesure ou à l'environnement où on fait la mesure. On peut mentionner beaucoup d'exemples, allant de la mesure du signal électrique émis par une cellule neuronale, à la détection de l'onde gravitationnelle émise au cours de la assemblage d'un système binaire d'étoiles, en passant par la détection de l'écho du signal émis par un radar. [1] , [2]

Dans ce mémoire, nous sommes intéressé aux méthodes utilisées pour extraire le signal noyé dans un bruit. Le problème se réduit alors à localiser ce signal au milieu du bruit : on veut déterminer l'instant de son apparition, c-à-d prendre une décision optimale à un moment précis.

Nous traiterons trois types de récepteurs qui répondent à un critère de contraste « maximalisation d'un rapport signal sur bruit de sortie » : **le filtre adapté, le corrélateur et le système filtrage-carré-moyenne.**

Ces systèmes sont donc précédés par des structures à seuil qui permettent de déceler la présence ou l'absence du signal. Le fonctionnement optimal qu'il s'agit d'étudier et qui revient à rendre maximum le rapport signal à bruit, repose essentiellement sur la forme de la structure qui doit être déterminé.

Dans le premier chapitre de notre mémoire, on donne un aperçu général sur les méthodes utilisées dans le traitement du signal bruité comme une introduction aux méthodes de détection.

Le deuxième chapitre est consacré à une étude détaillée sur la détection du signal bruité par filtre adapté, une simulation d'un canal de transmission bruité « réception avec un filtre adapté » est présenté dans le même chapitre pour montrer la différence de détection entre les signaux analogiques et les signaux numériques [3].

Le troisième chapitre est consacré à une autre méthode de détection qui implique la corrélation, les caractéristiques générales, ainsi que les performances de détection dans un bruit blanc gaussien additif.

Dans le dernier chapitre, on va présenter la méthode de détection par le système filtrage-carré-moyenne. Ce détecteur consiste à détecter l'énergie du signal reçu.

Enfin, nous proposons une conclusion générale qui va nous permettre de comparer ces différentes techniques de détection.

CHAPITRE I

Méthodes de traitement du signal bruite

CHAPITRE I

Méthodes de traitement du signal bruité

1.1- Introduction :

Un signal représente un phénomène dépendant du temps et/ou d'autres variables, et transportant de l'information intéressante à l'observateur. Les problèmes rencontrés dans la conception d'un système de traitement sont centrés sur cette information : il faut la représenter, la transporter, la protéger, la récupérer au moins partiellement, et l'interpréter. Le terme « signal » est alors pris dans un sens étroit (il représente l'information « intéressante ») par opposition au terme bruit (celui-ci est nuisible à l'information intéressante). Cette information intéressante, dont le signal est le support, est à distinguer de l'information « utilisable » sur le problème : cette dernière sert au développement du traitement.

Une caractéristique essentielle en est la prise en compte des perturbations qui interviennent dans les divers étages du système de communication (figure 1.1), et toutes ramenées au niveau du canal.

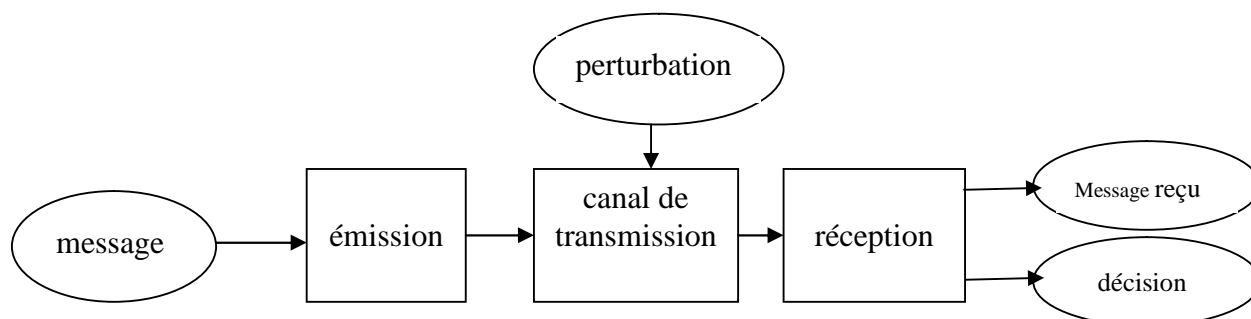


Figure 1.1 : Système de communication.

On peut y distinguer, dans la chaîne émetteur-canal-récepteur, des phases d'acquisition, d'analyse, et d'extraction d'information. Dans ce fascicule, on s'intéresse essentiellement, au niveau de l'étage de réception, aux systèmes décisionnels, extracteurs d'information en présence de perturbations, encore appelés « systèmes bruités ».

On peut remarquer, d'une manière générale, que l'étude d'un système décisionnel se situe à l'un des niveaux ; de comparaison de système, d'optimisation de système, et qu'elle est schématiquement décomposée en deux étapes successives de « modélisation » et de « réalisation ». Elle nécessite le choix d'un index de performances, traduisant de manière

réaliste la complexité de la décision, adapté au problème posé. Elle passe par une optimisation « à structure libre » ou « à structure imposée ».

1.2- Extraction d'information d'un signal bruité :

Le problème d'extraction d'information d'un signal bruité est rencontré sous plusieurs formes. Dans la pratique, il correspond à un besoin : détection de présence, déconvolution, trajectographie, analyse de processus stochastique, analyse spectrale, reconnaissance de formes, identification... ; et il est lié à un domaine d'application : parole, image, télécommunications, radar, sonar, biologie, géophysique... Le besoin et l'application déterminent les caractéristiques de l'information intéressante et de l'observation, caractéristiques sur lesquelles s'appuie essentiellement l'analyse du problème ; les premières définissent l'opération de décision à effectuer (détection, classification, estimation, combinaison de décisions élémentaires...) ; les secondes tracent le cadre dans lequel la décision se particularise.[4]

Typiquement, l'observateur dispose d'une observation disponible sur un certain support. Cette observation est, par exemple, constituée par un signal utile, transportant l'information recherchée, et perturbée par un bruit parasite ; on cherche un traitement (un système) opérant sur l'observation en délivrant l'information recherchée.

1.2.1- L'observation :

Le signal et le bruit peuvent correspondre à des modèles divers :

- ce sont des quantités scalaires ou vectorielles (respectivement issues d'un capteur unique ou d'un ensemble de capteurs constituant une antenne) .
- ce sont des quantités mono variables (généralement fonction du temps), bi-, tri- ou quadrivariées (par exemple, respectivement images, suites d'images ou description temporelle d'un secteur géographique tridimensionnel), ou même dépendant de n variables dans le cas général .
- le modèle retenu pour la description du mécanisme perturbateur est généralement additif : le signal bruité s'écrit alors sous la forme $(s + n)$ où s et n représentent respectivement le signal utile et le bruit parasite.
- leurs variables (le temps, les coordonnées d'une image...) sont initialement continues ou discrètes dont les quantités fonctions peuvent alors être dites respectivement permanentes ou discrètes.

1.2.2- L'information intéressante recherchée :

Elle est transportée par le signal, et peut revêtir des formes diverses :

- elle peut, simplement, résulter de l'état de présence ou d'absence du signal : on a un problème de détection de présence, conduisant à un détecteur.

➤ elle peut, plus généralement, être constituée par la classe d'appartenance du signal, sachant que plusieurs classes sont candidates a priori : on a un problème de classification conduisant à un classifieur ; c'est l'un des problèmes de base en reconnaissance de formes. [5]

➤ elle peut, par ailleurs, être représentée par les valeurs prises par un ensemble de paramètres attachés au signal : on a un problème d'estimation résolu par un *estimateur*; si les valeurs estimées sont constantes sur toute l'observation, on qualifie souvent ce problème de démodulation ; si les valeurs à estimer sont variables sur l'observation, on a une estimation continue. Le problème d'estimation est fondamental en filtrage, en déconvolution, en analyse spectrale ou plus généralement en analyse de processus stochastique, en identification...etc.

➤ elle peut, enfin, de manière plus complexe, être un mélange des formes élémentaires précédentes : on a un problème souvent résolu par décomposition (qui, lorsque arbitraire, peut détruire le caractère d'optimalité) en sous-problèmes de détection, de classification et d'estimation, c'est une forme rencontrée dans les systèmes de surveillance (radar, sonar) .

L'extraction de l'information, en traitement du signal bruité, peut être considérée, de manière unitaire, comme étant régie par la notion de « décision », opération de choix en présence d'aléatoire, d'incertain, d'inconnu, d'information incomplète. Ce choix concerne un phénomène non observable directement, mais sous-jacent dans une observation sur laquelle il s'appuie.

1.2.3- La résolution d'un problème :

La résolution d'un problème de traitement du signal bruité s'appuie donc sur deux grandes méthodologies :

➤ la théorie du signal fournissant les outils nécessaires à la modélisation des différents acteurs (observation, signal, bruit).

➤ la théorie de la décision permettant de dégager des méthodologies pour la résolution des problèmes élémentaires de détection, classification, estimation, ou des problèmes de décision plus complexe.

1.3- Théorie statistique de la décision :

1.3.1- Éléments de base :

Le concept central en traitement des signaux bruités notion de prise de décision : c'est un choix, concernant une propriété d'un phénomène utile, effectué à partir d'une réalisation d'une observation liée au phénomène utile, par un système décision (ou décisionnel).

Un modèle de décision statique est représenté par un quadruplet constitué par :

✓ une structure décisionnelle définie par les trois espaces (ici réels) Θ des paramètres θ , \mathcal{E} des observations (réalisations x de l'observation aléatoire X) et Δ des décisions δ ; elle traduit la nature du problème de décision.

✓ un espace Φ de fonctions de décision φ permises à l'observateur ; il traduit les contraintes imposées à la décision ; on se limite ici à des fonctions de décision applications de \mathcal{E} dans Δ .

✓ une information (*a priori*) constituée par les connaissances disponibles sur la loi $P_{x/\theta}$ de l'observation X conditionnelle au paramètre θ et éventuellement sur la loi *a priori* P_θ du paramètre θ .

✓ un index de performances et/ou un critère de décision, par rapport auxquels une décision optimale est recherchée.

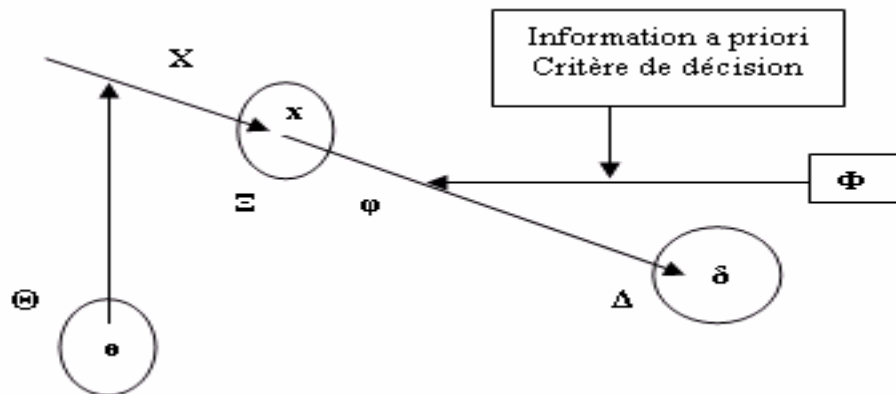


Figure 1.2 : Modèle de décision

L'étude générale d'un tel modèle met en évidence l'influence de divers facteurs :

✓ **la structure décisionnelle** : celle-ci engendre de multiples cas particuliers, correspondant aux problèmes classiques « élémentaires » de détection, de classification, d'estimation, ou correspondant à des problèmes mixtes par rapport aux précédents, ou même correspondant à des problèmes plus complexes, non réductibles de manière évidente à un ensemble de décisions élémentaires .

✓ **les contraintes** : à la démarche à *structure libre* (le système est sélectionné dans une classe sans limitation *a priori*) s'opposent à des démarches plus contraignantes, à *structure imposée* (choix dans une classe donnée *a priori*), limitée (choix dans une classe limitée par une contrainte adaptable à la situation pratique), décomposée (choix dans une classe engendrée par contrainte de transition dans un pseudo espace d'observation) .

✓ **l'information a priori et le critère** : leur structure conduit à distinguer les modèles bayésiens (probabilisation du paramètre θ et critère de risque) et les modèles non bayésiens (non-probabilisation du paramètre et critère d'erreur ou de vraisemblance ou de distance d'observation ou de contraste (rapport signal bruit maximal)).

L'étude générale montre la nécessité d'un choix cohérent des éléments du quadruplet modélisateur. En particulier, le développement du modèle est très dépendant de l'information *a priori* disponible (une particularisation du modèle nécessite évidemment une quantité

minimale d'information). En ambiance d'information réduite, des politiques palliatives sont suggérées par cette étude générale, jouant sur le critère, la structure *a priori* du système, la robustesse, l'adaptativité, etc. Par ailleurs, la modélisation décisionnelle offre, dans les problèmes de décision complexe, une méthodologie d'analyse et de modélisation particulière ; elle dégage des méthodes ou résultats invariants des voies particulières ; elle facilite la comparaison des modèles apparemment différents et montre la grande importance de fait de quelques notions (problème effectif posé, structure retenue, contraintes, information *a priori* disponible, critère adopté, comptabilité entre éléments du modèle...).

1.3.2- Méthodes bayésiennes et non bayésiennes :

Par opposition aux modèles non bayésiens, le *modèle* bayésien est caractérisé, dans le cadre précédent, par les hypothèses suivantes :

- ✓ existence d'une loi de probabilité *a priori* P_θ du paramètre θ (ce dernier à un statut de variable aléatoire) .

- ✓ donnée d'une fonction de perte $C(\theta, \delta)$ traduisant, par une valeur numérique positive, la perte attachée à la réalisation de la situation : « apparition de la valeur θ du paramètre, choix de la décision δ » .

- ✓ donnée d'une fonction de coût d'expérience $C'(x)$ traduisant, par une valeur numérique positive, le coût d'obtention de l'observation x .

- ✓ critère de décision « minimalisation du risque moyen de Bayes », construit sur les fonctions C et C' .

Le modèle est conditionné par les deux lois de probabilité $P_{X/\theta}$ (vraisemblance du paramètre associée à l'observation) et P_θ (loi *a priori* du paramètre). On désigne par $E_{X\theta}\{\bullet\}$ et $E_{X/\theta}\{\bullet\}$ les espérances mathématiques respectivement dans la loi conjointe du couple (X, θ) et dans la loi de X conditionnelle à θ .

Le risque moyen de Bayes R est alors, pour une fonction de décision φ donnée, la valeur moyenne par rapport au couple (X, θ) de la quantité $C(\theta, \delta) + C'(x)$ (quantité aléatoire *via* X , θ et $\delta = \varphi(X)$) :

$$R = E_{X\theta}\{C(\theta, \delta) + C'(x)\} \quad (1.1)$$

Ce modèle peut être développé de manières diverses selon l'information effectivement disponible, laquelle est représentée par ce que l'observateur connaît des deux lois de probabilité $P_{X/\theta}$ et P_θ . D'une manière générale, on peut chercher une fonction de décision optimale φ , application de Ξ dans Δ , appartenant à Φ , et solution de Bayes par rapport à P_θ , c'est-à-dire telle que :

$$\forall \psi \in \Phi, R(\varphi, P_\theta) \leq R(\psi, P_\theta) \quad (1.2)$$

Une information complète correspond à la connaissance des deux lois précédentes ; si l'information est incomplète, par exemple réduite aux moments des deux premiers ordres de la loi de (X, θ) , on peut rechercher une solution de Bayes à structure imposée, dans une classe limitée de fonctions de décision, compatible avec l'information (cette méthode est utilisée, en estimation avec une structure linéaire ou affine d'estimateur) ; on peut aussi rechercher une pseudo-solution de Bayes en affectant au modèle une loi *a priori* pour le paramètre θ , par exemple gaussienne définie par les moments connus. Si l'information sur la loi de θ est par exemple trop insuffisante, on peut également adopter le critère de décision « minimalisation du risque *a priori* maximal » (cela revient à affecter au modèle une loi *a priori* particulière « la plus défavorable ») et rechercher la solution de Bayes « minimax » de Φ telle que :

$$\forall \psi \in \Phi, \sup_{\theta \in \Theta} E_{X/\theta} \left\{ C(\theta, \varphi(X)) + C'(X) \right\} \leq \sup_{\theta \in \Theta} E_{X/\theta} \left\{ C(\theta, \psi(X)) + C'(X) \right\} \quad (1.3)$$

On rencontre essentiellement dans les *modèles non bayésiens* :

✓ des *modèles à critère d'erreur* (minimalisation de la mesure choisie de l'erreur de décision), illustrés par le détecteur de Neyman-Pearson, et l'estimateur à variance minimale.

✓ des *modèles à critère de vraisemblance* (maximalisation de la vraisemblance du paramètre associée à l'observation), illustrés par le classifieur et l'estimateur selon le maximum de vraisemblance.

✓ des *modèles à critère de contraste* (maximalisation d'un rapport signal sur bruit de sortie), illustrés par les détecteurs par filtrage adapté, par filtrage-carré-moyenne et par corrélation.

1.4 - Classifieurs classiques :

1.4.1 - Classifieur de Bayes :

Dans le problème de classification, on suppose que $(m+1)$ hypothèses, $\forall i \in \{0, \dots, m\}, H_i$, peuvent régir l'observation ; ces hypothèses sont engendrées par une partition, en $m+1$ sous ensembles, $\forall i \in \{0, \dots, m\}, \Theta_i$, de l'espace Θ des paramètres θ : les valeurs de θ appartenant à un même Θ_i distinguent les différentes lois de probabilité $P_{X/\theta}$ de X qui sont régies par une même hypothèse H_i .

Classifier c'est décider, par choix d'une décision, $\forall j \in \{0, \dots, m\}, \delta_j$, à quelle hypothèse, parmi les $(m+1)$, est soumise l'observation x réalisation de l'observation aléatoire X . C'est un « test statistique entre $m+1$ hypothèses ».

Dans la pratique, en traitement du signal, pour des quantités monovariées (mais elles pourraient être multivariées), l'observation aléatoire X est, par exemple, issue de la fonction aléatoire réelle $V(t)$ somme, dans l'hypothèse H_i , d'un bruit $n(t)$ et d'un signal $s_i(t)$: on cherche celui des signaux effectivement présent dans l'observation x issue de la réalisation reçue de $V(t)$.

L'observation aléatoire X est une variable aléatoire réelle n-vectorielle supposée absolument continue, de densité de probabilité $P_{X/H_i}(x)$ sous l'hypothèse H_i . On développe un modèle de Bayes, à structure libre, à information complète, en supposant les hypothèses simples (un seul dans chaque Θ_i). La loi de probabilité *a priori* est représentée les, $\forall i \in \{0, \dots, m\}$, $\pi_i = P_r[H_i]$. La fonction de perte C est définie donnée de $(m+1)^2$ quantités $C_{ij} = C(H_i, \delta_j)$, pertes réelles positives ou nulles attachées aux situations (H_i, δ_j) possibles. On suppose qu'à une décision correcte correspond une perte strictement inférieure à la perte due à une décision fautive sous la même hypothèse. On suppose la fonction de coût C' identiquement nulle.

Le risque moyen s'écrit alors :

$$R = \sum_{i,j=0}^m C_{ij} \pi_i \Pr[\delta_j / H_i] \tag{1.4}$$

La solution de Bayes du problème est alors donnée par la règle :

$$\forall j \in \{0, \dots, m\}, x \Rightarrow \delta_j : \forall k \in \{0, \dots, m\}, k \neq j, \sum_{i,j=0}^m \pi_i (C_{ik} - C_{ij}) P_{X/H_i}(x) > 0 \tag{1.5}$$

1.4.2 - Classifieurs MV et MVP en gaussien :

Pour la fonction de perte particulière :

$$\forall i \in \{0, \dots, m\}, \forall j \in \{0, \dots, m\}, C_{ii} = 0, C_{ij} = 1 \tag{1.6}$$

on obtient le classifieur MVP (de Bayes) « selon le maximum de vraisemblance a posteriori » (figure 1.3) défini par la règle :

$$\forall j \in \{0, \dots, m\}, X \Rightarrow \delta_j : \forall K \in \{0, \dots, m\}, K \neq j, \pi_j P_{X/H_j}(X) > \pi_K P_{X/H_K}(X) \tag{1.7}$$

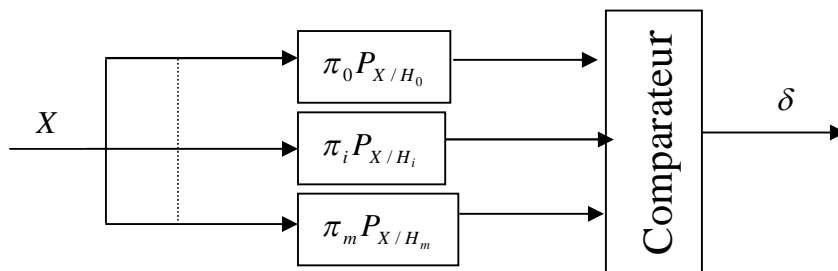


Figure 1.3 : Classifieur selon le maximum de vraisemblance a posteriori.

Si les probabilités *a priori* π_i sont égales, on retrouve le classifieur MV (non bayésien) « selon le maximum de vraisemblance (figure 1.4) » défini par la règle :

$$\forall j \in \{0, \dots, m\}, \quad X \Rightarrow \delta_j : \quad \forall K \in \{0, \dots, m\}, K \neq j, \quad P_{X/H_j}(X) > P_{X/H_K}(X) \quad (1.8)$$

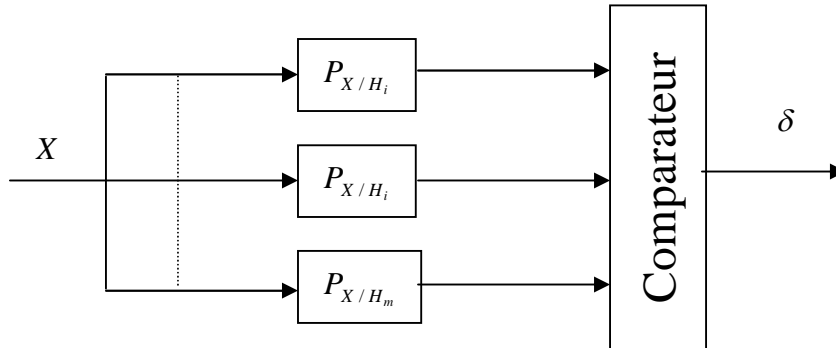


Figure 1.4 : Classifieur selon le maximum de vraisemblance.

1.5- Détecteurs classiques :

La détection est un cas particulier de la classification, obtenu par limitation à deux hypothèses, « absence de signal » H_0 , et « présence de signal » H_1 , et deux décisions « absence de signal » δ_0 , et « présence de signal » δ_1 . On distingue néanmoins généralement le détecteur d'une part, du classifieur à deux classes d'autre part, en lui donnant une structure dissymétrique par rapport aux deux hypothèses.

Dans la pratique en traitement du signal, pour des quantités monovariées (mais elles pourraient être multivariées), l'observation aléatoire X est, par exemple, issue de la fonction aléatoire réelle $V(t)$ somme, dans l'hypothèse H_1 , d'un bruit $n(t)$ et d'un signal $s(t)$, et ne comportant, dans l'hypothèse H_0 , que du bruit $n(t)$, alors on cherche si le signal est effectivement présent dans l'observation x issue de la réalisation reçue de $V(t)$.

1.5.1- Détecteur à structure libre de Bayes :

On suppose connues les hypothèses simples de probabilités *a priori* $\pi_i = P_r[H_i]$; on définit la fonction de perte par les quantités positives ou nulles $C_{ij} = C(H_i, \delta_j)$.

On considère une observation x , réalisation d'une observation aléatoire réelle X absolument continue, de densité de probabilité $P_{X/H_i}(x)$ sous l'hypothèse H_i , (i et j à valeurs dans $\{0, 1\}$) ; alors la *détection optimale de Bayes, à structure libre, à information complète*, est traduite par la règle suivante, résultant de la comparaison du « rapport de vraisemblance » Λ au « seuil de Bayes » μ_B :

$$\Lambda(x) = \frac{P_{X/H_1}(X)}{P_{X/H_0}(X)}, \quad \mu_B = \frac{\pi_0 (C_{01} - C_{00})}{\pi_1 (C_{10} - C_{11})}, \quad \Lambda(X) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \mu_B \quad (1.9)$$

Le détecteur de Bayes est représenté sur la figure (1.5).

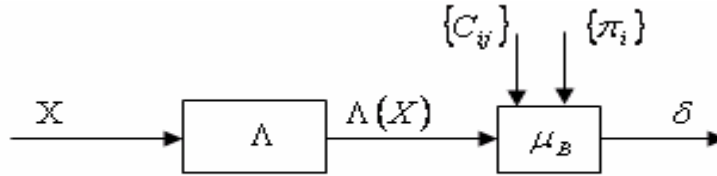


Figure 1.5 : Détecteur de Bayes.

1.5.2- Détecteurs à structure imposée :

Un détecteur, dans un contexte donné, peut encore être déterminé, de manière optimale, à partir d'une structure imposée a priori : celle-ci contient divers éléments ou paramètres initialement non fixés, et devant être déterminés par le processus d'optimisation. On détermine ainsi trois structures classiques, que l'on peut d'ailleurs retrouver sous certaines hypothèses par optimisation à structure libre (par exemple de Bayes) .[7]

1.5.2.1- Détection par filtrage adapté :

Le détecteur par filtrage adapté, représenté sur la figure (1.6), est constitué par un filtre linéaire et homogène dont on compare la sortie à un seuil μ , à un instant t_0 donné ; il correspond à la détection d'un signal déterministe $s(t)$ de spectre $S(v)$, parfaitement connu, dans un bruit $n(t)$ stationnaire centré, de fonction de corrélation $N(\tau)$ et densité spectrale $\gamma(v)$ connues. La recherche du filtre maximalisant, au niveau de la fonction $W(t)$, le rapport signal sur bruit de sortie (rapport de la puissance instantanée due au signal, à la puissance moyenne du bruit), à l'instant t_0 , engendre le filtre adapté au signal s dans le bruit n ; il est caractérisé par le gain complexe (K est une constante réelle).

$$H(v) = K \exp(-2 \pi i v t_0) s^*(v) \gamma^{-1}(v) \quad (1.10)$$

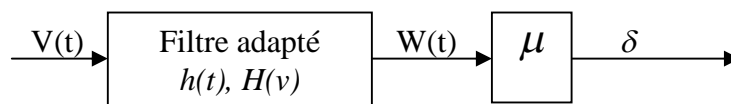


figure 1.6 : Détecteur par filtrage adapté

Lorsque le bruit est blanc dans la bande de fréquence occupée par le signal, la réponse percussionnelle est de la forme (K est une constante réelle) :

$$h(t) = K S(t_0 - t) \quad (1.11)$$

1.5.2.2- Détecteur par filtrage-carré-moyenne et détecteur par corrélation :

Le détecteur par filtrage-carré-moyenne et le détecteur par corrélation, représentés par les figures (1.7) et (1.8) , sont constitués, le premier, par un filtre linéaire et homogène suivi d'un Quadrateur et d'un Moyenneur, le second, par un corrélateur, dont on compare la sortie à un seuil μ . Ils s'étudient de manière analogue au cas précédent : les éléments libres sont le ou les filtres d'entrée ; la durée de moyennage est généralement prise égale à la durée du signal.

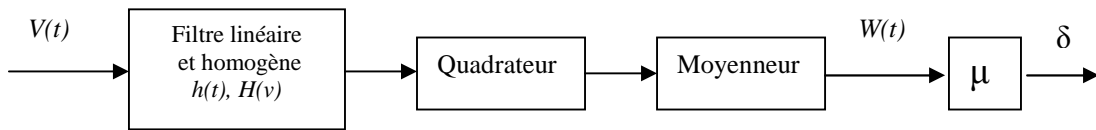


Figure 1.7 : Détecteur par filtrage-carré-moyenne.

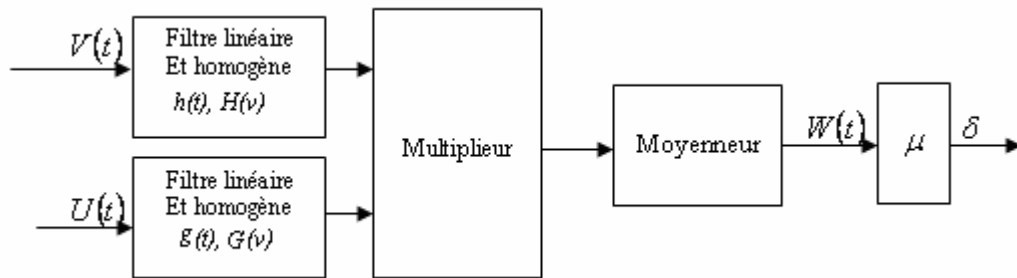


Figure 1.8 : Détecteur par corrélation.

1.6 - Estimateurs classiques :

1.6.1 - Estimateurs pour le traitement du signal :

Dans un problème d'estimation, on suppose que l'observation dépend d'un paramètre θ à valeurs dans un ensemble continu (tout ou partie de IR ou de IR^n). L'ensemble des valeurs possibles du paramètre θ constitue l'espace Θ , chacune d'elles déterminant une loi de probabilité $P_{X/\theta}$ de l'observation aléatoire X . *Estimer* c'est décider, par choix d'une décision δ , à valeurs dans un espace identique à Θ , quelle valeur du paramètre est intervenue dans la génération de l'observation x , réalisation de X . La fonction de décision (faisant passer de l'observation à la valeur décidée) est appelée estimateur, la valeur décidée est appelée *estimation*.

Dans la pratique en traitement du signal, pour des quantités monovariées (mais une analyse analogue prévaut dans les cas multivariées), les estimateurs sont mis en jeu, selon le besoin et le domaine d'application, dans des problèmes pouvant couvrir trois grandes formes :

✓ démodulation de paramètres : l'observation aléatoire X est par exemple issue de la fonction aléatoire réelle $V(t)$ somme d'un bruit $n(t)$ et d'un signal $s(t, \theta)$ dépendant du paramètre réel θ ; on cherche, à partir d'une réalisation de $V(t)$, à déterminer la valeur effective du paramètre θ , supposée constante dans la réalisation reçue .[6]

✓ analyse statistique d'un signal aléatoire : l'observation aléatoire X est par exemple issue du bruit réel $n(t)$; on cherche, à partir d'une réalisation de $n(t)$, à déterminer les valeurs de diverses quantités statistiques de ce bruit (valeur moyenne, fonction de corrélation, densité spectrale...) ; un domaine important en est *l'analyse spectrale*.

✓ estimation continue (ou dynamique) d'un signal aléatoire : l'observation aléatoire X est par exemple issue de la fonction aléatoire réelle $V(t)$, somme d'un bruit $n(t)$ et d'un signal $s(t, \theta(t))$ dépendant du paramètre réel $\theta(t)$ variable dans le temps ; on cherche, à partir d'une réalisation de $V(t)$, à chaque instant t , à déterminer la valeur effective prise en t par le paramètre $\theta(t)$ dans la réalisation reçue.

On considère une observation x , réalisation d'une observation aléatoire réelle X absolument continue, de densité de probabilité $P_{X/\theta}(x)$ pour la valeur θ du paramètre réel Θ . Alors, on peut considérer divers modèles engendrant des estimateurs classiques ; des définitions explicatives sont données par le tableau (1.1) ; les expressions où les définitions apparaissent sur le tableau (1.2).

<i>Définition</i>	<i>Expression</i>
Fonction de perte EQM (de l'erreur quadratique moyenne)	$C_{EQM}(\theta, \hat{\theta}) = \left[\hat{\theta}^T(X) - \theta^T \right] \left \hat{\theta}(X) - \theta \right $
Erreur quadratique moyenne = risque associé à la fonction de perte EQM	$R_{EQM}(\theta, \hat{\theta}) = E_{X/\theta} \left\{ \left[\hat{\theta}^T(X) - \theta^T \right] \left \hat{\theta}(X) - \theta \right \right\}$
Vraisemblance	$P_{X/\theta}(X, \theta)$
Estimateur sans biais	$E_{X/\theta} \{ \theta(X) - \theta \} = E_{X/\theta} \{ \theta(X) \} - \theta = 0$

Tableau 1.1 : Quelques définitions.

<i>Estimateur</i>	<i>Expression</i>
d'erreur quadratique moyenne minimale (EQM)	$\hat{\theta}_{EQM}(X) = E_{\theta/X} \{ \theta \}$
affine d'erreur quadratique moyenne minimale (AEQM)	$\hat{\theta}_{AEQM}(X) = \Gamma_{c\theta X} \cdot \Gamma_{cX}^{-1} [X - E_X \{X\}] + E_{\theta} \{ \theta \}$ $(X, \theta) \text{ gaussien} \Rightarrow \hat{\theta}_{EQM} = \hat{\theta}_{AEQM}$
selon le maximum de vraisemblance (MV)	$\hat{\theta}_{MV}(X) : \forall x, \quad \theta \Rightarrow \sup_{\theta} \{ P_{X/\theta}(X, \theta) \}$ $(X = a\theta + y, \quad y \text{ gaussien}) \Rightarrow \hat{\theta}_{MV}(X) = [a^T \cdot \Gamma_{cY}^{-1} \cdot a]^{-1} a^T \cdot \Gamma_{cY}^{-1} [X - E_Y]$ <p style="text-align: center;">sans biais</p>

Tableau 1.2 : Expressions de quelques estimateurs classiques.

CHAPITRE II

Le filtre adapté

CHAPITRE II

Le filtre adapté

2.1- Introduction :

Un filtre calcule un signal de sortie à partir d'un signal d'entrée. Un filtre linéaire est tout à fait équivalent à un "système linéaire" tel que ceux qu'on va étudier. Dans ce cas, le signal d'entrée est composé d'un signal d'intérêt, plus un bruit. Nous sommes donc amenés à chercher un filtre linéaire que maximise le "rapport signal sur bruit" : c'est à dire, pour le signal en sortie, l'amplitude du bruit doit être réduite au maximum par rapport à celle du signal recherché. La théorie du traitement du signal montre alors qu'il existe un et un seul filtre, appelé **le filtre adapté**, qui permet de maximiser ce rapport et d'optimiser les chances de détection du signal d'intérêt.

2.2- Position du problème :

Un problème de base qui doit souvent être résolu en transmission est celui de la détection d'un signal corrompu par un bruit. Supposons donc que ce signal $s(t)$ soit corrompu par un bruit blanc gaussien $n(t)$ de moyenne nulle et densité spectrale bilatérale $N_0 / 2$. On observe un signal $x(t)$ donné par :

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (2.1)$$

On suppose de plus que la durée d'observation est égale à un certain intervalle noté T . Le récepteur connaît la forme d'onde à laquelle il s'attend, soit $x(t)$. L'incertitude est donc liée à la présence du bruit additif. Le but du récepteur est de détecter la présence de $s(t)$ de façon optimale, connaissant (ayant observé) $n(t)$. La structure de réception que nous considérons est un filtre $h(t)$ dont nous observons la sortie après T secondes, et la question qui se pose est donc celle du choix optimal de $h(t)$. Le but poursuivi est de minimiser l'effet du bruit en sortie du filtre $h(t)$. La sortie du filtre peut être exprimée comme suit :

$$y(t) = s_o(t) + n(t) \quad (2.2)$$

Où $s_o(t)$ est la contribution liée au terme utile. En $t = T$, on peut définir un rapport signal à bruit par :

$$RSB = \frac{|s_o(T)|^2}{E[n^2(t)]} \quad (2.3)$$

L'objectif est de choisir $h(t)$ de manière à maximiser le RSB.

On a encore que :

$$s_o(T) = \int_{-\infty}^{\infty} H(v) S(v) e^{(jvT)} dv \quad (2.4)$$

$$E[n^2(t)] = \frac{N_o}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(v)|^2 dv$$

et donc,

$$RSB_{\text{sortie}} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(v) S(v) e^{(jvT)} dv \right|^2}{\frac{N_o}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(v)|^2 dv} \quad (2.5)$$

Etant donné $S(v)$ il faut donc trouver le $H(v)$ qui maximise le rapport signal sur bruit . A cet effet, on utilise l'inégalité de Schwartz.

En posant ici $\phi_1(x) = H(v)$ et $\phi_2(x) = S(v)e^{(jvT)}$, on a :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(v) S(v) e^{(jvT)} dv \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(v)|^2 dv \int_{-\infty}^{\infty} |S(v) e^{(jvT)}|^2 dv \quad (2.6)$$

Si deux fonctions complexes $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ de la variable réel z remplissent les conditions :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_1(z)|^2 dz < \infty \quad (2.7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_2(z)|^2 dz < \infty$$

Alors

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(z) \Phi_2(z) dz \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_1(z)|^2 dz \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_2(z)|^2 dz \quad (2.8)$$

L'égalité est obtenue uniquement lorsque ;

$$\Phi_1(z) = k \Phi_2^*(z) \quad (2.9)$$

Le meilleur rapport signal à bruit auquel on peut prétendre vaut :

$$RSB_{\text{sortie}} = \frac{2}{N_o} \int_{-\infty}^{\infty} |S(v)|^2 dv \quad (2.10)$$

Ce résultat ne dépend que de la forme d'onde utilisée en émission. Le choix de $H(v)$ qui correspond à cette valeur est :

$$H(v) = k(S(v)e^{(jvT)})^* = S^*(v)k.e^{(-jvT)} \quad (2.11)$$

Cela signifie que mis à part un facteur $k.e^{-jvT}$, la réponse en fréquence du filtre de réception doit être complexe conjugué de celle du filtre d'émission. Pour voir quelle réponse impulsionnelle correspond à cette réponse en fréquence, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S^*(v) k e^{-jvT} e^{jvt} dv \\
 &= k \left(\int_{-\infty}^{\infty} S(v) e^{jvT} e^{-jvt} dv \right)^* \\
 &= k s^*(T - t)
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Si $s(t)$ est un signal réel, le résultat se simplifie en

$$h(t) = k s(T - t)
 \tag{2.13}$$

D'après l'équation (2.13), on constate que le filtre optimal a une réponse impulsionnelle qui est, à un facteur k près, la version retournée et décalée de la forme d'onde $s(t)$ utilisée en émission. On dit que le filtre $h(t)$ est adapté au signal $s(t)$. Un tel filtre est donc appelé filtre adapté.

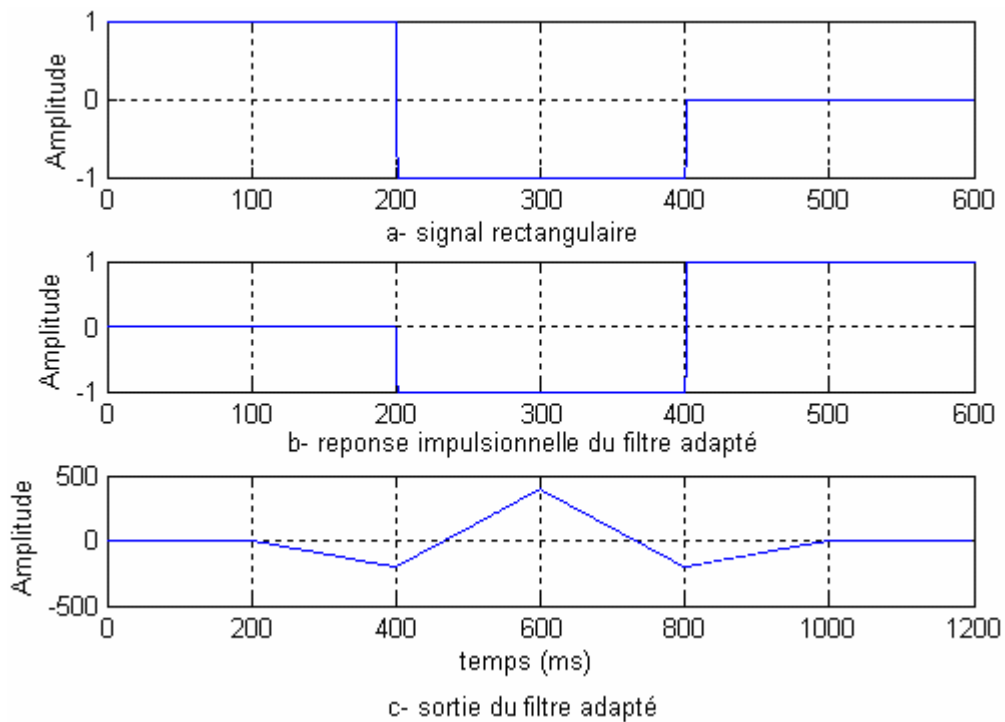


Figure 2.1 : sortie du filtre adapté d'un signal rectangulaire

pour ce choix optimal de $h(t)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
s_o(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\nu) S(\nu) e^{j\nu T} d\nu \\
&= k \int_{-\infty}^{\infty} |S(\nu)|^2 d\nu \\
&= k \varepsilon
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
E[n^2(t)] &= \frac{N_o}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\nu)|^2 d\nu \\
&= k^2 \frac{N_o}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\nu)|^2 d\nu \\
&= k^2 \frac{N_o}{2} \varepsilon
\end{aligned} \tag{2.15}$$

où on note par ε l'énergie du signal $s(t)$, soit :

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\nu)|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \tag{2.16}$$

Le rapport signal à bruit optimal vaut alors :

$$RSB_{opt} = \frac{2\varepsilon}{N_o} \tag{2.17}$$

Ce résultat montre que dans ce rapport signal à bruit optimal le choix particulier effectué pour un signal $s(t)$ a complètement disparu. Autrement dit, si on utilise un détecteur à base de filtre adapté, quelle que soit la forme d'onde $s(t)$ choisie, tous les signaux qui ont une même énergie ε sont caractérisés par ce même rapport. Ce rapport est par ailleurs un rapport énergie à densité spectrale de bruit. [7], [8]

L'action de filtrage effectuée par le filtre adapté peut évidemment s'écrire comme :

$$\begin{aligned}
s_o(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} k s^*(T - \tau) |s(t - \tau) + n(t - \tau)| d\tau \\
&= k C_{ss}(t - T) + k C_{ns}(t - T)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

où on a utilisé la notation $C_{s_1 s_2}$ pour la corrélationnel entre deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$, soit :

$$C_{s_1 s_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau + T) s_2^*(\tau) d\tau \tag{2.19}$$

Il apparaît donc que l'action opérée par le filtre adapté $h(t) = k s^*(T - t)$ peut aussi être interprétée comme une corrélation du signal reçu $x(t)$ avec le signal utile que l'on s'attend à recevoir, soit $s(t)$. La corrélation fait apparaître le (*).

La valeur de cette corrélation prise en $t = T$ fait apparaître un terme utile qui vaut $C_{ss}(0)$. On sait (par Schwartz) que cette valeur est nécessairement la plus élevée que peut prendre une fonction de corrélationnel (propre, c-à-d quand $s_1(t) = s_2(t)$).

En synthèse, il apparaît que l'opération de filtrage adapté ou de l'autocorrélation est l'opération qui est le plus à même de faire ressurgir un signal utile d'un bruit blanc. Il est intéressant de remarquer que la seule hypothèse formulée quant au bruit centré est celle de blancheur de son spectre. Rien n'a dû être précisé quant à la densité de probabilité de ce bruit.

2.3- Effet du bruit blanc sur les performances du détecteur :

L'outil présenté dans le paragraphe précédent, à savoir le filtre adapté, est le détecteur optimal d'un signal connu entaché de bruit blanc. Connaissant la structure de détection que l'on utilise, on peut étudier l'effet du bruit sur les performances du détecteur.

Supposons une transmission qui se fait au moyen d'une signalisation de type "polar NRZ". Les "1" et "0" sont représentés par des impulsions rectangulaires de même durée et de signes opposés.

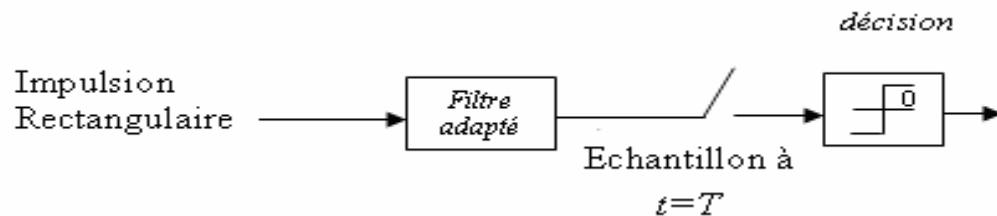


Figure 2.2 : Structure de réception considérée.

Le seul effet du canal pris en compte est d'ajouter un bruit blanc gaussien additif au signal envoyé ; en terminologie, on utilise l'acronyme BBGA. En anglais, on parle de canal AWGN (additive white gaussian noise). Le bruit est centré et de densité spectrale bilatérale $N_0 / 2$.

Le signal reçu dans un intervalle T_b correspondant à la durée du bit, est donné par :

$$x(t) = \begin{cases} +A + n(t) & \text{pour l'envoi d'un "1"} \\ -A + n(t) & \text{pour l'envoi d'un "0"} \end{cases} \quad (2.20)$$

On fait l'hypothèse que le récepteur connaît l'instant de départ et de fin du bit transmis. Ayant observé une réalisation du signal $x(t)$ le détecteur doit décider si c'est un "0" ou un "1" qui a été transmis.

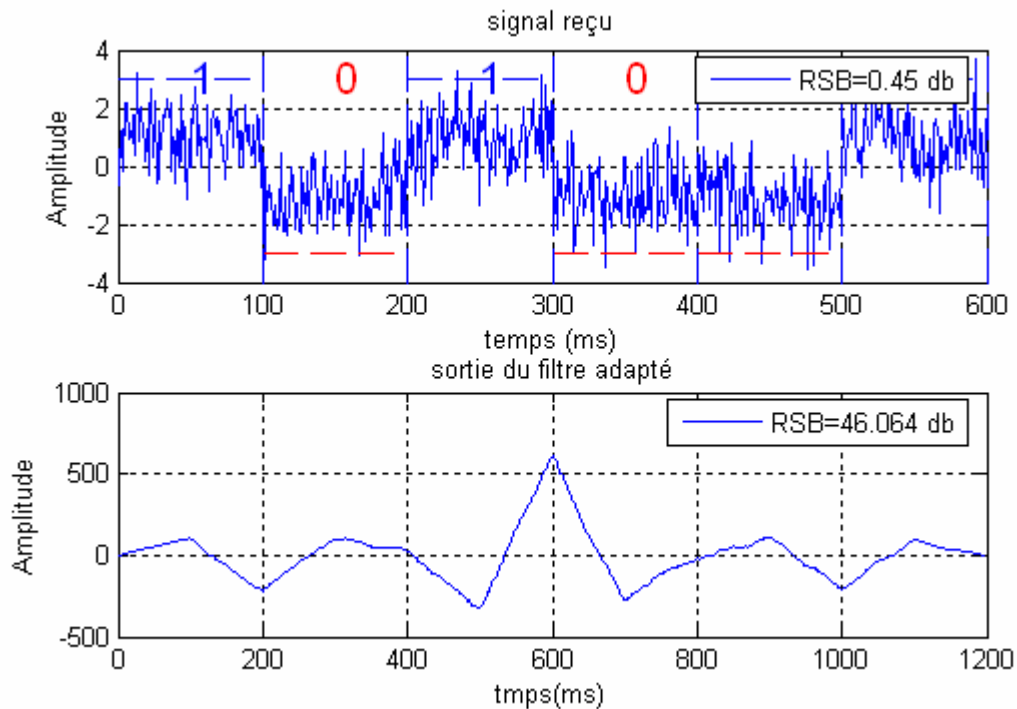


Figure 2.3 : sortie du filtre adapté d'un signal noyé dans un bruit blanc.

La structure de réception est donnée par la figure (2.2). Le récepteur contient un filtre adapté à l'impulsion rectangulaire de durée T_b , suivi d'un échantillonneur qui prend la valeur au "bon instant", et enfin, un organe de décision qui compare la valeur obtenue à un seuil. C'est évidemment la présence du bruit qui fait que la sortie du filtre adapté n'est pas une valeur certaine mais devient une variable aléatoire.

Ce qui nous intéresse, c'est bien sûr que la probabilité d'erreur, c'est-à-dire la probabilité de prendre une mauvaise décision, soit minimisée. Appelons P_e cette probabilité d'erreur. [9], [10]

Par Bayes, on a :

$$P_e = P[0/1]P_1 + P[1/0]P_0 \quad (2.21)$$

où $P[a/b]$ signifié la probabilité de décider "a" alors que "b" qui était envoyé. P_1 et P_0 représentent les probabilités a priori d'avoir un "1" ou un "0".

Dans le cas d'un signal rectangulaire, le filtre adapté, est intégré sur la durée du bit, en appelant Y la sortie du filtre adapté au bon instant:

$$Y = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} x(t) dt \quad (2.22)$$

Supposons d'abord que le bit "0" était envoyé, alors :

$$Y = -A + \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} n(t) dt \quad (2.23)$$

Cette variable aléatoire est gaussienne, puisque $n(t)$ est gaussien, de moyenne $(-A)$ et de variance $(\sigma^2_{y/0})$ donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma^2_{y/0} &= E[(Y + A)^2] \\ &= \frac{1}{T_b^2} \int_0^{T_b} dt \int_0^{T_b} dt' E[n(t)n(t')] \\ &= \frac{1}{T_b^2} \int_0^{T_b} dt \int_0^{T_b} dt' \frac{N_o}{2} \delta(t - t') \\ &= \frac{1}{T_b^2} \frac{N_o}{2} \int_0^{T_b} dt \\ &= \frac{N_o}{2T_b} \end{aligned} \quad (2.24)$$

La densité de probabilité de Y conditionnellement à l'envoi d'un "0" est donc donnée par :

$$T_{Y|0}(y/0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_o / T_b}} \exp\left[-\frac{(y + A)^2}{N_o / T_b}\right] \quad (2.25)$$

Supposons qu'un seuil de décision ait été fixé à une valeur μ . Il y aura erreur lorsque "0" a été transmis, et on observe un $y \geq \mu$. La probabilité que cela se passe est donnée par :

$$P[1/0] = \int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_o / T_b}} \exp\left[-\frac{(y + A)^2}{N_o / T_b}\right] dy \quad (2.26)$$

En utilisant la définition de la fonction d'erreur complémentaire :

$$\text{erfc}(u) = \int_u^{\infty} \frac{2}{\pi} \exp(-s^2) ds \quad (2.27)$$

L'expression (2.26) est écrite alors :

$$P[1/0] = 0.5 \text{erfc}\left(\frac{A + \mu}{\sqrt{N_o / T_b}}\right) \quad (2.28)$$

On peut mener un raisonnement semblable en supposant qu'un "1" a été transmis. Dans ce cas, la variable obtenue à la sortie du filtre adapté vaut :

$$Y = A + \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} n(t) dt \quad (2.29)$$

Cette variable aléatoire est toujours gaussienne, puisque $n(t)$ est gaussien, de moyenne (A) et de variance ($\sigma_{y/1}^2$) donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_{y/1}^2 &= E[(Y - A)^2] \\ &= \frac{1}{T_b^2} \int_0^{T_b} dt \int_0^{T_b} dt' E[n(t)n(t')] \\ &= \frac{N_o}{2T_b} \end{aligned} \quad (2.30)$$

La densité de probabilité de Y conditionnellement à l'envoi d'un "1" est donc donnée par :

$$T_{Y/1}(y/1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_o / T_b}} \exp\left[-\frac{(y - A)^2}{N_o / T_b}\right] \quad (2.31)$$

Il y a aura erreur lorsque "1" a été transmis et que l'on observe un $y \leq \mu$. La probabilité d'erreur est donnée par :

$$\begin{aligned} P[0/1] &= \int_{-\infty}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{\pi N_o / T_b}} \exp\left[-\frac{(y - A)^2}{N_o / T_b}\right] dy \\ &= 0.5 \operatorname{erfc}\left(\frac{A - \mu}{\sqrt{N_o / T_b}}\right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dés lors,

$$\begin{aligned} P_e &= P[0/1] P_1 + P[1/0] P_0 \\ &= 0.5 P_1 \operatorname{erfc}\left(\frac{A - \mu}{\sqrt{N_o / T_b}}\right) + 0.5 P_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{A + \mu}{\sqrt{N_o / T_b}}\right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

On peut montrer (en minimisant P_e vu comme une fonction de μ) que lorsque les "0" et "1" sont équiprobables, soit donc $P_0 = P_1$, le seuil optimal de décision (au sens de la minimisation de la probabilité d'erreur) correspond à $\mu = 0$ ce qui est conforme à l'intuition. Par ailleurs on obtient :

$$P_e = 0.5 \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{N_o / T_b}}\right) \quad (2.34)$$

on peut définir l'énergie du bit par $E_b = A^2 T_b$ ce qui est bien l'énergie contenue dans une impulsion rectangulaire de durée T_b et de hauteur $\pm A$, on obtient alors :

$$P_e = 0.5 \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right) \quad (2.35)$$

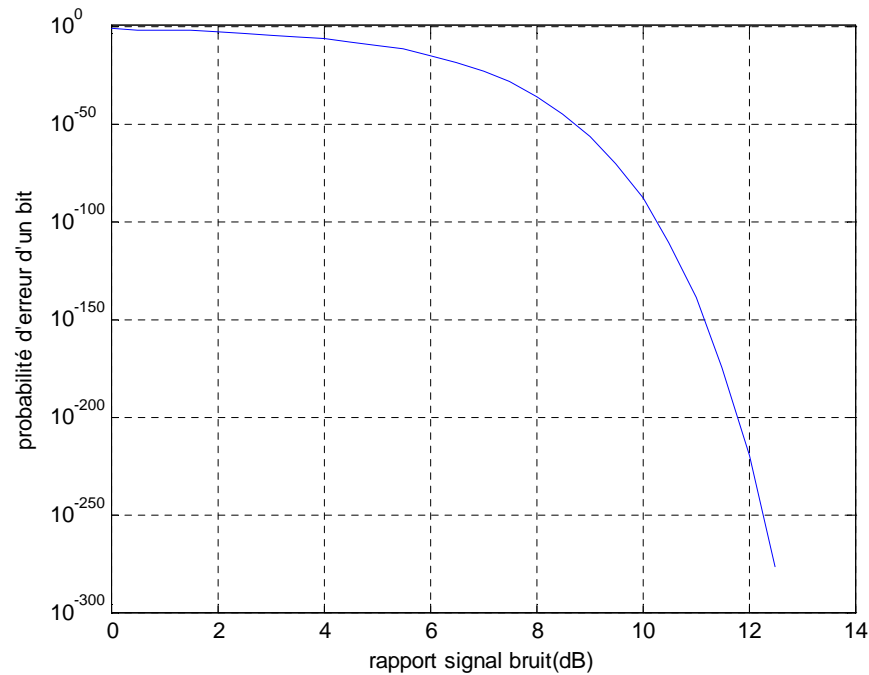


Figure 2.4 : Courbe donnant le taux d'erreur en fonction du rapport E_b / N_0 en dB des signaux NRZ signés ("polaires").

Cette probabilité est illustrée à la figure (2.4). Ce résultat appelle plusieurs commentaires :

1. la quantité déterminante n'est pas exactement un rapport signal à bruit mais bien un rapport énergie de bit à densité spectrale de bruit.

2. l'énergie de bit dont on parle ici est bien celle qui arrive au récepteur ; le cas échéant cette énergie a donc subi l'atténuation du canal.

3. le taux d'erreur se dégrade assez rapidement dans les communications numériques. Lorsque le rapport E_b / N_0 diminue, le taux d'erreur monte très rapidement. C'est la raison pour laquelle l'on dit parfois que les communications numériques sont du type "tout ou rien". Sur une plage de quelques dB l'on passe d'un taux d'erreur de 0.0001 (une erreur sur 10.000 bits en moyenne) à 0.01 (une erreur sur 100 bits en moyenne) ; la dégradation n'est donc pas véritablement progressive.

2.4 - Réalisation approche d'un filtre adapté :

Nous venons de voir que la réalisation rigoureuse était impossible dans le cas général. D'autre part un signal $x(t)$ à spectre limité peut sans perte d'information être échantillonné. Le filtre étant linéaire ne génère pas de fréquences nouvelles, le spectre de sortie ne peut être que plus étroit que celui d'entrée, la même fréquence d'échantillonnage suffit donc toujours. [11], [12]

Nous travaillons donc sur des signaux échantillonnés. Le traitement optimal à la réception comporte :

- un filtre de réception dont la réponse $h(t)$ est la copie « retournée » dans le temps de $s(t)$. Ce filtre porte le nom de filtre adapté.
- un échantillonneur à la cadence T .
- et un organe de décision qui compare l'échantillon à un seuil.



Figure 2.5 : schéma du récepteur.

Pour un filtre de réponse impulsionnelles $h(t)$, la sortie est :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du \quad (2.36)$$

$x(t)$: est connu aux instants d'échantillonnage.

$T = k.T_e$: où T_e étant l'instant d'échantillonnage.

De même $h(t)$ est connu à ce même instant. La valeur de y à l'instant nT_e est alors donné rigoureusement par :

$$y(nT_e) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(kT_e) h[(n-k)T_e] \quad (2.37)$$

Il est impossible de disposer un nombre infini d'échantillons, on fera une approximation en limitant le nombre de termes de cette somme. A l'instant considère nT_e supposons que nous disposons de N valeur de x aux instants immédiatement antérieurs $\{nT_e, (n-1)T_e, \dots, (n-N+1)T_e\}$ une valeur approche de $y(nT_e)$ sera alors :

$$y(nT_e) = \sum_{k=n-N}^{k=n} x(kT_e) h[(n-k)T_e] \quad (2.38)$$

La sommation doit se faire instantanément à l'instant nT_e , il faut donc disposer simultanément de tous les échantillons de x , ceci est possible en utilisant un registre à décalage.

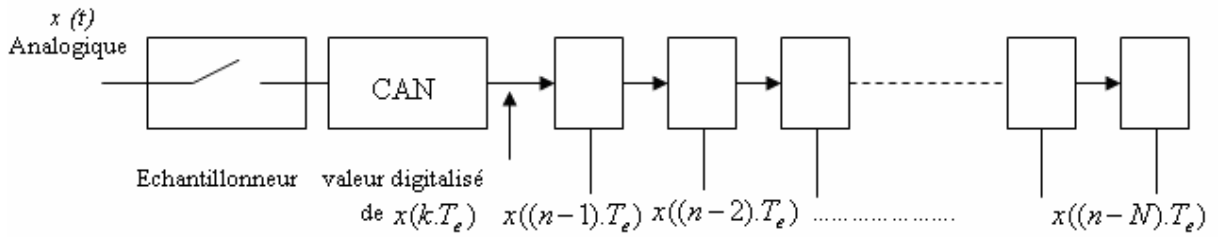


Figure 2.6 : Montage d'un registre à décalage.

A l'instant nT_e le convertisseur délivre $x(nT_e)$, et le registre du convertisseur contient $x((n-1)T_e), x((n-2)T_e), \dots, x((n-N)T_e)$

Il faut faire la somme :

$$y(nT_e) = x[(n-N)T_e]h[NT_e] + x[(n-N+1)T_e]h[(N-1)T_e] + \dots + x[nT_e]h(0) \tag{2.39}$$

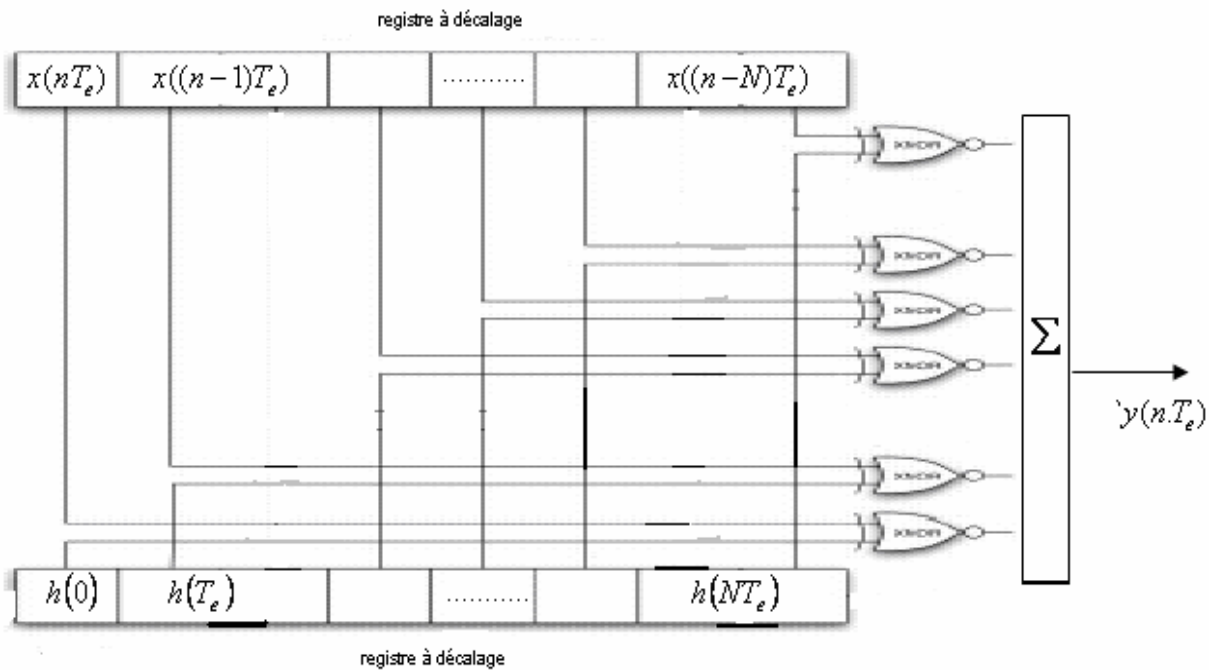


Figure 2.7 : principe de base du filtre adapté.

Le principe de départ est d'avoir un des deux signaux (signal émis et sa version retournée) fixe. On l'appellera signal de référence Le signal $x(kT_e)$ est stocké dans un registre afin d'être disponible pendant toute la durée du calcul. L'autre signal, appelé signal de donnée, est inséré bit par bit dans un autre registre de même taille que celui du $x(kT_e)$. À chaque coup d'horloge, un signal de donnée est décalé dans le registre et un nouveau bit est inséré. Il suffit alors d'effectuer l'opération de multiplication bit par bit entre le signal de

référence et signal de donnée. Après la multiplication, il reste alors à faire la somme de toutes sorties en utilisant un compteur pour obtenir le résultat.

2.5- Simulation d'un canal de transmission bruité : réception avec un filtre adapté :

Le signal discret est issu d'un Convertisseur Analogique Numérique qui échantillonne le signal analogique et quantifie les échantillons sur un certain nombre de bits (0, 16, 32, ...). Chaque échantillon existe à des instants précis correspondant au pas d'échantillonnage T_e (s).

Dans SIMULINK on trouve des générateurs de signaux discrets, comme des séquences binaires ou du bruit. On peut importer des signaux numériques depuis l'espace de travail MatLab. [13]

2.5.1- Construction d'un modèle SIMULINK :

Le modèle SIMULINK est présenté ci-dessous.

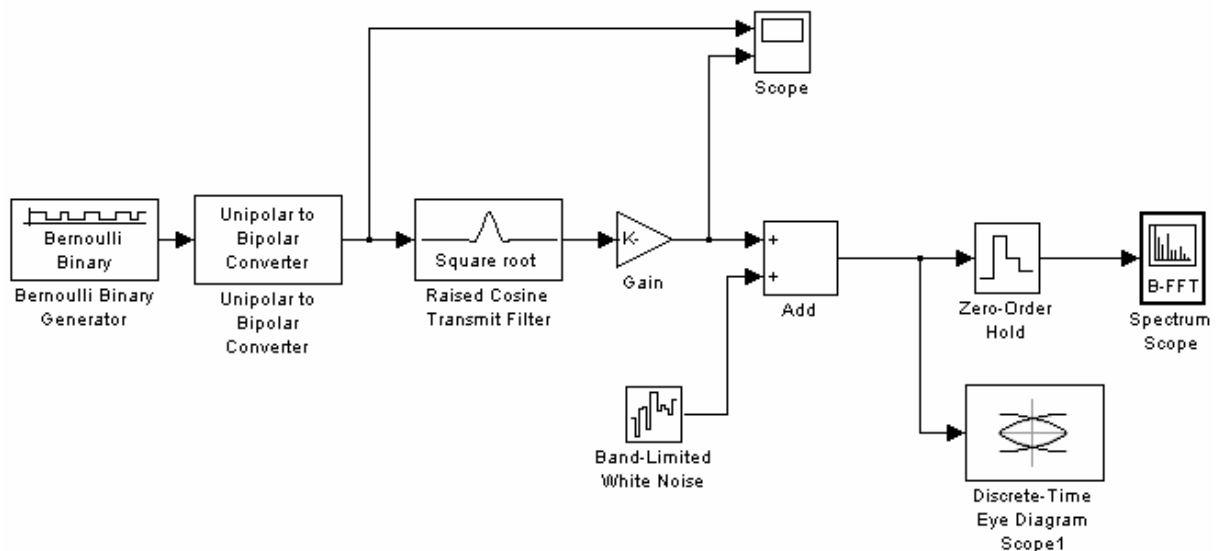


Figure 2.8 : Filtrage Adapté du signal à transmettre : modèle SIMULINK.

Notre système est constitué de plusieurs blocs :

- le bloc Bernoulli Binary Generator : est un générateur de séquences aléatoires, Il permet de générer des séquences aléatoires dont on peut fixer la probabilité d'apparition des 1 et des 0 et l'occurrence d'apparition des symboles.
- le bloc Unipolar to Bipolar Converter : est un codage NRZ, permet de convertir la séquence binaire issue du générateur de séquence aléatoire en un signal de type NRZ.
- Le bloc Raised Cosine Transmit Filter : est un filtre qui permet de réaliser le filtrage adapté.

- Le bloc band_limited white noise : est un générateur de bruit blanc sera configuré avec une puissance très faible : fixer à $1e-10$.
- Le bloc Zero-Order Holder : est un échantillonneur dont la période d'échantillonnage est fixée à 0.1s, pour observer le spectre jusqu'à 5Hz.
- la bloc Discrete-time Eye Diagram Scope : permet de réaliser Le diagramme de l'oeil.

Le signal numérique généré passé à travers un filtre adapté, ce filtre a pour but de limiter le spectre à la bande du canal. Lors de sa transmission à travers le canal ce signal se déforme à l'effet du bruit.

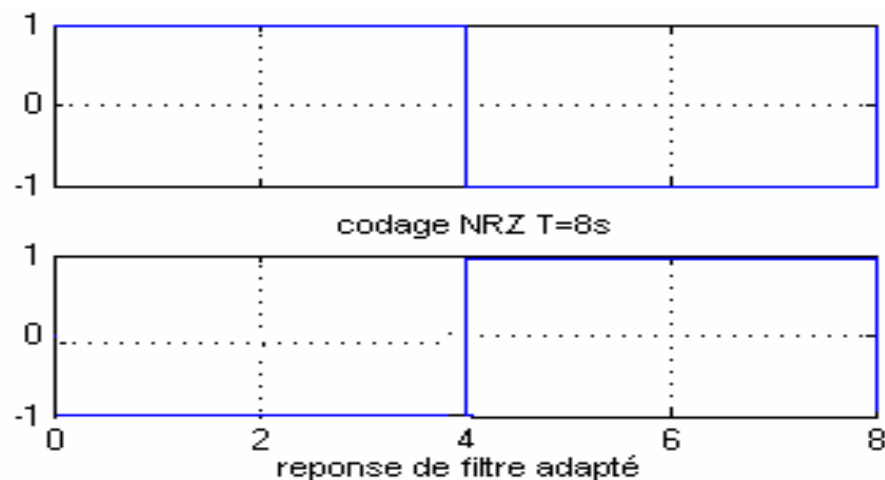


Figure 2.9 : Résultats de simulation.

De façon générale le canal de transmission agit comme un filtre passe-bas, ce qui a pour effet d'étaler les signaux dans le temps. Dans la plupart des cas, comme par exemple sur le canal téléphonique, le filtre adapté *s'étale* bien au-delà de T . Il y a par conséquent «débordement» du signal correspondant aux symboles sur les intervalles de temps qui suivent. On dit qu'il y a interférence entre symboles (en abrégé IES).

Ce phénomène est gênant car il rend plus difficile la récupération des symboles transmis en présence de bruit. Même sous l'hypothèse que le bruit gaussien est blanc, le récepteur optimal passe par un algorithme complexe, appelé algorithme de viterbi.

Pour voir le phénomène d'interférence entre symboles on utilise un oscilloscope et on mémorise les traces du signal pendant la durée de transmission des symboles. La figure obtenue s'appelle le diagramme de l'oeil. Au plus l'oeil est ouvert au plus la réception sera facile. L'ouverture horizontale nous donne la plage temporelle de décision et l'ouverture verticale nous donne une tolérance au bruit. [14]

Plus l'ouverture est grande, plus facile est la distinction entre les symboles 0 et 1. Plus l'ouverture est large, plus simple est le système de récupération de rythme, il n'a pas besoin d'être plus précis. Par conséquent il faut choisir l'instant de décision au milieu de l'oeil.

Pour avoir une bonne réception du signal, c'est-à-dire une bonne décision 0 ou 1, il faut que le diagramme de l'oeil soit suffisamment ouvert.

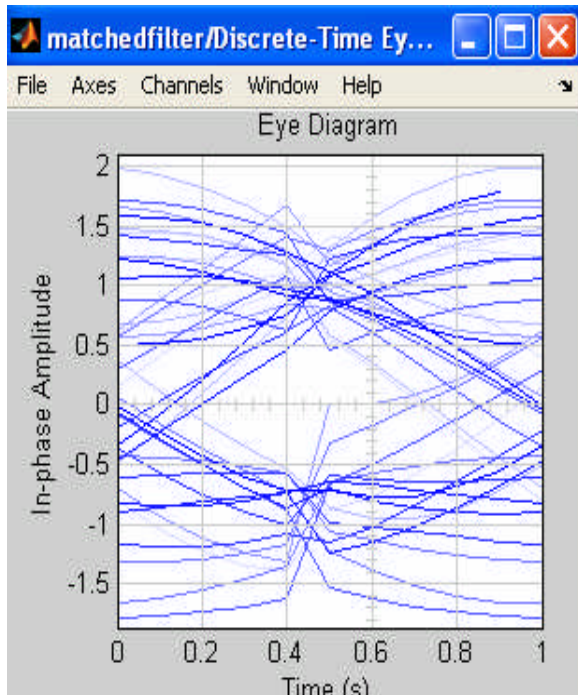


Figure 2.10 : Diagramme de l'oeil pour $P_b = 10^{-1}$

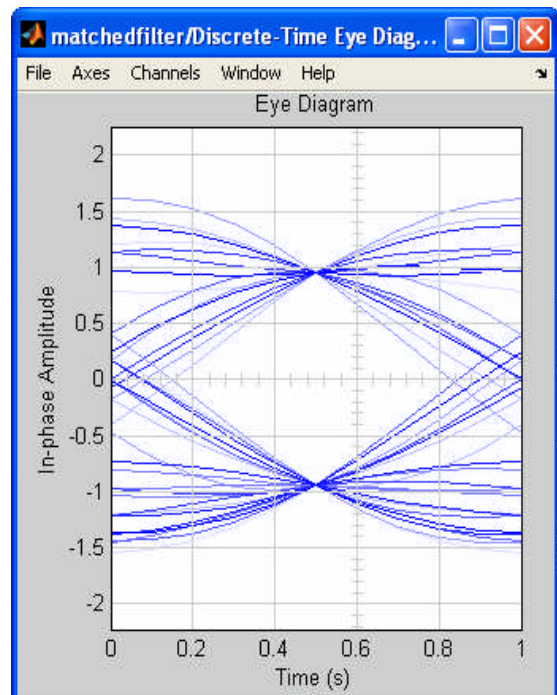


Figure 2.11 : Diagramme de l'oeil pour $P_b = 10^{-20}$

En générale , la probabilité d'erreur est exprimée en fonction du rapport signal sur bruit RSB entre l'énergie moyenne E_b nécessaire pour transmettre un bit et N_o ou $N_o/2$ est la densité spectrale de bruit blanc (dsp) . Si P_s désigne la puissance du signal utile et P_b la puissance de bruit dans la bande $(-f_e/2, +f_e/2)$, on a : $P_s = E_b/T_b$ et $P_b = N_o f_e/2$.

Par conséquent le rapport RSB a pour expression :

$$RSB = \frac{E_b}{N_o} = \frac{P_s T_f}{2P_b} = \frac{N_T P_s}{2P_b}$$

Où : N_T désigne le nombre d'échantillons dans l'intervalle T entre deux symboles.

2.6- Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons étudié le filtrage adapté qui est optimal au sens du critère du rapport signal -à- bruit. Nous avons montré l'effet du bruit sur les performances du détecteur, ainsi l'importance de la probabilité d'erreur pour prendre la bonne décision, ensuite on a fait une simulation par matlab pour monter l'influence du canal de transmission pour la réception des signaux (diagramme de l'oeil).

CHAPITRE III

Le corrélateur

CHAPITRE III

Le corrélateur

3.1 - Introduction :

L'opération de corrélation est un élément très important dans le traitement des signaux. Elle permet en particulier de déterminer le degré de similitude entre deux signaux. En général, un des deux signaux est connu et l'autre non. Cependant, la corrélation peut également être utilisée pour la recherche de périodicité dans un signal, l'extraction d'un signal noyé dans du bruit ainsi que la détermination de la densité spectrale de puissance...

Dans le cadre de la détection par la méthode de corrélation, on a fait une application sur la localisation de la cible. Le problème de la détection et de la localisation d'une cible consiste à estimer sa position: il s'agit en fait d'un problème d'estimation de paramètre. Nous souhaitons estimer au mieux le paramètre "position" de la cible étant donné les informations dont nous disposons, à savoir :

- la forme a priori du signal;
- les données qui résultent de l'observation.

Dans ce chapitre, nous ferons quelques brefs rappels sur la théorie de cette méthode. L'optimisation du RSB par compression d'impulsion sera étudié, aussi l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance. Nous présenterons également quelques concepts de la théorie de la décision, étape nécessaire pour détecter la présence ou l'absence d'une cible dans le signal observé en détaillant le critère de Neyman Person qui est le critère de décision le plus adapté à la recherche d'une cible.

3.2 - Approche intuitive :

Un moyen simple de mesurer le degré de dépendance, donc la similitude entre deux signaux consiste à faire le produit moyenné des signaux, ce qui revient à calculer la puissance moyenne d'interaction. Dans le cas de signaux s_x et s_y , complexes (pour plus de généralités) numérisés sur N échantillons, la puissance moyenne peut s'écrire : [16]

$$P_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_x(n) s_y^*(n) \quad (3.1)$$

$$P_{yx} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_y(n) s_x^*(n) \quad (3.2)$$

La fonction de corrélation de deux signaux définie par :

$$R_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_x^*(n) s_y(n+k) \tag{3.3}$$

Le facteur $1/N$ évite que la valeur de la corrélation dépende du nombre d'échantillons. Il est parfois omis. Que le décalage soit défini positivement ou négativement ne change pas fondamentalement le résultat, aussi trouvera également l'expression :

$$R_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_x^*(n) s_y(n-k) \tag{3.4}$$

Dans le cas d'une fonction d'autocorrélation d'un signal s , on aura :

$$R(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s^*(n) s(n+k) \tag{3.5}$$

3.2.1 -Cas des signaux numérique :

L'acquisition d'un signal nécessite un échantillonnage, une numérisation et un fenêtrage (le calcul ne peut se faire sur un nombre infini d'échantillons). Le fait de décaler un signal dans l'opération de corrélation pose alors le problème de la connaissance des échantillons suivants ou précédents la fenêtre d'acquisition (suivant le sens du décalage).

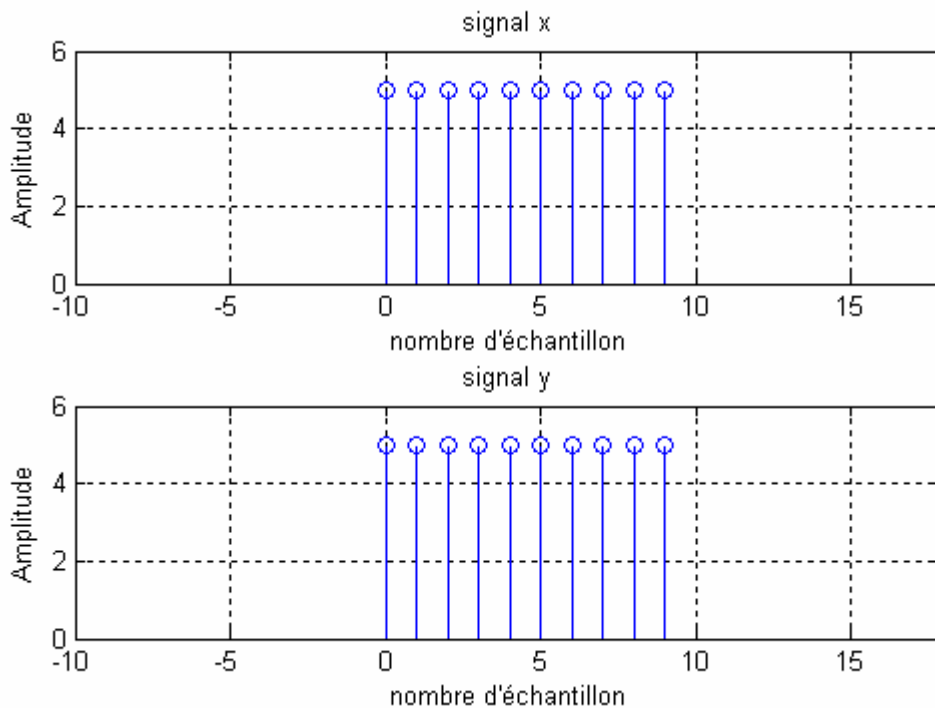


Figure 3.1 : fonction décale de 0 Echantillon : K=0.

On trouve bien $R(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n).y(n+0) = \frac{1}{10} (10 \times 5^2) = 25$

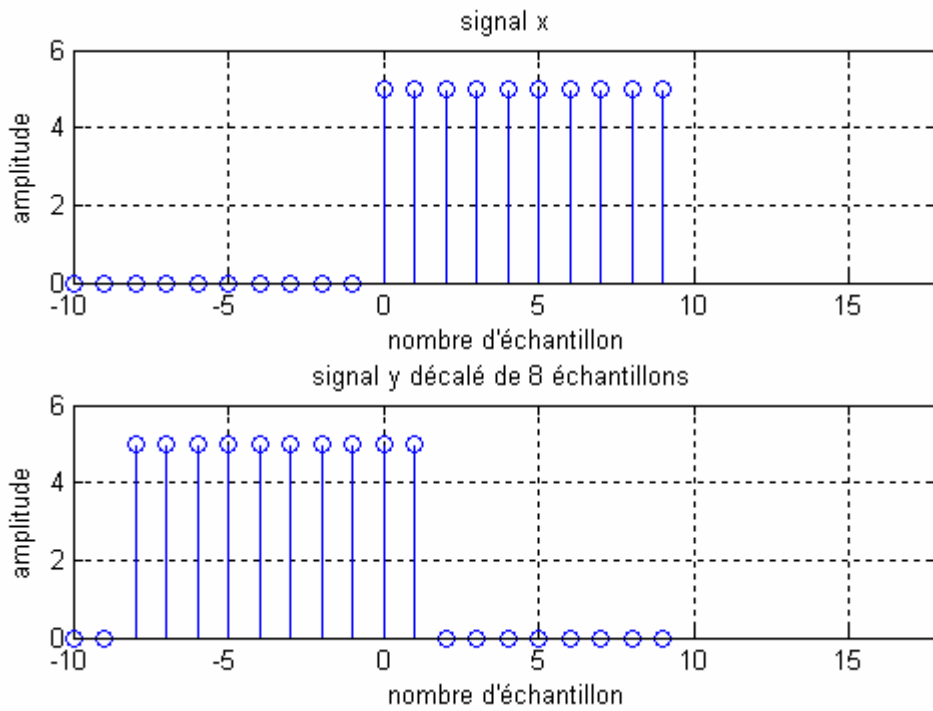


Figure 3.2 : fonction décale de 8 échantillons : K=8.

On peut remarquer que l’opération nécessite de connaître les échantillons de y de 2 à 9 pour effectuer la sommation des échantillons de 0 à 9.

Plusieurs stratégies sont alors possibles :

- considérer le signal périodique de période égale à la longueur de la fenêtre d’acquisition, on retrouve alors la valeur 25 précédente.
- considérer les échantillons non acquis comme nuls. l’expression de la corrélation devient alors :

$$R_{xy}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-1-k} s_x^*(n) s_y(n+k) \tag{3.6}$$

on trouvera alors $R(8) = \frac{1}{2}(2 \times 5^2) = 25$

3.2.2- Cas des signaux analogiques :

3.2.2.1- Cas des signaux à puissance finie :

- Corrélation
$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_x^*(t) s_y(t + \tau) dt \tag{3.7}$$

- Autocorrélation
$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^*(t) s(t + \tau) dt \tag{3.8}$$

3.2.2.2- Cas des signaux à énergie finie :

$$\text{- Corrélation} \quad R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_x^*(t) s_y(t + \tau) dt \quad (3.9)$$

$$\text{- Autocorrélation} \quad R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t) s(t + \tau) dt \quad (3.10)$$

3.2.3- Propriétés :**3.2.3.1 -Parité pour des signaux réels :**

Si les signaux sont réels, les fonctions de corrélation et autocorrélation sont paires : [17]

$$R_{xy}(\tau) = R_{xy}(-\tau) \quad \text{et} \quad R(\tau) = R(-\tau)$$

3.2.3.2- Valeur maximale :

Un signal ressemblera d'autant plus à un autre que cet autre est le même signal non décalés la fonction d'autocorrélation est donc maximale pour $\tau = 0$.

$$|R(\tau)| \leq R(0) \quad (3.11)$$

Cette propriété permettra de détecter les périodicités cachées, la valeur maximale se retrouvant au bout d'une période.

3.2.3.3- Puissance :

Toujours pour la valeur $t=0$, la fonction de corrélation correspond à la puissance d'interaction des signaux et la fonction d'autocorrélation à la puissance normalisée.

$$R_{xy}(0) = P_{yx} \quad \text{et} \quad R(0) = P$$

3.2.3.4 - Relation avec la convolution :

Un simple changement de variable dans les expressions de la corrélation et autocorrélation permet de mettre en évidence une relation avec le produit de convolution.

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= x^*(-\tau)y(\tau) \\ R(\tau) &= x^*(-\tau)x(\tau) \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.2.3.5- Théorème de Wiener-Kintchine :

Pour comprendre ce théorème, prenons un signal analogique aléatoire. Une suite d'échantillons de ce signal n'a aucune relation temporelle avec une suite d'échantillons prise plus loin dans le temps, tout comme un échantillon donné n'a aucune relation avec le suivant ou le précédent. On peut donc en déduire intuitivement que la fonction d'autocorrélation d'un tel signal se réduit à une simple impulsion de Dirac centrée en $t = 0$.

D'autre part, un tel signal contient de l'énergie dans toute la bande de fréquence sans favoriser une fréquence plus qu'une autre. Sa densité spectrale de puissance est donc constante sur tout le spectre. Une telle DSP est la transformée de Fourier d'un Dirac. [13]

Le théorème de Wiener-Kintchine s'énonce comme suit pour les signaux à puissance finie : La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation d'un signal est la densité spectrale de puissance de ce signal.

Pour les signaux à énergie finie, ce théorème reste valable en utilisant la fonction d'autocorrélation appropriée et la densité spectrale d'énergie.

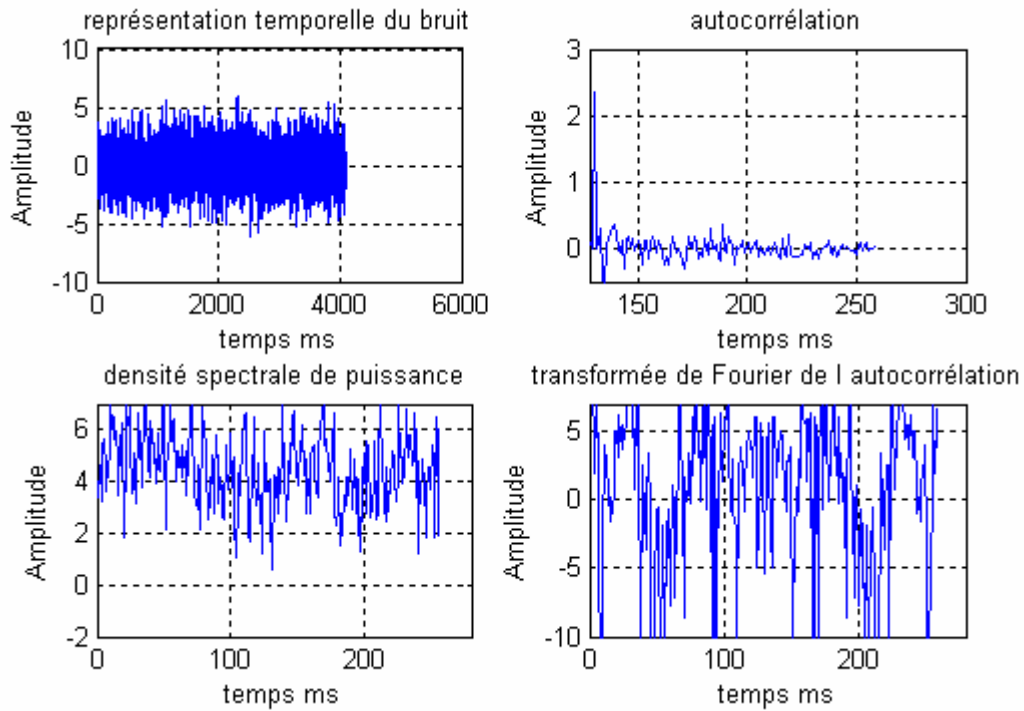


Figure 3.3 : représentation du théorème de Wiener-Kintchine.

On remarque que la fonction d'autocorrélation est (presque) nulle partout, sauf en 0 où elle correspond à la puissance du signal. La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation correspondent bien à une dsp.

3.3 - Estimation de la fonction d'autocorrélation :

3.3.1- Estimateur non biaisé :

Un premier estimateur est défini comme suit :

$$\overline{R_{xx}}(k) = \frac{1}{N - |k|} \cdot \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x(n)x^*(n+k) \quad (3.13)$$

On peut vérifier que $E[\overline{R_{xx}}] = R_{xx}$ cet estimateur n'est donc pas biaisé. Pour $k \ll N$, on montre que sa variance vaut : [15]

$$VAR[\overline{R_{xx}}] \approx \frac{N}{(N - |k|)^2} \sum_l [R_{xx}^2(l) + R_{xx}(l+k)R_{xx}(l-k)] \quad (3.14)$$

et puisque elle varie comme $\frac{1}{N}$, l'estimateur est consistant.

3.3.2- Estimateur biaisé :

On peut définir un autre estimateur :

$$\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x(n)x^*(n+k) \quad (3.15)$$

pour lequel on a évidemment :

$$E[\hat{R}_{xx}(k)] = \frac{N-|k|}{N} R_{xx}(k) \quad (3.16)$$

d'autre part, on trouve pour la variance :

$$\text{VAR}[\hat{R}_{xx}] \approx \frac{1}{N} \sum_l [R_{xx}^2(l) + R_{xx}(l+k)R_{xx}(l-k)] \quad (3.17)$$

Ce nouvel estimateur est donc biaisé (surtout pour les grandes valeurs de k), mais reste consistant. On observe par contre que lorsque k approche du nombre d'échantillons N , la variance de l'estimateur non biaisé devient excessive, alors que celle de l'estimateur biaisé varie beaucoup moins. C'est une des raisons pour lesquelles cet estimateur est souvent utilisé par la suite, malgré son biais. [19]

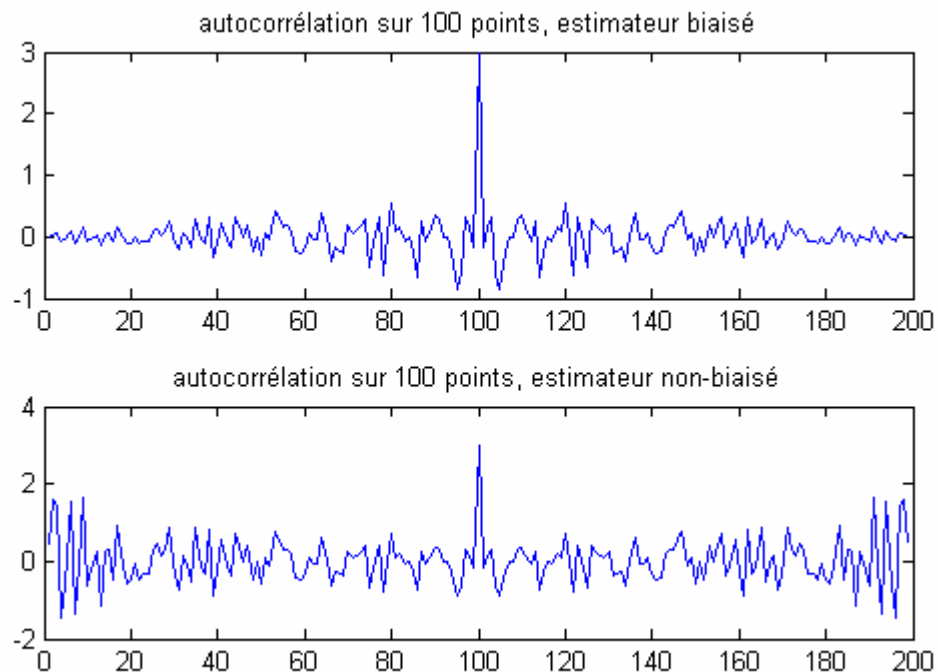


Figure 3.4- estimateur biaisé et non biaisé sur 100 points d'un bruit blanc.

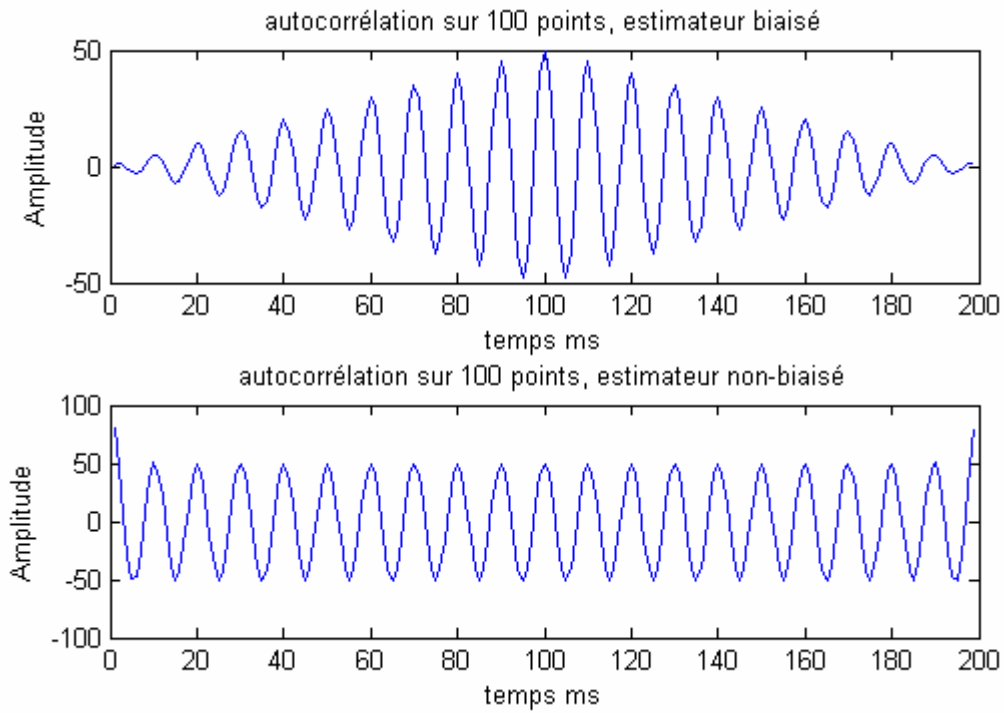


Figure 3.5 : estimateur biaisé et non biaisé sur 100 points d'un cissoïde

3.4 - Le rapport signal bruit à la sortie d'un corrélateur :

Il est intéressant de noter le comportement du calcul d'intercorrrelation en présence des signaux aléatoires comme le bruit qui vient se superposer au signal émis par les transducteurs.

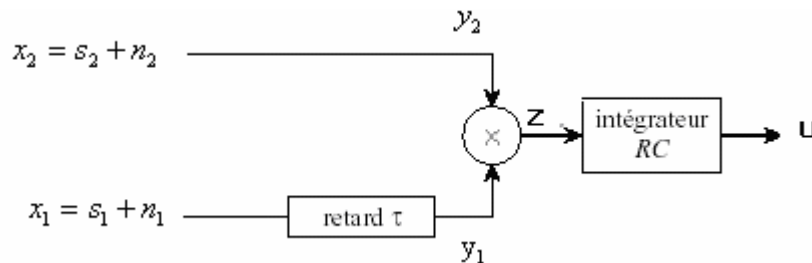


Figure 3.6 : Schéma d'un corrélateur.

Le système étudié est en effet constitué d'une cellule de retard τ , d'un multiplieur suivi d'un intégrateur qui peut se réduire à un simple filtre RC. En situation réelle, c'est-à-dire en présence de bruit, les deux signaux acquis sont les suivants :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= s_1(t) + n_1(t) \\ x_2(t) &= s_2(t) + n_2(t) \end{aligned} \tag{3.18}$$

L'intercorrrelation entre ces deux signaux s'écrit :

$$R_{x_1x_2}(\tau) = R_{s_1s_2}(\tau) + R_{s_1n_2}(\tau) + R_{s_2n_1}(\tau) + R_{n_1n_2}(\tau) \tag{3.19}$$

Or les signaux réels s_1 et s_2 sont indépendants des signaux aléatoires que constituent les bruits n_1 et n_2 .

Donc on a :
$$R_{x_1x_2}(\tau) = R_{s_1s_2}(\tau) + R_{n_1n_2}(\tau) \tag{3.20}$$

La fonction d'intercorrélation de deux signaux aléatoires tend vers 0 quand le temps τ tend vers l'infini. Il existe toujours un temps τ_1 tel que pour $|\tau| > \tau_1$, $|R_{s_1s_2}| < R_{s_1s_2}(0)$. Cette valeur de τ_1 dépend essentiellement des caractéristiques du bruit surtout de sa densité spectrale. Plus le bruit est à large bande pour une puissance globale donnée, plus la fonction d'autocorrélation décroît rapidement. En effet, on peut démontrer que le calcul de l'intercorrélation accroît le rapport signal sur bruit.

Le rapport signal sur bruit en sortie du corrélateur est donné par :

$$(RSB)_{sortie} = 10 \log_{10} \frac{n(RSB)_{entrée}}{2} \tag{3.21}$$

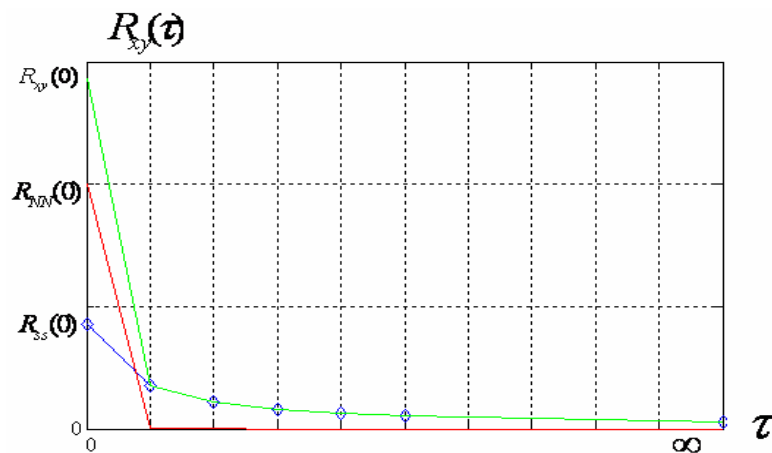


Figure 3. : Variation de la fonction d'intercorrélation en fonction de τ

3.5 - Mise en évidence de la periodicités caché dans un bruit :

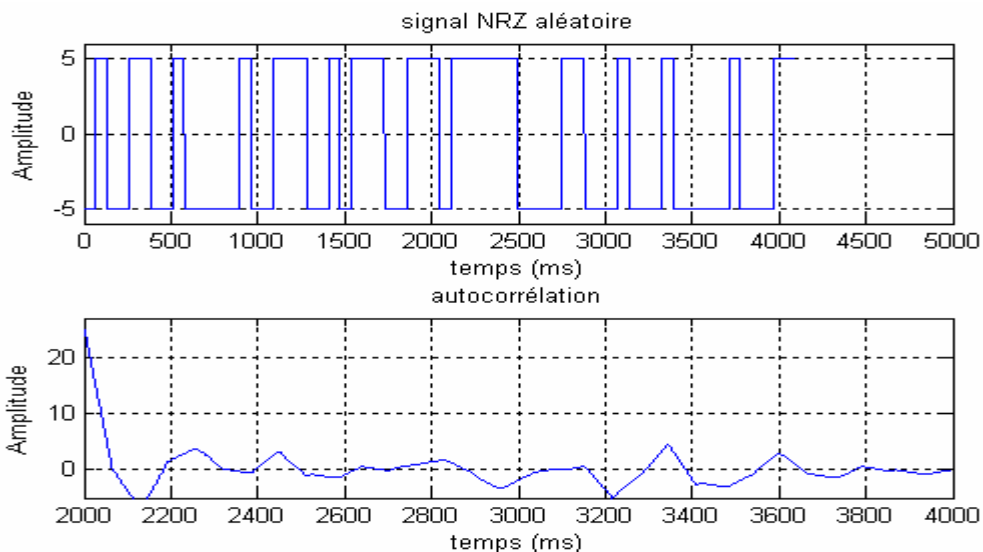


Figure 3.7 : fonction d'autocorrélation pour un signal NRZ aléatoire de 8 bits,.

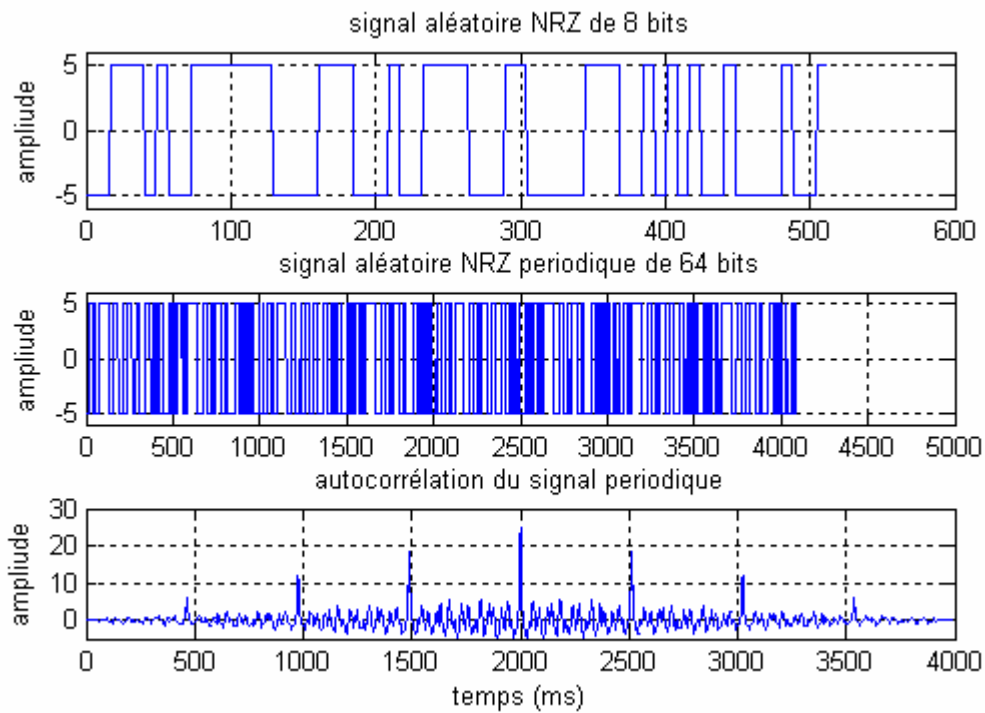


Figure 3.8 : fonction d'autocorrélation pour une suite de signal NRZ aléatoire de 64 bits .

Comme on peut le remarquer, l'autocorrélation présente une raie chaque fois que le retard correspond à une période du signal. Théoriquement, les amplitudes de ces raies devraient être identiques, l'atténuation étant due à l'algorithme utilisé pour effectuer le calcul. On peut donc à l'aide de l'autocorrélation détecter les périodes cachées (ou non) d'un signal.

3.6 - Recherche d'un signal périodique noyé dans du bruit :

On sait seulement que le signal recherché est périodique sans connaître sa période.

L'autocorrélation du signal peut se décomposer de la manière suivante :

$$R_{se} = R_{ss} + R_{nn} + R_{ns} + R_{sn} .$$

Le signal utile et le bruit n'étant pas corrélés, les deux derniers termes sont nuls. Comme nous l'avons vu précédemment, l'autocorrélation d'un bruit blanc produit une impulsion pour un décalage nul et zéro ailleurs. La fonction d'autocorrélation d'un signal sinusoïdal donne un autre signal sinusoïdal. L'information phase est cependant perdue, le maximum de la fonction étant obtenu à l'origine ; on a donc affaire systématiquement à une cosinusoïde.

cas d'un rapport signal sur bruit unitaire :

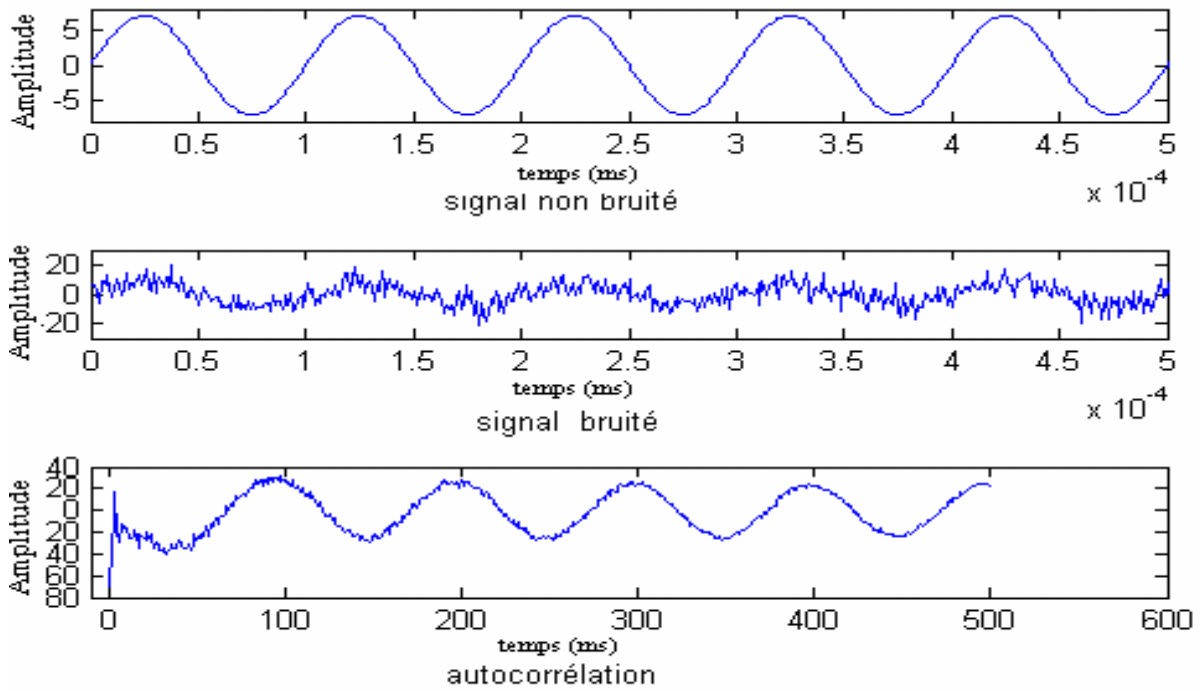


Figure 3.9 : l'autocorrélation d'un signal periodique noyé dans du bruit pour RSB=1 dB

cas d'un rapport signal sur bruit 0.1 :

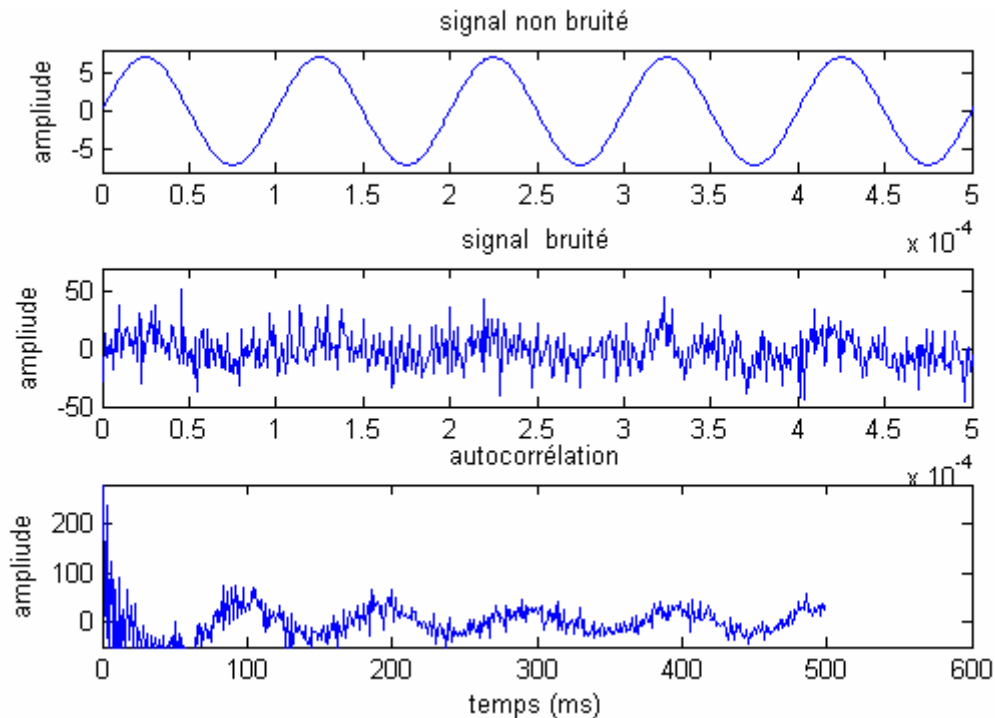


Figure 3.10 : l'autocorrélation d'un signal periodique noyé dans du bruit pour RSB=0.1 dB.

Les résultats obtenus vérifient bien la théorie, la fonction d'autocorrélation présentant une raie importante à l'origine, puis se développant en cosinusoïde. La raie d'origine est d'autant plus

importante que le rapport signal sur bruit est faible. De même la pureté de la cosinusoïde décroît avec ce rapport. La fonction d'autocorrélation n'a été représentée que sur un faible nombre d'échantillons, afin d'éviter l'effet d'atténuation du au moyennage. Pour retrouver le signal émis, corrélons maintenant le signal reçu avec une sinusoïde de référence interne au récepteur. Le déphasage entre le signal recherché et le signal du récepteur sont à priori quelconques.

Chronogrammes pour un rapport signal sur bruit de 0,001

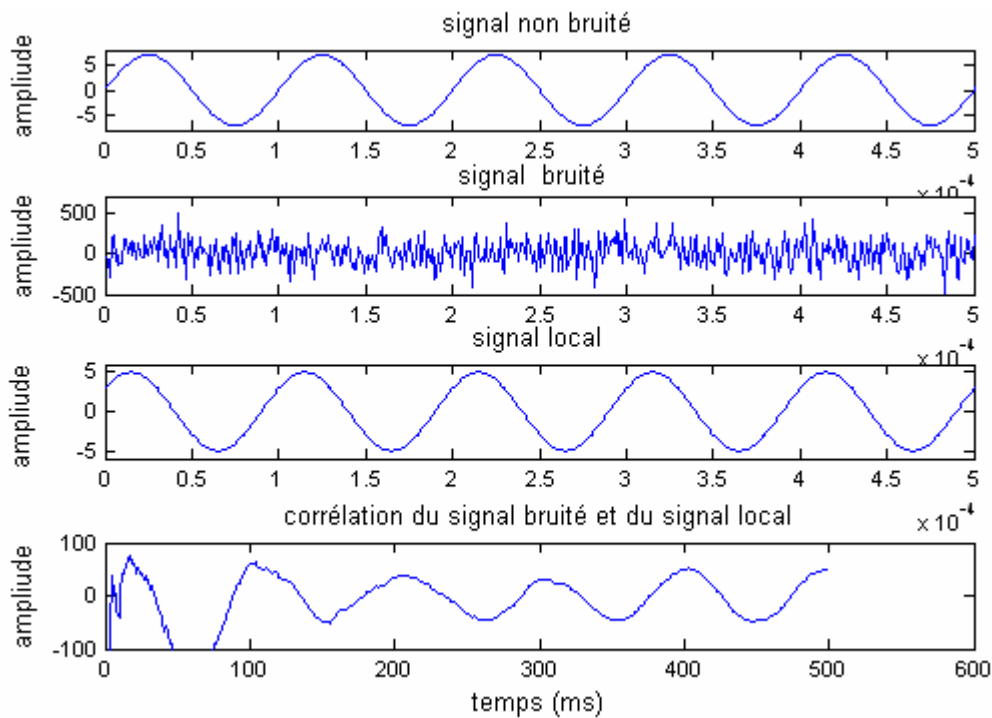


Figure 3.11 : chronogrammes pour un rapport signal sur bruit de 0,001

On observe cette fois une nette amélioration de la restitution du signal en sortie (alors que les chronogrammes ci-dessus sont tracés pour un rapport signal sur bruit 10 fois plus faible que dans l'exemple précédent), avec cette fois la possibilité de retrouver la phase du signal reçu : si f est le déphasage entre les sinusoïdes reçue et locale, la fonction d'autocorrélation est en effet maximale pour la valeur de t vérifiant : $w(t+\tau) + \phi = wt + 2k\pi$, soit $w\tau + \phi = 2k\pi$ connaissant on peut alors en déduire ce qui est un avantage par rapport à la méthode de l'autocorrélation. La fréquence du signal reçu doit par contre être à peu près connue (une wobulation du signal local est possible, suivi d'une détection de valeur maximale de la corrélation).

3.7 - Mesure d'un temps par l'intercorrélation :

Un signal $s(t)$ est envoyé vers une cible et un écho $x(t)$ revient vers l'émetteur. Le temps de parcours τ du signal permet de déterminer la distance à laquelle se situe la cible

mais l'écho de retour est en général un signal fortement bruité ce qui ne permet pas une mesure directe du temps de parcours. Cependant nous disposons du signal émis qui est indépendant du bruit qui s'ajoute lors du parcours et l'intercorrrelation permettra de minimiser l'effet de ce bruit.

$$x(t) = s(t - \tau) + n(t) \tag{3.22}$$

$$R_{xx} = R_{s(t-\tau)s(t)} + R_{ns} \tag{3.23}$$

$$R_{ns} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{xx} = R_{s(t-\tau)s(t)}$$

si le signal $s(t)$ est choisi tel que sa fonction d'autocorrélation R_{ss} soit maximale en $n=0$, la fonction d'intercorrrelation R_{xx} sera maximale en $nT_s = \tau$, l'effet du bruit devenant quasiment négligeable.

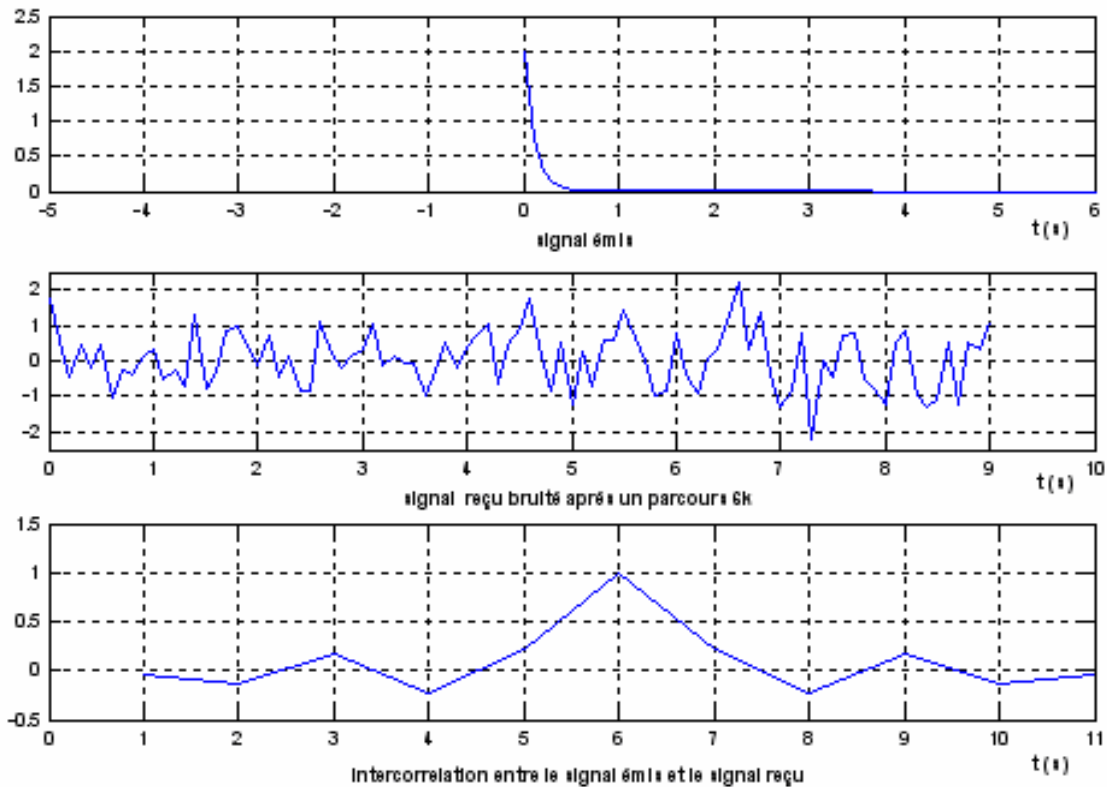


Figure 3.12 : mesure d'un temps par intercorrrelation.

3.8- Réception des signaux codés en Bande de Base :

3.8.1- Définition des signaux codés en Bande de Base :

Les signaux numériques sont représentée par une suite de symboles 0 et 1, que l'on peut regrouper en octet (suite de 8 symboles). Ces symboles n'ont aucune signification physique. On va donc les représenter par des signaux que l'on va pouvoir transmettre dans un canal de transmission, un câble coaxial ou bifilaire par exemple. Nous étudierons les

transmissions en Bande de Base : les signaux qui représentent les symboles sont basse fréquence ; ils ne sont pas modulés par une fréquence porteuse. On distingue :

- des codes à deux niveaux (NRZ, RZ, Manchester, Miller) où le signal représentant les symboles ne peuvent avoir que deux niveaux différents, -1 ou 1.
- des codes à trois niveaux (AMI, HDB3) où le signal peut prendre les valeurs -1, 0, 1.

Le canal de transmission, un câble par exemple, a une bande passante limitée ; les signaux transmis sont donc filtrés. Ils sont aussi atténués ; pour la transmission on aura besoin des répéteurs qui ne laissent pas passer les basses fréquences. Enfin, chaque symbole est transmis avec un certain rythme qu'il faut connaître pour une bonne réception.

3.8.2- Les principes de réception :

Les séquences binaires sont représentées par des signaux codés en Bande de Base. Ces signaux vont traverser le canal de transmission (air, fil de cuivre) où ils vont être modifiés : le canal a une bande passante limitée, donc les signaux seront filtrés et du bruit s'ajoute au signal. Le signal ayant traversé le canal de transmission sera reçu sur un récepteur. La réception, que l'on peut aussi appeler démodulation, consiste à prendre une décision concernant le symbole qui a été envoyé, 0 ou 1.

Le problème est tout à fait différent de celui de la démodulation des signaux analogiques. Dans le cas de la démodulation des signaux analogiques, on recherche la meilleure reconstitution du signal original qui contient l'information. Dans le cas de la démodulation des signaux numériques codés en Bande de Base, on ne cherche pas à retrouver le signal transmis mais retrouver les symboles transmis. Il faut prendre la bonne décision.

Il existe plusieurs méthodes, on s'intéresse à la méthode de la corrélation [24] :

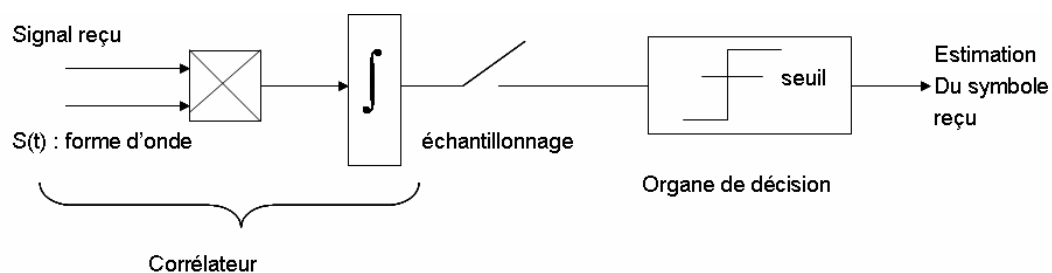


Figure 3.13 : principe de réception des signaux numériques codés en bande de base Par corrélation.

A la réception le signal est multiplié par la forme d'onde, puis il sera intégré et échantillonné au rythme de la transmission des symboles. On utilise un organe de décision, un comparateur de seuil par exemple, pour décider que le symbole transmis est un 0 ou un 1.

3.8.3- Simulation d'un canal de transmission bruité : réception avec un corrélateur :

Nous considérons dans cette simulation que le canal de transmission a une bande passante infinie et que la seule perturbation que subit le signal est l'ajout de bruit. Nous allons étudier l'influence de ce bruit sur la réception du signal en mesurant un taux d'erreur. Pour cela on utilisera une séquence binaire représentée par un signal codé Manchester auquel on additionne un bruit blanc gaussien pour simuler le signal reçu. [13]

Pour retrouver les symboles transmis on réalise une réception avec la méthode du corrélateur (figure 3.13). On multiplie le signal reçu par la forme d'onde utilisée pour le codage. On intègre pendant la durée T d'émission du symbole et on échantillonne le signal toutes les T secondes. Enfin on utilise un comparateur au seuil zéro pour décider si le symbole reçu est un 1 ou un 0 : si le symbole du signal est positif, ce sera un 1, s'il est nul, ce sera un zéro.

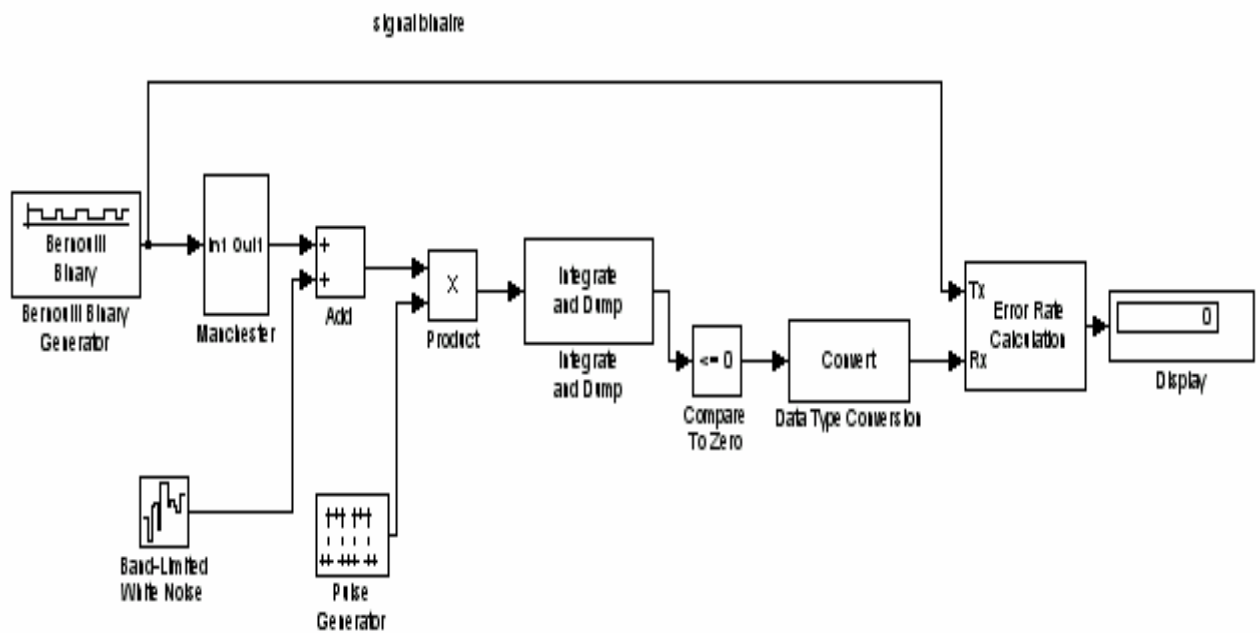


Figure 3.14 : réception d'un signal code manchester bruité : modèle simulink.

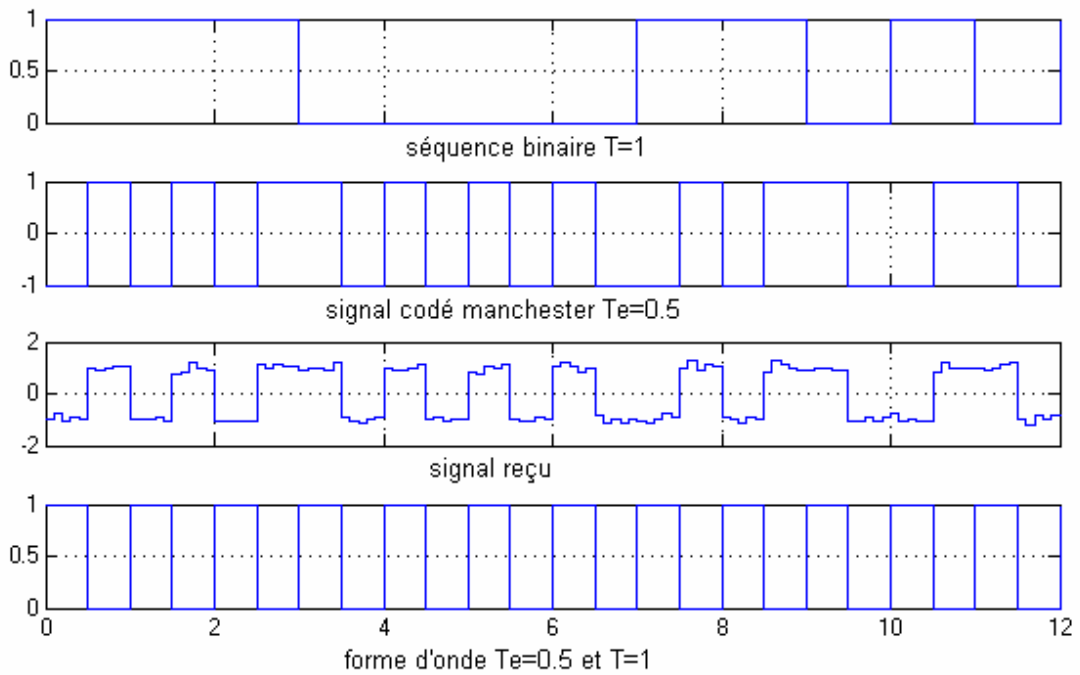


Figure 3.15 : résultat de simulation.

- **Mesure du taux d'erreur**

Si on veut analyser de longues séquences, on va utiliser un bloc qui permet d'afficher le nombre d'erreurs.



Figure 3.16 : comparateur à seuil montre bien l'effet de bruit sur la probabilité d'erreur .

3.9 - Problème posé par la réalisation d'un corrélateur :

La fonction d'autocorrélation est définie par :

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t-\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t-\tau)dt \quad (3.24)$$

Or la durée d'intégration ne peut pas être infinie. On ne peut l'effectuer que pour un temps fini, on commet donc une erreur :

$$\varepsilon = R_{xy}(\tau) - R_{xy}(T, \tau) \quad (3.25)$$

Avec
$$R_{xy}(T, \tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t-\tau)dt \quad (3.26)$$

Deux mesures successives de durée T donneront des résultats légèrement différents pour un signal aléatoire, $R_{xy}(T, \tau)$ est une variable aléatoire. Pour diminuer l'erreur il faut bien sûr augmenter T , mais n'est il pas possible d'obtenir le même résultat en effectuant plusieurs mesures avec T faible et en moyennant les résultats. C'est parfois possible, parfois non, c'est un problème de biais.

3.10 - Application la méthode de corrélation : Détection d'obstacle

3.10.1- Forme du signal :

Le signal le plus simple que peut émettre un radar à impulsions est un train de signaux sinusoïdaux, d'amplitude A et de fréquence f_0 , tronqué par une fonction porte de longueur T , se répétant identiquement à eux même à une certaine période. On considère ici une seule impulsion s . A supposer que cette impulsion est émise à l'instant $t=0$, le signal s'écrit analytiquement de la manière suivante, en notation complexe :

$$s(t) = \begin{cases} Ae^{j2\pi f_0 t} & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sin on} \end{cases} \quad (3.27)$$

3.10.1.1 - Résolution en distance :

Le signal qui revient vers le radar, noté $r(t)$ est une copie retardée et atténuée du signal émis. Il y a également du bruit sur les deux voies réelles et imaginaires, que l'on va prendre comme étant blanc et gaussien (ce qui est généralement vrai dans la réalité); on note $n(t)$ ce bruit. Pour détecter le signal reçu, on va utiliser le corrélateur, qui optimise le rapport de signal à bruit lorsque l'on veut détecter un signal connu dans du bruit blanc gaussien. [19]

Concrètement, on calcule l'intercorrélation du signal reçu avec le signal émis (ce qui revient à la convolution avec le signal conjugué et temporellement retourné dans le temps). Soit $R_{sr}(t)$ cette intercorrélation. On a :

$$R_{sr}(t) = \int_{t=0}^{+\infty} s^*(\tau)r(t+\tau)d\tau \quad (3.28)$$

Supposons que le signal réfléchi revient à l'instant t_r et est atténué d'un facteur k , on a :

$$r(t) = \begin{cases} k.A.e^{2i\pi.f_0(t-t_r)} + n(t) & \text{si } t_r \leq t \leq t_r + T \\ n(t) & \text{sin on} \end{cases} \quad (3.29)$$

Connaissant l'expression du signal émis, il vient après un calcul très simple :

$$R_{sr}(t) = kA^2 \cdot \Lambda\left(\frac{t-t_r}{T}\right) \cdot e^{i.2.\pi.f_0(t-t_r)} + n'(t) \quad (3.30)$$

où $n'(t)$, résultat de l'intercorrélation du bruit avec le signal émis, reste un bruit blanc gaussien de même variance que $n(t)$ car il n'est pas corrélé avec le signal émis. La fonction Λ est la fonction d'intercorrélation du signal émis et reçu est une enveloppe en triangle. Les figures au bout de ce paragraphe montrent un exemple pour un signal émis réel en sinus, de durée $T = 100$ ms, d'amplitude unité, et de fréquence $f_0 = 10^4$ Hertz (en bleu), et un écho (en rouge) décalés de 300 ms, et d'amplitudes 0,5. [21]

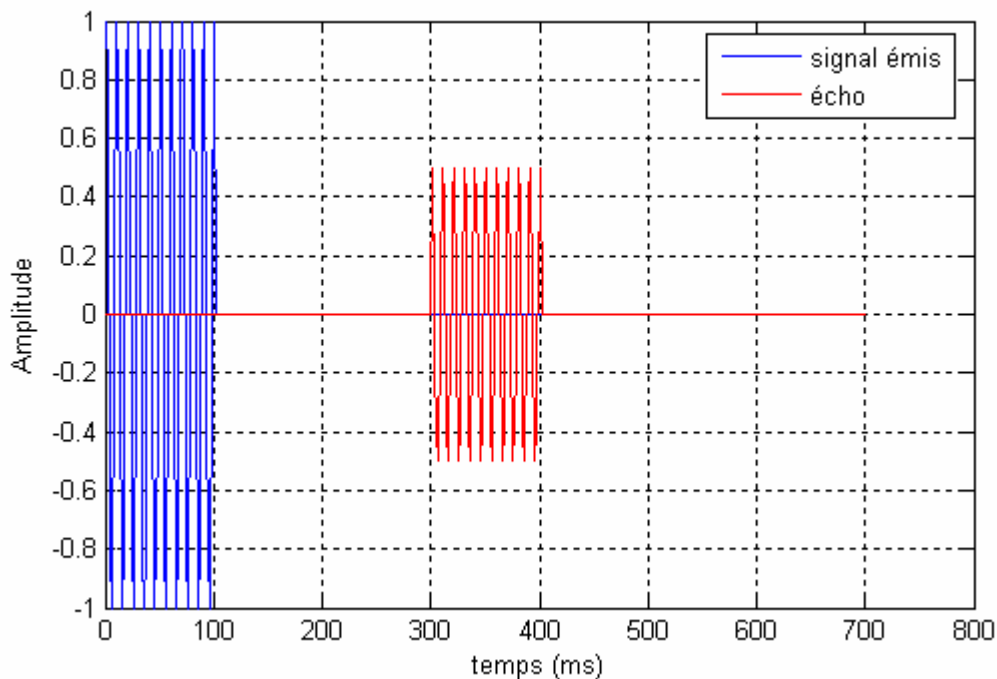


Figure 3.17 : impulsion émis et échos atténués.

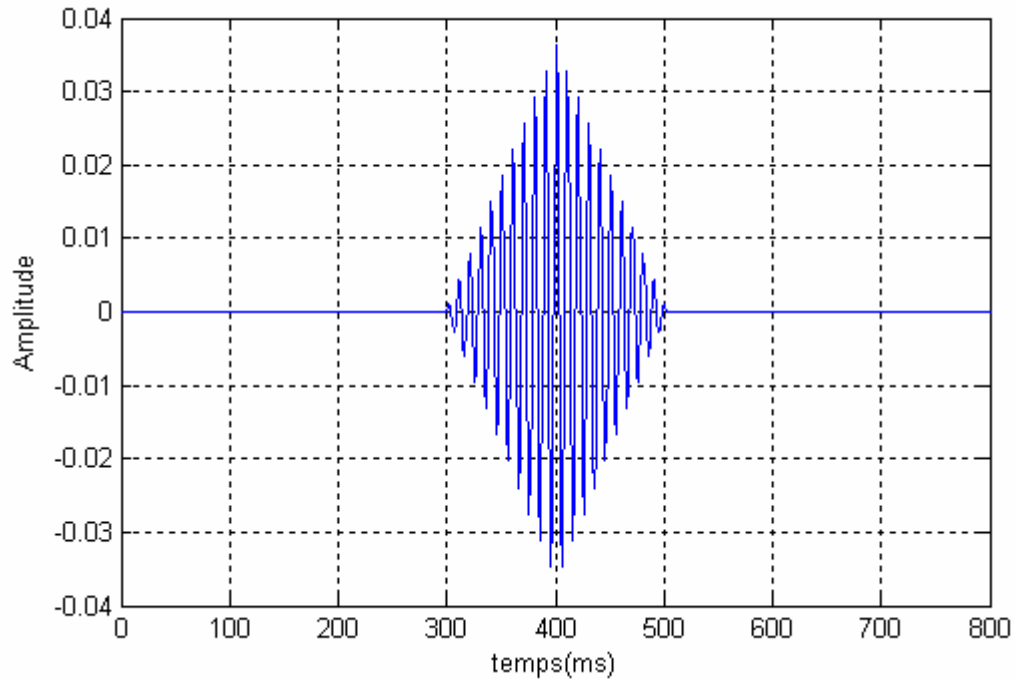


Figure 3.18 : la fonction d'intercorrélation entre le signal émis et le signal reçu.

Si le temps de parcourue de l'onde est T , alors la distance du trajet aller-retour est $c.T$, on en conclut que : La résolution en distance atteignable avec une impulsion sinusoïdale est $c \frac{T}{2}$ où T est la durée de l'impulsion et c la célérité de l'onde. Donc, pour augmenter la résolution, il faut diminuer la durée de l'impulsion.

3.10.1.2 - Energie à fournir pour émettre ce signal :

La puissance instantanée du signal émis est égale à $P(t) = |s(t)|^2$. L'énergie fournie est égale à :

$$E = \int_0^T P(t) dt = A^2 T \quad (3.31)$$

Similairement, l'énergie du signal reçu vaut $E_r = K^2 A^2 T$. Si σ est l'écart type de l'amplitude du bruit, le rapport signal à bruit à la réception est égal à :

$$RSB = \frac{E_r}{\sigma} = \frac{K^2 A^2 T}{\sigma} \quad (3.32)$$

On voit que le rapport signal à bruit augmente avec la longueur de l'impulsion, tous autres paramètres restant égaux par ailleurs. La conclusion est que pour le signal reçu puisse rester exploitable, l'impulsion émise doit rester suffisamment longue, ce qui va à l'encontre du pouvoir de résolution.

3.10.2- Compression d'impulsion :

3.10.2.1- Principe général :

Pour avoir une bonne résolution en distance (c-à-d : la capacité de séparer deux cibles proches suivant l'axe radar cible), il faudrait diminuer la durée d'émission tout en gardant une énergie suffisante pour l'onde puissent se propager. L'idéale serait alors d'envoyer une impulsion de Dirac, ce qui n'est pas réalisable techniquement. Pour remédier ce problème, la solution retenue est la compression d'impulsion. Son principe est le suivant :[20], [22]

Considérons qu'un radar émette un signal modulé linéairement en fréquence (chirp) et illumine un point à une distance D . Pour une fréquence centrale f_0 et une largeur de bande Δf , l'expression complexe du signal émis sera la suivante :

$$s_e(t) = Ae^{2\pi \cdot j \cdot (f_0 t + \frac{\Delta f}{2T} t^2)} \quad \text{avec } |t| \leq \frac{\tau}{2} \quad (3.33)$$

Si l'on suppose que le radar et la cible sont fixe alors le signal reçu sera de la forme :

$$s_r(t) = kGAe^{2\pi \cdot j \cdot (f_0 (t-t_{AR}) + \frac{\Delta f}{2T} (t-t_{AR})^2)} \quad \text{avec } |t-t_{AR}| \leq \frac{\tau}{2} \quad (3.34)$$

où : - G : est un coefficient d'atténuation de la forme $\frac{1}{\text{dis tan } ce^2}$

- t_{AR} : est le temps mis par l'onde pour parcourir le trajet aller-retour radar-cible.

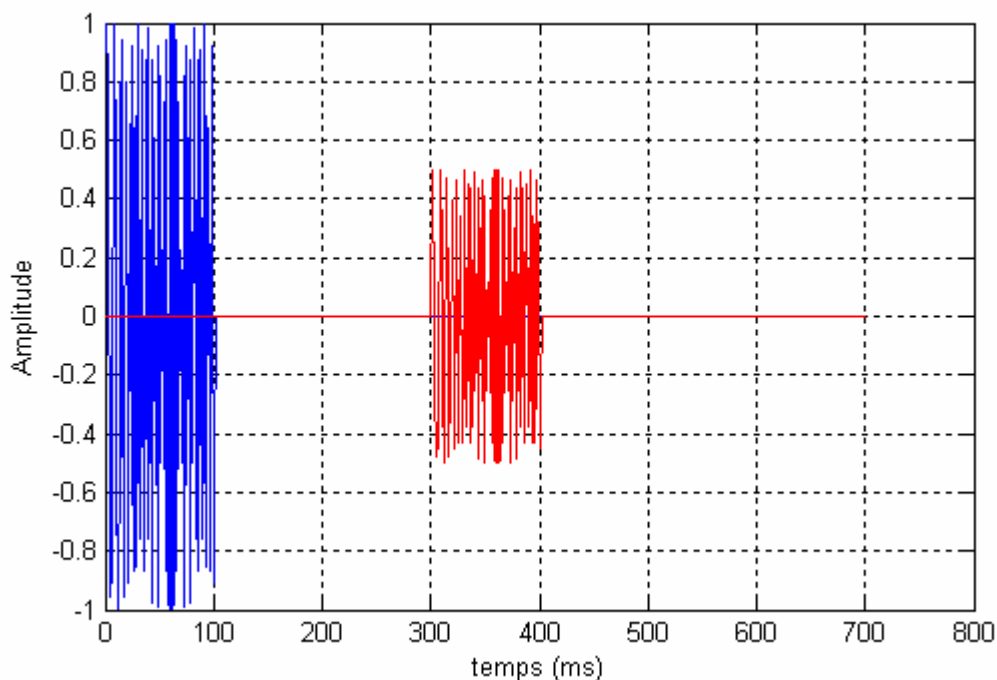


Figure 3.19 : Impulsion compressée pour $\Delta f = 2.10^5 \text{ Hz}$.

L'intercorrélation entre le signal émis et le signal reçu donne le signal détecté suivant :

$$s_c(t) = \int s_e^*(t'-t)s_r(t')dt' \tag{3.35}$$

L'expression du signal détecté devient : (voir le détail du calcul l'annexe B)

$$s_c(t) = e^{2\pi \cdot j \cdot f_0(t-t_{AR})} \text{sinc}(\pi \Delta f(t-t_{AR})) \tag{3.36}$$

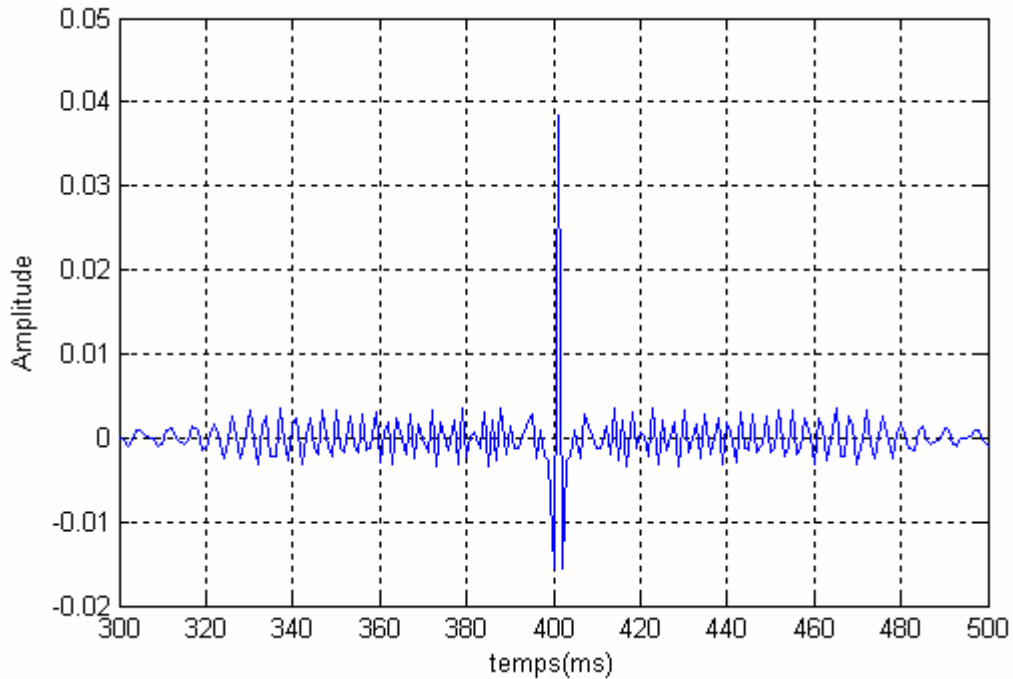


Figure 3.20 : la fonction d'intercorrélation après compression d'impulsion.

3.10.2.2 - Optimisation du rapport signal à bruit par compression d'impulsion :

L'énergie du signal n'a pas varié pendant la compression d'impulsion. Toutefois, elle se trouve à présent localisée dans le pic principal du sinus cardinal, qui a une largeur $T' \approx \frac{1}{\Delta f}$.

Si P est la puissance du signal avant compression et P' la puissance du signal après compression, on a donc :

$$P \times T = P' \times T' \tag{3.37}$$

ce qui donne:

$$P' = P \times \frac{T}{T'} \tag{3.38}$$

D'autre part, le bruit et le signal émis n'étant pas corrélés, la puissance du bruit ne change pas par corrélation. Par conséquent : La compression d'impulsion permet d'augmenter le gain en puissance après la corrélation d'un rapport égal au taux de compression, $T \cdot \Delta f$.

3.10.3- Les principes de la localisation et de l'estimation :

La localisation et l'estimation d'un signal de forme a priori connue dans un signal intervient dans de nombreuses applications : contrôle industriel, médecine, etc. La connaissance a priori du signal recherchée représente une très forte information et la localisation peut apparaître comme relativement simple, au moins en théorie.

3.10.3.1- Théorie statistique de l'estimation :

La théorie statistique de l'estimation propose différentes méthodes permettant de trouver la solution optimale dans un contexte donné; Nous allons rapidement rappeler le principe de la méthode basée sur le principe de la vraisemblance maximale.

Si r représentent le signal observé et δ l'ensemble des paramètres recherchés, on peut déduire de ce modèle une fonction $P(r/\delta)$, qui représente la probabilité d'observer r étant donné δ . Cette fonction est appelée fonction de vraisemblance.

3.10.3.1.1- Maximum de vraisemblance :

L'estimation au sens du maximum de vraisemblance consiste à déterminer le paramètre position δ_{mv} qui maximise la fonction de vraisemblance :

$$\delta_{mv} = \max P(r/\delta) \quad (3.39)$$

$P(r/\delta)$ dépendant de la statistique du bruit total.

La valeur de δ_{mv} est obtenue en cherchant la valeur de δ qui annule la dérivée de la vraisemblance:

$$\frac{\partial P(r/\delta)}{\partial \delta} = 0 \quad (3.40)$$

En pratique on verra qu'il est généralement préférable de travailler avec le logarithme de $P(r/\delta)$. En effet, la plupart du temps, utiliser la fonction de log vraisemblance simplifie considérablement les calculs.

La méthode du maximum de vraisemblance est notamment utilisée dans les cas où l'on dispose de très peu d'informations a priori sur les paramètres du signal recherché.

Nous commencerons par étudier le système de détection simple, à savoir le système obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance dans le cas d'un bruit blanc n , gaussien et additif, de moyenne nulle et de variance σ^2 inconnue. Ces données définissent ainsi un vecteur aléatoire n dont la probabilité associée est :

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2} n^2\right) \quad (3.41)$$

La forme du signal recherché s , est supposée connue a priori.

On note r le signal total composé du signal recherché s et du bruit n , et δ est la position du cible dans le signal. Sous l'hypothèse que le bruit est additif, c'est à dire que la variance du bruit est la même avec ou sans signal s , le signal total r échantillonné avec un pas de temps constant s'écrit :

$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (3.42)$$

La vraisemblance d'avoir le signal r avec une cible positionné en δ s'écrit alors :

$$P(r/\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(r-s)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.43)$$

Le logarithme de cette fonction, appelé la fonction de log vraisemblance, est définie par :

$$L(r/\delta) = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \log(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} (r(t) - s(t-\delta))^2 \quad (3.44)$$

Il est possible d'obtenir une estimation de σ , que l'on notera $\tilde{\sigma}$, en annulant la fonction de log vraisemblance par rapport à ce paramètre :

$$\frac{\partial \log(r/\sigma)}{\partial \sigma} = 0 \Leftrightarrow \tilde{\sigma}^2 = (r(t) - s(t-\delta))^2 \quad (3.45)$$

La fonction de log vraisemblance devient alors :

$$L(r/\delta) = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log(r(t) - s(t-\delta))^2 \quad (3.46)$$

Les deux premiers termes de cette fonction étant des constantes, maximiser $L(r/\delta)$ revient donc à maximiser l'expression :

$$-\log[r(t)^2 + s(t-\delta)^2 - 2r(t)s(t-\delta)] \quad (3.47)$$

C'est à dire le terme $r(t)s(t-\delta)$.

La valeur δ la plus vraisemblable, $\tilde{\delta}$, sera ainsi obtenue en déterminant le maximum de :

$$F_{MV}[\delta] = s[\delta] * r[\delta] \quad (3.48)$$

Nous obtenons le résultat simple suivant : le pic maximum de la fonction de corrélation entre le signal total et le signal de forme a priori connue correspond à la position la plus vraisemblable du cible.

3.10.4- Théorie de la décision :

Dans les parties précédentes, nous avons supposé qu'une cible est effectivement présente dans le signal étudié. Bien évidemment lorsque nous disposons de données réelle cette hypothèse ne sera pas toujours vérifiée. Une autre étape que la détection est donc indispensable : celle qui permet de pouvoir conclure quant à la présence ou non du cible.

3.10.4.1- La problématique :

Le problème de la décision peut être formulé de la manière suivante :

On émet dans une direction de l'espace à explorer, un signal $s(t)$. Si une cible est présente, ce signal est renvoyé sous la forme d'un écho $e(t)$.

La présence ou l'absence de cet écho dans le signal reçu $r(t)$ indique donc la présence ou l'absence d'une cible éventuelle. On doit donc faire un choix entre les deux hypothèses suivantes :

- Hypothèse H_1 correspond au cas où la courbe contient une cible (signal + bruit).
- Hypothèse H_0 correspond au cas où la courbe ne contient pas de cible (bruit seul).

Ces deux hypothèses, H_0 et H_1 , sont respectivement associées à P_0 et P_1 sur l'identité du signal reçu r_0 ou r_1 .

En se basant uniquement sur l'analyse du signal r l'observateur doit faire le choix de l'hypothèse la plus vraisemblable. Il doit de ce fait appliquer un critère de décision.

Le choix entre ces deux hypothèses peut conduire aux quatre situations suivantes :

- choix de H_0 alors que H_0 est vraie (pas de détection et pas de cible), associé à la probabilité $P_n = P(H_0 / r_0)$;
- choix de H_1 alors que H_1 est vraie (détection vraie d'une cible), associé à la probabilité $P_d = P(H_1 / r_1)$;
- choix de H_0 alors que H_1 est vraie (non détection d'une cible), associé à la probabilité $P_{nd} = P(H_0 / r_1)$;
- choix de H_1 alors que H_0 est vraie (fausse alarme), associé à la probabilité $P_f = P(H_1 / r_0)$.

Ainsi, les deux premiers cas correspondent à une prise de décision correcte, les deux suivants à une prise de décision erronée.

3.10.4.2- Le rapport de vraisemblance :

Afin d'avoir l'hypothèse la plus vraisemblable, on fait appel aux deux probabilités conditionnelles $P(H_0 / r_0)$ et $P(H_1 / r_1)$. L'hypothèse H_0 sera retenue si $P(H_1 / r_1) > P(H_1 / r_1)$, l'hypothèse H_1 si $P(H_1 / r_1) > P(H_0 / r_0)$. Le théorème de Bayes nous donne : [23]

$$P(H_0 / r) = \frac{P(r / H_0)P(H_0)}{P(r)} \quad (3.49)$$

Si r possède une densité de probabilité f , nous avons :

$$P(r) = f(r)dr \quad P(r / H_0) = f(r / H_0)dr \quad P(r / H_1) = f(r / H_1)dr \quad (3.50)$$

et ainsi :

$$P(H_0/r) = \frac{f(r/H_0)P(H_0)}{f(r)} \quad (3.51)$$

$$P(H_1/r) = \frac{f(r/H_1)P(H_1)}{f(r)} \quad (3.52)$$

Nous choisirons ainsi la probabilité H_1 si :

$$\frac{f(r/H_1)P(H_1)}{f(r)} > \frac{f(r/H_0)P(H_0)}{f(r)} \quad (3.53)$$

C'est à dire si:
$$\frac{f(r/H_1)}{f(r/H_0)} > \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \quad (3.54)$$

Ce quotient constitue le rapport de vraisemblance et sera noté Λ : il joue un rôle important dans la détection du signal et l'estimation de ses paramètres.

3.10.4.3- Le critère de décision :

Le rôle du critère de décision est de réduire au minimum le risque d'une décision incorrecte. Il existe différentes approches permettant de minimiser la probabilité de fausse décision, notamment l'approche de Bayes et l'approche de Neyman Pearson, le choix de cette approche dépend essentiellement de la connaissance a priori dont on dispose.

Le critère de Bayes est applicable lorsque on a une certaine connaissance a priori sur les probabilités P_0 et P_1 . Comme nous n'avons aucune information sur la présence ou non d'une cible, nous utilisons le critère de Neyman Pearson, applicable en l'absence de toute information préalable.

3.10.4.4 - Critère de Neyman-Pearson :

P_0 et P_1 étant inconnues, nous allons établir un critère de décision en utilisant uniquement les probabilités conditionnelles de fausse alarme $P_f = P(H_1/r_0)$ et de non détection $P_{nd} = P(H_0/r_1)$. Idéalement, nous désirons rendre simultanément P_f et P_{nd} aussi faibles que possible, ce qui est en pratique impossible car la diminution de l'une provoque en général l'augmentation de l'autre.

On utilise alors le critère de Neyman Pearson qui consiste à fixer la probabilité de fausse alarme à une valeur admissible mais arbitraire α et à chercher, sous cette contrainte, à rendre maximum la probabilité de détection P_d , ce qui revient en fait à minimiser la probabilité de non détection P_{nd} . [24]

Cette minimisation sera obtenue en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange (voir Rappels de Mathématiques, Annexe B).

Soit L la fonction de Lagrange et μ le paramètre de Lagrange associé, nous posons :

$$L(\mu) = P_{nd} + \mu(P_f - \alpha) \quad (3.55)$$

où μ est un multiplicateur de Lagrange.

Pour arriver à cette solution on minimise la fonction $L(\mu)$, qui est obtenue en ajoutant à la fonction à minimiser (la probabilité de non-détection), le multiplicateur de Lagrange fois la contrainte (si la contrainte est vérifiée, on aura minimisé la fonction originelle).

D'autre part, nous avons :

$$P_{nd} = \int_{H_0} f(r/H_1) dr \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} P_f &= 1 - P_n \\ \text{et} \quad &= 1 - P(H_0/r_0) \\ &= \int_{\mu}^{\infty} p(\Lambda | H_0) d\Lambda = \alpha \end{aligned} \quad (3.57)$$

En outre, détection vraie et fausse alarme s'excluent mutuellement, ce qui s'écrit :

$$P(H_0/r_0) + P(H_1/r_0) = 1 \quad (3.58)$$

La fonction $L(\mu)$ peut donc se réécrire :

$$L(\mu) = (1 - \alpha)\mu + \int_{H_0} (f(r/H_1) - \mu f(r/H_0)) dr \quad (3.59)$$

La maximisation de L conduit à la règle suivante : le critère de décision se réduit à $\Lambda > \mu$ sous l'hypothèse H_1 et à $\Lambda < \mu$ sous l'hypothèse H_0 . [20]

La méthode de Neyman Pearson consiste à tracer la probabilité de fausse alarme P_f et la probabilité de détection vraie P_d pour toutes les valeurs de μ puis à chercher la valeur de seuil qui minimise P_f et maximise P_d .

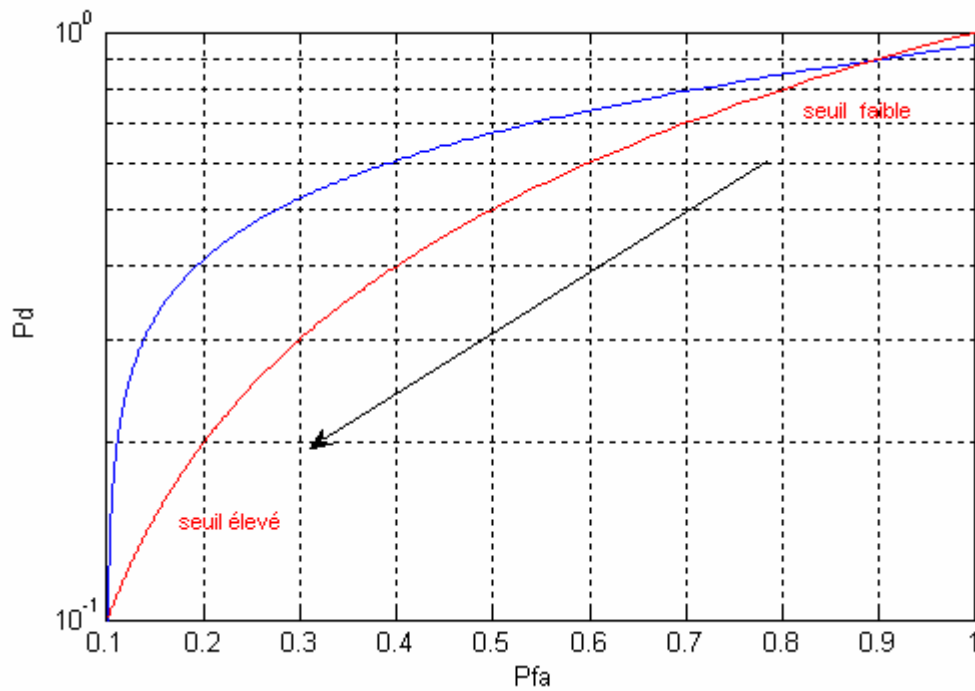


Figure 3.21 : la courbe de l'évolution de la P_d en fonction P_f (ROC).

Cette courbe possède plusieurs propriétés :

1. La courbe $P_d = f(P_f)$ est convexe.
2. Tous les tests de vraisemblance ont un ROC (Receiver Operating Characteristic) qui sont au-dessus de la ligne $P_d = P_f$ (cela veut dire qu'ils sont non biaisés, c-à-d P_d est plus grande que P_f).
3. La pente de la courbe en un point particulier est égale à la valeur du seuil auquel on doit comparer le rapport de vraisemblance pour obtenir les probabilités de détection et de fausse alarme qui lui correspondent.

3.10.4.5- Décision par seuillage :

Avec la méthode du Décision par seuillage qui est simple à mettre en oeuvre, il est facile à réduire le nombre de détections incorrectes. La première étape de l'algorithme de détection consistera à déterminer s'il existe ou non un maximum significatif dans la courbe de corrélation où le comparée à un seuil donné. Ce seuil est un paramètre clé de la méthode puisqu'il contrôle la plausibilité des événements détectés, c'est à dire l'existence ou non d'une cible : si le seuil est trop élevé on a peu de fausse alarme et peu de détection, et s'il est trop bas on a beaucoup de détection mais aussi beaucoup de fausse alarme, don il définir avec soin.

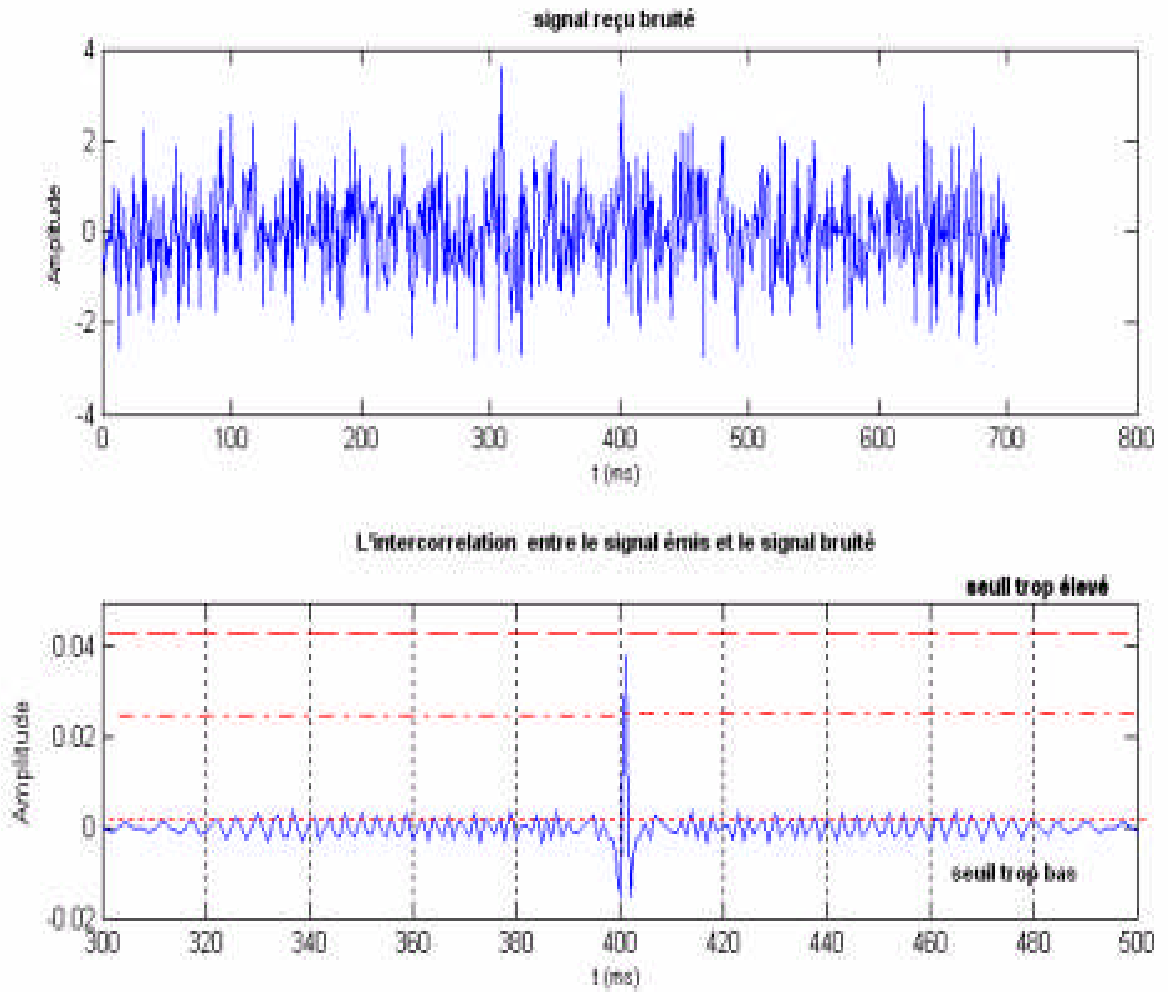


Figure 3.22 : Positionnement du seuil.

Afin de déterminer dans quel cas l’hypothèse d’un bruit additif est correcte, nous allons tracer, la courbe donnant la probabilité de détection correcte en fonction du rapport signal à bruit pour différente valeur du P_f .

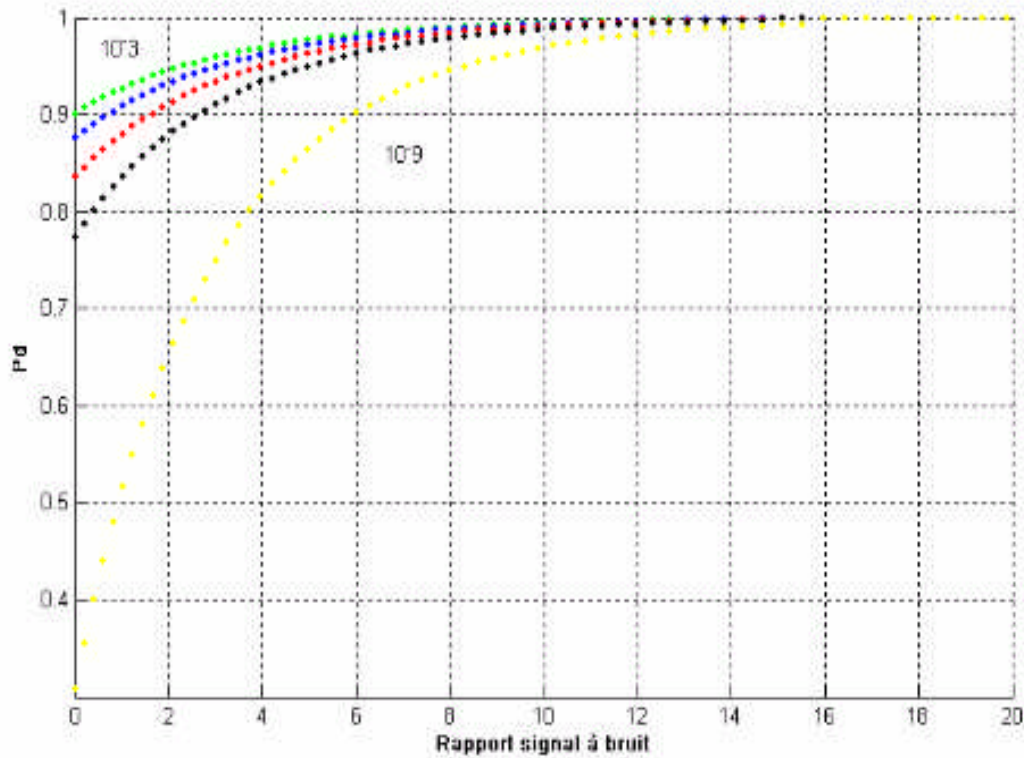


Figure 3.23 : probabilité de détection correcte en fonction du rapport signal a bruit pour différente valeur du P_f .

La figure 3.23 montre bien que le RSB est maximale pour une grande valeur de P_d et faible valeur de P_f . Et comme on vut, lorsque la P_d correspond 0.9 , le RSB est 0 dB si $P_f=10^{-3}$, et augmente jusqu'a 6 dB si $P_f=10^{-9}$, ce qui prouve la très bonne qualité de la théorie suivant le critère Neyman-pearson .

Pour illustrer les performance théorique de détection dans un bruit blanc gaussien additif, on fait un test sur bruit blanc non gaussien, de puissance $\sigma =0.5$; la probabilité de détection d'une cible en fonction du RSB pour une même probabilité de fausse alarme $P_f = 10^{-1}$ est alors illustré dans la figure (3.24).

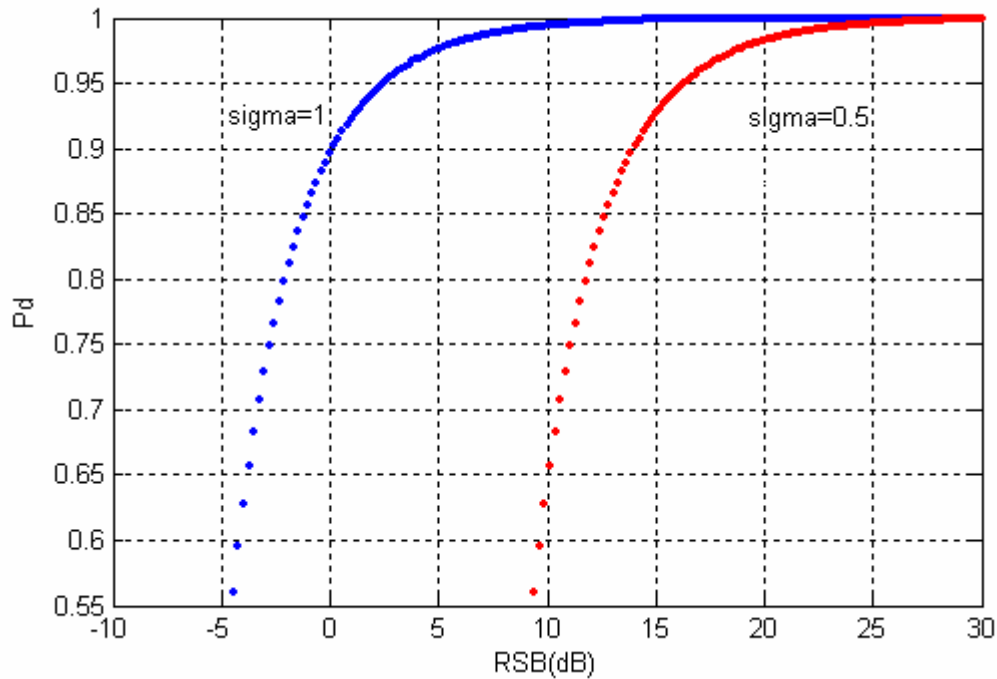


Figure 3.24 : comparaison entre les performances de détection dans un bruit réel et un bruit gaussien pour une $P_{fa} = 10^{-1}$.

La figure illustre des tracés de courbes P_d pour un RSB variant de 0 à 30 dB .

Il est clair aux vues de cette représentation que la probabilité de détection pour la même valeur fixée (par exemple 0.95) donne un RSB 2.5 dB dans un BBG et 16 dB dans un bruit réel , ce qui prouve l'efficacité de la méthode de corrélation au présence du bruit blanc gaussien.

3.11 - Conclusion :

Le travail proposé dans ce chapitre est un complément aux méthodes de détections optimal, nous avons proposé dans cette étude la méthode du corrélation .pour montré l'intérêt de cette méthode dans la détection, nous avons replacé nos travaux dans le cadre strict, mais unificateur du méthode de vraisemblance. Il on ressort que l'originalité de notre approche réside dans le fait nous proposons d'utiliser la forme du signal émis afin de déterminer un estimateur optimale de la position du cible à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance.

CHAPITRE IV

Détecteur énergétique (système filtrage-carré-moyenne)

CHAPITRE IV

Détecteur énergétique (Système filtre-carré-moyenne)

4.1- Introduction :

Dans la littérature, on trouve plusieurs définitions d'une bande de fréquence libre. Nous considérons qu'une bande de fréquence est libre lorsque le signal filtré sur cette bande est seulement composé du bruit. Dans le cas contraire, ce signal sera constitué d'un nombre inconnu mais non nul de signaux de télécommunication en plus du bruit. Ceci est un problème de détection binaire des signaux que l'on reformule comme un problème de test d'hypothèses.

La résolution de ce problème largement abordé dans le passé, dépend du degré de connaissance que l'on dispose sur le bruit ou/et le signal. Si l'on considère un bruit stationnaire blanc gaussien et si l'on dispose d'une connaissance suffisante sur le signal, alors on peut envisager l'utilisation du filtrage adapté par exemple [28] à la forme du signal attendu. Toutefois, le degré de connaissance du signal attendu n'est pas suffisant, ici, nous préférons avoir recours à un détecteur énergétique. Dans de telles conditions, les résultats obtenus sont satisfaisants. Cependant, la qualité de détection se dégrade fortement avec la diminution de la précision sur l'estimation de la variance du bruit, donc la principale difficulté de cette détection est d'obtenir une bonne estimation de la variance du bruit.

4.2- Méthode énergétique (système filtrage-quadrature-intégration):

La détection énergétique repose sur un modèle stationnaire et déterministe du signal noyé dans un bruit stationnaire blanc gaussien et de densité spectrale monolatérale $N/2$ connu. Un diagramme simplifié du détecteur est donné par la figure suivante :

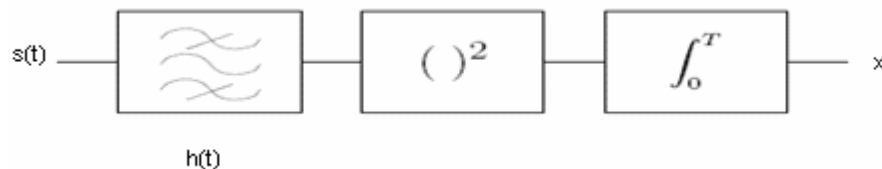


Figure 4.1 : schéma bloc d'un détecteur énergétique.

Ceci consiste à élever au carré le signal filtré puis à l'intégrer sur une durée T prédéfinie. La fonction de transfert du système vaut :

$$x = \int_0^T (h(t) * s(t))^2 dt \quad (4.1)$$

La modulation PPM et la modulation tout ou rien, ou On-Off Keying (OOK) sont deux modulations compatibles avec une réception basée sur la détection d'énergie. La démodulation par détection énergétique offre un gain de traitement qui n'augmente que très lentement par rapport au nombre d'impulsions par symbole.

Dans le cas de la démodulation par corrélateur, l'énergie du signal utile disponible croît proportionnellement au nombre d'impulsions intégrées, alors que dans le cas de la démodulation par détection énergétique, l'augmentation est non linéaire et moins rapide.

Le détecteur énergétique est donc avantageé pour des modulations à faible nombre d'impulsions par symbole, ce qui en fait un récepteur plus adapté aux transmissions courtes portées. Dans ces conditions, le signal Ultra Large Bande est une solution aux nouveaux besoins.

4.3- Signal ULB :

Le signal ULB est un signal pulsé basé sur l'émission d'impulsion (sub-nanoseconde) couvrant un large spectre de quelques GHz. [28], [29] l'information repose sur la transmission d'impulsions souvent modélisées par une sinusoïde fenêtrée par une porte Gaussienne.

$$p(t) = \cos(2\pi f_c t) \times \exp\left[-0.5 \cdot (t/\tau)^2\right] \quad (4.2)$$

où τ est le paramètre fixant la largeur de l'impulsion et f_c est la fréquence centrale de l'impulsion.

Le signal ULB typique est représenté en temporel sur la Figure (4.2).

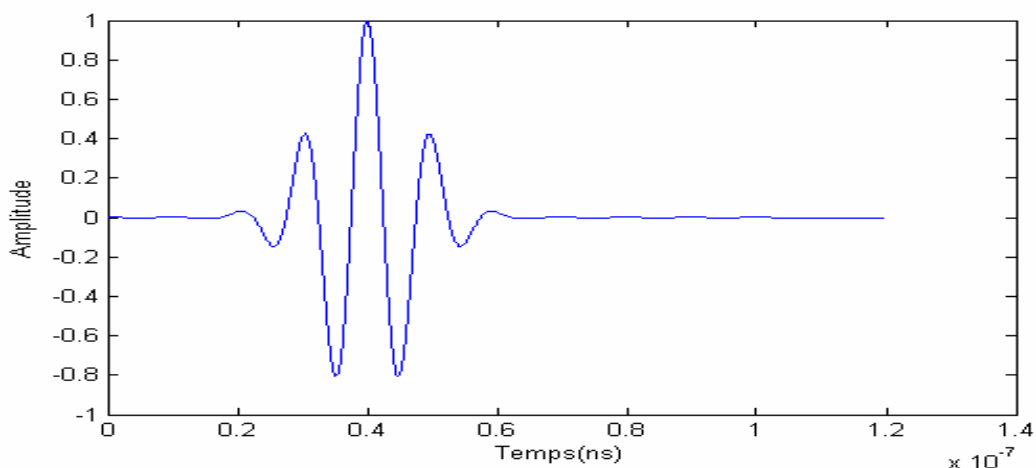


Figure 4.2. Impulsions ULB dans le domaine temporel : $\tau = 0.5ns$.

Ce signal est à énergie finie. L'étude de son occupation spectrale nécessite le calcul de sa densité spectrale d'énergie définie par :

$$dse_p(f) = |P(f)|^2 \tag{4.3}$$

où $P(f)$ est la transformée de Fourier de l'impulsion $p(t)$. Son expression analytique est :

$$P(f) = \frac{1}{2} (e^{-\frac{1}{2}[2\pi\tau(f-f_c)]^2} + e^{-\frac{1}{2}[2\pi\tau(f+f_c)]^2}) \tag{4.4}$$

Le double produit de la mise au carré de $P(f)$ est négligeable et on obtient :

$$dse_p(f) = \frac{1}{4} (e^{-[2\pi\tau(f-f_c)]^2} + e^{-[2\pi\tau(f+f_c)]^2}) \tag{4.5}$$

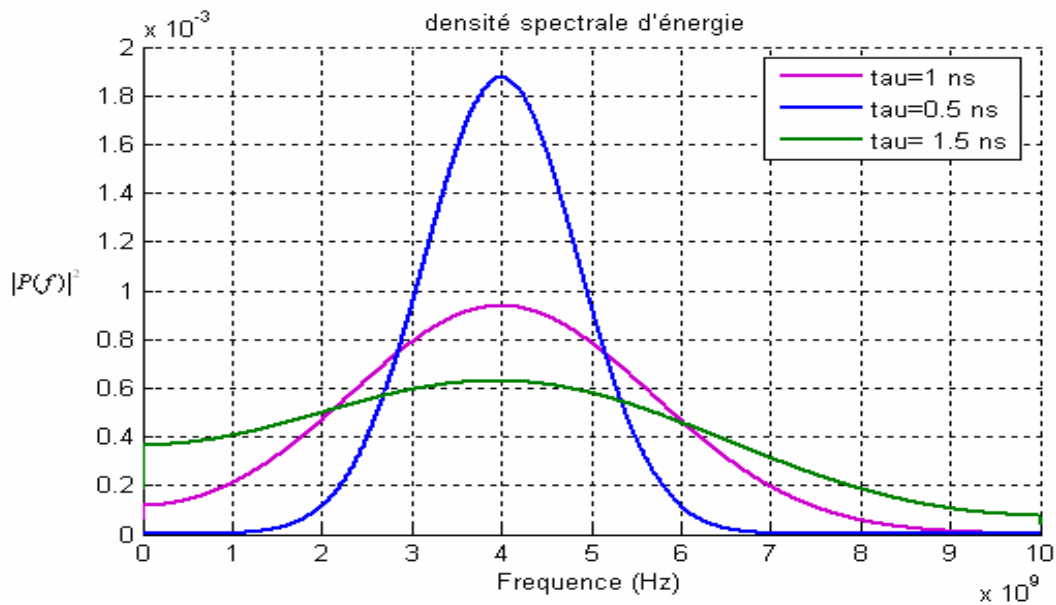


Figure 4.3 : densité spectrale d'énergie de l'impulsion courte .

On observe bien un étalement en fréquence. En faisant varier la durée de l'impulsion, il est possible d'étaler plus ou moins le spectre.

Le spectre de l'impulsion courte permet de définir trois grandeurs particulières qui caractérisent un signal ULB.

Largeur de bande (Δf)	$\Delta f = f_h - f_b$
Fréquence centrale (f_c)	$f_c = \frac{(f_h + f_b)}{2}$
Facteur de largeur de bande (γ)	$\gamma = \frac{\Delta f}{f_o} = 2 \times \frac{f_h - f_b}{f_h + f_b}$
⇒ un signal ULB doit respecter la condition suivante	$\gamma = \frac{\Delta f}{f_c} \geq 1$

Tableau 4.1 : caractéristique du signal ULB.

4.4- Modulations utilisées :

La démodulation repose sur la quantité scalaire obtenue en sortie du module de la figure (4.1). La durée d'intégration T du signal reçu élevé au carré est fixée en fonction de la durée de l'impulsion émise.

Pour éviter les interférences inter-symboles, la période de répétition T_r des impulsions est choisie supérieure à la durée de l'impulsion reçue après son passage dans un canal à bruit blanc gaussien .

La durée de l'impulsion émise (de l'ordre de la nanoseconde) étant négligeable devant la durée de répétition des impulsions, on obtient la contrainte $T_r > T$.

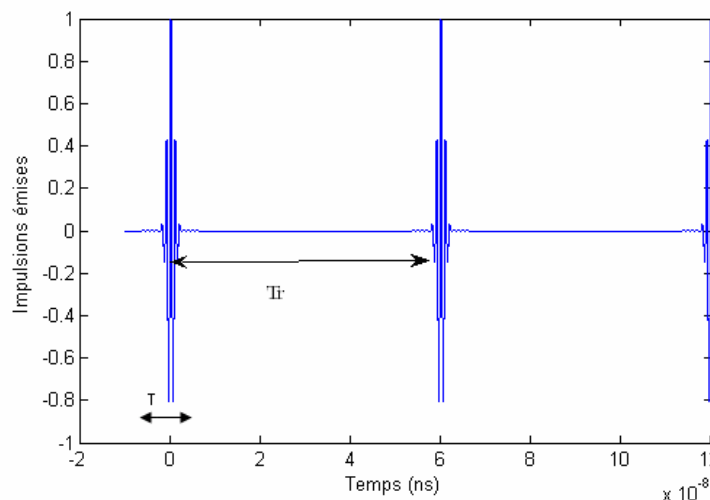


Figure 4.4 : période de répétition des impulsions T_r et durée d'intégration du signal T .

Puisque le récepteur est non cohérent et basé sur l'énergie du signal, l'information n'est pas codée par la polarité de l'impulsion mais par son amplitude. Par rapport à la démodulation quadratique adoptée, la modulation d'amplitude la plus adaptée est la modulation tout-ou-rien OOK (On-Off Keying).

4.4.1- Modulation Tout Ou Rien (ON OFF KEYING / OOK) :

Cette méthode est basée sur un principe simple qui consiste à envoyer une impulsion (ou une série d'impulsions) pour le bit '1' et à envoyer un zéro (ou une série de zéros) pour un bit '0'. [28], [30] Un exemple de cette modulation est donné dans la figure (4.5) :

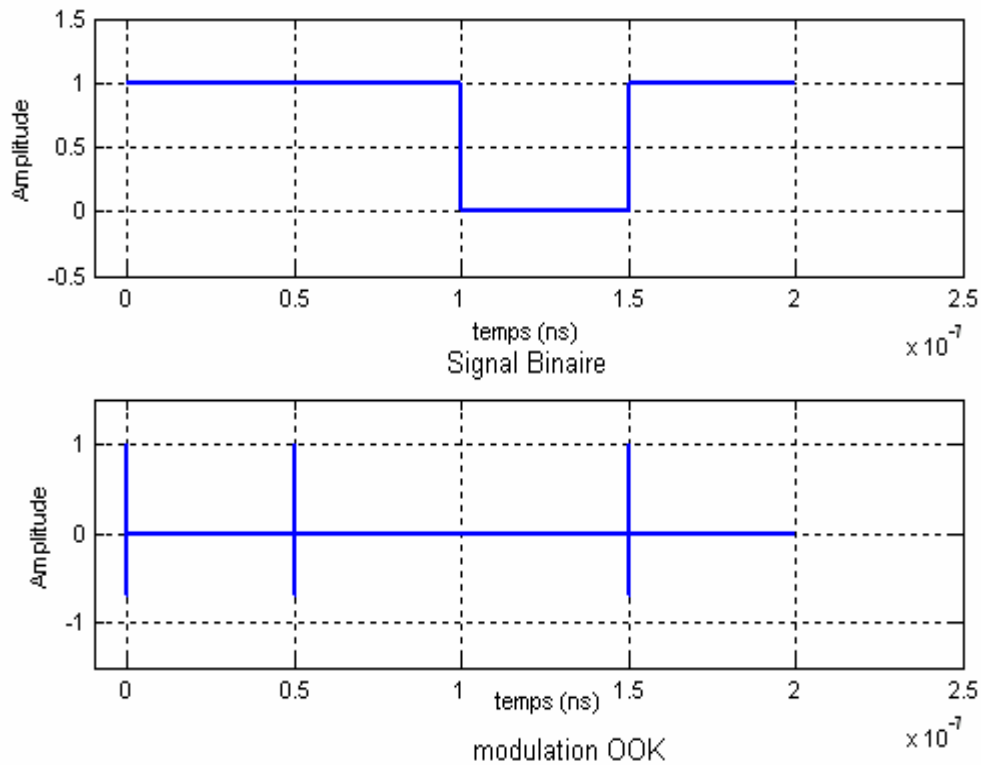


Figure 4.5 : modulation tout ou rien (OOK).

4. 5- Analyse du système de détection :

4.5.1- Problème de décision à seuil :

Le récepteur énergétique effectue une détection d'énergie du signal reçu. Ceci consiste à filtrer le signal émis par un filtre de bande B puis à élever au carré le signal et à l'intégrer sur une durée T prédéfinie.

Un bruit de densité spectrale de puissance $N/2$ est présenté à l'entrée du récepteur, et on note $n(t)$ ce bruit filtré dans la bande B du récepteur.

Pour la modulation OOK considérée, un bit 1 est codé par l'émission d'une impulsion de bande B . On note $s(t)$ cette impulsion reçue à la l'entrée du filtre du récepteur.

La figure (4.6) représente le schéma fonctionnel du système de transmission.

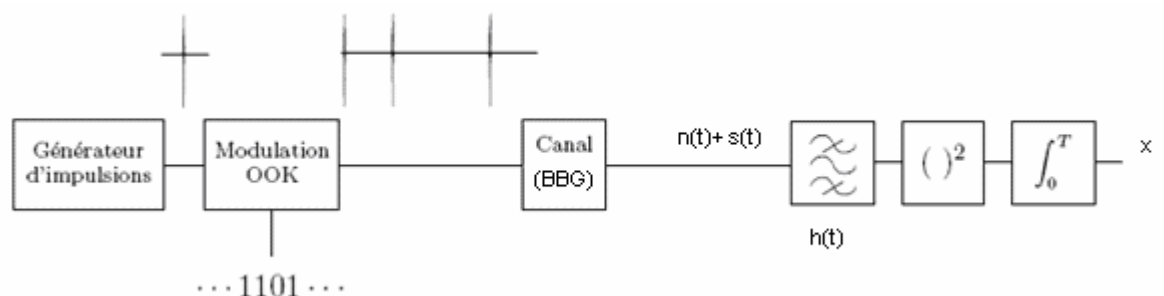


Figure 4.6 : Système de transmission non—cohérent.

L'analyse de ce système mené du point de vue de la théorie de la décision conduit à un teste d'hypothèse par seuillage. La détermination de la statistique de la variable de décision sous les deux hypothèses, permet d'obtenir une formulation explicite du seuil optimale.

A la sortie du récepteur quadratique, on dispose d'une observation scalaire x qui correspond à l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : x = \int_0^T [n(t)]^2 dt & (\text{bit0}) \\ H_1 : x = \int_0^T [s(t) + n(t)]^2 dt & (\text{bit1}) \end{cases} \quad (4.6)$$

L'hypothèse H_0 correspond au bit 0 de la modulation OOK et x est le résultat de l'intégration du bruit seul. L'hypothèse H_1 , codant le bit 1, correspond à la présence du signal utile $s(t)$ et du bruit $n(t)$. [30]

Les résultats de simulation sont présentés dans la figure ci-dessous.

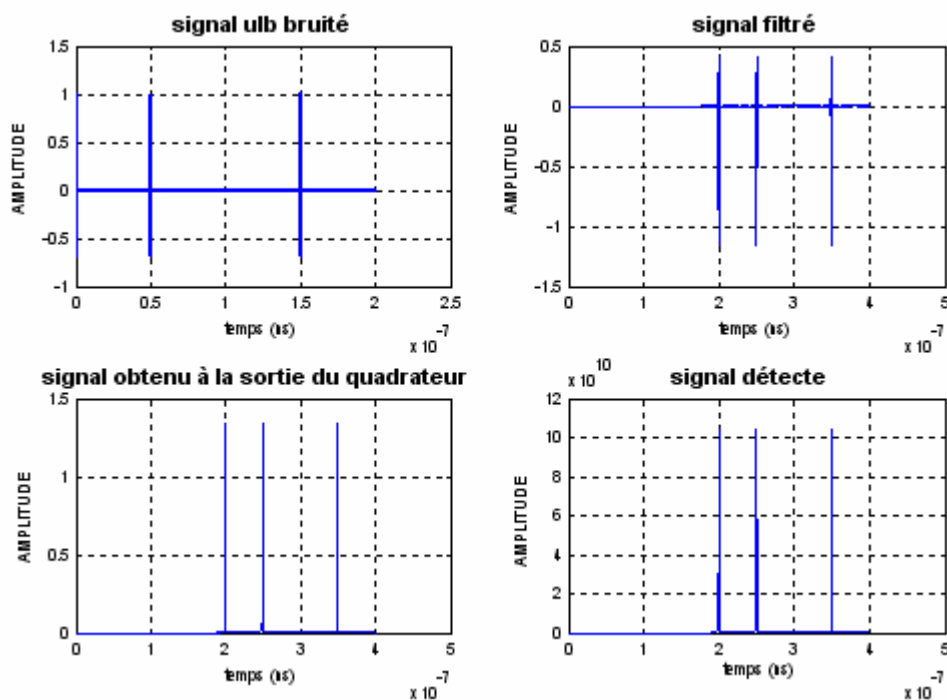


Figure 4.7 : résultat de simulation du système à détection d'énergie

La forme du signal obtenu à la sortie du détecteur correspond une fenêtre à porte suit une loi chi-deux, [31], [32] et pour bonne clarification du résultat, en fait la montrer pour une seule impulsion :

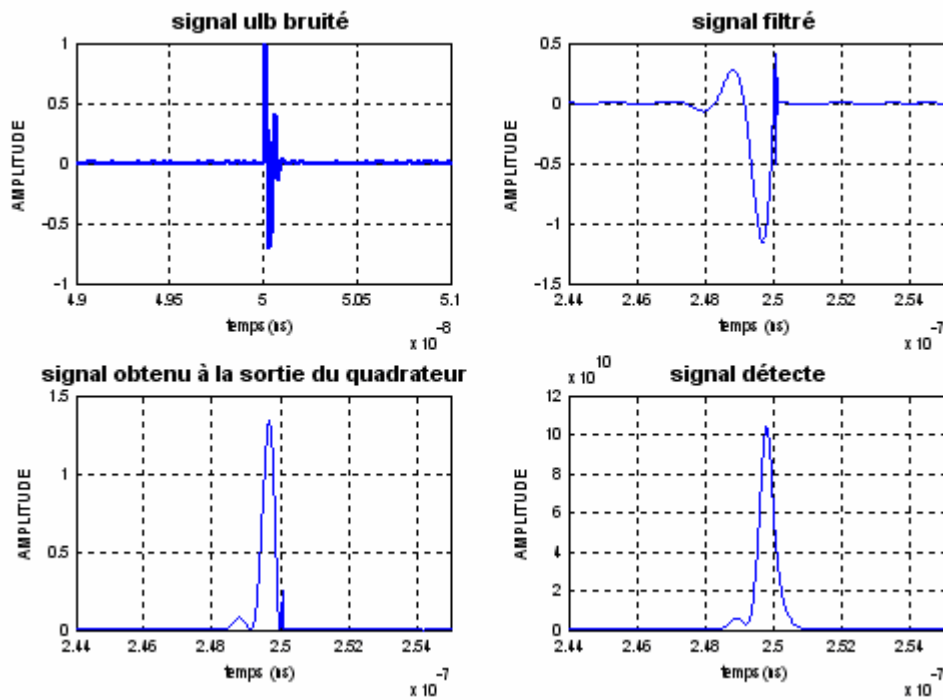


Figure 4.8 : résultat de simulation zoomé.

La bande B du filtre d'entrée du récepteur est un paramètre du système. L'énergie E du signal utile récupérable sur ce temps d'intégration est connue du récepteur grâce à une procédure d'estimation. En tenant compte de la connaissance de ces paramètres, le problème consiste à identifier le meilleur critère de décision entre les deux hypothèses qui minimise la probabilité d'erreur.

Les bits 0 et 1 sont supposés équiprobables. Le critère MAP (maximum a posteriori) conduit au test du maximum de vraisemblance :

$$\frac{P_{X_1}(x)}{P_{X_0}(x)} > 1 \quad (4.7)$$

où $p_{x_i}(x)$ est la densité de probabilité de l'observation sous l'hypothèse H_i : $i \in \{0,1\}$.

La règle de décision consiste à comparer l'observation x à un seuil prédéterminé μ_{opt} :

$$\begin{matrix} H_1 \\ x > \mu_{opt} \\ H_0 \end{matrix} \quad (4.8)$$

Le seuil optimal μ_{opt} est la solution de l'équation $p_{x_0}(x) = p_{x_1}(x)$.

4. 5.2- La statistique de la variable de décision x :

Le filtre d'entrée du récepteur, de bande B , est considéré parfait. Les signaux sont intégrés sur une durée T . Donc, à un instant t donnée, la connaissance requise du signal est donc le signal filtré sur la bande B et limité à une durée d'observation T . Or, la dimension

d'un espace de signaux à énergie finie de bande B et de durée T est d'environ $2M = 2BT + 1$. La décomposition des signaux sur une base de dimension $2M = 2BT + 1$ permet de trouver les densités de probabilité de x sous les deux hypothèses. Pour les besoins du calcul, $2M$ est considéré entier. On peut donc écrire :

$$n(t) = \sum_{i=1}^{2M} n_i \phi_i(t) \quad \text{et} \quad s(t) = \sum_{i=1}^{2M} s_i \phi_i(t) \quad (4.9)$$

Les fonctions $\phi_i(t), i \in \{1, \dots, 2M\}$, constituent une base ortho-normale de décomposition des signaux de bande B de durée T . Les scalaires s_i sont les coefficients du signal utile sur cette base. L'énergie de ce signal vérifie :

$$E = \int_0^T s^2(t) dt = \int_0^T \sum_{i=1}^{2M} s_i^2 dt \quad (4.10)$$

Les coefficients n_i du bruit constituent une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $N/2$.

En sortie de l'intégrateur, sous l'hypothèse H_1 :

$$\begin{aligned} x &= \int_0^T [s(t) + n(t)]^2 dt = \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{2M} (n_i + s_i) \phi_i(t) \right]^2 dt \\ &= \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{2M} (n_i + s_i) \phi_i(t) \right] \left[\sum_{k=1}^{2M} (n_k + s_k) \phi_k(t) \right] dt \\ &= \sum_{i=1}^{2M} \sum_{k=1}^{2M} \left\{ (n_i + s_i)(n_k + s_k) \int_0^T \phi_i(t) \phi_k(t) dt \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Grâce à l'orthogonalité des fonctions de bases, la dernière intégrale est égale à δ_{ik} . On a donc :

$$x = \sum_{i=1}^{2M} (n_i + s_i)^2 \quad (4.12)$$

Les variables aléatoires $n_i + s_i$ suivent une loi gaussienne de moyenne s_i . La somme de leur carré, x , est une variable aléatoire qui suit une loi du χ^2 (Chi 2) [31] décentré à $2M$ degrés de liberté, de paramètre de décentrage E . (L'annexe C développe les étapes intermédiaires permettant de démontrer ce résultat). Sous l'hypothèse H_1 , la densité de probabilité de x est donc :

$$p_{x1}(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{x}{E} \right)^{\frac{M-1}{2}} e^{-\frac{x+E}{N}} I_{M-1} \left(2 \frac{\sqrt{xE}}{N} \right) \quad x \geq 0 \quad (4.13)$$

où $I_n(x)$ est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre n .

Dans le cas où seul le bruit est présent sous l'hypothèse H_0 , x suit une loi du χ^2 centré à $2M$ degrés de liberté :

$$p_{x_0}(x) = \left(\frac{x}{N}\right)^{M-1} \frac{e^{-\frac{x}{N}}}{\Gamma(M)} \quad x \geq 0 \quad (4.14)$$

où $\Gamma(p)$ est la fonction gamma définie par :

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt \quad p > 0 \quad (4.15)$$

En posant le rapport signal bruit $L = \frac{E}{N}$ et $Z = \frac{x}{N}$ on a :

– sous l'hypothèse H_1 :

$$p_{z_1}(z) = \left(\frac{z}{L}\right)^{\frac{M-1}{2}} e^{-z-L} I_{M-1}(2\sqrt{zL}) \quad z \geq 0 \quad (4.16)$$

– sous l'hypothèse H_0 :

$$p_{z_0}(z) = \frac{z^{M-1} e^{-z}}{\Gamma(M)} \quad z \geq 0 \quad (4.17)$$

Ces résultats, obtenus pour des valeurs entières de $2M$, sont également valables pour tout M réel positif.

4. 5. 3 - Le seuil de décision optimal μ_{opt} :

Le seuil optimal de l'équation (4.8) est obtenu par la résolution de $p_{z_0}(x) = p_{z_1}(x)$.

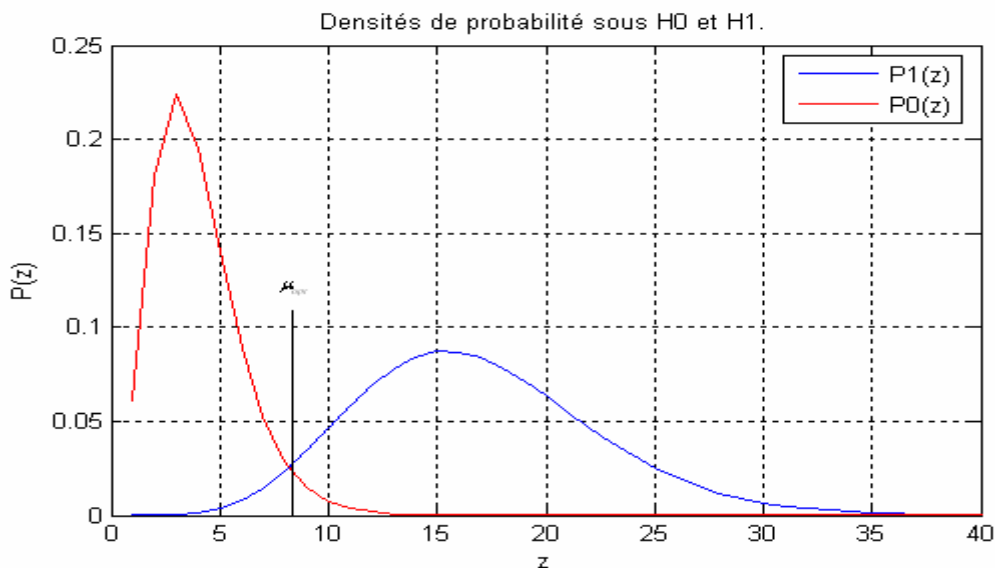


Figure 4.9 : densités de probabilité sous H_0 et H_1 .

$$\left(\frac{z}{L}\right)^{\frac{M-1}{2}} e^{-z-L} I_{M-1}(2\sqrt{zL}) = \frac{z^{M-1} e^{-z}}{\Gamma(M)}$$

Donc :

$$\Gamma(M).e^{-L}.I_{M-1}(2\sqrt{z.L}) = (z.L)^{\frac{M-1}{2}} \quad (4.18)$$

$$(\mu_{opt}.L)^{\frac{M-1}{2}} = \Gamma(M).e^{-L}.I_{M-1}(2\sqrt{\mu_{opt}.L})$$

Le développement asymptotique de la fonction de Bessel modifiée de premier ordre, conduit pour L grand à :

$$I_{M-1}(2\sqrt{\mu_{opt}.L}) \approx \frac{e^{2\sqrt{\mu_{opt}.L}}}{\sqrt{4\pi\sqrt{\mu_{opt}.L}}} \quad (4.19)$$

En injectant ce résultat dans l'équation (4.18) et en prenant le logarithme, on obtient :

$$\left(\frac{M}{2} - \frac{1}{4}\right) \frac{\ln(\mu_{opt}.L)}{\sqrt{\mu_{opt}.L}} + \sqrt{\frac{L}{\mu_{opt}}} = \frac{\ln(\Gamma(M))}{\sqrt{4\pi\mu_{opt}.L}} + 2 \quad (4.20)$$

Finalement, on obtient, à M fixé et pour des valeurs grandes du rapport signal à bruit L , la relation :

$$\frac{\mu_{opt}}{N} \approx \frac{L}{4} + M + \sqrt{M-1}.\phi(L) \quad (4.21)$$

où ϕ est une fonction tabulée dont une approximation est le polynôme du troisième degré :

$$\tilde{\phi}(x) = 2.1 \times 10^{-6} x^3 - 0.00046x^2 + 0.045x + 0.032 \quad (4.22)$$

Grâce à cette expression du seuil (4.21), le récepteur dispose d'un moyen simple pour calculer le seuil optimal en fonction des deux seules variables $M \approx BT$ et $L = \frac{E}{N}$. [29]

Le produit BT est connu et des procédures d'estimation permettent d'évaluer E et N .

4.6- L'estimation de l'énergie du bruit et du signal utile :

L'estimation de la densité spectrale de puissance du bruit N et de l'énergie intégrée E du signal utile permet une amélioration importante des performances du détecteur énergétique.

4.6.1- Estimation initiale :

Au cours de la réception d'une suite des bits, un vecteur aléatoire $X_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,m_0})$ est extrait. Les composantes du vecteur correspondent à des réalisations

de la variable de décision x sous l'hypothèse H_0 et sont des variables aléatoires indépendantes de densité $p_{x_0}(x)$. [33]

Un estimateur non-biaisé et efficace du paramètre N est obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance.

$$\hat{N} = \frac{\sum_{i=1}^{m_0} x_{0,i}}{m_0 M} \quad (4.23)$$

où m_0 est le nombre d'échantillons sous l'hypothèse H_0 utilisés pour estimer N .

Le risque quadratique moyen de cet estimateur est égal à sa variance :

$$\sigma_{\hat{N}}^2 = \frac{N^2}{m_0 M} \quad (4.24)$$

Pour m_0 grand, le théorème de la limite centrale permet d'approcher la loi de l'estimateur non biaisé \hat{N} par la loi gaussienne de moyenne N et de variance $\sigma_{\hat{N}}^2$. L'estimée \hat{N} est alors

contenue dans l'intervalle $\left[N - \sigma_{\hat{N}} z_{1-\frac{\delta}{2}}, N + \sigma_{\hat{N}} z_{1-\frac{\delta}{2}} \right]$ avec une probabilité égale à $1 - \delta$

(Figure 4.10), où $z_{1-\frac{\delta}{2}}$ est le quantile de la loi normale centrée réduite pour la probabilité $\delta/2$

défini par :

$$\frac{\delta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_{1-\frac{\delta}{2}}}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \quad (4.25)$$

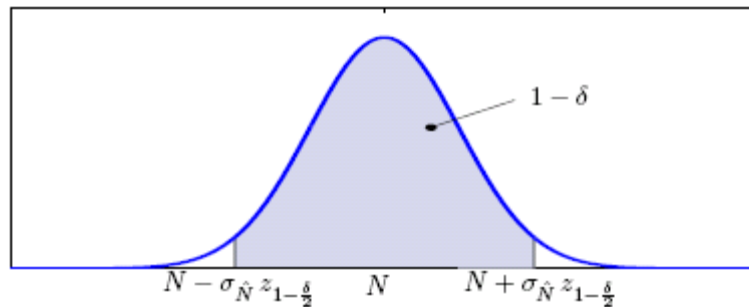


Figure 4.10 : approximation gaussienne de l'estimateur \hat{N} .

Sous l'hypothèse H_1 , le vecteur aléatoire $X_1 = (x_{1,1}, \dots, x_{1,m_1})$ est extrait du préambule.

Ses composantes sont des variables aléatoires de loi $p_{x_1}(x_1)$.

Un estimateur basé sur le premier moment mène à un algorithme à la fois beaucoup plus simple et plus performant. Le premier moment (i.e. la moyenne des observations sous l'hypothèse H_1) est donné par $E[x_1] = MN + E$ et peut être estimé simplement par $\frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{m_1} x_{1,i}$.

L'énergie E peut être estimée par :

$$\hat{E} = \frac{\sum_{i=1}^{m_1} x_{1,i}}{m_1} - MN \quad (4.26)$$

Cet estimateur est non biaisé. Pour N connu, sa variance :

$$\sigma_{E/N}^2 = \frac{MN^2 + 2EN}{m_1} \quad (4.27)$$

En tenant compte de l'incertitude sur l'estimation de N , la variance de l'estimateur \hat{E} est :

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{E}}^2 &= \frac{MN^2 + 2EN}{m_1} + M^2 \sigma_{\hat{N}}^2 \\ &= E^2 \left[\frac{1}{m_1 E/N} \left(\frac{M}{E/N} + 2 \right) + \frac{M}{m_0 (E/N)^2} \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

De la même façon que pour l'estimation de N , la précision sur l'estimation de E est évaluée par la probabilité que l'erreur relative soit contenue dans un intervalle borné :

$$\left| \frac{E - \hat{E}}{E} \right| < z_{1-\frac{\delta}{2}} \frac{\sigma_{\hat{E}}}{E} \quad \text{Avec une probabilité égale à } 1 - \delta.$$

4.7- Calcul de la probabilité d'erreur :

En raison de l'équiprobabilité entre les bits 0 et 1, la probabilité moyenne d'erreur est donnée par :

$$P_e = \frac{1}{2} [P(0/1) + P(1/0)] \quad (4.29)$$

Où :

- $P(0/1)$ est la probabilité de décider un bit 0 alors qu'un bit 1 a été émis;
- $P(1/0)$ est la probabilité de décider un bit 1 alors qu'un bit 0 a été émis.

4.7.1- Calcul de la probabilité $P(0|1)$:

La fonction de Marcum Q généralisée

$$Q_m(a, b) = \frac{1}{a^{m-1}} \int_b^{\infty} x^m e^{-\frac{x^2+a^2}{2}} I_{m-1}(ax) dx \quad (4.30)$$

permet d'exprimer la probabilité de décider d'un bit 0 alors qu'un bit 1 a été émis.

En effet, en fonction du seuil de décision μ et du rapport d'énergie signal sur bruit L , cette probabilité d'erreur est :

$$\begin{aligned}
 P(0/1) &= \int_0^{\mu} p_{z_1}(z) dz \\
 &= \int_0^{\mu} \left(\frac{z}{L}\right)^{\frac{M-1}{2}} e^{-z-L} I_{M-1}(2\sqrt{zL}) dz \\
 &= 1 - \int_{\mu}^{\infty} \left(\frac{z}{L}\right)^{\frac{M-1}{2}} e^{-z-L} I_{M-1}(2\sqrt{zL}) dz
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Avec le changement de variable d'intégration $w = \sqrt{2z}$, on obtient :

$$P(0/1) = 1 - \frac{1}{(\sqrt{2L})^{M-1}} \int_{\sqrt{2\mu}}^{\infty} w^M e^{-\frac{w^2+2L}{2}} I_{M-1}(w\sqrt{2L}) dw \tag{4.32}$$

soit :

$$P(0/1) = 1 - Q_M(\sqrt{2L}, \sqrt{2\mu}) \tag{4.33}$$

4.7.2- Calcul de la probabilité $P(1|0)$:

La probabilité de décider d'un bit 1 alors qu'un bit 0 a été émis s'exprime par :

$$P(1/0) = \int_{\mu}^{\infty} P_{z_0}(z) dz = \frac{1}{\Gamma(M)} \int_{\mu}^{\infty} z^{M-1} e^{-z} dz \tag{4.34}$$

Pour M entier, l'intégrale $A_M = \int_{\mu}^{\infty} z^{M-1} e^{-z} dz$ vérifie

$$A_M = \mu^{M-1} e^{-\mu} + A_{M-1} \tag{4.35}$$

Par récurrence, on obtient :

$$\int_{\mu}^{\infty} z^{M-1} e^{-z} dz = \sum_{k=1}^M \frac{(M-1)!}{(M-k)!} \mu^{M-k} e^{-\mu} \tag{4.36}$$

on a donc :

$$\begin{aligned}
 P(1/0) &= e^{-\mu} \sum_{k=1}^M \frac{\mu^{M-k}}{(M-k)!} \\
 &= e^{-\mu} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\mu^k}{k!}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

4.8- Résultat et comparaison avec une modulation cohérente :

Les probabilités d'erreurs calculées aux équations (4.33) et (4.37) sont exprimées en fonction du paramètre M et $L = E/N$, où E est l'énergie correspondant à l'énergie d'un bit 1.

En OOK, l'énergie moyenne reçue est $\varepsilon = \frac{E}{2}$. Finalement, la probabilité d'erreur moyenne du système étudié s'exprime en fonction des paramètres ε , M et μ .

$$P_e = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} Q_M \left(\sqrt{4 \frac{\varepsilon}{N}}, \sqrt{2\mu} \right) + \frac{e^{-\mu}}{2} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\mu^k}{k!} \quad (4.39)$$

où μ est le seuil de décision dont la valeur optimale est fonction des paramètres E , N et M

$$\mu_{opt} \approx \frac{\varepsilon}{2} + NM + N\sqrt{M-1} \phi \left(2 \frac{\varepsilon}{N} \right) \quad (4.40)$$

Dans les mêmes conditions, le récepteur filtre adapté cohérent présente une probabilité d'erreur :

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E}{N}} \right) \quad (4.41)$$

Pour la réception par un corrélateur (modulation BPSK cohérente), la probabilité d'erreur est :

$$P_e = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{2 \frac{E}{N}} \right) \quad (4.42)$$

Les courbes de performances pour ces différents récepteurs sont tracées sur la figure (4.11). Pour atteindre les mêmes performances que le récepteur cohérent BPSK, le récepteur non-cohérent proposé doit améliorer son bilan de liaison de 4 à 5 dB pour des valeurs typiques de $M=BT$ comprises entre 5 et 25. Mais ces performances sont fonctions de l'énergie moyenne récupérée par le récepteur. [9] Alors que le système non-cohérent proposé est capable d'intégrer la quasi totalité de l'énergie disponible, le récepteur cohérent dispose d'un nombre limité de doigts lui permettant de récupérer qu'une faible partie de l'énergie.

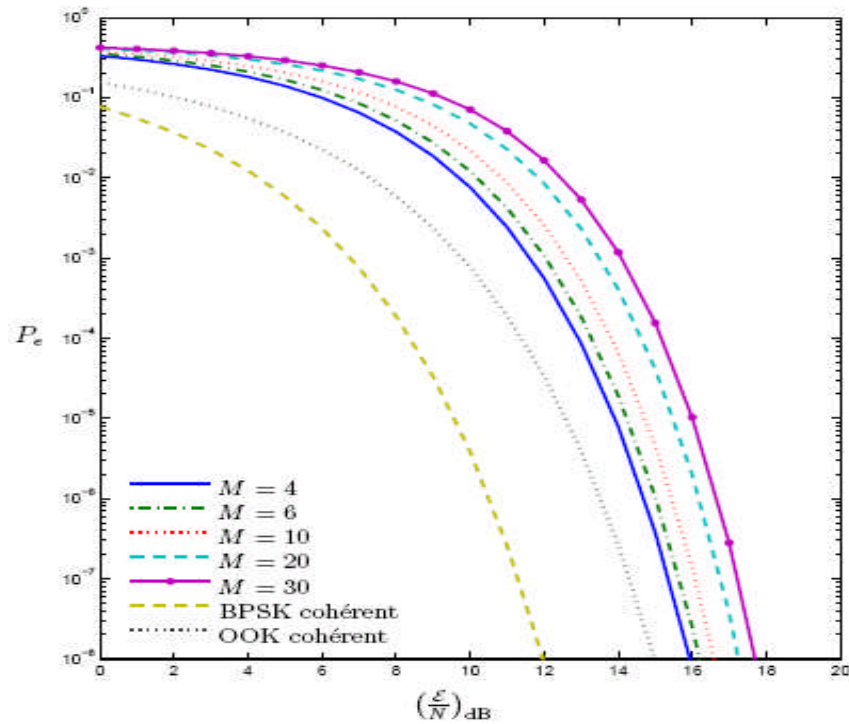


Figure 4.11 : probabilité d'erreur en fonction de e/n pour différents valeurs de M .

4.9- Conclusion :

Dans ce chapitre on a fait l'étude d'un système asynchrone basé sur un traitement non cohérent en réception consistant à détecter l'énergie du signal reçu ; Avec type d'onde de forme impulsionnel, qui présente notamment les avantages suivants :

- ✓ La finesse de l'impulsion permet d'obtenir une très grande précision dans la mesure des distances, donc ce type de méthode est très pratique pour la localisation ;
- ✓ Le très large spectre avec une densité de puissance spectrale très faible confère à l'ULB une faible probabilité de détection et d'interception ;

En outre, l'analyse du système montre que l'approche non cohérente proposée nécessite 4 à 5 dB supplémentaires pour atteindre les mêmes performances qu'un système synchrone à modulation BPSK. Mais, contrairement à un récepteur cohérent, le détecteur d'énergie récupère très facilement le quasi totalité de l'énergie disponible.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Le problème de la détection d'un signal perturbé par des bruits parasites est l'une des tâches majeures du traitement des signaux. La théorie statistique de l'estimation et de la décision propose diverses méthodes permettant de trouver la solution optimale à un problème de ce type dans un contexte donné.

Cette présentation se propose pour faire un survol de quelques solutions données en évaluant les contraintes d'optimisations de chacune des solutions.

On a commence d'abord par la présentation du filtre adapté qui est un système linéaire optimisant la détection d'un signal de forme connue. Ensuite on a abordé à l'étude du corrélateur qui est un récepteur cohérent comme le filtre adapté, c-à-d, il a besoin de connaissance à priori sur le signal à détecter (au moins partiellement). Enfin on a étudié le détecteur énergétique qui a l'avantage de n'exiger aucune connaissance sur le signal à détecter.

Cette étude nous a permet de comparer ces différentes solutions, et plus précisément, de connaître qu'elle est le récepteur le plus performant entre ces trois ?

La réponse serait liée : au système de communication étudiée, le degré de connaissance utilisé, ainsi que le type de signal qui nous devons détecter, etc. Tout cela peut être le résumer en deux mots « le domaine d'application ».

Le filtre adapté est une méthode de détection linéaire intéressante car il induit un gain de traitement qui n'est plus égal à zéro, et présente un RSB optimale en présence du bruit blanc gaussien. C'est un outil puissant en traitement de signal très employé en localisation et reconnaissance des formes, Il peut être utilisé par exemple dans les lignes radio fréquences.

Par contre la méthode de corrélation peut être plus efficace en terme d'extraction du signal faible par rapport au bruit. Cette méthode et très puissante , elle est très utilisée dans le domaine de la radioastronomie pour déterminer les pulsations radioélectriques des étoiles lointaines , sachant que les signaux captés sont fortement attachés de bruit .

Le détecteur énergétique est adapté aux transmissions courtes portées, qui permettent une grande précision dans la mesure des distances, car la résolution est inversement proportionnelles à la durée de l'impulsion. Il possède de bonnes capacités de pénétration probablement dues à leur grande largeur de bande. Ils peuvent ainsi traverser les surfaces, tels que des murs.

Dans ce mémoire, on a voulu ressortir l'importance de ces méthodes qui sont à la fois efficaces en temps de calcule et optimales en terme RSB, et cela à travers une simulation par langage MATLAB.

Nous espérons que notre contribution pourra être élargie à la détection des signaux aléatoires non stationnaires.

ANNEXES

Annexe A

Quelques Définitions Utiles

1. Débit binaire

Nous appellerons débit binaire D (bit/s) ou vitesse de canal le nombre d'informations élémentaires (ou bits) que ce canal transporte par unité de temps.

$$D = \frac{1}{T_b}$$

T_b représente la durée du bit d'information, exprimée en seconde.

2. Taux d'erreur sur les bits

Les modulations numériques sont évaluées grâce au taux d'erreur par bit (TEB). Il permet de chiffrer l'influence du bruit (grâce au rapport signal sur bruit ou à l'efficacité de puissance) pour chaque modulation et en fonction du nombre d'états de la modulation. Il se définit de la manière suivante :

$$\text{TEB} = \frac{\text{Nb de éléments binaire faux}}{\text{Nb de éléments binaire émis}}$$

3. L'efficacité spectrale

L'efficacité spectrale (en Bit/Seconde/Hertz) d'un signal numérique est le nombre de bits par seconde de données qui peuvent être supportés pour chaque hertz de la bande de fréquence utilisée (B en Hertz) :

$$\zeta = \frac{\text{Débit}}{\text{Bande occupée}} = \frac{D(\text{Bit/s})}{B(\text{Hertz})}$$

On peut aussi noter que pour des applications où la bande passante est limitée par des contraintes physiques, il faut choisir une technique qui donne la plus haute efficacité spectrale, laquelle doit permettre d'obtenir de faibles taux d'erreur sur le bit en sortie du système.

4. Définition de l'efficacité en puissance E_b/N_0

L'efficacité en puissance se définit par le rapport entre l'énergie moyenne E_b par bit d'information et la densité spectrale d'un bruit blanc $N_0/2$.

Nous allons maintenant exprimer la relation entre l'efficacité en puissance et le rapport signal sur bruit (SNR (*Signal Noise Ratio*)). Tout d'abord, définissons le rapport existant entre l'énergie totale E et l'énergie moyenne E_b par bit dans un système à M états.

$$E_b = \frac{E}{\log_2(M)}$$

La puissance S est définie comme le rapport entre l'énergie totale E et la durée d'un bit T_b , nous obtenons la relation suivante pour le rapport signal sur bruit :

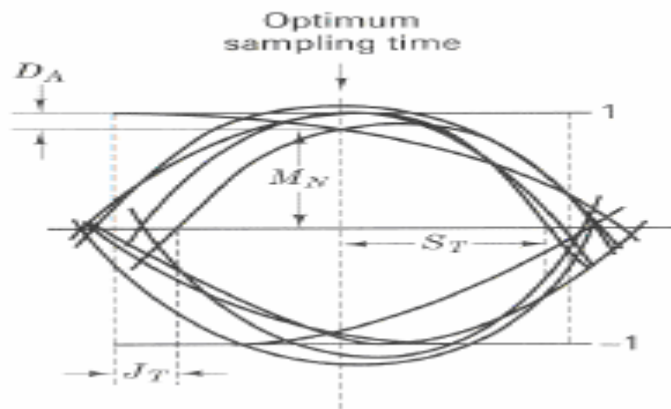
$$RSB = \frac{E}{T_b} \div N_o B = \frac{E}{T_b N_o B}$$

Ce rapport est exprimé le plus souvent en dB $RSB_{dB} = 10 \cdot \log_{10}(RSB)$.

5. Diagramme de l'œil

Le diagramme de l'oeil correspond brièvement à une superposition de morceaux du signal reçu. Ces « morceaux » correspondent à un nombre d'échantillons égal à la période d'émission. L'intérêt majeur de ce diagramme consiste en la détection de la qualité de transmission, ainsi que la recherche de synchronisation afin de discrétiser aux bons instants, et par là même avoir la plus grande probabilité de récupération des données.

Ce diagramme permet de visualiser l'effet des distorsions du canal aux instants d'échantillonnage (pour effectuer la décision sur les symboles transmis).



D_A : plage de différence d'amplitude ;

J_T : plage d'erreur de synchronisation ;

M_N : marge de bruit ;

S_T : sensibilité aux erreurs de synchronisation ;

6. Bruit Blanc

Définition : On appelle "bruit blanc" un processus aléatoire centré, stationnaire d'ordre 2, dont la DSP est constante en fréquence.

$$S_{xx}(f) = \frac{N_o}{2} \qquad R(\tau) = \frac{N_o}{2} \cdot \delta(\tau)$$

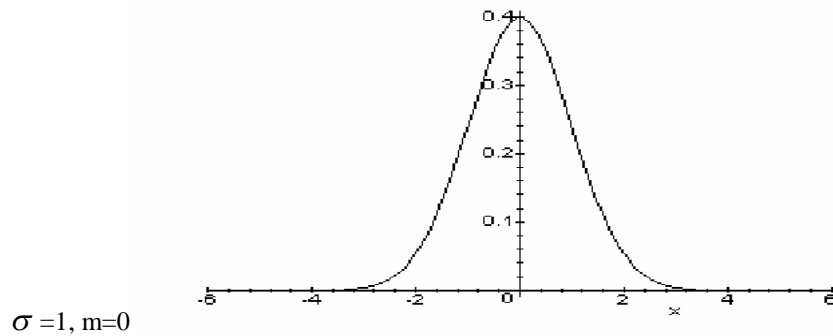
toutes les valeurs à un temps t sont indépendantes.

7. Processus gaussien

Un processus, ou signal, ou bruit, gaussien possède une densité de probabilité définie par une loi normale :

$$f_X(x, t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right)$$

m étant la moyenne et σ l'écart-type



8. Processus aléatoire stationnaire

Un *processus aléatoire stationnaire* est tel que :

1. $\forall n, E(X_n) = m$, la *moyenne statistique* (indépendant de n)
2. $\forall n, E(X_n X_{n+k}) = \Gamma_k$, l'*autocorrélation statistique* (indépendant de n)

9. Processus ergodique

Un *processus ergodique* (phase fixée) est tel que :

- ✓ $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N X_n = m$
- ✓ $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N X_n X_{n+k} = \Gamma_k$

Pour démontrer qu'un processus est ergodique, on utilise la convergence en probabilité, la loi des grands nombres.

10. modulation BPSK (binary phase shift keying) :

Désigne une famille de formes de modulations numériques qui ont toutes pour principe de véhiculer de l'information binaire via la phase d'un signal de référence (porteuse).

BPSK est la forme la plus simple du PSK. Elle utilise deux phases qui sont séparées de 180° ; on l'appelle également 2-PSK. Cette modulation est la plus robuste de toutes les PSK car il faut une grande déformation du signal pour que le démodulateur se trompe sur le symbole reçu. Cependant on ne peut moduler qu'un bit/symbole (voir le schéma), ce qui est un inconvénient pour les applications qui nécessitent un débit binaire élevé.

Le bit error rate (BER) ou encore taux d'erreur binaire du BPSK peut être calculé ainsi:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

11. Codage En Bande De Base

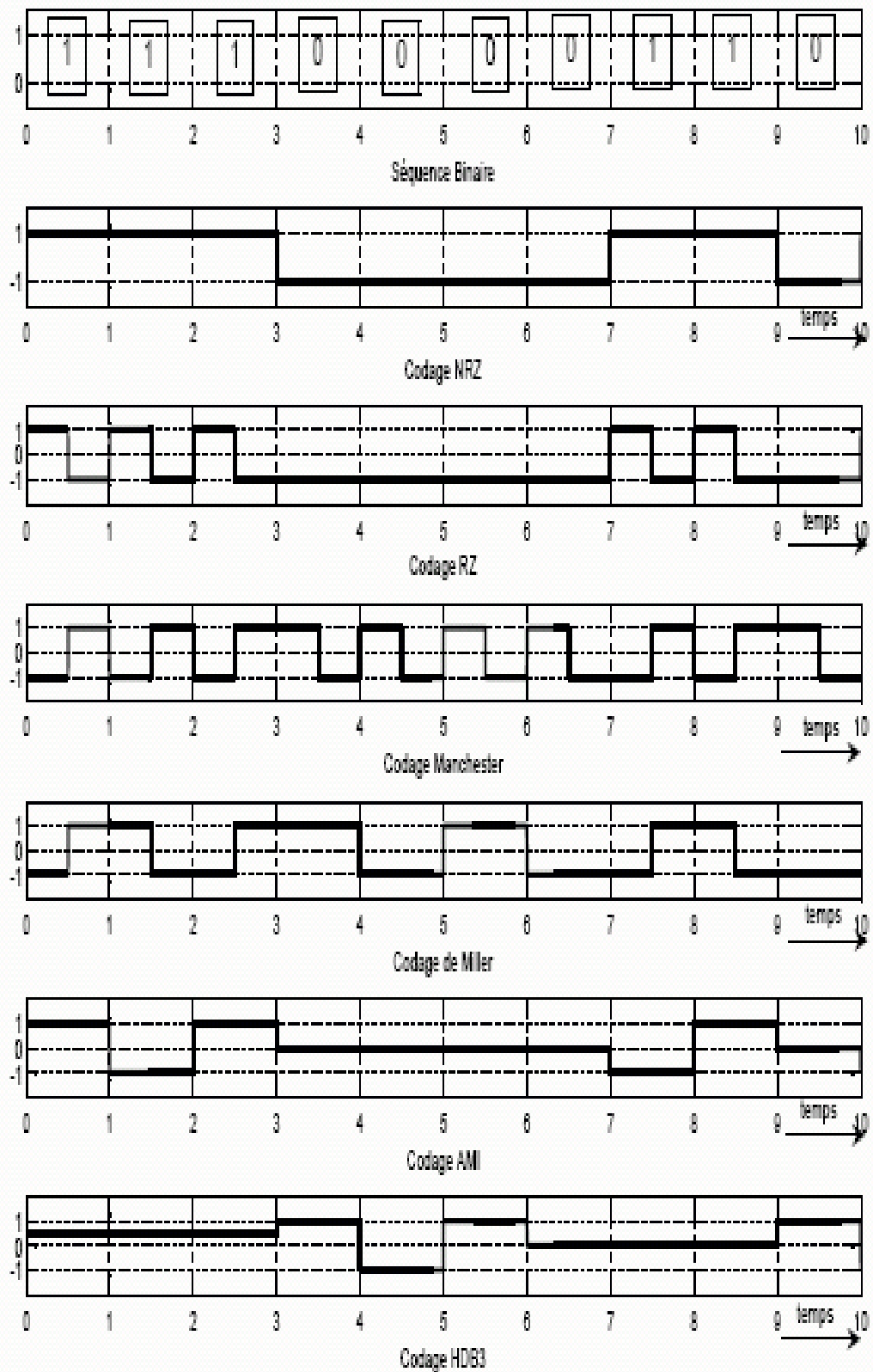


Figure : Les différents codes utilisés pour représenter les symboles

Annexe B

Principe Générale De La Compression D'impulsion

Pour avoir une bonne résolution en distance (c à d : la capacité de séparer deux cibles proches suivant l'axe radar cible) , il faudrait diminuer la durée d'émission tout en gardant une énergie suffisante pour l'onde puissent se propager . L'idéale serait alors d'envoyer une impulsion de Dirac, ce qui n'est pas réalisable techniquement. Pour remédier ce problème, la solution retenue est la compression d'impulsion. Son principe est le suivant :

Considérons qu'un radar émette un signal modulé linéairement en fréquence (chirp) et illumine un point à une distance D. Pour une fréquence centrale f_0 et une largeur de bande Δf , l'expression complexe du signal émis sera la suivante :

$$s_e(t) = A e^{2\pi \cdot j \cdot (f_0 t + \frac{\Delta f}{2\tau} t^2)} \quad \text{avec } |t| \leq \frac{\tau}{2} \quad (1)$$

Si l'on suppose que le radar et la cible sont fixes alors le signal reçu sera de la forme :

$$s_r(t) = kGA e^{2\pi \cdot j \cdot (f_0(t-t_{AR}) + \frac{\Delta f}{2T}(t-t_{AR})^2)} \quad \text{avec } |t - t_{AR}| \leq \frac{\tau}{2} \quad (2)$$

Où : - G est un coefficient d'atténuation de la forme $\frac{1}{\text{distance}^2}$

- t_{AR} est le temps mis par l'onde pour parcourir le trajet aller-retour radar-cible.

L'intercorrélation entre le signal émis et le signal reçu donne le signal détecte suivant :

$$s_c(t) = \int s_e^*(t'-t) s_r(t') dt' \quad (3)$$

En introduisant les expressions de s_e (1) et s_r (2) dans (3), nous obtenons :

$$s_c(t) = kGA^2 e^{2\pi \cdot j \cdot f_0(t-t_{AR})} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi \cdot j \cdot \frac{\Delta f}{2\tau}(t'-t)^2} e^{2\pi \cdot j \cdot \frac{\Delta f}{2\tau}(t'-t_{AR})^2} dt' \quad (4)$$

Où la variable t' vérifie les deux conditions : $(t' - t) \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right]$ et $(t' - t_{AR}) \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right]$

Dans le cas où $t > t_{AR}$ alors $t' \in \left[t - \frac{\tau}{2}, t_{AR} + \frac{\tau}{2} \right]$; et l'expression du signal compressé

$s_{c1}(t)$ peut s'écrire :

$$s_{c1}(t) = kGA^2 e^{2\pi \cdot j \cdot f_0(t-t_{AR})} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t_{AR}+\frac{\tau}{2}} e^{-2\pi \cdot j \cdot \frac{\Delta f}{2\tau}(t'-t)^2} e^{2\pi \cdot j \cdot \frac{\Delta f}{2\tau}(t'-t_{AR})^2} dt' \quad (5)$$

En posant : $u = 2\pi \cdot \frac{\Delta f}{2\tau}(t-t_{AR})$, on obtient :

$$s_{c1}(t) = kGA^2 e^{2\pi \cdot j \cdot f_0(t-t_{AR})} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t_{AR}+\frac{\tau}{2}} e^{ju(2t'-t_{AR}-t)} dt' \quad (6)$$

soit après développement :

$$s_{c1}(t) = kGA^2 e^{2\pi \cdot j \cdot f_0(t-t_{AR})} \cdot \frac{e^{j \cdot u \cdot (t_{AR}-t+\tau)} - e^{-j \cdot u \cdot (t_{AR}-t+\tau)}}{2 \cdot j \cdot u} \quad (7)$$

Finalement, la première partie du signal compressé est donnée par :

$$s_{c1}(t) = kGA^2 e^{2\pi \cdot j \cdot f_0(t-t_{AR})} (t_{AR} - t + \tau) \sin c(u(t_{AR} - t + \tau)) \quad (8)$$

Le cas $t < t_{AR}$ se traite de manière analogue. L'expression générale du signal compressé est donc :

$$s_c(t) = kGA^2 e^{2\pi \cdot j \cdot f_0(t-t_{AR})} (\tau - |t - t_{AR}|) \sin c(u(\tau - |t - t_{AR}|)) \quad (9)$$

La forme du signal reçu est donc un sinus cardinal pondéré par le terme $(\tau - |t - t_{AR}|)$. En fait, pour des valeurs habituellement utilisées par les radars, ce coefficient pondérateur ne varie quasiment pas dans le voisinage de t_{AR} et peut être approché par la valeur τ . L'expression du signal détecte devient donc :

$$\bar{s}_c(t) \cong kGA^2 e^{2\pi \cdot j \cdot f_0(t-t_{AR})} \tau \sin c(u\tau) \quad (10)$$

Pour $u = 2\pi \cdot \frac{\Delta f}{2\tau}(t-t_{AR})$ l'équation (10) est équivalent :

$$\bar{s}_c(t) \approx e^{2\pi \cdot j \cdot f_0(t-t_{AR})} \sin c(\pi \Delta f(t-t_{AR})) \quad (11)$$

Les Multiplicateurs De La Grange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange est un outil très puissant pour rechercher les extrema d'une fonction sous contraintes. Elle est utilisée quand la fonction dont on recherche le minimum ou le maximum est une fonction d'un nombre fini ou infini de paramètres. Nous allons l'expliciter dans le cas d'un nombre fini de variables.

Soit $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ une fonction de N variables de l'ensemble D dont on cherche à déterminer le point $(x_1^m, x_2^m, \dots, x_N^m)$ qui la minimise sur le sous ensemble défini par :

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \quad (1)$$

On suppose par ailleurs qu'au voisinage de chaque point (x_1, x_2, \dots, x_N) de D, $\phi(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$ définit une fonction implicite entre les points, par exemple :

$$x_N = X_N(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}) \quad (2)$$

On cherche donc le minimum de $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ avec comme contrainte que $\phi(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$. Pour ce faire, on substitue $x_N = X_N(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ et en minimisant $f(x_1, x_2, \dots, X_N(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}))$ par rapport à $(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

Soit, de façon plus implicite :

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_N} \cdot \frac{\partial X_N(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

Pour chacune des valeurs de i comprise entre 1 et N-1. On doit en outre avoir :

$$\frac{\partial \phi(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_N} \cdot \frac{\partial X_N(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

En réécrivant ces équations sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i} & \frac{\partial f}{\partial x_N} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_i} & \frac{\partial \phi}{\partial x_N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial X_N}{\partial x_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Cette écriture montre que les deux vecteurs formés par les lignes de la matrice précédente sont proportionnels :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E}{\partial x_i} \\ \frac{\partial E}{\partial x_N} \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{pmatrix} \quad (7)$$

pour tout i compris entre 1 et $N-1$.

Or si pour tout $i \in 1, \dots, N-1$, alors $\lambda_i = \lambda$ pour tout i . On obtient ainsi la relation suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \quad (8)$$

On peut déduire de cette relation que le minimum de $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ sous contrainte que $\phi(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$ est obtenu en minimisant la fonction :

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = f(x_1, x_2, \dots, x_N) - \lambda \cdot \phi(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (9)$$

où λ est un coefficient appelé un multiplicateur de Lagrange.

La valeur de λ n'est pas obtenue par la minimisation de $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$, mais la solution est paramétrée en λ :

$$(x_1^m, x_2^m, \dots, x_N^m) = (x_1^m(\lambda), x_2^m(\lambda), \dots, x_N^m(\lambda)) \quad (10)$$

et on identifie ensuite la valeur λ_0 du multiplicateur de Lagrange en vérifiant que:

$$g(x_1^m(\lambda_0), x_2^m(\lambda_0), \dots, x_N^m(\lambda_0)) \quad (11)$$

Annexe C

Loi Du Chi-Deux

Définition :

Soit $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes normales centrées réduites (c'est à dire telles que $L(X_i) = N(0,1)$). La somme des carrés des X_i , $S = \sum_{i=1}^n X_i^2$ est une variable aléatoire qui suit une loi du chi-deux à n degrés de liberté.

On note $L(S) = X_n^2$

Propriétés : Si $L(S) = X_n^2$ alors $E(S) = n$ et $\text{Var}(S) = 2n$

Si $L(K_1) = X_{n_1}^2$ et $L(K_2) = X_{n_2}^2$ et si $K_1 \perp K_2$

alors $L(K_1 + K_2) = X_{n_1+n_2}^2$

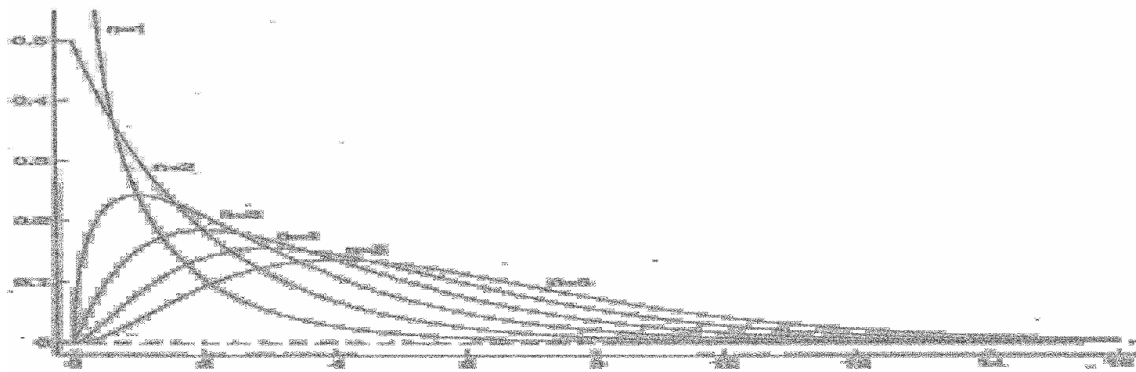


Figure : Fonctions densité de probabilité de la loi du X_n^2 pour quelques valeurs de n .

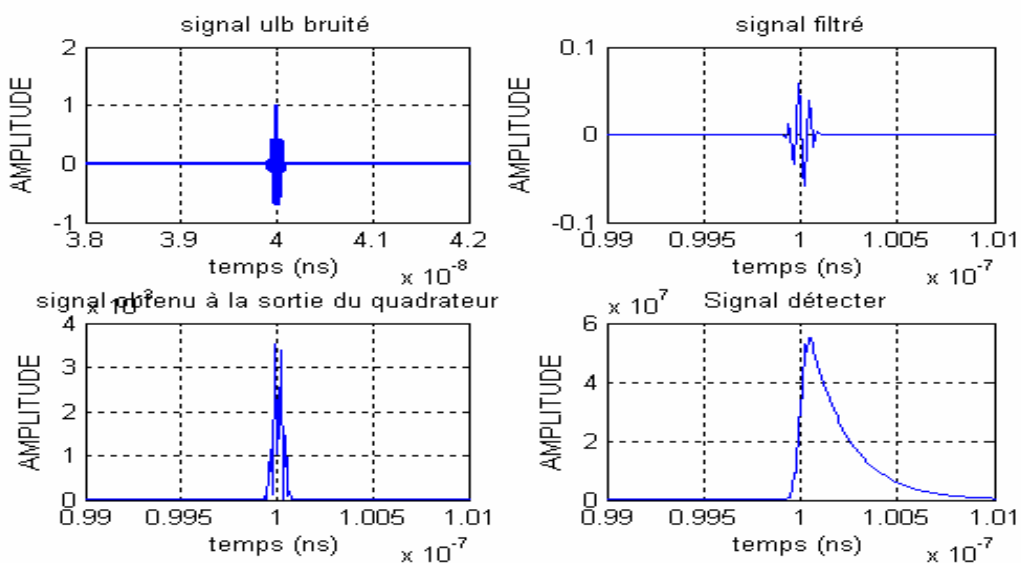


Figure : exemple obtenu par détecteur énergétique illustre bien la loi chi 2

Densité de probabilité de la Statistique de décision du récepteur quadratique

La statistique de décision du récepteur quadratique est le résultat de l'intégration du carré du signal reçu. Selon l'hypothèse H_0 (bit 0 émis) ou H_1 (bit 1 émis), la variable x est égale à :

$$\begin{cases} H_0 : x = \int_0^T [n(t)]^2 dt & (\text{bit}0) \\ H_1 : x = \int_0^T [s(t) + n(t)]^2 dt & (\text{bit}1) \end{cases}$$

Par une décomposition des signaux sur une base orthonormée, la variable x se réécrit:

$$\begin{cases} H_0 : x = \sum_{i=1}^{2M} [n_i]^2 & (\text{bit } 0) \\ H_1 : x = x = \sum_{i=1}^{2M} [n_i + s_i]^2 & (\text{bit } 1) \end{cases}$$

La densité de probabilité sous l'hypothèse H_1 .

La variable aléatoire $y_i = n_i + s_i$ suit une loi gaussienne de moyenne m et de variance $N/2$. On pose $m = s_i$, $\sigma^2 = \frac{N}{2}$ et $y = y_i \in N(m, \sigma^2)$

$$P_r(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}$$

On cherche maintenant la densité de probabilité de $(n_i + s_i)^2$. Soit $y_i^2 = w$.
D'une part :

$$E[f(w)] = \int_0^{\infty} f(w) p_w(w) dw$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} E[f(w)] &= E[f(y)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} f(y^2) p_y(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} f(y^2) p_y(y) dy + \int_{-\infty}^0 f(y^2) p_y(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} f(w) p_y(\sqrt{w}) \frac{dw}{2\sqrt{w}} - \int_{-\infty}^0 f(w) p_y(-\sqrt{w}) \frac{dw}{2\sqrt{w}} \\ &= \int_0^{\infty} f(w) \frac{dw}{2\sqrt{w}} [p_y(\sqrt{w}) + p_y(-\sqrt{w})] dw \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
P_w(w) &= \frac{1}{2\sqrt{w}} [p_y(\sqrt{w}) + p_y(-\sqrt{w})] \\
&= \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi w}} \left[e^{-\frac{(\sqrt{w}-m)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(\sqrt{w}+m)^2}{2\sigma^2}} \right] \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi w}} e^{-\frac{w+m^2}{2\sigma^2}} \operatorname{ch}\left(\frac{m\sqrt{w}}{\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$

Calcul de la fonction caractéristique de $(n_i + s_i)^2$

La fonction caractéristique de la variable aléatoire w est donnée par la transformation de Fourier de la densité $P_w(w)$

$$\begin{aligned}
\phi_w(t) &= E[e^{jt^w}] = \int_0^{\infty} e^{jt^w} p_w(\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left[e^{-\frac{(\sqrt{\omega}-m)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(\sqrt{\omega}+m)^2}{2\sigma^2}} \right] e^{jt\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\omega+m^2+2m\sqrt{\omega}-2\sigma^2 jt\omega)} d\omega + \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x_2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\omega+m^2+2m\sqrt{\omega}-2\sigma^2 jt\omega)} d\omega \right\}
\end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on remarque que :

$$\omega + m^2 + 2m\sqrt{\omega} - 2\sigma^2 jt\omega = (1 - 2\sigma^2 jt) \left[\sqrt{\omega} + \frac{m}{1 - 2\sigma^2 jt} \right]^2 - \frac{2\sigma^2 jtm^2}{1 - 2\sigma^2 jt}$$

D'où:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\omega+m^2+2m\sqrt{\omega}-2\sigma^2 jt\omega)} d\omega = e^{\frac{jtm^2}{1-2\sigma^2 jt}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}-jt\right)\left(\sqrt{\omega}+\frac{m}{1-2\sigma^2 jt}\right)^2} d\omega$$

En appliquant le changement de variable $w = \sqrt{\omega} + \frac{m}{1-2\sigma^2 jt}$, on obtient :

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}-jt\right)\left(\sqrt{\omega}+\frac{m}{1-2\sigma^2 jt}\right)^2} d\omega = 2 \int_{\frac{m}{1-2\sigma^2 jt}}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}-jt\right)w^2} dw$$

De même, pour la deuxième intégrale de l'expression de $\phi_w(t)$, on a :

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\omega+m^2+2m\sqrt{\omega}-2\sigma^2 jt\omega)} d\omega = 2e^{\frac{jtm^2}{1-2\sigma^2 jt}} \int_{\frac{m}{1-2\sigma^2 jt}}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}-jt\right)w^2} dw$$

Il est alors possible d'écrire la fonction caractéristique recherchée, et grâce à la parité du terme des intégrales, aboutir au résultat compact :

$$\begin{aligned}
\phi_w(t) &= \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} 2e^{\frac{jm^2}{1-2\sigma^2 jt}} \left\{ \int_{\frac{m}{1-2\sigma^2 jt}}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2-jt}\right)w^2} dw + \int_{-\frac{m}{1-2\sigma^2 jt}}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2-jt}\right)w^2} dw \right\} \\
&= \frac{e^{\frac{jm^2}{1-2\sigma^2 jt}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} 2 \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2-jt}\right)w^2} dw \\
&= \frac{e^{\frac{jm^2}{1-2\sigma^2 jt}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma^2-jt}}}
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\int e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ Finalement, on obtient :

$$\phi_w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2\sigma^2 jt}} e^{\frac{jm^2}{1-2\sigma^2 jt}}$$

En reprenant les notations de départ $m = s_i$ et $\sigma^2 = N_o / 2$, on a

$$\phi_{(n_i+s_i)^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-N_o jt}} e^{\frac{jts_i^2}{1-N_o jt}}$$

Fonction caractéristique de x

Rappelons que $x = \sum_{i=1}^{2M} (n_i + s_i)^2$ où $\{n_i\}$ est un ensemble de variables aléatoires indépendantes. La fonction caractéristique de x est donc le produit des fonctions caractéristiques de chaque variable aléatoire $(n_i + s_i)^2$

$$\begin{aligned}
\phi_x(t) &= \prod_{i=1}^{2M} \phi_{(n_i+s_i)^2}(t) \\
&= \frac{1}{(1-N_o jt)^M} \exp\left(\sum_{i=1}^{2M} \frac{jts_i^2}{1-N_o jt}\right)
\end{aligned}$$

Puisque $E = \sum_{i=1}^{2M} s_i^2$

$$\phi_x(t) = \frac{1}{(1-N_o jt)^M} e^{\frac{j t E}{1-N_o jt}}$$

Densité de probabilité de x

La fonction caractéristique de x sous l'hypothèse H_1 est la transforme de Fourier de la distribution du Chi₂(2) décentré à $2M$ degrés de liberté, et de paramètre de décentrage E :

$$p_x(x) = \frac{1}{N_o} \left(\frac{x}{E} \right)^{\frac{M-1}{2}} e^{-\frac{x+E}{N_o}} I_{M-1} \left(2 \sqrt{\frac{xE}{N_o}} \right) \quad x \geq 0 \quad (H_1)$$

Où I_n est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre n .

Densité de probabilité sous H_0

Dans le cas où seul du bruit est présent ($E = 0$), i.e. lorsqu'on est dans l'hypothèse H_0 , on obtient :

$$p_x(x) = \frac{1}{N_o} \frac{(x/N_o)^{M-1} e^{-x/N_o}}{\Gamma(M)} \quad x \geq 0 \quad (H_0)$$

où $\Gamma(p)$ est la fonction gamma définie par :

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt \quad p > 0$$

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1]: **M. Aboulhamid et Ph. Marquet**, « Hardware/Software Exploration for an Anti-collision Radar System », institut national de recherche en informatique et en Automatique , rapport de recherche N° 5820, January 30, 2006
- [2]: **S. Bonneau, M. Dahan, et L. Cohen** , «Detection Et Suivi D'objets Ponctuels Dans Des Sequences D'images De Fluorescence », Université Paris Dauphine , 2005.
- [3]: **J. Veen and P.C.J.M. van der Wielen**, « The Application of Matched Filters to PD Detection and Localization », Eindhoven University of Technology; KEMA Transmission and Distribution Testing Services , IEEE Electrical Insulation Magazine September/October 2003 — Vol. 19, No. 5
- [4]: **Pr. P-Y.Arquès, J-M. Boucher, A. Hillion et C. Roux** , « Méthodes En Traitement Du Signal Bruité » , Techniques de l'Ingénieur traité Informatique industrielle , R 7 031.
- [5]: **William I. Root**, «An Introduction to the Theory of the Detection of Signals in Noise », proceedings of the IEEE, VOL. 58, pp. 610-623; NO. 5. MAY 1970
- [6]: Service de Théorie des Circuits et de Traitement du signal, «Epreuve Pratique De Traitement Du Signal », Poly Tech Mons, Décembre 2002
- [7]: **Pr. Mohamed Najim**, « Filtrage Optimal », Techniques de l'Ingénieur, traité Mesures et Contrôle, R 7 228
- [8]: **J. Veen and P.C.J.M. Vanderwielen** , « The Application of Matched Filters to Detection and Localization », IEEE Electrical Insulation Magazine, September/October 2003 — Vol. 19, No. 5
- [9]: **Dr. N. Mandayam** , « Probability of Error, Digital Signalling on a Fading Channel And Equalization Schemes for ISI » , Wireless Communications Technologies, Rutgers University, Piscataway, NJ 2005.
- [10]: **James E. Gilley**, « Bit-Error-Rate Simulation Using Matlab », Transcript International, August 19, 2003
- [11]: **Ph. Loubaton** , « Modulations linéaire », Université De Marne – La Vallée
- [12]: **G. Blanchet et M. Charbit** , « Traitement Numérique Du Signal ,Simulation Sous Matlab » , Edition Hermes, Paris, 1998.
- [13]: TP 3 Télécommunications, 1^{ière} année « Modulations des signaux numériques en Bande de Base », IUT d'Aix-en-Provence, département GTR,

- [14]: **A. Quinquis**, « Le Traitement Du Signal Sous Matlab Pratique Et Application », Hermes Science Publication, Paris, 2000.
- [15]: **Odile Macchi** , «Théorie Des Systèmes De Communication », Ecole Supérieure d'électricité, N° 2505, 1976 .
- [16]: **D. Rabasté** , « Traitement De Signal Avec Scilab : Corrélation » , IUFM Aix Marseille
- [17]: **G.BINET**, « Signaux Discrets : Energie Et Puissance Analyse Par Corrélation Théorie Avancée Du Filtrage », Université de Caen , 2002
- [18]: **Ph. Ravier**, « Cours Analyse Spectrale Part I » , ESPEO 3ème année, 2000-2001
- [19]: **S.L. Kay**, « Traitement Numérique Des Signaux Aléatoires », L'université de Rhodes Island , 05 septembre 2001
- [20]: **F. COMBLET**, « Détection, Localisation Et Identification De Cibles Radar Par Imagerie Electromagnetique Bistatique », thèse Doctorat, soutenue le 01 décembre 2005, Université de Bretagne Occidentale
- [21]: **Cours**, « Fonctionnement du RADAR», CNAM, 4 février 1999
- [22]: **Cours aspiré au site** www.wikipédia.compression d'impulsion .mht
- [23]: **M. Terré**, « Détection Estimation Synchronisation », Conservatoire National des Arts et Métiers Version 2.0, Décembre 2002
- [24]: **L.Godard , J. Liénard et K. Raouf**, « Etude Bibliographique Préliminaire sur La Localisation Des Objets Communicants», Laboratoire Des Images Et Des Signaux, 11 janvier 2006
- [25]: **C.Defay**, « Traitement du Signal pour La Détection Des Transits Planétaires : Application à La Mission Spatial COROT », Thèse De Doctorat, Soutenu Le 28 Septembre 2001 , Université De Droit , Economie Et Des Sciences d'Aix Marseille
- [26]: **P.Nayman**, « Certains Aspects Du Traitement Du Signal », LPNHE paris ,2003-2004
- [27]: **B Aazhang**, « Detection by Correlation », Connexions Project and licensed under the Creative Commons Attribution License , Version 2.15: Sep 20, 2005
- [28]: **Louis-Marie Aubert**, « Mise En Place D'une Couche Physique Pour Les Futurs Systèmes De Radiocommunications Hauts Débits UWB », Institut d'électronique et de télécommunications de Rennes, Thèse doctorat, 2005.
- [29]: **M.Terré**, « Communication En Ultra Large Bande (UWB) », Séminaire CNFRS/URSI, Conservatoire National des Arts et Métiers
- [30]: **Y.Duroc et R.khoury et V.Berouille**, « Simulation Fonctionnelle D'un Système Simplifié UWB A Détection D'énergie », Laboratoire De Conception Et D'intégration Des Systèmes, Institut National De Polytechnique Grenoble.

- [31]: **Cours statistique n°5**, « Lois Chi-Deux », semaine du 14 mars 2005
- [32]: **P.Martine et B. Miscopien et J. Schwoerer**, « Signaux UWB Pulsionnelles », France telecom recherche & développement, Journées CNFRS 28 – 29 mars 2006.
- [33]: **S. Dubouloz et L. Ouvry**, « Régulation et Normalisation pour les Communications Ultra Large Bande (UWB) », *Journées Scientifiques du CNFRS, 28-29 Mars 2006*.
- [34]: **Cours aspiré au site** <http://www.filtre-passe-bande-6,2GHz-analyse-theorique.mht>
- [35]: **M. Moreau et S. Rigaud et Q. Savary**, « Rapport Préliminaire : Compatibilité UWB », Département Traitement du Signal et Télécommunications, Agence national des fréquences.
- [36]: **M. Ghozz et F. Marx et J. Palicot**, « Radio Cognitive : Méthodes De Détection Des Bandes Libres », France telecom recherche & développement.
- [37]: **S. Paquelet et G. Froc et A. Bisiaux et S. Mallégo**, « La Radio Ultra Large Bande : Enjeux Et Perspectives Pour Une Radio Sans Licence », Information Technology Centre Europe.

Summary:

The recovery of a signal is to estimate the original signal from a noisy version. It is aimed at minimizing noise, to get a signal nearest to the physical reality.

This signal can be deterministic as may be stochastic .In this project we are interested in the methods used to extract the useful signal in noise, according to the criterion maximum SNR. With optimal decision-making at a specific time (the moment of its appearance).

It would therefore be necessary to study the structures suitable to the problem. For these reasons we select three types of receptors, which are: The matched filter, the system Filtering-square integration, and the correlator.

These devices are preceded by structures threshold that can detect the presence or absence of the signal, the optimal functioning it is tantamount to study and make up the SNR mainly based on the shape of the structure to be determined.

The objective reach around two fundamental aspects:

- The determination of a detection system;
- Optimizing system, and to analyze their operation, and performance.

Keywords:

Detection, matched filter, the system Filtering-square integration, the correlator, the signal noise ratio optimal, probability of error minimal.

_____:

نعني باسترجاع إشارة هو استرداد الإشارة الأصلية انطلاقاً من الإشارة الواردة المشوشة. هذه الإشارات يمكن أن تكون معرفة بوضوح كما ما قد تكون مجهولة.

في هذا المشروع نحن مهتمون بدراسة الطرق المستخدمة في استخلاص المفيد للإشارة وسط الضجيج، وفقاً لمعيار الحد الأقصى إشارة إلى الضوضاء، مع تحديد اللحظة المثلى في اتخاذ القرار (لحظة ظهور الإشارة).

لذلك سيكون من الضروري دراسة الهياكل المناسبة لهذه المشكلة. و لهذا الغرض، اخترنا ثلاثة أنواع من المستقبلات، وهي: مرشح متناظر، النظام ترشيح-مربع-تكاملي، و جهاز يقوم بعملية الترابط.

هذه الاجهزه تكون متبوعه بهياكل العتبة التي تسمح لنا بالكشف عن وجود أو عدم وجود الإشارة و الدراسة الأمثل تتمثل في التخفيف من الضجيج في الإشارة المسترجعة بمعنى آخر الحصول على نسبة-إشارة-ضجيج مرتفعة ، هذه النسبة تختلف باختلاف المستقبل الذي نستخدمه مع التقليل من نسبة الخطأ الممكن حدوثه عند اتخاذ القرار .

الهدف من هذه الدراسة إذن هو التوصل إلى جانبين أساسيين و هما :

- التثبيت من نظام الاكتشاف .

- التحسين من هذا النظام ، وتحليل تشغيله ، و تقييم أدائه.

الكلمات المفتاحية:

استرجاع إشارة مرشح متناظر، النظام ترشيح-مربع-تكاملي، جهاز يقوم بعملية الترابط، نسبة-إشارة-ضجيج مرتفعة، احتمال الخطأ صغير.

