Table des matières

Remerciements

Mes premiers remerciements et ma toute gratitude vont, comme il se doit, à Mr le Professeur "A Krim. Keraghel" qui m'a fait l'honneur d'être le directeur de ma thèse. C'est très difficile en quelques lignes de le remercier. Ses judicieuses orientations, ses précieux conseils, sa compétence, son expérience, et son savoir -faire m'ont énormément aidé à faire, corriger et améliorer cette thèse. Je lui en suis grandement reconnaissante.

J'adresse mes remerciements à monsieur B.Merikhi Professeur à l'université Ferhat Abbas de Setif pour sa disponibilité et l'honneur qu'il me fait en remplaçant notre directeur de thèse lors de soutenance. Je vous suis très reconnaissante Docteur.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur D.Benterki pour avoir accepté d'être président de mon jury. Je le remercie profondément pour les suggestions importantes qu'il m'a faits. Je vous suis très reconnaissante Docteur.

Mes plus vifs remerciements s'adressent à Messieurs les Professeurs R. Zitouni, N. Benhamadouche, B. Bouderah, et M. Aidene de m'avoir l'honneur de participer au jury. Je les remercie très chaleureusement.

Je voudrais remercier tout particulièrement Madame N. Keraghel, Maître de conférence à l'université de Sétif pour son aide et ses encouragements pour terminer cette thèse.
Mes remerciements vont à tous les collègues du l'équipe d'optimisation de l'université de Sétif, qui ont, de près ou de loin, contribué à la réalisation de ce travail.

A toute ma famille, plus particulièrement ma chère mère.
Enfin à tous ceux qui m'ont soutenue de près ou de loin et à tous ceux qui m'ont incité même involontairement à faire mieux, veuillez trouvez ici le témoignage de profonde gratitude.

Introduction

Le sujet traité dans cette thèse concerne le problème d'inégalités variationnelles (VIP) qui a attiré l'intérêt de plusieurs chercheurs. Il a été introduit à l'origine par Hertman et Stanpacchia (1966) dans le cadre des équations différentielles (EDP) [6] et le calcul variationnel en général.
Plusieurs résultats théoriques fondamentaux sont développés à cette époque à la base d'hypothèses assez fortes telles que : la contraction et la forte monotonie.
Sur le plan numérique, en dehors des méthodes spécifiques au (EDP), on remarque l'absence quasi-totale des algorithmes effectifs pour résoudre (VIP).

L'intérêt que nous accordons à ce sujet est motivé par le fait que :
- (VIP) est connu par son importance pratique à travers ses applications dans différents domaines tels que : l'économie (les problèmes d'équilibre) et la recherche opérationnelle (Problème de transport) [25].
- La théorie de (VIP) englobe plusieurs problèmes mathématiques tels que : l'optimisation convexe différentiable, les systèmes d'équations non linéaires, le problème de complémentarité.
De nos jours, le problème (VIP) continu à faire l'objet l'un des sujets de recherche les plus convoités dans le domaine de l'optimisation numérique. Le but était de trouver une théorie plus riche et moins restrictive et élaborer des algorithmes convenables pour (VIP).

Le succès incontestable des méthodes de pénalité en théorie et en pratique pour l'optimisation mérite d'être examiné au niveau de (VIP).
Ces méthodes étaient introduites dans les travaux de Courant (1943), Ablow et Brigham (1955), Fiacco et McCormick (1968) [36] pour l'optimisation, le principe de ces dernières consiste à transformer un problème d'optimisation avec contraintes en une suite de problèmes d'optimisation sans contraintes. Cette transformation permet d'utiliser des algorithmes d'optimisation sans contraintes pour obtenir la solution de problèmes dont l'ensemble admissible peut avoir une structure complexe.

Notre objectif est de contribuer au développement de ces méthodes (de pénalité) pour résoudre (VIP), sachant qu'il n'y a que très peu de travaux dans ce domaine, tous à caractère théorique [6].
En l'an 2000, A. Keraghel a établi une méthodologie intéressante : le problème (VIP) est remplacé par une suite de problèmes d'égalités variationnelles (VIP) issues des conditions d'optimalité qui sont nettement plus simples à traiter.
Nos efforts étaient concentrés sur le développement de l'aspect algorithmique de cette approche, où nous avons convenablement établi des arguments théoriques et une mise en œuvre prometteuse.
Dans une deuxième partie, une étude numérique détaillée a été effectuée pour plusieurs classes de problèmes mathématiques de grandes importances et les résultats obtenus sont très encourageants.

Présentation de la thèse :

La thèse comprend trois chapitres organisés comme suit :

Dans le premier chapitre, on commence par rappeler certaines notions d'analyse convexe et de programmation mathématique qui serviront d'appui pour les développements ultérieurs. Puis, on présente les méthodes de pénalité pour les problèmes d'optimisation.

Le second chapitre comprend deux parties, la première concerne la présentation du problème d'inégalités variationnelles, suivie de quelques problèmes mathématiques qui constituent des cas particuliers de (VIP).
La deuxième partie traite la nouvelle approche de pénalité introduite par A. Keraghel, dans laquelle nous avons introduit plusieurs aménagements d'ordre théorique.

Le troisième chapitre constitue en grande partie l'ensemble de nos contributions numériques : il s'agit en effet, d'une étude approfondie guidée par la mise en œuvre effective de plusieurs versions de l'approche de pénalité adaptées chacune pour une classe importante de problèmes.

Chapitre 1

Méthode de pénalité en optimisation

1.1 Rappels utiles

1.1.1 Éléments d'analyse convexe

Ensemble convexe

Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si :
$(1-\lambda)x + \lambda y \in C, \quad \forall x, y \in C \quad$ et $\quad \forall \lambda \in [0, 1]$.

Exemples :
(1) $\quad R^n_+ = \{x \in R^n / \; x_i \geq 0, i = 1...n\}$, l'orthant positif est convexe de $\mathbb{R}^n$.

(2) Les ensembles de la forme : $P = \{x : Ax \leq b\}$, où A est une $(m \times n)$-matrice et b un $m-$vecteur sont des convexes de $\mathbb{R}^n$.
Ils sont appelés polyèdres.

Fonctions convexes

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to]-\infty, +\infty]$ est dite convexe sur C si :
$f[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

f est dite strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte :
$f[(1-\lambda)x + \lambda y] < (1-\lambda)\, f(x) + \lambda f(y)$, $\forall \lambda \in]0, 1[$, $\forall x \neq y$.

Il est clair que $f(x) = \|x\|$ est convexe dans $\mathbb{R}^n$.

1.1.2 Programmation mathématique

Un programme mathématique est un problème d'optimisation :

$$(PM) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in C \subseteq \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Dans lequel l'ensemble C est exprimé essentiellement par des inégalités et des égalités.
Sans perte de généralité, on peut se limiter à :

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n / \ f_i(x) \leq 0, \ i := 1...m\}$$

où : $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données.
Un point $\overline{x} \in C$ est dit minimum local pour (PM) si :

$$\exists \varepsilon > 0, \ f(\overline{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in V(\overline{x}, \varepsilon) \cap C$$

$-$ Si $f(\overline{x}) \leq f(x), \ \forall x \in C$, alors $\overline{x}$ est appelé minimum global pour (PM).

Classification d'un programme mathématique

On classifie le problème (PM) à partir de deux propriétés fondamentales à savoir la convexité et la différentiabilité des fonctions du problème. A ce propos, (PM) est dit convexe si f et f_i sont convexes. Si ces dernières sont toutes différentiables on dit que (PM) est différentiable.

La classe de programmes mathématiques convexes différentiables est le modèle le mieux élaboré, les programmes non convexes ou non différentiables sont difficiles.

Principaux résultats d'existence

Théorème 1 ***(Weierstrass)*** [12]
Soit C compact non vide de $\mathbb{R}^n$, si f est continue sur C alors (PM) admet au moins une solution optimale globale $\overline{x} \in C$

Corollaire 1.1.1 *Soit C non vide et fermé de $\mathbb{R}^n$, f continue et cœrcive sur C (au sens que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$), alors (PM) admet au moins une solution optimale globale.*

Conditions d'optimalité

Définitions

1- Soit $f \in C^1 (V (\overline{x}))$ avec $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$
Un vecteur $d \in R^n$ est appelé direction de descente locale pour f, en $\overline{x}$ s'il vérifie :

$$\langle d, \nabla f (\overline{x}) \rangle < 0 \qquad (1)$$

où $\nabla f (x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} (x) , \frac{\partial f}{\partial x_2} (x) , ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} (x) \right)^t$ est le gradient de f au point x.

par exemple :

$d = -\nabla f (\overline{x})$ est une direction de descente triviale pourvue que $\nabla f (\overline{x}) \neq 0$

2- Soit $\overline{x} \in C$ alors s'il existe $\bar{\alpha} > 0$, tel que :

$$(\overline{x} + \alpha d) \in C, \forall \alpha \in \left[0, \bar{\alpha}\right] \qquad (2)$$

on dit que d est une direction admissible en $\overline{x}$.

Notons par $\bar{C}$ l'ensemble des directions admissibles en $\overline{x}$.
Si d vérifie les conditions (1) et (2) alors d est une direction admissible de descente.

3- Un point $\overline{x} \in C$ satisfaisant :

$$\langle d, \nabla f (\overline{x}) \rangle \geq 0, \forall d \in \bar{C} \qquad (3)$$

est appelé point critique ou stationnaire.
– Si C est convexe alors la condition (3) s'écrit sous la forme :

$$\langle \nabla f\left(\,\overline{x}\right), x-\overline{x}\rangle \geq 0, \forall x \in C \qquad (4)$$

C'est une inégalité variationnelle qu'on utilisera par la suite

– De plus si (PM) est convexe alors : la condition (4) est une condition nécessaire et suffisante (CNS) d'optimalité pour $\overline{x}$.

Cas particuliers intéressants :

(1) $C = R^n$ alors (4) n'est rien d'autre que la (CNS) d'optimalité $\nabla f\left(\overline{x}\right) = 0$ pour le programme convexe différentiable sans contraintes :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

(2) $C = \mathbb{R}^n_+$ alors (4) exprime la condition de complémentarité

$$\overline{x}^t \nabla f\left(\overline{x}\right) = 0.$$

(3) **Théorème de projection** :

Soit C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, et $y \in (\mathbb{R}^n \setminus C)$, alors il existe un point unique $\overline{x} \in C$ tel que :

$$d\left(\overline{x}, y\right) = d\left(C, y\right) = \min_{x \in C} \frac{1}{2} \left\|y - x\right\|^2$$

$\overline{x}$ est appelé projection orthogonale de y sur C et on note $\overline{x} = \Pr_C(y)$

Il est caractérisé par l'inégalité :

$$\langle y - \overline{x}, \overline{x} - x\rangle \geq 0, \forall x \in C$$

Cette caractérisation (classique) n'est rien d'autre que l'application de l'inégalité (4) avec : $f\left(x\right) = \frac{1}{2}\left\|y - x\right\|^2$

– Lorsque $C = \mathbb{R}^n_+$

On vérifie facilement que :

$$\overline{x} = \Pr_{\mathbb{R}_+^n}(y) \Leftrightarrow \overline{x}_i = \begin{cases} y_i & y_i \geq 0 \\ 0 & y_i < 0 \end{cases}$$

On note souvent : $\overline{x} = \left[\overline{y}\right]_+$

1.2 Méthodes de pénalité

1.2.1 Orientation

Soit à résoudre le problème d'optimisation :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in C \end{cases}$$

On suppose qu'il admet une solution optimale x^*.

Où $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, souvent défini explicitement par un système d'inégalités (et/ou) d'égalités.

L'idée fondamentale des méthodes de pénalité vient du fait que (P) est équivalent au problème sans contraintes suivant :

$$(P_1) \begin{cases} \min \{f(x) + \Psi_C(x)\} \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où $\Psi_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C \end{cases}$

est la fonction indicatrice de l'ensemble C, qui satisfait :

$\Psi_C(x) \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n/C$

$\Psi_C(x) = 0, \quad \text{ssi} \quad \forall x \in C$

Ainsi le principe général de ces méthodes consiste à résoudre au lieu de (P) une séquence de sous-problèmes sans contraintes (P_r) qui seront difinis par la suite, dépendant d'un paramètre réel $r > 0$ (dit de pénalité) de sorte que

lorsque r tend $+\infty$, la solution $x^*(r)$ obtenue tend vers x^*.
Plus précisément, on augmente l'objectif de (P) d'un terme (de pénalité) dépendant directement des contraintes de (P) , pré-multiplié par un paramètre r destiné à caractériser la qualité de l'approximation.

Ces méthodes dépendent fondamentalement des deux facteurs suivants :

1) La qualité des sous-problèmes non contraints (de pénalité) (P_r) : il est essentiel à ce propos, d'examiner comment la solution $x^*(r)$ de (P_r) converge vers x^* lorsque $r \to +\infty$.

2) Plus important encore pour la pratique, comment résoudre (P_r).

1.2.2 Pénalité extérieure

L'idée naturelle d'une méthode de pénalité est de remplacer (P) par le problème non contraint :

$$(P_r) \begin{cases} \min\limits_{x \in R^n} \left[q_r(x) = f(x) + r\ h(x) \right] \end{cases}$$

où $r > 0$ est une constante réelle et $h(x):\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie comme suit :

Définition 1.2.1 *On dit que h est une fonction de pénalité extérieure si les conditions suivantes sont satisfaites :*
(i) $h(x)$ *est continue sur* C.
(ii) $h(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
(iii) $h(x) = 0$ *si seulement si* $x \in C$.

Le qualificatif "extérieur" vient de la propriété (iii), qui exprime que q_r ne modifie f qu'à l'extérieur de l'ensemble admissible C.

Exemples :

1. La fonction $h_1(x) = \frac{1}{2} \|x - \mathrm{Pr}_C(x)\|^2$ est une fonction de pénalité extérieure.

2. Pour $C = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1 : m\}$,
une fonction de pénalité usuelle est :

$$h_2(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(g_i^+(x_i)\right)^2 \ ,$$

où $g_i^+(x) = \max(0 \ , \ g_i(x))$.

Ainsi, on peut considérer le schéma algorithmique suivant :

Algorithme de base :

Soit (r_k) une suite réelle telle que :

$\forall k, r_k > 0, r_{k+1} > r_k$ (par exemple $r_{k+1} = 10r_k$) et $\lim_k r_k = +\infty$

et $\varepsilon > 0$ une précision donnée.

– On démarre de $x^0 \in \mathbb{R}^n$, arbitraire.

– On définit la fonction $q(x, r_k) = f(x) + r_k h(x)$

et on résoud à chaque itération le problème auxiliaire :

$\min_{R^n} q(x, r_k)$ supposé avoir au moins une solution x^k

en prenant de préférence x^{k-1} comme point initial.

– On arrête dès que $\left|r_k h\left(x^k\right)\right| \leq \varepsilon$, (ou $h\left(x^k\right) \leq \varepsilon$, si h est continue)

avec x^koptimal.

Convergence de l'algorithme

Le lemme ci-dessous étudie le comportement des solutions $x^*(r)$ de (P_r), lorsque r tend vers l'infini. Il donne des conditions pour que les solutions des problèmes de pénalité convergent vers une solution du problème originel.

Lemme 1.2.1 [32] *Soit la fonction q définie dans l'algorithme précédent et x^* une solution de (P), alors on a :* $\forall k$

· $q\left(r_k, x^k\right) \leq q\left(r_{k+1}, x^{k+1}\right)$ (1)

· $h\left(x^k\right) \geq h\left(x^{k+1}\right)$ (2)

· $f\left(x^{k+1}\right) \leq f\left(x^k\right)$ (3)

· $f\left(x^*\right) \geq q\left(r_k, x^k\right) \geq f\left(x^k\right)$ (4)

Preuve :

- Puisque $r_{k+1} > r_k$, on a :

$$q\left(r_{k+1}, x^{k+1}\right) = f\left(x^{k+1}\right) + r_{k+1} h\left(x^{k+1}\right)$$

$$\geq f\left(x^{k+1}\right) + r_k h\left(x^{k+1}\right)$$

$$\geq f\left(x^k\right) + r_k h\left(x^k\right) \text{ (par définition du problème auxilière)}$$

$$= q\left(r_k, x^k\right) \text{ d'où } (1).$$

- De même : $f\left(x^{k+1}\right) + r_{k+1} h\left(x^{k+1}\right) \leq f\left(x^k\right) + r_{k+1} h\left(x^k\right)$

et $f\left(x^k\right) + r_k h\left(x^k\right) \leq f\left(x^{k+1}\right) + r_k h\left(x^{k+1}\right)$

En additionnant membre à membre, on obtient :

$\left(r_{k+1} - r_k\right) h\left(x^{k+1}\right) \leq \left(r_{k+1} - r_k\right) h\left(x^k\right)$ et alors $h\left(x^k\right) \geq h\left(x^{k+1}\right)$ d'où (2).

- On conclu alors que $f\left(x^k\right) \leq f\left(x^{k+1}\right)$ d'où (3).

- comme $x^* \in C$ nous avons $h(x^*) = 0$ et alors : $\forall k$

$$f(x^*) = f(x^*) + r_k h(x^*)$$

$$= q(r_k, x^*)$$

$$\geq f\left(x^k\right) + r_k h\left(x^k\right)$$

$$= q\left(r_k, x^k\right)$$

$$\geq \ f\left(x^k\right).$$

Le résultat suivant concerne la convergence de l'algorithme précédent :

Théorème 2 [32] *: Soit $\left\{x^k\right\}$ une suite générée par la méthode de pénalité extérieure. Alors, tout point d'accumulation de $\left\{x^k\right\}$ est une solution $(globale)$ de (P).*

Preuve [32] : Supposons que $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = \overline{x}$, alors la continuité de f entraîne :

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x^k\right) = f(\overline{x}) \qquad (5)'$$

Soit alors $\overline{f}$ la valeur optimale dans (P). Alors la suite $\left\{q\left(r_k, x^k\right)\right\}$ est croissante $\left(\text{d'après } (1)'\right)$, majorée $\left(\text{d'après } (4)'\right)$ par $\overline{f}$ donc convergente et l'on a :

$$\lim_{k\to\infty} q\left(r_k, x^k\right) = \overline{q} \leq \overline{f} \qquad (6)'$$

En retranchant $(5)'$ de $(6)'$, il vient :

$$\lim_{k\to\infty} r_k h\left(x^k\right) = \overline{q} - f(\overline{x}) \leq 0 \qquad (7)'$$

Comme $h\left(x^k\right) \geq 0$ et $r_k \to +\infty$, $(7)' \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} h\left(x^k\right) = h\left(\overline{x}\right) = 0$ (h continue) et alors $\overline{x} \in C$.
Pour montrer l'optimalité de $\overline{x}$, on utilise encore le lemme précédent :

où $f\left(x^k\right) \leq \overline{f} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f\left(x^k\right) = f\left(\overline{x}\right) \leq \overline{f} = f\left(\overline{x}\right)$.

Remarque 1.2.1 [32] *L'existence du point d'accumulation dans le théorème précédent est assurée sous l'une des deux hypothèses classiques suivantes :*

a) C est compact et $h(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$
b) C est fermé et $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$

1.2.3 Pénalité intérieure (fonctions barrières)

Ce sont en fait des variantes des méthodes de pénalité extérieure, introduite dans le but d'éliminer l'inconvénient de la non réalisabilité des itérés extérieurs.
A cet égard, on suppose dans le problème :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in C \end{cases}$$

que l'intérieur de l'ensemble C est non vide $(int\,(C) \neq \varnothing)$, on peut atteindre la frontière de C à partir de n'importe quel point intérieur : $\forall x \in Fr\,(C)$, x est limite d'une suite de points appartenant à $int\,(C)$.

Le principe de ces méthodes consiste à établir une barrière sur la frontière de C qui empêche les itérés de quitter C, d'où la définition :

Définition 1.2.2 *On appelle fonction de pénalité intérieure (fonction barrière) associée à C toute fonction b définie sur $int\,(C)$ telle que :*
a) $b(x)$ est continue sur $int\,(C)$.
b) $b(x) \geqslant 0$, $\forall x \in int\,(C)$.
c) lim $b(x) = +\infty$, quand $x \in int\,(C) \to \overline{x} \in Fr\,(C)$.

Exemples :
Lorsque l'ensemble admissible s'écrit : $C = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1:m\}$,

avec $g_i \in C^1\left(R^n\right)$ et $int\left(C\right) = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i\left(x\right) < 0, i = 1 : m\}$,
on peut prendre :

$$b_1\left(x\right) = -\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{g_i\left(x\right)}\right)$$

ou encore

$$b_2\left(x\right) = -\sum_{i=1}^{m}\log(-g_i\left(x\right)).$$

Notons que $b_2\left(x\right)$ n'est pas nécessairement positive sur $int\left(C\right)$. En fait c'est une hypothèse d'intérêt plutôt théorique.

Le problème de pénalité correspondant est alors :

$$\left(P_r\right)^{\prime}\left\{\min_{x\in int(C)}\left[f\left(x\right)+\frac{1}{r}\;b\left(x\right)\right]\right. \qquad r > 0$$

Formellement, c'est un problème contraint qui peut être plus compliqué que le problème originel. On le résout pourtant par des procédures sans contraintes puisque les conditions d'optimalité sont pratiquement les mêmes, il faut cependant savoir trouver un point initial $x^0 \in int\left(C\right)$ pour démarrer la procédure.

Algorithme de base :

Soit (r_k) une suite réelle telle que :

$\forall k, r_k > 0, r_{k+1} > r_k$ (par exemple $r_{k+1} = 10 r_k$)

et $\lim\limits_{k} r_k = +\infty$

et $\varepsilon > 0$ une précision donnée.

– On démarre de $x^0 \in int\,(C)$, arbitraire.

– On définit la fonction $f(x) + \frac{1}{r_k}\, b(x)$

et on résout à chaque itération le problème auxiliaire :

$\min\limits_{R^n} \left[f(x) + \frac{1}{r_k}\, b(x) \right]$ supposé avoir au moins une solution x^k,

en prenant de préférence $x^{k-1} \in int\,(C)$ comme point initial

– On s'arrête dès que $\left| \frac{1}{r_k} b\left(x^k\right) \right| \leq \varepsilon$, avec x^k optimal.

Remarque 1.2.2 : *Les conditions de convergence sont les mêmes que la pénalité extérieure .*

1.2.4 Caractéristiques des méthodes de pénalité

Les méthodes de pénalité présentent un intérêt théorique important : elle peuvent être très utiles pour tous les aspects de la théorie de l'optimisation : multiplicateur de Lagrange, conditions d'optimalité et tous les algorithmes de base. Pour le praticien, elles fournissent une manière simple pour traiter des problèmes contraints, facile à mettre en œuvre et possèdent pratiquement toutes les qualités des méthodes primales.

Un inconvénient (majeur) des méthodes de pénalité est qu'elles ne permettent pas en général d'obtenir de précision élevée, car ceci obligerait à choisir des coefficients de pénalité (r_k) très grands ce qui entraîne un mauvais conditionnement des fonctions de pénalité qui a pour effet de ralentir considérablement la convergence des méthodes utilisées.

Deux alternatives sont possibles pour remédier à cette situation :

(1) Utiliser une méthode de type Newton pour résoudre les problèmes (P_r) et $(P_r)^{'}$ en prenant soin de bien inverser le Hessien qui est mal conditionné : les techniques ne manquent pas à ce propos.
(2) Combiner pénalité et autres méthodes (duales : lagrangien augmenté).

Dans tous les cas, si les informations du second ordre sont favorables, les méthodes de Newton sont extrêmement attractives pour les problèmes de taille relativement moyenne. Dans les autres cas, il faut concentrer les efforts sur les méthodes de premier ordre.

Les méthodes de pénalité ainsi présentées ne sont pas de nature itérative au sens que x^{k+1} ne dépend pas réellement de x^k mais de r_k.
On peut d'ailleurs envisager de résoudre un seul problème pénalisé (sans contraintes) avec une valeur suffisamment grande du paramètre de pénalité r. Il arrive cependant que cette démarche entraîne certaines difficultés :

- La valeur convenable de r ne peut pas être connue à priori pour un problème donné.
- Une valeur excessivement large de r conduit au mauvais conditionnement.

Un remède partiel à ces difficultés est obtenu en cherchant x^{k+1} solution du problème de pénalité à l'itération $(k+1)$ à partir de x^k comme point initial, c'est ainsi qu'on peut regarder ces méthodes comme des procédures itératives.

Remarque 1.2.3 *On n'a jamais pu expliquer pourquoi la résolution d'une séquence de sous problèmes sans contraintes en augmentant r est meilleure en pratique que la résolution d'un seul problème avec une large valeur de r.*

Tout particulièrement, les méthodes barrières sont très intéressantes pour les programmes mathématiques fortement non linéaires, pour lesquels les méthodes directes (primales : direction réalisables) présentent de grosses *difficultés. En revanche, elles nécessitent certaines précautions au niveau des procédures de recherches linéaires : ces dernières, supposent que l'objectif peut être évalué à n'importe quel point sélectionné, or la fonction barrière n'est pas définie à l'extérieur de la région admissible (dans ce cas, on doit associer à cette fonction une valeur arbitraire).*

Chapitre 2

Une méthode de pénalité pour le problème d'inégalités variationnelles

2.1 Introduction

Ce chapitre est composé de trois parties.
Dans la première partie, on donne la présentation du problème d'inégalités variationnelles suivi des principaux résultats théoriques concernant l'existence et l'unicité de la solution de ce dernier.
La deuxième partie constitue un survol des méthodes de résolution existantes.
La dernière partie est consacrée à l'étude d'une approche de pénalité dont l'idée de base était proposée par A. Auslender [6] puis A. Keraghel a établi une méthodologie intéressante pour cette dernière [32]. L'accent sera mis sur les propriétés fondamentales de cette approche en particulier l'aspect algorithmique.

2.2 Problème d'inégalités variationnelles (VIP)

On se donne un sous-ensemble non vide C de $\mathbb{R}^n$, et un opérateur F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
Le problème d'inégalités varationnelles noté (VIP) consiste à :

$$\begin{cases} \textit{Trouver } \overline{x} \in C \textit{ solution de :} \\ \langle F(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle \geq 0, \ \forall x \in C. \end{cases} \qquad (VIP)$$

Où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

2.3 Problèmes liés à (VIP)

Le problème (VIP) représente une formulation unificatrice de plusieurs classes de problèmes mathématiques qui traduisent à leur part beaucoup de problèmes d'application, en voici quelques exemples :

2.3.1 Système d'équations non linéaires

Lorsque $C = \mathbb{R}^n$, le problème (VIP) se réduit à la résolution d'un système d'équations non linéaires $F(x) = 0$, appelé dans notre contexte problème d'égalités variationnelles (VEP).

2.3.2 Problème d'optimisation différentiable sans contraintes

Si de plus : $F = \nabla f$, où $f : \mathbb{R}^n \to R$ est une fonction différentiable convexe alors, (VEP) n'est rien d'autre que la condition nécessaire et suffisante C.N.S d'optimalité d'une solution $\overline{x}$ pour le problème de minimisation sans contraintes :

$$\left\{ \min_{\mathbb{R}^n} f(x) \right.$$

exprimée par : $\nabla f(\overline{x}) = 0.$

2.3.3 Problème de complémentarité non linéaire

Si $C = \mathbb{R}_+^n$, (VIP) prend alors la formulation appelée : problème de complémentarité non linéaire :

$$(NLCP)\left\{\begin{array}{c}\text{Trouver } \overline{x} \geqslant 0 \text{ tel que :}\\ F(\overline{x}) \geq 0 \text{ et } F(\overline{x})^t\,\overline{x} = 0\end{array}\right.$$

Minimisation d'une fonction différentiable convexe sur l'orthant positif

Dans le cas $F = \nabla f$, où $f : R^n \to R$ est une fonction différentiable convexe, le problème $(NLCP)$ traduit la condition nécessaire et suffisante C.N.S d'optimalité pour le problème simple :

$$\left\{\min_{x\geq 0} f(x)\right\}$$

2.3.4 Problème de complémentarité linéaire

Lorsque $C = \mathbb{R}_+^n$, et F une fonction affine : $F(x) = Mx+q$ / $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $q \in \mathbb{R}^n$, (VIP) coincide avec le problème de complémentarité linéaire :

$$(LCP)\left\{\begin{array}{c}\text{Trouver } \overline{x} \geqslant 0 \text{ tel que :}\\ M\overline{x} + q \geq 0 \text{ , et } (M\overline{x} + q)^t\,\overline{x} = 0\end{array}\right.$$

2.3.5 Problème d'optimisation convexe différentiable avec contraintes :

La classe de la programmation convexe différentiable constitue un cas particulier intéressant de (VIP).
En effet :

Soit le problème

$$(PC) \qquad \left\{ \min_{x \in C} f(x) \right.$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable convexe.
Si $F = \nabla f$, la C.N.S d'optimalité du 1er ordre pour (PC) est exprimée par l'inégalité variationnelle :

$$\langle \nabla f(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle \geq 0, \ \forall x \in C$$

dont la résolution est équivalente à celle de (PC).

2.3.6 Projection sur un convexe fermé- Point fixe

Si C est un convexe fermé, alors tout point $y \in \mathbb{R}^n$ possède une projection $\overline{x} \in C$ caractérisée par l'inégalité :

$$\langle \overline{x} - y, x - \overline{x} \rangle \geq 0, \ \forall x \in C$$

qui est une inégalité variationnelle avec $F(\overline{x}) = \overline{x} - y$.
Réciproquement, (VIP) peut être reformulé en problème de projection :
en effet, en remarquant que (VIP) est équivalent à :

$$\langle \alpha F(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle \geq 0, \ \forall x \in C, \ \forall \alpha > 0$$

On peut facilement vérifier que (VIP) est aussi équivalent au problème de projection :

$$\overline{x} = \Pr_C (\overline{x} - \alpha F(\overline{x})), \ \forall \alpha > 0$$

qu'on peut aussi regarder comme un problème de point fixe pour l'opérateur :

$$\Pr_C \circ (I - \alpha F)$$

2.4 Classification de (VIP)

Les (VIP) sont typiquement classifiés conformément aux propriétés de l'opérateur F.
A ce propos , on donne les définitions suivantes [12, 14, 21] :

2.4.1 Définitions

- Opérateur monotone (M) :
F est monotone si :

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

- Opérateur strictement monotone (SM) :
F est strictement monotone si :

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle > 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y.$$

Opérateur fortement monotone (FM) :
F est fortement monotone s'il existe $\gamma > 0$ tel que :

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \gamma \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

- Opérateur coercif :
F est coercif s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n, s > 0$ tel que :

$$\|x\| > s \Rightarrow \langle F(x), x - x_0 \rangle > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

- Opérateur fortement coercif :
F est fortement coercif s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\langle F(x), x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = +\infty.$$

Remarque 2.4.1 *Si F est fortement monotone alors F est fortement coercif et si F est fortement coercif alors F est coercif*

2.4.2 Existence, unicité et caractérisation d'une solution pour (VIP)

Les résultats d'existence et d'unicité relatifs aux problèmes (VIP) sont inspirés de la théorie fondamentale de l'optimisation. Ils dépendent évidemment des propriétés de l'opérateur F et de l'ensemble C.

Théorème 3 $[6, 14]$
Soit C un convexe, compact non vide de $\mathbb{R}^n$, et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ monotone et continu sur C , alors l'ensemble des solutions de (VIP) est non vide et convexe.

Corollaire 2.4.1 $[6, 14]$
Si C est un convexe, fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ monotone, hemicontinue ($\forall\ x, y \in C$, l'application : $t \to (y - x)^t F(x + t(y - x))$ est continue sur $[0, 1]$) et coercif sur C , alors l'ensemble des solutions de (VIP) est non vide et compact.

Théorème 4 $[6, 14]$
Si C est un convexe, fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, et F fortement monotone sur C , alors il existe au plus une solution de (VIP).

Il existe en revanche d'autres résultats d'existence et d'unicité, obtenus en généralisant ceux établis pour la complémentarité linéaire. Les ingrédients mis en œuvre sont essentiellement les notions de fonction d-régulière,p-fonction et z-fonction, qui généralisent respectueusement celles de : matrice copositive, p-matrice et z-matrice.

Ces propriétés sont moins fortes que celles de monotonie (stricte ou forte) et s'appliquent surtout pour les problèmes de complémentarité, mais aussi pour les (VIP) où C est un pavé. Ce problème se présente souvent en pratique.

2.5 Résolution de (VIP) :

2.5.1 Méthode classique

Les méthodes conçues pour résoudre (VIP) sont élaborées à partir des caractérisations attribuées à ce problème à travers ses différentes reformulations.
En effet, à la lumière des connections établies précédemment entre (VIP) et les différents problèmes mathématiques, on peut envisager tout un arsenal d'algorithmes, où à chaque reformulation de (VIP) correspond une classe particulière de méthodes.

On distingue à ce propos trois grandes stratégies, la première consiste à résoudre des systèmes d'équations $[11, 17, 27]$. La seconde passe par le traitement d'un problème de point fixe (ou de projection)$[1, 10, 17, 26]$. La dernière concerne la résolution d'un problème d'optimisation $[2, 5, 30, 17, 28, 52]$.

Il est évident que ces efforts ont apporté des contributions considérables permettant de répondre à certaines questions concernant (VIP) . En même temps des questions nouvelles s'affichent actuellement au menu de la recherche comme conséquence des ingrédients ainsi introduits. Ceci étant, on peut dire que (VIP) n'est pas encore bien résolu ; il reste beaucoup à faire au niveau algorithmique et numérique.
C'est l'objectif de l'approche dû à A. Keraghel [32] et que nous développons dans un contexte tout à fait général comprenant nos propres contributions théoriques et numériques.

2.5.2 Méthode de pénalité

Rappelons que le principe général des méthodes de pénalité consiste à ramener (P) à la résolution d'une suite de problèmes d'optimisation sans contraintes de la forme :

$$(P_r) \left\{ \min_{x \in R^n} [f(x) + rh(x)] \right.$$

pour la pénalité extérieure.
Où $r > 0$ est un paramètre de pénalité et h une fontion de pénalité extérieure.
Supposons de plus que h est différentiable, alors on peut associer à chaque

problème (P) et (P_r) sa condition d'optimalité :

$$\{\langle \nabla f(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle \geqslant 0 \qquad \forall x \in C\}$$

et

$$\{\nabla f(\overline{x}) + r \nabla h(\overline{x}) = 0\}$$

respectivement.
Ainsi en terme variationnel, on résout au lieu d'un problème d'inégalités variationnelles, une séquence de problèmes d'égalités variationnelles.
C'est justement l'idée que nous voulons généraliser pour le problème d'inégalités variationnelles :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \overline{x} \in C \text{ solution de :} \\ \langle F(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle \geq 0, \ \forall x \in C \end{cases} \qquad (VIP)$$

où $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un opérateur continu non nécessairement un potentiel et C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$.
Autrement dit, la résolution de (VIP) est remplacée par celle de $(VEP)_r$:

$$E(\overline{x}) = F(\overline{x}) + rB(\overline{x}) = 0 \qquad (VEP)_r$$

Dans cette partie, on va donner comment définir $B(x)$?
Une première idée est de voir que si $\overline{x}$ est la solution désirée, on doit avoir :
$E(\overline{x})^t (x - \overline{x}) = F(\overline{x})^t (x - \overline{x}) + rB(\overline{x})^t (x - \overline{x}) = 0$
$\Rightarrow B(\overline{x})^t (x - \overline{x}) = -\frac{1}{r} F(\overline{x})^t (x - \overline{x}) \leq 0,$
d'où $B(\overline{x})^t (\overline{x} - x) \geq 0, \ \forall x \in C.$
Une deuxième fait est de voir qu'intuitivement $B(x)$ correspond à $\nabla h(x)$ pour une fonction de pénalité simple, par exemple $h(x) = \frac{1}{2} \|x - \mathrm{Pr}_C(x)\|^2$.
Nous avons $\nabla h(x) = \mathrm{Pr}_C(x) - x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et alors la caractérisation de la projection :

$$\left\langle \overline{x} - \Pr_C(\overline{x}), \Pr_C(\overline{x}) - x \right\rangle \geq 0, \ \forall x \in C$$

entraîne :
$B(x)^t (\overline{x} - x) = \|\overline{x} - \mathrm{Pr}_C(\overline{x})\|^2 + (\overline{x} - \mathrm{Pr}_C(\overline{x}))^t (\mathrm{Pr}_C(\overline{x}) - x) \geq 0, \forall x \in C.$
De plus, nous avons l'implication :

$$\overline{x} \in C \Rightarrow B(\overline{x}) = 0.$$

Définition 2.5.1 *On dit que l'application* $B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est un opérateur de pénalité extérieure relatif à* C *si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

P1) B *est continue sur* $\mathbb{R}^n$.
P2) Pour tout $x \in C$:

$$\langle B(y), y - x\rangle \begin{cases} = 0 \text{ si } & y \in C. \\ > 0 \text{ si } & y \notin C. \end{cases}$$

Exemples

– On peut voir intuitivement que $B(x)$ correspond au gradient d'une fonction de pénalité simple, par exemple $h_1(x) = \frac{1}{2}\left\| x - \Pr_C(x)\right\|^2$, alors nous avons l'opérateur de pénalité :

$$B_1(x) = \nabla h_1(x) = x - \Pr_C(x).$$

– Ces résultats sont valables également en prenant la fonction de pénalité classique associée à $C = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1 : m\}$,
$g_i(x)$ (convexe différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$)
$h_2(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(g_i^+(x)\right)^2$.

Lemme 2.5.1 [31] *Soit la fonction :*

$$\phi : R \to R$$

$$x \to \phi(x) = (\max(0, x))^2 = \left(x^+\right)^2$$

alors la dérivée de cette fonction est définie par :

$$\phi'(x) = 2x^+.$$

On peut introduire ce résultat pour calculer la dérivée de la fonction de pénalité $h_2(x)$, d'où on peut définir l'opérateur de pénalité extérieure suivant :

$$
\begin{aligned}
B_2(x) &= \nabla h_2(x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=m} \nabla\left[\phi\left(g_i(x)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=m} \nabla g_i(x) \times \phi^{'}\left(g_i(x)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{i=m}\left[\left(\nabla g_i(x)\right) \times g_i^{+}(x)\right]
\end{aligned}
$$

.

Description de la méthode

On considère le problème suivant :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{trouver } \overline{x} \in C \text{ tel que :} & \\
\langle F(\overline{x}), x-\overline{x}\rangle \geqslant 0 & \forall x \in C
\end{array}
\right. \qquad (VIP)
$$

où $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un opérateur (différentiable), C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$.

On associe à (VIP) une suite d'égalités variationnelles suivante :

$$
E(\overline{x}) = F(\overline{x}) + rB(\overline{x}) = 0 \quad \text{pour } r > O \qquad (VEP)_r
$$

où B est un opérateur de pénalité extérieure associé à C.

Lorsque $r \to +\infty$

Dans ce qui suit, on établi quelques majorations superieures pour la distance entre la solution du problème (VIP) et celle du problème $(VEP)_r$. Ces résultats sont inspirés des travaux de Song Wang [49, 50].
Pour cela, on soppose les hypothèses suivantes :

1. $0 \in C$.
2. F est fortement monotone.
3. F est continu.

Lemme 2.5.1 *Soit x_r une solution de :*

$$E\left(x_r\right) = F\left(x_r\right) + rB\left(x_r\right) = 0 \quad pour \quad r > O \qquad (VEP)_r$$

alors il existe une constante positive M telle que :

$$\|x_r\| \leq M \text{ pour tout } r > 0.$$

Preuve :
Etant donné x_r une solution de :

$$E(x_r) = F(x_r) + rB(x_r) = 0 \qquad (VEP)_r$$

Alors, en multipliant les deux membres de cette équation par x_r^t,
on obtient :

$$\langle x_r \ , \ E(x_r)\rangle = \langle x_r \ , \ F(x_r)\rangle + r\,\langle x_r \ , \ B(x_r)\rangle = 0$$

ce qui donne :
$\langle x_r \ , \ F(x_r)\rangle = -r\,\langle x_r \ , \ B(x_r)\rangle$
$= r\,\langle\ B(x_r), 0 - x_r\ \rangle\ \geq\ 0$ pour tout $r\ \geq\ 0$ (d'après la définition 2.5.1).
de plus, on a : $\langle x_r \ , \ F(x_r)\rangle = \langle x_r \ , \ F(x_r)\rangle - \langle x_r \ , \ F(0)\rangle + \langle x_r \ , \ F(0)\rangle$
ce qui est équivalent à : $\langle x_r \ , \ F(x_r) - \ F(0)\rangle \leq -\langle x_r \ , \ F(0)\rangle$
$\leq \|x_r\|\,\|F(0)\|$ (en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
Puisque F est fortement monotone on a :

$$\alpha\,\|x_r\|^2 \leq \langle x_r \ , \ F(x_r) - \ F(0)\rangle$$

alors :

$$\alpha\,\|x_r\|^2 \leq \langle x_r \ , \ F(x_r) - \ F(0)\rangle \leq \|x_r\|\,\|F(0)\|$$

$$\Rightarrow \quad \|x_r\| \leq \frac{\|F(0)\|}{\alpha}$$
$$\Rightarrow \quad \|x_r\| \leq M.$$

avec $M = \frac{\|F(0)\|}{\alpha}$.

Remarque 2.5.1 *Le lemme précédant montre que pour tout $r \geq 0$ la solution x_r de $(VEP)_r$ est dans l'ensemble borné fermé $D = \{y \in R^n \ : \ \|y\| \leq M\}$. Ceci garantit l'existence d'une constante positive L telle que :*
$\|F(x_r)\| \leq L, \quad \forall r > 0.$

Lemme 2.5.2 *Soit x_r une solution de :*

$$E(x_r) = F(x_r) + rB(x_r) = 0 \qquad (VEP)_r$$

alors il existe une constante positive C telle que :

$$\|B(x_r)\| \leq \frac{C}{r} \quad \textit{pour tout } r \geq 0.$$

Preuve :
x_r une solution de :

$$E(x_r) = F(x_r) + rB(x_r) = 0 \qquad (VEP)_r$$

en multipliant les deux membres de cette équation par $(B(x_r))$,
on obtient :

$$\langle B(x_r)\ ,\ E(x_r)\rangle = \langle B(x_r)\ ,\ F(x_r)\rangle + r\,\langle B(x_r)\ ,\ B(x_r)\rangle = 0$$

ce qui donne :

$$\|B(x_r)\ \|^2 = \frac{-1}{r}\,\langle B(x_r)\ ,\ F(x_r)\rangle$$

$$\leq\ \frac{1}{r}\,\|B(x_r)\|\,\|F(x_r)\|$$

$$\Rightarrow \|B(x_r)\ \| \leq \ \frac{\|F(x_r)\|}{r} \leq \frac{L}{r}$$

(d'après la remarque précédente).

Dans le théorème suivant on prend le cas particulier où : $B(x) = x - \Pr\limits_{C}(x)$.

Théorème 5 *Soient x et x_r les solutions de (VIP) et $(VEP)_r$ respectivement,*
alors il existe une constante positive C indépendante de r et de x_r telle que :

$$\|x - x_r\| \leq \frac{C}{r^{\frac{1}{2}}}$$

Preuve :
x et x_r des solutions de (VIP) de $(VEP)_r$ respectivement, alors :
$x - x_r = (x - \Pr_C(x_r)) - (x_r - \Pr_C(x_r))$, (1)
on pose :

$$s_r = \left(x - \Pr_C(x_r)\right)$$

$$\Leftrightarrow x - s_r = \Pr_C(x_r) \in C$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \langle F(x), x - s_r - x\rangle \geq 0 \\ &\Rightarrow -\langle F(x), s_r\rangle \geq 0 \qquad (2). \end{aligned}$$

Puisque x_r est la solution de $(VEP)_r$, alors :

$$F(x_r) + rB(x_r) = 0$$
$$\Rightarrow \langle F(x_r), s_r\rangle + r\langle B(x_r), s_r\rangle = 0 \qquad (3).$$

Donc d'après (2) et (3), on trouve que :

$$\langle F(x_r) - F(x), s_r\rangle + r\langle B(x_r), s_r\rangle \geq 0 \qquad (4).$$

Puisque :

$$\langle s_r, B(x_r)\rangle = \left\langle x - \Pr_C(x_r), x_r - \Pr_C(x_r)\right\rangle \leq 0$$
$$(4) \Leftrightarrow \langle F(x_r) - F(x), s_r\rangle \geq -r\langle B(x_r), s_r\rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle F(x) - F(x_r), s_r \rangle \leq 0 \qquad (5)$$

$$(1) \Leftrightarrow s_r = (x - x_r) + \left(x_r - \underset{C}{\mathrm{Pr}}(x_r)\right)$$

On remplace s_r dans (5), on trouve :

$$\left\langle F(x) - F(x_r), (x - x_r) + \left(x_r - \underset{C}{\mathrm{Pr}}(x_r)\right) \right\rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow \langle F(x) - F(x_r), (x - x_r) \rangle \leq \left\langle F(x) - F(x_r), \left(x_r - \underset{C}{\mathrm{Pr}}(x_r)\right) \right\rangle$$

$$\leq \|F(x) - F(x_r)\| \left\| x_r - \underset{C}{\mathrm{Pr}}(x_r) \right\| \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

$$\leq \frac{C}{r} \text{ (d'après le lemme 1 et 2).}$$

d'autre part on a :
puisque F est fortement monotone il existe $\alpha > 0$, tel que :

$$\alpha \|x - x_r\|^2 \leq \langle F(x) - F(x_r), (x - x_r) \rangle \leq \frac{C}{r}$$

$$\Rightarrow \|x - x_r\| \leq \frac{C^{\frac{1}{2}}}{\alpha r^{\frac{1}{2}}}$$

Puisque le paramètre de pénalité tend vers $+\infty$, alors la solution de $(VEP)_r$ tend vers la solution de (VIP).

Algorithme :

On considère le même problème variationnel (VIP) du paragraphe précédent.
Soit B un opérateur de pénalité extérieure qui vérifie les propriétés *P1* et *P2*.

Un algorithme de base peut ainsi être le suivant :

Algorithme de base :
Début algorithme

Initialisation : $k = 0$,
$x^k = x^0 \in R^n$ (arbitraire),
$r_0 = 1 \quad , \theta > 1$

et $\varepsilon > 0$ une précision donnée.

Itération : trouver x^{k+1} solution de :

$$E(x) = F(x) + r_k B(x) = 0.$$

Test d'arrêt : Si $\left\|B\left(x^{k+1}\right)\right\| < \varepsilon$ ou $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| < \varepsilon$,

on s'arrête x^{k+1} est solution de (VIP)

Sinon : poser $r_{k+1} = \theta r_k$

$$x^k = x^{k+1}$$

$$k = k + 1;$$

et retour à itération.

Fin algorithme.

Il est clair que l'analyse et les propriétés de l'algorithme dépendent en grande partie de la manière dont on traite l'équation :

$$(VEP)_r : E(x) = F(x) + rB(x) = 0$$

à chaque itération.

Nous allons donc étudier de près l'équation :

$$E(x) = 0.$$

Existence et unicité d'une solution pour $E(x) = 0$

Souvent dans la littérature on commence par l'existence et l'unicité d'une solution en utilisant le schéma du point fixe, où en reformulant l'équation $E(x) = 0$ sous la forme équivalente suivante :

$$E(x) + x = G(x) = x$$

Auquel cas nous avons le résultat classique suivant :

Théorème 6 [44] *Si G est une contraction stricte (c.a.d : $\exists\ 0 < k < 1$, telle que : $\|G(x) - G(y)\| < k\,\|x - y\|\,; \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$); alors G admet un point fixe unique.*

Proposition 2.5.1 [44] *Soit $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que $E = F + rB$ un opérateur qui vérifie les hypothèses :*
i) E est continu
ii) E est fortement coercif
alors l'équation $E(x) = 0$ admet au moins une solution.

Résolution de l'équation $E(x) = 0$

Pour résoudre l'équation $E(x) = 0$, on peut envisager en principe n'importe quelle méthode classique : point fixe, gradient, Newton...

Le choix d'une méthode dépend des propriétés de F et B du problème (VIP) considéré.

Nous proposons une méthode de type Levenberg-Marquardt [42, 43] avec une règle de recherche linéaire de type Wolfe [43].

Algorithme de Levenberg-Marquardt (avec recherche linéaire)

Algorithme

1-Initialisation : $k = 0$

et $\varepsilon > 0$ une précision donnée.

On se donne $\eta \in]0,1[$

Choix de $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et calcul $\mu_0 = \|E(x^0)\|^2$

2-Itération trouver la solution d^k du système :

$\left[\mu_k I + \left(\nabla E\left(x^k\right)\right)^t \left(\nabla E\left(x^k\right)\right)\right] d = -E\left(x^k\right)$

Si d^k vérifie :$\left\|E\left(x^k + d^k\right)\right\| \leq \eta \left\|E\left(x^k\right)\right\|$: alors

$x^{k+1} = x^k + d^k$ et on va en 4 ;

Sinon, on va à 3 ;

3- Calculer α_k par la recherche linéaire

et prendre $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$ et on va en **4** ;

4- Critère d'arrêt : Si $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| < \varepsilon$ stop

Sinon : poser $\mu_{k+1} = \left\|E\left(x^{k+1}\right)\right\|^2$
$k = k + 1$;
et retour en **2** .
Fin algorithme.

– A l'itération k, la direction d^k est solution du système linéaire :

$$\left[\mu_k I + \left(\nabla E\left(x^k\right)\right)^t \left(\nabla E\left(x^k\right)\right)\right] d^k = -E\left(x^k\right)$$

qui est résolu par la factorisaton de Cholesky.
– Vu que le calcul de ∇E est coûteux, on a envisagé les différences finies,

alors les dérivées partielles du premier ordre sont approximées par la formule suivante :
$\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\left(x^k\right) = \frac{E_j\left(x_1^k,...,x_{i-1}^k,x_i^k+h,x_{i+1}^k,...,x_n^k\right)}{2h_i} - \frac{E_j\left(x_1^k,...,x_{i-1}^k,x_i^k-h,x_{i+1}^k,...,x_n^k\right)}{2h_i}$ / $i, j = 1...n$,
avec le pas : $H\left(h_1, h_2, ..., h_i, ..., h_n\right)$, $h_i = \frac{1}{100}$, $i = 1, ..., n$. On obtient des résultats convenables.
− Le calcul du pas de déplacement s'effectue par la règle de recherche linéaire de Wolfe vérifiant les deux conditions suivantes :

1− La fonction φ doit décroître de manière significative :

$$\varphi\left(\alpha_k\right) \leq \varphi\left(0\right) + m_1\alpha_k\varphi'\left(0\right).$$

2− Le pas α_k doit être suffisamment grand :

$$\varphi'\left(0\right) \geq m_2\varphi\left(0\right)$$

avec $0 < m_1 < m_2$ des constantes convenablement choisies.

Où $\varphi\left(\alpha\right) = \Phi\left(x^k + \alpha d^k\right)$ avec $\Phi\left(x\right) = \frac{1}{2}\left\|E\left(x\right)\right\|^2$

Convergence de l'algorithme de base :
Le théorème suivant établi la convergence de l'algorithme de base.

Théorème 7 [6] *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*
· F *continu sur* $\mathbb{R}^n$ *.*
· F *vérifie l'hypothèse de la forte coercivité i.e., :*
" Il existe $x_0 \in C$ *tel que :* $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \frac{\langle F(x), x-x_0\rangle}{\|x-x_0\|} = +\infty$ *",*
alors toute valeur d'adhérence de la suite $\{x_k\}$ *générée par l'algorithme de base est une solution de* (VIP)*.*

Démonstration :
La démonstration de ce théorème s'effectue en trois étapes :

1) Existence de la solution pour $E(x) = 0$:
$\forall k \in N$, l'application $F + r_k B$ est fortement coercive sur $\mathbb{R}^n$, alors il existe une solution x_k d'après la proposision1 [3].

2) **On va montrer que la suite** $\{x_k\}_{k\in N}$ **est bornée ?**
Supposons le contraire, alors $\exists\ k_0$ tell que $\|x_{k_0}\| \to +\infty$
par définition de x_{k_0}, on a :

$$\frac{\langle E(x_{k_0}), x_{k_0} - x_0\rangle}{\|x_k - x_0\|} = \frac{\left\langle F\left(x_{k_0}\right), x_{k_0} - x_0\right\rangle}{\|x_k - x_0\|} + r_k \frac{\left\langle B(x_{k_0}), x_{k_0} - x_0\right\rangle}{\|x_k - x_0\|} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\left\langle F\left(x_{k_0}\right), x_{k_0} - x_0\right\rangle}{\left\|x_{k_0} - x_0\right\|} = -r_k \frac{\langle B(x_{k_0}), x_{k_0} - x_0\rangle}{\|x_{k_0} - x_0\|} \leq 0$$

du fait que l'on a par définition $\langle B(x_{k_0}), x_{k_0} - x_0\rangle \geq 0$.
D'autre part, la forte coercivité de F nous donne $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \frac{\langle F(x), x - x_0\rangle}{\|x - x_0\|} = +\infty > 0$
d'où la contradiction.

3) **Puisque la suite** $\{x_k\}_{k\in N}$ **est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergeante vers** $\overline{x}$**, une valeur d'adhérence de** $\{x_k\}$.

Remarquons que

$$\lim_{k\to\infty} \inf r_k \langle B(x_k), x_k - x\rangle \begin{cases} +\infty \text{ si } & \overline{x} \notin C \\ \geq 0 \text{ si } & \overline{x} \in C \end{cases} \qquad \forall x \in C$$

donc

$$\lim_{k\to\infty} \inf \langle F(x_k), x - x_k\rangle = \lim_{k\to\infty} \inf r_k \langle B(x_k), x_k - x\rangle$$

F étant continue sur $\mathbb{R}^n$ alors :

$$\lim_{k\to\infty} \inf \langle F(x_k), x - x_k\rangle = \langle F(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle$$

On en déduit que :

$$\overline{x} \in C \ et \qquad \langle F(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle \geqslant 0 \qquad \forall x \in C.$$

Remarque 2.5.2 $-$ *Le théorème de convergence précédent nous permet de justifier le test d'arrêt* $\left\|x^{k+1}-x^{k}\right\|<\varepsilon$ *dans l'algorithme.*
$-$ *On peut également s'arrêter des que* $\left\|B\left(x^{k}\right)\right\|$*est suffisamment petit puisque* $\left\|F\left(x^{k}\right)\right\|$ *l'est aussi.*

2.5.3 Conclusion

On a formulé le problème d'inégalités variationnelles (VIP) comme une suite de problèmes d'égalités variationnelles. Pour résoudre ces derniers on a appliqué les techniques de descente.

Chapitre 3

Mise en œuvre de l'approche de pénalité

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la mise en œuvre de l'algorithme proposé par A .Keraghel [32] décrit dans le chapitre 2.
Nos tests numériques sont effectués sur un (PC), moyennant le logiciel MATLAB, avec une précision $\varepsilon = 10^{-6}$.
Le temps enregistré est calculé en secondes.
Nous présentons l'ensemble des résultats obtenus à travers la résolution des problèmes connus à savoir :

– Les problèmes de complémentarité.
– Minimisation d'une fonction différentiable sur l'orthant positif.
– Problème de réalisabilité.

– Cas où l'ensemble C est donné sous forme de pavés.
– Cas où l'ensemble C est donné sous forme de contraintes linéaires.

Notons que pour chaque classe une adaptation adéquate de l'algorithme est nécessaire.
Au cours de ces expérimentations, le choix du paramètre de pénalité r_k s'effectue par la formule suivante : $r_0 = 1$, $r_{k+1} = \theta r_k$, tel que θ est un réel positif $\theta > 1$. On a fait varier le paramètre de croissance θ, pour voir son influence sur le comportement numérique de l'algorithme.

3.2 Problème de complémentarité :

Soit le problème de complémentarité suivant :

$$(CP)\begin{cases} \text{Trouver } \overline{x} \in \mathbb{R}^n_+ \text{ tel que :} \\ F(\overline{x}) \geq 0 \quad \text{et} \quad \overline{x}^t F(\overline{x}) = 0 \end{cases}$$

où $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction.
Ce problème présente jusqu'à nos jours des difficultés théoriques et numériques et continue de faire l'objet d'étude de recherches importantes.
En particulier, plusieurs programmes mathématiques non linéaires avec contraintes se transforment en (CP) moyennant les conditions d'optimalité de K-K-T et peuvent ainsi être traités par des algorithmes conçus pour (VIP) [34].
Comme problème variationnel, il correspond à :

$$\begin{aligned} C &= \mathbb{R}^n_+ \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n / \ g_i(x) = -x_i \leq 0, i = 1...n\} \end{aligned}$$

Pour obtenir l'opérateur de pénalité B_2 associé au problème (CP), il faut calculer :

$$\begin{aligned} g_i^+(x) &= \begin{cases} -x_i & \text{si} \quad x_i \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \\ \text{et} \ \ \nabla g_i(x) &= (0, ., ., -1, ., ., 0)^t, \quad i = 1...n \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left(g_i^+(x)\right) \times (\nabla g_i(x)) &= \begin{cases} (0, .., x_i, .., 0)^t & \text{si} \quad x_i \leq 0 \\ (0, .., 0, .., 0)^t & \text{sinon} \end{cases}, i = 1...n \\ &= \Pr_{R^n_-} \begin{pmatrix} 0 \\ \\ . \\ x_i \\ \\ \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puisque l'opérateur :

$$B_2(x) \ = \sum_{i=1}^{n} \left(g_i^+(x)\right) \times \left(\nabla g_i(x)\right)$$

alors, il s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} B_2(x) &= \Pr_{R_-^n} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} + \Pr_{R_-^n} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} + ... + \Pr_{R_-^n} \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \Pr_{R_-^n}(x) \\ &= x - \Pr_{R_+^n}(x) = B_1(x) \end{aligned}$$

Exemple 1-1 [29]
Soit l'opérateur $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par :

$$F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 1 \\ 2x_2 - 1 \\ 2x_3 - 1 \end{pmatrix}$$

Le point initial choisi est $x^0 = (1, 1, 1)^t$.

La solution exacte est $\overline{x} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^t$.

θ	**nombre d'itérations**	**temps de calcul**
10	7	0.13
10^2	4	0.08
10^3	3	0.07
10^4	3	0.05
10^6	2	0.04

La solution approchée est :

$x^* = (0.000001,\ 0.500000,\ 0.500000)^t$

Exemple 1-2 [29]

Dans cet exemple $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ représente les conditions de **K.K.T** du programme différentiable convexe suivant :

$$\begin{cases} \min\left[(x_1-3)^2+(x_2-2)^2\right]=f(x) \\ f_1(x)=x_1^2-x_2^2-5 \\ f_2(x)=x_1+2x_2-4 \\ x_1\geq 0; x_2\geq 0 \end{cases}$$

alors l'opérateur F est défini par :

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{pmatrix} \nabla f(x)+x_3\nabla f_1(x)+x_4\nabla f_2(x) \\ f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1+2x_1x_3+x_4-6 \\ 2x_2+2x_2x_3+2x_4-4 \\ -x_1^2+x_2^2+5 \\ -x_1-2x_2+4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $x_3\geq 0,\ x_4\geq 0.$

Le point initial choisi est $x^0=(1,0,0,0)^t$.

La solution exacte est $\overline{x}=\left(2,1,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)^t$.

nombre d'itérations	**temps de calcul**
1	0.01

La solution approchée est :

$x^* = (2.000001,\ 0.999999,\ 0.333332,\ 0.666669)^t$

Exemple 1-3 [8]

L'opérateur $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par :

$$F(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3 + 3x_4 - 6 \\ 2x_1^2 + x_1 + x_2^2 + 10x_3 + 2x_4 - 2 \\ 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3 + 9x_4 - 9 \\ x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3 + 3x_4 - 3 \end{pmatrix}$$

Ce problème possède deux solutions exactes :
$\overline{x1} = (1.24475,\ 0,\ 0,\ 0.5)^t$ et $\overline{x2} = (1, 0, 3, 0)^t$.

Le point initial choisi est $x^0 = (3, -2, -1, -3)^t$.

θ	**nombre d'itérations**	**temps de calcul**
10	8	0.26
10^2	5	0.13
10^3	4	0.11
10^4	3	0.07
10^5	2	0.06

La solution approchée est :

$x^* = (1.224745,\ \ 0.000001,\ 0.000000,\ 0.499999)^t$

Exemple 1-4 [9]

Cet exemple représente un problème de complémentarité linéaire où $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

$x \rightarrow F(x) = Dx + c$,
avec $c = (-1; ..., -1)^t$ et la matrice D :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & . & . & . & 2 \\ 0 & 1 & 2 & . & . & . & 2 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 2 \\ . & . & . & . & & & . \\ . & . & . & & . & & . \\ . & . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Le point initial choisi est $x^0 = (2,\ 2,\ 2, ., ., .,\ 2)^t$.

La solution exacte est $\overline{x} = (0,\ 0,\ 0, ., ., .,\ 1)^t$.

– **Pour** $n = 10$

θ	**nombre d'itérations**	**temps de calcul**
5	11	0.58
10	8	0.47
15	7	0.37
20	7	0.34

– **Pour** $n = 50$

θ	**nombre d'itérations**	**temps de calcul**
10	8	5.26
20	7	4.78
30	6	4.74
40	6	4.46

– **Pour** $n = 100$

θ	**nombre d'itérations**	**temps de calcul**
10	8	85.50
20	7	54.34
30	6	51.70
40	6	46.43
50	6	34.01

La solution approchée est :

$x^* = (0.000001,\ 0.000001,\ 0.000001\ , . \ , . \ , . \ ,\ 1)^t.$

3.2.1 Minimisation d'une fonction différentiable convexe sur l'orthant positif :

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$(P_+) \begin{cases} \min f(x) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Où $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable convexe $\sum$sur $\mathbb{R}^n_+$. Visiblement, ce problème est très simple, malheureusement, en pratique il est mal résolu du fait que les conditions de **K.K.T** n'offrent pas une possibilité numérique intéressante. Les méthodes de type gradient présentent des inconvénients incontournables sur le plan numérique [38].
Il est donc opportun d'envisager l'optimum variationnel sachant que (P_+) est équivalent à :

$$(VIP) \begin{cases} \text{Trouver } \bar{x} \in \mathbb{R}^n_+ \quad \text{tel que :} \\ \left\langle \nabla f\left(\bar{x}\right), x - \bar{x} \right\rangle \geq 0\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

Exemple 1-2-1 [29] :

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$(P_+)\begin{cases} \min\left[\frac{1}{2}x_1^2+\frac{5}{4}x_2^2-\frac{3}{2}x_1x_2-4x_1\right] \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0 \end{cases}$$

l'opérateur du problème variationnel correspondant est :

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

$$x\to\begin{pmatrix} x_1-\frac{3}{2}x_2-4 \\ \frac{5}{2}x_2-\frac{3}{2}x_1 \end{pmatrix}$$

F est strictement monotone.

Le point initial choisi est $x^0=(-1,1)^t$

La solution exacte est $\overline{x}=(40,24)^t$

nombre d'itérations	**temps de calcul**
1	0.005

La solution approchée est :

$x^*=(39.999954,\ 23.999972)^t$.

Exemple 1-2-2 [29] :

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$(P_+)\begin{cases} \min\left[x_1^2+2x_1(x_2-2)+2x_1x_4^2+x_1+x_2x_3^2+\frac{1}{2}x_2+x_3^2+2x_3+x_4^3+x_3+3\right] \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0, x_3\geq 0,\ x_4\geq 0 \end{cases}$$

donc $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ est défini par :

$$F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 + x_4^2 - 3 \\ 2x_1 + x_3^2 + \frac{1}{2} \\ 2x_2x_3 + 2x_3^2 + 2 \\ 2x_1x_4 + 3x_4^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Le point initial choisi est :$x^0 = (10, 10, 10, 10)^t$;

La solution exacte est : $\overline{x} = (\frac{3}{2},\ 0,\ 0,\ 0)^t$:

θ	**nombre d'itérations**	**temps de calcul**
5	11	0.49
6	10	0.38
8	9	0.24
9	9	0.20
10	8	0.17

La solution approchée est :

$x^* = (1.500004,\ 0.000004,\ 0.000002,\ 0.000004)^t$.

Exemple 1-2-3 [30] :

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$(P)_+ \begin{cases} \min f(x) \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0 \end{cases}$$

avec
$f(x) = x_1^2 - 8x_1 + 2x_1x_3^2 + x_5x_2^2 + 6x_6x_2^2 + 2x_2 + x_4x_3^2 + x_3 + 2x_3x_5 + 2x_4 + x_5^2 - 4x_5 + x_6^2 - 18x_6 + 94$

alors l'opérateur du problème variationnel associé est :
$F : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ défini par :

$$F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2^2 + x_3^2 - 8 \\ 2x_1x_2 + 2x_2x_5 + 2x_2x_6 + 2 \\ 4x_1x_3 + 2x_3x_4 + 1 \\ x_3^2 + 2x_5 + 2 \\ x_2^2 + 2x_4 + 2x_5 - 4 \\ 2x_6 + 2x_2^2 - 18 \end{pmatrix}$$

Le point initial choisi est $x_0 = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 5,\ 3)^t$.

La solution exacte est $\overline{x} = (4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 9)^t$

θ	**nombre d'itérations**	**temps de calcul**
10	8	0.32
10^2	5	0.30
200	4	0.25
400	4	0.17
600	4	0.15

La solution approchée est :

$x^* = (4.000000,\ 0.000000,\ 0.000000,\ 0.000001,\ 2.000001,\ 9.00000)^t$.

3.2.2 Problème de réalisabilité :

Les programmes mathématiques de type :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ Ax = b,\ x \geq 0 \end{cases}$$

Où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A est une $m \times n-$matrice et b est un $m-$vecteur, stimulent de plus en plus des chercheurs travaillant sur les méthodes de point intérieur. En pratique, la difficulté majeure à laquelle on est confronté est le problème d'initialisation (phase 1) dit de réalisabilité qui consiste à trouver un point dans l'intérieur relatif de l'ensemble des $\{x \in \mathbb{R}^n / \ Ax = b \text{ et } x \geq 0\}$, supposé non vide auquel cas $ri(C) = \{x \in \mathbb{R}^n / \ Ax = b \text{ et } x > 0\}$ est non vide.
Parmi les procédures qui existent celle de **Karmarkar,** alors nous avons jugé bon d'adapter l'algorithme précédent à ce problème.
En effet, il s'agit de trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x > 0$ et $Ax = b$, on construit alors l'opérateur F en multipliant le système linéaire $Ax = b$ par A^t.
On trouve :

$$F(x) = A^t Ax - A^t b,\ (F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$$

Ce système admet toujours des solutions et se ramène à un problème complémentaire particulier :

$$F(x) = 0 \text{ et } x^t F(x) = 0.$$

Exemple 2-2-1 [18]

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le point initial choisi est $x_0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^t$;

nombre d'itérations	**temps de calcul**
1	0.008

La dernière solution approchée est :
$x^* = (0.0688,\ 0.1307,\ 0.1330,\ 0.2684,\ 0.1330,\ 0.2660)^t$.

Exemple 2-2-2 [18]

$$A = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 3\ \text{-}1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 2\ 4\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 6\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \text{-}1\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 4\ \text{-}1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ \text{-}1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Le point initial choisi est : x_0=$(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)^t$;

nombre d'itérations	**temps de calcul**
1	0.04

La dernière solution approchée est :

$x^* =$ (3.3132, 1.3736, 1.2226, 0.0651, 0.2846,1.1162, 0.5563, 1.1127, 0.9484, 2.1719, 1.3437, 1.9294, 0.3569, 0.6784, 3.3132, 0.0302, 2.3975, 0.7313, 1.0599, 1.0036, 0.8873 1.0000, 0.9828, 1.6255, 0.6784).

3.3 Problème variationel sur un pavé :

On considère le problème variationnel particulier suivant :

$$(VIP)\begin{cases} \text{Trouver } \bar{x} \in C \text{ tel que :} \\ \left\langle F\left(\bar{x}\right), x-\bar{x}\right\rangle \geq 0 \ , \quad \forall x \in C \end{cases}$$

où $C = \prod_{i=1}^{n} [l_i, u_i]\,,\ l_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}\,,\ u_i \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\,.$

Ce problème a attiré l'intérêt de plusieurs chercheurs, car il est connu par ses applications importantes ([29] , [47] , [50]).
Pour obtenir l'opérateur de pénalité B_2 associé à ce problème,
il faut écrire C sous cette forme :
$C = \{x \in \mathbb{R}^n /\ g_i(x) = l_i - x_i \leq 0, \text{ et } g_{i+n}(x) = x_i - u_i \leq 0/\ i = 1...n\}$
alors,

$$\begin{aligned}
g_i^+(x) &= \begin{cases} l_i - x_i & \text{si} \quad x_i \leq l_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \ , i = 1...n \\
g_{i+n}^+(x) &= \begin{cases} x_i - u_i & \text{si} \quad u_i \leq x_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \ , i = 1...n \\
\text{et } \nabla g_i(x) &= (0,.,., \ -1,.,.,0)^t\,, \quad i = 1...n \\
\nabla g_{i+n}(x) &= (0,.,., \ 1,.,.,0)^t\,, \quad i = 1...n
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left(g_i^+(x)\right) \times \left(\nabla g_i(x)\right) &= \begin{cases} (0,.., \ x_i - l_i,.., \ 0)^t & \text{si} \quad x_i \leq l_i \\ (0,.., \ 0,.., \ 0)^t & \text{sinon} \end{cases} \ \text{,i=1...n} \\
\left(g_{i+n}^+(x)\right) \times \left(\nabla g_{i+n}(x)\right) &= \begin{cases} (0,.., \ x_i - u_i,..,0)^t & \text{si} \quad u_i \leq x_i \\ (0,..,0,.., \ 0)^t & \text{sinon} \end{cases} \ \text{,i=1...n}
\end{aligned}$$

Alors l'opérateur de pénalité B_2 s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
B_2(x) &= \sum_{i=1}^{n}\left(g_i^+(x)\right)\times(\nabla g_i(x))+\sum_{i=1}^{n}\left(g_{i+n}^+(x)\right)\times(\nabla g_{i+n}(x))\\
&= x-\Pr_C(x)\\
&= B_1(x)
\end{aligned}$$

Exemple 2-1 [29]

On considère le problème variationnel suivant :

L'opérateur $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ est défini par :

$$F(x)=\begin{pmatrix} 400x_1^3+2x_1-400x_1x_2-2\\ -200x_1^2+200.2x_2+19.8x_4-40\\ 360x_1^3+2x_2-360x_3x_4-2\\ 19.8x_2-180x_3^2+220.2x_4^2-40\end{pmatrix}$$

avec $C=[-10,10]^5$, la solution exacte est $\overline{x}=(1,1,1,1)^t$ et le point initial choisi est $x^0=(3,3,3,3)^t$.

nombre d'itérations	**temps de calcul**
1	0.09

La solution approchée est :

$x^*=(1.006009,1.012085,1.031337,0.987369)^t$.

Exemple 2-2 [46]

Considérons le problème d' inégalités variationnelles avec $C=[0,1]^n$ et $F(x)=Mx+d$:
où $d=(-1;...,-1)$ et la matrice M est définie comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & . & 0 \\ & & & . & . & . & \\ & & & & . & . & . \\ 0 & 0 & & & & 4 & -1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Le point initial choisi est $x^0 = (-1, -1, -1, ., ., ., -1)^t$

La solution exacte est $\overline{x} = (0.3556, 0.4222, 0.3333, ., ., ., 0.2500)^t$;

- **Pour** $n = 10$

nombre d'itérations	**temps de calcul**
1	0.09

La solution approchée est :

$x^* = (0.355555,\ 0.422221,\ 0.333328,\ 0.333313,\ 0.333252,$
$0.333008,\ 0.332031,\ 0.328125,\ 0.312500,\ 0.2500000)^t$.

- **Pour** $n = 100$

nombre d'itérations	**temps de calcul**
1	0.29

La solution approchée est :

$x^* = (0.355555,,0.422221,\ 0.333328,\ .,\ .,\ 0.312500, 0.2500000)^t$.

- **Pour** $n = 1000$

nombre d'itérations	temps de calcul
1	30.95

La solution approchée est :

$x^* = (0.355555,,0.422221,\ 0.333328,\ .,\ .,\ 0.312500, 0.2500000)^t.$

3.4 Problème variationel à contraintes linéaires :

L'ensemble des contraintes est de la forme :

$C = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b,\ i = 1 : m\}$
ou $C = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b,\ x \geq 0,\ i = 1 : m\}$
où : A est une $m \times n$ matrice et b un m vecteur.

Les spécialistes attachent une importance toute particulière à ce problème, il modélise des problèmes d'application importants comme les problèmes d'équilibre en économie, et le problème de transport en recherche opérationnelle $[15, 20, 22, 37, 46, 54]$.

Considérons l'opérateur de pénalité :

$$B_2(x) = \nabla h(x) = \sum_{i=1}^{i=m} \left[(\nabla g_i(x)) \times g_i^+(x) \right]$$

qui correspond à : $C = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1 : m\}$.

Dans ce cas : $g_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - b_i$, $i = 1 : m$.

Pour obtenir l'opérateur de pénalité B_2, il faut calculer :

$$\nabla g_i(x) = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \\ a_{in} \end{pmatrix}$$

$$g_i^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - b_i \leq \quad 0 \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - b_i & \qquad \text{sinon} \end{cases} \quad , i = 1 : m$$

alors :

$$\sum_{i=1}^{i=m} \left[(\nabla g_i(x)) \times g_i^+(x) \right] = A^t \begin{pmatrix} g_1^+(x) \\ g_2^+(x) \\ . \\ . \\ . \\ g_m^+(x) \end{pmatrix}$$

Dans le cas où $\{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, \ i = 1 : m\}$
on obtient :

$$B_2(x) = A^t \begin{pmatrix} g_1^+(x) \\ g_2^+(x) \\ . \\ . \\ . \\ g_m^+(x) \end{pmatrix}$$

et pour le cas où $C = \{x \in \mathbb{R}^n / \ Ax \leq b, \ x \geq 0, \ i = 1 : m\}$:

$$B_2(x) = A^t \begin{pmatrix} g_1^+(x) \\ g_2^+(x) \\ . \\ . \\ . \\ g_m^+(x) \end{pmatrix} + \Pr_{R_-^n}(x)$$

Où $R_{-}^{n} = \{x \in R^{n} / \ \ x_i \leq 0\}$

Exemple 3-1 [9]

Dans cet exemple l'opérateur $F : R^4 \to R^4$ est donné par :

$$F(x) = Ax$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et $C = \{x \in \mathbb{R}^4 / \ x_1 \geq 1; \ x_2 \leq 0; \ x_4 \geq 0\}$

L'ensemble des solutions de ce problème est :
$C^* = \{x \in \mathbb{R}^4 / \ x_1 \geq 1; \ x_2 = 0; \ 0 \leq x_3 \leq \ x_1/2 \ ; \ \ x_4 = 0\}$.

Le point initial choisi est $x^0 = (-1, -1, -1, ., ., ., -1)^t$.

θ	**nombre d'itérations**	**temps de calcul**
10	7	0.11
10^2	5	0.10
10^3	4	0.09
10^4	3	0.05

La solution approchée est :

$x^* = (1.000000, \ 0.000000, \ 0.400009, \ 0.000000)^t$.

Exemple 3-2 [57]

Dans cet exemple l'opérateur $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ est donné par :

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0.726 & -0.949 & 0.266 & -1.193 & -0.504 \\ 1.645 & 0.678 & 0.333 & -0.217 & -1.443 \\ -1.016 & -0.225 & 0.769 & 0.934 & 1.007 \\ 1.063 & 0.567 & -1.144 & 0.550 & -0.548 \\ -0.259 & 1.453 & -1.073 & 0.509 & 1.026 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$+\rho\begin{pmatrix}\arctan(x_1-2)\\\arctan(x_2-2)\\\arctan(x_3-2)\\\arctan(x_4-2)\\\arctan(x_5-2)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5.308\\0.008\\-0.938\\1.024\\-1.312\end{pmatrix}$$

et l'ensemble C est défini par :

$C=\{x\in R^5/\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\geq 10,\ x_i\geq 0,\ i=1,2,...,5\}$

$=\left\{\begin{array}{c} x\in R^5/\ g_i(x)=-\ x_i\leq 0,\ i=1,2,...,5 \\ g_6(x)=10-(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\leq 0\end{array}\right\}$

Ce problème admet une solution unique $\overline{x}=(2,2,2,2,2)^t$

Le point initial choisi est : $x^0=(1,1,1,1,1)^t$.

– Pour $\rho=10$

θ	**nombre d'itérations**	**temps de calcul**
10	8	0.23
10^2	5	0.22
10^3	4	0.18
10^4	3	0.17
10^5	3	0.16

La solution approchée est :

$x^*=(1.999999,\ 2.00001,\ 2.000004,\ 1.999995,\ 1.999991)^t$

– **Pour** $\rho=20$

θ	**nombre d'itérations**	**temps de calcul**
10	8	0.17
10^2	5	0.12
10^4	3	0.10
10^6	3	0.09
10^7	2	0.07

La solution approchée est :

$x^* = (2.000000, 2.00000, 1.999998, 2.000001, 2.000001)^t$

Exemple 3-3 [3]

Cet exemple représente un problème d'équilibre :
où : $F : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^{10}$ est défini par :

$F1 = 34x_1^2{+}42x_1x_2{+}20x_1x_3{+}20x_1x_4{+}42x_1x_5{+}34x_1{+}21x_2^2{+}20x_2x_3{+}20x_2x_5$
$+21x_2{+}10x_3^2{+}10x_3{+}10x_4^2{+}20x_4x_5{+}10x_4{+}21x_5^2{+}21x_5{+}34$
$F2 = 21x_1^2{+}42x_1x_2{+}20x_1x_3{+}20x_1x_5{+}21x_1{+}34x_2^2{+}42x_2x_3{+}20x_2x_4$
$+20x_2x_5{+}34x_2{+}21x_3^2{+}20x_3x_4{+}21x_4{+}21x_3{+}10x_4^2{+}10x_5^2{+}10x_5{+}34$
$F3 = 10x_1^2{+}20x_1x_2{+}20x_1x_3{+}10x_1{+}21x_2^2{+}42x_2x_3{+}20x_2x_4$
$+21x_2{+}34x_3^2{+}42x_3x_4{+}20x_3x_5{+}34x_3{+}21x_4^2{+}20x_4x_5{+}21x_4{+}10x_5^2{+}34$
$F4 = 10x_1^2{+}20x_1x_4{+}20x_1x_5{+}10x_1{+}10x_2^2{+}20x_2x_3{+}20x_2x_4{+}10x_2{+}21x_3^2$
$+20x_3x_5{+}21x_3{+}42x_3x_4{+}34x_4^2{+}42x_4x_5{+}34x_4{+}21x_5^2{+}21x_5{+}34$
$F5 = 21x_1^2{+}20x_1x_2{+}20x_1x_4{+}42x_1x_5{+}21x_1{+}10x_2^2{+}20x_2x_5{+}10x_2$
$+10x_3^2{+}20x_3x_4{+}20x_3x_5{+}10x_3{+}21x_4^2{+}42x_4x_5{+}21x_4{+}34x_5^2{+}34x_5{+}34$
$F6 = 23x_6^2{+}10x_7^2{+}10x_{10}^2{+}20x_6x_7{+}20x_6x_{10}{+}23x_6{+}10x_7{+}10x_{10}{+}23$
$F7 = 23x_7^2{+}10x_8^2{+}10x_6^2{+}20x_7x_8{+}20x_6x_7{+}23x_7{+}10x_8{+}10x_6{+}23$
$F8 = 23x_8^2{+}10x_9^2{+}10x_7^2{+}20x_8x_9{+}20x_7x_8{+}23x_8{+}10x_9{+}10x_7{+}23$
$F9 = 23x_9^2{+}10x_{10}^2{+}10x_8^2{+}20x_9x_{10}{+}20x_8x_9{+}23x_9{+}10x_{10}{+}10x_8{+}23$
$F10 = 23x_{10}^2{+}10x_6^2{+}10x_9^2{+}20x_6x_{10}{+}20x_9x_{10}{+}23x_{10}{+}10x_6{+}10x_9{+}23$

L'ensemble $C = \left\{x \in \mathbb{R}^{10} /\ \ x_i \geq 0, i = 1, ..., 10, \ \ x_j +\ x_{j+5} = \frac{j}{10},\ j = 1, ..., 5\right\}$
F est strictement monotone alors ce problème admet une solution unique qui

est donnée par :

$\overline{x} = (0, 0, 0.018807, 0.135947, 0.114582, 0.1, 0.2, 0.281193, 0.264053,$
$0.385418)^t$

Le point initial choisi est :

$x^0 = (-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1)^t$

θ	**nombre d'itérations**	**temps de calcul**
10	10	0.93
10^2	6	0.75
10^3	4	0.73
10^4	4	0.68
10^5	2	0.62

La dernière solution approchée est :

x^* = (0.000000, 0.000000, 0.018809, 0.135945, 0.114582, 0.100000, 0.200000,
0.281191, 0.2640550,
$0.385418)^t$

3.5 Commentaires

1. Les valeurs de θ sont inversement proportionnelles avec le nombre d'itérations et le temps d'exécution, mais on risque de perdre la qualité de la solution lorsque θ est assez grand.

2. Si la solution est dans l'intérieur de l'ensemble admissible , alors le nombre d'itérations est un. Ceci est justifié que si la solution est un point intérieur alors la résolution de (VIP)) se réduit à la résolution de $F(x) = 0$.

3. Si la solution est non dégénérée, le choix du paramètre de pénalité ($r_0 = 1, r_{k+1} = 10r_k,$) ne marche pas. Il faut choisir des valeurs appropriées.

4. On enregistre également que cet algorithme peut être envisagé pour résoudre les problèmes d'inégalités variationnelles de grandes dimensions, comme le prouvent les exemples testés.

Conclusion

Notre étude a apporté des contributions concrètes pour résoudre convenablement le problème d'inégalités variationnelles (VIP) par l'approche de pénalité.
Les aspects que nous avons pu développer concernant cette approche sont d'une valeur théorique, algorithmique et numérique, et ouvre plusieurs perspectives.
Théoriquement, cette alternative constitue un développement théorique considérable. L'impact de ce fait est partagé entre une théorie modérée et un aspect algorithmique nettement plus simple à traiter.
Numériquement, les tests que nous avons effectués témoignent d'un comportement numérique assez appréciable important, ce qui place cette approche en tête des développements modernes relatifs à (VIP) jusqu'à nos jours.

Bibliographie

[1] M. Abbas a, S.Z. Németh, Solving nonlinear complementarity problems by isotonicity of the metric projection, Applied Mathematics and Computation, Volume 386, Issue 2, 15 „ February 2012, Pages 882-893.

[2] R. Andreani, A. Friedlander and J. M. Martínez, Solution of Finite-Dimensional Variational Inequalities Using Smooth Optimization with Simple Bounds,Journal Optimization Theory & Applications : Vol. 94, No. 3, , September 1997, pp. 635-657.

[3] Antonino Maugeri, Convex Programming, Variational Inequalities, and Applications to the Traffic Equilibrium Problem, Applied Mathematics and Optimization16 : (1987), 169-185 .

[4] R.Andreani, Ana Friedlander, Bound Constrained Smooth Optimization for Solving Variational Inequalities and Related Problems, Annals of Operations Research 116, 2002,179–198.

[5] M.Aghassia, D.Bertsimas, G.Perakis, Solving asymmetric variational inequalities via convex optimization, Operations Research Letters 34 (2006) 481 – 490.

[6] A.Auslender. Optimisation :Méthodes Numériques(Masson.Paris.1976).

[7] M. Bianchi, S. Schaible, An Extension of Pseudolinear Functions and Variational equality Problems, journal of optimization theory and applications : Vol. 104, No. 1,JANUARY 2000, pp. 59–71.

[8] Bingheng He, A class of Projection and Contraction Methods for Monotone Variational inequalities, Applied Mathematics Optimisation 35 : , (1997), 69-79.

[9] Changfeng Ma , Tong Kang, A Jacobian smoothing method for box constrained variational inequality problems, Applied Mathematics and Computation 162, (2005, 1397–1429.

[10] Lu-Chuan Ceng, Nicolas Hadjisavvas, Ngai-Ching Wong, Strong convergence theorem by a hybrid extragradient-like approximation method for variational inequalities and fixed point problems, Journal of Global Optimization 46 : (2010), 635–646.

[11] Lu-Chuan Ceng, Qamrul Hasan Ansari, Jen-Chih Yao, Relaxed extragradient iterative methods for variational inequalities, Computers & Mathematics with Applications, Volume 218, Issue 3, October 2011, Pages 1112-1123, 1.

[12] J.P. Crouzeix, Pseudomonotone varational inequality problems : Existence of solutions, Mathematical Programming, 78, (1997), pp. 305-314, .

[13] F.Facchinei, A.Fisher and C.Kanzow, Regularity properties of a semismooth reformulation of variational inequalities, Siam J.Optimization,Vol.8,No.3,PP, August(1998) 850-869.

[14] Facchinei, F., Pang, J.S. : Finte-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. Springer, Berlin Helidelberg, New York (2003).

[15] M. C. Ferris and O. L. Mangasarian, Error bounds and strong upper semicontinuity for monotone affine variational inequalities, Annals of Operations Research, Volume 46-47, Number 2, , 1993,Pages 293-305.

[16] Ferris, M.C., Pang, J.S. : Engineering and economic applications of complementariry problems, SIAM Rev.39, (1997), 669–713.

[17] M.Fukushima, Equivalent differebtiable optimisation problems and descent methods for symmetric variational inequality problems , Mathimatical Programming 53 (1992), 99-110, North-Holland.

[18] H.Grar, Etude théorique et numérique d'une méthode de point intérieur pour la résolution du problème d'inégalités variationnelles, Thèse de Magister,Université de M'sila (2000).

[19] D. Han, A New Hybrid Generalized Proximal Point Algorithm for Variational Inequality Problems,Journal of Global Optimization 26 : 2003, 125–140.

[20] D. Han, A generalized proximal-point-based prediction–correction method for variational inequality problems, Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 221, Issue 1, 1 November 2008, Pages 183-193.

[21] Harker, P.T., Pang, J.S. : Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems : a survey of theory, algorithms and applications, Math. Program. 48,(1990). 161–220.

[22] B. S. He, L. Z. Liao and H. Yang, Decomposition Method for a Class of Monotone Variational Inequality Problems, Journal of Optimization Theory and Applications, 1999, Volume 103, Number 3, Pages 603-622.

[23] C. Huanga, S. Wang,A power penalty approach to a Nonlinear Complementarity Problem, Operations Research Letters 38 (2010) 72 76.

[24] L. R. Huang and K. F. Ng, Equivalent Optimization Formulations and Error Bounds for Variational Inequality Problems, journal of optimization theory and applications : Vol. 125, No. 2, , May 2005, pp. 299–314.

[25] G. Idone, Variational Inequalities andApplications to a Continuum Model of Transportation Network with Capacity Constraints, Journal of Global Optimization 28, 2004, 45–53.

[26] Konnov, Igor, Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities, Series : Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 495, ISBN 978-3-540-67999-8, 2001, XI, 181 p.

[27] Christian Kanzow and Houyuan Jiang, A continuation method for (strongly) monotone variational inequalities, Mathematical Programming, Volume 81, Number 1, 1998, Pages 103-125.

[28] C.Kanzow and M.Fukushima,Theorical and numerical investigation of the D-gap function for box constrained variational inequalities, Mathematical programming 83 (1998) 55-87.

[29] Z. Kebaili, Résolution D'inégalités variationnelles Par Des Techniques D'optimisation, Thèse de Magister,Université de M'sila (2000).

[30] Z. Kebaili and A. Keraghel, A descent algorithm for solving variational inequality problem, Applied Mathematical Sciences, Vol. 2, 2008, 2095-2103.

[31] A.Keraghel, Elément d'analyse convexe (dans Rn),théorie fondamentale et exercices, Université de Setif (1999).

[32] A.Keraghel, Impacts théoriques et algorithmiques de l'optimisation sur le problème d'inégalités variationnelles dans $\mathbb{R}^n$, 4ème Rencontre Internationale d'Analyse Mathématique et ses Applications (RAMA V)-Université de M'sila- 2000.

[33] S. J. Li, S. H. Hou, and G. Y. Chen, Generalized Differential Properties of the Auslender Gap Function for Variational Inequalities, journal of optimization theory and applications : Vol. 124, No. 3,, March 2005, pp. 739–749.

[34] P.Marcotte, Inéquations variationnelles : Motivation, Algorithmes de résolution et quelques applications, Cours donnnés à Zinal, Suisse, 4–8 mars mil-neuf-cent-nonante-sept Révision février 2009.

[35] Mend-Amar Majig · Abdel-Rahman Hedar Masao Fukushima, Hybrid evolutionary algorithm for solving general variational inequality problems, Journal of Global Optimization (2007) 38 :637–651.

[36] Mokhtar S. Bazaraa, Hanif D. Sherali, C. M. Shetty , Nonlinear Programming : Theory and Algorithms, John Wiley and Sons, 1993

[37] Muhammad Aslam Noor, Yiju Wang and Naihua Xiu : "Some new projection methods for variational inequalities", Applied Mathematics and Computation, Volume 137, Issues 2-3, 25 May 2003, Pages 423-435.

[38] J. S. Pang, Solution differentiability and continuation of Newton's method for variational inequality problems over polyhedral sets, Journal of Optimization Theory and Applications, Volume 66, Number 1,1990, Pages 121-135.

[39] Jong-Shi Pang, Steven A. Gabriel, NE/SQP : A robust algorithm for the nonlinear complementarity problem, Mathematical Programming 60 (1993) 295-337 295 North-Holland.

[40] Ji-Ming Peng, Equivalence of variational inequality problems to unconstrained minimization, Mathematical Programming 78 (1997), 347-355.

[41] Peng, J.M., Fukushima, M. : A hybrid newton method for solving the variational inequality problem via the D-gap function. Math. Program. 86, (1999), 367–386 .

[42] B.T. Polyak, Newton's method and its use in optimization, European Journal of Operational Research 181 (2007) 1086–1096.

[43] Shou-qiang Dua,b, Yan Gao, Convergence analysis of nonmonotone Levenberg–Marquardt, Applied Mathematics and Computation 216 (2010) 1652–1659.

[44] M.Sibony and J-CI.MARDON : Analyse numérique, systèmes linéaires et non linéaires, Hermann, éditeurs des sciences et des arts.

[45] D. Sun, A projection and contraction method for the nonlinear complementarity problem and its extensions, Mathematica Numerica Sinica 16 (1994) 183–194. (In Chinese). English translation published in Chinese Journal of Numerical Mathematics and Applications 16 :3 (1994) 73–84.

[46] D. Sun, A new step-size skill for solving a class of nonlinear projection equations, Journal of Computational Mathematics 13 :4 (1995), 357–368.

[47] N. Tam and N. D. Yen, Quadratic programming and affine variational inequalities : a qualitative study by G. M. Lee, N, Mathematical Methods of Operations Research , Volume 65, Number 2,, 2007, Pages 385-387.

[48] Ulji and Chen Guo-qing, New simple smooth merit function for box constrained variational inequalities and damped Newton type method,

Applied Mathematics and Mechanics, Volume 26, Number 8, 2005, Pages 1083-1092.

[49] S. Wang, X.Q. Yang, K.L. Teo, A power penalty method for a linear complementarity problem arising from American option valuation, Journal Optimization Theory & Applications 29 (2006) 227 257.

[50] S. Wang, X.Q. Yang, A power penalty method for linear complementarity problems, Operations Research Letters 36 (2008) 211 214.

[51] X.Wang · Changfeng Ma · Meiyan Li, A globally and superlinearly convergent quasi-Newton method for general box constrained variational inequalities without smoothing approximation, Journal of Global Optimization (2011) 50 :675–694.

[52] Yonghong Yao, Yeong-Cheng Liou, Mu-Ming Wong and Jen-Chih Yao, Strong convergence of a hybrid method for monotone variational inequalities and fixed point problems, Fixed Point Theory and Applications Volume 2011, Number 1, 53.

[53] N. Yamashita, K. Taji and M. Fukushima, Unconstrained Optimization Reformulations of Variational Inequality Problems, Journal of Optimization Theory and Applications, , Volume 92, Number 3, 1997, Pages 439-456.

[54] Yiju Wang, Naihua Xiu, Changyu Wang, A new version of extragradient method for variational inequality problems, Computers & Mathematics with Applications, Volume 42, Issues 6-7, October 2001, Pages 969-979.

[55] W. Zhang, D. Han, Solving variational inequality problems with linear constraints by a proximal decomposition algorithm, Journal of Global Optimization, Volume 28 Issue 1, (2004), p.51-86.

[56] Wenxing Zhang, Deren, A new alternating direction method for co-coercive variational inequality problems, Computers & Mathematics with Applications, Volume 57, Issue 7, April 2009, Pages 1168-1178.

[57] Zhong Zhou, Anthony Chen , Deren Han, An extended alternating direction method for variational inequality problems with linear equality and inequality, Applied Mathematics and Computation 184 (2007) 769–782.