

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS SETIF

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

N° d'ordre :

Série :

Mémoire de Magister

Spécialité : Génie Civil

Présenté par :

Mr : LOGZIT Nacer
Ingénieur en Génie Civil

**LES DOMES CABLES A BASE DE TENSEGRITE
EN NON LINEARITE GEOMETRIQUE.**

Directeur de mémoire : Dr : KEBICHE Khelifa.

Soutenu publiquement à l'université de Sétif le : ... /... /2007

Devant le jury composé de :

Président :	M. MIMOUNE	Professeur, Université de M. M. Constantine
Rapporteur :	K. KEBICHE	Maître de conférence, Université de F. A. Sétif
Examineurs :	L. MOKRANI	Maître de conférence, Université de F. A. Sétif
	Z. BOUDAUD	Maître de conférence, Université de M'sila.
Invité :	H. TAHI	Chargé de cours, Université de F. A. Sétif

AVANT-PROPOS

Cette recherche a été réalisée au sein de l'Institut de Génie Civil à l'Université Ferhat Abbas de Setif, sous la direction du Dr : Kh. KEBICHE. Je tiens à lui exprimer mes plus sincères remerciements pour ses conseils, sa grande disponibilité, son soutien. Ma reconnaissance s'adresse également à tous les enseignants de la formation Post Graduation de l'Institut de Génie Civil pour l'importance des moyens mis à disposition et notamment au Chef de département, E. TAHI pour le soutenant et le suivi de la formation.

Je tiens à remercier les autres membres du jury, à savoir le Professeur M. MIMOUNE, Professeur à l'Université de Constantine, Président du jury, Dr. L. MOKRANI, Vice Recteur de la planification de l'université de Setif , et Z. BOUDAUD, Maître de conférence, de l'université de M'sila.

Mes remerciements vont au Mr F.Merabet notre collègue de profession (CTH) de la Tunisie pour son aide de documentation sur les structures à câbles.

Je remercie Mr M. Hazzam, Maître Assistant à l'Université de Bejaia pour son aide et soutien.

Je remercie également les responsables, travailleurs et les Ingénieurs de l'Organisme National de Contrôle Technique de la Construction Hydraulique, CTH, pour les facilités mises à ma disponibilité durant la formation et la recherche.

Au cours de ce travail, j'ai souvent eu l'occasion d'échanger des idées et des informations avec beaucoup de collègues de l'Institut et de l'extérieur. Je les remercie tous pour leur disponibilité et l'intérêt qu'ils ont manifestés, et pour l'échange d'idées.

Finalement, je remercie de tout cœur ma petite et grande famille de m'avoir faciliter la vie pendant la rédaction de ma thèse, soutenu et encouragé pendant ce travail de longue haleine.

Mr LOGZIT Nacer
Setif, Septembre 2007

PLAN GENERAL

LES DOMES CABLES A BASE DE TENSEGRITE EN NON LINEARITE GEOMETRIQUE

- Résumé
- Mos-clés
- Table des matières
- Notations

INTRODUCTION GENERALE

PARTIE 1 : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES DOMES CABLES

- I. Généralités sur l’historique et la conception des dômes câbles.
- II. Recherches récentes sur les dômes câbles.

PARTIE 2 : METHODES DE CALCUL DES DOMES CABLES

- I. Méthodes de recherche de forme.
- II. Méthodes d’analyse en non linéarité géométrique.

PARTIE 3 : RESULTATS NUMERIQUES

Cinq applications sur des dômes câbles conçus :

- Conception et recherche de forme.
- Etude de comportement en non linéarité géométrique.

CONCLUSION GENERALE

ANNEXES

A. Présentation du logiciel BAROSO1 de calcul en non linéarité géométrique

- Références bibliographiques
- Table des illustrations
- Liste des tableaux

MOS-CLES

DOMES CABLES
TENSEGRITE
NON LINEARITE GEOMETRIQUE
MECANISME
AUTOCONTRAINTTE
EQUILIBRE
STATIQUE
TENSION
COMPORTEMENT

KEY-WORDS

DOMES CABLES
TENSEGRITY
GEOMETRIC NONLINEAR
MECHANISM
SELF-STRESS
BALANCE
STATIC
TENSION
BEHAVIOUR

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE	1
 PARTIE 1 : <u>ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES DOMES CABLES</u>	
1. Introduction	6
 I. GENERALITES SUR L'HISTORIQUE ET LA CONCEPTION DES DOMES CABLES.	
2. Définition du terme « dôme câble ».....	7
3. Historique	7
4. L'élément câble et système de couverture des toits de câbles.....	8
5. Les configurations de base des dômes.....	9
6. Dômes câbles à base de tensegrité.....	11
7. La notion de stabilisation des mécanismes par les états d'autocontrainte.....	11
8. Etude de cas : Dôme de Georgia d'Atlanta.....	12
9. Les avantages principaux de la conception architecturale des dômes câbles.....	14
 II. RECHERCHES RECENTES SUR LES DOMES CABLES.	
10. Dômes géodésique , polyédriques, ou en forme de x.....	15
11. Dômes en grilles ou sous autres formes.....	16
12. Dômes de tensegrité et méthodes de conception et d'analyse.....	16
 13. Conclusion de la première partie	 25
 PARTIE 2 : <u>METHODES DE CALCUL DES DOMES CABLES</u>	
14. Introduction	27
 I. METHODES DE RECHERCHE DE FORME.	
15. Introduction.....	28
16. Méthode des densités de force.....	28
17. Méthode de relaxation dynamique.....	30
18. Méthode à énergie potentielle minimale.....	31
19. Méthode de calcul des mécanismes et d'autocontrainte par la matrice d'équilibre.....	31
19.1 Introduction.....	31
19.2 Relations fondamentales entre les grandeurs mécaniques.....	32
19.3 Equations d'équilibre.....	33
19.31 Equilibre d'un nœud libre.....	33
19.32 Matrice d'équilibre.....	34
19.4 Relations de compatibilité.....	34
19.41 Relation de compatibilité associée à un nœud libre.....	34
19.42 Matrice de compatibilité.....	36

19.5	Déterminations statiques et cinématiques d'un système réticulé.....	36
19.51	Les états d'autocontraintes d'un système réticulé.....	36
19.52	Les mécanismes d'un système réticulé.....	37
19.53	Différentes caractéristiques statiques et cinématiques des systèmes réticulés.....	37
19.6	Etude d'un module plan à 4 câbles et une barre.....	38
19.61	Matrice d'équilibre.....	38
19.62	Mécanismes.....	39
19.63	Autocontrainte.....	40
20.	Développement d'une méthode directe de calcul des états d'autocontrainte.....	41
20.1	Introduction.....	41
20.2	Equilibre d'un nœud.....	41
20.3	Notion des densités équivalentes et vecteur de précontrainte.....	42
20.4	Généralisation de la procédure et résultat final.....	42
20.5	Algorithme de résolution.....	43
20.6	Application numérique: base d'autocontrainte.....	44

II. METHODES D'ANALYSE EN NON LINEARITE GEOMETRIQUE.

21.	Introduction.....	45
22.	Justification de la non linéarité et hypothèses fondamentales.....	45
23.	Les méthodes de résolution.....	45
23.1	Méthode incrémentale pure.....	46
23.2	Méthode incrémentale itérative.....	46
23.3	Méthode de Newton-Raphson.....	46
24.	Analyse en non linéarité géométrique : Formulation variationnelle.....	46
24.1	Hypothèses.....	46
24.2	Notations et étapes de formulation.....	47
24.3	Formulation variationnelle du principe des travaux virtuels.....	48
24.4	Ecriture matricielle de la formulation variationnelle.....	50
24.5	Intégration de la formulation pour un élément linéique.....	51
24.51	La cinématique de l'élément.....	51
24.52	Calcul de la matrice de rigidité linéaire K_L	52
24.53	Calcul de la matrice de rigidité géométrique K_{NL}	54
24.54	Calcul du vecteur des efforts internes.....	55
24.55	Matrice de rigidité tangente.....	55
24.6	Algorithme de résolution.....	56
25.	Conclusion de la deuxième partie.....	58

PARTIE 3 : RESULTATS NUMERIQUES

26.	Introduction.....	60
27.	Objet et outils.....	61
28.	Caractéristiques géométriques et mécaniques des éléments.....	61
29.	Application 1 : Module plan à quatre câbles et une barre.....	62
29.1	Géométrie de la structure.....	62
29.2	Mécanismes.....	62
29.3	Autocontraintes.....	63
29.4	Comportement mécanique.....	63

30. Application 2 : Module à huit câbles et une barre.....	66
30.1 Géométrie de la structure.....	66
30.2 Mécanismes.....	66
30.3 Autocontraintes.....	67
30.4 Comportement mécanique.....	67
31. Application 3 : Dôme à seize câbles et quatre barres.....	69
31.1 Géométrie de la structure.....	69
31.2 Mécanismes.....	70
31.3 Autocontraintes.....	71
31.4 Comportement mécanique.....	71
32. Application 4 : Dôme à vingt câbles et cinq barres.....	73
32.1 Géométrie de la structure.....	73
32.2 Mécanismes.....	75
32.3 Autocontraintes.....	75
32.4 Comportement mécanique.....	76
33. Application 5 : Dôme à quarante deux câbles et douze barres.....	79
33.1 Géométrie de la structure.....	79
33.2 Mécanismes.....	81
33.3 Autocontraintes.....	82
33.4 Comportement mécanique.....	86
34. Commentaire.....	90
34. Conclusion de la troisième partie.....	91
CONCLUSION GENERALE.....	92
ANNEXES.....	95
A. Présentation du logiciel BAROSO1 de calcul en non linéarité géométrique.....	96
A.1 Définition et principe du logiciel.....	96
A.2 Fichiers de données.....	96
A.3 Fichier des résultats.....	97
A.4 Validation des résultats.....	97
• Références bibliographiques.....	98
• Table des illustrations.....	101
• Liste des tableaux.....	104

Summary

The main goal of this thesis is to study the mechanical behaviour of domes cables numerically at a tensegrity basis in geometric nonlinear. This work (research) takes support mainly from the research of PELLEGRINO S. and CALLADINE C.RS applied by N.VASSART [32] [33] on self-stress reticulate systems for the from-finding, and those of Kh. KEBICHE [13] [14] that describe the behaviour in geometric nonlinear of spatial reticulate structures in state of tensegrity.

Before conceiving five domes cables from the simple models in tensegrity, of a range of 12 to 120 m, in order to study their mechanical behaviour, we began the thesis by two parts : the first dealing with the historic of domes cables, some principles of conception, with the recent research on domes cables, and the second for methods of research of shape and methods of analysis in geometric nonlinear.

Concerning the from-finding, and for the determination of mechanisms and states of self-stress for the stabilization of conceived domes cables, we applied the method mentioned above compared to a direct method developed in this thesis, we found that this latter gives some fast and reliable results.

The method of analysis in geometric nonlinear developed by Kh. KEBICHE [13] [14] for reticulate and self-stress systems has been adapted here to study the mechanical behaviour of domes numerically conceived under static loading, the study includes the influence parameter of the initial pre-stressed in the cables, the variation parameter of the range, and of the section of bars and cables. The results are shown, presented and commented in the third part.

Key words: Domes cables, tensegrity, geometric nonlinear, mechanism, self-stress, balance, tension, static, behaviour.

Résumé

Le but principal de cette thèse est d'étudier numériquement le comportement mécanique des dômes câbles à base de tenségrité en non linéarité géométrique. Ce travail prend appui principalement des recherches de PELLEGRINO S. et CALLADINE C.R appliquées par N.VASSART [32] [33] sur les systèmes réticulés autocontraints pour la recherche de forme, et celles de Kh. KEBICHE [13] [14] qui décrivent le comportement en non linéarité géométrique des structures réticulées spatiales en état de tenségrité.

Avant de concevoir cinq dômes câbles à partir des simples modèles en état de tenségrité, d'une portée de 12 jusqu'à 120 m, afin d'étudier leur comportement mécanique, nous avons débuté la thèse par deux parties. La première est réservée à l'historique des dômes câbles, quelques principes de conception, avec les recherches récentes sur les dômes câbles, et la deuxième pour les méthodes de recherche de forme et les méthodes d'analyse en non linéarité géométrique.

Concernant la recherche de forme, et pour la détermination des mécanismes et les états d'autocontrainte pour la stabilisation des dômes câbles conçus, nous avons appliqué la méthode citée ci-dessus comparée à une méthode directe développée dans cette thèse. Il ressort que cette dernière donne des résultats rapides et fiables.

La méthode d'analyse en non linéarité géométrique développée par Kh. KEBICHE [13] [14] pour les systèmes réticulés autocontraints a été adaptée ici pour étudier numériquement le comportement mécanique des dômes conçus sous chargement statique. L'étude inclue le paramètre d'influence de la précontrainte initiale dans les câbles, et le paramètre de variation de la portée, et de la section des barres et des câbles. Les résultats sont présentés et commentés dans la troisième partie.

Mots clés : Dômes câbles, tenségrité, non linéarité géométrique, mécanisme, autocontrainte, équilibre, tension, statique, comportement.

IOQ OQO i áú ÉaaÓaa ÉiaBÉ ÉÇÉa í BÉBaa BaaÓaÉiaBÉ ÉQNIÉ aa ÉÍæNØ?Ç adaáí ÓÁÑÉ YÍaÉ
 PELLEGRINO æ CALLADINE C.R. ÉÇÍ É i áú ÇQO áaUÉ Da ÍaÓ .ÉíÓaaÉ ÉíOÍ?Ç ÉÇUQNaÉBaa æ áÓÉÉÉ
 ØB æ jáBÓÉ áU ÉÍ É aÍÁ aa ÇÉÉ ÉíááÉ ÉiaÓÉÉ ÉaUaÇ i áú N.VASSART [32] [33] YNØ aa ÉHaaÉ S.
 IOQ ÉaÍ í YÍÇUÉÇ ÉÍÉÉÉiaÓÉÉ áBÉaaÉíÓaaÉ ÉíOÍ?Ç ÉÇUQNaÉBaaÓÉ YÓÉ í É [13] [14]Í ÓíB áÇaUÁ
 .áÓÉÉÉ

ÉÇU i áú á 12 i lá ÉØ jáÓÉÉ IOQ aa ÉaÍ í YÉØíÓÉÍ ØÇaa aa ÇPØÉ ÉiaBÉ ÉÇÉ ÓaÍ aíaÓÉaÉÉ
 ; ÉiaBÉ ÉÇÉÉ ÍNÇÉ ÓÓí a aa?Ç :áíØí ÉÇaaU Çáaa ;í BÉBaaÉ ÇaaÓÉQNI ÓNÜÉBaa æ á 120 i áú áaÓÉÉ
 PÑØ æ áBÓÉ áU ÉÍ É PÑØaÍ áÉ æ .ÉiaBÉ ÉÇÉÉ aaÉ ÉOí aaÉ ÉÍÍÉ ÉÇÍ É áÓNÜÉ Ua jááÓÉ ÉíÇÉ ÓUÉ
 .ÉíÓaaÉ ÉíOÍ?Ç ÉÇUQNaÉaÍá É

ÉiaBÉ ÉÇÉÉ NQNHÓ ;í Øa ÍÇaÍ?Ç ÉÇÍ æ ÉÇaÓíBaa ÍÍÍÉaÍÁ aa æ jáBÓÉ áU ÉÍ É ÓÍ í ÇáY
 ÉNÍÍ?Ç ada aa Baa áU í É .ÉÍæNØ?Ç ada í YÉNaÓa ÉNÜÉ ÉHÑØ Ua ÉaÇÉa á?UÁ ÉNaBaaÉ ÉHÑØÉ ÇaaUÉÇ ;ÉaaÓaaÉ
 .ÉUí Çaa ÉUÑÓÍ ÁÉí ØUÉ

aÉÇÉÉ ÉíááÉ ÉiaÓÉÉ ÉaUaÇ i áú Í ÓíBaaÉ aa ÉNaÓaaÉ ÉíÓaaÉ ÉíOÍ?Ç ÉÇUQNa Ua aÍá É ÉHÑØ
 ØíÇÉ ÉaaÓÉÉQNIÉ .aaÓaÍáÉÉÍÉ Baa ÉaaÓaaÉ ÉiaBÉ ÉÇÉa í BÉBaaÉ BaaÓaÉiaBÉ ÉQNIÉÇa ÇaUaaØÉ
 í Yaaá Éa ÇaÓNÜ aÉí ÁÉÉ .áÇÉÓÉ æ aÉBaa UØÉa NíUÉÉa í Íaa NíUÉØíÇæ æ jáBaaÉ í YÍ ÁÉÇÉ PÉÇa ÍÇaÍ?Ç
 .ÉÍæNØ?Ç ada aa ÉÉÉ AÓíÉ

;BíÉÉ IOQ ;áÓÉÉ ;í Øa ÍÇaÍ?Ç ;aÓíBaa ;ÉíÓaaÉ ÉíOÍ?Ç ;jáÓÉÉ IOQ ; ÉiaBÉ ÉÇÉÉ : ÉÍÇÉa ÉÇaaB
 .BaaÓÉ

Notations

Symboles

$\{ \}$	Vecteur
$\{ \}^t$	Vecteur transposé
$[]$	Matrice
$[]^t$	Matrice transposée
$[]^{-1}$	Matrice inverse
$\dim()$	Dimension d'un espace vectoriel
\exists	Il existe
\forall	Quel que soit
O_r	Ordre r
\approx	Egalité approchée
O_r	
\approx	Egalité limitée à l'ordre r
$\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée partielle par rapport à la variable x
$\sum_{j \neq i}$	Sommation à effectuer sur tous les éléments j aboutissant à un nœud i
δ	Variation infinitésimale

Notations

$[A]$	Matrice d'équilibre (Nxb) d'un système dans son état de référence.
$[A]$	Matrice échelonnée d'une matrice $[A]$
$[A / I]$	Matrice augmentée d'une matrice $[A]$
A_{bar}	Section des barres
A_{cab}	Section des câbles
b	Nombre d'éléments d'un système
$[B]$	Matrice de compatibilité (bxN) d'un système dans son état de référence
B_a	Valeur de la base d'autocontrainte correspondante à l'élément a
${}^t_0 B_L$	Matrice des fonctions d'interpolation des déplacements linéaires
${}^t_0 B_{NL}$	Matrice des fonctions d'interpolation des déplacements non linéaires
${}^\tau C_{ijkl}$	Composantes de la matrice des propriétés constitutives du matériau ${}^\tau C$
${}^t C$	Matrice des propriétés constitutives du matériau
$\{\delta\}$	Vecteur (à N composantes) des mécanismes d'un système
$\delta^\tau \mathcal{R}$	Variation du travail des actions extérieures à l'instant τ
$\delta {}^\tau \varepsilon_{ij}$	Variation infinitésimale de ${}^\tau \varepsilon_{ij}$
Δl_j	Variation de longueur de l'élément j par rapport à son état de référence
Δl_j^0	Variation de longueur de l'élément j de son état libre à son état de référence
e_j	Coefficient de variation de longueur de l'élément j par rapport à sa longueur de référence
e_j^0	Coefficient de variation de longueur de l'élément j entre son état libre et son état de référence.

$\{e\}$	Vecteur (à b composantes) des coefficients de variation de longueur des éléments depuis leur état de référence
$\{e^0\}$	Vecteur (à b composantes) des coefficients de variation de longueur de l'état libre à l'état de référence.
E_j	Module d'Young de l'élément j
${}^\tau_0 e_{ij}$	Partie linéaire de ${}^\tau_0 \varepsilon_{ij}$
${}^\tau_t e_{ij}$	Partie linéaire de ${}^\tau_t \varepsilon_{ij}$ entre les deux instants t et τ
${}^\tau_t e_{xx}$	Partie linéaire de la déformation axiale de la barre entre les deux instants t et τ
${}^\tau_t \varepsilon_{ij}$	Composante (ij) du tenseur de déformation de Green-Lagrange observé à l'instant τ Par rapport à l'instant de référence t
${}^\tau_0 \varepsilon_{ij}$	Composante cartésienne (ij) du tenseur de déformation totale de Green-Lagrange observé à l'instant τ par rapport à l'instant de référence t = 0
F	Charge nodale verticale appliquée aux nœuds libres du dôme câble
f_{ix}	Composantes sur l'axe X des forces extérieures appliquées au nœud i
$\{f\}$	Vecteur (à N composantes) des forces extérieures appliquées aux nœuds
k	Nombre de degrés de liaison imposé aux nœuds d'un système
k_{ij}	Composante ij de la matrice de rigidité de la structure
k_{ijB}	Composante ij de la matrice $[k_{LB}]$
$[K]$	Matrice de rigidité (NxN) d'un système
$\begin{bmatrix} {}^t_0 K_L \end{bmatrix}$	Matrice linéaire en ${}^\tau_t u$ de la matrice de rigidité tangente
$\begin{bmatrix} {}^t_0 K_{NL} \end{bmatrix}$	Matrice non linéaire en ${}^\tau_t u$ de la matrice de rigidité tangente
${}^t_0 K_{LB}$	Matrice de rigidité des déplacements initiaux
${}^t_0 K_{NL}$	Matrice de rigidité géométrique (ou de contraintes initiales)
${}^t_0 K_{LA}$	Matrice de rigidité linéaire classique
$\begin{bmatrix} {}^t_0 K \end{bmatrix}$	Matrice de rigidité tangente de la structure
$[k_{LB}]$	Sous matrice de ${}^t_0 K_{LB}$
$[k_L]$	Sous matrice de $\begin{bmatrix} {}^t_0 K_L \end{bmatrix}$
$[k_{LA}]$	Sous matrice de ${}^t_0 K_{LA}$
$\text{Ker } \mathcal{A}$	Sous-espace vectoriel noyau de $[\mathcal{A}]$
l_j^{lib}	Longueur libre ou de fabrication d'un élément j
l_j^0	Longueur d'un élément j d'un système dans son état de référence
l_j	Longueur actuelle d'un élément j d'un système dans son état de référence
l_a	Longueur de l'élément a
l_b	Longueur de l'élément « barre »
l_c	Longueur de l'élément « câble »
m	Nombre de mécanismes indépendants d'un système
n	Nombre de nœuds d'un système
N	Nombre de degrés de liberté d'un système, ou effort normal
q_j	Coefficient de densité de force de l'élément j
q_j^0	Coefficient d'autocontrainte de l'élément j
$\{q^0\}$	Vecteur (à b composantes) des coefficients d'autocontraintes d'un système
q_{ax}	Valeur de la précontrainte initiale dans l'élément a suivant une projection sur l'axe X.
$r_{\mathcal{A}}$	Rang de la matrice \mathcal{A}
$\{R\}$	Vecteur (à N composantes) des forces résiduelles.

$\{\tau R\}$	Vecteur des efforts extérieurs.
s	Nombre d'états d'autocontrainte indépendants d'un système
S_{ij}	Composante cartésienne du tenseur de contrainte de Piola-Kirchof
${}^{\tau}S_{ij}$	Composante cartésienne(ij) du tenseur de contrainte de Piola-Kirchof observé à τ par rapport à l'instant de référence t
t	Variable représentant le temps
T_j	Effort normal de compression ou de traction dans l'élément j
T_j^0	Effort normal dans l'élément j d'un système dans son état de référence
U	Energie potentielle d'un système
u, v et w	Composantes de déplacement nodal
$\{u_{ih}\}$	Vecteur unitaire de l'élément j reliant le nœud i au nœud h
${}^{\tau}u_{i,j}$	La dérivée suivant j du déplacement suivant i observé à l'instant τ par rapport à l'instant de référence t
${}^{\tau}\eta_{ij}$	Partie non linéaire de ${}^{\tau}\varepsilon_{ij}$
${}^{\tau}\eta_{xx}$	Partie non linéaire de la déformation axiale de la barre entre les deux instants t et τ
x_i	Coordonnées du nœud i sur l'axe des X
$\{x\}$	Vecteur à n composantes des coordonnées des nœuds d'un système sur l'axe des X
X_{ih}	Différence entre les coordonnées des nœuds i et h sur l'axe des X ou composante de l'élément correspondant ($X_{ih} = x_i - x_h$)
W_j	Energie de déformation d'un élément j de son état de référence à son état déformée
W	Energie de déformation d'un système de son état de référence à son état déformée
${}^0\Omega$	Configuration de la structure à l'instant initial
${}^{t+dt}\Omega$	Configuration de la structure à l'instant $\tau = t + dt$
${}^t\Omega$	Configuration de la structure à l'instant t .

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Notre milieu du siècle a vu se dessiner les contours d'un changement progressif mais néanmoins radical. Des besoins nouveaux apparaissent : grandes surfaces couvertes et aires de stockage provisoires ou lieux d'expositions et de manifestations culturelles et sportives, désir de mobilité de ces structures imposent une édification ainsi qu'un démontage rapides et devant donc allier légèreté avec facilité de mise en place et résistance. A cela s'ajoutent la recherche d'une grande souplesse d'utilisation des bâtiments permettant agrandissements ou autres modifications ainsi que la nécessité de réduire les coûts de construction.

Parallèlement à ces nouveaux besoins, on assiste également à l'émergence de nouvelles approches de la conception architecturale et même de la finalité d'un ouvrage. Désirant rompre avec une orientation vers des édifices à géométrie massive ou parfois agressive, certains estiment qu'il est grand temps de se retourner à nouveau vers la nature et les formes souples et agréables qu'elle offre dont l'équilibre structurel répond souvent à des critères d'économie d'effort et de matière. Pour d'autre, il est nécessaire de redéfinir la notion de durée de vie d'un ouvrage à la lumière de son utilisation présente ou à venir et par la même offrir à leurs successeurs la possibilité de la modifier ou de la supprimer à moindres frais.

L'histoire nous apprend ainsi que les constructions à base de réseaux de câbles tendus ont joué un rôle majeur. Citons immédiatement, et à juste titre, la couverture des installations des jeux Olympiques de Munich réalisée dans les années 70. Cet ouvrage, de par son importance et la nature des innovations apportées, a servi de catalyseur en démontrant de façon spectaculaire la faisabilité de tels projets et a inscrit dans l'imaginaire collectif les Structures Légères en tant que perspective d'avenir.

Il n'est plus nécessaire d'insister sur le succès grandissant que connaissent les structures légères depuis ces dernières années. Cette nouvelle composante du paysage architectural se trouve en effet en étroite correspondance avec les besoins et les attentes des concepteurs. Toutefois, leur créativité dans ce domaine est plus que jamais tributaire des avancés technologiques ainsi que des procédés de réalisation et de calcul mis à la leur disposition. C'est dans une optique d'extension de ces moyens d'expression que se situent les travaux envisagés dans ce mémoire.

Les dômes câbles est l'une des composantes principales des structures légères, la conception de ce type de structure comporte une première étape appelée recherche de forme. Elle définit la géométrie du système qui permet la mise en place d'une autocontrainte. N.VASSART [32] [33] a fourni des méthodes permettant de réaliser cette recherche de façon multi paramétrée. Par la suite pour ce qui est de l'étude du comportement, Kh KEBICHE [13] [14] a proposé des méthodes pour décrire le comportement mécanique d'une classe particulière de ces systèmes, à savoir, les systèmes de tenségrité. D'autres personnes y travaillé en se basant sur des études expérimentales et théoriques : René MOTRO [23] [24] en France fut le percuteur ; HANAORV[11] en Israël, ou KANNO [27] [36] au Japon qui a pu réaliser dernièrement des études dynamiques.

Le but principal de cette thèse est d'étudier numériquement le comportement mécanique des dômes câbles à base de tenségrité en non linéarité géométrique, ce travail prend appui principalement sur les recherches de PELLEGRINO S. et CALLADINE C.R appliquées par N.VASSAT [32] [33] sur les systèmes réticulés autocontraints pour la recherche de forme, et celles

de Kh. KEBICHE [13] [14] qui décrivent le comportement en non linéarité géométrique des structures réticulées spatiales en état de tenségrité.

Les objectifs de ce travail consistent à :

- Faire un aperçu général sur l'historique des toits de câbles, et considérations principales de conception et de construction des dômes câbles;
- illustrer l'originalité de la recherche par une revue générale de la littérature des travaux entrepris sur les études de dômes câbles ;
- exposer des méthodes de calculs pour l'étape de la recherche de forme, avec présentation d'une méthode d'analyse en non linéarité géométrique des structures de tenségrité;
- concevoir des structures de dômes câbles à partir des modules simples, jusqu'aux structures complexes, et identifier les problèmes liés à la conception, pour proposer par la suite, des solutions pour y faire face ;
- contribuer à la détermination des mécanismes et à la stabilisation de ces structures par le principe d'autocontrainte;
- approfondir la nécessité d'analyse du comportement mécanique de ce type de structures flexibles en considération de l'hypothèse de la non linéarité géométrique ; pour les différents dômes conçus, avec une étude paramétrée incluant l'influence de la précontrainte initiale dans les câbles ; de la variation de configuration ; de la portée et de la variation de la section des barres et des câbles ;
- contribuer au développement des systèmes structuraux des dômes câbles ;
- approfondir la faisabilité d'appliquer le concept de tenségrité à la structure des dômes câbles, et aux systèmes structuraux de couverture des espaces élancés.

Jusqu'à présent, la recherche et les applications en génie civil dans l'étude de comportement mécanique de ce type de structures sont focalisées sur les aspects théoriques de ces structures sous des variétés de conditions, ces études restent toujours loin d'être généralisées et à la portée des ingénieurs du domaine.

Les conséquences directes de notre contribution sont donc : de concevoir des dômes proches de la réalité avec l'analyse du comportement mécanique, pour se rapprocher aux cas pratiques, et de donner un appui au porté des concepteurs des dômes câbles.

A cet effet, nous associons les recherches récentes dans les domaines tels que l'ingénierie des structures, l'architecture innovante, et les mathématiques.

Ce travail se subdivise en trois parties dont le contenu est le suivant :

Première partie : Etude bibliographique sur les dômes câbles : le premier chapitre trace par ces notions une vision générale au lecteur sur l'originalité de l'idée des dômes câbles et le principe de conception. Le deuxième illustre l'originalité de la recherche, il souligne par une revue générale de la littérature des travaux entrepris par la communauté scientifique sur les structures de dômes câbles.

Deuxième partie : Méthodes de calcul des dômes câbles : Dans le premier chapitre nous allons décrire le principe de calcul des méthodes de recherche de forme, commençant par les méthodes les plus connues : méthode des densités de force en premier lieu, méthode de relaxation dynamique, et la méthode à énergie potentielle minimale, ce travail sera suivi par les avantages et inconvénients de chaque méthode. Le point sera marqué dans ce chapitre sur la méthode adoptée pour les structures réticulées autocontraintes. Cette méthode sera comparée à celle proposée dans cette thèse.

Le deuxième chapitre sera consacré aux méthodes d'analyse en non linéarité géométrique. Une méthode développée dans [13] [14] pour les structures réticulées en état de tensegrité sera détaillée donc ici, pour son adaptation dans l'étude de comportement des dômes câbles.

Troisième partie : Résultats numériques : Il s'agit de concevoir d'abord des structures de dômes câbles stables, et de les solliciter par la suite en chargement statique pour étudier numériquement leur comportement mécanique. Les structures conçues se présentent comme suit :

- module plan à quatre câbles et une barre
- module à huit câbles et une barre
- dôme à seize câbles et quatre barres
- dôme à vingt câbles et cinq barres
- dôme à quarante deux câbles et douze barres

Dans la première phase on étudie la conception, la détermination des mécanismes, et la stabilisation par autocontrainte des dômes conçus. Et en deuxième lieu une étude paramétrée de comportement en non linéarité géométrique est faite. Les résultats obtenus sont illustrés et commentés par la suite.

Première partie :

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES DOMES CABLES

Première partie :

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES DOMES CABLES

1. Introduction :

Dans le premier chapitre nous allons exposer un brève aperçu sur l'histoire de développement des toits de câbles, jusqu'au moment où l'humanité a connue l'invention des systèmes de toits en dômes câbles. A travers un siècle ; et sur un ensemble des œuvres remarquables ; le point sera marqué sur les personnes ayant apportés une contribution importante sur les aspects conceptuels et architecturaux.

Par la suite ; nous allons énoncé quelques principes de conception des dômes câbles ; commençant par des notions sur l'élément câble, les différentes configurations architecturales de base, la définition du principe de tensegrité dans les dômes câbles, stabilisation des mécanismes par les états d'autocontrainte, et terminant par une étude de cas sur le dôme de la Georgia à Atlanta et les avantages du système des dômes.

Le premier chapitre trace par ces notions une vision générale au lecteur sur l'originalité de l'idée des dômes câbles et le principe de conception.

Le deuxième chapitre est consacré à une revue générale sur les recherches récentes effectuées sur les dômes câbles, en insistant ici sur le développement qu'a connu ce type de structure durant les cinquante années précédentes en matière de conception, systèmes structuraux et méthodes de calculs.

La première partie va donner au lecteur une base historique, théorique et scientifique sur le concept des dômes câbles.

CHAPITRE 1 :

GENERALITES SUR L'HISTORIQUE ET LA CONCEPTION DES DOMES CABLES

2. Définition du terme « Dôme câble »

Le dôme en général: est une surface de révolution engendrée par une courbe méridienne quelconque tournant autour d'un axe vertical [16]. Les sections horizontales sont des anneaux circulaires et le dôme repose sur ses appuis par une ceinture également circulaire.

Le terme du « Dôme câble » signifie un toit de forme arquée dans toutes les directions, et dont le câble constitue l'élément de base de sa conception, ils existent plusieurs types de dômes suivant le système structural, le toit suspendu ou non, la portée libre, la forme de courbure et le matériau de couverture, et la flèche au centre. En ce qui concerne les dômes câbles à base de tenségrité ; et pour un ordre chronologique ; se référer au point 6.

Et pour situer les dômes câbles dans la classe générale des toits de câbles, il est important ici de citer la recherche faite par Mollaert M [22] sur les différentes formes possibles du toit de câbles basé sur plusieurs systèmes architecturaux, il a insisté à travers les exemples cités et les principales œuvres qu'a connus l'humanité, sur le mode des supports de charges et la forme de couverture.

Dans ce chapitre nous allons suivre le développement des principaux systèmes de couverture des toits de câbles, et on va insister par la suite sur les dômes de câbles basés sur le principe de tenségrité.

3. Historique

Les dômes câbles appartiennent à la classe des toits de câbles, ils ont connus une histoire de développement qui date d'un siècle environ, avant cette période ces œuvres restent toujours rares, isolés, et de moindre importance d'amélioration à l'avenir.

Les premières structures considérées comme vrais toits de câble [31] sont les quatre pavillons construits par l'ingénieur RUSSE V.G. Shookhov à une exposition dans Nizjny-Novgorod en 1896.

Pendant les années 1930 un petit nombre de structures de toits de dimensions modérées soit construit en U.S.A. et Europe, mais avec aucune importance majeure.

Un grand pas dans le développement de toits suspendus est entré dans les années 1950 quand Matthew Nowicki a conçu une arène à Raleigh, Caroline du Nord, en USA. Tristement, Nowicki est mort cette même année dans un accident, mais son travail a continué à travers l'architecte William Henry Deitrick et l'ingénieur des travaux publics Fred Severud, et en 1953 l'arène a été complétée.

Sur une visite d'échange à l'U.S.A. en 1950 un étudiant allemand dans le domaine d'architecture, nommé Frei Otto, a marqué un pas en avant dans la conception avec un montant minimal pour la construction de l'Arène dans le bureau de New York de Fred Severud.

Après la remise des diplômes en 1952 Otto a commencé une enquête systématique de toits suspendus. L'enquête a été présentée dans la thèse doctorale (Le Toit Suspendu) qui était la première documentation complète sur le sujet.

La thèse a suscité l'attention de Peter Stromeyer de la Compagnie Stromeyer, un des plus grands fabricants de tentes dans le monde. Stromeyer a contacté Otto et ont commencé une coopération.

En 1957 Otto a formé le Centre de Développement pour la construction légère à Berlin pour avancer dans la recherche au sujet de l'architecture extensible. En 1964 il a incorporé le centre dans l'Institut des Structures lumineuses de surface à l'Université de Stuttgart. Un travail massif de recherche a été entrepris dans les deux instituts pendant 1957–1965, et Otto a publié dans les Structures Extensibles deux volumes.

Frei Otto est considéré par beaucoup de chercheurs comme le responsable du développement moderne des architectures extensibles. Il a été impliqué dans la construction de beaucoup de structures extensibles. Parmi celles-ci : Le pavillon allemand à la foire du Monde à Montréal en 1967.

Une autre structure novatrice de ce temps était le grand pavillon des États-Unis à La foire du monde dans Osaka 1970, Cette structure a été conçue par David Geiger.

Suivre le succès du filet de câbles à Montréal, Frei Otto a produit un très grand développement au niveau de la conception, à Montréal, il a conçu le Stade Olympique à Munich 1972.

Après le dôme d'Osaka, plusieurs dômes ont été construits à travers le monde, parce qu'ils ont fourni l'économie et la meilleure alternative pour couvrir de grandes surfaces.

Cependant, plusieurs d'eux ont dégonflé suite aux charges de la neige lourdes ou échec du dégonflement.

Pour vaincre les problèmes du dégonflement, David Geiger a inventé une autre structure en 1986, le dôme câble. Le concept du dôme câble a été inspiré par le principe de tenségrité par Kenneth Snelson et Richard Buckminster Fuller. Les premiers deux dômes câbles ont été construits pour les Jeux Olympiques de Séoul en 1988. Le plus tardif et plus grand, c'est le Dôme de Géorgie, qui a été construit à Atlanta U.S.A., en 1994.

Dans l'année 2000, l'Expérience du Millénaire à Greenwich, London, près du méridien de Greenwich. Cette exposition a été tenue à l'intérieur du plus grand dôme du monde. Son diamètre est 364 m et sa hauteur est 50 m.

4. L'élément câble et système de couverture des toits de câbles

Le câble est un élément linéique obtenu par tréfilage de fil machine en acier martin au carbone après patentage [18]. L'ensemble câble élémentaire est appelé toron, il est composé de fils de diamètre 0,2 à 5,5 mm. Les valeurs du module d'élasticité des câbles toronnés dépendent de deux paramètres : le module d'élasticité des fils constitutifs et l'allongement par serrage des fils les uns par rapport aux autres.

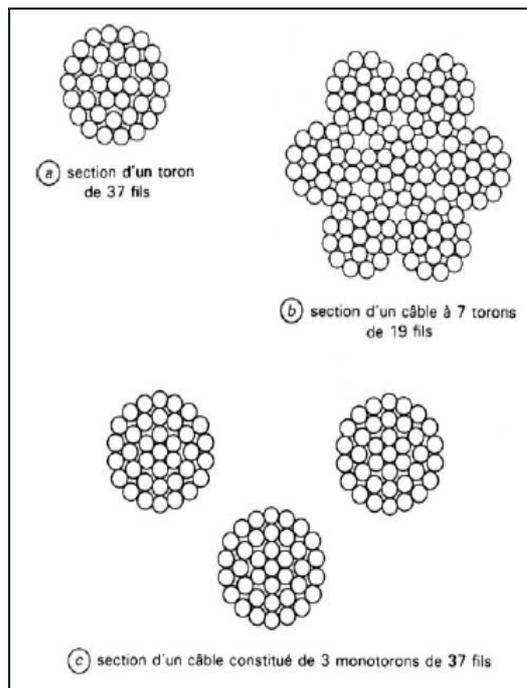


Fig. 4-1: Torons et câbles : exemples

Une étude complète sur les structures à câbles : principe et analyse du comportement, et technologie des composants d'assemblage est citée dans la référence [18].

Concernant la couverture, le système de panneaux est très économique pour la couverture des toits [31], parce qu'il offre la lumière, et n'impose pas de poids supplémentaire sur la structure du câble. Les panneaux de fibre de bois, l'aluminium et plastique sont appropriés. Le toit peut être réalisé aussi en matériaux composites, ils sont souvent plus forts que l'acier, en cite à titre d'exemple le tissu de téflon en fibre de verre tissé, l'épaisseur de la couche n'est que 0,85 mm.

Pour le Stade Olympique à Munich, un système avec les panneaux du plastique translucides (Plexiglas⁷), avec une épaisseur de 4 mm et dimension de 2.90 m × 2.90 m a été utilisé. Les panneaux ont été attachés au filet du câble secondaire avec un dispositif qui absorbe des rapports flexibles, et évite la fissuration des panneaux sous les mouvements du toit. Les joints entre les panneaux ont été scellés avec les profils du néoprène continus.

5. Les configurations de base des dômes

Le dôme est un système structurel qui consiste en une ou plusieurs couches d'éléments qui sont arqués dans toutes les directions [2]. La surface d'un dôme peut être une partie d'une surface seule tel qu'une sphère ou un parabole, ou elle peut être constituée d'une composition de surfaces différentes. Quelques-uns ont utilisé communément les configurations du dôme d'une seule couche de base (voir Figure 5-1).

Une forme modifiée d'un dôme à côtes est obtenue par composition des panneaux quadrilatères du dôme. Le résultat est une configuration du dôme connu sous le nom de dôme Schwedler (après le dix-neuvième siècle l'ingénieur J. ALLEMAND W. Schwedler a construit beaucoup de dômes de ce genre). Un exemple simple d'un dôme Schwedler est montré dans la

Fig. 5-1c. Un autre exemple est montré dans Fig. 5-1d. Cette configuration de dôme implique aussi l'arrangement pour éviter de bonder des éléments à la partie supérieure du dôme.

Un exemple d'un dôme de la lame est montré dans Fig. 5-1e. Un dôme de la lame a un modèle diagonal avec plus de bagues. Un exemple d'un dôme de la lame égalisé avec les bagues est montré dans Fig. 5-1f. Les configurations du dôme montrées dans les Figures 5-1g et 5-1h sont deux exemples d'une famille de dômes connus sous le nom de dôme diamatic. Le dôme montré dans la Fig. 5-1g est un exemple d'une forme du dôme diamatic de base qui est constitué en secteurs triangulés. Le modèle du dôme diamatic de la Fig. 5-1h est obtenu d'une version plus dense du dôme de la Fig. 5-1g en enlevant chaque autre ligne d'éléments dans une manière semblable à celle montrée dans Fig. 5-1c.

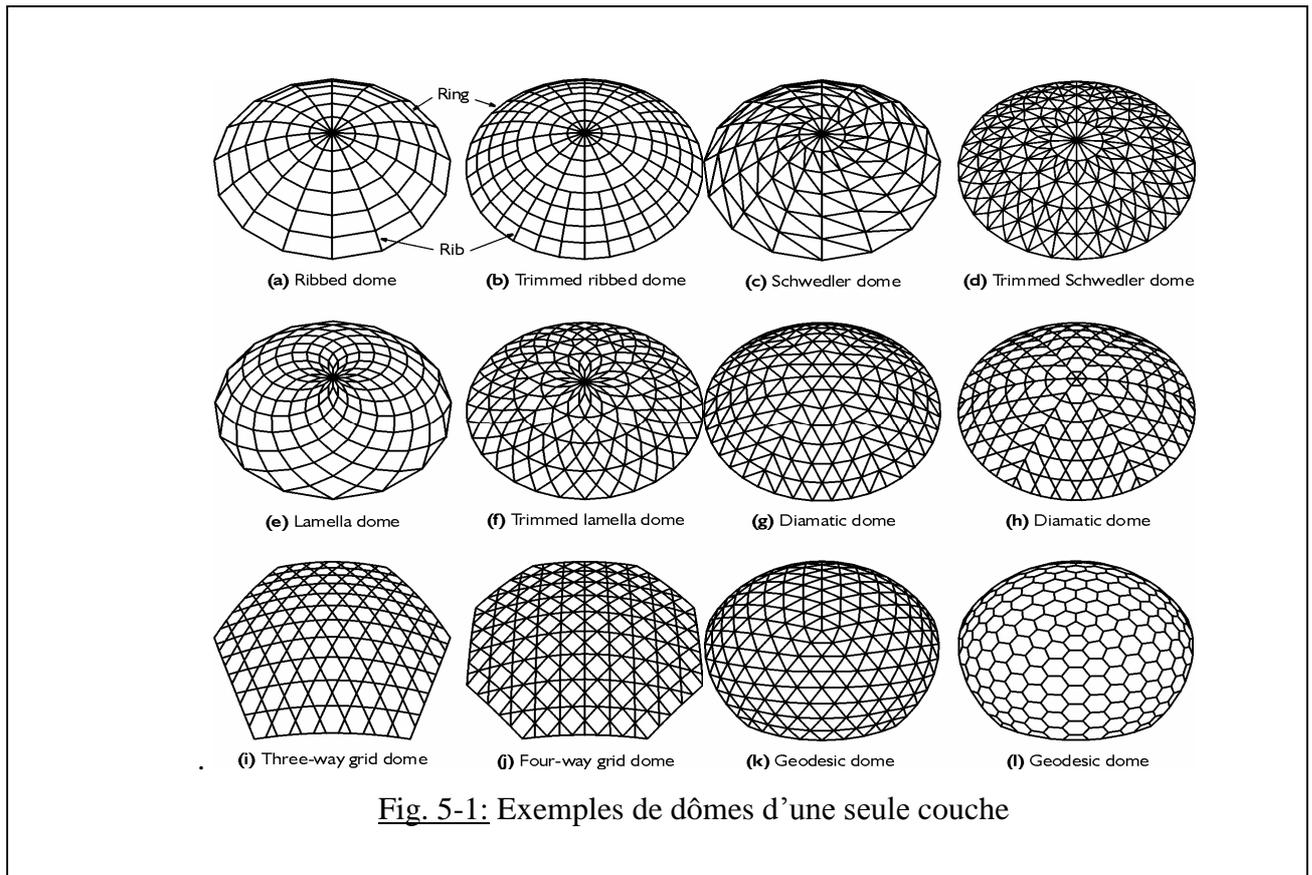


Fig. 5-1: Exemples de dômes d'une seule couche

Les dômes montrés dans les Figures 5-1i et 5-1j représentent deux exemples de la famille de dômes d'une grille. Un dôme d'une grille est obtenu en projetant un modèle de la grille plan sur une surface courbée. Le dôme de la grille de la Fig. 5-1i est obtenu par projection d'une version plus dense du modèle de la Fig. 5-1a sur une surface sphérique. Le dôme de la grille de la Fig. 5-1j est obtenu dans une manière semblable qui utilise une version plus dense du modèle de la Fig. 5-1b. Les dômes de la grille sont normalement plutôt peu profond avec leur montée pour couvrir des proportions qui sont plus petites que les autres types de dômes. Une configuration du dôme géodésique est montrée dans Fig. 5-1k. Un dôme de ce genre est obtenu en dressant une carte des modèles sur les visages d'un polyèdre et projetant la configuration résultante sur une surface courbée. Le dôme de la Fig. 5-1k est obtenu en dressant une carte d'un modèle triangulé (20 polyèdres réguliers fait face) et projetant le résultat sur une sphère qui est concentrique. Le dôme géodésique de Fig. 5-1l est obtenu dans une manière semblable avec le modèle initial choisi tel que le résultat du dôme à une apparence du rayon de miel.

Les configurations montrées dans la Fig. 5-1 représentent le dôme du modèle de base, mais il y a beaucoup d'autres modèles des dômes qui sont obtenus comme variations des formes de base. Aussi, il y a un grand nombre constitué d'une double couche (et multicouches) modèles du dôme qui peuvent être obtenus des combinaisons des modèles de base. Inclus dans ceux-ci est le dôme de la botte qui consiste de croiser des bottes courbées.

6. Dômes câbles à base de tenségrité

Les dômes à base de tenségrité sont conçus avec la même configuration citée précédemment, sauf que les éléments qui les constituent sont disposés d'une manière particulière pour avoir la compression discontinu dans les barres et la traction continu dans les câbles, ce principe est appelé : tenségrité. Elle est en fait une séquence complexe de triangles dont la courbure est alternée couche par couche.

La tenségrité est un système spatial (une étude complète sur les structures réticulées spatiales est citée dans la référence [25]) dont la rigidité et la stabilité proviennent de son état d'autocontrainte[6]. L'équilibre est ainsi assuré par la combinaison de compression et de traction dans les éléments à rigidité unilatérale du treillis. Cette structure légère, facilement démontable, offre aux constructeurs des opportunités de modularité et de réutilisation. Pour résumer, la tenségrité est un système mécanique comportant un ensemble discontinu de composants comprimés au sein d'un continuum de composants tendus, dans un état d'auto équilibre stable [24]. Plus simplement : en reliant des barres par des câbles, sans relier directement les barres entre elles, on arrive à constituer un système rigide.

Aux vues de la littérature croissante dans le domaine durant ces dix dernières années, Les structures basées sur ce principe suscitent l'intérêt de nombreux chercheurs d'horizons hétéroclites : le génie civil, la biologie, l'aéronautique et les mathématiques. Les structures de tenségrité intéressent même les fabricants de jouets pour enfants.

La recherche en génie civil dans le domaine de la tenségrité s'est largement concentrée sur l'étude théorique de la rigidification de la structure par des états d'autocontraintes. Une des difficultés majeures de la construction réside dans la conception des assemblages réunissant uniquement des éléments comprimés ou des éléments comprimés et tendus. Dans la philosophie d'une structure légère, modulaire et réutilisable, les assemblages se doivent d'être légers et modulables.

7. La notion de stabilisation des mécanismes par les états d'autocontrainte

Les dômes câbles sont des structures sujets aux mécanismes, ils nécessitent avant application des forces extérieures ; une stabilisation par l'autocontrainte. On donne ici une définition [23] des termes techniques utilisés dans ce concept.

L'autocontrainte est définie à une constante près par la valeur des efforts internes dans chaque élément en l'absence de toute action extérieure. Ces efforts internes résultent des déformations nécessaires pour assurer l'assemblage des éléments.

Les systèmes réticulés spatiaux en état de tenségrité peuvent être le siège de mécanismes. Il n'est pas question ici des mouvements d'ensemble des solides, on suppose que les conditions aux limites interdisent de tels déplacements.

L'ordre de grandeur des déformations des composants associées aux mécanismes conduit à distinguer deux types principaux de mécanismes :

- des **mécanismes finis** pour lesquels la géométrie du système peut être modifiée sans aucune déformation pour chacun des éléments. C'est par exemple le cas d'un cadre plan comportant quatre noeuds et quatre barres dont la géométrie peut être modifiée par une action de type « cisaillement » (figure 7-1a.) ;

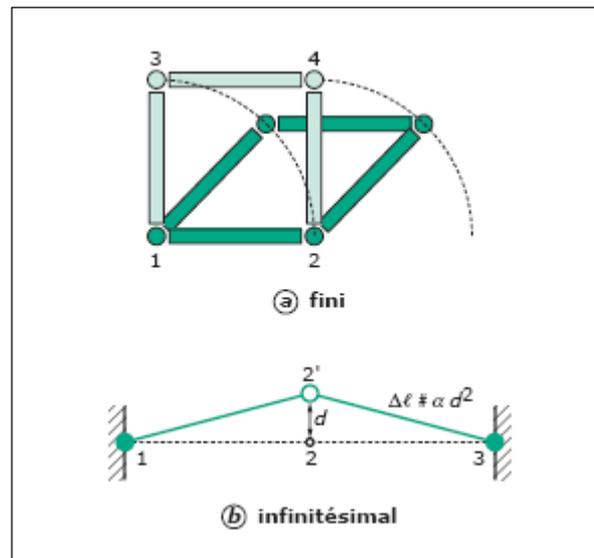


Fig. 7-1: Mécanismes

- les **mécanismes infinitésimaux** se traduisent par une modification de la géométrie d'ensemble associée à des déformations faibles (infinitésimales) des composants. (figure 7-1b.)

La notion de stabilisation correspond à un retour à la position initiale, par l'énergie acquise dans la déformation induite par le mécanisme, après annulation de la cause de son activation. C'est une application d'efforts internes dans les câbles et les barres afin de garder la géométrie stable du système sans application de forces extérieures.

8. Etude de cas : Dôme de Georgia d'Atlanta

Le dôme d'Atlanta est le plus grand du monde, mais de plus, il est constitué d'une couverture tendue et non comprimée [21]. Cette toile de tissu Teflon-fibre de verre est tendue sur une structure triangulée portée par des câbles ; elle ne pèse que 31 Kg/m^2 tout en étant capable de supporter une charge qui se chiffre en dizaines de tonnes. Le secret réside dans sa forme de tensegrité, nom donné par son inventeur Buckminster Fuller, qui a aussi inventé les dômes géodésiques.

Des piliers verticaux supportent le dôme ; ils sont maintenus en place par des câbles sous contrainte fixés au sommet et à la base de chaque poteau. Les câbles tirant dans toutes les directions avec des forces égales, forment des triangles allongés très solides. Les efforts dans le dôme sont repris par une couronne circulaire en béton le long du périmètre extérieur de 852 mètres de circonférence. Elle repose sur des patins de glissement en Teflon qui autorisent une certaine flexion de l'ensemble par grand vent pour répartir les charges au mieux. Le procédé de montage est exposé dans les articles [28] et [29].



Fig. 8-1: Dôme de Georgia (Atlanta)
Vue générale



Fig. 8-2: Dôme de Georgia (Atlanta)
Vue à l'intérieur

A titre indicatif, on peut citer les informations [3] [5] [21] suivantes :

- * Année de fabrication : 1992
- * Coût: 214 millions \$
- * Diamètre: 240 mètres
- * Hauteur = 28 étages
- * Type: Tenségrité à support en câbles
- * But: Stade sportif et salle de concerts.
- * Matériaux: Béton, Acier, Téflon renforcé
- * Surface : 37920 m².
- * Cubage de béton = 110.000 m³.
- * Masse d'acier = 8.300 tonnes.
- * Sections des câbles : - minimale : 21,08 cm²
- maximale : 267,80 cm²
- * Sections des barres : - minimale : 115 cm²
- maximale : 400 cm²
- * Résistance maximale des câbles : 16700 KN/ cm²
- * Résistance maximale des barres : 3450 KN/ cm².

9. Les avantages principaux de la conception architecturale des dômes câbles

Les dômes câbles et par leurs formes courbées offrent beaucoup d'avantages [34], on cite ici les principaux :

- Le dôme peut enfermer un grand volume de l'espace avec moins de matériaux que n'importe qu'elle autre type de structure.
- Il est modulaire, et ainsi il est facile de le reconstruire, de le transporter et de le mettre rapidement en un ensemble de pièces. Une salle géodésique de dôme (dedans Honolulu en 1957) a été construite tellement rapide pendant 22 heures, après que les pièces ont été fournies.
- Le dôme offre la possibilité pour enfermer l'espace énorme.
- Le dôme sphérique est plus résistant au vent que la plupart des autres formes des bâtiments de la même taille.
- L'énergie calorifique plus efficacement est maintenue dans les grandes structures sphériques, que dans les petits dômes.
- Les dômes, avec de petites ouvertures en haut et de grandes ouvertures dans le niveau du sol pourraient être refroidies par temps chaud, ensoleillés par effet de refroidissement de Bernoulli.

CHAPITRE 2:

RECHERCHES RECENTES SUR LES DOMES CABLES :

10. Dômes géodésique , polyédriques, ou en forme de x

Avant de d'entamer l'exposée des recherches récentes sur les dômes câbles, il est important de citer brièvement les origines de recherches dans le sujet.

La plupart des travaux et des études dans le concept de tensegrité ont été effectuées par rapport aux configurations sphériques ou polyédriques. Plusieurs auteurs ont proposé des différentes sortes des dômes.

Richard Buckminster FULLER (1895-1983), Connu pour être le père des coupoles géodésiques dont l'inspiration rejoint celle des grandes structures propres aux expositions universelles du XIX^e siècle [17], Richard Buckminster Fuller vit sa carrière consacrée quand on décide de retenir sa structure sphérique de 76 mètres de diamètre pour représenter les États-Unis à l'exposition de Montréal en 1967.

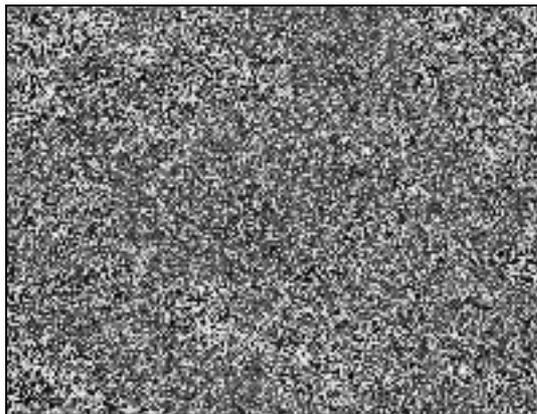


Fig. 10-1: Coupole géodésique conçue par Richard Buckminster Fuller.

Le premier dôme d'une sphère ou d'un polyèdre sphérique a été proposé par Buckminster Fuller en 1953. Selon Hanaor (1987) [11], a montré que le concept peut être appliqué relativement à petites envergures. En raison de l'absence de la triangulation, la structure pourrait à peine se tenir vers le haut, et elle perde un facteur important pour la stabilité. C'est ce détail que Kenneth Snelson a précisé qu'on doit en tenir compte pour la conception de quelques dômes.

Kenneth Snelson a inventé dans son brevet de 1965, un genre de dôme différent, employant la compression flottante. Il n'a pas été basé sur des polyèdres, mais sur le principe des tours en formes de x. Ce système a été abandonné et non employé pour des buts pratiques.

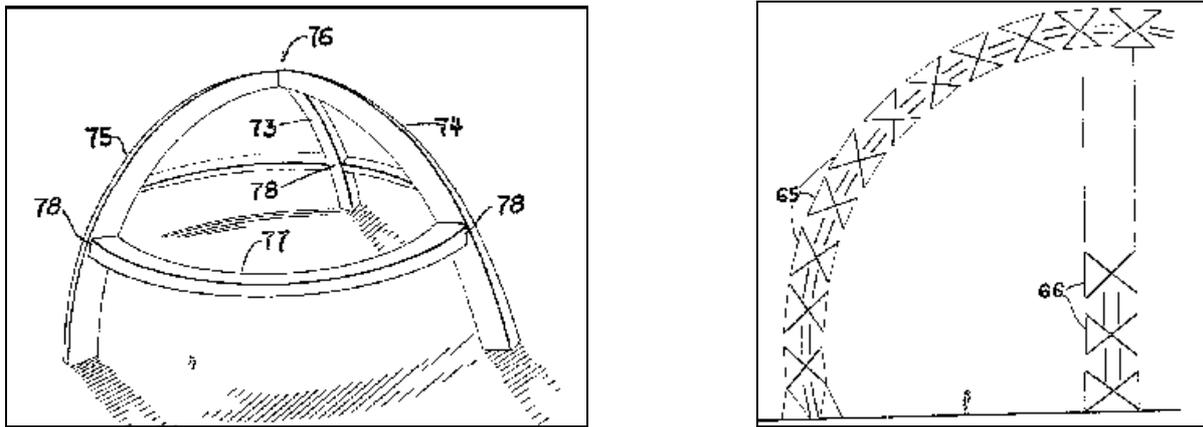


Fig. 10-2: Dôme projeté par Snelson (1965)

11. Dômes en grilles ou sous autres formes

J. Stanley Black (1972) a proposé une nouvelle configuration basée sur une forme d'une botte de tenségrité fixée à une jante périphérique [11]. L'innovation ne peut pas être considérée comme un dôme, puisque c'est une grille avec une ou plusieurs couches, mais c'était le point de départ pour les brevets de Geiger dix ans après.

Indépendamment de sa liste étendue de modèles et configurations, Anthony Pugh (1976) a également proposé des modèles intéressants, l'un d'entre eux est une application appropriée. C'était un dôme géodésique de tenségrité inspiré du breveté de Plus plein (1954), les tendons avaient été substitués par un plastique qui a pris le rôle de la tension continue.

En 1977, Oren Vilnay a établi un nouveau concept, à l'aide des plans réguliers les filets qui ont une seule couche, peuvent être utilisés pour produire une courbe de surface, donc avec une petite courbure et par conséquent, des grandes envergures.

Quelques ans après, Miodrag Nesterovic (1987) a édité le projet « Coupole intégralement tendue métallique (de Tenségrité) », un double réseau de câbles précontraints, mutuellement pavanés en tendant des morceaux. La structure était également très semblable aux dômes de câble, sauf qu'elle n'a pas été fixée à un anneau rigide en béton précontraint. Ces dômes sont qualifiés comme une fausse tenségrité, car ils n'étaient pas autos équilibrés.

En même temps, les premières grilles de tenségrité en double couche, ont été proposées par René Motro (1987). En produisant une courbure simple ou double, il est possible d'obtenir une structure de l'espace semblable à un dôme. Ces premières études ont été encore développées dans Laboratoire de Génie civil de l'Université de Montpellier, ayant pour résultat bidimensionnel plus sophistiqué. De toute façon, le comportement mécanique de ces grilles incurvées n'était pas assez satisfaisant.

12. Dômes de tenségrité et méthodes de conception et d'analyse

Il est important après l'invention de David Geiger en 1986 ; de mentionner la recherche de Robert W. Burkhardt sur ce sujet. Il a commencé à développer « Une technologie pour concevoir des dômes et des sphères de Tenségrité » (1999-2004), qui est constamment étant mis à jour. Il considère des dômes de double couche, pour obtenir la triangulation cruciale qui contribue à la stabilité des structures.



Fig. 12-1: Dôme de tensegrité en double couche
Modèle conçu et publié par Burkhardt (1999-2004).

En raison des grandes caractéristiques de déformation de ce type de structures, Gerardo Castro, M. ASCE et Matthys P., F. ASCE (1992) ont procédé à l'analyse en non linéarité géométrique du dôme de la Géorgie [10], cet article décrit la modélisation et le comportement du toit pour ce dôme de la Géorgie sous différents chargements.

Les résultats de l'analyse du comportement montrent globalement un grand changement de la force pour les noeuds supérieurs, et donc le besoin de grandes forces de retenue afin d'absorber le changement de la tension dans les câbles continus.

Les dômes de câble inventés par David Geiger représentent le type le plus avancé des structures de l'espace [31]. Pellegrino a étudié une version d'un plus grand dôme coupé vers le bas (Le schéma de la Figure 12-2). Pour ce dôme le degré d'indétermination cinématique m , c.-à-d. le nombre de mécanismes indépendants, est 13 et le degré d'indétermination statique s , c.-à-d. le nombre d'états indépendants d'autocontrainte, sont un. La structure avec les mécanismes évolués ne soit pas assez raide pour être employée en tant que vraies structures. Deux des treize mécanismes sont montrés sur le schéma de la Figure 12-4.

Il a montré que les dômes de câbles appartiennent à une classe de structures de la botte qui ne peuvent pas atteindre de configuration de l'équilibre stable sans introduire la précontrainte à quelques membres (Pellegrino, 1992).

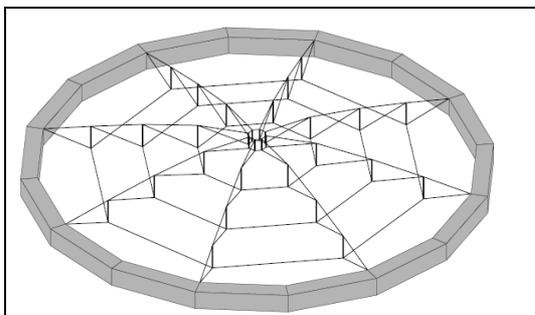


Fig. 12-2: Schéma du dôme de câble de David Geiger.

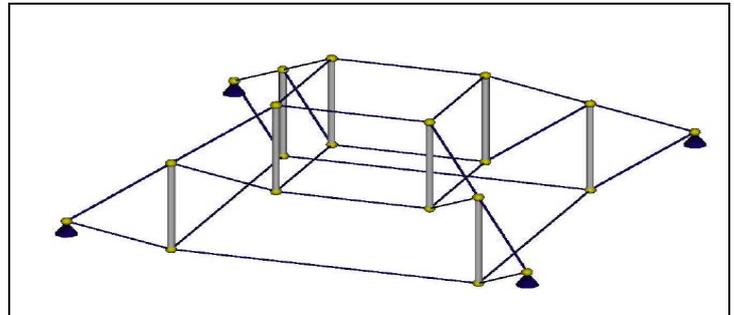


Fig. 12-3: Dôme étudié par Pellegrino

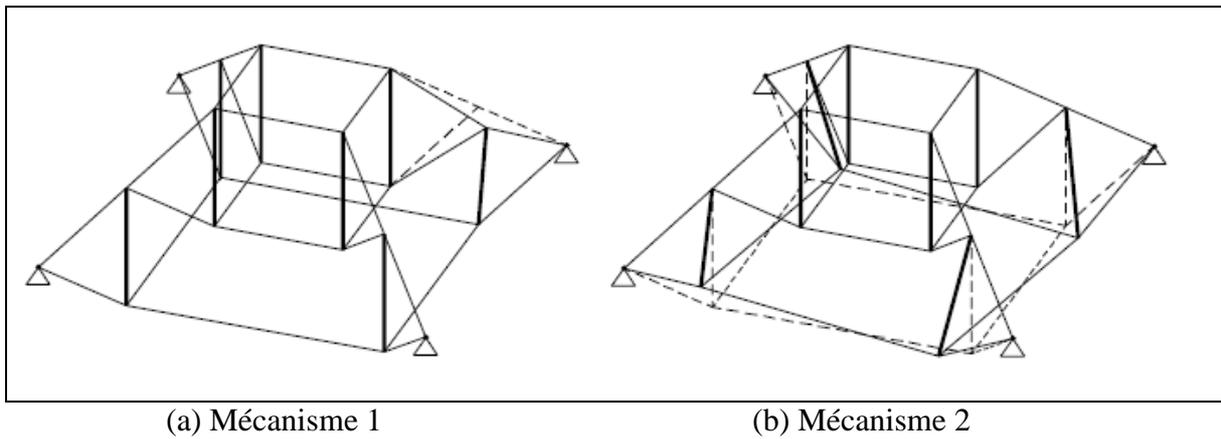


Fig. 12-4: Deux des treize mécanismes du dôme câble étudié par Pellegrino.

Des analyses en linéarité géométrique sont employées pour étudier le comportement structural statique de trois systèmes de câble [9] par D. Gasparini, M. ASCE et V. Gautam (2001). Le comportement d'un système qui a une matrice de rigidité linéaire singulière est comparé à celui d'un système comparable qui a une matrice de rigidité linéaire non singulière. Les actions considérées incluent les charges uniformes de phase mortes de précontrainte, charges, symétrique et asymétrique, et les charges verticales mobiles de phase. Il n'y a aucun comportement statique amélioré distinct lié au système qui a une matrice linéaire non singulière de rigidité. Le comportement non linéaire d'un câble figé par une poutre est également étudié. Le comportement du système plate forme figé dépend fortement d'un paramètre défini par le moment d'inertie de la poutre divisée par le facteur temps des câbles suspendus à la place de son fléchissement.

Un nouvel état spécifique d'équilibre par une procédure d'intégral de la précontrainte est présenté par X. yuan de F. et S.L. Dong (2002) [35]. Appliquant cet état spécifique, l'algorithme de l'analyse géométrique de stabilité des dômes câbles est modifié et les optimaux états de précontrainte des dômes sont également conçus. L'exposition numérique de résultats est unique pour un dôme spécifique. A travers cet article, ils donnent beaucoup d'avantages pour les recherches dans les dômes câbles.

Sous les effets dynamiques de l'action turbulente du vent, Massimiliano Lazzaria, Renato V. Vitaliani, Massimo Majowieckib et Anna V. Saettab (2002) ont traité l'étude du système de tensegrity, c.-à-d. le toit au-dessus du stade de Plata en Argentine [20], l'analyse a été faite en employant le procédé de la non linéarité géométrique. Les données expérimentales et les résultats numériques fournis par les concepteurs du toit, ont montré la fiabilité du modèle mathématique proposé.

Une approche pour la conception de la tension raide et la précontrainte des antennes en dôme est présentée par A.G. Tibert (2003) [30]. Des configurations statiquement déterminées de botte de tension pour la structure porteuse donnée ont été créées. Puis, la précontrainte des géométries du dôme est produite. Trois antennes de botte de tension avec différentes structures porteuses ont été analysées pour démontrer les avantages de l'approche. Figure 12-5.

Plusieurs méthodes numériques, applicables au problème de l'équilibre initial, peuvent être trouvées dans la littérature. La plupart de ces méthodes ne sont pas incluses dans l'aspect général [31], par exemple le logiciel ABAQUS est non familiarisé avec ces types de structures, la modélisation des éléments câbles n'est pas disponible, c'est le cas pour les programmes d'éléments finis commerciaux.

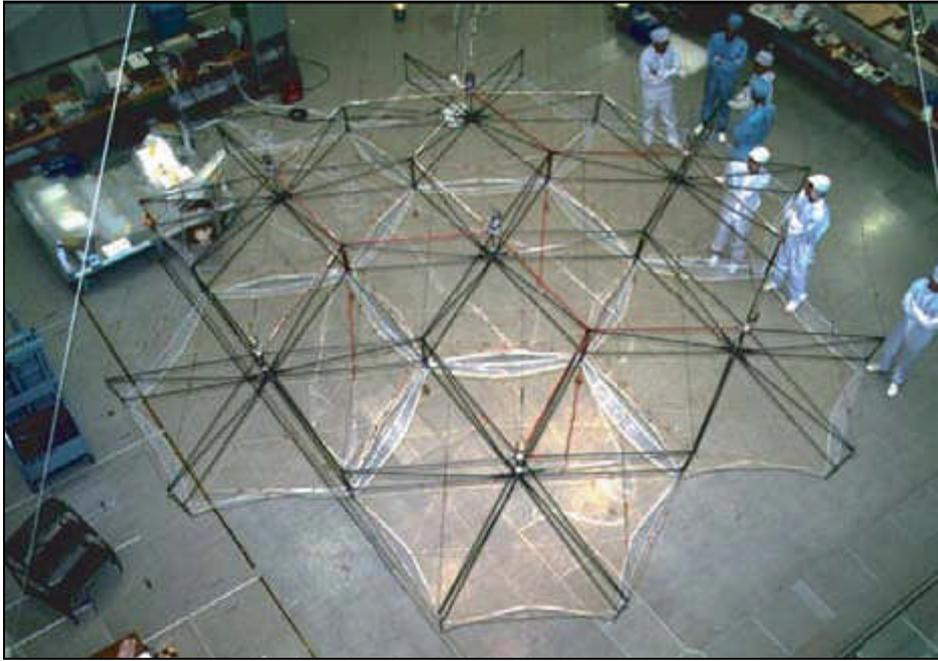


Fig. 12-5: Modèle de la structure d'antenne proposée par A.G. Tibert

Pour le forum "*Barcelona 2004 Forum of the Cultures*", qui a eu lieu à Barcelone pendant les mois d'été 2004, un dôme de tension de 20 m de portée a été conçu par J.Llorens, Ch.García-Diego & H.Pöppinghaus [8] pour abriter l'exposition provisoire « vivant dans le monde ». Voir figure 12-6.

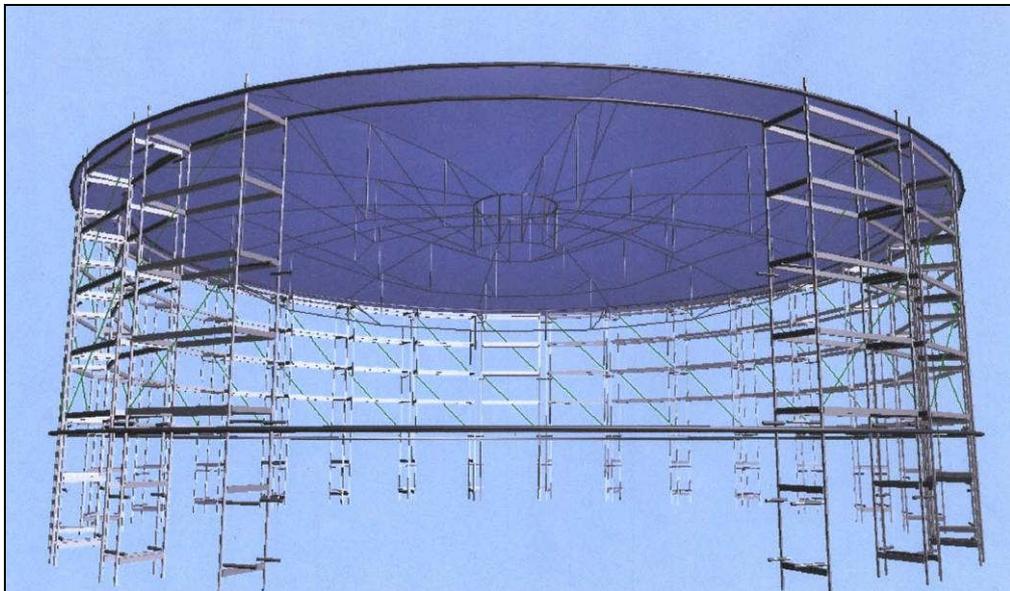


Fig. 12-6: Dôme exposé au forum de "*Barcelona 2004 Forum of the Cultures*"
Barcelona 2004.

Il a été constitué par 12 câbles radiaux de tension soulevés par des barres soutenues sur des cercles. La précontrainte générale de la structure entière et la convexité ont été fournies par les diagonales réglables, qui soulèvent les cercles et les barres.

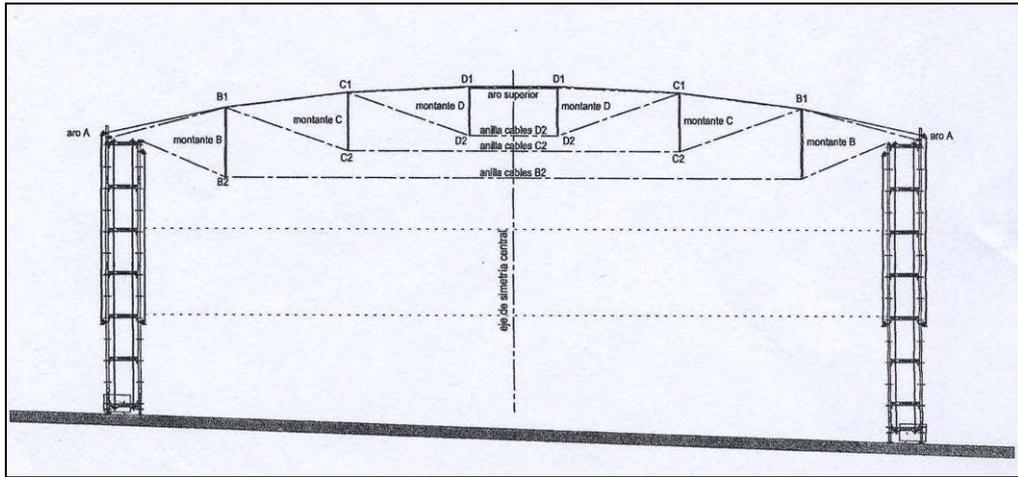


Fig. 12-7: Coupe au niveau du dôme exposé au forum de "Barcelona 2004 Forum of the Cultures", Barcelona 2004 (Portée 20 m).

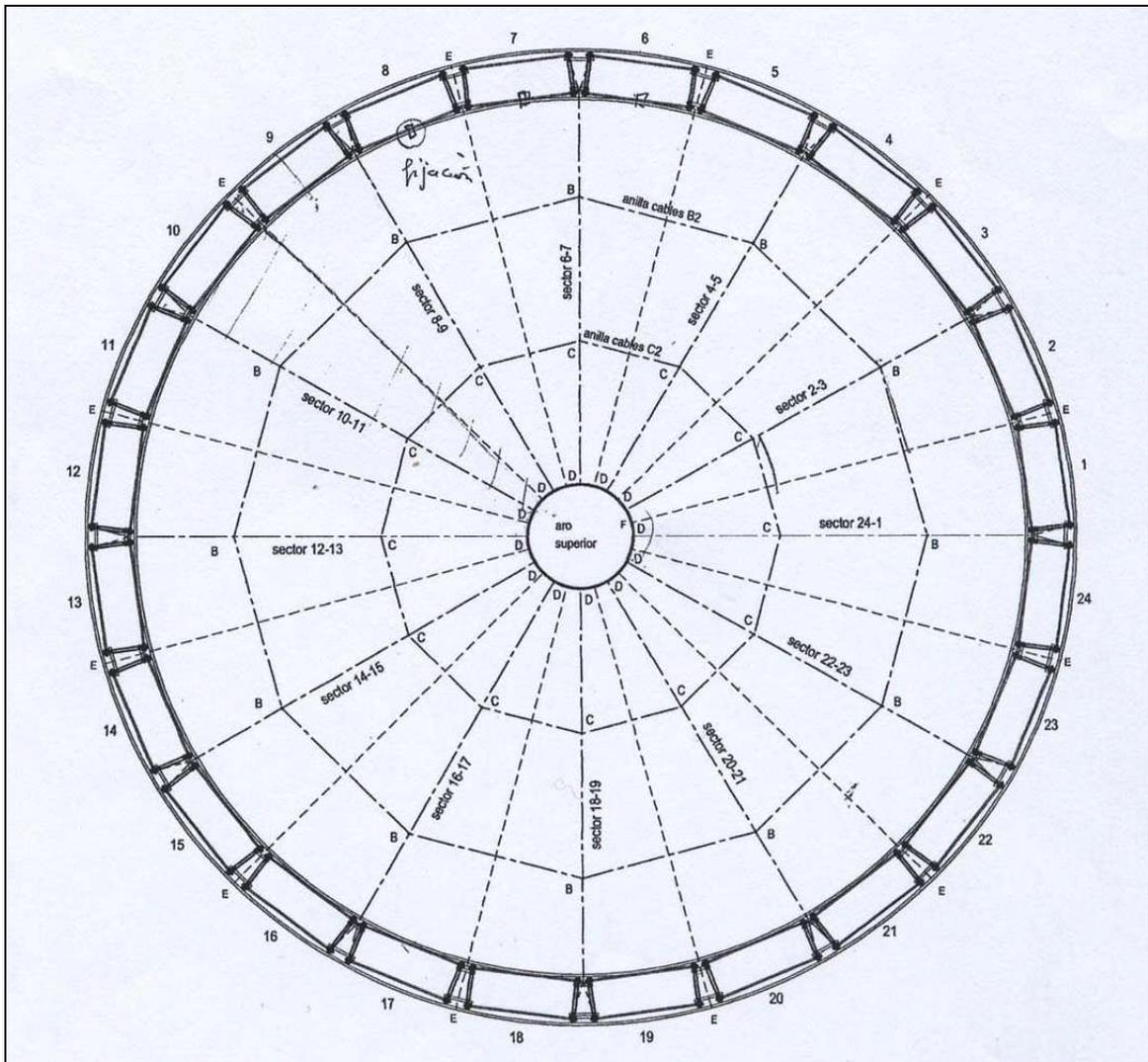


Fig. 12-8: Vue en plan du dôme exposé au forum de "Barcelona 2004 Forum of the Cultures", Barcelona 2004.



Fig. 12-9: Détail de montage du dôme exposé au forum de "Barcelona 2004 Forum of the Cultures", Barcelona 2004.

M. Ohsaki et Y. Kanno (2003) ont proposé un problème de programmation mathématique pour la recherche de forme des dômes de câble [27].

Les conditions d'optimalité du problème sont dérivées pour garantir que la solution coïncide avec la configuration de l'autocontrainte du dôme de câble avec indication des forces axiales dans les éléments. Le nombre de forces axiales indépendantes est étudié sous les contraintes géométriques aussi bien que des états d'équilibre. Un algorithme pour concevoir des dômes de câble est présenté en employant une méthode spécifique.

Les configurations d'autocontrainte sont calculées en étudiant un dôme de 6 m pour démontrer l'efficacité de l'algorithme proposé. Voir figures 12-10 et 12-11.

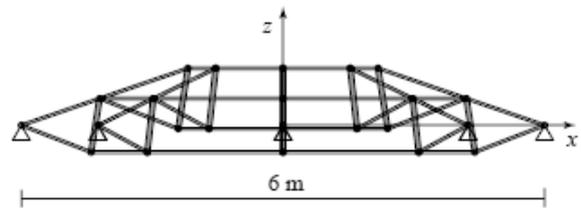
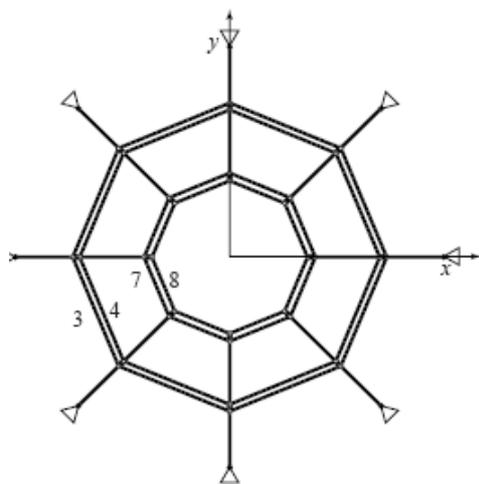
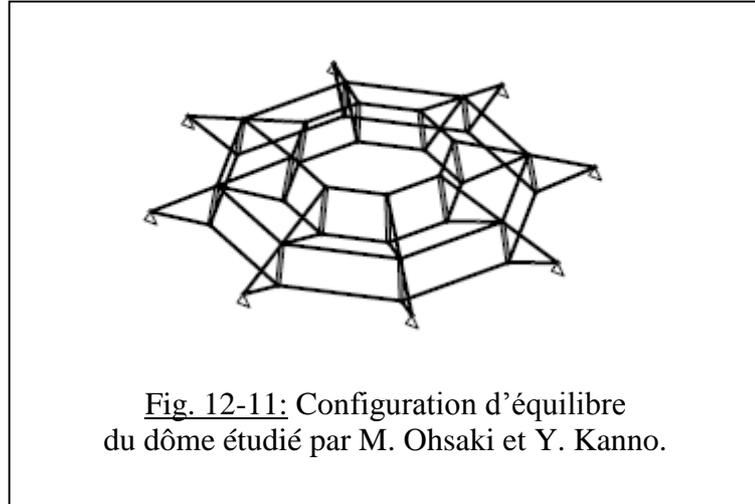


Fig. 12-10: Vue en plan et coupe au niveau du dôme étudié par M. Ohsaki et Y. Kanno.



Une étude sur le comportement structural et les types structuraux de dômes de Tensegrité a été présentée par Feng Fu (2004) [5]. La méthode d'analyse numérique de structure de Tensegrité est également discutée. Dans cette étude le premier dôme de Georgia est analysé comme prototype par un logiciel en non linéarité en utilisant la méthode numérique présentée dans l'article. Basé sur l'analyse, le comportement structural du dôme de tensegrité est récapitulé et donc, quelques méthodes de conception pour le dôme de tensegrité sont proposées. Basé sur les études ci-dessus, l'auteur propose plusieurs nouveaux types de dômes de tensegrité avec différentes grilles géométriques. Une comparaison du comportement structural entre le dôme de la Géorgie et les dômes proposés par l'auteur est également faite.

Le système de dôme suspendu est une nouvelle forme structurale qui est devenue populaire dans la construction des structures de toit de grande portée. Ces dômes sont très minces et légers, leur configuration est compliquée, et par conséquent la considération séquentielle dans la conception structurale est nécessaire. S. Kitipornchai, Wenjiang Kang, Heung-Fai Lam et F.Albermani (2004) dans un article [15] se concentrent sur ces considérations, une méthode simplifiée d'analyse, et l'évaluation de la capacité de boucle. La boucle est l'un des problèmes les plus importants pour des structures de dôme. Cet article présente les résultats d'une étude de boucle intensive du système d'un dôme suspendu qui prend en compte l'imperfection géométrique, le chargement asymétrique, le rapport de la flèche/diamètre, et la rigidité de raccordement. En conclusion, la conception suggérée et les directives de construction sont données dans la conclusion de cet article.

Les structures de dômes suspendus ont été étudiées par GAO Bo-qing et WENG En-hao (2004) pour évaluer l'influence de la variation de la précontrainte sur le comportement structural. Dans cet article [7], une méthode spécifique (Wu, 1997; Yang et Wang, 1998) a été employée pour enquêter sur les câbles sensibles, l'enquête a été concentrée sur un exemple de dôme suspendu.

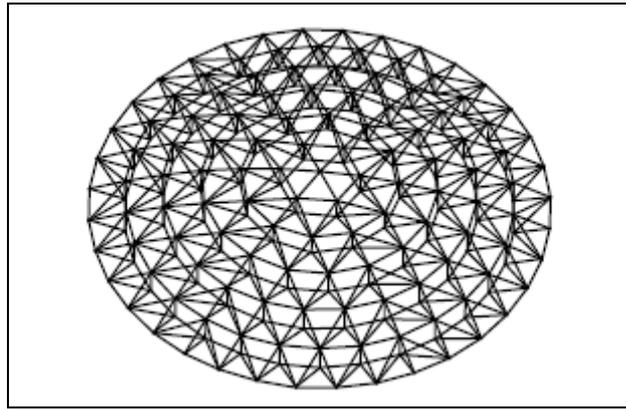


Fig. 12-12: Dôme câble suspendu étudié par GAO Bo-qing et WENG En-hao

L'enquête a indiqué que les dômes suspendus sont sensibles aux précontraintes dans tous les câbles; et que la sensibilité dépende de l'emplacement des câbles et le genre de comportement structurel.

La grande contradiction entre la théorie et les mesures pratiques au niveau des dômes implique deux questions soulevées par GAO Bo-qing, et WENG En-hao (2004) :

- 1- si c'est nécessaire de rectifier la précontrainte initiale dans les câbles,
- 2- comment rectifier ces précontraintes.

De l'autre côté, c'est difficile de rendre effectif l'incrémentation des procédures de la précontrainte, surtout, quand un grand nombre de câbles est utilisé dans la construction pratique, parce que c'est difficile de mettre correctement les câbles dans leurs places.

Une méthodologie proposée par Telmo Egmar Camilio Deifeld et Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti (2005) a été appliquée à la simulation d'assemblage de quelques simplexes de tenségrité des dômes de grande portée. L'article [28] discute les aspects principaux des simulations exécutées, en enquêtant sur des problèmes opérationnels possibles, comme l'influence de la mise en action sur la géométrie et la distribution de la force sur les composants de la structure.

Dans le processus de concevoir un système de tenségrité, J.Y. ZHANG, M. OHSAKI, et Y. KANNO (2006) présentent une nouvelle approche [36] basée sur une formulation matricielle des équations d'équilibre de forces axiales et coordonnées nodales, pour permettre aux concepteurs des dômes câbles de satisfaire les exigences de forme et de stabilité.

La méthode proposée peut être utilisée pour les applications pratiques très efficacement, car seulement les équations algébriques linéaires seront résolues, et aucune équation de cinématique ou de propriétés des matériaux n'est utilisée.

Quelques exemples numériques sont donnés pour montrer l'efficacité de la méthode proposée et aussi sa capacité de chercher les nouvelles configurations.

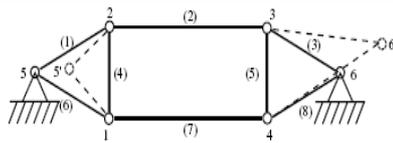


Fig. 12-13: Dôme câble plan étudié par J.Y. ZHANG, M. OHSAKI, et Y. KANNO.

Dans un article récent [37], trois approches d'optimisation ont été proposées pour la conception de la forme et de la force par J.Y. Zhang, M. Ohsaki (2007). La première est la détermination de la configuration et de la force dans les éléments à l'état d'auto équilibre par la minimisation de la différence entre l'énergie de la tension dans les câbles et celle de compression des entretoises. La deuxième par la minimisation de la déviation des composants de la force, et la troisième approche consiste à trouver la distribution optimale des forces dans les éléments qui mène à la structure la plus forte (avec raideur maximale).

13. Conclusion de la première partie

Nous avons montré que le développement des toits de câbles a connu une histoire qui date d'un siècle environ, de nombreuses personnes ayant apportées une contribution importante pour arriver à l'idée de la conception des dômes câbles, mais les plus célèbres sont : Frei Otto en Allemagne, David Geiger au États-Unis, Kenneth Snelson et Richard Buckminster Fuller.

Après avoir donné une notion de base sur la constitution de l'élément câble, sur le terme de dômes câbles basés sur le principe de tenségrité, et sur la signification des mécanismes et leurs stabilisation par des états d'autocontrainte, nous avons passé à une illustration des différentes configurations des dômes; nous avons souligné qu'elles constituent le modèle de base des dômes, mais ils restent d'autres modèles des dômes qui sont obtenus comme variations de ces formes de base.

Le premier chapitre a donné à la fin un aperçu rapide sur le Dôme de Géorgie à Atlanta au Etats Unis, l'œuvre la plus particulière, et nous avons vu par la suite que la conception en dômes offre des avantages énormes, parmi eux nous avons cité les principaux.

Le deuxième chapitre a illustré par une revue générale les recherches effectuées par la communauté scientifiques sur les dômes câbles. Nous avons commencé en citant les recherches originales qui ont débuté la conception des dômes câbles, cette conception a été améliorée par les chercheurs dans le temps jusqu'au moment où l'humanité a connue l'invention du dôme câble basé sur le principe de tenségrité, ce principe signifie une séquence de triangulation constituée par des câbles en tension continue et des barres en compression discontinue. Mais signalons que ces recherches de conception n'arrivent pas en majorité au stade de réalisations.

En ce qui concerne les méthodes de calculs relatives aux structures des dômes câbles et comparativement aux structures traditionnelles, nous avons constaté à travers une vingtaine d'études réalisées durant les dix années précédentes que peut de chercheurs ont investis dans ce domaine, ces études restent toujours théoriques, adaptées aux structures existantes, et parfois avec moindre importance tant qu'elles ne sont pas généralisées. Mais elles contribuent au développement futur du progrès des dômes câbles.

Notons en fin ; que le domaine de structures légères ; et spécialement celui des dômes câbles à base de tenségrité est actuellement en pleins départ vers un progrès de recherches qui seront réalisées dans les années qui suivent suite au besoin de solutions techniques, économiques et architecturales apportées par ces nouvelles structures.

Deuxième partie :

METHODES DE CALCUL DES DOMES CABLES

Deuxième partie :

METHODES DE CALCUL DES DOMES CABLES

14. Introduction :

Après avoir donné un aperçu sur l'histoire des dômes câbles et les recherches faites par la communauté scientifique sur ce système structural, cette partie sera consacrée aux méthodes de calcul. Nous insistons ici sur les méthodes les plus connues, et celles qui seront utilisées et adaptées dans la troisième partie qui consiste l'étude numérique de comportement.

Dans le premier chapitre nous allons décrire le principe de calcul des méthodes de recherche de forme, commençant par les méthodes les plus connues : méthode des densités de force en premier lieu, méthode de relaxation dynamique, et la méthode à énergie potentielle minimale, ce travail sera suivi par les avantages et inconvénients de chaque méthode.

Le point sera marqué dans ce chapitre sur la méthode adaptée dans [32] [33] pour les structures réticulées autocontraintes, elle sera exposée en détail, avec une application numérique sur un module de dôme câble constitué de quatre câbles et une barre. Cette méthode sera comparée à celle proposée dans cette thèse, il s'agit d'une procédure de calcul direct des bases d'autocontraintes basée sur le principe d'équilibre des nœuds avec le processus d'introduction et de la recherche de la l'autocontrainte dans les éléments.

Le deuxième chapitre sera consacré aux méthodes d'analyse en non linéarité géométrique, après avoir fait une justification de cette dernière pour les structures de dômes câbles, nous allons faire une introduction en citant les différentes formulations et méthodes de résolution pour l'analyse non linéaire.

La méthode développée dans [13] [14] pour l'analyse en non linéarité géométrique des structures tridimensionnelles est basée sur la formulation variationnelle du principe des travaux virtuels. Elle sera détaillée dans ce chapitre, pour son adaptation dans l'étude numérique de comportement mécanique des dômes câbles.

Cette partie est alors réservée à l'exposé d'une étude comparative et utilitaire des outils de travail pour le calcul des dômes câbles.

CHAPITRE 1 :

METHODES DE RECHERCHE DE FORME

15. Introduction

La première étape de conception des dômes câbles est celle de recherche de forme, il s'agit de trouver la configuration dans la qu'elle le dôme se trouve équilibré par la position géométrique des nœuds avec la seule application de l'autocontrainte dans les câbles. Cette étape consiste donc à définir la forme [19], qui est essentielle, à la fois pour l'architecte et pour le mécanicien. Le premier y voit avant tout une « forme initiale » conçue à partir d'une conception purement esthétique et architecturale mais, pour le second, il s'agit de définir une « forme d'équilibre » régie par les lois générales de la mécanique.

Et comme la structure du dôme câble est un assemblage de câbles et barres sous un système réticulé auto contraint, il existe dans la littérature plusieurs méthodes de recherche de forme pour ce type de structures, parmi elles on cite dans ce chapitre les plus connues.

16. Méthode des densités de force

Le principe de cette méthode a été défini par H. J. Sheck [19]. La surface à modéliser est discrétisée par un maillage quelconque, quadrangulaire ou triangulaire, qui peut être assimilé à un réseau de câbles.

Chaque nœud est numéroté en commençant par les nœuds libres, ou s'exercent les sollicitations extérieures, et en terminant par les nœuds fixes correspondant aux supports.

Sont ensuite définies les liaisons entre les différents nœuds par une matrice de connexion indiquant, pour chaque élément les nœuds d'origine et d'extrémité.

A partir de la définition du maillage initial et des sollicitations extérieures, la position d'équilibre est définie par un système d'équations non linéaires qui fait intervenir pour chaque élément le rapport de la tension dans celui-ci à sa longueur, qui est appelé densité de force $Q = N/L$.

Si l'on isole ce coefficient considéré comme un paramètre fixé par le concepteur, les équations d'équilibre de chaque nœud deviennent alors linéaires, ce qui permet d'obtenir facilement, par des méthodes de résolution (avec inversion de matrice) ou itératives, les coordonnées de chaque nœud libre et donc les longueurs et tension ou compression dans chaque élément.

L'algorithme général de recherche de forme peut donc être représenté comme indiqué sur la figure 16-1.

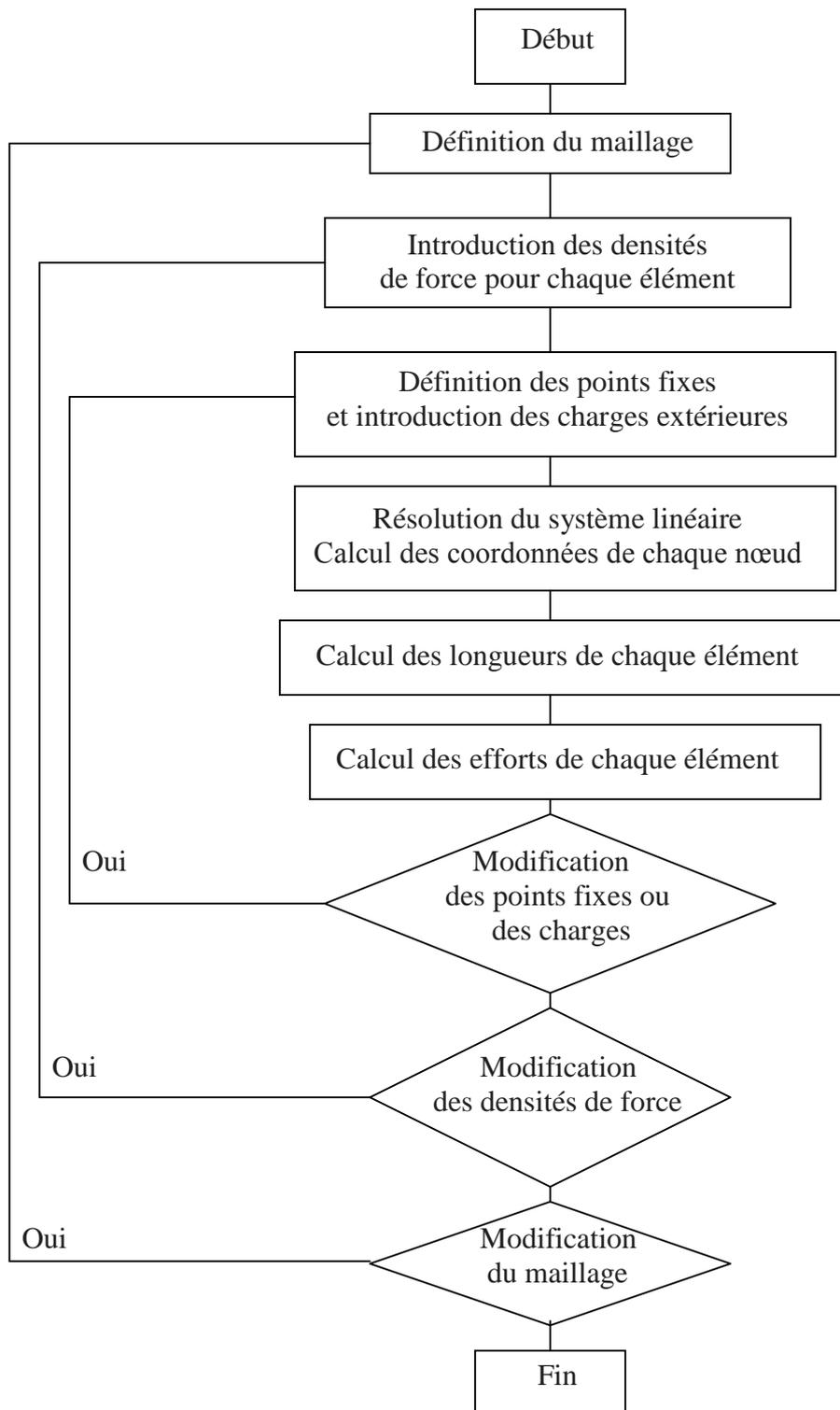


Fig. 16-1: Algorithme général de recherche de forme par la méthode des densités de force.

La sortie graphique et le calcul des efforts dans chaque élément permettent au concepteur d'ajuster pas à pas la forme de la structure en modifiant les densités de force afin d'obtenir une géométrie finale acceptable.

Les avantages principaux de la méthode sont :

- l'existence d'une solution quels que soit les choix du concepteur ;
- le nombre limité de données nécessaires à la résolution du système. Seules interviennent la définition du maillage et des points fixes, et la valeur des coefficients de densité de force pour chaque élément imposée par le concepteur ;
- des temps de calcul réduits permettant une forte interactivité ;
- l'obtention de la forme d'équilibre (coordonnées des nœuds mobiles), mais également des efforts dans les éléments.

L'inconvénient majeur est le fait que le rapport tension sur longueur (densité de force) n'est pas très physique ni représentatif, de telle sorte qu'il est difficile au concepteur non habitué de prédire la forme de la surface correspondant aux valeurs qu'il introduit.

17. Méthode de relaxation dynamique

Cette méthode a été mise au point en 1965 par A.S. Day et développée, dans le début des années 70, pour le calcul des structures tendues par M.R. Barnes [19].

Le principe de la méthode est de suivre pas à pas, par incréments de temps Δt , le mouvement amorti de la structure considérée comme pesante, de l'instant initial où on lui impose un déplacement des nœuds pilotes jusqu'à la position stable finale.

L'expérience montre qu'il n'est malheureusement pas possible de déplacer les nœuds pilotes directement jusqu'à la position finale, mais qu'il est nécessaire de les déplacer par incréments successifs.

Cette méthode ne correspond donc pas à un calcul dynamique de la structure, mais utilise un calcul dynamique amorti fictif de celle-ci afin de déterminer la position statique d'équilibre.

Le processus de calcul est le suivant :

- a) définition du maillage, introduction des coordonnées des nœuds et définition des nœuds fixes ;
- b) imposition d'un incrément de déplacement des nœuds fixes et recherche de la position d'équilibre par relaxation dynamique.

Pour cela des matrices de masse et d'amortissement visqueux sont définies, et la déformée du système est calculée pour des incréments de temps successifs Δt .

Pour chaque incrément Δt sont calculées (généralement par la méthode des différences finies) :

- les forces résiduelles induites aux nœuds ;
 - les vitesses en chaque nœud ;
 - les nouvelles coordonnées des nœuds, cela jusqu'à amortissement du système, ce qui permet d'obtenir la position d'équilibre ;
- c) un nouvel incrément de déplacement des nœuds fixes est imposé jusqu'à atteindre la position finale des appuis.

Les principaux avantages de cette méthode sont :

- le contrôle parfait, par le concepteur, de l'évolution de la forme de la surface par déplacements successifs des appuis ;
- la facilité d'utilisation, le concepteur jouant sur un paramètre très physique donc de manipulation aisée.

Mais cette méthode a de gros inconvénients, qui sont principalement :

- le nombre important de données à introduire (en particulier les coordonnées de chaque nœud) ;
- la lourdeur des calculs qui demandent des temps de traitement importants.

18. Méthode à énergie potentielle minimale

Le principe de la méthode consiste à considérer la membrane sans rigidité élastique et soumise à son champ de tensions isotropes (type bulle de savon) [19], et déterminer la position d'équilibre en minimisant l'énergie potentielle totale.

Le processus de calcul est le suivant :

- a) la surface initiale est discrétisée par un maillage triangulaire. Cette surface peut être quelconque, mais doit s'appuyer sur des contours fixés par le concepteur. La longueur des éléments de rive doit ainsi être fixée, même si leur déplacement est possible ;
- b) un champ de contraintes isotrope est imposé à la membrane ;
- c) l'énergie potentielle peut s'exprimer en fonction des dimensions et des tensions dans les éléments. Sa minimisation revient à la résolution d'un système d'équations non linéaire effectuée par un processus itératif du type Newton-Raphson qui donne les coordonnées de chaque nœud et les efforts dans chaque élément.

Les avantages principaux de la méthode sont :

- l'obtention d'une surface d'aire minimale ;
- l'obtention de tensions isotrope dans la membrane ;
- le contrôle total des longueurs de rives ;
- la possibilité, pour le concepteur, de fixer la prétention finale.

En revanche ses plus gros inconvénients sont :

- la lourdeur des calculs résultant d'une résolution d'un système non linéaire ;
- la difficulté, pour le concepteur, de choisir le champ de contraintes et d'appréhender la surface qui en résultera.

19. Méthode de calcul des mécanismes et d'autocontrainte par la matrice d'équilibre

19.1 Introduction

Cette méthode a été adaptée par N. VASSAT [32] [33] comme suite aux recherches faites par [PELLEGRINO S. et CALLADINE C.R (1986)] sur les systèmes réticulés autocontraints, elle transforme l'écriture des relations d'équilibre des nœuds et de compatibilité sous forme matricielle pour obtenir les mécanismes et les bases d'autocontrainte.

Les hypothèses fondamentales faites sur les systèmes réticulés étudiés dans cette méthode se résument comme suit :

- Les liaisons entre les éléments sont des rotules parfaites.
- Toutes les fibres moyennes des éléments incidents à un nœud, concourent au centre du nœud.
- Les actions sont des forces appliquées directement sur les nœuds.
- Les flexions induites par le poids propre des éléments peuvent être négligées.
- Le cadre d'analyse pour les petites déformations.

19.2 Relations fondamentales entre les grandeurs mécaniques

Un système réticulé est constitué de b éléments (barres ou câbles) liés par n nœuds. Les éléments sont numérotés de $j = 1$ à b . les nœuds sont numérotés eux de $i = 1$ à n .

Le nombre de degrés de liaison imposé aux nœuds du système par l'extérieur est noté k . on peut en déduire le nombre N de degrés de liberté ou de déplacements possibles des nœuds du système dans l'espace par la relation : $N = 3n - k$ ($N = 2n - k$ dans le plan).

La longueur d'un élément j avant assemblage est notée l_j^{lib} (longueur libre ou de fabrication). Sa longueur après assemblage des b éléments est elle, notée l_j^0 (longueur dans l'état de référence). Et, on note l_j sa longueur actuelle lorsque le système est chargé (Fig. 19-1)

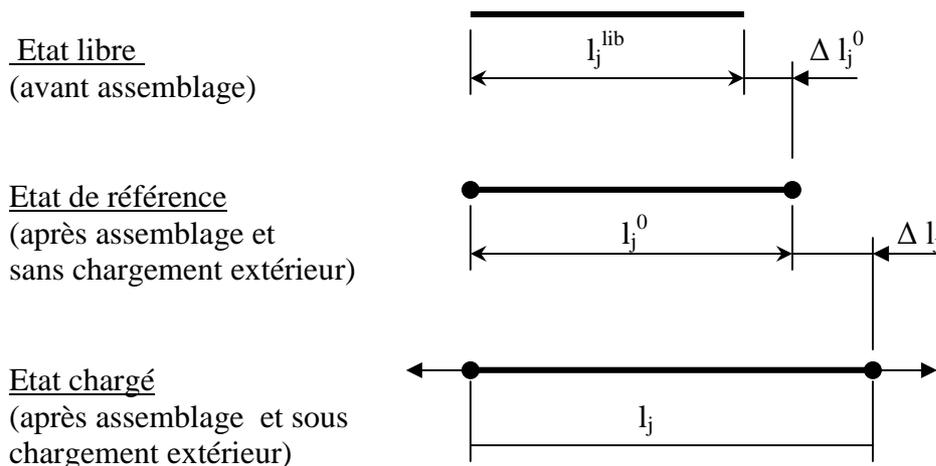


Fig. 19-1: Notation de longueur d'un élément j suivant son état.

Le coefficient de densité de force, noté q_j , est défini par le rapport de l'effort normal T_j sur sa longueur de référence l_j^0 :

$$q_j = (T_j / l_j^0) \quad (19-1).$$

Ou T_j désigne l'effort normal de compression ou de traction dans chaque élément j .

le coefficient de variation de longueur est noté e_j , il correspond, pour un élément j , au produit de sa variation de longueur Δl_j par sa longueur de référence l_j^0 :

$$e_j = \Delta l_j \cdot l_j^0 \quad (19-2).$$

Ou Δl_j est la variation de longueur de l'élément j à partir de sa longueur de référence l_j^0 :

$$\Delta l_j = l_j - l_j^0 \quad (19-3).$$

On définit un repère orthonormé global OXYZ et on regroupe les grandeurs analogues pour l'ensemble des b barres et N déplacements possibles des nœuds du système, sous la forme de vecteurs. On note donc :

- $\{q\}$ le vecteur à b composantes des coefficients de densité de force des éléments :

$$\{q\} = \{q_1, \dots, q_j, \dots, q_b\}^t \quad (19-4)$$
- $\{e\}$ le vecteur à b composantes des coefficients de variation de longueur des éléments :

$$\{e\} = \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_b\}^t \quad (19-5)$$
- $\{d\}$ le vecteur à N composantes des déplacements des nœuds à partir de l'état de référence :

$$\{d\} = \{\dots, d_{ix}, d_{iy}, d_{iz}, \dots\}^t \quad (19-6)$$
- $\{f\}$ le vecteur à N composantes des forces extérieures appliquées aux nœuds :

$$\{f\} = \{\dots, f_{ix}, f_{iy}, f_{iz}, \dots\}^t \quad (19-7)$$

Où l'indice ix repère le degré de liberté du nœud i suivant la direction OX.

19.3 Equations d'équilibre

19.31 Equilibre d'un nœud libre

La relation vectorielle traduisant l'équilibre d'un nœud i libre, connecté à des nœuds h par des éléments j (fig. 19-2), s'écrit en utilisant la méthode des nœuds :

$$\{f_i\} - \sum_{J \ni i} T_j \{u_{ih}\} = \{0\} \quad (19-8)$$

Où $\{f_i\}$ est le vecteur des forces extérieures appliquées au nœud i ($\{f_i\} = \{f_{ix}, f_{iy}, f_{iz}\}^t$),
 $\{u_{ih}\}$ est le vecteur unitaire de l'élément j reliant le nœud i au nœud h. Il peut s'écrire :

$$\{u_{ih}\} = \left\{ \left[\frac{(x_i - x_h)}{l_j^0} \right], \left[\frac{(y_i - y_h)}{l_j^0} \right], \left[\frac{(z_i - z_h)}{l_j^0} \right] \right\}^t \quad (19-9)$$

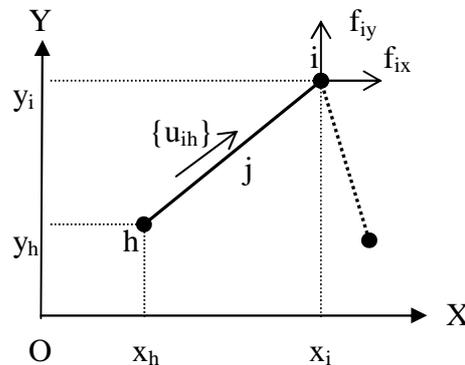


Fig. 19-2: Vue suivant l'axe OZ du nœud i libre connecté au nœud h par l'élément j .

Si on projette la précédente équation d'équilibre (19-8) sur le repère orthonormé global OXYZ, on obtient pour un nœud i libre connecté à des nœuds h par des éléments j (Fig. 19-2), les trois relations scalaires d'équilibre suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{J \ni i} \left[\frac{(x_i - x_h)}{l_j^0} \right] T_j = f_{ix} \\ \sum_{J \ni i} \left[\frac{(y_i - y_h)}{l_j^0} \right] T_j = f_{iy} \\ \sum_{J \ni i} \left[\frac{(z_i - z_h)}{l_j^0} \right] T_j = f_{iz} \end{array} \right. \text{ soit } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{J \ni i} (x_i - x_h) q_j = f_{ix} \\ \sum_{J \ni i} (y_i - y_h) q_j = f_{iy} \\ \sum_{J \ni i} (z_i - z_h) q_j = f_{iz} \end{array} \right. \quad (19-10)$$

Où $x_i, y_i,$ et z_i sont les coordonnées du nœud i dans le repère orthonormé global (X,Y,Z) .

Le symbole $\sum_{j \ni i}$ signifie que la sommation est à effectuer sur tous les éléments j aboutissant à un nœud i .

Sur les équations précédentes (19.10), on met en évidence l'intérêt du choix de la grandeur q_j . En effet, les coefficients de densité de force permettent de donner un aspect bi-linéaire aux équations d'équilibre.

19.32 Matrice d'équilibre

De la même manière, il est possible d'écrire les $N = 3n - k$ relations d'équilibre correspondant aux N degrés de liberté des nœuds du système. Lorsqu'on regroupe ces N équations, on obtient la forme matricielle suivante :

$$\begin{matrix} & \overbrace{\hspace{10em}}^{\text{b}} & \\ & \text{(1)} & \text{(j = ih)} & \text{(b)} & & \\ \left. \begin{matrix} \text{(ix)} \\ \text{(iy)} \\ \text{(iz)} \end{matrix} \right\} N & \left(\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dots X_i - X_h \dots \\ \dots Y_i - Y_h \dots \\ \dots Z_i - Z_h \dots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_b \end{matrix} \right) & = & \left(\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{iz} \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right) & (19-11)
 \end{matrix}$$

Les N équations d'équilibre (19-11) du système réticulé, qui traduisent l'équilibre des nœuds sous l'effet des forces extérieures et des efforts normaux, conduisent à un système d'équations linéaires pouvant se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\boxed{[A] \{q\} = \{f\}} \qquad (19-12)$$

Où $[A]$ est la **matrice d'équilibre** à N lignes et b colonnes,
 $\{q\}$ est le vecteur à b composantes des coefficients de densité de force des éléments,
 $\{f\}$ est le vecteur à N composantes des forces extérieures appliquées aux nœuds.

Pour un système réticulé simple, la matrice d'équilibre $[A]$ s'obtient très facilement, comme on vient de le voir, à partir de la topologie du système. Mais dès que la complexité du système étudié augmente, il est intéressant, notamment vis-à-vis des risques d'erreur, de pouvoir construire cette matrice de façon automatique.

19.4 Relations de compatibilité

19.41 Relation de compatibilité associée à un nœud libre

Les relations de compatibilité traduisent le fait que les déformations des éléments (assemblés), doivent être compatibles avec les déplacements des nœuds auxquels ils sont liés.

Pour un élément j ayant ses extrémités i et h (fig. 19-3), sa variation de longueur $\Delta l_j = l_j - l_j^0$, lors du déplacement du nœud i de sa position de référence (x_i, y_i, z_i) à sa position finale $(x_i+d_{ix}, y_i+d_{iy}, z_i+d_{iz})$ et du nœud h de sa position de référence (x_h, y_h, z_h) à sa position finale $(x_h+d_{hx}, y_h+d_{hy}, z_h+d_{hz})$, s'écrit :

$$\Delta l_j = [[(x_i+d_{ix})-(x_h+d_{hx})]^2 + [(y_i+d_{iy})-(y_h+d_{hy})]^2 + [(z_i+d_{iz})-(z_h+d_{hz})]^2]^{1/2} - [(x_i-x_h)^2 + (y_i-y_h)^2 + (z_i-z_h)^2]^{1/2} \quad (19-13)$$

Où d_{ix}, d_{iy}, d_{iz} correspondant aux déplacements respectifs du nœud i suivant l'axe OX, OY, OZ depuis sa position de référence.

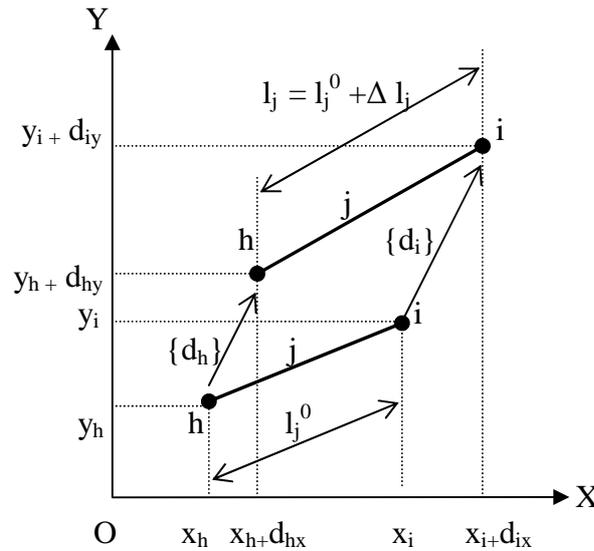


Fig. 19-3: Vue suivant l'axe OZ du nœud j de sa position de référence à sa position finale.

Dans le cadre des petites déformations, la variation de longueur Δl_j de l'élément j s'écrit de la façon suivante, en ne conservant que les termes de premier ordre de la précédente relation (19-13).

(ce que l'on note par $\overset{(O_1)}{\approx}$) :

$$\Delta l_j \overset{(O_1)}{\approx} \frac{(x_i - x_h)}{l_j^0} (d_{ix} - d_{hx}) + \frac{(y_i - y_h)}{l_j^0} (d_{iy} - d_{hy}) + \frac{(z_i - z_h)}{l_j^0} (d_{iz} - d_{hz}) \quad (19-14)$$

Par conséquent, le calcul au premier ordre du coefficient de variation de longueur e_j , de l'élément j , conduit à l'expression linéaire suivante :

$$e_j = \Delta l_j / l_j^0 \quad (\text{par définition d'un coefficient de variation de longueur}) \quad (19-15)$$

$$e_j \overset{(O_1)}{\approx} (x_i - x_h) (d_{ix} - d_{hx}) + (y_i - y_h) (d_{iy} - d_{hy}) + (z_i - z_h) (d_{iz} - d_{hz}) \quad (19-16)$$

On se rend compte, grâce à cette équation (19-16), que le coefficient de variation de longueur permet lui aussi de donner un aspect bi-linéaire aux relations de compatibilité.

Une base des états d'autocontraintes $\{q^0\}$ d'un système réticulé peut être obtenue à partir d'une base du noyau de la matrice d'équilibre $[\mathcal{A}]$:

$$\boxed{\{q^0\} \in \text{Ker } \mathcal{A}} \quad (19-21)$$

Le nombre d'états d'autocontraintes indépendants (noté :s) d'un système réticulé peut être déterminé [d'après PELLEGRINO S. et CALLADINE C.R (1986)] à partir du rang $r_{\mathcal{A}}$ de la matrice d'équilibre $[\mathcal{A}]$ et du nombre d'éléments b :

$$\boxed{s = b - r_{\mathcal{A}}} \quad \text{avec } s = \dim(\text{ker } \mathcal{A}) \quad (19-22)$$

19.52 Les mécanismes d'un système réticulé

Un système réticulé admet au moins un **mécanisme**, s'il existe au moins un vecteur déplacement des nœuds $\{d\}$ non nul n'impliquant **au premier ordre** aucune variation de longueur des éléments du système.

Pour les différencier des autres vecteurs déplacements $\{d\}$, on note $\{\delta\}$ les vecteurs $\{d\}$ correspondant à des mécanismes, et on pose par définition (comme $[\mathcal{B}] = [\mathcal{A}]^t$) :

$$\boxed{\exists \text{ un mécanisme ssi } \exists \{\delta\} \neq \{0\} \quad \text{tq } [\mathcal{A}]^t \{\delta\} = \{0\}} \quad (19-23)$$

Une base des mécanismes $\{\delta\}$ d'un système réticulé peut être obtenue d'une base du noyau de la matrice transposée de la matrice d'équilibre $[\mathcal{A}]$:

$$\boxed{\{\delta\} \in \text{Ker } \mathcal{A}^t} \quad (19-24)$$

Le nombre de mécanismes indépendants (noté : **m**) d'un système réticulé peut lui aussi être calculer à partir du rang $r_{\mathcal{A}}$ de la matrice d'équilibre $[\mathcal{A}]$ puisque $r_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{A}^t}$:

$$\boxed{m = N - r_{\mathcal{A}}} \quad \text{avec } m = \dim(\text{Ker } \mathcal{A}^t) \quad (19-25)$$

La relation obtenue en éliminant le rang $r_{\mathcal{A}}$ des deux relations donnant s et m (19-22 et 19-25), permet de remarquer que, pour un système réticulé donné, le fait de connaître la valeur de « s » ou de « m » implique immédiatement la connaissance de l'autre :

$$\boxed{m - s = N - b} \quad (19-26)$$

19.53 Différentes caractéristiques statiques et cinématiques des systèmes réticulés

Les valeurs prises par le nombre d'autocontrainte ($s \geq 0$) et le nombre de mécanismes ($m \geq 0$) par rapport à zéro, permettent de connaître les caractéristiques statiques et cinématiques d'un système réticulé.

Rang de la matrice $[A]$: r_A		Nombre d'états d'autocontrainte (s) et de mécanismes (m)	
$r_A = b$ $r_A = N$		$s = 0$ $m = 0$	-pas d'état d'autocontrainte -pas de mécanisme <i>Système statiquement et cinématiquement déterminé.</i>
$r_A < b$ $r_A = N$		$s = b - r_A$ $m = 0$	-s état d'autocontrainte -pas de mécanisme <i>Système statiquement indéterminé et cinématiquement déterminé.</i>
$r_A = b$ $r_A < N$		$s = 0$ $m = b - r_A$	-pas d'état d'autocontrainte -m mécanisme <i>Système statiquement déterminé et cinématiquement indéterminé.</i>
$r_A < b$ $r_A < N$		$s = b - r_A$ $m = b - r_A$	-s état d'autocontrainte -m mécanisme <i>Système statiquement et cinématiquement indéterminé</i>

Tabl. 19-1: Les différents types de systèmes réticulés.

19.6 Etude d'un module plan à 4 câbles et une barre

Soit à étudier le système suivant (fig. 19-4).

Le nombre de degrés de liberté du système est égal à :
 $N = 3n - K$,
 Avec $n = 4$ (nombre de nœuds),
 et $K = 6$ (nombre de ddl bloqués),
 donc $N = 3 \times 4 - 6 = 6$.

19.61 Matrice d'équilibre

Cette matrice s'écrit comme suit :

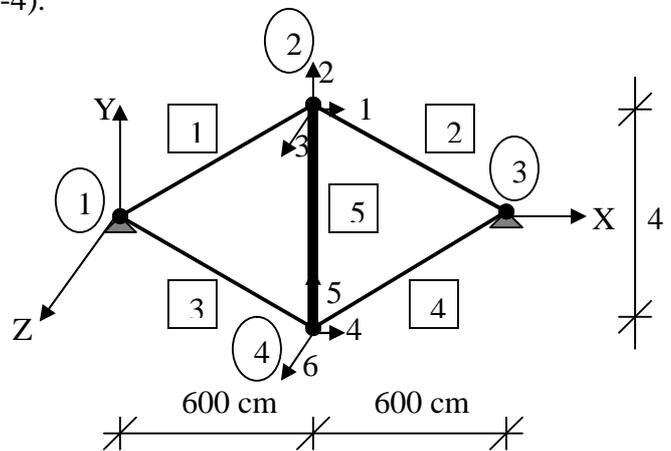


Fig. 19-4: Module plan à 4 câbles et une barre

$$\{\delta_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\delta_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

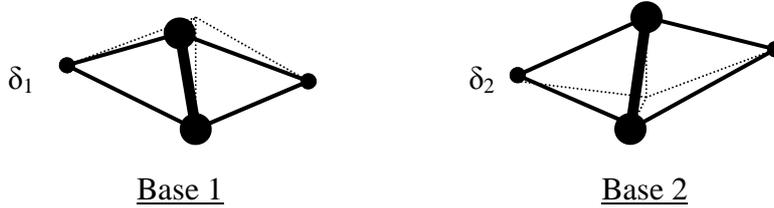


Fig. 19-5: Les deux mécanismes du module plan à quatre câbles et une barre.

19.63 Autocontrainte

$$s = b - r_{\mathcal{A}} = 5 - 4 = 1.$$

La base d'autocontrainte peut être déterminée par la résolution du système suivant :

$$[\mathcal{A}] \times \{q_0\} = \{0\}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \{q_0\} = \{0\}$$

L'état de précontrainte est défini par le vecteur suivant:

$$\{q_0\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

On introduisant la longueur des barres, on trouve :

$$\{q_0\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2/\sqrt{10} \end{Bmatrix}$$

20. Développement d'une méthode directe de calcul des états d'autocontrainte

20.1 Introduction

Pour les dômes câbles ayant une structure relativement simple caractérisée par une symétrie, et/ou un nombre réduit de nœuds et de barres, on propose ainsi une méthode de calcul des états d'autocontrainte basée sur le principe d'équilibre des nœuds et ayant pour objet le calcul direct des bases d'autocontrainte sans passer par l'écriture de la matrice complète d'équilibre de la structure. Après avoir fixé la configuration d'équilibre du dôme, on établira pour chaque nœud répétitif les trois équations linéaires d'équilibre suivant les axes : X, Y, et Z, en introduisant la grandeur de précontrainte fixée comme donnée initiale dans certains éléments de la structure et en cherchant la base d'autocontrainte pour les autres éléments par satisfaction des conditions d'équilibre.

Nous allons présenter dans ce chapitre les étapes de calcul des états d'autocontrainte en suivant la méthodologie proposée par cette méthode en prenant comme exemple l'étude d'équilibre d'un module de dôme câble type en 3D, par la suite on établira un algorithme de résolution en généralisation de la procédure, et en finalisant par une comparaison des résultats (sur un module de dôme plan) obtenus en utilisant la présente méthode avec ceux de la méthode proposée par N. VASSART [32] [33].

20.2 Equilibre d'un nœud

Soit à étudier le système suivant :

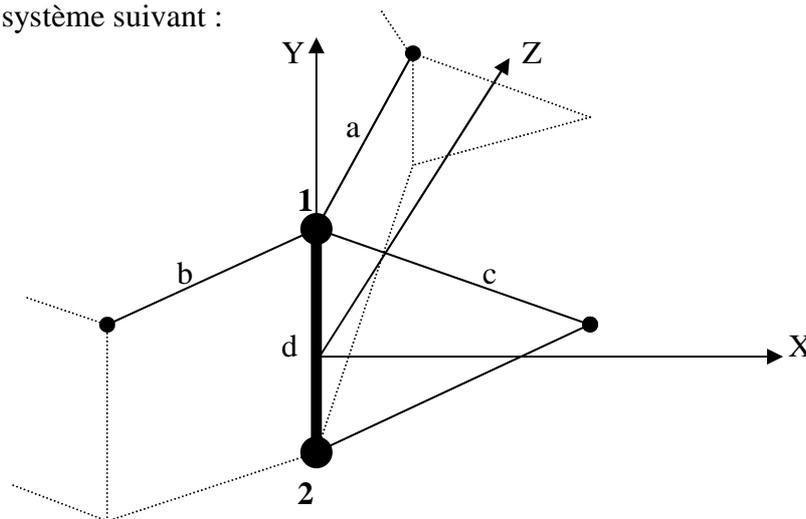


Fig. 20-1: Module d'un dôme en étude d'équilibre

Si on cherche à satisfaire les conditions d'équilibre du nœud 1, pour obtenir le rapport d'autocontrainte dans les éléments aboutissant à ce nœud, on doit fixer d'abord une valeur de l'unité de précontrainte dans les éléments : a et b et chercher par la suite les valeurs correspondantes aux éléments c et d.

$$\begin{aligned}
 q_{ax} + q_{bx} + q_{cx} + q_{dx} &= 0 \\
 q_{ay} + q_{by} + q_{cy} + q_{dy} &= 0 \\
 q_{az} + q_{bz} + q_{cz} + q_{dz} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{20-1}$$

Où :

q_{ax} est la valeur de la précontrainte initiale dans l'élément a suivant une projection sur l'axe X.
 q : la précontrainte initiale dans l'élément,

a : l'élément correspondant,
x : est l'axe de projection.

On aura donc trois équations pour le nœud 1, la résolution du système linéaire aboutira à la solution.

20.3 Notion des densités équivalentes et vecteur de précontrainte

Une fois les valeurs de q_c et q_d sont déterminées, la base d'autocontrainte sera calculée pour les quatre barres aboutissant au nœud 1 en introduisant la notion des densités équivalentes autour d'un nœud, comme suit :

$$\frac{q_a}{l_a} B_a = \frac{q_b}{l_b} B_b = \frac{q_c}{l_c} B_c = \frac{q_d}{l_d} B_d \quad (20-2)$$

Ou : l_a, l_b, l_c, l_d sont les longueurs des éléments a, b, c, et d respectivement.

B_a, B_b, B_c, B_d sont les valeurs des bases d'autocontrainte correspondantes aux éléments : a, b, c, et d respectivement.

L'état de précontrainte est défini pour le nœud 1, par le vecteur suivant:

$$\{q_0\}_1 = \begin{Bmatrix} B_a \\ B_b \\ B_c \\ B_d \end{Bmatrix} \quad (20-3)$$

20.4 Généralisation de la procédure et résultat final

L'opération sera faite avec la même procédure pour tous les nœuds du dôme étudié, le résultat final relatif au vecteur de l'autocontrainte de toute la structure ayant b élément aura la forme suivante :

$$\{q_0\} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_b \end{Bmatrix} \quad (20-4)$$

20.5 Algorithme de résolution

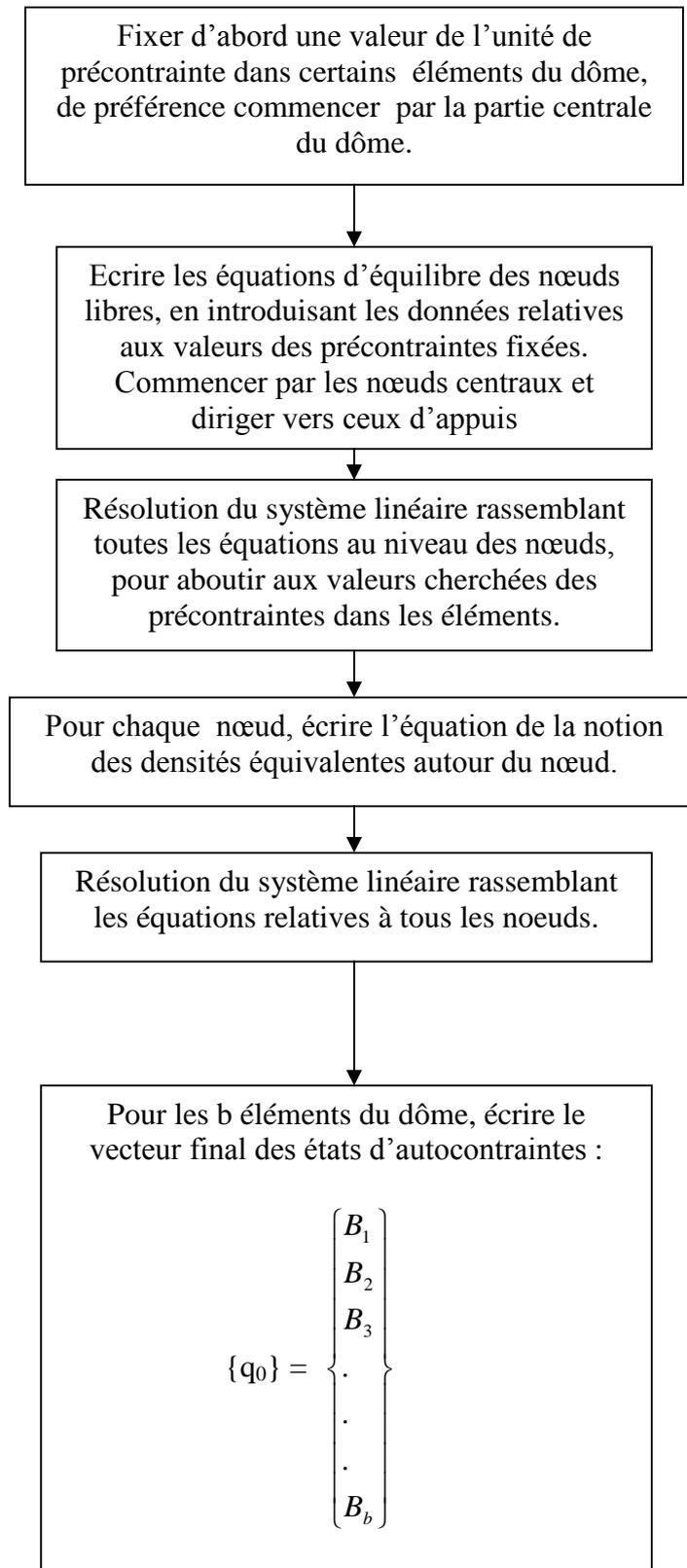


Fig. 20-2: Algorithme de résolution de la méthode directe.

20.6 Application numérique : base d'autocontrainte

A titre de comparaison de la fiabilité de cette méthode, nous allons comparer les résultats trouvés par la méthode proposée dans [32] [33] et ceux trouvés par la présente méthode, en étudiant un module plan à quatre câbles et une barre centrale.

Soit à étudier le système suivant (fig. 20-3).

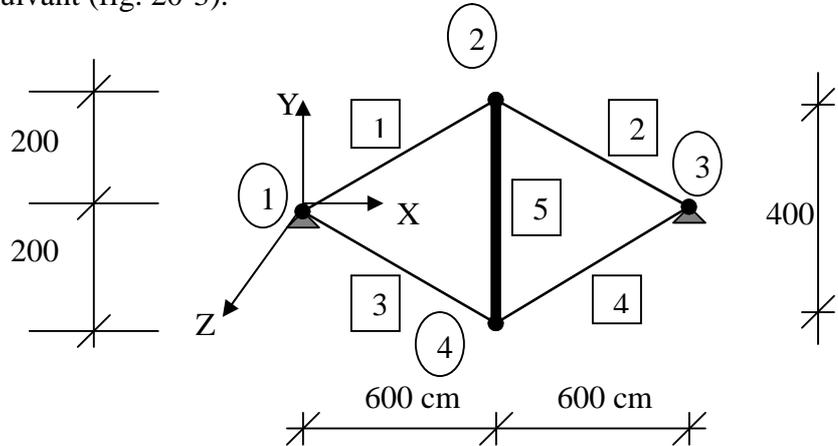


Fig. 20-3: Module plan à 4 câbles et une barre

Si on pose une valeur unitaire de la précontrainte pour les câbles 1 et 2 égale à 1 KN, l'étude d'équilibre des deux nœuds 2 et 4 aboutira au résultat de précontrainte dans les câbles 3 et 4 et la barre 5 comme suit :

$$q_3 = q_4 = 1 \text{ KN}$$

$$\text{et } q_5 = -0,63 \text{ KN}$$

Posant la base d'autocontrainte pour les câbles 1 et 2 égale à l'unité, et en application de l'équation (20-2), on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{632,46} 1 = \frac{1}{632,46} 1 = \frac{-0,63}{400} B_5 \\ \frac{1}{632,46} B_3 = \frac{1}{632,46} B_4 = \frac{-0,63}{400} B_5 \end{array} \right. \quad (20-5)$$

En résolution du système d'équation (20-5), on obtiendra :

$$B_5 = -1$$

$$B_3 = 1$$

$$B_4 = 1$$

Alors le vecteur d'état de précontrainte du module étudié s'écrit comme suit :

$$\{q_0\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (20-6)$$

On constate bien que c'est le même résultat que celui déterminé par la méthode citée en [32] [33].

CHAPITRE 2 :

METHODES D'ANALYSE EN NON LINEARITE GEOMETRIQUE

21. Introduction

Dans la plupart des problèmes de mécanique des structures, le comportement devient non linéaire lorsque l'on augmente le chargement extérieur de manière à entraîner des grands déplacements et / ou des grandes déformations [13] [14]. On parle alors de non linéarité, celles-ci pouvant être d'origine matérielle (plasticité, viscoplasticité, etc....) ou bien d'origine purement géométrique. Les non –linéarités matérielles ne font pas l'objet de cette étude.

Lorsque la relation liant la déformation au déplacement n'est plus linéaire [4]: il devient nécessaire de prendre en compte des termes d'ordre deux dans l'expression des déformations. Le tenseur des déformations ε_{ij} n'est pas défini par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (21-1)$$

22. Justification de la non linéarité et hypothèses fondamentales

Dans les structures des dômes câbles à base de tenségrité, les éléments sont considérés comme membranes extensibles [1], et la raideur géométrique est souvent plus grande que la raideur élastique. C'est pour qu'oi on trouve que les modes non déformés de ces structures peuvent être le résultat de résistance par raideur géométrique uniquement. C'est cet aspect de structures extensibles qui les rendent différentes qu'autres structures. Ils ne peuvent pas être analysés sans considération de ce comportement de la non linéarité géométrique.

La théorie associée à une analyse non linéaire d'origine géométrique nécessite donc par rapport à la théorie linéaire classique des hypothèses supplémentaires qui sont :

- les différentes configurations déformées ne sont plus confondues avec la configuration de référence,
- dans la formulation des relations déplacements / déformations les termes quadratiques sont pris en compte en plus des termes linéaires.

Ces aspects ont pour effet de modifier la rigidité globale de la structure [13] [14] au fur et à mesure de sa déformation, par opposition à une analyse linéaire où la rigidité de la structure est supposée constante. De plus, bien que le calcul soit statique, la variable « temps » devient importante, pour repérer les différents états entre la configuration de référence et la configuration en équilibre sous des actions connues.

23. Les méthodes de résolution

Les méthodes de résolution sont généralement basées sur des processus incrémentaux. Elles consistent à appliquer par incrément successif un niveau de charge ou de déplacement et de trouver à chaque incrément la réponse de la structure [12]. Cette dernière est obtenue après avoir linéarisée sur chaque incrément les équations d'équilibre.

Ces méthodes incrémentales se divisent en deux types :

- méthode incrémentale pure,
- méthode incrémentale itérative.

23.1 Méthode incrémentale pure

Dans cette méthode, l'incrément de charge est imposé, la matrice de rigidité tangente permet d'avoir l'accroissement du déplacement correspondant. En effet, l'équilibre n'est pas corrigé dans ce cas ; entraînant souvent une divergence de la solution recherchée. Ce problème peut être évité en utilisant des incréments très petits, ce qui rend la méthode lourde, donc faiblement utilisée.

23.2 Méthode incrémentale itérative

La méthode incrémentale itérative utilise le même processus incrémental que la méthode précédente seulement, une correction de l'équilibre est introduite sur chaque incrément en utilisant un processus itératif. Cette correction peut se faire de plusieurs manières suivant le type de matrice de rigidité utilisée définissant ainsi plusieurs méthodes incrémentales itératives dont la plus connue est celle de Newton-Raphson.

23.3 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson utilise la matrice de rigidité tangente recalculée à chaque itération pour la correction de l'équilibre Fig. 23-1. Cette méthode a une convergence très rapide avec des résultats surs, mais son inconvénient principal réside dans le temps de calcul de l'actualisation de la matrice de rigidité tangente à chaque itération.

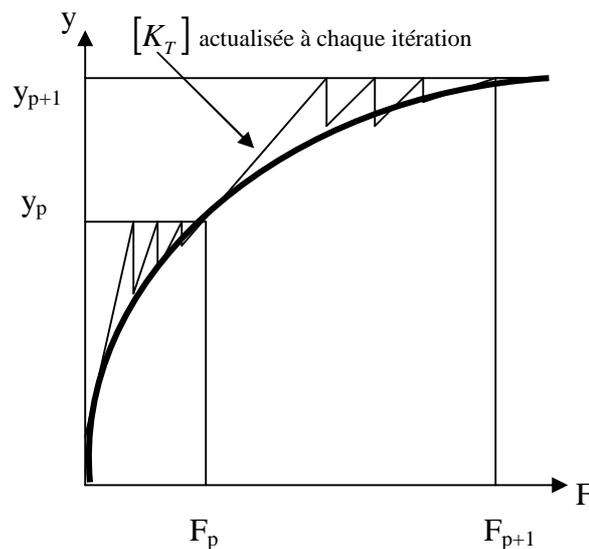


Fig. 23-1: Méthode de Newton-Raphson

24. Analyse en non linéarité géométrique : Formulation variationnelle

24.1 Hypothèses

Dans les paragraphes qui suivent nous allons exposer (avec les mêmes notations) la méthode développée par K KEBICHE [13] [14] sur les systèmes réticules en état de tenségrité comme suite à la base théorique des recherches de BATHE. Cette méthode est détaillée ici afin de son adaptation pour les dômes câbles à travers ceux conçus dans cette thèse. Une autre étude est citée à titre indicatif dans la référence [26] pour élargir les connaissances dans ce domaine.

Avant de commencer, il est nécessaire de présenter les hypothèses fondamentales faites :

- L'étude se situe dans le cadre des grands déplacements « non linéarités géométriques ».
- La loi de comportement rhéologique utilisée est celle des solides élastiques linéaires, qui se réduit à la loi de Hook.
- Les phénomènes d'instabilité globale ne sont pas traités dans ces travaux.

24.2 Notations et étapes de formulation

Les notations adoptées dans cette étude seront conformes à celles présentées par Bathe, à savoir que nous ferons apparaître les indices de la configuration d'observation et de la configuration de référence sur les variables.

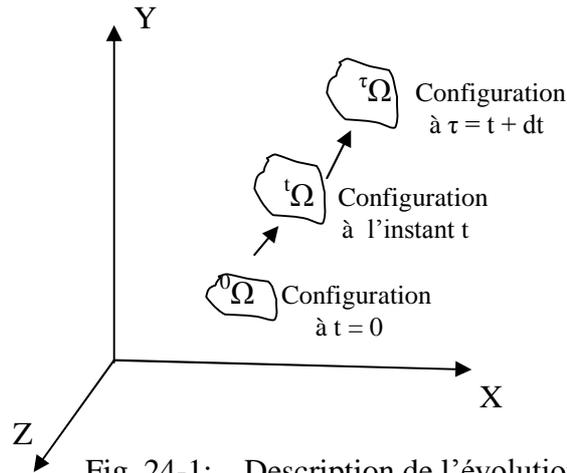


Fig. 24-1: Description de l'évolution du système

On note ${}^0\Omega$ la configuration d'un solide à l'instant $t = 0$ (Figure 24-1) dans laquelle on supposera qu'aucune action extérieure ne s'applique sur le solide, elle sera appelée configuration de référence et occupera le volume 0V . Soient en ${}^t\Omega$ et ${}^{t+dt}\Omega$ deux configurations très voisines (pour simplifier l'écriture on note $\tau = t + dt$). Chaque variable ${}^j_i\psi_{kl}$ est repéré par deux indices à gauche, l'indice « i » désigne l'instant par rapport auquel la grandeur est référenciée, l'indice « j » désigne le temps auquel elle est observée, « kl » sont les indices tensoriels habituels. Si, à un instant t , les quantités physiques sont référenciées par rapport à la configuration initiale ${}^0\Omega$, on parle de la formulation lagrangienne totale, et si ces quantités sont référenciées par rapport à une configuration ${}^t\Omega$, on parle alors de la formulation lagrangienne actualisée. Dans la suite de la présentation seule la formulation lagrangienne totale sera abordée.

**Étapes de formulation des équations d'équilibre
pour les structures réticulés autocontraintes**

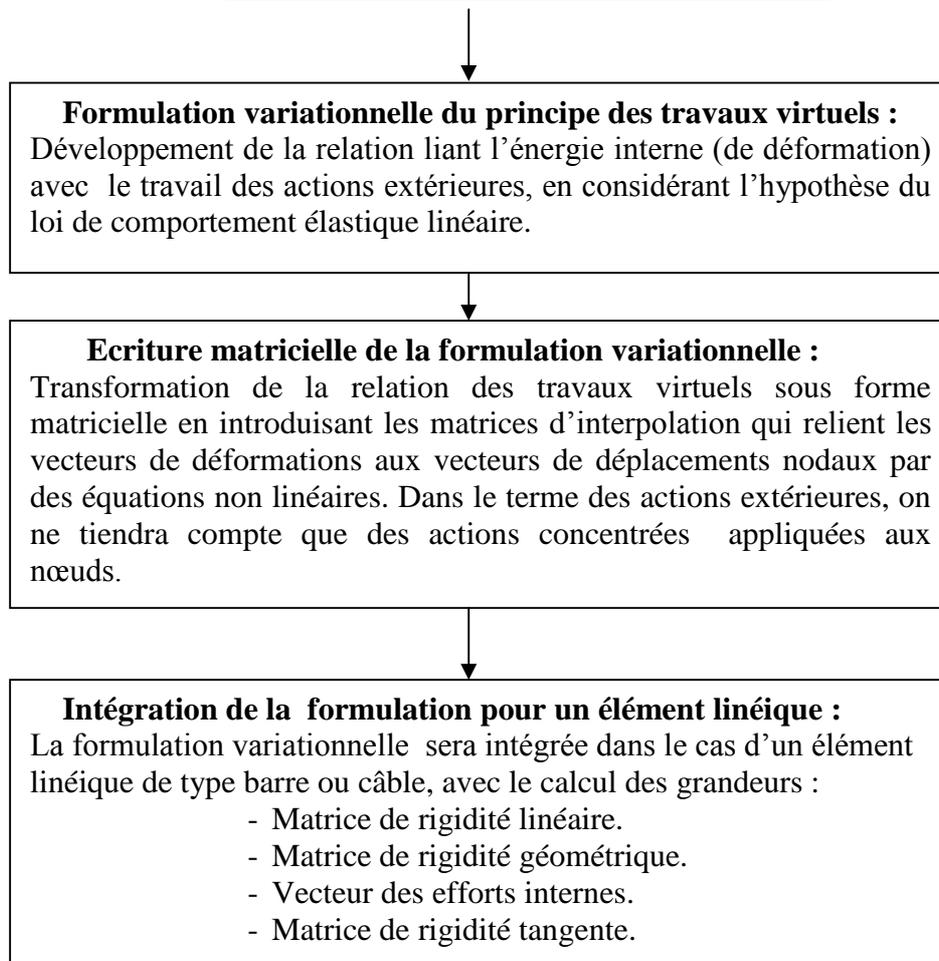


Fig. 24-2: Etapes de formulation des équations d'équilibre.

24.3 Formulation variationnelle du principe des travaux virtuels

Il est nécessaire d'effectuer la mise en place de cette formulation variationnelle afin de donner les expressions des quantités que l'on devra ensuite lors de la résolution du problème non linéaire associé. Il faut bien préciser ici, que dans ce genre de problème la formulation variationnelle est généralement incrémentale. Ceci est nécessaire si l'on considère des lois de comportement non élastique ou les contraintes dépendent du chemin des déformations. Cependant, dans le cadre des hypothèses faites (la loi de comportement est élastique linéaire) les contraintes sont indépendantes du chemin des déformations et a priori la procédure n'est pas nécessairement incrémentale. Toutefois, nous gardons tout au long de l'exposé de la méthode une formulation incrémentale pour deux raisons :

- 1 - D'une part, la procédure restant générale, elle permettra l'utilisation d'autres lois de comportement que celle envisagé dans cette thèse.
- 2 - D'autre part, elle permet d'éviter la divergence numérique (cette solution est souvent utilisée par Newton-Raphson dans la résolution des systèmes non linéaires).

Le principe des travaux virtuels en statique traduit l'égalité des énergies interne (énergie de déformation) et externe (travail des actions extérieures). Suivant la formulation Lagrangienne totale, l'expression du principe des travaux virtuels est donnée par :

$${}_{0v} \int_0^\tau S_{kl} \delta_0^\tau \varepsilon_{kl} \, dv = \delta^\tau \mathfrak{R} \quad (24-1)$$

Ou 0v est le volume occupé par la structure dans la configuration ${}^0\Omega$,

${}^\tau S_{ij}$ est la composante cartésienne du tenseur de contrainte de Piola – Kirchof observé à l’instant $\tau = t + dt$ par rapport à l’instant de référence $t = 0$,

${}^\tau \varepsilon_{ij}$ est la composante cartésienne (ij) du tenseur déformation totale de Green – Lagrange observé à l’instant $\tau = t + dt$ par rapport à l’instant de référence $t = 0$,

$\delta_0^\tau \varepsilon_{ij}$ étant sa variation infinitésimale.

$\delta^\tau \mathfrak{R}$ est la variation du travail des actions extérieures à l’instant τ .

Bathe propose une décomposition incrémentale des contraintes, des déformations et des déplacements, notés u , comme suit :

$${}^\tau S_{ij} = {}^t S_{ij} + {}^\tau S_{ij} \quad (24-2)$$

$${}^\tau \varepsilon_{ij} = {}^t \varepsilon_{ij} + {}^\tau \varepsilon_{ij} \quad (24-3)$$

$${}^\tau u_{i,j} = {}^t u_{i,j} + {}^\tau u_{i,j} \quad (24-4)$$

La déformation de Green- Lagrange s’exprime en fonction des dérivées partielles des déplacements par :

$${}^\tau \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i} + {}^t u_{m,i} {}^\tau u_{m,j}) \quad (24-5)$$

E utilisant les expressions (24-4) et (24-5) dans la relation (24-3), on obtient l’expression de la déformation totale de Green- Lagrange entre les deux instants infiniment voisins t et τ :

$${}^\tau \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^\tau u_{i,j} + {}^\tau u_{j,i} + {}^t u_{m,i} {}^\tau u_{m,j} + {}^t u_{m,j} {}^\tau u_{m,i} + {}^\tau u_{m,i} {}^\tau u_{m,j}) \quad (24-6)$$

Dans cette expression apparaissent des termes linéaires et des termes non-linéaires en ${}^\tau u$, ce qui nous amène naturellement à écrire la déformation de Green- Lagrange entre les deux instants t et τ sous la forme de la somme de deux termes :

$${}^\tau \varepsilon_{ij} = {}^\tau e_{ij} + {}^\tau \eta_{ij} \quad (24-7)$$

L’un linéaire en ${}^\tau u$:

$${}^\tau e_{ij} = \frac{1}{2} ({}^\tau u_{i,j} + {}^\tau u_{j,i} + {}^t u_{m,i} {}^\tau u_{m,j} + {}^t u_{m,j} {}^\tau u_{m,i}) \quad (24-8)$$

Et l’autre non-linéaire en ${}^\tau u$:

$${}^\tau \eta_{ij} = \frac{1}{2} ({}^\tau u_{m,i} {}^\tau u_{m,j}) \quad (24-9)$$

Les expressions de la variation de ces deux termes sont :

$$\delta {}^\tau e_{ij} = \frac{1}{2} (\delta {}^\tau u_{i,j} + \delta {}^\tau u_{j,i} + {}^t u_{m,i} \delta {}^\tau u_{m,j} + {}^t u_{m,j} \delta {}^\tau u_{m,i}) \quad (24-10)$$

$$\delta {}^\tau \eta_{ij} = \frac{1}{2} ({}^\tau u_{m,i} \delta {}^\tau u_{m,j} + {}^\tau u_{m,j} \delta {}^\tau u_{m,i}) \quad (24-11)$$

La configuration obtenue à l’instant t est une configuration connue, stable, les variables dans cette configuration sont connues et par conséquent leur variation est nulle, ceci nous permet d’écrire :

$$\delta {}^{\tau} \varepsilon_{ij} = \delta ({}^{\tau} \varepsilon_{ij} + {}^{\tau} \varepsilon_{ij}) = \delta {}^{\tau} \varepsilon_{ij} \quad (24-12)$$

$$\delta {}^t \varepsilon_{ij} = 0 \quad (24-13)$$

Tous calculs fait, l'expression (24-1) devient :

$${}_{0V} \int {}^{\tau} S_{ij} \delta {}^{\tau} \varepsilon_{ij} d^0v + {}_{0V} \int {}^t S_{ij} \delta {}^{\tau} \eta_{ij} d^0v = \delta {}^{\tau} \mathfrak{R} - {}_{0V} \int {}^t S_{ij} \delta {}^{\tau} e_{ij} d^0v \quad (24-14)$$

Dans le passage de l'instant t à l'instant infiniment voisin τ , une approximation du premier terme de l'expression (24-14) peut être envisagée en posant :

$${}^{\tau} S_{ij} = {}^{\tau} C_{ijkl} {}^{\tau} e_{kl} \quad \text{et} \quad \delta {}^{\tau} \varepsilon_{ij} = \delta {}^{\tau} e_{ij} \quad (24-15)$$

La première expression du système (24-15) est une loi de comportement incrémentale. Elle relie le tenseur de contrainte de Piola-Kirchhof observé à l'instant $\tau = t + dt$ par rapport à l'instant de référence t à la partie linéaire du tenseur de déformation de Green-Lagrange observé à l'instant $\tau = t + dt$ par rapport à l'instant de référence t. Dans le cadre de l'hypothèse faite (la loi de comportement matérielle est élastique linéaire) le tenseur des propriétés ${}^{\tau} C_{ijkl}$ est constant quelle que soit la configuration considérée. Dans le cas des systèmes réticulés, seule la déformation axiale des éléments est admise ainsi le tenseur ${}^{\tau} C_{ijkl}$ se réduit au module de Young E.

On obtient, entre ces deux instants infiniment voisins, une équation approchée du mouvement :

$${}_{0V} \int {}^{\tau} C_{ijkl} {}^{\tau} e_{kl} \delta {}^{\tau} e_{ij} d^0v + {}_{0V} \int {}^t S_{ij} \delta {}^{\tau} \eta_{ij} d^0v = \delta {}^{\tau} \mathfrak{R} - {}_{0V} \int {}^t S_{ij} \delta {}^{\tau} e_{ij} d^0v \quad (24-16)$$

Cette relation exprime la formulation variationnelle du principe des travaux virtuels. Elle fait intervenir les quatre termes que nous allons expliciter pour un élément linéique après avoir décrit sa formulation matricielle.

24.4 Ecriture matricielle de la formulation variationnelle

Comme dans une approche par éléments finis, l'écriture matricielle de la formulation variationnelle consiste à associer au problème (24-16) un système d'équations non linéaires. Pour réaliser cette opération il est nécessaire de considérer les différentes parties qui composent cette formulation intégrale et de se servir des différentes relations mises en place dans la théorie des éléments finis, en particulier en ce qui concerne les matrices d'interpolation des déformation linéaires ${}^t B_L$ et non linéaires ${}^t B_{NL}$. Ces matrices d'interpolation relient les vecteurs de déformations aux vecteurs de déplacements nodaux par :

$$\begin{cases} \{ {}^{\tau} e \} = [{}^t B_L] \{ {}^{\tau} u_n \} \\ \{ {}^{\tau} \eta \} = [{}^t B_{NL}] \{ {}^{\tau} u_n \} \end{cases} \quad (24-17)$$

Où : ${}^t B_L$ est la matrice des fonctions d'interpolation des déplacements linéaires.

${}^t B_{NL}$ est la matrice des fonctions d'interpolation des déplacements non linéaires.

Les termes de l'expression (24-16) peuvent être alors écrits sous la forme suivante :

$${}_{0V} \int {}^{\tau} C_{ijkl} {}^{\tau} e_{kl} \delta {}^{\tau} e_{ij} d^0v = \{ \delta {}^{\tau} \mu_n \}^T \int [{}^t B_L]^T [{}^{\tau} C] [{}^t B_L] d^0v \{ {}^{\tau} u_n \} \quad (24-18)$$

$${}_{0V} \int {}^t S_{ij} \delta {}^{\tau} \eta_{ij} d^0v = \{ \delta {}^{\tau} \mu_n \}^T \int [{}^t B_{NL}]^T [{}^t S] [{}^t B_{NL}] d^0v \{ {}^{\tau} u_n \} \quad (24-19)$$

$${}_{0v} \int_0^t S_{ij} \delta^{\tau} e_{ij} d^0v = \{ \delta^{\tau} u_n \}^T {}_{0v} \int [{}^t B_L]^T [{}^t S] {}^0 dv \quad (24-20)$$

Ainsi, on peut déduire la forme des différents termes de la matrice de rigidité tangente et le vecteur des efforts internes.

$$[{}^t K_L] = {}_{0v} \int [{}^t B_L]^T [{}^{\tau} C] [{}^t B_L] {}^0 dv \quad (24-21)$$

$[{}^{\tau} C]$ est la matrice des propriétés matérielles.

$$[{}^t K_{NL}] = {}_{0v} \int [{}^t B_{NL}]^T [{}^t S] [{}^t B_{NL}] {}^0 dv \quad (24-22)$$

$[{}^t S]$ est la matrice des contraintes de Piola-Kirchoff à l'instant t.

$$\{ {}^t F \} = {}_{0v} \int [{}^t B_L]^T \{ {}^t S \} {}^0 dv \quad (24-23)$$

Dans le troisième terme (24-23), on ne tiendra compte que des actions concentrées appliquées aux nœuds et notées ${}^{\tau} R$. Le travail des actions extérieures $\delta^{\tau} \mathfrak{R}$ est alors :

$$\delta^{\tau} \mathfrak{R} = {}^{\tau} R \delta^{\tau} u \quad (24-24)$$

En rassemblant tous ces termes, on obtient un système d'équations non linéaires associé au problème (24.13) de la forme :

$$\left([{}^t K_L] + [{}^t K_{NL}] \right) \{ {}^{\tau} u \} = \{ {}^{\tau} R \} - \{ {}^t F \} \quad (24-25)$$

Cette expression est générale ; elle peut être écrite pour n'importe quel type d'élément fini choisi en fonction de la physique du problème. Pour le cas qui nous concerne, un élément linéique du type « barre » sera choisi.

24.5 Intégration de la formulation pour un élément linéique

24.51 La cinématique de l'élément

La formulation variationnelle donnée par (24-16) sera maintenant intégrée dans le cas d'un élément linéique de type barre ou câble. Dans ce qui suit et, dans un souci de simplification, l'élément linéique sera généralement appelé « barre » pour désigner un élément linéique de rigidité unilatérale.

Afin de bien définir ce que sont les configurations initiale et déformée d'un élément d'une structure autocontrainte, il convient de bien rappeler les étapes suivantes :

Avant assemblage de structure, les éléments sont dans un état libre (sans chargement, ni autocontrainte) la longueur d'un élément est notée L^{lib} (longueur libre de fabrication). Après assemblage, la structure est stabilisée par un état d'autocontrainte, l'état de la structure dans cette configuration est appelée état de référence. A partir de cette géométrie, la structure sera soumise à un chargement extérieur et la configuration ainsi obtenue est dite en état chargé.

Il apparaît alors que la configuration initiale d'un élément est définie par sa longueur L^{lib} . Les composantes du déplacement suivant x, y et z sont notées respectivement u, v et w. Le passage d'un élément de l'état libre « fabrication » à la configuration déformée (Figure 24-3) peut être modélisé par le champ de déplacements cinématiquement admissible suivant :

$$\begin{aligned} {}^t u({}^0 x) &= \left(1 - \frac{{}^0 x}{L^{lib}} \right) {}^t u^1 + \frac{{}^0 x}{L^{lib}} {}^t u^2 \\ {}^t v({}^0 x) &= \left(1 - \frac{{}^0 x}{L^{lib}} \right) {}^t v^1 + \frac{{}^0 x}{L^{lib}} {}^t v^2 \\ {}^t w({}^0 x) &= \left(1 - \frac{{}^0 x}{L^{lib}} \right) {}^t w^1 + \frac{{}^0 x}{L^{lib}} {}^t w^2 \end{aligned} \quad (24-26)$$

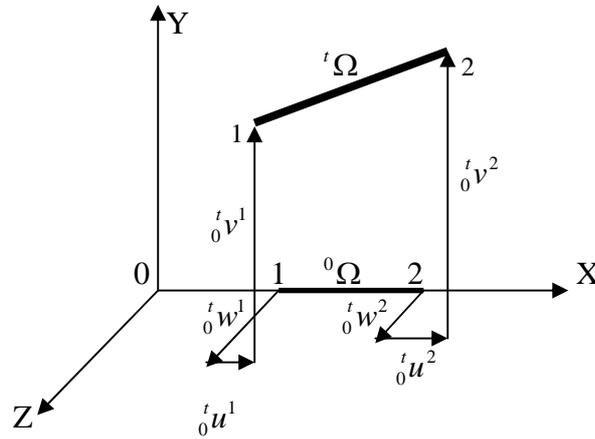


Fig. 24-3: Description de la déformation d'une barre

Où L^{lib} est la longueur de l'élément (longueur libre), ${}^t_0u^i$, ${}^t_0v^i$ et ${}^t_0w^i$ sont les composantes du déplacement du nœud i entre les instants 0 et t . Ce champ de déplacement nous permet de calculer les expressions des différentes parties de la matrice tangente et l'expression du vecteur des efforts internes en exploitant respectivement le premier, le second et le troisième terme de la relation (24-16).

24.52 Calcul de la matrice de rigidité linéaire K_L

Le premier terme de l'expression (24-16) fait intervenir la déformation linéaire e ainsi que sa variation δe . Du fait que la barre est unidirectionnelle, les indices i, j, k et l prennent le seul indice x . Avec ces notations, la relation (24-8) peut s'écrire comme suit :

$${}^\tau_t e_{xx} = {}^\tau_t u_{,x} + {}^t_0 u_{,x} {}^\tau_t u_{,x} + {}^t_0 v_{,x} {}^\tau_t v_{,x} + {}^t_0 w_{,x} {}^\tau_t w_{,x} \quad (24-27)$$

$$\text{Avec : } {}^\tau_t u_{,x} = \frac{d {}^\tau_t u}{d {}^0_x}, \quad {}^\tau_t v_{,x} = \frac{d {}^\tau_t v}{d {}^0_x}, \quad \text{et } {}^\tau_t w_{,x} = \frac{d {}^\tau_t w}{d {}^0_x} \quad (24-28)$$

De façon similaire, on peut écrire les expressions entre l'instant '0' et l'instant ' τ ' en remplaçant l'indice ' t ' par '0'.

En tenant compte du champ de déplacement cinématiquement admissible donné en (24-26), la variation de la déformation définie en (24-27) devient :

$$\delta_t^\tau e_{xx} = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ - \ B_1 \ - \ B_2 \ - \ B_3] \begin{Bmatrix} \delta {}^\tau_t u^1 \\ \delta {}^\tau_t v^1 \\ \delta {}^\tau_t w^1 \\ \delta {}^\tau_t u^2 \\ \delta {}^\tau_t v^2 \\ \delta {}^\tau_t w^2 \end{Bmatrix} \quad (24-29)$$

Où les B_i sont les fonctions d'interpolation des déplacements qui ont pour expression :

$$\begin{aligned}
 B_1 &= -\frac{1}{L^{lib}} + \frac{{}^t_0u^1}{(L^{lib})^2} - \frac{{}^t_0u^2}{(L^{lib})^2} \\
 B_2 &= \frac{{}^t_0v^1}{(L^{lib})^2} - \frac{{}^t_0v^2}{(L^{lib})^2} \\
 B_3 &= \frac{{}^t_0w^1}{(L^{lib})^2} - \frac{{}^t_0w^2}{(L^{lib})^2}
 \end{aligned} \tag{24-30}$$

La barre étant supposée de section constante d'aire notée A, l'intégrale sur le volume devient une intégrale linéique. Le tenseur de rigidité C_{ijkl} se réduit à la rigidité axiale de la barre qui est donnée par le module d'Young E. Le calcul de l'expression (24-18) permet de déduire la partie linéaire de la matrice de rigidité tangente de dimension (6x6) de la forme suivante :

$${}^t_0K_L = \begin{bmatrix} [k_L] & -[k_L] \\ -[k_L] & [k_L] \end{bmatrix} \tag{24-31}$$

Telle :

$$[k_L] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \tag{24-32}$$

Les composantes K_{ij} de la matrice $[k_L]$ sont déduites par une intégration simple des fonctions d'interpolation des déplacements, de la forme :

$$K_{ij} = EA \int_0^{L^{lib}} B_i B_j dx \tag{24-33}$$

Tous calculs faits, la partie linéaire de la matrice de rigidité t_0K_L peut être séparée en deux parties :

- La première matrice ${}^t_0K_{LA}$ composée de la matrice $[k_{LA}]$ symétrique est simplement la matrice de rigidité linéaire classique utilisée dans le cas des petits déplacements.

$$[k_{LA}] = EA \begin{bmatrix} \frac{1}{L^{lib}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{24-34}$$

- La seconde matrice ${}^t_0K_{LB}$ composée de la matrice $[k_{LB}]$ symétrique est celle qui modifie la matrice de rigidité linéaire en apportant des termes qui englobent les non – linéarités dues à la prise en compte des termes quadratiques dans l'expression des déformations complètes, elle est dite matrice de rigidité des déplacements initiaux.

$$\left[k_{LB} \right] = EA \begin{bmatrix} K_{11B} & K_{12B} & K_{13B} \\ K_{12B} & K_{22B} & K_{23B} \\ K_{13B} & K_{23B} & K_{33B} \end{bmatrix} \quad (24-35)$$

Ses composantes sont données par :

$$K_{11B} = -\frac{2 \ ^0u^1}{(L^{lib})^2} + \frac{2 \ ^0u^2}{(L^{lib})^2} + \frac{(\ ^0u^1)^2}{(L^{lib})^3} - \frac{2 \ ^0u^1 \ ^0u^2}{(L^{lib})^3} + \frac{(\ ^0u^2)^2}{(L^{lib})^3} \quad (24-36)$$

$$K_{22B} = \frac{\ ^0v^1}{(L^{lib})^2} + \frac{\ ^0v^2}{(L^{lib})^2} - \frac{2 \ ^0v^1 \ ^0v^2}{(L^{lib})^3} \quad (24-37)$$

$$K_{33B} = \frac{\ ^0w^1}{(L^{lib})^2} + \frac{\ ^0w^2}{(L^{lib})^2} - \frac{2 \ ^0w^1 \ ^0w^2}{(L^{lib})^3} \quad (24-38)$$

$$K_{12B} = -\frac{\ ^0v^1}{(L^{lib})^2} + \frac{\ ^0v^2}{(L^{lib})^2} + \frac{\ ^0u^1 \ ^0v^1}{(L^{lib})^3} - \frac{\ ^0u^1 \ ^0v^2}{(L^{lib})^3} - \frac{\ ^0u^2 \ ^0v^1}{(L^{lib})^3} + \frac{\ ^0u^2 \ ^0v^2}{(L^{lib})^3} \quad (24-39)$$

$$K_{13B} = -\frac{\ ^0w^1}{(L^{lib})^2} + \frac{\ ^0w^2}{(L^{lib})^2} + \frac{\ ^0u^1 \ ^0w^1}{(L^{lib})^3} - \frac{\ ^0u^1 \ ^0w^2}{(L^{lib})^3} - \frac{\ ^0u^2 \ ^0w^1}{(L^{lib})^3} + \frac{\ ^0u^2 \ ^0w^2}{(L^{lib})^3} \quad (24-40)$$

$$K_{23B} = \frac{\ ^0v^1 \ ^0w^1}{(L^{lib})^3} - \frac{\ ^0v^1 \ ^0w^2}{(L^{lib})^3} - \frac{\ ^0v^2 \ ^0w^1}{(L^{lib})^3} + \frac{\ ^0v^2 \ ^0w^2}{(L^{lib})^3} \quad (24-41)$$

24.53 Calcul de la matrice de rigidité géométrique K_{NL}

Le second terme de l'expression (24-16) fait intervenir la variation de la déformation non linéaire donnée par l'expression (24-11). Là aussi, les indices i, j et m prennent le seul indice x. La déformation non linéaire η_{xx} peut s'écrire comme suit :

$$\tau \eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[(\tau u_{,x})^2 + (\tau v_{,x})^2 + (\tau w_{,x})^2 \right] \quad (24-42)$$

Le calcul de l'expression (24-19) permet de déduire $\left[\ ^0B_{NL} \right]$

$$\left[\ ^0B_{NL} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (24-43)$$

En l'expression (24-22) permet de déduire la partie non linéaire de la matrice de rigidité tangente de dimension (6x6) de la forme :

$${}^t_0K_{NL} = \begin{bmatrix} [k_{NL}] & -[k_{NL}] \\ -[k_{NL}] & [k_{NL}] \end{bmatrix} \quad (24-44)$$

$$\text{Avec } [k_{NL}] = {}^t_0S_{11} A \int_0^{L^{lib}} \begin{bmatrix} \frac{1}{(L^{lib})^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(L^{lib})^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(L^{lib})^2} \end{bmatrix} d^0x \quad (24-45)$$

D'où :

$${}^t_0K_{NL} = \frac{{}^t_0S_{11} A}{L^{lib}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24-46)$$

Cette partie de la matrice de rigidité tangente, déduite des déformations non linéaires, est dite matrice de rigidité géométrique (ou des contraintes initiales). Elle est également symétrique.

Il est plus pratique d'exprimer dans cette matrice, la contrainte de Piola-Kirchoff en fonction de la tension actuelle tT dans l'élément. La relation entre ces deux valeurs est donnée par :

$${}^t_0S_{11} = \frac{L^{lib}}{{}^tL} \frac{{}^tT}{A} \quad (24-47)$$

24.54 Calcul du vecteur des efforts internes

Le dernier terme de l'expression (24-16) fait intervenir la variation de la déformation linéaire $\delta_i^T e_{xx}$ déjà calculée par l'expression (24-29). Le calcul de l'expression (24-23) permet d'obtenir le vecteur des efforts internes (de dimension (1x6)) relatif à l'élément choisi et que l'on mettra sous la forme suivante :

$$\left\{ {}^t_0F_b \right\} = {}^t_0S_{11} A \begin{Bmatrix} \{f\} \\ -\{f\} \end{Bmatrix} \quad (24-48)$$

$$\text{Tel que : } \{f\} = \begin{Bmatrix} -1 + \frac{{}^t_0u^1}{L^{lib}} - \frac{{}^t_0u^2}{L^{lib}} \\ \frac{{}^t_0v^1}{L^{lib}} - \frac{{}^t_0v^2}{L^{lib}} \\ \frac{{}^t_0w^1}{L^{lib}} - \frac{{}^t_0w^2}{L^{lib}} \end{Bmatrix} \quad (24-49)$$

24.55 Matrice de rigidité tangente

On peut maintenant donner l'expression du système non linéaire de dimension (6x6) associé au problème (24-16) dans le repère intrinsèque de la barre (x, y, z) :

$$\begin{bmatrix} {}^t K_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^\tau u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^\tau R \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^t F_b \end{Bmatrix} \quad (24-50)$$

$$\text{Avec } {}^t K_b = {}^t K_{LA} + {}^t K_{LB} + {}^t K_{NL} \quad (24-51)$$

Un système analogue de dimension (nxn) est écrit pour l'ensemble des éléments de la structure en référence au repère global de la structure, n étant le nombre de degrés de liberté total de la structure.

$$\begin{bmatrix} {}^t K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^\tau u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^\tau R \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^t F \end{Bmatrix} \quad (24-52)$$

Où $\begin{bmatrix} {}^t K \end{bmatrix}$ est la matrice de rigidité tangente de la structure, $\begin{Bmatrix} {}^t F \end{Bmatrix}$ le vecteur des efforts internes, $\begin{Bmatrix} {}^\tau R \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^t F \end{Bmatrix}$ est appelé « résidu » du système non linéaire.

24.6 Algorithme de résolution

L'expression (24-52) représente un système d'équations non linéaires et la méthode de résolution utilisée pour ce type de problème est celle de Newton-Raphson. Nous aurons à considérer plusieurs états d'équilibre correspondant chacun à un pas de chargement. Pour chacun de ces pas, une résolution itérative par correction des variables sera utilisée pour faire converger le système vers un état d'équilibre.

Les systèmes réticulés autocontraints sont sollicités par des actions extérieures à partir de leur état de référence. L'introduction de cette configuration le système est stabilisé par un état d'autocontrainte choisi au préalable. L'introduction de cette autocontrainte dans l'algorithme de résolution se fait à travers la matrice dite des contraintes initiales définie par (24-46) et par le vecteur des efforts internes défini par (24-48). On rappelle que dans les conditions initiales ce vecteur est nul puisque ces nœuds sont en équilibre dans la configuration de référence. L'algorithme de résolution est résumé par le schéma suivant :

Dans la configuration de référence

Calculer $[K_{LA}]^0$

Calculer $[K_{NL}]^0$

Initialiser $[K_{LB}]^0 = 0$ et $\{F\}^0 = 0$

Pas de charge (p)

Itération (i)

Résolution du système non linéaire

$$\begin{bmatrix} {}^{p-1}K_{LA} & & \\ & {}^{p-1}K_{LB} & \\ & & {}^{p-1}K_{NL} \end{bmatrix}^{i-1} \{\Delta u\}^i = \{R\}^p - \{F\}^{p-1, i-1}$$

Correction des déplacements

$$\{u\}^{p-1, i} = \{u\}^{p-1, i-1} + \{\Delta u\}^i$$

Calcul des nouvelles matrices

$$\begin{bmatrix} {}^{p-1}K_{LB} \end{bmatrix}^i \text{ et } \begin{bmatrix} {}^{p-1}K_{NL} \end{bmatrix}^i$$

Calcul du nouveau vecteur des efforts internes

$$\{F\}^{p-1, i}$$

Evaluation du résidu ; test de convergence

$$\text{Résidu} = \{R\}^p - \{F\}^{p-1, i}$$

L'équilibre est satisfait quand le résidu devient négligeable

Si pas d'équilibre, passage à l'itération suivante

Itération i + 1

Si équilibre, passage au pas de charge suivante

Pas de charge (p+1).

Fig. 24-4: Algorithme de résolution de la méthode développée par [13] [14].

(Une présentation du logiciel de calcul est annexée en A).

25. Conclusion de la deuxième partie

En premier lieu nous avons cité le principe de calcul de trois méthodes plus connues de recherche de forme ; première étape de calcul des dômes câbles, il a été suivi par les avantages et les inconvénients de chaque méthode. Cette présentation est faite ici pour enrichir l'aspect théorique et comparatif des outils de calcul.

En deuxième phase nous avons détaillé – pour des fins utilitaires- dans le premier chapitre l'exposé de la méthode adaptée par [32] [33] comme suite aux recherches faites par [PELLEGRINO S. et CALLADINE C.R (1986)] sur les systèmes réticulés auto contraints, elle transforme l'écriture des relations d'équilibre des nœuds et de compatibilité sous forme matricielle pour obtenir les mécanismes et les bases d'autocontrainte, c'est une méthode mathématique qui utilise une série d'opérations matricielles pour aboutir à la solution.

Dans le premier chapitre ; nous avons constaté à travers l'exposé des méthodes de recherche de forme, qu'elles ne s'adaptent pas facilement aux dômes câbles complexes sans l'aide de calculs automatiques, cette constatation a rendu nécessaire le développement d'une méthode simple de calcul direct des bases d'autocontraintes basée sur le principe d'équilibre des nœuds et le processus d'introduction et de la recherche de l'autocontrainte dans les éléments. En comparaison à la méthode adaptée en [32] [33], et sur un exemple traité, cette procédure a donné une meilleure adaptation aux dômes câbles.

Dans le deuxième chapitre ; nous avons montré par une introduction aux calculs en non linéarité géométrique que les structures de dômes câbles caractérisées par une grande flexibilité ne peuvent pas être analysées sans tenir compte de la non linéarité géométrique. Et avant de commencer l'exposé de la méthode développée dans [13] [14] nous avons cité les méthodes de résolution non linéaire pour donner une banque de terminologie au lecteur afin de faciliter la compréhension des termes utilisés par la suite.

Cette méthode a été basée sur la formulation variationnelle du principe des travaux virtuels, ce principe ; en statique traduit l'égalité des énergies interne (énergie de déformation) et externe (travail des actions extérieures). Cette relation sera Transformée sous forme matricielle en introduisant les matrices d'interpolation qui relient les vecteurs de déformations aux vecteurs de déplacements nodaux par des équations non linéaires. Dans le terme des actions extérieures, on ne tiendra compte que des actions concentrées appliquées aux nœuds. La formulation variationnelle sera intégrée dans le cas d'un élément linéique de type barre ou câble, avec le calcul des grandeurs :

- Matrice de rigidité linéaire.
- Matrice de rigidité géométrique.
- Vecteur des efforts internes.
- Matrice de rigidité tangente.

Et par l'intermédiaire du logiciel qui sera exposé en annexe A, cette méthode sera adaptée aux calcul des dômes conçus dans la troisième partie.

Troisième partie :

RESULTATS NUMERIQUES

Troisième partie :

RESULTATS NUMERIQUES

26. Introduction :

Cette partie est consacrée à l'étude numérique du comportement mécanique en non linéarité géométrique des dômes câbles à base de tenségrité. Il s'agit de concevoir d'abord de structures stables, et de les solliciter par la suite en chargement extérieur pour étudier numériquement leur comportement mécanique.

Les structures conçues se présentent comme suit :

- module plan à quatre câbles et une barre ;
- module à huit câbles et une barre ;
- dôme à seize câbles et quatre barres ;
- dôme à vingt câbles et cinq barres ;
- dôme à quarante deux câbles et douze barres.

Le choix de conception de ces structures est basé sur le principe de faire un départ par des modèles simples en état de tenségrité pour pouvoir maîtriser la vérification des calculs et par la suite le jugement de l'adaptation des méthodes et logiciels utilisés, aussi pour dominer pas à pas le volet conceptuel. Une fois arriver au dôme câble complexe d'une vraie grandeur ; la procédure devienne habituelle et simple à suivre.

Dans un premier lieu ; nous allons étudié la conception, la détermination des mécanismes, et la stabilisation par autocontrainte des dômes conçus.

Et en deuxième phase; et une fois le système est défini, stabilisé, le dôme étudié sera chargé statiquement par des forces ponctuelles avec variation de l'intensité de la charge, en introduisant le paramètre d'influence de la précontrainte initiale dans les câbles. La troisième étape consiste en l'illustration par les graphes et l'interprétation du comportement mécanique de ces structures, avec la présentation de l'évolution de la tension et de la compression dans les différents éléments de la structure. L'étude du dernier dôme sera détaillée par un complément sur le paramètre de variation de la portée de la structure ainsi que celui de la variation de la section des câbles et des barres, avec une simple analyse d'ordre de grandeur du déplacement des nœuds comparé à celui du dôme de la Géorgie.

Cette partie sera finalisée par une conclusion qui résume les résultats, constatations et commentaires sur le comportement mécanique des dômes câbles à travers les cas traités dans cette thèse.

RESULTATS NUMERIQUES

27. Objet et outils

Dans ce qui suit ; nous allons étudier la conception des dômes câbles à base de tenségrité et la recherche de forme des structures qui seront conçues sous différentes formes ; en plan et en 3D.

Nous utilisons ici les notions exposées dans le chapitre 1 de la deuxième partie de cette thèse, il s'agit principalement de l'application de la méthode de recherche de forme adaptée par [32] [33] et celle proposée dans le même propos.

L'étape de recherche de forme sera suivie par l'étude de comportement en non linéarité géométrique, nous allons solliciter ces structures sous chargement ponctuel statique pour étudier leur comportement mécanique. L'influence du paramètre de la précontrainte et l'évolution des efforts dans les différents éléments seront pris en considération dans cette étude. Pour le dernier cas des dômes étudiés ; une étude supplémentaire sera faite en introduisant le paramètre de variation de la portée de la structure et celui de la variation des sections des câbles et des barres.

Nous allons adapté ici la méthode développée par [13] [14] relative à l'analyse en non linéarité géométrique, les résultats obtenus seront illustrés sous formes graphiques pour pouvoir les interpréter et commenter.

28. Caractéristiques géométriques et mécaniques des éléments

Pour toute l'étude de comportement, les aires des sections des câbles et des barres, ainsi que les modules d'Young, ont été choisis -à titre purement pédagogique- comme suivent :

$$A_b = 0,325 \text{ cm}^2 \text{ (Aire de la section des barres en acier)}$$
$$E_b = 20000 \text{ KN/ cm}^2 \text{ (module d'Young des barres en acier)}$$

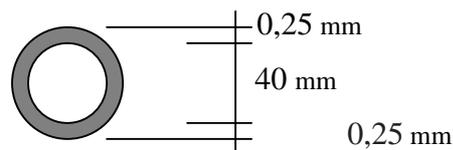


Fig. 28-1: Aire de la section transversale des barres en acier.

$$A_c = 0,28 \text{ cm}^2 \text{ (Aire de la section des câbles en acier)}$$
$$E_c = 4000 \text{ KN/ cm}^2 \text{ (module d'Young des câbles en acier)}$$

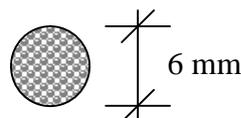
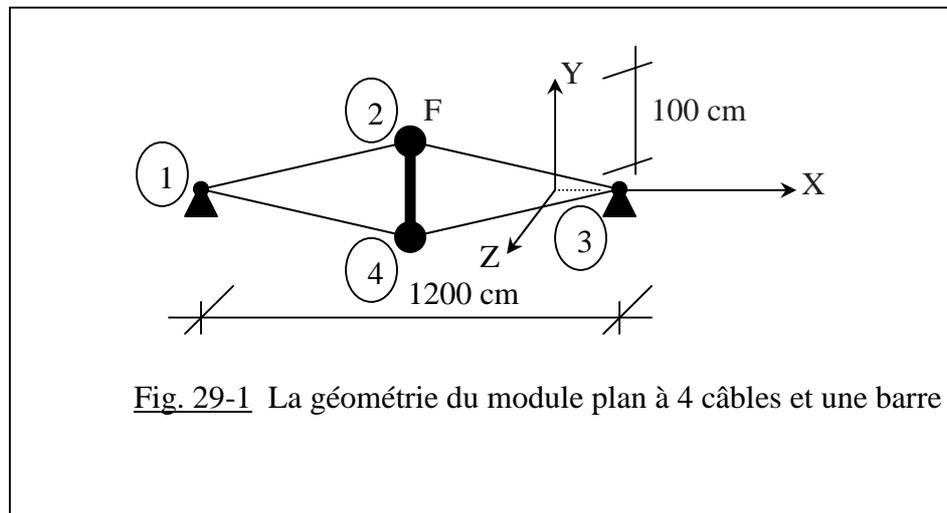


Fig. 28-2: Section transversale des câbles.

29. Application 1 : Module plan à quatre câbles et une barre

29.1 Géométrie de la structure

Il s'agit d'un module simple de dôme câble plan, constitué de quatre câbles entourant une barre centrale. La géométrie Fig. 29-1 de cette structure est donnée dans le tableau [Tabl. 29-1].



Nœuds	X	Y	Z
1	-1000	0	0
2	-400	50	0
3	200	0	0
4	-400	-50	0

29.2 Mécanismes

Ce module a fait objet de calcul détaillé des mécanismes dans la deuxième partie de cette thèse (voir paragraphe 19.62) en application de la méthode de la matrice d'équilibre, les deux mécanismes, possibles de cette structure sont donnés dans la Fig. 29-2.

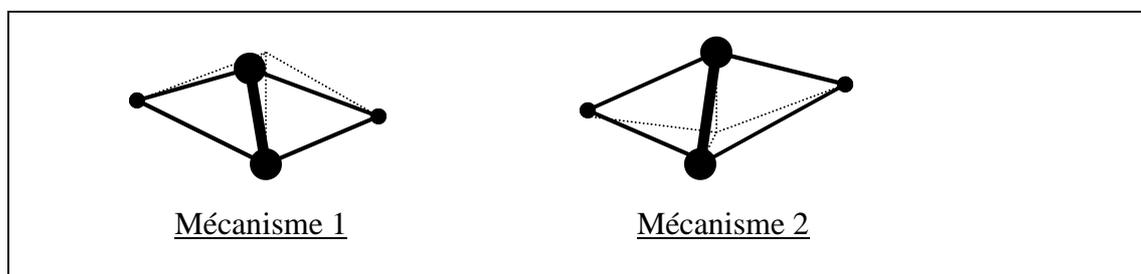


Fig. 29-2: Les deux mécanismes possibles du module plan à 4 câbles et une barre.

On constate bien que ces mécanismes représentent un déplacement des nœuds 2 et 4 hors plan, c-a-d, ce déplacement est suivant l'axe Z sans aucune déformation pour chacun des éléments.

29.3 Autocontraintes

Après détermination des mécanismes possibles, on cherchera ici la base d'autocontrainte pour stabiliser ce module du dôme. Il s'agit d'un retour à la position initiale, par introduction d'un système de forces internes dans les câbles et les barres sans application de forces extérieures.

La procédure de calcul en application des deux méthodes comparées a été détaillée dans les paragraphes : 19.63 et 20.6. Il en résulte que les deux méthodes aboutissent au même résultat. La structure relationnelle et le vecteur d'autocontrainte sont résumés dans le tableau [Tabl. 29-2].

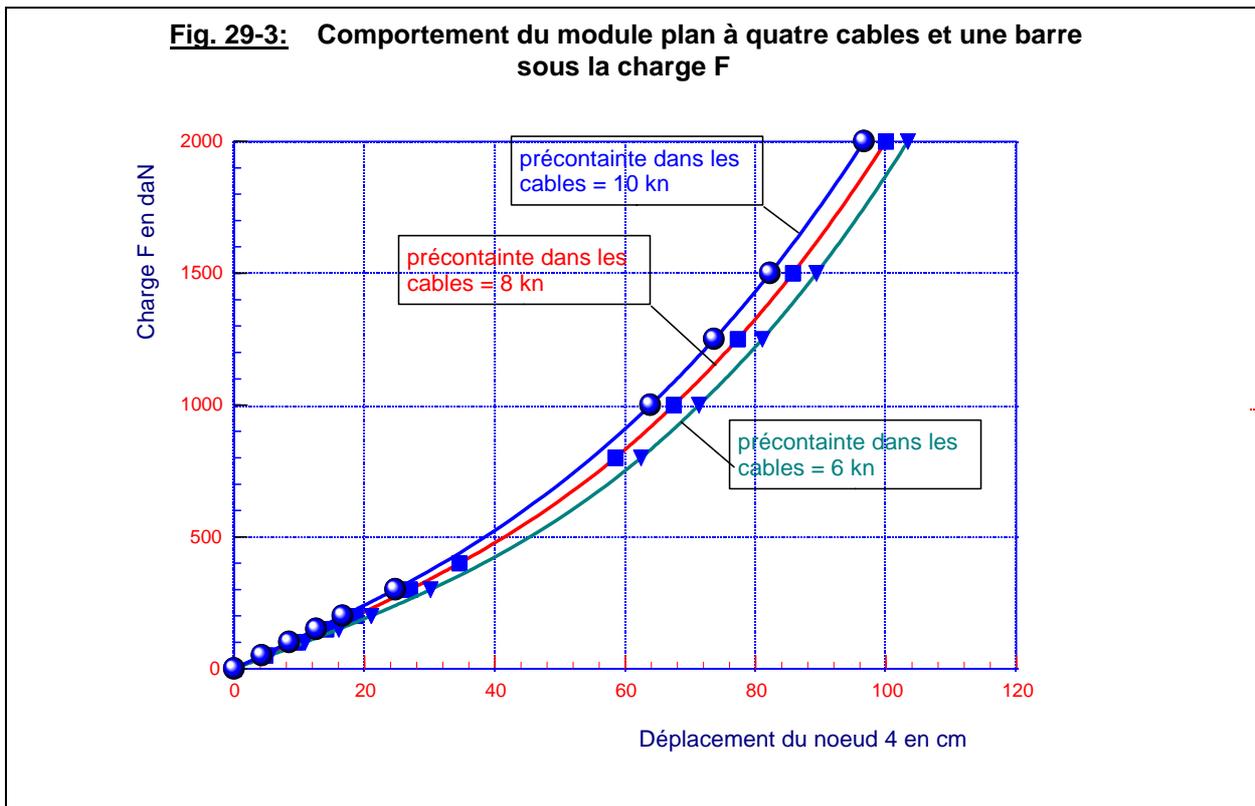
Elément	N° des nœuds de l'élément		Nature	Base d'autocontrainte	Longueur (en cm)	Tension en KN)		
	1	2				1	2	3
1	1	2	Câbles	1	602,08	-6.00	-8.00	-10.00
2	2	3		1	602,08	-6.00	-8.00	-10.00
3	3	4		1	602,08	-6.00	-8.00	-10.00
4	1	4		1	602,08	-6.00	-8.00	-10.00
5	2	4	Barre	-1	100,00	+ 0.996	+ 1.333	1.667

Tabl. 29-2: Structure relationnelle et tension initiale du module plan à quatre câbles et une barre.

29.4 Comportement mécanique

La procédure d'étude choisie consiste à bloquer la section représentée par les deux nœuds 1 et 3 (les nœuds sont totalement bloqués suivant les trois directions), (figure : 29-1) et à solliciter la section représentée par le nœud 2 par une force concentrée sur ce nœud et dirigée vers le bas.

Lors du chargement suivant l'axe Y de la barre 5 dans le sens de la gravité, la figure suivante (Fig. 29-3) montre que le comportement du module est non linéaire, la structure se rigidifie au fur et à mesure que la charge extérieure augmente, la rigidité de la structure augmente aussi proportionnellement avec la précontrainte initiale appliquée au niveau des câbles.



L'évolution de la traction dans les câbles, est non linéaire (Fig. 29-4). Pour les câbles : 1 et 2, la tension diminue jusqu'à une valeur de 400 daN, elle augmente au fur et à mesure que la charge augmente après la valeur de $F = 800$ daN.

Pour les câbles 3 et 4, la tension augmente au fur et à mesure que la charge augmente. Au niveau de la barre 5, le comportement est purement linéaire (Fig. 29-5). La compression augmente proportionnellement avec la charge extérieure.

Fig. 29-4: Evolution de la traction dans les cables
 Module plan à quatre cables et une barre
Précontrainte initiale = 8 KN

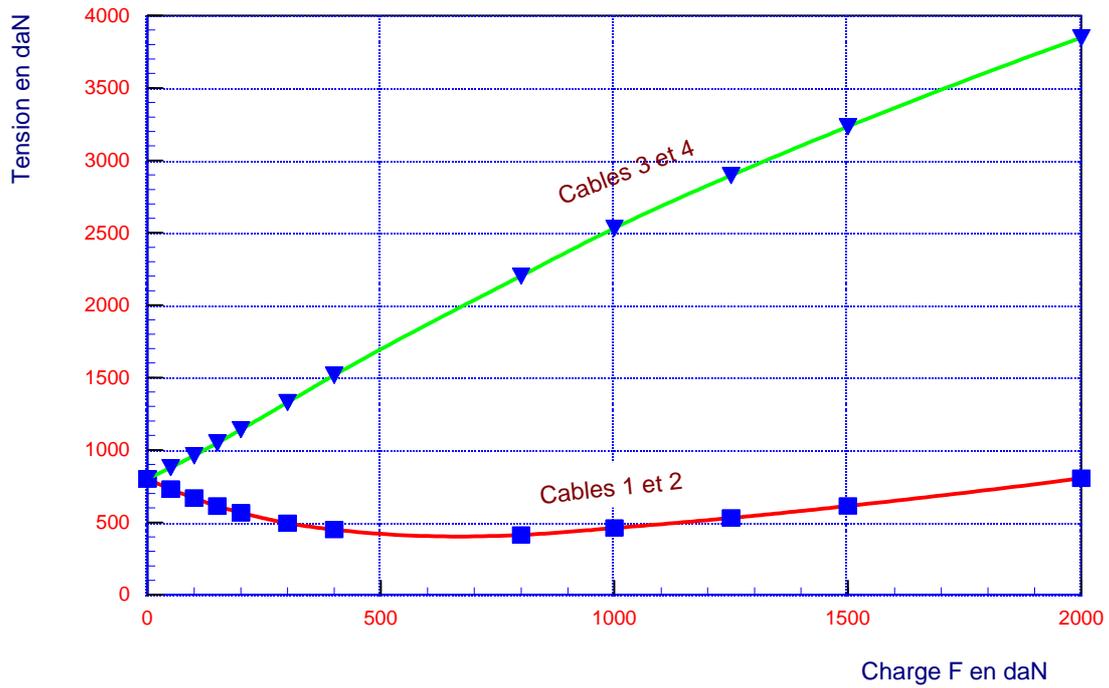
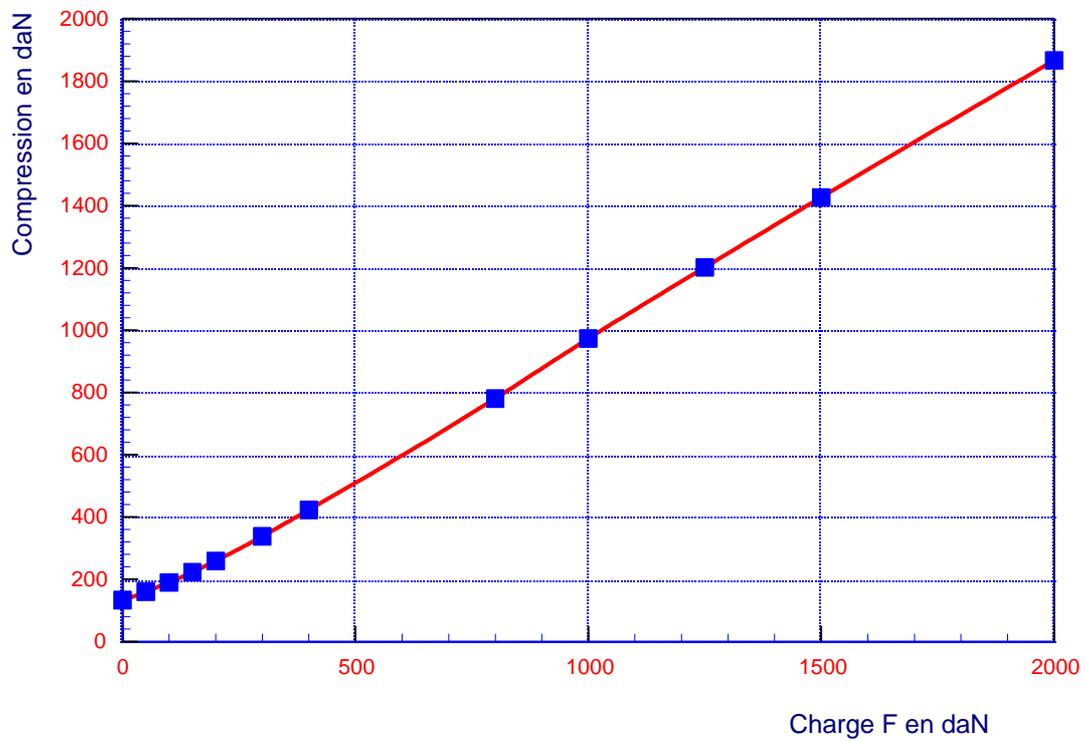


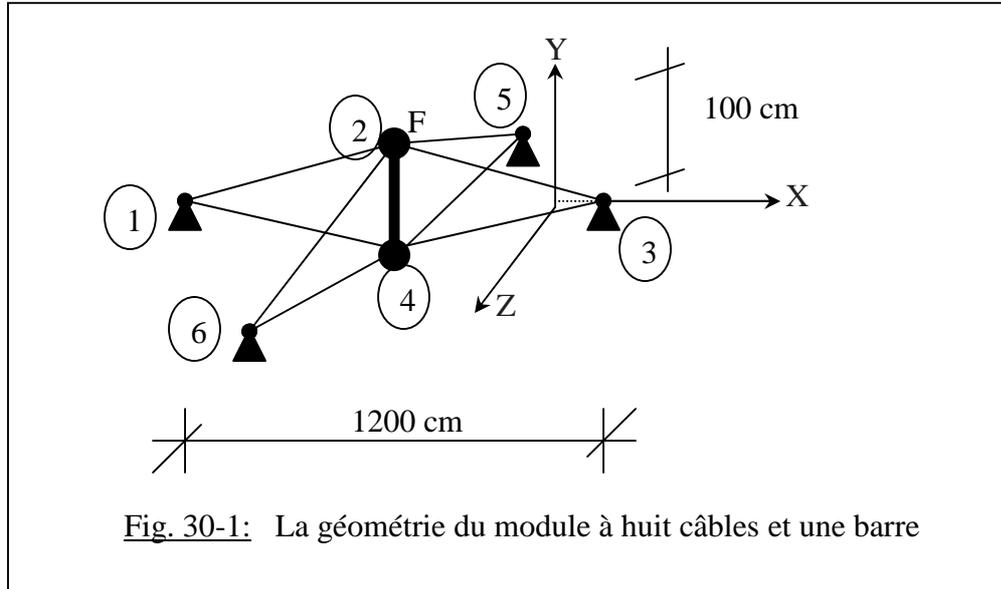
Fig. 29-5: Evolution de la compression dans la barre 5.
 Module plan à quatre cables et une barre
Précontrainte initiale = 8 KN



30. Application 2 : Module à huit câbles et une barre

30.1 Géométrie de la structure

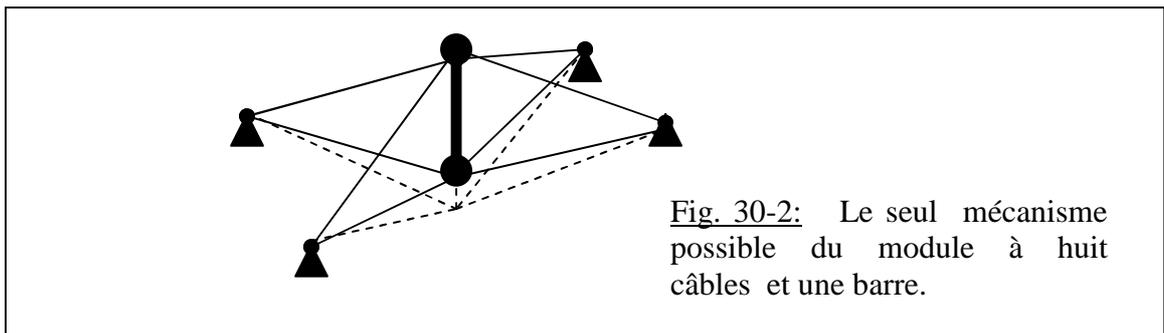
Pour aboutir à ce dôme, on double le module précédent (Fig. 29-1) pour passer à un module en 3D, le dôme résultant sera constitué donc de huit câbles, entourant une barre centrale. La géométrie Fig. 30-1 de cette structure est donnée dans le tableau [Tabl. 30-1].



Nœuds	X	Y	Z
1	-1000	-200	0
2	-400	-150	0
3	+200	-200	0
4	-400	-250	0
5	-400	-200	-600
6	-400	-200	+600

30.2 Mécanismes

Le calcul a été mené avec la même procédure que précédemment en application de la méthode de la matrice d'équilibre, le seul mécanisme possible de cette structure est donné dans la Fig. 30-2.



Ce mécanisme représente un déplacement des nœuds 2 et 4 suivant l'axe Y. Suivant la direction des Z ; la structure devienne stabilisée avec sa propre forme géométrique.

30.3 Autocontraintes

Après détermination du seul mécanisme possible, on cherchera ici la base d'autocontrainte pour stabiliser ce dôme. En application des deux méthodes comparées, il en résulte qu'elles aboutissent au même résultat. La structure relationnelle et le vecteur d'autocontrainte sont résumés dans le tableau [Tabl. 30-2].

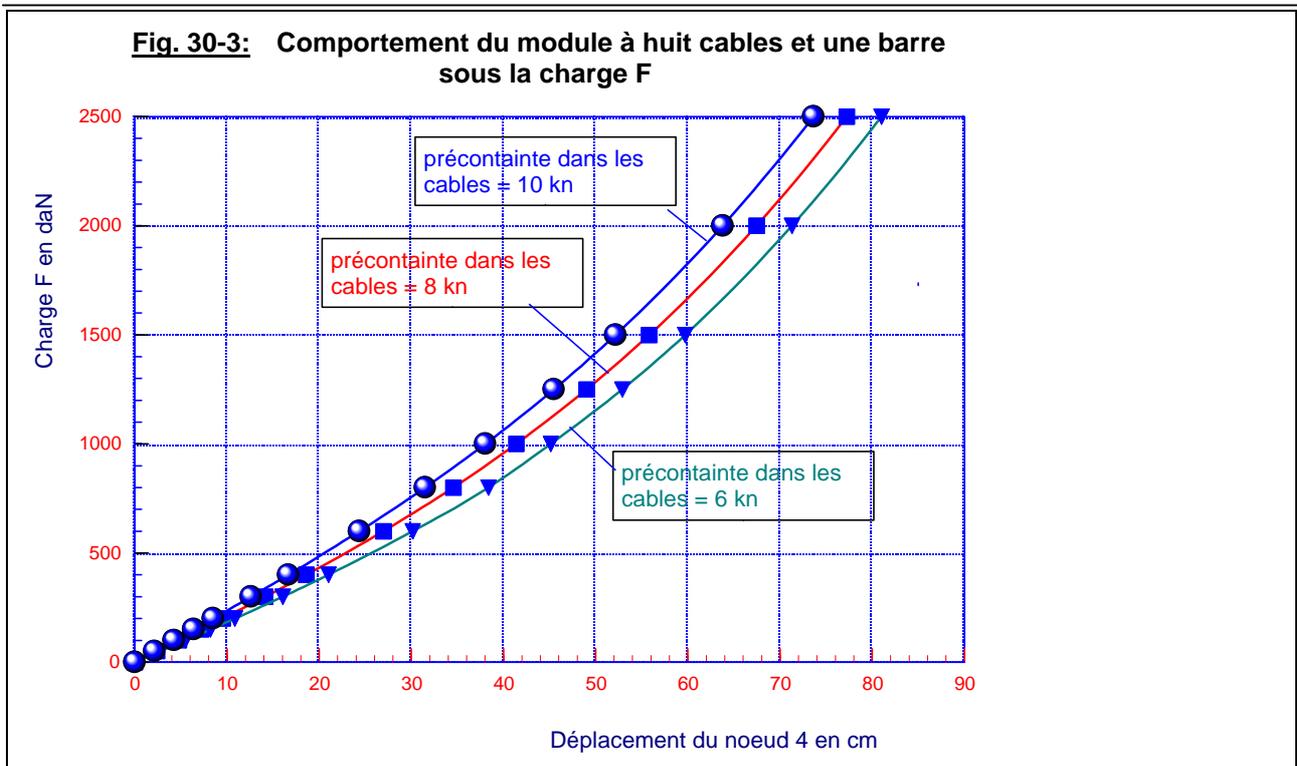
Elément	N°des nœuds de l'élément		Nature	Base d'autocontrainte	Longueur (en cm)	Tension (en KN)		
1	1	2	Câbles	1	602,08	-6.00	-8.00	-10.00
2	2	3		1	602,08	-6.00	-8.00	-10.00
3	3	4		1	602,08	-6.00	-8.00	-10.00
4	4	1		1	602,08	-6.00	-8.00	-10.00
5	2	4	Barre	-0,5	100,00	+ 1.932	+ 2.667	+3.320
6	2	5	Câbles	1	602,08	-6.00	-8.00	-10.00
7	4	5		1	602,08	-6.00	-8.00	-10.00
8	2	6		1	602,08	-6.00	-8.00	-10.00
9	4	6		1	602,08	-6.00	-8.00	-10.00

Tabl. 30-2: Structure relationnelle et tension initiale du module à huit câbles et une barre.

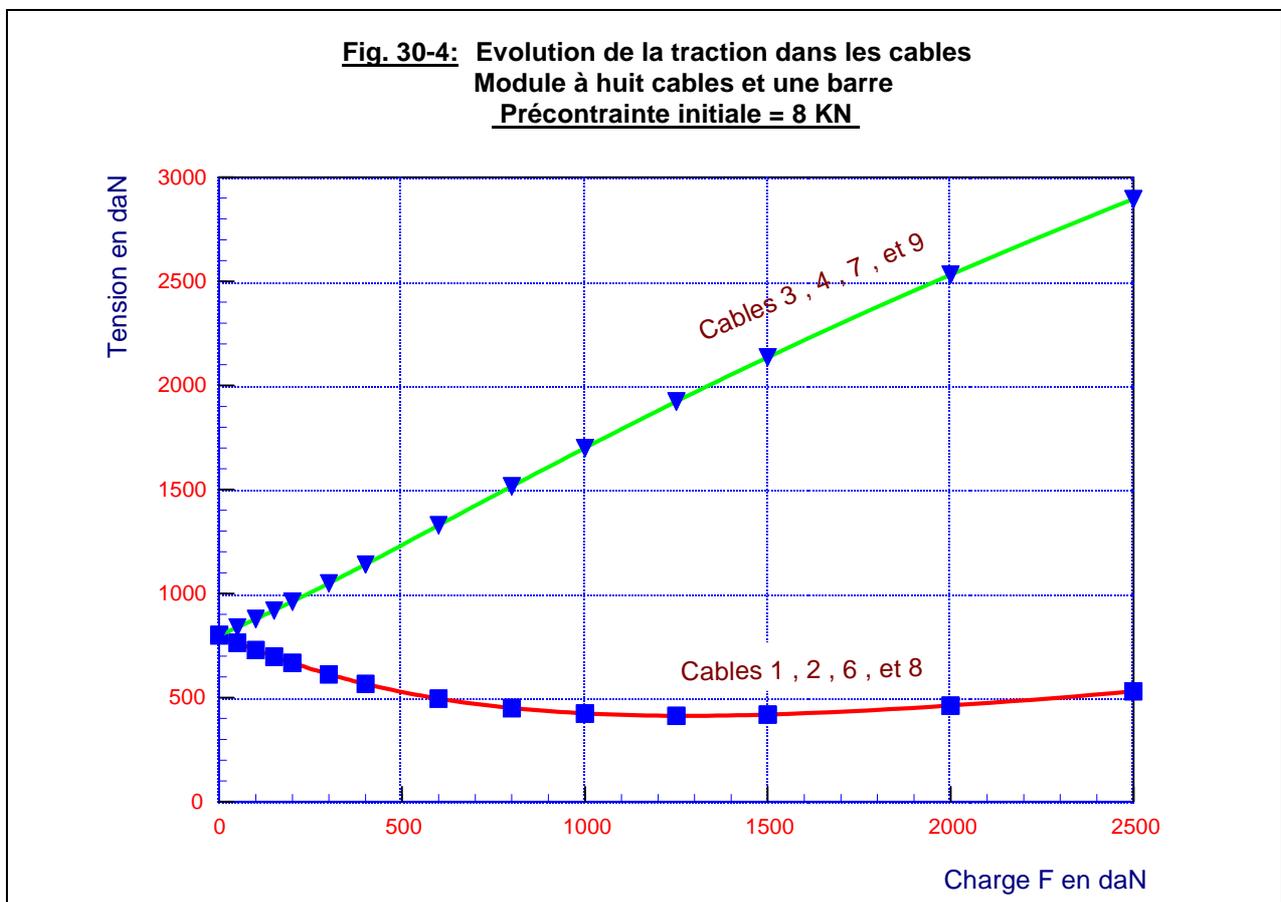
30.4 Comportement mécanique

La procédure d'étude choisie consiste à bloquer la section représentée par les quatre nœuds 1, 3, 5 et 6 (les nœuds sont totalement bloqués suivant les trois directions), (figure : 30-1) et à solliciter la section représentée par le nœud 2 par une force concentrée sur ce nœud et dirigée vers le bas.

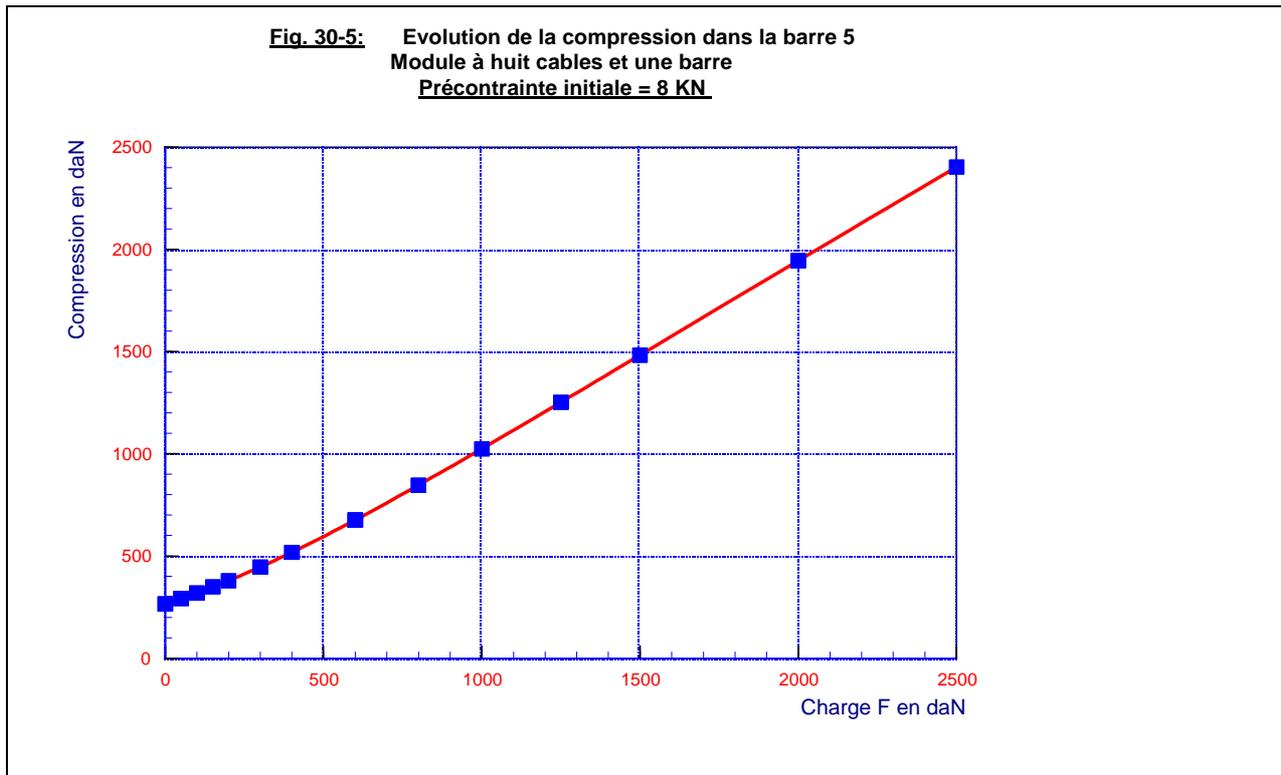
Lors du chargement suivant l'axe Y de la barre 5 dans le sens de la gravité, la figure suivante (Fig. 30-3) montre que le comportement du module est non linéaire, la structure se rigidifie au fur et à mesure que la charge extérieure augmente, la rigidité de la structure augmente aussi proportionnellement avec la précontrainte initiale appliquée au niveau des câbles.



En ce qui concerne l'évolution de la tension dans les câbles, la figure (Fig. 30-4) montre un comportement non linéaire. Les câbles supérieurs (1, 2, 6, et 8) se relâchent au fur et à mesure que la charge F augmente jusqu'au palier du $F = 1000$ au $F = 1500$ daN, après ce seuil, ces câbles commencent à se rigidifier. Les câbles inférieurs (3, 4, 7 et 9) se rigidifient proportionnellement avec l'augmentation de la charge F.



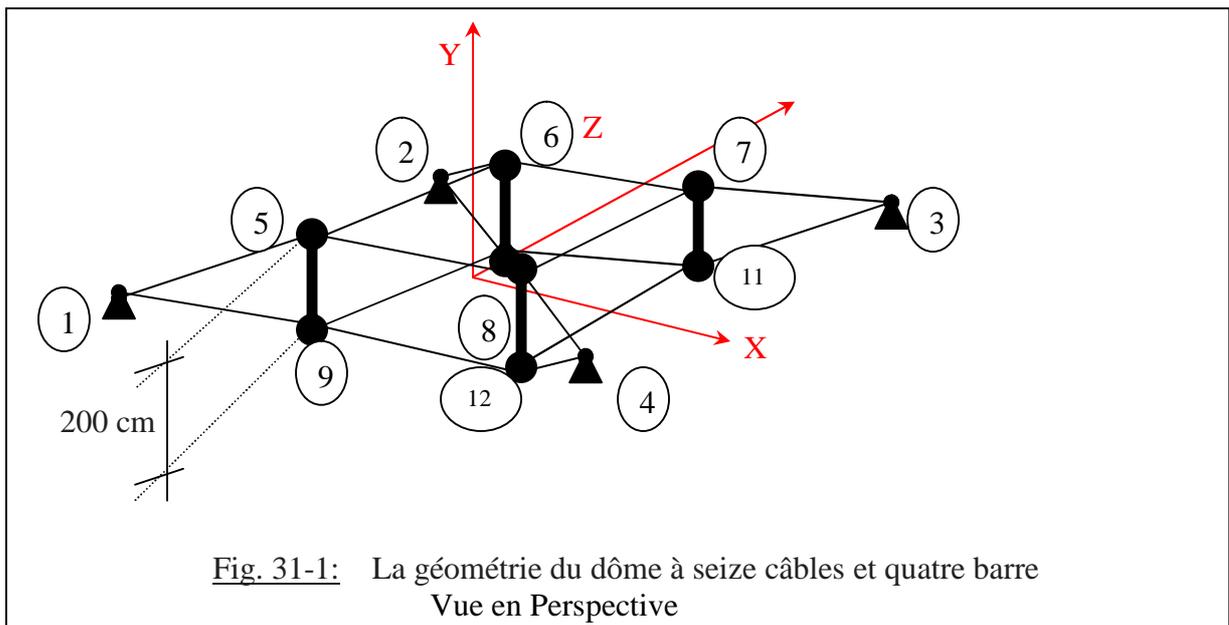
Par contre la barre centrale, possède un comportement linéaire (Fig. 30-5). La compression dans la barre 5 augmente au fur et à mesure que la charge F augmente.

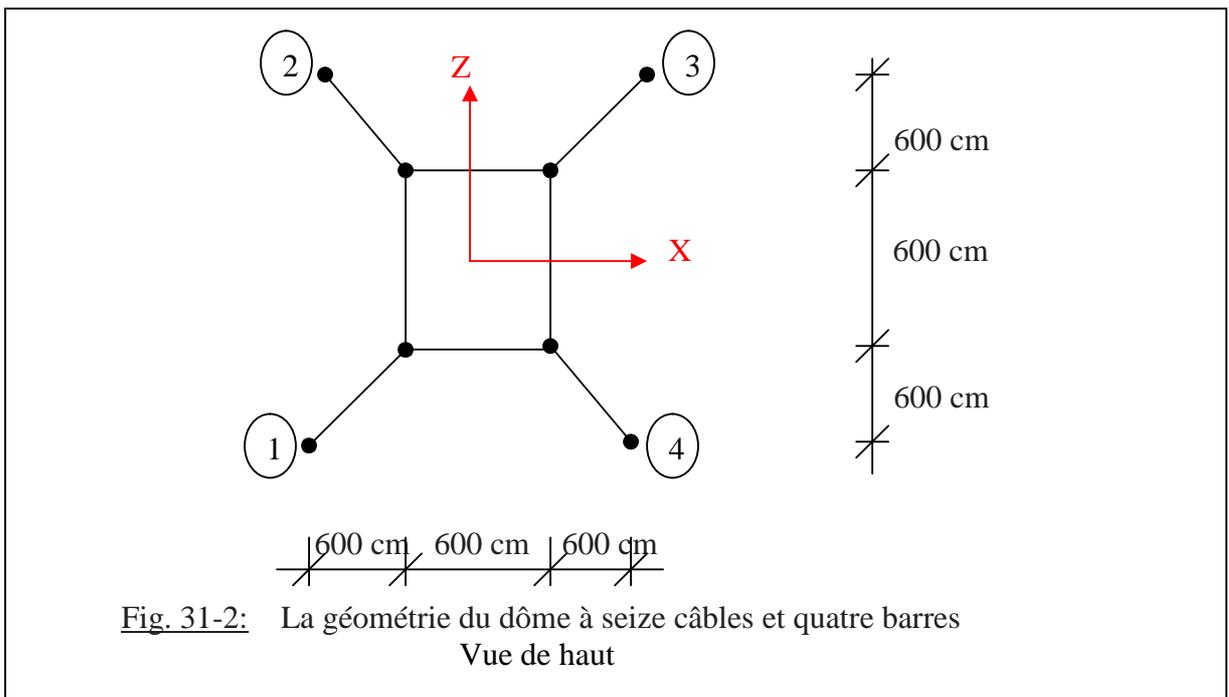


31. Application 3 : Dôme à seize câbles et quatre barres

31.1 Géométrie de la structure

Ce dôme, est le résultat du module précédent (Fig. 30-1) en introduisant à la partie centrale un module cubique, le dôme résultant sera constitué donc de seize câbles, avec quatre barres centrales. La géométrie Fig. 31-1 et Fig. 31-2 de cette structure est donnée dans le tableau [Tabl. 31-1].



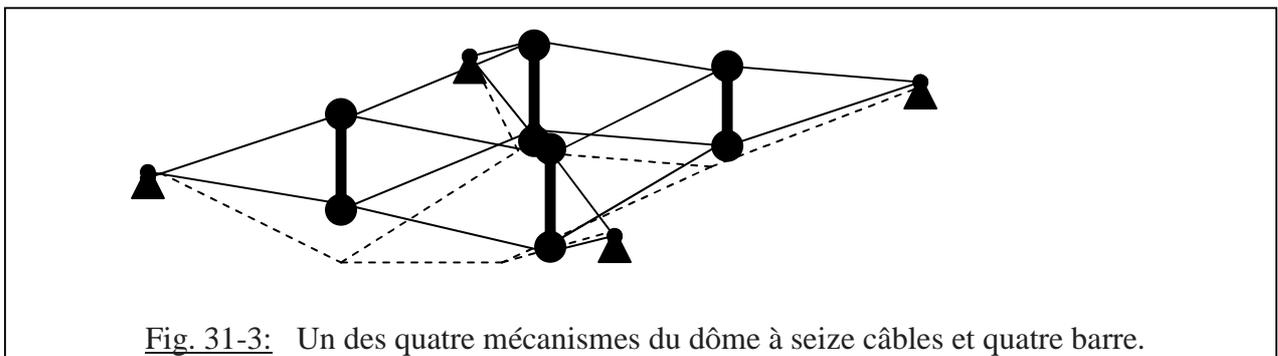


Tabl. 31-1: Géométrie du dôme à seize câbles et quatre barres (en cm)

Nœuds	X	Y	Z
1	-900	0	-900
2	-900	0	900
3	900	0	900
4	900	0	-900
5	-300	100	-300
6	-300	100	300
7	300	100	300
8	300	100	-300
9	-300	-100	-300
10	-300	-100	300
11	300	-100	300
12	300	-100	-300

31.2 Mécanismes

Un des quatre mécanismes possibles de cette structure est représenté dans la Fig. 31-3.



Les quatre mécanismes possibles de cette structure représentent le déplacement d'une des barres suivant le sens longitudinal de celles-ci, la structure dans le plan XZ devienne stabilisée.

31.3 Autocontraintes

Après détermination des quatre mécanismes possibles, on cherchera ici la base d'autocontrainte pour stabiliser ce dôme, et vu la complexité relative de cette structure ; le calcul

sera mené en utilisant la méthode directe décrite dans la présente thèse. La structure relationnelle et le vecteur d'autocontrainte sont résumés dans le tableau [Tabl. 31-2].

Elément	N° des nœuds de l'élément		Nature	Base d'autocontrainte	Longueur (en cm)	Tension (en KN)		
1	1	5	Câbles	0,5	854.40	-8.543	-11.39	-14.238
2	2	6		0,5	854.40	-8.543	-11.39	-14.238
3	3	7		0,5	854.40	-8.543	-11.39	-14.238
4	4	8		0,5	854.40	-8.543	-11.39	-14.238
5	5	6		0,5	600.00	-6.000	-8.000	-10.000
6	6	7		0,5	600.00	-6.000	-8.000	-10.000
7	7	8		0,5	600.00	-6.000	-8.000	-10.000
8	5	8		0,5	600.00	-6.000	-8.000	-10.000
9	1	9		0,5	854.40	-8.543	-11.39	-14.238
10	2	10		0,5	854.40	-8.543	-11.39	-14.238
11	3	11		0,5	854.40	-8.543	-11.39	-14.238
12	4	12		0,5	854.40	-8.543	-11.39	-14.238
13	9	10		0,5	600.00	-6.000	-8.000	-10.000
14	10	11		0,5	600.00	-6.000	-8.000	-10.000
15	11	12		0,5	600.00	-6.000	-8.000	-10.000
16	9	12		0,5	600.00	-6.000	-8.000	-10.000
17	5	9	Barres	-1	200.00	+0.998	+1.333	+1.998
18	6	10		-1	200.00	+0.998	+1.333	+1.998
19	7	11		-1	200.00	+0.998	+1.333	+1.998
20	8	12		-1	200.00	+0.998	+1.333	+1.998

Tabl. 31-2: Structure relationnelle et tension initiale du dôme à seize câbles et quatre barres.

31.4 Comportement mécanique

La procédure d'étude choisie consiste à bloquer la section représentée par les quatre nœuds 1, 2, 3 et 4 (les nœuds sont totalement bloqués suivant les trois directions), (figures : 31-1 et 31-2) et à solliciter la section représentée par les nœuds : 5, 6, 7 et 8 par une force concentrée sur ces nœuds et dirigée vers le bas.

Lors du chargement suivant l'axe Y des barres 5, 6, 7, et 8 dans le sens de la gravité, la figure suivante (Fig. 31-4) montre que le comportement du module est non linéaire, la structure se rigidifie au fur et à mesure que la charge extérieure augmente, la rigidité de la structure augmente aussi proportionnellement avec la précontrainte initiale appliquée au niveau des câbles.

En ce qui concerne l'évolution de la tension dans les câbles, la figure (Fig. 31-5) montre un comportement non linéaire. Les câbles supérieurs (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8) se relâchent au fur et à mesure que la charge F augmente jusqu'au palier du $F = 500$ au $F = 1000$ daN, après ce seuil, ces

câbles commencent à se rigidifier. Les câbles inférieurs (9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, et 16) se rigidifient proportionnellement avec l'augmentation de la charge F.

Par contre les barres centrales, possèdent un comportement linéaire (Fig. 31-6). La compression dans les barres 17, 18, 19, et 20 augmente au fur et à mesure que la charge F augmente.

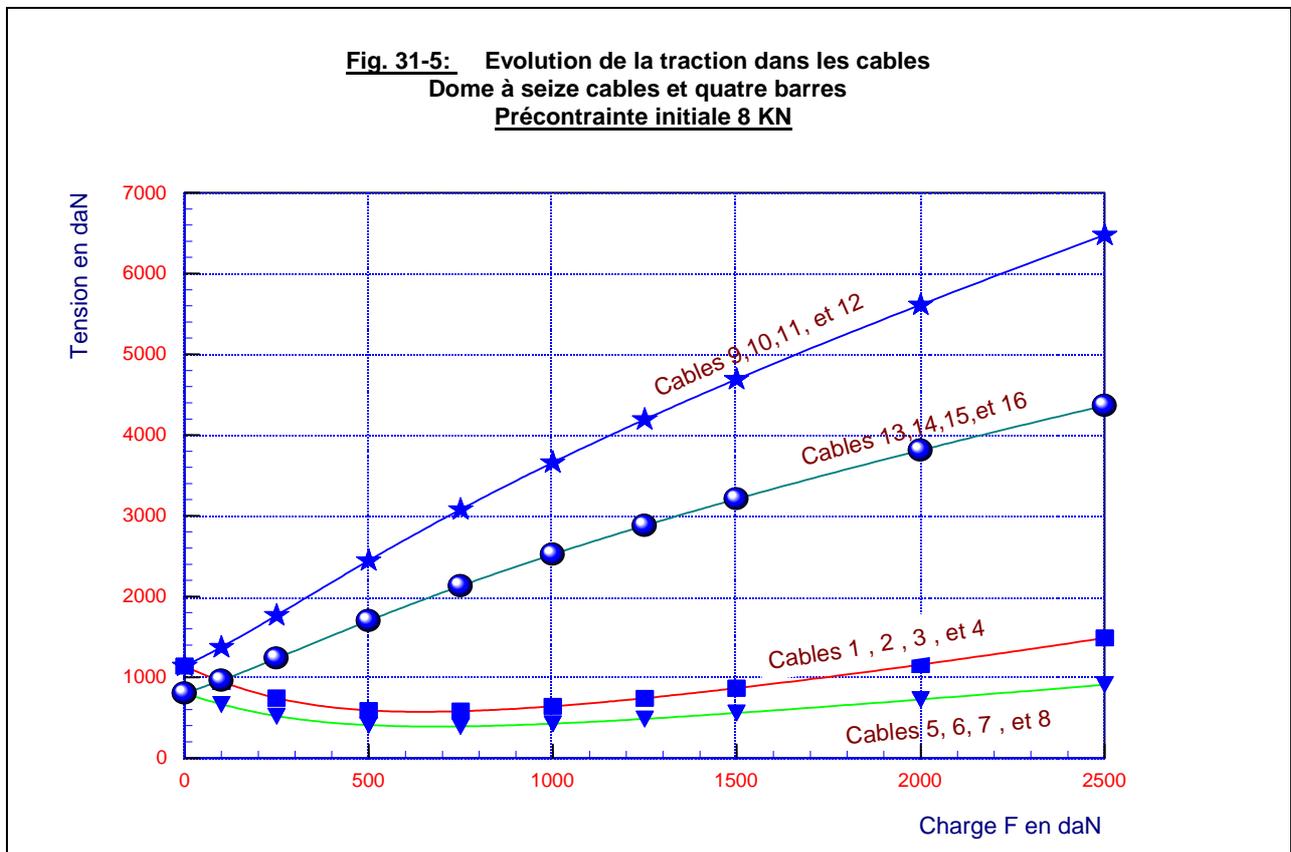
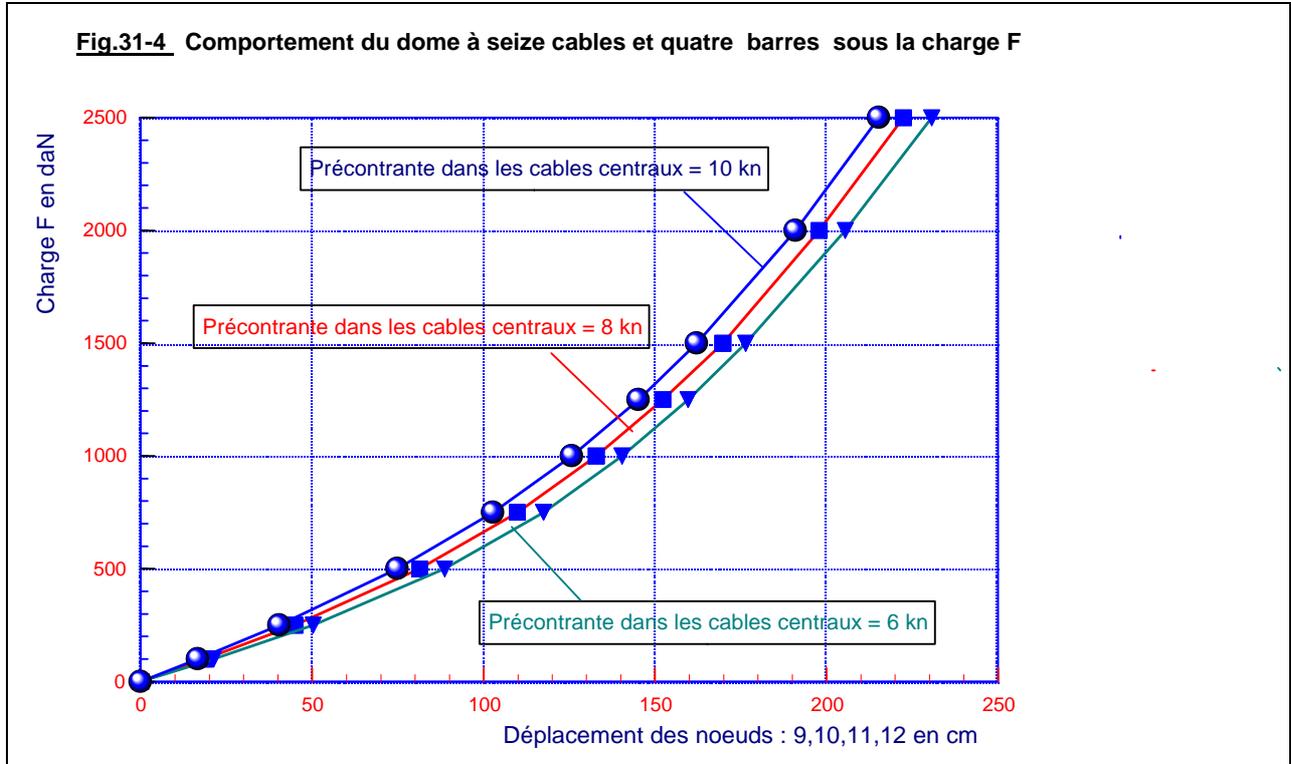
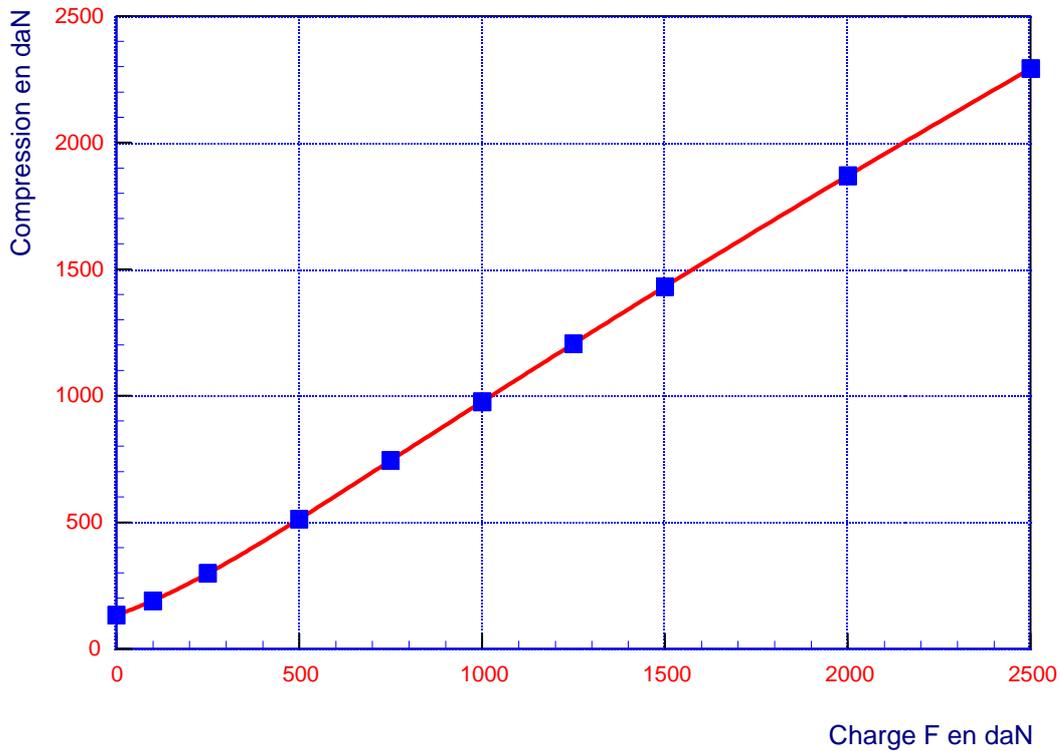


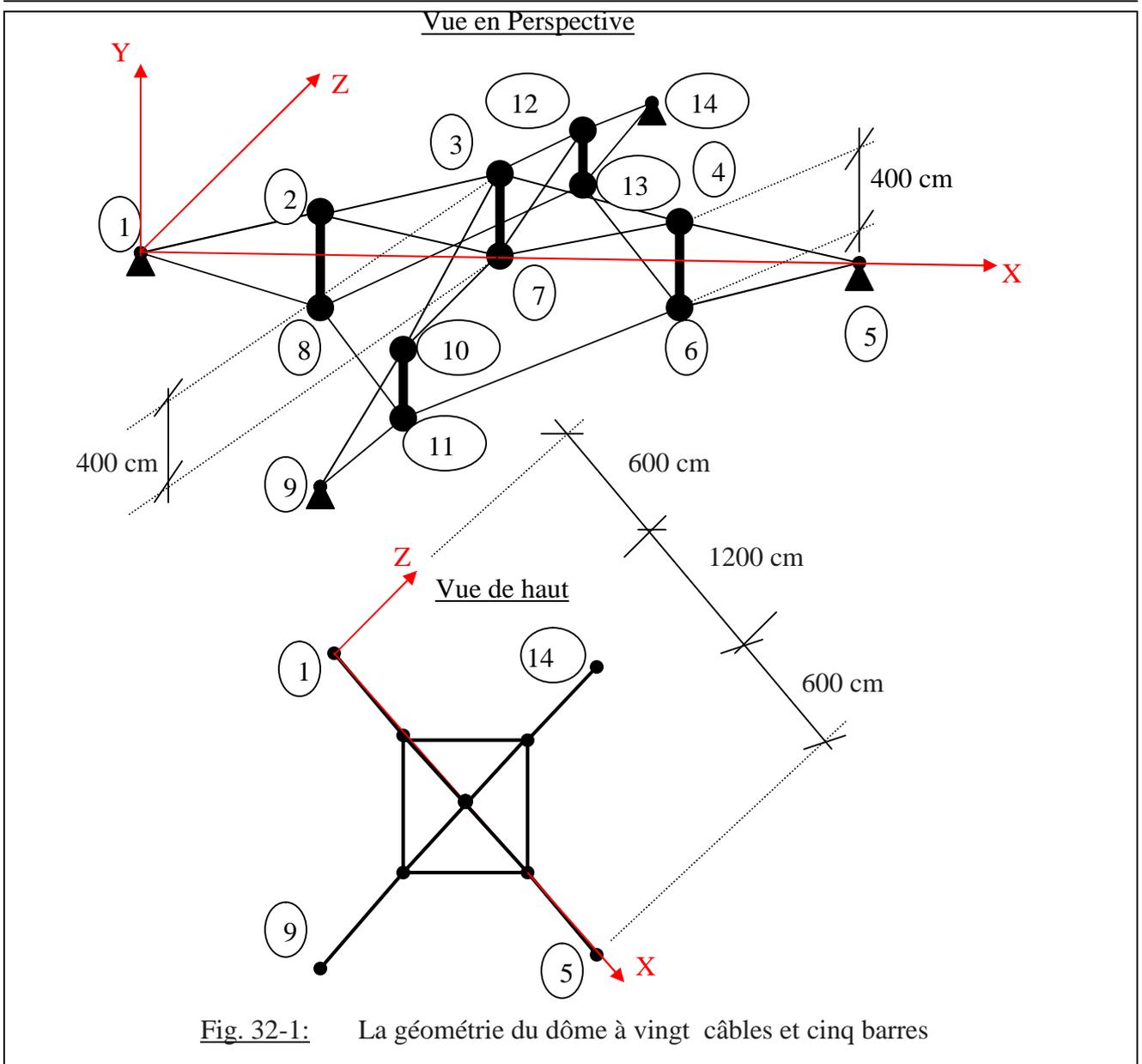
Fig. 31-6: Evolution de la compression dans les barres: 17,18,19 et 20
Dome à seize cables et quatre barres
Précontrainte initiale 8 KN



32. Application 4 : Dôme à vingt câbles et cinq barres

32.1 Géométrie de la structure

Ce dôme, est le résultat de deux dômes plans à huit câbles et trois barres chacun, croisés à la barre centrale, et reliés en bas par quatre câbles périphériques, le dôme résultant sera constitué donc de vingt câbles, avec cinq barres centrales. La géométrie Fig. 32-1 de cette structure est donnée dans le tableau [Tabl. 32-1].

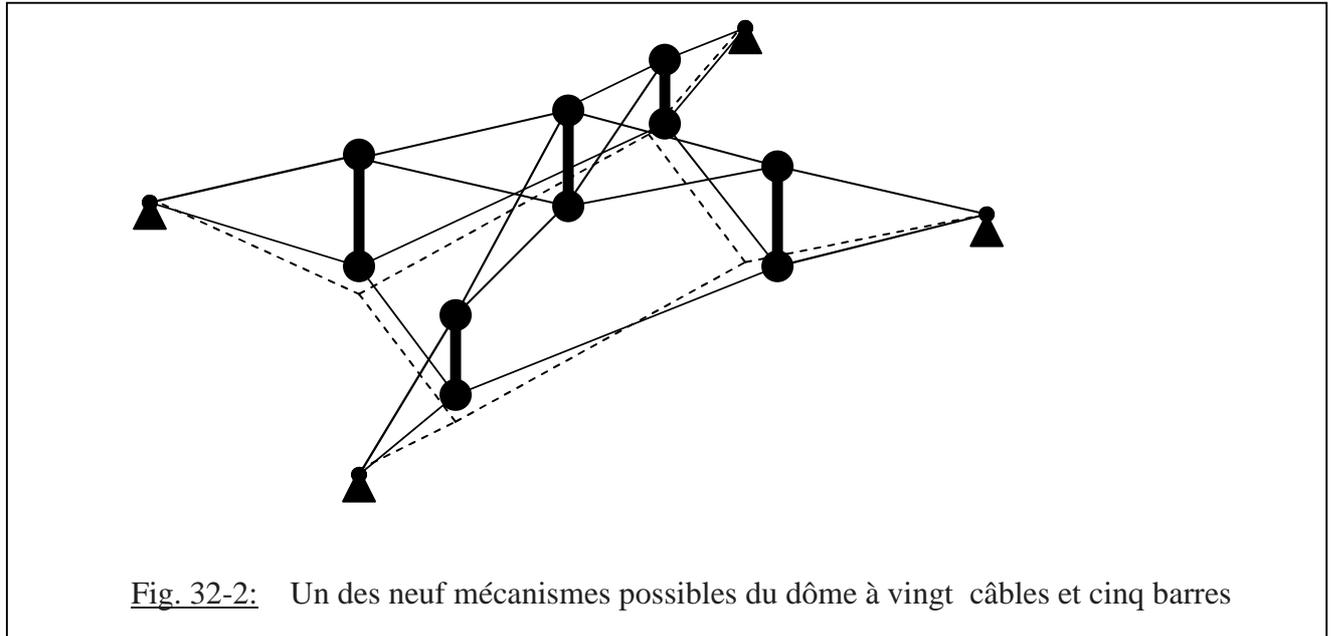


Tabl. 32-1: Géométrie du dôme à vingt câbles et cinq barres (en cm)

Nœuds	X	Y	Z
1	0	0	0
2	600	200	0
3	1200	400	0
4	1800	200	0
5	2400	0	0
6	1800	-200	0
7	1200	0	0
8	600	-200	0
9	1200	0	-1200
10	1200	200	-600
11	1200	-200	-600
12	1200	200	600
13	1200	-200	600
14	1200	0	1200

32.2 Mécanismes

Un des neuf mécanismes possibles de cette structure est représenté dans la Fig. 32-2.



Les mécanismes de cette structure se subdivisent en trois familles ; l'une représente (4 mécanismes) un déplacement d'une des quatre barres périphériques suivant le sens longitudinal de celles-ci, une deuxième (1 mécanisme) représentant le déplacement de la barre centrale suivant l'axe Y, et la troisième représente (4 mécanismes) un déplacement d'un des quatre nœuds : 2, 4, 10, et 12 dans le plan XZ suivant une direction libre (non stabilisée).

32.3 Autocontraintes

Après détermination des neuf mécanismes possibles, on cherchera ici la base d'autocontrainte pour stabiliser ce dôme, et vu la complexité relative de cette structure ; le calcul sera mené en utilisant la méthode directe décrite dans la présente thèse. La structure relationnelle et le vecteur d'autocontrainte sont résumés dans le tableau [Tabl. 32-2].

Troisième partie : Résultats numériques.

Elément	N°des nœuds de l'élément		Nature	Base d'autocontrainte	Longueur (en cm)	Tension (en KN)		
1	1	2	Câbles	0,5	632.456	-8.00	-16.00	-24.00
2	2	3		1	632.456	-4.00	-8.00	-12.00
3	3	4		1	632.456	-4.00	-8.00	-12.00
4	4	5		0,5	632.456	-8.00	-16.00	-24.00
5	4	7		1	632.456	-4.00	-8.00	-12.00
6	2	7		1	632.456	-4.00	-8.00	-12.00
7	3	7	Barre	-0,5	400.000	+5.06	+10.12	+15.18
8	5	6	Câbles	0,5	632.456	-8.00	-16.00	-24.00
9	1	8		0,5	632.456	-8.00	-16.00	-24.00
10	2	8	Barres	-1	400.000	+2.53	+5.06	+7.59
11	4	6		-1	400.000	+2.53	+5.06	+7.59
12	9	10	Câbles	0,5	632.456	-8.00	-16.00	-24.00
13	3	10		1	632.456	-4.00	-8.00	-12.00
14	3	12		1	632.456	-4.00	-8.00	-12.00
15	12	14		0,5	632.456	-8.00	-16.00	-24.00
16	7	10		1	632.456	-4.00	-8.00	-12.00
17	7	12		1	632.456	-4.00	-8.00	-12.00
18	9	11		0,5	632.456	-8.00	-16.00	-24.00
19	13	14		0,5	632.456	-8.00	-16.00	-24.00
20	10	11	Barres	-1	400.000	+2.53	+5.06	+7.59
21	12	13		-1	400.000	+2.53	+5.06	+7.59
22	6	11	Câbles	1	848.528	-5.37	-10.73	-16.11
23	8	11		1	848.528	-5.37	-10.73	-16.11
24	8	13		1	848.528	-5.37	-10.73	-16.11
25	6	13		1	848.528	-5.37	-10.73	-16.11

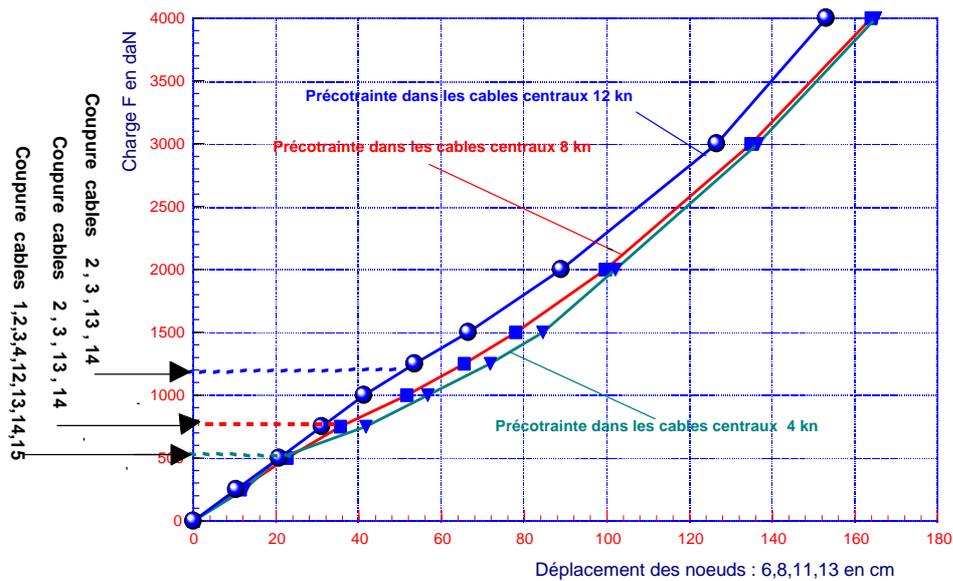
Tabl. 32-2: Structure relationnelle et tension initiale du dôme à vingt câbles et cinq barres.

32.4 Comportement mécanique

La procédure d'étude choisie consiste à bloquer la section représentée par les quatre nœuds 1, 5, 9 et 14 (les nœuds sont totalement bloqués suivant les trois directions), (figure : 32-1) et à solliciter la section représentée par les nœuds : 2, 3, 4, 10 et 12 par une force concentrée sur ces nœuds et dirigée vers le bas.

Lors du chargement suivant l'axe Y des barres 7, 10, 11, 20, et 21 dans le sens de la gravité, la figure suivante (Fig. 32-3) montre que le comportement du module est non linéaire, la structure se rigidifie au fur et à mesure que la charge extérieure augmente, la rigidité de la structure augmente aussi proportionnellement avec la précontrainte initiale appliquée au niveau des câbles.

Il est à noter que certains câbles deviennent sollicités à la compression au cours du chargement, la procédure de l'étude et la nature de la structure qui n'admet pas que les câbles seront sollicités en compression, exigent la coupure de ces derniers.

Fig. 32-3: Comportement du dome à vingt cables et cinq barres sous la charge F

En ce qui concerne l'évolution de la tension dans les câbles, la figure (Fig. 32-4) montre un comportement non linéaire pour les câbles inférieurs. Les câbles supérieurs (1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13, 14, 15, 16, et 17) se relâchent au fur et à mesure que la charge F augmente jusqu'à une valeur de $F = 750$ daN (coupure des câbles comprimés : 2, 3, 13, et 14), après ce seuil, ces câbles commencent à se rigidifier avec un comportement linéaire. Les câbles inférieurs (8, 9, 18, 19, 22, 23, 24, et 25) se rigidifient proportionnellement avec l'augmentation de la charge F.

Par contre les barres centrales, possèdent un comportement linéaire (Fig. 32-5). La compression dans les barres 10, 11, 20, et 21 augmente au fur et à mesure que la charge F augmente, la tangente de courbure augmente après le seuil de la coupure des câbles comprimés.

La compression dans la barre 7 chute avec l'augmentation de la charge F, après le seuil de la coupure des câbles comprimés, la compression dans cette barre évolue progressivement sur une ligne droite.

Fig. 32-4: Evolution de la traction dans les cables
Dome à vingt cables et cinq barres
(Précontrainte dans les cables centraux 8 kn)

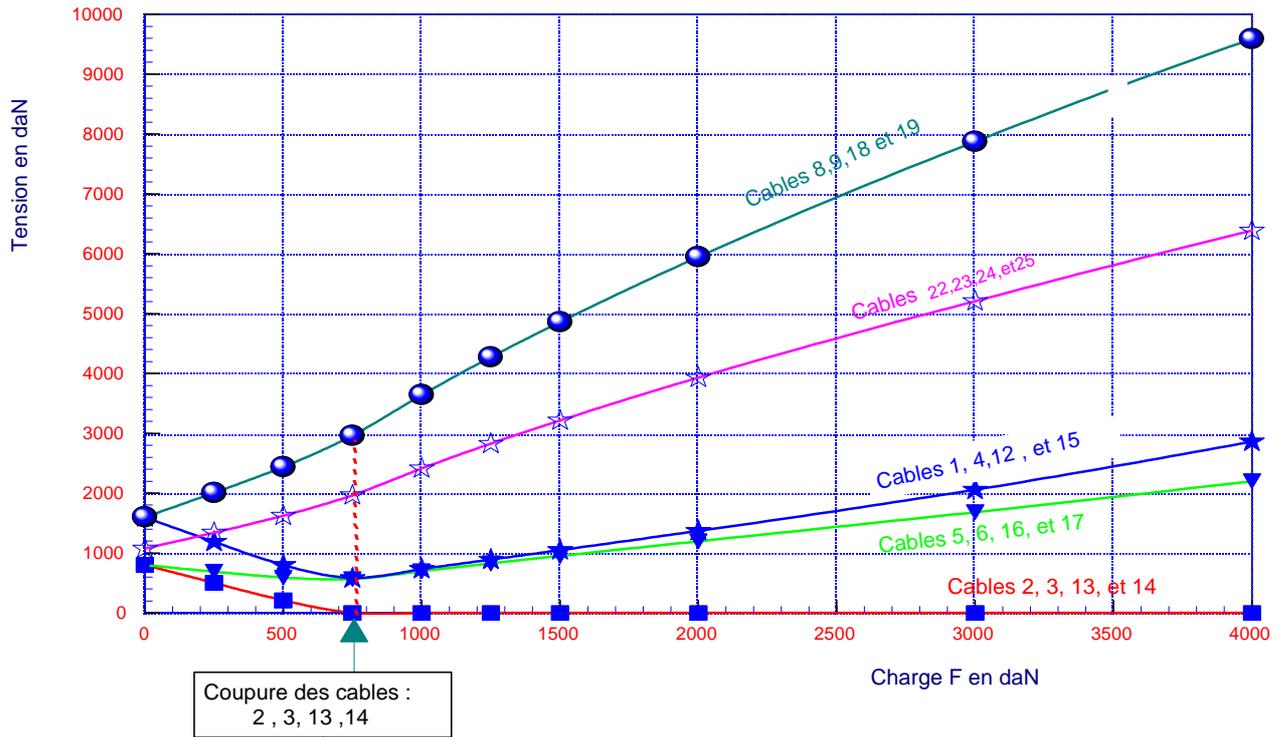
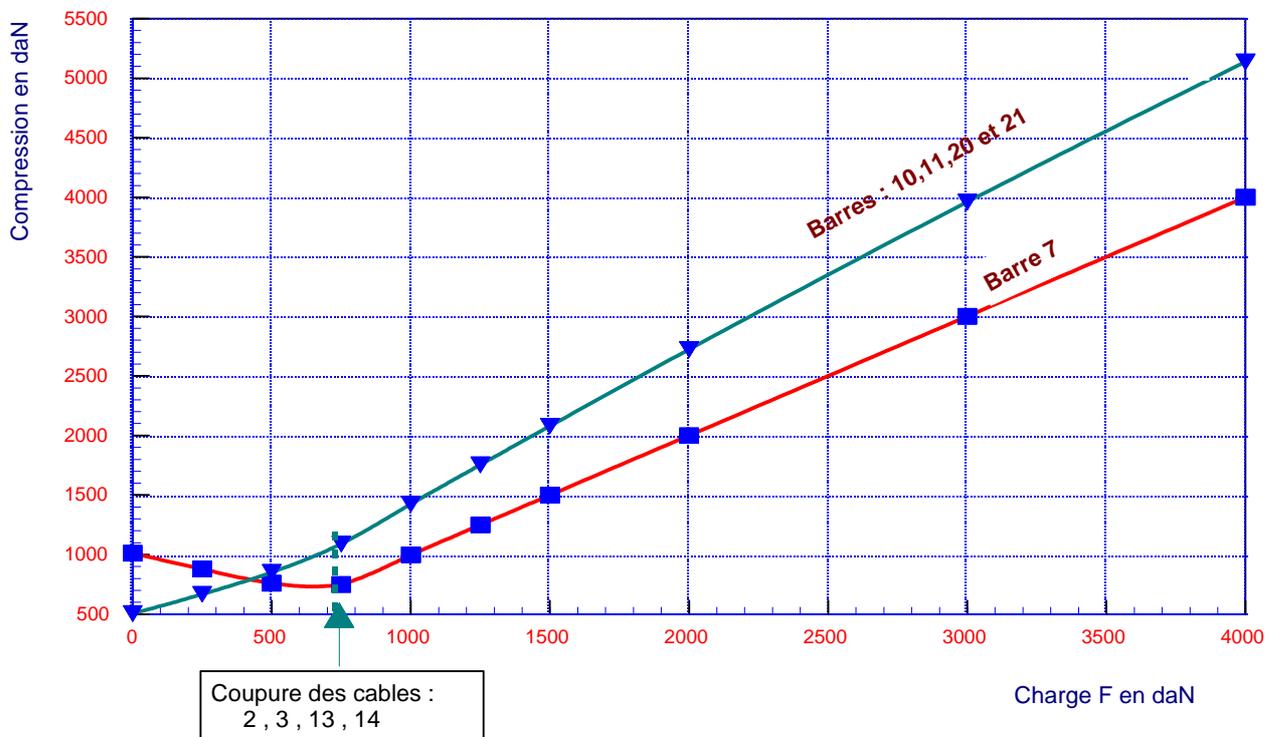


Fig. 32- 5 Evolution de la compression dans les barres : 7, 10, 11, 20, et 21
Dome à vingt cables et cinq barres
Précontrainte initiale 8KN



33. Application 5 : Dôme à quarante deux câbles et douze barres

33.1 Géométrie de la structure

Ce dôme, est formé d'un noyau central à six cotés, tiré vers les appuis par un système triangulaire, le ceintage périphérique est assuré par des câbles, le résultat dans l'espace donne un dôme constitué donc de quarante deux câbles et douze barres, vu sa forme et sa taille ; cette structure est considérée comme un dôme câble de vraie grandeur. La géométrie Fig. 33-1, Fig. 33-2, et Fig. 33-1 de cette structure est donnée dans le tableau [Tabl. 33-1].

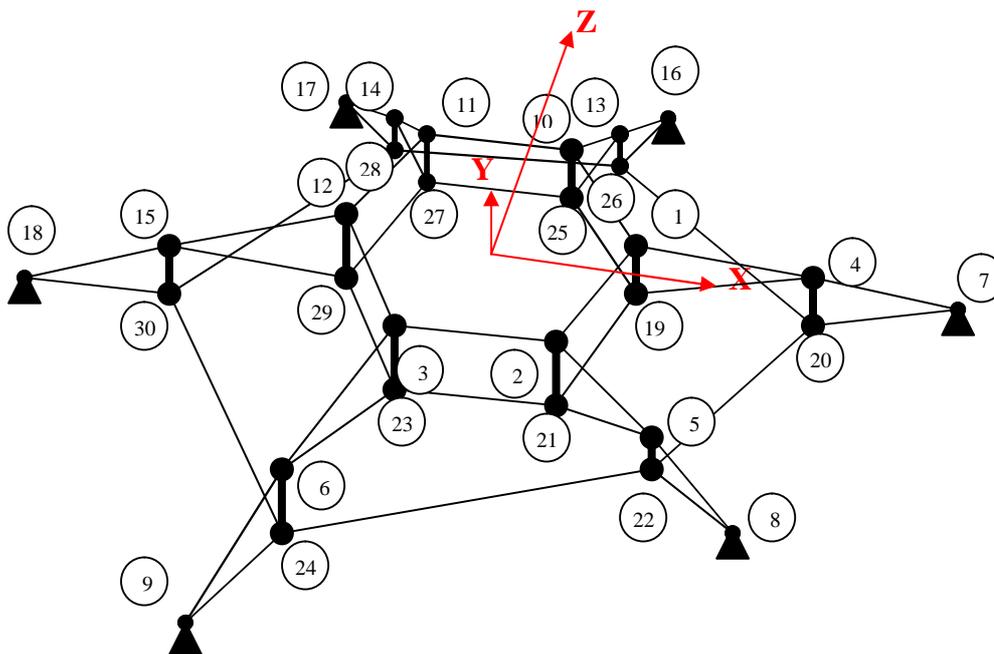


Fig. 33-1: La géométrie du dôme à quarante deux câbles et douze barres
Vue en Perspective

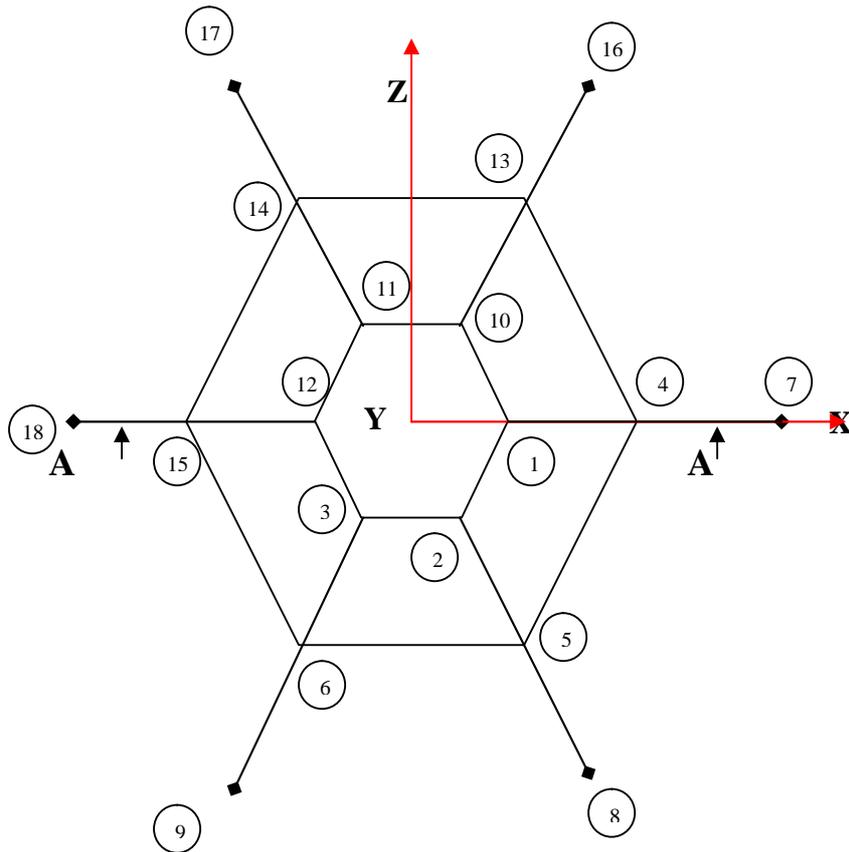


Fig. 33-2: La géométrie du dôme à quarante deux câbles et douze barres
Vue de haut

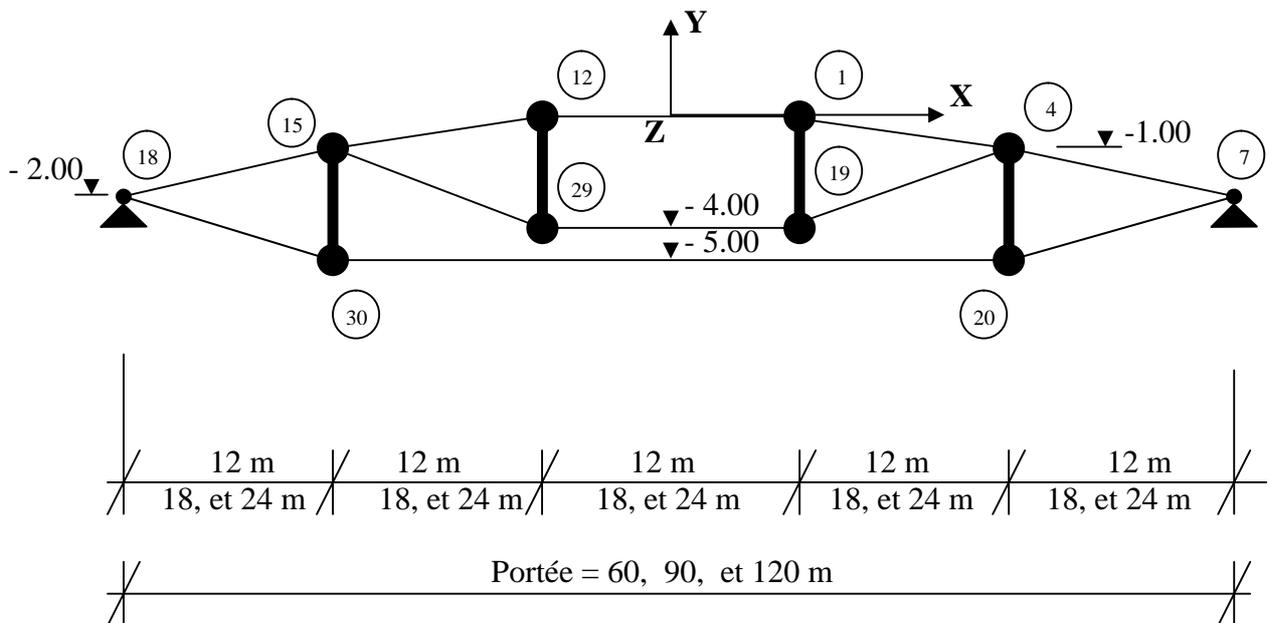


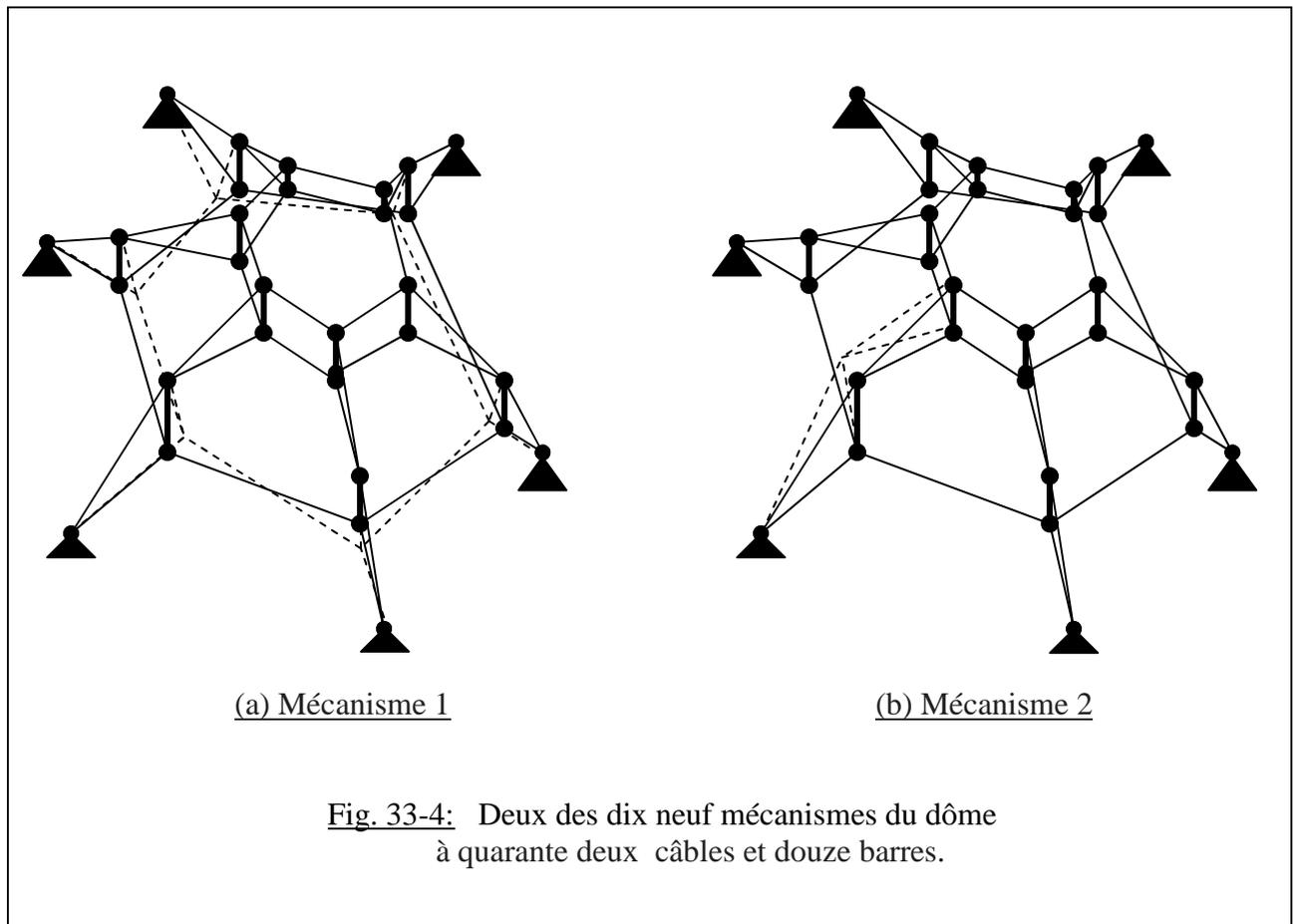
Fig. 33-3: La géométrie du dôme à quarante deux câbles et douze barres
Coupe A - A

Tabl. 33-1: Géométrie du dôme à quarante deux câbles
et douze barres (en cm)

NOEUDS	Portée 60 m			Portée 90 m			Portée 120 m		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
1	600	0	0	900	0	0	1200	0	0
2	300	0	-520	450	0	-779	600	0	-1039
3	-300	0	-520	-450	0	-779	-600	0	-1039
4	1800	-100	0	2700	-100	0	3600	-100	0
5	900	-100	-1559	1350	-100	-2338	1800	-100	-3118
6	-900	-100	-1559	-1350	-100	-2338	-1800	-100	-3118
7	3000	-200	0	4500	-200	0	6000	-200	0
8	1500	-200	-2598	2250	-200	-3897	3000	-200	-5196
9	-1500	-200	-2598	-2250	-200	-3897	-3000	-200	-5196
10	300	0	520	450	0	779	600	0	1039
11	-300	0	520	-450	0	779	-600	0	1039
12	-600	0	0	-900	0	0	-1200	0	0
13	900	-100	1559	1350	-100	2338	1800	-100	3118
14	-900	-100	1559	-1350	-100	2338	-1800	-100	3118
15	-1800	-100	0	-2700	-100	0	-3600	-100	0
16	1500	-200	2598	2250	-200	3897	3000	-200	5196
17	-1500	-200	2598	-2250	-200	3897	-3000	-200	5196
18	-3000	-200	0	-4500	-200	0	-6000	-200	0
19	600	-400	0	900	-400	0	1200	-400	0
20	1800	-500	0	2700	-500	0	3600	-500	0
21	300	-400	-520	450	-400	-779	600	-400	-1039
22	900	-500	-1559	1350	-500	-2338	1800	-500	-3118
23	-300	-400	-520	-450	-400	-779	-600	-400	-1039
24	-900	-500	-1559	-1350	-500	-2338	-1800	-500	-3118
25	300	-400	520	450	-400	779	600	-400	1039
26	900	-500	1559	1350	-500	2338	1800	-500	3118
27	-300	-400	520	-450	-400	779	-600	-400	1039
28	-900	-500	1559	-1350	-500	2338	-1800	-500	3118
29	-600	-400	0	-900	-400	0	-1200	-400	0
30	-1800	-500	0	-2700	-500	0	-3600	-500	0

33.2 Mécanismes

Deux des dix neuf mécanismes possibles de cette structure sont représentés dans la Fig. 33-4.



Ces mécanismes représentent des déplacements similaires aux cas précédents (18 mécanismes), sauf qu'on trouve ici un mécanisme supplémentaire représentant le déplacement global de toute la partie formée par le noyau central à six cotés suivant l'axe Y.

33.3 Autocontraintes

Après détermination des dix neuf mécanismes possibles, on cherchera ici la base d'autocontrainte pour stabiliser ce dôme, et vu la complexité de cette structure ; le calcul sera mené en utilisant la méthode directe décrite dans la présente thèse. La structure relationnelle et le vecteur d'autocontrainte sont résumés dans les tableaux : [Tabl. 33-2], [Tabl. 33-3], et [Tabl. 33-4].

Troisième partie : Résultats numériques.

Élément	N°des nœuds de l'élément		Nature	Base d'autocontrainte	Longueur (en cm)	Tension (en KN)		
1	1	2	Câbles	0.125	600.333	-25	-50	-75
2	19	21		0.375	600.333	-8.32	-16.64	-24.96
3	2	3		0.125	600.000	-25	-50	-75
4	21	23		0.375	600.000	-8.32	-16.64	-24.96
5	3	12		0.125	600.333	-25	-50	-75
6	23	29		0.375	600.333	-8.32	-16.64	-24.96
7	11	12		0.125	600.333	-25	-50	-75
8	27	29		0.375	600.333	-8.32	-16.64	-24.96
9	10	11		0.125	600.000	-25	-50	-75
10	25	27		0.375	600.000	-8.32	-16.64	-24.96
11	1	10		0.125	600.333	-25	-50	-75
12	19	25		0.375	600.333	-8.32	-16.64	-24.96
13	1	4		0.250	1204.159	-25.09	-50.18	-75.27
14	4	19		0.750	1236.932	-8.58	-17.16	-25.74
15	2	5		0.250	1203.961	-25.09	-50.18	-75.27
16	5	21		0.750	1236.738	-8.58	-17.16	-25.74
17	3	6		0.250	1203.961	-25.09	-50.18	-75.27
18	6	23		0.750	1236.738	-8.58	-17.16	-25.74
19	12	15		0.250	1204.159	-25.09	-50.18	-75.27
20	15	29		0.750	1236.932	-8.58	-17.16	-25.74
21	11	14		0.250	1203.961	-25.09	-50.18	-75.27
22	14	27		0.750	1236.738	-8.58	-17.16	-25.74
23	10	13		0.250	1203.961	-25.09	-50.18	-75.27
24	13	25		0.750	1236.738	-8.58	-17.16	-25.74
25	20	22		0.846	1800.134	-11.08	-22.16	-33.24
26	22	24		0.846	1800.000	-11.08	-22.16	-33.24
27	24	30		0.846	1800.134	-11.08	-22.16	-33.24
28	28	30		0.846	1800.134	-11.08	-22.16	-33.24
29	26	28		0.846	1800.000	-11.08	-22.16	-33.24
30	20	26		0.846	1800.134	-11.08	-22.16	-33.24
31	4	7	0.188	1204.159	-33.44	-66.88	-100.32	
32	7	20	0.563	1236.932	-11.42	-22.84	-34.26	
33	5	8	0.188	1203.961	-33.44	-66.88	-100.32	
34	8	22	0.563	1236.738	-11.42	-22.84	-34.26	
35	6	9	0.188	1203.961	-33.44	-66.88	-100.32	
36	9	24	0.563	1236.738	-11.42	-22.84	-34.26	
37	15	18	0.188	1204.159	-33.44	-66.88	-100.32	
38	18	30	0.563	1236.932	-11.42	-22.84	-34.26	
39	14	17	0.188	1203.961	-33.44	-66.88	-100.32	
40	17	28	0.563	1236.738	-11.42	-22.84	-34.26	
41	13	16	0.188	1203.961	-33.44	-66.88	-100.32	
42	16	26	0.563	1236.738	-11.42	-22.84	-34.26	
43	1	19	Barres	-1.000	400.000	+2.08	+4.16	+6.24
44	4	20		-0.750	400.000	+2.77	+5.54	+8.31
45	2	21		-1.000	400.000	+2.08	+4.16	+6.24
46	5	22		-0.750	400.000	+2.77	+5.54	+8.31
47	3	23		-1.000	400.000	+2.08	+4.16	+6.24
48	6	24		-0.750	400.000	+2.77	+5.54	+8.31
49	12	29		-1.000	400.000	+2.08	+4.16	+6.24
50	15	30		-0.750	400.000	+2.77	+5.54	+8.31
51	11	27		-1.000	400.000	+2.08	+4.16	+6.24
52	14	28		-0.750	400.000	+2.77	+5.54	+8.31
53	10	25		-1.000	400.000	+2.08	+4.16	+6.24
54	13	26		-0.750	400.000	+2.77	+5.54	+8.31

Tabl. 33-2: Structure relationnelle et tension initiale du dôme à quarante deux câbles et douze barres. Portée 60 m.

Troisième partie : Résultats numériques.

Elément	N°des nœuds de l'élément		Nature	Base d'autocontrainte	Longueur (en cm)	Tension (en KN)
1	1	2	Câbles	0.124	899.634	-75.000
2	19	21		0.373	899.634	-24.910
3	2	3		0.124	900.000	-75.000
4	21	23		0.373	900.000	-24.910
5	3	12		0.124	899.634	-75.000
6	23	29		0.373	899.634	-24.910
7	11	12		0.124	899.634	-75.000
8	27	29		0.373	899.634	-24.910
9	10	11		0.124	900.000	-75.000
10	25	27		0.373	900.000	-24.910
11	1	10		0.124	899.634	-75.000
12	19	25		0.373	899.634	-24.910
13	1	4		0.249	1802.776	-75.120
14	4	19		0.750	1824.829	-25.250
15	2	5		0.249	1802.909	-75.120
16	5	21		0.750	1824.961	-25.250
17	3	6		0.249	1802.909	-75.120
18	6	23		0.750	1824.961	-25.250
19	12	15		0.249	1802.776	-75.120
20	15	29		0.750	1824.829	-25.250
21	11	14		0.249	1802.909	-75.120
22	14	27		0.750	1824.961	-25.250
23	10	13		0.249	1802.909	-75.120
24	13	25		0.750	1824.961	-25.250
25	20	22		0.844	2699.767	-33.200
26	22	24		0.844	2700.000	-33.200
27	24	30		0.844	2699.767	-33.200
28	28	30		0.844	2699.767	-33.200
29	26	28		0.844	2700.000	-33.200
30	20	26		0.844	2699.767	-33.200
31	4	7	0.187	1802.776	-100.060	
32	7	20	0.563	1824.829	-33.670	
33	5	8	0.187	1802.909	-100.060	
34	8	22	0.563	1824.961	-33.670	
35	6	9	0.187	1802.909	-100.060	
36	9	24	0.563	1824.961	-33.670	
37	15	18	0.187	1802.776	-100.060	
38	18	30	0.563	1824.829	-33.670	
39	14	17	0.187	1802.909	-100.060	
40	17	28	0.563	1824.961	-33.670	
41	13	16	0.187	1802.909	-100.060	
42	16	26	0.563	1824.961	-33.670	
43	1	19	Barres	-1.000	400.000	+4.150
44	4	20		-0.750	400.000	+5.530
45	2	21		-1.000	400.000	+4.150
46	5	22		-0.750	400.000	+5.530
47	3	23		-1.000	400.000	+4.150
48	6	24		-0.750	400.000	+5.530
49	12	29		-1.000	400.000	+4.150
50	15	30		-0.750	400.000	+5.530
51	11	27		-1.000	400.000	+4.150
52	14	28		-0.750	400.000	+5.530
53	10	25		-1.000	400.000	+4.150
54	13	26		-0.750	400.000	+5.530

Tabl. 33-3: Structure relationnelle et tension initiale du dôme à quarante deux câbles et douze barres. Portée 90 m.

Troisième partie : Résultats numériques.

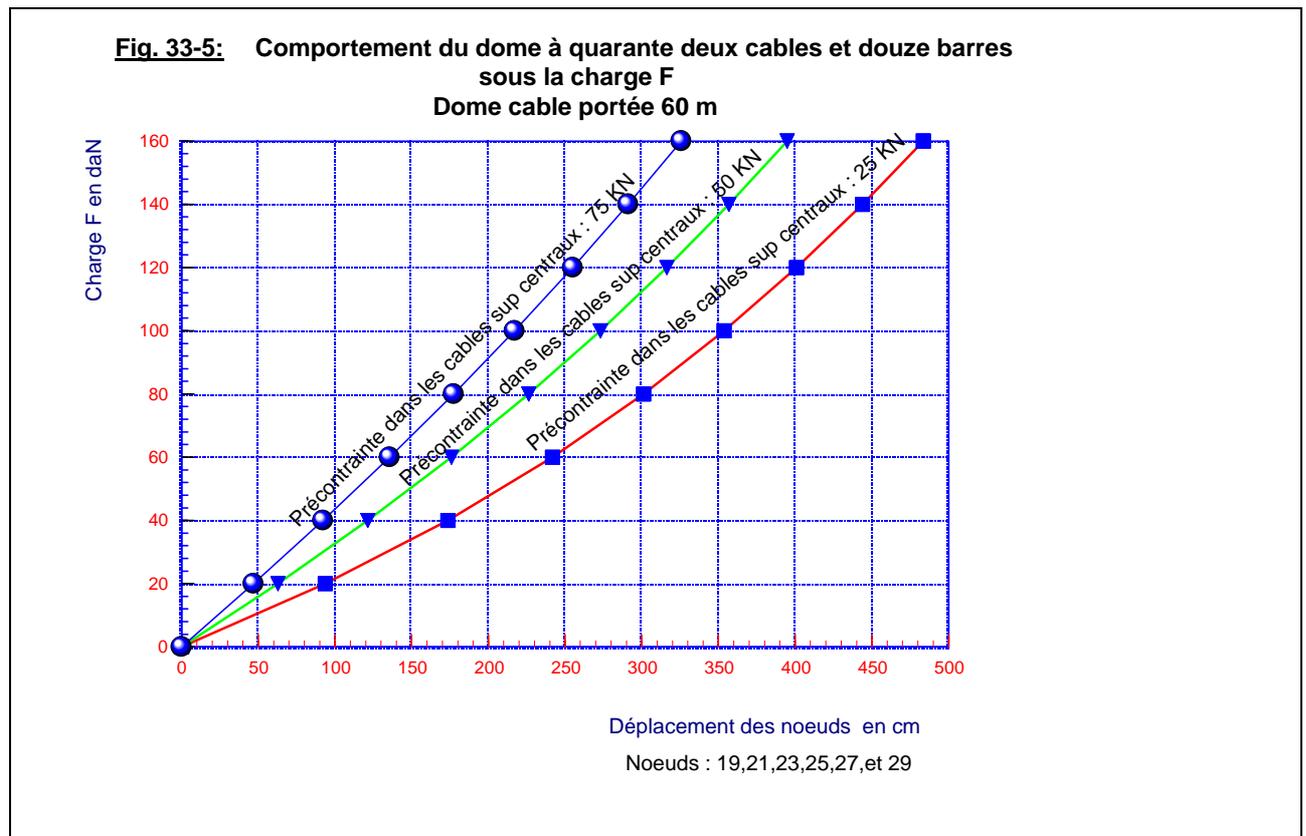
Elément	N°des nœuds de l'élément		Nature	Base d'autocontrainte	Longueur (en cm)	Tension (en KN)
	1	2				
1	1	2	Câbles	0.125	1199.800	-75
2	19	21		0.375	1199.800	-25.02
3	2	3		0.125	1200.000	-75
4	21	23		0.375	1200.000	-25.02
5	3	12		0.125	1199.800	-75
6	23	29		0.375	1199.800	-25.02
7	11	12		0.125	1199.800	-75
8	27	29		0.375	1199.800	-25.02
9	10	11		0.125	1200.000	-75
10	25	27		0.375	1200.000	-25.02
11	1	10		0.125	1199.800	-75
12	19	25		0.375	1199.800	-25.02
13	1	4		0.250	2402.083	-75.07
14	4	19		0.750	2418.677	-25.22
15	2	5		0.250	2402.549	-75.07
16	5	21		0.750	2419.141	-25.22
17	3	6		0.250	2402.549	-75.07
18	6	23		0.750	2419.141	-25.22
19	12	15		0.250	2402.083	-75.07
20	15	29		0.750	2418.677	-25.22
21	11	14		0.250	2402.549	-75.07
22	14	27		0.750	2419.141	-25.22
23	10	13		0.250	2402.549	-75.07
24	13	25		0.750	2419.141	-25.22
25	20	22		0.843	3600.267	-33.37
26	22	24		0.843	3600.000	-33.37
27	24	30		0.843	3600.267	-33.37
28	28	30		0.843	3600.267	-33.37
29	26	28		0.843	3600.000	-33.37
30	20	26		0.843	3600.267	-33.37
31	4	7	0.137	2402.083	-100.11	
32	7	20	0.562	2418.677	-33.63	
33	5	8	0.137	2401.684	-100.11	
34	8	22	0.562	2418.281	-33.63	
35	6	9	0.137	2401.684	-100.11	
36	9	24	0.562	2418.281	-33.63	
37	15	18	0.137	2402.083	-100.11	
38	18	30	0.562	2418.677	-33.63	
39	14	17	0.137	2401.684	-100.11	
40	17	28	0.562	2418.281	-33.63	
41	13	16	0.137	2401.684	-100.63	
42	16	26	0.562	2418.281	-33.63	
43	1	19	Barres	-1.000	400.000	+3.13
44	4	20		-0.750	400.000	+4.17
45	2	21		-1.000	400.000	+3.13
46	5	22		-0.750	400.000	+4.17
47	3	23		-1.000	400.000	+3.13
48	6	24		-0.750	400.000	+4.17
49	12	29		-1.000	400.000	+3.13
50	15	30		-0.750	400.000	+4.17
51	11	27		-1.000	400.000	+3.13
52	14	28		-0.750	400.000	+4.17
53	10	25		-1.000	400.000	+3.13
54	13	26		-0.750	400.000	+4.17

Tabl. 33-4: Structure relationnelle et tension initiale du dôme à quarante deux câbles et douze barres. Portée 120 m.

33.4 Comportement mécanique

La procédure d'étude choisie consiste à bloquer la section représentée par les six nœuds : 7, 8, 9, 16, 17, et 18 (les nœuds sont totalement bloqués suivant les trois directions), (figure : 33-1) et à solliciter la section représentée par les nœuds : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, et 15 par une force concentrée sur ces nœuds et dirigée vers le bas.

Lors du chargement suivant l'axe Y des barres 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53 et 54, dans le sens de la gravité, la figure suivante (Fig. 33-5) montre que le comportement du module est non linéaire, la non linéarité est plus caractérisée pour une précontrainte faible. La structure se rigidifie au fur et à mesure que la charge extérieure augmente, la rigidité de la structure augmente aussi proportionnellement avec la précontrainte initiale appliquée au niveau des câbles.



En ce qui concerne l'évolution de la tension dans les câbles, la figure (Fig. 33-6) montre un comportement non linéaire pour tous les câbles. Les câbles supérieurs (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, et 23) se relâchent au fur et à mesure que la charge F augmente jusqu'à une valeur proche de $F = 100$ daN, après ce seuil, ces câbles commencent à se rigidifier avec un comportement légèrement non linéaire. Les autres câbles se rigidifient proportionnellement avec l'augmentation de la charge F.

Par contre les barres centrales, possèdent un comportement linéaire (Fig. 33-7). La compression dans les barres augmente au fur et à mesure que la charge F augmente, la compression dans les barres centrales est moins importante que celle des barres périphériques.

Fig. 33-6: Evolution de la traction dans les câbles
Dome à quarante câbles et douze barres, portée 60 m
Précontrainte initiale dans les câbles centraux 25 kn

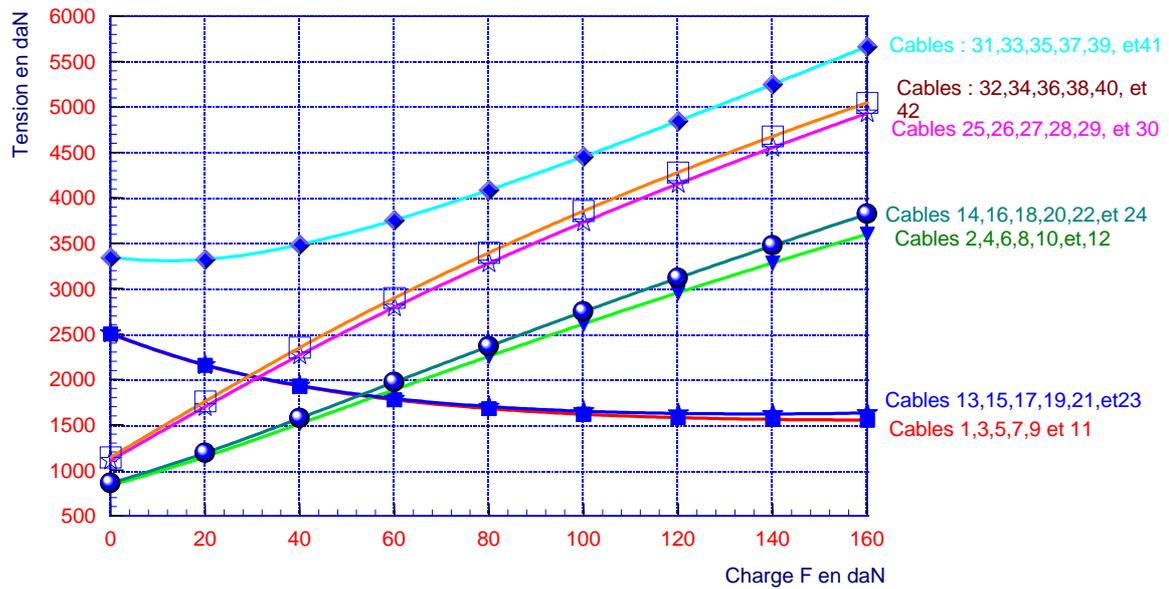
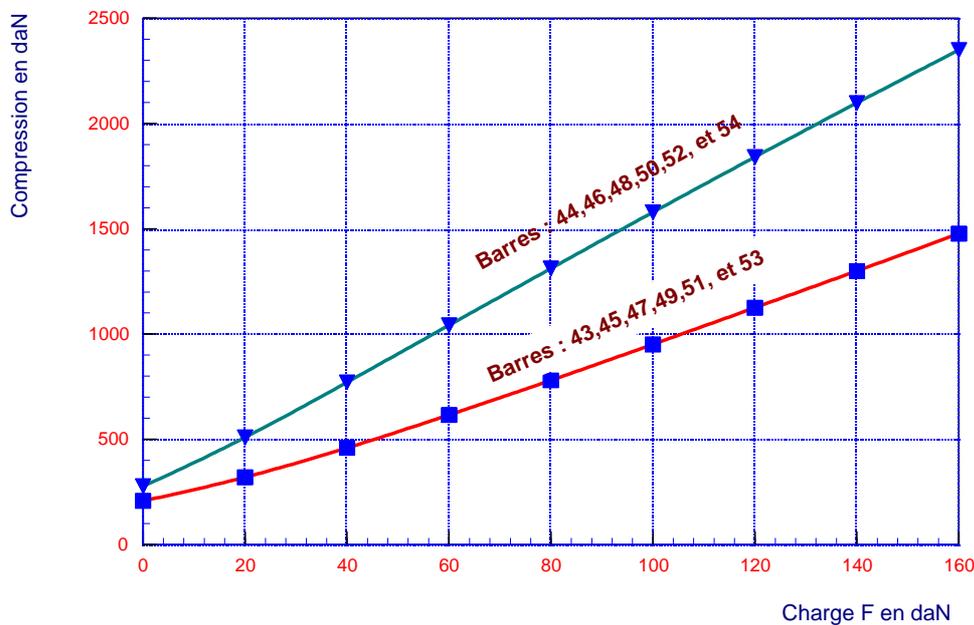
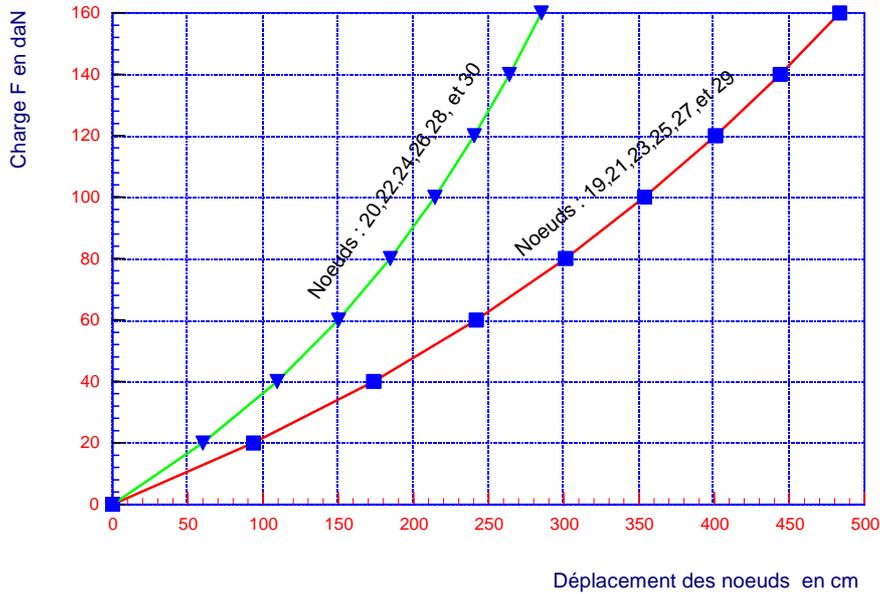


Fig. 33-7: Evolution de la compression dans les barres
Dome à quarante deux câbles et douze barre, portée 60 m
Précontrainte initiale dans les câbles supérieurs centraux 25 kn



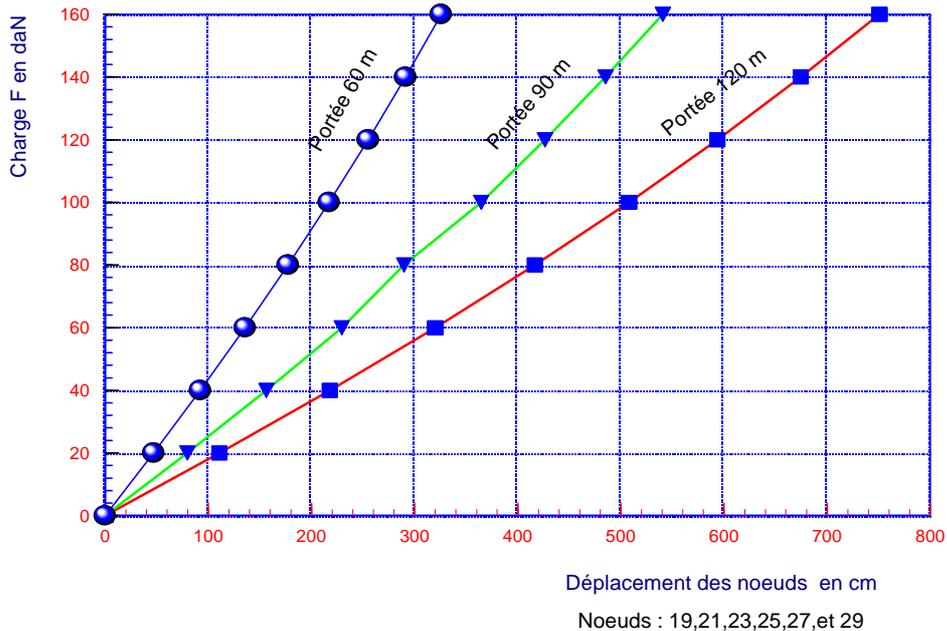
Afin d'illustrer la différence entre le déplacement des nœuds centraux et celui des nœuds périphériques (Fig. 33-8), on constate que le déplacement de ces derniers est moins important, cette constatation est justifiée par la différence au niveau de la précontrainte dans les câbles passant par ces nœuds, et par la concentration des efforts au centre.

Fig. 33-8: Comportement de la structure sous la charge F
Dome à quarante deux câbles et douze barres, portée 60 m
Précontrainte initiale dans les câbles centraux 25 kn



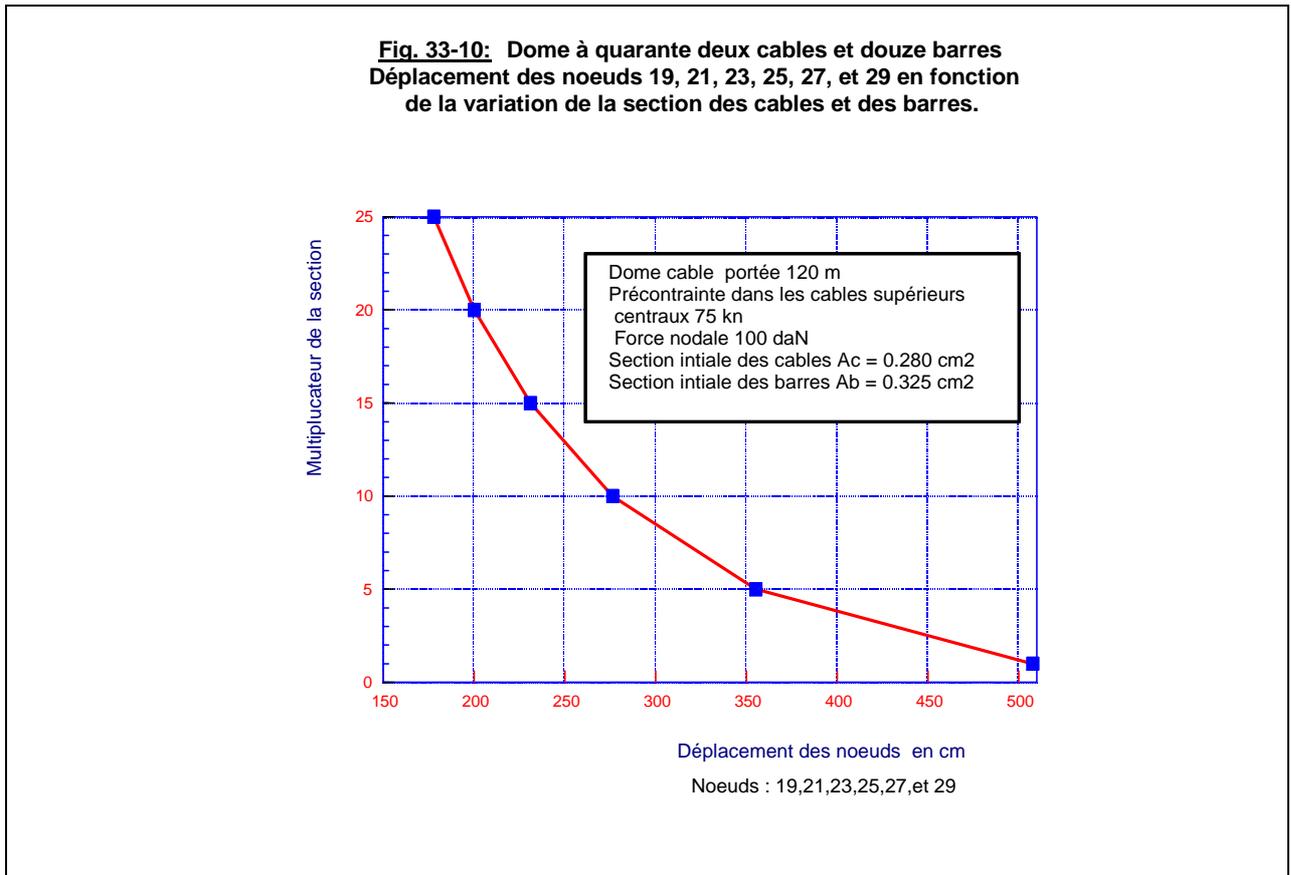
Si on procède à la variation de la portée du dôme étudié, en maintenant la précontrainte initiale dans les câbles constante (Fig. 33-9), le comportement de la structure est non linéaire, la structure devienne de plus en plus flexible au fur et à mesure que la portée augmente, si on double la portée à F constante ; le rapport déplacement sera situé entre 2,30 et 2,36.

Fig. 33-9: Comportement de la structure sous la charge F
Dome à quarante deux câbles et douze barres
Variation de la portée
Précontrainte dans les câbles supérieurs centraux 75 kn



Et pour donner l'ordre de grandeur de déplacement des nœuds on fonction de la variation de la section des câbles et des barres, nous avons illustré le comportement du dôme étudié avec une portée de 120 m (Figure : 33-10), la courbe résultante est a une forme non linéaire, le déplacement se réduit au fur et à mesure que la section augmente.

Et si on arrive à multiplier la section des câbles (0.280 cm²) par un facteur de l'ordre de 25, la section devienne équivalente à 1/3 de la section minimale des câbles du dôme de la Géorgie(5), on constate sur le graphe un déplacement des nœuds centraux de 178 cm ; valeur correspondante à une flèche de 1,5/100 de la portée du dôme étudié.



34. Commentaire

A travers les modules et dômes câbles conçus et étudiés ; et suite aux constatations marquées en haut ; on peut apporter les explications et justifications suivantes :

Le comportement des modules et dômes étudiés est non linéaire, ceci est justifié par la flexibilité relativement importante de ces structures marquée par la présence de l'élément câble avec des longueurs plus au moins importantes.

Cette remarque n'est pas constatée dans le cas du dôme à vingt câbles et cinq barres, car cette structure n'est pas homogène ; certains câbles se relâchent avant d'arriver à la capacité portante réelle de la structure.

Il est à noter que la rigidité des structures étudiées augmente au fur et à mesure que la charge augmente, cette constatation est expliquée par la transmission d'une précontrainte supplémentaire dans les éléments à travers le chargement, ce qui rend la structure plus rigide.

La non linéarité de l'évolution de la traction dans les câbles est expliquée par la flexibilité de ces derniers, par contre la linéarité de l'évolution de la compression dans les barres est justifiée par la rigidité relativement importante comparée à celle des câbles.

La faiblesse constatée au centre des dômes étudiés caractérisée par le déplacement important des nœuds est justifiée par le niveau bas de la précontrainte dans les câbles passant par ces nœuds, ce niveau est exigé par les conditions de la configuration d'équilibre. Pour palier à ce problème il y'a lieu de prévoir une conception assez rigide concentrée au centre.

35. Conclusion de la troisième partie

Après l'étude des cinq dômes câbles conçus, on conclut que ces structures se différencient des structures conventionnelles par la présence des mécanismes, qui caractérisent un déplacement des nœuds sans variation des longueurs des éléments qui les constituent, il est nécessaire de souligner la difficulté de recherche de forme, afin d'aboutir à la configuration d'équilibre.

Ces structures ; avant qu'elles reçoivent des charges extérieures, exigent la stabilisation par une base d'autocontrainte qui implique la mise en précontrainte des câbles et barres.

Nous avons vu par l'intermédiaire de l'application de la méthode basée sur la matrice d'équilibre qu'elle s'adapte au calcul des dômes câbles, le volume et le temps de calcul deviennent importants lorsque la structure est complexe. En utilisant la méthode basée sur l'équilibre des nœuds, il est à notre portée le calcul de la base d'autocontrainte pour les dômes câbles ayant une géométrie relativement simple, caractérisée par une symétrie et/ou un nombre réduit des nœuds et des barres. Si la structure devienne assez complexe ; un calcul automatique s'impose.

Le logiciel utilisé pour le calcul en non linéarité géométrique des dômes câbles étudiés s'adapte mieux à ce genre de structures.

Et à travers l'étude de comportement de ces dômes sous un chargement extérieur on constate que ces structures se caractérisent aussi par :

- 1 - Une meilleure adaptation au calcul en non linéarité géométrique.
- 2 - Une flexibilité relativement importante, et un comportement purement non linéaire. La non linéarité est nettement constatée dans le cas d'une grande portée du dôme et/ou une faible précontrainte initiale dans les câbles.
- 3 - Une augmentation de la rigidité au fur et à mesure que la charge extérieure augmente.
- 4 - Une augmentation de la rigidité au fur et à mesure que la précontrainte initiale dans les câbles augmente.
- 5 - Une évolution non linéaire de la traction dans les câbles, au fur et à mesure que la charge extérieure et/ou la précontrainte initiale dans les câbles augmente, la traction augmente, les câbles supérieurs se relâchent, tandis que les câbles inférieurs se rigidifient.
- 6 - Un comportement linéaire de l'évolution de la compression dans les barres. La compression augmente également avec l'augmentation de la charge extérieure et/ou la précontrainte initiale dans les câbles, la compression dans les barres centrales est moins importante que celle des barres périphériques.
- 7 - Un comportement non linéaire de l'évolution du déplacement des nœuds en fonction de la variation de la section des câbles et des barres, le déplacement se réduit au fur et à mesure que la section augmente.

Ces constatations sont commentées et justifiées essentiellement par la spécificité des dômes câbles, la différence de niveau de la précontrainte dans les éléments, et la transmission d'une précontrainte supplémentaire dans les éléments à travers le chargement.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Les dômes câbles à base de tenségrité sont des structures spéciales innovantes dans le domaine de Génie Civil, ce volet des structures légères commence à intéresser beaucoup de chercheurs par le besoin immense de solutionner les problèmes posés par le développement qu'a connu l'humanité dans tous les domaines, dont la nécessité de couvrir de grandes surfaces est l'une de ces préoccupations.

Notre contribution dans ce travail s'inscrit dans le cadre général de cette tentative, et si on déclare un jugement préliminaire ; on peut dire que le pari que nous avons donné en introduction qui consiste à adapter des méthodes développées par les chercheurs sur les structures réticulées spatiales autocontraintes aux calculs des dômes câbles ; est largement gagné.

Au terme de la présente étude, dressons un bilan des travaux effectués et des résultats majeurs obtenus dans cette thèse, avant d'examiner les perspectives de recherches qu'ils induisent.

Bilan

En ce qui concerne les méthodes de calculs relatives aux structures des dômes câbles et comparativement aux structures traditionnelles, nous avons constaté à travers l'exposé des études réalisées durant les dix années précédentes que peu de chercheurs ont investis dans ce domaine, ces études restent toujours théoriques, adaptées aux structures existantes, et parfois avec moindre importance tant qu'elles ne sont pas généralisées. Mais elles contribuent au développement futur du progrès des dômes câbles.

Nous signalons les difficultés rencontrées pendant la conception et la stabilisation des dômes câbles, il s'agit principalement de trouver la configuration d'équilibre avant d'introduire la charge extérieure, cette étape est la plus importante dans la conception, elle mérite une attention particulière.

Nous avons constaté dans ces travaux, que les méthodes de recherche de forme ne s'adaptent pas facilement aux dômes câbles complexes sans l'aide de calculs automatisés, cette constatation a rendu nécessaire le développement d'une méthode simple de calcul direct des bases d'autocontraintes basée sur le principe d'équilibre des nœuds et le processus d'introduction et de recherche de la précontrainte dans les éléments. En comparaison à la méthode appliquée dans [32] [33], et sur des exemples traités, cette procédure a donné une meilleure adaptation aux dômes câbles.

Nous avons montré également dans cette thèse par une introduction aux calculs en non linéarité géométrique que les structures de dômes câbles caractérisées par une grande flexibilité ne peuvent pas être analysées sans tenir compte de la non linéarité géométrique. L'adaptation de la méthode développée par [13] [14] dans ce propos a montré une meilleure fiabilité pour l'analyse des dômes câbles.

Il est à noter que la spécification comportementale des dômes étudiés est que ces structures en plus du comportement non linéaire, se rigidifient au fur et à mesure que la charge augmente, ce caractère donne à ces structures une efficacité importante sous chargement statique pour le cas des toits de grandes portées.

Les constatations et interprétations citées dans la troisième partie de cette thèse donnent au concepteur de ce genre de structures des bases de conception pour lui faciliter le bon choix des caractéristiques géométriques et mécaniques des éléments des dômes câbles.

Perspectives

Même si les objectifs initiaux ont été atteints, les résultats obtenus ouvrent d'autres axes de recherche dont nous ne citerons que les principaux.

Sur le plan conception et étude de comportement, nous avons étudié cinq dômes câbles basés généralement sur le principe de triangulation, il serait intéressant de faire une variété de conceptions sous autres formes, et d'étudier leur comportement mécanique sous différent chargement, y compris le chargement dynamique.

Nous avons appliqué pour les dômes câbles conçus dans cette thèse pour la détermination des états d'autocontraintes une méthode directe basée sur le principe d'équilibre des nœuds, cette méthode mérite une meilleure adaptation, généralisation et une programmation informatique incluant la visualisation des différents mécanismes possibles.

Il est à noter que les phénomènes d'instabilité élastiques des barres en compression ne sont pas pris en considération dans la présente thèse, ces phénomènes sont importants lorsque la longueur de ces barres devienne assez élancée, il serait intéressant d'en tenir compte.

Il serait intéressant aussi de réaliser des études multi paramétrées pour valoriser l'influence de la flèche des dômes, de la forme de courbure, et de la partie centrale du dôme. Cette étude aura beaucoup d'intérêts si elle sera faite sur la base d'études numériques comparées aux résultats des modèles réduits. Il sera bénéfique aussi d'étudier le comportement mécanique des dômes câbles en tenant compte de la non linéarité matérielle.

Un autre volet de recherche, est de trouver pour chaque système structurel des dômes câbles la valeur optimale de la précontrainte initiale à introduire dans les câbles afin d'aboutir à une meilleure structure résistante.

ANNEXES :

A. Présentation du logiciel BAROSO1 de calcul en non linéarité géométrique

- Références bibliographiques.
- Table des illustrations.
- Liste des tableaux.

A. Présentation du logiciel BAROSO1 de calcul en non linéarité géométrique

A.1 Définition et principe du logiciel

C'est un logiciel de calcul des structures tridimensionnelles établi par K.KEBICHE [13], [14] conjointement avec R. MOTRO suivant les étapes décrites dans le chapitre 2 de la deuxième partie de cette thèse.

Le logiciel Baroso1, qui a été adapté dans ce travail pour le calcul des structures de dômes câbles étudiées, est spécifié aux calculs à la non linéarité géométrique des structures réticulés spatiales autocontraintes, il est écrit sous le langage fortran, et basé sur la méthode citée en haut, les démarches de calculs sont résumées suivant les étapes suivantes :

- Description de la structure ; et du vecteur charges ;
- Définition des paramètres de calculs ;
- Calcul de l'indétermination cinématique et du degré d'hyperstaticité de la structure ;
- Calcul des longueurs initiales des câbles et des barres ;
- Détermination des incréments de charge en chaque nœud ;
- Construction de la matrice de rigidité de la structure ;
- Etude de l'équilibre (résolution du système d'équations linéaires par la méthode de Gauss) ;
- Vérification de l'incidence des barres aux nœuds ;
- Ecriture des résultats.

Les calculs sont effectués avec une procédure itérative ; une fois l'équilibre de la structure est atteint avec l'erreur admise déclarée ; la boucle sera arrêtée.

A.2 Fichiers de données

L'utilisateur du logiciel est appelé à créer pour chaque structure quatre fichiers nommés : **géom., données, charges et divers**, ces fichiers contiennent : les coordonnées des nœuds ; caractéristiques géométriques et mécaniques des barres ; les charges appliquées ; et la description de la structure avec les paramètres de calcul. Ils seront écrits de la manière suivante :

Géom.

En quatre colonnes ; la première contient les numéros des nœuds ; et les trois restantes les coordonnées cartésiennes des nœuds respectivement suivant les repères : X, Y, Z.

Données

Ce fichier contient six colonnes ; pour identification des caractéristiques mécaniques des barres :

- 1 ère colonne : le numéro de la barre ;
- 2 eme colonne : le numéro du nœud de départ de la barre ;
- 3 eme colonne : le numéro du nœud d'arrivée de la barre ;
- 4 eme colonne : Module de Young du matériau de la barre ;
- 5 eme colonne : la section de la barre ;
- 6 eme colonne : la précontrainte appliquée dans la barre.

Nota :

- il faut utiliser les mêmes unités de mesure ;
- la précontrainte appliquée dans la barre est définie négative s'il s'agit de la traction, dans le cas de la compression le signe est définie positivement.

Charges

Dans ce fichier on doit déclarer les nœuds chargés ; avec la direction d'application des charges ; l'écriture se fera de la manière suivante :

- Sur la première colonne : les numéros des nœuds chargés ;
- Et sur les trois autres colonnes : la direction d'application de la charge suivant les repères : X, Y, et Z respectivement :
 - le **0** signifie que la charge n'est pas orientée suivant le repère désigné ;
 - le **1** signifie que la charge est orientée suivant le repère désigné ;
 - et le **-1** signifie que la charge est orientée au sens opposé du repère désigné ;

Divers

Ce fichier est réservé à la description de la structure et aux paramètres de calcul ; il est défini en plusieurs lignes contenant les informations ordonnées de la manière suivante:

- nombre de nœuds de la structure ;
- nombre de barres de la structure ;
- nombre de nœuds d'appuis ;
- le numéro du premier nœud bloqué ;
 - bloqué suivant la direction du repère X : **1** (non bloqué : **0**) ;
 - bloqué suivant la direction du repère Y : **1** (non bloqué : **0**) ;
 - bloqué suivant la direction du repère Z : **1** (non bloqué : **0**) ;
- le numéro du deuxième nœud bloqué ;
 - bloqué suivant la direction du repère X : **1** (non bloqué : **0**) ;
 - bloqué suivant la direction du repère Y : **1** (non bloqué : **0**) ;
 - bloqué suivant la direction du repère Z : **1** (non bloqué : **0**) ;
- le numéro du troisième nœud bloqué ;
 - bloqué suivant la direction du repère X : **1** (non bloqué : **0**) ;
 - bloqué suivant la direction du repère Y : **1** (non bloqué : **0**) ;
 - bloqué suivant la direction du repère Z : **1** (non bloqué : **0**) ;
- etc...(L'ensemble des numéros de nœuds bloqués) ;
- nombre des nœuds chargés ;
- nombre de pas de charge ;
- la valeur de la charge ;
- nombre des itérations ;
- le pourcentage admis pour l'équilibre ;
- écriture des résultats : **1**, (dans le cas contraire mettre : **2**).

A.3 Fichier des résultats

Les résultats des calculs effectués seront écrits dans un fichier nommé automatiquement par le logiciel : **écriture** ; il contient le listing suivant :

- affichage des données relatives à la description de la structure ;
- indétermination cinématique de la structure ;
- le degré d'hyperstaticité de la structure ;
- pour la charge actuelle, et chaque pas de charge, suivant le nombre des itérations affiche : Les déplacements et coordonnées des nœuds ; efforts et déformations longitudinales des barres, et charges équilibrées.

A.4 Validation des résultats

Les résultats d'une itération *i* seront validés sans passer aux itérations qui suivent, si dans le tableau des charges équilibrées affiché dans le fichier **écriture**, on trouve les mêmes valeurs des charges appliquées aux nœuds, à un degré de précision admis.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Campbell David M., P.Eng.; David Chen, et Paul A. GOSSEN P.E., “ Design Experience with Nonlinear Tension Based Systems: Tents, Trusses and Tensegrity”.
- [2] Centre for Engineering structures and materials, “What is a space structure” Research – school of Engineering University of Surrey , , 23/02/2002, Pages : 1 à 5.
- [3] Christoph Gengnagel, “Arbeitsblätter „Tensegrity“ ”, Université de München, faculté d’architecture, 2002, Pages : 1 à 17.
- [4] CRAVEUR Jean-Charles, « Modélisation des structures, calcul par éléments finis avec problèmes corrigés », Deuxième édition MASSON Paris 1997, page : 153.
- [5] Feng Fu, “Structural behavior and design methods of Tensegrity domes”, Journal of Constructional Steel Research, Pages : 23-35, janvier 2005.
- [6] FEST Etienne , « Une structure active de type tenségrité », Thèse de Doctorat (2003), section de Génie Civil, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, France.
- [7] GAO Bo-qing, WENG En-hao, “Sensitivity analyses of cables to suspen-dome strucural system” , Université Hangzhou, China, 2004, Pages : 1045-1052.
- [8] García Ch.–Diego & H. Pöppinghaus, “Bifid Tension Dome for the Forum 2004, Barcelona “ 2004.
- [9] Gasparini D., M.ASCE et V. Gautam, « Geometrically Nonlinear Static Behavior of Cable Structures” , Université occidentale de réservation, Cleveland, édité au J. Struct. Engrg., volume 128, N° 10, pp. 1317-1329 (octobre 2002).
- [10] Gerardo Castro, M. ASCE et Matthys P., F. ASCE , “Analysis of the Georgia Dôme Câble Roof”, Démarches de la huitième conférence de calcul dans le domaine de génie civil et des systèmes d’informations et de Géographie, du 7 au 9 juin 1992.
- [11] GOMEZ JAUREGUI. V, « Tensegrity Structures and their Application to Architecture », tesis inédia para el Masters Architecture, School of Architecture, Queen’s University Belfast, 2004.
- [12] GUENFOUD Mohamed, « Introduction à la théorie non linéaire géométrique de la mécanique des structures », OPU 2004 , page 9-75.
- [13] KEBICHE K., M.N Kazi-Aoual et R. Motro , “Geometrical non-linear analysis of tensegrity systems”, Engineering Structures 21 (1999) , page : 864-876.
- [14] KEBICHE Khelifa, « Etude en non linéarités géométriques des systèmes réticulés autocontraints- Application aux systèmes de tenségrité », Université Montpellier II, Thèse de Doctorat , 1998, page : 10-22.
- [15] Kitipornchai S., Wenjiang Kang, Heung-Fai Lam, et F. Albermani, “Factors affecting the design and construction of Lamella suspen-dome systems”, Journal of Constructional Steel Research, Volume 61, N° 6 , Juin 2005, Pages 764-785.

-
- [16] KURTZ Jean – Paul , « Dictionnaire du Génie Civil : Français - Anglais » , 1997 , Page : 403.
- [17] LAISNEY François, Encyclopædia Universalis 2004.
- [18] LAUTE Jean-Pierre, « Structures à câbles », Techniques de l'Ingénieur, Traité de construction, 2-1992, C 2580, Pages : 1 à 20.
- [19] MALINOWSKI Marc, « Structures textiles », Techniques de l'ingénieur , Traité de construction, 8-1993, C2470.
- [20] Massimiliano Lazzari, Renato V. Vitaliani', Massimo Majowiecki et Anna V. Saetta, "Dynamic behavior of a tensegrity system subjected to follower wind loading", Département de la construction et du transport, université de Padova, Italie, 19 Juin 2003.
- [21] Michel B. « Extreme engineering 2006 », Cours Gramme-Hemes, 17`eme Congrès Français de Mécanique, Troyes, – septembre 2005.
- [22] Mollaert M. " Membrane structures: understanding their forms". Prof. Dr. Eng. Département d'Architecture Vrije Universiteit Brussel.
- [23] MOTRO René , « Systèmes réticulés spatiaux en état de tensegrité » Techniques de l'ingénieur 11 2004 IN 19 Pages 1-12.
- [24] MOTRO René, SEYE Agnès, « Parlez-vous tensegrité ? », Université Montpellier 2, Communiqué de presse – 20 avril 2007, Pages : 1 à 3.
- [25] MOUTY Jean, « Structures réticulées spatiales », Techniques de l'Ingénieur, Traité de construction, 2-1992, C 2 575, Pages : 1 à 18.
- [26] Murakami Hidenori, " Static and dynamic analyses of tensegrity structures. Part 1. Nonlinear equations of motion", Departement d'ingeneerie de mécanique et aero spatial, Université de California - San Diego, USA, Journal international des solides et structures, Volume 38 - 20, Mai 2001, Pages 3599-3613.
- [27] Ohsaki M.et Y. Kanno, "Form – finding of cable domes with specified stresses by using nonlinear programming",Département d'architecture et de technologie architecturale. Université de Kyoto, Japon, 2003.
- [28] Telmo Egmar Camilio Deifeld, Et Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti, " Numericul simulation of the assembling of tensegrity domes", Departement of Structural and Foundation Engineering polytschnic School of University of Sao Paulo, Brazil, 2005.
- [29] Telmo Egmar Camilio Deifeld, Et Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti, « Sobre o projeto ea construação de estruturas tensegrity », 17 au 21 mai 2004, Faculté des Ingénieurs, Université nationale de Cuyo, Argentine, Journal Sud-Américan des Ingénieurs de structures, Pages : 1 à 13.
- [30] Tibert A.G. "Optimal design of tension truss antennas", Département de mécanique, Institut royal de technologie, Stockholm, Suède, 2003.

- [31] Tibert Gunnar, “Numerical Analyses of Cable Roof Structures”, These de licence, Département des structures et engineering, Institut royal de technologies, Stockholm, Suède, 1999.
- [32] VASSART Nicolas , « Recherche de forme et stabilité des systèmes réticulés autocontraints, applications aux systèmes de tensegrité », thèse de Doctorat, Université de Montpellier II, France, 1997, page 8 – 23.
- [33] VASSART N., LAPORTE R., et MOTRO R., « Determination of mechanisms’ s order for kinematically and statically undetermined systems”, Int. J. of Solids and Structures, CA, USA, Pergamon Press, à paraitre pp. 1-31.
- [34] Vladimír Vondrejs, “ Tensegrity structures in science, technique and art”, Pages : 1 à 11.
- [35] Yuan X. F. et S. L. Dong, “ Integral feasible prestress of cable domes”, Département de génie civil, université de Zhejiang, Hangzhou, Chine, 20 Avril 2003.
- [36] Zhang J.Y. , M. Ohsaki , Y. Kanno, “A direct approach to design of geometry and forces of tensegrity systems”, International Journal of Solids and Structures 43 (2006) pp 2260–2278 , Département d'architecture et de technologies architecturales, Université de Kyoto, Japon, 2006.
- [37] Zhang1. J.Y., Ohsaki. M., “ Optimization Methods for Force and Shape Design of Tensegrity Structures”, 7th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization, COEX Seoul, 21 Mai – 25 Mai 2007, Kore.

TABLE DES ILLUSTRATIONS

PARTIE 1 : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES DOMES CABLES

I. GENERALITES SUR L'HISTORIQUE ET LA CONCEPTION DES DOMES CABLES.

<u>Fig. 4-1:</u> Torons et câbles : exemples.....	9
<u>Fig. 5-1:</u> Exemples de dômes d'une seule couche.....	10
<u>Fig. 7-1:</u> Mécanismes.....	12
<u>Fig. 8-1:</u> Dôme de Georgia (Atlanta), Vue générale.....	13
<u>Fig. 8-2:</u> Dôme de Georgia (Atlanta), Vue à l'intérieur.....	13

II. RECHERCHES RECENTES SUR LES DOMES CABLES.

<u>Fig. 10-1:</u> Coupole géodésique conçue par Richard Buckminster Fuller.	15
<u>Fig. 10-2:</u> Dôme projeté par Snelson (1965).....	16
<u>Fig. 12-1:</u> Dôme de tenségrité en double couche. Modèle conçu et publié par Burkhardt (1999-2004).....	17
<u>Fig. 12-2:</u> Schéma du dôme de câble de David Geiger.....	17
<u>Fig. 12-3:</u> Dôme étudié par Pellegrino.....	17
<u>Fig. 12-4:</u> Deux des treize mécanismes du dôme de câble étudié par Pellegrino.....	18
<u>Fig. 12-5:</u> Modèle de la structure d'antenne proposée par A.G. Tibert.....	19
<u>Fig. 12-6:</u> Dôme exposé au forum de " <i>Barcelona 2004 Forum of the Cultures</i> " Barcelona 2004.....	19
<u>Fig. 12-7:</u> Coupe au niveau du dôme exposé au forum de " <i>Barcelona 2004 Forum of the Cultures</i> ", Barcelona 2004 (Portée 20 m).....	20
<u>Fig. 12-8:</u> Vue en plan du dôme exposé au forum de " <i>Barcelona 2004 Forum of the Cultures</i> ", Barcelona 2004.....	20
<u>Fig. 12-9:</u> Détail de montage du dôme exposé au forum de " <i>Barcelona 2004 Forum of the Cultures</i> ", Barcelona 2004.....	21
<u>Fig. 12-10:</u> Vue en plan et coupe au niveau du dôme étudié par M. Ohsaki et Y. Kanno.....	21
<u>Fig. 12-11:</u> Configuration d'équilibre du dôme étudié par M. Ohsaki et Y. Kanno.....	22
<u>Fig. 12-12:</u> Dôme câble suspendu étudié par GAO Bo-qing et WENG En-hao.....	23
<u>Fig. 12-13:</u> Dôme câble plan étudié par J.Y. ZHANG, M. OHSAKI, et Y. KANNO.....	24

PARTIE 2 : METHODES DE CALCUL DES DOMES CABLES

I. METHODES DE RECHERCHE DE FORME.

<u>Fig. 16-1:</u> Algorithme général de recherche de forme par la méthode des densités de force....	29
<u>Fig. 19-1:</u> Notation de longueur d'un élément j suivant son état.....	32
<u>Fig. 19-2:</u> Vue suivant l'axe OZ du nœud i libre connecté au nœud h par l'élément j.....	33
<u>Fig. 19-3:</u> Vue suivant l'axe OZ du nœud j de sa position de référence à sa position finale....	35
<u>Fig. 19-4:</u> Module plan à 4 câbles et une barre.....	38
<u>Fig. 19-5:</u> Les deux mécanismes du dôme plan à quatre câbles et une barre.....	40
<u>Fig. 20-1:</u> Module d'un dôme en étude d'équilibre.....	41
<u>Fig. 20-2:</u> Algorithme de résolution de la méthode directe.....	43
<u>Fig. 20-3:</u> Module plan à 4 câbles et une barre.....	44

II. METHODES D'ANALYSE EN NON LINEARITE GEOMETRIQUE.

<u>Fig. 23-1:</u> Méthode de Newton-Raphson.....	46
<u>Fig. 24-1:</u> Description de l'évolution du système.....	47
<u>Fig. 24-2:</u> Etapes de formulation des équations d'équilibre.....	48
<u>Fig. 24-3:</u> Description de la déformation d'une barre.....	52
<u>Fig. 24-4:</u> Algorithme de résolution de la méthode développée par Kh. KEBICHE.....	57

PARTIE 3 : RESULTATS NUMERIQUES

<u>Fig. 28-1:</u> Aire de la section transversale des barres en acier.....	61
<u>Fig. 28-2:</u> Section transversale des câbles.....	61
<u>Fig. 29-1:</u> La géométrie du module plan à 4 câbles et une barre.....	62
<u>Fig. 29-2:</u> Les deux mécanismes possibles du module plan à 4 câbles et une barre.....	62
<u>Fig. 29-3:</u> Comportement du module plan à quatre câbles et une barre sous la charge F.....	64
<u>Fig. 29-4:</u> Evolution de la traction dans les câbles du module plan à quatre câbles et une barre Précontrainte initiale = 8 KN.....	65
<u>Fig. 29-5:</u> Evolution de la compression dans la barre 5. Module plan à quatre câbles et une barre Précontrainte initiale = 8 KN.....	65
<u>Fig. 30-1:</u> La géométrie du module à huit câbles et une barre.....	66
<u>Fig. 30-2:</u> Le seul mécanisme possible du module à huit câbles et une barre.....	66
<u>Fig. 30-3:</u> Comportement du module à huit câbles et une barre sous la charge	68
<u>Fig. 30-4:</u> Evolution de la traction dans les câbles, Module à huit câbles et une barre Précontrainte initiale = 8 KN.....	68
<u>Fig. 30-5:</u> Evolution de la compression dans la barre 5, Module à huit câbles et une barre Précontrainte initiale = 8 KN.....	69
<u>Fig. 31-1:</u> La géométrie du dôme à seize câbles et quatre barre, Vue en Perspective.....	69
<u>Fig. 31-2:</u> La géométrie du dôme à seize câbles et quatre barres, Vue de haut.....	70
<u>Fig. 31-3:</u> Un des quatre mécanismes du dôme à seize câbles et quatre barre.....	70
<u>Fig. 31-4:</u> Comportement du dôme à seize câbles et quatre barres sous la charge F.....	72
<u>Fig. 31-5:</u> Evolution de la traction dans les câbles, Dôme à seize câbles et quatre barres Précontrainte initiale 8 KN.....	72
<u>Fig. 31-6:</u> Evolution de la compression dans les barres: 17,18,19 et 20, Dôme à seize câbles et quatre barres, Précontrainte initiale 8 KN.....	73
<u>Fig. 32-1:</u> La géométrie du dôme à vingt câbles et cinq barres.....	74
<u>Fig. 32-2:</u> Un des neuf mécanismes possibles du dôme à vingt câbles et cinq barres.....	75
<u>Fig. 32-3:</u> Comportement du dôme à vingt câbles et cinq barres sous la charge F.....	77
<u>Fig. 32-4:</u> Evolution de la traction dans les câbles, Dôme à vingt câbles et cinq barres, (Précontrainte dans les câbles centraux 8 kn).....	78
<u>Fig. 32-5:</u> Evolution de la compression dans les barres : 7, 10, 11, 20, et 21, Dôme à vingt câbles et cinq barres, Précontrainte initiale 8KN.....	78
<u>Fig. 33-1:</u> La géométrie du dôme à quarante deux câbles et douze barres, Vue en perspective.....	79
<u>Fig. 33-2:</u> La géométrie du dôme à quarante deux câbles et douze barres, Vue de haut.....	80
<u>Fig. 33-3:</u> La géométrie du dôme à quarante deux câbles et douze barres, Coupe A – A.....	80
<u>Fig. 33-4:</u> Deux des dix neuf mécanismes du dôme à quarante deux câbles et douze barres... ..	82
<u>Fig. 33-5:</u> Comportement du dôme à quarante deux câbles et douze barres sous la charge F Dôme câble portée 60 m.....	86
<u>Fig. 33-6:</u> Evolution de la traction dans les câbles, Dôme à quarante câbles et douze barres, portée 60 m, Précontrainte initiale dans les câbles centraux 25 kn.....	87

<u>Fig. 33-7:</u>	Evolution de la compression dans les barres, Dôme à quarante deux câbles et douze barre, portée 60 m, Précontrainte initiale dans les câbles supérieurs centraux 25 kn.....	87
<u>Fig. 33-8:</u>	Comportement de la structure sous la charge F, Dôme à quarante deux câbles et douze barres, portée 60 m, Précontrainte initiale dans les câbles centraux 25 kn.....	88
<u>Fig. 33-9:</u>	Comportement de la structure sous la charge F, Dôme à quarante deux câbles et douze barres, Variation de la portée, Précontrainte dans les câbles supérieurs centraux 75 kn.....	88
<u>Fig. 33-10:</u>	Dôme à quarante deux câbles et douze barres, Déplacement des noeuds : 19, 21, 23, 25, 27, et 29 en fonction de la variation de la section des câbles et des barres.....	89

LISTE DES TABLEAUX

PARTIE 1 : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES DOMES CABLES

**I. GENERALITES SUR L'HISTORIQUE ET LA CONCEPTION
DES DOMES CABLES.**

II. RECHERCHES RECENTES SUR LES DOMES CABLES.

PARTIE 2 : METHODES DE CALCUL DES DOMES CABLES

I. METHODES DE RECHERCHE DE FORME.

Tabl. 19-1: Les différents types de systèmes réticulés.....38

II. METHODES D'ANALYSE EN NON LINEARITE GEOMETRIQUE.

PARTIE 3 : RESULTATS NUMERIQUES

<u>Tabl. 29-1:</u> Géométrie du module plan à 4 câbles et une barre (en cm)	62
<u>Tabl. 29-2:</u> Structure relationnelle et tension initiale du module plan à quatre câbles et une barre.....	63
<u>Tabl. 30-1:</u> Géométrie du module à huit câbles et une barre (en cm).....	66
<u>Tabl. 30-2:</u> Structure relationnelle et tension initiale du module à huit câbles et une barre.....	67
<u>Tabl. 31-1:</u> Géométrie du dôme à seize câbles et quatre barres (en cm).....	70
<u>Tabl. 31-2:</u> Structure relationnelle et tension initiale du dôme à seize câbles et quatre barres.....	71
<u>Tabl. 32-1:</u> Géométrie du dôme à vingt câbles et cinq barres (en cm).....	74
<u>Tabl. 32-2:</u> Structure relationnelle et tension initiale du dôme à vingt câbles et cinq barres.....	76
<u>Tabl. 33-1:</u> Géométrie du dôme à quarante deux câbles et douze barres (en cm).....	81
<u>Tabl. 33-2:</u> Structure relationnelle et tension initiale du dôme à quarante deux câbles et douze barres.....	83
<u>Tabl. 33-3:</u> Structure relationnelle et tension initiale du dôme à quarante deux câbles et douze barres.....	84
<u>Tabl. 33-4:</u> Structure relationnelle et tension initiale du dôme à quarante deux câbles et douze barres.....	85

FIN.