

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

جامعة فرحات عباس سطيف 1  
UNIVERSITE FERHAT ABBAS — SETIF 1

## Thèse de Doctorat en Sciences

présentée au département d'Electrotechnique  
Faculté de Technologie  
pour obtenir le diplôme de

### Doctorat Sciences en Automatique

Par

*BOURAHALA Fayçal*

Thème

# Contribution à la commande et à la stabilisation des systèmes non-linéaires avec retard

*Soutenu le 01/03/2018 devant la commission d'examen composée de :*

<i>RAHMANI Lazhar</i>	<i>Prof. à l'Université Sétif 1</i>	<i>Président</i>
<i>KHABER Farid</i>	<i>Prof. à l'Université Sétif 1</i>	<i>Directeur</i>
<i>GUELTON Kevin</i>	<i>M.C HDR à l'Université de Reims (URCA), France</i>	<i>Co-directeur</i>
<i>MOSTEFAI Mohamed</i>	<i>Prof. à l'Université Sétif 1</i>	<i>Examineur</i>
<i>BAHI Tahar</i>	<i>Prof. à l'Université d'Annaba</i>	<i>Examineur</i>
<i>LADACI Samir</i>	<i>Prof. à l'ENP de Constantine</i>	<i>Examineur</i>

# Remerciements

Mes grands remerciements vont avant tous à mon Dieu qui m'a donné la capacité d'achever ce travail et qui m'a aidé à dépasser toutes les difficultés que j'ai rencontrées durant ces années d'étude.

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé, au sein du laboratoire Qualité de l'énergie dans les réseaux électriques (QUERE) de l'université Sétif 1 ainsi qu'au Centre de Recherche en Sciences et Techniques de l'Information et de Communication CReSTIC (l'équipe de recherche COACH) de l'université de Reims Champagne-Ardenne (URCA) en France, sous la direction du Docteur Kevin Guelton. Je voudrais tout d'abord leur exprimer ma profonde reconnaissance pour m'avoir accueilli dans leurs équipes, leurs aides, leurs précieux conseils et leurs confiances qu'ils m'ont accordés.

Ce travail a également été réalisé avec le soutien du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique, l'université de 20 Août 55 de Skikda et l'université de Reims Champagne-Ardenne. Je remercie ces institutions pour leur soutien.

Je tiens à remercier chaleureusement Monsieur Farid Khaber, Professeur à l'Université Sétif 1 qui m'a fait l'honneur d'être encadreur de ce travail de thèse, pour le temps qu'il a bien voulu consacrer à cette tâche et les enrichissements divers qu'il a apporté à ma thèse. Merci pour la confiance dont vous avez fait preuve à mon égard.

Le bon déroulement de ce travail de thèse a été possible grâce à mon encadreur à l'étranger, Docteur Kevin Guelton, Maître de Conférences HDR à l'Université de Reims Champagne Ardenne. Je lui suis reconnaissant du soutien qu'il m'a apporté. Je lui exprime également ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères pour les judicieux conseils qu'il m'a prodigué tout au long de mes séjours au CReSTIC et ainsi que pour ses qualités humaines.

Je tiens à remercier Monsieur RAHMANI Lazhar, Professeur à l'université Sétif 1, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury.

Je remercie également Monsieur BAHI Tahar Professeur à l'université d'Annaba, Monsieur LADACI Samir Professeur à l'école nationale polytechnique de Constantine et Monsieur MOSTEFAI Mohamed, Professeur à l'université Sétif 1 pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'évaluer mes travaux et faire partie du jury.

Je tiens particulièrement à remercier tous les membres du CReSTIC et tous les doctorants pour leurs sympathies.

Je souhaite également exprimer mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribuées, directement ou indirectement, au bon déroulement de cette thèse au travers de leurs aides, leur soutien et leurs encouragements.

Je voudrais remercier mes parents, non pas pour cette thèse, mais pour m'avoir autant poussé, m'avoir donné le goût d'apprendre et l'envie de m'améliorer. C'est à vous que je dois d'être là et de pouvoir écrire ces lignes.

je remercie également, toute ma famille, qui m'a accompagné tout au long de mes études par son soutien constant en particulier ma femme, mes enfants (Anis et Hroune) et mes frères et sœurs pour leurs encouragements et leurs soutient

Enfin, je remercie toute personne, en particulier D<sup>r</sup> : BOURAOUI Nacir, ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

## **Table des matières**

<b>Table des figures V.....</b>	<b>VI</b>
<b>Liste des tableaux .....</b>	<b>VIII</b>
<b>Notations .....</b>	<b>IX</b>
<b>Bibliographie personnelle.....</b>	<b>XI</b>
<b>Introduction générale.....</b>	<b>01</b>
<b>Chapitre I : Etat de l’art .....</b>	<b>07</b>
<b>Chapitre II : Généralités sur les systèmes à retard.....</b>	<b>15</b>
2.1. Introduction .....	15
2.2. Système à retard .....	15
2.3. Exemples de systèmes à retard.....	16
2.3.1. Douche écossaise .....	17
2.3.2. Commande par réseau de communication.....	18
2.3.3. Véhicule sous-marin AUV.....	18
2.4. Classification des systèmes à retards.....	20
2.4.1 Les systèmes de type retardé.....	20
2.4.2. Les systèmes de type neutre .....	21
2.4.3. Les systèmes LTI (Linear Time-Invariant) à retards discrets.....	21
2.4.4. Les systèmes à retards distribués.....	21
2.5. Catégories du retard .....	22

2.5.1.	Retard constant .....	22
2.5.2.	Retard variable dans le temps .....	22
2.5.2.1.	Retard variable majoré.....	22
2.5.2.2.	Retard variable borné.....	23
2.5.2.3.	Retard à dérivée bornée.....	23
2.5.3.	Retard distribué .....	24
2.5.4.	Retard variable arbitraire.....	24
2.6.	Stabilité des systèmes à retard au sens de Lyapunov.....	24
2.6.1.	Définitions et notations .....	25
2.6.1.1.	Stabilité.....	26
2.6.1.2.	Attractivité.....	26
2.6.1.3.	Stabilité asymptotique.....	26
2.6.1.4.	Stabilité uniforme.....	27
2.6.1.5.	Stabilité uniforme asymptotique.....	27
2.6.1.6.	Stabilité asymptotique globale et uniforme.....	27
2.6.1.7.	Stabilité exponentielle.....	27
2.6.1.8.	Stabilité robuste.....	28
2.7.	Approche de stabilité par la fonction de Lyapunov-Krasovskii (LKF) .....	28
2.7.1.	Théorème 2.1 : Théorème de Lyapunov-Krazovskii.....	29
2.8.	Approche de stabilité par la fonction de Lyapunov- Razumikhin (LRF) .....	30
2.8.1.	Théorème 2.2 : Théorème de Lyapunov- Razumikhin.....	31
2.9.	Représentation des systèmes à retard par les modèles flous de Takagi-Sugeno.....	32
2.10.	Stabilité indépendante et stabilité dépendante du retard.....	33

2.10.1.	Critère de la stabilité ‘retard-indépendant’ .....	34
2.10.2.	Critère de stabilité ‘retard-dépendant’ .....	35
2.11.	Conclusion.....	36
<b>Chapitre III : Systèmes Takagi-Sugeno à retard variable.....</b>		<b>37</b>
3.1.	Introduction.....	37
3.2.	Concepts élémentaires sur les modèles flous Takagi-Sugeno standards.....	38
3.3.	Obtention d’un modèle flou Takagi-Sugeno.....	40
3.3.1.	Méthode d’identification.....	40
3.3.2.	Méthode de linéarisation.....	41
3.3.3.	Méthode de secteur non linéaire.....	33
3.4.	Stabilité, stabilisation et commande des modèles Takagi-Sugeno standards.....	46
3.4.1.	Fonction de Lyapunov quadratique.....	47
3.4.2.	Stabilité quadratique des modèles Takagi-Sugeno standards.....	48
3.4.3.	Stabilisation et commande des modèles Takagi-Sugeno standards.....	48
3.4.3.1.	Loi de commande PDC.....	48
3.5.	Relâchement des conditions de stabilité.....	49
3.5.1.	Relaxation de Tanaka.....	50
3.5.2.	Relaxation de Tuan (Lemme de Tuan) .....	51
3.6.	Exemple illustratif.....	51
3.7.	Principaux types de modèles Takagi-Sugeno à retard.....	58
3.7.1.	Modèle Takagi-Sugeno à retard en l’état.....	59
3.7.1.1.	Modèle nominal (sans incertitudes). .....	59

3.7.1.2.	Modèle incertain.....	59
3.7.2.	Modèle Takagi-Sugeno à retard en entrée.....	60
3.7.3.	Modèle Takagi- Sugeno à retard en l'état et en entrée.....	60
3.8.	Propriétés et lemmes utiles.....	61
3.8.1.	Lemme de Schur (Compliment de Schur) .....	61
3.8.2.	Lemme de Finsler.....	61
3.8.3.	Lemme d'inégalité (Carré matriciel) .....	62
3.8.4.	Lemme de congruence.....	62
3.8.5.	Formule de Newton-Leibniz.....	62
3.8.6.	Inégalité quadratique intégrale de Jensen.....	62
3.8.7.	Inégalité quadratique intégrale.....	63
3.8.8.	Matrices de pondération libres (Free-Weighting Matrix FWM) .....	63
3.9.	Modèles flous Takagi-Sugeno à retard.....	64
3.9.1.	Préliminaires et position du problème.....	64
3.9.2.	Contribution apportée.....	67
3.9.3.	Discussion des résultats.....	74
3.10.	Exemple illustratif et résultats de simulation.....	79
3.11.	Conclusion.....	87

**Chapitre IV : Systèmes Takagi-Sugeno incertains à retard variable..... 89**

4.1.	Introduction.....	89
4.2.	Modèles Takagi-Sugeno incertains à retard variable.....	90

4.3.	Loi de commande PDC.....	92
4.4.	Stabilisation et commande robuste des modèles Takagi-Sugeno incertains à retard variable.....	94
4.5.	Exemples illustratifs et résultats de la simulation.....	102
4.5.1.	Exemple 4.1.....	201
4.5.2.	Exemple 4.2.....	109
4.6.	Conclusion.....	115
	<b>Conclusion générale et perspectives .....</b>	<b>117</b>
	<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>121</b>
	<b>Annexe.....</b>	<b>129</b>



## Table des figures

Fig. 2.1:	Provenance des retards dans une boucle d'asservissement.....	16
Fig. 2.2:	Douche écossaise.....	17
Fig. 2.3:	Commande par réseau.....	18
Fig. 2.4:	Le véhicule sous-marin AUV 'Victor 6000' .....	19
Fig. 2.5:	Stabilité au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre $x_e$ .....	26
Fig. 2.6:	Stabilité asymptotique au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre $x_e$ .....	27
Fig. 2.7:	Stabilité exponentielle au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre $x_e$ .....	28
Fig. 3.1:	Secteur non linéaire global.....	44
Fig. 3.2:	Secteur non linéaire local.....	44
Fig. 3.3:	Système de translation et de rotation (TORA).....	52
Fig. 3.4:	Fonctions d'appartenance de $y_1(t)$ et $y_2(t)$ .....	55
Fig. 3.5:	Schéma de commande du système TORA.....	56
Fig. 3.6:	Réponses temporelles du système TORA .....	57
Fig. 3.7:	Signal de commande.....	57
Fig. 3.8:	Champ de faisabilité du théorème 3.5: du théorème 3 de [13] et du corollaire 2 de [12].....	80
Fig. 3.9:	Champ de faisabilité du corollaire 3.1 et du corollaire 2 de [12].....	81
Fig. 3.10:	Réponses temporelles du système (3.100) avec un retard constant $\eta = 0$ .....	84
Fig. 3.11:	Signal de commande.....	84
Fig. 3.12:	Réponses temporelles du système (3.100) avec un retard variable ( $\eta = 3$ ) .....	85
Fig. 3.13:	Signal de commande avec un retard variable.....	86
Fig. 3.14:	Signal du retard.....	86
Fig. 4.1:	Champ de faisabilité du théorème 4.1, du théorème 3 de [12] et du théorème 3 de [13].....	103
Fig. 4.2:	Réponses temporelles du système incertain (4.29) à retard constant ( $\eta = 0$ ) ....	105
Fig. 4.3:	Signal de commande du système incertain à retard constant (4.29) .....	106

Fig. 4.4:	Signal des incertitudes $\delta(t)$ .....	106
Fig. 4.5:	Réponses temporelles du système incertain (4.29) à retard variable ( $\eta = 3$ ) .....	107
Fig. 4.6:	Signal de commande du système incertain (4.29) à retard variable.....	108
Fig. 4.7:	Signal du retard $\tau(t) = \bar{\tau} \sqrt{2} (1 + \sin(2\eta t \sqrt{\bar{\tau}}))$ .....	108
Fig. 4.8:	Modèle Chariot-remorque.....	110
Fig. 4.9:	Réponses temporelles du système incertain du chariot –remorque.....	114
Fig. 4.10:	Signal de commande.....	114

## Liste des tableaux

Tab. 3.1 :	Comparaison de $MAUB(\bar{\tau})$ pour différentes valeurs de $\eta$ .....	82
Tab. 3.2 :	Valeurs de $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et $\varepsilon_3$ obtenus pour les résultats donnés dans le tableau 3.1.....	83
Tab. 4.1 :	Comparaison de $MAUB(\bar{\tau})$ pour différentes valeurs de $\eta$ - Exemple 4.1.....	104
Tab. 4.2 :	Valeurs de $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et $\varepsilon_3$ obtenues pour les résultats donnés dans le tableau 4.1.....	104
Tab. 4.3 :	Comparaison de $MAUB(\bar{\tau})$ pour différentes valeurs de $\eta$ - Exemple 4.2.....	113

## Notations

### Acronymes

T-S	Takagi-Sugeno
PDC	Compensation parallèle distribuée (Parallel Distributed Compensation)
LMI	Inégalité matricielle linéaire (Linear Matrix Inequality)
LKF	Fonction de Lyapunov-Krasovskii (Lyapunov-Krasovskii Functional)
LRF	Fonction de Lyapunov-Razumikhin (Lyapunov-Razumikhin Functional)
TORA	Oscillateur de translation avec actionneur rotatif (Translational Oscillator with Rotational Actuator)
MAUB	Limite supérieure admissible du retard (Maximum Admissible Upper Bound)
FWM	Matrices de pondération libre (Free-Weighting Matrices)
LILF	Fonction de Lyapunov intégrée à la ligne (Line-Integral Lyapunov Function)
AUV	Véhicule sous-marin (Autonomous Under water Vehicle)
LTI	Linéaire à temps invariant (Linear Time Invariant)
LPV	Linéaire à paramètres variants (Linear Parameter Variant)

### Ensembles, normes et nombres

$\mathbb{R}$  : Ensemble des nombres réels

$\mathbb{R}^n$  : Espace réel Euclidien de dimension  $n$

$\mathbb{R}^{n \times m}$  : Ensemble des matrices à éléments réels de dimension  $n \times m$

$\mathbb{R}^+$  : Ensemble des nombres réels positifs

$\mathcal{I}_r$  : Ensemble des entiers  $\{1, \dots, r\}$

$\mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R}^n)$  : Ensemble des fonctions continues de  $[t_0 - \tau, t_0]$  dans  $\mathbb{R}^n$

$|\cdot|$  : Valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe

$\|x\|$  : Norme Euclidienne de  $x$  sur  $\mathbb{R}^n$

$\|\cdot\|_c$  : Norme sur  $C$  définie par  $\forall \phi \in C : \|\phi\|_c = \max_{t_0 - \tau < \theta < t_0} (\|\phi(\theta)\|)$

$t \in \mathbb{R}^+$  : Variable temporelle

$\tau, \bar{\tau}, \underline{\tau}$  : Temps de retard constant, sa valeur maximale et minimale respectivement

## Vecteurs et fonctions

$[a, b]$  : Intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ , d'extrémités  $a$  et  $b$

$]a, b[$  : Intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , d'extrémités  $a$  et  $b$

$[a, b[$  : Intervalle semi-ouvert de  $\mathbb{R}$ , d'extrémités  $a$  et  $b$

$\tau(t)$  : Retard variable dans le temps (Fonction continue)

$x = [x_1, \dots, x_n]$  : Vecteur d'état instantané

$x^T$  : Transposé du vecteur  $x$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  : Dérivée temporelle de l'état  $x$

$x_t$  : Fonction segment à l'instant  $t$ , définie par :  $x_t(\theta) = x(t + \theta) \forall \theta \in [-\tau, 0]$

$x_t(t_0, \phi)$  Vecteur à l'instant  $t$ , solution d'une équation différentielle fonctionnelle pour un instant initial  $t_0$  et une condition initiale  $\phi$

$\phi(\cdot)$  : Fonction caractérisant la condition initiale  $\phi(\cdot) \in C$ ,  $x(t) = \phi(t) \forall t \in [t_0 - \tau, t_0]$

$K_i, K_i^d, i \in \mathcal{I}_r$  : Vecteurs des gains sans mémoire et avec mémoire (retardés) respectivement

## Matrices

$I_n$  : Matrice identité de dimension  $n$

$I$  : Matrice identité de dimension appropriée

$X^{-1}$  : Inverse de la matrice  $X$

$X^T$  : Transposée de la matrice  $X$

$X > 0, X < 0$  : Matrice  $X$ , définie positive (respectivement négative)

$\begin{bmatrix} R & S \\ * & Q \end{bmatrix}$  : Matrice symétrique où  $*$  remplace  $S^T$

## Bibliographie personnelle

### Revue :

- F. Bourahala, K. Guelton, N. Manamanni, and F. Khaber, "Relaxed Controller Design Conditions for Takagi--Sugeno Systems with State Time-Varying Delays," *Int. J. Fuzzy Syst.*, vol.19, no.5, pp. 1406-1416, 2017.

### Communications Internationales

- F. Bourahala, K. Guelton, , "A Finsler-based result for the stability analysis of Takagi-Sugeno fuzzy models with interval time-varying delays," in *IEEE 2017 11th Asian Control Conference (ASCC)* , Gold Coast, Australia, pp. 1743 - 1748, 2017.
- F. Bourahala, K. Guelton, F. Khaber, and N. Manamanni, "Robust controller design for uncertain TS fuzzy systems with time-varying delays," in *2016 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, , Vancouver, Canada, pp. 2337-2342, 2016.
- F. Bourahala, K. Guelton, F. Khaber, and N. Manamanni, "Improvements on PDC Controller Design for Takagi-Sugeno Fuzzy Systems with State Time-Varying Delays," in *4th IFAC International Conference on Intelligent Control and Automation Sciences*, Reims, France, 2016.
- F. Bourahala, N. Nafir, "An LMI approach to robust  $H_\infty$  control and stabilization analysis for uncertain TS fuzzy systems with state and input time-delays," in *3rd International Conference on Control, Engineering & Information Technology (CEIT'2015)*, 2015, pp. 1-6.
- F. Bourahala, F. Khaber, "Delay-Dependent Approach to Robust  $H_\infty$  control and Stabilization Analysis for Uncertain Takagi-Seguno Fuzzy Systems with State and Input Time-Delays," in *22èmes rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA 2013)*, 10-11 octobre 2013, Reims, France, 2013.

- F. Bourahala, F. Khaber, "An LMI Approach to Robust Stabilization Analysis for Uncertain Takagi-Seguno Fuzzy Systems with State and Input Time Delays," in *5th international conference on electronics engineering, (ICEE 2013), Oran-Algeria, 2013.*
- F. Bourahala, F. Khaber, "Robust Control and Stabilization Analysis of Uncertain T-S Fuzzy Systems: Time Delay Dependent and LMI Approach," in *International Conference on Electromechanical Engineering (ICEE'2012), Skikda, Algeria, 20-22 November 2012, 2012.*
- F. Bourahala, F. Khaber, "Robust Stabilization Analysis of Uncertain T-S Fuzzy Systems with Constant State Delay: TimeDelay-Dependent and LMI Approach," in *Firt international conference on electrical engineering and control applications (ICEECA'2012) Khenchela, Algeria, 2012.*
- F. Bourahala, F. Khaber, "Stability analysis of continues T-S fuzzy systems with time delay: delay-independent and linear matrix inequalities approach," in *2nd international conferance on information processing and electrical engeneering (ICIPEE'12), Tebessa, algeria, 2012.*
- F. Bourahala, F. Khaber, "Relaxation of the Stability Conditions of Fuzzy Nonlinear Systems of Takagi-Seguno: An LMI Approach," in *Conférence Internationale sur la mécatronique (CIAM'11) Oran- Algerie, 2011.*
- F. Bourahala, F. Khaber, "Nouvelles Conditions de Stabilité des Systèmes Flous de Takagi-Sugeno par l'Approche LMI," in *Conférence Internationale sur l'Ingénierie de l'Eélectronique ICEE'08, Oran, Algerie, 2009.*
- F. Bourahala, F. Khaber, H. Arioui, R. Merzouki, and H. A. Abbassi, "New Stability Conditions of Takagi-Sugeno Fuzzy Systems via LMI," in *AIP Conference Proceedings, Annaba, Algeria, 2008, vol. 1019, no. 1, pp. 109-114.*

# Introduction générale 1

Le problème de la stabilité et de la commande des systèmes dynamiques complexes constitue une préoccupation majeure en automatique. En effet, lors de l'étape de modélisation d'un système dynamique, le défi de l'automaticien est d'établir un modèle mathématique de connaissance capable de décrire, le plus fidèlement possible, son fonctionnement naturel afin d'analyser ses propriétés. Dans ce cadre, le comportement d'un système dynamique ne peut être décrit, d'une façon parfaite, par un modèle trop simplifié. Cependant, en augmentant la finesse de modélisation d'un modèle, sa complexité augmente et peut le rendre inexploitable avec les outils actuels d'analyse des systèmes. Ainsi, la prise en considération des incertitudes de modélisation lors de la commande robuste des systèmes non linéaires constitue un compromis entre complexité et validité des résultats, ce qui nous amène à une alternative intéressante pour la commande des systèmes complexes.

Par ailleurs, au cours de ces dernières décennies, la méthode de modélisation 'floue' sous forme de modèles Takagi-Sugeno (T-S) [1] a été largement utilisée pour la représentation mathématique des systèmes non linéaires. En effet, lorsqu'ils sont obtenus grâce à l'approche de secteurs non-linéaires [2], ils permettent de représenter, de manière exacte, un système non linéaire affine en la commande, sur un espace compact de leurs variables d'état, par une collection de sous-modèles linéaires exprimant la dynamique d'un système autour de points de fonctionnement particuliers de l'espace d'état et pondérés par le biais des fonctions non linéaires (appelées fonctions d'appartenance) satisfaisant la propriété de convexité. Ils offrent ainsi un excellent compromis entre complexité, précision et flexibilité de modélisation.

Le problème de stabilité et de synthèse d'une loi de commande adéquate pour les modèles T-S, en boucle fermée, est souvent traité à l'aide de la méthode directe de Lyapunov. Ainsi, la loi de commande de type compensation parallèle distribuée (Parallel Distributed Compensation PDC) [3] est considérée comme la plus appropriée pour la commande des modèles T-S. L'idée principale de cette loi de commande est de dériver chaque règle de commande de manière à



compenser chaque règle du modèle T-S. Les conditions de conception du contrôleur PDC sont généralement exprimées sous formes d'Inégalités Matricielles Linéaires (Linear Matrix Inequality LMI) résolues efficacement par des techniques d'optimisation convexe[4] et qui constituent un cadre intéressant pour traiter les problèmes d'analyse de la stabilité.

De plus, dans de nombreux phénomènes physiques et biologiques, le taux de variation dans l'état du système dépend des états passés. Cette caractéristique s'appelle 'un retard' et le système est appelé système à retard. Le phénomène de retard a été, d'abord, découvert naturellement en biologie et en chimie. Puis, il est rencontré dans beaucoup d'installations et dispositifs industriels pratiques et dans une large gamme de processus de l'ingénierie d'une manière qui ne peut pas être ignorée. Par ailleurs, même si le procédé lui-même ne contient pas de retards, les capteurs, les actionneurs et les temps de calcul nécessaires à sa commande peuvent engendrer des retards non négligeables. Par ailleurs, le phénomène de retard a été toujours considéré comme l'un des problèmes les plus difficiles rencontrés dans la commande des systèmes. Sa présence a une influence considérable sur le comportement d'un système bouclé et peut même être à l'origine d'oscillations indésirables et peut même causer l'instabilité du système.

Il s'avère alors utile de développer une théorie de commande pour la conception de contrôleurs pour les systèmes à retard. C'est pourquoi, l'analyse de la stabilité de ces systèmes dynamiques à retard a fait l'objet d'efforts de recherche considérables, voir par exemples [5]-[9]. La majorité de ces travaux existants concerne une classe particulière de systèmes dynamiques à retard, il s'agit de systèmes T-S à retard, voir par exemple [10]-[23] et les références qui y sont mentionnées.

L'analyse de la stabilité et la stabilisation des modèles T-S à retard est généralement étudiée en utilisant la fonction quadratique de Lyapunov-Krasovskii (LKF), cette fonction permet d'établir des conditions de stabilité/stabilisation sous forme des LMIs. Lors de la conception du contrôleur, cette fonction LKF permet de prendre en considération le retard et sa variation temporelle, voir par exemple [24]. Il est à noter que de nombreuses études ont été proposées et focalisées, ces dernières années, sur l'amélioration du conservatisme des conditions LMIs des modèles T-S à retard, voir par exemple [12], [16]-[20] et [25]-[29].

En effet, dans la littérature du domaine, il existe deux types de critères pour l'analyse de stabilité des modèles T-S à retard et qui sont basés sur la fonction de Lyapunov-Razumikhin

(LRF) et celle de Lyapunov-Krasovskii critère du retard-indépendant [7], [23] et [27]–[30] et celui du retard-dépendant. Le premier critère est capable de tester la stabilité globale, uniforme et asymptotique du système pour toute valeur positive arbitraire du retard  $\tau$ . De plus, ce critère est utile si le comportement du système est dominé par le terme sans retard. Cependant, le critère du retard-dépendant permet de garantir, uniquement, la stabilité pour toutes les valeurs du retard comprises dans l'intervalle  $\tau \in [0, \bar{\tau}]$ , où  $\bar{\tau}$  dénote la valeur maximale que peut prendre le retard  $\tau$ . Il s'avère alors que le critère de stabilité "retard-dépendant" conduit à des résultats plus relâchés que ceux "retard-indépendant" particulièrement lorsque la taille du retard est petite. Par conséquent, le critère du "retard-dépendant" sera considéré dans cette thèse [7].

De ce fait, de nombreuses études traitant les conditions de stabilisation du retard-dépendant ont été proposées ces dernières années [12], [13], [17], [22], [24], [26] et [31]–[33] et différentes techniques analytiques et méthodes de synthèse de contrôleurs pour les modèles T-S à retard ont été développées telles que les matrices de pondérations libres [10] et [34], l'inégalité de Moon [38], l'inégalité intégrale de Jensen [16],[39] et [40] et récemment, l'approche de décomposition du retard [41]–[43]. Ainsi, la technique la plus examinée par la littérature est celle basée sur l'introduction des variables de relaxation supplémentaires pour réduire le conservatisme des conditions LMIs, [21], [26], [41] et [42]. Ces variables peuvent être introduites de plusieurs façons:

- La première consiste à choisir une fonction LKF appropriée. Dans ce contexte, les fonctions LKF étendues sont examinées avec succès, par exemple dans [12] et [43].
- L'extension de l'inégalité de Jensen est utilisée pour fournir des limites, beaucoup plus précises, pour les termes croisés et améliorer le conservatisme des conditions LMIs.
- L'introduction de termes nuls a également été considérée pour introduire des matrices de pondération libres, voir par exemple [47] et [48].
- Enfin, notons que, parallèlement aux efforts déployés pour réduire le conservatisme des conditions LMIs pour les modèles T-S à retards variables, des améliorations significatives ont été récemment proposées en appliquant le lemme de Finsler [12], [43] et [46]–[49].

Les travaux de recherche entrepris dans le cadre de cette thèse de doctorat ont pour objectif la résolution de certains problèmes, qui sont d'une importance majeure dans la théorie du contrôle à savoir :

- La proposition de nouvelles conditions de stabilisation et de commande pour les modèles T-S à retard variable, lesquelles seront exprimées sous forme d'LMI's moins conservatives, obtenues par l'approche du retard-dépendant et contenant des informations sur le retard ainsi que son taux de variation.
- La synthèse de nouveaux contrôleurs PDC (contenant à la fois les gains sans mémoire et ceux avec mémoire) qui permettent de stabiliser les modèles T-S à retard variable en compensant l'effet du retard à chaque instant.
- Etendre les méthodologies de synthèse de lois de commande synthétisées pour la stabilisation et la commande robuste des modèles T-S incertains à retard variable.

Pour atteindre nos objectifs, nous allons nous baser sur trois points principaux: 1) le choix d'une fonction LKF appropriée, 2) l'application d'une extension de l'inégalité de Jensen, 3) l'application du lemme de Finsler. Ces points seront à la base de l'amélioration du conservatisme des conditions LMI.

### **Organisation de la thèse**

A l'issue de cette introduction, la thèse composée de quatre chapitres, organisées de la façon suivante:

Le **premier chapitre** de cette thèse présente un état de l'art sur les systèmes à retards. Nous allons nous intéresser, plus particulièrement, aux modèles T-S à retard variable. Pour cela, nous dresserons une synthèse des divers travaux effectués dans ce domaine afin de positionner la contribution apportée dans cette thèse. Nous commencerons à rappeler les premiers résultats de la stabilité et de commande des modèles T-S standards, y compris les résultats de la relaxation. Puis nous nous pencherons sur l'étude des modèles T-S à retards variable, d'où nous rappellerons les travaux qui ont suscité l'intérêt des chercheurs dans ce domaine, puis nous citerons les principaux résultats de la stabilité et de la commande, basés sur l'approche du retard-dépendant et du retard-indépendant. Différents résultats et méthodes de relaxation seront également rappelés. Pour finir, nous expliquerons la stratégie que nous allons suivre pour obtenir de nouveaux résultats, moins conservatifs, et par conséquent, atteindre nos objectifs.

Le **deuxième chapitre** sera consacré à la présentation des bases théoriques et des notions fondamentales relatives aux systèmes à retards. Ainsi, il sera question de présenter quelques

exemples de systèmes à retard, la classification des systèmes à retard et les différents types des retards usuellement considérés. Nous nous intéresserons aussi à la notion de stabilité et les différentes manières de l'aborder. Il s'agira donc de définir, dans le cas des systèmes à retards, les notions générales de stabilité au sens de Lyapunov, telles que la méthode de Lyapunov, la méthode de Lyapunov-Krasovskii et celle de Lyapunov-Razumikhin. Puis nous présenterons les deux approches de stabilité : stabilité indépendante et stabilité dépendante du retard.

Le **troisième chapitre** sera constitué de deux grandes parties. Au cours de la première, nous introduirons brièvement la classe des modèles de T-S standards ainsi que leurs méthodes d'obtention. Un bref rappel sur les résultats préliminaires portants sur la stabilité et la conception des contrôleurs pour les modèles T-S standards sera donné.

Nous présenterons également les deux principaux lemmes de relaxation (relaxation de Tanaka [53] et celle de Tuan [54]), ainsi qu'un exemple numérique d'un système TORA (Translational Oscillator with Rotational Actuator) qui illustrera la puissance et l'efficacité de l'approche LMI.

Après avoir rappelé les propriétés et les lemmes utiles pour la suite de cette thèse, nous présenterons dans la deuxième partie de ce chapitre nos premiers résultats théoriques sur le problème de la synthèse de contrôleurs PDC pour les modèles T-S à retard variable. Différents corollaires seront également proposés en fonction de la nature du retard. (Corollaire 3.1 : retard non mesurable et sa dérivée est connue, corollaire 3.2 : retard mesurable et sa dérivée est inconnue, corollaire 3.3 : retard non mesurable et sa dérivée est inconnue).

Nous proposerons alors, un nouveau contrôleur comprenant, à la fois, des gains de retour d'état sans mémoire et ceux retardés. Les développements théoriques présentés seront basés sur le choix approprié d'une fonction LKF exploitant l'information sur le retard et sur sa dérivée, l'application d'une extension de l'inégalité de Jensen et l'utilisation de lemme du Finsler, qui aboutiront à l'établissement des conditions de stabilité exprimées sous forme LMIs. Ceci constitue une contribution importante dans la mesure où de telles conditions n'existent pas, à notre connaissance, dans la littérature. Ce chapitre s'achèvera par l'illustration de l'efficacité du contrôleur proposé, la puissance des conditions LMIs développées et l'amélioration du conservatisme par rapport aux résultats précédents, existant dans la littérature au travers des résultats de simulation sous l'environnement Matlab.

Enfin, le **quatrième chapitre** sera aussi consacré à la problématique de commande comme dans le chapitre précédent, mais, cette fois-ci, nous allons traiter le problème de la stabilisation et de la commande robuste des modèles T-S incertains à retard variable. Dans ce cadre, et en se basant sur les mêmes démarches que le cas sans incertitudes, de nouveaux contrôleurs PDC seront proposés et des nouvelles conditions de stabilisation LMIs, moins conservatives, seront obtenues. Enfin, deux exemples de simulation seront traités, sous l'environnement Matlab, afin de valider la puissance des contrôleurs PDC synthétisés ainsi que l'amélioration du conservatisme par rapport à plusieurs résultats antérieurs.

Une conclusion générale résumant le bilan des travaux réalisés et les perspectives envisagées sera donnée à la fin de cette thèse.

# Chapitre 1

## Etat de l'art

Au cours de ces dernières décennies, les modèles T-S [1] ont suscités une grande attention dans la communauté de commande. Ils sont aujourd'hui reconnus comme des représentations polytopiques convexes puissantes pour faire face à plusieurs problèmes de commande non linéaire. Historiquement, ils ont été introduits pour combiner la flexibilité de la modélisation de la logique floue avec la rigueur de la théorie de commande dans un cadre unifié. Il est maintenant reconnu que les modèles T-S peuvent représenter exactement des éléments non linéaires dans des ensembles compacts de leur espace d'état, notamment quand ils sont obtenus par l'approche de secteurs non linéaires [2].

De ce fait, la représentation des systèmes non linéaire sous la forme des modèles T-S permet une analyse systématique de la stabilité et une conception de contrôleur par des Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) qui peuvent être résolues efficacement à l'aide d'outils classiques de l'optimisation convexe [4]. Plusieurs résultats de stabilité et de conception de contrôleur pour les modèles T-S ont été obtenus [2], [53], [55]–[59]. En effet, les modèles T-S sont combinés avec différentes lois de commande, parmi lesquelles la Compensation Parallèle Distribuée (PDC) [3] est considérée comme un choix naturel puisqu'elle est basée sur des retours d'état linéaire combinés en utilisant les mêmes fonctions d'appartenance que les modèles T-S. Ainsi, la méthode directe de Lyapunov est appliquée pour obtenir, dans la mesure du possible, des conditions, sous la forme des LMIs, satisfaisants la stabilité, la conception de contrôleur, et la conception des observateurs, [2], [53], [58], [60], [61].

Néanmoins, l'approche quadratique de Lyapunov présente une grande limitation car ses solutions (conditions LMIs) sont conservatives. Ce conservatisme sur les conditions LMIs vient de différentes sources tels que le type de modèle T-S utilisé [62], [63], la manière de dissociation des conditions LMIs des fonctions d'appartenance, l'intégration de l'information sur les fonctions

d'appartenance [64], [65] ou le choix de la fonction de Lyapunov [66],[67]. Dans ce cadre, il existe des résultats de stabilité/stabilisation qui n'ont pas de solution quadratique [68]–[70].

Pour faire face à ces inconvénients, et dans le but d'avoir des résultats beaucoup moins conservatifs, plusieurs lemmes de relaxation des conditions LMI ont fait l'objet de plusieurs travaux, par exemple, dans [53], les auteurs ont proposé des conditions LMI qui dépendent du nombre de règles actives à chaque instant. Les auteurs de [55] ont obtenu d'autres conditions LMI en introduisant des variables de décision supplémentaires. Pour améliorer les résultats de [53] et [55], les auteurs de [54] ont proposé une relaxation qui constitue un bon compromis entre conservatisme, complexité et temps de calcul, ainsi, elle inclue le domaine des solutions de la de [53] tout en assurant le même nombre des variables inconnues, ce type du relâchement sera utilisé dans ce manuscrit.

En revanche, dans la formulation originale des modèles T-S, il n'y a pas de retard dans l'état, la commande et la sortie du système. Cependant, il est bien connu que les retards peuvent être fréquemment rencontrés dans divers domaines de l'ingénierie, ils apparaissent souvent dans les systèmes industriels, les réseaux d'information et de communication tels que les procédés chimiques, les systèmes de traitement métallurgique, les systèmes sous réseau et les longues lignes de transmission pneumatique et hydraulique, les réacteurs nucléaires et d'autres domaines.

En effet, pour de tels systèmes dynamiques, les retards doivent être pris en compte dans la synthèse de lois de commande puisqu'ils peuvent provoqués l'instabilité et les oscillations indésirables et par conséquent la dégradation de performances du système. Ainsi, les retards doivent être traités en les prenant en considération lors de l'analyse de la stabilité et la conception du contrôleur.

Par conséquent, dans les dernières années, et afin de traiter le problème de la stabilité et de la commande, beaucoup d'efforts ont été appliqués à différents aspects des systèmes à retard , voir par exemple [6], [8], [10], [12], [13], [15]–[18], [21], [30], [37], [71]–[79] et [36]. Dans ce cadre, plusieurs approches ont été proposées. Par exemple, les auteurs de [10], [12], [13], [23], [35], [36], [41], [80]–[83], et [84] ont utilisé l'approche de la fonction de LKF. Quant aux [15] et [85] et plus récemment au [22], tout en construisant une fonction LKF augmentée, les auteurs ont proposé des conditions de stabilité et de stabilisation améliorées pour des modèles T-S incertains à retards variables dans le temps.

En parallèle, les auteurs de [30], [32] et [86] ont exploité l'approche de la fonction LRF pour proposer des résultats de stabilité dépendant du retard pour les modèles T-S à retards. Cependant, les résultats obtenus en utilisant cette approche sont généralement plus conservatifs que ceux utilisant l'approche de LKF parce que cette dernière exploite des informations supplémentaires sur le retard (telle que la borne supérieure du retard et sa dérivée) ce qui rend l'analyse de la stabilité et la conception de contrôleur par l'approche LKF plus complexe que l'approche de LRF.

D'autres travaux ont été également consacrés à l'étude de stabilité et à la conception de contrôleur pour les systèmes non linéaires à retard modélisés sous la forme des modèles T-S discret comme c'est le cas de [87]–[89], qui proposent une LKF discrétisée.

En outre, afin de réduire le conservatisme dans la conception du contrôleur les auteurs de [90] ont utilisé une fonction LKF floue, au lieu d'une fonction LKF standard, pour traiter la stabilisation des modèles T-S à retard. Plus récemment, les auteurs de [17] ont obtenu de nouvelles conditions LMI moins conservatives pour les systèmes flou T-S incertains à retard en utilisant une nouvelle fonction LKF augmentée et en combinant la technique de décomposition du retard et l'inégalité intégrale de Park [91].

Notons que dans la littérature, les critères existants pour l'analyse de la stabilité et la conception de contrôleur pour les modèles T-S à retard se classent en deux catégories :

La première englobe le critère du retard-indépendant [32] et [7], [24], [26], [92] dans ce cas, la taille du retard est arbitraire et les conditions de stabilité résultantes ne contiennent aucune information sur le retard. De plus, elles sont trop conservatives en particulier lorsque la taille du retard est petite. Cette source de conservatisme a donné lieu à une autre catégorie de critère de stabilité, il s'agit de celui du retard-dépendant [12], [13], [17], [22], [35], [36], [43], [82], [83], [34]. Dans ce cas, les conditions de stabilité obtenues contiennent des informations sur la taille du retard, elles sont donc plus relâchées que la première catégorie, mais il en reste que certaines sources de conservatisme peuvent coexister et pour tenter de les réduire, plusieurs techniques, méthodes et approches ont été utilisées au cours des dernières décennies. Nous donnons l'exemple de :

- L'utilisation des méthodes de transformation du modèle [7], [16], [37], [93], [94],



- L'utilisation de l'inégalité de Moon [7], [38], [95] pour borner les termes croisés lors de la dérivation de la fonction LKF,
- L'utilisation de l'inégalité intégrale de Park ( ou l'approche par réciproque convexe) [7], [39], [42], [96], [97],
- L'utilisation de l'inégalité intégrale de Jensen [14], [16], [27], [39], [93], [98]-[100],
- L'utilisation de la methode de matrices de décisions libres (Free Weighting Matrix FWM) basée sur la formule de Newton-Leibniz, [7], [13], [34], [35], [41], [45], [90], [98], [101], [102] ainsi que sur la structure du modèle de T-S à retard [7], [10], [12], [20], [21], [37], [44],
- L'utilisation du lemme de Finsler [14]-[16], [34], [39], [42], [43], [83], [103],
- Plus récemment, l'utilisation de l'inégalité intégrale de Seuret-Wirtinger [22], [35], [39], [83], [104],
- L'approche utilisant l'intégrale en ligne, [22], [39], [83], qui a été développée initialement par [105],
- L'utilisation de l'approche de partitionnement du retard [14], [27], [39], [41]-[43], [45].

Notons que tous les travaux cités ci-dessus concernent l'étude de la stabilité/stabilisation des modèles T-S à retard variable dans le temps en utilisant l'approche de retard-dépendant. De plus, il importe de noter aussi qu'un travail peut utiliser plusieurs approches à la fois.

En effet, dans les problèmes d'analyse de stabilité des modèles T-S à retard variable, l'objectif principal est d'obtenir des conditions de stabilité moins conservatives. A cet effet, l'estimation de la taille de la limite supérieure admissible du retard (Maximum Admissible Upper Bound MAUB), est l'un des indices retenus pour vérifier le conservatisme d'un tel critère de stabilité. Dans ce sens, une plus grande valeur MAUB (de sorte que le système T-S à retard est asymptotiquement stable pour toute taille du retard inférieure à MAUB) signifie que le critère de stabilité utilisé est moins conservatif.

En effet, la méthode de transformation du modèle est considérée comme étant une source de conservatisme. Les auteurs de [16] ont essayé d'améliorer le conservatisme apporté par cette approche. Ils ont proposé de nouvelles conditions, moins conservatives, de la stabilisation des modèles T-S incertains à retard par l'approche entrée/sortie à la base de laquelle le système considéré est transformé en un sous-système à retard constant et en un sous-système en boucle

fermée avec incertitudes. Cependant, leurs résultats restent conservatifs surtout dans le cas où la vitesse de variation du retard est rapide.

Comme il est bien connu, il est nécessaire de prendre la dérivée de la fonction LKF pour obtenir les conditions de stabilité. En effet, la principale difficulté consiste à borner les intégrales qui apparaissent dans la dérivée de la fonction LKF. Dans ce sens, les auteurs de [38] et [95] ont traité le problème de stabilité des modèles T-S incertains à retard en appliquant la fonction LKF et l'inégalité de Moon pour borner les intégrales à termes croisés, ainsi que les auteurs de [93] qui ont traités ces intégrales, qui apparaissent dans la fonction de LKF, par l'utilisation de l'inégalité intégrale de Jensen dans le cas où le retard est une fonction continue et variant dans un intervalle donné.

Par ailleurs, les auteurs de [98] et [99] ont proposé une nouvelle approche basée sur la méthode de FWM associée à la formule de Newton-Leibniz et l'inégalité intégrale de Jensen pour traiter le problème de la stabilité robuste des modèles T-S incertains à retard. Ils ont ainsi obtenu de nouvelles conditions LMI sans ignorer les termes utiles dans la dérivée de la fonction LKF. Mais les méthodes adoptées par ces auteurs introduisent souvent un conservatisme des résultats.

Récemment, les auteurs de [10], [12], [13], [41], [90] ont utilisé l'approche de matrices de pondération libres (Free-Weighting Matrices FWM), basée sur la formule de Newton-Lebeniz et sur la structure du modèle T-S à retard qui a été initialement proposée dans [37], [106] pour traiter les termes croisés dans les intégrales de la dérivée de la fonction LKF. Dans ce sens, les auteurs de [12] ont traité le problème de la stabilité des modèles T-S incertains à retard en état et en entrée, en utilisant la méthode de FWM basée sur la structure du modèle T-S, et une fonction LKF augmentée pour réduire le conservatisme. Les auteurs de [13] ont introduit quelques matrices de relaxation pour étudier la stabilité robuste des système T-S à retard, et réduire le conservatisme et le temps de calcul surtout quand le nombre de règles  $r$  est grand. notons que les auteurs de [12] et [13] ont amélioré les résultats de [10], [41], [90].

D'un autre côté, dans [31], [45], [58], [59], [67] et [70] les auteurs ont utilisé la méthode de FWM associée au lemme de Finsler pour obtenir de nouvelles conditions de relaxation. D'où, dans [39] certaines inégalités de bornitude plus strictes telles que l'inégalité intégrale de Seuret-Wirtinger [104] et l'inégalité intégrale de Peng-Park [96] ont été exploitées pour traiter les termes

intégrés et dépendants du retard variable dans le temps sous la forme  $\int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T X \dot{x} dt$ . Cependant, il existe également d'autres possibilités de relâcher leurs critères de stabilité.

Plus récemment, les auteurs de [35], ont développé de nouvelles conditions moins conservatives exprimées sous forme de LMI pour les modèles T-S à retard variable dans le temps dans le cas où la dérivée du retard est inconnue. Sa relaxation est basée sur l'utilisation d'une fonction LKF floue intégrale curviligne (LILF) et sur l'exploitation de l'inégalité intégrale de Wirtinger avec l'introduction de variables de relaxation supplémentaires. Cependant, les auteurs de [107] commentent ce travail et le qualifient comme étant incorrecte étant donné que les informations structurelles spéciales sur la LILF sont négligées par [35].

En parallèle des approches citées précédemment, il apparait de nouvelles techniques, récentes, adoptées pour l'analyse de la stabilité des modèles T-S à retard, dont la plus utilisée est l'approche de décomposition du retard, où l'intervalle du retard est divisé en plusieurs segments uniformes/non uniformes [42], [67] et [70]-[72]. Ils sont arrivés à des résultats moins conservatifs que les autres approches, surtout dans le cas de segments croisés. Mais l'inconvénient majeur de cette approche consiste, d'une part, en la complexité de trouver des conditions LMI assurant la stabilité asymptotique, et d'autre part, ils ne traitent pas compte de la vitesse de variation du retard plus élevée, ce qui est considéré comme une source de conservatisme.

Notons que lors de la synthèse du contrôleur PDC, pour les modèles T-S à retard, les auteurs de [10],[16],[108] et [109] ont pris en compte la mémoire du contrôleur PDC. Dans [10] les auteurs ont traité le problème de la stabilisation robuste des modèles T-S incertains à retard variable par l'approche de FWM tout en choisissant une fonction LKF appropriée. Ils ont fait la synthèse d'un contrôleur PDC  $(u(t) = K_i x(t) + K_i^d x(t-h))$  contenant à la fois les gains de retour d'état (sans mémoire  $K_i$ ) et ceux retardés (avec mémoire  $K_i^d$ ). Cependant, cette loi de commande ne prend pas en considération le retard variable ce qui constitue une source de conservatisme. Ainsi, dans [108] les auteurs ont traité le problème d'analyse de la stabilité et de la conception du contrôleur PDC pour les modèles T-S à retard par l'approche du retard-dépendant. Ils ont considéré que le retard varie dans un intervalle (c'est-à-dire  $\tau(t) \in [\underline{\tau} \quad \bar{\tau}]$ ) par l'approche

de LKF et la méthode de FWM. Le mérite des conditions proposées réside dans l'amélioration du conservatisme par rapport à celles existantes, ce qui se traduit par l'utilisation d'une nouvelle loi de commande PDC avec mémoire  $u(t) = K_i x(t) + K_i^d x(t - \tau_0)$  où  $\tau_0 = (\underline{\tau} + \bar{\tau})/2$ . Cependant, l'application de cette loi de commande engendre un nouveau vecteur d'état  $x(t - \tau_0)$  dans le modèle T-S en boucle fermée ce qui apporte du conservatisme. Notons à la fin que les auteurs de [109] ont traité le problème de la stabilité et la stabilisation des modèles T-S affine à retard variable. Pour ce faire, ils ont conçu un contrôleur PDC sous la forme  $u(t) = K_i x(t) + K_i^d x(t - \tau(t)) + \mu_i$  où  $\mu_i$  sont des constantes qui a été appliqué à une classe spécifique des modèles T-S, il s'agit des modèles T-S affine à retard variable.

En effet, la discussion, les observations et les idées mentionnées ci-dessus, nous ont motivé pour améliorer davantage la réduction du conservatisme des conditions de stabilisation LMIs pour les systèmes flous de T-S à retards variables dans le temps sur la base de l'approche LMI, la méthode de FWM, l'utilisation de l'inégalité intégrale de Jensen et du lemme de Finsler.

Les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse de doctorat ont pour objectif la proposition de nouvelles conditions, dépendantes du retard, exprimées sous forme LMI pour la stabilisation des modèles flous T-S à retard en l'état. Notre contribution consiste à relâcher les conditions de stabilisation LMIs dont les points forts peuvent être résumés comme suit:

- 1) La prise en compte d'une loi de commande PDC avec mémoire, dans ce sens, nous allons synthétiser un contrôleur PDC contenant à la fois les gains sans mémoire et ceux avec mémoire  $u(t) = K_i x(t) + K_i^d x(t - \tau(t))$ . La particularité de cette loi de commande réside dans sa capacité à compenser l'effet du retard à chaque instant sans introduire aucun vecteur d'état supplémentaire dans la dynamique de la boucle fermée.
- 2) L'utilisation d'une fonction LKF augmentée. En conséquence, de nouveaux termes croisés sont inclus dans les conditions de stabilisation. Ces termes permettent d'améliorer le conservatisme dans le critère de stabilisation. Nous allons utiliser par la suite l'inégalité intégrale de Jensen pour fournir une limite beaucoup plus étroite pour ces termes croisés et améliorer, ainsi le conservatisme des conditions de stabilité.

- 3) L'utilisation du lemme de Finsler permet de relâcher les conditions de stabilité proposées en ajoutant des variables de décision supplémentaires, d'une part et en croisant les matrices du système et celles de la fonction de LKF d'autre part.
- 4) La majorité des travaux portant sur les modèles flous de T-S à retard variable considéraient une variation lente du retard, c'est-à-dire  $\dot{\tau}(t) < 1$ . Cependant, il existe un certain nombre de systèmes à retard dans le temps, tels que les flux de trafic, les réseaux de communication et les systèmes de commande par réseau qui appartiennent à la classe des systèmes à retard dont la variation est rapide (c'est-à-dire  $\dot{\tau}(t) \geq 1$ ). A cet effet, nous prenons en considération la variation rapide du retard lors de la synthèse de contrôleur PDC.

Par la suite, nous étudierons le problème de la stabilité et la synthèse d'un contrôleur PDC par l'approche de retard-dépendant pour les modèles flous de T-S à retard variable. La structure du modèle T-S à retard et la même considérée par les auteurs de [10], [12], [13]. En se basant sur une fonction de LKF augmentée ainsi que l'utilisation du lemme de Finsler, une nouvelle loi de commande du type PDC est proposée pour garantir la stabilisation asymptotique des modèles flous de T-S à retard. Les conditions obtenues sont formulées sous forme LMI, qui améliorera le conservatisme des conditions LMIs par rapport à celles existantes.

Par ailleurs, il apparaît clairement que la prise en compte des incertitudes et par conséquent l'extension à la classe des systèmes incertains conduirait à une généralisation des résultats applicables à une plus large classe de systèmes physiques. C'est dans ce contexte que s'inscrit la suite de ce travail de recherche qui vise aussi bien à proposer et à étendre des méthodologies de synthèse de lois de commande PDC proposées pour la stabilisation robuste des modèles T-S incertains à retard.

# Chapitre 2

## Généralités sur les systèmes à retard

### 2.1. Introduction

Le présent chapitre est consacré à une présentation générale des systèmes à retard. Nous allons présenter dans un premier temps quelques systèmes réels qui se modélisent bien avec des systèmes à retard et les notions mathématiques qui s'y rapportent et qui seront utilisées par la suite, afin de comprendre le plus largement possible le phénomène du retard. Ensuite, nous allons présenter les principaux outils pour l'étude de la stabilité des systèmes à retard, ainsi nous nous intéressons aux différentes définitions qui s'y rapportent. Enfin, nous allons présenter les approches de stabilité les plus utilisées dans la littérature telles que les approches par LKF et par LRF.

### 2.2. Système à retard

On définit le retard comme étant la durée temporelle entre l'instant d'application d'une action sur le système et l'instant de sa réaction. Cependant, les systèmes à retard (appelés également 'systèmes avec mémoires' ou 'systèmes héréditaires' ou encore 'à arguments différés'), sont des systèmes que nous pouvons décrire par des équations différentielles et qui peuvent se modéliser dans un espace fonctionnel de dimension infinie (contrairement aux systèmes ordinaires), et dont leurs évolutions dépendent non seulement de la valeur de l'état  $x(t)$  à l'instant présent  $t$ , mais dépendent en plus des valeurs passées ('histoires')  $\tau < t$  de l'état  $x(t - \tau)$ , ou de la commande  $u(t - \tau)$ , où  $\tau > 0$ , prises sur un certain horizon temporel. Dans ce cas, pour connaître l'évolution du système, il est nécessaire de mémoriser une partie de cette histoire.

Du point de vue pratique, nous constatons que la majorité des processus physiques engendrent naturellement des retards non négligeables, qui peuvent avoir plusieurs origines. Le retard peut être attribué aux temps de transmission des informations ou aux temps de transferts

des matières du processus lui-même. Bien souvent il apparaît dans la boucle de commande et peut être attribué soit au temps de réaction des capteurs (ou des actionneurs), soit au temps nécessaire pour les calculs des commandes qui sont réalisés par des calculateurs numériques. La figure 2.1 illustre les lieux d'apparition du retard dans la boucle d'asservissement (ou régulation) d'un processus physique.

En effet, dans la modélisation des systèmes dynamiques, les temps de retard peuvent être négligés, mais lorsque leurs tailles deviennent significatives au regard des performances (en boucle ouverte ou en boucle fermée) de ces systèmes, ils doivent être nécessairement pris en considération lors de l'analyse de la stabilité, stabilisation et la commande.

De plus, la commande des systèmes à retard est souvent considérée comme l'un des problèmes les plus difficiles rencontrés en automatique en raison de la difficulté de la représentation des systèmes réels à retard, avec une précision suffisante et un modèle de structure simple. Aussi, la présence du retard a une influence considérable sur le comportement des systèmes, et peut être souvent à l'origine des dégradations de leurs performances (source d'instabilité ou oscillations indésirables) ? d'où la nécessité de développer la théorie des systèmes à retard et d'étendre l'étude de la commande et de la stabilité aux systèmes à retard.

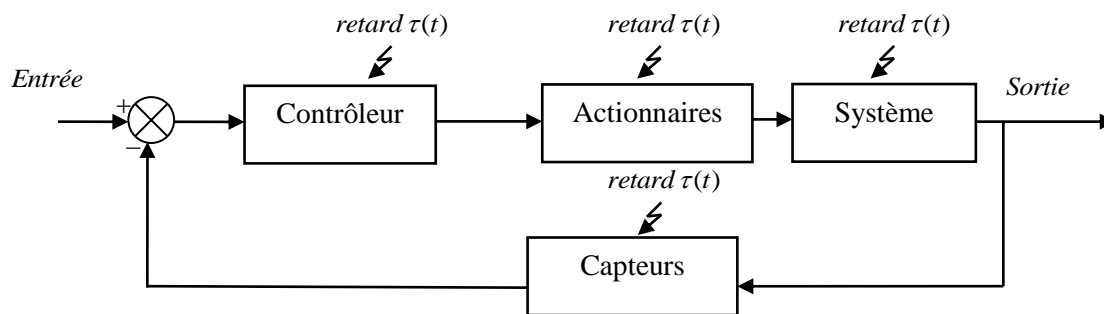


Fig.2.1 : Provenance des retards dans une boucle d'asservissement

### 2.3. Exemples de systèmes à retard

Le phénomène du retard est largement rencontré dans beaucoup d'installations et instruments industriels. Nous le trouvons, d'une manière non négligeable, lors de la modélisation de nombreux systèmes dans différents domaines des sciences de l'ingénieur et des sciences humaines, tels que la télécommunication, la mécanique, la physique, la chimie, la biologie, l'économie, le transport, la dynamique des populations ...etc. Nous présentons dans cette section

des exemples de quelques systèmes physiques qui possèdent naturellement des retards et ce pour donner un aperçu sur les systèmes à retard.

### 2.3.1. Douche écossaise :

L'exemple le plus classique des systèmes à retard est celui de la douche écossaise, présenté sur la figure 2.2, où la température de l'eau (supposée être homogène) résulte du mélange entre l'eau de la source froide de débit  $q_1$  et de température  $T_1$ , et celui de la source chaude de débit (supposé variable)  $q_2(t)$  et de température  $T_2$ . La température  $T_{moy}$  représente la température de l'eau à la sortie du mélangeur.

En vue d'un confort idéal, l'utilisateur souhaite obtenir aussi rapidement que possible, en tenant compte du retard produit par le transport à travers le tuyau, la température désirée  $T_{ref}$ .

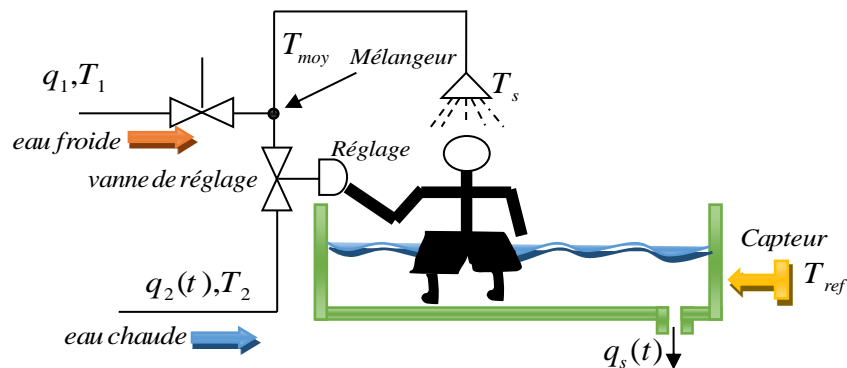


Fig.2.2 : Douche écossaise

Pour simplifier davantage, nous supposons que le changement de position du robinet se fait immédiatement et que le débit de l'eau froide est constant, alors le débit de sortie peut être considéré comme une variable d'entrée, qui peut être exprimé par la relation suivante [110]:

$$\forall t \geq 0, q_s(t) = q_1 + q_2(t) \quad \text{---(2.1)}$$

En supposant que le mélange au niveau du mélangeur est instantané, la température à la sortie du mélangeur peut être alors exprimée comme suit :

$$T_s(t) = \frac{q_1 T_1 + q_2(t) T_2}{q_1 + q_2(t)} \quad \text{(2.2)}$$

Soit  $\tau$  le temps nécessaire pour que l'eau puisse aller de la sortie du mélangeur à la sortie de la douche (ou temps de retard de transport) (Figure 2.2). A l'instant  $t$ , l'utilisateur sent la



température de l'eau sortant du mélangeur à l'instant  $(t - \tau)$ , ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$T_s(t) = T_{moy}(t - \tau) \text{ et } \dot{T}_s(t) = -k(T_{moy}(t - \tau) - T_{ref}), k \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

### 2.3.2. Commande par réseau de communication

La commande par réseau est un moyen de réaliser des tâches sans risque et sans intervention des facteurs extérieurs qui peuvent gêner le fonctionnement d'un tel processus. Par exemple l'opération de dépollution, chirurgie, télé-opération des robots manipulateurs, enregistrement des données, avion sans pilote, ... etc.

Ce type de système nécessite l'échantillonnage des informations entre les composants du système (capteurs, actionnaires, contrôleurs, ... etc.), cette opération engendre des retards non négligeables lors du transfert des données échantillonnées à travers le réseau de communication. Aussi, la transmission de données à travers un réseau internet peut engendrer un retard variable dû au protocole de transmission. La figure 2.3 illustre un système de commande par réseau.

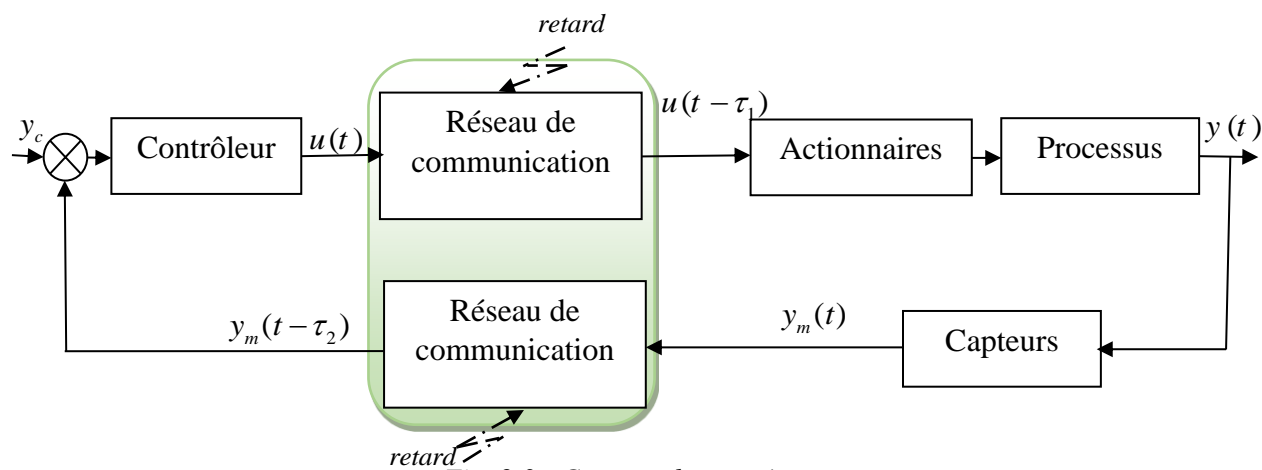


Fig. 2.3 : Commande par réseau

### 2.3.3. Véhicule sous-marin AUV

Récemment, il y a de plus en plus d'applications de véhicule sous-marin (Autonomous under water vehicles AUV [111]). Il peut être utilisé pour explorer les environnements hostiles avec un minimum de danger sur l'utilisateur et sur le véhicule piloté lui-même. Ces environnements ont un intérêt particulier pour les chercheurs qui étudient les extrémophiles. Le véhicule sous-marin AUV (véhicule téléopéré) comporte une unité d'alimentation à bord, équipée

de divers capteurs comprenant les sonars, les capteurs de profondeur, les caméras vidéo, les capteurs à inertie, le modem acoustique, l'outil de navigation acoustique, ...etc. Pour effectuer des tâches avec le minimum d'intervention humaine. La communication est assurée par une liaison acoustique (s'appelant l'odyssée) qui peut opérer dans des profondeurs allant jusqu'à 3 Km (la liaison entre la surface et le véhicule, constitué par le câble électro-opto porteur et son prolongement appelé "laisse" qui transmet l'énergie, les commandes et les données).

En revanche, en bas niveau, les problèmes de commande rencontrés dans l'AUV englobent : la difficulté du pilotage automatique, la planification des tâches et la navigation. De plus, la longue distance sollicitant l'usage d'un long câble provoque des retards non négligeables dans l'AUV (le retard est provoqué par la vitesse de propagation des ondes acoustiques qui est limitée dans l'eau).

La figure 2.4 représente le modèle physique d'AUV où il est en train d'être placé par un bateau extérieur à l'aide d'un long câble de 2.5Km.

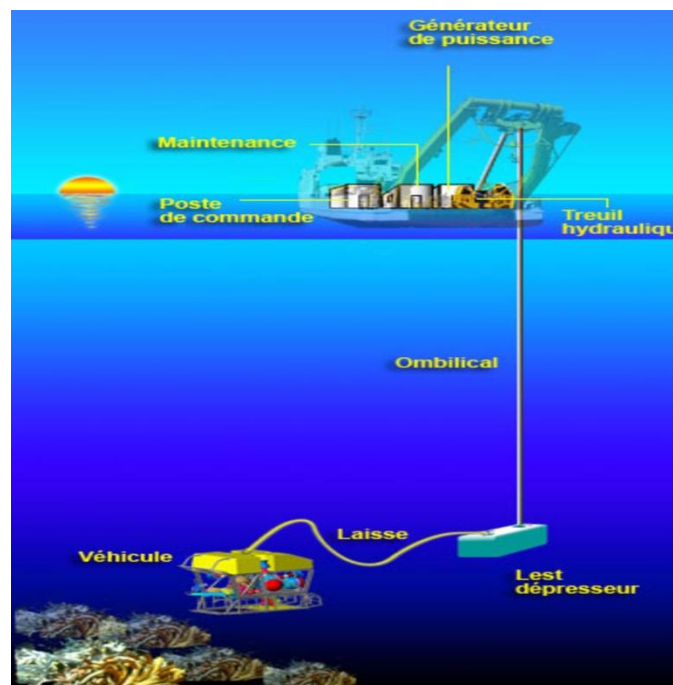


Fig. 2.4 : Le véhicule sous-marin AUV 'Victor 6000' [111].

Le modèle mathématique de l'AUV est donné par la fonction de transfert à retard suivante [111] :

$$G(p) = \frac{ce^{-p\tau}}{ap^2 + bp + c} \quad (2.4)$$

où  $a = 1$ ,  $b = 1.110^{-4}$ ,  $c = 2.58 \times 10^{-2}$  et  $\tau = 40s$ .

## 2.4. Classification des systèmes à retards

Dans cette partie, nous allons présenter les quatre différents types de système à retards les plus rencontrés dans la littérature à savoir : les systèmes de type retardé, les systèmes de type neutre, les systèmes LTI à retards discrete et les systèmes à retards distribués

### 2.4.1. Les systèmes de type retardé

Ce sont des systèmes dynamiques régis par des équations différentielles fonctionnelles et qui sont décrits en fonction des valeurs de l'état présent et de l'état passé du temps. Ils sont représentés mathématiquement par un modèle de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t, u_t), t > t_0 \\ y(t) = g(t, x_t, u_t) \\ x_{t_0} = \phi(\theta) \text{ pour } \theta \in [t_0 - \tau, t_0] \\ u_{t_0} = \psi(\theta) \text{ pour } \theta \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées (ou commande),  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur des sorties,  $f$  et  $g$  sont des fonctions vectorielles,  $\tau > 0$  représente le plus grand retard du système,  $(\phi, \psi)^2 \in [t_0 - \tau, t_0]^2$  sont des fonctions continues représentant les conditions initiales,  $x_t$  et  $u_t$  sont des fonctions représentant respectivement l'état et l'entrée du système à l'instant  $t$ , ils sont définis par [112] :

$$x_t : \begin{cases} [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \theta \mapsto x_t(\theta) = x(t + \theta) \end{cases} \quad (2.6)$$

$$u_t : \begin{cases} [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ \theta \mapsto u_t(\theta) = u(t + \theta) \end{cases} \quad (2.7)$$

Ce type de systèmes apparait le plus souvent lors de la modélisation des systèmes physiques.

### 2.4.2. Les systèmes de type neutre

Dans ce type de systèmes, l'évolution du système dépend non seulement des valeurs de l'état passé mais également de sa dérivée sur un intervalle temporel. Ils sont décrits par des équations différentielles de la forme suivante [7]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t, \dot{x}_t, u_t), \\ x_{t_0} = \phi(\theta) \text{ pour } \theta \in [t_0 - \tau, t_0] \\ u_{t_0} = \psi(\theta) \text{ pour } \theta \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $\dot{x}(t - \tau)$  est la dérivée du vecteur d'état retardé à l'instant  $t$ . Il rend le système plus complexe qu'un système qui a un retard seulement dans l'état.

### 2.4.3. Les systèmes LTI (Linear Time-Invariant) à retards discrets

Notons que les systèmes à retard unique ne sont pas toujours suffisants pour décrire des systèmes physiques dont la représentation peut impliquer de nombreux retards. Dans ce qui va suivre, nous présenterons une forme de systèmes à retard discret qui est largement utilisée, il s'agit des systèmes ponctuels décrits par des équations aux différences et exprimées par la formule générale suivante [113] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^q D_i \dot{x}(t - \rho_i) + \sum_{j=0}^r A_j x(t - \tau_j) + B_j u(t - \tau_j) \\ y(t) = \sum_{j=0}^r C_j x(t - \tau_j) \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état instantané,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur des sorties.  $D_i$ ,  $A_j$ ,  $B_j$  et  $C_j$  sont des matrices constantes de dimension appropriées,  $\tau_j > 0$  et  $\rho_i > 0$  sont des retards discrets (ou ponctuels), ils peuvent être également représentés sous forme de suites finies ou infinies de fonctions du temps dont les valeurs sont positives et bornées c'est à dire  $0 < \tau_i(t) < \tau_{\max}$  et  $0 < \rho_i(t) < \rho_{\max}$ .

### 2.4.4. Les systèmes à retards distribués

Ils apparaissent dans beaucoup de processus réels tels que le flux de trafic, la croissance des micro-organismes,...etc. Dans cette classe des systèmes, les retards sont une forme

particulière qui agit de manière distribuée sur tout l'intervalle du temps. Le modèle de systèmes à retards distribués le plus fréquemment étudiés est donné par la formule suivante [6] :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \int_{t-\tau}^t A_d(\theta)x(t+\theta)d\theta \quad (2.10)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $A$  est une matrice constante de dimension appropriée,  $\tau > 0$  est un scalaire qui définit la plage temporelle de distribution du retard  $\theta$  et  $A_d(\theta)$  représente la matrice du retard qui s'appelle noyau du retard distribué, et qui varie dans l'intervalle  $[-\tau, 0]$  dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

## 2.5. Catégories du retard

Notons que la modélisation et l'analyse des systèmes à retard diffèrent d'un système à un autre selon le type de retard, ainsi il est important de préciser le type de retard qui va permettre une modélisation exacte des systèmes, à cet effet, le retard peut apparaître sous forme d'une constante, variable dans le temps, discret ou distribué. Dans cette section nous allons présenter les principaux types de retard.

**2.5.1. Retard constant :** Nous qualifions le retard de constant quand il est défini par un nombre réel et positif constant, c'est à dire  $\tau(t) = \tau \in \mathbb{R}^+$ . Celui-ci est à l'origine de beaucoup de travaux figurant dans la littérature du domaine, voir par exemple [72], [114], [115] et [116]. Il est à signaler également que les conditions de stabilité des systèmes possédant des retards constants (dans leurs modèles mathématiques) sont indépendantes du retard.

**2.5.2. Retard variable dans le temps :** Dans ce type de retard, la constance du retard n'est pas une hypothèse qui est toujours vérifiée, d'où la nécessité de prendre en considération les variations potentielles de retards, en les représentant par des fonctions continues  $\tau(t)$  définies dans des intervalles du temps bornés. Selon ces intervalles, nous pouvons distinguer deux types de retard à savoir :

**2.5.2.1. Retard variable majoré :** Ce type de retard a une borne inférieure nulle et suppose la connaissance d'une valeur maximale sur le retard, de façon à ce qu'il existe un nombre réel  $\bar{\tau} > 0$  tel que :

$$0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau} \quad (2.11)$$

où  $\bar{\tau} > 0$  représente la borne supérieure maximale admissible du retard  $\tau(t)$ .

**2.5.2.2. Retards variable borné :** Il diffère du retard majoré par une borne inférieure non nulle. Cependant, si nous autorisons le retard à prendre la valeur zéro ceci revient à supposer qu'à un moment donné le phénomène étudié ne prend pas en considération le retard, c'est à dire, il se fait de manière instantanée. Dans ce contexte, il est intéressant de prendre en considération une borne inférieure du retard  $\tau(t)$  pour laquelle il existe deux valeurs  $\tau_1$  et  $\tau_2$  tels que:

$$0 < \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2 \quad (2.12)$$

avec  $\tau_1$  et  $\tau_2$  représentant respectivement la borne inférieure et la borne supérieure du retard  $\tau(t)$ .

Il est à noter que les deux types de retard cités précédemment sont souvent traités dans la littérature, impliquent des critères de stabilité de retard-indépendant, voir par exemple [24], [26], [92] et [7].

**2.5.2.3. Retard à dérivée bornée:** Dans ce cas, le retard variable  $\tau(t)$  est une fonction dérivable. Alors nous pouvons considérer une contrainte supplémentaire sur la variation du retard (le retard doit être variable majorée ou variable bornée) de la manière suivante :

$$\dot{\tau}(t) \leq \eta \quad (2.13)$$

où  $\eta$  représente la borne maximale de la dérivée du retard  $\tau(t)$  et indique notamment une limitation sur la vitesse de variation du retard. Selon les valeurs de  $\eta$  nous pouvons distinguer deux types de retard:

- **Retard variant lentement dans le temps:** Dans ce cas, le retard  $\tau(t)$  satisfait la contrainte  $\dot{\tau}(t) \leq \eta < 1$ . En pratique cette contrainte est souvent utilisée afin de garantir que le retard ne varie pas plus rapidement que le temps et que les données retardées arrivent dans l'ordre chronologique [117].
- **Retard variant modérément dans le temps:** Dans ce cas, le retard  $\tau(t)$  satisfait la contrainte :  $\dot{\tau}(t) \leq \eta$  avec  $\eta \geq 1$ .

Généralement, les retards à dérivée bornée sont associés aux retards à variables majorés ou bornés et impliquent des critères du retard-dépendant, voir par exemple [12], [20] [84] et [23].

**2.5.3. Retard distribué :** Ce type particulier du retard est utilisé pour étudier la stabilité des systèmes à retard distribué ainsi que les systèmes neutres. Il apparaît d'une manière aussi claire lors de l'analyse de la stabilité des systèmes à retard variable par l'usage de la fonction LKF. Il représente également l'effet du passé sur la dynamique de système, ainsi son influence intervient de manière continue sur l'évolution du système dans un intervalle de variation de  $\tau(t)$ . Il a en générale la forme suivante [6] :

$$\int_{t-\tau(t)}^t x(s)ds \quad (2.14)$$

D'autre part, l'une des méthodes pour traiter les termes intégraux de la fonction LKF est d'utiliser certaines transformations (comme nous le verrons plus tard) qui transforme le système d'origine en un nouveau système avec un retard distribué.

**2.5.4. Retard variable arbitraire :** Dans ce cas, il n'y a pas de limitation ni sur la variation du retard  $\tau(t)$  ni sur sa dérivée temporelle  $\eta$ .

## 2.6. Stabilité des systèmes à retard au sens de Lyapunov

Dans cette partie, nous nous intéressons à la stabilité des systèmes à retard, qui constitue une problématique centrale de la théorie de commande. Dans un premier temps, nous allons présenter certaines notions et concepts fondamentaux relatifs à la stabilité des systèmes à retards au sens de Lyapunov, tout en accordant un intérêt particulier aux approches temporelles liées à la seconde méthode de Lyapunov, à savoir l'approche de Lyapunov- Krasovskii et l'approche de Lyapunov- Razumikhin.

Notons que les résultats que nous développerons dans les chapitres 3 et 4 s'appuieront principalement sur ces approches afin de démontrer les propriétés de stabilité utilisées par la suite.

Pour bien préciser les formulations et définitions à introduire dans la section actuelle, nous considérons un système ordinaire à retard décrit par le modèle général de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A^d x(t - \tau(t)) \\ \phi = x(t), t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases} \quad (2.15)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $A$  et  $A^d$  sont des matrices réels de dimensions appropriées et  $\tau(t)$  représente le retard.

**Remarque 2.1:** Pour la fonction  $\phi \in C([t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R}^n)$ , ( $\phi$  est une fonction appartenant à  $C$  l'ensemble des fonctions de  $[t_0 - \tau, t_0]$  vers  $\mathbb{R}^n$ ) nous allons définir la norme continue  $\|\cdot\|_c$  pour le système à retard (2.15) comme suit:

$$\|\phi\|_c = \max_{t_0 - \tau < \theta < t_0} (\|\phi(\theta)\|) \quad (2.16)$$

Dans cette définition, la norme  $\|\cdot\|$  représente la norme  $L_2$  ( $\|\cdot\|_2$ ).

**2.6.1. Définitions et notations :** L'étude de la stabilité au sens de Lyapunov est une théorie mathématique générale applicable à toutes équations différentielles et aux différences. Le principe de stabilité tel qu'il est adopté par Lyapunov se fonde sur l'énergie du système dynamique. Dans ce sens, nous parlons de 'système dissipatif' si cette énergie (qui est généralement scalaire) est constamment dissipée, d'où nous pouvons aussi dire que le système tend vers un point d'équilibre. Lyapunov avait comme idée l'examen de la variation d'une fonction scalaire pour l'étude de la variation de l'énergie d'un système donné.

Dans ce même ordre d'idées, nous disons que le système est stable pour une condition initiale proche de la trajectoire d'équilibre, si l'évolution de ses trajectoires d'état reste au voisinage du point d'équilibre. Dans ce sens, 'le domaine de stabilité' n'est que le voisinage dans lequel demeurent les trajectoires (voir la figure 2.5).

Nous disons que le système est asymptotiquement stable, s'il est stable et en plus, si on fait une petite variation de consigne, les trajectoires de son état reviendront exactement à ses points d'équilibres et ce au bout d'un temps fini, (voire la figure 2.6).

L'avantage majeur de la théorie de Lyapunov est que la stabilité puisse être déterminée sans que la résolution de l'équation du mouvement du système ne soit nécessaire.

Dans ce qui va suivre, nous évoquerons les principales définitions liées à la stabilité au sens de Lyapunov. Nous supposerons que le système à retard (2.15) admet une solution  $x(t) = 0$ , qui sera appelée solution triviale.



**2.6.1.1. Stabilité :** La solution triviale  $x(t) = 0$  du système (2.15) est dite stable pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$ , si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$  tel que  $\|x_{t_0}\|_c < \delta$  implique  $\|x(t)\| < \varepsilon$  pour  $t \geq t_0$ , ou simplement [6]:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0, \text{ tel que } \|x_{t_0}\|_c < \delta \Rightarrow (\|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0)$$

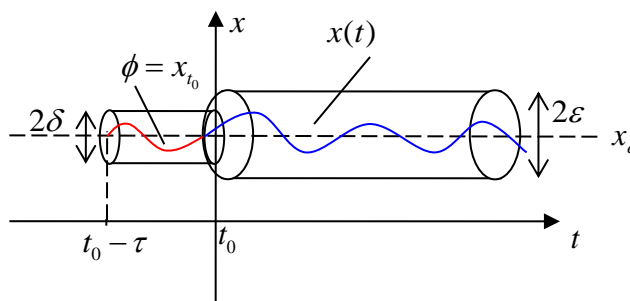


Fig.2.5: Stabilité au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre  $x_e$

**2.6.1.2. Attractivité :** La solution triviale  $x(t) = 0$  du système (2.15) est attractive par rapport à  $t_0$  si [6] :

$$\exists \delta = \delta(t_0) > 0, \text{ tel que } \forall \|x_{t_0}\|_c < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0, \forall t > t_0$$

Nous disons qu'elle est globalement attractive si  $\delta \rightarrow \infty$  ( $\delta$  peut être choisi arbitrairement large).

A ce stade, notons que :

- La solution triviale  $x(t) = 0$  du système (2.15) est attractive par rapport à l'ensemble  $\mathbb{C}_i$  si elle est attractive par rapport à tout instant de cet ensemble.
- La solution triviale  $x(t) = 0$  du système (2.15) est attractive, si elle est attractive par rapport à  $\mathbb{R}$ .

**2.6.1.3. Stabilité asymptotique :** La solution triviale  $x(t) = 0$  du système (2.15) est asymptotiquement stable si elle est stable et attractive et en plus,  $\forall t_0 \in \mathbb{R}$  [6]:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_a = \delta_a(t_0, \varepsilon) > 0, \text{ tel que } \|x_{t_0}\|_c < \delta_a \Rightarrow (\|x(t)\| < \varepsilon) \text{ et } \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \right), \forall t \geq t_0$$

Elle est globalement stable si elle est stable et globalement attractive.

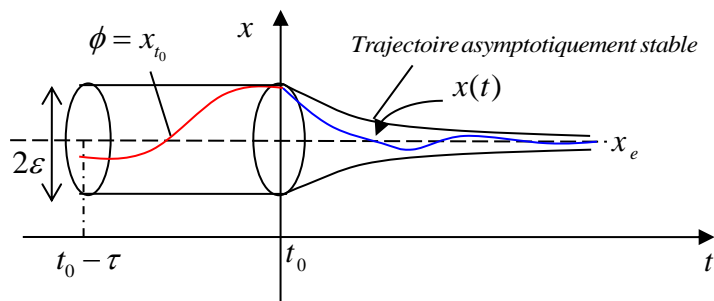


Fig. 2.6 : Stabilité asymptotique au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre  $x_e$

**2.6.1.4. Stabilité uniforme [6]:** La solution triviale  $x(t)=0$  du système (2.15) est uniformément stable si elle est stable et en plus  $\delta(t_0, \varepsilon)$  peut être choisi indépendamment de l'instant initial  $t_0$ .

**2.6.1.5. Stabilité uniforme asymptotique:** La solution triviale  $x(t)=0$  du système (2.15) est uniformément asymptotiquement stable si elle est uniformément stable et attractive, ainsi s'il existe  $\delta_a > 0$  tel que pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $T = T(\delta_a, \eta)$  tel que  $\|x_{t_0}\|_c < \delta_a$  implique  $\|x(t)\| < \eta$  pour tout  $t \geq t_0 + T$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ , ou simplement [6]:

$$\exists \delta_a > 0 \text{ tel que, } \forall \eta > 0, \exists T = T(\delta_a, \eta) \text{ tel que } \|x_{t_0}\|_c < \delta_a \Rightarrow \|x(t)\| < \eta, \forall t \geq t_0 + T$$

**2.6.1.6. Stabilité asymptotique globale et uniforme:** La solution triviale  $x(t)=0$  du système (2.15) est globalement, uniformément et asymptotiquement stable, si elle est globalement et uniformément stable et en plus  $\delta_a$  peut être choisi arbitrairement large [6].

**2.6.1.7. Stabilité exponentielle:** La solution triviale  $x(t)=0$  du système (2.15) est exponentiellement stable, s'il existe trois constantes strictement positives  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$  et  $\delta > 0$  telles que pour n'importe quelle condition initiale  $x_{t_0} = \phi$  et pour tout  $t \geq t_0$  [6]:

$$\|x_{t_0}\|_c < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \left( \lambda_1 \|x_{t_0}\|_c e^{(-\lambda_2(t-t_0))} \right), \forall t \geq t_0$$

Dans ce cas, la constante  $\lambda_2$  est appelée le 'taux de décroissance' ou encore la 'vitesse de convergence exponentielle'.

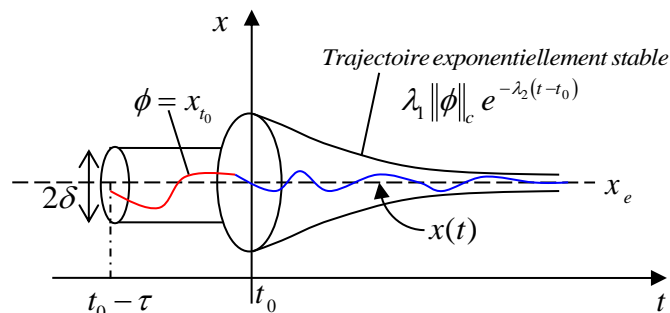


Fig. 2.7 : Stabilité exponentielle au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre  $x_e$

**2.6.1.8. Stabilité robuste:** Nous disons qu'un système incertain est robuste est asymptotiquement stable s'il est asymptotiquement stable pour toutes les incertitudes admissibles sur les paramètres du modèle. Nous disons qu'un système incertain est  $H$ -robustement stable ou stable par rapport à l'espace  $H$  si son équilibre est asymptotiquement stable pour toute les incertitudes admissibles sur les paramètres du modèle et pour toute fonction de retard  $\tau(t)$  définie dans l'ensemble  $H$  [118].

Notons que la seconde méthode de Lyapunov repose sur l'existence d'une fonction définie positive  $V > 0$  de sorte que le long des trajectoires du système (2.15) nous ayons  $\dot{V} < 0$ . Cette méthode est valable seulement pour une classe limitée de systèmes à retard, du fait que  $\dot{V}$  dépend des valeurs passées  $x_t$ . C'est pourquoi elle est très difficile à appliquer dans le cas général des systèmes à retards. Deux techniques basées sur des extensions de la seconde méthode de Lyapunov ont été développées respectivement par Krasovskii et Razumikhin dans le cadre des systèmes à retard. Dans ce qui va suivre, nous allons présenter brièvement ces deux extensions.

## 2.7. Approche de stabilité par la fonction de Lyapunov-Krasovskii (LKF)

Etant donné que l'étude de la stabilité des systèmes sans retard (au sens de Lyapunov) exige la construction d'une fonction de Lyapunov définie positive  $V(t, x) > 0$  (dont  $\dot{V}(t, x) < 0$ ) qui est en quelque sorte, une mesure potentielle quantifiant la déviation de l'écart de l'état  $x(t)$ , de la solution triviale  $x(t) = 0$ , et puisque, dans les systèmes sans retard,  $x(t)$  est nécessaire pour spécifier l'évolution future du système au-delà de l'instant  $t$ , et comme, dans les systèmes à

retard, l'état  $x_t$ , qui désigne la valeur de l'état  $x(t)$  dans l'intervalle  $[t - \tau, t]$ , accomplit la même tâche. Il est naturel de s'attendre à ce que pour un système à retard la fonction de Lyapunov correspondante soit une fonctionnelle dépendante de l'état  $x_t$  (c'est-à-dire  $V(t, x) = V(t, x_t)$ ) qui devrait également mesurer la déviation de l'état  $x_t$ , de la solution triviale  $x(t) = 0$ . Une telle fonction est appelée alors : fonction de Lyapunov-Krasovskii généralisant la seconde méthode de Lyapunov pour les systèmes à retard.

Plus spécifiquement, soit  $V(t, \phi)$  une fonction différentiable continue, et soit  $x_t(t_0, \phi)$  la solution du système (2.15) à l'instant  $t$  de condition initiale  $x_{t_0} = \phi$ . Nous pouvons calculer la dérivée de la fonction LKF  $V(t, x_t)$  par rapport au temps  $t$  puis l'évaluer à  $t = t_0$  au point  $(t_0, \phi)$  comme suit [6] :

$$V(t_0, \phi) = \left. \frac{dV(t, x_t)}{dt} \right|_{t=t_0, x_t=\phi} = \lim_{\nu \rightarrow 0^+} \sup \left( \frac{1}{\nu} V(t_0 + \nu, x_{t_0+\nu}(t_0, \phi)) - V(t_0, \phi) \right) \quad (2.17)$$

Ceci se traduit par le théorème suivant, qui inclut les conditions suffisantes pour la stabilité du système à retard (2.15):

**2.7.1. Théorème 2.1 : Théorème de Lyapunov-Krasovskii [6]:** Soient les fonctions continues, non décroissantes  $u, v, w: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  avec en plus  $u(s)$  et  $v(s)$  qui sont strictement positives pour  $s > 0$  et  $u(0) = v(0) = 0$ . S'il existe une fonction continue et différentiable  $V(t, \phi): \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que:

$$u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_c) \quad (2.18)$$

et la dérivée de  $V(t, \phi)$  le long des trajectoires de (2.15), satisfait

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \quad (2.19)$$

Alors la solution triviale de (2.15) est uniformément stable.

- Si de plus  $w(s) > 0$  pour  $s > 0$ , alors la solution triviale de (2.15) est uniformément asymptotiquement stable.

- Si la solution triviale de (2.15) est uniformément et asymptotiquement stable et si, de plus,  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = +\infty$ , alors la solution triviale de (2.15) est globalement, uniformément asymptotiquement stable.

**Interprétation du théorème de Lyapunov-Krasovskii :** L'idée principale de ce théorème est de trouver une fonctionnelle  $V(t, \phi)$  appelée fonction LKF, satisfaisant les conditions (2.18) et (2.19), c'est-à-dire trouver la fonction LKF  $V(t, \phi)$  définie positive dont la dérivée le long des trajectoires de (2.15) est définie négative).

L'existence de la fonction  $u(s)$  (conditions (2.18)) signifie que la fonction  $V(t, \phi)$  est définie positive. L'existence, également, de la fonction  $v(s)$  (conditions (2.18)), signifie que la fonction  $V(t, \phi)$  a une borne supérieure non nulle. Alors d'une part, la fonction  $V(t, \phi)$  est bornée pour toutes les valeurs de  $t \in \mathbb{R}$  et  $\phi \in \mathcal{C}$ . D'autre part, la condition (2.19) signifie que la dérivée de la fonction  $V(t, \phi)$  calculée le long des trajectoires de (2.15) doit être définie négative.

Mais, l'inconvénient majeure de cette approche demeure la complexité de la fonction candidate qu'est considérée comme importante. D'où la difficulté de détermination d'une telle fonction candidate permettant de démontrer la stabilité d'un tel système à retard.

### 2.8.. Approche de stabilité par la fonction de Lyapunov- Razumikhin (LRF):

Le théorème de Lyapunov-Krasovskii exige que l'état du système  $x(t)$  appartienne à l'intervalle  $[t - \tau, t]$ . Il nécessite alors la manipulation de la fonction  $x_t$ , ce qui le rend difficile à être appliqué. Cela conduit à l'utilisation d'une approche alternative impliquant des fonctions de Lyapunov  $V(t, x(t))$  plutôt que des fonctionnelles  $V(t, x_t)$ . Cette approche est appelée 'approche par fonctions de Razumikhin'.

L'idée principale derrière ce théorème est de trouver une fonction de Lyapunov  $V(t, x(t))$  représentant la taille de  $x(t)$  dont la dérivée n'est pas négative pour toutes les trajectoires, mais seulement pour les trajectoires de l'état qui s'éloignent du point d'équilibre, autrement dit, la condition générale garantissant que toutes les trajectoires du système tendent vers le point

d'équilibre n'est plus nécessaire. Cependant, la condition sur les trajectoires du système qui ont tendance à s'éloigner du point d'équilibre, elle l'est [6].

Le résultat de Razumikhin peut s'énoncer à travers le théorème suivant :

**2.8.1. Théorème 2.2 : Théorème de Lyapunov- Razumikhin:** [6] Soient les fonctions continues, non décroissantes  $u, v, w: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  avec, en plus,  $u(s)$  et  $v(s)$  strictement positives pour  $s > 0$  et  $u(0) = v(0) = 0$  où  $v$  est strictement croissante. S'il existe une fonction continue et différentiable  $V(t, x(t)): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que:

$$u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq v(\|x\|), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \quad (2.20)$$

et la dérivée de  $V(t, x)$  le long des trajectoires de (2.15), satisfait la condition suivante :

$$\dot{V}(t, x) \leq -w(\|x(t)\|), \quad \text{si } V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t)), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \quad (2.21)$$

alors la solution triviale de (2.15) est uniformément stable.

- Si de plus  $w(s) > 0$  pour  $s > 0$ , et s'il existe une fonction continue, non-décroissante,

$p(\theta) > \theta$  pour  $\theta > 0$  telle que : la condition (2.20) est vérifiée et en plus :

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(\|x(t)\|), \quad \text{si } V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq p(V(t, x(t))), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \quad (2.22)$$

Alors la solution triviale de (2.15) est uniformément asymptotiquement stable.

- Si de plus,  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$ , alors la solution triviale de (2.15) est globalement, uniformément et asymptotiquement stable.

**Interprétation du théorème de Lyapunov- Razumikhin:** Ce théorème donne une condition (suffisante) pour la stabilité d'un système à retard (2.15) basée sur la fonction LRF, d'où, la condition (2.20) montre que la fonction de Lyapunov 'classique'  $V(t, x(t))$  est bornée et définie positive. Ainsi, les conditions (2.21) et (2.22) représentent les conditions imposées à la dérivée de

la fonction de Lyapunov  $V(t, x(t))$ . Alors l'analyse de la stabilité revient à trouver une fonction  $V(t, x(t))$  au lieu d'une fonctionnelle  $V(t, x_t)$  comme c'est le cas du théorème de LKF.

L'inconvénient majeur de la fonction LRF est qu'elle mène à des conditions indépendantes du retard, ce qui conduit au conservatisme des résultats, en particulier dans le cas où le retard est petit. Elle est inapplicable dans le cas de la commande  $H^\infty$ , et n'admet pas de réciproques, contrairement à celles basées sur l'utilisation de fonction LKF qui donne des conditions de stabilité dépendantes du retard.

## 2.9. Représentation des systèmes à retard par les modèles flous Takagi-Sugeno

Les systèmes physiques sont généralement décrits par des modèles non linéaires, ce qui rend l'analyse de la stabilité un objectif difficile à atteindre. Les approches classiques tendent à les approximer par des systèmes linéaires. Cependant, l'inconvénient majeur est que les systèmes linéarisés ne représentent pas complètement et hautement les non linéarités. Les chercheurs du domaine ont proposé plusieurs façons de traiter les systèmes non linéaires ; par exemple, [119] a proposé une méthode de représentation des systèmes non linéaires par un système LPV (linéaires à paramètres variant) afin de rapprocher les systèmes non linéaires.

Un système LPV est essentiellement un système linéaire variable dans le temps qui peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $\theta(t)$  est un vecteur de paramètres borné variant dans le temps.

Il est à noter que ces modèles ne captent pas le comportement non linéaire des modèles originaux [70].

Une autre alternative a été introduite par [120] pour écrire des systèmes non linéaires sous la forme de modèles quasi-LPV. Cette représentation est obtenue grâce à une transformation exacte des fonctions non linéaires. La classe des systèmes quasi-LPV dépasse assez largement le cadre des systèmes classiques où les trajectoires d'état sont a priori bornées. Elle est définie comme une représentation d'état sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \\ y(t) = C(x(t))x(t) + D(x(t))u(t) \end{cases} \quad (2.24)$$

Cette classe de modèles est connue aussi comme modèles Takagi-Sugeno [1]. Ce dernier offre une représentation efficace des comportements non linéaires tout en restant relativement simple par rapport aux modèles non linéaires. Ils sont basés sur l'utilisation d'un ensemble de règles floues pour écrire un système non linéaire en termes d'un ensemble de modèles linéaires locaux, qui sont bien combinés par des fonctions non linéaires appelées fonctions d'appartenance et qui détiennent la propriété de somme convexe [2]. Il permet alors de représenter exactement un système non linéaire dans un ensemble compact des variables d'état [121].

En revanche, le phénomène de retard se produit dans différents systèmes réels de commande, comme les systèmes de transport, les systèmes de communication, les processus de traitement chimique, et les systèmes d'alimentation électrique, ...etc. L'existence de retards peut détériorer les performances du système et peut être considérée comme une source d'instabilité. En conséquence, le modèle T-S a été étendu pour traiter les systèmes non linéaires à retard.

La forme générale d'un modèle T-S à retard est alors décrite sous la forme d'un système quasi-LPV comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + A^d(x(t))x(t - \tau) + B(x(t))u(t) + B^d(x(t))u(t - \tau) \\ y(t) = C(x(t))x(t) + C^d(x(t))x(t - \tau) + D(x(t))u(t) \end{cases} \quad (2.25)$$

où  $x(t)$ ,  $x(t - \tau(t))$  représentent le vecteur d'état sans retard et avec retard respectivement,  $u(t)$ ,  $u(t - \tau(t))$  représentent le vecteur de commande sans retard et avec retard respectivement,  $\tau$  représente le retard,  $A(\cdot)$ ,  $A^d(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ ,  $B^d(\cdot)$ ,  $C(\cdot)$ ,  $C^d(\cdot)$  et  $D(\cdot)$  sont des matrices de dimensions appropriées.

## 2.10 Stabilité indépendante et stabilité dépendante du retard

D'abord, les premières études sur la stabilité des modèles T-S à retard se sont principalement basées sur le critère de stabilité du retard-indépendant (de la taille du retard) [4], [11]–[13],[27]. Puis, dans le but d'avoir des résultats moins conservatifs, de nombreuses études, utilisant des critères de stabilité du retard-dépendant de la taille du retard, ont été publiées [7],



[12], [13], [17], [22], [34]–[36] et les conditions obtenues contiennent des informations sur le retard et sa dérivée temporelle.

La section suivante est alors consacrée à la présentation de quelques résultats préliminaires pour garantir la stabilité des modèles T-S à retard, en se basant sur les critères de stabilité du retard-indépendant et celui du retard- dépendant.

### 2.10.1. Critère de stabilité ‘retard-indépendant’:

Ce critère est capable de tester la stabilité globale, uniforme et asymptotique des modèles T-S à retard dont le retard n'est absolument pas connu et peut prendre aussi une grande valeur. C'est à dire que les conditions de stabilité (qui sont indépendantes de la taille du retard) sont vérifiées pour toutes les valeurs positives des retards. Pour mieux comprendre ce type de stabilité, considérons le modèle T-S à retard suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i x(t) + A_i^d x(t - \tau(t))), \quad i \in \mathcal{I}_r \quad (2.26)$$

où  $h_i(x(t)) > 0$  et  $\sum_{i=1}^r h_i(x(t)) = 1$ .

Pour lequel la fonction LKF généralement choisie est de la forme suivante :

$$V(x) = x^T(t) P x(t) + \int_{t-\tau}^t (x^T(s) Q x(s)) ds \quad (2.27)$$

où  $P = P^T > 0$ ,  $Q = Q^T > 0$  sont des matrices symétriques définies positives à déterminer appelées ‘matrices de Lyapunov’. Ainsi, garantissant que  $V(x)$  est définie positive.

- La stabilité asymptotique est assurée quel que soit les valeurs du retard  $\tau > 0$  et dans ce cas, la stabilité est qualifiée d’indépendante de la taille du retard.

Les conditions de stabilité de base garantissant la stabilité asymptotique du système (2.26) ont été proposées initialement par [30] et annoncées dans le théorème suivant :

**Théorème 2.3 :** Le modèle continu de T-S à retard (2.26) est asymptotiquement stable s’il existe des matrices symétriques et définies positives  $P = P^T > 0$  et  $Q = Q^T > 0$  telles que  $\forall \tau > 0$ :

$$\begin{bmatrix} PA_i + A_i^T P + Q & PA_i^d \\ * & -Q \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_r \quad (2.28)$$

Les conditions (2.28) sont linéaires par rapport aux variables matricielles  $P$  et  $Q$ . Il est simple de voir que ces conditions de stabilité ne contiennent aucune information sur le retard  $\tau$ , ce qui justifie l'appellation de 'stabilité du retard-indépendant'.

### 2.10.2. Critère de stabilité "retard-dépendant":

Nous avons remarqué que les conditions obtenues à partir du critère de retard-indépendant ne contiennent aucune information sur le retard. Ainsi, elles sont trop conservatives en particulier lorsque le retard est petit. Cette source de conservatisme a donné lieu à une autre catégorie importante de conditions de stabilité, à savoir des conditions dépendantes du retard, qui prennent en compte l'information sur la taille du retard et sa dérivée temporelle.

- La stabilité asymptotique est assurée pour tout retard à une taille limitée, varié dans un intervalle fermé  $[0, \bar{\tau}]$  et dans ce cas, la stabilité est qualifiée de dépendante de la taille du retard.

C'est à dire ce critère permet de garantir la stabilité pour tous les retards inférieurs à une valeur maximale en dessous de laquelle le système est devenu instable. En outre, le système (2.26) s'avère stable pour tout  $\tau(t) \in [0, \bar{\tau}]$  où  $\bar{\tau}$  est la valeur maximale du retard.

En effet, pour étudier la stabilité par le critère du retard-dépendant, un terme quadratique à intégrale double est ajouté à la fonction LKF comme suit :

$$V(x) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau(t)}^t (x^T(s)Qx(s))ds + \bar{\tau} \int_{-\bar{\tau}}^t \int_{t+\theta}^t (x^T(s)Zx(s))d\theta ds \quad (2.29)$$

Où  $P$ ,  $Q$  et  $Z$  sont des matrices symétriques définies positives de dimensions appropriées.

L'utilisation simultanée de la fonction LKF (2.29), l'inégalité quadratique intégrale de Jensen [6] et la formule de Newton-Lepinez conduit au théorème suivant, qui donne les conditions garantissant la stabilité asymptotique du système (2.26).

**Théorème 2.4 :** Le modèle continu de T-S à retard (2.26) est asymptotiquement stable pour tous scalaires  $\bar{\tau} > 0$  et  $\eta > 0$  tels que  $\tau(t) \in [0, \bar{\tau}]$  avec  $\dot{\tau}(t) \leq \eta$ , s'il existe des matrices symétriques définies positives  $P = P^T > 0$ ,  $Q = Q^T > 0$  et  $Z = Z^T > 0$  de dimensions appropriées telles que :

$$\begin{bmatrix} PA_i + A_i^T P + Q + \bar{\tau}^2 Z & PA_i^d & 0 \\ * & -(1-\eta)Q & 0 \\ * & * & -\bar{\tau}Z \end{bmatrix} < 0, \forall i \in \mathcal{I}_r \quad (2.30)$$

Il est bien remarqué que ces conditions de stabilité sont dépendantes du retard  $\bar{\tau}$  ainsi de sa dérivée temporelle  $\eta$  ce qui justifie l'appellation de 'stabilité du retard-dépendant'. Notons que les critères de stabilité du retard-dépendant sont généralement moins conservatifs que celui du retard-indépendant, surtout lorsque la taille du retard est petite, c'est pourquoi nous allons adopter ce type de critère pour traiter les problèmes de la stabilité et de commande des modèles T-S à retard.

### 2.11. Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons d'abord présenté quelques exemples de systèmes à retards, présents dans de nombreux domaines des sciences de l'ingénieur. Puis, nous avons cité les différents types de systèmes à retard. Ensuite, nous avons rappelé la notion de la stabilité au sens de Lyapunov, où nous avons évoqué les différentes définitions liées à cette dernière. Enfin, nous avons présenté les deux approches fréquemment utilisées pour l'analyse de la stabilité des systèmes à retard, à savoir, l'approche du retard-indépendant et celui du retard-dépendant.

Dans le chapitre suivant, nous allons nous intéresser aux problèmes de la stabilité et de la commande des systèmes à retard, représentés par les modèles T-S.

# Chapitre 3

## Systèmes Takagi-Sugeno à retard variable

### 3.1. Introduction :

Dans ce chapitre nous allons, dans une première partie, rappeler quelques définitions et concepts mathématiques de base, intrinsèques aux modèles T-S afin d'aider à la compréhension des résultats qui seront présentés ultérieurement. Nous présenterons d'abord, les modèles T-S standards et les méthodes utilisées pour les concevoir avec une attention particulière à la méthode la plus fréquemment utilisée "secteurs non-linéaires". Puis, nous rappellerons succinctement les résultats de base de la stabilité et de la commande basées sur la seconde méthode de Lyapunov pour ce type de modèles. Nous présenterons également quelques lemmes et propriétés dont la connaissance est utile pour arriver à comprendre ce qui va suivre de cette thèse. Au terme de cette partie, nous présenterons un exemple de simulation pour montrer la réalisabilité de la méthode de secteur non linéaire et par conséquent la puissance de l'outil numérique des Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs).

Dans la deuxième partie, nous nous pencherons sur la présentation des modèles T-S à retard variable afin de traiter le problème de la stabilité et de la stabilisation de ce type particulier de modèle flou et cela dans le cadre de l'utilisation d'une loi de commande basée sur le retour d'état linéaire appelée PDC (Parallel Distributed Compensation) [2]. De nouvelles conditions de stabilité/stabilisation dépendant du retard seront proposées et exprimées sous forme d'LMI, qui tiennent compte de la connaissance des limites du retard variable dans le temps et des taux de variation. L'amélioration du conservatisme est apportée par trois points :

- 1) Le choix approprié d'une fonction augmentée LKF [84],
- 2) L'application d'une extension de l'inégalité de Jensen [6],
- 3) L'utilisation de lemme du Finsler [122].

Dans ce contexte, nous proposerons une loi de commande PDC qui comprend à la fois les gains de retour d'état sans mémoire et ceux retardés. Pour pouvoir appliquer cette loi de commande, il est nécessaire de supposer que la variation temporelle du retard est disponible en ligne (à chaque instant  $t$ ). Sous cette hypothèse, il est important de souligner que les conditions LMIs proposées sont relaxées de manière significative, en particulier pour un taux de variation du retard supérieur à 1. En revanche, lorsque cette hypothèse ne peut pas être vérifiée, nous allons proposer des corollaires qui apportent, malgré tout, une légère relaxation lorsque la variation du retard est inférieure à 1.

Finalement, des exemples numériques sont simulés sous l'environnement du Matlab pour illustrer l'efficacité des conditions LMIs proposées, ainsi que l'amélioration du conservatisme par rapport aux résultats précédents, existant dans la littérature.

### 3.2. Concepts élémentaires sur les modèles flous Takagi-Sugeno standards

De nombreuses études ont récemment montré l'importance des modèles T-S dans les domaines de la commande moderne, de l'observation et du diagnostic. Car ils peuvent être considérés comme une combinaison linéaire d'un ensemble de systèmes linéaires liés entre eux par des fonctions de pondération non linéaires. Les modèles T-S sont décrits par un ensemble de règles floues Si-Alors, représentant des relations linéaires et locales entrées/sorties (appelées également "sous-modèles" ou encore modèles locaux) en différents points de fonctionnement d'un système, qui permettent d'exprimer la dynamique d'un système autour de points de fonctionnement particuliers de l'espace d'état.

La caractéristique principale des modèles T-S concerne la partition des systèmes non linéaires par un ensemble de modèles linéaires de sorte que le comportement non linéaire global du système peut être obtenu par un mélange flou de l'ensemble des sous-systèmes [114].

La  $i^{\text{ème}}$  règle d'un modèle T-S est donnée dans l'espace d'état sous la forme suivante:

**Règle  $i$  du procédé :**

$$\text{SI } z_1(t) \text{ est } F_i^1 \text{ et } \dots \text{ et } z_p(t) \text{ est } F_i^p \text{ ALORS } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i \in \mathcal{I}_r \quad \text{---(3.1)}$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état du modèle,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des entrées et  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  le vecteur des sorties,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $i \in \mathcal{I}_r$  sont respectivement la matrice d'état, la matrice des entrées et la matrice des sorties de dimensions appropriées,  $r = 2^p \in \mathbb{N}$  est le nombre de règles flous Si-Alors représentant également le nombre des sous-modèles flous linéaires,  $p$  est le nombre des variables de prémisse.  $z(t) = [z_1(t), \dots, z_p(t)]$  est le vecteur des variables de prémisse qui peuvent être fonction des variables d'état, des entrées, des perturbations externes, et / ou du temps et  $F_i^j$ ,  $j \in \mathcal{I}_p$  est l'ensemble flou.

A chaque règle floue est attribué un poids  $w_i(z(t))$  qui dépend du degré d'appartenance de  $z_j(t)$  aux sous-ensembles flous  $F_j^i$  et du choix de la modélisation de l'opérateur logique reliant les prémisses. L'opérateur logique 'ET' est souvent choisi comme le produit, d'où :

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_j^i(z_j(t)), \quad i \in \mathcal{I}_r \quad (3.2)$$

où  $F_j^i(z_j(t))$  est le degré d'appartenance de  $z_j$  à l'ensemble flou  $F_j^i$  et  $\forall t \geq 0$  :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0 \\ w_i(z(t)) \geq 0 \end{cases}, \quad i \in \mathcal{I}_r \quad (3.3)$$

Ainsi, la formulation mathématique du modèle global de T-S est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

où

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (3.5)$$

Le vecteur de sortie est obtenu par la même technique, il est donné par :

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) \quad (3.6)$$

La fonction  $h_i(z(t))$  indique le degré d'activation du  $i^{\text{ème}}$  modèle local associé. Cette fonction indique la contribution du modèle local correspondant au modèle global. Ainsi, il fournit une transition progressive du modèle présent aux modèles locaux voisins. Il dépend généralement du vecteur d'état  $x(t)$ . Il prend souvent la forme triangulaire, sigmoïde, ou gaussienne et satisfait la propriété convexe suivante :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \\ 0 \leq h_i(z(t)) \leq 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

La particularité du modèle T-S est que les ensembles flous ne sont utilisés que dans l'élaboration de la partie prémisse des règles. La partie "inclusion" est décrite par des variables numériques plutôt que des variables linguistiques et s'exprime sous la forme d'une constante ou de manière générale d'une fonction ou d'une équation différentielle dépendant des variables d'état et/ou d'entrées.

### 3.3. Obtention d'un modèle flou Takagi-Sugeno

Afin d'obtenir un modèle flou T-S, nous citons trois méthodes principales et largement utilisées dans la littérature, à savoir :

**3.3.1. Méthode de l'identification :** Cette méthode repose sur les techniques d'identification [123]. Elle est souvent utilisée lorsqu'il n'y a pas de modèle analytique du système, ou dans le cas des systèmes à dynamique complexe, difficile à décrire à l'aide d'un modèle analytique. Elle permet d'obtenir un modèle T-S à partir des données sur les entrées et les sorties. La méthode la plus appropriée à utiliser, consiste à choisir a priori la structure du modèle T-S ainsi que les fonctions d'activation. Le problème l'identification du modèle non-linéaire se réduit à identifier les paramètres des modèles locaux (linéaires) et les fonctions d'activation correspondants aux différents points de fonctionnement, en utilisant des algorithmes d'optimisation numériques.

D'une manière générale, la construction d'un modèle T-S à partir des variables entrée / sortie nécessite :

- La définition de la structure du modèle T-S,
- La définition des fonctions d'appartenance des variables de prémisse,
- L'estimation des paramètres des fonctions d'appartenance associées aux modèles locaux,
- L'évaluation des performances du modèle T-S

Pour estimer les paramètres, plusieurs méthodes d'optimisation numérique peuvent être utilisées, en fonction d'une information disponible a priori. Elles sont généralement basées sur la minimisation d'une fonction du coût calculée à partir de la différence entre la sortie estimée  $y_m(t)$  du modèle T-S et la sortie mesurée du système  $y(t)$ . Le critère le plus utilisé dans ce cas, est celui des "moindres carrés", qui consiste à utiliser les deux sorties indiquées, il est donné par la formule suivante [124] :

$$J(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t, \alpha) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y_m(t) - y(t))^2 \quad (3.8)$$

Dans la plupart des cas, la minimisation du critère  $J(\alpha)$  est basée sur un développement limité du critère  $J(\alpha)$  autour d'une valeur particulière du paramètre de vecteur  $\alpha$  et une procédure itérative de changement progressif de la solution.

Si l'on désigne par  $k$  l'indice d'itération de la méthode d'optimisation et  $\alpha(k)$  la valeur de la solution à l'itération  $k$ . La mise à jour de l'estimation s'est déroulée comme suit:

$$\alpha(k+1) = \alpha(k) - \rho P(k) \quad (3.9)$$

où  $\rho$  est un facteur de correction pour ajuster la vitesse de convergence vers la solution et  $P(k)$  est la direction d'optimisation dans l'espace des paramètres. En ce qui concerne le mode de calcul de  $P(k)$ , il existe différentes méthodes et algorithmes d'optimisation numérique, tels que Levenberg-Marquardt, gradient, Newton et Gauss-Newton. Pour plus de détails sur ces méthodes voir [123].

**3.3.2. Méthode de linéarisation :** Dans cette méthode, nous connaissons la forme analytique du modèle non linéaire du processus physique qui doit être linéarisé autour de différents points de fonctionnement sélectionnés avec soin [125].

Le principe de cette méthode consiste à linéariser le système non linéaire autour de plusieurs points de fonctionnement choisis judicieusement. Cette procédure conduit à obtenir,



pour chaque point de fonctionnement, des modèles locaux linéaires et affines. La construction du modèle T-S est réalisée par l'interpolation de tous ces modèles locaux à travers des fonctions de pondération "ou encore fonctions d'appartenance" généralement non-linéaires, et choisies de manière appropriée selon les exigences du système (triangulaire, trapézoïdales, gaussienne, ... etc.)

Pour mieux expliquer cette méthode, nous considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t)) \end{cases} \quad (3.10)$$

où  $f \in \mathbb{R}^n$ ,  $g \in \mathbb{R}^p$  sont des fonctions non linéaires et continues,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie.

Le but est d'obtenir une approximation du système non linéaire (3.10) par un ensemble de  $m$  modèles locaux T-S autour de points de fonctionnement arbitraires  $(x_i, u_i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x_m(t) + B_i u_m(t)) \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(C_i x(t)) \end{cases} \quad (3.11)$$

D'abord, nous sélectionnons les variables décrivant la non linéarité du système, par exemple, les variables d'ordonnancement. Ensuite, nous choisissons, un nombre  $m$  suffisant de points de linéarisation  $z_{0,i}$  avec  $i \in \mathcal{I}_m$ .

C'est en augmentant le nombre de points d'approximation qui sont bien choisis, qu'on aura alors une précision de rapprochement des sous-modèles T-S qui augmente. Cependant, Si nous augmentons le nombre de points de linéarisation, les coûts de calcul pour la conception du contrôleur ou observateur augmentent également [124]. Enfin, les matrices conséquentes sont calculées comme suit :

$$A_i = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{z_{0,i}, 0}, B_i = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{z_{0,i}, 0}, C_i = \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right|_{z_{0,i}, 0} \quad (3.12)$$

où la notation  $\left. \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} \right|_{z_{0,i},0}$  désigne l'évaluation de  $\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}$  autour des points suivants:

- Point  $z_{0,i}$  pour les variables d'état et d'entrée "qui sont non linéaires", ainsi que pour les variables d'ordonnement.
- Point zéros "0" pour les variables d'état et d'entrée, qui sont linéaires.

Notons que dans ce cas, le nombre  $m$  de modèles locaux dépend de la précision de la modélisation souhaitée, de la complexité du système non linéaire et du choix de la structure des fonctions d'activation, qui doivent satisfaire les propriétés de la somme convexe (3.7).

**3.3.3. Méthode de secteur non linéaire :** Cette méthode est la plus fréquemment utilisée pour la construction de modèle T-S. L'idée d'utiliser cette méthode pour construire un modèle T-S a été initiée par [126] et étendue par [2] et [127].

Le principe de la méthode est basé sur une transformation polytopique convexe des termes non linéaires d'un système dynamique qui permet d'obtenir un modèle T-S représentant, de manière exacte, le modèle non linéaire dans un espace compact des variables d'état, contrairement aux deux méthodes précédentes (qui fournissent juste une approximation du modèle non linéaire), et en plus, elle permet de minimiser l'erreur produite lors du passage du modèle non linéaire au modèle T-S, et d'optimiser le nombre de modèles locaux.

Autrement dit, cette méthode consiste à trouver un secteur global de telle sorte que  $\dot{x}(t) = f(x) \in [s_1 \quad s_2]x(t)$ , où  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  est une fonction linéaire avec  $f(0) = 0$ .  $s_1x(t)$  et  $s_2x(t)$  sont deux lignes représentant les limites du secteur non linéaire, comme le montre la figure 3.1:

Comme, il s'avère difficile parfois de trouver un secteur global pour un système non linéaire quelconque. Il est important de considérer un secteur non linéaire local comme le montre la figure 3.2.

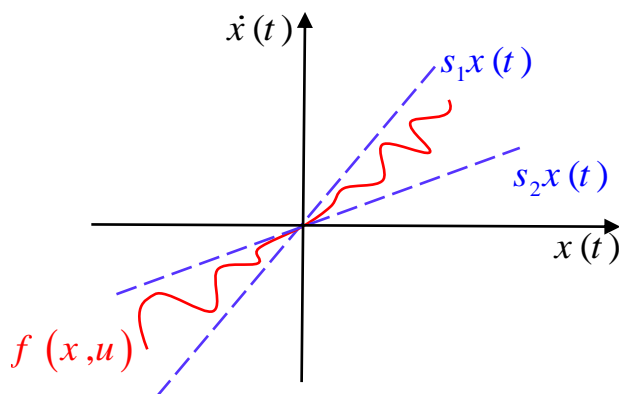


Fig 3.1 : Secteur non linéaire global

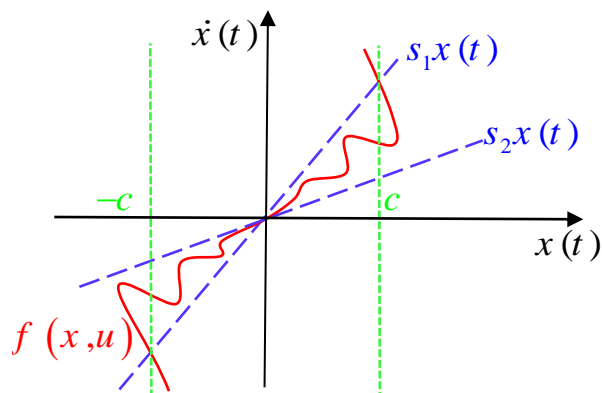


Fig 3.2 : Secteur non linéaire local

Notons que dans ce travail, nous allons utiliser la méthode de découpage en secteurs non linéaires qui permet de définir des modèles locaux T-S en fonction du nombre des non linéarités. Elle repose sur le lemme suivant [2] :

**Lemme 3.1 :** [2] Si  $\forall x \in [a, b]$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^{+2}$ ,  $f(x(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction bornée sur  $[a, b]$ , il existe deux fonctions  $w_1(x)$  et  $w_2(x)$  et deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  tel que :

$$f(x) = w_1(x)\alpha + w_2(x)\beta$$

avec

$$w_1(x) + w_2(x) = 1 \text{ et } w_1(x) \geq 0, w_2(x) \geq 0$$

**Preuve:** Sous l'hypothèse que la fonction  $f(x(t))$  est bornée telle que  $\beta \leq f(x(t)) \leq \alpha$ , nous pouvons toujours écrire

$$f(x) = w_1(x)\alpha + w_2(x)\beta$$

avec

$$\alpha = \max_{x \in [a, b]} f(x) \text{ et } \beta = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

et

$$w_1(x) = \frac{f(x) - \beta}{\alpha - \beta} \text{ et } w_2(x) = \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - \beta}.$$

Afin d'illustrer cette dernière méthode, nous proposons l'exemple suivant :

**Exemple 3.1 :** Considérons le système non linéaire 'affine en la commande' suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2^3(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = (2 + x_2(t)x_1^2(t))x_1(t) - x_2(t) + x_2^2u(t) \\ y(t) = x_2^2x_1 \end{cases} \quad (3.13)$$

Ce système peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x_2^2(t) \\ 2 + x_1(t)x_2^2(t) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ x_2^2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} x_2^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.14)$$

Le système (3.14) présente deux non linéarités (terme non linéaire) notées  $z_1(x(t)) = x_2^2(t)$  et  $z_2(x(t)) = x_1(t)x_2^2(t)$  .

Les fonctions  $z_1(x(t))$  et  $z_2(x(t))$  sont bornées pour  $x_1 \in [-a \ a]$  et  $x_2 \in [-b \ b]$  avec  $(a,b) \in [-1 \ 1]^2$ . Ensuite, nous calculons les valeurs minimales et maximales de  $z_1(x(t))$  et  $z_2(x(t))$  comme suit:

$$\begin{aligned} \min_{x_2(t)} z_1(x(t)) &= 0, \quad \max_{x_2(t)} z_1(x(t)) = b^2 \\ \min_{x_1(t), x_2(t)} z_2(x(t)) &= -ab^2, \quad \max_{x_1(t), x_2(t)} z_2(x(t)) = ab^2 \end{aligned}$$

Les termes non linéaires  $z_1(x(t))$  et  $z_2(x(t))$  peuvent être réécrits, suivant le lemme 3.1, comme suit :

$$\begin{aligned} x_2^2(t) &= w_1^1(z(t)) \times b^2 + w_1^2(z(t)) \times 0 \\ x_1(t)x_2^2(t) &= w_2^1(z(t)) \times ab^2 - w_2^2(z(t)) \times ab^2 \end{aligned}$$

avec

$$w_1^1(z(t)) = \frac{x_2^2(t)}{b^2}, \quad w_1^2(z(t)) = \frac{b^2 - x_2^2(t)}{b^2}$$

$$w_2^1(z(t)) = \frac{x_1(t)x_2^2(t) - ab^2}{2ab^2}, \quad w_2^2(z(t)) = \frac{ab^2 - x_1(t)x_2^2(t)}{2ab^2}$$

et

$$w_1^1(z(t)) + w_1^2(z(t)) = 1, \quad w_2^1(z(t)) + w_2^2(z(t)) = 1,$$

D'une manière générale, le nombre des sous-modèles locaux T-S est  $r = 2^q$ , où  $q$  représente le nombre des termes non linéaires.

Dans cet exemple, cette technique aboutit à 4 modèles locaux ( $r = 4$ ) T-S, obtenus à partir des 4 combinaisons possibles des bornes des termes non linéaires  $z_1(x(t))$  et  $z_2(x(t))$ , et les quatre fonctions d'appartenance  $w_1^1(z(t))$ ,  $w_1^2(z(t))$ ,  $w_2^1(z(t))$  et  $w_2^2(z(t))$ .

Par conséquent, le modèle T-S équivalent du système non linéaire (3.13) peut être écrit comme suit:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & b^2 \\ 2 + ab^2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & b^2 \\ 2 - ab^2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 + ab^2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 - ab^2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ b^2 \end{bmatrix}, \quad B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = C_2 = [b^2 \quad 0] \quad \text{et} \quad C_3 = C_4 = [0 \quad 0].$$

Les fonctions d'activation sont calculées comme suit :

$$h_1(x) = w_1^1(z(t)) \times w_2^1(z(t)), \quad h_2(x) = w_1^1(z(t)) \times w_2^2(z(t))$$

$$h_3(x) = w_1^2(z(t)) \times w_2^1(z(t)), \quad h_4(x) = w_1^2(z(t)) \times w_2^2(z(t))$$

### 3.4. Stabilité, stabilisation et commande des modèles Takagi-Sugeno standards

La stabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires représentés par des modèles T-S a été largement étudiée dans [2], [11], [52], [53], [69], [128], [129] et [58]. La structure particulière

de ce type de modèle a permis l'extension de l'étude de la stabilité des systèmes linéaires au cas des systèmes non linéaires. La seconde méthode de Lyapunov (fonction de Lyapunov quadratique) a été considérée comme la base de la plupart des études de stabilité et de stabilisation des modèles T-S.

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'étude de la stabilité/stabilisation des modèles T-S en utilisant la fonction de Lyapunov quadratique. Des conditions suffisantes de stabilité/stabilisation sont exprimées sous forme d'un problème LMI.

**3.4.1. Fonction de Lyapunov quadratique :** Le principe de la fonction quadratique de Lyapunov est d'étudier la variation d'une fonction scalaire définie positive pour parvenir à la stabilité du système. Cette théorie conduit à des conditions suffisantes de stabilité et stabilisation selon la forme imposée particulièrement à la fonction  $V(x)$  et selon la structure du système. Le principe de cette fonction est annoncé par le théorème suivant :

**Théorème 3.1:** [130] Nous disons que le point d'équilibre d'un système dynamique invariant dans le temps est stable, au sens de Lyapunov, s'il existe une fonction continue et différentiable  $V(x)$  dont sa première dérivée partielle est continue, de telle sorte que:

$$\begin{cases} V(x) > 0, V(0) = 0 \\ \dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} \leq 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Si la condition  $\dot{V}(x)$  est strictement négative, inégalité stricte, le système est asymptotiquement stable. Si le point d'équilibre est stable et si  $\dot{V}(x) < 0$  (strictement négative) alors nous disons que le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Notons que plusieurs fonctions, répondant à la définition de Lyapunov, sont habituellement proposées pour résoudre le problème de la stabilité. Cependant, la fonction la plus couramment utilisée est basée sur une forme quadratique, elle est définie comme suit :

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad P = P^T > 0 \quad (3.16)$$

Alors, trouver une fonction de Lyapunov quadratique revient à trouver une matrice symétrique définie positive  $P$ . Il est bien connu que l'existence d'une fonction quadratique de Lyapunov, est suffisante pour assurer la stabilité asymptotique d'un système.

**3.4.2. Stabilité quadratique des modèles Takagi-Sugeno standards :** Considérons le modèle T-S continu en régime libre (ne soumis plus à aucune excitation externe c'est à dire  $u(t) = 0$ ) suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t), \quad i \in \mathcal{I}_r \quad (3.17)$$

Sur la base de la fonction quadratique de Lyapunov (3.16), les conditions de base de stabilité du modèle T-S (3.17) peuvent être obtenues en appliquant le théorème suivant :

**Théorème 3.2 :**[53] L'équilibre d'un modèle T-S en régime libre décrit par (3.17) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune  $P = P^T > 0$  définie positive telle que les LMIs suivantes soient vérifiées:

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad P > 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_r \quad (3.18)$$

**3.4.3. Stabilisation et commande des modèles Takagi-Sugeno standards :** Un système dynamique exige une loi de commande qui le rend stable, robuste et performant. A cet effet, pour générer un signal de commande stabilisant le système (3.4), plusieurs formules de loi de commande ont été proposées dans la littérature, dont la plus couramment utilisée est appelée PDC.

**3.4.3.1. Loi de commande PDC :** La stratégie de cette loi de commande PDC est de calculer, pour chaque modèle local, une loi de commande linéaire par retour d'état. Chaque règle de commande est conçue à partir de la règle correspondante du modèle T-S. La loi de commande globale, qui est en général non linéaire, est obtenue par l'interpolation de toutes les lois de commande locales à travers les mêmes fonctions d'activation que celles du modèle T-S, elle est définie comme suit :

**Règle  $i$  du régulateur :**

$$\text{SI } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et } \dots \text{ et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \quad \text{ALORS} \quad u(t) = -K_i x(t) \quad i \in \mathcal{I}_r$$

La sortie globale de la loi PDC est de la forme suivante :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t) \quad i \in \mathcal{I}_r \quad (3.19)$$

avec  $K_i, i \in \mathcal{I}_r$  représente les vecteurs du gain du contrôleur.

Pour obtenir le modèle global T-S en boucle fermée, nous substituons (3.19) dans (3.4), il prend alors la forme suivante:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i - B_i K_j) x(t) \quad i \in \mathcal{I}_r \quad (3.20)$$

La conception de la loi de commande PDC (3.19) revient à calculer les gains locaux  $K_i$  qui assurent la stabilité du modèle globale T-S en boucle fermée (3.20). Ainsi, en utilisant la fonction de Lyapunov quadratique (3.16), on obtient les conditions de stabilisation de base du modèle global T-S en boucle fermée (3.20) exprimées directement sous forme des LMIs afin qu'ils puissent être numériquement exploitées. Elles sont données par le théorème suivant :

**Théorème 3.3 :** [53] L'équilibre d'un modèle continu T-S décrit par (3.20) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice définie positive  $X = X^T > 0$  et les matrices  $M_i \quad i \in \mathcal{I}_r$ , telle que les LMIs suivantes soient vérifiées:

$$\Gamma_{ii} < 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_r \quad (3.21)$$

$$\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} < 0, \quad \forall (i,j) \in \mathcal{I}_r^2, i < j \quad (3.22)$$

avec

$$\Gamma_{ij} = X A_i^T + A_i X - M_j^T B_i^T - B_i M_j \quad (3.23)$$

pour tous les  $i$  et  $j$ , sauf les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t)) h_j(z(t)) = 0, \forall t$ .

Les gains du contrôleur PDC sont donnés par  $K_i = M_i P$  et la matrice de Lyapunov  $P = X^{-1}$ .

### 3.5. Relâchement des conditions de stabilité :

Notons que le problème fondamental qui se pose lors de la synthèse de loi de commande PDC est celui du conservatisme des résultats de stabilité (les conditions (3.21)-(3.22)). En effet, si le nombre de règles  $r$  est grand, il serait difficile de trouver une matrice  $P$  commune qui satisfait les conditions de stabilité classique (3.21)-(3.22). Dans le but d'avoir des résultats beaucoup moins conservatifs, plusieurs lemmes de relaxation des LMIs ont fait l'objet de plusieurs travaux. Ces relaxations peuvent être classées dans deux grandes catégories. La



première est celle des relaxations qui n'introduisent aucune variable supplémentaire. Quant à la deuxième, elle englobe les autres types de relaxations.

En termes d'efficacité, la principale différence entre les deux catégories sous-cotées réside dans le fait que les relaxations qui introduisent des variables supplémentaires engendrent des problèmes LMIs moins conservatifs mais qui prennent un temps assez long avant qu'ils ne soient résolus.

Dans ce qui va suivre, nous présenterons les deux résultats qui nous semblent correspondre au meilleur compromis entre qualité de la solution et la compatibilité avec les solveurs actuels.

En effet, lors de l'étude de la stabilité quadratique, on aboutit à des inégalités des fonctions à double sommes, qui peuvent provenir de l'interaction engendrée par les modèles croisés comme suit :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Gamma_{ij} < 0, \quad i, j \in \mathcal{I}_r^2 \quad (3.24)$$

où les  $\Gamma_{ij}$  sont des matrices symétriques de tailles appropriées dépendant des variables inconnues à déterminer. Le but est de trouver des conditions LMIs les moins conservatrices sur  $\Gamma_{ij}$  de telle sorte que l'inégalité (3.24) soit vérifiée, et ce en utilisant seulement la propriété de somme convexe des fonctions non linéaires  $h_i(z(t))$ . Evidemment, le cas le plus simple, mais aussi le plus conservatif, est d'imposer que  $\Gamma_{ij} < 0$  pour  $i, j \in \mathcal{I}_r^2$ . Ces conditions peuvent être relâchées en considérant que  $h_i(z(t)) > 0$  et  $h_i(z(t))h_j(z(t)) = h_j(z(t))h_i(z(t))$ .

Dans la littérature, plusieurs solutions ont été proposées afin de réduire cette source de conservatisme. Ici, nous nous intéressons principalement aux relaxations de Tanaka [53] et celle de Tuan [54].

**3.5.1. Relaxation de Tanaka [53]:** Le lemme de relaxation suivant est issu de [53], il se base sur le nombre maximal de règles actives à chaque instant  $s$  pour réduire le conservatisme de conditions de stabilisation.

Soit  $\Gamma_{ij}$  des matrices de dimensions appropriées, la condition (3.24) est vérifiée si [53] :

$$\begin{cases} \Gamma_{ii} + (s-1)Y < 0, i \in \mathcal{I}_r \\ \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} - 2Y < 0, \forall (i,j) \in \mathcal{I}_r^2 \quad i < j \end{cases} \quad (3.25)$$

Plusieurs relaxations existent pour améliorer la relaxation de Tanaka. Dans ce travail, nous allons utiliser la relaxation de Tuan [54] qui constitue un bon compromis entre conservatisme, complexité et temps de calcul (taille des domaines de solutions). Ainsi, elle inclue le domaine des solutions de la relaxation de Tanaka, tout en assurant le même nombre des variables inconnues.

**3.5.2. Relaxation de Tuan (Lemme de Tuan) [54] :** Soient  $\Gamma_{ij}$  des matrices de dimensions appropriées, la condition (3.24) est vérifiée si :

$$\begin{cases} \Gamma_{ii} < 0, \forall i \in \mathcal{I}_r \\ \frac{2}{r-1} \Gamma_{ii} + \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} < 0, \forall (i,j) \in \mathcal{I}_r^2 \quad i \neq j \end{cases} \quad (3.26)$$

### 3.6. Exemple illustratif :

Pour illustrer la puissance de l'approche LMI utilisée lors de la conception de contrôleurs PDC pour les modèles T-S standards, nous allons traiter le problème de la stabilité et de la commande d'un système non linéaire TORA (Translational Oscillator with Rotational Actuator) qu'illustre la figure 3.3 [2].

Ce système fait deux mouvements à la fois, un mouvement de translation et un autre de rotation. Le système concerne un oscillateur de translation accompagné d'une rotation excentrique. L'oscillateur est constitué d'un chariot de masse  $M$  connecté à un mur fixé par un ressort linéaire de raideur  $K$ . Le chariot est contraint d'avoir un déplacement unidimensionnel. L'actionneur 'masse d'épreuve' raccordé au chariot a une masse  $m$  et un moment d'inertie  $J$  autour de son centre de masse, qui est situé à la distance  $\varepsilon$  du point de rotation de la masse d'épreuve. Le mouvement se produit dans un plan horizontal, de sorte qu'aucune force gravitationnelle n'a besoin d'être considérée.

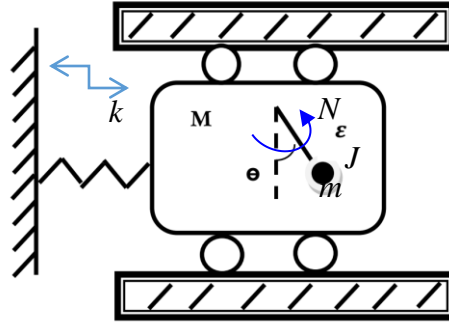


Fig.3.3. Système de translation et de rotation (TORA)

$N$  : Couple de contrôle appliqué à la masse d'épreuve

$F$  : Force de perturbation appliquée au chariot

$x_1 = q$  : Déplacement normalisé de la plate-forme à partir de la position d'équilibre

$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{q}$  : Vitesse de translation du chariot

$x_3 = \theta$  : Position angulaire

$x_4 = \dot{x}_3 = \dot{\theta}$  : Vitesse de rotation de la masse d'épreuve, avec  $\theta = 0^\circ$  signifie que la masse  $m$  est perpendiculaire au mouvement du chariot, et  $\theta = 90^\circ$  signifie que la masse  $m$  est alignée avec la direction positive de translation  $q$ .

Les équations de mouvement sont données comme suit [2]:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{q} + k\dot{q} = -m\varepsilon(\ddot{\theta}\cos(\theta) - \dot{\theta}^2\sin(\theta)) + F \\ (J + m\varepsilon^2)\ddot{\theta} = -m\varepsilon\dot{q}\cos(\theta) + N \end{cases} \quad (3.27)$$

Alors, la dynamique du système peut être exprimée par l'équation (du premier ordre) suivante :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + d(x) \quad (3.28)$$

avec  $u(t)$  le signal de commande qui représente le couple  $N$ ,  $d(x)$  est la perturbation qui représente la force normalisée  $F$ ,

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{1-\varepsilon^2 \cos^2(x_3)} & 0 & 0 & \frac{\varepsilon x_4 \sin(x_3)}{1-\varepsilon^2 \cos^2(x_3)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\varepsilon \cos(x_3)}{1-\varepsilon^2 \cos^2(x_3)} & 0 & 0 & \frac{-\varepsilon x_4 \sin(x_3)}{1-\varepsilon^2 \cos^2(x_3)} \end{bmatrix}, g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\varepsilon \cos(x_3)}{1-\varepsilon^2 \cos^2(x_3)} \\ 0 \\ \frac{1}{1-\varepsilon^2 \cos^2(x_3)} \end{bmatrix} \text{ et } \varepsilon = 0.1.$$

Dans cet exemple, nous ne considérons que le cas sans incertitude, c'est à dire  $d=0$ . Afin d'obtenir le modèle T-S équivalent de (3.28), nous introduisons de nouvelles variables d'état comme suit :

$$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) + \varepsilon \sin(x_3(t)) \\ z_2(t) = x_2(t) + \varepsilon x_4(t) \cos(x_3(t)) \\ y_1(t) = x_3(t) \\ y_2(t) = x_4(t) \end{cases} \quad (3.29)$$

Nous utilisons ensuite la transformation en boucle fermée suivante [2]:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{1-\varepsilon^2 \cos^2(y_1(t))} \left[ \varepsilon \cos(y_1(t)) \left( z_1 - (1 + y_2^2(t)) \varepsilon \sin(y_1(t)) \right) + u(t) \right] \\ &= \alpha(z_1(t), y_1(t)) + \beta(y_1(t)) u(t) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Alors le système (3.28) peut être représenté sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = -z_1(t) + \varepsilon \sin(y_1(t)) \\ \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = v(t) \end{cases} \quad (3.31)$$

Supposons que le point d'équilibre est le point zéro. Notre objectif est de synthétiser un contrôleur flou permettant de stabiliser le système TORA autour de son point d'équilibre, c'est à dire  $z_1(t) \rightarrow 0$ ,  $z_2(t) \rightarrow 0$ ,  $y_1(t) \rightarrow 0$  et  $y_2(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

Ainsi, en appliquant la méthode de secteur non linéaire présentée précédemment dans le lemme 3.1 sur le système (3.31), nous pouvons obtenir le modèle T-S décrit par les règles floues comme suit :

**Règle 1 :**SI  $y_1(t)$  est "environ  $-\pi$  ou  $\pi$  rad "

ALORS 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t) \\ y(t) = C_1x(t) \end{cases}$$

**Règle 2 :**SI  $y_1(t)$  est "environ  $-\frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{\pi}{2}$  rad "

ALORS 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t) \\ y(t) = C_2x(t) \end{cases}$$

**Règle 3 :**SI  $y_1(t)$  est "environ 0 rad " ET  $y_2(t)$  est "environ 0 rad "

ALORS 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t) \\ y(t) = C_3x(t) \end{cases}$$

**Règle 4 :**SI  $y_1(t)$  est "environ 0 rad " ET  $y_2(t)$  est "environ  $-a$  ou  $a$  "

ALORS 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_4x(t) + B_4u(t) \\ y(t) = C_4x(t) \end{cases}$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \varepsilon \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-\varepsilon}{1-\varepsilon^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \varepsilon \frac{2}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} & 0 & \frac{-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} & 0 & \frac{-\varepsilon^2(1+a^2)}{1-\varepsilon^2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{1-\varepsilon^2} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et  $x(t)^T = [z_1(t) \quad z_2(t) \quad y_1(t) \quad y_2(t)]$ .

Les fonctions d'appartenance des variables de prémisse  $y_1(t) = x_3(t)$  et  $y_2(t) = x_4(t)$  sont représentées sur la figure 3.4 suivante:

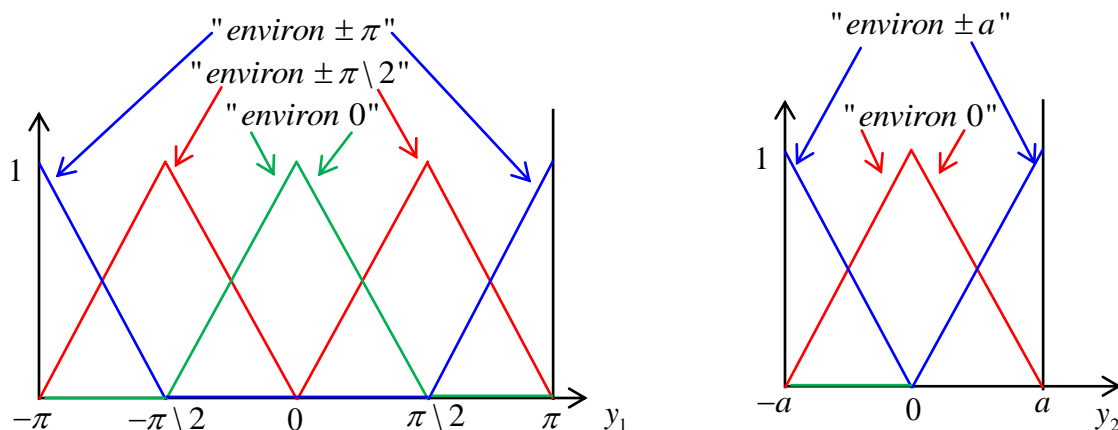


Fig.3.4. Fonctions d'appartenance de  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ .

Pour la simulation, nous choisissons  $x_4 \in [-a, a]$  et  $0 < \alpha < 1$  avec  $a = 4$  et  $\alpha = 0.9$ .

Alors, le système (3.27) peut se réécrire sous forme d'un modèle T-S à 4 règles comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(z(t))(C_i x(t)) \end{cases} \quad (3.32)$$

avec,  $r = 4$ ,  $z(t) \in [y_1(t) \quad y_2(t)]$  et  $h_i(z(t))$ ,  $i \in \mathcal{I}_r$  est le poids de la  $i^{\text{ème}}$  règle calculée par les fonctions d'appartenance.

L'objectif est de synthétiser une loi de commande PDC composée de 4 sous-contrôleurs locaux et permettant de stabiliser le système TORA. Le but est donc de chercher les vecteurs de gains  $K_i$  et les variables de décision  $M_i$  vérifiant les conditions de stabilité du théorème 3.3 (en appliquant la relaxation de Tuan). Ces conditions de stabilité ont été résolues à l'aide de l'outil *LMI Toolbox de Matlab* [131]. Les résultats sont donnés comme suit :

$$K_1 = [-0.9119 \quad 0.1899 \quad 1.0882 \quad 0.4658], \quad K_2 = [0.0442 \quad 0.3687 \quad 1.6624 \quad 0.8989]$$

$$K_3 = [0.7485 \quad 0.1766 \quad 0.4177 \quad 0.4597], \quad K_4 = [0.7633 \quad 0.1806 \quad -0.1437 \quad 0.4560]$$

$$M_1 = [-8.1387 \quad -7.4833 \quad 0.7921 \quad 3.7948], \quad M_2 = [1.3146 \quad 0.4194 \quad 7.4069 \quad 7.8142]$$

$$M_3 = [6.8074 \quad 6.3842 \quad 3.8222 \quad 5.0452], \quad M_4 = [5.1022 \quad 7.1747 \quad -1.1294 \quad 6.8924]$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.0533 & -0.0569 & -0.0227 & 0.0019 \\ 0.0642 & 0.0508 & -0.0627 & -0.0169 \\ -0.0101 & 0.0348 & 0.1427 & 0.0299 \\ 0.0028 & 0.0211 & 0.0846 & 0.0873 \end{bmatrix}$$

Pour simuler le système TORA, nous effectuons la transformation inverse du système (3.29) pour avoir les états originaux du système TORA tels que représentés par l'équation suivante :

$$\begin{cases} x_1(t) = z_1(t) - \varepsilon \sin(y_1(t)) \\ x_2(t) = z_2(t) - \varepsilon y_2(t) \cos(y_1(t)) \\ x_3(t) = y_1(t) \\ x_4(t) = y_2(t) \end{cases} \quad (3.33)$$

la figure suivante représente le schéma de commande PDC du système TORA.

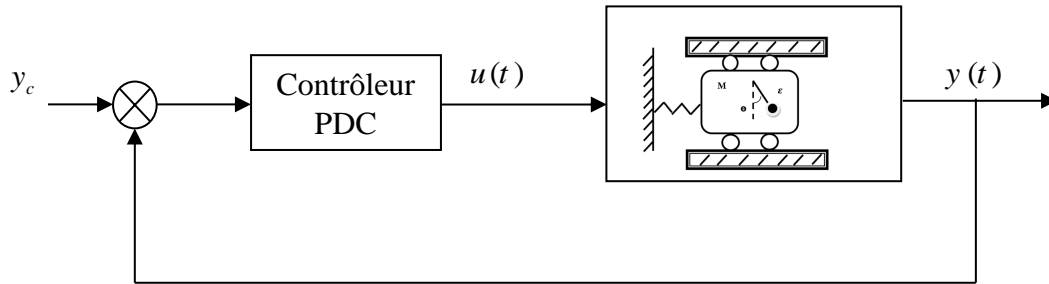


Fig.3.5. Schéma de commande du système TORA

Les figures 3.6 et 3.7 présentent respectivement l'évolution temporelle du vecteur d'état  $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \quad x_4(t)]^T$  et du signal de commande  $u(t)$  du système TORA pour l'état initial  $x(0) = [0.2 \quad 0.2 \quad -0.2 \quad -0.2]^T$  en appliquant le théorème 3.3.

A partir de ces courbes, nous remarquons que les états du système TORA sont revenus à leur état d'équilibre après quelques secondes ( $\approx 20$ sec) avec un minimum d'oscillations et cela s'explique par la nature du système TORA (qui est un système d'origine oscillant).

Nous remarquons également que le signal de commande converge vers zéro, avec un minimum d'oscillations ce qui prouve que le contrôleur PDC conçu à base de contraintes LMIs stabilise le système non linéaire TORA, c'est à dire  $x_i(t) \rightarrow 0, i \in \mathcal{I}_r, r = 4$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

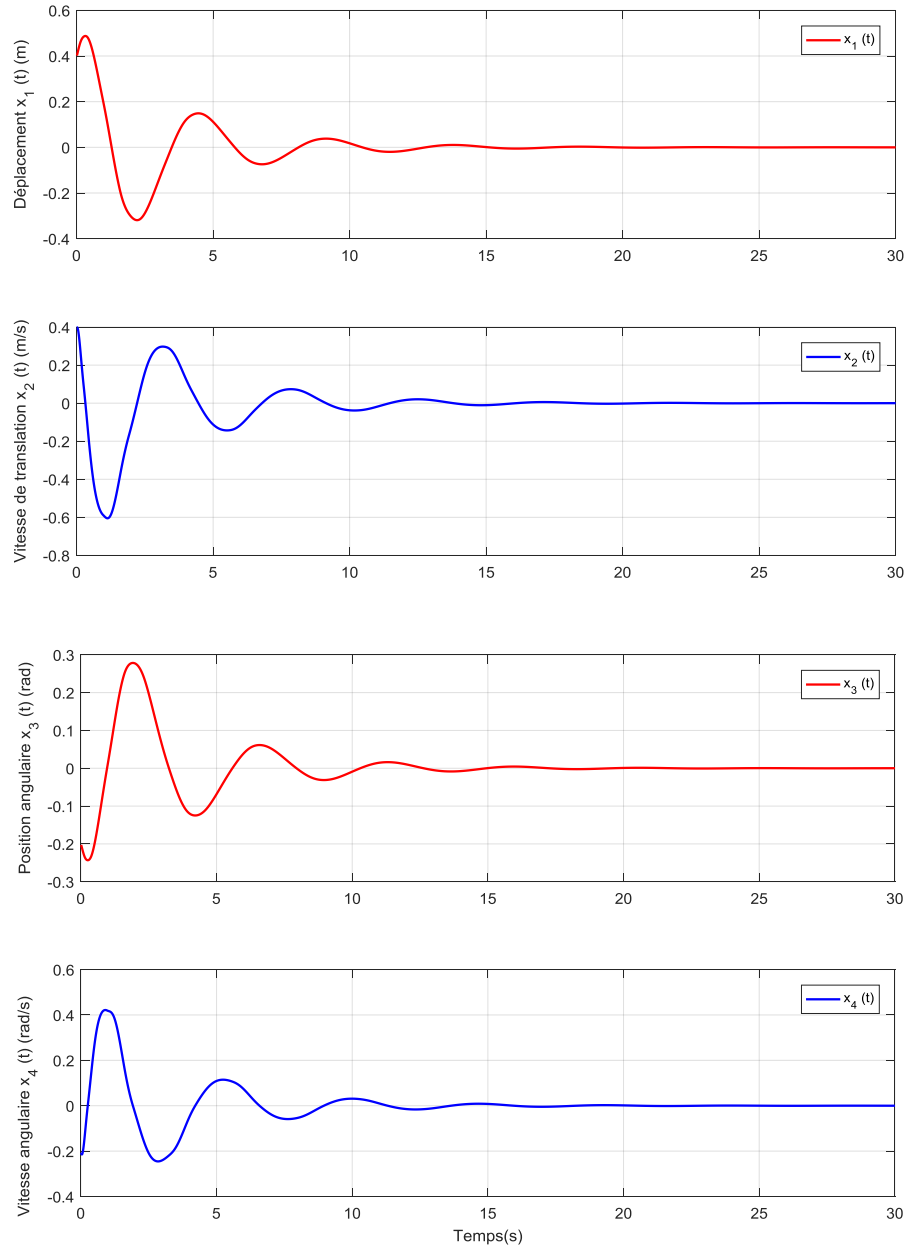


Fig. 3.6. Réponses temporelles du système TORA

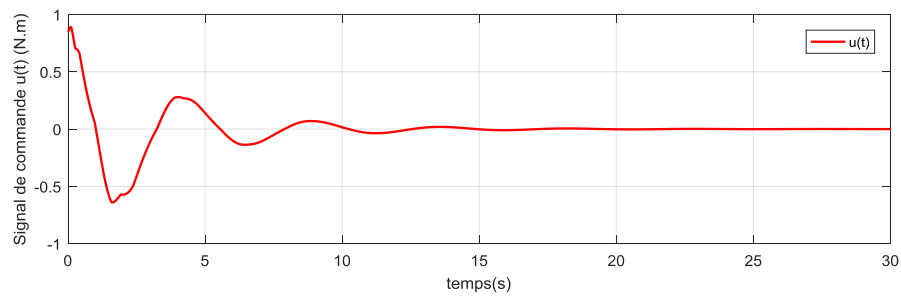


Fig. 3.7. Signal de commande



**Remarque 3.1:** Dans cette première partie, nous avons utilisé les LMIs satisfaisant la stabilité des modèles T-S en boucle fermée (Conditions LMIs classiques), c'est-à-dire sans introduire de contraintes ni à l'entrée ni à la sortie ni aux états du système. Cependant, il est à noter que d'autres travaux [53] et [132] ont pris en considération ces contraintes lors de la synthèse du contrôleur PDC pour les modèles T-S et ce pour améliorer les performances du système étudié (vitesse de convergence, contraintes sur la commande et sur la sortie ... etc).

Récemment, les modèles T-S ont été étendus pour étudier les systèmes non linéaires à retard. Il est bien connu que la présence du retard dans les dynamiques du system est considérée comme une source d'instabilité et une dégradation des performances de ces systèmes. Il se produit naturellement dans la modélisation de nombreux processus physiques tels que la biologie, l'écologie, les télécommunications la robotique, les systèmes de réseau, les installations pneumatiques ou hydrauliques, ...etc. D'où la nécessité de développer une théorie sur les systèmes à retard telle que la stabilité et la stabilisation.

Dans ce contexte, plusieurs études ont été publiées ces dernières années traitant les systèmes à retard, voir par exemple [18]–[20], [26], [35], [83] et les références qui y figurent. De même, la stabilité des systèmes à retard peut disparaître en raison des incertitudes structurelles [46], [48], [99], [133]. Ainsi, la conception de contrôleurs robustes pour les modèles T-S incertains à retard reste un problème difficile. Alors, nous pouvons définir les systèmes à retard comme des systèmes dont l'évolution dépende non seulement de l'information à l'instant présent, mais aussi d'une partie de leurs passé [6].

Avant d'aborder en détail notre contribution, qui constitue le fond de cette thèse, et qui portera sur le problème de la stabilité et de la commande des modèles T-S à retard, nous présenterons succinctement les modèles T-S à retard ainsi que leurs classes les plus couramment utilisées dans la littérature.

### 3.7. Principaux types de modèles Takagi-Sugeno à retard

Notons qu'il existe plusieurs type de modèles T-S à retard, nous ne présentons ici que les types les plus rencontrés, à savoir :

### 3.7.1. Modèle Takagi-Sugeno à retard en l'état

**3.7.1.1. Modèle nominal (sans incertitudes):** La  $i^{\text{ème}}$  règle d'un modèle T-S à retard en état est donnée dans l'espace d'état sous la forme suivante :

**Règle  $i$  du système:**

SI  $z_1(t)$  est  $F_i^1$  et ... et  $z_p(t)$  est  $F_i^p$  ALORS

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + A_i^d x(t - \tau(t)) + B_i u(t) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\bar{\tau}, 0], \quad i \in \mathcal{I}_r \end{cases} \quad (3.34)$$

où  $x(t - \tau(t)) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état retardé du modèle,  $\phi(t)$  est le vecteur des conditions initiales et  $\tau(t)$  représente le retard variable qui peut être inconnu, mais supposé être une fonction lisse du temps et satisfait la condition suivante :

$$0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}, \quad \dot{\tau}(t) \leq \eta \quad (3.35)$$

avec  $\bar{\tau}$  et  $\eta$  des scalaires positifs.

En adoptant une défuzzification barycentrique, la dynamique globale est définie comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + A_i^d x(t - \tau(t)) + B_i u(t)) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\bar{\tau}, 0], \quad i \in \mathcal{I}_r \end{cases} \quad (3.36)$$

La dynamique en boucle fermée du modèle T-S à retard est calculée à l'aide du concept PDC, elle prend alors la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) ((A_i + B_i K_j) x(t) + A_i^d x(t - \tau(t))) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\bar{\tau}, 0], \quad i \in \mathcal{I}_r \end{cases} \quad (3.37)$$

**3.7.1.2. Modèle incertain :** De manière générale, les équations régissant un procédé donné sont complexes (non linéaires, à coefficients variant dans le temps, ...etc.). Pour pouvoir les traiter avec les outils de l'automatique moderne, de nombreuses simplifications sont donc nécessaires. De plus, les modèles mathématiques ne peuvent pas décrire parfaitement le comportement

dynamique d'un système physique. Afin de tenir compte des incertitudes de modélisation, il convient d'adapter le modèle linéaire à retard pour obtenir un modèle linéaire incertain à retard.

Comme nous l'avons fait avec le modèle T-S nominal, la dynamique globale du modèle T-S incertain à retard en boucle fermée peut être écrite comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left( (A_i + \Delta A_i)x(t) + (A_i^d + \Delta A_i^d)x(t - \tau(t)) + (B_i + \Delta B_i)u(t) \right) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\bar{\tau}, 0], \quad i \in \mathcal{I}_r \end{cases} \quad (3.38)$$

où les incertitudes sont supposées être structurées, avec  $\Delta A_i$ ,  $\Delta A_i^d$  et  $\Delta B_i$  sont des matrices inconnues, variant dans le temps et représentant des incertitudes mesurables.

**3.7.2. Modèle Takagi-Sugeno à retard en entrée :** Le modèle T-S à retard en entrée est utilisé pour représenter des phénomènes plus complexes de manière plus simple. La dynamique globale en boucle ouverte est donnée par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left( A_i x(t) + B_i u(t) + B_i^d u(t - \tau(t)) \right) \quad i \in \mathcal{I}_r \quad (3.39)$$

où,  $u(t - \tau(t))$  représente le vecteur d'entrée (de commande) retardé du modèle.

**3.7.3. Modèle Takagi- Sugeno à retard en état et en entrée :** Le modèle T-S à retard en état peut être facilement étendu à un modèle T-S à retard en état et en entrée. Le modèle global prend la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left( A_i x(t) + A_i^d x(t - \tau(t)) + B_i u(t) + B_i^d u(t - \tau(t)) \right) \quad i \in \mathcal{I}_r \quad (3.40)$$

**Remarque 3.2 :** Il convient de rappeler que les modèles T-S contenant un retard en entrée (cas de (3.39) et (3.40)) peuvent être utilisés pour prendre en compte l'existence de certaines formes de retards inhérents à des transferts de matières ou d'informations. Nous nous concentrons dans notre étude aux modèles T-S à retard en état qui constituent les modèles de base de notre contribution.

**Note importante :** Pour construire un modèle T-S à retard représentant exactement un système non linéaire à retard, dans un espace compact des variables d'état, nous suivons la même stratégie que dans les modèles T-S standards.

Dans la section suivante, nous présenterons les différents lemmes et propriétés qui sont utiles et importants pour développer des conditions de stabilité moins conservatives pour les modèles (T-S et T-S incertains) à retard.

### 3.8. Propriétés et lemmes utiles

**3.8.1. Lemme de Schur (Complément de Schur) :** Soit  $M(x)$  une matrice symétrique avec :

$$M(x) = M^T(x) = \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

où  $Q(x) \in \mathbb{R}^{n,n}$  et  $R(x) \in \mathbb{R}^{n,n}$  sont des matrices carrées et  $S(x) \in \mathbb{R}^{m,n}$  est une matrice quelconque.

Les inégalités suivantes sont équivalentes :

$$M(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R(x) < 0 \\ Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) < 0 \\ R(x) - S(x)^T Q^{-1}(x)S(x) < 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

Ensuite, le lemme de Finsler [122] est utilisé pour relâcher les conditions LMIs que nous allons proposer dans la suite de ce travail, en ajoutant des variables de décision qui permettent de découpler les matrices du système et celles de Lyapunov.

**3.8.2. Lemme de Finsler:** [122] Soit  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tel que  $\text{rank}(R) < n$ , les expressions suivantes sont équivalentes:

$$\xi^T Q \xi < 0, \quad \forall \xi \in \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi \neq 0, R\xi = 0\} \quad (3.43)$$

$$\exists X \in \mathbb{R}^{n \times m} : Q + XR + (XR)^T < 0 \quad (3.44)$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : Q - \lambda R^T R < 0 \quad \text{pour un scalaire } \lambda \quad (3.45)$$

**3.8.3. Lemme d'inégalité (Carré matriciel):** [134] Soient  $Q = Q^T$ ,  $X$ , et  $Y$  des matrices réelles de dimensions appropriées, et  $\delta(t)$  un vecteur satisfait  $\delta^T(t)\delta(t) \leq I$ . l'inégalité suivante est alors vérifiée:

$$Q + X^T \delta(t) Y + Y^T \delta^T(t) X \leq 0 \quad (3.46)$$

s'il existe un scalaire positif  $\lambda > 0$  tel que :

$$Q + X^T \lambda^{-1} X + Y^T \lambda Y \leq 0 \quad (3.47)$$

**3.8.4. Lemme de congruence :** Etant données les matrices  $P = P^T$  et  $Q$  est non singulière, l'expression suivante est toujours vérifiée:

$$P > 0, \Leftrightarrow QPQ^T > 0 \quad (3.48)$$

**3.8.5. Formule de Newton-Leibniz :** [73] Cette formule est largement utilisée dans la littérature pour transformer les termes retardés en une intégrale, et notamment, pour construire des critères de stabilité du retard-dépendant. Pour un retard constant. La formule de Newton-Leibniz est donnée comme suit :

$$x(t - \tau) = x(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s) ds \quad (3.49)$$

Si on suppose que le retard est variable, et satisfait les propriétés  $\tau(t) \in [0, \bar{\tau}]$  et  $\dot{\tau}(t) \leq \eta$  avec  $\eta$  constant positif. Alors la formule de Newton-Leibniz peut s'écrire de la manière suivante :

$$\eta x(t - \tau) = x(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s) ds \quad (3.50)$$

**3.8.6. Inégalité quadratique intégrale de Jensen** [6] : Pour toute matrice  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$   $M = M^T > 0$ , tous scalaires  $a, b$  tel que ,  $b > a$  et toute fonction vectorielle  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  alors l'expression suivante est vérifiée :

$$(b-a) \int_a^b (x^T(s) M x(s)) ds \geq \left( \int_a^b (x(s)) ds \right)^T M \left( \int_a^b (x(s)) ds \right) \quad (3.51)$$

Ensuite, l'inégalité suivante est dérivée de l'inégalité quadratique intégrale de Jensen. Il sera utilisé pour fournir une délimitation des termes croisés et pour améliorer le conservatisme.

**3.8.7. Inégalité quadratique intégrale** [12] : Pour toutes matrices constantes  $Q_{11} = Q_{11}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$

,  $Q_{22} = Q_{22}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Q_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisfaisant  $\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ * & Q_{22} \end{bmatrix} \geq 0$  et toute fonction scalaire  $\tau(t) \in [0 \ \bar{\tau}]$

, fonction vectorielle  $\dot{x}: [-\bar{\tau} \ 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de telle sorte que l'intégrale suivante soit définie, alors l'inégalité suivante est toujours vérifiée :

$$-\bar{\tau} \int_{t-\bar{\tau}}^t \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ * & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds \leq \theta^T(t) \begin{bmatrix} -Q_{22} & Q_{22} & -Q_{12}^T \\ Q_{22} & -Q_{22} & Q_{12}^T \\ -Q_{12} & Q_{12} & -Q_{11} \end{bmatrix} \theta(t) \quad (3.52)$$

avec

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau(t)) & \left( \int_{t-\tau(t)}^t x(s) ds \right)^T \end{bmatrix}^T$$

**3.8.8. Matrices de pondération libres (Free-Weighting Matrix FWM)** [7],[94]: La méthode des matrices de pondération libres joue un rôle important lors de l'analyse de la stabilité dépendante du retard et la synthèse des contrôleurs de diverses classes de systèmes à retard. Dans la littérature, cette méthode est basée soit sur la structure du modèle, soit sur la formule de Newton-Lepinez.

À partir de la formule Newton-Leibniz, les équations suivantes sont vraies pour toutes les matrices  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  de dimensions appropriées.

$$2 \left[ x^T(t) R_1 + \dot{x}^T(t) R_2 + x^T(t - \tau(t)) R_3 \right] \times \left[ x(t) - x(t - \tau(t)) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \right] = 0 \quad (3.53)$$

Les matrices  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  indiquent les relations entre les termes de la formule de Newton-Leibniz. Le côté gauche de cette équation est ajouté à la dérivée de la fonction LKF.

Le fait de choisir les matrices de pondération  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  libres dont leurs valeurs optimales peuvent être obtenues en résolvant un ensemble des LMIs, permet d'améliorer le conservatisme des conditions de stabilité LMIs par rapport à celles utilisant des matrices de pondération (décision) fixes.

D'autre part, puisque les deux côtés de l'équation du système (3.20) sont égaux, la FWM exprime ainsi les relations entre les termes de cette équation. Autrement dit, pour l'équation du système (3.20), l'équation suivante est vraie pour toutes matrices  $N_1$  et  $N_2$  de dimensions appropriées :

$$2 \left[ x^T(t)N_1 + \dot{x}^T(t)N_2 \right] \times \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(A_i + B_iK_j)x(t) - \dot{x}(t) \right] = 0 \quad (3.54)$$

### 3.9. Modèles flous de Takagi-Sugeno à retard

**3.9.1. Préliminaires et position du problème :** Dans ce travail, nous considérons le problème de la synthèse du contrôleur PDC pour les modèles T-S à retard variable. Dans ce contexte, le contrôleur considéré comprend, à la fois, des gains de retours d'état sans mémoire et retardés pour stabiliser un modèle T-S à retard variable. Par conséquent, l'une des améliorations proposées dans la présente étude consiste en un choix approprié d'une fonction LKF. En effet, la fonction LKF permet d'exploiter l'information sur les retards et sur leurs dérivées afin d'obtenir des conditions de stabilité.

Pour améliorer le conservatisme, la fonction LKF considérée est basée sur une extension d'un vecteur d'état étendu. De plus, en suivant les travaux effectués dans [35], [37] et [38] et afin de donner plus de degré de liberté au problème d'optimisation convexe, les matrices de pondération libres sont introduites dans les conditions LMIs.

Dans notre travail, nous adoptons le modèle T-S à retard variable en état donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + A_i^d x(t - \tau(t)) + B_i u(t)) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\bar{\tau}, 0], \quad i \in \mathcal{I}_r \end{cases} \quad (3.55)$$

où  $z(t) = [z_1(t) \quad \dots \quad z_p(t)] \in \mathbb{R}^p$  représente le vecteur des variables de prémisses qui peut dépendre du vecteur d'état  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées,  $h_i(z(t))$  sont des

fonctions d'activation avec des propriétés de sommes convexes, c'est à dire  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$ , avec  $h_i(z(t)) > 0$ . Le retard  $\tau(t)$  est supposé être une fonction continue vérifiant:

$$0 < \tau(t) \leq \bar{\tau} < \infty \quad \dot{\tau}(t) \leq \eta < \infty \quad (3.56)$$

où  $\bar{\tau}$  et  $\eta$  sont des constantes réelles. Le vecteur des conditions initiales du système (3.55) est donné par :

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\bar{\tau}, 0] \quad (3.57)$$

Il est supposé que le côté droit de l'équation (3.55) est continu et satisfait les conditions suffisantes d'existence et d'unicité de la solution pour toute condition initiale  $\phi(t)$ . Les matrices,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_i^d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont des matrices réelles constantes.

Dans ce chapitre, nous considérons le problème de la stabilisation des modèles T-S à retard variable (3.55). Dans ce contexte, nous proposons une nouvelle loi de commande PDC qui comprend à la fois les gains de retour d'état sans mémoire et ceux retardés comme suit [23]:

$$u(t) = u_d(t) + u_m(t) \quad (3.58)$$

avec

$$u_d(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t) \quad (3.59)$$

et

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i^d x(t - \tau(t)) \quad (3.60)$$

où  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $K_i^d \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , pour tout  $i \in \mathcal{Z}_r$ , sont les vecteurs de gains du contrôleur PDC à concevoir de telle sorte que le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable.

Notons que cette loi de commande doit satisfaire l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 3.1:** Lorsque ce n'est pas explicitement indiqué, on suppose que le retard variable dans le temps  $\tau(t)$  est disponible en ligne à chaque instant  $t$ .



**Remarque 3.3 :** Notons qu'en raison de la présence de l'état retardé dans la loi de commande PDC (3.58), sa mise en œuvre nécessite l'hypothèse 3.1. Cela peut être considéré comme une forte hypothèse puisqu'il est difficile de la garantir dans certaines applications pratiques. Cependant, la loi de commande (3.58) est considérée comme une loi générale pour obtenir de nouvelles conditions relâchées de synthèse du contrôleur PDC qui seront développées dans la suite de ce manuscrit.

Malgré cette forte hypothèse, on verra par la suite que compte tenu du retard de l'état dans la loi de commande PDC (3.58), une réduction significative du conservatisme des conditions LMIs sera obtenue (voir le théorème 3.5), particulièrement pour des valeurs du taux de variation du retard supérieur à 1 ( $\eta \geq 1$ ). En revanche, dans certaines applications pratiques où l'hypothèse 1 ne peut pas être satisfaite, on peut faire valoir que certaines simplifications directes des conditions LMIs proposées peuvent être considérée pour les adapter à ces applications : Par exemple en annulant les gains de retour d'état retardés ( $K_i^d = 0$ ), ou en supposant la variation du retard constante ( $\eta = 0$ ). Dans ce dernier cas, la loi de commande (3.58) est équivalente à celle considérée dans [10]. Ces différentes simplifications du théorème 3.5 seront résumées en trois corollaires.

Dans la suite, les notations suivantes seront utilisées pour simplifier le développement des conditions de stabilité.

**Notations 3.1:** Soient les matrices  $M_i$ ,  $M_{ij}$  et  $N_i$  de dimensions appropriées, on considère les notations suivantes :

- $M_h = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))M_i$  et  $M_{hh} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))M_{ij}$
- L'indice  $\bar{h}$  est utilisé pour désigner le produit des quantités appartenant à la même structure de sommation c'est à dire  $M_{\bar{h}}N_{\bar{h}} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))M_iN_i$
- $\mathcal{H}_e(M) = M + M^T$

où  $h_i(z(t))$ ,  $i \in \mathcal{I}_r$  est le degré d'activation des variables de prémisse  $z(t)$ .

Dans ce qui va suivre, nous allons apporter une contribution basée sur les lemmes décrits dans la section (§ 3.8).

**3.9.2. Contribution apportée:** Dans cette partie, il s'agit de concevoir des contrôleurs PDC de la forme (3.58), où la dynamique en boucle fermée peut être écrite sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_h + B_h K_h) x(t) + (A_h^d + B_h K_h^d) x(t - \tau(t)) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\bar{\tau}, 0] \end{cases} \quad (3.61)$$

Ainsi, le but est de proposer de nouvelles conditions relâchées sous forme de contraintes LMIs permettant de synthétiser à la foi les gains  $K_i$  et  $K_i^d$  du contrôleur PDC telles que la dynamique en boucle fermée (3.61) soit globalement asymptotiquement stable. Pour atteindre cet objectif, on considère la fonction étendue LKF suivante [46],[12]:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) \quad (3.62)$$

avec

$$V_1(t) = \theta_1^T(t) M \theta_1(t) \quad (3.63)$$

$$V_2(t) = \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s) S x(s) ds \quad (3.64)$$

$$V_3(t) = \int_{-\bar{\tau}}^t \int_{t+s}^t \theta_2^T(s) N \theta_2(s) ds dt \quad (3.65)$$

et les vecteurs étendus  $\theta_1(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_{t-\tau(t)}^t x(s) ds \end{bmatrix}$  et  $\theta_2(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$ , ainsi que

$M = M^T = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ * & M_{12}^T \end{bmatrix}$  et  $N = N^T = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ * & N_{12}^T \end{bmatrix}$  de dimensions appropriées.

**Remarques 3.4 :** Notons que le choix de la fonction LKF candidate étendue en ce qui concerne la classe considérée des modèles T-S à retard variable est justifiée par la réduction du conservatisme, car elle permet l'introduction de variables de décision supplémentaires ( $M_{12}, M_{22}, N_{12}$  et  $N_{22}$ ) par rapport aux résultats précédent qui considèrent une fonction LKF standard. Par exemple, dans [13], la fonction LKF considérée est un cas particulier de (3.62) avec

$M_{12} = 0$ ,  $M_{22} = 0$ ,  $N_{12} = 0$  et  $N_{22} = 0$ . Cela implique que cette fonction est plus générale et on peut s'attendre à des résultats moins conservatifs (voir le théorème 3.5). Cette amélioration du conservatisme des LMIs sera illustrée par un exemple numérique à la fin de ce chapitre.

D'abord, nous allons proposer dans le théorème suivant un résultat général lié à la fonction candidate LKF (3.62) qui est valable quel que soit l'analyse de stabilité ou de stabilisation, sans incertitude ou avec incertitudes. Il sera utile pour simplifier la démonstration des théorèmes que nous allons aborder par la suite.

**Théorème 3.4 :** Pour des scalaires donnés  $\bar{\tau} > 0$  et  $\eta \geq 0$  tel que  $\tau(t) \in [0, \bar{\tau}]$  avec  $\dot{\tau}(t) \leq \eta$ , la fonction candidate LKF (3.62) est positive et diminue de façon monotone si  $\forall x(t) \neq 0$  les conditions suivantes sont vérifiées :

$$S = S^T > 0 \quad (3.66)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ * & M_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.67)$$

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ * & N_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.68)$$

$$\zeta^T(t) \Theta \zeta(t) < 0 \quad (3.69)$$

avec

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} x(t)^T & x(t - \tau(t))^T & \left( \int_{t-\tau(t)}^t x(s) ds \right)^T & \dot{x}(t)^T \end{bmatrix}^T \quad (3.70)$$

et

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_e(M_{12}) + \bar{\tau}^2 N_{11} - N_{22} + S & -(1-\eta)M_{12} + N_{22} & M_{22} - N_{12}^T & M_{11} + \bar{\tau}^2 N_{12} \\ * & -(1-\eta)S - N_{22} & -(1-\eta)M_{22} + N_{12}^T & 0 \\ * & * & -N_{11} & M_{12}^T \\ * & * & * & \bar{\tau}^2 N_{22} \end{bmatrix}$$

**Démonstration :**  $\forall x(t) \neq 0$ , la fonction LKF (3.62) est évidemment positive si :

$$S = S^T > 0 \quad (3.71)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ * & M_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.72)$$

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ * & N_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.73)$$

de plus, (3.62) décroît de façon monotone si :

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) < 0 \quad (3.74)$$

Calculons d'abord la dérivée de  $V_1(t)$  soit  $\dot{V}_1(t)$ , à partir de (3.63)

$$\dot{V}_1(t) = 2\theta_1^T(t) \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ * & M_{12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \frac{d}{dt} \int_{t-\tau(t)}^t x(s) ds \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

avec

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{t-\tau(t)}^t x(s) ds \right) = x(t) - (1 - \dot{\tau}(t)) x(t - \tau(t))$$

L'équation (3.75) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= 2x^T(t)M_{11}\dot{x}(t) + 2\left(\int_{t-\tau(t)}^t x(s)ds\right)^T M_{12}^T\dot{x}(t) + 2x^T(t)M_{12}x(t) \\ &\quad - 2(1 - \dot{\tau}(t))x^T(t)M_{12}x(t - \tau(t)) - 2(1 - \dot{\tau}(t))\left(\int_{t-\tau(t)}^t x(s)ds\right)^T M_{22}x(t - \tau(t)) \\ &\quad + \left(\int_{t-\tau(t)}^t x(s)ds\right)^T M_{22}x(t) \end{aligned} \quad (3.76)$$

L'égalité (3.76) peut être réécrite sous la forme :

$$\dot{V}_1(t) = \zeta^T(t)\Omega\zeta(t) \quad (3.77)$$

avec

$$\Omega = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_e(M_{12}) & -(1 - \dot{\tau}(t))M_{12} & M_{22} & M_{11} \\ * & 0 & -(1 - \dot{\tau}(t))M_{22} & 0 \\ * & * & 0 & M_{12}^T \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Par ailleurs, la dérivée temporelle du second terme de  $V(t)$ , soit  $\dot{V}_2(t)$ , est donnée par :

$$\dot{V}_2(t) = 2x^T(t)Sx(t) - (1 - \dot{\tau}(t))(t - \tau(t))^T Sx(t - \tau(t)) \quad (3.79)$$

où encore

$$\dot{V}_2(t) = \zeta^T(t)\psi\zeta(t) \quad (3.80)$$

avec  $\zeta(t)$  défini par (3.70) et

$$S = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - \dot{\tau}(t))S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De même, la dérivée temporelle du troisième terme de  $V(t)$ , soit  $\dot{V}_3(t)$  est donnée par :

$$\dot{V}_3(t) = \bar{\tau}^2 \theta_2^T(t)N\theta_2(t) - \bar{\tau} \int_{t-\bar{\tau}}^t \theta_2^T(s)N\theta_2(s)ds \quad (3.81)$$

En appliquant la propriété de l'inégalité quadratique intégrale, défini dans la section (§ 3.8.7), sur le second terme de droite de (3.81), on obtient :

$$\dot{V}_3(t) = \bar{\tau}^2 \theta_2^T(t)N\theta_2(t) + \theta^T(t)\tilde{N}\theta(t) \quad (3.82)$$

avec

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} -N_{22} & N_{22} & -N_{12}^T \\ N_{22} & -N_{22} & N_{12}^T \\ -N_{12} & N_{12} & -N_{11} \end{bmatrix}$$

et  $\theta(t)$  défini par (3.52).

l'inégalité (3.82) est autrement exprimée comme suit :

$$\dot{V}_3(t) = \zeta^T(t)\phi\zeta(t) \quad (3.83)$$

avec  $\zeta(t)$  défini par (3.70) et

$$\phi = \begin{bmatrix} \bar{\tau}^2 N_{11} - N_{22} & N_{22} & -N_{12}^T & \bar{\tau}^2 N_{12} \\ * & -N_{22} & N_{12}^T & 0 \\ * & * & -N_{11} & 0 \\ * & * & * & \bar{\tau}^2 N_{22} \end{bmatrix}$$

En substituant les inégalités (3.77), (3.80) et (3.83) dans l'expression de la dérivée de la fonction LKF (3.74) et en considérant l'hypothèse sur la borne maximale de la dérivée  $\dot{\tau}(t)$  du retard  $\tau(t)$ , c'est à dire  $\dot{\tau}(t) \leq \eta < \infty$ , nous obtenons finalement l'inégalité suivante :

$$\zeta^T(t) \Theta \zeta(t) < 0 \quad (3.84)$$

avec  $\zeta(t)$  défini par (3.70) et

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_e(M_{12}) + \bar{\tau}^2 N_{11} - N_{22} + S & -(1-\eta)M_{12} + N_{22} & M_{22} - N_{12}^T & M_{11} + \bar{\tau}^2 N_{12} \\ * & -(1-\eta)S - N_{22} & -(1-\eta)M_{22} + N_{12}^T & 0 \\ * & * & -N_{11} & M_{12}^T \\ * & * & * & \bar{\tau}^2 N_{22} \end{bmatrix}$$

alors l'inégalité (3.74) est vérifiée et par conséquent la fonction candidate LKF (3.62) est positive et diminue de façon monotone.

Notre contribution est résumée par le théorème suivant qui fournit les conditions suffisantes pour la stabilisation des modèles T-S en boucle fermée à retard variable défini dans (3.61).

**Théorème 3.5 :** Soit  $(i, j) \in \mathcal{I}_r^2$ , pour des scalaires donnés  $\bar{\tau} > 0$  et  $\eta \geq 0$  tel que  $\tau(t) \in [0 \ \bar{\tau}]$  avec  $\dot{\tau}(t) \leq \eta$ , le modèle T-S à retard variable (3.55) est globalement asymptotiquement stabilisé par le contrôleur PDC (3.58) s'il existe des matrices réelles de dimensions appropriées  $L = L^T$ ,  $F_j, F_j^d$ ,  $X$ ,  $P_{11} = P_{11}^T$ ,  $P_{22} = P_{22}^T$ ,  $P_{12}$ ,  $Q_{11} = Q_{11}^T$ ,  $Q_{22} = Q_{22}^T$  et  $Q_{12}$ , et les scalaires  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3 > 0$  telles que les conditions suivantes soient vérifiées

$$\begin{cases} \Gamma_{ii} < 0, \forall i \in \mathcal{I}_r \\ \frac{2}{r-1} \Gamma_{ii} + \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} < 0, \forall (i, j) \in \mathcal{I}_r^2 \ i \neq j \end{cases} \quad (3.85)$$

$$L = L^T > 0 \quad (3.86)$$

$$P = P^T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ * & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.87)$$

$$Q = Q^T = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ * & Q_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.88)$$

avec

$$\Gamma_{ij} = \tilde{\Theta} + \mathcal{H}_e \left( \tilde{\mathcal{G}}_{ij} \right) \quad (3.89)$$

où

$$\tilde{\Theta} = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_{11} & \tilde{\Theta}_{12} & P_{22} - Q_{12}^T & P_{11} + \bar{\tau}^2 Q_{12} \\ * & \tilde{\Theta}_{22} & -(1-\eta)P_{22} + Q_{12}^T & 0 \\ * & * & -Q_{11} & P_{12}^T \\ * & * & * & \bar{\tau}^2 Q_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Theta}_{11} = L + P_{12} + P_{12}^T + \bar{\tau}^2 Q_{11} - Q_{22},$$

$$\tilde{\Theta}_{12} = -(1-\eta)P_{12} + Q_{22},$$

$$\tilde{\Theta}_{22} = -(1-\eta)L - Q_{22},$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i X + B_i F_j & A_i^d X + B_i F_j^d & 0 & -X \\ \varepsilon_1 (A_i X + B_i F_j) & \varepsilon_1 (A_i^d X + B_i F_j^d) & 0 & -\varepsilon_1 X \\ \varepsilon_2 (A_i X + B_i F_j) & \varepsilon_2 (A_i^d X + B_i F_j^d) & 0 & -\varepsilon_2 X \\ \varepsilon_3 (A_i X + B_i F_j) & \varepsilon_3 (A_i^d X + B_i F_j^d) & 0 & -\varepsilon_3 X \end{bmatrix},$$

Dans ce cas, les changements de variables  $K_j = F_j X^{-1}$  et  $K_j^d = F_j^d X^{-1}$  fournissent les gains du contrôleur PDC (3.58).

**Démonstration:** Nous réécrivons le modèle T-S en boucle fermée à retard (3.61) comme suit :

$$\mathcal{G}_{hh} \zeta(t) = 0 \quad (3.90)$$

avec  $\mathcal{G}_{hh} = \begin{bmatrix} A_h + B_h K_h & A_h^d + B_h K_h^d & 0 & -I \end{bmatrix}$  et  $\zeta(t)$  défini par (3.70).

en considérant la fonction candidate LKF (3.62) ainsi que les conditions LMIs exprimées dans le théorème 3.4, la fonction LKF est positive et monotone décroissante si les conditions LMIs (3.66), (3.67), (3.68) et (3.69) soient vérifiées. D'après (3.69) et (3.90), on peut appliquer le

lemme de Finsler (défini dans la section (§3.8.2)) et par conséquent le modèle T-S en boucle fermée à retard (3.61) est stable s'il existe une matrice  $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{4n \times n}$  telle que :

$$\Theta + \mathcal{H}_e(\mathcal{R}\mathcal{G}_{hh}) < 0 \quad (3.91)$$

Ensuite, nous posons

$$\mathcal{R}^T = \begin{bmatrix} X^{-1} & \varepsilon_1 X^{-1} & \varepsilon_2 X^{-1} & \varepsilon_3 X^{-1} \end{bmatrix}^T \quad (3.92)$$

où  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice inversible et  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  des scalaires arbitraires. De plus, on pose

$$D_X = \text{diag} \begin{bmatrix} X & X & X & X \end{bmatrix}^T \quad (3.93)$$

En multipliant la condition LMI (3.91) à gauche par la matrice  $D_X$  et à droite par  $D_X^T$ , et après allongement des matrices, on obtient :

$$\tilde{\Theta} + \mathcal{H}_e(\tilde{\mathcal{G}}_{hh}) < 0 \quad (3.94)$$

Avec

$$\tilde{\Theta} = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_{11} & \tilde{\Theta}_{12} & P_{22} - Q_{12}^T & P_{11} + \bar{\tau}^2 Q_{12} \\ * & \tilde{\Theta}_{22} & \tilde{\Theta}_{23} & 0 \\ * & * & -Q_{11} & P_{12}^T \\ * & * & * & \bar{\tau}^2 Q_{22} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Theta}_{11} = \mathcal{H}_e(P_{12}) + \bar{\tau}^2 Q_{11} - Q_{22} + L,$$

$$\tilde{\Theta}_{12} = -(1 - \bar{\tau}(t))P_{12} + Q_{22}$$

$$\tilde{\Theta}_{22} = -(1 - \eta)L - Q_{22},$$

$$\tilde{\Theta}_{23} = -(1 - \eta)P_{22} + Q_{12}^T,$$

et

$$\tilde{\mathcal{G}}_{hh} = \begin{bmatrix} A_h X + B_h F_h & A_h^d X + B_h F_h^d & 0 & -X \\ \varepsilon_1 (A_h X + B_h F_h) & \varepsilon_1 (A_h^d X + B_h F_h^d) & 0 & -\varepsilon_1 X \\ \varepsilon_2 (A_h X + B_h F_h) & \varepsilon_2 (A_h^d X + B_h F_h^d) & 0 & -\varepsilon_2 X \\ \varepsilon_3 (A_h X + B_h F_h) & \varepsilon_3 (A_h^d X + B_h F_h^d) & 0 & -\varepsilon_3 X \end{bmatrix},$$



Enfin, en appliquant le lemme de Tuan (défini dans la section (§3.5.2)) sur l'inégalité (3.94), et après avoir effectué les changements de variables,  $P_{11} = X^T M_{11} X$ ,  $P_{12} = X^T M_{12} X$ ,  $P_{22} = X^T M_{22} X$ ,  $Q_{11} = X^T N_{11} X$ ,  $Q_{12} = X^T N_{12} X$ ,  $Q_{22} = X^T N_{22} X$ ,  $L = X^T S X$ ,  $F_h = K_h X$  et  $F_h^d = K_h^d X$  on obtient les conditions exprimées dans le théorème 3.5.

- La négativité de la dérivée de la fonction LKF dépend des conditions LMIs définies par (3.66), (3.67), (3.68) et (3.69). Si ces conditions sont vérifiées, alors on peut dire que la dérivée de fonction LKF est définie négative. D'autre part, nous savons que la fonction LKF est définie positive. On peut conclure alors que le modèle T-S à retard variable (3.61) est globalement asymptotiquement stabilisé par un contrôleur PDC qui possède à la fois les gains retardés  $K_i^d$  et les gains sans mémoire  $K_i$ .
- Notons que, avec les changements de variables définis ci-dessus, si les LMIs (3.66), (3.67), et (3.68) sont vérifiées, alors que les LMIs (3.86), (3.87) et (3.88) le sont également.
- Finalement, notons que la régularité de la matrice  $X$  est garantie si les LMIs (3.88) et (3.89) sont vérifiées. En effet, les blocs matriciels (2,2) et (4,4) des LMIs (3.88) et (3.89) permettent de garantir que:

$$X + X^T > \frac{\bar{\tau}^2}{\varepsilon_3} Q_{22} > 0 \quad (3.95)$$

Ce qui conclut la démonstration.

### 3.9.3. Discussion des résultats:

- Rappelons que les conditions exprimées dans le théorème 3.5 sont des LMIs si les scalaires  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  sont préfixés. En effet, selon la preuve du théorème 3.5, ces scalaires peuvent être choisis arbitrairement, hormis, le paramètre  $\varepsilon_3$  qui doit être positif pour assurer la régularité de la matrice  $X$  (voir (3.95)). Néanmoins, ces scalaires permettent de fournir plus de degrés de liberté aux quatre blocs élémentaires en  $X$  de la matrice de décision  $\mathcal{R}$  qui provient de l'utilisation du lemme de Finsler. Ces scalaires de relaxation ont été largement utilisés dans des études récentes liés au modèle T-S, ils ont généralement conduit à de meilleurs résultats par rapport à ceux sans ces scalaires, voir par exemple les références [15] et [41]–[44]. Dans la pratique, ces scalaires sont généralement obtenus à partir d'une programmation linéaire pour

résoudre ce genre de conditions quasi-LMIs. En effet, l'utilisation de ces scalaires, nécessite un coût de calcul élevé pour résoudre les LMIs, mais ce problème reste mineur compte tenu de l'augmentation des performances des calculateurs et des solveurs.

- Le théorème 3.5 fournit de nouvelles conditions de stabilisation sous forme de contraintes LMIs pour la conception de contrôleurs PDC (3.58) stabilisant le modèle T-S à retard variable (3.61). Notons que ces conditions LMIs ont été obtenues sous l'hypothèse 3.1, c'est à dire, le retard variable dans le temps  $\tau(t)$  doit être disponible en ligne à chaque instant  $t$ . Comme nous l'avons indiqué dans la remarque 3.3, cette exigence sur  $\tau(t)$  peut être considéré comme un inconvénient, car il peut être difficile de le mesurer dans certaines applications pratiques.

Néanmoins, il est important de souligner que l'introduction d'un gain de retour d'état retardé ( $K_i^d \neq 0$ ) permet de réduire de manière significative le conservatisme, en particulier pour une vitesse de variation élevée ( $\eta > 1$ ) du retard  $\tau(t)$  (Comme nous le verrons dans l'exemple de simulation). En effet, il convient de souligner que la vitesse de variation du retard  $\eta$  se trouve dans certains blocs LMI de (3.89) sous forme d'un coefficient  $-(1-\eta)$  des variables de décision de la fonction LKF. Cependant, les gains de retour d'état retardés  $K_i^d$  se trouvent également en tant que variables de décision dans ces mêmes blocs LMI. En conséquence, l'annulation de ces gains retardés dans le théorème 3.5 ( $K_i^d = 0$ ) conduit à une limitation du degré de liberté pour les valeurs de la vitesses de variation  $\eta > 1$ . Comme nous le verrons dans la section suivante par un exemple numérique, la plupart des résultats précédents (voir à titre d'exemple [13],[12], où les gains retardés n'ont pas été pris en compte) montrent une limitation constante de la valeur maximale admissible de la borne supérieur du retard  $\tau(t)$  (en anglais Maximal Allowable Upper Bounds  $MAUB(\bar{\tau})$  pour  $\eta > 1$ ).

Tenant compte de ces remarques, dans certaines applications pratiques où l'hypothèse 3.1 ne peut pas être satisfaite, nous allons donner deux corollaires à partir de modifications simples sur les conditions LMIs en ce qui concerne la nature du retard :

- 1) Si le retard est constant ( $\eta = 0$ ), alors la mise en œuvre de la loi de commande (3.58) du théorème 3.5, y compris les gains retardés, n'exige pas l'hypothèse 3.1.

- 2) Comme nous avons mentionné ci-dessus, lorsque le retard n'est pas disponibles en ligne à chaque instant  $t$ , on peut alors annuler les gains retardés dans le théorème 3.5 ( $K_i^d = 0$ ), dans ce cas, l'hypothèse 3.1 n'est plus nécessaire, mais bien sûr, on perd le relâchement des LMIs surtout pour  $\eta > 1$ . Ce cas particulier du théorème 3.5 est résumé par le corollaire suivant.

**Corollaire 3.1 :** ("Lorsque l'hypothèse 3.1 n'est pas satisfaite avec  $\eta$  connu"). Soit  $(i, j) \in \mathcal{I}_r^2$ . Pour des scalaires donnés  $\bar{\tau} > 0$  et  $\eta \geq 0$  tel que  $\tau(t) \in [0 \ \bar{\tau}]$  avec  $\dot{\tau}(t) \leq \eta$ , le modèle T-S à retard variable (3.55) est globalement asymptotiquement stabilisé par le contrôleur PDC (3.58) sans mémoire, c'est à dire avec  $K_i^d = 0$ , s'il existe des matrices réelles de dimensions appropriées  $L = L^T$ ,  $F_j$ ,  $X$ ,  $P_{11} = P_{11}^T$ ,  $P_{22} = P_{22}^T$ ,  $P_{12}$ ,  $Q_{11} = Q_{11}^T$ ,  $Q_{22} = Q_{22}^T$  et  $Q_{12}$ , et les scalaires  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3 > 0$  telles que les conditions (3.85), (3.86), (3.87) et (3.88) soient vérifiées avec :

$$\Gamma_{ij} = \tilde{\Theta} + \mathcal{H}_e(\bar{\mathcal{G}}_{ij}) \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}_r^2 \quad (3.96)$$

où  $\tilde{\Theta}$  est défini dans le théorème 3.5 et :

$$\bar{\mathcal{G}}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i X + B_i F_j & A_i^d X & 0 & -X \\ \varepsilon_1 (A_i X + B_i F_j) & \varepsilon_1 A_i^d X & 0 & -\varepsilon_1 X \\ \varepsilon_2 (A_i X + B_i F_j) & \varepsilon_2 A_i^d X & 0 & -\varepsilon_2 X \\ \varepsilon_3 (A_i X + B_i F_j) & \varepsilon_3 A_i^d X & 0 & -\varepsilon_3 X \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, le changement de variables  $K_j = F_j X^{-1}$  fournit les gains du contrôleur PDC (3.58) (avec  $K_i^d = 0$ ).

**Démonstration:** D'après le théorème 3.5, en posant  $F_j^d = 0$ , la preuve du corollaire 3.1 est alors obtenue.

Un autre cas particulier considéré souvent dans la littérature est le cas où la vitesse de variation du retard est inconnue (c'est à dire  $\eta$  inconnu). Dans ce cas, après avoir effectué de simples modifications sur le théorème 3.5, on peut annoncer le corollaire suivant, mais bien sûr, avec une perte de conservatisme des LMIs.

**Corollaire 3.2 :** ("Lorsque l'hypothèse 3.1 est satisfaite avec  $\eta$  inconnu"). Soit  $(i, j) \in \mathcal{I}_r^2$ . Pour un scalaire donné  $\bar{\tau} > 0$  tel que  $\tau(t) \in [0, \bar{\tau}]$ , le modèle T-S à retard variable (3.55) est globalement asymptotiquement stabilisé par le contrôleur PDC (3.58), s'il existe des matrices réelles de dimensions appropriées  $F_j, F_j^d, X, P = P^T, Q_{11} = Q_{11}^T, Q_{22} = Q_{22}^T$  et  $Q_{12}$ , et les scalaires  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3 > 0$  telles que les conditions, (3.85), (3.87) et (3.88) soient vérifiées avec :

$$\Gamma_{ij} = \bar{\Theta} + \mathcal{H}_e(\tilde{\mathcal{G}}_{ij}) \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}_r^2 \quad (3.97)$$

où  $\tilde{\mathcal{G}}_{ij}$  est défini dans le théorème 3.5 et :

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} \bar{\tau}^2 Q_{11} - Q_{22} & Q_{22} & -Q_{12}^T & P + \bar{\tau}^2 Q_{12} \\ * & -Q_{22} & Q_{12}^T & 0 \\ * & * & -Q_{11} & P_{12}^T \\ * & * & * & \bar{\tau}^2 Q_{22} \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, les changements de variables  $K_j = F_j X^{-1}$  et  $K_j^d = F_j^d X^{-1}$  fournissent les gains du contrôleur PDC (3.58).

**Démonstration:** D'après les conditions exprimées dans le théorème 3.5, en posant  $P_{12} = 0, P_{22} = 0, L = 0$  et  $P_{11} = P$ , on peut alors conclure que la fonction LKF suivante est un cas particulier:

$$V(t) = x^T(t) M x(t) + V_3(t) \quad (3.98)$$

avec  $V_3(t)$  défini en (3.65).

La preuve de ce corollaire est alors obtenue en posant  $M = X^{-T} P X^{-1}$ ,  $N_{11} = X^{-T} Q_{11} X^{-1}$ ,  $N_{12} = X^{-T} Q_{12} X^{-1}$  et  $N_{22} = X^{-T} Q_{22} X^{-1}$ .

Enfin, lorsque  $\eta$  est inconnu et que le retard variant dans le temps  $\tau(t)$  n'est pas disponible en ligne à chaque instant  $t$ , alors un cas particulier du théorème 3.5 est résumé par le corollaire suivant.

**Corollaire 3.3 :** ("Lorsque l'hypothèse 3.1 n'est pas satisfaite avec  $\eta$  inconnu"). Soit  $(i, j) \in \mathcal{I}_r^2$ . Pour un scalaire donné  $\bar{\tau} > 0$  tel que  $\tau(t) \in [0, \bar{\tau}]$ , le modèle T-S à retard variable (3.55) est globalement asymptotiquement stabilisé par le contrôleur PDC (3.58), s'il existe des matrices réelles de dimensions appropriées  $F_j, X, P = P^T, Q_{11} = Q_{11}^T, Q_{22} = Q_{22}^T$  et  $Q_{12}$ , et les scalaires  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3 > 0$  tels que les conditions, (3.85), (3.87) et (3.88) soient vérifiées avec :

$$\Gamma_{ij} = \bar{\Theta} + \mathcal{H}_e(\bar{\mathcal{G}}_{ij}) \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}_r^2 \quad (3.99)$$

où  $\bar{\mathcal{G}}_{ij}$  et  $\bar{\Theta}$  sont définis dans le corollaire 3.1 et 3.2 respectivement. Dans ce cas, le changement de variables  $K_j = F_j X^{-1}$  fourni les gains du contrôleur PDC (3.58) (avec  $K_i^d = 0$ ).

**Démonstration:** D'après le corollaire 3.2, en posant  $F_j^d = 0$ , la preuve du corollaire 3.3 est alors obtenue.

Pour conclure cette discussion, notons qu'il existe plusieurs travaux qui se rapportent au problème de stabilisation des modèles T-S avec un retard variable. Néanmoins, les preuves de ces travaux ne suivent pas un chemin similaire. De ce fait, il est impossible de fournir une démonstration formelle de l'inclusion pour chacun d'entre eux. Toutefois, nous soulignons que le théorème 3.5 inclut notre résultat préliminaire [20] et ceux de [12] comme des cas particuliers. En effet, à partir du théorème 3.5, on peut déduire les conditions exprimées dans [20] en annulant tous les termes en facteurs des paramètres  $\varepsilon_2$  dans l'équation (3.89) (c'est à dire  $\varepsilon_2 = 0$ ). En outre, à partir des conditions énoncées dans [20], le résultat proposé dans le corollaire 2 de [12] peut être déduit en annulant les gains de retour d'état retardés (à savoir en posant  $K_i^d = 0$ ). Cela confirme que les conditions exprimées dans le théorème 3.5 sont moins conservatives que celles proposées dans les études précédentes. Cette amélioration du conservatisme sera illustrée dans la section suivante où une comparaison avec plusieurs résultats ultérieurs sera donnée au travers un exemple numérique concret.

### 3.10. Exemple illustratif et résultats de simulation

Dans cette section, il s'agit d'illustrer l'efficacité des conditions LMIs proposées au théorème 3.5 ainsi que l'intérêt du choix de la loi de commande PDC (3.58) qui contient les gains de retour d'état retardé et ceux sans mémoire.

Dans ce cadre, considérons la stabilisation du modèle T-S à retard variable dans l'état (3.55) avec deux règles ( $r = 2$ ) défini par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i \left( A_i x(t) + A_i^d x(t - \tau(t)) + B_i u(t) \right) \quad (3.100)$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_1^d = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.9 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_2^d = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 1 & 1.6 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

où les fonctions d'appartenance convexes sont données par :

$$h_1(x_1(t)) = \frac{1}{(1 + \exp(-2(x_1(t) - \pi)))} \text{ et } h_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t)) \quad (3.101)$$

Notons que cet exemple a été considéré par plusieurs études précédentes afin de comparer les résultats (voir par exemple les références citées dans le tableau 3.1), où la relaxation joue un rôle vital lors de la résolution des contraintes LMIs.

Nous illustrons d'abord l'amélioration du conservatisme proposée au théorème 3.5 par rapport à certaines études précédentes, en ce qui concerne le domaine de faisabilité de leurs conditions LMIs respectives.

la figure 3.8 illustre les champs de faisabilité obtenus par le théorème 3.5, du théorème 3 dans [13] (en négligeant les incertitudes) et du corollaire 2 dans [12], pour  $\eta \in [0 \ 3]$  et  $\bar{\tau} \in [0 \ 2.5]$ . Comme prévu, le théorème 3.5 fournit le plus large champ de faisabilité.

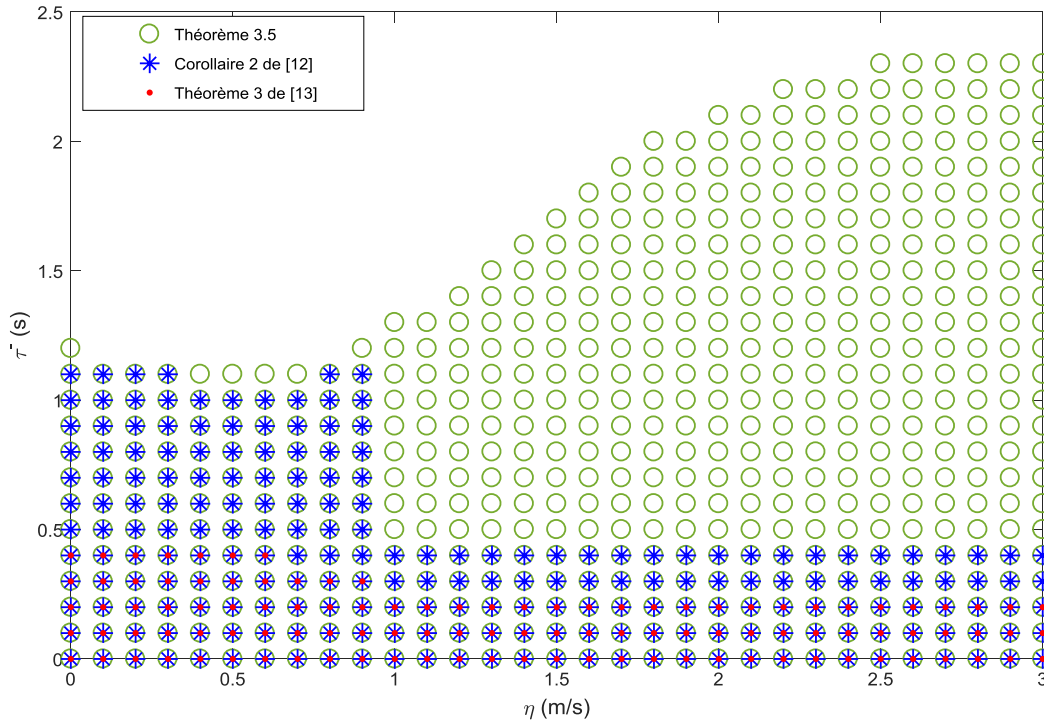


Fig.3.8. Champ de faisabilité du théorème 3.5, théorème 3 de [13] et corollaire 2 de [12]

**Remarque 3.5 :** D'après la figure 3.8, on observe une bonne amélioration en termes de conservatisme du théorème 3.5 par rapport aux résultats de [13] et [12], en particulier lorsque  $\eta \geq 1$ . Comme on l'a souligné précédemment, cette amélioration majeure du conservatisme est due aux gains de retour d'état retardés  $K_i^d \neq 0$ .

Pour mettre en évidence l'effet de la présence du gain retardé  $K_i^d \neq 0$  sur l'amélioration du conservatisme, nous considérons le cas particulier du théorème 3.5, où les gains retardés  $K_i^d$  sont nuls ( $K_i^d = 0$ , corollaire 3.1).

La figure 3.9 montre les champs de faisabilité du corollaire 3.1 et du corollaire 2 de [12] pour  $\eta \in [0 \ 1.5]$  et  $\bar{\tau} \in [0 \ 1.4]$ .

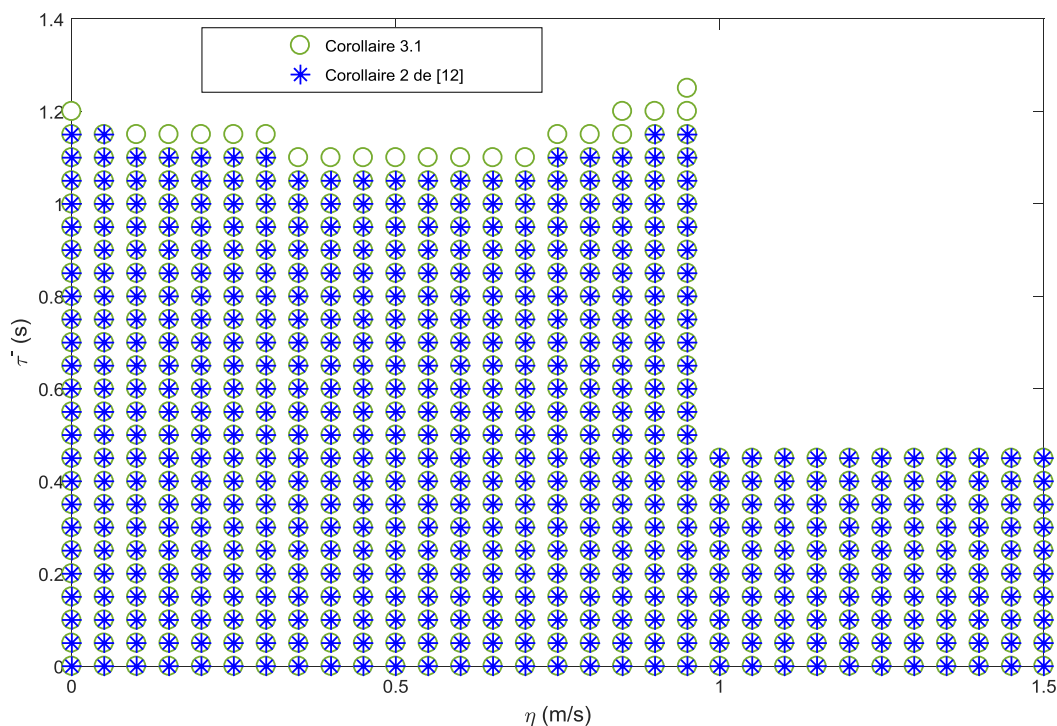


Fig.3.9. Champ de faisabilité du corollaire 3.1 et corollaire 2 de [12]

A partir de cette figure, pour  $\eta < 1$ , on observe une petite amélioration du conservatisme par rapport au corollaire 2 de [12], et pour  $\eta \geq 1$  le champ de faisabilité est le même pour les deux corollaires (résultats similaires). Cela nous confirme que la présence des gains de retour d'état retardés, c'est à dire lorsque l'on considère les conditions exprimées dans le théorème 3.5, nous permet d'améliorer de manière significative le conservatisme pour une vitesse de variation du retard élevée ( $\eta \geq 1$ ).

Une autre façon de comparer le résultat du théorème 3.5 est l'estimation de la valeur  $MAUB(\bar{\tau})$ . Le tableau 3.1 présente la valeur  $MAUB(\bar{\tau})$  obtenue par plusieurs études précédentes et par le théorème 3.5 et ces corollaires (corollaire 3.1  $K_i^d = 0$  avec  $\eta$  connu, corollaire 3.2  $K_i^d \neq 0$  avec  $\eta$  inconnu et corollaire 3.3  $K_i^d = 0$  avec  $\eta$  inconnu). Le symbole "-" signifie que le résultat est non disponible pour l'étude concernée et "m" indique le nombre de partitions du retard pris en compte dans [14] et [16].



<b>Résultats considérés</b>	$\eta = 0$	$\eta = 0.6$	$\eta \geq 1$	$\eta$ inconnu
Corollaire 2 dans [90]	0.257	-	-	-
Théorème 3 dans [90]	0.266	-	-	-
Théorème 2 dans [84]	0.295	-	-	-
Théorème 3 dans [13]	0.496	0.406	0.207	0.232
Théorème 3 dans [41]	0.842	-	-	-
Corollaire 2 dans [12]	1.216	1.095	0.479	0.420
Corollaire 2 dans [46]	1.095	-	-	-
Théorème 2 dans [115]	1.139	-	-	-
Théorème 4 ( $m = 3$ ) dans [14]	1.148	-	-	-
Théorème 2 ( $m = 3$ ) dans [16]	-	-	1.432	-
Théorème 1 dans [20]	1.217	1.101	2.231	1.012
<b>Corollaire 3.1</b>	<b>1.217</b>	<b>1.115</b>	<b>0.481</b>	-
<b>Corollaire 3.2</b>	-	-	-	<b>1.019</b>
<b>Corollaire 3.3</b>	-	-	-	<b>0.423</b>
<b>Théorème 3.5</b>	<b>1.217</b>	<b>1.115</b>	<b>2.388</b>	-

Tableau 3.1 : Comparaison de  $MAUB(\bar{\tau})$  pour différentes valeurs de  $\eta$ .

- De ce tableau, on peut noter que les résultats obtenus à partir du théorème 3.5 sont plus performants que tous les autres résultats obtenus lorsque  $\eta$  est connu.
- Lorsque l'hypothèse 3.1 ne peut être satisfaite, le corollaire 3.1 ( $K_i^d = 0$  et  $\eta$  connu) donne de meilleurs résultats, sauf pour  $\eta \geq 1$  où on trouve de meilleurs résultats dans la référence [16] car cette étude considère l'approche de retard partitionné.
- Lorsque l'hypothèse 3.1 est satisfaite et  $\eta$  inconnu, le corollaire 3.2 donne de meilleurs résultats que les résultats de [12], [13] et [20].
- Enfin, lorsque l'hypothèse 3.1 n'est pas satisfaite et  $\eta$  est inconnu, le résultat du corollaire 3.3 reste meilleur que ceux de [12] et [13] phrase supprimée. Ceci confirme l'amélioration du conservatisme fournie par les nouvelles conditions LMIs proposées dans le théorème 3.5 et ses corollaires, y compris nos récents résultats dans [20].

Notons que, dans le tableau 3.1, la valeur  $MAUB(\bar{\tau}) = 0.481s$  obtenue à partir du corollaire 3.1 et la valeur  $MAUB(\bar{\tau}) = 2.388s$  obtenue à partir du théorème 3.5 ont été obtenues avec une vitesse de variation  $\eta = 3$ . Par ailleurs, afin d'éviter au lecteur un grand temps de recherche pour obtenir les résultats indiqués dans le tableau 3.1, les valeurs considérées de  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

et  $\varepsilon_3$  sont données dans le tableau 3.2 pour le théorème 3.5, les corollaires 3.1, 3.2 et 3.3 par rapport aux valeurs considérées de  $\eta$ .

Résultats considérés	$\eta$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$
Corollaire 3.1	0	0.3	0.01	1.99
Corollaire 3.1	0.6	0.2	-0.3	1.36
Corollaire 3.1	3	0.01	-0.6	10
Corollaire 3.2	-	0.4	-0.001	1.9
Corollaire 3.3	-	0.05	-0.1	1.1
Théorème 3.5	0	0.3	0.01	1.99
Théorème 3.5	0.6	0.2	-0.3	1.36
Théorème 3.5	3	0.01	-0.6	10

Tableau 3.2 : Valeurs de  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  obtenus pour les résultats donnés dans le tableau 3.1

Les simulations du système en boucle fermée sont présentées pour les conditions initiales  $x(0) = [2 \ 1]^T$ ,  $x(t) = \phi(t)$  et  $\forall t \in [-\bar{\tau}, 0]$ ,  $\phi(t) = x(0)$  pour les deux cas suivants:

**Cas1 :** Avec un retard constant  $\tau = 1.217s$  ( $\eta = 0$ ), les figures 3.10 et 3.11 montrent respectivement l'évolution temporelle du vecteur d'état  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$  ainsi que celle du signal de commande  $u(t)$ .

Dans ce cas, le contrôleur PDC (3.58) a été synthétisé à l'aide des conditions LMIs proposées dans le théorème 3.5. La résolution de celles-ci est réalisée à l'aide de la boîte à outils *LMI Toolbox de Matlab* [131] et conduit aux résultats suivants:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 22.014 & -65.579 \\ 21.058 & -64.480 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K_1^d \\ K_2^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.107 & -2.159 \\ -1.210 & -2.088 \end{bmatrix}, \\ X &= \begin{bmatrix} 15.0330 & 4.6134 \\ 5.4035 & 1.8377 \end{bmatrix}, P_{11} = \begin{bmatrix} 51.6718 & 38.7162 \\ 38.7162 & 34.5608 \end{bmatrix}, P_{12} = \begin{bmatrix} -4.4525 & -3.3706 \\ -1.8514 & -1.4592 \end{bmatrix}, \\ P_{22} &= \begin{bmatrix} 3.7445 & 2.5934 \\ 2.5934 & 2.2805 \end{bmatrix}, Q_{11} = \begin{bmatrix} 10.7547 & 10.3187 \\ 10.3187 & 9.9953 \end{bmatrix}, Q_{12} = \begin{bmatrix} -0.5793 & 0.1985 \\ -0.9999 & 0.0852 \end{bmatrix} \\ Q_{22} &= \begin{bmatrix} 12.7627 & 3.1915 \\ 3.1915 & 0.9005 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 21.5999 & 15.2675 \\ 15.2675 & 12.3825 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

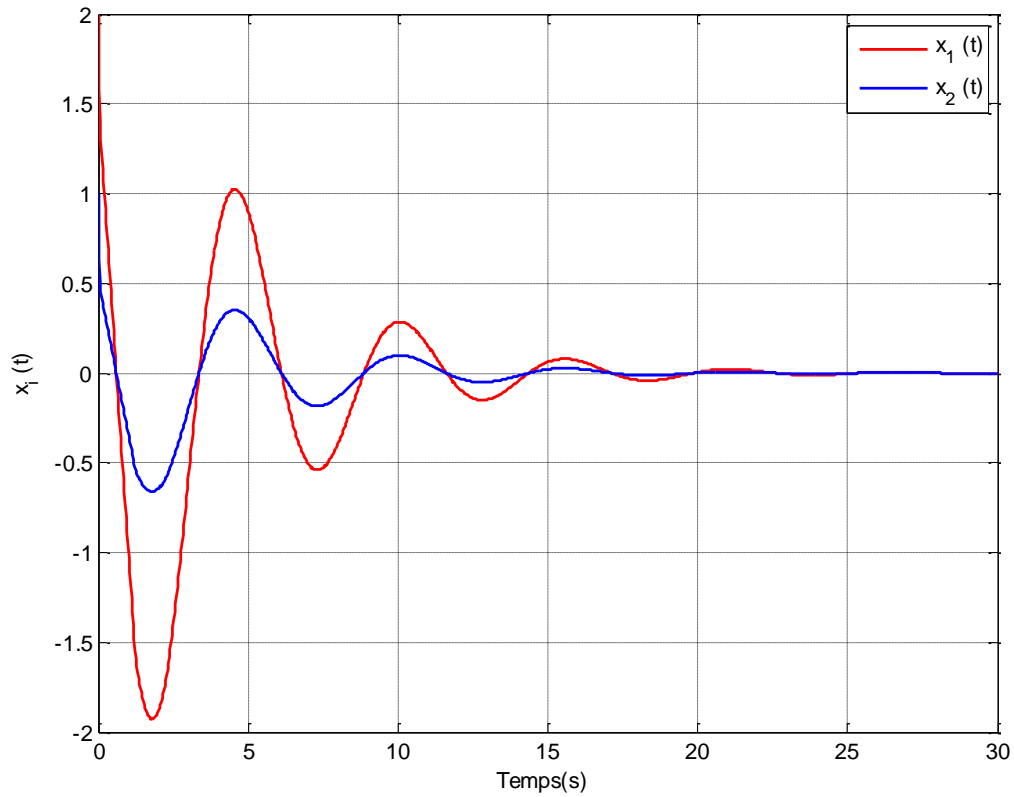


Fig. 3.10. Réponses temporelles du système (3.100) avec un retard constant  $\eta = 0$

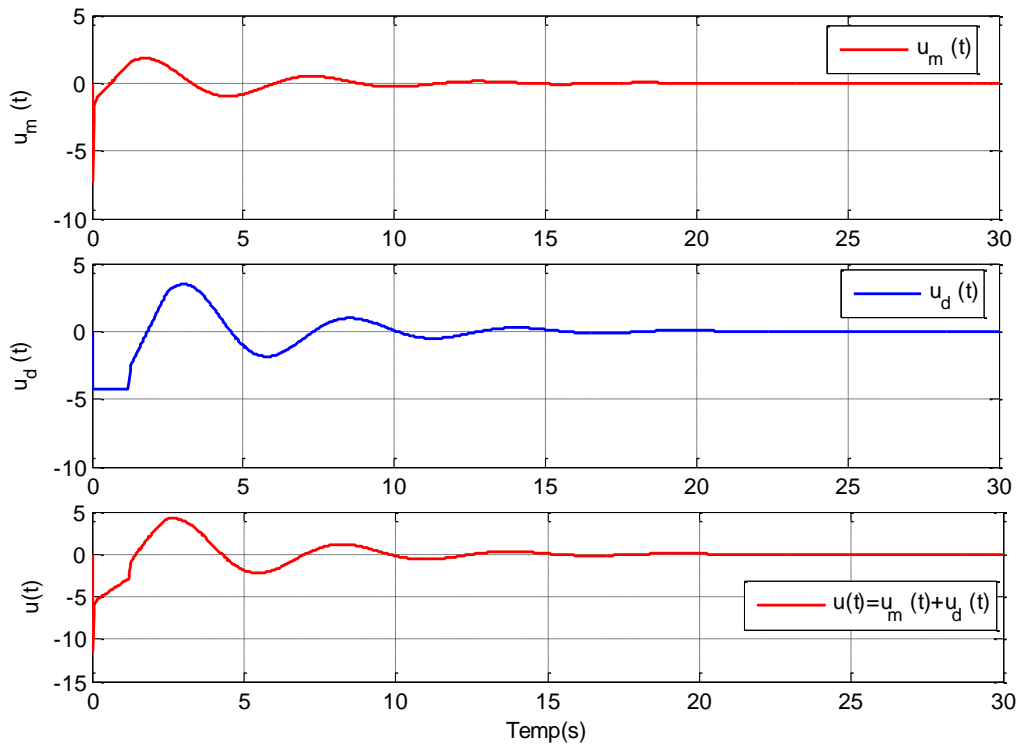


Fig. 3.11. Signal de commande

**Cas2 :** Avec un retard variable  $\tau(t) = \frac{\bar{\tau}}{2} \left( 1 + \sin\left(\frac{2\eta}{\bar{\tau}} t\right) \right)$ ,  $\bar{\tau} = 2.388s$  et  $\eta = 3$ , les figures 3.12, 3.13 et 3.14 montrent respectivement l'évolution temporelle du vecteur d'état  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ , du signal de commande  $u(t)$  ainsi que le retard variable  $\tau(t)$ .

Comme nous l'avons fait précédemment, nous allons synthétiser le contrôleur PDC (3.58) en résolvant les LMIs, proposées dans le théorème 3.5 en utilisant l'outil *LMI Toolbox de Matlab*, nous aurons alors les résultats suivants :

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.088 & -23.713 \\ 2.088 & -22.649 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K_1^d \\ K_2^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.043 & -1.912 \\ -1.051 & -1.591 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 82.5101 & 11.2700 \\ 11.2606 & 1.5473 \end{bmatrix}, P_{11} = \begin{bmatrix} 267.4774 & 38.5334 \\ 38.5334 & 7.2598 \end{bmatrix}, P_{12} = \begin{bmatrix} -69.9201 & -9.5372 \\ -9.5842 & -1.3472 \end{bmatrix},$$

$$P_{22} = \begin{bmatrix} 18.4293 & 2.5079 \\ 2.5079 & 0.3449 \end{bmatrix}, Q_{11} = \begin{bmatrix} 39.7750 & 5.4661 \\ 5.4661 & 0.8026 \end{bmatrix}, Q_{12} = \begin{bmatrix} -27.3206 & -3.7619 \\ -3.6908 & -0.4842 \end{bmatrix}$$

$$Q_{22} = \begin{bmatrix} 139.5588 & 19.0796 \\ 19.0796 & 2.6334 \end{bmatrix}, L = 1.0e-03 * \begin{bmatrix} 0.7850 & 0.7014 \\ 0.7014 & 0.7095 \end{bmatrix}$$

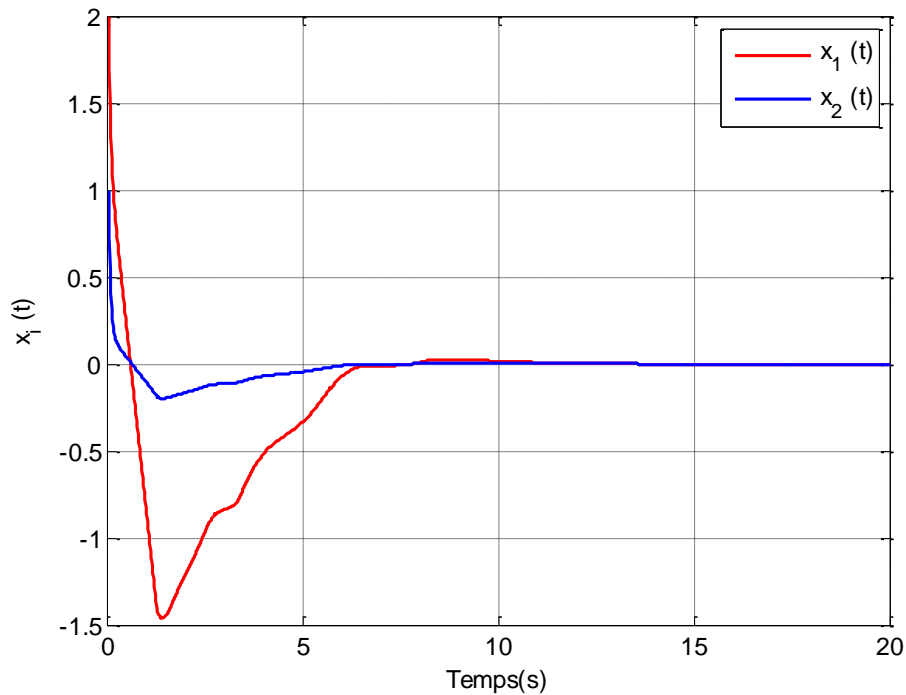


Fig. 3.12. Réponses temporelles du système (3.100) avec un retard variable ( $\eta = 3$ )

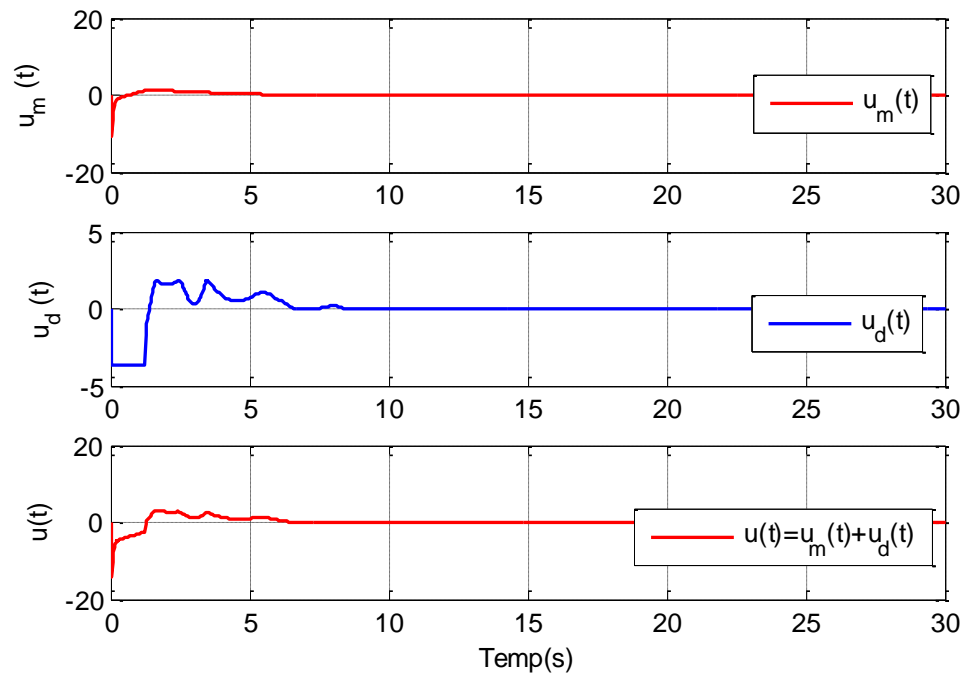


Fig. 3.13. Signal de commande avec un retard variable.

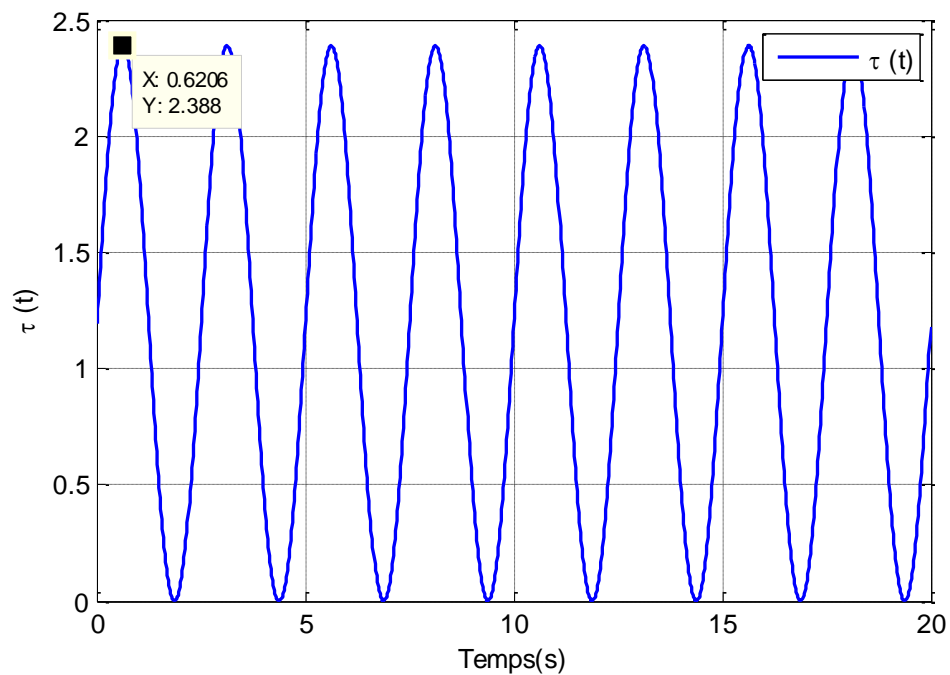


Fig. 3.14. Signal du retard  $\tau(t) = \bar{\tau} \sqrt{2(1 + \sin(2\eta t \setminus \bar{\tau}))}$

Il est judicieux de noter que d'autres travaux traitant le retard variable par l'approche de partitionnement ont été récemment proposées afin d'améliorer le conservatisme des conditions de stabilité LMIs pour les modèles T-S à retard [14], [16], [19]. Cette approche n'a pas été considérée pour obtenir les résultats proposés dans le théorème 3.5. Si les conditions proposées dans cette étude donnent de meilleurs résultats que ceux de [14] et [16], il apparaît que les résultats obtenus dans [19] sont plus performants que nos résultats pour un retard constant ( $\eta = 0$ ). Par conséquent, une perspective naturelle de ce travail conduira à considérer les améliorations du conservatisme proposées avec l'approche du retard partitionné.

### 3.11. Conclusion :

La première partie de ce chapitre a permis d'introduire les notions et les outils nécessaires pour appréhender nos contributions qui sont développées dans la deuxième partie de ce chapitre. D'abord, nous avons présenté des notions élémentaires sur les modèles T-S sans retard, d'où nous avons abordé succinctement les principales méthodes pour leur obtention (Identification, linéarisation des systèmes non linéaires). La méthode utilisant les transformations par secteur non linéaires a fait l'objet d'un rappel avec un exemple explicatif. Les conditions classiques de la stabilité et de la stabilisation basées sur la théorie de Lyapunov ont été brièvement discutées. Afin d'illustrer l'efficacité de l'approche LMI lors de la synthèse de contrôleur PDC pour les modèles T-S standards, un exemple de simulation d'un système non linéaire (système TORA) a également été présenté à la fin de cette partie.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous nous sommes attachés à la présentation des modèles T-S à retard, puis, nous avons proposé de nouvelles conditions LMIs pour la synthèse de contrôleurs de type PDC pour les modèles T-S à retards variables. Ce contrôleur PDC inclut les gains sans mémoires et ceux avec mémoire. Il a été montré que, malgré que cette loi de commande nécessite d'assumer la disponibilité en ligne du retard, compte tenu du gain retardé, permet de réduire de manière significative le conservatisme pour des vitesses de variations du retard variable élevées ( $\eta > 1$ ). Par ailleurs, des corollaires ont été proposés lorsque cette hypothèse ne peut pas être satisfaite.

En plus de l'amélioration apportée par le choix de cette loi de commande, nous avons, ensuite, obtenu plus d'amélioration du conservatisme grâce au choix d'une fonction LKF

appropriée, l'application de l'inégalité de Jensen étendu ainsi que l'utilisation du lemme du Finsler. Puis, nous avons illustré à travers un exemple numérique l'efficacité des nouvelles conditions LMIs proposées, ainsi que l'amélioration du conservatisme par rapport à plusieurs résultats précédents.

Enfin, il est à noter que d'autres travaux récents ont examiné le partitionnement du retard variable dans le temps pour l'amélioration du conservatisme, voir par exemple [14],[16],[19]. Étant donné que ces approches de partitionnement ne sont pas prises en compte dans cette présente étude, il constituera une perspective intéressante pour ce travail.

# Chapitre 4

## Systèmes Takagi-Sugeno incertains à retard variable

### 4.1 : Introduction :

Dans le chapitre précédent, nous avons abordé l'étude de la stabilité et de la commande des modèles T-S à retard variable, d'où, les résultats obtenus ne tiennent pas en compte les incertitudes de modélisation lors de la synthèse de la loi de commande PDC. Dans le présent chapitre, nous allons nous intéresser à l'étude de la stabilité et de la commande robuste (qui prend en compte les problèmes de stabilité des systèmes contenant des incertitudes) des modèles T-S incertains à retard variable

Il est généralement impossible de décrire parfaitement le comportement dynamique des systèmes physiques et ce pour trois principales raisons, dont la première est liée à la présence des paramètres ou des processus parasites qui ne sont pas complètement connus. Quant à la deuxième raison, elle est liée au fait que certains systèmes de commande doivent fonctionner dans une plage de conditions de fonctionnement différentes. La troisième raison consiste à utiliser un modèle relativement simple pour se rapprocher d'un système pratique, en raison de la limitation des outils mathématiques disponibles.

Ces systèmes (généralement de nature non linéaires ou de coefficients variant dans le temps) sont souvent obtenus par le biais de nombreuses simplifications (qui peuvent réduire la précision du traitement) pour permettre leur analyse avec les outils de l'automatique. Ainsi, les paramètres caractérisant ces systèmes ne peuvent pas être identifiés avec exactitude à cause de l'imprécision de leur mesure, l'utilisation des méthodes de linéarisation et enfin les incertitudes liées à leur identification. En revanche, certains aspects de la dynamique du système (connu comme la dynamique non modélisé) sont ignorés.



Afin de prendre en compte les facteurs incertains et améliorer la précision du traitement, nous décrivons les incertitudes (structurelles ou polytopiques) dans les équations d'état des systèmes. Il convient alors d'adapter les modèles mathématiques linéaires à retard pour obtenir leurs modèles linéaires incertains équivalents. Dans ce sens, [136] a été le premier qui donne une condition nécessaire et suffisante sous laquelle les critères de stabilité des systèmes nominaux peuvent facilement être étendus aux systèmes incertains.

Pour de tels systèmes perturbés, il est naturellement nécessaire de concevoir des contrôleurs pour vérifier si le système contrôlé est stable en présence de ces incertitudes. Dans ce contexte, et plus récemment, plusieurs travaux traitent la stabilité robuste des modèles T-S incertain à retard, voir par exemple les références [15], [16], [27] et [39]. En conséquence, et afin de stabiliser les modèles T-S incertains à retard, les travaux de [16],[13] et [25] ont pris en considération un contrôleur robuste de type PDC comprenant les gains de retour d'état sans mémoires et ceux avec mémoires (retardés).

L'objectif de ce chapitre est de proposer de nouvelles conditions de stabilisation pour la synthèse des lois de commande robustes du type PDC stabilisant les modèles T-S incertains à retard variable. Dans ce sens, l'une des améliorations proposées dans la présente étude consiste en un choix approprié d'une fonction LKF. En effet, pour améliorer le conservatisme, nous allons choisir une fonction LKF se basant sur un vecteur d'état étendu, et cela de manière à exploiter toutes les informations sur le retard et sur sa dérivée afin d'obtenir les conditions de stabilité.

Nous allons ensuite utiliser le Lemme de Finsler pour donner plus de relâchement aux conditions de stabilité qui sont exprimées sous la forme d'LMIs lesquelles nous allons développer au cours de ce chapitre. Enfin, nous allons illustrer l'amélioration du conservatisme apportée par les conditions LMIs développées par rapport à plusieurs résultats précédents à travers deux exemples numériques de simulation sous l'environnement Matlab.

#### **4.2. Modèles Takagi-Sugeno incertains à retard variable**

Afin d'illustrer les incertitudes de modélisation, nous introduisons la classe considérée des modèles T-S incertains à retard en état, décrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left( (A_i + \Delta A_i)x(t) + (A_i^d + \Delta A_i^d)x(t - \tau(t)) + (B_i + \Delta B_i)u(t) \right) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\bar{\tau}, 0], \quad i \in \mathcal{I}_r \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $z(t) = [z_1(t) \quad \dots \quad z_p(t)] \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur des variables de prémisses qui peut dépendre du vecteur d'état  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées,  $h_i(z(t))$  sont des fonctions d'appartenance satisfaisants la propriété convexe  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$  et la fonction scalaire  $\tau(t)$  représente le retard qui doit vérifier la propriété décrite en (3.56). Avec  $\bar{\tau}$  et  $\eta$  sont des constantes réelles et définies positives. Le vecteur des conditions initiales du système (4.1) est donné par (3.57). Les matrices  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_i^d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont des matrices réelles et constantes de dimensions appropriées décrivant la partie nominale du système non linéaire considéré.  $\Delta A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Delta A_i^d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\Delta B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont des matrices inconnues représentant la partie incertaine du système considéré.

Comme nous l'avons déjà mentionné, lors de la phase de modélisation, nous pouvons toujours introduire une partie supplémentaire qui réunit les incertitudes de modélisation au modèle mathématique nominal. Dans ce sens, nous distinguons dans la littérature, deux types des incertitudes qui peuvent apparaître dans la modélisation des systèmes non linéaires incertains.

Le premier type concerne les incertitudes non structurelles qui sont également connues sous le nom 'incertitudes non paramétriques'. Ce type d'incertitudes est souvent dû à des erreurs non formalisées de modélisation, de bruits de mesures ou encore à des perturbations externes. Elles représentent la partie inconnue de la dynamique externe du système. Ces incertitudes ont pour particularité d'être bornées en norme, c'est la seule information dont on dispose.

Le seconde type concerne les incertitudes structurelles, qui sont également connues sous le nom 'incertitudes paramétriques'. Ce type d'incertitudes est souvent dû soit à des erreurs formalisées et inconnues de la partie modélisée de la dynamique du modèle, soit aux approximations et simplifications sur la modélisation des systèmes (afin d'obtenir un modèle mathématique exploitable et représentant le mieux possible l'évolution d'un système physique). Nous nous intéresserons dans ce chapitre à l'étude des incertitudes structurelles.

Dans le modèle T-S à retard (4.1), les incertitudes structurelles sont représentées par les matrices variables dans le temps  $\Delta A_i$ ,  $\Delta A_i^d$  et  $\Delta B_i$ .

Ces incertitudes sont du type ‘Lebesgue’, supposées être mesurables et donnent plus d’informations et de précisions, à la dynamique globale du système envisagé. Elles peuvent être réécrites comme suit [134]:

$$\Delta A_i = H_i \delta(t) E_{ai} \quad (4.2)$$

$$\Delta A_i^d = H_i \delta(t) E_{ai}^d \quad (4.3)$$

$$\Delta B_i = H_i \delta(t) E_{bi} \quad (4.4)$$

Avec  $H_i \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $E_{ai} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $E_{ai}^d \in \mathbb{R}^{q \times n}$  et  $E_{bi} \in \mathbb{R}^{q \times m}$  sont des matrices constantes connues de dimensions appropriées et  $\delta(t) \in \mathbb{R}^{q \times q}$  est une matrice inconnue, mesurable variant dans le temps, dite de ‘Lebesgue’, vérifiant la propriété suivante :

$$\delta^T(t) \delta(t) \leq I, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.5)$$

où  $I$  est la matrice identité de dimensions appropriées.

Notons que les incertitudes (4.2), (4.3) et (4.4) sont du type structurel ou encore paramétrique. Elles sont généralement dues à des erreurs de modélisation, à des approximations ou à des simplifications, afin d’obtenir un modèle exploitable et représentant le plus exactement possible la dynamique du système.

En se basant sur la notation 3.1 (chapitre 3), le modèle T-S incertain à retard (4.1) peut être encore réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_h + \Delta A_h)x(t) + (A_h^d + \Delta A_h^d)x(t - \tau(t)) + (B_h + \Delta B_h)u(t) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\bar{\tau}, 0] \end{cases} \quad (4.6)$$

### 4.3. Loi de commande PDC

Afin de traiter le problème de la stabilisation et de la commande robuste des modèles T-S à retard variable (4.6), nous allons utiliser une loi de commande PDC qui tient compte à la fois des gains de retour d’état sans mémoire et avec mémoire (retardés). L’avantage de cette loi de

commande réside dans sa capacité à relâcher la loi de commande PDC classique, qui ne tient en compte que les gains sans mémoire, ainsi que la loi de commande linéaire  $u(t) = -Kx(t)$ . Cette loi de commande sera donnée comme suit :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (K_i X^{-1} x(t) + K_i^d X^{-1} x(t - \tau(t))) \quad i \in \mathcal{I}_r \quad (4.7)$$

avec  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $K_i^d \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $i \in \mathcal{I}_r$  sont les gains du contrôleur PDC et  $X$  est une matrice inversible définie positive.

Cette loi de commande peut être réécrite comme suit (en supposant le retard mesurable).

$$u(t) = K_h X^{-1} x(t) + K_h^d X^{-1} x(t - \tau(t)) \quad (4.8)$$

La synthèse du contrôleur PDC consiste alors à déterminer les gains  $K_h$  et  $K_h^d$ . Par conséquent, en substituant (4.8) dans le modèle T-S incertain à retard (4.6), la dynamique en boucle fermée peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left( (A_h + \Delta A_h) + (B_h + \Delta B_h) K_h X^{-1} \right) x(t) + \\ \quad \left( (A_h^d + \Delta A_h^d) + (B_h + \Delta B_h) K_h X^{-1} \right) x(t - \tau(t)) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\bar{\tau}, 0] \end{cases} \quad (4.9)$$

**Notation 4.1 :** Pour simplifier le développement, nous allons adopter les notations suivantes :

$$\bar{A}_h = A_h + \Delta A_h, \quad \bar{A}_h^d = A_h^d + \Delta A_h^d \quad \text{et} \quad \bar{B}_h = B_h + \Delta B_h$$

Suite à ces notations, le modèle T-S incertain à retard (4.10) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left( \bar{A}_h + \bar{B}_h K_h X^{-1} \right) x(t) + \left( \bar{A}_h^d + \bar{B}_h K_h^d X^{-1} \right) x(t - \tau(t)) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\bar{\tau}, 0] \end{cases} \quad (4.10)$$

Dans ce qui va suivre, nous allons concevoir un contrôleur flou robuste basé sur les modèles T-S incertains à retard via la loi de commande PDC proposée (4.8). Pour ce faire, nous allons analyser la stabilisation et la commande robuste dans le cas des incertitudes structurelles,

c'est à dire lorsque les matrices  $\bar{A}_h, \bar{A}_h^d$  et  $\bar{B}_h$  ne sont pas bien connues et décrites sous la forme (4.2), (4.3) et (4.4). Les gains du contrôleur PDC peuvent être déterminés en utilisant la technique LMI.

#### 4.4. Stabilisation et commande robuste des modèles Takagi-Sugeno incertains à retard variable :

Dans ces dernières années, la stabilisation quadratique et la commande robuste des modèles T-S incertains à retard ont été étudiées de manière approfondie dans la littérature, voir par exemple [15],[27],[13] et [137]. Une attention particulière a été portée à l'analyse de la stabilisation dépendante de la taille du retard.

Notons que le théorème 3.5 (et ces corollaires) fournit des conditions suffisantes pour la positivité et la décroissance de la fonction LKF (3.62). Ces conditions ne sont pas suffisantes pour l'analyse de la stabilisation robuste des modèles T-S incertains à retard, ainsi, elles ne permettent pas de concevoir les gains du contrôleur PDC en utilisant la technique LMI.

Par la suite, nous allons adopter les résultats obtenus par le théorème 3.5 pour étudier la stabilisation robuste, alors nous allons expliquer comment étendre les critères de stabilité des systèmes nominaux (sans incertitudes) aux systèmes incertains, tout en utilisant le lemme du carré matriciel (§ 3.8.3).

L'objectif sera de proposer de nouvelles conditions (moins conservatives) de stabilisation robuste, exprimées sous forme d'LMIs et permettant de trouver les gains du contrôleur PDC  $K_i$  et  $K_i^d$  de sorte que le système incertain à retard en boucle fermée (4.10) soit globalement asymptotiquement stable. Le résultat est alors proposé par le théorème suivant :

**Théorème 4.1 :** Soit  $(i, j) \in \mathcal{I}_r^2$ , pour des scalaires donnés  $\bar{\tau} > 0$  et  $\eta \geq 0$  tel que  $\tau(t) \in [0 \ \bar{\tau}]$  avec  $\dot{\tau}(t) \leq \eta$ , le modèle T-S incertain à retard variable (4.1) est globalement asymptotiquement stabilisé par le contrôleur PDC (4.8) s'il existe des matrices réelles de dimensions appropriées  $L = L^T$ ,  $K_j, K_j^d, X$ ,  $P_{11} = P_{11}^T$ ,  $P_{22} = P_{22}^T$ ,  $P_{12}$ ,  $Q_{11} = Q_{11}^T$ ,  $Q_{22} = Q_{22}^T$  et  $Q_{12}$ , et des scalaires  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3 > 0$  telles que les conditions suivantes soient vérifiées

$$\begin{cases} \Gamma_{ii} < 0, \forall i \in \mathcal{I}_r \\ \frac{2}{r-1} \Gamma_{ii} + \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} < 0, \forall (i, j) \in \mathcal{I}_r^2, i \neq j \end{cases} \quad (4.11)$$

$$L = L^T > 0 \quad (4.12)$$

$$P = P^T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ * & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.13)$$

$$Q = Q^T = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ * & Q_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.14)$$

avec

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \Gamma_{ij}^{(1,1)} & \tilde{E}_{ij}^T \\ * & -\lambda_{ij} I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}_r^2 \quad (4.15)$$

où

$$\Gamma_{ij}^{(1,1)} = \tilde{\Theta} + \mathcal{H}_e(\tilde{\mathcal{G}}_{ij}) + \lambda_{ij} \tilde{H}_i \tilde{H}_i^T \quad (4.16)$$

et

$$\tilde{\Theta} = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_{11} & \tilde{\Theta}_{12} & P_{22} - Q_{12}^T & P_{11} + \bar{\tau}^2 Q_{12} \\ * & \tilde{\Theta}_{22} & \tilde{\Theta}_{23} & 0 \\ * & * & -Q_{11} & P_{12}^T \\ * & * & * & \bar{\tau}^2 Q_{22} \end{bmatrix}.$$

avec

$$\tilde{\Theta}_{11} = L + P_{12} + P_{12}^T + \bar{\tau}^2 Q_{11} - Q_{22},$$

$$\tilde{\Theta}_{12} = -(1-\eta)P_{12} + Q_{22},$$

$$\tilde{\Theta}_{22} = -(1-\eta)L - Q_{22},$$

$$\tilde{\Theta}_{23} = -(1-\eta)P_{22} + Q_{12}^T,$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i X + B_i K_j & A_i^d X + B_i K_j^d & 0 & -X \\ \varepsilon_1(A_i X + B_i K_j) & \varepsilon_1(A_i^d X + B_i K_j^d) & 0 & -\varepsilon_1 X \\ \varepsilon_2(A_i X + B_i K_j) & \varepsilon_2(A_i^d X + B_i K_j^d) & 0 & -\varepsilon_2 X \\ \varepsilon_3(A_i X + B_i K_j) & \varepsilon_3(A_i^d X + B_i K_j^d) & 0 & -\varepsilon_3 X \end{bmatrix},$$

$$\tilde{H}_i = \begin{bmatrix} H_i \\ \varepsilon_1 H_i \\ \varepsilon_2 H_i \\ \varepsilon_3 H_i \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{E}_{ij} = \begin{bmatrix} E_{ai}X + E_{bi}K_j + E_{ai}^d X + E_{bi}^d K_j & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Démonstration :** Réécrivons le modèle T-S incertain en boucle fermée à retard variable (4.10) comme suit :

$$(\mathcal{G}_{hh} + \Delta\mathcal{G}_{hh})\zeta(t) = 0 \quad (4.17)$$

avec  $\zeta(t)$  défini par (3.70) et

$$\mathcal{G}_{hh} = \begin{bmatrix} A_h + B_h K_h X^{-1} & A_h^d + B_h K_h^d X^{-1} & 0 & -I \end{bmatrix},$$

$$\Delta\mathcal{G}_{hh} = \begin{bmatrix} \Delta A_h + \Delta B_h K_h X^{-1} & \Delta A_h^d + \Delta B_h K_h^d X^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En considérant la fonction candidate de LKF (3.62), ainsi que les conditions LMIs exprimées dans le théorème 3.4, la fonction LKF est positive et monotone décroissante si les conditions (3.66), (3.67), (3.68) et (3.69) sont vérifiées. Ensuite, nous appliquons le lemme de Finsler, alors le modèle T-S incertain à retard (4.10) devient stable s'il existe une matrice de relaxation  $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{4n \times n}$  telle que :

$$\Theta + \mathcal{H}_e(\mathcal{R}(\mathcal{G}_{hh} + \Delta\mathcal{G}_{hh})) < 0 \quad (4.18)$$

où  $\Theta$  est définie par le théorème 3.4.

Ensuite, nous posons

$$\mathcal{R}^T = \begin{bmatrix} X^{-1} & \varepsilon_1 X^{-1} & \varepsilon_2 X^{-1} & \varepsilon_3 X^{-1} \end{bmatrix}^T \quad (4.19)$$

où  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice inversible et  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  sont des scalaires arbitraires. Puis, en multipliant la condition (4.18) à gauche par la matrice  $D_X$  (définie par (3.93)) et à droite par sa transposée, et après l'allongement des matrices, on obtient la condition suivante:

$$\tilde{\Theta} + \mathcal{H}_e(\tilde{\mathcal{G}}_{hh} + \Delta\tilde{\mathcal{G}}_{hh}) < 0 \quad (4.20)$$

avec

$$\tilde{\Theta} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_e(P_{12}) + \bar{\tau}^2 Q_{11} - Q_{22} + L & -(1 - \dot{\tau}(t))P_{12} + Q_{22} & P_{22} - Q_{12}^T & P_{11} + \bar{\tau}^2 Q_{12} \\ * & -(1 - \eta)L - Q_{22} & -(1 - \eta)P_{22} + Q_{12}^T & 0 \\ * & * & -Q_{11} & P_{12}^T \\ * & * & * & \bar{\tau}^2 Q_{22} \end{bmatrix},$$

et

$$\tilde{\mathcal{G}}_{hh} = \begin{bmatrix} A_h X + B_h K_h & A_h^d X + B_h K_h^d & 0 & -X \\ \varepsilon_1(A_h X + B_h K_h) & \varepsilon_1(A_h^d X + B_h K_h^d) & 0 & -\varepsilon_1 X \\ \varepsilon_2(A_h X + B_h K_h) & \varepsilon_2(A_h^d X + B_h K_h^d) & 0 & -\varepsilon_2 X \\ \varepsilon_3(A_h X + B_h K_h) & \varepsilon_3(A_h^d X + B_h K_h^d) & 0 & -\varepsilon_3 X \end{bmatrix},$$

$$\Delta \tilde{\mathcal{G}}_{hh} = \begin{bmatrix} \Delta A_h X + \Delta B_h K_h & \Delta A_h^d X + \Delta B_h K_h^d & 0 & -X \\ \varepsilon_1(\Delta A_h X + \Delta B_h K_h) & \varepsilon_1(\Delta A_h^d X + \Delta B_h K_h^d) & 0 & -\varepsilon_1 X \\ \varepsilon_2(\Delta A_h X + \Delta B_h K_h) & \varepsilon_2(\Delta A_h^d X + \Delta B_h K_h^d) & 0 & -\varepsilon_2 X \\ \varepsilon_3(\Delta A_h X + \Delta B_h K_h) & \varepsilon_3(\Delta A_h^d X + \Delta B_h K_h^d) & 0 & -\varepsilon_3 X \end{bmatrix},$$

Nous effectuons maintenant les changements de variables,  $P_{11} = X^T M_{11} X$ ,  $P_{12} = X^T M_{12} X$ ,  $P_{22} = X^T M_{22} X$ ,  $Q_{11} = X^T N_{11} X$ ,  $Q_{12} = X^T N_{12} X$ ,  $Q_{22} = X^T N_{22} X$  et  $L = X^T S X$ , et d'après les équations (4.2), (4.3) et (4.4), nous pouvons écrire :

$$\Delta \tilde{\mathcal{G}}_{hh} = \tilde{H}_{\bar{h}} \delta(t) \tilde{E}_{\bar{h}h} \quad (4.21)$$

avec

$$\tilde{H}_{\bar{h}} = \begin{bmatrix} H_{\bar{h}} \\ \varepsilon_1 H_{\bar{h}} \\ \varepsilon_2 H_{\bar{h}} \\ \varepsilon_3 H_{\bar{h}} \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{E}_{\bar{h}h} = \begin{bmatrix} E_{a\bar{h}} X + E_{b\bar{h}} K_h + E_{a\bar{h}}^d X + E_{b\bar{h}}^d K_h^d & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'après (4.21), l'égalité (4.20) devient :  $\tilde{\Theta} + \mathcal{H}_e(\tilde{\mathcal{G}}_{hh}) + \mathcal{H}_e(\tilde{H}_{\bar{h}} \delta(t) \tilde{E}_{\bar{h}h}) < 0$

Puis, en considérant les équations (4.5) et en appliquant lemme du carré matriciel (§ 3.8.3), la condition précédente est satisfaite pour tout scalaire positif  $\lambda_{\bar{h}h} > 0$  si :



$$\tilde{\Theta} + \mathcal{H}_e(\tilde{\mathcal{G}}_{hh}) + \lambda_{\bar{h}} \tilde{H}_{\bar{h}} \tilde{H}_{\bar{h}}^T + \lambda_{\bar{h}}^{-1} \tilde{E}_{\bar{h}}^T \tilde{E}_{\bar{h}} < 0 \quad (4.22)$$

Ensuite, en appliquant le complément de Schur (§ 3.8.1), l'inégalité (4.22) est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{hh}^{(1,1)} & \tilde{E}_{\bar{h}}^T \\ * & -\lambda_{\bar{h}} I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.23)$$

avec

$$\Gamma_{hh}^{(1,1)} = \tilde{\Theta} + \mathcal{H}_e(\tilde{\mathcal{G}}_{hh}) + \lambda_{\bar{h}} \tilde{H}_{\bar{h}} \tilde{H}_{\bar{h}}^T$$

Enfin, en appliquant le lemme de relaxation de Tuan (§ 3.5.2) sur l'inégalité (4.23), nous obtenons les conditions exprimées dans le théorème 4.1.

**Remarque 4.1:** Les conditions exprimées dans le théorème 4.1, proposé ci-dessus, dépendent de la connaissance de la limite supérieure  $\bar{\tau}$  du retard variable  $\tau(t)$  et de la borne supérieure de sa dérivée temporelle  $\eta$ . L'introduction de ces paramètres rend les conditions (exprimées sous forme LMIs) du théorème 4.1 plus relâchées.

Néanmoins, dans certaines applications pratiques où l'hypothèse 3.1 ne peut pas être satisfaite, nous pouvons dériver des corollaires en faisant des modifications simples sur les LMIs du théorème 4.1. Selon la nature de  $\eta$ , se dégage alors les deux cas suivants :

- Si  $\eta$  est inconnu, en effectuant des simplifications directes sur le théorème 4.1, nous obtenons le corolaire 4.1 tout en fixant  $P_{12} = 0$ ,  $P_{22} = 0$  et  $L = 0$ .
- Si le retard est constant  $\eta = 0$ , alors la mise en œuvre de la loi de commande (4.8), y compris les gains retardés, n'exige pas l'hypothèse 3.1, dans ce cas, le retard n'est plus disponibles en ligne à chaque instant  $t$ . Nous pouvons alors annuler les gains retardés dans le théorème 4.1 ( $K_i^d = 0$ ) puis nous fixons  $\tilde{\Theta}_{12} = -P_{12} + Q_{22}$ ,  $\tilde{\Theta}_{22} = -L - Q_{22}$  et  $\tilde{\Theta}_{23} = -P_{22} + Q_{12}^T$

Il est important de noter que plus de simplification entraîne plus de conservatisme. Par conséquent, dans la pratique, nous pouvons considérer que  $\eta$  est inconnu. En évitant la

connaissance de  $\eta$  cela peut réduire les chances de trouver une solution faisable du problème LMI.

**Corollaire 4.1 :** ("Lorsque l'hypothèse 3.1 est satisfaite avec  $\eta$  inconnu"). Soit  $(i, j) \in \mathcal{I}_r^2$ . Pour un scalaire donné  $\bar{\tau} > 0$  tel que  $\tau(t) \in [0, \bar{\tau}]$ , le modèle T-S incertain à retard variable (4.1) est globalement asymptotiquement stabilisé par le contrôleur PDC (4.8), s'il existe des matrices réelles de dimensions appropriées  $K_j, K_j^d, X, P = P^T, Q_{11} = Q_{11}^T, Q_{22} = Q_{22}^T$  et  $Q_{12}$  et des scalaires  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3 > 0$  de sorte que les conditions (4.11), (4.12), (4.13) et (4.14) soient vérifiées avec :

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{ij}^{(1,1)} & \tilde{E}_{ij}^T \\ * & -\lambda_{ij} I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}_r^2 \quad (4.24)$$

où

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{(1,1)} = \bar{\Theta} + \mathcal{H}_e(\tilde{\mathcal{G}}_{ij}) + \lambda_{ij} \tilde{H}_i \tilde{H}_i^T$$

et

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} \bar{\tau}^2 Q_{11} - Q_{22} & Q_{22} & Q_{12}^T & P_{11} + \bar{\tau}^2 Q_{12} \\ * & -Q_{22} & Q_{12}^T & 0 \\ * & * & -Q_{11} & 0 \\ * & * & * & \bar{\tau}^2 Q_{22} \end{bmatrix}$$

avec  $\tilde{\mathcal{G}}_{ij}, \tilde{H}_i$  et  $\tilde{E}_{ij}$  définies par le théorème 4.1.

**Démonstration :** D'après les conditions exprimées dans le théorème 4.1, en posant  $P_{12} = 0, P_{22} = 0, P_{11} = P$  et  $L = 0$ , nous pouvons conclure que la fonction LKF suivante est un cas particulier de la fonction LKF de (3.62) :

$$V(t) = x^T(t) M x(t) + V_3(t) \quad (4.25)$$

avec  $V_3(t)$  défini par (3.65).

La démonstration de ce corollaire est alors obtenue en posant  $M = X^{-T} P X^{-1}, N_{11} = X^{-T} Q_{11} X^{-1}, N_{12} = X^{-T} Q_{12} X^{-1}$  et  $N_{22} = X^{-T} Q_{22} X^{-1}$ .

**Corollaire 4.2 :** ("Lorsque l'hypothèse 3.1 n'est pas satisfaite avec  $\eta$  connu"). Soit  $(i, j) \in \mathcal{I}_r^2$ . Pour des scalaires donnés  $\bar{\tau} > 0$  et  $\eta \geq 0$  tel que  $\tau(t) \in [0 \ \bar{\tau}]$  avec  $\dot{\tau}(t) \leq \eta$ , le modèle T-S incertain à retard variable (4.1) est globalement asymptotiquement stabilisé par le contrôleur PDC (4.8) sans mémoire, c'est à dire avec  $K_i^d = 0$ , s'il existe des matrices réelles de dimensions appropriées  $L = L^T$ ,  $K_j$ ,  $X$ ,  $P_{11} = P_{11}^T$ ,  $P_{22} = P_{22}^T$ ,  $P_{12}$ ,  $Q_{11} = Q_{11}^T$ ,  $Q_{22} = Q_{22}^T$  et  $Q_{12}$ , et des scalaires  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3 > 0$  de sorte que les conditions (3.85), (3.86), (3.87) et (3.88) soient vérifiées avec :

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{ij}^{(1,1)} & \bar{E}_{ij}^T \\ * & -\lambda_{ij} I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}_r^2 \quad (4.26)$$

où

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{(1,1)} = \tilde{\Theta} + \mathcal{H}_e(\bar{\mathcal{G}}_{ij}) + \lambda_{ij} \tilde{H}_i \tilde{H}_i^T$$

avec  $\tilde{\Theta}$  et  $\tilde{H}_i$  définies par le théorème 4.1,

$$\bar{\mathcal{G}}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i X + B_i F_j & A_i^d X & 0 & -X \\ \varepsilon_1 (A_i X + B_i F_j) & \varepsilon_1 A_i^d X & 0 & -\varepsilon_1 X \\ \varepsilon_2 (A_i X + B_i F_j) & \varepsilon_2 A_i^d X & 0 & -\varepsilon_2 X \\ \varepsilon_3 (A_i X + B_i F_j) & \varepsilon_3 A_i^d X & 0 & -\varepsilon_3 X \end{bmatrix}$$

et

$$\tilde{E}_{ij} = [E_{ai} X + E_{bi} F_j + E_{ai}^d X \quad 0 \quad 0]$$

**Démonstration :** D'après les conditions exprimées par le théorème 4.1, en posant  $K_j^d = 0$  nous pouvons obtenir directement les conditions exprimées par le corollaire 4.2.

Dans ce cas, la loi de commande PDC prend la forme suivante :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (K_i X^{-1} x(t)) \quad (4.27)$$

**Corollaire 4.3 :** ("Lorsque l'hypothèse 3.1 est non satisfaite avec  $\eta$  inconnu"). Soit  $(i, j) \in \mathcal{I}_r^2$ . Pour un scalaire donné  $\bar{\tau} > 0$  tel que  $\tau(t) \in [0 \ \bar{\tau}]$ , le modèle T-S incertain à retard variable (4.1) est globalement asymptotiquement stabilisé par le contrôleur PDC (4.8), s'il existe des matrices réelles de dimensions appropriées  $K_j, X, P = P^T, Q_{11} = Q_{11}^T, Q_{22} = Q_{22}^T$  et des scalaires  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3 > 0$  de sorte que les conditions (3.85), (3.87) et (3.88) soient vérifiées avec :

$$\Gamma_{ij} = \bar{\Theta} + \mathcal{H}_e(\bar{\mathcal{G}}_{ij}) \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}_r^2 \quad (4.28)$$

où  $\bar{\Theta}$  et  $\bar{\mathcal{G}}_{ij}$  sont définies par le corollaires 4.1 et 4.2 respectivement.

**Démonstration :** D'après le corollaire 4.1, en posant  $K_j^d = 0$ , la preuve du corollaire 4.3 est alors obtenue.

Finalement, notons que le théorème 4.1 est une extension de nos résultats préliminaires en [21], et que le théorème 3 de [12] et celui du théorème 3.1 de [13], sont inclus dans nos résultats du théorème 4.1.

En effet, comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent, nous pouvons déduire les conditions exprimées dans [21] en annulant tous les termes en facteurs des paramètres  $\varepsilon_2$  dans l'équation (4.16) (c'est à dire  $\varepsilon_2 = 0$ ). En outre, à partir des conditions énoncées dans [21], le résultat proposé dans le corollaire 2 de [12] peut être déduit en annulant les gains de retour d'état retardés (en posant  $K_i^d = 0$ ). Cela confirme que les conditions exprimées dans le théorème 4.1 sont moins conservatives que celles proposées dans les études précédentes.

Dans la section suivante, nous allons illustrer cette amélioration du conservatisme à travers deux exemples numériques où une comparaison avec plusieurs résultats ultérieurs sera donnée.

Le premier exemple sera consacré à l'analyse de la stabilité d'un modèle académique de T-S incertain à retard variable. Alors que le second sera consacré à l'analyse de la stabilité d'un exemple pratique. Il s'agit du système chariot-remorque incertain à retard variable.

#### 4.5. Exemples illustratifs et résultats de la simulation

**4.5.1. Exemple 4.1 :** Considérons le modèle T-S incertain à retard variable décrit avec deux règles ( $r = 2$ ), défini par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i \left( \bar{A}_i x(t) + \bar{A}_i^d x(t - \tau(t)) + B_i u(t) \right) \quad (4.29)$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_1^d = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.9 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ A_2^d &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 1 & 1.6 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} -0.03 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix}, \\ E_{a1} = E_{a2} &= \begin{bmatrix} -0.15 & 0.2 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix}, E_{a1}^d = E_{a2}^d = \begin{bmatrix} -0.05 & -0.35 \\ 0.08 & -0.45 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où les fonctions d'appartenance  $h_i(z(t))$  définies par (3.101)

Dans le but de mettre en évidence l'efficacité de l'approche proposée par le théorème 4.1 par rapport à certaines études précédentes, nous illustrons d'abord l'amélioration du conservatisme proposée dans le théorème 4.1 en ce qui concerne le domaine de faisabilité de chaque approche proposée par ces études dans le cadre de la stabilisation robuste.

Pour ce faire, nous étudions la faisabilité des conditions LMIs pour différentes valeurs des paramètres du modèle  $\eta \in [0 \ 3]$  et  $\bar{\tau} \in [0 \ 2.5]$ . Le résultat qui sera présenté à la figure 4.1, est obtenu à l'aide de l'outil *LMI Toolbox de Matlab*. Il représente les champs de faisabilité obtenus du théorème 4.1, du théorème 3 dans [13] et du théorème 3 (avec  $\tau_2 = 0$ ) dans [12].

Nous remarquons que le domaine de faisabilité de l'approche proposée par le théorème 4.1 inclut le domaine de l'approche du théorème 3 (avec  $\tau_2 = 0$ ) dans [12] qui inclut lui-même l'approche proposée au théorème 3 dans [13]. Celui-ci confirme que les LMIs proposées par le théorème 4.1 sont moins conservatives par rapport aux résultats des autres auteurs.

**Remarque 4.2 :** Comme nous l'avons mentionné dans la remarque 3.5, nous observons dans la figure 4.1 une bonne amélioration en terme de conservatisme du théorème 4.1 par rapport aux approches proposées dans [13] et [12], en particulier lorsque  $\eta \geq 1$ . Cette réduction majeure du conservatisme est notamment due à l'utilisation des gains de retour d'état retardés  $K_i^d \neq 0$  dans la loi de commande (4.8). Ainsi, l'extension de la loi de commande permet, d'une part, la prise en compte du retard dans l'entrée du système, et d'autre part, de relâcher les conditions de stabilité en introduisant des variables de décision supplémentaires.

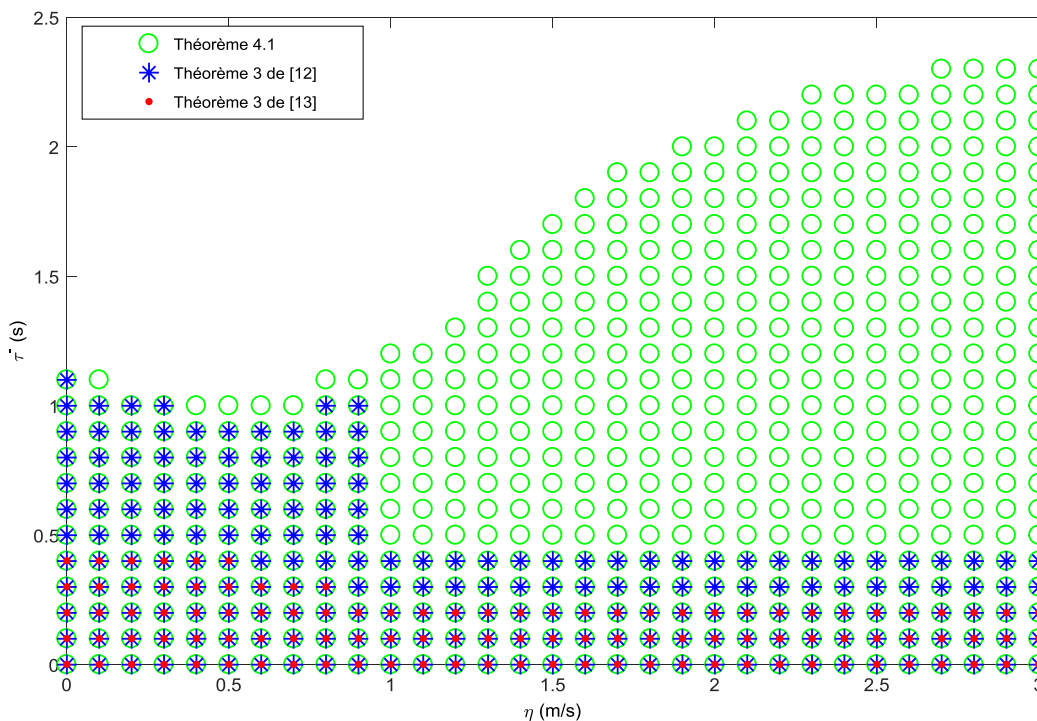


Fig.4.1. Champ de faisabilité du théorème 4.1, théorème 3 de [13] et théorème 3 de [12]

Pour illustrer l'efficacité des conditions LMIs proposées au théorème 4.1, nous allons estimer la valeur  $MAUB(\bar{\tau})$ , puis la comparer avec plusieurs études précédentes. Le tableau 4.1, présente la valeur  $MAUB(\bar{\tau})$  obtenue par plusieurs études antérieures, par le théorème 4.1 et par le corollaire 4.1 (avec  $\eta$  inconnu) où le symbole "-" signifie que le résultat est non disponible pour l'étude concernée. En outre, "m" indique le nombre de partitions du retard pris en compte dans [16] et [14].

<b>Résultats considérés</b>	$\eta = 0$	$\eta = 0.6$	$\eta \geq 1$	$\eta$ inconnu
Théorème 4 dans [41]	0.3991	-	-	-
Théorème 3 dans [13]	0.4610	0.3941	0.2283	0.2321
Théorème 3 dans [85]	-	0.6072	-	-
Théorème 4 dans [84]	-	0.7855	-	-
Théorème 4 ( $m = 3$ ) dans [14]	-	0.7896	-	-
Théorème 1 dans [98]	-	0.7780	-	-
Théorème 3 ( $\tau_2 = 0$ ) dans [12]	1.1116	0.9730	0.4780	0.4070
Théorème 4 ( $\beta_i = 0.01, m = 3$ ) dans [16]	-	-	1.135	-
Théorème 1 dans [21]	1.1648	1.0594	2.1813	0.9632
<b>Corollaire 4.1</b>	-	-	-	<b>0.9654</b>
<b>Théorème 4.1</b>	<b>1.1648</b>	<b>1.0731</b>	<b>2.3521</b>	<b>-</b>

Tableau 4.1 : Comparaison de  $MAUB(\bar{\tau})$  pour différentes valeurs de  $\eta$  - exemple 4.1.

**Remarque 4.3 :** Dans le tableau 4.1, les valeurs de la  $MAUB(\bar{\tau}) = 0.9654s$  et  $MAUB(\bar{\tau}) = 2.3521s$  obtenues à partir du corollaire 4.1 et du théorème 4.1 respectivement, ont été estimée avec une vitesse de variation  $\eta = 3$ .

Notons que les valeurs considérées de  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  sont données dans le tableau 4.2 pour le théorème 4.1 et le corollaires 4.1 par rapport aux valeurs considérées de  $\eta$ .

<b>Résultats considérés</b>	$\eta$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$
Corollaire 4.1	inconnu	0.38	0.001	1.9
Théorème 4.1	0	0.005	-0.001	1.3
Théorème 4.1	0.6	0.45	-0.3	1.9
Théorème 4.1	3	0.001	-0.5	7

Tableau 4.2 : Valeurs de  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  obtenues pour les résultats donnés dans le tableau 4.1

A partir du tableau 4.1, nous pouvons noter que la valeur  $MAUB(\bar{\tau})$  obtenue à partir du théorème 4.1 est plus grande que tous les autres résultats. Ceci confirme la réduction du conservatisme engendrée par les nouvelles conditions LMIs (proposées dans le théorème 4.1), y compris nos récents résultats dans [21].

Les résultats de simulation du système incertain à retard de (4.29), sont obtenus via l'outil *LMI Toolbox de Matlab*. L'évolution temporelle du système en boucle fermée sera donnée pour la condition initiale  $x(0) = [2 \ 1]^T$ ,  $x(t) = \phi(t)$  et  $\forall t \in [-\bar{\tau}, 0]$ ,  $\phi(t) = x(0)$  pour les deux cas suivants:

**Cas1 :** Nous considérons le retard constant  $\tau = 1.1648s$  ( $\eta = 0$ ). Les figures 4.2 et 4.3 montrent respectivement l'évolution temporelle du vecteur d'état incertain  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ , le signal de commande  $u(t)$  ainsi que le signal des incertitudes  $\delta(t)$ .

Le contrôleur PDC (4.8) composé des gains de retour d'état retardés et non retardés, est synthétisé à l'aide des conditions LMIs proposées dans le théorème 4.1. Pour ce faire, nous résolvons simultanément, à l'aide de la boîte à outils *LMI Toolbox de Matlab* les conditions de stabilité, (4.11), (4.12), (4.13) et (4.14), nous obtenons alors les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 21.9895 & -64.2120 \\ 20.8348 & -62.5310 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} K_1^d \\ K_2^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3494 & -2.8011 \\ -1.1259 & -2.4615 \end{bmatrix}, \\ X &= \begin{bmatrix} 138.0318 & 50.17 \\ 50.5777 & 19.8703 \end{bmatrix}, \quad P_{11} = \begin{bmatrix} 334.7132 & 240.7745 \\ 240.7745 & 205.7000 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} -31.9181 & -25.9043 \\ -12.4198 & -10.0637 \end{bmatrix}, \\ P_{22} &= \begin{bmatrix} 32.5831 & 25.5101 \\ 25.5101 & 23.2607 \end{bmatrix}, \quad Q_{11} = \begin{bmatrix} 105.7097 & 102.3972 \\ 102.3972 & 99.7054 \end{bmatrix}, \quad Q_{12} = \begin{bmatrix} -10.0770 & -1.4038 \\ -12.8040 & -2.2614 \end{bmatrix}, \\ Q_{22} &= \begin{bmatrix} 106.2201 & 32.1672 \\ 32.1672 & 10.2001 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 181.6840 & 131.8298 \\ 131.8298 & 105.7160 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

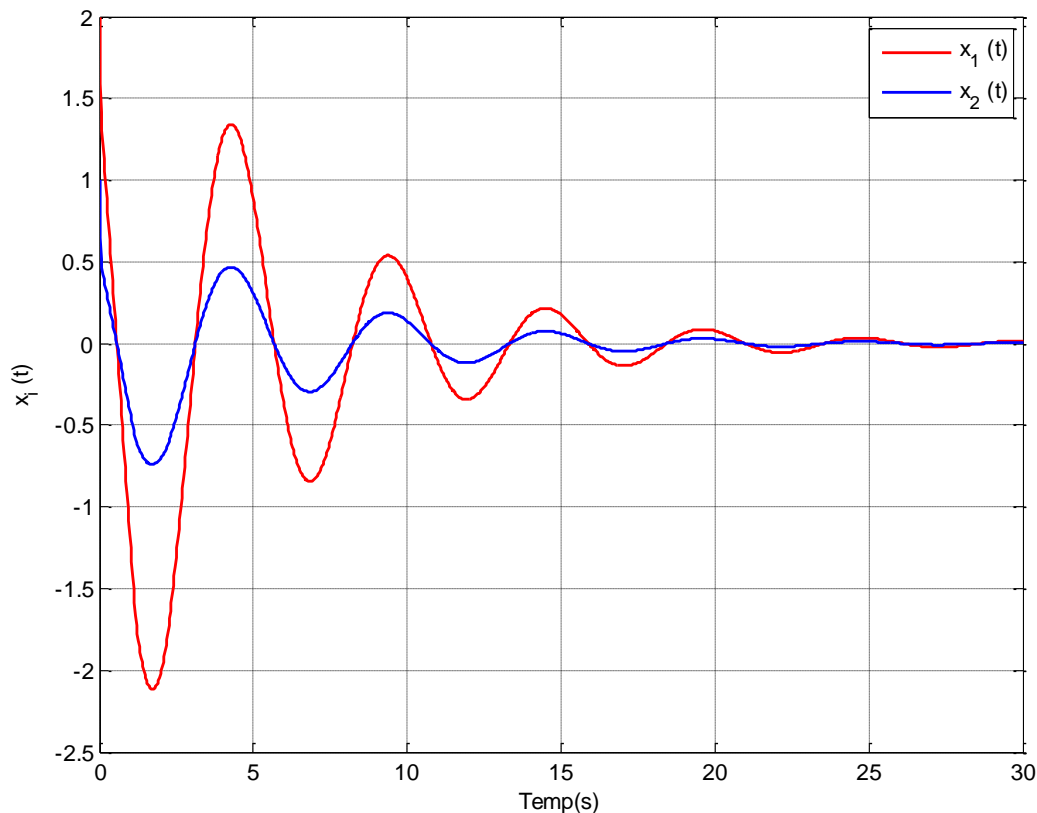


Fig.4.2. Réponses temporelles du système incertain (4.29) à retard constant ( $\eta = 0$ )



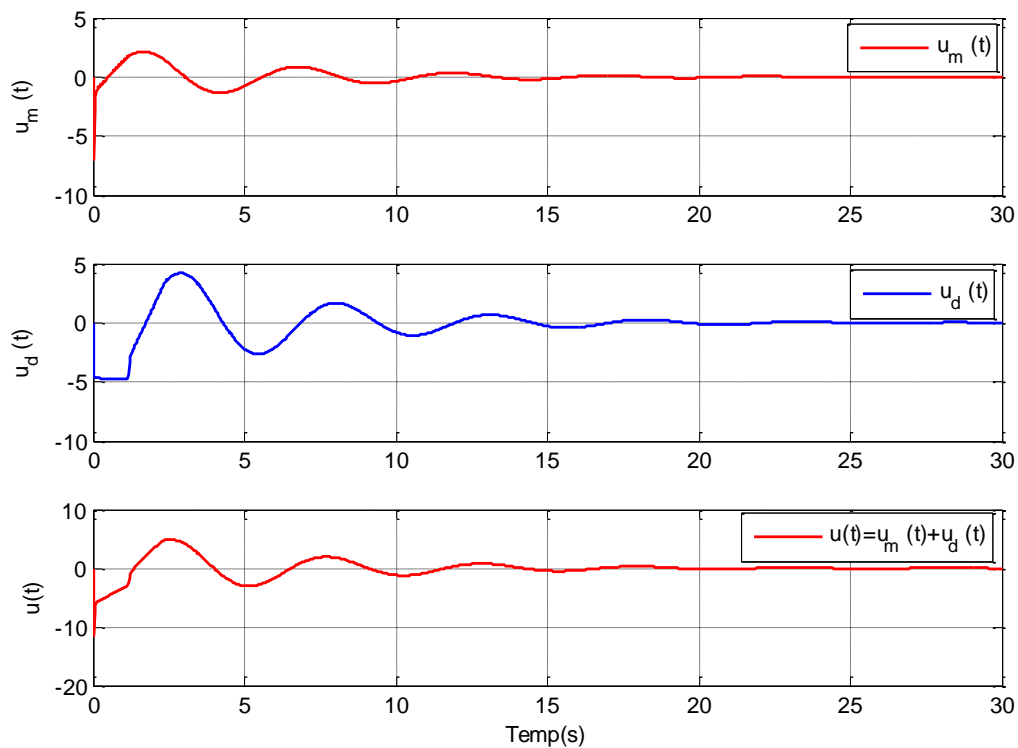


Fig. 4.3. Signal de commande du système incertain à retard constant (4.29)

Le signal des incertitudes  $\delta(t)$  qui affectent le système incertain à retard est représenté sur la figure suivante :

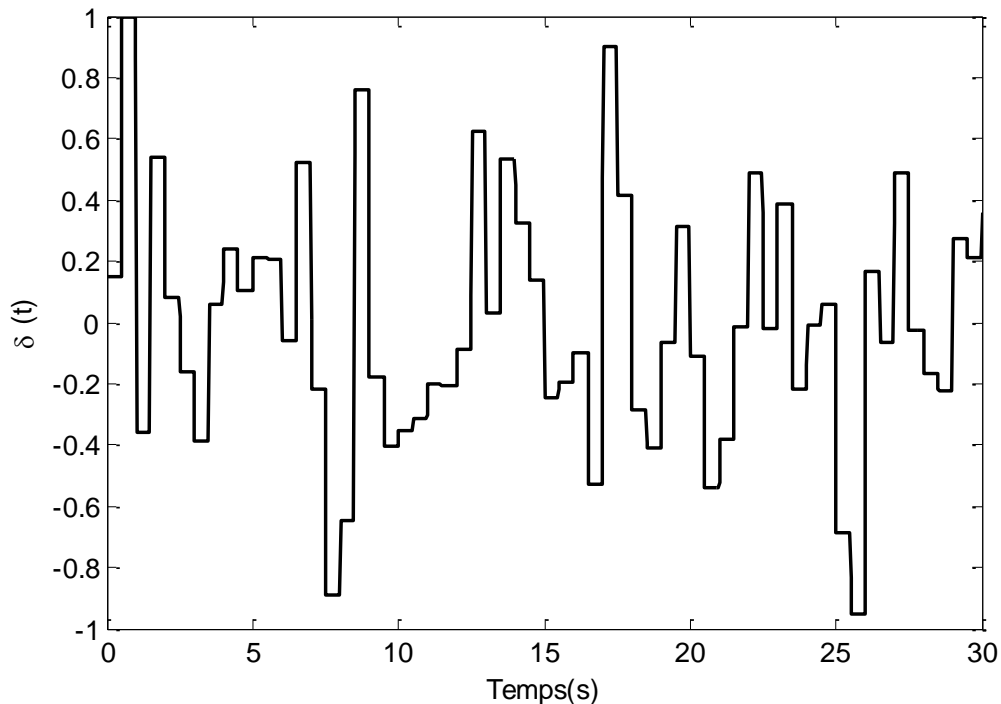


Fig. 4.4. Signal des incertitudes  $\delta(t)$

**Cas2 :** Il s'agit d'un retard variable dans le temps suivant l'équation  $\tau(t) = \frac{\bar{\tau}}{2} \left( 1 + \sin\left(\frac{2\eta}{\bar{\tau}} t\right) \right)$ ,  
 $\bar{\tau} = 2.3521s$ .

Afin de synthétiser la loi de commande PDC à l'aide des conditions de stabilité proposées au théorème 4.1, nous choisissons la valeur de la limite supérieur admissible de la dérivée du retard (ou simplement la variation du retard) tel que  $\eta = 3$ , de manière à vérifier la faisabilité de l'ensemble des LMIs décrites par (4.11), (4.12), (4.13) et (4.14).

Les figures 4.5, 4.6 et 4.7 montrent respectivement l'évolution temporelle du vecteur d'état  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ , du signal de commande  $u(t)$  et le retard variable  $\tau(t)$  pour le système incertain à retard (4.29).

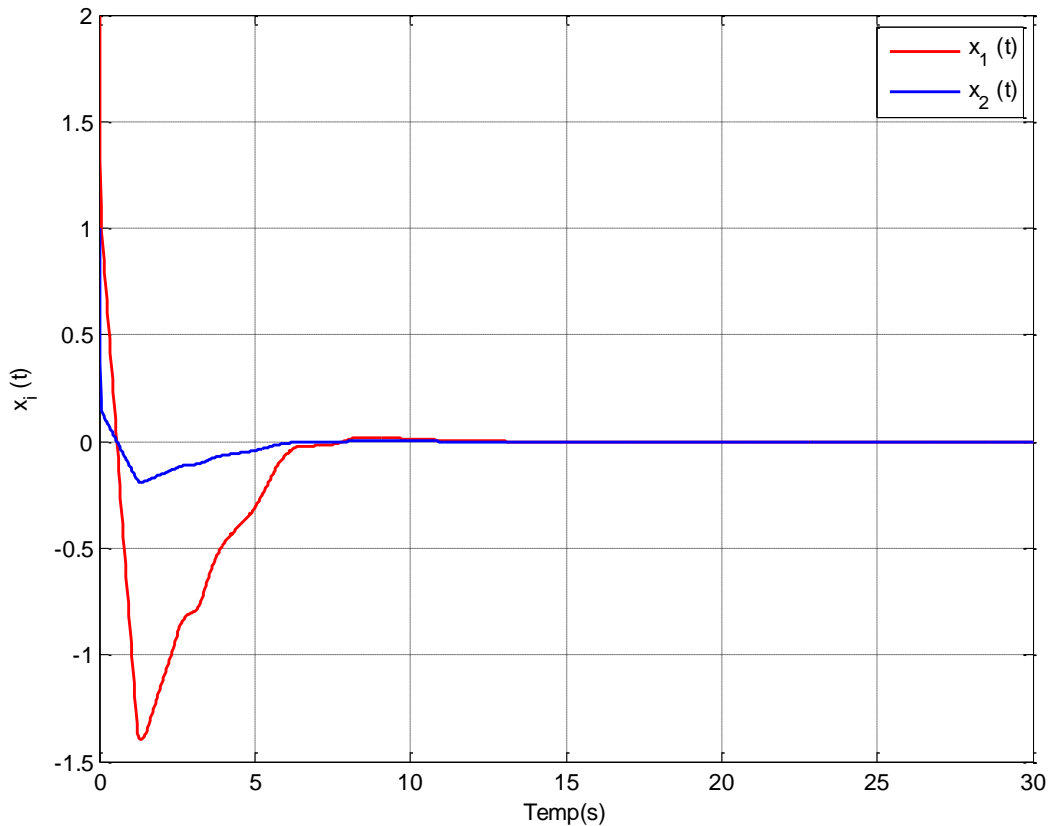


Figure 4.5. Réponses temporelles du système incertain (4.29) à retard variable ( $\eta = 3$ )

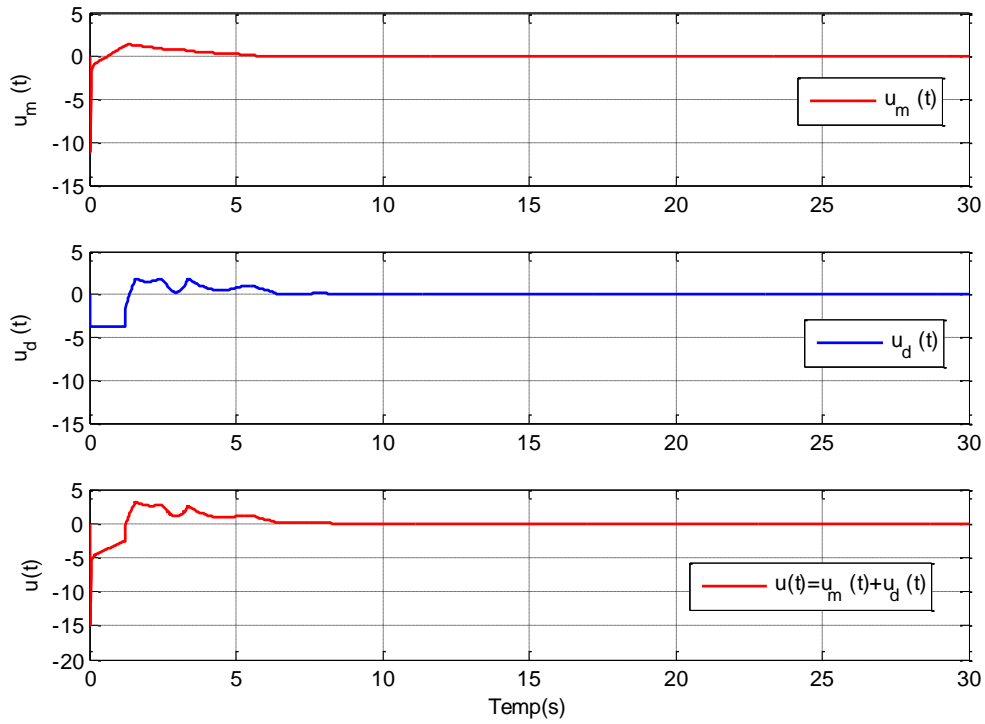


Fig. 4.6. Signal de commande du système incertain (4.29) à retard variable.

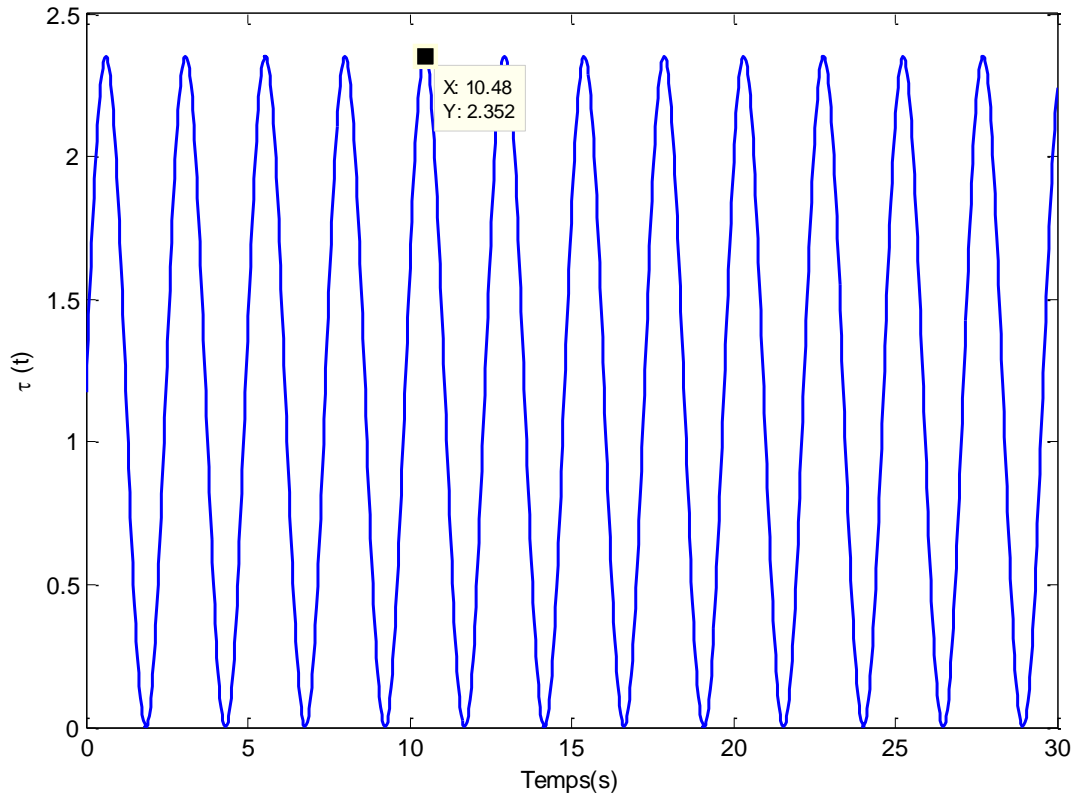


Fig. 4.7. Signal du retard  $\tau(t) = \bar{\tau} \cdot 2(1 + \sin(2\eta t \setminus \bar{\tau}))$

Dans ce cas, le retard est supposé variable dans le temps, alors que le contrôleur PDC doit prendre en compte la valeur du retard à chaque instant  $t$ . Ce qui nécessite l'hypothèse 3.1 pour pouvoir synthétiser cette loi de commande. En admettant que l'hypothèse 3.1 est valable, les résultats obtenus à l'aide de l'outil *LMI Toolbox de Matlab* sont donnés comme suit:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7.1053 & -53.5366 \\ 6.1053 & -52.4709 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K_1^d \\ K_2^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0630 & -2.0437 \\ -1.0355 & -1.7258 \end{bmatrix}, \\ X &= \begin{bmatrix} 4.6485 & 0.6475 \\ 0.6545 & 0.1142 \end{bmatrix}, P_{11} = \begin{bmatrix} 20.4518 & 11.0133 \\ 11.0133 & 9.7441 \end{bmatrix}, P_{12} = \begin{bmatrix} -2.8777 & -0.3667 \\ -0.4438 & -0.1235 \end{bmatrix}, \\ P_{22} &= \begin{bmatrix} 0.7258 & 0.0732 \\ 0.0732 & 0.0081 \end{bmatrix}, Q_{11} = \begin{bmatrix} 1.9104 & 0.5068 \\ 0.5068 & 0.3463 \end{bmatrix}, Q_{12} = \begin{bmatrix} -1.1635 & -0.1900 \\ -0.0692 & 0.0455 \end{bmatrix}, \\ Q_{22} &= \begin{bmatrix} 5.7558 & 0.8139 \\ 0.8139 & 0.1417 \end{bmatrix} \text{ et } L = 1.0\text{e-}04 * \begin{bmatrix} 0.1559 & 0.1314 \\ 0.1314 & 0.1365 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'après les figures 4.2, 4.3, 4.5 et 4.6, nous pouvons conclure que le modèle T-S incertain à retard, dans l'exemple 4.1, est bien stabilisé à la fois dans les cas de retard constant et de retard variable dans le temps.

**4.5.2. Exemple 4.2 :** Pour illustrer davantage l'efficacité de notre approche proposée dans le théorème 4.1, nous donnons un second exemple d'un système non linéaire incertain à retard variable dans le temps, qui consiste en un chariot-remorque, représenté sur la figure 4.8, et dont l'objectif est de construire un contrôleur flou de type PDC permettant de le stabiliser. Ce contrôleur PDC prend en compte les gains de retour d'état sans retard et ceux à retards (avec mémoire).

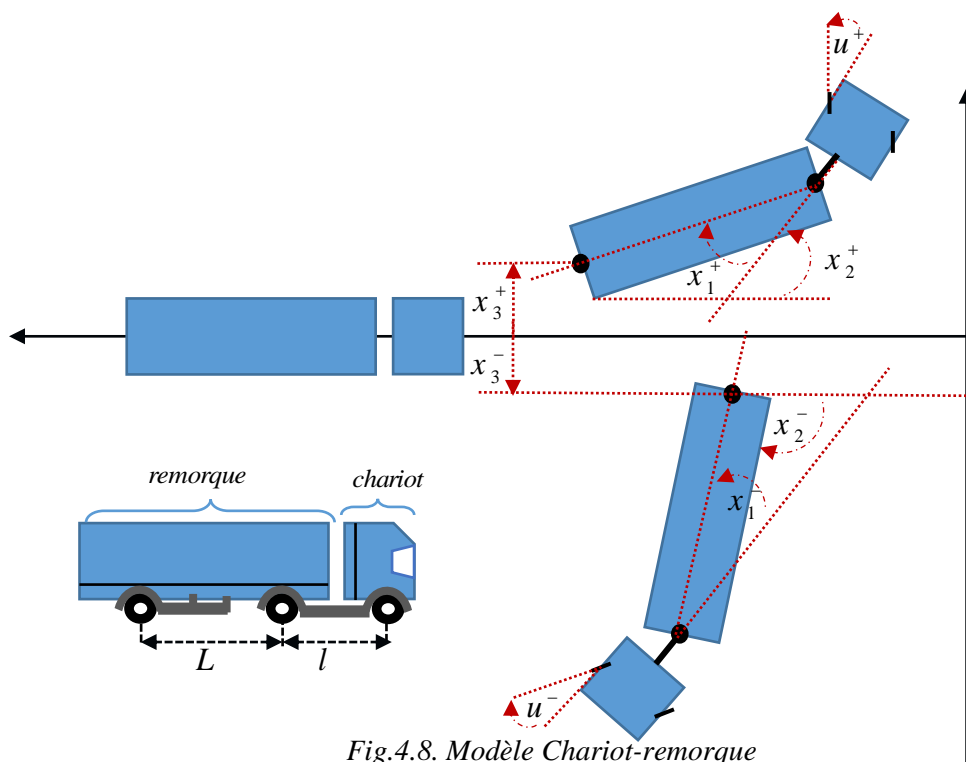


Fig.4.8. Modèle Chariot-remorque

Considérons le modèle chariot-remorque décrit comme suit [115] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a \frac{v\bar{t}}{(L + \Delta L(t))t_0} x_1(t) - (1-a) \frac{v\bar{t}}{(L + \Delta L(t))t_0} x_1(t - \tau(t)) + \frac{v\bar{t}}{(l + \Delta l(t))t_0} u(t) \\ \dot{x}_2(t) = a \frac{v\bar{t}}{(L + \Delta L(t))t_0} x_1(t) + (1-a) \frac{v\bar{t}}{(L + \Delta L(t))t_0} x_1(t - \tau(t)) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{v\bar{t}}{t_0} \sin \left( x_2(t) + a \frac{v\bar{t}}{2(L + \Delta L(t))} x_1(t) + (1-a) \frac{v\bar{t}}{(L + \Delta L(t))t_0} x_1(t - \tau(t)) \right) \end{cases} \quad (4.30)$$

Avec  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  et  $x_3(t)$  représentent respectivement la différence d'angle entre le chariot et la remorque, l'angle de la remorque et la position verticale de l'arrière de la remorque.  $u(t)$  représente l'angle de direction (le signal de commande).

Les paramètres du modèle (4.30) sont :  $l = 2.8$ ,  $L = 5.5$ ,  $v = -1$ ,  $t_0 = 0.5$ ,  $\bar{t} = 2$  et  $d = \frac{10t_0}{\pi}$ . Les plages de variations de  $\Delta L$  et  $\Delta l$  sont définies pour être  $-0.2619 \leq \Delta L \leq 0.2895$  et  $-0.1333 \leq \Delta l \leq 0.1474$ . Le paramètre  $a \in [0, 1]$  appelé coefficient de retard, où  $a = 0$  signifie

qu'aucun retard n'est présent dans le système, quant à  $a = 1$  signifie un retard total dans le système. Dans cet exemple nous choisissons  $a = 0.7$ .

Pour obtenir le modèle T-S à retard équivalent à (4.30), nous posons :

$$\theta(t) = x_2(t) + a \frac{\bar{v}t}{(L + \Delta L(t))t_0} x_1(t) + (1-a) \frac{\bar{v}t}{(L + \Delta L(t))t_0} x_1(t - \tau(t))$$

Le terme non linéaire  $\sin(\theta(t))$  dans l'équation (4.30) peut être approximativement représenté comme suit :

$$\sin(\theta(t)) = h_1(\theta(t)).\theta(t) + d.h_2(\theta(t)).\theta(t) \quad (4.31)$$

avec

$$(h_1(\theta(t)), h_2(\theta(t))) \in [0 \ 1]^2 \text{ et } h_1(\theta(t)) + h_2(\theta(t)) = 1 \quad (4.32)$$

et  $-179.4270^\circ \leq \theta(t) \leq +179.4270^\circ$

En résolvant les deux équations précédentes, nous obtenons :

$$h_1(\theta(t)) = \left( 1 - \frac{1}{1 + \exp(-3(\theta(t) - 0.5\pi))} \right) \times \left( \frac{1}{1 + \exp(-3(\theta(t) + 0.5\pi))} \right) \quad (4.33)$$

$$h_2(\theta(t)) = 1 - h_1(\theta(t))$$

Nous pouvons vérifier à partir de (4.33) que lorsque  $\theta(t)$  est d'environ  $0 \text{ rad}$ , nous aurons  $h_1(\theta(t)) = 1$  et  $h_2(\theta(t)) = 0$ . Alors que lorsque  $\theta(t)$  est d'environ  $\pi \text{ rad}$  ou  $-\pi \text{ rad}$ , nous aurons  $h_1(\theta(t)) = 0$  et  $h_2(\theta(t)) = 1$ . Par conséquent, le système non linéaire (4.30) peut être représenté approximativement par les règles floues T-S suivantes:

**Règle 1 :**

Si  $\theta(t) = a \frac{\bar{v}t}{2L} x_1(t) + (1-a) \frac{\bar{v}t}{2L} x_1(t - \tau(t))$  est environ  $0 \text{ rad}$

Alors  $\dot{x}(t) = (A_1 + \Delta A_1)x(t) + (A_1^d + \Delta A_1^d)x(t - \tau(t)) + B_1 u(t)$

**Règle 2:**

Si  $\theta(t) = a \frac{\bar{v}t}{2L} x_1(t) + (1-a) \frac{\bar{v}t}{2L} x_1(t - \tau(t))$  est environ  $\pm \pi \text{ rad}$

Alors  $\dot{x}(t) = (A_2 + \Delta A_2)x(t) + (A_2^d + \Delta A_2^d)x(t - \tau(t)) + B_2 u(t)$

avec

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} -a \frac{\nu \bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ a \frac{\nu \bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ a \frac{\nu^2 \bar{t}^2}{2Lt_0} & \frac{\nu \bar{t}}{t_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a \frac{\nu \bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ a \frac{\nu \bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ ad \frac{\nu^2 \bar{t}^2}{2Lt_0} & d \frac{\nu \bar{t}}{t_0} & 0 \end{bmatrix}, \\
 A_1^d &= \begin{bmatrix} -(1-a) \frac{\nu \bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a) \frac{\nu \bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a) \frac{\nu^2 \bar{t}^2}{2Lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2^d = \begin{bmatrix} -(1-a) \frac{\nu \bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a) \frac{\nu \bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a)d \frac{\nu^2 \bar{t}^2}{2Lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 B_1 = B_2 &= \begin{bmatrix} \frac{\nu \bar{t}}{lt_0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_{ai}^T = H_{ai}^{dT} = \begin{bmatrix} 0.255 \\ 0.255 \\ 0.255 \end{bmatrix}, \quad i \in \{1,2\}, \quad E_{ai}^T = E_{ai}^{dT} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i \in \{1,2\}
 \end{aligned}$$

Dans cet exemple, nous n'allons considérer que le cas incertain, c'est à dire  $\Delta A_i \neq 0$  et  $\Delta A_i^d \neq 0$ .

Pour illustrer la puissance des conditions LMIs proposées au théorème 4.1, nous estimons d'abord la valeur  $MAUB(\bar{\tau})$ . Le résultat, est obtenu à l'aide de l'outil *LMI Toolbox de Matlab*. En appliquant le théorème 4.1 pour  $\eta = 0.1$ ,  $\varepsilon_1 = 0.1$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$  et  $\varepsilon_3 = 0.9$  nous obtenons les gains du contrôleur PDC comme suit :

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.3933 & -14.3075 & 1.0986 \\ 4.4345 & -14.4449 & 1.1362 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} K_1^d \\ K_2^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1893 & 0.5527 & -0.0264 \\ 0.1888 & 0.6016 & -0.0426 \end{bmatrix},$$

L'estimation de  $MAUB(\bar{\tau})$  est illustrée dans le tableau suivant.

Résultats considérés	MAUB( $\bar{\tau}$ )
Théorème 3 dans [93]	4.6400
Théorème 4 dans [41]	10.4653
Théorème 2 dans [72]	25.00
Théorème 3 dans [115]	40.00
Théorème 4 ( $ \beta_i  < 10, m = 3$ ) dans [16]	47,920
Théorème 2 dans [35]	5,248,209
Théorème 3 [19]	6,357,204
<b>Théorème 4.</b>	<b>9,744,322</b>

Tableau 4.3 : Comparaison de (MAUB( $\bar{\tau}$ )) pour différentes valeurs de  $\eta$  - exemple 4.2.

Le tableau 4.3 montre le résultat de la comparaison de MAUB( $\bar{\tau}$ ) obtenue dans plusieurs études récentes. D'après ce tableau, nous pouvons confirmer que les résultats proposés dans le théorème 4.1 fournissent un plus grand temps de retard que les précédents.

Afin de simuler le modèle du chariot-remorque, nous prenons les fonctions d'appartenance définies en (4.33), en outre, nous prenons le cas particulier  $\eta = 0.1$  et  $\bar{\tau} = 12 \text{ sec}$ . Nous supposons également que la condition initiale est  $x(0) = [0.5\pi \quad -0.75\pi \quad 5]^T$  et le signal incertain  $\delta(t)$  est le même que dans l'exemple précédent.

Les figures 4.9 et 4.10 montrent respectivement les résultats de simulation des réponses d'état du modèle  $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)]^T$  du chariot-remorque ainsi que le signal de commande  $u(t)$  sous l'hypothèse de  $\tau(t) = \frac{\bar{\tau}}{2} \left( 1 + \sin\left(\frac{2\eta}{\bar{\tau}} t\right) \right)$  avec  $\bar{\tau} = 12 \text{ sec}$  et  $\eta = 0.1$ .

Nous remarquons qu'à partir des figure 4.9 et 4.10, le contrôleur flou conçu peut uniformément asymptotiquement stabiliser le modèle flou du chariot-remorque en boucle fermée (4.30).

**Remarque 4.4:** Nous remarquons que la valeur maximale admissible de la borne supérieure du retard est très grande (MAUB( $\bar{\tau}$ ) = 9,744,322s ). Cela signifie que la loi de commande développée est capable de stabiliser le système chariot-remorque même dans les retards importants. Par conséquent, cette valeur MAUB( $\bar{\tau}$ ) ne signifie pas forcément que le système doit obligatoirement l'atteindre.



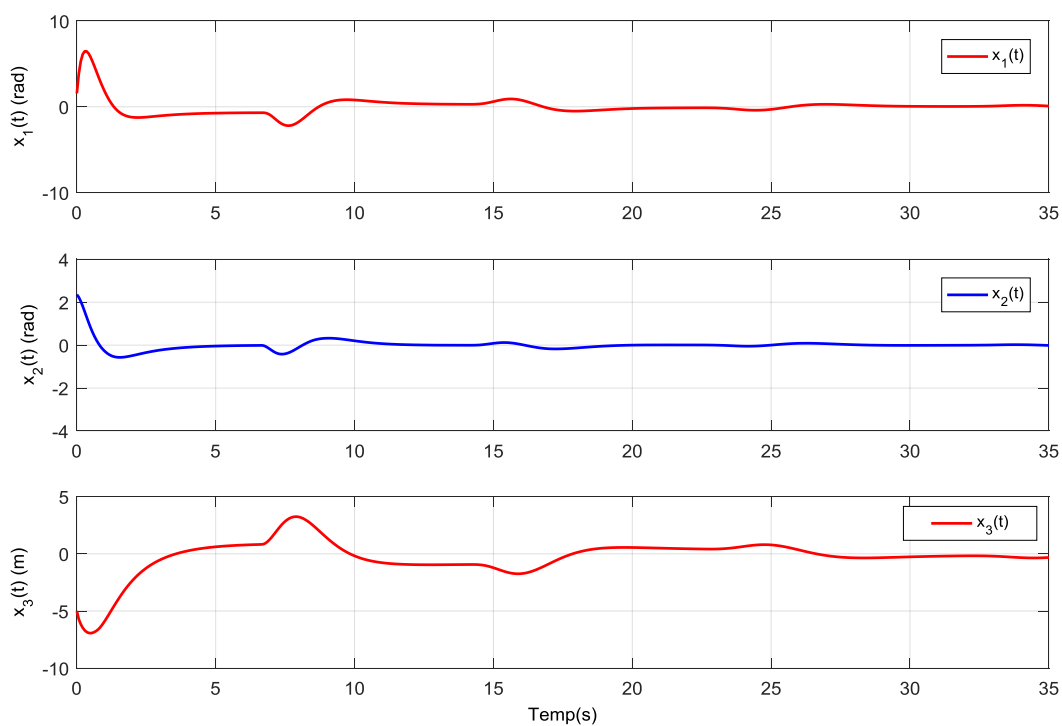


Fig. 4.9. Réponses temporelles du système incertain du chariot –remorque (4.30)

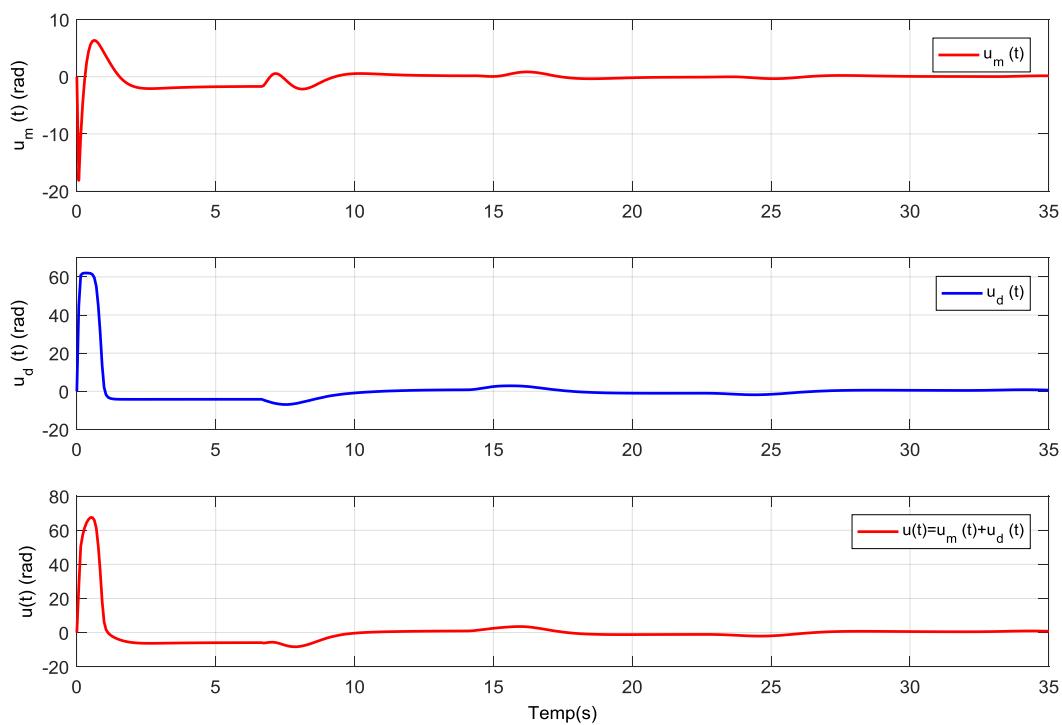


Fig. 4.10. Signal de commande

#### 4.6. Conclusion :

Nous avons abordé brièvement dans ce chapitre le problème de la stabilisation robuste des modèles T-S incertains à retards variables. Une brève étude de la stabilisation robuste du modèle T-S incertain en boucle fermée a été réalisée où de nouvelles conditions LMIs ont été obtenues grâce au choix appropriée d'une fonction LKF, l'application de l'inégalité de Jensen étendue ainsi que l'utilisation du lemme du Finsler. Ces conditions LMIs sont exploitées afin de synthétiser un contrôleur de type PDC. Dans ce sens, nous avons choisi la même loi de commande que le cas sans incertitudes, c'est à dire une loi de commande PDC incluant les gains sans mémoire et ceux avec mémoire, parce que cette loi de commande a montré son efficacité dans l'amélioration du conservatisme des systèmes à retards variables.

Enfin, pour montrer la puissance et l'efficacité des conditions LMIs proposées dans le théorème 4.1, la puissance du contrôleur PDC synthétisé ainsi que l'amélioration du conservatisme par rapport à plusieurs résultats antérieurs, nous avons mis en œuvre deux exemples de simulation sous l'environnement Matlab dont les résultats sont:

- Le domaine de la solution des conditions LMIs proposées par le théorème 4.1 (et son corollaire) est plus large que celui donné en [12] et [13] (où les gains retardés n'ont pas été pris en compte) en particulier pour une vitesse de variation élevée ( $\eta > 1$ ) du retard  $\tau(t)$  ce qui signifie que l'introduction d'un gain de retour d'état retardé ( $K_i^d \neq 0$ ) permet de relâcher de manière significative le champs de faisabilité des conditions LMIs malgré la présence des incertitudes.

- L'estimation de la valeur maximale admissible de la borne supérieur du retard  $MAUB(\bar{\tau})$  est plus grande que dans toutes les études précédentes (Citées dans les tableaux 4.1 et 4.3) surtout pour une vitesse de variation  $\eta$  élevée et connue, ce qui signifie que le contrôleur PDC proposé permet de stabiliser le système et ce même si le retard est important.

# Conclusion générale et perspectives 1

Dans le cadre des travaux de cette thèse, nous avons abordé le problème de la commande des systèmes non linéaires à retard et leur stabilité. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la relaxation des conditions de stabilité exprimées en termes d'LMIs en synthétisant des contrôleurs PDC pour les modèles T-S à retard variable dans l'état.

Les résultats issus de ces travaux de recherche apportent deux contributions principales. La première concerne la commande et la stabilité des modèles T-S à retard et la seconde touche la commande robuste des modèles T-S incertains à retard variable et leurs stabilités.

Dans cette conclusion, nous revenons, chapitre par chapitre, sur les différents points abordés en mettant l'accent sur les contributions apportées.

Le premier chapitre a permis de situer notre étude en dressant un état de l'art sur les modèles T-S à retards. Nous avons donné un bref aperçu sur les principaux travaux de la littérature traitant la stabilité et la synthèse des contrôleurs pour ce type de modèles afin de positionner notre contribution.

Dans le second chapitre, nous avons présenté quelques notions théoriques fondamentales relatives aux systèmes à retard. Nous avons tout d'abord présenté quelques exemples de systèmes à retards, différents modèles de ces systèmes usuellement rencontrés dans la littérature du domaine et certains types de retards. Nous avons également exposé quelques définitions concernant la stabilité au sens de Lyapunov, ainsi que certains théorèmes usuels tels que les théorèmes de Lyapunov, de Lyapunov-Krasovskii et de Lyapunov-Razumikhin. Nous avons vu que la stabilité des modèles T-S à retard s'étudiait principalement suivant deux approches temporelles : la stabilité indépendante et la stabilité dépendante. D'où, nous avons conclu que la seconde approche, reposant sur la fonction LKF et qui dépend, à la fois, de l'état instantané et de son "passé", est la plus fréquemment rencontrée dans la littérature du domaine.

Notre contribution apparaît à partir du troisième chapitre de cette thèse. En effet, nous avons évoqué, dans sa première partie, quelques résultats, notions et outils nécessaires, portant sur la stabilité et la synthèse des contrôleurs pour les modèles T-S standards afin d'appréhender nos contributions qui ont été développées dans la deuxième partie de ce chapitre. A la fin de cette partie, un exemple académique, d'un système TORA a été simulé pour illustrer la puissance de l'approche LMI et l'efficacité de la méthode de modélisation 'secteurs non-linéaires'.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons présenté nos premiers résultats théoriques sur la commande des modèles T-S à retard variable. Après avoir abordé les principaux types de modèles T-S à retard et rappeler les propriétés et les lemmes, utiles pour la suite de cette thèse, nous avons proposé de nouvelles conditions relâchées, exprimées en terme de LMIs et dépendant du retard et qui tiennent en compte la connaissance des limites du retard variable dans le temps et de ses taux de variation, et cela dans le cadre de l'utilisation d'une loi de commande PDC. L'amélioration du conservatisme est apportée par trois points essentiels : Le choix approprié d'une fonction LKF augmentée, l'application d'une extension de l'inégalité de Jensen et l'utilisation de lemme du Finsler.

Dans ce contexte, nous avons proposé une loi de commande PDC qui comprend, à la fois, les gains de retour d'état sans mémoire et ceux retardés. Cette loi de commande, comme nous l'avons souligné précédemment, nécessite la disponibilité du retard à chaque instant. Sous cette hypothèse, nous avons obtenu des conditions LMIs relâchées de manière significative en particulier pour un taux de variation du retard supérieur à 1. Au cas où cette hypothèse ne puisse être vérifiée, nous avons proposé des corollaires qui apportent, malgré tout, une légère relaxation lorsque la variation du retard est inférieure à 1. Ces différents résultats théoriques, ont été validés par des résultats numériques et des simulations, sous l'environnement Matlab.

A l'instar du troisième chapitre, nous nous sommes intéressés, dans le quatrième chapitre à la stabilisation et la commande robuste des modèles T-S incertains à retard variable. Après avoir abordé la structure du modèle étudié (modèle T-S incertain à retard) et la loi de commande PDC robuste proposée, nous avons présenté le deuxième résultat de notre contribution à savoir le développement de nouvelles conditions LMIs, moins conservatives de manière significative, et en particulier pour un taux de variation du retard supérieur à 1. Cette approche repose sur la même hypothèse annoncée dans le chapitre précédent (le retard est mesurable à chaque instant).

Différents corollaires ont été également proposés à chaque fois que les propriétés du retard changent.

Enfin, pour montrer l'efficacité des conditions LMIs proposées, la puissance du contrôleur PDC synthétisé ainsi que l'amélioration du conservatisme par rapport à plusieurs résultats antérieurs, nous avons mis en œuvre deux exemples de simulation sous Matlab. A partir de ces résultats, nous avons conclu que le domaine des solutions de nos conditions LMIs proposées est plus large que celui donné dans [12] et [13], en particulier pour une vitesse de variation du retard élevée ( $\eta > 1$ ). Ce qui signifie que l'introduction d'un gain de retour d'état retardé ( $K_j^d \neq 0$ ) a permis de relâcher de manière significative le champ de faisabilité des conditions LMIs malgré la présence des incertitudes. Ainsi, l'estimation de la valeur maximale admissible de la borne supérieure du retard  $MAUB(\bar{\tau})$  est plus grande que dans toutes les études précédentes, surtout pour une vitesse de variation connue et élevée, ce qui signifie que le contrôleur PDC proposé permet de stabiliser le système dans le cas où le retard est important.

En perspective, à partir de ce travail, plusieurs axes sont envisageables. Nous en donnerons ci-dessous quelques-uns:

- Dans le cadre de nos travaux, nous avons supposé que la borne inférieure du retard est nulle, c'est-à-dire  $\tau(t) \in [0 \ \bar{\tau}]$ , en effet, cette supposition peut introduire un conservatisme sur l'obtention des conditions LMIs. De ce fait, la considération de la borne inférieure non nulle du retard c'est-à-dire,  $\tau(t) \in [\underline{\tau} \ \bar{\tau}]$  nous paraît très prometteuse pour réduire le conservatisme. Il est certain que, pour aboutir aux résultats, il conviendrait de développer une loi de commande (qui prend en considération l'état actuelle  $x(t)$ , les états passés  $x(t - \underline{\tau})$  et  $x(t - \bar{\tau})$ ) de la forme  $u(t) = Kx(t) + K_{\min}x(t - \underline{\tau}) + K_{\max}x(t - \bar{\tau})$  où  $K$ ,  $K_{\min}$  et  $K_{\max}$  sont les vecteurs de gains du contrôleur PDC que nous devons synthétiser. Il convient également de revisiter les travaux de nos illustres prédécesseurs concernant la commande des modèles T-S à retard variable dans un intervalle.
- Notons que dans d'autres travaux récemment publiés, par exemple [39], [41], [43] et [45], les auteurs ont considéré le partitionnement du retard dans le temps pour l'amélioration du conservatisme. Etant donné que de telles approches de partage n'ont pas été prises en compte dans la présente étude, elles constituent une perspective intéressante de ce travail.

- Finalement, il serait très intéressant d'étudier la stabilité robuste des modèles T-S incertains et perturbés à retard variable par d'autres approches telle que la méthode  $H_\infty$ .

A la fin, le problème de la commande des systèmes non linéaires à retard variable reste ouvert et constitue une plateforme intéressante pour les chercheurs du domaine.

# Références bibliographiques

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, no. 1, pp. 116–132, 1985.
- [2] K. Tanaka and H. O. Wang, *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons, 2001.
- [3] K. Tanaka, T. Hori, and H. O. Wang, "New parallel distributed compensation using time derivative of membership functions: a fuzzy Lyapunov approach," in *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on*, 2001, vol. 4, pp. 3942–3947.
- [4] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM, 1994.
- [5] Z. Yi and P. A. Heng, "Stability of fuzzy control systems with bounded uncertain delays," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 10, no. 1, pp. 92–97, 2002.
- [6] K. Gu, J. Chen, and V. L. Kharitonov, *Stability of time-delay systems*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [7] M. Wu, Y. He, and J.-H. She, *Stability analysis and robust control of time-delay systems*. 2010.
- [8] E. Fridman, *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*. Springer, 2014.
- [9] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues," *IEEE Trans. fuzzy Syst.*, vol. 4, no. 1, pp. 14–23, 1996.
- [10] J. Yoneyama, "Robust stability and stabilization for uncertain Takagi – Sugeno fuzzy time-delay systems," vol. 158, pp. 115–134, 2007.
- [11] K. Tanaka and H. O. Wang, *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons, 2004.
- [12] L. Li and X. Liu, "New results on delay-dependent robust stability criteria of uncertain fuzzy systems with state and input delays," *Inf. Sci. (Ny)*, vol. 179, no. 8, pp. 1134–1148, 2009.
- [13] H. Gassara, A. El Hajjaji, and M. Chaabane, "Robust control of T-S fuzzy systems with time-varying delay using new approach," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 20, no. 14, pp. 1566–1578, 2010.
- [14] J. An and G. Wen, "Improved stability criteria for time-varying delayed T–S fuzzy systems via delay partitioning approach," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 185, no. 1, pp. 83–94, 2011.
- [15] O. M. Kwon, M.-J. Park, S.-M. Lee, and J. H. Park, "Augmented Lyapunov--Krasovskii functional approaches to robust stability criteria for uncertain Takagi--Sugeno fuzzy systems with time-varying delays," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 201, pp. 1–19, 2012.
- [16] L. Zhao, H. Gao, and H. R. Karimi, "Robust stability and stabilization of uncertain TS fuzzy systems with time-varying delay: an input.output approach," in *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 2013, vol. 21, no. 5, pp. 883–897.
- [17] H.-B. Zeng, J. H. Park, J.-W. Xia, and S.-P. Xiao, "Improved delay-dependent stability criteria for T-S fuzzy systems with time-varying delay," *Appl. Math. Comput.*, vol. 235, pp. 492–501, 2014.

- [18] B. Fayçal and N. Nouredine, "An LMI approach to robust  $H_\infty$  control and stabilization analysis for uncertain TS fuzzy systems with state and input time-delays," in *Control, Engineering & Information Technology (CEIT), 2015 3rd International Conference on*, 2015, pp. 1–6.
- [19] S. H. Tsai, Y. A. Chen, and J. C. Lo, "A novel stabilization condition for a class of T–S fuzzy time-delay systems," *Neurocomputing*, vol. 175, no. PartA, pp. 223–232, 2015.
- [20] F. Bourahala, K. Guelton, F. Khaber, and N. Manamanni, "Improvements on PDC Controller Design for Takagi–Sugeno Fuzzy Systems with State Time-Varying Delays," in *4th IFAC International Conference on Intelligent Control and Automation Sciences*, 2016.
- [21] F. Bourahala, K. Guelton, F. Khaber, and N. Manamanni, "Robust controller design for uncertain TS fuzzy systems with time-varying delays," in *Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2016 IEEE International Conference on*, 2016, pp. 2337–2342.
- [22] O. M. Kwon, M. J. Park, J. H. Park, and S. M. Lee, "Stability and stabilization of TS fuzzy systems with time-varying delays via augmented Lyapunov–Krasovskii functionals," *Inf. Sci. (Ny)*, vol. 372, pp. 1–15, 2016.
- [23] F. Bourahala, K. Guelton, N. Manamanni, and F. Khaber, "Relaxed Controller Design Conditions for Takagi–Sugeno Systems with State Time-Varying Delays," *Int. J. Fuzzy Syst.*, pp. 1–11, 2016.
- [24] Y.-Y. Cao and P. M. Frank, "Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 8, no. 2, pp. 200–211, 2000.
- [25] J. Yoneyama, "New delay-dependent approach to robust stability and stabilization for Takagi–Sugeno fuzzy time-delay systems," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 158, no. 20, pp. 2225–2237, 2007.
- [26] A. Chen and J. Wang, "Delay-dependent  $L_2$ – $L_\infty$  control of linear systems with multiple time-varying state and input delays," *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, vol. 13, no. 1, pp. 486–496, 2012.
- [27] C. Peng and M.-R. Fei, "An Improved Result on the Stability of Uncertain T-S Fuzzy Systems with Interval Time-varying Delay," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 212, pp. 97–109, 2013.
- [28] Z. Lian, Y. He, C.-K. Zhang, and M. Wu, "Further robust stability analysis for uncertain Takagi–Sugeno fuzzy systems with time-varying delay via relaxed integral inequality," *Inf. Sci. (Ny)*, vol. 409, pp. 139–150, 2017.
- [29] P. Mahmoudabadi, M. Shasadeghi, and J. Zarei, "New stability and stabilization conditions for nonlinear systems with time-varying delay based on delay-partitioning approach," *ISA Trans.*, 2017.
- [30] Y.-Y. Cao and P. M. Frank, "Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi–Sugeno fuzzy models," *Fuzzy sets Syst.*, vol. 124, no. 2, pp. 213–229, 2001.
- [31] P. Park, S. S. Lee, and D. J. Choi, "State-feedback stabilization for nonlinear time-delay systems: A new fuzzy weighting-dependent Lyapunov–Krasovskii functional approach," in *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on*, 2003, vol. 5, pp. 5233–5238.
- [32] R.-J. Wang, W.-W. Lin, and W.-J. Wang, "Stabilizability of linear quadratic state feedback for uncertain fuzzy time-delay systems," *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern. Part B Cybern.*, vol. 34, no. 2, pp. 1288–1292, 2004.
- [33] J. Yoneyama, "Design of  $H_\infty$ -control for fuzzy time-delay systems," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 151, no. 1, pp. 167–190, 2005.
- [34] F. O. Souza, V. C. S. Campos, and R. M. Palhares, "On delay-dependent stability conditions for Takagi–Sugeno fuzzy systems," *J. Franklin Inst.*, vol. 351, no. 7, pp. 3707–3718, 2014.



- [35] Z. Zhang, C. Lin, and B. Chen, "New stability and stabilization conditions for T--S fuzzy systems with time delay," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 263, pp. 82–91, 2015.
- [36] S.-H. Tsai, Y.-A. Chen, and J.-C. Lo, "A novel stabilization condition for a class of T--S fuzzy time-delay systems," *Neurocomputing*, vol. 175, pp. 223–232, 2016.
- [37] Y. He, Q.-G. Wang, L. Xie, and C. Lin, "Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 52, no. 2, pp. 293–299, 2007.
- [38] Y. S. Moon, P. Park, W. H. Kwon, and Y. S. Lee, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems," *Int. J. Control*, vol. 74, no. 14, pp. 1447–1455, 2001.
- [39] J. Yang, W.-P. Luo, Y.-H. Wang, and C.-S. Duan, "Improved stability criteria for TS fuzzy systems with time-varying delay by delay-partitioning approach," *Int. J. Control. Autom. Syst.*, vol. 13, no. 6, pp. 1521–1529, 2015.
- [40] T. M. Guerra, V. Estrada-Manzo, and Z. Lendek, "Observer design for Takagi--Sugeno descriptor models: An LMI approach," *Automatica*, vol. 52, pp. 154–159, 2015.
- [41] Y. Zhao, H. Gao, J. Lam, and B. Du, "Stability and Stabilization of Delayed T--S Fuzzy Systems: A Delay Partitioning Approach," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 17, no. 4, pp. 750–762, 2009.
- [42] J. Yang, W. Luo, J. Cheng, and Y. Wang, "Further improved stability criteria for uncertain T--S fuzzy systems with interval time-varying delay by delay-partitioning approach," *ISA Trans.*, vol. 58, pp. 27–34, 2015.
- [43] J. Yang, W.-P. Luo, Y.-H. Wang, and J. Cheng, "Further improved stability criteria for uncertain T--S fuzzy systems with time-varying delay by (m, N)-delay-partitioning approach," *ISA Trans.*, vol. 59, pp. 20–28, 2015.
- [44] L. Li, X. Liu, and T. Chai, "New approaches on  $H_\infty$  control of T--S fuzzy systems with interval time-varying delay," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 160, no. 12, pp. 1669–1688, 2009.
- [45] M. K. Song, J. B. Park, and Y. H. Joo, "A delay partitioning approach to delay-range-dependent stability analysis of fuzzy systems," *Int. J. Control. Autom. Syst.*, vol. 10, no. 1, pp. 143–149, 2012.
- [46] C. Peng, Y.-C. Tian, and E. Tian, "Improved delay-dependent robust stabilization conditions of uncertain T--S fuzzy systems with time-varying delay," *Fuzzy sets Syst.*, vol. 159, no. 20, pp. 2713–2729, 2008.
- [47] J. Yoneyama, "Robust stability and stabilization for uncertain Takagi--Sugeno fuzzy time-delay systems," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 158, no. 2, pp. 115–134, 2007.
- [48] F. BOURAHALA and F. KHABER, "Delay-Dependent Approach to Robust  $H_\infty$  control and Stabilization Analysis for Uncertain Takagi-Seguno Fuzzy Systems with State and Input Time-Delays."
- [49] R. C. L. F. Oliveira, M. C. De Oliveira, and P. L. D. Peres, "Robust state feedback LMI methods for continuous-time linear systems: Discussions, extensions and numerical comparisons," in *IEEE Int. Symp. on Computer-Aided Control System Design*, 2011.
- [50] A. Jaadari, T.-M. Guerra, A. Sala, M. Bernal, and K. Guelton, "New controllers and new designs for continuous-time Takagi-Sugeno models," in *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 2012, pp. 1–7.
- [51] M. Chadli and T.-M. Guerra, "LMI solution for robust static output feedback control of discrete Takagi--Sugeno fuzzy models," *Fuzzy Syst. IEEE Trans.*, vol. 20, no. 6, pp. 1160–1165, 2012.

- [52] T. González, R. Márquez, M. Bernal, and T. M. Guerra, "Nonquadratic Controller and Observer Design for Continuous TS Models: A Discrete-Inspired Solution," *Int. J. Fuzzy Syst.*, vol. 18, no. 1, pp. 1–14, 2016.
- [53] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs," *IEEE Trans. fuzzy Syst.*, vol. 6, no. 2, pp. 250–265, 1998.
- [54] H. D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, and Y. Yamamoto, "Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design," *IEEE Trans. fuzzy Syst.*, vol. 9, no. 2, pp. 324–332, 2001.
- [55] E. Kim and H. Lee, "New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 8, no. 5, pp. 523–534, 2000.
- [56] M. C. M. Teixeira, E. Assunção, and R. G. Avellar, "On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 11, no. 5, pp. 613–623, 2003.
- [57] C.-H. Fang, Y.-S. Liu, S.-W. Kau, L. Hong, and C.-H. Lee, "A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of TS fuzzy control systems," *IEEE Trans. fuzzy Syst.*, vol. 14, no. 3, pp. 386–397, 2006.
- [58] F. Bourahala, F. Khaber, H. Arioui, R. Merzouki, and H. A. Abbassi, "New Stability Conditions of Takagi-Sugeno Fuzzy Systems via LMI," in *AIP Conference Proceedings*, 2008, vol. 1019, no. 1, pp. 109–114.
- [59] K. F. Bourahala Fayçal, "Nouvelles Conditions de Stabilité des Systèmes Flous de Takagi-Sugeno par l'Approche LMI," in *Conférence Internationale sur l'Ingénierie de l'Électronique ICEE'08, Oran, Algerie*, 2009.
- [60] A. Sala, "On the conservativeness of fuzzy and fuzzy-polynomial control of nonlinear systems," *Ann. Rev. Control*, vol. 33, no. 1, pp. 48–58, 2009.
- [61] K. Guelton, T.-M. Guerra, M. Bernal, T. Bouarar, and N. Manamanni, "Comments on fuzzy control systems design via fuzzy Lyapunov functions," *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern. Part B*, vol. 40, no. 3, pp. 970–972, 2010.
- [62] T.-M. Guerra, M. Bernal, A. Kruszewski, and M. Afroun, "A way to improve results for the stabilization of continuous-time fuzzy descriptor models," in *Decision and Control, 2007 46th IEEE Conference on*, 2007, pp. 5960–5964.
- [63] T. Bouarar, K. Guelton, and N. Manamanni, "Robust fuzzy Lyapunov stabilization for uncertain and disturbed Takagi--Sugeno descriptors," *ISA Trans.*, vol. 49, no. 4, pp. 447–461, 2010.
- [64] A. Sala and T. M. Guerra, "Stability analysis of fuzzy systems: membership-shape and polynomial approaches," *IFAC Proc. Vol.*, vol. 41, no. 2, pp. 5605–5610, 2008.
- [65] M. Bernal, T. M. Guerra, and A. Kruszewski, "A membership-function-dependent approach for stability analysis and controller synthesis of Takagi--Sugeno models," *Fuzzy sets Syst.*, vol. 160, no. 19, pp. 2776–2795, 2009.
- [66] K. Tanaka, T. Hori, and H. O. Wang, "A fuzzy Lyapunov approach to fuzzy control system design," in *American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001*, 2001, vol. 6, pp. 4790–4795.
- [67] M. Johansson, A. Rantzer, and K.-E. Arzen, "Piecewise quadratic stability of fuzzy systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 7, no. 6, pp. 713–722, 1999.
- [68] A. Sala, T. M. Guerra, and R. Babuška, "Perspectives of fuzzy systems and control," *Fuzzy sets Syst.*, vol. 156, no. 3, pp. 432–444, 2005.

- [69] T. M. Guerra, M. Bernal, K. Guelton, and S. Labiod, "Non-quadratic local stabilization for continuous-time Takagi--Sugeno models," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 201, pp. 40–54, 2012.
- [70] M. Bernal and T. M. Guerra, "Generalized nonquadratic stability of continuous-time Takagi--Sugeno models," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 18, no. 4, pp. 815–822, 2010.
- [71] M. Wu, Y. He, J.-H. She, and G.-P. Liu, "Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems," *Automatica*, vol. 40, no. 8, pp. 1435–1439, 2004.
- [72] B. Chen, X. Liu, and S. Tong, "New delay-dependent stabilization conditions of T-S fuzzy systems with constant delay," *Fuzzy sets Syst.*, vol. 158, no. 20, pp. 2209–2224, 2007.
- [73] L. Wu, X. Su, and P. Shi, *Fuzzy Control Systems with Time-Delay and Stochastic Perturbation*. Springer, 2015.
- [74] K. F. Bourahala Fayçal, "Delay-Dependent Approach to Robust  $H_\infty$  control and Stabilization Analysis for Uncertain Takagi-Seguno Fuzzy Systems with State and Input Time-Delays," in *22èmes rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA 2013)*, 10-11 octobre 2013, Reims, France, 2013.
- [75] K. F. Bourahala Faical, "Stability analysis of continues T-S fuzzy systems with time delay: delay-independent and linear matrix inequalities approach," in *2nd international conference on information processing and electrical engineering ICIPEE'12*, 2012.
- [76] K. F. Bourahala Fayçal, "Robust Stabilization Analysis of Uncertain T-S Fuzzy Systems with Constant State Delay: TimeDelay-Dependent and LMI Approach," in *Firt international conference on electrical engineering and control applications ICEECA'2012 Khenchela, Algeria*, 2012.
- [77] K. F. Bourahala Fayçal, "Robust Control and Stabilization Analysis of Uncertain T-S Fuzzy Systems: Time DelayDependent and LMI Approach," in *International Conference on Electromechanical Engineering (ICEE'2012) Skikda, Algeria, 20-22 November 2012*, 2012.
- [78] K. F. Bourahala Fayçal, "Relaxation of the Stability Conditions of Fuzzy Nonlinear Systems of Takagi-Seguno: An LMI Approach," in *Conférence Internationale sur la mécatronique CIAM'11 Oran-Algerie*, 2011.
- [79] A. N. Bourahala Fayçal Khaber Farid, "An LMI Approach to Robust Stabilization Analysis for Uncertain Takagi-Seguno Fuzzy Systems with State and Input Time Delays," in *5th international conference on electronics engineering, ICEE 2013, Oran-Algeria*, 2013.
- [80] J. Chen, C. Lin, and B. Chen, "Improved stability and stabilization criteria for TS fuzzy systems with time-varying delay," in *Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2017 IEEE International Conference on*, 2017, pp. 1–6.
- [81] R. Datta, R. Dey, B. Bhattacharya, and A. Chakraborti, "Improved stability condition for fuzzy systems with interval time varying delay," in *Fuzzy Systems Association and 9th International Conference on Soft Computing and Intelligent Systems (IFSA-SCIS), 2017 Joint 17th World Congress of International*, 2017, pp. 1–6.
- [82] Z. Lian, Y. He, C.-K. Zhang, and M. Wu, "Stability analysis for TS fuzzy systems with time-varying delay via free-matrix-based integral inequality," *Int. J. Control. Autom. Syst.*, vol. 14, no. 1, pp. 21–28, 2016.
- [83] J. Chen, S. Xu, Y. Li, Z. Qi, and Y. Chu, "Improvement on stability conditions for continuous-time TS fuzzy systems," *J. Franklin Inst.*, no. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfranklin.2016.03.018>, 2016.
- [84] J. An, T. Li, G. Wen, and R. Li, "New stability conditions for uncertain TS fuzzy systems with

- interval time-varying delay," *Int. J. Control. Autom. Syst.*, vol. 10, no. 3, pp. 490–497, 2012.
- [85] C. Peng, Y.-C. Tian, and E. Tian, "Improved delay-dependent robust stabilization conditions of uncertain T--S fuzzy systems with time-varying delay," *Fuzzy sets Syst.*, vol. 159, no. 20, pp. 2713–2729, 2008.
- [86] C. Lin, Q.-G. Wang, and T. H. Lee, "Delay-dependent LMI conditions for stability and stabilization of T--S fuzzy systems with bounded time-delay," *Fuzzy sets Syst.*, vol. 157, no. 9, pp. 1229–1247, 2006.
- [87] X. Su, P. Shi, L. Wu, and Y.-D. Song, "A novel approach to filter design for T--S fuzzy discrete-time systems with time-varying delay," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 20, no. 6, pp. 1114–1129, 2012.
- [88] X. Su, P. Shi, L. Wu, and Y.-D. Song, "A novel control design on discrete-time Takagi--Sugeno fuzzy systems with time-varying delays," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 21, no. 4, pp. 655–671, 2013.
- [89] L. A. Mozelli, F. O. Souza, and R. M. Palhares, "A new discretized Lyapunov--Krasovskii functional for stability analysis and control design of time-delayed TS fuzzy systems," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 21, no. 1, pp. 93–105, 2011.
- [90] H.-N. Wu and H.-X. Li, "New Approach to Delay-Dependent Stability Analysis and Stabilization for Continuous-Time Fuzzy Systems With Time-Varying Delay," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 15, no. 3, pp. 482–493, 2007.
- [91] P. Park, J. W. Ko, and C. Jeong, "Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays," *Automatica*, vol. 47, no. 1, pp. 235–238, 2011.
- [92] P.-W. Tsai and C.-W. Chen, "A novel criterion for nonlinear time-delay systems using LMI fuzzy Lyapunov method," *Appl. Soft Comput.*, vol. 25, pp. 461–472, 2014.
- [93] C. Peng and Q.-L. Han, "Delay-range-dependent robust stabilization for uncertain T--S fuzzy control systems with interval time-varying delays," *Inf. Sci. (Ny)*, vol. 181, no. 19, pp. 4287–4299, 2011.
- [94] E. Fridman and U. Shaked, "A descriptor system approach to  $H_\infty$  control of linear time-delay systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 47, no. 2, pp. 253–270, 2002.
- [95] C. Li, H. Wang, and X. Liao, "Delay-dependent robust stability of uncertain fuzzy systems with time-varying delays," *IEE Proceedings--Control Theory Appl.*, vol. 151, no. 4, pp. 417–421, 2004.
- [96] P. Park and others, "A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, no. 4, pp. 876–877, 1999.
- [97] Y. Liu, J. H. Park, and S. M. Lee, "Further results on stability criteria for TS fuzzy systems with time-varying delay," in *Control Conference (CCC), 2017 36th Chinese*, 2017, pp. 4261–4265.
- [98] F. Liu, M. Wu, Y. He, and R. Yokoyama, "New delay-dependent stability criteria for T--S fuzzy systems with time-varying delay," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 161, no. 15, pp. 2033–2042, 2010.
- [99] C. Peng and Y.-C. Tian, "Delay-dependent robust stability criteria for uncertain systems with interval time-varying delay," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 214, no. 2, pp. 480–494, 2008.
- [100] Z. Guo, X. Jiang, H. Fan, and Q. Yang, "A stability analysis for a class of systems with time-varying delay," in *Control Conference (CCC), 2017 36th Chinese*, 2017, pp. 395–398.
- [101] Z. Zhang, X. Ban, X. Huang, and X. Gao, "New Delay-dependent Robust Stability for TS Fuzzy Systems with Interval Time-varying Delay," in *Computational Sciences and Optimization (CSO), 2012 Fifth International Joint Conference on*, 2012, pp. 826–830.

- [102] E. Tian, D. Yue, and Y. Zhang, "Delay-dependent robust  $H_\infty$  control for T-S fuzzy system with interval time-varying delay," *Fuzzy sets Syst.*, vol. 160, no. 12, pp. 1708–1719, 2009.
- [103] A. Jaadari, T. M. Guerra, A. Sala, and M. Bernal, "Finsler's relaxation for local H-infinity controller design of continuous-time Takagi-Sugeno models via non-quadratic Lyapunov functions," in *American Control Conference (ACC), 2013*, 2013, pp. 5648–5653.
- [104] A. Seuret and F. Gouaisbaut, "Wirtinger-based integral inequality: application to time-delay systems," *Automatica*, vol. 49, no. 9, pp. 2860–2866, 2013.
- [105] B.-J. Rhee and S. Won, "A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design," *Fuzzy sets Syst.*, vol. 157, no. 9, pp. 1211–1228, 2006.
- [106] Y. He, M. Wu, J.-H. She, and G.-P. Liu, "Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 49, no. 5, pp. 828–832, 2004.
- [107] J. Chen, "A note on 'New stability and stabilization conditions for T-S fuzzy systems with time delay' [Fuzzy Sets Syst. 263 (2015) 82--91]," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 277, pp. 154–155, 2015.
- [108] S. Li, Y. Jing, and X. Liu, "Robust control for a class of TS fuzzy systems with interval time-varying delay," *Int. J. Control. Autom. Syst.*, vol. 10, no. 4, pp. 737–743, 2012.
- [109] C.-P. Huang, "Model based fuzzy control with affine TS delayed models applied to nonlinear systems," *Int. J. Innov. Comput. Inf. Control*, vol. 8, no. 5, pp. 2979–2993, 2012.
- [110] D. Bresch-Pietri, "Commande robuste de systèmes à retard variable: Contributions théoriques et applications au contrôle moteur," Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2012.
- [111] Q.-C. Zhong, *Robust control of time-delay systems*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [112] S. N. Shimanov, "On the stability in the critical case of a zero root for systems with time lag," *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 24, no. 3, pp. 653–668, 1960.
- [113] P. He, H.-Y. Lan, and G.-Q. Tan, "Delay-independent stabilization of linear systems with multiple time-delays," *World Acad. Sci. Eng. Technol.*, vol. 75, pp. 1008–1012, 2011.
- [114] C. Lin, G. Wang, T. H. Lee, and Y. He, *LMI approach to analysis and control of Takagi-Sugeno fuzzy systems with time delay*, vol. 351. Springer, 2007.
- [115] C. Peng, D. Yue, T.-C. Yang, and E. G. Tian, "On Delay-Dependent Approach for Robust Stability and Stabilization of TS Fuzzy Systems With Constant Delay and Uncertainties," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 17, no. 5, pp. 1143–1156, 2009.
- [116] Y. Xia, M. Fu, and P. Shi, *Analysis and synthesis of dynamical systems with time-delays*, vol. 387. Springer Science & Business Media, 2009.
- [117] Y. Ariba, "Sur la stabilité des systèmes à retards variant dans le temps: théorie et application au contrôle de congestion d'un routeur," Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2009.
- [118] A. Bartholomeus Goubet, "Sur la stabilité et la stabilisation des systèmes retardés: critères dépendant des retards," 1996.
- [119] J. S. Shamma, "Analysis and design of gain scheduled control systems," Massachusetts Institute of Technology, 1988.
- [120] J. S. Shamma and J. R. Cloutier, "Gain-scheduled missile autopilot design using linear parameter

- varying transformations," *J. Guid. Control. Dyn.*, vol. 16, no. 2, pp. 256–263, 1993.
- [121] T. Taniguchi, K. Tanaka, H. Ohtake, and H. O. Wang, "Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 9, no. 4, pp. 525–538, 2001.
- [122] R. E. Skelton, T. Iwasaki, and K. M. Grigoriadis, *A unified algebraic approach to linear control design*. Taylor and Francis, London, 1998.
- [123] K. Gasso, "Identification des systèmes dynamiques non-linéaires: approche multi-modèle," 2000.
- [124] A. Benzaouia and A. E. Hajjaji, "Advanced Takagi-Sugeno Fuzzy Systems," *Delay Satur. Switz. Springer*, 2014.
- [125] X.-J. Ma, Z.-Q. Sun, and Y.-Y. He, "Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer," *IEEE Trans. fuzzy Syst.*, vol. 6, no. 1, pp. 41–51, 1998.
- [126] S. Kawamoto, K. Tada, A. Ishigame, and T. Taniguchi, "An approach to stability analysis of second order fuzzy systems," in *Fuzzy Systems, 1992., IEEE International Conference on*, 1992, pp. 1427–1434.
- [127] Y. Morère, "Mise en œuvre de loi de commandes pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno," 2001.
- [128] D. H. Lee, Y. H. Joo, and M. H. Tak, "Local stability analysis of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems: a fuzzy Lyapunov function approach," *Inf. Sci. (Ny)*, vol. 257, pp. 163–175, 2014.
- [129] A. Cherifi, K. Guelton, and L. Arcese, "Quadratic Design of D-stabilizing Non-PDC Controllers for Quasi-LPV/TS Models," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 26, pp. 164–169, 2015.
- [130] A. Jaadari, "Systèmes quasi-LPV continus: comment dépasser le cadre du quadratique?," Valenciennes, 2013.
- [131] P. Ghainet, a Nemirovski, A. Laub, and M. Chilali, "LMI Control Toolbox-for Use with Matlab," *Math Work. Inc*, 1995.
- [132] B. Faycal, "Relâchement des conditions de stabilité des systèmes floue de Takagi-Sugeno\_Approche LMI," Université Ferhat Abbas de Sétif 1.
- [133] P.-L. Liu, "A delay decomposition approach to robust stability analysis of uncertain systems with time-varying delay," *ISA Trans.*, vol. 51, no. 6, pp. 694–701, 2012.
- [134] L. Xie, "Output feedback Hinf control of systems with parameter uncertainty," *Int. J. Control*, vol. 63, no. 4, pp. 741–750, 1996.
- [135] L. Li and X. Liu, "New approach on robust stability for uncertain T-S fuzzy systems with state and input delays," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 40, no. 5, pp. 2329–2339, 2009.
- [136] A. Tesi and A. Vicino, "Robust absolute stability of Lur'e control systems in parameter space," *Automatica*, vol. 27, no. 1, pp. 147–151, 1991.
- [137] Z. Zhang, X. Huang, X. Ban, and X. Gao, "New delay-dependent robust stability and stabilization for uncertain TS fuzzy time-delay systems under imperfect premise matching," *J. Cent. South Univ.*, vol. 19, pp. 3415–3423, 2012.

# Annexe

## Inégalités Matricielles Linéaires

### (Linear Matrix Inequalities LMIs)

Les inégalités matricielles linéaires sont utilisées pour résoudre plusieurs problèmes d'automatique, (problèmes d'optimisation en théorie de commande, identification de systèmes et traitement du signal) qui sont généralement difficiles à résoudre de façon analytique. Plus particulièrement, elles sont utilisées pour l'analyse de la stabilité et la synthèse de lois de commande pour les modèles T-S. L'intérêt des méthodes basées sur les LMIs vient du fait que ces dernières peuvent être résolues en utilisant la programmation convexe.

Dans cette annexe, nous allons donner un bref rappel sur l'analyse convexe et les inégalités matricielles linéaires ainsi que les techniques utilisées pour résoudre les problèmes LMIs établies au cours de cette thèse. Pour plus de détails sur l'utilisation des LMIs dans le domaine de la commande, le lecteur pourra se référer à [4].

**A.1. Ensemble convexe :** Un ensemble  $C$  est dit convexe si :

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall (x_1, x_2) \in C^2 \Rightarrow (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in C \quad (\text{A.1})$$

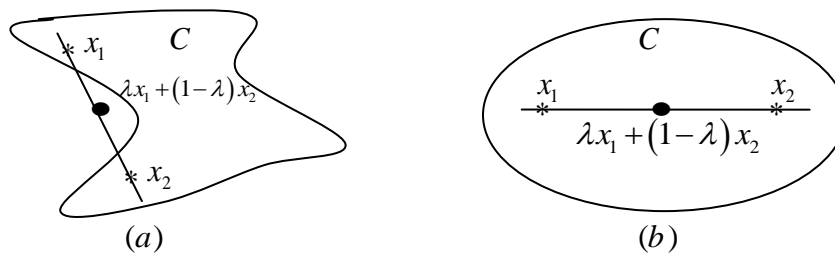


Fig.A.1. Ensemble convexe (a) et non convexe (b).

**Note :** Une propriété importante des ensembles convexes est que l'intersection de deux ensembles convexes est un ensemble convexe.

**A.2. Fonction convexe :** Soit une fonction  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  où l'ensemble  $C$  est convexe, la fonction  $f$  est une fonction convexe si et seulement si:

$$\forall (x, y) \in C^2, \forall \lambda \in [0, 1] \text{ alors } f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad (\text{A.2})$$

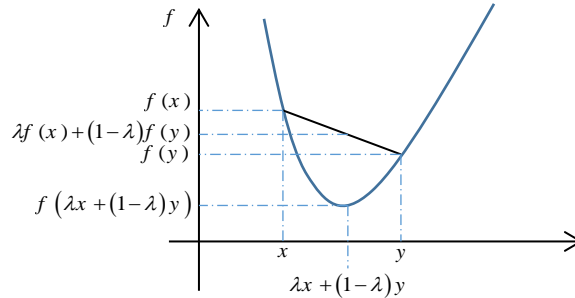


Fig.A.2 Fonction convexe

**A.3. Inégalités matricielles linéaires LMIs :** Une LMI est une inégalité matricielle définie sous la forme suivante:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (\text{A.3})$$

où  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur inconnu contenant les variables de décisions,  $F_0$  et  $F_i = F_i^T, i = 1, \dots, m$  sont des matrices symétriques données.

- L'inégalité " $< 0$ " dans (A.3) signifie qu'elle est définie négative, c'est à dire,  $u^T F(x) u > 0$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$ , c'est-à-dire toutes les valeurs propres  $\lambda(F(x))$  de  $F(x)$  sont négatives.
- La LMI (A.3) est une contrainte convexe en  $x$ , en d'autres termes l'ensemble  $\{x \mid F(x) > 0\}$  est convexe.
- La résolution de la LMI (A.3) revient à déterminer le vecteur  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  de sorte que la contrainte convexe  $F(x) < 0$  est vérifiée. Cela revient alors à minimiser les valeurs propres  $\lambda_{\max}(F(x)) > 0$ . Ce problème peut être résolu à l'aide de l'algorithme du point intérieur de sorte que la fonction  $\lambda(F(x))$  soit convexe.
- Il est possible, de convertir des inégalités matricielles non linéaires (BMI) en des LMIs de la forme (A.3). La mise sous forme LMI d'un problème d'optimisation convexe nécessite



donc d'écrire toutes les contraintes du problème sous la forme d'LMI affines en fonction des variables d'optimisation. (lmi bien bien)

- On peut avoir une inégalité matricielle linéaire non stricte donnée par :  $F(x) \leq 0$

**A.4. Propriétés matricielles :** Dans cette partie, nous présenterons quelques transformations matricielles qui sont essentiellement utilisées pour transformer un problème d'optimisation non linéaire en problème d'optimisation convexe sous contraintes LMIs en variables recherchées.

**A.4.1. Lemme de Schur (Compliment de Schur) :** Soit  $M(x)$  une matrice symétrique avec :

$$M(x) = M^T(x) = \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

où  $Q(x) \in \mathbb{R}^{n,n}$  et  $R(x) \in \mathbb{R}^{n,n}$  sont des matrices carrées et  $S(x) \in \mathbb{R}^{m,n}$  est une matrice quelconque.

Les inégalités suivantes sont équivalentes :

$$M(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R(x) < 0 \\ Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) < 0 \\ R(x) - S(x)^T Q^{-1}(x)S(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

**A.4.2. Contraintes quadratiques convexes) :** La contrainte sur la norme  $\|Z(x)\| < 1$ , avec  $Z(x) \in \mathfrak{R}^{p,q}$  est représentée par :

$$\begin{bmatrix} I_p & Z(x) \\ Z^T(x) & I_q \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.6})$$

**A.4.3. Regroupement des LMIs :** un ensemble de LMIs multiples peut s'écrire sous la forme d'une seule LMI simple. En effet, il suffit de les écrire dans une matrice sous forme de blocs diagonaux comme suit :

$$F_1(x) > 0, F_2(x) > 0, \dots, F_p(x) > 0 \Leftrightarrow F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & F_p(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.7})$$

La LMI (A.7) est symétrique  $\forall x$ , de plus l'ensemble des valeurs propres de  $F(x)$  est simplement l'union des valeurs propres de  $F_1(x), F_2(x), \dots$ , et  $F_p(x)$ .

**A.5. Quelques problèmes classiques LMI :** On distingue trois type de problèmes d'optimisation convexe rencontrés sous forme de LMI.

**A.5.1. Problème de faisabilité :** Il s'agit de trouver un vecteur  $x$  telle que la contrainte convexe  $F(x) > 0$  est satisfaite. Ce problème est résolu généralement en cherchant le vecteur  $x$  minimisant le scalaire  $t$  tel que :

$$-F(x) < t \times I \quad (\text{A.8})$$

Si la valeur minimale de  $t$  est négative alors le problème faisable.

**A.5.2. Problème de valeur propre (EVP : Eigen-Value Problem) :** Il s'agit de minimiser la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique sous une contrainte de type LMI :

$$\begin{cases} \text{minimiser } \lambda \\ \text{sous les contraintes } \begin{cases} \lambda I - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

où les matrices  $A(x)$ ,  $B(x)$  sont symétriques et linéaires par rapport à la variable  $x$ .

Dans la littérature, on peut trouver une autre formulation équivalente du problème EVP. Par exemple le problème de la minimisation d'une fonction linéaire est posé sous forme d'un problème EVP, en variable  $x$ , comme suit :

$$\begin{cases} \text{minimiser } c^T x \\ \text{sous les contraintes } F(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

**A.5.3. Problème de valeurs propres généralisées (General EVP) :** Il s'agit de minimiser la plus grande valeur propre généralisée d'une paire de matrices, dépendant linéairement de la variable  $x$ , sous contraintes LMIs. Ce problème est exprimé comme suit :

$$\begin{cases} \text{minimiser } \lambda \\ \text{sous les contraintes } \begin{cases} \lambda B(x) - A(x) > 0 \\ B(x) > 0, C(x) > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

**Résumé :** Les travaux de recherche présentés dans cette thèse portent sur la stabilisation et la commande des systèmes non linéaires représentés par des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S) à retard. De nouvelles conditions, dépendantes du retard sont développées et exprimées sous forme d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) incorporant la connaissance des limites du retard variable et de son taux de variation. Notre contribution consiste à relâcher les conditions LMIs pour les rendre moins conservatives en se basant sur une fonction de Lyapunov-Krasovskii appropriée et une application du lemme Finsler ainsi qu'une extension de l'inégalité de Jensen. Dans ce sens, une nouvelle loi de commande PDC, contenant à la fois les gains sans mémoire et ceux avec mémoire est développée. Ainsi, le contrôleur synthétisé a permis d'améliorer d'une façon significative le conservatisme des conditions LMIs pour les systèmes T-S même en présence d'incertitudes. Les résultats de simulation obtenus, sous l'environnement Matlab, mettent en évidence l'efficacité de l'approche proposée.

**Mots clés :** Modèles flous de Takagi-Sugeno (T-S), Systèmes à retard, Fonction de Lyapunov-Krasovskii, stabilité dépendante, Contrôleur avec mémoire, Inégalités Matricielles Linéaires (LMI), PDC robuste, Système incertains.

**Abstract:** This thesis deals with the stabilization and control of nonlinear systems represented by Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy models with time-varying delays. New relaxed delay-dependent conditions are proposed in terms of Linear Matrix Inequalities (LMIs), including the knowledge of the bounds of the time-varying delay and its rate of variation. Our contribution consists to relax the LMIs conditions to make them less conservative by the choice of a convenient augmented Lyapunov-Krasovskii functional candidate, the application of Finsler lemma and the extension of the Jensen's inequality. In this context, a Parallel Distributed Compensation (PDC) control law, which includes both memory less and delayed state feedbacks, is developed. It is highlighted that the synthesized controller is significantly improve the conservatism of LMIs conditions for T-S fuzzy models with time-varying delays even in the presence of uncertainty. The obtained simulation results, under Matlab environment, highlight the effectiveness of the proposed approach.

**Keywords:** Takagi-Sugeno fuzzy (T-S) models, Time-varying delay, Lyapunov-Krasovskii functional (LKF), Delay-dependent conditions, memoryless controller, Linear matrix inequalities (LMIs), robust PDC, incrtain systems.

**ملخص:** هذه المذكرة تهدف إلى دراسة الاستقرارية والتحكم في الأنظمة غير خطية من نوع أنظمة غامضة طلاكجي سيجينو (T-S) ذات تأخر متغير. في هذا الإطار، قمنا بتطوير شروط جديدة للاستقرارية عبرنا عنها بصيغة متراجحة المصفوفات الخطية (LMI) تتضمن معلومات حول زمن التأخر وكذلك على معامل تغيراته. اسهامنا تتمثل في اقتراح شروط استقرارية جديدة أكثر ارتخاء حيث اعتمدنا في ذلك على ثلاثة نقاط أساسية: الاختيار الأمثل لدالة ليابونوف-كرازوفسكي (LKF)، تطبيق نموذج موسع لمتراجحة جونسون وكذا تطبيق خاصية فنسلر. في هذا السياق، اقترحنا قانون تحكم جديد من نوع PDC يحتوي في نفس الوقت على أشعة كسب بدون ذاكرة وأخرى ذات ذاكرة. حيث مككنا هذا القانون من الحصول على شروط استقرارية أكثر رخاوة للأنظمة الغامضة من نوع (T-S) ذات تأخر متغير وأخرى ذات ارتيابات. قمنا بتبيين وإيضاح قدرة شروط الاستقرارية المطورة والتحسينات المقدمة بالمقارنة مع عدة نتائج سابقة من خلال عدة أمثلة محاكات في بيئة الماطلاب.

**كلمات مفتاحية:** نوع أنظمة غامضة طلاكجي سيجينو (T-S)، أنظمة ذات تأخر، دالة ليابونوف-كرازوفسكي (LKF)، استقرار متعلق بالتأخر، مراقب ذو ذاكرة، متراجحة المصفوفات الخطية (LMI)، PDC متين، أنظمة غير محددة.