Table des matières

Chapitre 0

Introduction

Soit Ω une propriété de groupes ou de sous-groupes, c'est-à-dire que Ω est soit une classe de groupes telles que les groupes abéliens, résolubles, nilpotents ...etc ou une propriété liée aux sous-groupes telle que la normalité, la sous-normalité ... etc. Etant donné un groupe G soit l'ensemble :

$$L_{\overline{\Omega}}(G) = \{H \leq G \mid H \notin \Omega\}$$

L'un des premiers problèmes importants en théorie des groupes est l'étude de l'influence de la famille $L_{\overline{\Omega}}(G)$ sur la structure du groupe G lui-même pour une propriété donnée Ω. Le point de départ des recherches de ce genre se trouve dans le document de Dedekind [26], où on trouve une classification des groupes finis dont tous les sous groupes sont normaux. C'est le cas où la famille $L_{non\ -normal}\ (G)$ est vide dans la classe des groupes finis. Mais la structure générale de ces groupes a été décrite par Baer [8]. Le deuxième travail important a été l'étude de Miller et Moreno en 1903 [49], où on trouve une classification des groupes finis non abéliens dont tous les sous-groupes propres sont abéliens, i.e. $L_{\overline{\mathfrak{A}}}(G) = \{G\}$ pour G fini. Miller et Moreno ont démontré, entre autres, que de tels groupes sont métabéliens.

En 1924 O. J. Schmidt [62] a classifié les groupes finis non-nilpotents dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents en démontrant que de tels groupes sont résolubles de longueur au plus égal à 3 et leurs ordres sont divisibles par deux nombres premiers distincts. Donc si G est fini et $L_{\overline{\mathfrak{N}}}(G) = \{G\}$, alors G est résoluble.

Ensuite, en appelant groupe non$-\Omega$ minimal un groupe G où $L_{\overline{\Omega}}(G) = \{G\}$, c'est en 1964 que la classification des groupes non$-\Omega$ minimaux a été traitée pour la première fois dans le cas des groupes infinis avec la parution de l'article de M. F Newman et J. Wiegold [51] où on trouve une classification des groupes minimaux non-nilpotents infinis. Cette dernière, et bien qu'elle ne fut pas complète, a incité plusieurs auteurs a étudier ce genre de problèmes et de nombreuses publications ont été faites dans ce sens et beaucoup de résultats sur les groupes infinis non$-\Omega$ minimaux , pour diverses propriétés (ou classes) de groupes Ω, ont été obtenus. On pourra voir par exemple [2] $-$ [5], [9] $-$ [18], [28] , [29], [31], [32], [36], [42], [49]-[51], [55], [56], [61], [69], [74] [76] et [77].

Schmidt dans son article [63], a décrit les groupes finis G dans lesquels les sous-groupes de la famille $L_{non-normal}(G)$ sont tous conjugués. Puis, dans l'exposé [64], il a procédé à la classification des groupes finis dans lesquels la famille $L_{non\ -normal}\ (G)$ est l'union de deux classes de conjugaison. Dans les exemples ci-dessus G est un groupe fini et l'ensemble $L_{\overline{\Omega}}(G)$ n'a clairement que quelques ou peu d'éléments.

En voulant étendre la notion peu ou quelques éléments aux groupes infinis et donner un sens à $L_{\overline{\Omega}}(G)$ a peu d'éléments ou $L_{\overline{\Omega}}(G)$ est très faible, S. N. Chernikov [24] a proposé d'examiner les groupes G infinis pour lesquels la famille $L_{\overline{\Omega}}(G)$ remplit certaines conditions de finitude, notamment la condition maximale, la condition minimale sur ses membres ou l'ensemble des membres est l'union d'un nombre fini de classes de conjugaison. Cette approche qui semble très intéressante et fructueuse a été l'objet de plusieurs travaux et de nombreux documents ont été rédigés dans ce sens, on cite par exemples [16], [25], [27], [30], [35], [37]-[39], [57], [58], [68], [69], [71] et [73].

Dans cette thèse on s'intéresse à l'étude de l'influence de la famille $L_{\overline{\Omega}}(G)$ sur la structure du groupe G dans le cas où Ω est classe des groupes X-par-Y, X désignant la classe des groupes finis, ou localement finis, ou encore périodiques et Y désignant la classe des groupes de Baer. La thèse se compose de quatre chapitres :

Le premier chapitre regroupe les notions fondamentales de la théorie de la sous-normalité ainsi que quelques théorèmes sur la classe des groupes de Baer qui seront utiles pour la compréhension de ce qui va être exposé dans les chapitres 3 et 4.

Dans le deuxième chapitre, on exposera une synthèse des plus importants résultats obtenus lors de l'étude des groupes ayant peu de sous-groupes ne vérifiant pas une propriété donnée Ω. Plus précisement la synthèse porte sur les groupes non-Ω minimaux, les groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes non-Ω et les groupes qui n'ont qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non-Ω.

Dans le troisième chapitre on expose nos résultats publiés [6] ainsi que d'autres résultats sur les groupes non-(finis-par Baer) minimaux de type fini. Les groupes non-(finis-par-Baer) minimaux résolubles seront exposés avec des démonstrations très complètes des différents lemmes, propositions et théorèmes.

Enfin, et dans le quatrième chapitre, on s'intéressera à l'influence de la famille $L_{non-\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}}(G)$ sur la structure des groupes localement gradués. On donnera des résultats sur les groupes localement gradués vérifiant la condition minimale ou ayant un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non-(localement finis-par-Baer). Ces résultats ont été acceptés pour publication [7].

Chapitre 1

Sous normalité et Groupes de Baer

1- Introduction

2- Sous-normalité

3- Groupes de Baer

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'exposition de certaines notions et théorèmes fondamentaux de la théorie de la sous-normalité. Il porte essentiellement sur les propriétés vérifiées par les groupes de Baer qu'on utilisera dans les chapitres suivants. Les propositions et théorèmes sont donnés sans démonstration.

1.2 Sous-normalité

Définition 1.2.1 [43] *: Un sous-groupe H d'un groupe G est dit sous-normal dans G, s'il existe une série finie de sous-groupes $(H_i)_{0\leq i\leq n}$ de G telle que :*

$$H = H_n \trianglerighteq H_{n-1} \cdots \trianglerighteq H_1 \trianglerighteq H_0 = G..........(1)$$

On écrit alors H sn G ou $H \triangleright \triangleright G$. Le plus petit entier n tel qu'il existe une série de longueur n vérifiant (1) est dit indice de sous-normalité de H dans G et H est dit n-(sous-normal) dans G ou encore H est sous-normal d'indice égal à n.

Définition 1.2.2 [60] *: Soit H un sous-groupe d'un groupe G. Le plus petit sous-groupe normal dans G et contenant H est dit clôture normale de H dans G. On le note H^G et on a $H^G = \langle \{gHg^{-1} : g \in G\} \rangle$.*

Définition 1.2.3 [43] *: Soit H un sous-groupe d'un groupe G. La série des clôtures normales successives de H, notée $\left(H^{G,n}\right)_n$, est définie par $H^{G,0} = G$ et $\forall i$, $H^{G,i+1} = H^{H^{G,i}}$. Pour tout entier i, on a donc $H^{G,i+1} \trianglerighteq H^{G,i}$.*

Lemme 1.2.4 [43] *: Si H est un sous-groupe d'un groupe G, alors on a $\forall i$, $H^{G,i} = H\left[G\ ,_i H\right]$.*

Lemme 1.2.5 [43] *: Si H est un sous-groupe n-(sous-normal) de G et si $(H_i)_{0\leq i\leq n}$est la série vérifiant $H = H_n \trianglerighteq H_{n-1} \cdots \trianglerighteq H_1 \trianglerighteq H_0 = G$, alors $\forall i$, $H^{G,i} \leq H_i$.*

Les deux lemmes ci-dessus servent à démontrer la proposition suivante :

Proposition 1.2.6 [43] *: Soit H un sous-groupe d'un groupe G. On a l'équivalence des propriétés suivantes :*

1− *H est sous-normal dans G,*

2− *Il existe un entier positif n tel que $H^{G,n} = H$,*

3− *Il existe un entier positif n tel que $[G\ ,_n H] \leq H$.*

Proposition 1.2.7 [43] *: Soit G un groupe, K un sous-groupe de G et N un sous-groupe normal dans G.*

1− *Si H est un sous-groupe n-(sous-normal) dans G, alors $H \cap K$ est n-(sous-normal) dans K.*

2− *Si pour tout λ appartenant à une famille d'indices I, H_λ est un sous-groupe n-(sous-normal) dans G, alors $\bigcap\limits_{\lambda \in I} H_\lambda$ est n-(sous-normal) dans G.*

3− *Si φ est un homomorphisme de G et H est un sous-groupe n-(sous-normal) dans G, alors $\varphi(H)$ est un sous-groupe n-(sous-normal) dans $\varphi(G)$. En particulier, HN/N est n-(sous-normal) dans G/N, par suite HN est n-(sous-normal) dans G.*

Remarque 1.2.8 *: En 1930 Wielandt s'est posé la question si dans un groupe fini le groupe engendré par une paire de sous-groupes sous-normaux est sous-normal et en 1934 dans un article il a donné une réponse positive à sa question, mais en 1958 Zassenhaus a construit un exemple d'un groupe infini G où un sous-groupe engendré par une paire de sous-groupes sous-normaux n'est pas sous-normal dans G.*

L'étude des classes de groupes où une paire de sous-groupes sous-normaux d'un groupe engendre un sous-groupe sous-normal a suscité plusieurs recherches et beaucoup de résultats ont été obtenus. On donnera dans la suite certains de ces résultats.

Proposition 1.2.9 [43] *: Soient H et K deux sous-groupes sous-normaux d'un groupe G et soit $J = \langle H, K \rangle$. Les propriétés suivantes sont équivalentes .*

- *J est sous-normal dans G,*
- *H^K est sous-normal dans G,*
- *$[H, K]$ est sous-normal dans G.*

Cette proposition admet comme corollaire le résultat suivant :

Corollaire 1.2.10 [43] *: Soient H et K deux sous-groupes sous-normaux d'un groupe G et soit $J = \langle H, K\rangle$. Alors J est sous-normal dans G dans les cas suivants :*

$1-$ $HK = KHK$,

$2-$ H est $2-$sous-normal dans G.

Théorème 1.2.11 [60] *: Soient H et K deux sous-groupes sous-normaux d'un groupe G et soit $J = \langle H, K\rangle$. Si G' est nilpotent ou vérifie la condition maximale sur les sous-groupes, alors J est sous-normal dans G.*

Proposition 1.2.12 [43] *: Si H et K sont deux sous-groupes sous-normaux finis (respectivement nilpotents de type fini) d'un groupe G, alors $J = \langle H, K\rangle$ est sous-normal et fini (respectivement nilpotent de type fini) dans G.*

Théorème 1.2.13 [43] *: Soient H et K deux sous-groupes nilpotents d'un groupe G. Si H est normal dans G et K est sous-normal dans G, alors HK est nilpotent.*

1.3 Groupes de Baer

Définition 1.3.1 [43] *: Un groupe G est dit de Baer si tous ses sous-groupes cycliques sont sous-normaux, i.e $\forall x \in G\ \exists n \in \mathbb{N}, \langle x\rangle^{G,n} \leq \langle x\rangle$, ou encore, $\forall x \in G\ \exists n \in \mathbb{N}, [G\ ,_n\ \langle x\rangle] \leq \langle x\rangle$. Si l'entier positif n ne dépend pas de x, alors on dit que G est $n-$Baer.*

Théorème 1.3.2 [43] *: Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

$1-G$ est un groupe de Baer,

$2-$ Tout sous-groupe de G de type fini est nilpotent et sous-normal dans G,

$3-$ G est engendré par ses sous-groupes cycliques sous-normaux.

Remarque 1.3.3 [43] *et* [60] *: -Un groupe de Baer est localement nilpotent. La réciproque est fausse, par exemple le groupe localement diédral est localement nilpotent mais il n'est pas de Baer.*

- Tout groupe nilpotent est de Baer. La réciproque est fausse, les groupes de Heineken et Mohamed sont de Baer et ne sont pas nilpotents.

Proposition 1.3.4 [43] *: La classe des groupes de Baer est close par passage aux sous-groupes et aux quotients.*

Théorème 1.3.5 [43] *: Si H et K sont deux sous-groupes sous-normaux de Baer d'un groupe G, alors $J = \langle H, K\rangle$ est un sous-groupe sous-normal de Baer.*

Théorème 1.3.6 [60] *: Dans un groupe G il existe un unique sous-groupe maximal de Baer qui contient tous les sous-groupes sous-normaux de Baer de G. On le note $B(G)$. Le sous-groupe $B(G)$ est caractéristique dans G et G est de Baer si et seulement si $B(G) = G$.*

Définition 1.3.7 [60] *: On dit qu'un groupe G vérifie la condition maximale (respectivement, minimale) sur les sous-groupes, si toute chaine ascendante (respectivement, descendante) de sous-groupes de G est stationnaire. On dit aussi que G vérifie max (respectivement, min).*

Définition 1.3.8 [60] *: Un groupe G est dit de Chernicov si G est une extension finie d'un groupe abélien vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes.*

Théorème 1.3.9 [52] *: Un groupe de Baer satisfait la condition maximale (respectivement, minimale) sur les sous-groupes si et seulement si il est nilpotent de type fini (respectivement, nilpotent de Chernicov et le centre du groupe est d'indice fini).*

Définition 1.3.10 [60] *: Un groupe G est dit de rang fini, s'il existe un entier positif n tel que tout sous-groupe de G de type fini est engendré par au plus n éléments. Si r est le plus petit entier vérifiant la propriété, alors on dit que G est de rang fini r.*

Proposition 1.3.11 [59] *: Un groupe de Baer de rang fini, dont l'ensemble des nombres premiers divisant l'ordre de ses éléments est fini, est nilpotent.*

Proposition 1.3.12 [43] *: Soit p un nombre premier. Si G est un p-groupe résoluble d'exposant fini, alors G est de Baer.*

Proposition 1.3.13 [43] *: Pour tout nombre premier p il existe un p-groupe de Baer.*

Définition 1.3.14 [60] *: - Un groupe G est dit de Fitting si la clôture normale de tout sous-groupe cyclique de G est nilpotente, c'est-à-dire $\forall x \in G$, $\langle x\rangle^G$ est nilpotent, ou encore tout élément de G appartient à un sous-groupe normal nilpotent.*

- Le sous-groupe de G engendré par tous les sous-groupes normaux nilpotents de G est dit sous-groupe de Fitting de G. Il est noté $Fit(G)$.

Théorème 1.3.15 [60] *: Le sous-groupe $Fit(G)$ est caractéristique dans G et G est de Fitting si et seulement si $Fit(G) = G$.*

Proposition 1.3.16 [43] *: La classe de Fitting est close par passage aux sous-groupes et aux quotients.*

Remarque 1.3.17 *: - Un groupe de Fitting est de Baer. La réciproque est fausse, dans* [59] *on trouve un exemple d'un groupe résoluble de longueur 3 et d'exposant p^2 qui est de Baer mais non de Fitting.*

- Tout groupe nilpotent est de Fitting. La réciproque est fausse, les groupes de McLain sont des exemples de groupes de Fitting qui ne sont pas nilpotents [60].

- Le produit de deux sous-groupes normaux de Fitting n'est pas en général de Fitting [43].

Théorème 1.3.18 [65] *et* [59] *: Tout groupe de Baer, qui est résoluble de rang fini ou nilpotent-par-abélien, est de Fitting.*

Chapitre 2

Groupes ayant peu de sous-groupes ne vérifiant pas une propriété donnée

2.1 Introduction

Soit Ω une classe de groupes. Un groupe G est dit non-Ω minimal, si tous ses sous-groupes propres sont dans la classe Ω tandis que G lui-même n'appartient pas à Ω. On écrit G est un groupe $MN\Omega$.

L'étude des groupes infinis $MN\Omega$ a commencé avec l'article de M.F. Newman et J. Wiegold [51] qui ont étudié les groupes non-nilpotents minimaux. Depuis, leur travail a donné naissance à une recherche fructueuse dans cette direction et beaucoup de résultats ont été obtenus au cours d'une quarantaine d'années.

Dans la deuxième section ce chapitre, on va donner une synthèse des principaux résultats portant sur les groupes non-$\Omega\mathfrak{N}$ ou non-$\mathfrak{N}\Omega$ minimaux, où Ω est l'une des classes parmi les classes de groupes finis, Chernikov, localement finis, périodiques ou de rang fini.

Notons que si G est un groupe $MN\Omega$, alors on a $L_{\overline{\Omega}}(G) = \{H \leq G \mid H \notin \Omega\} = \{G\}$. L'hypothèse tous les sous-groupes propres d'un groupe G sont dans la classe Ω a été affaiblie par certains auteurs en supposant que la famille $L_{\overline{\Omega}}(G) = \{H \leq G \mid H \notin \Omega\}$ remplit certaines conditions de finitude. En particulier, beaucoup de travaux ont été effectués sur les groupes G dont l'ensemble $L_{\overline{\Omega}}(G)$ vérifie la condition minimale ou dont les membres de la famille $L_{\overline{\Omega}}(G)$ ne forme qu'un nombre fini de classes de conjugaison. Dans la troisième et la quatrième section de ce chapitre on exposera les résultats qui nous semblent les plus importants parmi ceux obtenus.

2.2 Groupes non-Ω minimaux

Les premiers résultats importants portant sur les groupes infinis non-Ω minimaux sont ceux obtenus par M. F. Newman et J. Wiegold [51] où Ω est soit la classe des groupes nilpotents $\mathfrak{N}$, soit la classe $\mathfrak{N}_k$ des groupes nilpotent de classe égale au plus à l'entier k. Il est clair qu'un groupe $MN\mathfrak{N}$ est soit de type fini, soit localement nilpotent ; alors qu'un groupe $MN\mathfrak{N}_k$ est engendré au plus par $k+1$ éléments. Dans le cas de type fini, Newman et Wiegold ont démontré le résultat suivant :

Théorème 2.2.1 [51] *: Si G est un groupe infini $MN\mathfrak{N}$ de type fini ou $MN\mathfrak{N}_k$, alors $G/Frat(G)$*

est un groupe simple infini.

Ce théorème veut dire que si les groupes $MN\mathfrak{N}$ et les groupes $MN\mathfrak{N}_k$ existent, alors de tels groupes simples existent aussi. Ce qui a amené Newman et Wiegold à étudier les groupes $MN\mathfrak{N}$ et les groupes $MN\mathfrak{N}_k$ simples. Ils ont démontré le résultat suivant :

Théorème 2.2.2 [51] *: Soit G un groupe simple infini $MN\mathfrak{N}$ de type fini ou $MN\mathfrak{N}_k$. Alors :*

(i) L'intersection de toute paire de sous-groupes maximaux est triviale.

(ii) Pour tout élément $1 \neq x$ de G, il existe un élément g de G tel que $G = \langle x, x^g \rangle$.

(iii) G n'admet pas d'élément d'ordre 2.

Notons que ces deux théorèmes ont été établis avant qu'Olshanski ne construise ses exemples de groupes simples, infinis, de type fini et dont tous les sous-groupes propres sont (cycliques) d'ordre un nombre premier [52] , [53]. Il est clair que ces groupes sont des exemples de groupes $MN\mathfrak{N}$ et de groupes $MN\mathfrak{N}_k$. Notons aussi qu'il est facile de déduire qu'un groupe infini $MN\mathfrak{N}$ de type fini ou $MN\mathfrak{N}_k$ est parfait et n'admet pas de sous-groupe propre d'indice fini.

Avant de poursuivre l'exposition des résultats de Newman et Wiegold, signalons cette conséquence du résultat de Asar [4].

Théorème 2.2.3 *Si G est un groupe $MN\mathfrak{N}$ localement gradué. Alors G est résoluble.*

Dans leur étude des groupes non-nilpotents minimaux localement nilpotents, Newman et Wiegold ont supposé de plus que les groupes possèdent des sous-groupes maximaux. Ils les ont appelés des groupes AN^*.

Soient p un nombre premier, $r = 0, 1$ et n entier positf. On note $B(p, r, n)$ le groupe engendré par l'ensemble $\{b, h_1, h_2, \ldots\}$ vérifiant les relations suivantes :

$[h_i, h_j] = [h_i, b^p] = 1$, $\forall i\ , j$

$[h_{i+1}, b] = h_i$, $\forall i$

$[h_1, b] = 1$ et $b^{p^n} = h_1^r$

On notera B l'ensemble des groupes $B(p, r, n)$.

Théorème 2.2.4 [51] *: G est un groupe AN^* si et seulement si G est isomorphe à un élément de B. Deux groupes de B ne sont pas isomorphes.*

Le théorème précédent admet la conséquence suivante :

Corollaire 2.2.5 *: Si G est un groupe AN^*, alors G est un p-groupe métabélien de Chernikov et G/G' est un groupe cyclique fini.*

Notons que M. F. Newman et J. Wiegold n'ont pas traité le cas des groupes $MN\mathfrak{N}$ localement nilpotents et n'admettant pas de sous-groupes maximaux. Ce n'est qu'en 1997 que H. Smith [69] a étudié et caractérisé de tels groupes. Plus précisément, il a démontré les résultats suivants :

Théorème 2.2.6 [69] *: Soit G un groupe $MN\mathfrak{N}$ localement nilpotent n'ayant pas de sous-groupes maximaux. Alors on a :*

(i) G est un p-groupe dénombrable et $G/G' \simeq C_{p^\infty}$ pour un certain premier p.

(ii) Tout sous-groupe de G est sous-normal.

Remarque 2.2.7 *:Les groupes $MN\mathfrak{N}$ localement nilpotents n'ayant pas de sous-groupes maximaux sont dits groupes AN_*. Les groupes AN_* existent. En effet, l'exemple de H. Heineken et I. J. Mohamed [40] est un groupe $MN\mathfrak{N}$ métabélien localement nilpotent et n'ayant pas de sous-groupes maximaux.*

M. Xu [77] a utilisé les groupes non-nilpotents minimaux pour donner des résultats sur les groupes non-Baer minimaux. Il a démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.2.8 [77] *: Si G est un groupe résoluble $MN\mathfrak{B}$, alors :*

(i) G/G'' est un groupe AN^*,

(ii) $\forall x \in G,\ \langle x\rangle G''$ est un groupe de Baer et

(iii) $\forall H \leq G,\ H\ G'' = G$ implique que $H = G$.

Inversement, s'il existe un sous-groupe normal A de G tel que :

$i)$ G/A est un groupe AN^*,

$ii)$ $\forall x \in G$, $\langle x\rangle A$ est un groupe résoluble de Baer et

iii) $\forall H \leq G, HA = G$ *implique que* $H = G$,

alors G *est un groupe* $MN\mathfrak{B}$ *résoluble.*

Remarque 2.2.9 [77] *: Un groupe* AN^**est un groupe* $MN\mathfrak{B}$*, par contre un groupe* AN_* *est un groupe de Baer. Dans* [77]*, Xu a donné un exemple d'un groupe* $MN\mathfrak{B}$ *qui n'est pas un groupe* AN^**.*

Les groupes $MN\mathfrak{F}\mathfrak{N}_k$ ont fait l'objet des travaux de B. Bruno et R. E. Phillips [13] qui ont démontré les résultats suivants :

Théorème 2.2.10 [16] ***:*** *Soit* $k \geq 0$ *un entier. Les conditions suivantes dans un groupe localement gradué* G *sont équivalentes :*

(i) G *est un groupe non-*$\mathfrak{F}\mathfrak{N}_k$ *minimal*

(ii) G *est un groupe non-*$\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ *minimal*

(iii) G *est de Chernikov,* G *n'est pas dans* $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ *et tout sous-groupe propre de* G *est soit fini soit abélien.*

Remarque 2.2.11 [16] *: La description complète des groupes* $MN\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ *donnée par B. Bruno et R. E. Phillips les caractérise comme produit semi-directe d'un* $p-$*groupe divisible par un* $q-$*groupe cyclique fini,* p *et* q *étant deux nombres premiers non necessairement distincts. Plus précisément, si* G *est un groupe* $MN\mathfrak{F}\mathfrak{A}$*, alors il existe un sous-groupe normal* M *de* G *et un élément* z *de* G *tel que :* $G = M \bowtie \langle z \rangle$ *avec* $M = M_1 \times M_2 \times \ldots\ldots \times M_n$ *,* $M_i \cong C_{p^\infty}$ *et* $z^{q^s} \in M$*.*

M.Xu [70] a étudié les groupes $MN\mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Dans le cas des groupes $MN\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ de type fini il a prolongé le résultat obtenu par M. F. Newman et J.Wiegold sur les groupes $MN\mathfrak{N}$ de type fini aux groupes $MN\mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Plus précisément, il a démontré le résultat suivant :

Théorème 2.2.12 [70] ***:*** *Si* G *est un groupe* $MN\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ *de type fini, alors* G *est un groupe parfait, n'admet pas de sous-groupe propre d'indice fini et* $G/Frat(G)$ *est un groupe simple infini.*

On a utilisé le théorème 2.2.12 pour démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.2.13 *: Si G est un groupe $MN\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ de type fini, alors G est parfait, n'admet pas de sous-groupe propre d'indice fini et $G/Frat(G)$ est un groupe simple infini.*

Preuve : Soit G un groupe $MN\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ de type fini. On en déduit que G est soit fini-par-nilpotent soit un groupe $MN\mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Supposons que G soit fini-par-nilpotent. Donc il existe dans G un sous-groupe normal fini N tel que G/N soit nilpotent. On en déduit que G/N n'est pas dans la classe $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$, donc G/N est un groupe $MN\mathfrak{F}\mathfrak{A}$. Posons $A = G/N$, puisque A est nilpotent, A/A' n'est pas trivial et comme le produit de deux sous-groupes normaux finis-par-abéliens est fini-par-abélien, A/A' est un p-groupe (voir [51]). Comme le groupe A est nilpotent et A/A' est un p-groupe, A est un p-groupe et puisque il est nilpotent et de type fini, A est fini, par suite G est fini, ce qui est contradictoire. On en déduit que G est un $MN\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ de type fini. Du théorème 2.2.12 G est parfait, n'admet pas de sous groupe propre d'indice fini et $G/Frat(G)$ est un groupe simple infini. ■

Puisqu'un groupe localement gradué de type fini admet un sous-groupe propre d'indice fini, on déduit du théorème 2.2.13 le résultat suivant :

Corollaire 2.2.14 *: Un groupe localement gradué de type fini dont tous les sous-groupes propres sont finis-par-abéliens, est fini-par-abélien.*

Notons que l'exemple d'Olshanskii [52] affirme l'existence des groupes $MN\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ de type fini et des groupes $MN\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ de type fini.

Dans le cas des groupes $MN\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ de type infini, Xu a donné la description suivante :

Théorème 2.2.15 [70] *: G est un groupe $MN\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ de type infini si, et seulement si, G vérifie l'une des conditions suivantes :*

(i) G est un groupe $MN\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ non parfait,

(ii) G est un groupe AN_*.

B. Bruno [13] , R. E. Phillips et B. Bruno [17] et encore F. Napolitani et E. Pegoraro [50] ont étudié les groupes dont tous les sous-groupes propres sont abéliens-par-finis. Ils ont obtenu les résultats suivants :

Théorème 2.2.16 [13] , [17] , [50] *: Soit G un localement gradué $MN\mathfrak{A}\mathfrak{F}$, alors G est périodique et on a :*

(i) G est un p-groupe pour un certain premier p si, et seulement si, $G^{'}$ est abélien, $G/G^{'} \simeq C_{p\infty}$ et $HG^{'} < G$ pour tout sous-groupe propre H de G.

(ii) Si G n'est pas un p-groupe pour tout premier p, alors $G = G^{'}A$, $G^{'} \cap A = 1$, où $A \simeq C_{p\infty}$ pour certain premier p et $G^{'}$ est un sous-groupe normal minimal dans G et un q-sous-groupe abélien élémentaire pour un certain premier $q \neq p$.

Notons que l'exemple de H. Heineken et I. J. Mohamed [40] est un p-groupe non-(abélien-par-fini) minimal.

Les groupes dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents-par-finis ont été étudiés par Bruno[14] ,[15], R. E. Phillips [17] , F. Napolitani et E. Pegoraro[50] et Asar [4]. Ils ont démontré les résultats suivants :

Théorème 2.2.17 [17] , [50] , [4] *et* [14] *: Si G est un groupe $MN\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ localement gradué, alors G est périodique et on a :*

i) Si G est localement nilpotent, alors $G/G^{'} \simeq C_{p\infty}$ pour un certain premier p,

ii) G n'est pas localement nilpotent, si, et seulement si, $G = VH$ et $V \cap H = 1$, où $H \simeq C_{p\infty}$ pour certain premier p et V est un q-groupe special pour un certain premier $q \neq p$ tel que $H \subseteq C_G(V^{'})$ et $V/V^{'}$ est un sous-groupe normal minimal dans G/V'.

J. Otal et J. M. Pena [56] ont caractérisé les groupes infinis dont tous les sous-groupes propres sont de Chernikov-par-nilpotents de classe $\leq k$ dans la classe des groupes localement gradués. Plus précisément, ils ont montré le résultat suivant :

Théorème 2.2.18 [56] *: Soit $k \geq 0$ un entier. Un groupe G localement gradué est Chernikov-par-nilpotent de classe $\leq k$ si, et seulement si, tout sous-groupe propre de G est Chernikov-par-nilpotent de classe $\leq k$.*

Le théorème 2.2.18 veut dire qu'il n'existe pas de $MN\mathfrak{C}\mathfrak{N}_k$ dans la classe des groupes localement gradué avec k entier positif.

Les groupes dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents-par-Chernikov ont été étudié par F. Napolitani et E. Pegoraro[50] et A.O.Asar [4]. En combinant leurs résultats on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.2.19 [50], [4] *: Si G est un groupe localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents-par-Chernikov, alors G est nilpotent-par-Chernikov.*

Utilisant le théorème précédent, B. Bruno et F. Napolitani [18] ont démontré le résultat suivant :

Théorème 2.2.20 [18] *: Soit $k \geq 0$ un entier. Si G est un groupe localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont (nilpotents de classe $\leq k$)-par-Chernikov, alors G est (nilpotent de classe $\leq k$)-par-Chernikov.*

N. Trabelsi [74] (respectivement, A. Dilmi [28]) ont étudier les groupes $MN\mathfrak{T}\mathfrak{N}$ (respectivement $MN\mathfrak{L}(\mathfrak{F})\mathfrak{N}$) et ils ont donné un résultat similaire à celui de M. F. Newman et J. Wiegold obtenu pour les groupes $MN\mathfrak{N}$ de type fini. Plus précisément, ils ont obtenu les résultats suivants :

Théorème 2.2.21 [28], [74] *: Si G est un groupe $MN\mathfrak{L}(\mathfrak{F})\mathfrak{N}$ (respectivement, $MN\mathfrak{T}\mathfrak{N}$, $MN\mathfrak{T}(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_k$, $MN\mathfrak{T}\mathfrak{N}_k$), alors G est parfait, de type fini, n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini et $G/Frat(G)$ est un groupe simple infini.*

M. R. Dixon, M.J.Evans et H .Smith ont étudié les groupes dont tous les sous groupes propres sont nilpotents-par-rang fini [32] (respectivement, nilpotents de classe $\leq c$-par-rang fini [29]) et ils ont obtenu les résultats suivants :

Théorème 2.2.22 [32] *: Soit G un groupe dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$:*

- Si G admet un quotient propre de rang fini, alors G est $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$.

- Si G est localement nilpotent ou localement fini et n'admet pas de quotient simple infini, alors G est dans la classe $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$.

- Si G n'est pas localement fini et il est localement résoluble ou localement de rang fini, alors G est dans la classe $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$.

Comme conséquence du Théorème 2.2.22 un groupe $MN\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ est parfait.

Théorème 2.2.23 [29] *: Soit k un entier positif et soit G un groupe dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{N}_k\mathfrak{R}$. Alors :*

- Si G est localement résoluble, G est dans la classe $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ et il est $\mathfrak{N}_k\mathfrak{R}$ ou résoluble.

- Si G est localement fini et n'admet pas de quotient simple infini, G est dans la classe $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ et il est $\mathfrak{N}_k\mathfrak{R}$ ou résoluble.

- Si G n'est pas localement fini et il est localement résoluble ou localement de rang fini, G est dans la classe $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ et il est $\mathfrak{N}_k\mathfrak{R}$ ou résoluble.

M. R. Dixon, M.J.Evans et H .Smith ont aussi étudié les groupes dont tous les sous groupes propres sont de rang fini -par-nilpotent de classe $\leq k$ (respectivement de rang fini -par-nilpotent) et ils ont démontré les théorèmes suivants :

Théorème 2.2.24 [31] *: Si G est un groupe (localement résoluble)-par-fini dont tous les sous groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{R}\mathfrak{N}_c$, alors G est dans la classe $\mathfrak{R}\mathfrak{N}_c$.*

Théorème 2.2.25 [31] *: Soit G est un groupe (localement résoluble)-par-fini dont tous les sous groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{R}\mathfrak{N}$. Alors :*

Si G est un p-groupe, G est $\mathfrak{R}\mathfrak{N}$ ou G est un groupe AN_*.

Si G n'est pas un p-groupe, alors G est $\mathfrak{R}\mathfrak{N}$.

Du Théorème 2.2.25, on déduit qu'un groupe $MN\mathfrak{R}\mathfrak{N}$ (localement résoluble)-par-fini est un groupe AN_*.

2.3 Groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes non-Ω.

Une condition sur les groupes infinis est dite condition de finitude si elle est vérifiée par la classe des groupes finis. L'étude des groupes infinis vérifiant des conditions de finitude est développée à travers les travaux de S.N.Chernicov [22] et [23]. Ainsi Chernicov est dans l'étude de l'influence de la famille $L_{\overline{\Omega}}(G) = \{H \leq G \mid H \notin \Omega\}$ sur la structure des groupes infinis a proposé d'examiner le cas où la famille remplit certaines conditions de finitude telle que la condition minimale sur ses membres. Les premiers résultats dans cette direction étaient ceux de Shuncov et Chernicov sur les groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes non-abéliens [72] et [25]. Entre autre Shuncov et Chernicov ont obtenus les résultats suivants :

Théorème 2.3.1 [72] *:Si G est un groupe non-abélien infini vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes non-abéliens, alors G est de Chernicov si et seulement si G est localement fini.*

Théorème 2.3.2 [25] *: Soit G un groupe non-abélien infini vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes non-abéliens. Si G admet une série de sous-groupes dont les quotients sont finis, alors G est de Chernicov.*

Comme conséquence de leur résultats on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.3.3 *: Soit G un groupe localement gradué. Si G vérifie la condition minimale sur les sous groupes non-abéliens, alors G est abélien ou de Chernicov.*

L.Ivan [37] a généralisé le théorème de Chernicov sur les groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes non-abéliens à d'autres classes de groupes et Il a obtenu des résultats sur les groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes non-localement nilpotents

Plus tard J.Otal et J.M.Pena ont obtenu des résultats plus généraux en démontrant le théorème suivant :

Théorème 2.3.4 [57] *: Soit c un entier positif et soit P l'une des propriétés de sous-groupes suivantes : normal, localement nilpotent, nilpotent de classe $\leq c$, localement nilpotent ou normal, normal ou nilpotent de classe $\leq c$. Si G est un groupe localement gradué, alors G verifie la condition minimale sur les sous-groupes non-P si et seulement si G est de Chernicov ou tout sous-groupe de G a la propriété P.*

Avant ce résultat et en 1983 B. Bruno et R. E. Phillips ont étudié les groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes non-$\mathfrak{F}\mathfrak{N}_k$ dans la classe des groupes localement gradués et ils ont démontré le résultat suivant :

Théorème 2.3.5 [16] *: Soit $k \geq 0$ un entier et soit G un groupe localement gradué verifiant la condition minimale sur les sous-groupes non-$\mathfrak{F}\mathfrak{N}_k$. Alors G est dans $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_k$ ou il est de Chernicov.*

S.Fransciosi , F.De Giovanni et Y.P.Sysak ont étudié les groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes non-$\mathfrak{PFN}_k$ et il ont obtenu les résultats suivants :

Théorème 2.3.6 [39] *:Un groupe localement gradué qui vérifie la condition minimale sur les sous-groupes non-$\mathfrak{PFN}_k$ est de Chernicov ou il est un groupe $\mathfrak{PFN}_k$.*

N.Trabelsi a éudié les groupes localement gradués vérifiant la condiion minimale sur les sous-groupes non-$\mathfrak{TN}$ (respecivement non-$\mathfrak{TN}_k$) et il a démonré le résultat suivant :

Théorème 2.3.7 [73] *: Un groupe localement gradué vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes non-$\mathfrak{TN}$ (respecivement non-$\mathfrak{TN}_k$) est dans la classe $\mathfrak{TN}$ (respectivement$\mathfrak{TN}_k$)*

M.R.Dixon et M.J.Evans ont obtenu le résultat suivant sur les groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes non-résolubles de longueur $\leq d$.

Théorème 2.3.8 [30] *: Soit G un groupe localement gradué. G vérifie la condidion minimale sur les sous-groupes non-résolubles de longueur $\leq d$ si est seulement si G vérifie l'une des conditions suivantes : (i) G est résoluble de longueur $\leq d$, (ii) G est de Chernicov, (iii) G admet un sous-groupe normal N tel que G/N est de Chernicov et N est un groupe linéaire, simple et non-résoluble de longueur $\leq d$ minimal.*

M.R.Dixon, M.J.Evans et H.Smith ont affaibli la condition mininimale en consédirant une autre condition de finitude notée min-∞ et ils ont donné les résultats ci-dessous sur les groupes vérifiant min-∞ sur les sous-groupes non-nilpotents.

Définition 2.3.9 [33] *: On dit qu'un groupe G vérifie min-∞ sur les sous-groupes ayant une propriété donnée P s'il n'admet pas de serie décroissante de sous-groupe (H_i) telle que pour tout i, $[H_i : H_{i+1}]$ soit infini.*

Proposition 2.3.10 [33] *: Un groupe localement gradué qui vérifie min-∞ sur les sous-groupes non-$\mathfrak{N}$ est nilpotent ou localement fini.*

Théorème 2.3.11 [33] *: Un groupe localement fini G vérifie min-∞ sur les sous-groupes non-$\mathfrak{N}$ si, et seulement si, G vérifie l'une des propriétés suivantes : (i) G est nilpotent, (ii) G est de*

Chernicov, (iii) Il existe dans G un sous-groupe normal N tel que N est un p-groupe nilpotent, G/N est de Chernicov et tout sous-groupe non-nilpotent de G de rang infini contient N.

L'étude des groupes vérifiant min-∞ sur les sous-groupes non-Ω a récemment fait l'objet de quelques articles pour différentes propriétés de sous-groupes Ω, voir par exemples [34] et [78].

2.4 Groupes n'ayant qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non-Ω

Beaucoup de résultats sur les groupes dont la famille $L_{\overline{\Omega}}(G) = \{H \leq G \mid H \notin \Omega\}$ est l'union d'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non-Ω ont été obtenus pour différentes propriétés de sous-groupes Ω. Dans cette section on exposera certains de ces résultats. On commence par un résultat de H.Smith :

Théorème 2.4.1 [69] *: Un groupe localement gradué qui n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non-nilpoents est localement nilpotent et n'a qu'un nombre fini de sous-groupes non-nilpotents.*

Le théorème précédent affirme donc que si la famille $L_{\overline{\mathfrak{N}}}(G)$ est l'union d'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non-nilpotents, alors elle est finie. Des résultats similaires ont été obtenus par S. Franciosi, F. De Giovanni et Y.P.Sysak pour d'autres classes de groupes Ω [39] et [38].

Proposition 2.4.2 [38] *: Un groupe localement gradué n'ayant qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non-$\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ n'a qu'un nombre fini de sous-groupes non-$\mathfrak{F}\mathfrak{A}$.*

Théorème 2.4.3 [39] *: Un groupe localement gradué qui n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non-$\mathfrak{P}\mathfrak{F}\mathfrak{N}_k$ est un groupe $\mathfrak{P}\mathfrak{F}\mathfrak{N}_k$ ou un groupe de Chernicov ayant un nombre fini de sous-groupes non-$\mathfrak{F}\mathfrak{A}$.*

H.Smith a démontré que si la famille $L_{\overline{\Omega}}(G)$ est l'union d'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non-Ω, alors elle est vide dans le cas où Ω est la classe des groupes $\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ (respectivement $\mathfrak{N}_k$ et $\mathfrak{S}_2$). Les résultats sont énnoncés dans les théorèmes ci-dessous :

Théorème 2.4.4 [71] *:Un groupe localement gradué n'ayant qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non-(Chernikov-par-nilpotents) est de Chernicov-par-nilpotent.*

Théorème 2.4.5 [68] *:Un groupe localement gradué n'ayant qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non-nilpotents de classe $\leq c$ est nilpotent de classe $\leq c$*

Théorème 2.4.6 [68] *: Un groupe localement gradué n'ayant qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non-métabéliens est métabélien.*

La question de savoir si le dernier théorème reste vrai pour les groupes localement gradués qui n'ont qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non-résolubles de longueur $\leq k$ semble avoir une réponse positive. Ainsi H.Smith [68] démonntre que si un tel contre exemple existe alors il contient un sous-groupe de type fini de longueur $k+1$ dont tous les sous-groupes propres sont résolubles de longueur au plus égal à k. On termine notre synthèse par le résultat obtenu par N.Trabelsi sur les groupes localement gradué n'ayant qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non-$\mathfrak{T}\mathfrak{N}$ (respectivement non-$\mathfrak{T}\mathfrak{N}_k$).

Théorème 2.4.7 [73] *:Un groupe localement gradué n'ayant qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non-$\mathfrak{T}\mathfrak{N}$ (respectivement non-$\mathfrak{T}\mathfrak{N}_k$) est $\mathfrak{T}\mathfrak{N}$ (respectivement $\mathfrak{T}\mathfrak{N}_k$).*

Chapitre 3

Groupes non-$\mathfrak{FB}$ et non-$\mathfrak{B}$ minimaux

3.1 Introduction :

Le résultat de M.F.Newman et J.Wiegold [51] cité dans le chapitre précédent sur les groupes $MN\mathfrak{N}$ de type fini a été établi pour d'autres classes de groupes comme suit : Si G est un groupe non -Ω minimal de type fini, alors G est parfait, n'admet pas de sous-groupe propre d'indice fini et $G/Frat\,(G)$ est un groupe simple infini, où Ω désigne la classe $\mathfrak{FN}$ $-$ M.Xu [76] $-$, $\mathcal{L}(\mathfrak{F})\mathfrak{N}$ $-$ A.Dilmi [28] $-$ et N.Trabelsi [74] $-$, la classe des groupes $\mathfrak{TN}$ -N.Trabelsi [74]- et enfin la classe des groupes $\mathfrak{FA}$ théorème 2.2.13.

Dans ce chapitre on va établir un résultat similaire pour la classe $\mathfrak{FB}$ (respectivement $\mathfrak{B}$). Aussi et lors de notre étude des groupes $MN\mathfrak{FB}$ et en se limitant au cas résoluble, on va démontrer un résultat sur les groupes $MN\mathfrak{FB}$ analogue à celui de M.Xu (théorème 3.4 [77]) établi pour les groupes $MN\mathfrak{B}$, aprés avoir améliorer ce dernier. Plus précisément on démontre les résultats suivants :

1- Si G est un groupe résoluble $MN\mathfrak{B}$, alors G n'est pas de type fini et pour tout $n \geq 2$ on a :

(i) $G/(\gamma_n(G'))$ est un groupe AN^*.

(ii) $\forall x \in G,\ \langle x\rangle\gamma_n(G')$ est un groupe de Baer.

(iii) $\forall H \leq G,\ H\ \gamma_n(G') = G$ implique que $H = G$.

2- Un groupe G est un groupe $MN\mathfrak{FB}$ résoluble si et seulement si il existe un sous-groupe normal A de G tel que :

$i)$ G/A est un $MN\mathfrak{FA}$.

$ii)$ $\forall x, y \in G$, $\langle x, y\rangle A$ est un groupe résoluble $\mathfrak{FB}$.

$iii)$ $\forall H \leq G$, $HA = G$ implique que $H = G$.

3.2 Groupes non-$\mathfrak{FB}$ minimaux et minimaux non-$\mathfrak{B}$ de type fini.

Lemme 3.2.1 *: La classe des groupes $\mathfrak{FB}$ est close par passage aux sous-groupes et aux quotients.*

Preuve : Soit G un groupe $\mathfrak{FB}$, donc il existe dans G un sous-groupe normal fini F tel que G/F soit de Baer.

1- Si H est un sous-groupe de G, alors $H \cap F \leq F$ et $H \cap F \rhd F$, donc $H \cap F$ est fini et normal dans H, mais $H/H \cap F \cong HF/F \leq G/F$, et comme la classe $\mathfrak{B}$ est close par passage aux sous-groupes, HF/F est de Baer, par suite $H/H \cap F$ est de Baer. Enfin, H est $\mathfrak{FB}$.

2 - Si N est un sous-groupe normal de G, alors FN est normal dans G comme produit de deux sous-groupes normaux, par suite NF/N est normal dans G/N. Le groupe $NF/N \cong F/N \cap F$ est fini comme quotient du groupe fini F, donc NF/N est normal fini dans G/N, mais (G/N) $/\,(NF/N) \cong G/NF$, et comme la classe $\mathfrak{B}$ est close par passage aux quotientset le groupe G/NF étant quotient de G/F , G/NF est de Baer . Enfin, G/N est fini-par-Baer. ■

Lemme 3.2.2 *: Soit G un groupe de type fini, si G admet un quotient non trivial localement gradué, alors G admet un sous-groupe propre d'indice fini.*

Preuve :Soit G un groupe de type fini et soit N un sous-groupe propre de G tel que G/N soit localement gradué. Comme G est de type fini, G/N est de type fini et puisque il est localement gradué, il admet un sous-groupe propre H/N d'indice fini, de $1.6.9 - [60] - (H/N)_{G/N}$ est normal d'indice fini dans G/N, donc sans perdre la généralité on peut supposer H/N normal dans G/N, d'où H est normal dans G et on a $(G/N)/(H/N)$ fini, mais $(G/N)/(H/N) \cong G/H$, par suite H est un sous-groupe propre de G d'indice fini. ■

Corollaire 3.2.3 *: Un groupe fini-par-Baer est localement gradué.*

Preuve : Soit G un groupe $\mathfrak{FB}$, si H est un sous-groupe de G de type fini, alors H est un $\mathfrak{FB}$ comme sous-groupe de G et puisque il est de type fini, il est $\mathfrak{FN}$, donc il existe dans H un sous-groupe normal K tel que H/K soit nilpotent. Puisque un groupe nilpotent est localement gradué H/K est localement gradué, du lemme 3.2.2 H admet un sous-groupe propre d'indice fini. Enfin, G est localement gradué. ■

Proposition 3.2.4 *: Soit G un groupe de type fini dont tous les sous-groupes propres sont $\mathfrak{FB}$. Si G admet un sous-groupe propre d'indice fini, alors G est un $\mathfrak{FB}$.*

Preuve : Soit G un groupe de type fini dont tous les sous- groupes propres sont $\mathfrak{FB}$ et soit H un sous-groupe de G d'indice fini, sans perdre la généralité on peut supposer H normal dans G il suffit de remplacer H par H_G.Le sous-groupe H étant propre dans G, il est $\mathfrak{FB}$ et puisque il est de type fini, il est $\mathfrak{FN}$, par suite G est $(\mathfrak{FN})\mathfrak{F}$. Comme la propriété de condition maximale est close par extension et comme un groupe fini (respectivement nilpotent de type fini) verifie max, G vérifie la condition maximale sur ses sous-groupes, par conséquent tout sous-groupe de G est de type fini, et par suite tout sous-groupe propre de G est $\mathfrak{FN}$.

Si H est de type fini de G, il est $\mathfrak{FN}$, et du corollaire 3.2.3 H est localement gradué, et comme il est de type fini, il admet un sous-groupe propre d'indice fini, donc G est localement gradué. Dans $-$ [16] , lemme 4 $-$, on a démontré qu'un groupe localement gradué de type fini dont tous les sous-groupes propres sont $\mathfrak{FN}$ est $\mathfrak{FN}$, donc G est $\mathfrak{FN}$ et a fortiori G est $\mathfrak{FB}$. ■

La proposition 3.2.4 admet pour conséquence le résultat suivant :

Corollaire 3.2.5 *: Un groupe résoluble $MN\mathfrak{FB}$ n'est pas de type fini.*

Preuve : Un groupe résoluble G est localement gradué, supposons que G est de type fini, donc il admet un sous-groupe propre d'indice fini, comme tout sous-groupe propre de G est $\mathfrak{FB}$ par application de la proposition 3.2.4, il s'ensuit que G est $\mathfrak{FB}$, par suite G n'est pas un $MN\mathfrak{FB}$. On déduit qu'un groupe résoluble $MN\mathfrak{FB}$ est non de type fini. ■

Théorème 3.2.6 *: Si G est un groupe $MN\mathfrak{FB}$ de type fini, alors G est parfait, n'admet pas de sous-groupe propre d'indice fini et $G/Frat(G)$ est simple infini.*

Preuve : Soit G un groupe $MN\mathfrak{FB}$ de type fini. Comme G n'est pas $\mathfrak{FB}$, par la proposition 3.2.4 G n'admet pas de sous-groupe propre d'indice fini.

Supposons G non parfait donc $G \neq G$, et par suite G/G' est un groupe abélien non trivial. Comme les groupes abéliens sont localement gradué et G de type fini, du lemme 3.2.2 G admet un sous-groupe propre d'indice fini, par suite il est $\mathfrak{FB}$ contradiction. On déduit que G est parfait.

Puisque un groupe de type fini admet toujours un sous-groupe maximal, $G \neq Frat(G)$, donc $G/Frat(G)$ n'est pas trivial et comme G n'admet aucun sous-groupe propre d'indice fini, $G/Frat(G)$ est infini.

Il reste à démontrer que $G/Frat(G)$ est simple, supposons le contraire et soit $H/Frat(G)$ un sous-groupe normal non trivial de $G/Frat(G)$, donc $Frat(G) \neq H$, par suite il existe un élément x de H tel que x n'appartient pas à $Frat(G)$, d'ou l'existance d'un sous-groupe maximal M tel que $x \notin M$

Comme M est maximal, $G = \langle x \rangle M$ et puisque $x \in H$, $G = HM$. Le sous-groupe$M$ étant propre dans G, il est $\mathfrak{FB}$, par suite $M/M \cap H$ est $\mathfrak{FB}$ comme la classe $\mathfrak{FB}$ est close par passage aux quotients, mais $G/H = MH/H \cong M/M \cap H$, donc G/H est $\mathfrak{FB}$ et par application du corollaire 3.2.3 G/H est localement gradué, du lemme 3.2.2 G admet un sous-groupe propre d'indice fini contradiction. Enfin, $G/Frat(G)$ est simple. ∎

Le théoreme 3.2.6 admet comme conséquence le résultat suivant :

Proposition 3.2.7 *: Soit G un groupe $MN\mathfrak{B}$ de type fini, alors G est parfait, n'admet pas de sous- groupe propre d'indice fini et $G/Frat(G)$ est simple infini.*

Preuve : Soit G un groupe $MN\mathfrak{B}$ de type fini. Puisque un groupe de Baer est $\mathfrak{FB}$, G est un $MN\mathfrak{FB}$ ou il est $\mathfrak{FB}$.

Supposons que G est $\mathfrak{FB}$, puisque il est de type fini, il est $\mathfrak{FN}$, et donc il verifie la condition maximale, par suite tout sous-groupe propre de G est de type fini, et par conséquent tout sous-groupe propre de G est nilpotent, donc G est un $MN\mathfrak{N}$, mais G est $\mathfrak{FN}$ dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents, donc G est résoluble contradiction en vertu qu'un $MN\mathfrak{N}$ de type fini est parfait. On déduit que G est un $MN\mathfrak{FB}$, d'ou le résultat. ∎

3.3 Groupes résolubles non$-\mathfrak{B}$ minimaux .

Dans M.Xu [77] ,on a établi que si G est un groupe résoluble $MN\mathfrak{B}$, alors G/G''est un groupe AN^*. On va établi un résultat qui généralise celui-ci dans le théorème 3.2.4

Lemme 3.3.1 *: Un groupe $\mathfrak{NF}$ de Baer est nilpotent.*

Preuve : Soit G un groupe $\mathfrak{NF}$ de Baer et soit N un sous groupe normal nilpotent d'indice fini dans G. Le groupe G/N étant fini, il existe un nombre fini d'éléments $x_1, x_2, ..., x_p$ de G tel que $G = \langle x_1, x_2, ..., x_p \rangle N$. Comme G est de Baer et $H = \langle x_1, x_2, ..., x_p \rangle$ est un sous -groupe de type fini de G, H est sous-normal est nilpotent. Le groupe G étant produit de deux sous-groupes nilpotents l'un normal et l'autre sous normal, par application de théorème 1.2.13, le groupe G est nilpotent. ■

Lemme 3.3.2 [51] *: Un groupe abélien G dont toute paire de sous-groupes propres normaux engendre un sous-groupe propre est un $p-$groupe cyclique ou $p-$groupe quasicyclique.*

Corollaire 3.3.3 [51] *: Si G est un groupe tel que toute paire de sous-groupes propres normaux engendre un sous-groupe propre, alors si G/G' n'est pas trivial, il est un $p-$groupe cyclique ou un $p-$groupe quasicyclique et $G' = \bigcap_{n\geq 2} \gamma_n(G)$.*

Théorème 3.3.4 *:Si G est un groupe $MN\mathfrak{B}$ résoluble, alors G est de type infini et pour tout $n \geq 2$ on a :*

(i) $G/(\gamma_n(G'))$ est un groupe AN^*.

(ii) $\forall x \in G,\ \langle x\rangle \gamma_n(G')$ est un groupe de Baer.

(iii) $\forall H \leq G,\ H\ \gamma_n(G') = G$ implique que $H = G$.

Inversement $-$ M. Xu, [77], Théorème 3.4 $-$s'il existe un sous-groupe normal A de G tel que :

(1) G/A est un groupe AN^*.

(2) $\forall x \in G$, $\langle x\rangle A$ est un groupe de Baer, résoluble.

(3) $\forall H \leq G$, $HA = G$ implique que $H = G$.

Alors G est un groupe résoluble $MN\mathfrak{B}$ de type infini.

Preuve : (i) Soit G un groupe $MN\mathfrak{B}$ résoluble, de la proposition 3.2.4 G est de type infini.

Comme le produit de deux sous-groupes normaux de Baer est de Baer, toute paire de sous-groupes propres de G engendre un sous-groupe propre, et du corollaire 3.3.3 G/G' est un $p-$groupe cyclique ou un $p-$groupe quasicyclique et on a $\forall n \geq 2$, $G' = \gamma_n(G)$.

Supposons que G/G' est un p-groupe quasicyclique, donc pour tout x de G, $\langle x\rangle G'$ est propre dans G, par suite $\langle x\rangle G'$ est du Baer, d'ou $\langle x\rangle$ est sous-normal dans $\langle x\rangle G'$, mais $\langle x\rangle G'$ est normal dans G, donc pour tout x de G, $\langle x\rangle$ est sous-normal dans G enfin, G est de Baer contradiction. On déduit que G/G' est un $p-$groupe cyclique et G admet un sous-groupe maximal, d'ou l'existence d'un élément x de G tel que $G = \langle x\rangle G'$ avec $x^{p^m} \in G'$, m entier positf

Pour tout $n \geq 2$, soit $H/\gamma_n(G')$ un sous-groupe propre de $G/\gamma_n(G')$, donc H est un sous-groupe propre de G, et par suite H est de Baer. Comme la Classe $\mathfrak{B}$ est close par passage aux quotients, $H/\gamma_n(G\ ')$ est de Baer. Le groupe $G'/\gamma_n(G')$ est nilpotent et $G/\gamma_n(G')/G'/\gamma_n(G') \cong G/G'$ est fini, donc $G/\gamma_n(G')$ est $\mathfrak{NF}$ et par suite $H/\gamma_n(G')$ est $\mathfrak{NF}$. Le groupe $H/\gamma_n(G')$ étant $\mathfrak{NF}$ de Baer par le lemme 3.3.1, $H/\gamma_n(G')$ est nilpotent, et par suite tout sous-groupe de $G/\gamma_n(G')$ est nilpotent.

Si $G/\gamma_n(G')$ est nilpotent, alors il existe c entier positif $c \geq 2$ tel que $\gamma_c(G) = \gamma_n(G')$, mais $\forall n \geq 2$, $G' = \gamma_n(G)$, donc $G' = \gamma_n(G')$, d'ou G'est trivial et G est abélien contradiction. On déduit que $G/\gamma_n(G')$ n'est pas nilpotent, par suite il est $MN\mathfrak{N}$ ayant un groupe maximal. Finalement, $G/\gamma_n(G')$ est un groupe AN^*.

(ii) Soit x un élément de G, si $\langle x \rangle\ \gamma_n(G')$ n'est pas propre dans G, alors $G = \langle x \rangle\ \gamma_n(G')$, d'ou $G/\gamma_n(G') = \langle x \rangle\ \gamma_n(G')/\gamma_n(G')$, mais on a $\langle x \rangle\ \gamma_n(G')/\gamma_n(G') \cong \langle x \rangle/\gamma_n(G') \cap \langle x \rangle$ abélien, donc $G/\gamma_n(G')$ est abélien contradiction. Par suite, pour tout x de G, $\langle x \rangle\gamma_n(G')$ est propre dans G, et par conséquent il est résoluble de Baer.

(iii) Soit H un sous groupe de G tel que $G = H\gamma_n(G')$, donc $G/\gamma_n(G') = H\gamma_n(G')/\gamma_n(G')$, mais $H\ \gamma_n(G')/\gamma_n(G') \cong H/\gamma_n(G') \cap H$

Si H est propre dans G, alors il est de Baer et comme la classe $\mathfrak{B}$ est close par passage aux quotients, $H/\gamma_n(G') \cap H$ est de Baer, et par suite $G/\gamma_n(G')$ est de Baer contradiction. Donc H n'est pas propre dans G c'est à dire que $G = H$.

Inversement $-$ voir [77] $-$, soit A un sous groupe de G tel que :

1) G/A est un groupe AN^*.

2) $\forall x \in G$, $\langle x \rangle A$ est un Baer résoluble groupe.

3) $\forall H \leq G$, $HA = G$ implique que $H = G$.

De (2) A est résoluble et de (1) G/A est un groupe AN^*, donc il est résoluble, par suite G est résoluble comme la classe résoluble est stable par extension. Si H est un sous-groupe propre de G, de (3) HA est propre dans G, par suite HA/A est propre dans G/A mais, G/A est un groupe AN^*, donc HA/A est nilpotent, par suite pour tout h de H, $\langle h \rangle A/A$ est un sous-groupe sous-normal dans HA/A, d'ou $\langle h \rangle A$ est sous-normal dans HA, mais de (2) $\langle h \rangle A$ est un sous-groupe de Baer, par suite $\langle h \rangle$ est sous- normal dans $\langle h \rangle A$, donc $\langle h \rangle$ est sous-normal dans HA et enfin, $\langle h \rangle$ est sous-normal dans H . On déduit que H est de Baer. Supposons que G soit de Baer puisque un groupe AN^*est de Cernicov, G est $\mathfrak{AF}$ de Baer et du lemme 3.3.1G est nilpotent par suite G/A est nilpotent contradiction. Donc G n'est pas de Baer. Enfin, il est $MN\mathfrak{B}$. ■

Comme conséquence du théorème 3.3.5 on a le résultat suivant :

Corollaire 3.3.5 *: Un groupe $\mathfrak{NA}$, $MN\mathfrak{B}$ est un groupe AN^*.*

Le corollaire 3.3.5 est aussi une simple déduction du corollaire 3.2 – [77] –

3.4 Groupes résolubles non–$\mathfrak{FB}$.

Lemme 3.4.1 *: Un groupe $\mathfrak{FB}$, localement nilpotent est de Baer.*

Preuve : Soit G un groupe localement nilpotent $\mathfrak{FB}$, donc il existe dans G un sous-groupe normal fini H tel que G/H est de Baer. Par suite, pour tout x de G, $\langle x, H\rangle/H$ est sous-normal dans G/H , d'ou $\langle x, H\rangle$ est sous-normal dans G. Comme H est fini, $\langle x, H\rangle$ est de type fini, mais G est localement nilpotent, donc $\langle x, H\rangle$ est nilpotent, par conséquent $\langle x\rangle$ est sous-normal dans $\langle x, H\rangle$ comme sous-groupe d'un groupe nilpotent. On déduit que pour tout x de$G$, $\langle x\rangle$ est sous-normal dans G. Enfin, G est de Baer. ■

Corollaire 3.4.2 *: Un groupe $MN\mathfrak{FB}$ est un $MN\mathfrak{B}$ si et seulement si il est localement nilpotent.*

Preuve : Soit G un groupe $MN\mathfrak{FB}$

- Si G est $MN\mathfrak{B}$, alors tout sous-groupe propre de G est de Baer, s'il est de type fini, il est nilpotent, par suite G est localement nilpotent.

- Si G est localement nilpotent, alors tout sous-groupe de G est $\mathfrak{FB}$ et localement nilpotent, du lemme 3.4.1 tout sous-groupe de G est de Baer. Le groupe G n'est pas fini-par-Baer, donc il n'est pas de Baer puisque il est localement nilpotent. On déduit que G est un $MN\mathfrak{B}$.

Inversement si G est $MN\mathfrak{B}$, alors tout sous-groupe H de G est de Baer, par suite H est $\mathfrak{FB}$. Si G est $\mathfrak{FB}$ puisque il est localement nilpotent, du lemme 3.4.1 G est de Baer contradiction. Donc G n'est pas $\mathfrak{FB}$ et enfin, G est un $MN\mathfrak{FB}$. ■

Lemme 3.4.3 *: Si G est un groupe $\mathfrak{FB}$, alors il existe dans G un sous-groupe caractéristique fini H tel que G/H soit de Baer.*

Preuve : Soit G est un groupe $\mathfrak{FB}$ donc G est $\mathfrak{F}\mathcal{L}(\mathfrak{N})$, et du lemme 2.9 – [21] – il existe dans G un sous-groupe caractéristiques fini H tel que G/H soit localement nilpotent et comme G est $\mathfrak{FB}$, du lemme 3.1.1 G/H est $\mathfrak{FB}$ et puisque il est localement nilpotent, du lemme 3.3.1G/H est de Baer. ■

Proposition 3.4.4 *: La classe $\mathfrak{FB}$ est close par passage aux produit fini des sous-groupes normaux.*

Preuve : Soient H et K deux sous- groupes normaux $\mathfrak{FB}$ d'un groupe G,du lemme 3.4.3 il existe deux sous-groupe caractéristiques finis M et N de H et K respectivement tel que H/M et K/N soient de Baer.

Les sous-groupes M et N sont caractéristiques dans H et K respectivement et H et K sont normaux dans G,donc M et N sont normaux dans G et par suite MN est un sous- groupe normal fini dans G, d'ou MN est normal dans HK : $MN \triangleright HK$............1

On a M normal dans H et K normal dans G par suite $MK \triangleright HK$.......................2

De même N normal dans K et H normal dans G par suite : $HN \triangleright HK$ 3

De 1 , 2 et 3, on déduit que $HN/MN \triangleright HK/MN$ et $MK/MN \triangleright HK/MN$..................4

Comme $H/(H \cap MN) \cong H/M/(H \cap MN/M)$et H/M est de Baer, $H/H \cap MN$ est de Baer, mais $HN/MN \cong H/H \cap ML$, donc HN/MN est de Baer 5

Aussi $K/(K \cap MN) \cong K/N/(K \cap MN/N)$ et K/N de Baer d'ou $K/K \cap MN$ est de Baer, mais $MK/MN \cong K/(K \cap MN)$, donc NK/NL est de Baer 6

De 4 et 5 $HN/MN\ .MK/MN$ est de Baer comme produit de deux sous-groupes normaux de Baer, par suite HK/MN est de Baer. Finalement, HK est $\mathfrak{FB}$. ■

Lemme 3.4.5 *: Si G est un groupe de Baer résoluble tel que G/G' fini, alors G est fini.*

Preuve : Soit G un groupe de Baer résoluble tel que G/G' soit fini, on démontre par réccurence sur la longueur de G que G est fini.

Si G est abélien, alors G est fini par application de 5.2.6 [60]

Supposons que tout groupe H de Baer et résoluble de longueur $k < d$ vérifiant H/H' fini est fini, et soit G un groupe de Baer résoluble de classe d tel que G/G' fini. Posons $A = G^{d-1}$, alors G/A est de Baer résoluble de longueur $d-1$ et A est abélien. On a $G/A/\ (G/A)' \cong G/G'$, donc $G/A/\ (G/A)'$ est fini et par hypothèse de réccurence G/A est fini , et par suite G est abélien–par-fini et puisque il est de Baer du lemme 3.3 G est nilpotent et puisque G/G'est fini, de 5.2.6 $-$ [60] $-$ on déduit que G est fini. ■

Lemme 3.4.6 *: Soit G un groupe $MN\mathfrak{FB}$, alors G/G'est un p-groupe cyclique et pour tout $n \geq 2$ on a : $G' = \gamma_n(G)$.*

Preuve : Soit G un groupe $MN\mathfrak{FB}$.

Comme le produit de deux sous-groupes normaux $\mathfrak{FB}$ est $\mathfrak{FB}$, toute paire de sous-groupes propres de G engendre un sous-groupe propre, du corollaire 3.3.3 G/G' est un p-groupe cyclique ou p-groupe quasicyclique et on a $\forall n \geq 2, G' = \gamma_n(G)$.

Supposons que G/G' est un p-groupe quasicyclique, donc pour tout x de G, $\langle x, G'\rangle$ est propre dans G, par suite$\langle x, G'\rangle$ est $\mathfrak{FB}$, et du lemme 3.4.3 il existe un sous-groupe caractéristique fini N de tel que $\langle x, G'\rangle/N$ est de Baer. Mais $\langle x, G'\rangle$ normal dans G, donc N est normal fini dans G, par suite $G/(C_G(N))$ est fini , comme G/G' est quasicyclique, G n'a pas de sous-groupe propre d'indice fini, par suite $C_G(N) = G$ et N est central dans G.

Si $y \in \langle x, G'\rangle$, alors $\langle y, N\rangle/N$ est sous-normal dans $\langle x, G'\rangle/N$, par conséquent $\langle y, N\rangle$ est sous-normal dans $\langle x, G'\rangle$. Le groupe N est central dans G, donc N est abélien et $\forall z \in N : zy = yz$, par suite $\langle y, N\rangle$est abélien, d'ou $\langle y\rangle$ est normal dans $\langle y, N\rangle$, et par conséquent $\langle y\rangle$ est sous-normal dans $\langle x, G'\rangle$. On déduit que $\langle x, G'\rangle$ est de Baer, donc $\langle x\rangle$ est sous-normal dans $\langle x, G'\rangle$, par suite $\langle x\rangle$ est sous-normal dans G, d'ou G est de Baer contradiction. Finalement, G/G est un p-groupe cyclique. ■

Proposition 3.4.7 *: G un groupe $MN\mathfrak{FB}$,nilpotent-par-abélien, alors G est $MN\mathfrak{FA}$ non parfait.*

Preuve : Soit G un groupe nilpotent-par-abélien, donc G' est nilpotent.

Si G est un $MN\mathfrak{FB}$, du lemme 3.4.6 G/G' est un p-groupe cyclique, et par suite G est $\mathfrak{NF}$

Soit H un sous groupe propre de G, donc H est $\mathfrak{FB}$, par suite il existe dans H un sous-groupe normal fini K tel que H/K est de Baer.

Le groupe G est $\mathfrak{NF}$, et comme la classe des groupes $\mathfrak{NF}$ est close par passage aux sous-groupes et aux quotients, H est $\mathfrak{NF}$, et par suite H/K est $\mathfrak{NF}$, du lemme 3.3.1, H/K est nilpotent, par conséquent H est $\mathfrak{FN}$. Le groupe G n'est pas $\mathfrak{FB}$, donc il n'est-pas $\mathfrak{FN}$, par suite G est un $MN\mathfrak{FN}$. Comme G est résoluble, il n'est pas parfait et puisque il n'est pas de type fini, de théorème $3.5 - [76] - G$ est un groupe AN_*ou un $MN\mathfrak{FA}$ non parfait, mais un groupe AN_* est de Baer, donc G est un $MN\mathfrak{FA}$ non parfait. ■

Théorème 3.4.8 *: Si G est un groupe résoluble $MN\mathfrak{FB}$, alors G est de type infini et pour tout $n \geq 2$ on a :*

i) $G/\gamma_n(G')$ est un $MN\mathfrak{FA}$.

ii) $\forall x, y \in G$, $\langle x, y\rangle\gamma_n(G\,')$ est un sous-groupe $\mathfrak{FB}$.

iii) $\forall H \leq G$, $H\gamma_n(G\,') = G$ implique que $H = G$.

Inversement soit A un sous-groupe normal de G tel que :

1) G/A est un $MN\mathfrak{FA}$.

2)$\forall x, y \in G$, $\langle x, y\rangle A$ est un sous-groupe résoluble $\mathfrak{FB}$.

3)$\forall H \leq G$, $HA = G$ implique que $H = G$.

Alors G est un groupe résoluble $MN\mathfrak{FB}$.

Preuve : Soit G un groupe résoluble $MN\mathfrak{FB}$, du corollaire 3.2.5 G est non de type fini et du lemme 3.4.6 G/G' est fini.

Pour tout $n \geq 2$,

i) Soit $H/\gamma_n(G')$ un sous-groupe propre de $G/\gamma_n(G')$, donc H est un sous-groupe propre de G, d'ou H est $\mathfrak{FB}$ et comme la classe $\mathfrak{FB}$ est close par passage aux quotients, $H/\gamma_n(G')$ est $\mathfrak{FB}$, par suite tout sous-groupe de $G/\gamma_n(G')$ est $\mathfrak{FB}$, donc il existe dans $H/\gamma_n(G')$ un sous-groupe normal fini $K/\gamma_n(G')$ tel que $H/\gamma_n(G')/K/\gamma_n(G')$ soit de Baer. Le groupe $G'/\gamma_n(G')$ nilpotent et $G/\gamma_n(G')/G'/\gamma_n(G') \cong G/G'$ abélien fini, donc $G/\gamma_n(G')$ est $\mathfrak{NF}$, et par suite $H/\gamma_n(G')$ est $\mathfrak{NF}$, d'ou $(H/\gamma_n(G'))\,(G/\gamma_n(G'))\,/\ G'/\gamma_n(G')$ est $\mathfrak{NF}$ de Baer, du lemme 3.3 ;1 $G/\gamma_n(G')/G'/\gamma_n(G'$ est nilpotent, donc $H/\gamma_n(G')$ est $\mathfrak{FN}$,et par suite tout sous-groupe de $G/\gamma_n(G')$ est $\mathfrak{FN}$.

Si $G/\gamma_n(G')$ est $\mathfrak{FN}$, alors il existe c entier positif tel que $\gamma_c(G/\gamma_n(G'))$ soit fini, par suite $\gamma_c(G)/\gamma_n(G')$ est fini pour un certain entier c. Mais $\gamma_c(G) = G'$ par le lemme 3.4.6 $G'/\gamma_n(G')$

est fini. Le sous-groupe G'étant propre dans G, il est $\mathfrak{FB}$, donc il existe un sous-groupe normal fini N de G' tel queG'/N de Baer, d'ou $G'/\gamma_n(G')N$ est de Baer comme quotient de G'/N . Le groupe G'/G'' est fini comme quotient de $G'/\gamma_n(G')$, par suite $G'/N/\left(G'/N\right) \cong G'/G''N$ est fini, du lemme 3.4.5 G'/N est fini, d'ou G' est fini, et par suite G est fini contradiction. On déduit que $G/\gamma_n(G')$ n'est pas $\mathfrak{FN}$, donc il est $MN\mathfrak{FN}$, du théorème 3.5$-$ [66] $-$ il est un $MN\mathfrak{FA}$ non parfait.

(ii)Soient x et y deux éléments de G, si $\langle x,y\rangle\gamma_n(G')$ n'est pas propre dans G, alors $G = \langle x,y\rangle\gamma_n(G')$, donc $G/\gamma_n(G')/\langle x\rangle\gamma_n(G')/\gamma_n(G')$, mais $\langle x,y\rangle\gamma_n(G')/\gamma_n(G') \cong \langle x,y\rangle/\gamma_n(G')\cap \langle x,y\rangle$. Le sous-groupe $\langle x,y\rangle$ est de type fini, donc il est propre dans G, par suite $\langle x,y\rangle$ est $\mathfrak{FB}$, d'ou $\langle x,y\rangle/\gamma_n(G')\cap\langle x,y\rangle$ est $\mathfrak{FB}$ comme quotient de $\langle x,y\rangle$, par suite $G/\gamma_n(G')$ est $\mathfrak{FB}$ contradiction. On déduit que pour tout x, y de G, $\langle x,y\rangle\gamma_n(G')$ est pas propre dans G, par suite $\langle x,y\rangle\gamma_n(G')$ est résoluble $\mathfrak{FB}$.

(iii) Soit H un sous-groupe de G tel que $G = H\gamma_n(G')$, donc $G/\gamma_n(G') = H\gamma_n(G')/\gamma_n(G')$, mais $H\gamma_n(G')/\gamma_n(G') \cong H/\gamma_n(G')\cap H$.

Si H est propre dans G, alors il est $\mathfrak{FB}$, donc $H/\gamma_n(G')\cap H$ est $\mathfrak{FB}$, et par suite $G/\gamma_n(G')$ est $\mathfrak{FB}$ contradiction. On déduit que H est pas propre dans G c-à-d $G = H$.

Inversement supposons qu'il existe dans G un sous-groupe normal A vérifiant :

1)G/A est un $MN\mathfrak{FA}$ non parfait.

2)$\forall x, y \in G$, $\langle x,y\rangle A$ est un groupe résoluble $\mathfrak{FB}$.

3)$\forall H \leq G$, $HA = G$ implique que $H = G$.

Le groupe G/A est un $MN\mathfrak{FA}$ non parfait, donc il metabélien, mais par 2), A est résoluble, donc G est résoluble.

Un groupe $MN\mathfrak{FA}$ est $\mathfrak{AF}$, si G/A est $\mathfrak{FB}$, alors il est $\mathfrak{FU}$; mais un groupe $MN\mathfrak{FA}$ non parfait est un $MN\mathfrak{FN}$ contradiction. DoncG/A n'est pas $\mathfrak{FB}$. On va démontrer que tout sous-groupe propre de G et $\mathfrak{FB}$.

Soit H un sous-groupe propre de G, de 3), HA est propre dans G, s'il est $\mathfrak{FB}$, alors H est $\mathfrak{FB}$, donc sans perdre la généralité on peut supposer que H contient A. Mais A est $\mathfrak{FB}$, donc il existe dans A un sous groupe fini F normal dans G tel que A/F soit de Baer.

Posons $G_1 = G/F$ et $A_1 = A/F$, alors G_1/A_1 est un $MN\mathfrak{FA}$ et on a A_1 de Baer, donc sans perdre la généralité on peut supposer A de Baer.

Le groupe H/A est un sous-groupe propre de G/A, du théoreme 2.2.10 il est abélien ou fini.

- Supposons que H/A est abélien, si H n'est pas $\mathfrak{FB}$, donc on peut construire une suite descendante (G_n)de sous groupes non -$\mathfrak{FB}$ de G contenant A. Comme G/A est de cernicov, la suite (G_n/A)est stationnaire et par suite(G_n) est stationnaire, donc on peut supposer que tout sous groupe de H qui contient A est $\mathfrak{FB}$. Le sous-groupe H/A est abelien dont toute paire de sous groupe propre engendre un sous groupe propre, du lemme 3.3.2 H/A est un p-groupe cyclique ou quasicyclique, si H/A et p-cyclique, alors il existe a dans H tel que $H = \langle a \rangle A$ de 2) H est Baer contradiction. Donc H/A est quasicyclique. Soit h de H , $\langle h \rangle A$ est propre dans H, donc $\langle h \rangle A$ est $\mathfrak{FB}$, d'ou il existe un sous groupe fini F de $\langle a \rangle A$ normal dans H tel que $\langle h \rangle A/F$ soit de Baer, par suite $H/C_H(F)A$ est fini. mais, un sous groupe quasicyclique n'admet pas de sous groupe propre d'indice fini, donc $H = C_H(F)A$, par suite il existe a dans A et c dans $C_H(F)$ tel que $h = ca$. On a $\langle c \rangle F/F$ sn $\langle h \rangle A/F \trianglelefteq H/A$, d'ou $\langle c \rangle F/F sn H/A$, par suite $\langle c \rangle F sn$ H, mais $\langle c \rangle \trianglelefteq \langle c \rangle F$ comme $c \in C_H(F)$, et par conséquent $\langle c \rangle$ sn H. On a $a \in A$ et A de Baer normal dans H, donc $\langle a \rangle$ sn H du proposition 1.2.12, $\langle a\ , c \rangle$ est un sous-groupe de H sous-normal et nilpotent, et par suite $\langle h \rangle$ sn H enfin, H est de Baer contradiction a. On déduit que H/A est fini et non abélien. Comme G/A est un $MN\mathfrak{FB}$, de remarque 2.2.11 il existe un sous-groupe normal M de G et un élément y de G tel que $G/A = M \langle zA \rangle /A$ avec $M/A = M_1/A \times M_2/A \times \ldots\ldots \times M_n/A$, $M_i/A \cong C_{p^\propto}$ et $z^{q^s} \in A$, p et q deux nombres premiers non necessairement distincts, n et s deux entiers positifs.

Si $n > 1$ alors, $K/A = \langle M/A\ ,\ H/A \rangle$ est un sous-groupe propre de G/A et puisque il est infini il est abélien, donc H/A est abélien contradiction. Par suite $n = 1$ et $M/A = M_1/A \cong C_{p^\propto}$. Le sous-groupe $H/A \cap M/A$ est normal dans H/A et on a $H/A \cap M/A$ et $(H/A) / (H/A \cap M/A)$ cycliques, donc il existe deux éléments x et y de H tel que $H/A = \langle xA \rangle \langle yA \rangle$. Par suite $H = \langle x\ , y \rangle A$ et de 2) H est $\mathfrak{FB}$ contradiction. On déduit que tout sous-groupe de G est $\mathfrak{FB}$. Finalement, G est $MN\mathfrak{FB}$. ■

Lemme 3.4.9 [77] *: soit G un groupe résoluble localement nilpotent, si G/G'est un π-groupe, alors G'est un π-groupe.*

Proposition 3.4.10 *: Un groupe $MN\mathfrak{FB}$ est dénombrable de torsion et $\pi\,(G)$est fini.*

Preuve : Soit G un groupe résoluble $MN\mathfrak{FB}$, du théorème 3.4.8 G/G'' est un $MN\mathfrak{FA}$, mais un $MN\mathfrak{FA}$ est dénombrable de torsion et l'ensemble des nombres premier divisant l'ordre de ses éléments et au plus de cardinal égal à 2 -[16] −, donc G/G''est dénombrable, par suite il existe un sous-groupe dénombrable $\langle S\rangle$ de G tel que $G = \langle S\rangle G''$, de (iii) théorème 3.4.8., $G = \langle S\rangle$, donc G est dénombrable et de plus G/G''est de torsion et $\pi\,(G/G'') \leq 2$

Le sous-groupe G' étant propre dans G, il est fini- par-Baer, par suite il existe dans G' un sous-groupe normal fini H tel que G'/H est de Baer.

Le groupe G'/HG'' est un quotient de G/G'' qui est sous-groupe de G/G'', donc G'/HG'' est de torsion et on a $\pi\,(G'/HG'') \leq 2$.

Le groupe G'/H est résoluble de Baer, donc il est résoluble localement nilpotent et $G'/H/\,(G'/H)' \cong G'/HG''$est un π − groupe du lemme 3.4.9 G'/H est un π − groupe et $\pi\,(G'/H) \leq 2$, mais H est fini, donc G' est de torsion et $\pi\,(G')$ est fini, et puisque G est un groupe $MN\mathfrak{FB}$, G/G' est fini, par suite G est de torsion et $\pi\,(G)$ est fini. ■

Corollaire 3.4.11 *: Un groupe $MN\mathfrak{FB}$, résoluble et de rang fini est un $MN\mathfrak{FU}$ non parfait et de Cernicov.*

Preuve : Soit G un groupe $MN\mathfrak{FB}$, résoluble de rang fini. Comme G est un $MN\mathfrak{FB}$, G est de torsion et l'ensemble des nombres premiers divisant l'ordre de ses éléments est fini. Puisque il est de rang fini, par application de proposition 1.3.11 tout sous-groupe ou tout quotient de Baer de G est nilpotent, par suite tous sous-groupe de G est $\mathfrak{FN}$ et par conséquent G est un $MN\mathfrak{FN}$, d'ou G est un $MN\mathfrak{FU}$ non parfait de Cernicov. ■

Proposition 3.4.12 *: Si G est un groupe $MN\mathfrak{FB}$ tel que G' est hypercentral, alors G est un $MN\mathfrak{FU}$ de Cernicov.*

Preuve : Soit G est un groupe $MN\mathfrak{FB}$ tel que G' hypercentral, du théorème 3.4.8 G/G''est un $MN\mathfrak{FU}$ et de la remarque 2.2.18 G/G''est produit semi directe d'un p-groupe quasicyclique par un groupe cyclique fini, donc G/G''est une extension cyclique d'un groupe abélien divisible, par suite G'/G'' est divisible. On a G'/G'' est divisible et G' hypercentral, posons $H = G'$ donc

H/H' divisible et H hypercentral du $9.23-[59]-$ $H=G'$ est divisible, mais G est un groupe minimal non fini-par-Baer, donc G est de torsion et G/G' est fini, par application de théorème $9.23-[59]-$ un groupe divisible hypercentral de torsion est abélien, d'ou G' est abélien et par suite G est abélien-par-fini, de la proposition 3.4.7 on déduit que G est un $MN\mathfrak{FU}$ non parfait de Cernicov. ■

Remarque 3.4.13 *: Dans [77] on trouve un exemple d'un groupe $MN\mathfrak{B}$ localement nilpotent et résoluble qui n'est pas un AN^* groupe. G contient un sous-groupe normal propre H qui n'est pas nilpotent , du lemme 3.3.1 H n'est pas $\mathfrak{FN}$ par suite G n'est pas $MN\mathfrak{FN}$ et de théorème 3.5 - [77] - G n'est pas un $MN\mathfrak{FU}$ donc G est un $MN\mathfrak{FB}$qui n'est pas un $MN\mathfrak{FU}$,de plus G n'est pas $\mathfrak{NF}$, alors un $MN\mathfrak{B}$ (respectivement un $MN\mathfrak{FB}$)n'est pas nécessairement de Cernicov*

Remarque 3.4.14 *:Un groupe de Baer qui est nilpotent-par-abélien ou résoluble de rang fini est de Fitting donc on peut établir les mémes résultats sur les $MN\mathfrak{FB}$ pour les groupes résolubles non-(fini-par-Fitting) minimaux .*

Chapitre 4

Groupes ayant peu de sous groupes $non-\ \mathcal{L}\left(\mathcal{F}\right)\mathfrak{B}$

1- Introduction.

2- Groupes non-((localement fini)-par-Baer) minimaux.

3- Groupes localement gradué ayant peu de sous- groupes non- ((localement finis)-par-Baer).

4.1 Introduction :

Dans son article [73] N.Trabelsi a démontré qu'un groupe localement gradué ayant en un certain sens peu de sous-groupes $non - \mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{N}$ est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{N}$.

Dans ce chapitre on va établir un résultat analogue à celui–ci pour les groupes localement gradué ayant peu de sous-groupes $non - \mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, on commence par démontrer un résultat sur les groupes $MN - \mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ similaire au résultat établi par A.Dilmi [28] pour les groupes $MN - \mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{N}$, plus précisement on démontre qu'un groupe $MN - \mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ est de type fini, parfait, n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini et $G/Frat(G)$ est simple infini. Dans une deuxieme étape on démontre qu'un un groupe G vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes $non - \mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ ou qui n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaisons de sous-groupes $non - \mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$.

4.2 Groupes $MN - \mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$.

Il est clair que la classe des groupes $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ est close par passage aux sous-groupes et aux quotients.

Lemme 4.2.1 *: Soit G un groupe localement nilpotent sans torsion, x et g deux éléments de G, s'il existe deux entiers positifs n et k tel que $[\langle g\rangle ,_k \ \langle x^n\rangle] = 1$, alors $[\langle g\rangle ,_k \ \langle x\rangle] = 1$*

Preuve : Soit G un groupe localement nilpotent sans torsion, et soient x et g deux éléments de G tels qu'il existe deux entiers positfs n et k vérifiant $[\langle g\rangle \ ,_k \ \langle x^n\rangle] = 1$. Posons $H = \langle g\rangle$, $K = \langle x\rangle$ et $N = \langle x^n\rangle$, N est d'indice fini dans K, du théorème 2.3.3 $-$ [44] $-$ $[H \ ,_k \ N]$ est d'indice fini dans$[H,_k \ K]$, mais $[H,_k \ K] = 1$, donc$[H,_k \ N]$ est fini, et comme G est sans torsion, $[H,_k \ K]$ est trivial, donc $[\langle g\rangle ,_k \ \langle x\rangle] = [H,_k \ K] = 1$. ■

Lemme 4.2.2 *: soit G un groupe localement nilpotent sans torsion, si G admet un sous-groupe propre de Baer d'indice fini, alors G est de Baer.*

Preuve : Soit G un groupe localement nilpotent sans torsion, et soit N un sous-groupe propre de G, de Baer et d'indice fini $[G : N] = n$. Sans perdre la généralité $-$ [60] ,1.6.9 $-$, on peut supposer N normal dans G, pour tout x de G on a $x^n \in N$ et puisque N est de Baer, $\langle x^n \rangle$ est sous-normal dans N, mais N est normal dans G, donc $\langle x^n \rangle$ est sous-normal dans G, par suite, pour tout g de G, $[g,_k\ x^n] = 1$, et du lemme 4.2.1, $[g,_k\ x] = 1$, par conséquent $\langle x \rangle$ est sous-normal dans G. Enfin, G est de Baer. ■

Proposition 4.2.3 *: Soit G un groupe de type infini dont tous les sous-groupes propres sont de Baer, si G est sans torsion il est de Baer.*

Preuve : Soit G un groupe sans torsion non de type fini dont tous les sous-groupes propres sont de Baer.

Supposons que G n'est pas de Baer, tout sous-groupe de G de type fini est propre dans G, donc il est de Baer et puisque il est de type fini, il est nilpotent et par suite G est localement nilpotent, d'ou $G^{'} \leq Frat(G) - [60]\,,\ 12.1.5-$

- Si G est parfait, alors $G' = G$, et par suite $G = Frat(G)$, donc G n'admet pas de sous-groupes maximaux.

Soit $B(G)$ le radical de Baer de G. Le sous-groupe $B(G)$ est propre et caractéristique dans G, si $G/B(G)$ est de Baer alors, $\forall x \in G$, $xB(G))/B(G)$ est sous-normal dans $G/B(G)$, par suite $\langle x, B(G) \rangle$ est sous-normal dans G et puisque G n'admet pas de sous-groupes maximaux, $\langle x, B(G) \rangle$ est propre dans G, il s'ensuit qu'il est de Baer, donc $\langle x \rangle$ est sous-normal dans G et $B(G) = G$ contradiction. On déduit que $G/B(G)$ n'est pas de Baer.

On va démontrer que $G/B(G)$est simple, soit $H/B(G)$ sous-groupe normal propre de $G/B(G)$, donc H est un sous-groupe normal propre de G, par suite H est de Baer.

Si $H \neq B(G)$ alors, il existe $x \in H$ tel que $x \notin B(G)$ mais, H est de Baer, donc $\langle x \rangle$ est sous-normal dans H et puisque H est normal dans G, $\langle x \rangle$ est sous-normal dans G, par suite $x \in B(G)$ contradiction, d'ou $H = B(G)$ .On déduit que $G/B(G)$ est simple.

G est localement nilpotent, donc $G/B(G)$ est localement nilpotent simple, du théorème 5.27 $-$ [59] $-$ $G/B(G)$ est cyclique d'ordre premier contradiction. On déduit que G est de Baer.

- Supposons que G n'est pas parfait donc, G/G'n'est pas trivial. Comme le produit de deux sous-groupe normaux de Baer est de Baer et G/G' n'est pas trivial, par le corollaire 3.3.3, G/G'est un $p-$ groupe cyclique ou quasicyclique : $G/G' = \langle xG' \rangle$ ou $G/G' =\langle a_nG' \ \mid \ a_n^pG' = a_{n-1}G'$ et

$a_0 \in G'\rangle$ avec $G' = \bigcap_{n\geq 2} \gamma_n(G)$

Si G/G' est est un $p-$groupe quasicyclique $G/G' = \langle a_n G' \mid a_n^p G' = a_{n-1}G'$ et $a_0 \in G'\rangle$ alors, pour tout n, $\langle a_n, GG\rangle$ est propre dans G et par suite il est de Baer, donc $\forall n$, a_n sn $\langle a_n, G'\rangle$ mais, $\langle a_n, G'\rangle$ est normal dans G, d'ou $\forall n$, $\langle a_n\rangle$ sn G de plus $G' \trianglelefteq G$, par suite G est de Baer.

Supposons que G/G' est un p- groupe cyclique $G/G' = \langle xG'\rangle$ avec $x^{p^n} \in G'$, G'étant de Baer et d'indice fini dans G, du lemme 4.2.2 on déduit que G est de Baer. ■

Lemme 4.2.4 *: Un groupe* $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ *de type fini est* $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{N}$.

Preuve : Soit G un $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$de type fini, donc il existe dans G un sous-groupe normal N localement fini tel que G/N soit de Baer, comme G est de type fini, G/N aussi de type fini et par suite il est nilpotent. Finalement, G est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{N}$. ■

Lemme 4.2.5 *: Un groupe* $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ *est localement gradué.*

Preuve : Un groupe localement fini est localement gradué. Un groupe de Baer est localement nilpotent, et par suite il est localement gradué.

Comme la classe des groupes localement gradués est stable par extension, par le corollaire 1 dans [46] on déduit qu'un un groupe $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ est localement gradué ■

Proposition 4.2.6 *: Soit* G *un groupe de type fini dont tous les sous-groupes propres sont* $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, *alors* G *est* $(\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ *si :*

1- G est de type fini et admet un sous-groupe propre d'indice fini.

2- G est non de type fini.

Preuve : Soit G un groupe dont tous les sous-groupes propres sont $(\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$

- Supposons G de type fini et admet un sous-groupe propre H d'indice fini, alors H_G est d'indice fini dans G $-$ [60] ,1.6.9 $-$. Donc sans perdre la généralité on peut prendre H normal dans G, comme H est propre dans G, il est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, et puisque G de type fini et H d'indice fini, H est aussi est de type fini, par le lemme 4.2.4 il s'ensuit que H est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{N}$, et par conséquent il existe un sous-groupe K de H tel que K soit localement fini et H/K est nilpotent, donc il existe un entier positif k tel que $\gamma_{k+1}(H)$ soit localement nilpotent. Le groupe est G/H fini et $H/\gamma_{k+1}(H)$ est nilpotent, donc $G/\gamma_{k+1}(H)$ est nilpotent- par- fini et puisque il est de type fini, il vérifie max et ainsi tout sous-groupe de $G/\gamma_{k+1}(H)$est de type fini. Soit $K/\gamma_{k+1}(H)$ un sous-groupe propre de $G/\gamma_{k+1}(H)$, donc K est un sous-groupe propre de G, par suite K est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, et par conséquent $K/\gamma_{k+1}(H)$est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ et puisque il est de type fini, il est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{N}$, donc il existe un sous-groupe normal $M/\gamma_{k+1}(H)$ de $K/\gamma_{k+1}(H)$ tel que$M/\gamma_{k+1}(H)$ soit localement fini et K/M soit nilpotent. Comme $M/\gamma_{k+1}(H)$ est un sous groupe de $G/\gamma_{k+1}(H)$, il est de type fini, mais il est localement fini, donc $M/\gamma_{k+1}(H)$est fini, d'ou $K/\gamma_{k+1}(H)$est $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Le groupe $G/\gamma_{k+1}(H)$ étant $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$, est localement gradué, et comme il est de type fini dont tous les sous-groupes propres sont $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$, du lemme 4 -[16] - $G/\gamma_{k+1}(H)$ est $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$.Comme $\gamma_{k+1}(H)$ est localement nilpotent, on en déduit que G est $\mathcal{L}(\mathcal{F})$-par-$\mathfrak{F}\mathfrak{N}$, donc G est($\mathcal{L}(\mathcal{F})$-par- $\mathcal{F}$)-par-$\mathfrak{N}$ enfin, G est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{N}$ et a fortiori G est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$.

- Supposons maintenant que G n'est pas de type fini. Pour x et y deux éléments d'ordre fini de G posons $H = \langle x, y\rangle$. Le groupe H étant de type fini, il est propre dans G, donc il est$\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$,et par suite il est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{N}$, d'ou il existe dans H un sous- groupe localement fini K tel que H/K soit nilpotent. On a H est de type fini et de torsion, donc H/K est de type fini et de torsion et puisque il est nilpotent, il est fini. Mais H est de type fini, donc K est de type fini et par suite il est fini comme sous-groupe localement fini. Enfin, H est fini, et par suite xy^{-1} est d'ordre fini. On déduit que l'ensemble des éléments de G d'ordre fini forme un sous-groupe de G, d'ou G admet un sous -groupe de torsion T normal et localement fini tel que G/T est sans torsion.

Si G/T est non de type fini, puisque il est sans torsion dont tous les sous-groupes propres sont de Baer, du proposition 4.2.3 G/T est de de Baer, par suite G est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$. Supposons G/T de type fini, donc il existe dans G un sous-groupe propre X tel que $G = XT$. Le sous-groupe X étant propre dans G implique que X est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, par suite $T/T\cap X$ est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, mais$G/T = XT/T \cong T/T\cap X$, donc G/T est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, et puisque G/T est sans torsion, il est de Baer. On déduit que G est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$. ■

Puisque un groupe localement gradué de type fini admet un sous-groupe propre d'indice fini on déduit de la proposition 4.2.6 le résultat suivant :

Corollaire 4.2.7 *: Un groupe localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$*

Théorème 4.2.8 *Si G est un groupe $MN-\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ de type fini, alors G est parfait n'admet pas de sous-groupe propre d'indice fini et et $G/(Frat(G)$ est simple infini.*

Preuve : Soit G un groupe $MN-\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$. Comme G n'est pas $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ de la proposition 4.2.6, G est de type fini et n'admet pas de sous-groupe propre d'indice fini.

Supposons G non parfait alors, $G \neq G'$ et par suite G/G est un groupe abélien non trivial, mais un groupe abélien est localement gradué et G de type fini, du lemme 3.2.2 G admet un sous-groupe propre d'indice fini, par suite il est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ contradiction . On déduit que G est parfait.

Puisque un groupe de type fini admet toujours un sous-groupe maximal, $G \neq Frat(G)$,donc $G/Frat(G)$ n'est pas trivial, et comme G n'admet aucun sous- groupe propre d'indice fini, $G/Frat(G)$ est infini.

Il reste à démontrer que $G/Frat(G)$ est simple, supposons le contraire et soit $H/Frat(G)$ un sous-groupe normal non trivial de $G/Frat(G)$, donc $Frat\ (G) < H$, d'ou il existe $x \in H$ tel que $x \notin Frat(G)$, par suite il existe un sous-groupe maximal M tel que $x \notin M$. Le sous-groupe M est maximal, donc $G = HM$ ($G = \langle x\rangle M$ et xH), M étant propre dans G, il est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, par suite $M//M \cap H$ est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ mais, $G/H = MH/H \ \cong M//M \cap H$, donc G/H est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ et par le lemme 4.2.5- il s'ensuit que G/H est localement gradué, et du lemme 3.2.2, G admet un sous-groupe propre d'indice fini contradiction. Finalement, $G/Frat(G)$ est simple. ■

Remarque 4.2.9 *: Les groupes non-localement fini-par-Baer existent et les groupes d' Ol'shanskii* [52] *et* [53] *font l'exemple.*

4.3 Groupes localement gradué avec peu de sous-groupes $non-\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$.

Lemme 4.3.1 *: Soit G un groupe localement gradué qui vérifie la condition minimale sur les sous-groupes non -Baer, si G est sans torsion il est de Baer.*

Preuve : Soit G un groupe localement gradué sans torsion qui vérifie la condition minimale sur les sous- groupes non -Baer

Supposons que G n'est pas de Baer, donc il existe dans G un sous-groupe H minimal non-Baer. Comme G est sans torsion, H est un sous-groupe non- Baer minimal sans torsion. Si H est de type fini puisque G est localement gradué, H admet un sous- groupe propre normal Kd'indice fini contradiction avec le fait qu' un $MN\mathfrak{B}$ de type fini n'admet pas de sous groupe propre d'indice fini. Donc H n'est pas de type fini, du proposition 4.2.3 H est de Baer contradiction.On déduit que G est de Baer. ■

Théorème 4.3.2 *: soit G un groupe localement gradué, si G vérifie la condition minimale sur les sous-groupes non $-\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, alors G est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$.*

Preuve : Soit G un groupe localement gradué qui vérifie la condition minimale sur les sous-groupes *non* $-\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$

- Si G est de type fini puisque il est localement gradué, il admet un sous-groupe propre normal H_1d'indice fini. Le groupe G est de type fini et H_1 d'indice fini dans G, donc H_1 est de type fini et ainsi il admet un sous-groupe propre H_2 d'indice fini, on peut par la suite définir une suite décroissante infini (H_n) de sous-groupes normaux de G telle que $[H_k : H_{k+1}]$ soit fini. Le groupe G vérifie la condition minimale sur les sous-groupes *non* $-\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, donc il existe $i \geq 1$ tel que H_i soit $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$.

Comme $[G : H_i][G : H_1][H_1 : H_1]\ldots\ldots[H_{i-1} : H_i]$ est fini (produit fini d'entiers), H_i est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ de type fini et du lemme 4.2.4 H_i est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{N}$, d'ou il existe un sous-groupe K de H tel que K soit localement fini et H/K est nilpotent, par suite il existe un entier positif k tel que $\gamma_{k+1}(H_i)$ soit localement nilpotent. Le groupe G/H_i est fini et $H/\gamma_{k+1}(H_i)$ nilpotent, donc $G/\gamma_{k+1}(H_i)$ est $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$

Posons $\overline{G} = G/\gamma_{k+1}(H_i)$, $\overline{G}$ étant $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ de type fini, il satisfait max, donc tous sous-groupe de $\overline{G}$ est de type fini, par suite tout sous-groupe localement fini est fini, et par conséquent tout sous-groupe $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ de $\overline{G}$ est $\mathfrak{F}\mathfrak{B}$, mais un sous-groupe $\mathfrak{F}\mathfrak{B}$ de type fini est $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$, comme $\overline{G}$ est un quotient de G, il vérifie la condition minimale sur les sous- groupes *non* $-\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, par suite il vérifie la condition minimale sur les sous-groupes non -$\mathfrak{F}\mathfrak{N}$, supposons que $\overline{G}$ n' est pas $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$, donc il existe dans $\overline{G}$ un sous-groupe non-$\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ minimal M d'indice fini, comme $\overline{G}$ est localemet gradué et M d'indice fini, M est localement gradué dont tous les sous groupes propre sont $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$

du lemme 4 -[16] M est $\mathfrak{FN}$ contradiction. Par suite $\overline{G}$ est $\mathfrak{FN}$ et comme $\gamma_{k+1}(H_i)$ est localement nilpotent, G est $\mathfrak{L}(\mathcal{F})$-par-$\mathfrak{FN}$ enfin, G est $\mathfrak{L}(\mathcal{F})\mathfrak{N}$ et a fortiori G est $\mathfrak{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$.

- Si G n'est pas de type fini, pour x et y deux éléments d'ordre fini de G posons $H = \langle x, y\rangle$

Le sous groupe H étant un sous-groupe de type fini de G, H vérifie la condition minimale sur les sous-groupes $non - \mathfrak{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, d'après la partie1 ci-dessus et puisque il est de type fini, H est $\mathfrak{L}(\mathcal{F})\mathfrak{N}$, donc il existe dans H un sous-groupe localement fini K tel que H/K soit nilpotent. Comme H est de type fini et de torsion, H/K est de type fini et de torsion et puisque il est nilpotent, il est fini. Le groupe H/K fini et H de type fini, donc K est de type fini mais, il est localement fini donc K est fini ,on déduit que H est fini, et par suite xy^{-1} est d'ordre fini. L'ensemble des éléments d'ordre fini de G forme un sous-groupe de G, donc G admet un sous-groupe de torsion T localement fini tel que G/T est sans torsion.

Comme G/T est un groupe sans torsion localement gradué et verifie la condition minimale sur les sous-groupes non -Baer, par le lemme 4.3.1, il s'ensuit que G/T est de Baer et enfin, G est $\mathfrak{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$. ■

Lemme 4.3.3 : *Soit P une propriété de groupes close par passage aux sous-groupes et soit G un groupe vérifiant max localement, si G n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaisons de sous-groupes ne vérifiant pas P, alors il verifie la condition minimale sur les sous-groupes non-P.*

Preuve : Soit P une propriété de groupes et soit G un groupe localement gradué qui verifie max localement

Supposons que G n'a qu'un nombre fini de sous-groupes ne vérifiant pas P et soit $(G_n)_{n\geq 1}$, $G_1 \geq G_2 \geq G_3 \geq \cdots$ une suite descendante de sous -groupes de G ne vérifiant pas P, donc il existe n tel que $\forall\ i \geq n\ \exists j \prec n$,G_j est le conjugué de G_i, par suite il existe n tel que $\forall i \geq n$,$\exists j \prec n$ $\exists g \in G \quad G_j^g = Gi$ mais, $i \geq j$, d'ou $G_i \leq G_j$, par suite $\forall i \geq n\ \exists j \prec n\ \exists g \in G$, $G_j^g \preceq G_j$

Comme le groupe G vérifie max localement, par $-$ Amberg [1] , lemme 4.6.3- $G_j^g = G_j$, donc $G_i = G_j$

On vient d'établir démontré $\forall i \geq n \quad \exists j \prec n, G_i = G_j$ mais, la suite est décroissante, donc$\forall i \geq n$, $G_i = G_n$, d'ou la suite est stationnaire, et par suite G verifie min sur les sous-groupes non-P. ■

Corollaire 4.3.4 *: Soit G un groupe localement gradué ayant un nombre fini de classe de conjugaisons de sous-groupes non-Baer, si G est sans torsion il est de Baer.*

Preuve : Soit G un groupe localement gradué ayant un nombre fini de classe de conjugaisons de sous-groupes non- Baer par la proposition 3.3– [39] – il s′ensuit que G est localement dans la classe Baer-par-fini, donc tout sous groupe de type fini de G est Baer-par-fini, mais un groupe Baer–par-fini de type fini est nilpotent-par-fini, par suite G est localement (nilpotent-par-fini), donc G vérifie max localement, par application du lemme 4.3.3, G vérifie la condition minimale sur les sous-groupes non-Baer, si G est sans torsion du lemme 4.3.1, G est de Baer. ■

Lemme 4.3.5 *: Soit (P) une propriété de groupe stable par passage aux sous-groupes et aux quotients, si G groupe n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaisons de sous- groupes ne vérifiant pas P alors pour tout sous-groupe normal N de G, G/N n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaisons de sous-groupes ne vérifiant pas P.*

Preuve : Il suffit de voir que pour $H \leq K \leq G$ on a

$$\{(K/H)^{xT} \mid\ xT \in G/H\} \subseteq \{K^{xH} \mid\ \ x \in G\}\,[64]$$

■

Théorème 4.3.6 *: Soit G un groupe localement gradué, si G n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaisons de sous-groupes non-(localement finis)-par-Baer alors, G est (localement finis)-par-Baer.*

Preuve : Soit G un groupe localement gradué qui n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaisons de sous-groupes non-((localement finis)-par-Baer).

Par application de proposition 3.3 [39] , G est localement dans la classe $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$-par–$\mathfrak{F}$

- Si G est de type fini, G est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$-par–$\mathfrak{F}$

Soit N un sous-groupe normal de G d'indice fini tel que N est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, comme N est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$de type fini, il est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{N}$ par suite il admet un sous- groupe de torsion T, T caractéristique dans N par suite T est normal dans G. Le groupe N/T est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ et puisque il est sans torsion, il est de Baer, mais $G/T/N/T \cong G/N$ est fini, donc G/T est $\mathfrak{B}\mathfrak{F}$, par suite il est localement dans la classe $\mathfrak{NF}$ d'ou G/T est localement gradué et satisfait la condition maximale localement. Comme G n'a qu'un nombre fini de classe de conjugaisons de sous-groupes $non-\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, du lemme 4.3.5 G/T est localement gradué et n'a qu'un nombre fini de classe de conjugaisons de sous-groupes$\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ et qui localement satisfait la condition maximale, par application du lemme 4.3.3, G/T vérifie min sur les sous- groupes $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, du théorème 4.3.2 G/T est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, par suite G est $\mathcal{L}(\mathcal{F})$-par $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, et par conséquent G est $(\mathcal{L}(\mathcal{F})$-par$\mathcal{L}(\mathcal{F}))$-par- $\mathfrak{B}$, comme la classe localement fini est stable par extension, il s'ensuit que G est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$.

- Considérons le cas G n'est pas de type fini, G est localement dans la classe $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$-par–$\mathcal{F}$.

Soit x et y deux élément d'ordre fini de G et posons $H = \langle x\ , y\rangle$, H est de torsion. Comme H est de type fini, il est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$-par–$\mathcal{F}$, donc il existe dans H un sous- groupe K de H normal et $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ tel que H/K soit fini. Le groupe H est de torsion, par suite K est de torsion mais, H est de type fini et H/K fini, donc K est de type fini, et comme K est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, par un meme raisonnement que dans la proposition ci-dessus, on en déduit que K est fini, d'ou H est fini, et par suite G admet un sous -groupe de torsion localement fini. Comme G/T est sans torsion et il n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaisons de sous- groupes $non-\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$, il n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaisons de sous- groupes non –Baer, du corollaire 4.3.4 il est de Baer. Enfin, G est $\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathfrak{B}$ ■

Remarque 4.3.7 *:Tous les résultats établis pour les groupes ayant peu de sous-groupes non -((localement finis) -par -Baer) peuvent et de la même façon être établis pour les groupes ayant peu de sous-groupes non-(Torsion -par -Baer).*

Bibliographie

[1] A. Amberg, S .Franciosi and F. De Giovanni, Products of groups, Oxford mathematical Monographs, Clarendon , Oxford (1992).

[2] A. Arikan, Characterizations of minimal non-solvable Fitting p-groups, J.Group Theory 11 (2008),95-103.

[3] A. O. Asar and A. Arikan, On minimal non CC-groups, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 10(1997), 31–37.

[4] A. O. Asar, Locally nilpotent p-groups whose proper subgroups are hypercentral or nilpotent-by-Chernikov, J. London Mat. Soc. (2) 61 (2000),412-422.

[5] A. O. Asar, A contribution to the Characterization of locally finite mimimal non FC-groups, V Antalya Algebra Days (2003), 6-7.

[6] A. Badis and N. Trabelsi, Soluble minimal non-(finite-by-Baer) groups. Riccerche di matimatica (in press).

[7] A. Badis and N. Trabelsi, Groups with few non -((locally finite) -by- Baer) subgroups. Note di matematica (à paraître)..

[8] R. Baer. Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe. S.-B.Heidelberg Akad. 2 (1933), 12-17.

[9] V. V. Belyaev, Minimal non-FC-groups, in "Proceedings of the All Union Symposium on Group Theory—Kiev, 1980," pp. 97–108.

[10] V. V. Belyaev, Groups of the Miller-Moreno type, Sibirsk. Mat. Z. 19, n° 3, (1978),509-514, 715.

[11] V. V. Belyaev, Locally finite groups all of whose proper subgroups are almost abelian,Sibirsk. Mat. Zh. 24, n° 3, (1983), 11-17.

[12] V. V. Belyaev and N. F. Sesekin, Infinite groups of Miller-Moreno type, ActaMath.Acad. Sci. Hungar. 26, n° 3-4, (1975), 369-376.

[13] B. Bruno, On groups with Abelian-by-finite proper subgroups, Bollettino U. M. I. (6).3-B, (1984), 797-807.

[14] B. Bruno, Groups in which proper subgroups contain a nilpotent subgroup of finite index, Boll. U. M. I., VI. Ser., D, Algebra Geom. 3, n° 1, (1984), 179-188.

[15] B. Bruno, On p-groups with nilpotent-by-finite proper subgroups, Boll. U. M. I., VI.Ser., A 3, n° 1, (1989), 45-51.68.

[16] B. Bruno and R. E. Phillips, On minimal conditions related to Miller-Moreno typegroups, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 69 (1983), 153-168.

[17] B. Bruno and R. E. Phillips, A note on groups with nilpotent-by-finite proper groups,Arch. Math. 65, (1995), 369—374.

[18] B. Bruno and F. Napolitani, A note on nilpotent-by-Cernikov groups, Glasgow Math.J. 46 (2004), 211-215.

[19] C. Casolo, Groups in which all subgroups are subnormal, Rend. Accad. Sci. DettaXL, V. Ser., Mem. Mat. 10, n°1, (1986), 247-249.

[20] C. Casolo, Torsion-free groups with all subgroups subnormal, Rend. Circ. Mat. Palermo2 50 (2001), 321-324.

[21] C. Casolo & M. Mainardis, Groups in which every subgroup is f-subnormal, J.Group Theory 4 (2001), 341-365.

[22] S. N. Chernikov, On the theory of locally soluble groups with the minimal condition for subgroups, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 65, (1949), 21–24 .

[23] S. N. Chernikov, Finiteness conditions in the general theory of groups, UMN, 1959, 14 :5(89), 45–96

[24] S.N.Chernikov, Investigation of groups with given propreties on the subgroups,Mathematics Institute of the Academy of Sciences ,Vol.21,n°2 (1969),193-209.

[25] S.N. Chernikov, Groups with the minimal condition for nonabelian subroups // Groups with restrictions for subgroups. Kiev : Naukovadumka, 1971. – P. 96–106.

[26] R. Dedekind. ¨ Uber Gruppen deren sammtliche Teiler Normalteilersind. Math. Annalen 48 (1897), 548 - 561.

[27] M. De Falco, F . De Giovanni, Groups with many subgroups having a transitive normality relation Bol. Soc. Bras. Mat., Vol.31, No. 1, 73–80.

[28] A. Dilmi, Groups whose proper subgroups are locally finite-by-nilpotent, Ann.Math. Blaise Pascal 14 (2007), 29-35.

[29] M. R. Dixon, M. J. Evans and H. Smith, Groups with all proper subgroups (finite rank)-by-nilpotent, Arch. Math. 72 (1999), 321-327.

[30] M. R. Dixon, M.J.Evans, Groups with the minimum condition on insoluble subgroups.Arch.Math. (Basel) 72 (1999), no. 4, 241–251.

[31] M. R. Dixon, M. J. Evans and H. Smith, Groups with all proper subgroups nilpotent-by-(finite rank), Arch. Math. 75 (2000), 81-91.

[32] M. R. Dixon, M. J. Evans and H. Smith, Groups with all proper subgroups (finite rank)-by-nilpotent. II, Communications in Algebra, 29(3) (2001), 1183-1190.

[33] M. R. Dixon, M. J. Evans and H. Smith, Groups with some minimal conditions on non-nilpotent subgroups, J. Group theory 4 (2001), 207-213.

[34] M. R. Dixon, M. J. Evans and H. Smith, Locally soluble-by-finite groups with weak minimal conditions on non-nilpotent subgroups, J. Algebra. 249 (2002), 226-246

[35] M. R. Dixon, M. J. Evans, H. Smith, Groups with various minimal conditions on subgroups.Ukra¨ın. Mat. Zh. 54 (2002), no. 6, 780–788.

[36] M. R. Dixon, M.J.Evans, H. Smith, Groups with all proper subgroups soluble-by-(finite rank), J. Algebra. 283 (2005), 135-147.

[37] M. R. Dixon, M.J.Evans, H. Smith, A finiteness condition on subgroups of large derived length, Journal of Algebra 280 (2004), 762–771.

[38] L. Ivan, On groups stasfying the minimal condition on certain subgroups, Periodica Mathematica Hungarica Vol. 14 (2), (1983), pp. 117–124.

[39] S. Franciosi, F. De Giovanni and Y.P.Sysak, Groups with many polycyclic-by-nilpotent subgroups, Ricerche di mathématica 48 (1999), 361-378.

[40] H. Heineken and I. J. Mohamed, A group with trivial centre satisfying the normalizercondition, Journal of Algebra 10 (1968), 368-376.

[41] Y. K. Kim and A. H. Rhemtulla, On locally graded groups, Proceedings of Groups-Korea 94, Walter de Gruyter & Co, (Berlin, New York 1995), 189-197.

[42] M. Kuzucuoglu and R. E. Phillips, Locally finite minimal non-FC-groups, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 105 (1989), 417–420.

[43] J.C. Lennox and S.E. Stonehewer, Subnormal Subgroups of Groups, (Clarendon Press, Oxford 1987).

[44] J. C. Lennox and D. J. S. Robinson, The Theory of Infinite Soluble Groups, (Claren-don Press, Oxford 2004).

[45] P. Longobardi, M. Maj and H. Smith, A note on locally graded groups, Rend. Sem.Mat. Univ. Padova, Vol. 94 (1995), 275-277.

[46] O.Macedonska,On difficult problems and locally graded groups, Journal of mathematical sciences, Vol 142 ,n°2 (2007).

[47] W. Mohres, Torsionfreie Gruppen, deren Untergruppen alle subnormalsind, Math.Ann. 284, 245-249 (1989).

[48] W. Mohres, Auflosbarkeit von Gruppen, deren Utergruppen alle subnormal sind. Archiv-Math. 54 (1990), 232-235.

[49] G. A. Miller and H. Moreno. Non-abelian groups in which every subgroupis abelian. Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), 389-404.

[50] F. Napolitano and E. Pegoraro, On groups with nilpotent by Cernikov proper subgroups,Arch. Math. 69 (1997), 89-94.

[51] M. F. Newman and J. Wiegold, Groups with many nilpotent subgroups, Archiv derMath.15 (1964), 241-250.

[52] A. Y. Olshanski, infinite groups with cyclic subgroups, DokI. Akad. Nauk SSSR 245(1979), 785-787.

[53] A. Y. Olshanski, An infinite simple torsion-free Noetherian group, Izv. Akad. NaukSSSR Ser. Mat. 43 (1979), 1328-1393.70.

[54] J. Otal, J. M. Pena, Some minimal conditions for locally graded ,Pub. Sem. Mat. G. Galdeano serie II, 71 (1985).

[55] J. Otal and J. M. Pena, Minimal non-CC-groups, Comm. Algebra 16 (1988), 1231–1242.

[56] J. Otal, J. M. Pena, Groups in which every proper subgroup is Cernikov-by-nilpotent or nilpotent-by-Cernikov, Arch. Math., Vol. 51 (1988), 193-197.

[57] J. Otal, J. M. Pena, Locally graded groups with certain minimal condition for subgroups, II, publications mathematiques, Vol 32 (1988),151-157.

[58] J. Otal, J. M. Pena, Groups with minimal conditions related to finiteness properties on conjugacy classes. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 81 (1989), 79–84.

[59] D. J. S. Robinson, Finiteness conditions and generalized soluble groups, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1972).

[60] D. J. S. Robinson, A course in the theory of groups, (Springer-verlag, Berlin, Heidelberg,New York 1982).

[61] F. Russo and N. Trabelsi , On minimal non -PC group, Ann.Math. Blaise Pascal 16 no. 2 (2009), 277-286.

[62] O. Yu. Schmidt. The groups, all subgroups of which are special. Math.Sbornik 31 (1924), 366-372.

[63] O. Yu. Schmidt. The groups with two classes of non-invariant subgroups

[64] O. Yu. Schmidt. The groups with two classes of non-invariant subgroups The works of a seminar on Group Theory, 1938, 7-26.

[65] H. Smith, A note on Baer groups of finie rank,Math Z 184 ,(1983),139 -140.

[66] H. Smith, Groups with the subnormal join property, Canadian J. Math.37, (1985), 1-16.

[67] H. Smith, On homomorphic images of locally graded groups, Rend. Sem. Mat. Univ.Padova, Vol. 91 (1994), 53-60.

[68] H. Smith, Groups with finitely many conjugacy classes of subgroups of large derived length, Bollettino U.M.I. Ser. 7(A) 9 (1995), 167–175.

[69] H. Smith, Groups with few non-nilpotent subgroups, Glasgow Math. J. 39 (1997), 141-15.

[70] H. Smith, Torsion-free groups with all subgroups subnormal, Arch. Mat. (Basel).76(2001), 1-6.

[71] H.Smith, Groups with finitely many conjugacy classes of subgroups that are not nilpotent-by-Chernikov.Glasg.Math. J. 48 (2006), no. 2, 247–249.

[72] V. P. Sunkov, The problem of minimality for locally finite groups. (Russian) Algebra i Logika 9, (1970),220–248.

[73] N. Trabelsi, Locally graded groups with few non-(torsion-by-nilpotent) subgroups, Ischia group theory 2006, (World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007) 243-249..

[74] N. Trabelsi, On minimal non-(torsion-by-nilpotent) and non-((locally finite)-by-nilpotent) groups, C. R. Acad. Sci. Paris Ser.I 344 (2007), 353-356.

[75] B.A.F Wehrfritz, On hypercentral groups, Central european Journal of mathematics (2005), 596-606.

[76] M. Xu, Groups whose proper subgroups are finite-by-nilpotent, Arch. Math. 66 (1996), 353-359.

[77] M. Xu, Groups whose proper subgroups are Baer groups, Acta. Math. Sinica 40 (1996), 10-17.

[78] D. I. Zaicev, "Groups satisfying the weak minimal condition for non-abelian subgroups," Ukr. Mat. Zh., 23, No. 6, (1971), 661–665 .