

Table des matières

0.1	Principales notations utilisés	5
1	RAPPELS SUR LES ESPACES DE SOBOLEV DANS LES POLY-	
	GONES	7
1.1	Domaines polygonaux	7
1.2	Espaces de Sobolev	8
1.3	Traces de l'espace $W_p^1(\Omega)$	10
1.4	Espaces de Sobolev avec poids	12
1.5	Transformation de Fourier	14
2	MISE EN EQUATION DES SYSTEMES DE L'ELASTICITE ET DE	
	STOKES	17
2.1	Le problème de Neumann de l'élasticité linéaire	17
2.1.1	Position du problème	17
2.1.2	Réduction en une équation	19
2.2	Le système de Stokes	25
2.2.1	Position du problème	25
2.2.2	Réduction en une équation	26
2.3	EXISTENCE ET UNICITE	26
2.3.1	Localisation	27
2.3.2	différents problèmes pour une plaque élastique	29
2.3.3	Choix de l'espace	31
2.3.4	L'espace de la formulation variationnelle	31
2.3.5	Remarques :	32
3	ETUDE DU PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LE BILAPLACIEN	34
3.1	Changement de variables et de fonctions	34

3.2	Transformation de Fourier	38
3.3	Régularité du solution de Dirichlet pour le Bilaplacien	50
3.4	Problème de traces	53
3.5	Régularité des solutions de Navier-Stocks	55
3.6	Régularité des solutions du système de l'élasticité linéaire	57

Introduction générale

Il est bien connu, qu'un très grand nombre de problèmes de la physique mathématique peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles. Un système d'équations aux dérivées partielles, joint à des conditions aux limites et, lorsque le phénomène est d'évolution, à des conditions initiales, constitue ce qu'on appelle modèle mathématique. La modélisation mathématique des phénomènes, rencontrés par les utilisateurs, est devenue le soutien des travaux de nombreuses disciplines de la physique (ondes, diffusion de la chaleur, plasmas, nouveaux matériaux, etc...), des sciences de l'univers (astrophysique, géophysique, etc...), de la chimie et évidemment de toutes les branches de la mécanique. Ce travail s'articule autour de l'étude de quelques modèles mathématiques gouvernés par les opérateurs de Stokes et de l'élasticité linéaire. Plus précisément, dans un ouvert plan Ω borné et à frontière polygonale Γ on considère u_i et $\sigma_{ij}(u)$, $i = 1, 2$, solutions du problème :

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} -\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u) = f_i, i = 1, 2, \text{ dans } \Omega, \\ \sigma_{ij}(u) = \lambda \operatorname{div}(u) + \mu \varepsilon_{ij}(u), i, j = 1, 2, \text{ dans } \Omega, \\ \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), i, j = 1, 2, \text{ dans } \Omega, \\ \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}(u) \eta_j = g_i, i = 1, 2, \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

où f_1 où f_1 et f_2 sont données dans $L^2(\Omega)$ et g_i , $i = 1, 2$, dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Le problème (E) étant celui de Neumann, on doit supposer vérifiée la condition nécessaire d'existence de la solution faible (c'est-à-dire variationnelle) à savoir l'orthogonalité des données aux déplacements rigides :

$$\int_{\Omega} f \cdot v dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma} g \cdot v dx_1 dx_2 = 0,$$

pour tout v de la forme $v(x_1, x_2) = (a + cx_2, b - cx_1)$.

On considère aussi ν_i et p , $i = 1, 2$, solutions du problème où f_1 et f_2 sont données dans $L^2(\Omega)$.

On sait résoudre variationnellement ces problèmes et on établit qu'il existe :

u_1, u_2 dans $H^2(\Omega)$ et $\sigma_{ij} \in \mathcal{H}^1(\Omega) = \{\sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in H^1(\Omega)\}$ solutions uniques de (E). Voir par exemple P. A. RAVIART-J. M. THOMAS [7] et G. DUVAUT-J. P. LIONS [8].

$v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$ et $p \in \mathcal{D}(\Omega)$, uniques à une constante près, solutions de (S). Voir par exemple R. TEMAM [9].

De plus, lorsque Ω est à frontière régulière (ce qui n'est pas le cas ici) on sait que si f_1 et f_2 sont données dans $H^m(\Omega)$ ($m \geq 0$). Alors

- *) u_1, u_2 dans $H^{m+2}(\Omega)$ et $\sigma_{ij} \in \mathcal{H}^{m+1}(\Omega)$,
- *) v_1 et v_2 sont dans $H^{m+2}(\Omega)$ et p dans $H^{m+1}(\Omega)$.

Pour les deux cas, voir par exemple Cattabriga [10] et Ladyzhenskaia [11].

Dans le cas où Ω est à frontière polygonale les résultats mentionnés sont encore valables en dehors d'un voisinage des sommets de Ω . L'objet de ce Mémoire est l'étude du comportement singulier des solutions des problèmes (E) et (S) : $u_1, u_2, \sigma_{ij}, v_1, v_2$ et p au voisinage de ces sommets lorsque f_1, f_2 sont données dans $H^m(\Omega)$ (m entier ≥ 0). Les techniques qu'on utilisera sont essentiellement celles de V. A. KONDRATIEV [12] et de P. GRISVARD [13].

Pour étudier les problèmes ci-dessus on réduit les systèmes en une équation comme dans B. MEROUANI [14] pour le premier problème, et comme dans P. GRISVARD [13] pour le second problème. Plus précisément les deux problèmes (E) et (S) se réduisent au problème suivant

$$(B_L) \begin{cases} \Delta^2 u = g, & \text{dans } (\Omega), \\ u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Quelques travaux voisins de ce travail et concernant Δ^2 , sont par exemple dans : V. A. KONDRATIEV [12], P. GRISVARD [13] et H. BLUM et RANNACHER [14].

Le mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre on donnera un rappel des principales notations, quelques résultats d'analyse fonctionnelle et notamment sur les espaces de Sobolev avec ou sans poids.

Le second chapitre est divisé en deux parties. Dans la première partie on transforme les problèmes (E) et (S) au problème (B_L) . Dans la deuxième partie, on étudiera l'existence et d'unicité de la solution variationnelle de quelques problèmes aux limites gouvernés par l'opérateur Δ^2 dans le cas général des plaques élastiques.

On terminera par un troisième chapitre consacré à l'étude des singularités et la régularité $H^m(\Omega)$ des solutions du problème (B_L) et par conséquent celles des problèmes (E) et (S).

0.1 Principales notations utilisés

Notions géométriques

Ω : un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , à frontière polygonale de point générique $x = (x_1, x_2)$

Γ : frontière de Ω , ds : la mesure de longueur sur Γ .

Γ_j : une partie (segment) de Γ , $\Gamma = \cup_{j=1}^N \bar{\Gamma}_j$.

ε_{ij} : les composantes du tenseur des déformations linéarisées.

σ_{ij} : les composantes du tenseur des contraintes.

$\sigma(u)\eta = g$: la densité des forces surfaciques.

f : la densité des forces volumiques.

$f_j = f|_{\Gamma_j}$: c'est la restriction de f à Γ_j .

∇ : le gradient.

Δ : le laplacien.

Δ^2 : le bilaplacien.

Espaces fonctionnels

$\mathcal{D}(\Omega)$: l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω muni de la topologie de limite inductive[3].

$\mathcal{D}'(\Omega)$: désigne l'espace des distributions sur Ω .

$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$: désigne l'espace des fonctions k fois continûment dérivables jusqu'à l'ordre k , bornées et uniformément Hôldoriennes d'exposant α dans $\bar{\Omega}$.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: c'est l'espace des fonctions à décroissance rapide.

La topologie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est définie par la famille dénombrable de semi-normes :

$$P_{\alpha,\beta}(u) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)|.$$

où $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$, avec

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{i=2} \alpha_i.$$

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: l'espace des distributions tempérées, c'est le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$L^p(\Omega)$: l'espace des fonctions de puissance p -ième intégrable sur Ω pour la mesure :

$$dx = dx_1 dx_2.$$

- Si $1 \leq p \leq \infty$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

- Si $p = \infty$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |f(x)|.$$

$L^\infty(\Omega)$: l'espace des (classes des) fonctions essentiellement bornées.

$W_p^s(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre s .

$\dot{W}_p^s(\Omega)$: l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_p^s(\Omega)$.

$W_p^s(\bar{\Omega})$: l'espace des restrictions à Ω des éléments de $W_p^s(\mathbb{R}^n)$.

$\tilde{W}_p^s(\Omega)$: le sous-espace de $W_p^s(\Omega)$ formé de fonctions u dont le prolongement \tilde{u} par zéro hors de Ω appartient à $W_p^s(\mathbb{R}^n)$.

$H^m(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre m (défini ici pour $m \in \mathbb{N}$, $p = 2$, par convention d'écriture $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$). $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$: désigne l'espace des fonctions $f \in L^p(\Gamma)$ telles que

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} |f(x) - f(y)|^p \frac{ds(x) ds(y)}{\|x - y\|^p} < +\infty.$$

$P^m(G)$: désigne l'espace des fonctions

$$r^{-m+|\alpha|} D^\alpha u \in L^2(G); |\alpha| \leq m.$$

$\mathcal{H}(\Omega) : \{\tau/\tau_{ij} \in L^2(\Omega), i, j = 1, 2\}$.

$\mathcal{H}^1(\Omega) : \{\sigma = \sigma_{ij}/\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in H^1(\Omega), i, j = 1, 2\}$.

$\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \left(\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)'$.

Chapitre 1

RAPPELS SUR LES ESPACES DE SOBOLEV DANS LES POLYGONES

L'étude des équations aux dérivées partielles nécessite l'utilisation d'espaces de Sobolev d'ordre $s \in \mathbb{R}$. Ce sont donc ces espaces et leurs propriétés que l'on va rappeler dans ce premier chapitre, ainsi que d'autres résultats d'analyse fonctionnelle qui seront d'une grande utilité dans notre travail.

L'objet de ce chapitre est de donner quelques résultats fondamentaux qui concernent les espaces de Sobolev qui nous permettent de mieux comprendre le contenu de ce travail, ce qui nous concerne ici, c'est les espaces de Sobolev relatifs à un ouvert plan Ω à frontière Γ strictement polygonal.

1.1 Domaines polygonaux

On dira qu'un ouvert borné Ω est un domaine **polygonal** si sa frontière Γ est la réunion d'un nombre fini de segment de droites. On ne suppose pas que Ω soit d'un seul côté de sa frontière. Ceci permet des coupures comme sur la figure 1-1.

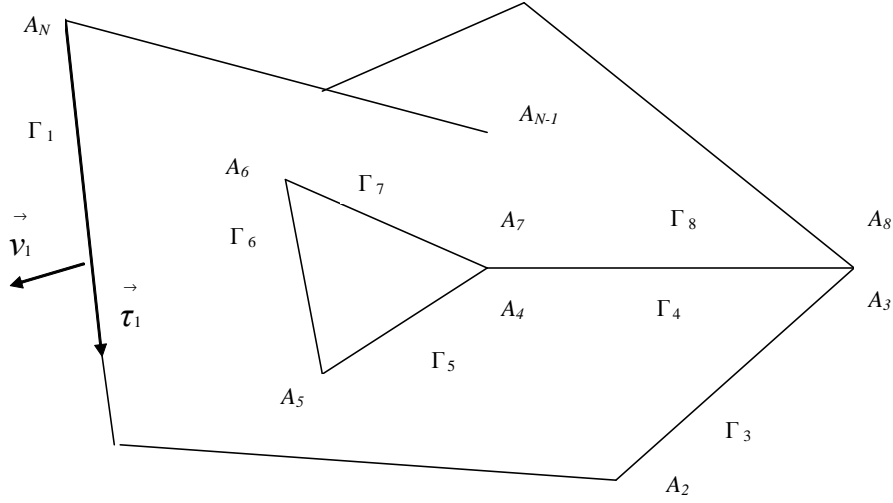


Fig-1-

Pour alléger les notations on suppose Ω connexe et simplement connexe. Ceci permet de désigner par A_1, A_2, \dots, A_N les sommets de Γ en suivant l'orientation positive (certains sommets sont donc répétés). On note Γ_j le segment ouvert $]A_{j-1}, A_j[$ (identifiant A_0 à A_N). On a donc :

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^N \bar{\Gamma}_j.$$

La mesure de l'angle de Ω en A_j est notée ω_j . Enfin, $\vec{\nu}_j$ (resp^t $\vec{\tau}_j$) désigne la normale unitaire sortante (resp^t la tangente unitaire) dans le sens direct sur Γ_j .

Dans le cas particulier où il n'y a pas de coupure (tous les $\omega_j < 2\pi$) on dira que Ω est un domaine **strictement polygonal**.

1.2 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev peuvent être définis de différentes manières lorsque l'ouvert Ω considéré est à frontière régulière. Les définitions correspondants peuvent conduire à des espaces différents lorsque la frontière de Ω est peut régulière. C'est pourquoi il y'a lieu ici de préciser la définition utilisée. On suppose toujours que $p \in]1, +\infty[$.

Définition 1.2.1

On note $W_p^s(\Omega)$ l'espace de toutes les distributions u définies dans Ω telles que

a) $D^\alpha u \in L_p(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m$ lorsque $s = m$ est un entier positif.

b) $u \in W_p^m(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p \frac{dx dy}{|x - y|^{n+\sigma p}} < +\infty,$$

pour $|\alpha| = m$ lorsque $s = m + \sigma$ est non entier et positif (m entière, $0 < \sigma < 1$).

Ici n désigne la dimension de Ω . La norme (naturelle) de $W_p^s(\Omega)$ est notée $\|u\|_{s, p, \Omega}$ lorsqu'il n'ya risque de confusion.

Comme d'habitude $\mathring{W}_p^s(\Omega)$ désigne la fermeture dans $W_p^s(\Omega)$ de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions test.

Enfin pour $s < 0$, $W_p^s(\Omega)$ est le dual de $\mathring{W}_q^{-s}(\Omega)$ avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Les notations suivantes sont commodes

Remarque 1.2.2

On a les inclusions

$$\tilde{W}_p^s(\Omega) \subset W_p^s(\bar{\Omega}) \subset W_p^s(\Omega). \quad (1.1)$$

Définition 1.2.3

pour $s > 0$, et que

$$\mathring{W}_p^m(\Omega) \subset \tilde{W}_p^m(\Omega) \subset W_p^s(\bar{\Omega}) \subset W_p^m(\Omega), \quad (1.2)$$

pour m entier positif.

On suppose Ω strictement polygonal, c'est donc un ouvert à frontière lipshitzienne au sens de [5]. Il a donc la propriété du prolongement ([6] . p. 58). En d'autres termes on a

$$W_p^s(\bar{\Omega}) = W_p^s(\Omega), \quad (1.3)$$

pour tout $s > 0$.

De cette remarque découle la plus part des propriété de l'espace $W_p^s(\Omega)$, sauf celles relatives aux traces : L'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ des restrictions à Ω de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W_p^s(\Omega)$.

L'injection de $W_p^s(\Omega)$ dans $W_p^t(\Omega)$ est compacte pour $s > t$.

Les immersions de Sobolev son valables : si $s \geq t$, $q \geq p$ et $s - \frac{2}{p} = t - \frac{2}{q}$. Alors

$$W_p^s(\Omega) \subseteq W_q^t(\Omega), \quad (1.4)$$

$$W_p^s(\Omega) \subseteq C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}). \quad (1.5)$$

si $k < s - \frac{2}{p} < k + 1$ et $\alpha = s - \frac{2}{p} - k$, où $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions k fois continûment dérivables jusqu'à l'ordre k sont bornées et uniformément Hôldoriennes d'exposant α dans $\bar{\Omega}$.

Lemme 1.2.4

Soit $u \in \mathring{W}_p^s(\Omega)$ avec $s - \frac{1}{p}$ non entier. Alors pour tout α tel que $|\alpha| \leq s$,

$$\rho^{-s+|\alpha|} D^\alpha u \in L_p(\Omega),$$

où ρ désigne la distance de x à Γ .

1.3 Traces de l'espace $W_p^1(\Omega)$

Gagliardo [21] a donné une caractérisation de l'espace $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Omega)$ des restriction à Γ (ou traces) des fonctions de $W_p^1(\Omega)$.

Soit ds la mesure de longueur sur Γ .

Définition 1.3.1

On désigne par $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Omega)$ à l'espace des fonctions $f \in L_p(\Gamma)$ telles que

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} |f(x) - f(y)|^p \frac{ds(x) ds(y)}{\|x - y\|^p} < +\infty.$$

Théorème 1.3.2

L'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ qui est bien définie sur $D(\bar{\Omega})$ admet un prolongement γ , par densité, qui est

un opérateur linéaire continue surjective de $W_p^1(\Omega)$ sur $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$; dont le noyau est $\mathring{W}_p^1(\Omega)$.

Il est instructif de découper l'espace $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Omega)$ en morceaux correspondant à chaque un des côtés Γ_j . On pose pour cela

$$f_j = f|_{\Gamma_j}.$$

Il découle de la définition 1.4.1 que $f_j \in W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma_j)$, ce dernier espace étant défini en 1.3.1 (Γ_j est un segment de droite donc un ouvert de \mathbb{R}). Les f_j ne sont pas toujours indépendantes entre elles.

En effet on a la :

Proposition 1.3.3

La fonction f appartient à $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ si et seulement si :

$f_j \in W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma_j)$ pour tout j et en outre

(i) $f_j(A_j) = f_{j+1}(A_j), 1 \leq j \leq N$ si $p > 2$,

(ii) $\int_0 |f_j(x_j(-\sigma)) - f_{j+1}(x_j(\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma} < +\infty, 1 \leq j \leq N$ si $p = 2$.

Expliquons la notation utilisée : $x_j(\sigma)$ (resp^t $x_j(-\sigma)$) désigne le point de Γ_{j+1} (resp^t Γ_j) à distance σ du sommet A_j . Ces points sont symétriques par rapport à A_j le long de Γ .

1.4 Espaces de Sobolev avec poids

On introduit ici des espaces mieux adaptés à la géométrie du domaine G qui sera définie dans la suite. On se limite ici au cas hilbertien.

Définition 1.4.1

On désigne par $P^m(G)$, pour m entier ≥ 0 , l'espace des u telles que

$$r^{-m+|\alpha|} D^\alpha u \in L^2(G), |\alpha| \leq m.$$

Cet espace est relié aux espaces de Sobolev par les immersions suivantes :

Lemme 1.4.2

(i) $H_0^m(G) \subset P^m(G)$,

(ii) si $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{G})$ et $u \in P^m(G)$. Alors $\varphi u \in H^m(G)$.

Preuve.

(ii) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{G})$, $u \in P^m(G)$ et soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $|\alpha| \leq m$.

On a

$$\begin{aligned} D^\alpha [\varphi u] &= D_x^{\alpha_1} [D_y^{\alpha_2} \varphi u], \\ &= D_x^{\alpha_1} \left[\sum_{k=0}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial y^k} \frac{\partial^{\alpha_2-k} u}{\partial y^{\alpha_2-k}} \right], \\ &= \sum_{k=0}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^k \sum_{l=0}^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^l \left(\frac{\partial^{k+l} \varphi}{\partial x^l \partial y^k} \right) \left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2-k-l} u}{\partial x^{\alpha_1-l} \partial y^{\alpha_2-k}} \right). \end{aligned}$$

Alors $D^\alpha [\varphi u]$ est une combinaison linéaire de fonctions $D^\beta u D^{\alpha-\beta} \varphi$, $0 \leq |\beta| \leq |\alpha|$. Donc on a le résultat désiré si on remarque que

$$\varphi D^\alpha u = r^{m-|\alpha|} \varphi \cdot r^{-m+|\alpha|} D^\alpha u$$

où $r^{-m+|\alpha|} D^\alpha u \in L^2(G)$ pour tout α tel que $|\alpha| \leq m$.

(i) Pour $u \in \mathcal{D}(G)$ on a

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \int_0^\theta \frac{\partial}{\partial \tau} u(r \cos \tau, r \sin \tau) d\tau.$$

Comme

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial \tau} u(r \cos \tau, r \sin \tau) \right| &= \left| -r \sin \tau \frac{\partial u}{\partial x}(r \cos \tau, r \sin \tau) + r \cos \tau \frac{\partial u}{\partial y}(r \cos \tau, r \sin \tau) \right|, \\
&\leq r \sqrt{\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 (r \cos \tau, r \sin \tau) + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 (r \cos \tau, r \sin \tau)}, \\
&\leq r |\nabla u(r \cos \tau, r \sin \tau)|.
\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{|u(r \cos \theta, r \sin \theta)|}{r} \leq \int_0^\theta |\nabla u(r \cos \tau, r \sin \tau)| d\tau,$$

et

$$\begin{aligned}
\int_G |r^{\gamma-1} u(x, y)|^2 dx dy &= \int_0^{+\infty} \int_0^\omega |r^{\gamma-1} u(r \cos \theta, r \sin \theta)|^2 r dr d\theta, \\
&\leq \int_0^{+\infty} \int_0^\omega \left(\int_0^\theta |r^{\gamma-1} \nabla u(r \cos \tau, r \sin \tau)|^2 d\tau \right) r dr d\theta, \\
&\leq \int_0^{+\infty} \int_0^\omega d\theta \int_0^\theta |r^{\gamma-1} \nabla u(r \cos \tau, r \sin \tau)|^2 r d\tau dr.
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_G |r^{\gamma-1} u(x, y)|^2 dx dy &\leq \int_0^{+\infty} \int_0^\omega \left(\int_\tau^\theta d\theta \right) |r^{\gamma-1} \nabla u(r \cos \tau, r \sin \tau)|^2 r d\tau dr, \\
&\leq \omega \int_G |r^\gamma \nabla u|^2 dx dy, \\
&\leq \omega \int_G |r^\gamma|^2 \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy.
\end{aligned}$$

Cette inégalité appliquée de façons itérée aux dérivées de u , montre que pour tout $|\alpha| \leq m$ il existe

k tel que

$$\int_G |r^{-m+|\alpha|} D^\alpha u|^2 dx dy \leq k \sum_{|\beta|=m} \int_G |D^\beta u|^2 dx dy.$$

Par densité on en déduit (i). ■

On introduit également les espaces duaux des espaces précédents, au moins pour $m = 1$.

$P^{-1}(G)$ désigne l'espace des distributions de la forme :

$$\frac{g_0}{r} + D_1 g_1 + D_2 g_2, \text{ avec } g_j \in L^2(G), 0 \leq j \leq 2.$$

Lemme 1.4.3

Si $\varphi \in D(\Omega)$ et $u \in H^{-1}(G)$. Alors $\varphi u \in P^{-1}(G)$.

En effet, on a

$$u = f_0 + D f_1 + D_2 f_2 \text{ avec } f_j \in L^2(G), 0 \leq j \leq 2.$$

On en déduit que

$$\varphi u = \{\varphi f_0 - D_1(\varphi) f_1 - D_2(\varphi) f_2\} + D_1(\varphi f_1) - D_2(\varphi f_2).$$

C'est le résultat désiré si on pose

$$\begin{cases} \frac{g_0}{r} = \varphi f_0 - (D_1 \varphi) f_1 - (D_2 \varphi) f_2, \\ g_j = D_j(\varphi f_j) = 1, 2. \end{cases}$$

1.5 Transformation de Fourier

a) L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ([2] chap. 5. [3] chap. 7.)

C'est l'espace des fonctions u de classe C^∞ sur \mathbb{R}^n telles que pour tous α et β dans \mathbb{N}^n on ait :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^\alpha D^\beta u(x)| = 0. \tag{1.6}$$

La topologie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est définie par la famille dénombrable de semi normes

$$P_{\alpha,\beta}(u) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)|. \tag{1.7}$$

Cette topologie est métrisable et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est alors un espace métrique complet.

On a les inclusions

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

b) L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ([2] chap. 5. [3] chap. 7.) des distributions tempérées

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ désigne le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

On a les injections

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) &\subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\subset L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq p \leq +\infty. \end{aligned}$$

Voici une caractérisation des éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Une distribution T appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si c'est une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et s'il existe $C > 0$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tels que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)|,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (ou encore $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^k \sum_{|\alpha| \leq l} |D^\alpha \varphi(x)|$).

c) Structure des éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ([3] p. 239)

Une distribution T appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si il existe $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et f fonction continue bornée sur

\mathbb{R}^n tels que :

$$T = D^\alpha [(1 + |x|^2)^m f].$$

d) Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ([2] chap. 5 . [3] chap.7)

Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on notera $\mathcal{F}\varphi$ ou $\hat{\varphi}$ la transformation de Fourier de φ c'est-à-dire

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\langle x, \xi \rangle} \varphi(x) dx,$$

où $\langle x, \xi \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$.

On notera $\bar{\mathcal{F}}\varphi$ la fonction définie par :

$$\bar{\mathcal{F}}\varphi(\xi) = \hat{\varphi}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\langle x, \xi \rangle} \varphi(x) dx.$$

Alors \mathcal{F} et $\bar{\mathcal{F}}$ sont des automorphismes de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et on a pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}(\bar{\mathcal{F}}\varphi) = \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi) = \varphi.$$

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; on définit la transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ (ou \hat{T}) de T par :

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

De même

$$\langle \bar{\mathcal{F}}T, \varphi \rangle = \langle T, \bar{\mathcal{F}}\varphi \rangle.$$

Les applications \mathcal{F} et $\bar{\mathcal{F}}$ sont des automorphismes de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et

$$\bar{\mathcal{F}}T = \mathcal{F}(\check{T}) \text{ où } \langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle \text{ et } \check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi),$$

$$\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}T = T \text{ pour tout } T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\bar{\mathcal{F}}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier de T est une fonction C^∞ qui est donnée par

$$\hat{T}(\xi) = \langle T_x, e^{-2i\pi\langle x, \xi \rangle} \rangle,$$

e) Dans la suite nous aurons besoin du théorème de **Paley-Winer-Schwartz** ([4] p. 305)

Théorème 1.5.1

(i) Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ d'ordre N_0 telle que $\text{supp}T \subset \{t \in \mathbb{R}^n : |t| \leq r\}$. Il existe alors une

fonction $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, holomorphe, telle que $F(\xi) = \hat{T}(\xi)$ si $\xi \in \mathbb{R}^n$ et,

$$|F(z)| \leq C(1 + |z|)^{N_0} e^{r|\text{Im}z|}, \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

(ii) Inversement, soit $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe vérifiant la propriété ci-dessus il existe alors

$T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\text{supp}T \subset \{t \in \mathbb{R}^n : |t| \leq r\}$ et $\hat{T}(\xi) = F(\xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Chapitre 2

MISE EN EQUATION DES SYSTEMES DE L'ELASTICITE ET DE STOKES

2.1 Le problème de Neumann de l'élasticité linéaire

2.1.1 Position du problème

On considère un corps élastique, isotrope et homogène occupant un domaine Ω ouvert borné de \mathbb{R}^2 , supposé connexe, simplement connexe et à frontière polygonale Γ . Ceci permet de désigner par A_1, A_2, \dots, A_N les sommets de Γ en suivant l'orientation positive (Certains sommets sont donc répétés). On note Γ_j le segment ouvert $]A_{j-1}, A_j[$ (identifiant A_0 à A_N). On a donc $\Gamma = \bigcup_{j=1}^N \bar{\Gamma}_j$. La mesure de l'angle de Ω en A_j est notée ω_j . Enfin,

$\eta_j = (\eta_j^1, \eta_j^2)$ (resp^t $\tau_j = (\tau_j^1, \tau_j^2)$) désigne la normale unitaire sortante (resp^t la tangente unitaire) dans le sens direc sur Γ_j .

Dans le cas particulier où il n'ya pas de coupure (tous les $\omega_j < 2\pi$) on dira que Ω est un domaine **strictement polygonal**.

Dans Ω on considère u_i et $\sigma_{ij}(u)$, $i = 1, 2$, solutions du problème :

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} -\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u) = f_i, i = 1, 2, \text{ dans } \Omega, \quad (2.1), \\ \sigma_{ij}(u) = \lambda \operatorname{div}(u) + \mu \varepsilon_{ij}(u), i, j = 1, 2, \text{ dans } \Omega, \quad (2.2), \\ \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), i, j = 1, 2, \text{ dans } \Omega, \quad (2.3), \\ \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}(u) \eta_j = g_i, i = 1, 2, \text{ sur } \Gamma. \quad (2.4), \end{array} \right.$$

où $f_i, i = 1, 2$, sont données dans $L^2(\Omega)$ et où l'interprétation physique des différents termes du problème est la suivante

(2.1) est l'équation d'équilibre, où les f_i désignent les composantes de la densité des forces volumique données,

(2.2) est la loi de comportement d'un matériau élastique, isotrope et homogène, où λ et μ désignent les coefficients de Lamé et sont tels que $\lambda \geq 0, \mu > 0$.

(2.3) est le tenseur des déformations linéarisées,

(2.4) est la densité des forces surfaciques.

Le problème (E) étant celui de Neumann, on doit supposer vérifiée la condition nécessaire d'existence de la solution

faible (c'est-à-dire variationnelle) à savoir l'orthogonalité des données aux déplacements rigides :

$$\int_{\Omega} f \cdot \nu dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma} g \cdot \nu d\sigma = 0,$$

Introduisons l'espace

$$\mathcal{H} = \{ \tau = (\tau_{ij}) / \tau_{ij} \in L^2(\Omega), \forall i, j = 1, 2. \},$$

muni de la structure hilbertienne :

$$(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx.$$

On vérifie que si $\sigma \in \mathcal{H}$ et vérifie la première équation de (E), avec $f_i \in L^2(\Omega)$. Alors on peut définir, de manière unique

$$\sigma_{ij}(u) \eta_j = g_i \in \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

On sait résoudre variationnellement ces problèmes et on établit qu'il existe u_1, u_2 dans $H^1(\Omega)$ et

$$\sigma_{ij} \in \mathcal{H}^1(\Omega) = \{ \sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in H^1(\Omega) \},$$

solutions uniques de (E). Voir par exemple P. A. RAVIART-J. M. THOMAS [7] et G. DUVAUT-J. P. LIONS [8].

De plus, lorsque Ω est à frontière régulière (ce qui n'est pas le cas ici) on sait que si f_1 et f_2 sont données dans $H^m(\Omega)$ ($m \geq 0$). Alors

- u_1, u_2 dans $H^{m+2}(\Omega)$ et $\sigma_{ij} \in \mathcal{H}^{m+1}(\Omega)$ solutions uniques de (E). Pour cela, voir par exemple Cattabriga [10] et

Ladyzhenskaia [11].

Dans le cas où Ω est à frontière polygonale les résultats mentionnés sont encore valables en dehors d'un voisinage des sommets de Ω . L'objet de ce mémoire est l'étude du comportement singulier des solutions: u_1, u_2, σ_{ij} du problèmes (E), au voisinage de ces sommets lorsque f_1, f_2 sont données dans $H^m(\Omega)$ (m entier ≥ 0).

Les techniques qu'on utilisera sont essentiellement celles de V. A. KONDRATIEV [7] et de P. GRISVARD [13]. Pour étudier le problème (E) on réduit le systèmes en une équation comme dans B. MEROUANI [14]. Plus précisément, dans le paragraphe suivant nous allons réduire le problème (E) à un problème du type

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 H = g, \text{ dans } \Omega, \\ H = \frac{\partial H}{\partial \eta} = 0, \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right. ,$$

2.1.2 Réduction en une équation

On effectue maintenant une réduction de (E),

On portant (2.2) en (2.1), en tenant compte de (2.3), on a successivement

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\lambda \sum_{k=1}^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = -f_i, i = 1, 2,$$

$$\sum_{j=1}^2 \left[\lambda \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) \right] = -f_i, i = 1, 2,$$

$$\lambda \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} + \mu \Delta u_i + \mu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} = -f_i \quad i = 1, 2,$$

et

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + f_i = 0. \quad (2.5)$$

Sous forme vectorielle on a

$$\Delta u + \mu^{-1}(\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} u) + \mu^{-1} f = 0. \quad (2.6)$$

En appliquant l'opérateur div à (2.5) on trouve

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\theta_\varepsilon + div f = 0, \quad (2.7)$$

où on a posé

$$\theta_\varepsilon = div u.$$

Les équations (2.7) ne sont autres que celle de la dilatation.

Si on pose $\theta_\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22}$. Alors des relations (2.2) on tire la relation

$$\theta_\varepsilon = \frac{1}{2(\lambda + \mu)}\theta_\sigma. \quad (2.8)$$

En substituant dans les équations de la dilatation, la relation (2.8) on trouve

$$\frac{(\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + \mu)}\Delta\theta_\sigma + div f = 0. \quad (2.9)$$

Remarque 2.1.1

Même si les déplacements sont plans, le tenseur des contraintes n'est pas en général un tenseur des

contraintes planes, et on a :

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\theta_\sigma.$$

Pour les détails voir par exemple [21].

Soit $f \in (L^2(\Omega))^2$ on peut trouver F_1, F_2 dans $H^1(\Omega)$ tels que $f = -(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2})$. Dans le cas où f dérive d'un potentiel on peut prendre $F_1 = F_2 = F$, d'où une autre formulation de (2.1)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{11} - F_1) + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{22} - F_2) + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

où $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(u)$.

Si on a une solution telle que σ_{ij} et $F_i \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une fonction $G_1 \in H^1(\Omega)$, définie à une constante près, telle que

$$\sigma_{12} = \frac{\partial G_1}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \sigma_{11} - F_1 = \frac{\partial G_1}{\partial x_2}, \quad (2.11)$$

et il existe une fonction $G_2 \in H^1(\Omega)$ définie à une constante près, telle que

$$\sigma_{22} - F_2 = \frac{\partial G_2}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial G_2}{\partial x_2}, \quad (2.12)$$

d'où

$$\frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2}{\partial x_2} = 0.$$

Et par conséquent $\exists H \in H^2(\Omega)$ définie à une constante près, telle que

$$G_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \quad G_2 = \frac{\partial H}{\partial x_1}. \quad (2.13)$$

En substituant (2.13) dans (2.11) et (2.12) on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = F_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2}, \\ \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \sigma_{22} = F_2 + \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2}. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Pour toute fonction H les fonctions définies par (2.10) vérifient (2.1), pour trouver l'équation vérifiée par H il suffit de faire appel aux équations (2.9) et tenir compte des relations (2.14) on obtient :

$$\Delta^2 H = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu} \operatorname{div} f - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2},$$

et si f dérive d'un potentiel on obtient

$$\Delta^2 H = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \operatorname{div} f.$$

Mise en évidence des nouvelles conditions aux limites sur H

Pour trouver les conditions au bord sur H on fait appel aux conditions aux bord du départ (2.4) dans lesquelles en substituant les relations (2.14).

On a successivement sur chaque Γ_i

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(F_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} \right) \eta_i^1 - \frac{\partial H}{\partial x_1 x_2} \eta_i^2 = g_1, \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 x_2} \eta_i^1 + \left(F_2 + \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} \right) (\eta_i^1)^2 = g_2. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} \eta_i^1 - \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 x_2} \eta_i^2 = g_1 - F_1 \eta_i^1, \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} \eta_i^1 + \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} \eta_i^2 = g_2 - F_2 \eta_i^2, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial H}{\partial x_1} (-\eta_i^2) + \frac{\partial}{\partial x_2} \eta_i^1 \right] = F_2 \eta_i^2 - g_2, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial H}{\partial x_1} (-\eta_i^2) + \frac{\partial}{\partial x_2} \eta_i^1 \right] = g_1 F_1 \eta_i^1. \\ \frac{\partial}{\partial x_1} [\text{grad}.H \tau_i] = K_i^1, \quad K_i^1 = F_2 \eta_i^2 - g_2, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} [\text{grad}.H \tau_i] = K_i^2, \quad K_i^2 = g_1 - F_1 \eta_i^1. \end{cases}$$

Notons que $\eta_i = (\eta_i^1; \eta_i^2)$ est de direction constante sur chaque segment Γ_i ($i = 1, 2, \dots, N$).

Enfin, on a les relations suivantes

$$\text{grad}[\text{grad}H.\tau_i] = K_i ; (\Gamma_i), i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.15)$$

où $K_i = (K_i^1, K_i^2)$ pour tout $i = 1, 2, \dots, N$, et où les termes sont définis aux sens de trace de F_1 et F_2 sur chaque Γ_i ($i = 1, 2, \dots, N$).

On a le problème

$$(P_1) \begin{cases} \Delta^2 H = h \text{ dans } \Omega, \\ \text{grad}[\text{grad}H.\tau_i] = K_i ; (\Gamma_i), i = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

avec

$$h = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu} \text{div} f - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1^2} \left(= \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{div} f \text{ si } f \text{ dérive d'un potentiel} \right).$$

Intégration des nouvelles conditions au bord (2.15)

Pour avoir une condition au limite sur H et une autre sur $\frac{\partial H}{\partial \eta}$, on sépare, dans (2.15), les composantes normales et tangentielles et on intègre sur chaque Γ_i .

On a pour tout $i = 1, 2, \dots, N$,

$$\frac{\partial H}{\partial \tau_i} = \text{grad}H.\tau_i$$

D'où

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \tau_i^2} = K_i.\tau_i,$$

En posant :

$$K_i \cdot \tau_i = M_i \quad \text{et} \quad K_i \cdot \eta_i = N_i ,$$

on a

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \tau_i^2} = M_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.16)$$

et

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \tau_i \partial \eta_i} = N_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.17)$$

Soit S l'abscisse curviligne compté à partir de $A_0 = A_N$ et S_j l'abscisse de A_j ; en intégrant (2.16) et (2.17) on a :

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_{S_{j-1}}^S (S - S') M_j(S') dS' + a_j + b_j S, \quad \text{pour } S \in [A_{j-1}; A_j], \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ \frac{\partial H}{\partial \eta}(s) &= \int_{S_{j-1}}^S N_j(S') dS' + c_j \quad \text{pour } S \in [A_{j-1}; A_j], \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

où les constantes a_j, b_j, c_j sont telle que H et $\text{grad}H$ sont continues aux sommets $A_j, j = 1, 2, \dots, N$.

Un tel choix des constantes a_j, b_j, c_j n'est possible que si les conditions de compatibilité sont satisfaites et il y aura

Alors trois constantes arbitraires (a_1, b_1, c_1 par exemple) puisque H est définie à une fonction affine près.

Enfin, nous avons ramené le problème,

$$(P_1) \begin{cases} \Delta^2 H = h \text{ dans } \Omega, \\ \text{grad}[\text{grad}H \tau_i] = K_i, \text{ sur } \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{cases}$$

où

$$h \in H^{m-1}(\Omega) \quad \text{et} \quad K_i |_{\Gamma_i} \in H^{m+\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \times H^{m+\frac{1}{2}}(\Gamma_i),$$

au problème

$$(P_2) \begin{cases} \Delta^2 H = h & \text{dans } (\Omega), \\ H = K & \text{sur } (\Gamma), \\ \frac{\partial H}{\partial \eta} = l & \text{sur } (\Gamma), \end{cases}$$

où $h \in H^{m-1}(\Omega)$, $l|_{\Gamma_i} \in H^{m+\frac{3}{2}}(\Gamma_i)$ et $K_i|_{\Gamma_i} \in H^{m+\frac{5}{2}}(\Gamma_i)$.

2.2 Le système de Stokes

2.2.1 Position du problème

Dans l'ouvert plan Ω , borné et à frontière polygonale Γ (cf. 2.2.1) on considère ν_i et p , $i = 1, 2$, solutions du problème

$$(S) \begin{cases} -\Delta v_1 + D_1 p = f_1, & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v_2 + D_2 p = f_2, & \text{dans } \Omega, \\ D_1 v_1 + D_2 v_2 = 0, & \text{dans } \Omega, \\ v_1 = v_2 = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où f_1 et f_2 sont données dans $L^2(\Omega)$ et où l'interprétation physique des différents termes du problème est la suivante :

$f = (f_1, f_2)$: désigne la force volumique donnée,

$v = (v_1, v_2)$: désigne la vitesse de l'écoulement du fluide,

$\text{div} v = 0$: représente la condition d'incompressibilité du fluide.

On sait résoudre variationnellement ce problème et on établit qu'il existe v_1, v_2 dans $H_0^1(\Omega)$ et $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$, uniques à une constante près, solutions de (S). voir par exemple R. TEMAM [9].

De plus, lorsque Ω est à frontière régulière (ce qui n'est pas le cas ici) on sait que si f_1 et f_2 sont données dans $H^m(\Omega)$ ($m \geq 0$). Alors v_1 et v_2 sont dans $H^{m+2}(\Omega)$ et p dans $H^{m+1}(\Omega)$.

Pour cela voir par exemple Cattabriga [10] et Ladyzhenskaia [11].

Dans le cas où Ω est à frontière polygonale les résultats mentionnés sont encore valables en dehors d'un voisinage des sommets de Ω . L'objet de ce mémoire est l'étude du comportement singulier des solutions ν_1, ν_2 et p du problème (E) au voisinage de ces sommets lorsque f_1, f_2 sont données dans $H^m(\Omega)$ (m entier ≥ 0).

Les techniques qu'on utilisera sont essentiellement celles de V. A. KONDRATIEV [12] et de P. GRISVARD [13].

Pour étudier le problème ci-dessus on réduit le système en une équation comme dans P. GRISVARD [13]. Plus précisément le problème (S) se réduit au problème suivant

$$\begin{cases} \Delta^2 u = g, & \text{dans } \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

2.2.2 Réduction en une équation

L'existence étant acquise, la condition $D_1v_1 + D_2v_2 = 0$ implique qu'il existe $u \in H^2(\Omega)$ telle que

$$v_2 = D_1u, \quad v_1 = -D_2u.$$

On détermine complètement u en imposant que u s'annule en un point du bord. Éliminant P entre les deux première équation du système (2.18) on obtient

$$\Delta^2 u = D_2f_1 - D_1f_2, \quad (2.19)$$

Tandis que les condition aux limites (2.18) implique que le gradient de u s'annule sur Γ ;

Partant, la dérivée normale de u est nulle au bord est u est constante le long du bord. La condition que u s'annule en un point implique donc que

$$u \in H_0^2(\Omega). \quad (2.20)$$

On pose

$$g = D_2f_1 - D_1f_2,$$

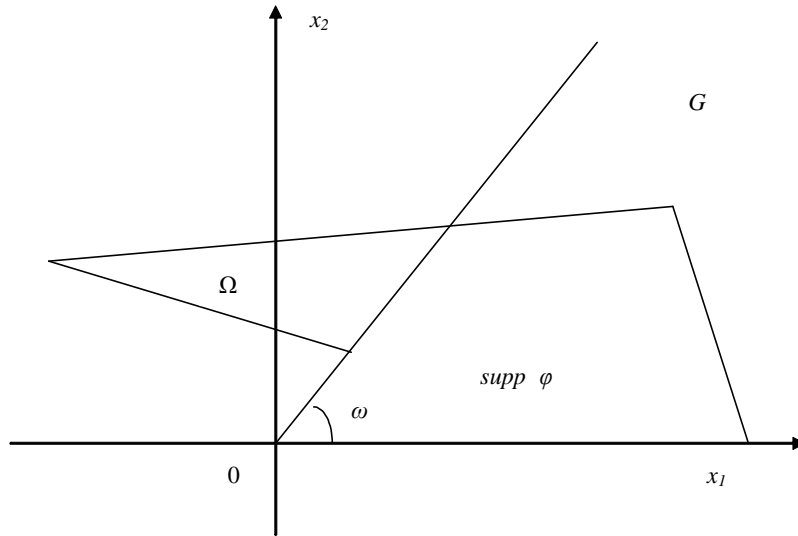
Donné dans $H^m(\Omega)$ (m entier ≥ -1). On aura donc $u \in H^{m+4}(\Omega \setminus V)$ où V est un voisinage de l'ensemble des sommets de Ω .

Enfin, on obtient le problème de Dirichlet pour le Bilaplacé

$$(P_L) \begin{cases} \Delta^2 u = g & \text{dans } \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

2.3 EXISTENCE ET UNICITE

Dans cette partie nous allons poser les différents problèmes aux limites pour une plaque, et démontrer un théorème d'existence et d'unicité.



2.3.1 Localisation

On va étudier u au voisinage d'un des sommets, que par translation et rotation, on peut supposer être en 0. Les cotés étant portés par le demi axe ox_1 et demi axe ox_2 qui fait un angle ω dans le sens direct avec ox_1 .

Fig-2-

Soit $\varphi \in D(\overline{\Omega})$; une fonction dont le support ne contient aucun autre sommet de Ω que zéro et qui est égale à un au voisinage de zéro.

On note aussi G le secteur infini déterminé par ox_1 dans le sens direct avec ox_2 . On pose :

$$\nu = \begin{cases} \varphi u & \text{dans } G \cap \Omega, \\ 0 & \text{dans } G \setminus \Omega. \end{cases} \quad (2.21)$$

Il est clair d'après (2.20) que $\nu \in H_0^2(\Omega)$.

On calcule $\Delta^2 \nu$.

On a

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi u) &= \frac{\partial^2(\varphi u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\varphi u)}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2(\varphi u)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}u + 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi\frac{\partial^2u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2(\varphi u)}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}u + 2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \varphi\frac{\partial^2u}{\partial y^2},\end{aligned}$$

Alors

$$\Delta(\varphi u) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \right] u + \varphi \left[\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} \right] + 2 \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \right\}.$$

On résulte

$$\Delta^2(\varphi u) = \Delta(\Delta(\varphi u)) + \Delta(\Delta\varphi u) + \Delta(\varphi\Delta u) + 2\Delta \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \right\}.$$

$$\Delta(\varphi\Delta u) = \Delta\varphi\Delta u + \varphi\Delta(\Delta u) + 2 \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\Delta u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\Delta u}{\partial y} \right\}.$$

$$\Delta(\Delta\varphi u) = (\Delta(\Delta\varphi))u + \Delta\varphi\Delta u + 2 \left\{ \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \right\}.$$

$$2 \left\{ \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \right\} = 2 \left\{ \begin{aligned} & \left(\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Delta\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \left\{ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y} \right\}, \\ & + \\ & \left(\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \Delta\frac{\partial u}{\partial y} + 2 \left\{ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial^2u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y} \right\}. \end{aligned} \right\}$$

Alors

$$\Delta^2(\varphi u) = \left\{ \begin{aligned} & \varphi\Delta^2u + \Delta^2\varphi u + 2 \left(\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \left(\left(\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ & + \\ & \left[2\Delta\varphi\Delta u + 8\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y} + 4\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial^2u}{\partial y^2} \right] + 2 \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\Delta u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\Delta u}{\partial y} \right] \\ & + \\ & \left(4\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial^3u}{\partial x^3} + \left(4\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial y} + \left(4\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial^3u}{\partial x\partial y^2} + \left(6\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2u}{\partial y^2} + \left(8\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \right) \frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}. \end{aligned} \right\}$$

Si on pose $[\Delta^2; \varphi] =$

$$\Delta^2\varphi + 4 \left(\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} + 4 \left(\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} + 2 \left(3\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \left(3\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 8 \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \right) \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$

$$+4 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 4 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial^3}{\partial y^3} + 4 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 4 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}.$$

On trouve

$$\Delta^2 \nu = h = \begin{cases} \varphi g + [\Delta^2; \varphi] u & \text{dans } \Omega \cap G, \\ 0 & \text{dans } G \setminus \Omega. \end{cases} \quad (2.22)$$

Et comme le support de l'opérateur du troisième ordre $[\Delta^2; \varphi]$ ne rencontre aucun des sommets de Ω ; h conserve la régularité de g car si $g \in H^m(G)$. Alors $u \in H^{m+4}(G)$ et $[\Delta^2; \varphi] u \in H^{m+1}(G)$ donc $\varphi g + [\Delta^2; \varphi] u \in H^m(G)$, ou bien $h \in C^{k;\alpha}(G)$ si g est l'aussi.

Il reste à étudier la régularité de ν dans G .

2.3.2 différents problèmes pour une plaque élastique

Soit G un ouvert borné de \mathbb{R}^2 à frontière polygonale (le G de la Fig (3-1); donc, il s'agit d'un ouvert lipshitzien).

Etant donné $f \in L^2(G)$, on cherche u solution de

$$\Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega, \quad (2.23)$$

avec les conditions au bord

$$u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad (2.24)$$

où

$$u = M(u) = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad (2.25)$$

et

$$M(u) = N(u) = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad (2.26)$$

avec, pour $\mu \in]0, 1[$,

$$M(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2},$$

$$N(u) = \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3} + (1 - \mu) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \tau} \right) \right).$$

On peut, de même considérer (2.23) avec ((2.24), (2.25)) ou ((2.24), (2.25)).

(Soit six problèmes au total : $3! = 6$)

Ce problème représente l'équation d'une plaque

- $\mu \in]0, 1[$ est le coefficient de Poisson du matériau constituant les plaque,

- $u(x)$ désigne le déplacement perpendiculairement à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petit déplacement),

- f désigne la densité de force.

La condition au bord :

- (2.24) signifie que la plaque est encastré au bord (pas de déplacement. des points de cette partie du bord).

- (2.25) signifie que la plaque est simplement supportée sur cette partie du bord.

- (2.26) signifie que cette partie du bord est libre (forces frontières nulles).

Dans ce qui suit, nous allons donner une formulation variationnelle de ces différents problèmes.

Pour cela, on décompose l'opérateur Δ^2 comme suit

Soit $\mu \in]0, 1[$; on a

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(2(1-\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\mu \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right).\end{aligned}$$

Soit $\nu \in V$ (espace à définir après)

on multiplie par ν l'équation (2.23) et on intègre, en utilisant la formule de Green,

on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1^2} + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_2^2} \right] dx &= \int_{\Omega} f(x)\nu(x)dx + \\ \int_{\Gamma} \left[\nu N(u) + \frac{\partial \nu}{\partial \eta} M(u) \right], & \\ &= \int_{\Omega} f(x)\nu(x)dx + \int_{\Gamma} \left[\nu N(u) + \frac{\partial \nu}{\partial \eta} M(u) \right] ds,\end{aligned}$$

avec

$$M(u) = \mu \Delta u + (1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_1^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \eta_1 \eta_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \eta_2^2 \right),$$

$$N(u) = -\frac{\partial}{\partial \eta} \Delta u + (1 - \mu) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_1 \eta_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} (\eta_1^2 - \eta_2^2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \eta_1 \eta_2 \right).$$

Vu la formule géométrique de G on a, en coordonnées polaires,

$$M(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2},$$

et

$$N(u) = \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3} + (1 - \mu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \tau} \right).$$

2.3.3 Choix de l'espace

Il est tout à fait naturel de poser

$$V = \left\{ \nu \in H^2(G) : \nu = \frac{\partial \nu}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \text{ et } \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \right\},$$

et

$$a(u, \nu) = F(\nu), \forall \nu \in V,$$

avec

$$F(\nu) = \int_{\Omega} f \nu dx.$$

Après un calcul simple, on déduit

$$F(\nu) = \int_{\Omega} \left[\Delta \nu - (1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] dx,$$

$$a(u, \nu) = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1 x_2} dx.$$

2.3.4 L'espace de la formulation variationnelle

$$V = \left\{ \nu \in H^2(G) : \nu = \frac{\partial \nu}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \text{ et } \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \right\}.$$

2.3.5 Remarques :

1-Dans le cas où $\text{mes}(\Gamma_2) = 0$, on a

$$V = H_0^2(\Omega),$$

et

$$\overline{\mathcal{D}(\overline{\Omega})} = H_0^2(\Omega).$$

2-Dans le cas où $\text{mes}\Gamma_2 \neq 0$

V est un sous espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^2(\Omega)$, vu que les applications traces

$$\begin{aligned} \gamma_0 & : H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma), \\ \nu & \mapsto \gamma_0\nu = \nu|_{\Gamma} \text{ continue,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 & : H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma), \\ \nu & \mapsto \gamma_1\nu = \frac{\partial\nu}{\partial\eta} \text{ continue,} \end{aligned}$$

$$V \subset H^2(\Omega) \text{ par définition,}$$

sont continues.

On démontre aisément que

- $a(u, \nu)$ est évidemment une forme bilinéaire continue sur $V \times V$, et symétrique,
- $F(\nu)$ est une forme linéaire continue sur V c'est à dire $F \in V'$, de plus F dépend de f .

- Coercivité de $a(u, \nu)$

On montre d'abord que

$$a(\nu, \nu) \geq (1 - \mu) |\nu|_{H^2(G)}^2, \forall \nu \in H^2(G), \quad (2.27)$$

où

$$|\nu|_{H^2(G)}^2 = \left(\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha\nu\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.28)$$

est une norme sur $H^2(\Omega)$, équivalente à la norme abituduelle de $H^2(\Omega)$.

$$\|\nu\|_{H^2(G)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha \nu\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.29)$$

$\nu = u$ dans $a(u, \nu) \Rightarrow$

$$a(\nu, \nu) = \int_{\Omega} \left[\left| \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_2^2} \right|^2 + 2\mu \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_2^2} + 2(1 - \mu) \left| \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 \right] dx_1 dx_2.$$

Utilisant l'inégalité $2ab \geq -(a^2 + b^2)$ avec $a = \left| \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1^2} \right|^2$, $b = \left| \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_2^2} \right|^2$, on en déduit que

$$a(\nu, \nu) \geq (1 - \mu) \int_{\Omega} \left[\left| \frac{\partial \nu}{\partial x_1^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_2^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 \right] dx_1 dx_2.$$

C'est exactement (2.27). La coercivité de $a(u, \nu)$ découle de l'équivalence des norme (2.28) (2.29).

Le théorème de Lax-Milgram implique qu'il existe $u \in V$ unique, solution du problème ((2.23) (2.24)).

Chapitre 3

ETUDE DU PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LE BILAPLACIEN

3.1 Changement de variables et de fonctions

L'équation (2.22) en coordonnées polaires s'écrit

$$(rDr)^4\nu - 4(rDr)^3\nu + 4(rDr)^2\nu + 2(rDr)^2D_\theta^2\nu - 4rDrD_\theta^2\nu + D_\theta\nu + 4^2D_\theta^2\nu = r^4h. \quad (3.1)$$

On pose ensuite $r = e^t$ pour obtenir une équation à coefficients constants,

si

$$\begin{cases} \nu(r \cos \theta, r \sin \theta) = w(t, \theta), \\ h(r \cos \theta, r \sin \theta) = k(t, \theta), \end{cases} \quad (3.2)$$

il vient

$$(D_t^4 - 4D_t^3 + 4D_t^2 + 2D_t^2D_\theta^2 - 4D_tD_\theta^2 + D_\theta^4 + D_\theta^2)w = e^{4t}k. \quad (3.3)$$

Le fait que $\nu \in H_0^2(G) \subset P^2(G)$; implique

$$e^{-t}D^\alpha w \in L^2(B); |\alpha| \leq 2, \quad (3.4)$$

où B désigne la bande $]-\infty; +\infty[\times]0; \omega[$ munie de la mesure $dt d\theta$.

A ce point il est naturel de poser

$$\begin{cases} Z = e^{-t}w, \\ l = e^{3t}k. \end{cases} \quad (3.5)$$

On va démontrer que $Z \in H_0^2(B)$.

Pour $|\alpha| \leq 2$ $D^\alpha Z$ est une combinaison linéaire des fonctions dont la forme $e^{-t}D^\beta w$; $|\beta| \leq 2$.

D'après (3.4) on déduit l'appartenance $Z \in H^2(B)$, d'autre part, il est clair que la trace de Z est nulle sur la frontière de B . Reste à vérifier $\frac{\partial Z}{\partial \eta}(t, \theta) = 0$, pour $\theta = 0$; $\theta = \omega$.

Pour $\theta = 0$; $\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour $\theta = \omega$; $\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc dans les deux cas le problème devient à démontrer que

$$\frac{\partial Z}{\partial \theta}(t; 0) = \frac{\partial Z}{\partial \theta}(t; \omega) = 0,$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}(e^{-t}w), \\ &= e^{-t} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right\}, \\ &= e^{-t} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x}(e^t \sin \theta) + \frac{\partial w}{\partial y}(-e^t \cos \theta) \right\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \eta}(t, 0) &= -\frac{\partial w}{\partial y}(t, 0), \\ &= \frac{\partial \nu}{\partial y}(r, 0) = 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \eta}(t, \omega) &= \sin \omega \frac{\partial \nu}{\partial x}(r \cos \omega, r \sin \omega), \\ &= 0, \end{aligned}$$

enfin,

$$Z \in H_0^2(B), \quad (3.6)$$

solution de

$$(D_t^4 - 2D_t^2 + 1) Z + 2(D_t^2 + 1) D_\theta^2 Z = l. \quad (3.7)$$

De plus on sait que Z et aussi l sont nulles pour t assez grand. Il faut également voir quelle régularité de l possède en fonction de la régularité de g .

Le cas le plus simple est celui ou $g \in L^2(G)$ car il est claire que $e^{-2t}l \in L^2(B)$.

Lemme 3.1.1

- (i) si $g \in H^{-1}(G)$. Alors $e^{-t}l \in H^{-1}(B)$,
- (ii) si $g \in H_0^m(G)$. Alors $e^{-(m+2)t}l \in H_0^m(B)$.

Preuve.

(i) si $g \in H^{-1}(G)$ on a d'après le (lemme1.6.3) $h = \frac{f_0}{r} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$,

or

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial f_1}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f_1}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \sin \theta \frac{\partial f_2}{\partial r} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f_2}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (3.8)$$

On pose

$$\begin{cases} h_0 = f_0, \\ h_1 = \cos \theta f_1 + \sin \theta f_2 \sin \theta, \\ h_2 = -\sin \theta f_1 + \cos \theta f_2, \end{cases}$$

on trouve :

$$h = \frac{h_0}{r} + \frac{\partial h_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial h_2}{\partial \theta}, \text{ où } h_j \in L^2(G); 0 \leq j \leq 2.$$

Ensuite par définition on a

$$e^{-t}l(t, \theta) = e^{2t}h(e^t \cos \theta; e^t \sin \theta),$$

d'où

$$e^{-t}l(t, \theta) = e^t \{ (h_0 + h_1) (e^t \cos \theta; e^t \sin \theta) \} + \frac{\partial}{\partial t} \{ e^t h_1 (e^t \cos \theta; e^t \sin \theta) \} + \frac{\partial}{\partial \theta} \{ e^t h_2 (e^t \cos \theta; e^t \sin \theta) \}.$$

Comme les fonctions $(t; \theta) \rightarrow e^t h_j (e^t \cos \theta; e^t \sin \theta)$ sont des éléments de $L^2(B)$ cela prouve que

$$e^{-t}l \in H^{-1}(B).$$

(ii) si $g \in H_0^m(B)$ donc $P^m(B)$ (grâce au lemme 1.6.2) on a aussi $h \in P^m(G)$.

Pour vérifier que $e^{-(m+2)t}l \in H^m(B)$ il suffit de voir

$$D_t^j (e^{-(m+2)t}l) \in L^2(\mathbb{R}; H^{m-j}[0; \omega]), \quad 0 \leq j \leq m,$$

ou ce qui revient au même que

$$e^{-(m-1)t}D_t^j K \in L^2(R; H^{m-j}[0; \omega]), \quad 0 \leq j \leq m.$$

On a $D_t^j K(t; \theta) = \sum_{k=0}^j (rD_r)^k h(r \cos \theta; r \sin \theta)$; avec $r = e^t$.

Comme $(rD_r)^k h$ est une combinaison linéaire à coefficients fonctions trigonométriques des fonctions dont la

forme $r^{|\alpha|}D^\alpha h$; $|\alpha| \leq j$, il faut donc vérifier que

$$\int_0^{+\infty} r^{-(m+|\alpha|+1)} \|D^\alpha h(r \cos \theta; r \sin \theta)\|_{H^{m-j}(]0, \omega])}^2 \frac{dr}{r} < +\infty.$$

Identiquement équivalent

$$\int_0^{+\infty} \int_0^\omega r^{-m+|\alpha|} |D_\theta^l D^\alpha h(r \cos \theta; r \sin \theta)|^2 r dr d\theta < +\infty; \quad 0 \leq l \leq m - j.$$

Mais l'on a aussi $D_\theta^l D^\alpha h$ est une combinaison linéaire à coefficients fonctions trigonométriques de θ , des

fonctions $r^{|\beta|}D^{\alpha+\beta}h$; $|\beta| \leq m - j$. Alors il suffit de vérifier que

$$\int_0^{+\infty} \int_0^\omega |r^{-m+|\gamma|} D^\gamma h(r \cos \theta; r \sin \theta)|^2 r dr d\theta = \int_G |r^{-m+|\gamma|} D^\gamma h(x; y)|^2 dx dy < +\infty, \quad \text{pour } |\gamma| \leq m,$$

condition qui est réalisée puisque $h \in P^m(G)$. Alors $e^{-(m+2)t}l \in H^m(B)$, ensuite, par définition on a

$$e^{-(m+2)t}l(t, \theta) = e^{-(m+2)t}h(e^t \cos \theta; e^t \sin \theta); \quad \text{avec } h \in H_0^m(B),$$

ce qui signifie que la trace de $e^{-(m+2)t}l(t, \theta)$ est nulle sur la frontière de B, de plus un calcul analogue a celle

donné pour Z nous donne

$$\frac{\partial^j}{\partial \eta^j}(e^{-(m+2)t}l)(t, \theta) = e^{-(m+2-j)t} \frac{\partial^j h}{\partial \eta^j}(r \cos \theta; r \sin \theta),$$

ces derniers sont nuls pour $\theta = 0$, $\theta = \omega$, enfin, $e^{-(m+2)t} \in H_0^m(B)$. ■

3.2 Transformation de Fourier

Après transformation de Fourier par rapport à t , l'équation(3.7) devient

$$(\tau^4 + 2\tau^2 + 1) \tilde{Z} + 2(1 - \tau^2) \tilde{Z}'' + \tilde{Z}'''' = \tilde{l}, \quad (3.9)$$

où l'exposant ' désigne la dérivée par rapport à θ .

L'appartenance de $Z \in H_0^2(B)$ se traduit par

$$\begin{cases} \tau^{2-j} \tilde{Z} \in L^2(R, H^j]0, \omega]); 0 \leq j \leq 2, \\ \tilde{Z}(\tau, 0) = \tilde{Z}(\tau, \omega) = \tilde{Z}'(\tau, 0) = \tilde{Z}'(\tau, \omega) = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

L'équation (3.9) avec les conditions aux limites contenues dans (3.10) peut être résolue (presque explicitement); l'équation caractéristique de (3.9) s'écrit

$$p^4 + 2(1 - \tau^2)p^2 + (\tau^4 + 2\tau^2 + 1) = 0,$$

et ses racines son $\pm \tau \pm i$. donc un système fondamental de solutions est formé de fonctions

$$\begin{cases} \sin \theta sh \tau \theta, \sin \theta ch \tau \theta, \cos \theta sh \tau \theta, \cos \theta ch \tau \theta & \text{si } \tau \neq 0, \\ \sin \theta, \theta \sin \theta, \cos \theta, \theta \cos \theta & \text{si } \tau = 0. \end{cases}$$

Pour chaque valeur de τ , l'alternative de Fredholm est valable pour l'équation (3.9) avec les conditions aux limites contenues dans (3.10); par conséquent \tilde{Z} est uniquement déterminée par (3.9) et (3.10) si et seulement si, le problème

$$\begin{cases} (\tau^4 + 2\tau^2 + 1)\psi + 2(1 - \tau^2)\psi'' + \psi'''' = 0, \\ \psi(0) = \psi(\omega) = \psi'(0) = \psi'(\omega) = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

admet pour unique solution, la solution identiquement nulle.

Proposition 3.2.1

L'équation (3.9) avec les conditions au limites de (3.10) détermine \tilde{Z} de manière unique lorsque

τ n'est pas solution de l'équation caractéristique

$$sh^2(\tau\omega) = \tau^2 \sin \omega, \tau \neq 0. \quad (3.12)$$

De plus \tilde{Z} dépend analytiquement de τ dans D privé des solutions de (3.12) à valeurs dans $H^2(]0, \omega[)$; pour tout ouvert $D \subset \mathbb{C}$ dans lequel \tilde{l} est analytique en τ à valeurs dans

$$H^{-2}(]0, \omega[).$$

Preuve.

On obtient l'équation caractéristique en résolvant (3.11) pour cela on pose pour $\tau \neq 0$

$$\psi = \sin \theta[\alpha sh\tau\theta + \beta ch\tau\theta] + \cos \theta[\gamma sh\tau\theta + \sigma ch\tau\theta],$$

et on détermine $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ à l'aide des conditions aux limites qui donnent le système :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \sin \omega sh\tau\omega & \sin \omega ch\tau\omega & \cos \omega sh\tau\omega & \cos \omega ch\tau\omega \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\tau}{2} & 0 \\ \begin{bmatrix} \cos \omega sh\tau\omega \\ +\tau \sin \omega ch\tau\omega \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos \omega sch\tau\omega \\ +\tau \sin \omega sh\tau\omega \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\sin \omega sh\tau\omega \\ +\tau \cos \omega ch\tau\omega \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\sin \omega ch\tau\omega \\ +\tau \cos \omega sh\tau\omega \end{bmatrix} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \sigma \end{bmatrix} = 0$$

dont le déterminant : $-\frac{1}{4}(sh^2\tau\omega - \tau^2 \sin^2 \omega)$.

Pour $\tau = 0$ on pose

$$\psi = \sin \theta[\alpha + \beta\theta] + \cos \theta[\gamma + \sigma\theta],$$

et on constate aisément que les conditions aux limites impose

$$\alpha = \beta = \gamma = \sigma = 0.$$

La dépendance analytique est satisfaite d'après([22]. p21). ■

Remarque 3.2.2

La multiplicité des solutions de (3.12) est au plus égale à deux car ce sont les valeurs caractéristiques

du problème aux limite (3.11), qui sont elles-mêmes de multiplicité au plus égale à deux.

(Par l'unicité du problème de Cauchy)

Compte tenu des hypothèses sur g on va déterminer un domaine d'analyticité pour \tilde{l} ,

Proposition 3.2.3

Si g est à support borné par R et

(i) $g \in H^{-1}(G)$. Alors \tilde{l} est analytique dans le demi-plan $\text{Im}\tau > -1$ à valeurs dans $H^{-1}([0, \omega])$ et

$$\tilde{l}(\tau, \theta) = \tilde{l}_1(\tau, \theta) + \tilde{l}_2(\tau, \theta)$$

avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi + i + i\eta|^{-2} \left\| \tilde{l}_1(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{L^2([0, \omega])}^2 + \left\| \tilde{l}_2(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{H^{-1}([0, \omega])}^2 d\xi \leq CR^{2(\eta+1)} \quad (R' \geq R),$$

(ii) $g \in H_0^m(G)$. Alors \tilde{l} est analytique dans le demi-plan $\text{Im}\tau > -2 - m$ à valeurs dans

$H_0^m([0, \omega])$, et

$$\sum_{j+k \leq m} \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi + i + i\eta|^{2k} \int_0^\omega \left| \frac{\partial^j \tilde{l}}{\partial \theta^j}(\xi + i\eta, \cdot) \right|^2 d\theta d\xi \leq CR^{2(\eta+m+2)}.$$

Preuve.

(i) D'après le (lemme3.1.1) on à $e^{-t}l \in H^{-1}(B)$ de plus le support de l est borné (en t) par $\log R$. Alors

$e^{-t}l = f_0 + D_t f_1 + D_\theta f_2$; $f_j \in L^2(B)$ De telle façon les f_j sont nulles pour $t \geq \log R'$; ($R' > R$).

Par transformation de Fourier

$$\tilde{l}(\tau - i, \theta) = \tilde{f}_0(\tau, \theta) + \tau \tilde{f}_1(\tau, \theta) + D_\theta \tilde{f}_2(\tau, \theta),$$

où les \tilde{f}_j sont analytiques dans le demi-plan $Im\tau > 0$. En effet, les f_j , $j = 0, 1, 2$, $\in L^2(B)$ par hypothèse et de plus

$$supp f_j \subset \left\{ (t, \theta) \in B : |t| \leq \log R, 0 \leq \theta \leq \omega \right\},$$

donc les f_j , $j = 0, 1, 2$, sont localement intégrable, ie : $f_j \in L^1_{loc}(B) \subset \mathcal{E}'(B)$.

On vira de vérifier que les hypothèses du théorème de Paly-Wener-Shwartz sont vérifiées. Donc il existe

$F_j : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $j = 0, 1, 2$, holomorphes telles que :

$$F_j(\xi, \theta) = \tilde{f}_j(\xi, \theta), \xi \in \mathbb{R}e\theta \in]0, \omega[$$

$\exists C > 0$ telle que

$$|F_j(\xi + i\eta, \theta)| = \left| \tilde{f}_j(\xi + i\eta, \theta) \right| \leq C e^{\log R'}.$$

Comme $\dot{R} = e^{\log R}$, on en déduit

$\exists C > 0$ telle que

$$\left| \tilde{f}_j(\xi + i\eta, \theta) \right| \leq C R^\eta, \forall z \in \mathbb{C}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\omega |f_j(\xi + i\eta, \theta)|^2 d\theta d\xi &= \int_{-\log R'}^{\log R'} |(\cdot, \theta)|^2 d\theta d\xi \\ &\leq C' (R')^{2|\eta|}, j = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

On pose

$$\tilde{l}_1(\tau, \theta) = (\tau + i) \tilde{f}_1(\tau + i, \theta),$$

$$\tilde{l}_2(\tau, \theta) = \tilde{f}_0(\tau + i, \theta) + D_\theta \tilde{f}_2(\tau + i, \theta).$$

On trouve

$$\tilde{l}(\tau, \theta) = \tilde{l}_1(\tau, \theta) + \tilde{l}_2(\tau, \theta),$$

et on applique l'inégalité précédente sur $\tilde{f}_1(\tau + i, \theta)$.

Pour \tilde{l}_2 on a

$$\begin{aligned} \|\tilde{l}_2\|_{H^{-1}(]0,\omega])} &= \inf \left\{ \|\tilde{f}_0\|_{L^2(]0,\omega])}, \|\tilde{f}_2\|_{L^2(]0,\omega])} \right\}, \\ &= \|\tilde{f}_0\|_{L^2(]0,\omega])} \text{ ou bien } \|\tilde{f}_2\|_{L^2(]0,\omega])}. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on applique l'inégalité précédente

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\omega \left| \tilde{f}_j(\xi + i\eta, \theta) \right|^2 d\theta d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\omega \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^m e^{-i\xi t} f_j(t, \theta) \right|^2 d\theta d\xi, \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\omega \left\{ e^{2\eta \log r} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi} f_j(t, \theta) \right|^2 dt \right\} d\theta d\xi, \\ &\leq \|\widehat{f}_j\| \cdot R^{2\eta}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Comme les f_j sont analytiques dans le demi-plan $Im\tau > 0$. Alors \tilde{l} est analytique dans le demi-plan $Im\tau > -1$;
ensuite

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi + i + i\eta|^{-2} \left\| \tilde{l}_1(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{L^2(]0,\omega])}^2 d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\omega \left| (\tau + i)^{-1} \tilde{l}_1(t, \theta) \right|^2 d\theta d\xi, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\omega \left| \tilde{f}_1(\tau + i, \theta) \right|^2 d\theta d\xi, \\ &\leq R^{2(\eta+1)}. \end{aligned}$$

D'autre part, $L^2(]0,\omega]) \subset H^{-1}(]0,\omega])$; avec injection continue.

Alors

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \tilde{f}_0(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{H^{-1}(]0,\omega])}^2 d\xi &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \tilde{f}_0(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{L^2(]0,\omega])}^2 d\xi \\ &\leq CR^{2(\eta+1)} \end{aligned}$$

Et l'on a D_θ est continue de $L^2(]0, \omega[)$ dans $H^{-1}(]0, \omega[)$ donc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| D_\theta \tilde{f}_2(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{H^{-1}(]0, \omega[)}^2 d\xi &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \tilde{f}_2(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{L^2(]0, \omega[)}^2 d\xi, \\ &\leq CR^{2(\eta+1)}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

(ii) D'après le lemme 1.6.3

$$e^{-(m+2)t} \chi \in H_0^m(B).$$

De plus χ est de support borné (en t) par $\log R$, par transformation de Fourier

$$\tilde{l}(\tau - i(m+2), \theta) = \tilde{\chi}(\tau, \theta).$$

Où $\tilde{\chi}$ est analytique dans le demi-plan $\text{Im} \tau > 0$.

Donc $\tilde{l}(\tau, \theta)$ est analytique dans le demi-plan $\text{Im} \tau > -(m+2)$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi + i\eta|^{2k} \int_0^\omega \left| \frac{\partial^j \tilde{l}}{\partial \theta^j}(\xi + i\eta, \theta) \right|^2 d\theta d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\omega \left| (\xi + i\eta)^k \frac{\partial^j \tilde{l}}{\partial \theta^j}(\xi + i\eta, \theta) \right|^2 d\xi d\theta ; j+k \leq m \quad (3.14)$$

$$\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\omega \left| \frac{\partial^k \partial^j \tilde{l}}{\partial t^k \partial \theta^j}(\xi + i\eta, \theta) \right|^2 d\xi d\theta, \quad (3.15)$$

$$\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\omega \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi+i\eta)t} \frac{\partial^k \partial^j l}{\partial t^k \partial \theta^j}(t, \theta) dt \right|^2 d\xi d\theta \quad (3.16)$$

Mais $\frac{\partial^k \partial^j l}{\partial t^k \partial \theta^j}$ est l'aussi une combinaison linéaire des fonctions

$$e^{(m+2)t} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \chi; \quad n \leq k.$$

Alors la quantité (3.16) soit inférieure ou égale à une combinaison linéaire des

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\omega \left| \int_{-\log R}^{\log R} e^{2(\eta+m+2)t} e^{-i\xi t} \frac{\partial^n \partial^j \chi}{\partial t^n \partial \theta^j}(t, \theta) dt \right|^2 d\xi d\theta, \\
& \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\omega e^{2(\eta+m+2)t} \left| \int_{-\log R}^{\log R} e^{-i\xi t} \frac{\partial^n \partial^j \chi}{\partial t^n \partial \theta^j}(t, \theta) dt \right|^2 d\xi d\theta, \\
& \leq CR^{2(\eta+m+2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\omega \left| \widehat{\frac{\partial^n \partial^j \chi}{\partial t^n \partial \theta^j}} \right|^2 d\xi d\theta.
\end{aligned}$$

Comme $\frac{\partial^n \partial^j \chi}{\partial t^n \partial \theta^j} \in L^2(B) \cap L^1(B)$. Alors sous transformation usuelle par rapport à t est dans $L^2(B)$ ce qui

achèvera la démonstration. ■

On peut maintenant établir le résultat clé de toute la suite

Proposition 3.2.4

Si g est de support borné par R et

(i) $g \in H^{-1}(B)$. Alors \tilde{Z} est analytique dans le demi-plan $Im\tau > -1$ privé des solutions de (3.12)

et il existe k tel que

$$Max_{-1 \leq \eta \leq 0} \left\{ \int_{\xi \geq k} \sum_{j+k \leq 3} \left[\int_0^\omega \xi^{2j} \left| \frac{\partial^k \tilde{Z}}{\partial \theta^k}(\xi + i\eta, \theta) \right|^2 d\theta \right] d\xi \right\} < +\infty.$$

(ii) $g \in H_0^m(B)$. Alors \tilde{Z} est analytique dans le demi-plan $Im\tau > -m - 2$ privé des solutions de

(3.12) et il existe K tel que

$$Max_{-m-2 \leq \eta \leq 0} \left\{ \int_{\xi \geq k} \sum_{j+k \leq m+4} \left[\int_0^\omega \xi^{2j} \left| \frac{\partial^k \tilde{Z}}{\partial \theta^k}(\xi + i\eta, \theta) \right|^2 d\theta \right] d\xi \right\} < +\infty.$$

Ceci résulte des propositions (3.3.1) et (3.3.2) et du résultat suivant concernant le problème (3.9) et (3.10).

Lemme 3.2.5

Pour $H \geq 0$ et $m \geq -2$; il existe K et C tel que pour

$|\eta| \leq H$ et $|\xi| \geq k$ on ait

$$\sum_{0 \leq k \leq m+4} |\xi|^k \left\| \tilde{Z}(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{H^{m+4-k}([0, \omega])} \leq C \left\| \tilde{l}(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{H^m([0, \omega])}, \quad \text{pour } m \leq 0,$$

et

$$\sum_{0 \leq k \leq m+4} |\xi|^k \left\| \tilde{Z}(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{H^{m+4-k}([0, \omega])} \leq C \sum_{0 \leq k \leq m} |\xi|^k \left\| \tilde{l}(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{H^{m-k}([0, \omega])}, \quad \text{pour } m \geq 0.$$

Preuve.

La majoration désirée concerne τ grand en partie réelle, la partie imaginaire étant bornée. On peut, alors

remplacer le problème par celui un peut plus simple où \tilde{Z} est solution de

$$\xi^4 \tilde{Z} - 2\xi^2 \tilde{Z}'' + \tilde{Z}'''' = \tilde{l}, \quad (3.17)$$

avec les même conditions aux limites (3.10) à condition qu'il existe K tel que pour $|\xi| \geq K$ le problème

(3.9), (3.10) admet une solution unique. Ceci se vérifie en examinant l'équation (3.9) pour $|\eta| \leq H$;

décomposant (3.12) en partie réelle et partie imaginaire on a

$$\begin{cases} sh\xi\omega \cos \eta\omega = \pm\xi \sin \omega, \\ ch\xi\omega \sin \eta\omega = \pm\eta \sin \omega. \end{cases}$$

D'où

$$\frac{\xi^2}{sh^2\xi\omega} + \frac{\eta^2}{ch^2\xi\omega} = \frac{1}{\sin^2 \omega},$$

et si $|\xi|^2 \rightarrow +\infty$. Alors $\frac{\xi^2}{sh^2\xi\omega} \rightarrow 0$ donc $\frac{\eta^2}{ch^2\xi\omega} \rightarrow \frac{1}{\sin^2 \omega}$.

Et puisque $ch^2\xi\omega \rightarrow +\infty$ cela impose $|\eta| \rightarrow +\infty$; On déduit que les solutions de (3.12) avec $|\eta| \leq H$ ont leur

partie réel bornée ce qui prouve l'existence de K .

On raisonne désormais sur l'équation (3.15), en formant (\tilde{l}, \tilde{Z}) où le produit scalaire est celui de $L^2([0, \omega])$

on obtient, en tenant compte des conditions aux limites,

$$\xi^4 \left\| \tilde{Z} \right\|^2 + 2\xi^2 \left\| \tilde{Z}' \right\|^2 + \left\| \tilde{Z}'' \right\|^2 = \left(\tilde{l}, \tilde{Z} \right). \quad (3.18)$$

D'où

$$\xi^2 \left\| \tilde{Z} \right\| + |\xi| \left\| \tilde{Z}' \right\| + \left\| \tilde{Z}'' \right\|^2 \leq C \left\| \tilde{l} \right\|_{H^{-2}(]0,\omega])},$$

ce qui prouve le lemme (3.3.5) dans le cas où $m = -2$.

Ensuite en formant $\left(\tilde{l}, \tilde{Z}'' \right)$ on obtient

$$-\xi^4 \left\| \tilde{Z}' \right\|^2 - 2\xi^2 \left\| \tilde{Z}'' \right\| - \left\| \tilde{Z}''' \right\|^2 = \left(\tilde{l}, \tilde{Z}'' \right). \quad (3.19)$$

D'où

$$\xi^2 \left\| \tilde{Z}' \right\| + |\xi| \left\| \tilde{Z}'' \right\| + \left\| \tilde{Z}''' \right\|^2 \leq C \left\| \tilde{l} \right\|_{H^{-1}(]0,\omega])}.$$

Mais de (3.16) on déduit aussi $\xi^4 \left\| \tilde{Z} \right\|^2 \leq \left\| \tilde{Z}' \right\| \left\| \tilde{l} \right\|_{H^{-1}(]0,\omega])}$. Alors $\xi^3 \left\| \tilde{Z} \right\| \leq \left\| \tilde{l} \right\|_{H^{-1}(]0,\omega])}$, ce qui prouve le lemme 3.3.5 dans le cas où $m = -1$.

Ensuite en formant $\left(\tilde{l}, \tilde{Z}''' \right)$ on obtient

$$\xi^4 \left\| \tilde{Z}'' \right\|^2 + 2\xi^2 \left\| \tilde{Z}''' \right\|^2 + \left\| \tilde{Z}'''' \right\|^2 = \left(\tilde{l}, \tilde{Z}''' \right).$$

D'où

$$\xi^2 \left\| \tilde{Z}'' \right\| + |\xi| \left\| \tilde{Z}''' \right\| + \left\| \tilde{Z}'''' \right\|,$$

puis en écrivant l'équation on obtient

$$\xi^4 \left\| \tilde{Z}'' \right\| \leq C \left\| \tilde{l} \right\|,$$

et par interpolation

$$\xi^3 \left\| \tilde{Z} \right\| \leq C \left\| \tilde{l} \right\|,$$

ce qui prouve le lemme (3.3.5) dans le cas où $m = 0$.

Pour prouver le lemme (3.3.5) dans le cas où $m > 0$ on peut par tronquature et prolongement se ramener au

cas où l'équation (3.15) est posée soit dans \mathbb{R} , soit dans $\mathbb{R}_+ =]0, +\infty[$. Lorsque $\xi = 1$ on obtient aisément la

majoration désirée par résolution explicite, il existe K tel que :

$$\|\psi\|_{H^{m+4}(\mathbb{R}_+)} \leq K \|\psi - 2\psi'' + \psi''''\|_{H^m(\mathbb{R}_+)},$$

dés que $\psi(0) = \psi'(0) = 0$. On déduit l'inégalité désirée en effectuant le changement de variable $t \rightarrow \frac{t}{\xi}$

i.e, en posant $\psi(\theta) = \tilde{Z}\left(\frac{t}{\xi}\right)$.

Preuve. DU PROPOSITION 3 ■

Pour $m = -1$; d'après le lemme (3.3.5) on a

$$\sum_{0 \leq k \leq 3} |\xi|^k \left\| \tilde{Z}(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{H^{3-k}([0, \omega])} \leq C \left\| \tilde{l}(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{H^{-1}([0, \omega])}.$$

De plus comme $g \in H^{-1}(G)$. Alors d'après la proposition (3.3.1) \tilde{Z} est analytique dans le

demi-plan $\text{Im } \tau > -1$ privé des solutions de (3.12) à valeurs dans $H^{-1}([0, \omega])$.

On applique le lemme (3.3.5) pour $H = 1$; $m = -1$. Alors il existe K et C tels que pour

$|\eta| \leq 1$; $|\xi| \geq k$ on à :

$$\sum_{0 \leq k \leq 3} |\xi|^k \left\| \tilde{Z}(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{H^{3-k}([0, \omega])} \leq C \left\| \tilde{l}(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{H^{-1}([0, \omega])}. \quad (3.20)$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq 3} \int_0^\omega \xi^{2j} \left| \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \tilde{Z}(\xi + i\eta, \theta) \right|^2 d\theta &\leq \sum_{0 \leq k \leq 3} \xi^{2j} \left\| \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \tilde{Z} \right\|_{L^2([0, \omega])}^2, \\ &\leq \sum_{0 \leq k \leq 3} \xi^{2j} \left\| \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \tilde{Z} \right\|_{H^k([0, \omega])}^2, \\ &\leq \sum_{0 \leq k \leq 3} \xi^{2j} \left\| \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \tilde{Z} \right\|_{H^{3-j}([0, \omega])}^2, \end{aligned}$$

d'après (3.18)

$$\leq C \left\| \tilde{l}(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{H^{-1}([0, \omega])}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{l} \right\|_{H^{-1}([0, \omega])} &\leq \left\| \tilde{l}_1 \right\|_{H^{-1}([0, \omega])} + \left\| \tilde{l}_2 \right\|_{H^{-1}([0, \omega])}, \\ &\leq \left\| \tilde{l}_1 \right\|_{L^2([0, \omega])} + \left\| \tilde{l}_2 \right\|_{H^{-1}([0, \omega])}. \end{aligned}$$

Alors

$$\left\| \tilde{l} \right\|_{H^{-1}([0, \omega])} \leq 2 \left(\left\| \tilde{l}_1 \right\|_{L^2([0, \omega])}^2 + \left\| \tilde{l}_2 \right\|_{H^{-1}([0, \omega])}^2 \right).$$

On intègre pour $|\xi| \geq k$ et on fait compte que $|\xi + i + i\eta| < \frac{1}{k^2}$ et la proposition(3.3.3) on trouve

$$\int_{|\xi| \geq k} \left\| \tilde{l} \right\|_{H^{-1}([0, \omega])}^2 d\xi \leq CR^{2(\eta+1)}.$$

Si on prend le *Max* pour $-1 < \eta < 0$ on obtient le résultat.

Si $m = 0$; on applique le lemme (3.3.5) pour $m = 2$. Alors $\eta = 0$.

(Comme $|\xi| \geq k$ on peut choisir $k > 1$). On intègre pour $|\xi| \geq k$ on obtient

$$\int_{|\xi| \geq k} \left\| \tilde{l}(\xi, \theta) \right\|_{H^{-2}([0, \omega])}^2 d\xi \leq C \sum_{k+j \leq -2} \int_{|\xi| \geq k} |\xi|^k \int_0^\omega \left| \frac{\partial^j \tilde{l}}{\partial \theta^j}(\xi, \theta) \right|^2 d\xi.$$

Mais d'après la proposition (3.3.3)

$$\left\| \tilde{l}(\xi, \theta) \right\|_{H^{-2}([0, \omega])} \leq \sum_{j=0}^2 \left\| \frac{\partial^j \tilde{l}}{\partial \theta^j}(\xi, \theta) \right\|_{L^2([0, \omega])},$$

et en tenant compte que $|\xi|^k \leq K^k$ (*C^{ste}*) il résulte

$$\int_{|\xi| \geq k} \left\| \tilde{l}(\xi, \theta) \right\|_{L^2([0, \omega])} d\xi \leq R,$$

ce qui achevera la démonstration.

Pour $m \geq 0$ un calcul analogue comme on l'a vu précédemment donne

$$\begin{aligned}
\sum_{j+k \leq m+4} \left[\int_0^\omega \xi^{2j} \left| \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \tilde{Z}(\xi + i\eta, \theta) \right|^2 d\theta \right] &\leq \sum_{j+k \leq m+4} \xi^{2j} \left\| \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \tilde{Z}(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{L^2([0, \omega])}^2, \\
&\leq \sum_{j+k \leq m+4} \xi^{2j} \left\| \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \tilde{Z}(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{H^k([0, \omega])}^2, \\
&\leq \sum_{j+k \leq m+4} \xi^{2j} \left\| \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \tilde{Z}(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{H^{m+4-j}([0, \omega])}^2 \quad (3.21)
\end{aligned}$$

On applique le lemme (3.3.5) avec $H = m + 2$. Alors il existe $k \geq 1$ tels que pour $|\eta| \leq m + 2$ le second membre de (3.21) soit inférieur ou égal à

$$\begin{aligned}
&C \sum_{0 \leq j \leq m} |\xi|^{2j} \left\| \tilde{l}(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{H^{m-j}([0, \omega])}^2, \\
&\leq C \sum_{0 \leq j \leq m} |\xi|^{2j} \left\| \tilde{l}(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{L^2([0, \omega])}^2, \\
&\leq C \sum_{0 \leq j+k \leq m} |\xi|^{2j} \left\| \frac{\partial^k \tilde{l}}{\partial \theta^k}(\xi + i\eta, \cdot) \right\|_{L^2([0, \omega])}^2, \\
&\leq C \sum_{0 \leq j+k \leq m} |\xi + i\eta|^{2j} \int_0^\omega \left| \frac{\partial^k \tilde{l}}{\partial \theta^k}(\xi + i\eta, \cdot) \right|^2 d\theta.
\end{aligned}$$

D'après la proposition (3.3.3)

$$\leq CR^{2(\eta+m+2)},$$

si on prend le *Max* pour $-m - 2 \leq \eta \leq 0$ on trouve le résultat désiré.

■

3.3 Régularité du solution de Dirichlet pour le Bilaplacien

Si on suppose que l'équation (3.12) n'a pas de solution sur la droite $\text{Im } \tau = -m - 2$, il résulte de la proposition(3.3.4) que $\tilde{Z}(\xi - i(m + 2)\eta, \theta)$ est la transformation de Fourier partielle d'une fonction de $H^{m+4}(B)$. de plus grâce au majoration de la proposition(3.3.4) on a :

$$\begin{aligned} Z(t, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi} \tilde{Z}(t, \theta) d\xi, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\xi - (m+2)i)} \tilde{Z}(\xi - (m+2)i, \theta) d\xi + \sqrt{2\pi} \sum_{-m-2 < \text{Im } \tau < 0} \text{Re } s \left\{ e^{it\tau} \tilde{Z}(t, \theta) \right\}_{\tau=\tau_j}, \end{aligned}$$

où $\{\tau_j\}_{j=1,2,..}$ est une énumération des solutions de (3.12).

Posant

$$\tilde{\varepsilon}(\xi, \theta) = \tilde{Z}(\xi - (m+2)i, \theta),$$

on a alors

$$Z(t, \theta) = e^{(m+2)t} \varepsilon(t, \theta) + s(t, \theta) \quad \text{où } \varepsilon \in H^{m+4}(B).$$

On examine pour commencer la fonction $e^{(m+2)t} \varepsilon(t, \theta)$.

On a $\nu(r \cos \theta, r \sin \theta) = rZ(\log r, \theta)$ le terme en ε donne $r^{(m+3)} \varepsilon(\log r, \theta)$ comme contribution à ν . En effet pour $|\alpha| \leq m + 4$; $D_{x,y}^\alpha [r^{(m+3)} \varepsilon(\log r, \theta)]$ est une combinaison linéaire à coefficients dont les quelles si on pose $\sqrt{x^2 + y^2} \leq R$. Alors sont valeurs absolues soient inférieurs ou égale à $\frac{C}{r^j}$; $m + 3 - |\alpha| \leq j \leq m + 3$ des fonctions $D_{t,\theta}^\beta \varepsilon(t, \theta)$; $|\beta| \leq |\alpha|$.

Si on pose $G_R = G \cap \{r < R\}$ on a clairement

$$\begin{aligned} \int_{G_R} \left| \frac{1}{r^j} D_{t,\theta}^\beta \varepsilon(t, \theta) \right| dx dy &= \int_0^{\log r} \int_0^\omega \left| e^{(j-1)t} D_{t,\theta}^\beta \varepsilon(t, \theta) \right|^2 dt d\theta, \\ &\leq C \left\| D_{t,\theta}^\beta \varepsilon(t, \theta) \right\|_{L^2(G_R)}^2 \quad \text{pour } R \text{ fini.} \end{aligned}$$

On examine maintenant la fonction s , qui donne $rs(\log r, \theta)$ comme contribution à ν c'est une combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$S_j = \left\{ \lim_{\tau \rightarrow \tau_j} (\tau - \tau_j) \tilde{Z}(\tau, \theta) \right\} e^{it\tau_j},$$

si τ_j est un solution de (3.12) de multiplicité un et de la forme

$$\begin{aligned} &\{\sigma_j(\theta) + it\tau S_j(\theta)\} e^{it\tau_j}, \\ S_j(\theta) &= \lim_{\tau \rightarrow \tau_j} (\tau - \tau_j)^2 \tilde{Z}(\tau, \theta), \\ \sigma_j(\theta) &= \lim_{\tau \rightarrow \tau_j} \left\{ (\tau - \tau_j) \tilde{Z}(\tau, \theta) - \frac{S_j(\theta)}{(\tau - \tau_j)} \right\}, \end{aligned}$$

si τ_j est de multiplicité égale à deux.

Selon le cas la contribution à ν est

soit

$$r^{1+i\tau_j} S_j(\theta),$$

soit

$$r^{1+i\tau_j} \{\sigma_j(\theta) + i \log r S_j(\theta)\}.$$

Dans les deux cas en passant à la limite dans (3.9) et (3.10) on voit que S_j est solution de

$$\begin{cases} (\tau^4 + 2\tau^2 + 1) S_j + 2(1 - \tau^2) S_j'' + S_j'''' = 0 \\ S_j(0) = S_j(\omega) = S_j'(0) = S_j'(\omega) = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Et le même raison avec $\left\{ (\tau - \tau_j) \tilde{Z}(\tau, \theta) - \frac{S_j(\theta)}{(\tau - \tau_j)} \right\}$, en tenant compte de (3.22) on obtient

$$\left\{ (\tau^4 + 2\tau^2 + 1) + 2(1 - \tau^2) D_\theta'' + D_\theta'''' \right\} \left\{ (\tau - \tau_j) \tilde{Z}(\tau, \theta) - \frac{S_j(\theta)}{(\tau - \tau_j)} \right\} =$$

$$(\tau - \tau_j) - \frac{\tau^4 - 2\tau_j^4 \tau^2 - 2\tau_j^2}{(\tau - \tau_j)} S_j(\theta) + 2 \frac{\tau^2 - \tau_j^2}{(\tau - \tau_j)}.$$

D'où à la limite lorsque $\tau = \tau_j$

$$\left\{ (\tau^4 + 2\tau^2 + 1) + 2(1 - \tau^2) D_\theta'' + D_\theta'''' \right\} \sigma_j(\theta) = - (4\tau_j^3 + 4\tau_j) S_j + 4\tau_j S_j''.$$

Par conséquent σ_j est solution de

$$\begin{cases} (\tau^4 + 2\tau^2 + 1) \sigma_j + 2(1 - \tau^2) \sigma_j'' + \sigma_j'''' = 4\tau_j S_j'' - 4\tau_j (1 - \tau_j^2) S_j, \\ S_j(0) = S_j(\omega) = S_j'(0) = S_j'(\omega) = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

On a ainsi obtenu le

Théorème 3.3.1

(i) Si $g \in H^{-1}(G)$ de support borné et (3.12) n'a pas de solution sur la droite $\text{Im } \tau = -1$

Alors

$$\nu - \sum_{-1 < \text{Im } \tau < 0}^I r^{1+i\tau_j} S_j(\theta) - \sum_{-1 < \text{Im } \tau < 0}^{II} r^{1+i\tau_j} \{ \sigma_j(\theta) + i \log r S_j(\theta) \} \in H^3(G),$$

où \sum^I est étendu aux τ_j de multiplicité un et \sum^{II} étendu aux τ_j de multiplicité deux et S_j, σ_j étant solution de (3.22) et (3.23); (respectivement).

(ii) Si $g \in H_0^m(G)$ de support borné et (3.12) n'a pas de solution sur la droite $\text{Im } \tau = -(m+2)$

$$\text{Alors } \nu - \sum_{-(m+2) < \text{Im } \tau < 0}^I r^{1+i\tau_j} S_j(\theta) - \sum_{-(m+2) < \text{Im } \tau < 0}^{II} r^{1+i\tau_j} \{ \sigma_j(\theta) + i \log r S_j(\theta) \} \in H^{m+4}(G).$$

La partie singulière décrite ci-dessus est étonnante lorsque g est donnée réelle, donc lorsque ν est réelle. on peut.

Alors réécrire la partie singulière sous une forme réelle.

En effet si $\tau_j = \xi_j + i\eta_j$ est solution de (3.12) dans la bande $0 > \text{Im } \tau > -(m+2)$, $\tau_j^* = -\xi_j + i\eta_j$ l'est aussi.

Et si S_j est solution de (3.22), $\overline{S_j}$ l'est aussi de avec τ_j remplacé par τ_j^* et les termes dans \sum' sont combinaisons linéaires de

$$r^{1-i\eta_j} \cos(\xi_j \log r) \operatorname{Re} S_j(\theta); \quad r^{1-i\tau_j} \sin(\xi_j \log r) \operatorname{Im} S_j(\theta).$$

Par contre d'après Lozi [9] les racines de (3.12) de multiplicité deux sont nécessairement imaginaire pure donc de la forme $\tau_j = i\eta_j$ ce qui fait que les termes dans \sum'' sont

$$r^{1-i\tau_j} \{\sigma_j(\theta) + i \log r \cdot S_j(\theta)\}; \quad S_j \text{ et } \sigma_j \text{ réels.}$$

Remarque 3.3.2

On vérifie aisément que les fonctions $w_j(r, \theta) = r^{1+i\tau_j} S_j(\theta)$ qui interviennent dans le développement de ν sont solutions de

$$\begin{cases} \Delta^2 w_j = 0 & \text{dans } G, \\ w_j = \frac{\partial w_j}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

3.4 Problème de traces

Le théorème (3.3.1) donne la réponse complète au problème seulement si $g \in H^{-1}(G)$ où $g \in H_0^m(G)$

Lorsque $g \in H^m(G)$; $m \geq 1$ on se ramène au cas traité précédemment en résolvant auparavant le problème :

$$\begin{cases} \psi \in H^{m+4}(G) \cap H_0^2(G), \\ \Delta^2 \psi - g \in H_0^m(G). \end{cases} \quad (3.24)$$

On applique ensuite le théorème (3.3.1) avec le second membre remplacé par $g - \Delta^2 \psi$ en remarquant que si g est à support borné on peut en trouvant ψ solution de (3.24) se ramener aussi au cas où $g - \Delta^2 \psi$ est à support borné.

Pour résoudre (3.24) on se ramènera par un changement de variable affine au cas où $\omega = \frac{\pi}{2}$ ou $\omega = \frac{3\pi}{2}$, l'opérateur de Laplace est alors transformé en

$$L = (1 + \gamma^2) D_x^2 - 2\gamma D_x D_y + D_y^2; \quad (\gamma = \operatorname{ctg} \omega).$$

Et partant de $g \in H_0^m(G)$, il s'agit de construire $\varphi \in H^{m+4}(G) \cap H_0^2(G)$ solution de $\Delta^2\psi - g \in H_0^m(G)$ où G correspond maintenant soit à $\omega = \frac{\pi}{2}$ soit à $\omega = \frac{3\pi}{2}$.

D'après Grisvard[4] ce problème admet une solution si et seulement si

$$P_k g(0,0) = 0 ; k \leq m-2,$$

et

$$\int_0^\varepsilon |P_{m-1}g(0,0)|^2 \frac{dx}{x} < +\infty.$$

où P_k est n'importe quel opérateur différentiel homogène de degré k tel que $P_k L^2$ soit combinaison linéaire des opérateurs

$$D_x^{k+4}, D_x^{k+3}D_y, D_y^{k+4}, D_y^{k+3}D_x.$$

c'est-à-dire qu'il existe a_0, a_1, b_0, b_1 non tous nuls tels que

$$a_0 D_x^{k+4} + a_1 D_x^{k+3} D_y + b_0 + D_y^{k+4} + b_1 D_y^{k+3} D_x = P_k(D_x, D_y) L^2(D_x, D_y). \quad (3.25)$$

Il revient au même de demander que

$$q(x) = a_0 x^{k+4} + a_1 x^{k+3} + b_0 + b_1 x = P_k(x, 1) L^2(x, 1).$$

c'est-à-dire que q soit divisible par $L^2(x, 1)$, donc que q ait pour racines doubles les racines de $L(x, 1)$ qui sont $(\sin\omega) e^{\pm i\omega} = Z$. Compte tenu de l'identité

$$q'(x) = (k+4) a_0 x^{k+3} + a_1 (k+3) x^{k+2} + b_1.$$

on obtient pour a_0, a_1, b_0, b_1 le système d'équations suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 Z^{k+4} + a_1 \bar{Z}^{k+3} + b_0 + b_1 Z = 0, \\ a_0^{k+4} \bar{Z} + a_1 \bar{Z}^{k+3} + b_0 + b_1 \bar{Z} = 0, \\ a_0 (k+4) Z^{k+3} + a_1 (k+3) Z^{k+2} + b_1 = 0, \\ a_0 (k+4) \bar{Z}^{k+3} + a_1 (k+3) \bar{Z}^{k+2} + b_1 = 0. \end{array} \right.$$

dont le déterminant est

$$D = \begin{bmatrix} Z^{k+4} & Z^{k+3} & 1 & Z \\ \bar{Z}^{k+4} & \bar{Z}^{k+3} & 1 & \bar{Z} \\ (k+4) \bar{Z}^{k+3} & (k+3) Z^{k+2} & 0 & 1 \\ (k+4) \bar{Z}^{k+3} & a_1 (k+3) \bar{Z}^{k+2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} D &= -(k+4)(k+3) |Z|^{2k+4} (Z - \bar{Z})^2 + \bar{Z}^{2k+6} - Z^{2k+6} + (k+3) |Z|^{2k+4} (Z^2 - \bar{Z}^2) - 2m |Z|^{2k+6} \\ &= (\sin \omega)^{2k+6} 4 \{ (k+4)(k+2) \sin^2 \omega - \sin(k+2) \omega \sin(k+4) \omega \}. \end{aligned}$$

Lemme 3.4.1

On a $D > 0$ pour tout $\omega \in]0, \omega[$

On déduit qu'il n'ya aucun opérateur P_k vérifiant (3.25) et par conséquent le problème (3.24) admet

toujours une solution.

Ce résultat joint au point (ii) du théorème (3.3.1) fournit le

Théorème 3.4.2

Le point (ii) du théorème (3.3.1) reste inchangé si $g \in H^m(G)$.

3.5 Régularité des solutions de Navier-Stocks

D'après Seif [12] pour $\omega \in]0, \pi[$ les racines de (3.12) vérifiant $\eta > \frac{\pi}{\omega}$; on déduit que pour $g \in H^m(G)$ on a $\nu \in H^{m+4}(G)$ pourvu que $m+4 < \frac{\pi}{\omega} + 2$. revenant au problème de Stokes (E) on déduit que pour $\vec{f} \in H^{m+1}(\Omega)$ on a $v \in H^{m+3}(\Omega)$ pourvu que $m+3 < \frac{\pi}{\omega} + 1$,

où ω est l'ouverture du plus grand angle de Ω .

Théorème 3.5.1

Pour $\vec{f} \in H^m(\Omega)$ on a (\vec{v}, P) solution de (E) dans $H^{m+2}(\Omega) \times H^{m+1}(\Omega)$ pourvu que $m < \frac{\pi}{\omega} - 1$,
où ω l'ouverture du plus grand angles de Ω .

En particulier

*) $(\sigma_{ij}) \in \mathcal{H}^{m+1}(\Omega)$ et u_1, u_2 dans $H^{m+2}(\Omega)$ si Ω est convexe,

**) $(\vec{v}, P) \in H^{m+3}(\Omega) \times H^{m+2}(\Omega)$ si les angles de Ω sont $< \frac{\pi}{2}$.

***) Le cas limite est vrai également car l'équation (3.12) n'a pas de solution avec $\text{Im } \tau = -2$.

3.6 Régularité des solutions du système de l'élasticité linéaire

D'après Seif [12] pour $\omega \in]0, \pi[$ les racines de (3.12) vérifiant $\eta > \frac{\pi}{\omega}$; on déduit que pour $h \in H^m(G)$ on a $H \in H^{m+4}(G)$ pourvu que $m + 4 < \frac{\pi}{\omega} + 2$. Revenant au problème de Neumann pour le système de l'élasticité (E). Des relations (2.14), entre les contraintes $\sigma_{ij}(u)$ à la fonction d'Airy H , et de loi de Hook on en déduit que pour $f \in H^m(\Omega)$ ($m \geq 0$) on a $\sigma_{ij} \in \mathcal{H}^{m+1}(\Omega)$ et u_1, u_2 dans $H^{m+2}(\Omega)$ pourvu que

$$m + 3 < \frac{\pi}{\omega} + 2$$

où ω est l'ouverture du plus grand angle de Ω .

Théorème 3.6.1

Pour $\vec{f} \in H^m(\Omega)$ on a σ_{ij} , pour i, j 1 à 3, solutions de (E) dans $\mathcal{H}^{m+1}(\Omega)$ pourvu que

$m < \frac{\pi}{\omega} - 1$. De même pour les déplacements on a u_1, u_2 dans H^{m+2} pourvu que $m < \frac{\pi}{\omega} - 1$

où ω l'ouverture du plus grand angles de Ω .

En particulier

*) $(\vec{v}, P) \in H^{m+2}(\Omega) \times H^{m+1}(\Omega)$ si Ω est convexe

**) $u_1, u_2 \in H^{m+3}(\Omega)$, $\sigma_{ij} \in \mathcal{H}^{m+2}(\Omega)$ si les angles de Ω sont $< \frac{\pi}{2}$.

***) Le cas limite est vrai également car l'équation (3.12) n'a pas de solution avec $\text{Im } \tau = -2$.

Bibliographie

- [1] **S. AGMON**, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG, Estimates Near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, communications on pure & applied Maths 12, 1959, p 623-727. ET II même Journal 17, 1964 P. 35-92
- [2] **L. SCHWARTZ**, Méthodes Mathématiques pour les sciences physique . Hermann, 1965
(Collection Enseignement des sciences)
- [3] **L. SCHWARTZ**, Théories des distributions. Hermann, 1966.
- [4] **F. TREVES**, Topological vector spaces, distribution kernels. Academic-press, New York, 1967.
- [5] **NECAS, J**, Les méthodes directs en théorie des équations elliptiques, Masson, Paris, 1967
- [6] **Mrie-Thérèse Lacroix- Sonrier**, Distributions. Espaces de Sobolev. Applications.
- [7] **P. A. RAVIART J. M. THOMAS**, Inroduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson paris New york Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1983.
- [8] **G. DUVAUXT. J. L. LIONS**, Les inéquations en mécanique et en physique Dunod Paris 1972.
- [9] **R. TEMAM**, Navier-Stoks equations, North-Hlland (2^e edition, 1979) .
- [10] **L. CATABRIGA**, Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stoks.
Rend. Sem. Mat. Padova, 1961.
- [11] **LADYZHENSKAYA O. URALTSEVA N**, Les équations linéaires et quasi-linéaires de type elliptique, Dunod 1968.
- [12] **V. A. KONDRATIEV**, Boundary problems for elleptic equation in domains with conical or angular points, Trans. MoscowMaths. SOS. 1967
- [13] **P. GRIVARD**,

- i) Boundary value problem in plan polygons. Instructions use, E.D.F., Bulletin de la direction des études et Recherches, serie C, Mathématique no.1, 1986.
- ii) Solutions singulières du système de Lamé, preprint n° 1987.
- [14] **B. MEROUANI**, Etude du système de l'élasticité linéaire dans un polygone, régularité et singularités, Magistère, Université de Constantine, Algérie, mars 1981.
- [15] **H. BLUM ET RANNACHER**, on the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners, Maths. Methods. App.Sc., 2 (1980) .
- [16] **R. LOZI**, Acomputing method for bifurcation bough of nonlinear eigen value problems, Bull. A.M.S., vol.81,N0 6, 4975.
- [17] **R. LOZI**, Résultats numériques de régularité du problème de Stokes et du laplacien itéré dans un polygone, R.A.I.R.O, Analyse numérique, volu.12. [3].
- [18] **M. A. MOUSSAOUI**, Etude, dans les espaces de Holder, des problèmes elliptiques dans un secteur plan et, dans les espaces de Sobolev d'un problème à dérivée oblique dans un polygone plan, Thèse de Doctorat d'état à l'université de Nice (France) , 1977.
- [20] **D.TENIOU**, Divers problèmes théoriques et numériques liés au système de l'élasticité dans des domaines non réguliers, Thèse de doctorat d'état, Université de Rennes I, 1967.
- [21] **GAGLIARDO**, Characterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili , Rendiconti del seminario.
- [22] **V. MIKHAILOV**, Equations aux dérivées partielles traduction française édition Mir 1980
- [23] **B. MEROUANI**, Comportements singulier des solutions du système de l'élasticité dans un polygone, Thèse de doctorat d'état, Université de USTHB. Alger, Novembre 1990.
- [24] **B. MEROUANI**, Quelques problèmes aux limites pour le système de lamé dans un secteur plan, C.R.A.S., t.304, série I, no.13,1987.
- [25] **M.DILMI, B. MEROUANI, and H. BENSERIDI**, Problem of contact without friction-Dirichlet for Laplace and Lamé systems in polyhedron, Far East J. Appl. Math. 26(1) (2007) , 45-57.